Université Paris Nanterre

200 av. de la République
92001 Nanterre Cedex
www.parisnanterre.fr

École doctorale 139 :
Connaissance, langage, modélisation
EA4415 Thermiques Interfaces Environnement (LTIE)

Membre de l'université Paris Lumières

Eric Monier-Vinard

Contribution à la modélisation thermique nodale d'une carte électronique et de ses composants

Apport des méthodes d'optimisation stochastiques évolutionnaires

Thèse présentée et soutenue publiquement le 18/12/2020
en vue de l'obtention du doctorat d'Energétique, génie des procédés de l'Université Paris Nanterre
sous la direction de M. Najib Laraqi (Université Paris Nanterre)

Jury :

Rapporteur :	M. François LANZETTA	Professeur, Université de Belfort
Rapporteur :	M. Tahar LOULOU	Professeur, Université de Bretagne Sud
Membre du jury :	M. Said ABBOUDI	Professeur, Université de Belfort
Membre du jury :	M. Jean-Gabriel BAUZIN	Maitre de conférences, HDR, Université Paris Nanterre
Membre du jury :	M. Najib LARAQI	Professeur, Université Paris Nanterre

Remerciements

Je tiens à remercier les éminents scientifiques qui ont rendu possible l'élaboration de ma thèse et le bon déroulement de sa soutenance :

Le professeur Najib Laraqi, qui a bien voulu accepter de m'accompagner dans mon travail et a été tout au long de ces années un guide attentionné. Grâce à lui, j'ai pu développer un esprit critique et prendre le recul nécessaire à la pratique des sciences. Non content de m'épauler au niveau scientifique, il m'a facilité l'accès au milieu de la recherche appliquée. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Messieurs François Lanzetta, professeur à l'Université de Bourgogne Franche-Comté, et Tahar Loulou, professeur à l'Université Bretagne Sud, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de ma thèse et de consacrer à son analyse une partie de leur temps.

Monsieur Said Abboudi, professeur à l'Université de Belfort, qui a présidé mon jury de thèse, et dont les remarques constructives et les commentaires chaleureux m'ont été précieux.

Monsieur Jean-Gabriel Bauzin, maitre de conférences à l'Université Paris Nanterre, pour sa présence au sein du jury et pour l'attention bienveillante qu'il a portée à mon travail.

Mes collaborateurs et étudiants au premier rang desquels Messieurs Julien Dufrenne, Valentin Bissuel, Cheikh Dia, nhat-Minh Nguyen et Brice Rogié, pour leurs contributions et leur soutien.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'y ajoutais ceux que je dois aux membres de ma famille pour leur patiente et affectueuse sollicitude.

Thématique

La modélisation commence dès lors que l'on envisage de prédire le comportement d'un système.

Pour résoudre un problème physique, tout ingénieur est confronté à la mise en œuvre d'approximations, lesquelles vont transformer un système réel en une maquette numérique.

Les degrés d'approximation retenus déterminent la pertinence de la solution développée.

Quelle confiance doit-on lui accorder ? de par sa nature, tout modèle numérique est faux. Toutefois, celui-ci joue un rôle important pour parfaire la compréhension de comportement complexe non intuitif.

Un modèle numérique n'étant pas une vraie représentation du système, sa vérification est impossible. De ce fait, il faut être conscient que la comparaison des résultats du modèle à des données expérimentales ne préjuge en rien de sa véracité dans des situations différentes.

Partant ces postulats, le travail réalisé dans le cadre de cette thèse s'attache à créer des modèles capables de reproduire au mieux certaines de ces situations.

Ainsi, si l'on connaît les paramètres du système, l'évaluation des sorties est menée à partir des données entrées. C'est par exemple le cas de la modélisation analytique. Ce type de modèle peut être considéré comme une « boite blanche ».

A l'opposé, il est envisageable d'exploiter des données issues des sorties au moyen de méthodes directes ou méta-heuristiques en fonction du degré de complexité. Dans ce cas, la forme du modèle dépend de données d'entrée préfixées et des données de sortie calculées. Ces dernières vont constituer les exemples d'apprentissage. Le problème d'approximation vise à déterminer, avec l'erreur la plus faible possible, le paramétrage d'une fonction de transfert reliant les entrées et les sorties sous une forme connue. On peut alors parler alors de « boite grise ».

Une autre voie consiste à identifier les données d'entrée manquantes à partir d'un modèle à priori connu sur la base de connaissances antérieures. Dans ce cas, il est nécessaire d'appréhender la pénalité du modèle choisi. Les causes d'un phénomène sont retrouvées à partir des observations expérimentales de ses effets, à savoir les sorties. Ce type de modèle est assimilable à une « boite noire ».

Ces diverses approches qui ont toutes pour objectif d'améliorer la prédiction des contraintes thermiques vues par les composants électroniques ont exploitées dans mon travail.

En définitive, ce travail de recherche promeut une solution capable de s'affranchir des schémas de construction mathématique préétablis au moyen de méthodes d'optimisation non conventionnelles. Celles-ci sont ici inspirées de la nature. Les approches retenues apprennent pas à pas, ou plutôt de générations en générations de l'évolution de leurs erreurs, afin de tendre vers la meilleure approximation. A défaut d'être exacte, la solution identifiée se doit d'être, malgré tout, représentative des phénomènes physiques observés.

« La seule véritable erreur est celle dont on ne retire aucun enseignement » (J. W. Powell)

Résumé

En raison d'un accroissement incessant des densités de puissance et d'une compacité toujours plus accentuée, la conception d'un équipement électronique est de plus en plus complexe à appréhender. Du point de vue thermique, le défi consiste à pallier les très fortes concentrations de la chaleur afin de minimiser l'élévation de leurs températures. Ainsi, la température interne des composants électroniques constitue le cœur d'une conception thermique. Au-delà d'une limite, celle-ci a pour conséquence de réduire les performances du système ainsi que sa durée de vie.

Pour évaluer les options susceptibles de fournir une distribution optimale des températures, la simulation, quelle que soit sa forme, est devenue une nécessité. Elle est cruciale lors des phases préliminaires d'un développement lorsque les choix initiaux d'une conception peuvent être plus facilement réorientés. Néanmoins, la simulation thermique d'un équipement se heurte à la capacité à modéliser d'une manière réaliste tous les éléments de sa géométrie ainsi que les phénomènes physiques mis en jeu.

Le concepteur est ainsi confronté à un dilemme entre le degré d'approximation et le temps de résolution de son modèle. Toutefois les transferts thermiques d'un élément sensible d'un modèle numérique peuvent être retranscrits sous la forme d'un réseau nodal reproduisant le comportement original. Cette approximation, plus aisément calculable, revient à définir un nombre réduit de zones considérées isothermes, lesquelles constitueront les nœuds du système, et les liens fictifs les interconnectant.

De plus, le modèle développé doit être capable de prédire avec une bonne précision le comportement thermique d'un composant complexe indépendamment de l'environnement dans lequel il est placé. Ainsi, cette analyse thermique prédictive doit s'appuyer sur des pratiques reconnues, visant à être standardisées.

Le travail aborde dans un premier temps la comparaison et la mise en œuvre de méthodologies dédiées à la génération de modèles nodaux pour de multiples composants électroniques. Il expose ensuite la création de modèles analytiques destinés à la modélisation d'une carte électronique en vue de fournir une interprétation réaliste de son comportement thermique en phase de pré-dimensionnement.

Mots clés :

Composant électronique, Réseaux nodaux, technique d'identification, algorithmes génétiques, Modélisation analytique

Title

Contribution for the creation of nodal thermal model of electronic components and printed circuit board using stochastic evolutionary optimization.

Abstract

Electronic devices are becoming smaller, denser, and so harder to design. Keeping them cool is more and more a cutting-edge challenge, especially when components operate closer and closer to their threshold limit. So, the effects of power density must be efficiently managed to prevent components suffering premature defects.

More than ever, minor miscalculations of thermal safety margins may drastically affect electronic system performances. So, relevant evaluations of numerous critical component temperatures are therefore mandatory for the early identification of thermal management issues when corrective actions can be easily undertaken.

However, the use of board-level or system-level of thermal simulations, to ensure valuable temperatures minimization, still faces the challenge to model, in a realistic way, all the three-dimensional geometries of multiple parts as well as the involved physical phenomena. Despite continued advances in computation, each designer must resolve the dilemma of finding an appropriate balance between accuracy and fast simulation response.

The research of more calculable models can be achieved using the much more exploitable concept of a thermal RC circuit, which can be seen as a compact calculation form. This useful approach requires defining a reduced number of isothermal zones that will constitute the nodes of the system and on the other hand the links that interconnect them. Beyond that, the developed models must be able to approximate the thermal behaviour of complex components regardless of the cooling environment in which they are placed.

At first, the presented work describes the comparison and the setup of methodologies dedicated to the building of nodal models of various electronic components. Then a guideline for creating analytical models for multi-layer electronic boards to supply the most realistic interpretation of its thermal behaviour at an early stage of the design is provided.

Keywords:

Compact Thermal Compact model, black-box model, nodal network, meta-heuristic optimisation, population-based algorithms, genetic algorithm, analytical thermal analysis, multi-layer Printed Circuit Board; multi-chip module.

Tables des matières

PLAN DU MEMOIRE 1

Chapitre I 2

A. Le besoin industriel 3

A1. Mon activité 3

A2. Mes thématiques de recherche 3

A3. La création de modèles thermiques nodaux de composants 3

A4. L'établissement de modèles analytiques de carte électronique 4

A5. Le développement de concepts brevetés 5

A6. La définition de leur imbrication 5

B. Démarche scientifique et technique 7

B1. Le développement de l'équipe scientifique 7

B2. La participation des travaux de recherche européens 7

B3. Les collaborations universitaires nationales 8

B4. La dissémination des avancées 9

B5. Schéma chronologique des publications 9

B6. Encadrement de stages et d'apprentissage 10

Chapitre II 11

C. Préambule 12

C1. Les défis de la conception robuste des cartes électroniques 12

D. Brève introduction à la thermique de l'électronique 13

D1. La miniaturisation des puces électroniques 13

D2. La miniaturisation des composants électroniques 20

D3. Performances thermiques des circuits intégrés 27

D4. Les composants passifs 30

D5. Diversité des composants CMS 32

D6. Notion de défaillance des composants passifs 33

D7. Compacité des nouveaux composants passifs 33

D8. Modélisation des composants électroniques – État des besoins 34

E. La densification des cartes électroniques 35

E1. La technologie des substrats des cartes électroniques 35

E2. La modélisation thermique d'une carte électronique 40

E3. Modélisation des cartes électroniques – L'ambition 42

Chapitre III 43

F. État de l'art - Définition du concept d'un modèle nodal 45

F1. Les principaux aspects de notre besoin initial 45

F2. Des approches peu déterminantes 47

F3. Une approche concourante - Le projet européen DELPHI....49
F4. Transformation de notre approche initiale - Optimisation déterministe....51
F5. Optimisation déterministe avec contraintes....57
F6. Optimisation stochastique - Choix d'une technique d'identification adéquate....59
F7. Processus de recherche d'un algorithme évolutionniste....62
F8. Appropriation d'un algorithme génétique....64
F9. Pertinence de la topologie des réseaux nodaux de type DELPHI....74
F10. Représentativité d'un modèle numérique....77
F11. Définition des propriétés thermiques pour créer un modèle numérique....78
F12. Standardisation de la méthodologie DELPHI....81
F13. Bilan des avancées du standard JEDEC....85
G. Extension du spectre de la méthodologie DELPHI....86
G1. Indépendance vis-à-vis de la nature du semi-conducteur....86
G2. Application à divers types de boitiers électroniques....89
G3. Initiative sur le couplage de réseaux nodaux....90
G4. Considération de multiples sources de chaleur....92
G5. Extension aux modules électroniques intégrant de multiples fonctions....95
G6. Sous-structuration des modèles intégrant de multiples sources de chaleur....97
G7. Problématique des composants passifs....98
G8. Caractérisation expérimentale d'un module à multiples composants....101
G9. Modélisation des phénomènes électromagnétiques propres aux inductances....105
G10. Investigation sur les propriétés thermiques des matériaux magnétiques....106
G11. Une première projection au-delà des composants....106
G12. Industrialisation d'un générateur de modèle pour composant multi-source....110
Chapitre IV....111
H. Établissement d'un modèle nodal temporel....113
H1. Élaboration analytique simplifiée d'un réseau temporel....113
H2. Construction numérique d'un réseau temporel....117
H3. L'apport de l'analogie électrique pour la construction d'un réseau temporel....119
H4. Forme généralisée d'un réseau temporel unidirectionnel....121
H5. L'analyse fréquentielle....121
H6. Les formes conventionnelles des réseaux RC unidirectionnels....122
H7. Recombinaison des réseaux....132
H8. Reconstruction physique des réseaux RC unidirectionnels....133
H9. La réduction d'ordre des réseaux RC unidirectionnels....134
H10. Manipulation des réseaux RC : l'emploi des quadripôles....141
H11. Reconstruction numérique des réponses temporelles....145
H12. L'utilisation des méthodes d'optimisation stochastique....146
H13. Réduction de modèle à multiples entrées et à multiples sorties....148
H14. Concepts préexistants de création d'un réseau nodal multidirectionnel....153

H15. Constat sur l'état de l'art des modèles nodaux dynamiques 154
I. Au-delà de la méthodologie DELPHI 155
I1. Mise en œuvre d'un réseau multidirectionnel temporel 155
I2. Pertinence des algorithmes génétiques pour la génération de réseaux RC 157
I3. Des modèles dynamiques destinés aux composants intégrant deux puces 157
I4. Discussion sur la représentativité des modèles tridimensionnels 158
I5. Des modèles dynamiques pour des composants intégrant de multiples puces 158
I6. Caractérisation d'un module intégrant de multiples composants 159
I7. Caractérisation expérimentale de modules intégrant de multiples puces 161
J. Rétrospective des avancées et des verrous à lever 166
J1. Nouvelles méthodologies mises en œuvre 166
J2. Énoncé des verrous scientifiques restant à lever 166
Chapitre V 168
K. Établissement de solutions analytiques 170
K1. Premier développement d'une approche nodale de composant isolé 170
K2. Premier développement d'un modèle nodal pour de multiples composants 179
K3. Formalisation d'un concept pour la modélisation des cartes conventionnelles 190
K4. Modélisation de multiples sources de chaleur 223
K5. Nouvelles approches dédiées aux transferts intrinsèques au substrat 229
K6. Au-delà de la modélisation des substrats 240
K7. Bilan des avancées réalisées dans l'établissement de modèles analytiques 244
K8. Programmation des futurs travaux envisagés 244
CONCLUSION 246
Chapitre VI 247
L. Principaux acronymes 250
L1. Intitulé des conférences 250
L2. Intitulé des projets Européens 250
L3. Intitulé des organismes de recherche 250
L4. Intitulé des sigles 250
M. Nomenclature 251
N. Références externes citées 253
N1. Données technologiques 253
N2. Normalisation pour la caractérisation des composants électroniques 253
N3. Modélisation des composants électroniques 253
N4. Modélisation des cartes électroniques 257
O. Principales publications 259
O1. Brevets 259
O2. Conférences nationales et internationales avec actes et comité de lecture 259
O3. Revues scientifiques internationales avec comité de lecture 261

O4. Thèse de doctorat 262
P. Annexes 263
P1. Descriptif des dimensions caractéristiques de divers composants 263
P2. Décomposition nodale d'un boitier « Small Outline » 264
P3. Définition des résistances thermiques de forme prismatique 267
P4. Approximation d'un réseau par les méthodes d'optimisation directes 268
P5. Approximation d'un réseau thermique par la méthode « simultanée » 271
P6. Mise en œuvre d'un algorithme génétique 274
P7. Approximation d'un réseau thermique par les algorithmes génétiques 277
P8. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 via les algorithmes génétiques 279
P9. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 doté d'une puce AsGa 281
P10. Approximation du réseau nodal d'un QFN48 282
P11. Définition du coefficient de corrélation 283
P12. Variabilité de l'angle de diffusion de la chaleur 283
P13. Fonction de transfert temporel d'ordre 2 284
P14. Expression matricielle de quadripôles usuels 284
P15. Table de Tagushi 286
P16. Formulation multi-variable de Tagushi d'une résistance thermique 289
P17. Principe de l'établissement d'un modèle analytique 297
P18. Pertinence de la modélisation analytique d'un substrat anisotrope 305
P19. Formulation pour les échanges thermiques latéraux 309
P20. Formulation du calcul des propriétés de l'air 310
P21. Modélisation d'une source de chaleur cylindrique 310
P22. Caractérisation analytique d'une carte munie d'un capot 311
P23. Multiples sources encastrées 312
P24. Établissement du modèle analytique d'une source volumique dans un substrat 312

Liste des figures

Figure 1 : Concept de minimisation des modèles 3
Figure 2 : Concept de l'approche analytique nodale 4
Figure 3 : Atelier de conception thermique dédié aux cartes électroniques 6
Figure 4 : Présentation de l'outil « évaluateur de carte » 7
Figure 5 : Évolution de la dissipation des transistors en fonction de la taille de gravure 13
Figure 6 : Concept schématique d'un transistor « Metal Oxide Semiconductor » 14
Figure 7 : Vue de la gravure surfacique d'un transistor à double grille 15
Figure 8 : Structure élémentaire d'un transistor MESFET GaAs 15
Figure 9 : Structure élémentaire d'un transistor HEMT GaN 16
Figure 10 : Gamme de performances des matériaux semi-conducteurs 16
Figure 11 : Photographie d'une conception d'une puce électronique HEMT-GaN-0.25 17
Figure 12 : Évolution de la résistance thermique d'un étage d'amplification d'un MESFET GaAs 17
Figure 13 : Variation de la résistance thermique pour un HEMT-GaN 18
Figure 14 : Matérialisation des effets du vieillissement thermique d'un circuit intégré 19
Figure 15 : Illustration de la densification des fonctions des composants électroniques 20
Figure 16 : Évolution des technologies de report des composants 20
Figure 17 : Évolution des technologies des composants à broches externes en « L » 21
Figure 18 : Évolution des technologies de connexion des composants électroniques 21
Figure 19 : Réduction continue des épaisseurs des composants électroniques 22
Figure 20 : Réduction continue des épaisseurs des composants électroniques 22
Figure 21 : Illustration de la minimisation des pas d'interconnexion électrique 22
Figure 22 : Boitiers électroniques favorisant un transfert thermique indépendant de la carte 23
Figure 23 : Interconnexion par microbilles d'une puce électronique 23
Figure 24 : Évolution du nombre d'interconnexion boitier-carte 24
Figure 25 : Boitiers électroniques à multiples semi-conducteurs 24
Figure 26 : Assemblage de composants de type « Ball Grid Array » 25
Figure 27 : Exemple de regroupement de multiples types de « packaging » 25
Figure 28 : Assemblage de multiples types de « packaging » 25
Figure 29 : Principe de conception d'une puce dite « 3D-IC » 26
Figure 30 : Principe de conception d'un boitier dit « 3D-IC » 26
Figure 31 : Chronologie du développement des boitiers de protection des puces électroniques 26
Figure 32 : Exemple de carte de test pour la caractérisation d'un composant 27
Figure 33 : Métrique thermique d'un boitier de type « Ball Grid Array » (1990s) 28
Figure 34 : Métrique thermique d'un boîtier de type « Chip Scale Package » (2000s) 28
Figure 35 : Description géométrique du BGA208 expérimenté 29
Figure 36 : Exemple de résistance CMS couche mince 30
Figure 37 : Représentation des chemins thermiques au sein de l'assemblage 30
Figure 38 : Véhicule de test pour la caractérisation des résistances électriques en boitier CMS 31
Figure 39 : Influence des transferts thermiques par l'intermédiaire des pistes 31
Figure 40 : Conception des inductances miniaturisées dites planaires 32
Figure 41 : Effets du vieillissement thermique d'une inductance de puissance 33
Figure 42 : Concept d'un transformateur à enroulements plats 34

Figure 43 : Carte industrielle conventionnelle....35
Figure 44 : Foisonnement des composants d'une carte électronique industrielle....36
Figure 45 : Enchevêtrement des interconnexions électriques du substrat d'une carte électronique....36
Figure 46: Couverture métallique de 3 couches du substrat d'une carte électronique....36
Figure 47 : Exemple de liaison thermique des composants électroniques de type QFN....37
Figure 48 : Illustration de l'utilisation de couches à micro-connections....38
Figure 49 : Présentation de formats standardisés pour carte électronique....39
Figure 50 : Concept d'encastrement de composants actifs et passifs dans une carte électronique....40
Figure 51 : Évaluation des coefficients d'échange thermique en pure convection....41
Figure 52 : Ordre de grandeur des coefficients d'échange thermique équivalents....41
Figure 53 : Limites des échanges thermiques en convection libre en position verticale....42
Figure 54 : Représentation tridimensionnelle d'un composant électronique....45
Figure 55 : Décomposition intuitive des transferts thermiques....46
Figure 56 : Exemple de graphe décrivant l'évacuation de la chaleur *Q*....46
Figure 57 : Les modèles nodaux élémentaires dits « 2R »....48
Figure 58 : Visualisation de la température de surface d'un composant électronique....49
Figure 59 : Exemple de subdivisions des surfaces supérieure et inférieure d'un boitier....51
Figure 60 : Concept de graphe possédant des résistances reliant les surfaces externes....52
Figure 61 : Application pour un réseau composé de 3 nœuds....53
Figure 62 : Visualisation des erreurs relatives pour les 6 nœuds du réseau MS....57
Figure 63 : Squelette d'un algorithme évolutionniste....62
Figure 64 : Principe du croisement des gènes de deux parents....63
Figure 65 : Principe de la mutation d'un individu....64
Figure 66 : Visualisation des erreurs relatives pour les 6 nœuds du réseau GA....70
Figure 67 : Représentation tridimensionnelle du composant modélisé numériquement....72
Figure 68 : Représentation tridimensionnelle de la forme du modèle réduit....73
Figure 69 : État des divergences du réseau nodal dérivé du modèle numérique....73
Figure 70 : Visualisation des erreurs moyennes pour les 6 nœuds du réseau du QFN16....74
Figure 71 : Visualisation des erreurs de réseaux simplifiés sans surfaces d'échange latérales....75
Figure 72 : État de toutes les divergences des réseaux nodaux simplifiés....77
Figure 73 : Exemple de divers degrés de représentativité du modèle numérique....77
Figure 74 : Forme simplifiée d'un fil reliant la puce à une broche....78
Figure 75 : Incertitude du modèle détaillé du QFN16 vis à vis des données sur ses matériaux....79
Figure 76 : Incertitude du modèle détaillé pour une condition de Dirichlet à sa base....79
Figure 77 : Assemblage granulaire de N particules....80
Figure 78 : Processus de création d'un modèle nodal selon le standard Jedec-Jesd15-4....81
Figure 79 : Précision du réseau nodal « JEDEC » dérivé d'un modèle numérique....82
Figure 80 : Comparaison de la distribution spatiale des conditions aux limites....83
Figure 81 : Précision du réseau nodal « DELPHI » pour les 38 scenarii du standard JEDEC....84
Figure 82 : Comparaison des erreurs relatives moyennes pour les 6 nœuds du réseau du QFN16....84
Figure 83 : Évolution de la conductivité thermique en fonction de la température....86
Figure 84 : Incertitude du modèle détaillé pour un semi-conducteur en arséniure de gallium....87
Figure 85 : Erreurs relatives moyennes des températures des 6 nœuds du réseau....88
Figure 86 : Erreurs relatives moyennes des flux quittant les 5 nœuds externes....88

Figure 87 : Description du couplage de deux réseaux nodaux....91
Figure 88 : Simulation d'un transistor MESFET dans un boitier QFN48....93
Figure 89 : Concept d'un empilage pyramidal de deux puces dans un boitier QFN48....94
Figure 90 : Investigation initiale du comportement thermique d'un boitier SiP....95
Figure 91 : Description du découpage de la face inférieure du boitier SiP étudié....96
Figure 92 : Principe de sous-structuration du modèle numérique d'un boitier SiP....98
Figure 93 : Modélisation thermoélectrique d'une inductance miniaturisée....99
Figure 94 : Représentation tridimensionnelle de la forme du modèle compact de l'inductance....100
Figure 95 : Vision de la Carte de démonstration du module SiP....101
Figure 96 : illustration de la phase d'ajustement du modèle numérique....101
Figure 97 : Descriptif des zones du boitier observées à Q=3.31W et T_A=19°C....102
Figure 98 : Descriptif du regroupement des « meilleures » zones isothermes....103
Figure 99 : Vision sur la cartographie infrarouge des zones à valider....104
Figure 100 : Vision de la carte de démonstration d'une fonction électronique classique....105
Figure 101 : Comportement magnéto-électrique de l'inductance pour un courant de 2.6A à 2MHz....106
Figure 102 : Carte électronique de test à réduire sous une forme nodale....107
Figure 103 : Interprétation de conductivité thermique locale d'un substrat multicouche....108
Figure 104 : Visualisation des gradients thermiques fournis par un substrat discrétisé....109
Figure 105 : Empilage typique d'une structure de refroidissement....113
Figure 106 : Schématisation du transfert électrique d'un signal....113
Figure 107 : Schématisation de la juxtaposition des angles de diffusion au sein d'une structure....114
Figure 108 : Représentation de l'approximation recherchée....114
Figure 109 : Définition des conditions aux limites appliquées au modèle analytique 3D....115
Figure 110 : Visualisation de l'évolution de l'angle de diffusion pour diverses géométries....116
Figure 111 : Comparaison des prédictions des trois approches de modélisation....116
Figure 112 : Evolution de l'angle de diffusion en fonction du nombre de Biot....117
Figure 113 : Evolution temporelle des températures internes d'un composant électronique....118
Figure 114 : Principe de la loi des mailles de Kirchhoff....119
Figure 115 : Schématisation d'un réseau Cauer à 2 cellules....122
Figure 116 : Schématisation d'un réseau de type Foster à 2 cellules....123
Figure 117 : Exemple d'identification décliné dans les travaux d'Ousten....126
Figure 118 : Identification du réseau unidirectionnel du DFN12 composé de 3 cellules RC....128
Figure 119 : Délimitation des zones Gaussiennes du réseau du DFN12 à 3 cellules RC....128
Figure 120 : Réponse temporelle du réseau de Foster reconstruit....130
Figure 121 : Identification du réseau de Foster d'un signal mesuré du DFN10....130
Figure 122 : Visualisation des quatre pics caractérisant le réseau de Foster du DFN10....131
Figure 123 : Validité de la recombinaison des réseaux de Foster d'ordre 2 et 3....133
Figure 124 : Confrontation des réponses temporelles des réseaux de Foster et de Cauer....133
Figure 125 : Comparaison des réponses réduites de la fonction de Hutton....136
Figure 126 : Représentativité des réponses réduites de la fonction de transfert d'un composant....136
Figure 127 : Diagramme de Nyquist montrant la stabilité du système....139
Figure 128 : Concept d'un quadripôle....141
Figure 129 : Exemple d'un quadripôle élémentaire....142
Figure 130 : Principe d'une disposition en cascade de deux quadripôles....142

Figure 131 : Visualisation des réponses temporelles d'un réseau de Cauer d'ordre 2 144
Figure 132 : Validation des réponses temporelles numériques d'un réseau de Cauer d'ordre 2 146
Figure 133 : Visualisation de la transformation d'un système SiSo de380 éléments 151
Figure 134 : Exemple d'approximation du comportement d'un système (données LMEE) 152
Figure 135 : Processus lié à la création d'un modèle nodal dynamique 155
Figure 136 : Module électronique équipé de 3 semi-conducteurs 159
Figure 137 : Module électronique équipé de 3 semi-conducteurs 159
Figure 138 : Exemple de modes propres du composant DFN12 160
Figure 139 : Erreurs en fonction du nombre de modes pour les 49 scenarii DELPHI+1 160
Figure 140 : Schéma de la puce thermique TEMP-01 162
Figure 141 : Mise en place d'une puce thermique au sein d'un boitier 163
Figure 142 : Vue de face (gauche) et schéma (droite) de la carte de test n°8 163
Figure 143 : Variation de la température interne d'un DFN10 sur une plaque froide à 25°C 164
Figure 144 : Processus de création d'un DCTM proposé par Brice Rogié 165
Figure 145 : Vision des interactions entre la forme du composant et la vitesse 173
Figure 146 : Présentation des erreurs pour les 64 expériences en fonction des interactions 173
Figure 147 : Influence de la longueur et de la hauteur de la source sur l'échange thermique 174
Figure 148 : Points expérimentaux définis dans le domaine de validité 174
Figure 149 : Comparaison des 64 erreurs des deux approches 175
Figure 150 : Visualisation de la prise en compte d'un profil de variation d'une variable 176
Figure 151 : Définition des paramètres du modèle analytique 180
Figure 152 : Visualisation de la modélisation simplifiée des composants 183
Figure 153 : Illustration de mesures de températures de surface du véhicule de test 184
Figure 154 : Illustration de l'analyse thermique d'un placement de composant 189
Figure 155 : Principe de l'interprétation de la conductivité globale d'un substrat réel 190
Figure 156 : Principe de la méthode basée sur le pourcentage de cuivre 191
Figure 157 : Modélisation de la conductivité en fonction du pourcentage de cuivre 192
Figure 158 : Processus de génération et d'identification des racines de la fonction (e319) 196
Figure 159 : Identification des racines de la fonction (e319) 197
Figure 160 : Influence des échanges latéraux sur les températures des sources 198
Figure 161 : Exemple de conditions aux limites présentant des singularités 200
Figure 162 : Principe de l'interconnexion de structures sur un substrat 201
Figure 163 : Principe de la méthode bigrille 203
Figure 164 : Définition d'une zone de contact entre la structure et un substrat 204
Figure 165 : Illustration de l'interconnexion d'un capot sur un substrat 205
Figure 166 : Gradients thermiques liés à la présence d'un capot métallique 205
Figure 167 : Gradients thermiques liés à la présence des glissières thermiques 208
Figure 168 : Principe d'une modélisation compacte des régimes d'échange thermique 216
Figure 169 : Évolution corrélée du nombre de Nusselt d'une plaque verticale 216
Figure 170 : Expressions corrélées du nombre de Nusselt pour une plaque verticale 217
Figure 171 : Validation numérique des expressions corrélées du nombre de Nusselt 217
Figure 172 : Illustration des multiples orientations des composants électroniques 218
Figure 173 : Définition d'une source possédant une orientation quelconque 219
Figure 174 : Description schématique de l'empilement des couches d'une carte 2s2p 221

Figure 175 : Illustration de la conduction thermique au sein d'un substrat 222
Figure 176 : Illustration de l'interconnexion de boitier complexe sur un substrat 223
Figure 177 : Visualisation des écarts de températures pour la matrice de billes 224
Figure 178 : Vision de la configuration des 25 sources de chaleur 226
Figure 179 : Représentation d'une configuration disposant de 5 sources de chaleur 228
Figure 180 : Démarche destinée au groupement des sources 229
Figure 181 : Exemples d'architecture dite HDI 230
Figure 182 : Performances thermiques de diverses configurations de structure HDI 230
Figure 183 : Définition des paramètres du modèle analytique pour des sources encastrées 231
Figure 184 : Présentation du modèle analytique étudié 234
Figure 185 : Véhicule de test dit HERMES 235
Figure 186 : Puce thermique du support de test HERMES 236
Figure 187 : Principe de fabrication de la « Core layer » du support de test HERMES 236
Figure 188 : Principe de modélisation de l'influence des zones de vias 238
Figure 189 : Vue en coupe d'un drain en Annealed Pyrolytic Graphite (APG) 240
Figure 190 : Définition du modèle analytique proposé pour la structure APG 241
Figure 191 : Influence de la qualité du contact intercouches 242
Figure 192 : Influence de la qualité du contact intercouches 242
Figure 193 : Définition du modèle analytique proposé pour un composant électronique 243
Figure 194 : Descriptif des éléments constituant un composant dit « Small Outline » 265
Figure 195 : Réseau nodal d'un boitier dit « Small Outline » 266

Liste des tables

Table 1 : Nombre de publications scientifiques 9
Table 2 : Thématique - Modélisation nodale des composants électroniques 10
Table 3 : Thématique - Modélisation analytique des structures à multiples couches 10
Table 4 : Dissipations typiques des transistors HEMT-GaN filière $\mathbf{Lg} = \mathbf{0.25}\mu\boldsymbol{m}$ 16
Table 5 : Évolution du mode d'interconnexion des semi-conducteurs 23
Table 6 : Relevés de mesures effectuées sur le composant BGA208 29
Table 7 : Caractéristiques thermiques des résistances électriques dites CMS 31
Table 8 : Évolution du mode d'interconnexion des cartes électroniques 38
Table 9 : Comparaison des empilages des cartes HDI et Standard 39
Table 10 : Conditions de Fourier appliquées simultanément sur les faces du composant 50
Table 11 : Définition du réseau à multiples branches à déterminer 56
Table 12 : Conditions aux limites appliquées au réseau « fictif » 56
Table 13 : Définition du réseau à multiples branches identifié par la méthode MS 58
Table 14 : Illustration du comportement d'un algorithme génétique pour (e20) 66
Table 15 : Impact de la définition d'une fonction coût pour (e20) 67
Table 16 : Définition des poids des différentes erreurs 69
Table 17 : Définition d'une 49eme condition aux limites (en W m^{-2} K^{-1}) 70
Table 18 : Définition des différentes caractéristiques d'un composant QFN16 72
Table 19 : Variabilité de la solution dérivée 73
Table 20 : Définition de réseaux simplifiés sans surfaces d'échange latérales 75
Table 21 : Définition de réseaux simplifiés de type « 2R » ou « 3R » 76
Table 22 : Définition d'un réseau nodal dit « star-model » du composant QFN16 76
Table 23 : Conditions surfaciques appliquées pour la comparaison des trois niveaux de modélisation 78
Table 24 : État des températures vues par le semi-conducteur 78
Table 25 : Concentration maximale de particules en fonction de leur forme 80
Table 26 : Domaine d'incertitude des matériaux à faible conductivité thermique 80
Table 27 : Nouvelles conditions de Fourier appliquées simultanément sur les faces du modèle 82
Table 28 : État des erreurs des réseaux dérivés par chacun des jeux de scenarii 83
Table 29 : Influence de la conductivité thermique réelle de l'arséniure de gallium 87
Table 30 : Définition des différentes caractéristiques du composant QFN48 étudié 89
Table 31 : Bilan des prédictions du réseau nodal pour une puissance de Q=1W à T_A = 35°C 89
Table 32 : Bilan des prédictions du réseau nodal pour une puissance de Q=2.5W à T_A = 35°C 90
Table 33 : Panel de scores $\boldsymbol{RT}, \boldsymbol{q}$ obtenus pour quelques exemples de boitiers QFN 90
Table 34 : Comparaison des températures du modèle détaillé et de son modèle compact 91
Table 35 : Comparaison des deux modèles de structure 92
Table 36 : Prédiction du modèle compact d'un transistor MESFET constitué de 11 nœuds 93
Table 37 : Prédiction des températures déduites du modèle compact constitué de 8 nœuds 94
Table 38 : Dimensions caractéristiques des constituants du boitier SiP 95
Table 39 : Définition des poids des différentes erreurs 97
Table 40 : Comparaison des prédictions du modèle nodal constitué de 15 nœuds 97
Table 41 : Bilan des temps de simulation des scenarii en fonction de la complexité du modèle 98
Table 42 : Évolution des températures maximales vues par l'inductance 99

Table 43 : Prédictions des températures maximales des deux nœuds internes 100
Table 44 : Comparaison des températures mesurées et calculées sur la surface supérieure 102
Table 45 : Déduction des températures des éléments sensibles du composant 103
Table 46 : Déduction des températures des éléments sensibles du composant 104
Table 47 : Validation des prédictions du modèle nodal vis à vis des mesures infrarouges 105
Table 48 : Géométrie du véhicule de test étudié 107
Table 49 : Tailles et positions centrales des composants équipant la carte étudiée 107
Table 50 : Tailles des puces équipant les composants étudiés 108
Table 51 : Recalage du modèle numérique de la thermo-carte 109
Table 52 : Recalage du modèle numérique utilisant des composants compacts 109
Table 53 : Reconstruction d'un réseau RC unidirectionnel à partir des délais d'Elmore 119
Table 54 : Expressions des paramètres $\boldsymbol{ai}$ et $\boldsymbol{bi}$ d'un réseau de Cauer 122
Table 55 : Décomposition de la réponse temporelle d'un composant DFN12 124
Table 56 : Expression des constantes de temps en secondes d'un composant DFN12 125
Table 57 : Définition des paramètres du réseau étudié par Ousten 127
Table 58 : Réseau de Foster du DFN12 après 200 millions d'itérations 129
Table 59 : Constante de temps des 3 échelons du réseau du DFN12 129
Table 60 : Pertinence de la reconstruction du réseau du DFN12 129
Table 61 : Réseaux de Cauer déduits d'un jeu de réseaux de Foster 133
Table 62 : Réseaux de Cauer et de Foster déduits de la fonction réduite d'ordre 2 134
Table 63 : Définition des valeurs des moments des fonctions réduites et de Hutton 137
Table 64 : Définition des valeurs des moments des fonctions réduites et de Foster 137
Table 65 : Définition des valeurs des paramètres de Markov 140
Table 66 : Coefficients de Stehfest pour un nombre de sommation $\boldsymbol{nV = 10}$ 146
Table 67 : Conditions aux limites destinées à la génération du modèle dynamique 156
Table 68 : Définition des coefficients d'une diode pour un courant continu de 1mA 162
Table 69 : Table de Tagushi à 3 variables 171
Table 70 : Performances d'une approche mixte 176
Table 71 : Évaluation de la résistance thermique jonction-ambiante d'un BGA 208 178
Table 72 : Mesures thermiques internes et externes à $\boldsymbol{T\infty = 27°C}$ 184
Table 73 : Distribution des puissances identifiées pour un modèle à 7 composants 185
Table 74 : Comparaison des températures pour un substrat isotrope ou anisotrope 186
Table 75 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ 187
Table 76 : Évaluation de la conductivité multiaxiale du véhicule de test 191
Table 77 : Estimation des conductivités thermiques effectives du véhicule de test 192
Table 78 : Températures centrales des sources en fonction des conductivités effectives 192
Table 79 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ du modèle orthotrope 194
Table 80 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{z = HB}$ du modèle orthotrope 195
Table 81 : Valeurs des racines déduites des deux méthodes 197
Table 82 : Valeurs des coefficients d'échange déduits de la simulation 198
Table 83 : Températures centrales des sources du modèle pour les conditions numériques 199
Table 84 : Géométrie du cas présenté (en millimètres) 203
Table 85 : Caractéristiques thermiques du modèle 203
Table 86 : Comparaison des modèles : numérique (Flotherm) et analytique 203

Table 87 : Prédictions des températures dans le cas d'un couplage 206
Table 88 : Prédictions des flux dans le cas d'un couplage 206
Table 89 : Tailles et positions centrales des glissières équipant la carte étudiée 207
Table 90 : Mesures thermiques internes et externes pour les essais 207
Table 91 : Résistances thermiques des modèles CTM 208
Table 92 : Comparaison des températures internes du premier essai 209
Table 93 : Comparaison des températures externes du premier essai 209
Table 94 : Comparaison des flux extraits par les puits 209
Table 95 : Comparaison des flux aux interfaces des réseaux résistifs 210
Table 96 : Comparaison des coefficients équivalents d'échange thermique 210
Table 97 : Coefficients d'échange d'une plaque isotherme en position verticale ($\boldsymbol{T\infty = 20°C}$) 213
Table 98 : Coefficients d'échange d'une plaque isotherme en position horizontale 213
Table 99 : Coefficients d'échange d'une plaque non isotherme en position verticale ($\boldsymbol{T\infty = 20°C}$) 214
Table 100 : Confrontation des résultats analytiques ($\boldsymbol{TTp}$) et numériques ($\boldsymbol{TNP}$) 219
Table 101 : Comparaison des températures centrales et moyennes (Flotherm) 221
Table 102 : Comparaison des températures centrales des modèles PCB-DTM et PCB-CTM 222
Table 103 : Conditions thermiques appliquées au substrat 225
Table 104 : Géométrie du substrat étudié 232
Table 105 : Conductivités thermiques effectives du modèle 233
Table 106 : Tailles et positions centrales des composants équipant la carte étudiée 233
Table 107 : Comparaison des températures centrales et moyennes d'une source encastrée 233
Table 108 : Évaluation des coefficients d'échange thermique pour une source dissipant 2W. 234
Table 109 : Évaluation des coefficients d'échange thermique pour 3 sources actives 235
Table 110 : Comparaison des températures centrales et moyennes d'une zone interconnectée 239
Table 111 : Dimensions typiques d'un boitier « QFN » 263
Table 112 : Dimensions typiques d'un boitier CSP 263
Table 113 : Dimensions typiques des constituants du substrat d'un boitier CSP 264
Table 114 : Dimensions normalisées des résistances CSM 264
Table 115 : Expression des données géométriques capitalisées 265
Table 116 : Comportement thermique du réseau thermique « fictif » 268
Table 117 : Comportement thermique du réseau de résistances SM 269
Table 118 : Comportement thermique du réseau de résistances LMM 270
Table 119 : Comportement thermique du réseau de résistances QNM 270
Table 120 : État de la précision des 3 réseaux de résistances créés 271
Table 121 : Comportement thermique du réseau de résistances SM 273
Table 122 : Comportement thermique du réseau de résistances QNM 273
Table 123 : Comportement thermique du réseau de résistances CGM 274
Table 124 : Comportement thermique du réseau de résistances GA 278
Table 125 : Comportement thermique du réseau de résistances ajusté sur 7 conditions 278
Table 126 : Précision du réseau de résistances créé sur la base de 6 scénarii 279
Table 127 : Précision du réseau de résistances créé sur la base de 7 scénarii 279
Table 128 : Représentation du plan d'expériences utilisant 64 simulations 286
Table 129 : Représentation du plan d'expériences utilisant 64 simulations (bis) 287
Table 130 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ 305

Table 131 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = 0}$ 306
Table 132 : Températures moyennes des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ 306
Table 133 : Températures moyennes des sources à $\boldsymbol{\xi = 0}$ 306
Table 134 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ 307
Table 135 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{\xi = 0}$ 307
Table 136 : Températures moyennes des sources à $\boldsymbol{\xi = \xi HB}$ 307
Table 137 : Températures moyennes des sources à $\boldsymbol{\xi = 0}$ 308
Table 138 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{z = 0}$ 308
Table 139 : Températures centrales des sources à $\boldsymbol{z = HB}$ du modèle orthotrope révisé 308
Table 140 : Températures centrales des sources du modèle orthotrope révisé ; à $\boldsymbol{z = 0}$ 309
Table 141 : Températures moyennes des sources du modèle orthotrope révisé ; à $\boldsymbol{z = HB}$ 309
Table 142 : Températures moyennes des sources à $\boldsymbol{z = 0}$ du modèle orthotrope révisé 309
Table 143 : Prédictions des températures en l'absence de couplage 311
Table 144 : Prédictions des flux dans le cas d'un couplage 311
Table 145 : Prédictions des températures en position verticale ($\boldsymbol{g = -y}$) 312
Table 146 : Prédictions des températures en position horizontale ($\boldsymbol{g = -z}$) 312

PLAN DU MEMOIRE

Rédigé dans la perspective d'une soutenance de thèse, ce mémoire dresse un bilan des recherches que j'ai menées de 2000 à 2019 dans le cadre de mon activité de responsable de la création et du déploiement d'outils de dimensionnement thermique dédiés à la conception des cartes électroniques.

Il est articulé en six chapitres.

Le premier, intitulé « **Organisation des travaux de recherche** » détaille les différents aspects du travail d'expertise confié par mon entreprise.

Le second traite de l'évolution technologique de la « **miniaturisation des équipements électroniques** », des contraintes thermiques liées à la densification de leur dissipation et des défis pour les limiter.

Les trois chapitres suivants, qui constituent le « **dossier de recherche** », présentent l'état de l'art de la modélisation thermique des équipements électroniques, étudient la mise en œuvre de nouvelles méthodologies, de leurs avancées et des résultats significatifs obtenus.

Le dernier chapitre intitulé "**Références et annexes**" regroupe les articles pris en référence, les communications réalisées et les informations complémentaires aux concepts développés dans cette thèse.

Chapitre I

Organisation des travaux de recherche

Ce chapitre décrit le développement en collaboration avec des partenaires académiques de nouveaux concepts de modélisation mis en œuvre dans le but d'établir une pratique commune à l'ensemble du groupe destinée à la simulation thermique des cartes électroniques et de leurs composants.

Contenu

A. Le besoin industriel 3

A1. Mon activité 3
A2. Mes thématiques de recherche 3
A3. La création de modèles thermiques nodaux de composants 3
A4. L'établissement de modèles analytiques de carte électronique 4
A5. Le développement de concepts brevetés 5
A6. La définition de leur imbrication 5

B. Démarche scientifique et technique 7

B1. Le développement de mon équipe scientifique 7
B2. Ma participation à des travaux de recherche européens 7
B3. Les collaborations universitaires nationales 8
B3.1. Thèses CIFRE avec le laboratoire LTIE 8
B3.2. Collaboration scientifique avec le laboratoire LTIE 8
B3.3. Participation à un jury de thèse 8
B3.4. Travaux collaboratifs avec le laboratoire LMEE 8
B4. La dissémination des avancées 9
B5. Schéma chronologique des publications 9
B6. Encadrement de stages et d'apprentissage 10

A. LE BESOIN INDUSTRIEL

A1. Mon activité

Elle a consisté à remplir les différentes missions :

- Maintenir le leadership du groupe dans le domaine de la simulation thermique des cartes électroniques,
- Générer une dynamique autour de cette activité via des collaborations avec des partenaires académiques,
- Animer un réseau d'experts confrontés à la problématique du dimensionnement thermique,
- Proposer aux unités du groupe un panel d'études dites multi-clients dans le domaine du refroidissement thermique des cartes électroniques,
- Diriger une activité de recherche sur la thématique de la thermique des cartes électroniques,
- Manager une équipe pluridisciplinaire,
- Assurer le suivi de travaux d'étudiants.

A2. Mes thématiques de recherche

Elles sont centrées sur la modélisation thermique sous une forme simplifiée des cartes et des composants électroniques.

Celles-ci sont matérialisées par le développement de deux logiciels dénommés :

- « Générateur de Modèle Thermique »,
- « Évaluateur thermique pour carte électronique » (Figure 4).

A3. La création de modèles thermiques nodaux de composants

Ces modèles nodaux développés sont capables de minimiser la taille des modèles numériques tout en conservant une excellente précision vis-à-vis de leur modèle physique.

La Figure 1 synthétise le compromis à trouver entre la taille des modèles et leur précision.

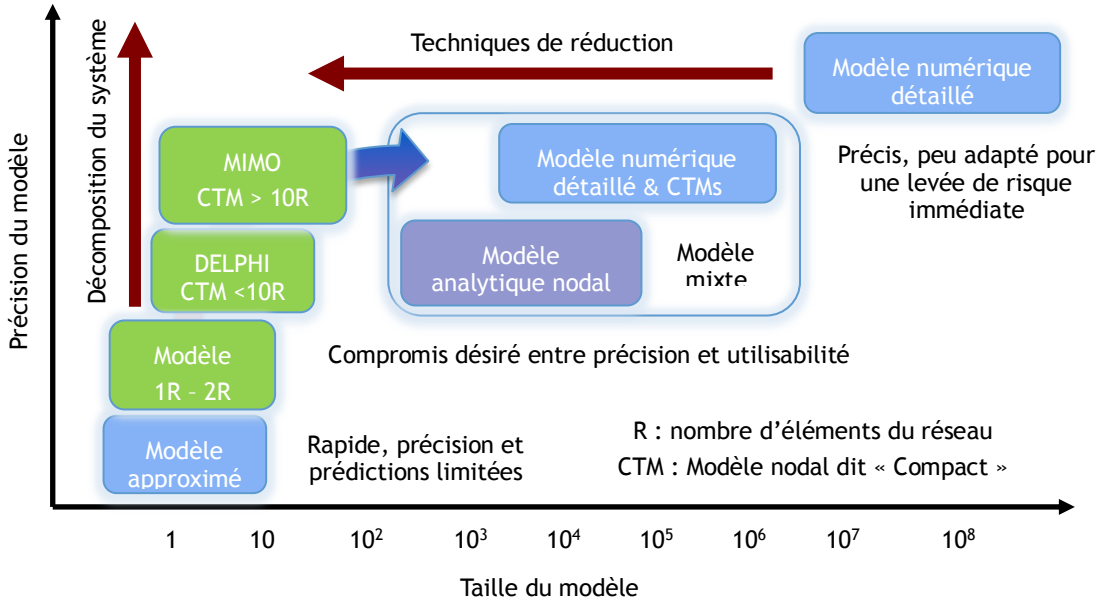


Figure 1 : Concept de minimisation des modèles

Ainsi diverses techniques de réduction sont à concevoir pour parfaire la pertinence des modèles nodaux.

Cette recherche d'une meilleure adéquation a eu pour principaux enjeux :

- La mise en œuvre d'une méthodologie innovante pour la réalisation de modèles thermiques, dits compacts, afin de s'assurer de leur consistance et de la reproductibilité de leur performance,
- La capacité à justifier la qualité des prédictions de nos modèles vis à vis de nos clients,
- Le développement de modèles indépendants d'une solution logicielle commerciale, lesquels sont capitalisés dans une base centrale de données,
- La possibilité de modéliser un large panel de composants électroniques complexes pour garantir une meilleure réactivité par rapport aux impératifs de conception,
- La création d'une représentation non explicite d'un composant électronique dans le but de protéger les informations sensibles de sa constitution.

A4. L'établissement de modèles analytiques de carte électronique

Ces modèles analytiques sont destinés à accentuer la représentativité de la modélisation du refroidissement d'une carte électronique au moyen des modèles nodaux de composants afin de proposer une approche analytique nodale complète illustrée par la Figure 2.

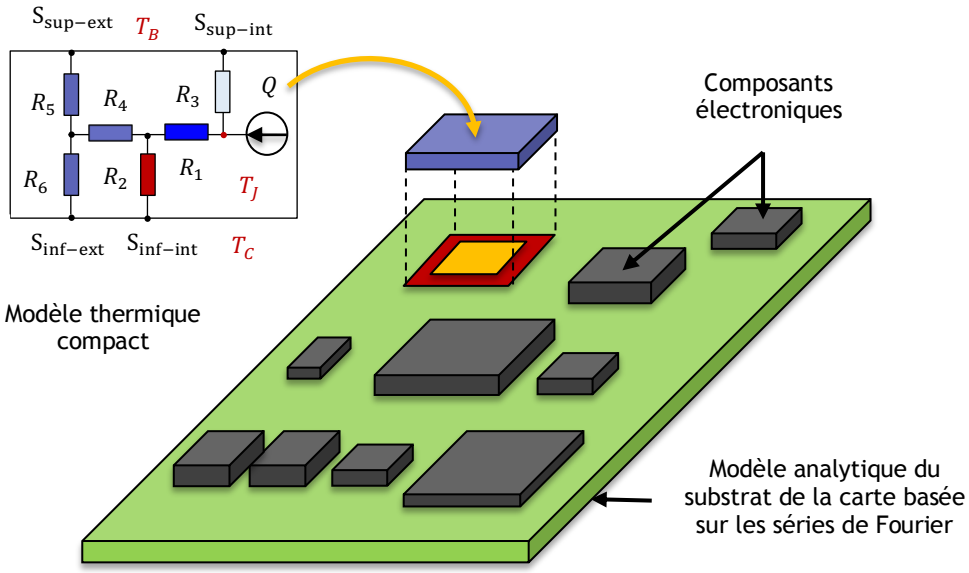


Figure 2 : Concept de l'approche analytique nodale

Cette approche a permis de concrétiser les avancées suivantes :

- Une augmentation de la fiabilité des cartes par la maitrise de la précision des modèles,
- La mise en place de règles de réalisation des modèles de simulation des cartes électroniques afin de garantir la reproductibilité des analyses,
- La diffusion d'une application partageable par plusieurs catégories d'utilisateurs du concepteur à l'expert thermique sur la base de l'analogie thermique-électrique,
- La définition d'une solution théorique exacte pour des conditions d'environnement pouvant être reproduites et validées en laboratoire,
- La capacité à statuer sur la pertinence des résultats des modèles numériques,
- La levée de risques à plusieurs étapes de la conception par plusieurs types d'analyses,
- Le management interdisciplinaire des données indispensables à l'élaboration d'un modèle physique représentatif.

A5. Le développement de concepts brevetés

Le générateur de modèle thermique pour composant électronique a fait l'objet d'un brevet intitulé « Procédé et système de modélisation thermique d'un composant », déposé en 1992, par mes prédécesseurs. Son domaine d'application est la modélisation thermique de circuits intégrés sous la forme d'un réseau nodal.

Ce procédé définit différents trajets internes de la chaleur vers des éléments extérieurs au boîtier d'un composant électronique ainsi que les formulations des résistances thermiques les reliant à la source de chaleur.

Ce premier brevet est complété en 2003, par un second intitulé « Procédé de modélisation d'un système comprenant des cartes électroniques comportant des composants unitaires » [1]. Il est destiné à poser le principe d'une modélisation nodale pour l'analyse thermique du circuit imprimé d'une carte électronique et des nombreux (N) composants montés sur ses surfaces supérieure ou inférieure. Il décrit les étapes pour parvenir à la détermination d'un ensemble de températures dites de jonction pour chacun des composants unitaires implantés sur la carte.

La comparaison desdites températures de jonction aux valeurs limites déclinées par les fabricants des composants est explicitée. Le procédé définit également les voies pour minimiser celles-ci en faisant varier les paramètres d'environnement ou les paramètres de placement des composants sur un substrat.

Les travaux de recherche présentés dans le cadre de ce mémoire permettront au lecteur d'appréhender les développements consécutifs au choix, d'une approche nodale se voulant la plus représentative, du comportement thermique d'une carte électronique.

En 2005, la problématique de l'utilisation d'une carte électronique commerciale dans nos équipements est abordée pour le compte d'une unité du groupe. La démarche proche d'une méthode inverse fait l'objet, en 2008, d'un brevet intitulé « Procédé pour créer un modèle thermique d'une carte électronique et ajuster les composants de la carte en fonction du modèle » [2].

L'idée directrice est d'établir un modèle thermique simplifié pour cette carte inconnue, ceci à partir d'un jeu de mesures dimensionnelles, électriques et thermiques. Les mesures dimensionnelles permettent d'établir le modèle géométrique tridimensionnel de la carte et de ses composants. La mesure électrique fournit l'information sur la puissance totale dissipée. Celle-ci sera distribuée sur les composants présentant des échauffements significatifs par rapport à la température moyenne de la carte.

Les mesures thermiques réalisées à l'aide d'une caméra infrarouge munie d'un jeu d'objectifs macroscopiques procurent les données indispensables au recalage du modèle comportemental. Ce dernier considère la carte verticale refroidie par convection naturelle couplée au rayonnement thermique. Les dissipations locales sur la carte sont ajustées sur l'ensemble des températures recueillies en distinguant les transferts advectifs et radiatifs, des composants et de la carte vers le milieu ambiant.

La conductivité thermique effective du substrat de la carte est déterminée à l'aide de la solution tridimensionnelle, en régime permanent, de l'équation de la chaleur pour un matériau isotrope.

Pour plus d'information, l'article [4] intitulé « Thermal characterisation of COTS electronic boards » détaille les étapes du procédé ainsi que ses performances sur une carte de test.

Ce premier modèle n'a cessé d'évoluer notamment pour considérer les caractéristiques orthotropes du substrat carte ou la présence d'une puissance diffusée au cœur de la carte.

Ces différentes solutions analytiques sont reprises d'une manière chronologique dans ce mémoire.

A6. La définition de leur imbrication

Cette démarche de modélisation des cartes électroniques a été dévoilée en 2002, à la conférence DAC[(1)], sous l'intitulé « PCB design flow under thermal control », puis à la conférence ITHERM [(2)] en 2004 [3]. Son originalité repose sur un flot structuré, tout au long de la conception, décrit par la Figure 3.

L'ensemble des calculs thermiques destinés à minorer plus efficacement les risques de non-conformité des équipements est dès lors rationalisé. S'appuyant une base centrale de modèles thermiques nodaux, ce flot structuré a également apporté un gain notable de productivité.

Le développement sur plus d'une décennie des deux outils précités (A2) et de leurs algorithmes a nécessité la réalisation de plusieurs travaux de recherche visant à améliorer progressivement les capacités de modélisation initialement proposées.

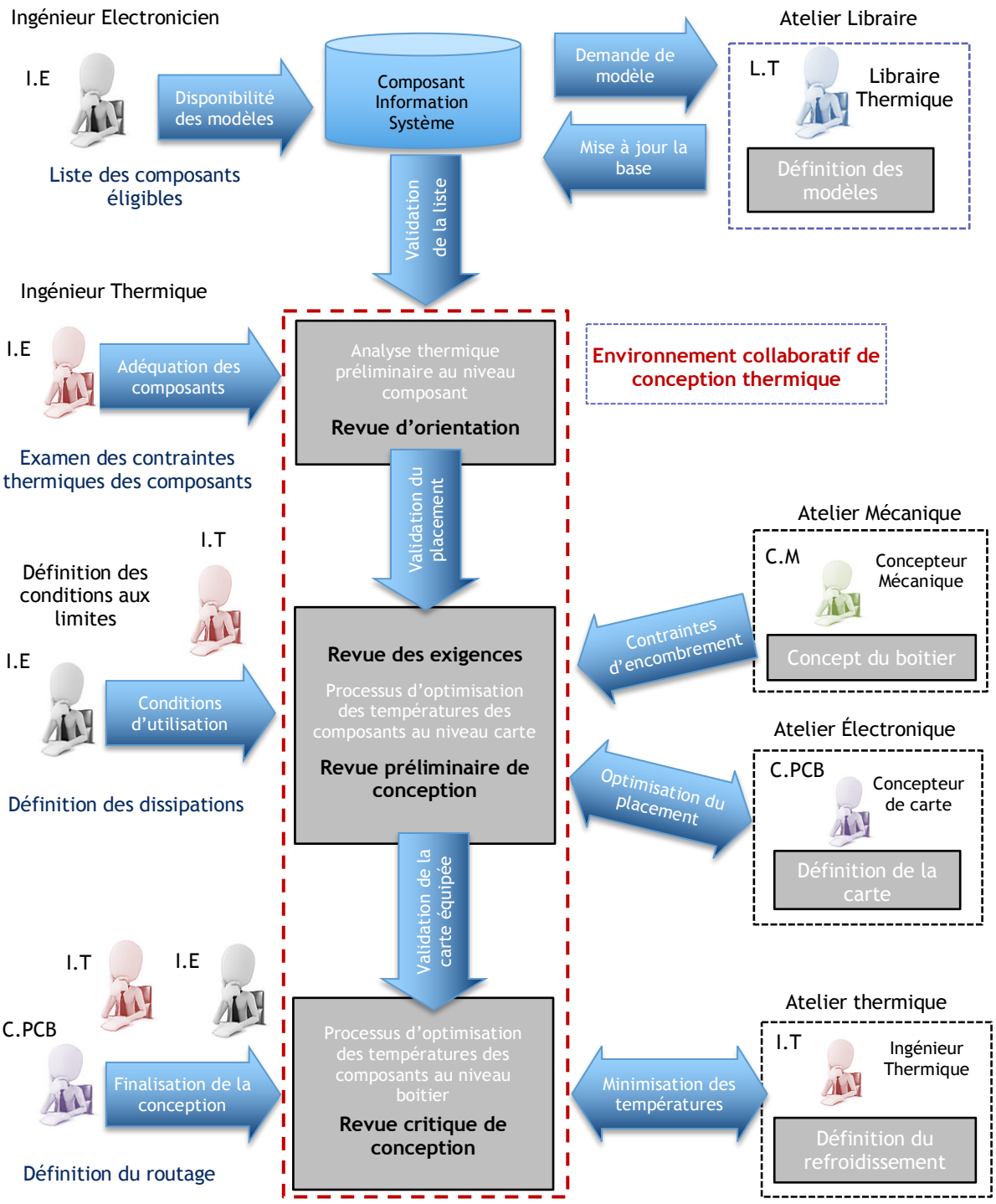


Figure 3 : Atelier de conception thermique dédié aux cartes électroniques

Ces deux outils ont été intégrés à un environnement de conception mis à la disposition des experts thermiques du groupe, lequel est désigné par l'intitulé « atelier ».

Ce dernier structure un processus d'échange de données et de contrôle afin de garantir une conception optimisée des cartes électroniques via le recours massif à la modélisation thermique de leurs composants électroniques et de leur substrat constitué de multiples couches.

Ces deux thématiques de modélisation sont décrites en détail dans les chapitres constituant cette thèse.

B. DEMARCHE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

B1. Le développement de mon équipe scientifique

La nécessité de disposer de collaborateurs capables de m'assister dans le développement et le déploiement d'un atelier de conception thermique m'a amené à constituer progressivement une équipe de recherche pluridisciplinaire.

En 2001 est lancée la programmation en langage Java du logiciel « Générateur de Modèle Thermique » avec pour objectif de garantir la qualité et la pérennité de cet outil, sans équivalent sur le marché.

A partir de 2002, le développement du logiciel « Évaluateur thermique » est confié à un jeune informaticien, Julien Dufrenne. Puis en 2005, Olivier Daniel, rejoint l'équipe informatique, ayant pour tâche d'assurer la maintenance des deux modules de calcul précités.

Ce second outil est présenté en Figure 4.

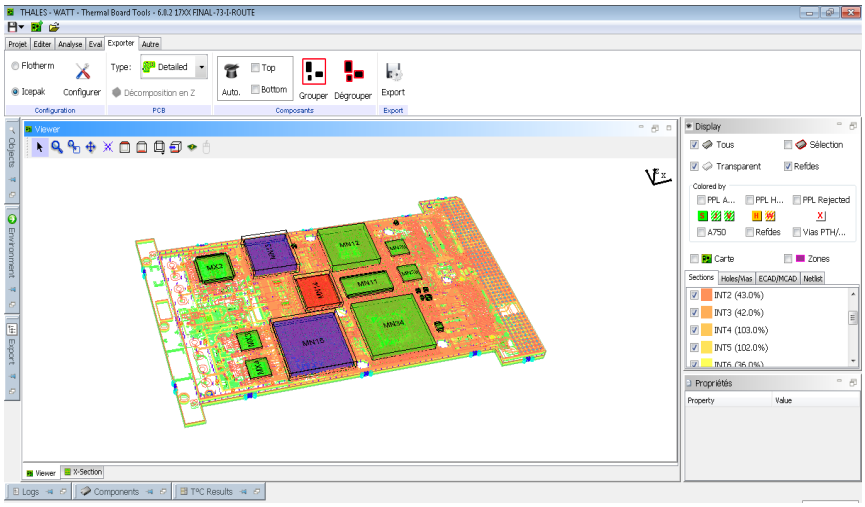


Figure 4 : Présentation de l'outil « évaluateur de carte »

Dans le but d'étendre la couverture de la base centrale de modèles thermiques nodaux et la mise en place des algorithmes génétiques, un ingénieur thermicien, Valentin Bissuel, est recruté en 2007.

Tout au long de ces deux dernières décennies, ces trois personnes ont contribué à la diffusion de nos travaux de recherche vers les experts de notre société et ceux de la communauté scientifique.

B2. Ma participation à des travaux de recherche européens

Dans le cadre de mon activité d'expertise, j'ai participé à deux projets européens de recherche :

- Le projet Euripides « IPITECH » :

  Lancé en 2009, le projet « Innovative Printed Circuit Board Integration Technologies for HDI Boards in Harsh Environment » visait à analyser les contraintes liées à la densification des connexions électriques au sein des cartes électroniques. Il abordait la problématique du transfert thermique inter-couche au moyen de structure composée de micro-via.

- En 2010, Le projet FP7 « HERMES » :

  Lancé en 2010, le projet « High-density integration by Embedding chips for Reduced size Modules and Electronic Systems », a étudié l'intégration de semi-conducteurs actifs au cœur des structures des cartes électroniques, en vue d'une densification toujours plus forte.

L'analyse de ces évolutions technologiques a mis en évidence la nécessité d'initier un programme de recherche collaboratif afin d'anticiper les besoins en termes de méthodes de calculs de ces épineux défis concernant la conception des futures cartes électroniques.

B3. Les collaborations universitaires nationales

L'approfondissement de mes recherches sur les modèles nodaux et sur les solutions analytiques a été renforcé en 2011 par la création d'un partenariat académique avec l'université de Paris ouest.

Ce partenariat académique avec le laboratoire LTIE [13] de Ville d'Avray se concrétise par :

- L'encadrement de trois thèses CIFRE,
- La mise en place d'un contrat de recherche concernant l'établissement de modèles analytiques.

Puis en 2014, un suivi scientifique de travaux réalisés par le laboratoire LMEE [14] d'Évry est mené.

B3.1. Thèses CIFRE avec le laboratoire LTIE

En 2011, l'établissement auprès de l'ANRT [12] d'un contrat de thèse CIFRE est finalisé. Sa thématique concerne la « Génération de modèles compacts thermiques dynamiques de composants électroniques via les algorithmes génétiques ».

Son objectif est d'établir une méthodologie susceptible de fournir des modèles nodaux de composants électroniques capables de reproduire leur comportement thermique temporel.

La sélection de Cheikh-Tidiane DIA comme doctorant est effectuée. Ce dernier a soutenu avec succès sa thèse le 11 décembre 2015. Il s'est vu décerner la mention très honorable avec félicitations unanimes du jury pour le travail accompli.

A l'issue de ces travaux prometteurs, un nouveau projet de thèse CIFRE en collaboration avec le laboratoire LTIE est retenu par l'ANRT. Cet approfondissement de nos recherches vise également à valider expérimentalement les concepts développés par Cheikh DIA.

La sélection de Brice ROGIE comme doctorant est effectuée en juin 2015 et la soutenance de sa thèse a eu lieu en 2018.

B3.2. Collaboration scientifique avec le laboratoire LTIE

En 2012, un contrat de collaboration avec le laboratoire LTIE sur la thématique « modélisation analytique des cartes électroniques » est établi.

Un chercheur post-doctorant, Nhat-Minh NGUYEN est sélectionné pour conduire cette réflexion. Ce contrat est reconduit désormais chaque année.

B3.3. Participation à un jury de thèse

D'autres thématiques seront abordées avec le LTIE, telles que les phénomènes advectifs internes à une cavité parallélépipédique via une participation au jury de thèse d'Esther Zarco Pernia en 2013.

B3.4. Travaux collaboratifs avec le laboratoire LMEE

En 2014 des travaux collaboratifs sont entrepris avec le laboratoire LMEE [14] sur l'élaboration d'une technique de réduction modale des modèles numériques.

Ce laboratoire promeut une méthode de réduction non-linéaire par mode de branche.

Son intérêt majeur est de conserver la connaissance de la relation liant le modèle réduit au modèle original. A l'instar de nos modèles nodaux, cette approche offre la possibilité d'analyser plus rapidement le comportement thermique d'un composant en s'appuyant sur une définition plus détaillée de modes.

Ainsi, ces travaux proposent une voie alternative capable de minimiser dans une forte proportion la taille d'un modèle numérique en acceptant une faible dégradation de sa précision.

B4. La dissémination des avancées

Les différentes publications auxquelles je me suis associé sont synthétisées dans le tableau suivant :

Table 1 : Nombre de publications scientifiques

Type de publication :	Nombre
Brevets nationaux	2
Articles dans des revues à comité de lecture	14
Conférences internationales avec actes	34
Conférences nationales avec actes	3

Les principales conférences internationales dédiées au domaine thermique sont mentionnées ci-après :

- SFT, Congrès annuel de la Société Française de Thermique,
- SEMI-THERM, annual IEEE Symposium on Semiconductor Thermal and Temperature Measurement,
- EUROTHERM, European Thermal-Sciences conference, every 4 years,
- EUROSIME, annual IEEE international Conference on Thermal, Mechanical and Multi-physics Simulation and Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems,
- ITHERM, bi-annual IEEE international conference for scientific and engineering exploration of thermal, Thermo-mechanical and emerging technology issues associated with electronic devices, packages and systems,
- THERMINIC, annual IEEE international workshop on Thermal investigation of ICs and Systems,
- IMAPS, annual European Advanced Technology Workshop on Micro-packaging and Thermal management sponsored by The International Microelectronics and Packaging Society,
- THERMAM, annual international conference on THERmophysical and Mechanical properties of Advanced Materials.

Les principales publications internationales dédiées au domaine thermique sont indiquées ci-après.

- Applied Thermal Engineering (ATE), ISSN 1359-4311,
- Thermal Science (TSCI), international scientific journal, ISSN 0354-9836,
- The ASME Journal of Heat Transfer (JHT), ISSN 0022-1481,
- The ASME Journal of Thermal Science and Engineering Applications (JTSEA), ISSN 1948-5085
- International Journal of Thermal Sciences (IJST), ISSN 1290-0729,
- International Journal of Heat and Mass Transfer (IJHMT), ISSN 0017-9310,
- International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow (IJNMHFF), ISSN 0961-5539,
- Journal of Electronic Packaging (JEP), ISSN 1528-9044,
- Microelectronics Reliability (MICROREL), ISSN 0026-2714,
- Solid-State Electronics (SSE), ISSN 0038-1101.

B5. Schéma chronologique des publications

La Table 2 et la Table 3 fournissent une vision synthétique de la production scientifique effectuée.

Il est à noter l'obtention d'un « Best Poster Award » lors de la conférence THERMINIC [22] en 2015.

Les faits saillants des diverses publications référencées dans ce synoptique sont relatés dans la seconde partie de ce document.

Table 2 : Thématique - Modélisation nodale des composants électroniques

Année	Modèles mono-source	Modèles à multiples sources	Modèles temporels	Modèles multi-physique	Modèle d'ordre réduit
2004	ITHERM [3]				
2005	Brevet [1]				
2010		EUROSIME [5] ITHERM [6]			
2011			IMAPS [8] SFT [9] THERMINIC [10]		
2012		ITHERM [13]	SEMITHERM [11]		
2013		EUROTHERM [14]	SFT [15] THERMINIC [17]	THERMINIC [16]	
2014		ITHERM [18] THERMINIC [20]			
2015			Thèse [55]	THERMINIC [22]	
2016	THERMINIC [28]			SFT [23] MICROREL [48]	
2017	ITHERM [30]		TCPMT [52]		THERMINIC [31]
2018		ITHERM [34] THERMINIC [35]	SEMITHERM [32] Thèse [56]	EUROSIME [33]	MICROREL [54] THERMINIC [36]
2019				ITHERM [38]	THERMINIC [39]

Table 3 : Thématique - Modélisation analytique des structures à multiples couches

Année	Carte à multiples couches	Méthode inverse pour carte inconnue	Carte à haute densité	Intégration de puces enterrées	Structure en graphite pyrolytique
2008		ITHERM [4] Brevet [2]			
2011			THERMINIC [7]		
2012			JEP [40]	EUROSIME [12]	
2013	TSCI [42]				
2014	THERMINIC [19]				
2015	SSE [44] TSCI [45]				THERMINIC [21]
2016	IJTS [46]			EUROTHERM [26]	ITHERM [24] THERMAM [27]
2017	IJNMHFF [51]			ITHERM [29]	IJNMHFF [50]
2018				IJTS [53]	

B6. Encadrement de stages et d'apprentissage

Parallèlement, je me suis engagé au cours de ces deux décennies dans l'encadrement:

- De stages de recherche de Master,
- D'élèves ingénieurs de dernière année,
- D'élèves ingénieurs en apprentissage.

Au total, ces actions ont permis d'accueillir 36 étudiants comprenant 22 hommes et 14 femmes.

Chapitre II

Dossier de recherche

Ce chapitre décrit les évolutions technologiques, sur les dernières décennies, des puces électroniques et des boitiers qui les protègent puis celles engendrées sur les cartes qui les interconnectent. Il met également en lumière les contraintes thermiques liées à une miniaturisation toujours plus accrue.

Contenu

C. Préambule 12

C1. Les défis de la conception robuste des cartes électroniques 12

D. Brève introduction à la thermique de l'électronique 13

D1. La miniaturisation des puces électroniques 13

D1.1. Les semi-conducteurs conventionnels 13

D1.2. Les amplificateurs de puissance 14

D1.3. Notion de défaillance des semi-conducteurs 18

D2. La miniaturisation des composants électroniques 20

D2.1. Les circuits intégrés 20

D2.2. Récapitulatif de l'évolution des circuits intégrés 26

D3. Performances thermiques des circuits intégrés 27

D4. Les composants passifs 30

D4.1. Les résistances électriques 30

D4.2. Contraintes thermiques liées aux résistances CMS 30

D5. Diversité des composants CMS 32

D6. Notion de défaillance des composants passifs 33

D7. Compacité des nouveaux composants passifs 33

D8. Modélisation des composants électroniques – État des besoins 34

E. La densification des cartes électroniques 35

E1. La technologie des substrats des cartes électroniques 35

E2. La modélisation thermique d'une carte électronique 40

E3. Modélisation des cartes électroniques – L'ambition 42

C. PREAMBULE

C1. Les défis de la conception robuste des cartes électroniques

La conception de cartes électroniques est une activité importante des entités d'un groupe comme Thales. Plus de mille nouvelles conceptions sont réalisées chaque année. Les cycles de conception de ces nouveaux produits ont drastiquement diminué malgré une complexité croissante de leurs technologies, d'une minimisation permanente de leurs dimensions et d'une excessive concentration de leurs dissipations.

Une course effrénée, symbolisée par la loi empirique de Moore qui stipule que la puissance d'un microprocesseur en silicium double à peu près tous les deux ans. Ainsi pour satisfaire ce besoin, la technologie des processeurs n'a cessé d'évoluer en particulier la taille de la gravure qui a été réduite à quelques dizaines de nanomètres pour accroitre le nombre de transistors présents sur un semi-conducteur. En parallèle, la température maximale admissible par un microprocesseur baisse continuellement, limitée le plus souvent à 100°C afin de garantir ses performances et sa fiabilité. Dès lors, pour les équipements susceptibles de fonctionner dans des conditions sévères, telle qu'une température ambiante de 85°C, les contraintes thermiques sont fortement accentuées au regard des applications conventionnelles.

La fiabilité des composants électroniques en fonction de la température est décrite par la loi d'Arrhenius, laquelle est la base de modèles déterministes de dégradations thermodynamiques irréversibles. Ce vieillissement correspond à une réaction chimique d'oxydation dont la vitesse de dégradation est liée à la température. Ainsi, pour un circuit intégré, un sur-échauffement de 10°C provoquera une réduction de 50% de sa durée de vie, une contrainte majeure pour un équipement devant fonctionner sur deux ou trois décennies.

Aussi, le management thermique est une nécessité stratégique pour maitriser d'une part la fiabilité d'un équipement et d'autre part s'adapter plus facilement aux nouvelles exigences en termes de performances. L'enjeu est d'identifier au plus tôt un potentiel risque « thermique » de manière à initier des actions préventives et pallier toute reprise de conception, fort couteuse, à postériori.

De nos jours, de nombreuses technologies telles que les composants à multiples puces ou les nouveaux concepts de cartes électroniques à haute densité sont associées pour réaliser des systèmes toujours plus denses, ceci sans diminution de leurs performances. De futurs concepts, telle que l'intégration de multiples semi-conducteurs actifs au sein des couches constitutives d'une carte électronique, en vue d'obtenir un degré plus élevé de miniaturisation, vont exacerber les contraintes thermiques actuelles.

Au vu de ces poussées technologiques, la température des semi-conducteurs ne va cesser d'être de plus en plus critique et difficile à maitriser. Aussi de nouvelles méthodes de modélisation doivent être mises en œuvre de manière à répondre aux exigences de conception pour les années à venir. Ce défi est le moteur de ma recherche.

Si les dernières avancées sur la modélisation numérique autorisent désormais une définition de plus en plus réaliste des phénomènes multi-physiques, la représentation précise de tous les éléments constituant une carte électronique reste difficilement réalisable, ceci en raison de la taille du modèle à créer et des temps de calculs prohibitifs pour sa résolution.

La modélisation thermique demeure en définitive un compromis entre la précision souhaitée et le temps de calcul. Il est clair que la précision, pour garantir un bon niveau de fiabilité d'un semi-conducteur ayant une température maximale de 100°C, doit être en deçà de 10%.

Le travail présenté dans cette thèse décompose les étapes qui ont été mises en œuvre pour établir des méthodologies robustes de modélisation dédiées d'une part à l'analyse thermique des composants et d'autre part à celle des cartes électroniques à Haute Densité d'Interconnexion.

Ces méthodologies et les modèles qui en sont déduits sont destinés à appréhender le plus rapidement et le plus précisement possible les options et les limitations des solutions de refroidissement thermique.

Dès lors, le choix d'une approche nodale focalisée sur les seuls paramètres sensibles d'une conception est apparu évident. Sa mise en œuvre progressive et l'amélioration de ses capacités à reproduire d'une manière toujours plus réaliste le comportement thermique d'une carte électronique dotée de multiples composants sont relatées tout au long de ce mémoire.

D. BREVE INTRODUCTION A LA THERMIQUE DE L'ELECTRONIQUE

D1. La miniaturisation des puces électroniques

D1.1. Les semi-conducteurs conventionnels

L'évolution périodique de la miniaturisation au niveau des semi-conducteurs équipant les composants électroniques est matérialisée par la loi de Moore citée précédemment. Celle-ci traduit le constat que tous les deux ans, une nouvelle étape technologique est franchie dans la réalisation des transistors, le motif de base d'un processeur, ceci afin de satisfaire les besoins en augmentation de performances.

Désormais, grâce à la réduction de la taille de leur gravure à quelques dizaines de nanomètres, typiquement 20nm (2012) ou 10nm (2015) [R1], une puce électronique est en mesure d'accueillir entre 10^9 et 10^{11} transistors. Ces centaines de millions de motifs submicroniques [R2], à la surface du silicium, représentent les zones actives des composants électroniques. Ces couches surfaciques, dites épitaxiales, sont sources de chaleur et elles constituent le point sensible d'une fonction électronique, désigné le plus souvent par le terme de jonction du composant.

Le concepteur d'une puce doit maitriser les paramètres clefs faisant évoluer sa dissipation [R2] [R3]. Celle-ci traduit un changement d'état des transistors.

$$Q = N_g \, f \, C_g \, V^2/2 \qquad \text{(e1)}$$

Elle dépend des termes suivants :

- Le nombre de transistors ou « gates » N_g.
- La fréquence d'horloge f.
- La capacité élémentaire d'un transistor C.
- La tension d'alimentation V.

La puissance par transistor tend à diminuer à chacune des nouvelles générations de gravure, Figure 5.

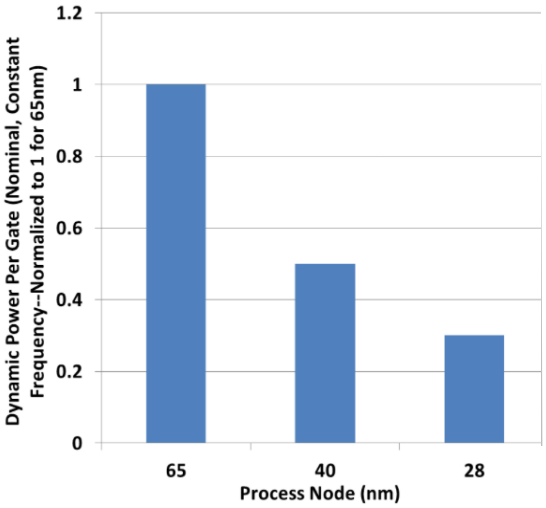


Figure 5 : Évolution de la dissipation des transistors en fonction de la taille de gravure

Les puces en silicium, matériau prédominant, sont par conséquent des dissipateurs thermiques, d'une taille allant du millimètre à quelques centimètres carrés, pour une épaisseur variant de 100 à 500µm.

En revanche, le nombre de transistors (N_g) ne cesse de croitre favorisant une densification plus importante de la puissance des microprocesseurs. En conséquence, la valeur globale de la dissipation dynamique fait l'objet d'un compromis en fonction des conditions de fonctionnement en fréquence et en tension.

Logiquement, cette dernière est généralement minimisée, la dissipation étant proportionnelle au carré de la tension. Par exemple, celle-ci a été abaissée de 0.65V en 2008 à 0.5V en 2014.

Cette approche constitue la réduction de consommation la plus efficace pour maintenir la température en deçà d'un seuil limite. La fréquence est également minorée de manière à limiter son impact sur les performances des transistors en particulier sur les courants de fuite. Un défaut d'isolation est d'autant plus sensible, que la taille de la gravure est fine.

Pour les concepteurs d'une carte électronique, l'architecture de chacune des puces électroniques de chacun des composants commerciaux montés sur la carte reste difficilement accessible, l'information étant concurrentielle.

A défaut de connaître les zones les plus sollicitées du point de vue thermique, une dissipation uniformément répartie sur l'intégralité de la surface de la puce est conventionnellement considérée.

D1.2. Les amplificateurs de puissance

Néanmoins pour certaines applications de puissance, il s'avère parfois nécessaire pour le concepteur d'appréhender avec plus de précision les conditions du transfert de la chaleur vers l'extérieur de ces sources submicroniques de dissipation, ceci dans le but d'en traiter les conséquences sur la fiabilité.

Pour illustrer cette problématique, le cas des transistors « Metal Oxide Semiconductor », ou MOS, est exposée. Cette technologie de transistors de puissance représente la brique élémentaire la plus employée de nos jours.

Un transistor MOS est un composant actif qui se compose d'un substrat semi-conducteur polarisé doté de deux inclusions ayant un dopage opposé, lequel est surmonté d'une électrode métallique appelée grille ou « gate ». Les deux inclusions sont respectivement dénommées le drain et la source.

La vue en coupe de cette structure élémentaire d'un semi-conducteur est explicitée Figure 6.

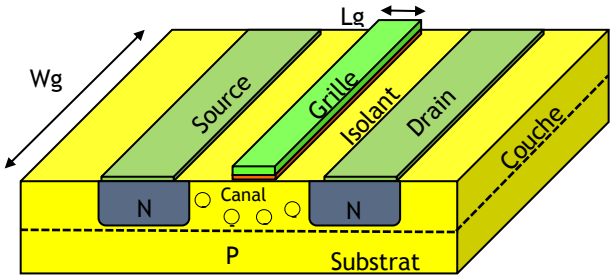


Figure 6 : Concept schématique d'un transistor « Metal Oxide Semiconductor »

Dans le cas d'un MOSFET, la grille est isolée du substrat semi-conducteur par l'intermédiaire d'une couche d'oxyde de silice ou d'oxyde d'Hafnium, un matériau diélectrique de plus forte permittivité dit « High-K ». L'avantage d'utiliser ce matériau est de minimiser les courants de fuite.

Cette couche caractérise la capacité du transistor, elle dépend des dimensions de la grille ($L_g \cdot W_g$), de la permittivité de l'isolant ($\varepsilon = 3.9 \text{ @ } 20°\text{C \& } 1\text{KHz}$) et de son épaisseur ($d$) [R3].

$$C_g = L_g \, W_g \, \varepsilon / d \qquad \text{(e2)}$$

La mise sous tension de la grille produit un champ électrostatique qui va engendrer la transmission du courant entre la source et le drain et par conséquence va provoquer l'échauffement du substrat.

Celui-ci est très localisé, typiquement la profondeur du canal de conduction, la modélisation phénoménologique de sa température reste à parfaire.

Les paramètres géométriques les plus influents pour caractériser la dissipation thermique sont la longueur (L_g) et la largeur (W_g) de la grille.

Il est à noter que l'affinement de la taille des gravures agit directement sur la longueur du canal (L_g), celle-ci ne cesse d'être miniaturisée. Elle a été abaissée en 20 ans de 0.8µm à 0.18µm.

Ainsi un transistor réalisé à partir d'une technologie 0.18µm couvre une surface sur la puce 99.7 fois plus petite. La largeur de la grille varie de 10µm à 200µm.

Un exemple de motif, présenté dans la thèse de Cheik DIA [55], est repris dans la Figure 7.

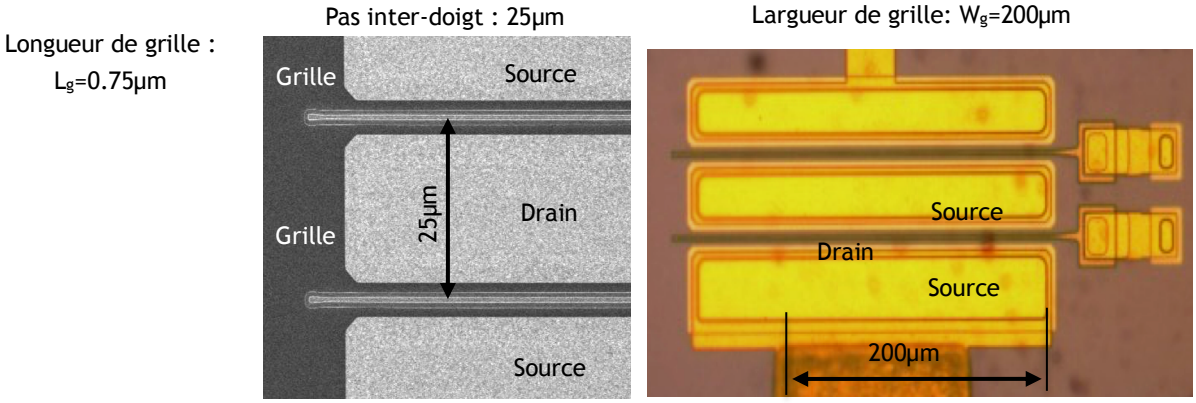


Figure 7 : Vue de la gravure surfacique d'un transistor à double grille

Celui-ci décrit l'architecture industrielle d'une fonction électronique possédant de multiples doigts de grille dont la taille est désormais submicronique.

La métallisation surfacique du drain et des sources est faite en or. Au vu de ces dimensions, il est clair que les ratios d'échelle pour une modélisation au niveau d'une carte électronique vont être très larges.

La couche d'oxyde n'est pas toujours présente, c'est le concept de la technologie de transistors dite « Metal Semiconductor Field Effect Transistor » d'où l'acronyme MESFET.

Souvent, ceux-ci sont des semi-conducteurs à base d'Arséniure de Gallium (AsGa ou « GaAs » pour les anglo-saxons) au lieu du silicium, Figure 8, en raison de ses caractéristiques de très faible bruit et de sa forte bande passante.

La conductivité thermique de ce semi-conducteur est beaucoup plus faible, ainsi à 125°C, celle-ci est réduite à 32W m^{-1} K^{-1}, alors que celle du silicium est égale à 102.5W m^{-1} K^{-1}. Le drainage de la chaleur crée au sein du canal est par conséquent réduit de 30%.

Ceci exacerbe les contraintes thermiques liées à l'emploi de cette technologie de transistors.

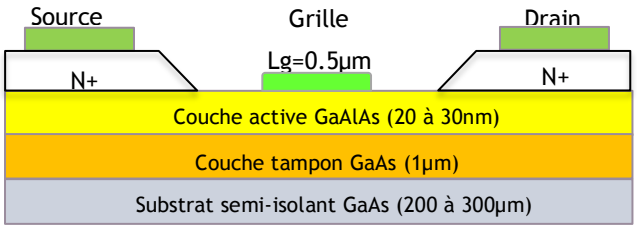


Figure 8 : Structure élémentaire d'un transistor MESFET GaAs

Pour les applications hyperfréquences, la technologie est dénommée « High-Electron Mobility Transistor » d'où l'acronyme HEMT.

Le semi-conducteur est dans ce cas du nitrure de gallium (GaN) et le substrat est en carbure de silicium (SiC) comme le présente la Figure 9.

L'utilisation de ce matériau favorise une meilleure dissipation de la chaleur due à une conductivité thermique supérieure. En effet, sa conductivité thermique à 125°C est égale à 221W m^{-1} K^{-1} et celle du GaN est de l'ordre de 115W m^{-1} K^{-1}.

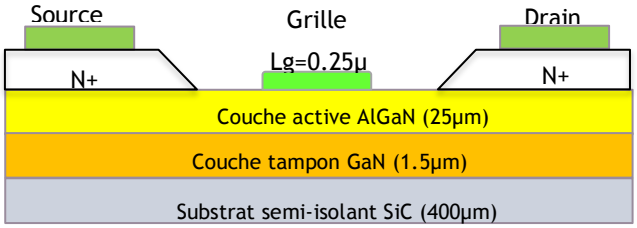


Figure 9 : Structure élémentaire d'un transistor HEMT GaN

Il est évident que ce couple de matériaux est plus efficace pour l'évacuation des calories et accentue la durée de vie pour des températures maximales proches de 200°C.

Ce type de semi-conducteurs constitue un nouvel axe de recherche [R4]-[R5] pour les transistors de puissance, ou « power-semiconductor », en raison de propriétés électrothermiques supérieures par rapport au silicium ou à l'Arséniure de Gallium.

La Figure 10, issue de la thèse de Teyssandier [R6], synthétise les domaines de fréquence des différents semi-conducteurs et l'évolution des performances en termes de puissance.

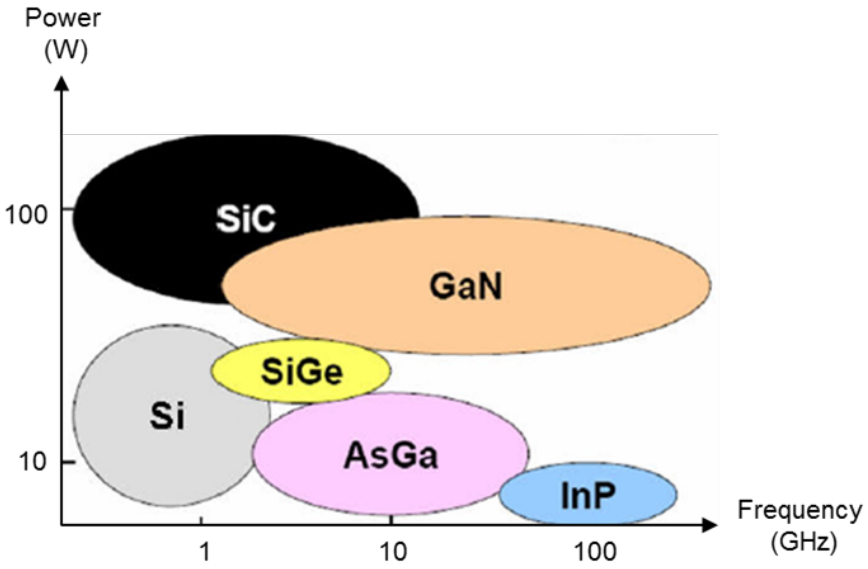


Figure 10 : Gamme de performances des matériaux semi-conducteurs

Ainsi, les transistors HEMT-GaN ont la capacité de fonctionner à haute fréquence et de délivrer une puissance sortie de plusieurs dizaines de watts.

La puissance dissipée est généralement donnée sous la forme d'une densité de puissance linéique, laquelle est exprimée en Watt par millimètre de grille comme l'indique la Table 4.

Table 4 : Dissipations typiques des transistors HEMT-GaN filière $L_g = 0.25\mu m$

Gamme de fréquence	3-4GHz	10GHz	30 GHz -40GHz
Densité de puissance linéique	30W/mm	7W/mm	0.75W/mm - 5W/mm

Plusieurs étages d'amplification peuvent également être mis en œuvre.

Les distances entre les étages d'amplification sont généralement suffisamment grandes, Figure 11, pour considérer chacun des transistors isolément.

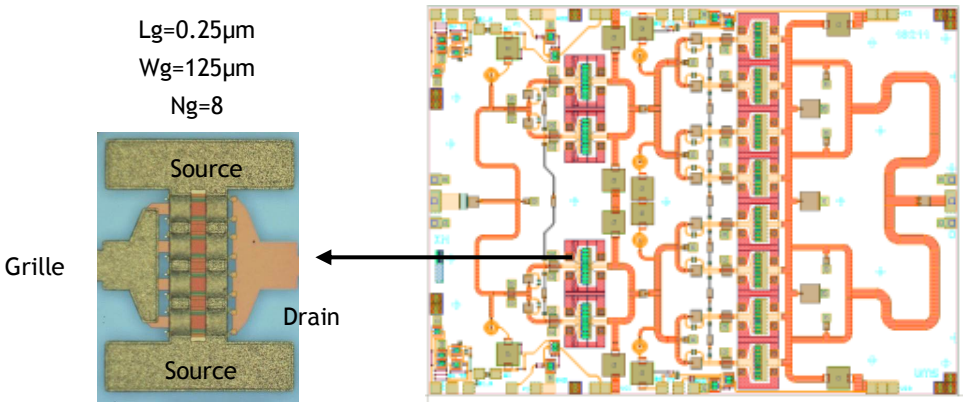


Figure 11 : Photographie d'une conception d'une puce électronique HEMT-GaN-0.25

Pour caractériser leur limitation thermique, on définit la notion d'une résistance thermique en degré Celsius par Watt (°C/W) ou en Kelvin par Watt (K/W).

En raison des propriétés thermiques des semi-conducteurs, celle-ci n'est pas linéaire. En effet, sa valeur va varier en fonction de la température du fond de puce et de la puissance dissipée au niveau de la grille, en particulier pour l'Arséniure de Gallium, comme l'indique la Figure 12.

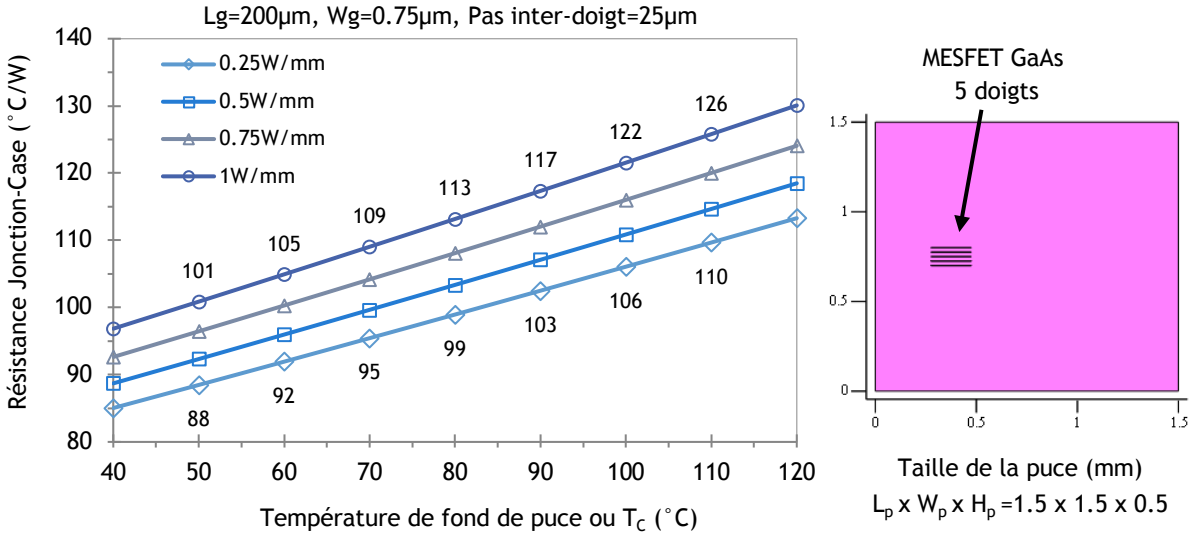


Figure 12 : Évolution de la résistance thermique d'un étage d'amplification d'un MESFET GaAs

Cette courbe présente le comportement thermique du doigt central de la grille d'un transistor constitué de 5 doigts dont les dimensions sont précisées sur le graphe.

Dans cet exemple, la longueur totale de grille est égale à 1millimètre, dès lors il est aisé de déterminer la température atteinte au centre du doigt centrale à partir de l'expression (e3).

$$T_J = R_{JC}\, \dot{q}\, L_g\, N_g + T_C \qquad \text{(e3)}$$

Ainsi pour une densité de puissance linéique ($\dot{q}$) de 1W/mm, celle-ci sera proche de 195°C pour une température de fond de puce de 80°C.

Dans des conditions similaires, l'emploi du nitrure de gallium grâce à une conductivité thermique plus élevée va abaisser les résistances thermiques des étages d'amplification. Il est dès lors envisageable d'augmenter la densité de puissance linéique pour ce type de semi-conducteur.

A l'instar des puces en Arséniure de Gallium, celle-ci va varier en fonction de la température de fond de puce et de la puissance linéique à évacuer.

Cette évolution est retranscrite en Figure 13.

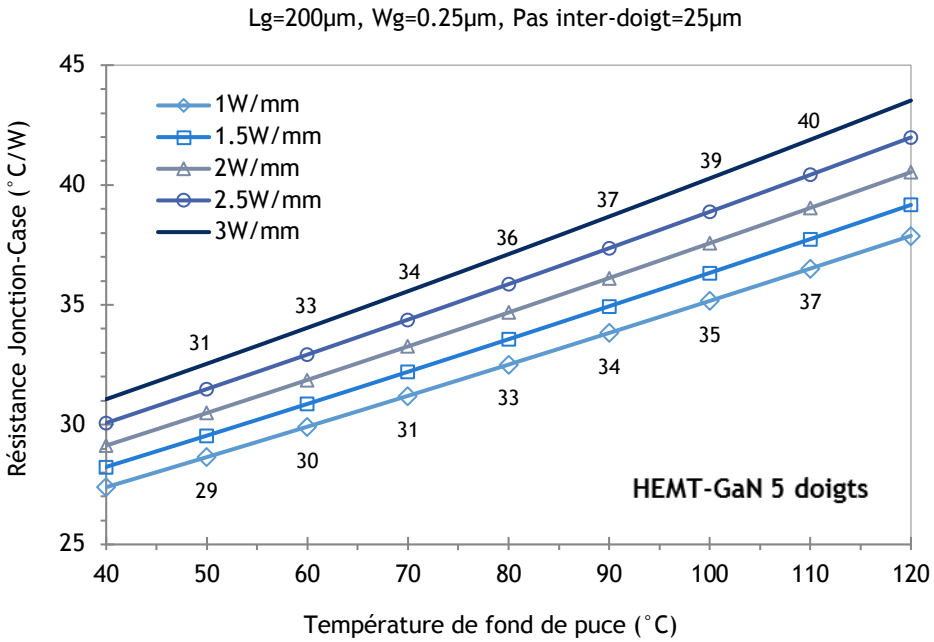


Figure 13 : Variation de la résistance thermique pour un HEMT-GaN

Indubitablement les contraintes thermiques vont être significativement amplifiées lorsque la puce est fortement sollicitée dans un environnement sévère.

L'enjeu est par conséquent de maintenir la température de fond de puce la plus basse possible, c'est l'un des rôles du boitier électronique assurant un fonctionnement sécurisé de la puce.

Leur conception doit également prendre en considération leurs connexions au système qui les intègrent. Le nombre d'interconnexions et la puissance à évacuer vont ainsi orienter sa définition.

Les différentes alternatives mises en œuvre par les concepteurs de composants électroniques sont relatées dans la section suivante.

D1.3. Notion de défaillance des semi-conducteurs

La fiabilté des transistors au sein d'un boitier est établie en fonction de leur temps de fonctionnement sans défaillance. Les anglo-saxons utilisent un indicateur pour quantifier la durée de vie d'un composant, celui est dénommé « Mean Time Between Failure », ou MTBF.

A partir de l'observation d'un échantillon de N individus, sur une période de temps donnée et des conditions de fonctionnement fixées, une probabilité de défaillance est estimée.

Celle-ci suit une loi exponentielle empirique connue pour les composants électroniques sous le nom de loi d'Arrhenius.

$$\lambda_T = C\, exp[\, E_a/k_b\, T\,] \qquad \text{(e4)}$$

- Le paramètre λ_T correspond au taux de défaillance
- Le paramètre C est une constante dépendante du matériau,
- Le paramètre E_a est l'énergie d'activation des réactions chimiques (eV),
- Le paramètre k_b est la constante de Boltzman égale à $8.76 \cdot 10^{-5}\ eV/K$,
- Le paramètre T désigne la température absolue de référence (K).

Cette loi corrèle l'accélération des mécanismes d'endommagement liée à la température.

Pour les composants électroniques, les paramètres expérimentaux C et E_a sont répertoriés dans des standards de fiabilité prévisionnelle tels que la norme américaine MIL-HDBK-217 ou le recueil FIDES.

L'intérêt de cette expression est d'établir un critère, ou facteur d'accélération, susceptible d'interpréter l'impact d'une utilisation d'un semi-conducteur, au-delà d'une température de fonctionnement, dite « Normal Use » condition, désignée par ci-après par le terme $T_{J_{NU}}$.

$$AF_T = exp\left[\frac{E_a}{k_b}\left(\frac{1}{T_{J_{NU}}} - \frac{1}{T_{J_{MU}}}\right)\right] \quad \text{(e5)}$$

La valeur de $T_{J_{MU}}$ représente quant à elle, la température vue dans des conditions de fonctionnement plus drastique ou « Modified Use » condition.

La Figure 14 décrit l'évolution, en ordonnée, de cette accélération des mécanismes d'endommagement pour un circuit intégré de type bipolaire en fonction de la température.

La valeur de leur énergie d'activation (E_a) est fixée à 0.7eV. Celle-ci est extraite de la norme ayant pour référence MIL-HDBK-217.

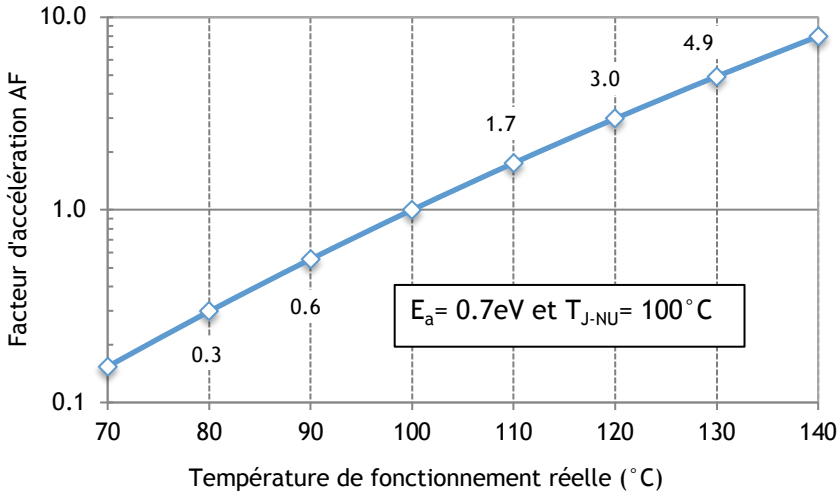


Figure 14 : Matérialisation des effets du vieillissement thermique d'un circuit intégré

Dans cet exemple, la température de fiabilité ($T_{J_{NU}}$) est limitée à 100°C afin de garantir ses performances. Le facteur d'accélération est égal à 1 pour cette condition.

Naturellement, un fonctionnement à une température supérieure provoquera une réduction de sa durée de vie.

Cette dernière sera dégradée d'un facteur 1.7 pour un dépassement de 10°C ou d'un facteur 3 si celui-ci est de 20°C.

Indéniablement, le maintien d'une température de jonction au plus proche des conditions nominales de fonctionnement est primordial.

Cette approche peut-être également utile pour définir des tests de vieillissements accélérés destinés à statuer sur la fiabilité, ou non, d'une conception.

A contrario, il est possible de programmer sa non-durabilité afin d'augmenter le taux de renouvèlement vers une technologie plus récente.

D2. La miniaturisation des composants électroniques

D2.1. Les circuits intégrés

Des composants électroniques toujours plus petits et performants, c'est ainsi que peut se résumer l'évolution technologique opérée ces dernières décennies par les acteurs de ce segment d'activité.

Traditionnellement, les semi-conducteurs sont insérés dans un boitier individuel de protection désigné par l'anglicisme « packaging ».

Outre le semi-conducteur, le « packaging » incorpore également une structure métallique plus ou moins complexe ainsi que des fils de câblage assurant son interconnexion au circuit électrique d'une carte électronique.

La Figure 15 présente la principale orientation technologique du « packaging » au cours des dernières décennies, à savoir le « packaging 3D », anglicisme traduisant la mise en boitier de plusieurs semi-conducteurs capables de réaliser de multiples fonctions électroniques.

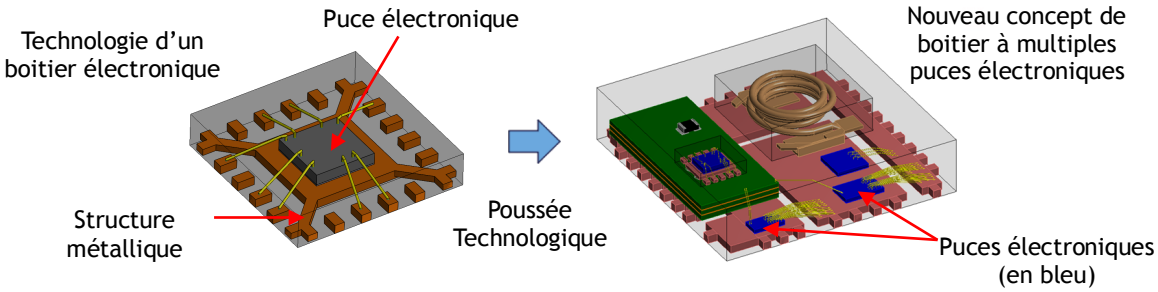


Figure 15 : Illustration de la densification des fonctions des composants électroniques

Ce perfectionnement technologique des boitiers est continu. Ainsi chaque année, de nouveaux boitiers vont supplanter progressivement les technologies plus anciennes devenues obsolètes. Eux-mêmes seront à courts termes remplacés par l'émergence d'autres concepts.

Un bon exemple de cette obsolescence concerne la disparition programmée des composants dits à piquer dont les connexions électriques traversaient le circuit électronique les accueillant.

Cette technique de montage appelée par les anglo-saxons « Plated Through Hole », ou PTH, est de nos jours très marginale comme le montre la Figure 16 (aire en bleue).

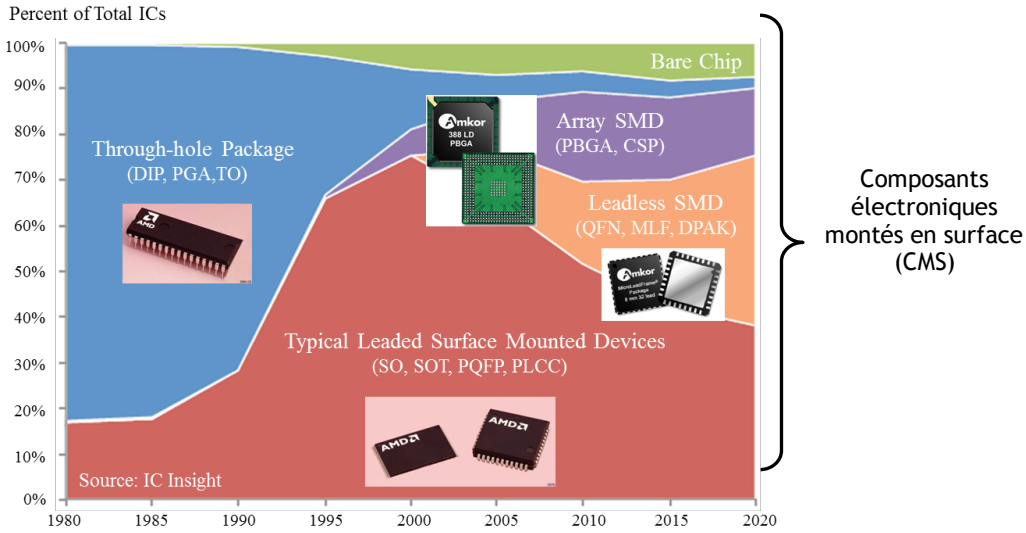


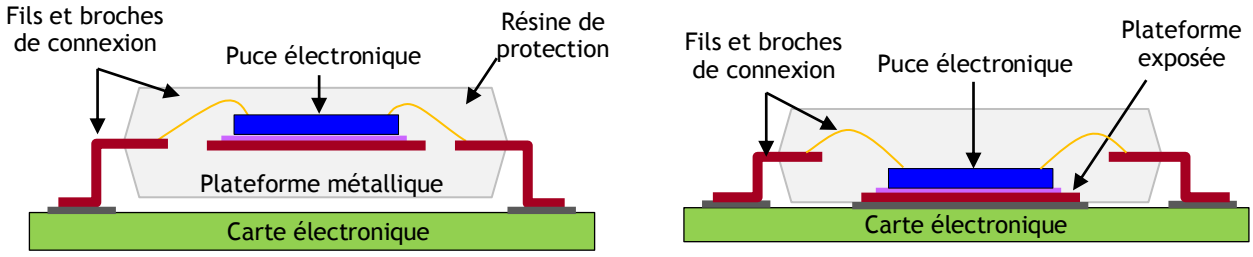
Figure 16 : Évolution des technologies de report des composants

Cette figure décrit également la transition sur plusieurs décennies du mode de report des boitiers.

Ainsi, le montage en surface des composants électroniques est devenu le principal mode de report, un procédé désigné par l'abréviation « CMS », ou l'anglicisme « SMD ». En 2020, 97% des Circuits Intégrés seront soudés par ce mode d'interconnexion.

Les zones en rouge, en orange et en violet décrivent l'évolution de la forme des broches de connexions électriques, laquelle a été modifiée pour garantir des conditions de brassage optimales ou pour réduire la surface occupée par le composant.

Cette transformation s'est ensuite poursuivie par une optimisation des chemins thermiques avec pour objectif de restreindre le niveau de température du semi-conducteur, comme l'illustre la Figure 17.



Boitier « Leaded SMD - Small Outline » Boitier « Thin Shrink Small Outline – Exposed Pad »

Figure 17 : Évolution des technologies des composants à broches externes en « L »

Cette optimisation s'est traduite par un positionnement de la source de chaleur, la puce en bleu, au plus près du puits thermique, matérialisé en vert par la carte électronique.

Ce déplacement vertical des éléments constitutifs du boitier a abouti à une baisse significative de la résistance thermique entre la puce et la carte. Cette minimisation est principalement liée à l'élimination de la lame d'air inhérente à ces boitiers.

A l'instar des broches externes, le fond de ces boitiers dits « thermiques » doit être impérativement reporté par brasure sur la carte pour garantir l'efficience du transfert de chaleur.

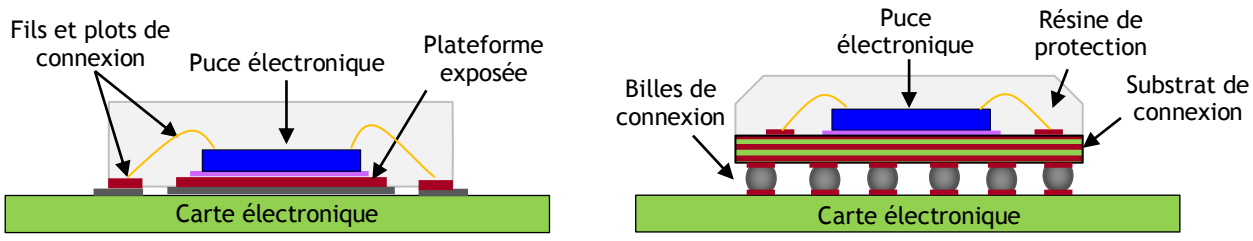
Comme évoqué, les fabricants ont engagé au cours des années 2000 une optimisation de la surface nécessaire à l'implantation d'un composant sur une carte.

Deux nouvelles technologies de boitier ont émergé, à savoir les composants sans broches externes (zone en orange) et les composants dotés de billes de brasure (zone en violet). L'ensemble des connexions électriques est ainsi regroupé en dessous de la face inférieure du boitier.

En raison d'un besoin croissant en nombre d'entrée et de sortie, ces derniers se sont imposés progressivement au dépend des boîtiers à broches externes de type « Small Outline » (Figure 17).

Ceux-ci s'attachent également à favoriser les transferts thermiques vers la structure de la carte.

Les principales caractéristiques de ces deux types de boitiers sont dépeintes dans la Figure 18.



Boitier « *Leadless SMD - Quad Flatpack No-lead* » Boitier « *Plastic Ball Grid Array - Chip scale package* »

Figure 18 : Évolution des technologies de connexion des composants électroniques

Les différentes dimensions de ces boitiers et la nature des matériaux utilisés ont été explicitées dans la thèse de Cheikh-Tidiane Dia [55]. Leurs dimensions sont reprises en annexe P1.1 et P1.2.

Aussitôt qu'une technologie est mature, des boitiers notablement plus compacts apparaissent avec pour objectif de réduire constamment la taille des composants électroniques.

Ces versions minimisées de boitier sont alors désignées avec par un ensemble d'anglicismes tels que : « Shrink », « Low profile » ou « Thin ».

Cette capacité à assembler des puces électroniques de la façon la plus compacte possible est illustrée par les Figure 19 et Figure 20.

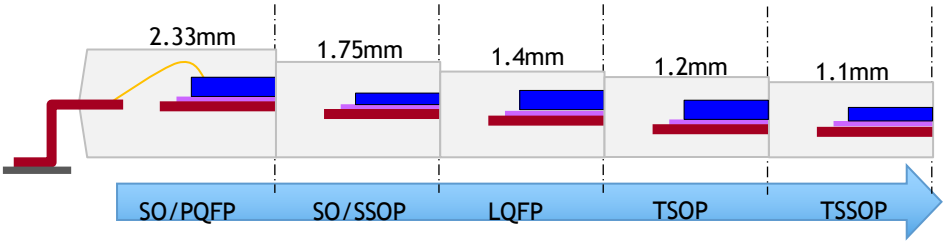


Figure 19 : Réduction continue des épaisseurs des composants électroniques

Ainsi en quelques années, la hauteur des circuits intégrés a été divisée par 3, ceci grâce à un agencement judicieux des éléments les constituant.

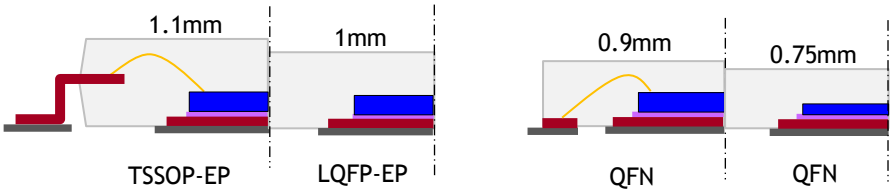


Figure 20 : Réduction continue des épaisseurs des composants électroniques

En parallèle de cet amincissement, le pas des broches ou des billes n'a cessé de se resserrer.

En conséquence, le boitier est toujours plus resserré autour de la puce, Figure 21.

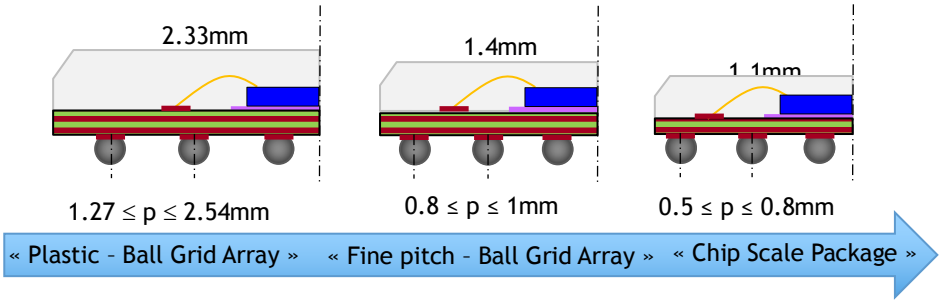


Figure 21 : Illustration de la minimisation des pas d'interconnexion électrique

Une tendance traduite par l'anglicisme « Chip Scale Packaging » (CSP).

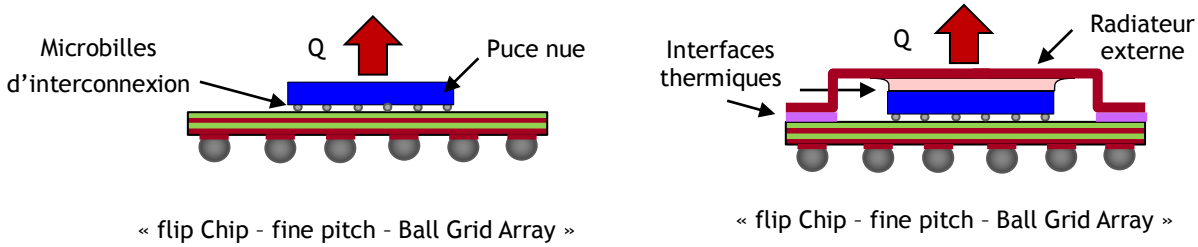
Cette densification surfacique concentre progressivement la source de chaleur et a pour conséquence d'accentuer fortement les difficultés à la diffuser efficacement vers le puits thermique que constitue la carte.

Il faut souligner que l'enrobage plastique propre à ce type boitier contrecarre le transfert thermique vers le fluide avoisinant. En fait, ces matériaux sont très peu conducteurs de la chaleur, leur conductivité thermique n'excède pas 0.8W m^{-1} K^{-1}.

Ceux-ci sont constitués d'un amalgame de silice et de résine polyuréthane. Leur rôle est d'isoler le semi-conducteur des multiples agressions inhérentes à des environnements extrêmes.

Toutefois, le transfert de la dissipation du composant vers la carte peut s'avérer insuffisant, des solutions alternatives sont alors proposées.

La Figure 22 montre l'exemple d'un boitier « Ball Grid Array » où le semi-conducteur (en bleu) est sur la vue de gauche apparent et sur celle de droite, il est relié à une structure métallique (en rouge) dans le but de drainer plus efficacement la chaleur vers un puits thermique (radiateur, caloduc, etc.).



« flip Chip – fine pitch – Ball Grid Array »

« flip Chip – fine pitch – Ball Grid Array »

Figure 22 : Boitiers électroniques favorisant un transfert thermique indépendant de la carte

On remarque qu'à l'opposé des boitiers précédents, la puce est connectée électriquement au boitier au moyen d'une nouvelle technologie de report dite « wafer bumping technology ».

Un ensemble de microbilles de brasure (98.2% Sn/1.8% Ag) est électro-déposé sur la surface d'un disque de silicium désigné par l'anglicisme « wafer ». Ce disque comprend plusieurs dizaines ou centaines de semi-conducteurs.

La Figure 23 présente un exemple de fabrication de puces électroniques où le câblage filaire conventionnel est remplacé par un jeu de microbilles disposées sur sa périphérie (cercles en noir).

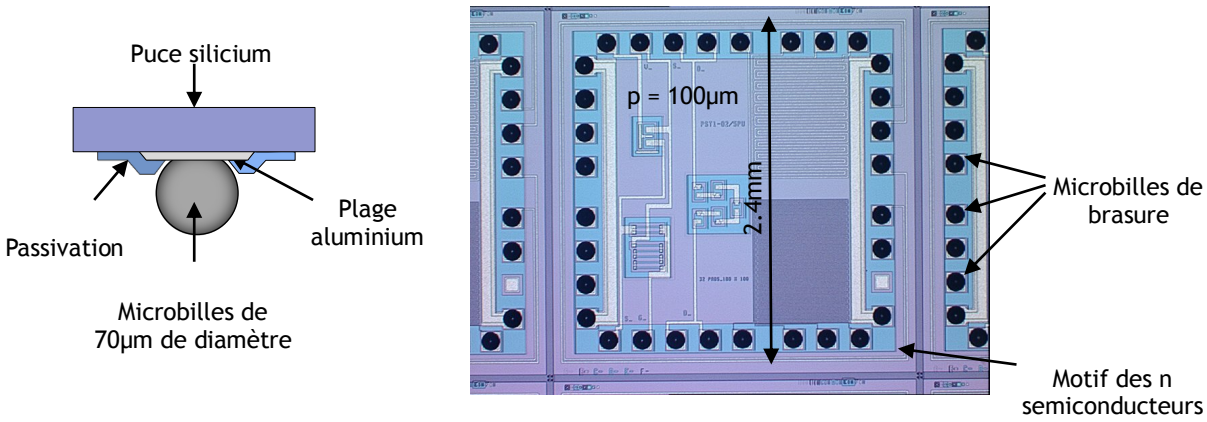


Figure 23 : Interconnexion par microbilles d'une puce électronique

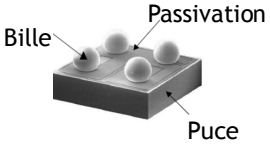
Le diamètre des microbilles d'interconnexion est de l'ordre de 100 microns, leur nombre peut dans certains cas excéder le millier.

Plus récemment, dans le but de connecter directement les semi-conducteurs sur le substrat d'une carte électronique, cette technologie a été adaptée. Pour ce faire, la taille des microbilles a été augmentée afin de satisfaire aux contraintes thermomécaniques et ainsi répondre à cette nouvelle exigence d'utilisation.

Les dimensions typiques de ce boitier à l'échelle de la puce sont données Table 5.

Table 5 : Évolution du mode d'interconnexion des semi-conducteurs

Épaisseur de la puce	Pas inter-bille	Hauteur des billes	Diamètre des billes
150µm ≤ H ≤ 450µm	0.3mm	170µm	200µm
	0.4mm	210µm	250µm
	0.5mm	250µm	300µm



Cette évolution technologique est désignée par l'anglicisme « Wafer Level Packaging » (WLP) ou « Wafer Level Chip Scale Packaging ». Bien entendu, le développement de ce « packaging » à l'échelle de la puce s'accompagne des nouvelles problématiques tels que des phénomènes d'électro-migration des matériaux des joints brassés.

Force est de constater que cette minimisation de l'interconnexion électrique des semi-conducteurs ou des boitiers électroniques va favoriser une nouvelle étape dans la miniaturisation des composants électroniques montés sur une carte électronique.

Pour accompagner la réduction de la taille gravure des transistors, aujourd'hui en deçà des 20nm, le nombre de points d'interconnexion, ou d'entrées-sorties, entre le composant et la carte est de plus en plus important.

Par exemple pour un composant de type « Ball Grid Array » (BGA), en fonction de sa taille, le nombre de billes va excéder le millier comme l'indique la Figure 24.

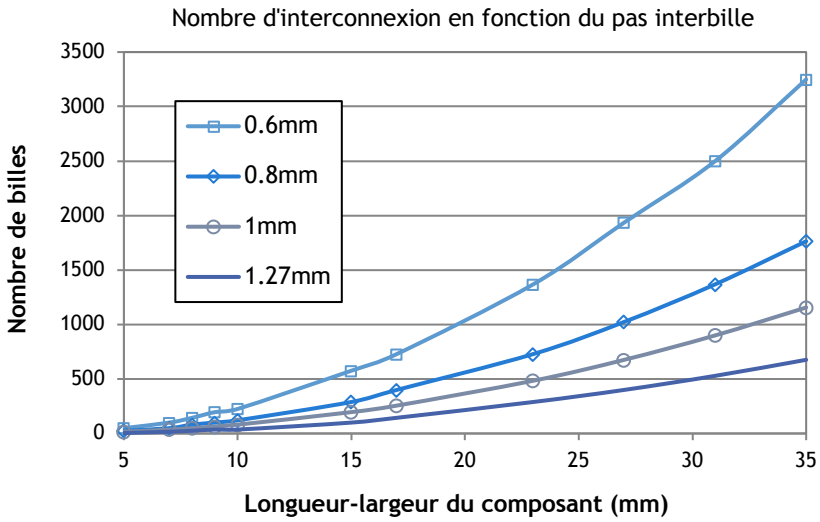
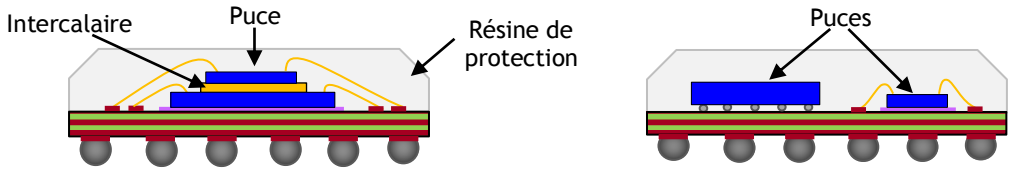


Figure 24 : Évolution du nombre d'interconnexion boitier-carte

Plus récemment, de nouveaux concepts de composants électroniques dits 3D ont été développés. Cette nouvelle architecture est basée sur la possibilité de concevoir un boitier doté de plusieurs semi-conducteurs, on parle alors de « Multi-Chip Module » ou MCM.

Cette conception modulaire autorise une large diversité de combinaisons de fonctions électroniques, comme l'illustre la Figure 25. Les puces, ou « die », sont intégrées horizontalement ou verticalement au sein du boitier afin d'accentuer les fonctionnalités du composant, on parle alors de système.



« Stacked-die – Ball Grid Array » « Side by side – Ball Grid Array »

Figure 25 : Boitiers électroniques à multiples semi-conducteurs

Ces nouvelles conceptions de boitier sont désignées par les anglicismes « Stacked-die packaging » ou « Side-by-Side die packaging ».

De nos jours, pour les applications dans la téléphonie, il est fréquent de voir une superposition de 5 à 6 puces actives combinant des circuits logiques ou mémoires.

D'autres approches sont conçues pour combiner verticalement deux boîtiers discrets, tel l'exemple donné Figure 26. Ce concept est désigné par le terme « Package-on-Package » (PoP).

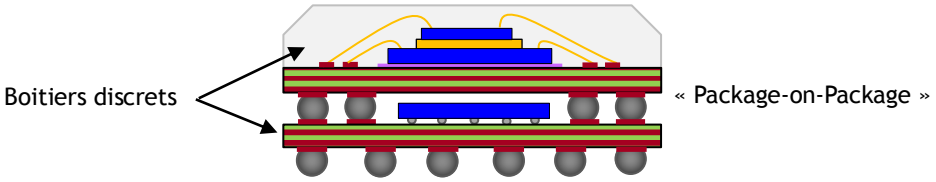


Figure 26 : Assemblage de composants de type « Ball Grid Array »

Bien entendu, les fabricants de composants associent à leur guise ces différentes technologies comme l'illustre la Figure 27.

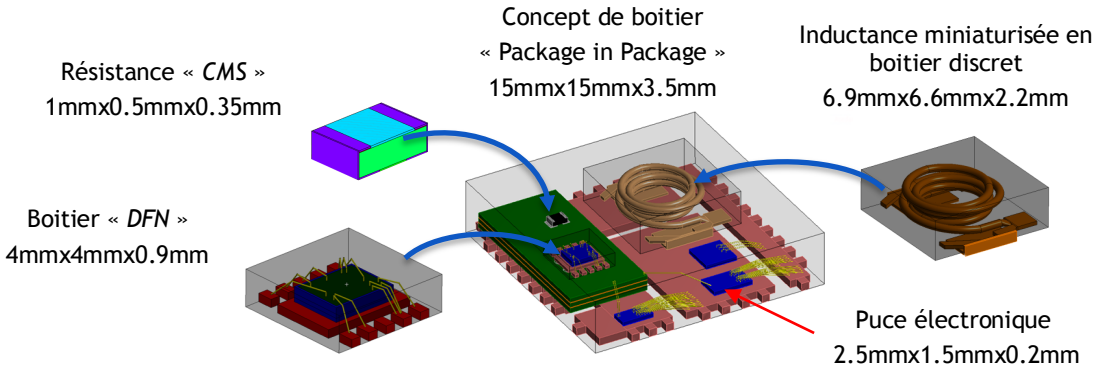


Figure 27 : Exemple de regroupement de multiples types de « packaging »

Cet exemple montre l'utilisation conjointe de semi-conducteurs, de boitiers discrets mono-puce et de composants passifs, défini par l'anglicisme « Package-in-Package ». Le tout est assemblé au sein d'un composant pour former une fonction électronique complète, ou « System in Package » (SiP).

Ainsi beaucoup de boitiers unitaires sont peu à peu délaissés au profit d'un boitier plus complexe.

La Figure 28 montre un exemple industriel d'une phase de fabrication d'un de ces composants.

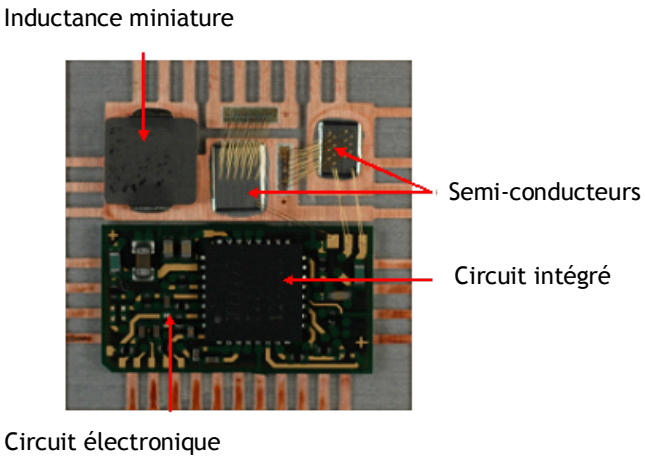


Figure 28 : Assemblage de multiples types de « packaging »

Les fonctions sont déposées sur la plateforme métallique puis recouvert par une résine de la protection. Le découpage des broches de connexion est ensuite opéré.

En quête permanente de performances, les fabricants se tournent dorénavant vers une superposition de ces fonctions électroniques, au niveau du semi-conducteur, on parle de technologie « 3D-IC ».

De multiples de couches de transistors sont superposées comme l'illustre la Figure 29.

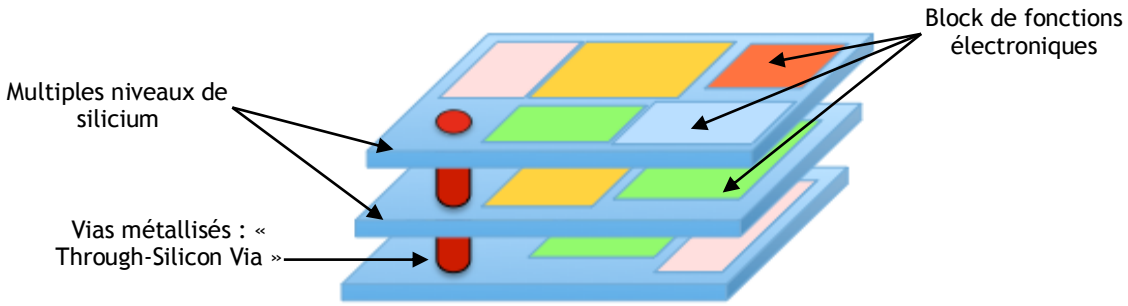


Figure 29 : Principe de conception d'une puce dite « 3D-IC »

Cette architecture à plusieurs niveaux est interconnectée par un ensemble de vias, cette technologie est connue sous le nom de « Through-Silicon Vias » (TSV). Ces trous microscopiques, percés sur toute l'épaisseur du semi-conducteur, autorisent la communication des transistors au travers des couches de silicium qui les portent. Ces centaines de trous métallisés, voire ces milliers, mesurent typiquement 10µm de diamètre sur 80µm de profondeur.

La modélisation thermique du placement de l'ensemble des blocks fonctionnels de ces puces au sein de ces architectures dites « gratte-ciel » est un des enjeux de la prochaine décennie (Figure 30).

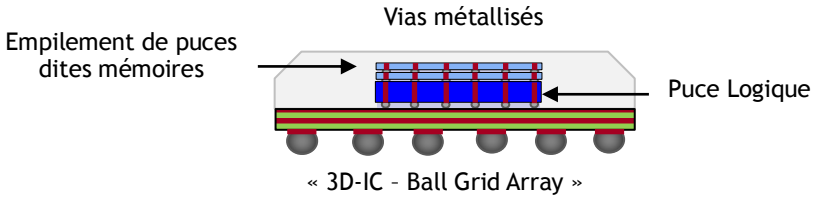
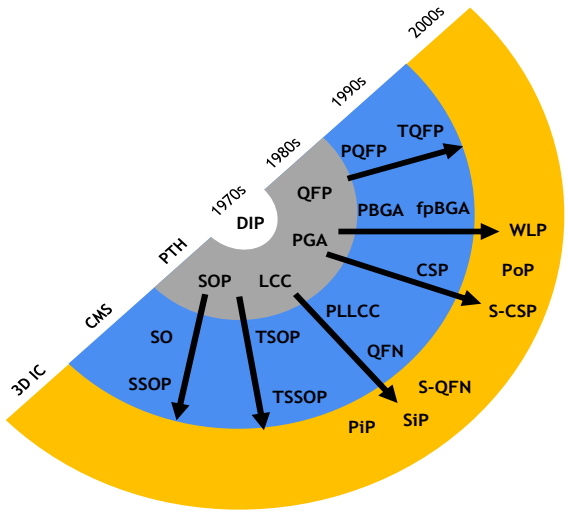


Figure 30 : Principe de conception d'un boitier dit « 3D-IC »

Force est de constater que rien ne semble affecter l'imagination des fabricants pour satisfaire les futurs besoins en termes de géométriques, de performances électriques ou thermiques.

D2.2. Récapitulatif de l'évolution des circuits intégrés

Ces diverses mutations des boitiers protecteurs des semi-conducteurs sont reprises dans la Figure 31.



Définition des acronymes des boitiers CMS :

SO – SOP - Small Outline package,
SOT - Small Outline Transistor,
PLCC - Plastic Leaded Chip carrier,
PQFP - Plastic Quad Flat Pack,
PBGA - Plastic Ball Grid Array,
CSP - Chip-Scale Package,
QFN - Quad Flat No-lead package,
MLF - Micro Lead Frame package,
WLP – Wafer Level Package,
PoP – Package on Package,
S-CSP - Stacked Chip-Scale Package,
SiP – System in Package

Figure 31 : Chronologie du développement des boitiers de protection des puces électroniques

D3. Performances thermiques des circuits intégrés

Cette mutation incessante des architectures des boitiers, encapsulant les semi-conducteurs, génère des contraintes thermiques toujours plus drastiques pour les semi-conducteurs, présents en leur sein.

La définition d'une résistance thermique R_{JA} traduit la capacité à évacuer la chaleur de l'élément le plus sensible du composant, la jonction du semi-conducteur, vers son environnement.

$$T_J = R_{JA}\, Q + T_A \quad ou \quad T_J = R_{JA}\, Q + T_\infty \tag{e6}$$

- Le paramètre Q correspond à la puissance créée par le semi-conducteur présent dans le boîtier. Conventionnellement elle est supposée uniformément répartie sur la surface supérieure de la puce.
- Le paramètre T_J est la température maximale du semi-conducteur et la plus élevée du boitier.
- Le paramètre T_A représente la température de la pièce où sont situés la carte et son composant.

La démarche pour réaliser cette mesure de performances a été formalisée par le standard américain JEDEC-JESD51 [R7] sous la forme d'un ensemble de guides.

Ces guides fournissent un ensemble de spécifications telles que :

- La définition de la puce thermique de test [R10],
- La conception de véhicules de test dits 2s0p [R9] et 2s2p [R12],
- Les conditions d'environnement à mettre en œuvre ; convection naturelle [R8] et forcée [R11].

La Figure 32 décrit la représentation d'un véhicule de test élaboré à partir de ces recommandations.

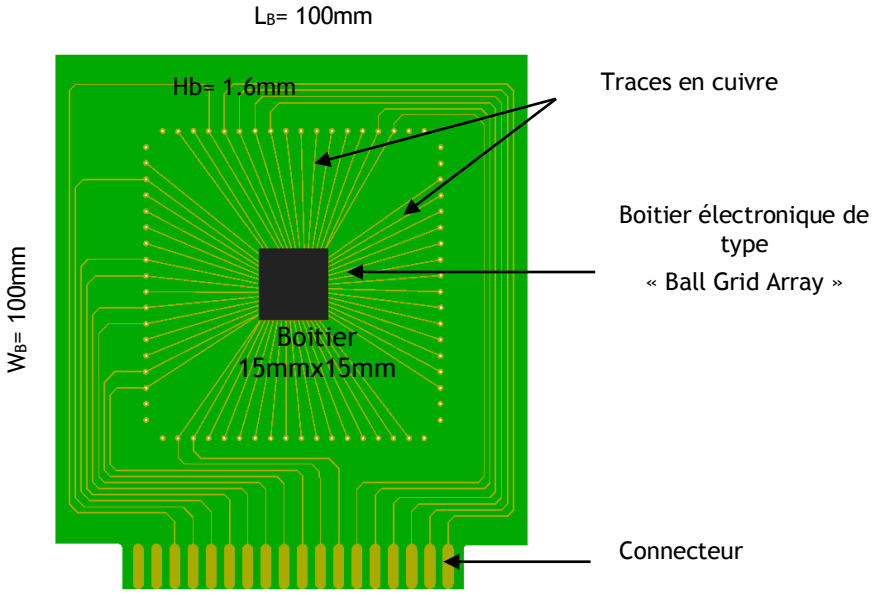


Figure 32 : Exemple de carte de test pour la caractérisation d'un composant

La définition de cette résistance thermique est complexe car elle cumule d'une part les échanges de chaleur du composant avec le fluide environnant et d'autre part ceux vers la carte.

La valeur de la résistance thermique est par conséquent assujettie à :

- La constitution et à la taille de ce véhicule de tests,
- La puissance dissipée,
- La taille de la puce.

En définitive, la connaissance de cette résistance thermique s'avère peu exploitable en dehors de ces conditions de mesure.

Toutefois, cet indicateur de performance facilite la comparaison entre différents types de boitier.

Les Figure 33 et Figure 34 présentent l'évolution de la résistance thermique en fonction de la taille du boitier pour des composants de type « Ball Grid Array » et « Chip Scale Package ».

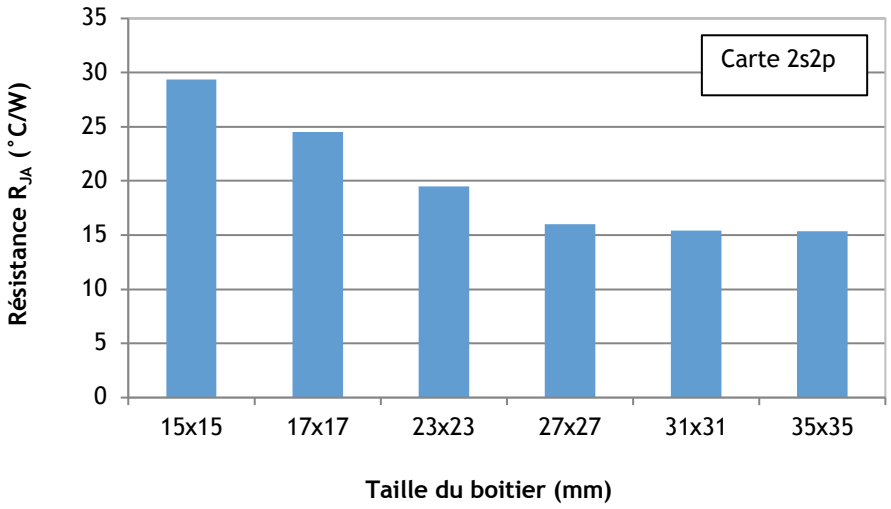


Figure 33 : Métrique thermique d'un boitier de type « Ball Grid Array » (1990s)

Cette métrique décrit ici l'influence de la taille du boitier sur une carte constituée de 4 couches de métallisation, dénommée « 2s2p », lorsque le composant est refroidi par convection naturelle.

Les boitiers « Chip Scale Package » correspondent à une évolution des boitiers BGAs, où les dimensions du boitier sont très proches des dimensions du semi-conducteur.

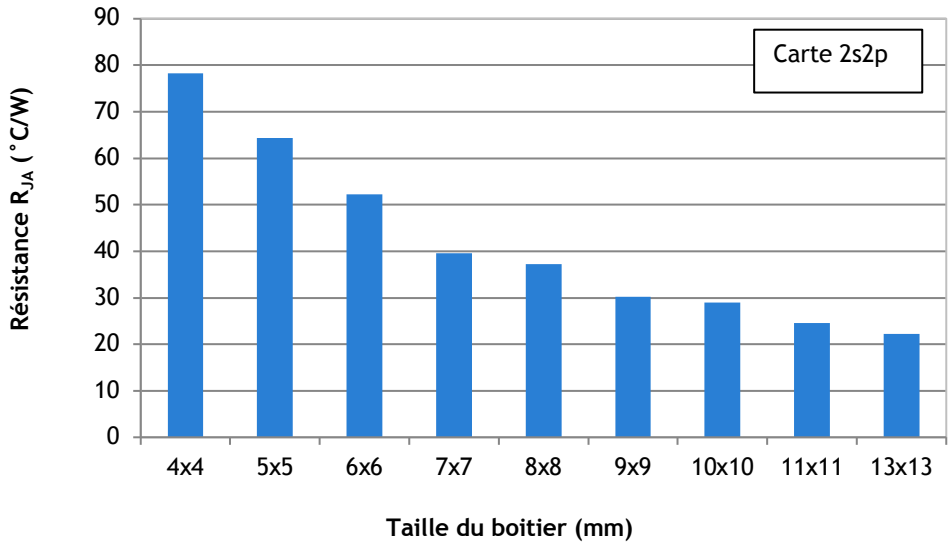


Figure 34 : Métrique thermique d'un boîtier de type « Chip Scale Package » (2000s)

Une description pratique des essais JEDEC est fournie par Ore [R13] dans ses travaux sur la caractérisation de plusieurs boitiers de type BGA.

Les deux graphes présentés montrent que la diminution incessante des tailles de tous les composants électroniques va exiger une meilleure connaissance des transferts thermiques liés à chacun de ces boitiers.

L'enjeu est de mieux maitriser les niveaux de température vus par leurs semi-conducteurs.

A titre d'exemple, le cas d'un boiter BGA-15x15, doté de 208 billes, a fait l'objet d'une validation expérimentale pour différents modes de convection [25]-[51].

Ce composant a été équipé d'une puce thermique suivant les recommandations du standard JEDEC. Ce semi-conducteur est capable de relever avec précision la température centrale de la puce et d'imposer une dissipation dûment contrôlée grâce à un élément résistif.

L'analyse menée [25]-[51] compare également la modélisation numérique détaillée de la structure de ce boitier BGA, en particulier le substrat d'interconnexion (Figure 18) entre la puce et celui de la carte.

La géométrie du boitier étudié est synthétisée par la Figure 35.

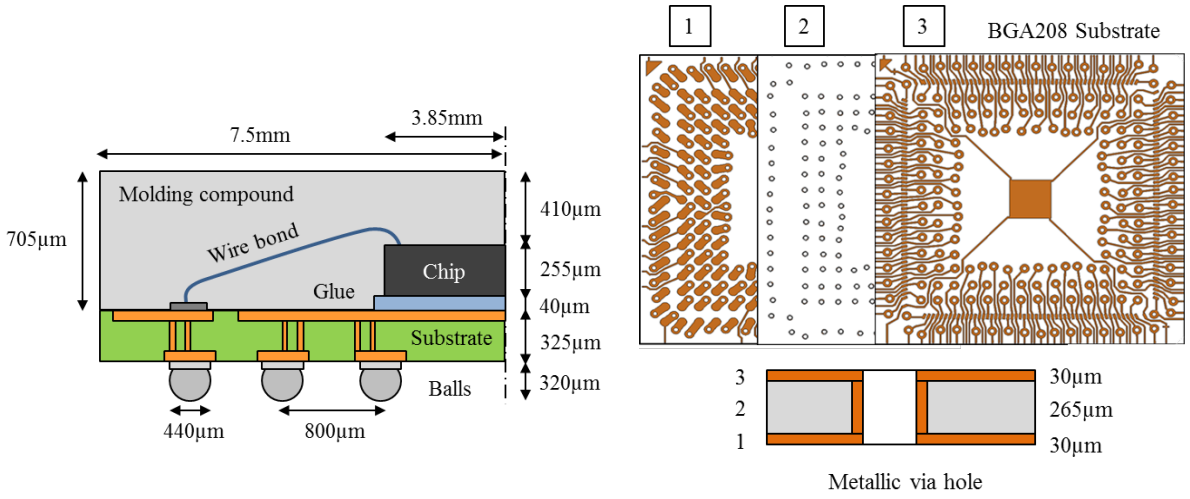


Figure 35 : Description géométrique du BGA208 expérimenté

Cet exemple illustre l'architecture tridimensionnelle et l'enchevêtrement des liaisons métalliques assurant l'interconnexion entre le semi-conducteur et la carte.

La Table 6 récapitule le comportement thermique de ce composant en fonction de :

- La constitution de la carte,
- La nature d'échange avec l'environnement,
- La puissance dissipée par la puce thermique.

Table 6 : Relevés de mesures effectuées sur le composant BGA208

Véhicule 2s0p

V (m/s)	T_A (¤C)	Q (W)	T_J (¤C)	$R_{JA}(P_H)$ (°C/W)
0	22.9	2.022	125.7	50.90
1	25.9	3.076	146.2	39.06
2	26.0	2.969	129.1	34.72
3	26.4	2.982	122.1	32.08

Véhicule 2s2p

V (m/s)	T_A (¤C)	Q (W)	T_J (¤C)	$R_{JA}(P_H)$ (°C/W)
0	22.5	2.001	81.0	29.21
1	21.1	3.037	98.0	25.37
2	20.7	3.020	93.0	23.91
3	20.7	3.008	89.6	22.87

Cette analyse met en évidence la nécessité de recueillir auprès du fabricant la définition exacte des conditions expérimentales ayant servi à caractériser ses données thermiques, un exercice souvent difficile.

D'autre part, le standard JEDEC ne traite que des composants disposant d'une seule puce, son extension, aux composants ayant plusieurs puces actives, reste à formaliser.

D4. Les composants passifs

D4.1. Les résistances électriques

Au même titre que les circuits intégrés décrits précédemment, les composants passifs telles que les résistances CMS subissent également une forte miniaturisation. Ces résistances se présentent majoritairement sous une forme rectangulaire.

La Figure 36 illustre le cas d'une résistance CMS.

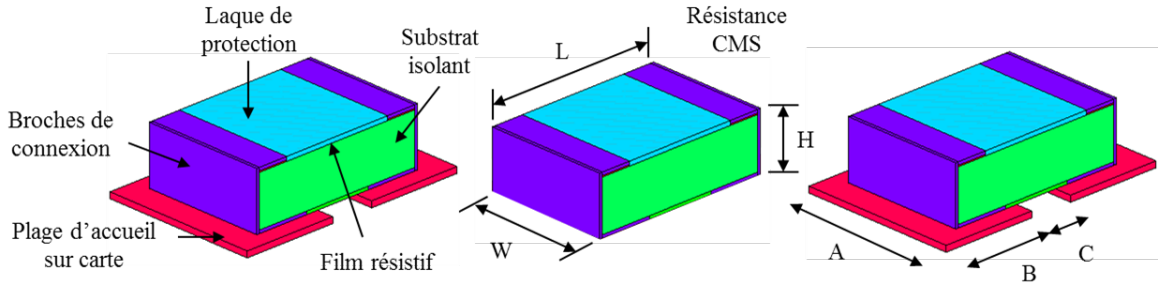


Figure 36 : Exemple de résistance CMS couche mince

Leurs dimensions (L, W, H) sont normalisées et répertoriées en annexe P1.3. La taille minimale (A, B) de la liaison électrique à la carte (ou plage d'accueil) est aussi réglementée.

Au même titre que les circuits intégrés, ces composants sont susceptibles d'être un élément sensible d'une conception en raison de leur taille de plus en plus réduite. Leur dissipation thermique est liée aux phénomènes d'effet Joule dans le film résistif.

Cette partie résistive est constituée d'une mince couche métallique ou d'oxyde métallique déposée sur un substrat le plus souvent en céramique. L'épaisseur, mince (ou « Thin ») ou épaisse (ou « Thick »), et la longueur du film déterminent la valeur de la résistance ohmique.

Là encore, la dissipation doit être maitrisée pour minorer la température au niveau du joint brasé et garantir ainsi sa pérennité. Le transfert thermique schématisé en Figure 37 est pratiquement unidirectionnel. La structure de la carte se comporte comme un dissipateur thermique.

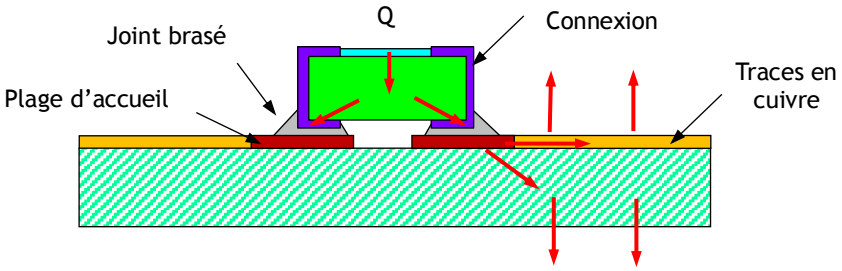


Figure 37 : Représentation des chemins thermiques au sein de l'assemblage

Dans ces conditions, l'évacuation de la chaleur produite par le film de la résistance (partie en bleu) dépend exclusivement des conditions d'assemblage sur la carte, et plus particulièrement des dimensions des plages d'accueil (parties en rouge, Figure 36).

D4.2. Contraintes thermiques liées aux résistances CMS

Les contraintes de ce type de boitier CMS sont généralement caractérisées par la définition d'une résistance thermique reliant le point le plus chaud du film à une de ses connexions à la carte.

La limite de dissipation est conditionnée par la température maximale du joint de brasure, elle ne doit pas excéder 110°C.

Pour fixer un ordre de grandeur, la Table 7 fournit les caractéristiques de trois références de résistance. Le code SI (la seconde colonne) indique la taille du boitier, en millimètres, de chacune des résistances.

Table 7 : Caractéristiques thermiques des résistances électriques dites CMS

Code Anglo-saxon	Code Sys. Int.	Dimensions de la résistance (mm^3)	Puissance maximale (W)	Largeur des pistes (mm)	Surface de la plage d'accueil (mm^2)	Résistance thermique film-ambiante (K/W)	Résistance thermique film-joint (K/W)
1206	3216	3.2x1.6x0.555	0.25	0.1	1.25x1.8	430	67
0603	1608	1.6x0.8x0.455	0.1	0.1	0.85x0.95	648	113
0402	1005	1x0.5x0.35	0.0625	0.1	0.7x0.9	735	142

Ainsi pour la référence 3216, les dimensions, L et W, sont respectivement de 3.2mm et 1.6mm.

Les données thermiques sont établies pour une carte spécifiée par la norme NF140401-802 [R14]. Ses dimensions sont respectivement 100mm, 65mm et 1.6mm, comme l'indique la Figure 38.

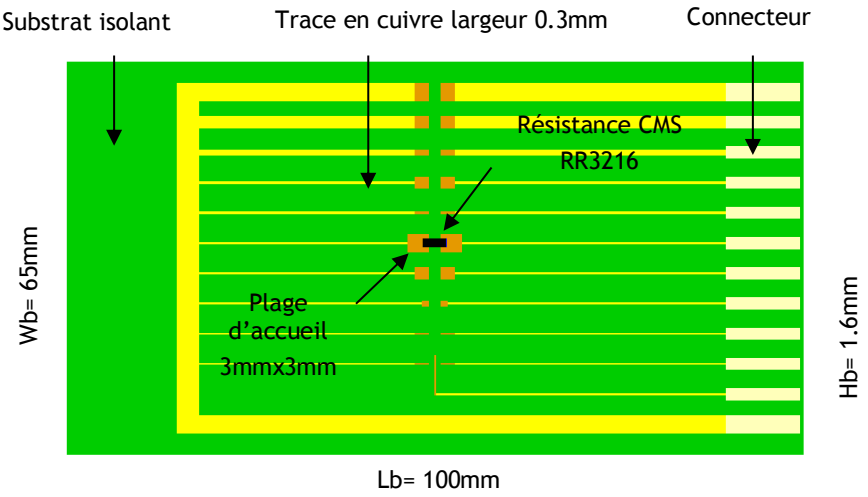


Figure 38 : Véhicule de test pour la caractérisation des résistances électriques en boitier CMS

Ce véhicule de test offre l'opportunité d'analyser l'influence de la largeur des pistes d'alimentation ainsi que de la surface de la plage d'accueil. L'épaisseur des pistes surfaciques en cuivre est de 35µm.

La Figure 39 met en lumière les fortes variations du transfert thermique liées à la largeur de la piste.

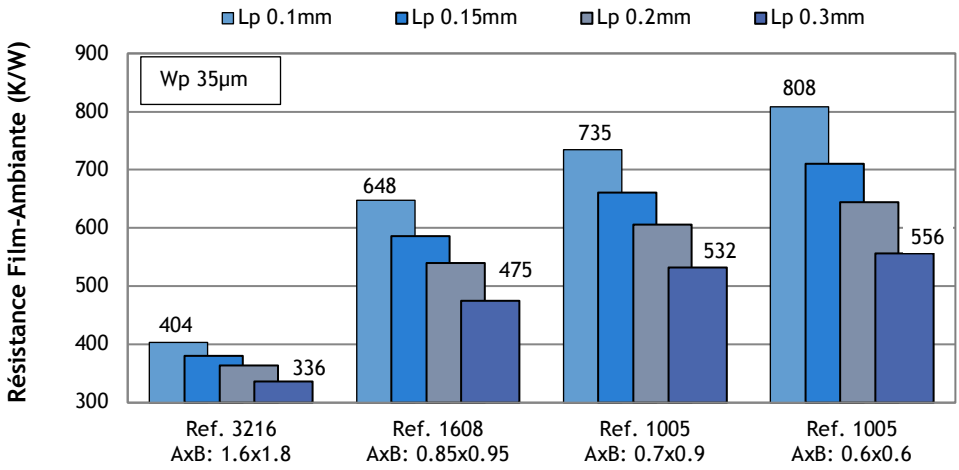


Figure 39 : Influence des transferts thermiques par l'intermédiaire des pistes

L'influence de la largeur des pistes est d'autant plus importante que la taille de la résistance est réduite. La diminution de la plage d'accueil ($A \times B$) contraint également fortement le transfert thermique en particulier dans le cas de la résistance 1005.

La définition du circuit électrique de la carte est clairement le principal élément pour drainer la chaleur dissipée par ces composants miniatures. Au vu des valeurs des résistances thermiques présentées, il ressort que les résistances CMS vont être des éléments sensibles lors de la conception d'une carte électronique.

D5. Diversité des composants CMS

D'autres composants, tels que les inductances de puissance, sont affectés par la miniaturisation.

Leur conception est basée sur la combinaison d'un ensemble d'enroulements cylindriques constituant le circuit électrique et d'une structure magnétique. Cette structure a pour rôle de canaliser les lignes du champ induites par la circulation d'un courant pulsé.

A l'instar des circuits intégrés, les fabricants n'ont de cesse de faire évoluer les formes et les propriétés des matériaux afin de constituer des inductances toujours plus petites.

A titre d'exemple, la technologie traditionnelle utilisant des bobinages à enroulement cylindrique est progressivement remplacée par des technologies de type « planaire ». Le circuit électrique est conçu sur la base de couches en cuivre présentant un profil extra-plat, facilement reproductible.

La structure magnétique, souvent dénommée Ferrite, est à base de poudre fer et de résine. Elle est compressée à haute température autour de ce circuit électrique.

Ces différents aspects sont synthétisés sur les illustrations de la Figure 40.

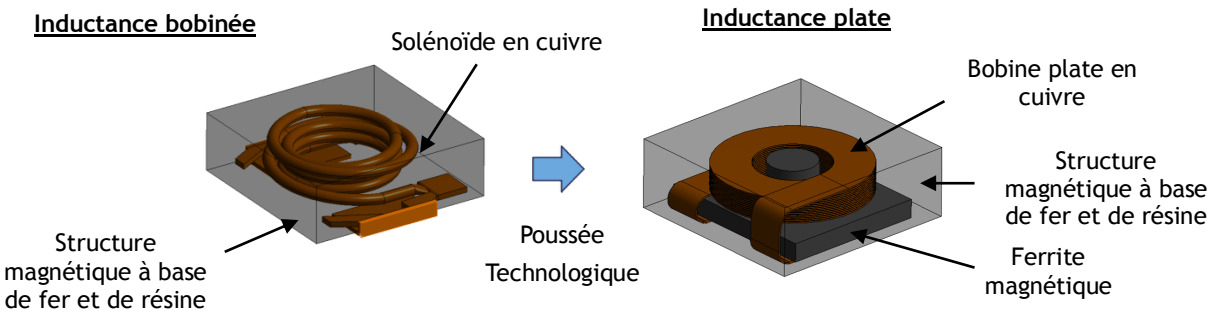


Figure 40 : Conception des inductances miniaturisées dites planaires

Du point de vue thermique, la température maximale vue par les éléments de ces deux inductances va dépendre des pertes liées aux phénomènes électriques et magnétiques.

Les paramètres influents vont être la valeur du courant électrique traversant les enroulements et sa fréquence de fonctionnement, laquelle interagit sur les structures magnétiques (courant de Foucault) et électriques (effet de peau).

Il est à noter qu'au-delà d'une certaine température, les pertes magnétiques vont croitre drastiquement. Généralement la conception d'une inductance est optimisée pour obtenir les pertes minimales lorsque la température est restreinte en deçà de 125°C.

Les contraintes thermiques sur ces composants passifs ne vont cesser de croitre, principalement en raison de la diminution des tensions d'alimentation des semi-conducteurs évoquée au C1. Ainsi, plus la tension sera basse plus le courant sera important, favorisant de ce fait les phénomènes d'effet Joule.

Pour pallier cette problématique de nouveaux matériaux magnétiques sont conçus pour garantir des températures de fonctionnement, au-delà de 125°C.

D6. Notion de défaillance des composants passifs

A l'instar des circuits intégrés, les standards de fiabilité prévisionnelle telle que la norme américaine MIL-HDBK-217 fournissent pour les composants passifs des valeurs d'énergie d'activation.

Ainsi, pour les inductances dites de puissance, celle-ci est fixée à 0.47eV.

A partir de cette valeur, l'évolution du facteur d'accélération des mécanismes d'endommagement pour ce type de composant peut être tracée, comme le montre la Figure 41.

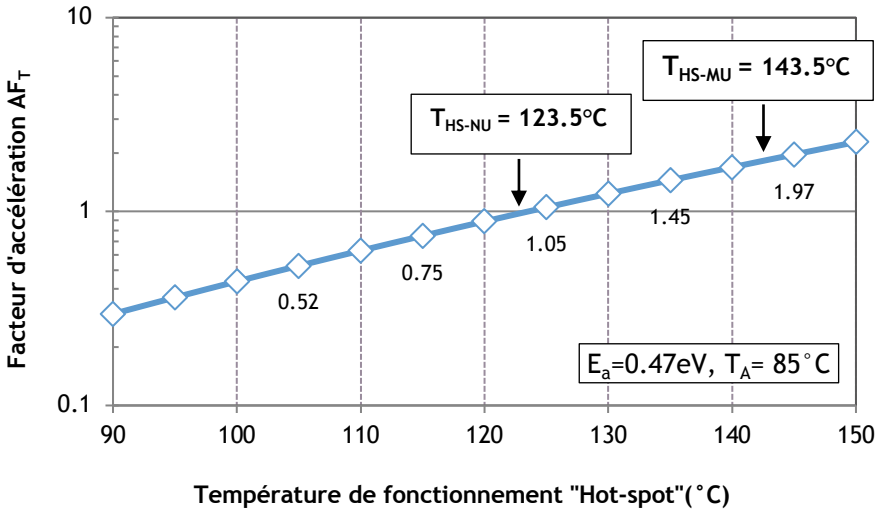


Figure 41 : Effets du vieillissement thermique d'une inductance de puissance

Ce graphe est lié à la connaissance d'une température, dite « hot spot », définie par l'expression :

$$T_{HS-NU} = T_A + 1.1\,\Delta T_{NU} \quad ou \quad T_{HS-NU} = T_\infty + 1.1\,\Delta T_{NU} \tag{e7}$$

Pour un fonctionnement en convection naturelle, la recommandation est de limiter la valeur de l'échauffement (ΔT_{NU}) à 15°C pour les inductances conventionnelles et à 35°C pour les inductances de puissance. Il en découle que la température maximale est de 123.5°C lorsque la température ambiante est de 85°C.

Pour une température de fonctionnement supérieure, l'impact sur sa durée de vie est moins prononcé que celui présenté pour les circuits intégrés (D1.3). Par exemple, la durée de vie d'une inductance de puissance sera dégradée uniquement d'un facteur 2 si le dépassement des conditions normales de fonctionnement excède 20°C (T_{HS-MU}).

Bien évidemment, la détermination d'une manière plus précise des températures vues par les divers éléments d'une inductance nécessite de prendre en compte les phénomènes électriques, magnétiques et thermiques, lesquels sont inhérents à ces composants.

D7. Compacité des nouveaux composants passifs

La recherche incessante, en gain de place et en performances électromagnétiques, se répercute aussi au niveau des transformateurs, lesquels délivrent l'alimentation des systèmes électroniques.

Ceux-ci sont classiquement constitués d'un circuit magnétique autour duquel sont disposés les deux enroulements dits primaire et secondaire.

Ces derniers sont dotés d'un nombre de spires distinct de manière à adapter l'amplitude des tensions ou des courants en fonction du besoin.

A titre d'exemple, le développement des technologies à base d'enroulements plats, évoqué Figure 40, ouvre de nouvelles perspectives de fabrication, en particulier pour les procédés lithographiques destinés au routage des circuits imprimés à multiples couches d'une carte électronique (E).

La conception du circuit électrique peut dès lors être intégrée au niveau du cœur d'une carte.

Cette technologie permet de limiter l'impact de la hauteur de ce composant dans un espace très confiné, comme indiqué dans Figure 42.

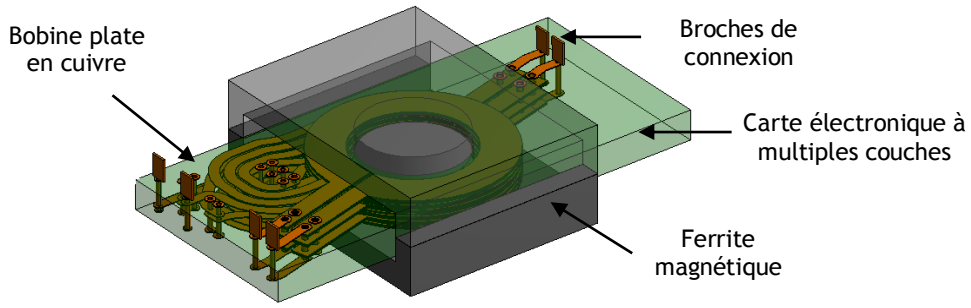


Figure 42 : Concept d'un transformateur à enroulements plats

La structure magnétique de ce type de transformateur est ensuite montée sur les faces de la carte.

Il en résulte un composant plus compact, dont le poids et le volume sont fortement réduits.

Cette quête de compacité ne cesse d'être accentuée afin de répondre aux nouvelles exigences d'une conception électronique toujours plus complexe.

Bien entendu, la limitation des pertes engendrées par les courants élevés, fortement pulsés, circulant dans les enroulements primaire et secondaire va constituer un véritable défi pour la conception des futures cartes électroniques.

Celle-ci devra s'appuyer sur un dimensionnement électrique, magnétique et thermique.

D8. Modélisation des composants électroniques – État des besoins

De cette analyse, il ressort que la conception robuste d'une carte électronique nécessite la création d'une grande variété de modèles de composants électroniques afin de s'assurer de sa définition optimale pour des conditions sévères d'utilisation.

Il est clair que les topologies des composants seront toujours plus complexes et qu'une méthodologie générique pour leur modélisation doit être mise en œuvre. Ceci représente un véritable challenge.

La création de ces modèles va exiger de s'appuyer sur la simulation numérique de phénomènes multi-physiques qu'il s'agira de valider de manière expérimentale.

Le présent mémoire décline les travaux menés sur un ensemble de concepts de modélisation thermique stationnaire visant à mieux maîtriser, par une représentation simplifiée, les transferts de chaleur des différentes technologies de composants répertoriées dans ce chapitre.

Dès lors, la prochaine étape consiste à manager l'interdépendance des températures vues par un ensemble de boitiers électroniques, sur une carte électronique, afin de garantir des conditions optimales de fonctionnement des circuits sensibles intégrés en leur sein.

E. LA DENSIFICATION DES CARTES ELECTRONIQUES

E1. La technologie des substrats des cartes électroniques

La technologie des Composants Montés en Surface (CMS) a favorisé l'implantation des composants électroniques sur les deux faces opposées d'une carte électronique, une étape notable dans l'accentuation de leur densification. Les composants sont susceptibles d'être brassés, sans réserve, indifféremment sur chacune d'elles.

Indéniablement, cette évolution pénalise les capacités d'évacuation de la chaleur des composants au travers de la structure de la carte, en particulier pour des composants placés en vis-à-vis.

Des milliers de composants actifs ou passifs sont associés pour réaliser le nombre de plus en plus conséquent de fonctions électroniques attribué à la carte. Cette multiplicité a considérablement complexifié, ces dernières années, le plan, l'architecture et le nombre de signaux électriques à véhiculer au sein de la structure de leur circuit imprimé.

Un nombre croissant de couches électriques, constitué de centaines de pistes, est indispensable pour exécuter cette interconnexion électrique de l'ensemble des composants.

Aujourd'hui, il est possible de concevoir des circuits imprimés ou PCB (Printed Circuit Board, en anglais) de plus de 30 couches différentes dont le nombre de points de connexion, plusieurs milliers, ne cesse d'augmenter.

A titre d'exemple, la Figure 43 souligne la densification d'une carte électronique industrielle.

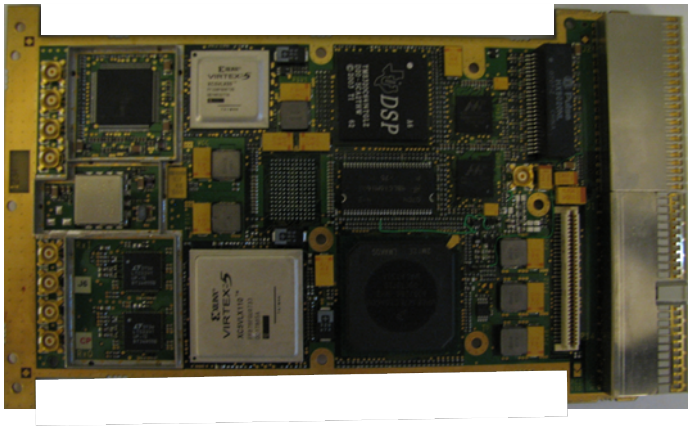


Figure 43 : Carte industrielle conventionnelle

Ces principales caractéristiques sont détaillées ci-dessous :

- Sa longueur, sa largeur et son épaisseur sont égales à 160mm, 100mm et 1.7mm,
- Le nombre de composants montés sur ces deux faces est de 1673,
- 21185 points de connexions sont nécessaires pour relier électriquement ses composants,
- La structure du substrat est constituée d'une juxtaposition de 23 couches alternant 12 couches électriques et 11 couches diélectriques,
- Le nombre total de pistes de cuivre est de 26360,
- La liaison électrique au travers des couches diélectriques est assurée au moyen de 13028 trous métallisés, ou vias.

Le millier de composants électroniques actifs (circuits intégrés) ou passifs (résistances, inductances et condensateurs) de la carte, matérialisé par un ensemble de blocs colorés, est réparti sur ces deux faces comme l'indique les deux vues, de la Figure 44.

Ces vues permettent de visualiser la grande variété des tailles des composants implantés et de mettre en exergue le fort foisonnement des composants sur certaines zones de la carte.

La disposition en vis-à-vis de composants électroniques actifs, à forte densité de puissance, va engendrer de multiples interactions thermiques qu'il s'avère primordial de quantifier avec précision afin de garantir le niveau de performances attendues et de s'assurer de la viabilité de cette conception dans le temps.

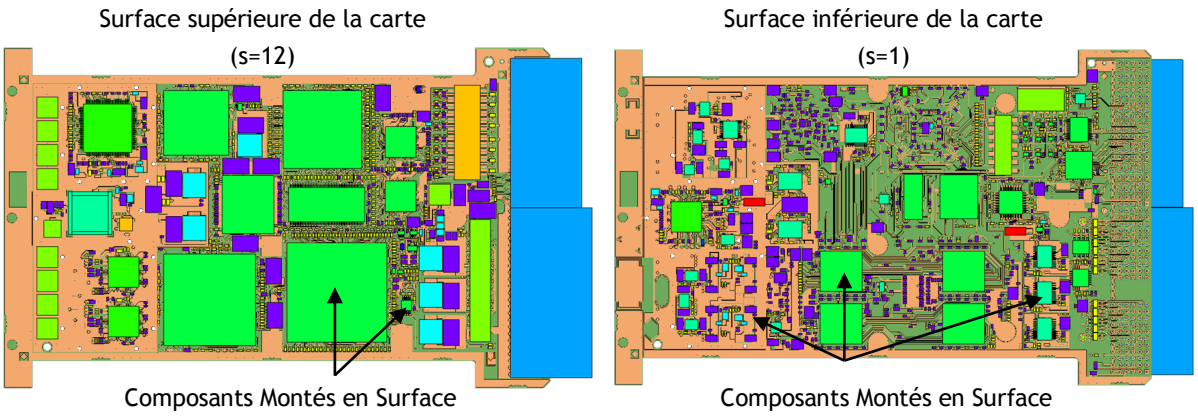


Figure 44 : Foisonnement des composants d'une carte électronique industrielle

La Figure 45 montre la superposition des géométries des traces en cuivre des 12 couches de signaux électriques de cette carte industrielle, un véritable labyrinthe enchevêtré sur 23 niveaux.

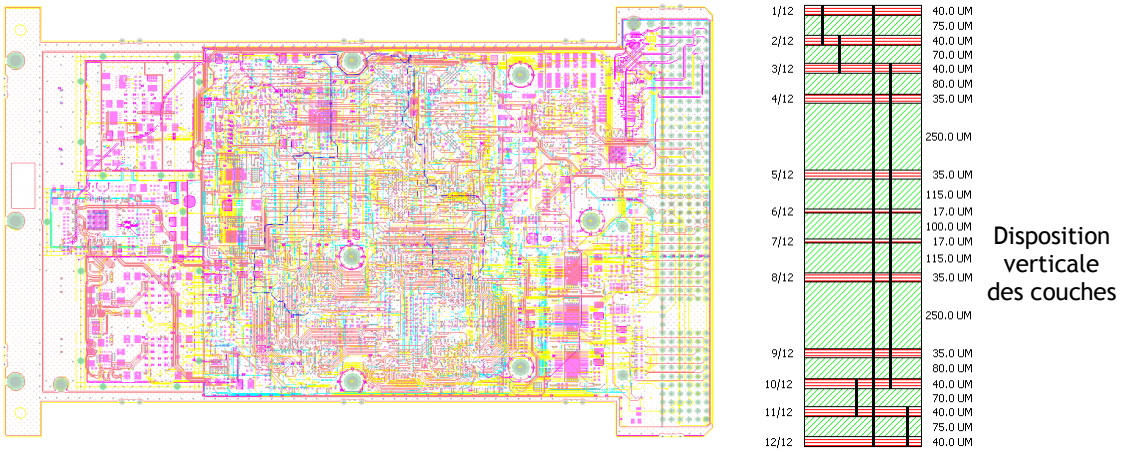


Figure 45 : Enchevêtrement des interconnexions électriques du substrat d'une carte électronique

La Figure 46 met en évidence la complexité pour interpréter convenablement les transferts par conduction thermique dans ce type de structure à multiples couches très hétéroclites.

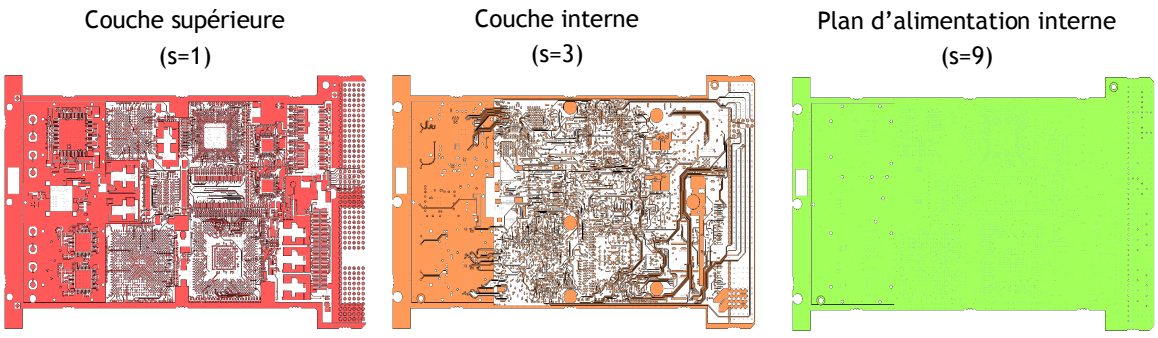


Figure 46: Couverture métallique de 3 couches du substrat d'une carte électronique

L'utilisation pratique de la définition d'un pourcentage de cuivre pour chacune des couches est très approximative en particulier pour les deux couches de signaux présentées (s=1 et s=3), où la répartition des zones de cuivre est très disparate.

Les zones de diélectriques (en blanc), très peu conductrices de la chaleur, vont agir comme un ensemble de barrières thermiques.

Il est par conséquent primordial de les prendre en compte dans le calcul de la diffusion de la chaleur au sein de la carte.

Il convient également de considérer la disposition des couches dans l'empilage et la distribution des vias reliant les couches électriques entre-elles. Celles-ci sont illustrées sur la partie droite, Figure 45.

Cette alternance de couche très conductrice de la chaleur souligne le caractère anisotrope des transferts de chaleurs au sein de cette structure composite homogène.

Indubitablement le transfert thermique de la chaleur générée par le composant vers la carte s'appuie également sur des vias dits thermiques.

Ceux-ci favorisent la conduction thermique vers les couches internes de la carte, en particulier vers les plans de masse, par l'intermédiaire de leur structure métallique annulaire décrite sur la Figure 47.

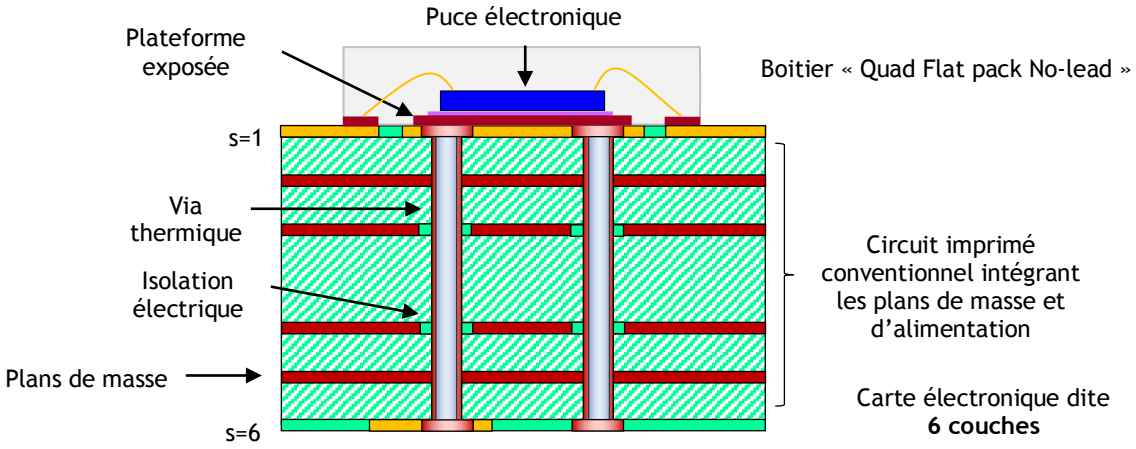


Figure 47 : Exemple de liaison thermique des composants électroniques de type QFN

Ces plans de masse sont très fortement métalisés, plus de 80% de cuivre. Ces couches internes vont par conséquent contribuer à une diffusion longitudinale de la chaleur dissipée par le composant.

Les dimensions du via, leur nombre et leur disposition dépendent du niveau de température recommandé pour garantir un fonctionnement optimal de la fonction de la puce.

En contrepartie, les dissipations des composants l'avoisinant vont influer sur son comportement thermique.

En perpétuelle évolution, les axes de développement des cartes électroniques se concentrent également sur la densification de l'interconnexion électrique, on parle de circuits imprimés désignés par l'anglicisme « High Density Interconnection », ou HDI.

Cette technologie est indissociable de la présence de couches composées de micro-vias, lesquels sont réalisés au moyen d'un perçage laser.

Leurs dimensions sont en conséquence très réduites en comparaison des empilages conventionnels, ceci dans le but de minimiser les impédances des circuits.

La Figure 48 présente le concept retenu pour la constitution d'une carte électronique dite HDI.

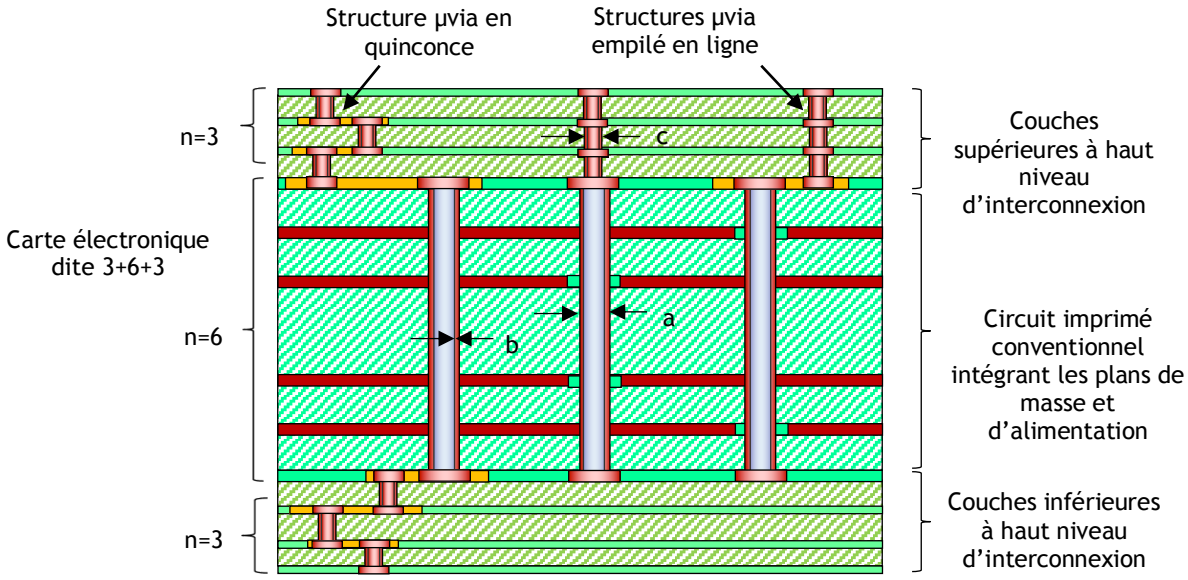


Figure 48 : Illustration de l'utilisation de couches à micro-connections

Ce type d'empilage se retrouve dans la constitution de la carte industrielle décrite en Figure 45.

Les dimensions caractéristiques de ces connexions électriques sont comparées dans la Table 8.

Table 8 : Évolution du mode d'interconnexion des cartes électroniques

Symbole	Définition	Valeur Typique
a	Diamètre d'un via	300µm
b	Épaisseur de métallisation	35µm
c	Diamètre d'un micro-via	125µm

Compte tenu de leur taille, les structures micro-vias peuvent être remplies de cuivre électrolytique et ainsi améliorer le drainage thermique vers les couches intérieures de la carte.

Cette technologie d'interconnexion propose des distances réduites d'isolation entre les couches de signaux surfaciques, celles-ci sont généralement en deçà de 100µm.

La Table 9 fournit des exemples industriels d'agacement pour une carte électronique constituée de 10 couches de signaux, matérialisées en rouge et en orange.

Les couches en rouge correspondent aux plans de masse et d'alimentation. Leur pourcentage de cuivre est communément supérieur à 80%.

Concernant les couches dédiées aux signaux, ce pourcentage excède rarement 15% de cuivre.

En raison des contraintes thermomécaniques la disposition des couches est obligatoirement symétrique.

L'épaisseur globale d'une carte électronique est généralement proche de 1.6mm.

Plusieurs architectures de substrat sont communiquées, le nombre de couches à haut niveau d'interconnexion retenu dépend des fonctions électroniques couvertes par la carte.

Il est clair qu'une prise en compte réaliste par modélisation de cette multitude de chemins miniatures de conduction de la chaleur nécessite de mettre en œuvre des approches méthodologiques capables de reproduire, le plus fidèlement possible, le comportement thermique d'une carte électronique.

Cette modélisation est d'autant plus ardue que les ratios d'échelle entre les dimensions longitudinale et transversale d'une carte électronique, à considérer dans les calculs, sont conséquents.

Table 9 : Comparaison des empilages des cartes HDI et Standard

	Carte Standard	Carte Haute Densité d'Interconnexion (HDI)		
Numéro de couches	Épaisseur totale 1.520mm	Épaisseur totale 1.585mm	Épaisseur totale 1.610mm	Épaisseur totale 1.630mm
1-19	40µm	40µm	40µm	40µm
2-18	150µm	90µm	90µm	90µm
3-17	17.5µm	40µm	40µm	40µm
4-16	150µm	90µm	90µm	90µm
5-15	17.5µm	17.5µm	40µm	40µm
6-14	125µm	200µm	180µm	90µm
7-13	17.5µm	17.5µm	17.5µm	17.5µm
8-12	150µm	180µm	200µm	300µm
9-11	17.5µm	17.5µm	17.5µm	17.5µm
10	150µm	200µm	180µm	180µm

La Figure 49 fournit des dimensions normalisées de certaines cartes électroniques. En règle générale celles-ci font plusieurs centaines de millimètres.

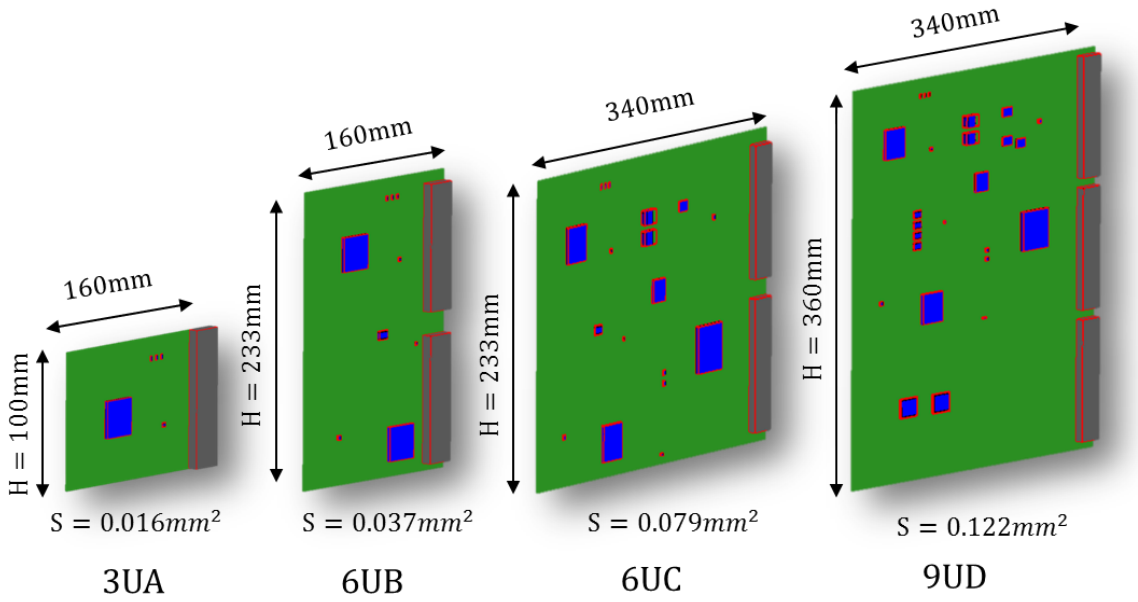


Figure 49 : Présentation de formats standardisés pour carte électronique

Bien entendu, la faculté à développer des niveaux d'implantation de composants de plus en plus dense demeure un perpétuel défi pour les concepteurs de carte.

De nouveaux concepts sont étudiés, par exemple, l'encastrement de semi-conducteurs dans les couches organiques de la carte. Cette technologie récente est destinée à accroitre le nombre déjà élevé de fonctions électroniques.

La Figure 50 dévoile ce concept d'intégration de composants électroniques au cœur de la structure du substrat d'une carte électronique.

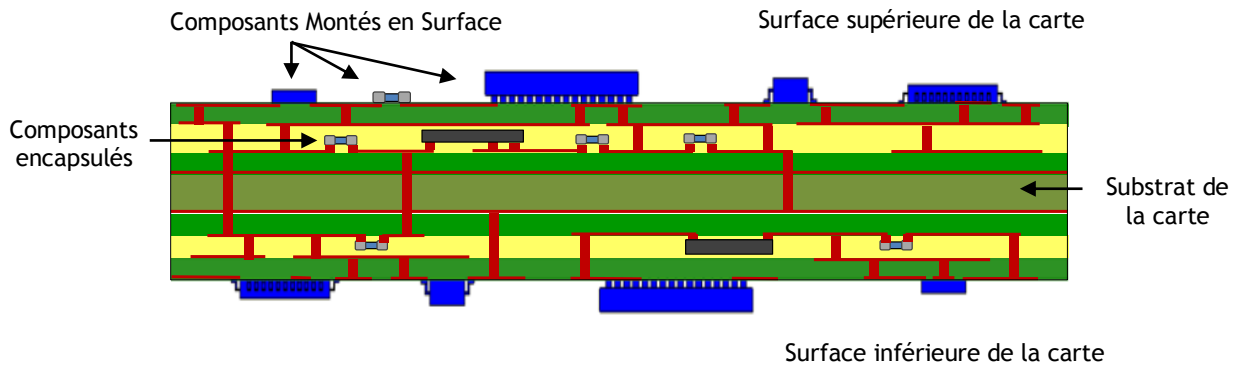


Figure 50 : Concept d'encastrement de composants actifs et passifs dans une carte électronique

Cette concentration de composants et des dissipations inhérentes à la fonction électronique qu'ils remplissent va amplifier les contraintes thermiques déjà rencontrées dans les conceptions actuelles d'une carte électronique.

E2. La modélisation thermique d'une carte électronique

La confirmation des contraintes thermiques au niveau d'une carte électronique est généralement faite grâce à la mesure, à l'ambiante, des températures de surfaces de ces composants. La carte seule est le plus souvent orientée verticalement pour faciliter l'observation de ces faces supérieure et inférieure.

L'utilisation de méthodes de mesure de température intrusives comme les thermocouples est à proscrire. Ceux-ci vont drainer, via leur structure métallique, une partie de la chaleur dissipée par le composant et par conséquent ils influent sur la mesure des températures.

L'usage de caméra infrarouge dotée d'un objectif macroscopique permet de résoudre cette problématique. Toutefois, ce type de mesure nécessite d'établir une caractérisation de l'émissivité des surfaces hétéroclites des composants et du substrat.

Toutefois, cette cartographie des points chauds dans un espace libre est restreinte par la possibilité d'échanger avec l'air ambiant.

En effet, le couplage de la convection naturelle et du rayonnement thermique et celui de la température de transition vitreuse des substrats n'autorisent que de faibles dissipations thermiques.

La nature de l'écoulement du fluide est en général laminaire, le nombre de Rayleigh est par conséquent inférieur à 10^9. Dans ce cas particulier, les échanges entre un solide et le fluide qui l'entoure peuvent être approximés par l'expression ci-dessous :

$$\overline{h}_W = C(T_F)\,[\,(T_P - T_A)/W\,]^{0.25} \quad pour \quad 10^3 \le Ra_W \le 10^9 \tag{e8}$$

$$o\grave{u}\ \ C(T_F) = 0.55\left[\,k_f(T_F)\,\right]^{1-0.25}\left[\,g\,\beta(T_F)\,Cp(T_F)\,\rho_f(T_F)/\upsilon(T_F)\,\right]^{0.25} \tag{e9}$$

$$avec\ \ T_F = (\,T_P + T_A\,)/2$$

La température de paroi (T_P) considère une température uniforme de la carte.

Le coefficient $C(T_F)$ traduit la prise en compte des caractéristiques du fluide, telles que la masse volumique ($\rho_f(T_F)$), la conductivité thermique ($k_f(T_F)$) ou la viscosité cinématique ($\nu(T_F)$) en fonction de la température dite de film (T_F).

La Figure 51 dessine l'évolution de ce coefficient d'échange thermique $\overline{h}_W$ en fonction de la densité de puissance à évacuer, pour les quatre cartes électroniques standardisées dépeintes en Figure 49.

Pour une température de substrat restreinte à 100°C, considérant des conditions sévères d'environnement ($T_A = 70°C$), la valeur du coefficient n'excède pas le 6W m^{-2} °C^{-1}.

En conséquence, la densité de puissance doit être réduite à 1.2W/dm^2.

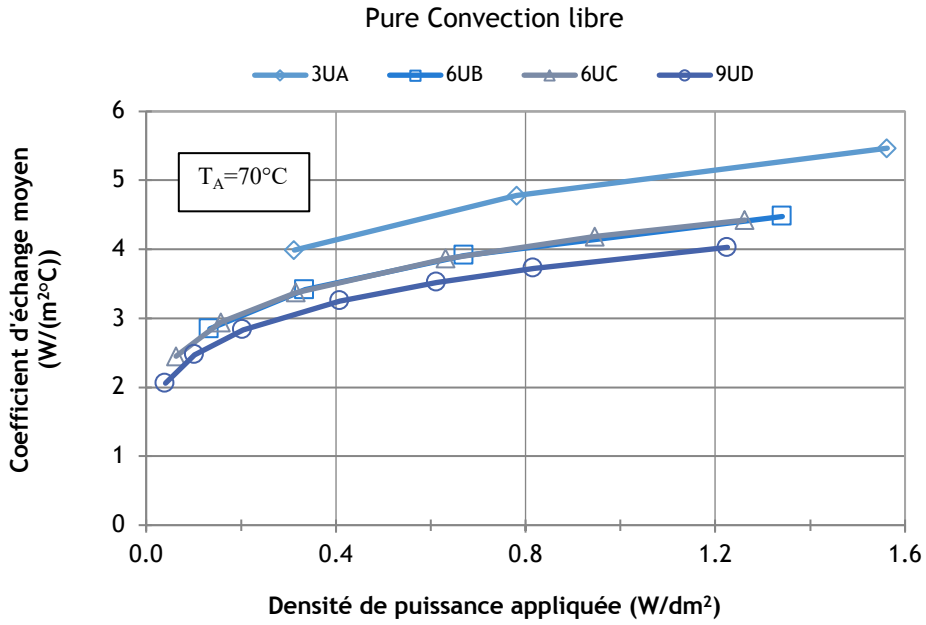


Figure 51 : Évaluation des coefficients d'échange thermique en pure convection

Il est également possible de quantifier l'apport des échanges thermiques par rayonnement thermique, lesquels vont contribuer à l'évacuation de la chaleur transmise à la carte par les composants, vers l'air environnant.

Pour cela, l'expression d'un coefficient d'échange thermique fictif est formulée :

$$\overline{hr} = \sigma\, \varepsilon_p\, f_{P\to\infty} \left({\Theta_P}^2 + {\Theta_A}^2\right) (\Theta_P + \Theta_A) \qquad \text{(e10)}$$

Les paramètres σ, ε et f représentent respectivement la constante de Stefan-Boltzmann, l'émissivité de la carte et son facteur de vue.

La Figure 52 démontre l'importance de la prise en compte de ce mode de transmission de la chaleur.

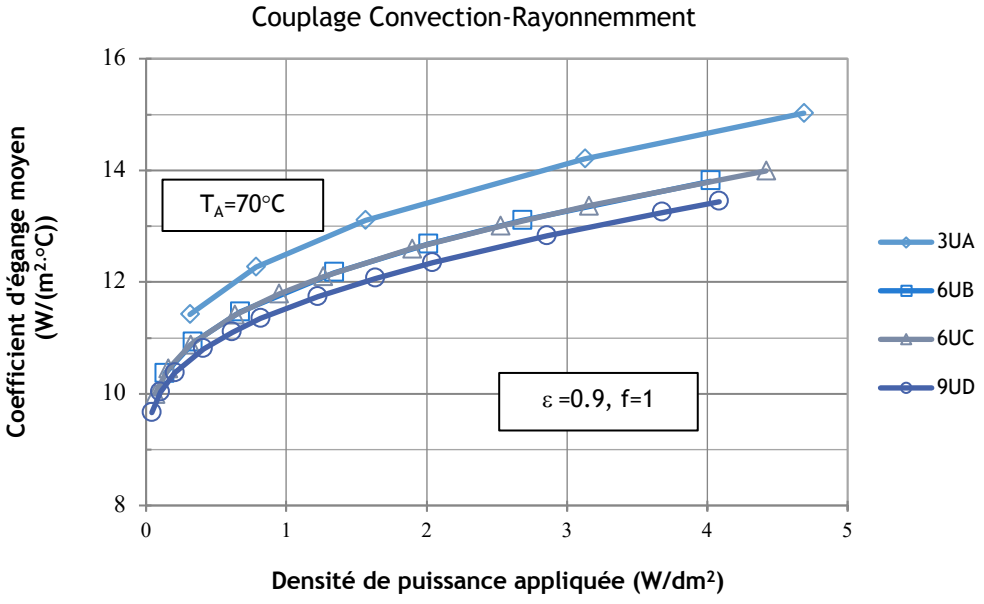


Figure 52 : Ordre de grandeur des coefficients d'échange thermique équivalents

Dans ce cas de figure, la valeur du coefficient d'échange thermique est plus que doublée.

En complément, la Figure 53 décrit l'évolution de la température moyenne d'un substrat en fonction de la densité de puissance à évacuer.

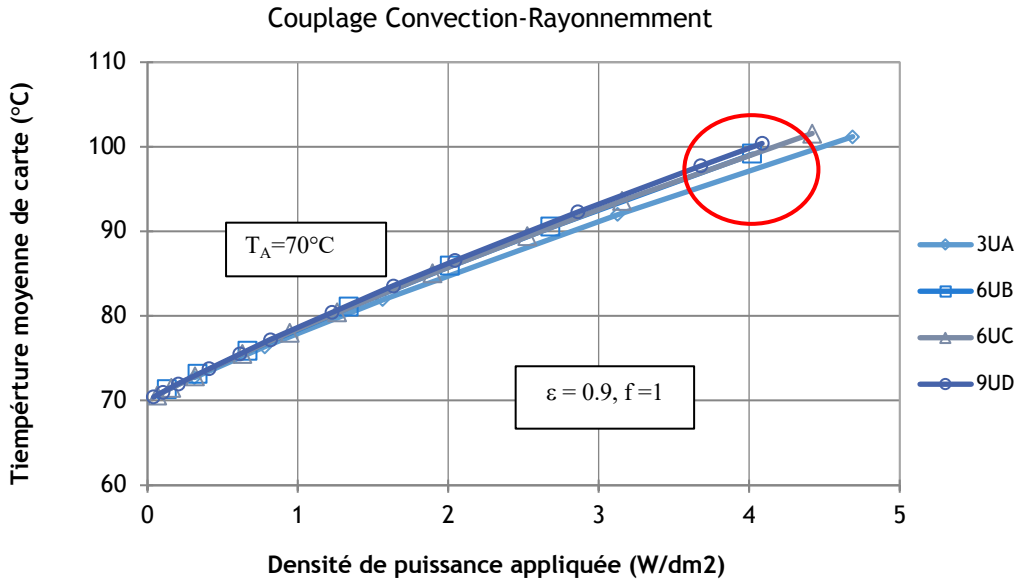


Figure 53 : Limites des échanges thermiques en convection libre en position verticale

Ce graphe établit que pour une température d'environnement de 70°C, quelle que soit la taille de la carte, il est indispensable de restreindre la densité de puissance à en deçà de 4W/dm^2 afin de conserver la température moyenne en dessous de 100°C.

Ces limites seront réduites, dès lors que ces cartes seront placées dans un boitier ayant un espace convectif confiné.

E3. Modélisation des cartes électroniques – L'ambition

Pour aborder la modélisation des cartes, il est indispensable de considérer l'impact de plusieurs centaines de sources de chaleur aléatoirement distribuées sur leurs différentes surfaces, voire en leur cœur.

Cette configuration pratique constitue le point de départ d'un ensemble de modèles analytiques visant à définir les paramètres, nécessaires et suffisants, pour l'établissement de modèles numériques pertinents concernant l'évaluation des températures vues par les substrats des cartes électroniques.

D'autre part, en adéquation avec les contraintes propres à chacun des composants, la vocation des travaux relatés dans ce mémoire vie à imaginer une approche pragmatique capable de rapidement suggérer, par le biais de la simulation thermique, la meilleure distribution géographique tridimensionnelle des composants d'une carte électronique.

Chapitre III

Modélisation thermique nodale des composants électroniques

Ce chapitre synthétise dans un premier temps la recherche de la meilleure représentation du comportement thermique d'un composant sous la forme d'un réseau nodal, plusieurs exemples issus de travaux académiques ou de besoins industriels sont exploités et comparés. Puis il s'attache à retracer les évolutions apportées à la méthodologie proposée par le consortium DELPHI, en particulier sur les méthodes d'optimisation méta-heuristiques, lesquelles offrent l'opportunité de créer des modèles comportementaux réalistes de composants électroniques de plus en plus complexes. Enfin, de nouvelles solutions destinées à améliorer la représentativité des modèles sont suggérées.

Contenu

F. État de l'art - Définition du concept d'un modèle nodal 45

F1. Les principaux aspects de notre besoin initial 45
F2. Des approches peu déterminantes 47
F3. Une approche concourante - Le projet européen DELPHI 49
F4. Transformation de notre approche initiale - Optimisation déterministe 51
F5. Optimisation déterministe avec contraintes 57
F6. Optimisation stochastique - Choix d'une technique d'identification adéquate 59
F7. Processus de recherche d'un algorithme évolutionniste 62
F7.1. Les algorithmes à évolution différentielle 62
F7.2. Les algorithmes génétiques 63
F8. Appropriation d'un algorithme génétique 64
F8.1. Choix des critères d'évolution 67
F8.2. Les performances d'un algorithme génétique optimisé 69
F8.3. Industrialisation des avancées vis-à-vis de la méthodologie DELPHI 70
F8.4. Création industrielle de réseaux nodaux dédiés aux composants électroniques 72
F9. Pertinence de la topologie des réseaux nodaux de type DELPHI 74
F10. Représentativité d'un modèle numérique 77
F11. Définition des propriétés thermiques pour créer un modèle numérique 78
F12. Standardisation de la méthodologie DELPHI 81
F13. Bilan des avancées du standard JEDEC 85

G. Extension du spectre de la méthodologie DELPHI 86

G1. Indépendance vis-à-vis de la nature du semi-conducteur 86
G2. Application à divers types de boitiers électroniques 89
G3. Initiative sur le couplage de réseaux nodaux 90
G4. Considération de multiples sources de chaleur 92
G5. Extension aux modules électroniques intégrant de multiples fonctions 95
G6. Sous-structuration des modèles intégrant de multiples sources de chaleur 97
G7. Problématique des composants passifs 98
G8. Caractérisation expérimentale d'un module à multiples composants 101
G9. Modélisation des phénomènes électromagnétiques propres aux inductances 105
G10. Investigation sur les propriétés thermiques des matériaux magnétiques 106
G11. Une première projection au-delà des composants 106
G12. Industrialisation d'un générateur de modèle pour composant multi-source 110

F. ÉTAT DE L'ART – DEFINITION DU CONCEPT D'UN MODELE NODAL

F1. Les principaux aspects de notre besoin initial

La finalité d'un « générateur de modèle thermique » est de construire des modèles simplifiés, ici nodaux, destinés à la simulation en régime permanent, du comportement d'une carte électronique complète, par des experts, au moyen de logiciels de simulation thermique ou thermofluidique capables de les exploiter.

Cette démarche a été entreprise en raison d'un manque d'information très généralisé à l'époque sur les performances thermiques des composants électroniques (Chapitre II).

Comme évoqué, les informations disponibles, telle la résistance entre l'élément sensible d'un composant, dite jonction, et l'ambiante s'avèrent inexploitables pour la simulation thermique au niveau d'une carte électronique équipée de multiples composants.

Dès lors, un ensemble d'analyses technologiques concernant la constitution des composants électroniques est lancée avec pour objectif de disposer pour chacun des boitiers de composants d'un ensemble d'informations concernant leur géométrie interne typique et la nature des matériaux utilisés.

L'exemple d'un composant de type « Small Outline » ou « SO » est dénommé en P2.

A partir de ces données, il est possible de décrire un réseau thermique nodal d'une manière analytique puis d'ajuster son comportement aux métriques thermiques fournies par le fabricant du composant.

A défaut d'information, le modèle proposé par le générateur est validé à posteriori par l'usage.

La démarche de retranscription des transferts thermiques d'un composant à l'aide d'un jeu de résistances thermiques est décrite ci-dessous :

- Identification de la technologie interne du composant (Figure 54),
- Décomposition intuitive des transferts thermiques (Figure 55),
- Définition de la topologie de son graphe (Figure 56),
- Choix du jeu d'expressions monodimensionnelles de leur résistance thermique (e12).

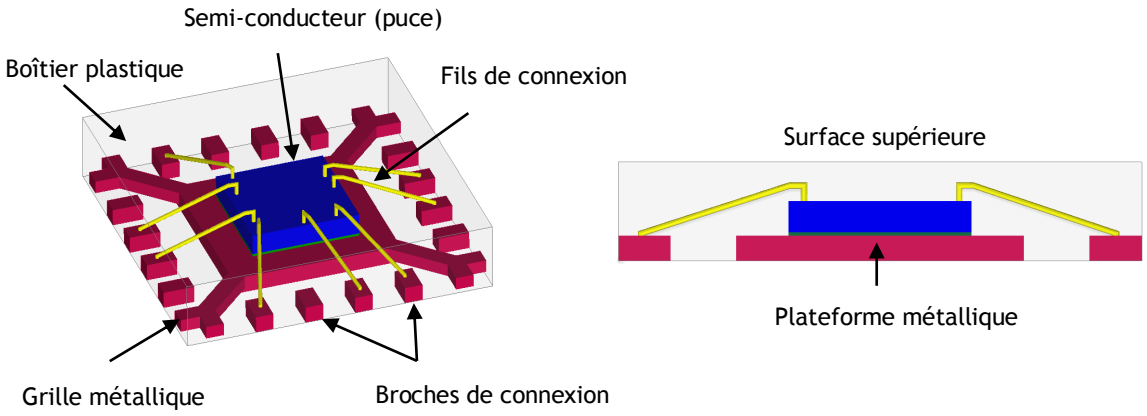


Figure 54 : Représentation tridimensionnelle d'un composant électronique

Pour illustrer, le concept d'une décomposition des transferts thermiques, il est envisageable d'assimiler la plateforme sous la puce à une pyramide tronquée, Figure 55.

Ses faces latérales sont supposées adibatiques et sa face inférieure soumise à une condition de Dirichlet.

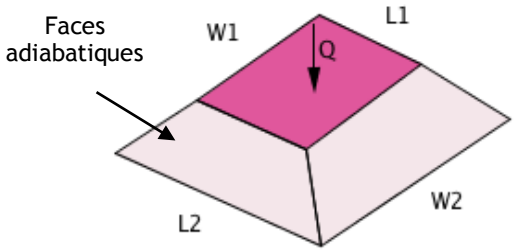


Figure 55 : Décomposition intuitive des transferts thermiques

Il en découle l'expression de la résistance thermique monodimesionnelle suivante :

$$R = \frac{1}{k}\int_0^H \frac{dz}{S} = \frac{1}{k}\int_0^H \frac{dz}{(L_1 + 2\,tan\,\alpha_x\,z)\,(W_1 + 2\,tan\,\alpha_y\,z)} \qquad \text{(e11)}$$

$$R = H\,ln\left[\frac{L_1}{W_1}\,\frac{W_2}{L_2}\right] / \left[k\,(L_1\,\Delta W - W_1\,\Delta L)\right] \qquad \text{(e12)}$$

$$avec \quad \Delta W = W_2 - W_1 = 2\,tan\,\alpha_y\,H \quad et \quad \Delta L = L_2 - L_1 = 2\,tan\,\alpha_x\,H$$

Où H représente l'épaisseur de la plateforme et k sa conductivité thermique.

La démonstration de ce résultat est explicitée au paragraphe P3.

Celle-ci peut ensuite être intégrée dans un réseau thermique traduisant le comportement thermique du composant électronique, tel que celui représenté par la Figure 56.

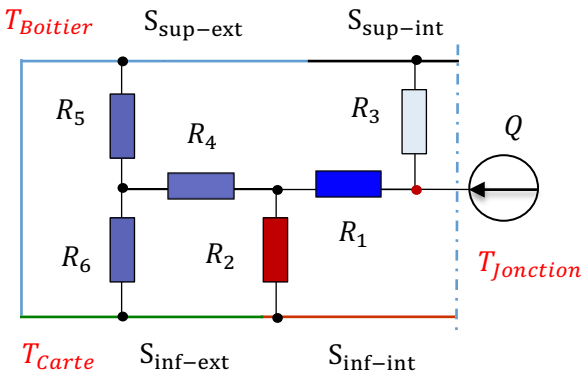


Figure 56 : Exemple de graphe décrivant l'évacuation de la chaleur *Q*

Afin d'améliorer la précision des prédictions, la conception du graphe (nœuds/résistances) est basée sur une subdivision des surfaces extérieures. Cette définition procure une meilleure description des transferts thermiques d'une part vers le milieu fluide ambiant et d'autre part vers la structure de la carte.

La résistance dénommée R_2 s'appuie sur la définition (e12). Celle-ci relie la partie inférieure d'un joint de colle à la partie intérieure (en rouge) de la face inférieure du boitier, celle-ci est appelée $S_{inf-int}$.

La même approximation est transposable à la zone reliant le dessus de la puce à la face supérieure du boitier, dénommée $S_{sup-int}$. Celle-ci est matérialisée dans le réseau par la résistance thermique R_3.

Cette décomposition triviale des principaux chemins thermiques, indépendants les uns des autres, est appliquée aux différentes parties du composant.

Chaque modèle nodal est doté de multiples branches, celles-ci sont propres à la topologie interne du composant électronique à modéliser. Il s'agit d'une interprétation à priori des chemins d'évacuation de la chaleur d'une source interne ($T_{Junction}$) vers des surfaces froides ($T_{Boitier}$, T_{Carte}), lesquelles sont en

contact avec un fluide ($T_{Boitier}$) ou un solide (T_{Carte}).

Le modèle nodal déduit permet d'évaluer le comportement thermique de l'élément sensible d'un composant par la résolution de son jeu de résistances thermiques associées en série ou en parallèle. La résolution s'appuie sur le principe de l'analogie électrique-thermique.

Un exemple de résolution est explicité pour le réseau décrit en Figure 56. Celui-ci fait l'hypothèse que toutes les faces du composant sont soumises à une température uniforme, dénommée T_{Case}.

Dans ce cas particulier, la résistance thermique « Junction-Case » [1], ou R_{JC}, a pour expression :

$$R_{JC} = \frac{R_B + R_3}{R_B\, R_3} \tag{e13}$$

Avec l'association des résistances en parallèle et en série suivantes :

$$R_A = \frac{R_5 + R_6}{R_5\, R_6} + R_4 \quad et \quad R_B = \frac{R_A + R_2}{R_A\, R_2} + R_1 \tag{e14)(e15}$$

L'expression de la température sensible du composant correspond dans ce cas à :

$$T_J = R_{JC}\, Q + T_C \tag{e16}$$

Ce calcul fournit la température maximale interne vue par le composant. Il autorise également l'analyse des contraintes pour évacuer, vers son environnement, la puissance dissipée en son sein.

L'approche brevetée, mentionnée plus tôt, reposait sur un jeu d'expressions analytiques monodimensionnelles reliées entre elles pour établir la constitution d'un réseau de résistances thermiques. L'exemple d'un boitier de type « SO » est illustré en P2.

La définition du graphe était « intuitivement » adaptée pour décrire au mieux le transfert de la chaleur de l'élément sensible, la puce, vers les surfaces externes de son boitier de protection.

La création de ces réseaux au moyen de résistances dont la définition est basée sur des matériaux isotropes présentait toutefois une difficulté pour traiter le regroupement de certains éléments du boitier, telle que la grille métallique et les broches de connexion.

Malgré tout, l'approche représentait une avancée notable en proposant la décomposition en deux zones distinctes des faces supérieure et inférieure du boitier et des nœuds dédiés aux transferts thermiques vers les pattes ou broches de connexions électriques. D'autre part, la présence de nœuds internes supplémentaires avait pour avantage d'appréhender les échanges vers les autres surfaces.

In fine, la conception « intuitive » d'un réseau s'est avérée très peu probante pour modéliser avec précision des composants électroniques ayant une complexité toujours croissante.

Cependant, certains de ces enseignements se sont avérés pertinents comme il sera démontré dans cette thèse (F9).

De nos jours, de nombreuses sociétés utilisent toujours des formes de réseau thermique très simplistes, lesquels n'offrent qu'une interprétation grossière des transferts thermiques d'un composant électronique.

F2. Des approches peu déterminantes

Comme mentionné, beaucoup d'approches n'abordent la modélisation d'un composant électronique que sous la forme d'une simple résistance reliant deux nœuds (graphe orienté).

Ce réseau mono-résistance ou « 1R » est désigné par l'anglicisme « junction-case resistance », ou R_{JC}.

Ils considèrent uniquement une contrainte unidirectionnelle du transfert de chaleur de la puce vers un puits thermique, la carte.

Ainsi, le transfert de chaleur du composant vers le fluide l'environnant est omis du calcul, une hypothèse souvent très pessimiste. Les résistances thermiques, dénommées R_5 et R_3, du graphe de la Figure 56, sont dans ce cas éliminées.

La simulation thermique d'une carte se résume alors à la modélisation d'un ensemble de sources de chaleur disposées sur un matériau isotrope (K2) ou orthotrope (0). Ce type de modèle est déduit, par

exemple, de la résolution analytique de l'équation tridimensionnelle de la chaleur pour différents cas de conditions aux limites et l'application du principe de superposition.

La température de jonction des composants est ensuite calculée sur la base de la température maximale vue par la source de chaleur et la puissance dissipée par chacun des composants.

Il est à noter que cette approche « 1R » suppose également que la puissance dissipée par un composant est drainée de manière uniforme par l'intégralité de sa face inférieure, une hypothèse improbable au regard de la géométrie interne du composant présentée en Figure 56.

En réalité, le transfert thermique de la puce est concentré au niveau de la plateforme et sur les broches de connexion. Dès lors, il sera difficile d'avoir une bonne représentativité du comportement thermique d'un composant électronique à partir d'un réseau ne disposant que d'une seule résistance.

Malgré ces restrictions, les modèles de type R_{JC} ou « 1R » restent, aujourd'hui, largement employés en raison de leur facilité de création.

Plus pratique, les réseaux dits « 2R » présentent une résistance thermique supplémentaire destinée à modéliser les échanges vers le milieu fluide ambiant. Malgré tout, sa définition reste incertaine. Il est très difficile de savoir si celle-ci prend en compte les faces latérales et la partie supérieure du composant, ou seulement cette dernière (F9).

L'utilisation de réseaux de type « 2R » pour la modélisation analytique d'une carte électronique a été proposée par Ellison [R91] en 1996. Ce dernier a fourni un processus de calcul pour évaluer les transferts d'une source de chaleur par conduction dit « source-to-substrate » ainsi que ceux liés aux phénomènes couplés de convection et de radiation, dénommés « source-to-ambient ».

La résolution mathématique d'Ellison de réseaux « 2R » demeure simple et intuitive. L'avantage de cette représentation réside dans la capacité à modéliser un transfert thermique d'un composant électronique vers sa surface supérieure, laquelle est en contact avec le fluide ou potentiellement avec une structure métallique. Dès lors, des solutions de refroidissement passives peuvent être appréhendées, celles-ci seront complémentaires au transfert de chaleur par conduction vers le substrat de la carte.

Une définition formalisée de ce graphe a été standardisée par le comité américain JEDEC, en 2008. Celui-ci est constitué de 3 nœuds reliés par 2 résistances thermiques. Un guide de conception pour la création d'un modèle thermique de composant est édité. Celui-ci est intitulé « JESD15-3 - two-resistor compact thermal model guideline » [R17].

Les deux résistances thermiques du réseau sont désignées sous les termes de « junction-top resistance » (R_{JT}) et de « junction-bottom resistance » (R_{JB}).

La description de la topologie d'un réseau « 2R » est explicitée Figure 57.

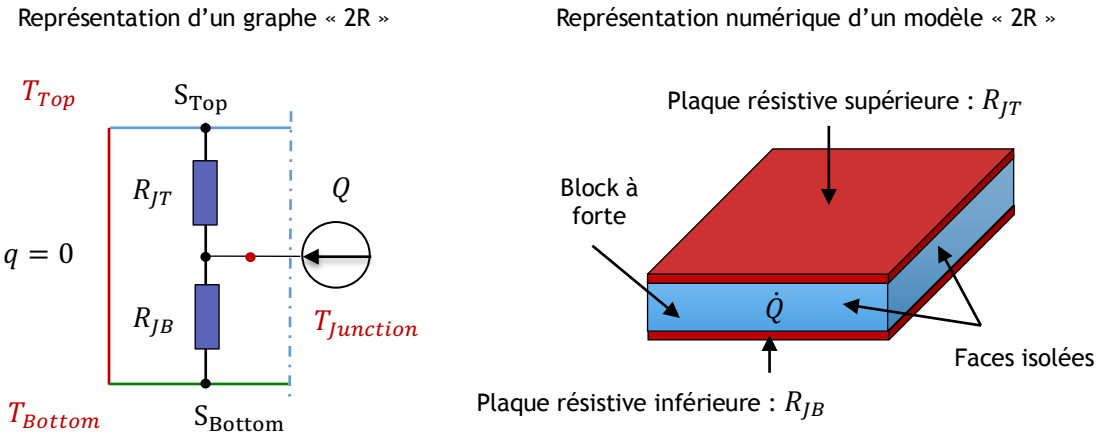


Figure 57 : Les modèles nodaux élémentaires dits « 2R »

Les faces latérales du modèle sont considérées adiabatiques, une hypothèse très contestable pour des composants électroniques de très faibles dimensions.

A l'instar des réseaux « 1R », les deux surfaces externes du réseau « 2R » sont supposées être à une température uniforme, une aberration du point de vue physique, comme le démontre la Figure 58.

Celle-ci fournit une visualisation des températures de surface d'un boitier de type « QFN ».

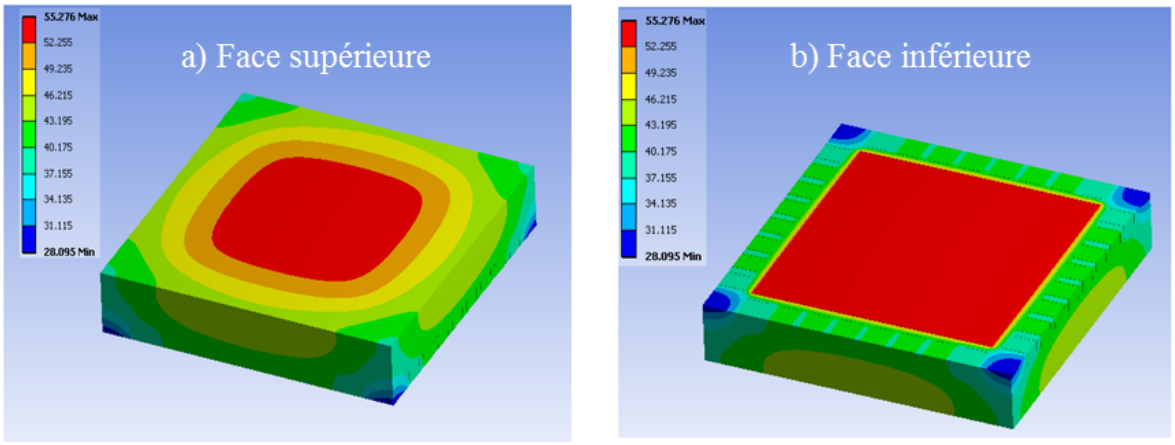


Figure 58 : Visualisation de la température de surface d'un composant électronique

D'autre part, la réalisation de tests expérimentaux, en accord avec le standard américain JEDEC (Chapitre IID3) a mis en évidence la faible précision de ces réseaux trop simplistes, de l'ordre de 20 à 30%.

Un constat identique peut être fait sur les modèles réseaux thermiques proposés par Bar-Cohen [R18]. Ceux-ci se présentent sous la forme d'une étoile d'où leur nom, « star-model ».

Partant d'un nœud commun, ici la jonction (J), ces réseaux considèrent un jeu de résistances thermiques vers des nœuds disposés sur chacune des faces latérales (Sides–S) du volume l'englobant.

$$Q = (T_J - T_S)/R_{JS} + (T_J - T_T)/R_{JT} + (T_J - T_B)/R_{JB} \qquad \text{(e17)}$$

L'expression de la température sensible du composant correspond dans ce cas à :

$$T_J = \left[R_{JT}\, R_{JB}\right] T_S + \left[R_{JS}\, R_{JB}\right] T_T + \left[R_{JS}\, R_{JT}\right] T_B + \left[R_{JS}\, R_{JT}\, R_{JB}/R_X\right] Q \qquad \text{(e18)}$$

$$Avec\ \ R_X = R_{JT}\, R_{JB} + R_{JS}\, R_{JB} + R_{JS}\, R_{JT}$$

En règle générale, l'écart entre le modèle numérique et ce type de modèle nodal est important, l'erreur excède plus de 20% (F9). L'utilisation des « star-model » est de ce fait peu répandue.

F3. Une approche concourante - Le projet européen DELPHI

La configuration à multiples résistances est l'axe majeur du projet Européen DELPHI [(9)], lancé en 1993. Thomson-CSF a été une société partenaire de ce projet dont les résultats ont influé sur notre approche destinée à la création de modèles comportementaux nodaux plus fiables.

Sur la base des résultats d'un modèle numérique, ce programme de recherche visait à l'établissement de modèle thermique sous une forme nodale [R19], dit compact, qui soit plus représentatif du comportement physique d'un composant électronique.

Toutefois, celui-ci était exclusivement destiné aux Circuits Intégrés (IC).

Plus prosaïquement, il s'agissait d'une approche « boite noire » capable de décrire les interactions entre ses faces externes et un nœud interne soumis à une excitation.

Sur la base du comportement thermique du modèle numérique, soumis à un jeu de scenarii d'échanges thermiques, un processus d'identification des résistances thermiques décrivant ces interactions a été établi par ce consortium [R20].

L'ajustement opéré sur de multiples conditions était destiné à rendre le modèle indépendant de ces conditions d'utilisation, un modèle universel en quelque sorte.

Des conditions d'apprentissage ont été ainsi proposées, lesquelles sont reprises dans la Table 10.

Table 10 : Conditions de Fourier appliquées simultanément sur les faces du composant

Cas Tests	Face Supérieure (Top)	Face inférieure (Bottom)	Faces latérales (Sides)	Zones de connexion (Leads)
1	5	1	5	1
2	15	1	15	1
3	25	1	25	1
4	75	1	75	1
5	30	5	30	5
6	80	5	80	5
7	200	5	200	5
8	150	5	30	5
9	500	5	200	5
10	1000	5	10	50
11	5	10	5	10
12	15	10	15	10
13	25	10	25	10
14	75	10	75	10
15	5	25	5	50
16	15	25	15	50
17	25	25	25	50
18	75	25	75	50
19	30	30	30	30
20	80	30	80	30
21	200	30	200	30
22	150	30	30	30
23	500	30	200	30
24	5	50	5	50
25	5	50	5	100
26	15	50	15	50
27	15	50	15	100
28	30	50	30	50
29	80	50	80	50
30	200	50	200	50
31	25	50	25	50
32	25	50	25	100
33	75	50	75	50
34	75	50	75	100
35	150	50	30	50
36	500	50	200	50
37	10	50	10	1000
38	100000	50	10	500
39	5	100	5	200
40	15	100	15	200
41	25	100	25	200
42	75	100	75	200
43	30	200	30	200
44	80	200	80	200
45	200	200	200	200
46	150	200	30	200
47	500	200	200	200
48	10	1000	10	100000

Cette table procure les différentes valeurs des coefficients d'échange thermique à imposer au modèle numérique. Ces derniers sont supposés caractériser l'ensemble des conditions d'environnement susceptibles d'être rencontrées par un composant électronique.

Comme indiqué, ceux-ci dépendent des surfaces choisies (S_i) pour l'établissement du modèle déduit. Par exemple, les zones de connexions dites « leads » peuvent être intégrées au modèle.

In fine, ces conditions décrivent le vecteur des k conductances thermiques retenues pour optimiser un réseau nodal se voulant peu dépendant des conditions d'utilisation.

Celles-ci sont reliées à une référence externe, par exemple un nœud zéro.

$$\left[Y_{i,0} \right]^k = h_i^k \, S_i \quad i \in \{1 \cdots nS\} \tag{e19}$$

Les coefficients d'échange thermique spécifiés varient de 1W m^{-2} K^{-1} à 10^5W m^{-2} K^{-1}.

Ils constituent les éléments de l'espace recherche pour construire un modèle performant. Le nombre important de scenarii nécessite un grand nombre de simulations numériques ($k = 48$).

Il s'agit en quelque sorte d'un plan d'expérience alternant des conditions d'environnement sur chacune des surfaces du boitier en vue de parfaire l'identification du comportement thermique du composant.

Le modèle nodal résultant est dit « Boundary Condition Independent » (BCI). C'est sans nul doute la principale avancée du projet DELPHI. D'autre part, il doit être pertinent pour des conditions autres que celles d'apprentissage, un jeu de test est à définir.

Il est à noter qu'à l'image des modèles issus de notre approche initiale, chacune des faces longitudinales de ce modèle « boite noire » est subdivisée en plusieurs zones isothermes, comme le montre la Figure 59. Un point qui a été jugé essentiel pour garantir la qualité de la représentativité physique du réseau.

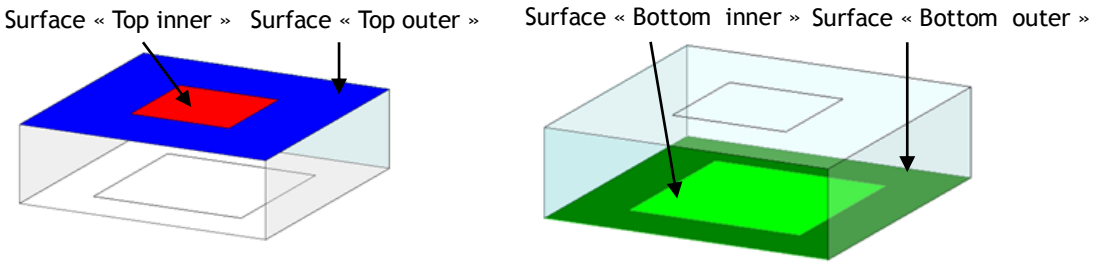


Figure 59 : Exemple de subdivisions des surfaces supérieure et inférieure d'un boitier

La subdivision des faces supérieure et inférieure est définie par des nœuds dits « top-inner », « top-outer », « bottom-inner » et « bottom-outer ».

Sur la base de cette définition, les prédictions des réseaux complexes déduits de la méthodologie DELPHI s'avèrent très représentatives de celles d'un modèle numérique détaillé.

Néanmoins, la topologie du graphe déduit doit être limitée à 10 nœuds afin de faciliter son exploitation, une restriction qui contraint sa représentativité.

La qualité des prédictions des modèles nodaux de type DEPHI est mesurée par la Somme des Carrés des Résidus (SCR ou RSS), un critère appelé « fonction coût ». Cette fonction pondère les incertitudes sur la température de l'élément sensible sélectionné ainsi que celles sur les flux quittant les surfaces du boitier.

$$f(T,q) = \sum_{k=1}^{k=nC} \left[\omega \left(\frac{{T_D}_j^k - {T_C}_j^k}{{T_D}_j^k - T_\infty} \right)^2 + \frac{1-\omega}{nS} \sum_{n \neq j=1}^{nS} \left(\frac{{q_D}_n^k - {q_C}_n^k}{Q} \right)^2 \right] \qquad \text{(e20)}$$

Cette fonction coût $f(T,q)$ dépend des paramètres suivants :

- Le terme nC définit le nombre considéré de scenarii de test,
- Le terme nS correspond au nombre de nœuds externes sélectionnés pour le réseau,
- Le terme ω est un facteur de pondération entre la température de jonction (T_J) et les flux (q_n) quittant le boitier. Celui varie entre 0 et 1.
- Les termes ${T_D}_j$ et ${T_C}_j$ représentent respectivement la température de jonction du modèle détaillé et celle du modèle compact dérivé.
- Les termes ${q_D}_n$ et ${q_C}_n$ sont respectivement les flux quittant les n nœuds extérieurs du boitier.
- Le terme Q désigne la puissance totale dissipée par la puce.

Même si le projet DELPHI a révolutionné la manière d'établir de modèles nodaux fiables, force est de constater que leur dissémination auprès des industriels reste, à ce jour, très marginale.

Le principal frein est lié à la difficulté de mettre en œuvre une technique d'ajustement qui garantisse l'optimalité, en termes de robustesse et de précision, des réseaux déduits.

F4. Transformation de notre approche initiale - Optimisation déterministe

L'exploitation du concept DELPHI a mis également en lumière la nécessité d'identifier de nouvelles résistances thermiques dites de « surface to surface » reliant entre elles les faces du composant.

La Figure 60 montre la liaison des deux nœuds des parties externes des faces supérieure et inférieure, par l'intermédiaire d'une résistance thermique dénommée R_{TB}.

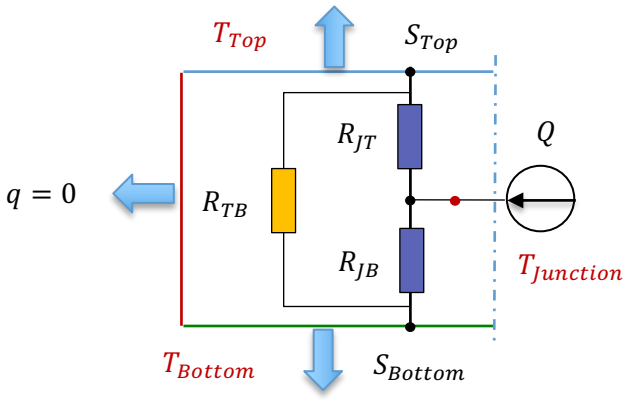


Figure 60 : Concept de graphe possédant des résistances reliant les surfaces externes

L'importance de ces résistances « surface to surface » dans la précision des réseaux thermiques a été débattue par Kromann [R22] et par Aranyosi [R23]. Ce dernier compare les performances de trois topologies de réseau pour un jeu de 9 scenarii.

Ses travaux démontrent l'inadéquation de la topologie dite « star-model » pour la prédiction du comportement thermique d'un composant électronique. Ils soulignent également l'influence d'un nœud interne supplémentaire, à l'instar de la topologie présentée en Figure 56.

Il est manifeste que la topologie des réseaux n'est pas généralisable, celle-ci doit être construite en fonction des observables que l'on souhaite modéliser.

Une transformation de notre approche pour la déduction d'un modèle nodal à partir des résultats d'un modèle numérique d'un composant électronique a été lancée en 2005.

Son objectif était d'établir un réseau de résistance simplifié, tout en conservant un comportement thermique le plus fidèle possible au regard de celui du modèle physique détaillé.

Cette première analyse s'est inspirée de la méthode développée par Sabry [R24]-[R25]. Cet auteur introduit les lois de la thermodynamique dans le modèle mathématique du réseau à identifier.

Ce prérequis conduit à une simplification de la matrice des conductances thermiques, ici dénommée $[\boldsymbol{Y}]$.

De manière à distinguer les variables de type scalaire des matrices, ces dernières seront dans la suite de ce document écrites en caractères gras.

Le premier principe assure que la somme des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) est nulle. Il en découle que les coefficients diagonaux $(Y_{i,i})$ correspondent à la somme des conductances de la ligne i :

$$Y_{i,i} = -\sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} \quad \forall i \neq j \tag{e21}$$

Le second principe impose que la matrice $[\boldsymbol{Y}]$ soit définie positive, d'où.

$$[\boldsymbol{X}]^T\,[\boldsymbol{Y}]\,[\boldsymbol{X}] \geq 0 \quad \forall\, [\boldsymbol{X}] \in \mathbb{R}^n \tag{e22}$$

Enfin, la matrice doit être symétrique, ainsi :

$$[\boldsymbol{Y}]^T = [\boldsymbol{Y}] \Longrightarrow Y_{i,j} = Y_{i,j} \tag{e23}$$

L'intérêt de cette représentation est de considérer toutes les résistances reliant l'ensemble des nœuds du réseau, en particulier les résistances « surface to surface ». Les moins significatives seront éliminées.

La définition des contraintes appliquées au système linéaire à résoudre se résume à :

$$[\boldsymbol{Y}] = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdots & Y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n,1} & Y_{n,2} & \cdots & Y_{n,n} \end{bmatrix} \quad telle\ que \quad \begin{cases} Y_{i,j} = Y_{j,i} & i,j \in \{1 \cdots n\} \\ Y_{i,j} < 0 & \forall j \neq i \\ Y_{i,i} = -\sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} & \forall j \neq i \\ Y_{i,i} \geq 0 & i,j \in \{1 \cdots n\} \end{cases} \tag{e24}$$

$$\Longrightarrow \quad [\boldsymbol{Y}] = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n} Y_{1,j} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & -\sum_{j=1}^{n} Y_{2,j} & \cdots & Y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n,1} & Y_{n,2} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n} Y_{n,j} \end{bmatrix} \tag{e25}$$

L'application de ces contraintes mathématiques réduit le nombre d'inconnues à calculer. Seuls les éléments de la matrice supérieure sont à identifier, la matrice des degrés étant définie.

La seconde étape consiste à choisir l'algorithmie destinée à la détermination d'une matrice d'adjacence.

Ainsi, un premier processus de calcul a été développé par analogie avec celui proposé par Lagonotte [R26] sur les réseaux électrocinétiques.

L'idée directrice de cette approche vise à évaluer les valeurs de toutes les résistances d'un réseau, tel que celui de la Figure 61, sans avoir la possibilité d'accéder individuellement à chaque élément.

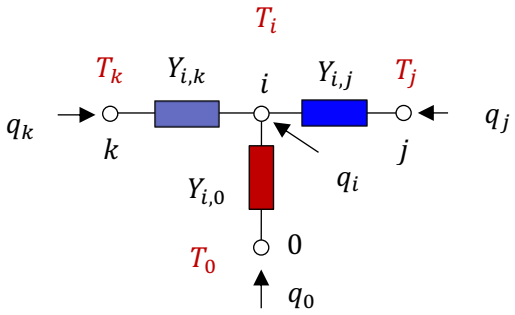


Figure 61 : Application pour un réseau composé de 3 nœuds

La mise en équation s'appuie sur l'utilisation de la loi des nœuds, une des deux lois de Kirchhoff. Celle-ci est appliquée à chacun des nœuds du réseau recherché. On retrouve les contraintes énoncées par Sabri.

Le bilan des flux entrant et sortant d'un nœud est par définition nul. Il s'agit des degrés de liberté du nœud considéré.

Le bilan pour un nœud i relié à deux nœuds j et k, par des conductances $Y_{i,j}$ et $Y_{i,k}$, ainsi qu'à un nœud de référence 0 par une conductance $Y_{i,0}$ a pour expression :

$$q_i + q_j + q_k + q_0 = 0 \tag{e26}$$

En écrivant la loi de Fourier, sous sa forme unidimensionnelle, on retrouve le système linéaire (e25).

$$q_i = Y_{i,j}\left(T_i - T_j\right) + Y_{i,k}\left(T_i - T_k\right) + Y_{i,0}\left(T_i - T_0\right) \tag{e27}$$

$$q_i = \left[Y_{i,j} + Y_{i,k} + Y_{i,0}\right] T_i - Y_{i,j}\, T_j - Y_{i,k}\, T_k - Y_{i,0}\, T_0 \tag{e28}$$

L'approche de Lagonotte fait appel à un nœud de référence, ici le nœud 0, qui a pour avantage de distinguer les nœuds internes ou externes du réseau. Dès lors, il est possible d'appliquer une condition de Fourier sur les nœuds externes du réseau en relation avec les coefficients d'échange de la Table 10.

En généralisant la loi des nœuds sur chacun des n points, la formulation finale a pour expression :

$$q_i = \sum_{j \neq i} \left[Y_{i,j}\left(T_i - T_j\right)\right] \; pour\; i \geq 1, j \leq n \tag{e29}$$

La résolution de ce système linéaire est effectuée de manière séquentielle.

La première étape consiste à déterminer la première ligne, ou colonne, de la matrice des conductances, en définitive tous les chemins thermiques reliés au nœud 1.

Cette identification est menée à partir des températures fournies par un modèle numérique dérivées de k conditions aux limites.

Le nombre de conditions est fixé par le nombre de nœuds du réseau, à savoir :

$$k = n - 1 \tag{e30}$$

On obtient donc :

$$\begin{bmatrix} {q_1}^{<1>} \\ {q_1}^{<2>} \\ \vdots \\ {q_1}^{<n-1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_2 - T_1)^{<1>} & (T_3 - T_1)^{<1>} & \cdots & (T_n - T_1)^{<1>} \\ (T_2 - T_1)^{<2>} & (T_3 - T_1)^{<2>} & \cdots & (T_n - T_1)^{<2>} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (T_2 - T_1)^{<n-1>} & (T_3 - T_1)^{<n-1>} & \cdots & (T_n - T_1)^{<n-1>} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{1,2} \\ Y_{1,3} \\ \vdots \\ Y_{1,n} \end{bmatrix} \tag{e31}$$

$$[q_1]^{<k>} = \left[\left(T_j - T_1\right)\right]^{<k>} \left[Y_{1,j}\right] \;\; avec \;\; 2 \leq j \leq n \tag{e32}$$

La résolution de ce système linéaire est minimisée en fixant les conditions suivantes :

$$\left[\left(T_j - T_i\right)\right]^{<k>} \left[Y_{i,j}\right] \leq [q_i]^{<k>}, \qquad \forall\, i \neq j \in \{1 \cdots n\}, \forall\, k \in \{1 \cdots n-1\} \tag{e33}$$

$$Y_{i,j} < 0, \qquad \forall\, i \neq j \in \{1 \cdots n\} \tag{e34}$$

$$Y_{i,j} = Y_{j,i}\,, \qquad \forall\, i \neq j \in \{1 \cdots n\} \tag{e35}$$

Le vecteur des conductances $Y_{1,j}$ déduit fournit l'expression de la première ligne de la matrice.

$$[L]_1 = \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq i = 1}^{n} Y_{1,j} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,n} \end{bmatrix} \tag{e36}$$

Une fois la première ligne établie, la condition de symétrie fournit la première colonne : $Y_{1,j} = Y_{j,1}$.

$$[\boldsymbol{Y}] = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n} Y_{1,j} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} = Y_{1,2} & & & \\ \vdots & & & \\ Y_{n,1} = Y_{1,n} & & & \end{bmatrix} \tag{e37}$$

Les conductances $Y_{1,2}$ et $Y_{2,1}$ liées au nœud 1 sont introduites dans le système décrivant le nœud 2.

En utilisant le même processus sur les autres nœuds du réseau, l'ensemble des éléments de la matrice $[\boldsymbol{Y}]$ est progressivement déduit (e33)-(e34).

$$[q_2]^{<2>} = \left[\left(T_j - T_2\right)\right]^{<2>} \left[Y_{2,j}\right] \quad avec\ j \neq 2, 1 \leq j \leq n \tag{e38}$$

$$\Longrightarrow [L]_2 = \begin{bmatrix} Y_{2,1} & -\sum_{j\neq i=1}^{n} Y_{2,j} & \cdots & Y_{2,n} \end{bmatrix} \tag{e39}$$

Les conductances propres à la deuxième ligne et à la deuxième colonne sont alors définies.

$$\Longrightarrow [\boldsymbol{Y}] = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n} Y_{1,j} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{1,2} & -\sum_{j=1}^{n} Y_{2,j} & \cdots & Y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ Y_{n,1} & Y_{n,2} = Y_{2,n} & & \end{bmatrix} \Longrightarrow [L]_3 \dots [L]_{n-1} \tag{e40}$$

Au fur et à mesure le nombre d'éléments à identifier se réduit (condition de symétrie).

Pour un réseau composé de cinq nœuds, cette procédure se traduit par le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} q_1^{<1>} \\ q_1^{<2>} \\ q_1^{<3>} \\ q_1^{<4>} \\ q_2^{<1>} \\ q_2^{<2>} \\ q_2^{<3>} \\ q_3^{<1>} \\ q_3^{<2>} \\ q_4^{<1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_{5,1}^{<1>} & \Delta T_{4,1}^{<1>} & \Delta T_{3,1}^{<1>} & \Delta T_{2,1}^{<1>} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T_{5,1}^{<2>} & \Delta T_{4,1}^{<2>} & \Delta T_{3,1}^{<2>} & \Delta T_{2,1}^{<2>} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T_{5,1}^{<3>} & \Delta T_{4,1}^{<3>} & \Delta T_{3,1}^{<3>} & \Delta T_{2,1}^{<3>} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T_{5,1}^{<4>} & \Delta T_{4,1}^{<4>} & \Delta T_{3,1}^{<4>} & \Delta T_{2,1}^{<4>} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta T_{1,2}^{<1>} & \Delta T_{5,2}^{<1>} & \Delta T_{4,2}^{<1>} & \Delta T_{3,2}^{<1>} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta T_{1,2}^{<2>} & \Delta T_{5,2}^{<2>} & \Delta T_{4,2}^{<2>} & \Delta T_{3,2}^{<2>} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta T_{1,2}^{<3>} & \Delta T_{5,2}^{<3>} & \Delta T_{4,2}^{<3>} & \Delta T_{3,2}^{<3>} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T_{1,3}^{<1>} & 0 & 0 & 0 & \Delta T_{2,3}^{<1>} & \Delta T_{5,3}^{<1>} & \Delta T_{4,3}^{<1>} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T_{1,3}^{<2>} & 0 & 0 & 0 & \Delta T_{2,3}^{<2>} & \Delta T_{5,3}^{<2>} & \Delta T_{4,3}^{<2>} & 0 \\ 0 & \Delta T_{1,4}^{<1>} & 0 & 0 & 0 & \Delta T_{2,4}^{<1>} & 0 & 0 & \Delta T_{3,4}^{<1>} & \Delta T_{5,4}^{<1>} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,5} \\ Y_{1,4} \\ Y_{1,3} \\ Y_{1,2} \\ Y_{2,5} \\ Y_{2,4} \\ Y_{2,3} \\ Y_{3,5} \\ Y_{3,4} \\ Y_{4,5} \end{bmatrix} \tag{e41}$$

Il suffit de quatre conditions aux limites distinctes pour déterminer les dix conductances de ce réseau.

L'ensemble de ce processus a été programmé sous un logiciel mathématique commercial Mathcad®.

Celui-ci dispose d'un jeu d'algorithmes déterministes capables de minimiser ces systèmes d'équations en imposant des contraintes, telles que (e33), (e34) et (e35).

Les principales solutions proposées sont mentionnées ci-dessous :

- Des modèles de régression linéaire, avec ou sans contraintes, basés sur la Méthode du Simplexe (SM) ou sur la Méthode des Moindres Carrés (LSM) visant à minimiser le résidu :

$$\left\| \left[\left(T_j - T_i\right)\right]^{<k>} \left[Y_{i,j}\right] - [q_i]^{<k>} \right\|^2 \tag{e42}$$

- Des modèles de régression non-linéaire basés sur les algorithmes de Levenberg-Marquardt (LMM) [Levenberg 1944 ; Marquardt 1963], du gradient conjugué (CGM) [Hestenes 1950] ou de Quasi-Newton (QNM).

Ces algorithmes offrent une variété de résolutions pour établir la structure de notre réseau thermique.

Leur analyse a été nécessaire afin de sélectionner la ou les plus adaptées à notre besoin.

Bien entendu, leur utilisation est conditionnée au fait que $([\boldsymbol{Y}]^T\,[\boldsymbol{Y}])^{-1}$ soit bien conditionnée. Dans le cas contraire, la méthode de régularisation de Tikhonov (1977) doit être envisagée.

Avant tout appel à la simulation numérique, il est intéressant dans un premier temps d'imposer un réseau connu de résistances thermiques [R32]-[R33] puis de tester la capacité de cet ensemble de techniques de régression à reconstruire son graphe.

Les éléments du graphe à retrouver sont détaillés en Table 11.

Table 11 : Définition du réseau à multiples branches à déterminer

Expression de la matrice des résistances thermiques (K/W)

Nœuds	« Top 1 »	« Top 2 »	« Bot 3 »	« Bot 4 »	« Sides 5 »	« Junc 6 »
« Top 1 »	0	4300	0	0	0	160
« Top 2 »	4300	0	267	149.3	189.4	0
« Bot 3 »	0	267	0	0	0	5.4
« Bot 4 »	0	149.3	0	0	180.2	144.9
« Side 5 »	0	189.4	0	180.2	0	0
« Junc 6 »	160	0	5.4	144.9	0	0

Celui-ci est constitué de 7 résistances thermiques reliant 5 nœuds externes en contact avec l'environnement à un nœud interne, présentement la source de chaleur (le nœud 6).

En pratique, ceux-ci représenteraient pour un composant :

- Une décomposition de sa face supérieure en 2 zones distinctes : « Top-inner » et « Top-outer »,
- 2 surfaces distinctes de sa face inférieure : « Bottom inner » et « Bottom outer »,
- Le groupement de ces quatre surfaces latérales : « Sides »,
- Le nœud sensible à observer : « Junction ».

Ces nœuds du réseau seront respectivement désignés, dans la suite de cette analyse, par : « Top 1 », « Top 2 », « Bot 3 », « Bot 4 », « Side 5 » et finalement « Junc 6 ».

La reconstruction est établie à partir des températures et des flux déduits de son comportement thermique. Ainsi plusieurs coefficients d'échange sont appliqués aux 5 nœuds matérialisant les surfaces externes, ceci pour une dissipation imposée au nœud dit de « Junction ».

Les coefficients d'échange thermique utilisés sont sélectionnés parmi les cas recommandés en Table 10, pour la définition des modèles thermiques dits compacts.

Pour la résolution du système linéaire (e40), seuls 5 scenarii sont nécessaires et suffisants. Aussi pour cette analyse des techniques de régression, le choix s'est porté sur les cinq scenarii suivants : BC3, BC6, BC10, BC26 et BC40.

Ceux-ci sont repris dans la Table 12, ci-après.

Table 12 : Conditions aux limites appliquées au réseau « fictif »

		Coefficient d'échange thermique (W m^{-2} K^{-1})				
Nœuds	Surface (mm^2)	BC3	BC6	BC10	BC26	BC40
« Top 1 »	1.75x2	25	80	1000	15	15
« Top 2 »	4.4 - (1.75x2)	25	80	1000	15	15
« Bot 3 »	2.25x2.5	1	5	5	50	100
« Bot 4 »	4.4 -(2.25x2.5)	1	5	5	50	100
« Side 5 »	4x0.85x4	25	80	10	15	15

Les réseaux de conductances thermiques dérivés de l'identification successive des lignes par les algorithmes de minimisation du logiciel Mathcad® sont regroupés en annexe P3.

Cette annexe détaille également les prédictions des températures et des flux relatifs à chacun de ces réseaux et leur comparaison par rapport aux données ayant servi à les générer.

Force est de constater que la précision du modèle thermique compact dépend de la méthode de minimisation retenue. La méthode du Simplexe, dite MS, apparait être la plus efficace pour identifier le réseau initial. L'erreur relative pour les 5 scenarii n'excède pas 1% comme le décrit la Figure 62.

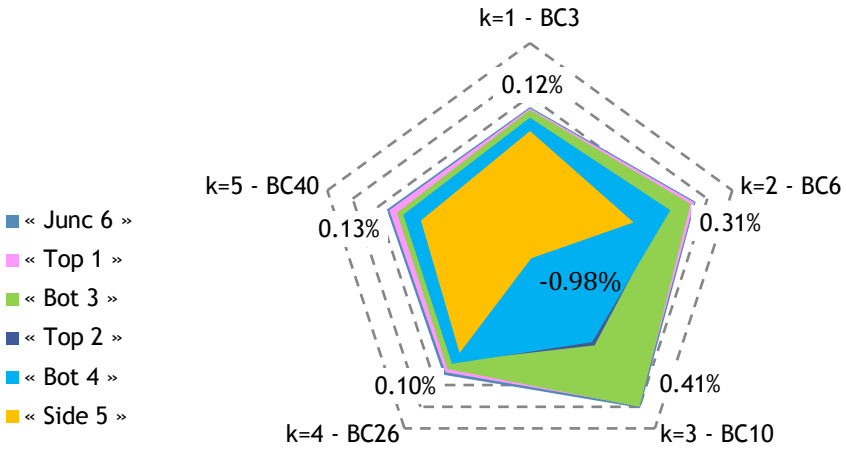


Figure 62 : Visualisation des erreurs relatives pour les 6 nœuds du réseau MS

Il est clair que ce processus d'identification est une première alternative intéressante pour créer des réseaux complexes à partir d'un ensemble de données réduites d'un système. Néanmoins, les matrices de résistances thermiques reconstruites ne reproduisent pas à l'identique la forme de la matrice initiale.

C'est un premier constat, le réseau déduit par une approche « boite noire » telle que celle de Lagonotte ne sera pas physique.

De plus, un inconvénient majeur tient au fait que ses performances sont liées à l'ordre d'écriture des équations de la matrice.

Par exemple, Il suffit de déplacer le nœud « junc 6 » en premier pour obtenir des résultats aberrants.

F5. Optimisation déterministe avec contraintes

Pour pallier aux défauts d'une identification à complexité dégressive des éléments du réseau, laquelle est explicitée par les expressions (e36) et (e39), une méthode de résolution simultanée a été envisagée avec l'idée d'être cette fois indépendant de l'ordre d'écriture des équations du système.

Le système linéaire est redéfini en blocs non-imbriqués en considérant :

- Une matrice $[\boldsymbol{T}]$ composée sur sa diagonale n matrices carrées $\left[(T_j - T_i)\right]^{<k>}$.
- Lesquelles comprennent $k \times k$ éléments.
- Un vecteur $[Q]$ regroupant l'ensemble des flux nodaux obtenus pour les $n \times k$ scénarii.

Cette approche autorise la prise en compte d'un nombre plus large de conditions aux limites.

$$\begin{bmatrix} \left[(T_j - T_1)\right]^{<k>} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & \left[(T_j - T_2)\right]^{<k>} & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & \left[(T_j - T_n)\right]^{<k>} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Y_{1,j}] \\ [Y_{2,j}] \\ \vdots \\ [Y_{n,j}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q_1]^{<k>} \\ [Q_2]^{<k>} \\ \vdots \\ [Q_n]^{<k>} \end{bmatrix} \qquad \text{(e43)}$$

Aussi, pour évaluer les performances de ce nouveau processus d'identification le nombre de scenarii a été progressivement étendu. Pour cela, 6 puis 7 scenarii ont été explorés (BC46 et BC5).

La résolution de ce système détermine simultanément toutes les conductances thermiques manquantes du réseau. Évidemment, la matrice résultante doit respecter les critères établis par l'équation (e24).

Le système à résoudre est réécrit (Gauss) sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure ($[\boldsymbol{U}]$).

$$[\boldsymbol{U}]\,[Y] = [Q] \quad telle\ que \begin{cases} Y_{i,j} = 0 & \forall\, j < i \\ Y_{i,i} \neq 0 & \forall\, i \end{cases} \tag{e44}$$

Par définition, aucun élément diagonal n'est nul, la détermination des conductances thermiques est facilement résolue au moyen d'un algorithme de remontée. Les performances de cette nouvelle approche, pour le réseau de la Table 11, sont présentées en annexe P5.

L'avantage principal de cette nouvelle approche repose sur le fait que le réseau physique initial est désormais plus fidèlement reconstitué, comme le montre la Table 13.

Table 13 : Définition du réseau à multiples branches identifié par la méthode MS

Expression de la matrice des résistances thermiques ($K.W^{-1}$)

Nœuds	« Top 1 »	« Top 2 »	« Bot 3 »	« Bot 4 »	« Side 5 »	« Junc 6 »
« Top 1 »	0	4309.8	0	0	0	160
« Top 2 »	4309.8	0	269	149.3	189.5	0
« Bot 3 »	0	269	0	0	0	5.4
« Bot 4 »	0	149.3	0	0	180.2	145.3
« Side 5 »	0	189.5	0	180.2	0	0
« Junc 6 »	160	0	5.4	145.3	0	0

L'erreur relative est quasi nulle pour la méthode du « Simplex » et s'avère moins intéressante pour les autres méthodes de minimisation.

Toutefois, leur capacité à trouver un résultat fiable reste aléatoire et fonction du conditionnement de la matrice (choix approprié du pivot) ou du choix des scenarii retenus pour établir le réseau.

L'imprécision augmente également avec le nombre d'opération à effectuer. De plus, il faut tester indépendamment la qualité du résultat des méthodes non-linéaires, précédemment citées, pour statuer sur la plus adaptée.

Bien que la qualité des résultats soit beaucoup plus encourageante, il n'est pas toujours aisé dans un cas concret de respecter les critères de création du réseau à savoir : un réseau symétrique dont toutes les conductances thermiques soit du même signe.

C'est un aspect particulièrement sensible lorsque les données sont issues d'un modèle numérique.

La taille du système est également une contrainte à prendre en compte, surtout si le nombre de nœuds est important. Toutefois, toutes ces approches ont un inconvénient majeur, c'est l'impossibilité de fixer des critères d'erreur sur la température de jonction et sur les flux quittant le composant, comme l'instruit la méthodologie DELPHI.

Ce premier constat a permis de s'interroger sur la pertinence des approches basées sur les méthodes de descente de gradient.

In fine, il est apparu nécessaire de rechercher d'autres techniques d'ajustement, capables de construire un réseau thermique, constitué de quelques nœuds, d'une manière précise et robuste.

Une alternative aux méthodes discrètes est l'utilisation des méthodes méta-heuristiques [R27] dont l'exploitation est rendue plus aisée par l'évolution des moyens de calcul.

Le terme méta-heuristique a été introduit par Glover en 1986. La citation ci-dessous résume l'idée directrice de son concept visant à trouver par des essais successifs et l'analyse de leur erreur, ou heuristique, une solution approchée optimale.

« Master strategy that guides and modifies other heuristics to produce solutions beyond those that are normally generated in a quest for local optimality »

Un exemple d'application d'une méthode heuristique pour la création de modèle thermique compact (CTM) est proposé par Marami en 1996 [R28].

L'optimisation des modèles s'appuie sur l'algorithme de Nelder-Mead (1965). Cette méthode de minimisation est basée sur la comparaison des valeurs de la fonction pour les (n+1) sommets d'un simplexe, constituant les résistances du réseau.

La recherche stochastique, ou « Simplex Search Method », explore l'espace de recherche à N dimensions par la génération aléatoire de simplexes [R29].

La forme du simplexe dépend du réseau recherché, telle qu'une ligne, un triangle ou tout autre polytope. La recherche est initiée intuitivement, puis celle-ci évolue aléatoirement en forme et dans l'espace, un sommet à la fois, pour trouver la solution « la plus » optimale. Pour cette minimisation, l'auteur emploie un programme de Mathlab® dénommé « Nelder-Mead multidimensional optimization method ».

Toutefois, cet auteur ne commente pas les étapes de son processus d'optimisation, ni les contraintes imposées à la solution identifiée. D'autre part, ni les temps de convergence vers la solution ni sa répétabilité ne sont stipulés.

Le cas d'un boitier BGA (Figure 26) est exposé, l'erreur relative sur la température de jonction est de l'ordre de 2%.

F6. Optimisation stochastique - Choix d'une technique d'identification adéquate

Au regard de ces travaux, le choix d'une méthode de minimisation s'est orienté, en 2005, vers des algorithmes stochastiques à base de population [R30] avec pour objectif de résoudre des problèmes non-linéaires d'une manière itérative en respectant certaines contraintes (e24).

Ces algorithmes offrent l'opportunité de s'affranchir des limites d'une résolution exacte des équations.

Il est possible de considérer un large jeu de cas tests, constituant l'espace de pertinence du modèle. Ceux-ci vont augmenter les chances d'identifier la solution optimale parmi les solutions candidates.

Parmi, ces algorithmes les plus utilisés, on peut citer :

- Les algorithmes évolutionnaires [I. Rechenberg - H-P. Schewefel, 1965],
- Les algorithmes génétiques [J. Holland, 1975],
- Les essaims de particules [J. Kennedy – R.C. Eberhart, 1995].

Les deux premiers s'inspirent de l'évolution des êtres vivants et se distinguent par des stratégies d'évolution distinctes. Celles-ci seront explicitées au paragraphe suivant F7.

Le dernier algorithme, quant à lui, s'inspire de l'interprétation du déplacement d'un groupe d'individus (groupe d'oiseaux, banc de poissons, essaims). Son principe consiste à déplacer d'une manière intelligente des particules dans un espace de recherche afin de trouver la solution optimale grâce à la cohésion du groupe.

Les évolutions des déplacements individuels et celle relative au groupe sont enregistrées à chaque itération puis combinées de manière à modifier la vitesse et la direction prise par chacun des congénères.

Schématiquement, l'algorithme effectue la somme vectorielle de déplacements pondérés propre à chacune des particules comme l'illustre Tomar dans ces travaux [R31].

Bien entendu, la définition de cette algorithmie s'avère complexe à mettre en œuvre, aussi l'utilisation des algorithmes évolutionnaires ou génétiques est apparue, dans un premier temps, plus facile à appréhender conceptuellement.

Ainsi un individu $[I]$ est représenté par un génotype correspondant à l'ensemble des résistances d'un réseau recherché. Chacune des résistances est alors assimilée à un gène.

Généralement, les valeurs sont réduites, entre 0 et 1, pour figurer le code binaire d'un gène mais la conservation des valeurs physiques des résistances est envisageable pour minimiser la complexité de l'algorithmie.

$$\begin{pmatrix} 0 & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdots & \cdots & R_{1,n} \\ R_{2,1} & 0 & R_{2,3} & \cdots & \cdots & R_{2,n} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & 0 & \cdots & \cdots & R_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R_{n-1,n} \\ R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \begin{pmatrix} 0 & Y_{1,2} & Y_{1,3} & \cdots & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & 0 & Y_{2,3} & \cdots & \cdots & Y_{2,n} \\ Y_{3,1} & Y_{3,2} & 0 & \cdots & \cdots & Y_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Y_{n-1,n} \\ Y_{n,1} & Y_{n,2} & Y_{n,3} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(e45)}$$

Compte tenu de la contrainte de symétrie (e24), l'optimisation méta-heuristique se résume à rechercher les éléments (en rouge) d'une matrice d'adjacence dense puis à calculer la matrice des degrés pour résoudre ce système.

La dimension (M) du génotype ou chromosome à optimiser par l'algorithme génétique est par conséquent réduite aux nombres de surfaces externes et de nœuds internes.

$$[I] = \left[R_{1,2} \; R_{1,3} \cdots R_{1,n} \cdots R_{n-1,n} \right] \quad ou \quad [I] = \left[Y_{1,2} \; Y_{1,3} \cdots Y_{1,n} \cdots Y_{n-1,n} \right] \qquad \text{(e46)}$$

$$M = nN\,(nN-1)/2 \qquad \text{(e47)}$$

Plusieurs travaux sur ces algorithmes inspirés de la nature sont dédiés à la création de modèles thermiques compacts destinés aux composants électroniques, parmi ceux-ci :

- Clarksean et al. [R32] (2002)

  Sur la base d'une topologie préfixée d'un réseau, ayant onze résistances thermiques, l'auteur fixe les expressions des associations de résistances nécessaires afin de calculer analytiquement les températures et les flux des nœuds externes ainsi que du nœud interne observé.

  L'objectif de l'étude est de reconstruire, à partir d'un algorithme génétique, les résistances d'un réseau dont les valeurs sont connues.

  Le processus itératif de recherche des onze résistances est repris ci-dessous :

  1. Étape 1 : Fixer le nombre de nœuds externes et leur surface et identifier le nœud interne,
  2. Étape 2 : Estimation aléatoire des résistances,
  3. Étape 3 : Détermination des températures nodales,
  4. Étape 4 : Calcul de la qualité de l'ajustement en considérant les températures et les flux,
  5. Étape 5 : Modification des résistances via l'algorithme génétique,
  6. Étape 6 : Retour itératif à l'étape 3.

  Les résultats démontrent que les valeurs des résistances du réseau reconstruit diffèrent en moyenne de 3% avec toutefois un extremum à 5%. Malgré tout, l'erreur relative sur les températures des nœuds externes et de jonction du réseau reste en deçà de 1%.

  Cette analyse met en exergue l'obligation de définir une fonction dite « objectif ».

- Raghupathy et al. [R33] (2007)

  A partir d'une forme préétablie de réseau de résistance, cet auteur analyse plusieurs algorithmes d'optimisation et il décrit leur performance respective. Ainsi deux méthodes de régression non-linéaire, dont la méthode de Quasi-Newton, sont confrontées à deux types d'algorithmes génétiques.

  Cette comparaison met en lumière un point sensible des algorithmes génétiques leur convergence vers des minima locaux. Afin de converger vers un minimum global, l'auteur suggère une méthode hybride alliant une méthode de régression linéaire et un algorithme génétique.

  Le réseau thermique étudié distingue uniquement deux chemins d'évacuation de la chaleur, par les broches (lead) et la surface inférieure du boitier (Bottom). Leurs températures et leurs flux sont supposés connus, comme illustré précédemment.

  Pour chacune des méthodes testées, la topologie des réseaux dérivés diffère mais leur comportement est très proche.

L'erreur relative sur la prédiction de la température de jonction, des quatre méthodes est de l'ordre de 5%.

L'auteur souligne toutefois la robustesse et la flexibilité des algorithmes génétiques.

- Arunasalam et al. [R34] (2005)

  Par rapport aux travaux précédents, Arunsalam décrit en détail la conception du processus mis en œuvre pour définir un réseau thermique d'un composant électronique.

  L'algorithme génétique conçu sélectionne les valeurs du réseau, les plus aptes à répondre à l'ensemble des sollicitations appliquées à son élément sensible.

  La détermination de la solution « optimale » se fait par un jeu de croisements et de mutations des éléments constituants le réseau.

  A partir d'un jeu d'observables, la construction du réseau pour un composant de type QFN (Figure 54) est explicitée.

  Le processus établit en premier lieu un réseau de type « star-shaped ». Ainsi toutes les résistances thermiques partent d'un nœud commun, le point sensible, vers des nœuds disposés sur les différentes faces du volume l'englobant.

  Puis des résistances thermiques « surface-to-surface », aléatoirement choisies, sont ajoutées au fur et à mesure jusqu'à l'obtention d'un critère de précision.

  La fonction coût retenue pour ajuster son modèle comportemental est exclusivement basée sur la comparaison des températures de jonction, on parle de « single-objective optimisation ».

$$f(T) = \sum_{k=1}^{nC=38} \left[\left(T_{D_j}^{<k>} - T_{C_j}^{<k>} \right) / \left(T_{D_j}^{<k>} - T_{\infty} \right) \right]^2 \qquad \text{(e48)}$$

  Clairement, la prise en compte des flux, préconisée par la méthode DELPHI est omise. Aussi en comparaison des travaux de Raghupathy, la précision basée sur ce seul paramètre s'avère meilleure.

  La représentativité des flux quittant le composant n'est pas justifiée, même à postériori.

  Le réseau final du composant est confronté aux résultats d'une simulation numérique, ceci pour un jeu de 38 scenarii de conditions de Fourier appliquées à ces surfaces externes.

  La précision du réseau déduit par l'algorithme génétique est de l'ordre de ±1.5%.

A l'évidence, les algorithmes dits « algorithmes évolutionnistes » à base de population donnent des résultats probants pour des problèmes complexes non-linéaires. Ces méthodes manipulent une population de solutions potentielles et non-pas une solution unique évoluant pas à pas par tâtonnement [R28].

De ce fait, elles offrent une meilleure stabilité par rapport aux méthodes de minimisation conventionnelles. Toutefois, leur optimisation est dépendante de la nature du problème à résoudre et le plus souvent difficilement généralisable.

Enfin, leurs performances sont conditionnées à la nécessité de disposer d'un large échantillon de recherche.

Un aspect en adéquation avec notre besoin pour lequel de nombreuses contraintes sont à satisfaire pour qu'un modèle soit considéré indépendant des conditions appliquées à ses frontières.

F7. Processus de recherche d'un algorithme évolutionniste

En pratique, un algorithme évolutionnaire est constitué de phases successives, itérées maintes fois, en fait plusieurs « générations » d'une population de solutions sont analysées [R36]-[R37], puis modifiées progressivement. Ce processus itératif s'achève lorsqu'une solution optimale, parmi la population, répond aux critères d'optimisation souhaités.

La vue synthétique du processus d'optimisation itératif est présentée en Figure 63.

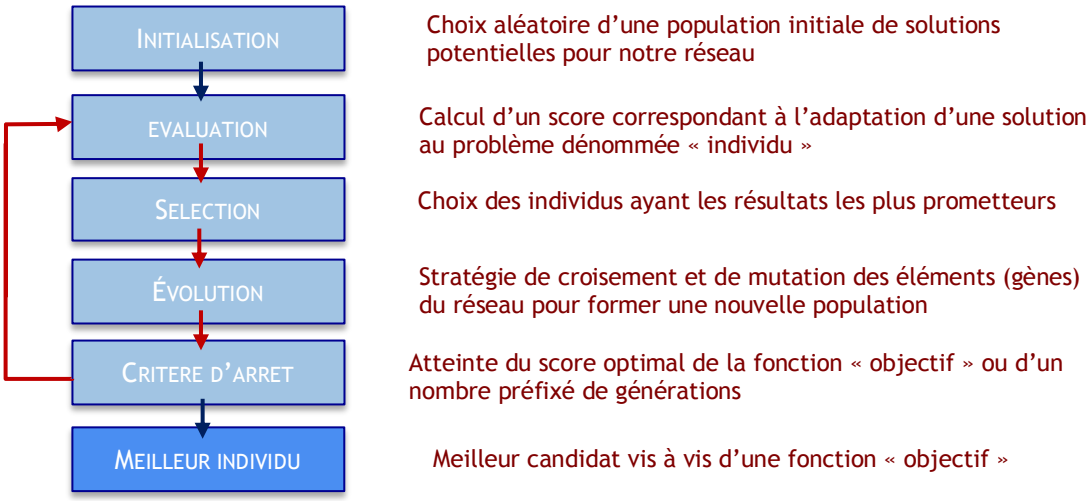


Figure 63 : Squelette d'un algorithme évolutionniste

Ce processus est analogue à une sélection naturelle, les individus les plus adaptés gagnent la compétition de la reproduction tandis que les autres meurent avant la reproduction, ce qui améliore l'adaptation.

Comme évoqué au paragraphe précédent, les algorithmes évolutionnistes sont scindés en deux groupes.

F7.1. Les algorithmes à évolution différentielle

Ce premier type d'algorithme conduit à l'auto-adaptation du génotype des individus d'une population.

Pour cela, trois parents distincts (P^A, P^B, P^C) sont aléatoirement choisis, parmi les meilleurs individus d'une génération donnée (g), afin de créer un descendant (C^A) pour la prochaine génération, sur le principe suivant :

$$[C]_{g+1}^{A} = \left|[P]_g^A + F\left([P]_g^B - [P]_g^C\right)\right| \qquad \text{(e49)}$$

Dans ce processus d'évolution, un taux de mutation fixe le nombre d'enfants (C^i) retenu pour former la future génération. C'est une manière de conserver une large diversité de solutions.

La principale difficulté réside dans la définition du paramètre d'apprentissage F ou « Learning rate ». Plusieurs auteurs préconisent le choix d'une valeur fixe, laquelle est souvent prise égale à 0.5.

Au regard de nos investigations, il est apparu que la valeur de ce paramètre ne doit pas être fixe mais que celle-ci doit varier en fonction de l'évolution de la population.

L'enjeu est d'explorer au départ efficacement l'espace des solutions puis de cerner plus finement le meilleur candidat possible. Ainsi, l'optimisation est scindée en deux phases successives, l'exploration et l'exploitation.

Pour cela, l'expression ci-dessous proposée par Chien [R35] s'est révélée plus efficiente.

$$F = s\sqrt{(rand[0,1])^2\, d} - b \quad avec \quad d = (nG - g)/(nG - 1) \qquad \text{(e50)}$$

Les coefficients s et b sont respectivement dénommés facteur d'accélération et de décélération.

Le paramètre d, quant à lui, diminue progressivement quand le nombre de générations croit.

Les choix opérés par cet auteur, à savoir $s = 1.5$ et $b = 0.2$, fournissent un point de départ pour créer un réseau thermique donnant des résultats pratiquement similaires à ceux du réseau de la Table 11, si ce n'est qu'un nombre plus conséquent de générations est requis pour garantir la convergence.

De plus, il est impératif de relancer maintes fois le traitement pour parvenir au réseau adéquat.

F7.2. Les algorithmes génétiques

Ce second type d'algorithme génétique s'attache à faire évoluer individuellement chacun des gènes du génotype.

Ce concept d'adaptation concentré sur les gènes parait plus logique lorsque l'on cherche à identifier des valeurs physiques pour chacun des éléments d'un réseau thermique.

Les principales étapes conceptuelles du processus à mettre en place sont décrites ci-après :

- L'initialisation

  C'est le brassage génétique en quelle que sorte. Les M valeurs du chromosome (e46) de chacun des individus de la population sont créées aléatoirement dans l'espace permis ($R_{1 \leq n \leq M} > 0$).

- La sélection

  Celle-ci est généralement élitiste, ainsi l'optimisation s'affine progressivement par élimination successive des individus les moins adaptés.

  Dans le cas d'une sélection par rang, les individus possédant les meilleurs scores sont conservés et ils participent à la génération de la population suivante. Celle-ci retient les individus les plus enclins à fournir les meilleurs scores.

  Une notion de hasard peut être introduite par diverses méthodes, telle que la sélection dite par tournoi. Dans ce cas, on tire aléatoirement deux individus pour ne conserver que le plus adapté.

Plus loin, la stratégie d'évolution des gènes constitue le cœur de ces algorithmes, elle comporte deux types d'opérations :

- Les croisements

  Lors de cette phase de mélange aléatoire, deux réseaux de conductances, dits Parents, vont s'échanger des conductances afin d'engendrer de nouveaux réseaux dit Enfants (Figure 64).

  La probabilité d'apparition d'un ou plusieurs points de croisements (en rouge) entre deux parents est paramétrée ou bien totalement aléatoire.

  Celle-ci dépend de la technique de recombinaison des réseaux retenue.

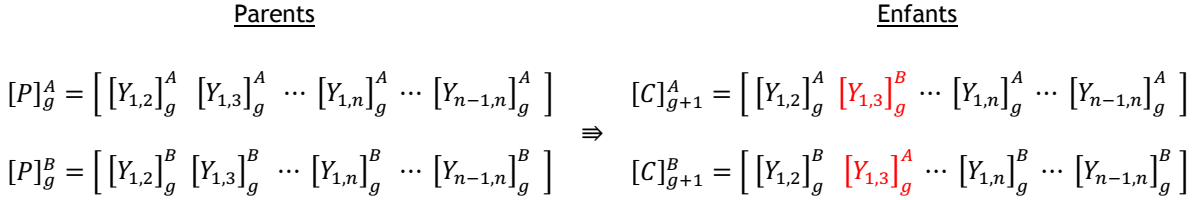


Figure 64 : Principe du croisement des gènes de deux parents

- Les mutations

  Là encore d'une façon aléatoire, une ou plusieurs conductances thermiques, au sein des réseaux, vont être modifiées au cours des générations successives.

  On retrouve le concept d'un paramètre d'apprentissage F appliqué dans ce cas à un gène. Comme évoqué précédemment, ce paramètre est évolutif, le plus souvent il décroit graduellement.

  Il est ainsi possible de changer la direction et la vitesse de recherche. Cette modification autorise un balayage plus important de l'espace de recherche.

Parents Enfants

$$[P]_g^C = \left[[Y_{1,2}]_g^C \; [Y_{1,3}]_g^C \; \cdots \; [Y_{1,n}]_g^C \; \cdots \; [Y_{n-1,n}]_g^C \right] \Rightarrow [C]_{g+1}^C = \left[[Y_{1,2}]_g^C \; [Y_{1,3}]_g^C \; \cdots F\,[Y_{1,n}]_g^C \; \cdots \; [Y_{n-1,n}]_g^C \right]$$

Figure 65 : Principe de la mutation d'un individu

A l'instar des croisements, un taux de mutation des gènes est fixé lors des changements de population liés à chacune des générations.

En pratique, ces opérateurs sont combinés, génération après génération, avec pour objectif de faire émerger un candidat optimal. Contrairement aux algorithmes à évolution différentielle, les algorithmes génétiques vont favoriser un fort taux de croisement puis un faible taux de mutation sera appliqué.

La mutation sert ici à éviter une convergence prématurée sur des optima locaux. Elle participe ainsi à la recherche de la solution la plus adaptée. Cette étape est désignée par l'intitulé « exploitation ».

F8. Appropriation d'un algorithme génétique

L'ajustement des éléments d'un réseau de résistances au moyen des algorithmes génétiques a été perçu comme un outil d'identification intelligent, assimilable à du machine Learning.

Pour évaluer plus largement son intérêt, le logiciel commercial Evolver® a été préalablement utilisé. Apparu en 1989, ce logiciel est le premier logiciel d'optimisation reposant sur un algorithme génétique.

Parallèlement, un développement sous Mathcad® a été conduit afin de pouvoir analyser les critères influents sur la qualité de l'ajustement.

L'état de départ est aléatoire, il s'agit de la génération initiale, puis l'algorithme progresse ensuite de manière itérative vers un critère d'arrêt, caractérisé par l'absence d'évolution du score.

D'autre part, cet algorithme suppose que la probabilité de croisement des 15 éléments de la matrice supérieure est également aléatoire.

Son mécanisme est retranscrit par le Pseudocode 1 ci-après.

Pseudocode 1: Logique d'un Algorithme Génétique

Initialisation : Création aléatoire d'une population de p individus ($g = 1$)

Évaluation : Test de cette population ($p = \mu \cup \lambda$)

Tant que le critère d'arrêt est non atteint **faire**

- **Sélection :** Choix des meilleurs individus (μ) pour la reproduction (parents)
- **Croisement** : Hybridation d'enfants (λ) à partir des gènes de deux parents
- **Mutation :** Sélection aléatoire d'enfants. Leurs les gènes vont être mutés.
- **Évaluation :** Calcul du score des enfants générés
- **Population :** Regroupement de la nouvelle génération ($p \leftarrow \mu \cup \lambda$)
- **Itération :** le nombre de générations à effectuer ($g \leftarrow g + 1$)

Fin

Pour matérialiser cette approche, un des algorithmes génétiques étudiés est fourni en annexe P6.

Pour l'exploration présentée ci-après, la mutation n'était pas activée afin de faciliter la compréhension du comportement de ce type d'algorithme.

Par commodité, la qualité de l'ajustement est réécrite sous la forme d'un coefficient de corrélation :

$$R(T,q) = 1 - f(T,q) \qquad \text{(e51)}$$

Le meilleur modèle ou ajustement aura en conséquence un score proche ou égal à 1.

La « fonction coût » préconisée par la méthodologie DELPHI (e20) a été initialement retenue comme fonction d'ajustement $f\ (T, q)$.

L'optimisation est opérée sur la base d'un facteur de pondération ω entre les températures et les flux égal à 0.5. Subséquemment, la température de jonction et les flux quittant le composant ont un poids similaire.

Dans un premier temps, seuls les scenarii de la Table 12 ont été exploités ; à savoir BC3, BC6, BC10, BC26 et BC40. Dès lors, le score du réseau déduit ne reflète que le meilleur compromis pour 5 conditions.

Pour s'affranchir d'une convergence impromptue connue sous le nom de phénomène de vallées, les scores indiqués dans la Table 14, sont établis sur la moyenne des résultats de 10 résolutions du système linéaire.

En fait, pour toute recherche stochastique, il existe une probabilité pour que le réseau soit significativement éloigné de la solution.

L'analyse des performances porte sur les erreurs suivantes :

- L'erreur moyenne globale du réseau : $\overline{\Delta}$
- L'erreur moyenne sur la température du nœud dit de jonction : $\overline{\Delta T}_{n=J}$

$$\overline{\Delta T_j} = \frac{1}{nC} \sum_{k=1}^{nC} \left| {T_D}_j^{<k>} - {T_C}_j^{<k>} \right| / \left({T_D}_j^{<k>} - T_\infty \right) \tag{e52}$$

- L'erreur maximale sur la température du nœud de jonction : $\Delta T_{n=j}\big|_{max}$

$$\Delta T_j\big|_{max} = \max_{j=1} \left[\left| {T_D}_j^{<k>} - {T_C}_j^{<k>} \right| / \left({T_D}_j^{<k>} - T_\infty \right) \right] \tag{e53}$$

- L'erreur moyenne sur la température vue par les nœuds externes : $\overline{\Delta T}_{n\neq J}$

$$\overline{\Delta T}_{n\neq j} = \frac{1}{nC\ nS} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n=1}^{nS} \left| {T_D}_n^{<k>} - {T_C}_n^{<k>} \right| / \left({T_D}_n^{<k>} - T_\infty \right) \tag{e54}$$

- L'erreur maximale sur la température vue les nœuds externes : $\Delta T_{n\neq J}\big|_{max}$

$$\Delta T_{n\neq j}\big|_{max} = \max_{1\leq n\leq nS} \left[\left| {T_D}_n^{<k>} - {T_C}_n^{<k>} \right| / \left({T_D}_n^{<k>} - T_\infty \right) \right] \tag{e55}$$

- L'erreur moyenne sur les flux quittant le réseau : $\overline{\Delta q}$

$$\overline{\Delta q} = (nC\ nS)^{-1} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n=1}^{nS} \left| {q_D}_n^{<k>} - {q_C}_n^{<k>} \right| / {q_D}_n^{<k>} \tag{e56}$$

- L'erreur maximale sur les flux quittant le réseau : $\Delta q|_{max}$

$$\Delta q|_{max} = \max_{1\leq n\leq nS} \left[\left| {q_D}_n^{<k>} - {q_C}_n^{<k>} \right| / {q_D}_n^{<k>} \right] \tag{e57}$$

La Table 14 fournit les scores obtenus pour la reconstruction du réseau explicité en Table 11.

Les parties grisées distinguent les paramètres participants à la sélection du réseau nodal, à savoir la température de jonction et les flux externes.

Les performances du réseau, en termes de températures et de flux, révèlent l'influence de la taille de la population pour atteindre un bon agrément avec le calcul du réseau Table 11.

Naturellement, l'augmentation de la taille de la population se fait au détriment du temps d'exécution.

Table 14 : Illustration du comportement d'un algorithme génétique pour (e20)

Population « λ »	25	50	100	200	300	400	400	400	500
Nombre de parents « μ »	10	10	10	10	10	10	20	40	10
% elitisme (« μ/λ »)	40%	20%	10%	5%	3.3%	2.5%	5%	10%	2%
Score $R(T,q)$	**0.995**	**0.999**	**0.998**	**0.999**	**1.0**	**1.0**	**1.0**	**1.0**	**1.0**
$\overline{\Delta}= [\overline{\Delta \boldsymbol{T}_n} + \overline{\Delta \boldsymbol{q}}]/2$	8.2%	6.3%	5.9%	5.2%	5.1%	5.0%	4.9%	5.2%	4.3%
$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_j}$	2.2%	1.4%	1.3%	1.2%	0.7%	0.8%	0.6%	0.6%	0.7%
$\Delta \boldsymbol{T}_j\big\vert_{max}$	4.6%	2.9%	2.4%	2.6%	1.3%	1.5%	1.1%	1.1%	1.4%
$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_{n\neq j}}$	8.9%	6.9%	6.7%	6.1%	5.7%	5.7%	5.6%	6.2%	4.8%
$\Delta \boldsymbol{T}_{n\neq j}\big\vert_{max}$	46.8%	45.2%	35.9%	41.3%	44.4%	43.1%	38.7%	45.1%	34.3%
$\overline{\Delta \boldsymbol{q}}$	8.7%	6.7%	6.2%	5.4%	5.5%	5.3%	5.2%	5.4%	4.7%
$\Delta \boldsymbol{q}\vert_{max}$	44.4%	43.5%	34.3%	38.6%	42.4%	42.4%	36.3%	42.6%	33.0%

Les prédictions de la température de jonction du modèle sont concluantes. Pour les autres données, les erreurs relevées restent élevées en particulier s'il s'agit des valeurs maximales des températures externes et des flux quittant le boitier.

C'est l'inconvénient majeur relevé dans l'utilisation de la « fonction coût » de la méthodologie DELPHI basée sur le minimum de la somme résiduelle des carrés (SCR). Très rapidement, les scores sont quasiment tous égaux à 1, dès lors, le choix d'un jeu de paramètres pour parfaire la qualité du réseau est sans effet.

D'autre part, celle-ci pondère trop fortement les erreurs sur les flux en considérant la puissance totale dissipée par la puce Q, comme l'indique la ligne, en gras, des scores $R(T,q)$.

Pour remédier à ce problème, plusieurs pistes ont été envisagées. A titre d'exemple, la fonction coût (e20) a été remplacée par l'expression de l'erreur quadratique moyenne (MSE)

$$f(T,q) = \frac{1}{nC}\sum_{k=1}^{nC}\left[\omega\left(\frac{{T_D}_j^{<k>} - {T_C}_j^{<k>}}{{T_D}_j^{<k>} - T_\infty}\right)^2 + \frac{1-\omega}{nS}\sum_{n\neq j=1}^{nS}\left(\frac{{q_D}_n^{<k>} - {q_C}_n^{<k>}}{\boldsymbol{q_D}_n^{<k>}}\right)^2\right] \qquad \text{(e58)}$$

Dans ce cas, le flux surfacique de chacun nœud ${q_D}_n$ est substitué à la puissance totale de la puce Q.

Puis, de manière à mieux discerner l'influence de la taille de la population et/ou du nombre de parents, il a été jugé préférable de considérer la racine carrée de cette expression (RMSE).

$$f(T,q) = \sqrt{\frac{1}{nC}\sum_{k=1}^{nC}\left[\omega\left(\frac{{T_D}_j^{<k>} - {T_C}_j^{<k>}}{{T_D}_j^{<k>} - T_\infty}\right)^2 + \frac{1-\omega}{nS}\sum_{n\neq j=1}^{nS}\left(\frac{{q_D}_n^{<k>} - {q_C}_n^{<k>}}{\boldsymbol{q_D}_n^{<k>}}\right)^2\right]} \qquad \text{(e59)}$$

Cette nouvelle expression minore le score, comme le souligne la Table 15.

Il en découle que la variation du score en fonction de la formulation retenue est nettement plus marquée.

Ainsi le score déduit varie de 0.734 à 0.933. Il est à noter que la précision du modèle déduit est plus robuste sur l'ensemble des métriques.

La Table 15 démontre qu'une augmentation du taux d'élitisme tend à fournir un meilleur score.

Les meilleures performances sont relevées lorsque que la population est significative et portée à plusieurs centaines d'individus.

Table 15 : Impact de la définition d'une fonction coût pour (e20)

Population « $\boldsymbol{\lambda}$ »	50	50	100	100	200	200	400	400	500
Nombre de parents « $\boldsymbol{\mu}$ »	5	10	10	20	20	40	40	80	50
% elitisme (« $\boldsymbol{\mu/\lambda}$ »)	10%	20%	10%	20%	10%	20%	10%	20%	10%
Score $R(T,q)$	**0.734**	**0.769**	**0.870**	**0.877**	**0.908**	**0.931**	**0.927**	**0.926**	**0.933**
Ecartype	0.055	0.035	0.024	0.015	0.009	0.024	0.011	0.015	0.014
$\overline{\Delta}$	5.6%	4.8%	3.0%	2.9%	2.3%	1.6%	1.8%	1.7%	1.6%
$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_j}$	6.1%	3.9%	2.3%	1.9%	1.6%	1.3%	1.4%	1.4%	1.0%
$\Delta \boldsymbol{T}_j\big\vert_{max}$	14.6%	11.0%	4.2%	4.2%	3.5%	3.2%	3.2%	3.1%	2.0%
$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_{n\neq j}}$	5.7%	5.0%	3.1%	3.1%	2.4%	1.7%	1.9%	1.7%	1.7%
$\Delta \boldsymbol{T}_{n\neq j}\big\vert_{max}$	31.4%	30.8%	13.7%	14.9%	10.4%	6.7%	6.4%	8.2%	5.9%
$\overline{\Delta \boldsymbol{q}}$	5.5%	4.7%	3.0%	2.9%	2.3%	1.6%	1.8%	1.8%	1.7%
$\Delta \boldsymbol{q}\vert_{max}$	28.7%	29.5%	13.2%	14.2%	9.9%	6.9%	6.4%	8.2%	5.8%

En pratique, la convergence de l'algorithme, proposé en annexe P6, est très rapide. Un faible nombre de générations, moins de 20 générations, suffit à stabiliser tous les scores. Ce point dénote l'avantage des algorithmes génétiques vis-à-vis de ceux basés sur une évolution différentielle.

Ces premiers résultats soulignent le compromis à trouver pour minimiser les erreurs sur les différents observables des nœuds du réseau. Il est clair que ce réglage doit se faire par un choix judicieux de la fonction de minimisation $f\ (\theta, q)$ et/ou de son facteur de pondération.

A l'issue de cette première analyse, l'utilisation de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne, formalisée en (e59), semble plus appropriée pour étudier l'influence respective des différents paramètres.

Au final, cette étude préliminaire a permis d'explorer les paramètres clés à combiner, à savoir :

- La taille de la population initiale désignée dans la littérature par « $\lambda + \mu$ »,
- Le nombre d'individus représentant l'élite ou « μ »,

Des stratégies d'évolution ont été explorées en particulier sur le renouvèlement de la population.

Ainsi, deux types de renouvellement de population peuvent être évoqués :

- La méthode dite « $\mu + \lambda$ » explicitée dans notre analyse. A chaque génération on conserve les meilleurs parents « μ » pour la reproduction et on associe « λ » nouveaux enfants.
- La méthode dite « μ, λ » où à chaque génération on remplace les parents par les enfants.

Le principe de conserver les meilleures solutions de générations en génération s'est avéré plus efficient pour converger rapidement vers une solution optimale.

Bien entendu, le nombre de scenarii à satisfaire est bien supérieur à celui exposé dans cet exemple, l'objectif étant de bâtir un réseau précis sur l'ensemble des conditions de la Table 10.

F8.1. Choix des critères d'évolution

Comme mentionné, l'adaptation des algorithmes génétiques à notre besoin a nécessité la détermination des paramètres relatifs à la phase d'évolution de la Figure 63 mais surtout un codage en Java pour accélérer les temps de calcul de l'algorithme. Cette tâche a été confiée à Olivier Daniel.

Le caractère aléatoire initial de la phase de croisement a été formalisé au moyen d'un facteur dit probabilité de croisement, lequel sera dénommé γ_c.

La mutation est quant à elle caractérisée soit par un facteur de probabilité γ_m, soit par un taux de mutation.

Il est à noter que les gènes ne font pas l'objet d'un codage binaire, les valeurs réelles positives formant le chromosome ($[I] \in \mathbb{R}^M,\ tel\ que\ Y_{i,j} \geq 0\ pour\ i \neq j$) sont conservées tout au long du processus d'apprentissage.

L'optimisation de ces paramètres a réclamé la réalisation de nombreux tests afin de quantifier la rapidité, la qualité et la répétitivité des résultats.

Deux types de configuration semblent relativement viables :

- Premier jeu de paramètres :

  Celui-ci a une population « $\mu + \lambda$ » de 400 individus ayant pour répartition $\mu = 50$ et $\lambda = 350$. Le croisement des gènes est similaire à l'exemple précédent.

  La stratégie d'évolution des gènes a été axée cette fois sur de la mutation.

  Un facteur de probabilité d'une mutation « ξ » est fixé initialement à 0.5 et évolue jusqu'à 0.1 en fonction des scores obtenus par les individus. Ainsi, l'évolution de ce facteur est déclenchée par l'absence d'évolution durant 100 générations.

  Ce mécanisme est retranscrit par le Pseudocode 2 ci-après.

Pseudocode 2 : Logique de la mutation d'un gène

Si $\Delta s > 100$ **alors**
  Calculer pour $i = 1, \cdots, M$
  $p_i = rand[0,1]$
  Pour $i = 1, \cdots, n-1$ **faire**
    Pour $j = i+1, \cdots, n-1$ **faire**
    Si $p_i < \xi_g$ **alors** $Y_{i,j} = F\ Y_{i,j}$
    $Y_{i,j} = Y_{i,j}$
Fin

- Le second jeu :

  Cette approche est aussi basée sur une population « $\mu + \lambda$ » avec cette fois $\mu = 40$ et $\lambda = 200$.

  La stratégie d'évolution couple croisement et mutation suivant diverses proportions. Le facteur initial de probabilité « γ » d'un croisement est de 0.4. Puis en fonction du nombre de générations, il diminue progressivement à 0.1 afin d'éviter toute convergence prématurée.

  Concernant la mutation, un taux de mutation de 20% des gènes est imposé. Un fort taux de mutation est indispensable pour d'introduire de la diversité.

Le premier jeu a été préféré au second. A l'époque, ce choix est dicté par la robustesse et par la meilleure précision de cette configuration malgré une vitesse d'exécution plus lente.

Il est à souligner que les choix retenus par Arunasalam [R34] pour l'optimisation d'un réseau sont très différents des nôtres. Les principales différences sont commentées ci-après.

- La population :

  La taille de la population choisie est de l'ordre de la centaine d'individus, or nous avons privilégié une population plus importante. L'avantage d'un plus grand nombre de croisements et de mutations réalisables par génération est d'introduire une diversité plus large, ceci au détriment du temps de calcul.

  La recherche du meilleur réseau est en définitive effectuée sur un panel de solutions plus conséquent palliant de ce fait à une convergence vers un minimum local.

- Le taux de croisement :

  Nos deux approches adoptent des stratégies opposées d'évolution des gènes.

Contrairement à ce que cet auteur préconise, notre taux de croisement est très faible. Malgré tout, les deux stratégies s'avèrent capables d'atteindre des solutions pertinentes, comme l'indique la Table 14.

L'avantage d'une optimisation basée uniquement sur du croisement réside dans sa simplicité. Il s'agit d'organiser efficacement les permutations aléatoires des conductances thermiques du réseau à chacune des générations.

- Le taux de mutation :

  Les méthodes diffèrent également sur la valeur du taux de mutation utilisée. L'auteur privilégie un taux de mutation compris entre 1% et 5%. Avec un taux de mutation très faible, la définition de son évolution au cours de l'optimisation est moins problématique.

- Le critère d'arrêt :

  Le choix du critère d'arrêt retenu par l'article est fixe, à savoir 10000 générations. Notre choix s'est porté sur un critère dynamique basé sur la dérivée de la courbe des scores.

Une analyse comparative des deux approches a été menée, les résultats sur la prédiction de l'élément sensible, la température jonction, sont similaires, l'erreur reste en deçà de 0.5%.

F8.2. Les performances d'un algorithme génétique optimisé

Les différents travaux d'optimisation de l'algorithme, à l'instar des Table 14 et Table 15, ont abouti à une nouvelle définition de la fonction multi-objective $f(T,q)$.

$$f(T,q) = \omega\, f(T) + (1-\omega) f(q) \tag{e60}$$

Celle-ci considère désormais la minimisation des erreurs suivantes :

- L'erreur moyenne sur la température de tous les nœuds : $\Delta\overline{T}$

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{nC\ nN} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n=1}^{nN} \left| {T_D}_n^{<k>} - {T_C}_n^{<k>} \right| / \left({T_D}_n^{<k>} - T_\infty \right) \tag{e61}$$

- L'erreur maximale sur la température du nœud de jonction (e53) : $\Delta T_j^{<k>}\big|_{max}$
- L'erreur maximale sur la température vue par les nœuds externes (e55) : $\Delta T_{n\neq j}^{<k>}\big|_{max}$
- L'erreur maximale sur les flux quittant le réseau (e57) : $\Delta q^{<k>}\big|_{max}$
- L'erreur moyenne pondérée des flux quittant le réseau est définie ci-après :

$$\overline{\Delta \dot{q}} = \frac{1}{nC\ nS} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n=1}^{nS} \left| {q_C}_n^{<k>} - {q_D}_n^{<k>} \right| / Q \tag{e62}$$

Les fonctions d'ajustement des températures $\left(f(T)\right)$ et des flux $\left(f(q)\right)$ sont décrites ci-dessous :

$$f(T) = A_1\, \overline{\Delta T} + A_2\, \Delta T_j\big|_{max} + A_3\, \Delta T_{n\neq j}\big|_{max} \tag{e63}$$

$$f(q) = A_4\ \overline{\Delta \dot{q}} + A_5\, \Delta q|_{max} \tag{e64}$$

Les valeurs de chacun des coefficients sont précisées dans la Table 16.

Table 16 : Définition des poids des différentes erreurs

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	ω
0.6	0.25	0.15	0.7	0.3	0.8

Pour mettre en évidence les capacités de l'algorithme finalement mis au point, l'exemple concernant l'identification du réseau de la Table 11 est reconduit. Les principaux résultats obtenus par celui-ci sont synthétisés en annexe P7.

Deux identifications du réseau de la Table 11 sont fournies, ainsi :

- La première se base sur un jeu de 6 scenarii : BC3, BC6, BC10, BC26, BC40 et BC46,
- La seconde est menée en utilisant 7 scenarii : BC3, BC6, BC10, BC26, BC40, BC46 et BC49.

La Table 126, en annexe, démontre la qualité des deux réseaux déduits par une optimisation réalisée au moyen d'un algorithme génétique.

Les résultats sont réellement probants, l'erreur maximale relevée sur les températures est de l'ordre de ±1%. Celle-ci n'excède pas ±0.3% pour la température de jonction et elle est négligeable sur les flux quittant le réseau.

Il est possible d'améliorer la précision du réseau en imposant une condition de Dirichlet sur les nœuds externes du réseau. Les surfaces externes ont alors des températures uniformes.

Cette nouvelle condition a pour vocation de minimiser le rôle des résistances dites de « surface-to-surface » et de rendre le réseau déduit plus réaliste.

Table 17 : Définition d'une 49eme condition aux limites (en W m^{-2} K^{-1})

Cas Test	Face Sup.	Face inf.	Faces lat.	Les connexions
49	10^9	10^9	10^9	10^9

Dans le cas étudié, cette condition procure une baisse de l'erreur relative sur la température la plus sensible du composant. Ainsi, l'erreur sur la température de jonction est inférieure à ±0.15%.

La précision obtenue pour chacun des nœuds est explicitée ci-après, Figure 66.

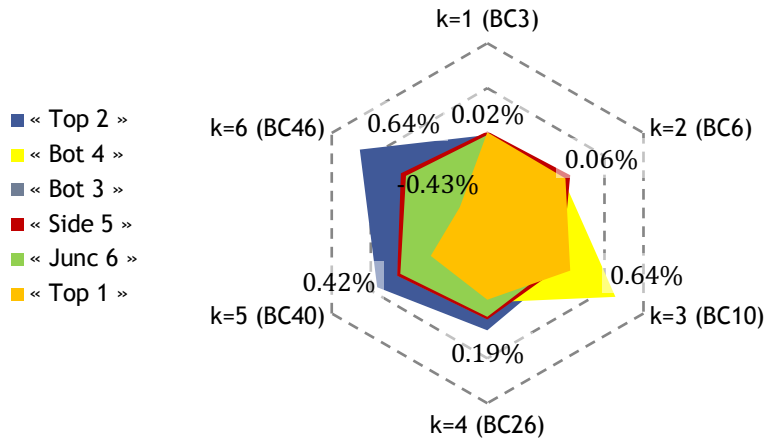


Figure 66 : Visualisation des erreurs relatives pour les 6 nœuds du réseau GA

Il est à noter que la prise en compte d'un nombre de scenarii plus conséquent va accentuer la capacité de l'algorithme à identifier le réseau prédéfini.

Force est de constater que l'utilisation des algorithmes génétiques pour la reconstruction d'un réseau disposant de plusieurs résistances thermiques s'avère un choix pertinent.

Ce dernier peut être construit en prenant en compte, d'une manière optimale, un ensemble de critères, on parle de « multi-objective optimisation », ceci afin de parfaire ses prédictions.

F8.3. Industrialisation des avancées vis-à-vis de la méthodologie DELPHI

En 2006, le choix des algorithmes génétiques, comme technique d'identification de nos réseaux, est définitivement adopté. Il est par conséquent envisageable de développer une base de modèles thermiques au moyen d'un processus de création industrialisé, l'objectif du projet DELPHI.

Celui-ci consiste à créer une base de modèles numériques réalistes, dits « 3D », puis d'exploiter les résultats de leur simulation afin de générer un modèle nodal inspiré de la méthodologie DELPHI.

La complexité du réseau dérivé dépend de la représentativité recherchée « 2R », « 3R » ou « nR ». Bien entendu, cette dernière plus précise (F9) est plébiscitée. Les échanges thermiques prépondérants, entre le composant et son environnement, sont alors plus correctement décrits et plus facilement exploitables, améliorant de ce fait la pertinence des prédictions.

La détermination du meilleur réseau de résistances thermiques reliant les surfaces externes et les nœuds internes sensibles est effectuée à partir des résultats de 49 cas distincts (DELPHI+1). L'optimisation du réseau est obtenue au moyen d'une fonction coût pondérant la température de jonction, les flux quittant les surfaces externes ainsi que leur température, un aspect novateur au regard du projet DELPHI.

Bien évidemment, la température maximale vue par la jonction du semi-conducteur demeure le critère dominant de la fonction d'ajustement des résistances du réseau par un algorithme génétique.

La qualité du modèle, ou score, est reliée à une fonction « multi-objective » du type :

$$f(T,q) = \omega \left[\beta\, f\left(T_j\right) + (1-\beta)\, f\left(T_{n\neq j}\right) \right] + (1-\omega)\, f(q) \qquad \text{(e65)}$$

Les paramètres ω et β jouent le rôle de facteur de pondération entre les scores des fonctions $f\,(T)$ et $f\,(q)$ calculés d'une part sur les températures et d'autre part sur les flux.

La modification « intelligente » de ces facteurs de pondération permet d'ajuster la précision du modèle lors de la « sélection naturelle » des meilleurs réseaux.

Leurs scores dépendent du nombre de scénarios explorés et du nombre de nœuds du réseau :

$$f\left(T_j\right) = \frac{1}{nC} \sum_{k=1}^{nC} \left| {T_D}_j^{<k>} - {T_C}_j^{<k>} \right| / \left({T_D}_j^{<k>} - T_\infty \right) \qquad \text{(e66)}$$

$$f\left(T_{n\neq j}\right) = \frac{1}{nC\; nS} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n\neq j=1}^{nS} \left| {T_D}_n^{<k>} - {T_C}_n^{<k>} \right| / \left({T_D}_n^{<k>} - T_\infty \right) \qquad \text{(e67)}$$

$$f(q) = \frac{1}{nC\; nS} \sum_{k=1}^{nC} \sum_{n\neq j=1}^{nS} \left| {q_C}_n^{<k>} - {q_D}_n^{<k>} \right| / Q \qquad \text{(e68)}$$

Les fondations de notre méthodologie de création d'un réseau nodal sont finalement posées :

- Création d'un modèle numérique réaliste d'un composant électronique,
- Sélection d'une fonction « multi-objective »,
- Définition d'un jeu de conditions à appliquer à ces limites (nC) : 48 conditions de Fourier + une condition de Dirichlet,
- Choix de la topologie du réseau recherché : subdivision des faces externes,
- Sélection d'une technique d'identification : les algorithmes génétiques,
- Définition d'un critère d'acceptation des observables tel que $R(T,q) = 1 - f(T,q) > 0.90$.

A l'instar de la méthodologie DELPHI, celle-ci concerne seulement les composants dotés d'un seul semi-conducteur. Néanmoins, les différentes étapes ci-dessus ont été progressivement amendées pour répondre à l'évolution des technologies des composants électroniques (D2.2) telle que les composants à multiples puces.

Pour cela, la définition des fonctions coûts $f(T)$ et $f(q)$, de la population, des facteurs de probabilité d'un croisement ou d'une mutation a été périodiquement révisée afin de garantir une qualité constante pour tous les modèles nodaux générés.

De plus, pour pallier les phénomènes de vallées, lesquels correspondent à une convergence parasite vers un minimum local, le processus d'identification du réseau par algorithme génétique est rejoué plusieurs fois pour s'assurer de la stabilité du score.

En définitive, ce processus d'optimisation de réseau s'est avéré capable de fournir un modèle précis quel que soit le nombre de nœuds du réseau recherché.

F8.4. Création industrielle de réseaux nodaux dédiés aux composants électroniques

Le processus précédent d'identification d'un réseau nodal dérivé d'un ensemble de simulations numériques a été appliqué sur de nombreux cas de composants électroniques.

Cette tâche a été confiée à Valentin Bissuel dans le but de définir le paramétrage (F8.1) d'un algorithme génétique le plus adapté à un large échantillon de boitiers de composants électroniques.

Cette analyse a abouti au choix d'un jeu « Référence » des paramètres "$\mu, \lambda, \xi, \gamma$ ", tels que :

- $\lambda = 400$, $\mu = 50$, $\gamma = 50\%$ et $\xi = 10\%$,
- Le nombre de générations maximal est fixé à 6000.

Pour illustrer ces choix, l'exemple d'un composant mono-puce, dit QFN16 (Figure 18), est exposé.

Le modèle numérique présenté ne prend en compte les connexions électriques (Figure 74) reliant le semi-conducteur aux broches métalliques d'interconnexion en contact avec la carte. Cette limitation était liée à l'époque au choix d'un logiciel de thermofluidique basé sur la méthode des différences finies, lequel n'autorisait pas la représentation de formes non-cartésiennes.

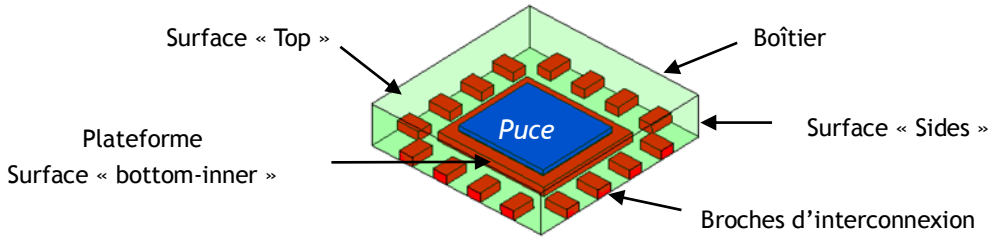


Figure 67 : Représentation tridimensionnelle du composant modélisé numériquement

Sa puce électronique est supposée carrée et collée au centre de la plateforme métallique (en rouge).

Les caractéristiques dimensionnelles et thermiques du modèle sont déclinées dans la Table 18.

Table 18 : Définition des différentes caractéristiques d'un composant QFN16

QFN16	*L (mm)*	*W (mm)*	*H (mm)*	*k @ 25°C (W/(m.k))*
Puce	1.75	2	0.3	150
Colle	1.75	2	0.030	2.1
Plateforme	2.25	2.5	0.2	260
Broche x 16	0.23	0.4	0.2	260
Boîtier	4	4	0.85	0.66

Le pas inter-broche est de 0.65mm. La puissance de la puce est appliquée sur la partie supérieure de la puce. Par commodité, la dissipation est fixée à 1Watt.

La température maximale de cette surface est assimilée à un nœud interne dit de « Junction ».

En accord avec la méthodologie DELPHI, les surfaces supérieure et inférieure sont subdivisées en deux zones distinctes, dénommées par les anglicismes « inner » et « outer ».

Les faces latérales ou « Sides » sont regroupées sur un unique nœud externe. Le réseau nodal à déduire est par conséquent constitué de 6 nœuds. Les 5 surfaces externes du modèle à approximer, ou « box model », se basent sur des géométries internes du composant.

Par exemple, la zone sous la plateforme fournit la surface du nœud « bottom-inner » et la projection de la surface de la puce sur la face supérieure du boitier, celle du nœud « top-inner ».

La forme extérieure résultante de l'analyse comportementale est dépeinte Figure 68.

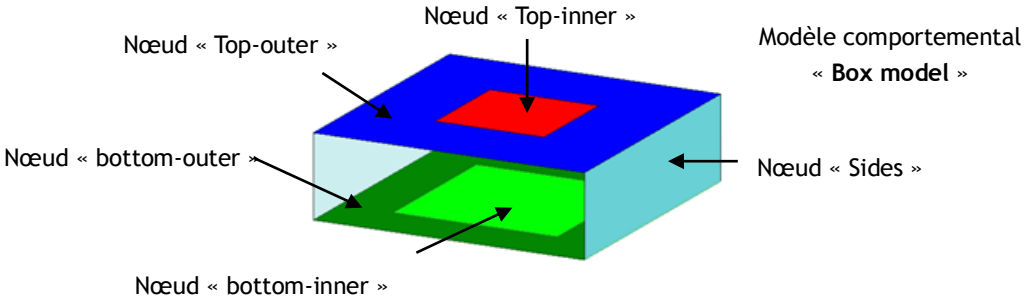


Figure 68 : Représentation tridimensionnelle de la forme du modèle réduit

Le réseau généré par l'algorithme génétique relie l'ensemble de ces nœuds, comme l'indique le réseau de l'annexe P7. Les résistances de « surface-to-surface » sont créées automatiquement.

A l'issue de l'optimisation, le meilleur score obtenu pour 20 résolutions est égal à 0.9796. Cette valeur démontre la qualité de l'ajustement stochastique opéré par un algorithme génétique. Les scores minimum et moyen sont fournis en Table 19. Ce dernier est atteint ou bien dépassé dans 60% des cas.

Table 19 : Variabilité de la solution dérivée

Qualité	$R(T,q)$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\Delta T_j}$	$\Delta T_j\|_{max}$	$\overline{\Delta T_{n\neq j}}$	$\Delta T_{n\neq j}\|_{max}$	$\overline{\Delta q}$	$\Delta q\|_{max}$
Miminum	0.9648	1.8%	1.0%	2.5%	1.9%	12.3%	1.9%	12.4%
Moyen	0.9747	1.1%	0.8%	1.7%	1.2%	9.6%	1.2%	9.6%
Meilleur	0.9796	0.8%	0.4%	0.9%	0.9%	9.0%	0.9%	9.0%

Des performances similaires sont trouvées si le nombre de résolutions du réseau est porté à 30.

Pour les 49 jeux de conditions aux limites précités, les écarts de prédictions de la température du nœud de jonction du réseau « moyen » sont indiqués sur la Figure 69.

Pour le score moyen, l'erreur maximale sur ce nœud primordial pour la conception thermique n'excède pas 2%. L'erreur maximale sur les autres nœuds est détaillée en annexe P8.2.

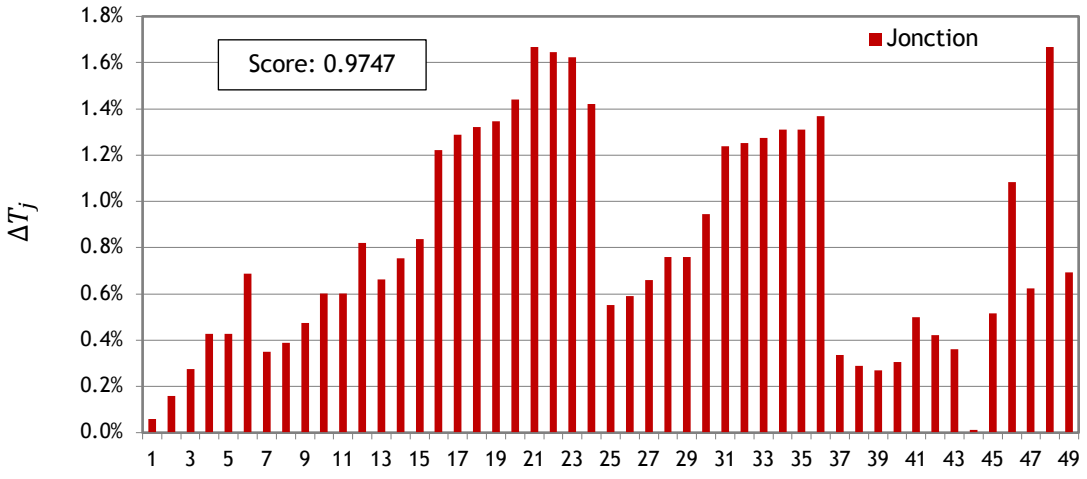


Figure 69 : État des divergences du réseau nodal dérivé du modèle numérique

Il est à noter que la température de jonction n'est pas le seul objectif de notre optimisation.

Le modèle créé pondère également les erreurs vues sur les autres nœuds du réseau. L'erreur relative moyenne pour les autres nœuds du réseau est formalisé sur la Figure 70.

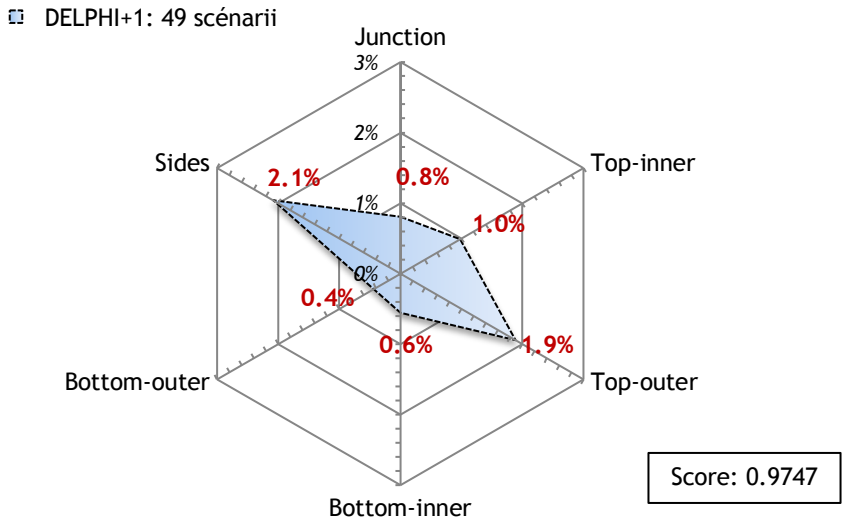


Figure 70 : Visualisation des erreurs moyennes pour les 6 nœuds du réseau du QFN16

Le niveau d'erreur indiqué démontre la capacité du modèle à calculer tous les échanges thermiques du composant vers son environnement proche, ceci pour un large panel de conditions appliquées sur ses faces. Typiquement, les réseaux capitalisés dans la base sont dotés de 7 à 8 nœuds selon la subdivision des surfaces externes.

La généralisation à d'autres familles de composants a été justifiée dans plusieurs articles présentés à la communauté scientifique [5]-[6].

In fine, la substitution d'un modèle numérique de plusieurs milliers de degrés de liberté par une matrice symétrique de 49 ou 64 éléments offre une réduction substantielle.

F9. Pertinence de la topologie des réseaux nodaux de type DELPHI

En s'appuyant sur notre démarche d'élaboration d'un réseau nodal, il est possible de dériver des réseaux ayant une complexité variable, tels que des réseaux constitués de deux ou trois résistances thermiques dits « 2R » ou « 3R » ainsi que des « star-model ».

Ces réseaux simples sont facilement concevables par notre algorithme génétique et leurs performances ont été confrontées pour un ensemble de 49 conditions aux limites.

L'élaboration des modèles de type « 2R » ou « 3R » nécessite de définir les surfaces physiques externes indispensables à une représentation tridimensionnelle de l'enveloppe du modèle compact.

En effet, l'utilisation d'un nombre limité de nœuds exige de regrouper ou bien de négliger certaines surfaces. Par exemple, il s'agit de statuer sur la considération des faces latérales du modèle (« Sides »).

Généralement, celles-ci sont négligées au regard des dimensions de la surface supérieure des circuits intégrés conventionnels. Cette simplification s'est standardisée [R17] sans que les concepteurs soient réellement conscients des répercussions, en particulier lorsque les composants sont de petites dimensions.

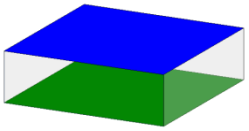
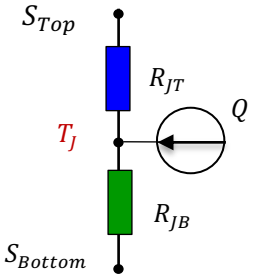
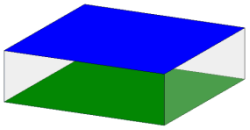
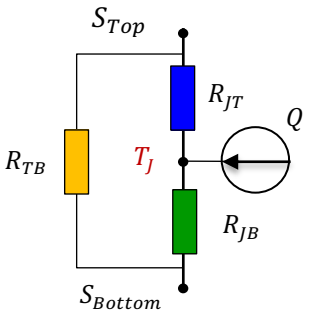
Pour justifier les choix de la méthode DELPHI, les erreurs consécutives à ce choix ont été quantifiées sur une série de cas de figure, lesquels sont synthétisés en Table 20.

Cette table compare deux modèles simplifiés destinés au composant QFN16 dépeint en Figure 67.

Ainsi quelle que soit la configuration, on note que l'erreur maximale sur la température de jonction est supérieure à 74%.

Le second modèle dit « 3R » est construit en supposant que tous les nœuds sont reliés par une résistance. Cette complexification du réseau ne suffit pas à améliorer la capacité de ce réseau à reproduire correctement le comportement thermique du composant cible.

Table 20 : Définition de réseaux simplifiés sans surfaces d'échange latérales

Nom du modèle	Score	Définition des surfaces	Topologie du réseau
Modèle JEDEC : **JT-JB 2R** Réseau : $\boldsymbol{nN = 3}$, $\boldsymbol{nR = 2}$, $\boldsymbol{nS = 2}$	$\overline{\Delta T_j} = 23.7\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 73.5\%$	 2 Surfaces	
Modèle « shunt » : **JT-JB-TB 3R** Réseau $\boldsymbol{nN = 3}$, $\boldsymbol{nR = 3}$, $\boldsymbol{nS = 2}$	$\overline{\Delta T_j} = 24.1\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 73.5\%$	 2 Surfaces	

L'ajustement est de piètre qualité pour un grand nombre de scenarii comme le démontre la Figure 71.

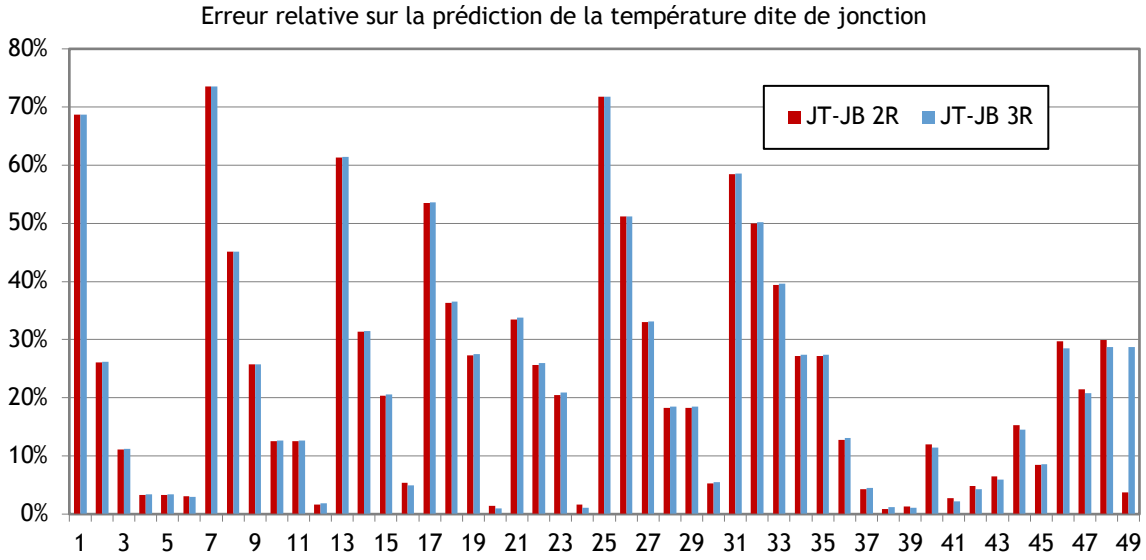


Figure 71 : Visualisation des erreurs de réseaux simplifiés sans surfaces d'échange latérales

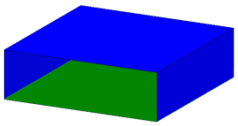
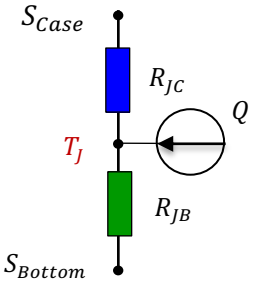
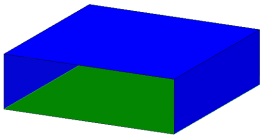
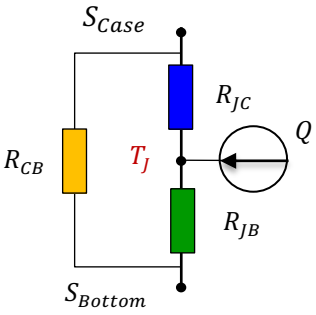
Le parti de négliger, ou non, les surfaces dites « Sides » est dès lors à envisager avec circonspection.

Comme alternative, la Table 21 propose un regroupement des surfaces en contact avec le fluide.

Dans cet exemple, la face supérieure et les surfaces latérales sont supposées avoir une température uniforme. La considération d'une surface d'échange avec le fluide plus réaliste a pour avantage d'améliorer la précision concernant la prédiction de la température de la jonction.

Malgré tout, celle-ci demeure inadéquate par rapport à nos exigences. La visualisation des écarts relevés sur l'ensemble des 49 conditions aux limites est fournie en annexe P8.3.

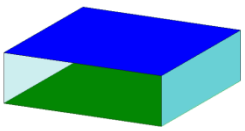
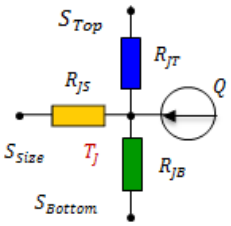
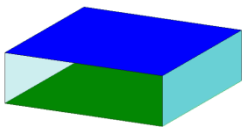
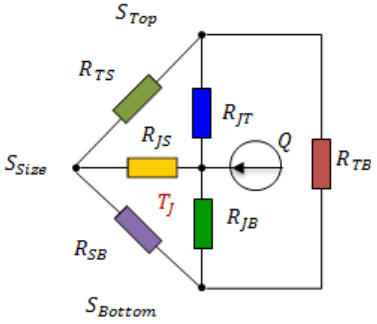
Table 21 : Définition de réseaux simplifiés de type « 2R » ou « 3R »

Nom du modèle	Score	Définition des surfaces	Topologie du réseau
Modèle physique : **JC-JB 2R** Réseau : $\boldsymbol{nN = 3}$, $\boldsymbol{nR = 2}$, $\boldsymbol{nS = 2}$	$\overline{\Delta T_j} = 13.3\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 34.9\%$	 2 surfaces $\boldsymbol{S_{Case} = S_{Sides} + S_{Top}}$	
Modèle physique « shunt » : **JC-JB-CB 3R** Réseau : $\boldsymbol{nN = 3}$, $\boldsymbol{nR = 3}$, $\boldsymbol{nS = 2}$	$\overline{\Delta T_j} = 13.6\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 34.6\%$	 2 Surfaces $\boldsymbol{S_{Case} = S_{Sides} + S_{Top}}$	

Il est certain qu'un nombre de surface restreint à deux éléments n'offre que peu de latitude pour ajuster le comportement physique d'un boitier réel.

L'influence de l'ajout d'une surface supplémentaire est illustrée en Table 22.

Table 22 : Définition d'un réseau nodal dit « star-model » du composant QFN16

Nom du modèle	Score	Définition des surfaces	Topologie du réseau
Modèle « star » : **JT-JS-JB 3R** Réseau : $\boldsymbol{nN = 4}$, $\boldsymbol{nR = 3}$, $\boldsymbol{nS = 3}$	$\overline{\Delta T_j} = 13.7\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 64.4\%$	 3 surfaces	
Modèle « star-shunt » : **JSTB 6R** Réseau : $\boldsymbol{nN = 4}$, $\boldsymbol{nR = 3}$, $\boldsymbol{nS = 3}$	$\overline{\Delta T_j} = 9.5\%$ $\Delta T_j\|_{max} = 29.5\%$	 3 surfaces	

Le premier réseau est connu sous le nom de « star-model ». L'utilisation pratique de ces réseaux est également alléguée dans les thèses de Habra [R38] ou de Nowakowski [R39].

Pour Habra, les écarts de ce type de modèle nodal par rapport au modèle physique sont testés pour un jeu de 22 conditions aux limites. L'erreur maximale indiquée est de l'ordre de 18% comme l'indique l'histogramme fournit en annexe P8.3. Pour notre boitier miniaturisé, celle-ci est proche de 65%.

L'emploi de résistances entre les surfaces, ou « shunt », favorise la diminution des erreurs. L'écart entre le modèle détaillé et son modèle nodal, est en moyenne en dessous de 10%.

La Figure 72 détaille les erreurs maximales constatées sur l'intégralité du domaine de recherche.

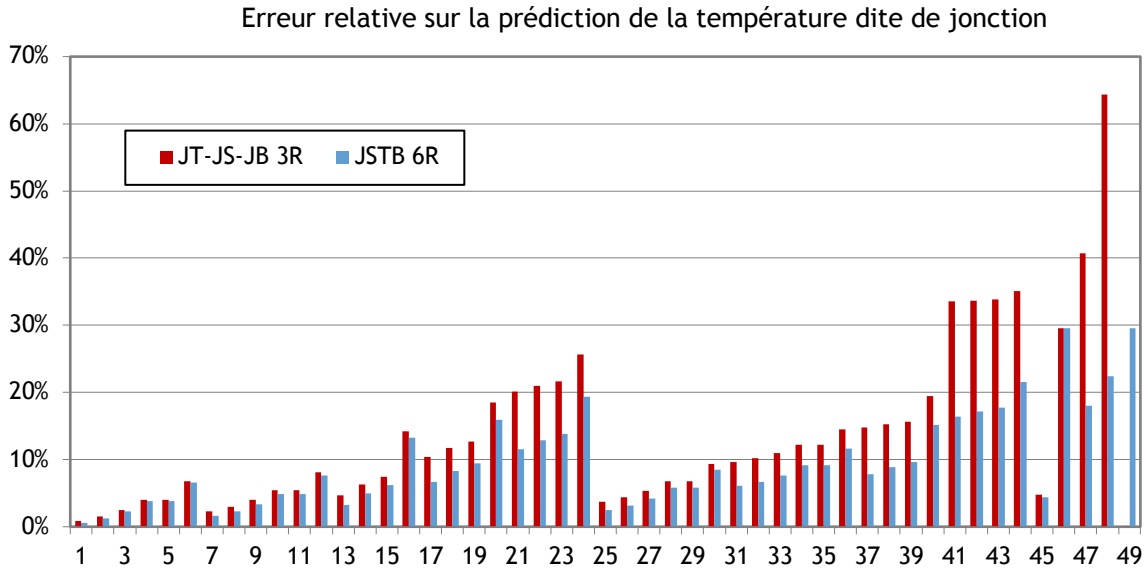


Figure 72 : État de toutes les divergences des réseaux nodaux simplifiés

Force est de constater, que les prédictions sont très éloignées (underfitting) de celles de la Figure 69.

Malgré tout, cet exemple suggère des axes de réflexion pour parfaire la qualité du réseau, à savoir de :

- Disposer d'un nombre de surfaces suffisant pour délimiter finement des zones isothermes,
- Considérer la présence de résistances dites « surface-to-surface ».

In fine, cette analyse établit que pour évaluer avec plus de justesse la température du semi-conducteur, il est préférable de privilégier les réseaux à multiples résistances en lieu et place des réseaux dits « 1R » « 2R » ou « star-model ».

Les réseaux à multiples résistances offrent la possibilité de mieux formaliser les contributions des divers chemins d'évacuation de la chaleur et par ce biais de minimiser les erreurs du modèle réduit.

Cette courte démonstration entérine le choix d'une représentation d'un modèle compact se basant sur les recommandations et les scenarii de la méthodologie DELPHI.

F10. Représentativité d'un modèle numérique

Un prérequis à la création d'un modèle nodal est l'établissement d'un modèle numérique réaliste.

Il faut définir le bon niveau de niveau de représentation. Ceci est indispensable pour les composants de petites dimensions comme le boitier QFN16 étudié dans les paragraphes précédents.

La Figure 73 souligne différentes options de modélisation des constituants internes du boitier.

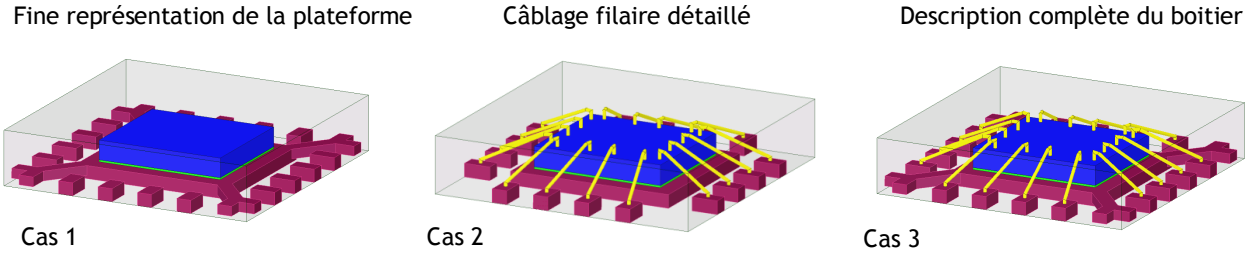


Figure 73 : Exemple de divers degrés de représentativité du modèle numérique

A la représentation simplifiée du composant (Figure 67) les éléments suivants ont été ajoutés :

- La définition exacte de la plateforme en cuivre sur laquelle est montée la puce,
- L'ensemble des connexions électriques reliant la puce aux broches de connections.

Ces trois représentations numériques du boîtier ont été comparées en imposant sur les faces du composant les conditions fournies ci-dessous.

Table 23 : Conditions surfaciques appliquées pour la comparaison des trois niveaux de modélisation

Scénario	h_{TOP}	h_{BOTTOM}	h_{SIDES}
BC=46	$10W/(m^2K)$	$1000W/(m^2K)$	$10W/(m^2K)$

Celles-ci peuvent être reliées au comportement du composant placé sur une carte électronique refroidie par convection naturelle. La puissance appliquée à la puce est de 0.5W et la température est fixée à 20°C.

Les températures maximales vues par la puce sont confrontées en Table 24.

Table 24 : État des températures vues par le semi-conducteur

Scénario	Cas 0	Cas 1	Cas 2	Cas 3
BC=46	67.2°C	61.1°C (-13.1%)	62.1°C (-11%)	60.3°C (-14.7%)

Cette analyse révèle l'influence de l'ajout d'éléments métalliques supplémentaires au sein du boitier, ceux-ci vont favoriser les transferts de la chaleur de la puce vers la carte (h_{BOTTOM}).

En contrepartie, cette représentation plus complète de la structure interne du boitier va fortement accentuer les temps de simulation et l'obtention d'un modèle approximé.

L'enjeu pour l'établissement du modèle réaliste est de ne modéliser que les éléments ayant un impact significatif sur la ou les températures que l'on désire observer.

Il est à noter que la forme des connexions filaires fait l'objet d'un guide intitulé JESD95 [R40].

Ce fascicule précise les formulations et les données nécessaires pour construire une liaison métallique « représentative » (Figure 74). Ainsi la longueur d'un fil va dépendre de la distance entre la plage d'accueil sur la puce et la broche assurant sa connexion électrique à la carte.

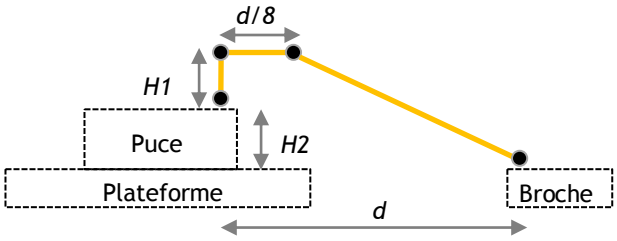


Figure 74 : Forme simplifiée d'un fil reliant la puce à une broche

L'influence de la nature des fils de connexion, du cuivre, de l'aluminium ou de l'or, a été analysée dans la thèse de cheikh DIA [55].

Le cas d'un composant dit « Powerpaks » a été présenté au congrès de la SFT en 2013 [15]. Cet article met en lumière, l'importance de modéliser la liaison thermique entre la puce et les broches.

Il est démontré que celle-ci tend à homogénéiser les températures des faces latérales, un aspect qui favorise la qualité d'un réseau nodal basé sur faible nombre de surfaces externes considérées isothermes.

F11. Définition des propriétés thermiques pour créer un modèle numérique

A l'instar des détails géométriques du boitier, le choix des propriétés thermiques des éléments constitutifs du boitier va influer sur la représentativité du modèle numérique.

Or il n'est pas toujours aisé de collecter ces informations auprès des fournisseurs de composants électroniques. A défaut, il est envisageable d'analyser leur impact sur la température de « jonction », puis fort de cette connaissance d'axer la recherche d'information sur les matériaux les plus influents.

Cette analyse peut être menée en imposant un jeu de conditions thermiques sur les surfaces externes du boitier, telles que celles caractérisant les échanges en convection libre. Ces dernières considèrent un transfert thermique, majoritairement par conduction, vers la carte ($h_{BOTTOM} = 1600\,W/(m^2\,K)$).

La Figure 75 dépeint les effets d'une variation conséquente des conductivités thermiques des matériaux de la Table 18. Celles-ci varient de $-40\% \leq k_i \leq 40\%$.

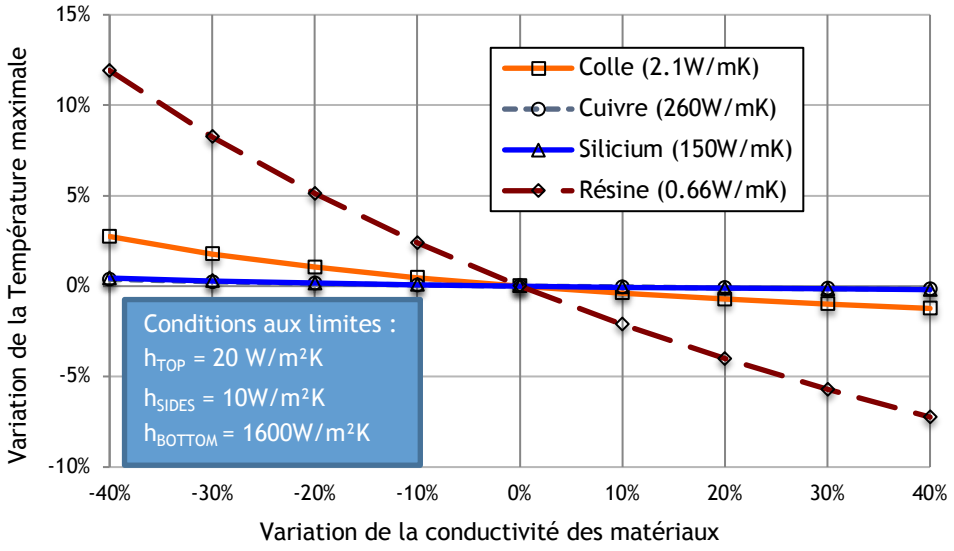


Figure 75 : Incertitude du modèle détaillé du QFN16 vis à vis des données sur ses matériaux

Ce graphe souligne la prépondérance sur la température maximale vue par la puce des matériaux ayant de faibles valeurs de conductivités thermiques. Les éléments les plus influents sont la résine d'encapsulation et la colle reliant la puce à la plateforme du composant.

Un comportement similaire est observé si le transfert thermique vers la carte est accentué. La Figure 76 révèle l'influence des matériaux lorsque le coefficient d'échange est multiplié par 8.

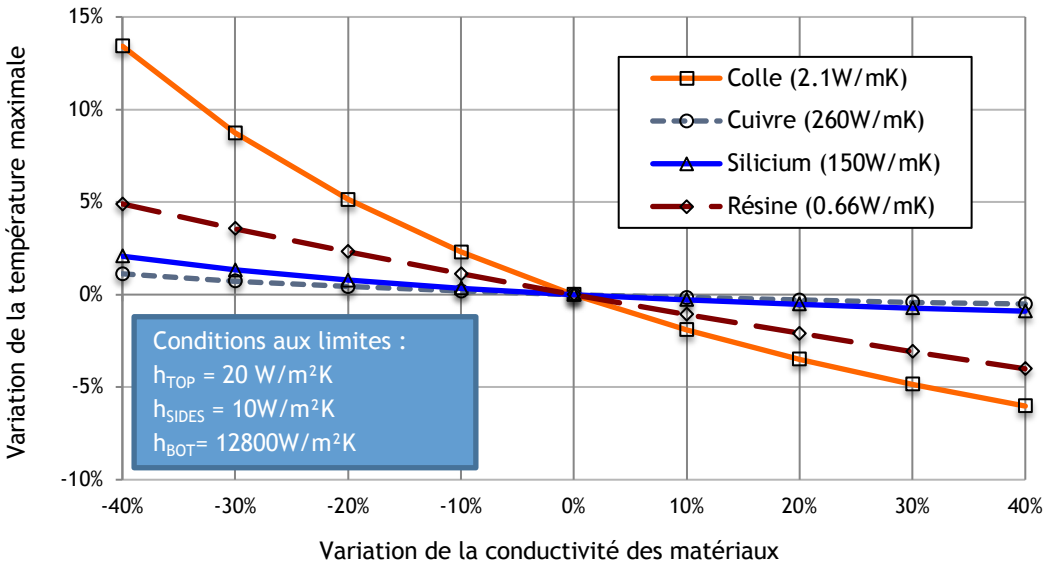


Figure 76 : Incertitude du modèle détaillé pour une condition de Dirichlet à sa base

Il résulte que la connaissance de la conductivité thermique de la colle est essentielle pour ce cas. On note également que les constituants ayant une forte conductivité thermique, tel que le cuivre, ont un effet minime sur la température de jonction à observer.

Ce point est important car il fournit une explication sur la capacité à déduire un modèle nodal très peu dépendant des conditions aux limites, ceci même si la conductivité thermique de son semi-conducteur varie non-linéairement en fonction de la température.

Sans conteste, les propriétés thermiques des matériaux faiblement conducteurs de la chaleur doivent être correctement caractérisées pour parfaire la qualité du modèle nodal à établir.

A défaut pour une modélisation prédictive, l'ordre de grandeur pour la colle aussi bien pour la résine peut être approché en se servant de la loi des mélanges de Maxwell (e69) pour les matériaux hétérogènes. Où le matériau, un composé de deux constituants, est caractérisé par la conductivité thermique du liant, ou matrice (k_m), celle de sa charge (k_p) ainsi que par la fraction du volume occupée par celle-ci (V_f).

$$k_C = k_m \left[\frac{k_p + 2\,k_m + 2\,\vartheta\,(k_p - k_m)}{k_p + 2\,k_m - \vartheta\,(k_p - k_m)} \right] \qquad \text{(e69)}$$

Ce modèle traduit la présence de particules sphériques dispersées dans une matrice. Classiquement, celles-ci sont plus conductrices de la chaleur $(k_p > k_m)$.

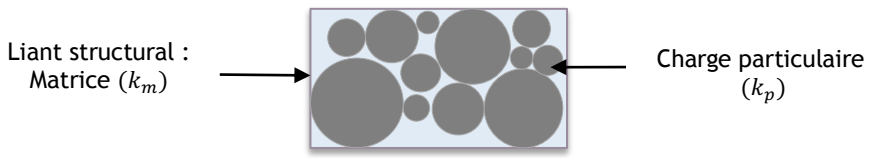


Figure 77 : Assemblage granulaire de N particules

L'objectif est par conséquent d'agglomérer le plus grand nombre possible de particules solides $(\vartheta \geq 50\%)$. Ce compactage vise à combler les espaces entre ces particules microscopiques et à augmenter le nombre de contacts entre ces dernières. Cette inclusion est dépendante de la taille et de la forme des particules comme l'indique la Table 25.

Table 25 : Concentration maximale de particules en fonction de leur forme

Forme	Arrangement	ϑ_{MAX}
Particules sphériques	Hexagonal proche	0.74
Particules sphériques	Aléatoirement distribué	0.637
Particules non-sphériques	Aléatoirement distribué	0.52

Concernant la colle ou la résine d'encapsulation, la matrice est généralement un polymère à base d'une résine époxyde. Sa conductivité thermique typique est donnée égale à 0.3W m^{-1} K^{-1} à 25°C.

Les colles employées pour reporter la puce sont le plus souvent chargées de particules d'argent et les matériaux d'encapsulation sont à base de silice. Leurs conductivités thermiques typiques pour une température de référence de 27°C (300K) sont respectivement de 420W m^{-1} K^{-1} et de 1.4W m^{-1} K^{-1}.

L'estimation théorique des conductivités thermiques effectives (k_C) est fournie en Table 26 pour les trois configurations d'arrangement précitées.

Table 26 : Domaine d'incertitude des matériaux à faible conductivité thermique

Matériau	k_C @ $\vartheta_{MAX} = 0.52$	k_C @ $\vartheta_{MAX} = 0.637$	k_C @ $\vartheta_{MAX} = 0.74$
Colle	$1.271 W/(m\,K)$ (-32%)	$1.87 W/(m\,K)$	$2.841 W/(m\,K)$ (+52%)
Résine d'enrobage	$0.661 W/(m\,K)$ (-16%)	$0.785 W/(m\,K)$	$0.918 W/(m\,K)$ (+17%)

Force est de constater que le taux de chargement agit sur la conductivité thermique effective du matériau

composite. Plus le taux de particules est élevé plus sa conductivité thermique sera forte.

In fine, la création d'un modèle détaillé est liée à la sélection de paramètres physiques dont les valeurs sont elles-mêmes une source d'incertitude. Il faut être conscient d'être toujours dans l'erreur et par conséquent s'attacher à minimiser celles qui sont essentielles pour retranscrire correctement le comportement thermique étudié.

Il est manifeste que la méconnaissance des conductivités thermiques de certains constituants d'un composant électronique n'a pas obligatoirement une incidence majeure sur son modèle numérique et la qualité de ses prédictions.

F12. Standardisation de la méthodologie DELPHI

La méthodologie DELPHI a été standardisée, en 2008, par le comité de standardisation américain JEDEC, sous la forme du document « JESD15-4 - DELPHI compact thermal model guideline » [R41].

Son objectif était de fournir un guide pour les ingénieurs désirant créer un réseau nodal à multiples nœuds.

Les étapes préconisées pour la génération d'un modèle thermique dit compact sont synthétisées par la Figure 78. Ce synoptique est très complet, il s'apparente aux techniques du « Machine Learning ».

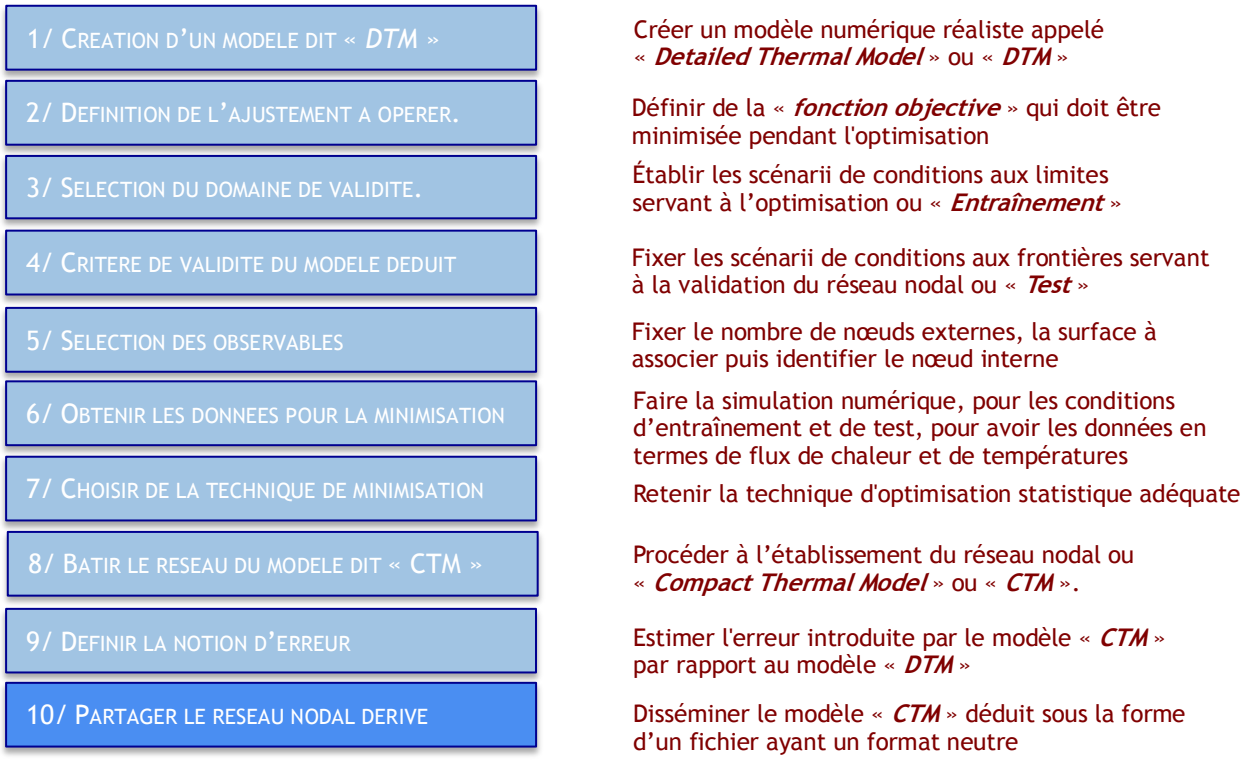


Figure 78 : Processus de création d'un modèle nodal selon le standard Jedec-Jesd15-4

Ainsi, plusieurs étapes complexes sont laissées libres et à la charge du concepteur du modèle, en particulier le choix de la méthode de minimisation ou celui des scénarios d'apprentissage.

En accord avec ce standard, le modèle « DELPHI-CTM » créé doit d'être validé sur un ensemble de conditions d'échange thermique, dit « Universal », leur nombre est fixé à 38.

Ces 38 scénarii de « test » constituent la seule évolution notable vis-à-vis du projet Européen DELPHI. Ceux-ci sont repris en Table 27.

La définition de ces conditions de 3eme espèce reste un point discutable de la méthode, plusieurs listes [55] ont été déclinées par plusieurs auteurs et leurs résultats sont également probants.

Dans notre approche, les scenarii dits DELPHI+1 (Table 10 + Table 17) et ceux dits JEDEC (Table 27) ont été retenus pour concevoir et tester nos réseaux nodaux en accord avec ce standard.

Il est à noter que le scénario 35, dit « Infinite Fluid bath », fait apparaitre une condition de type Dirichlet. Un coefficient d'échange de $10^9 W\ m^{-2}\ K^{-1}$ est à appliquer sur chaque surface externe du composant.

Une condition dont l'influence a été soulignée dans nos travaux initiaux.

Table 27 : Nouvelles conditions de Fourier appliquées simultanément sur les faces du modèle

Cas Tests	Face supérieure (Top)	Face inférieure (Bottom)	Faces latérales (Sides)	Zones de connexion (Leads)
1	10	10	10	10
2	10	10	10	100
3	10	10	10	1000
4	10	10	10	10000
5	30	30	30	30
6	50	50	50	10000
7	10	100	10	1000
8	100	10	10	1000
9	10	100	10	100
10	100	10	10	100
11	50	50	50	50
12	100	100	100	100
13	100	100	100	500
14	500	10	10	1000
15	1000	10	10	1000
16	10	500	10	1000
17	10	1000	10	1000
18	500	10	10	100
19	1000	10	10	100
20	10	500	10	100
21	10	1000	10	100
22	100	100	100	1000
23	100	1	100	1000
24	1	100	100	1000
25	200	200	200	1000
26	50	50	50	1000
27	200	200	200	10000
28	100	100	100	10000
29	10000	10	10	100
30	10	10000	10	100
31	10000	10	10	1000
32	10	10000	10	1000
33	1	10000	1	10000
34	10000	1	1	10000
35	1E+09	1E+09	1E+09	1E+09
36	10000	10000	10000	10000
37	1000	1000	1000	1000
38	500	500	500	500

Ainsi, le réseau du composant QFN16 (Figure 67) peut être généré sur la base des 38 scenarii promus par le standard JEDEC, comme le démontre le réseau de l'annexe P8.3. Puis testé avec les scénarios DELPHI+1.

Pour ce jeu de conditions aux limites, les écarts de prédiction de la température du nœud de jonction sont explicités par la Figure 79.

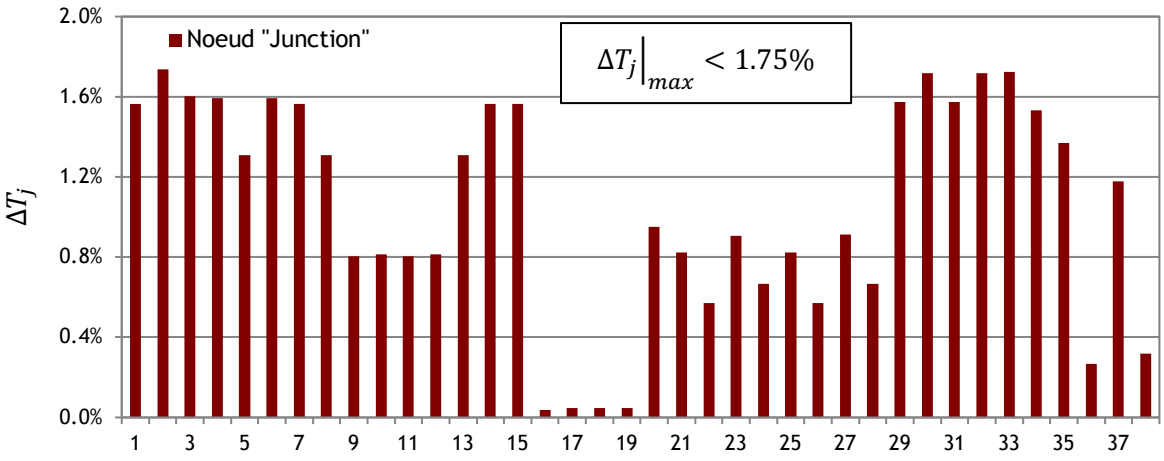


Figure 79 : Précision du réseau nodal « JEDEC » dérivé d'un modèle numérique

L'erreur maximale sur ce nœud sensible n'excède pas 1.8%. Le meilleur score obtenu est égal à 0.911.

Celui-ci est moins élevé que le score précédent, la principale raison tient à la répartition des scénarii dans l'espace de recherche. Néanmoins quelle que soit l'approche retenue DELPHI ou JEDEC, la majorité des scenarii est concentrée dans une zone particulière du domaine de recherche, représentée Figure 80.

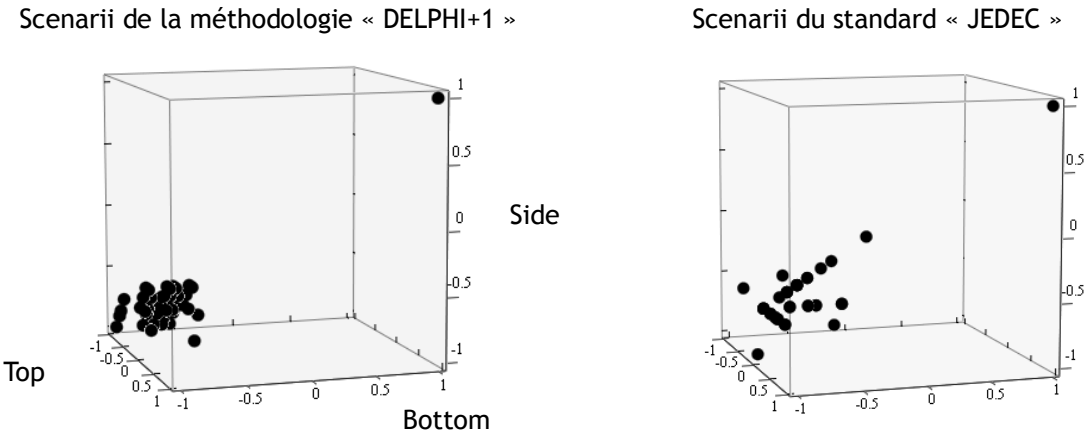


Figure 80 : Comparaison de la distribution spatiale des conditions aux limites

Les deux représentations fournies donnent la distribution des 49 ou 38 coefficients d'échange thermique appliqués sur les surfaces dites « bottom », « top » et « Sides ».

Pour une meilleure perception, les limites inférieures et supérieures du domaine ont été normalisées pour varier entre -1 et 1. La distribution des points est calculée suivant la formulation ci-dessous :

$$X_p = \frac{2\,v_p' - \left[\,v_{u_p} + v_{l_p}\,\right]}{\left[\,v_{u_p} - v_{l_p}\,\right]} \quad avec\ v_{l_p} = log(h_{l_p}), v_{u_p} = log(h_{u_p})\ et\ v_p' = log(h_p') \qquad \text{(e70)}$$

$$O\grave{u}\ h_{l_p} \le h_p{}' \le h_{u_p}\ pour\ 1 \le p \le 3$$

La comparaison des deux jeux de scenarii montre l'agrégation plus forte des scenarii de la méthode DELPHI+1, laquelle favorise l'optimisation d'un réseau pour ces conditions.

Ces scénarii supposés réalistes font un état des conditions thermiques pouvant être rencontrées par le composant pour divers environnements, toutefois leur couverture apparait peu adaptée à la définition d'un plan d'expérience intégrant des conditions de Dirichlet et de Fourrier.

Indubitablement, les scenarii préconisés accentuent l'identification d'un réseau nodal dépendant de coefficients d'échange thermique ayant des valeurs relativement faibles.

Les performances de l'ajustement du réseau du QFN16, à partir des scenarii « DELPHI+1 » ou « JEDEC », sont présentées dans la Table 28.

Table 28 : État des erreurs des réseaux dérivés par chacun des jeux de scenarii

	« 49-set DELPHI+1 »		« 38-set JEDEC »	
Nœud i	$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_i}$	$\Delta \boldsymbol{T}_i\,\vert_{max}$	$\overline{\Delta \boldsymbol{T}_i}$	$\Delta \boldsymbol{T}_i\,\vert_{max}$
« Junction »	0.51%	1.22%	1.05%	1.74%
« Top-inner »	1.2%	7.14%	1.01%	4.33%
« Top-outer »	0.96%	8.2%	2.1%	13.12%
« Bottom-inner »	0.33%	1.88%	1.09%	4.29%
« Bottom-outer »	0.87%	7.63%	2.92%	13.12%
« Sides »	1.23%	8.2%	4.19%	13.12%

Manifestement la mise en œuvre du concept d'un modèle nodal, indépendant des conditions aux limites, reste liée à la diversité des conditions à ajuster, un aspect discuté dans l'article [30].

Le respect de ce standard introduit, pour le créateur du modèle, l'impératif de sélectionner un jeu de scenarii « d'entrainement ». Celui se doit d'être différencié du jeu de « tests » décrit Table 27.

Ainsi la génération peut être faite en utilisant les scenarii DELPHI+1, puis le contrôle de son indépendance vis-à-vis des conditions aux limites est testé à partir des scenarii JEDEC et vice versa (P8).

La Figure 81 illustre la qualité des prédictions d'un modèle « DELPH+1 » sur le jeu de conditions aux limites du JEDEC. L'erreur relative maximale sur le nœud de « Junction » n'excède pas 2%.

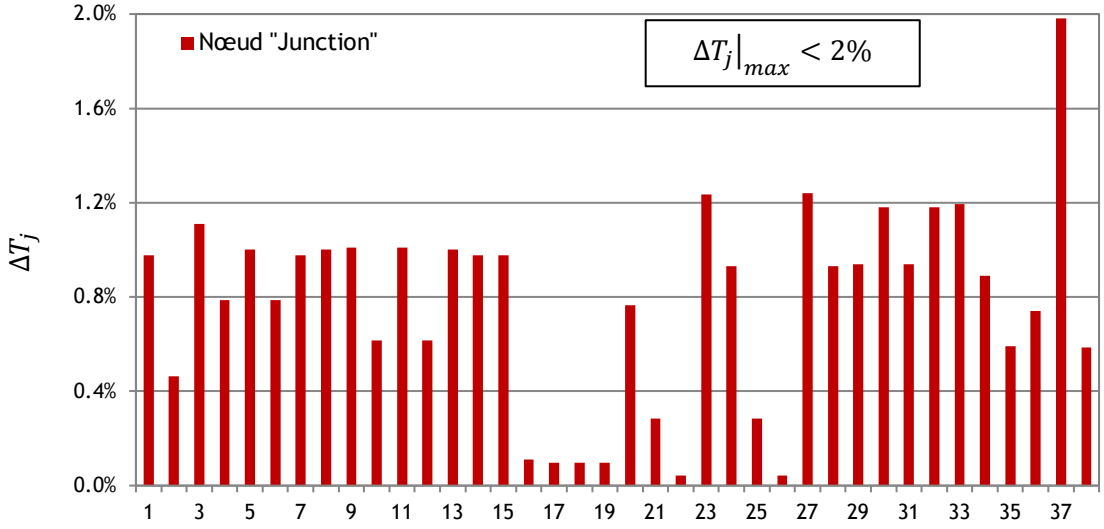


Figure 81 : Précision du réseau nodal « DELPHI » pour les 38 scenarii du standard JEDEC

En définitive, on distingue deux erreurs à savoir l'erreur dite « d'entraînement » et celle dite « de généralisation ». Cette dernière permet de juger de la précision du réseau nodal déduit de l'apprentissage sur des cas indépendants. Elle est obligatoirement supérieure à l'erreur d'entraînement comme le décrit la Figure 82.

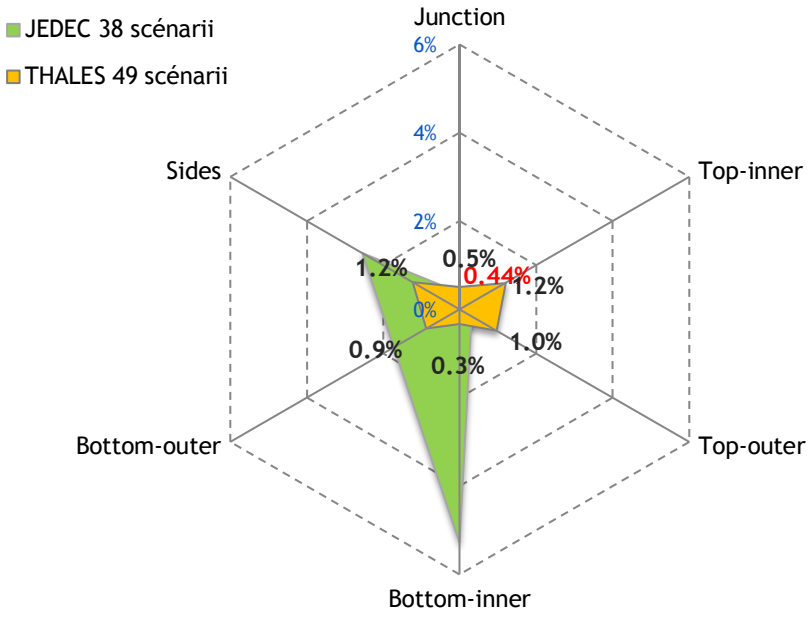


Figure 82 : Comparaison des erreurs relatives moyennes pour les 6 nœuds du réseau du QFN16

Les plus fortes divergences sont relevées sur les nœuds de la face supérieure du composant.

L'enjeu est par conséquent de trouver le bon compromis entre ces deux erreurs. L'objectif est d'éviter le phénomène dit de « sur-apprentissage » ou « overfitting ». En fait, un modèle nodal trop détaillé incapable de prédire correctement de nouvelles conditions d'utilisation. Dès lors, il est possible de statuer sur le seuil de pertinence du réseau nodal développé, ceci à partir d'un jeu de test présumé indépendant.

Ainsi, la comparaison des performances des réseaux à multiples résistances générés et testés à partir de ces jeux de scenarii est conforme à nos critères de précision. Les scores obtenus sont très proches.

F13. Bilan des avancées du standard JEDEC

Ce standard établit un jeu de tests destinés à valider les modèles nodaux dit DELPHI et il introduit la nécessité de décomposer les surfaces en plusieurs nœuds pour obtenir un modèle plus pertinent.

L'absence de recommandations sur les conditions nécessaires à la création du réseau laisse perplexe. A l'instar, des techniques du « Machine Learning », les scénarios spécifiés auraient pu être scindés et certains dédiés à l'apprentissage. Il a été démontré qu'avec seulement 6 ou 7 scénarii, pris parmi les scénarii DELPHI, il est possible de construire un réseau ayant un score élevé.

Cette approche standardisée ne suggère, malheureusement, aucune technique de régression pour aider à la création des modèles. Un point qui a grandement restreint son applicabilité dans le secteur industriel.

D'autre part, la manière de sélectionner des surfaces isothermes apparait également problématique, comment s'assurer de leur représentativité.

Enfin, à l'instar de la méthodologie DELPHI, le standard JEDEC n'aborde pas la problématique de la création de modèles comportementaux temporels ni son extension pour répondre aux exigences des nouvelles technologies de composants électroniques.

Malgré tout, la construction de nos réseaux nodaux a été adaptée pour prendre en compte n'importe quel jeu de scenarii.

Le réseau nodal d'un composant électronique peut être indifféremment optimisé et testé à partir :

- Des 49 cas tests définis par nos soins,
- Des 38 cas tests en accord avec le guide JESD15-4.

In fine, ce guide de création laisse beaucoup de liberté pour les concepteurs de modèles et un grand nombre de questions sans réponse auxquelles cette thèse est dédiée.

Les prochains paragraphes vont aborder les travaux menés pour étendre les capacités de la méthodologie initiée par le programme DELPHI, ceci pour générer des modèles nodaux toujours plus complexes.

Ce dernier paragraphe achève l'examen non-exhaustif des pratiques courantes de modélisation des composants électroniques.

Le prochain chapitre s'attache à décrire les diverses évolutions apportées pour parfaire cet état de l'art.

G. EXTENSION DU SPECTRE DE LA METHODOLOGIE DELPHI

L'industrialisation de la méthode DELPHI puis son extension pour répondre à l'évolution des composants électroniques ainsi qu'aux attentes des concepteurs font l'objet des travaux déclinés dans cette thèse.

Les principales avancées, faites à partir 2009, sont décrites d'une manière chronologique en explicitant succinctement les verrous scientifiques progressivement levés.

G1. Indépendance vis-à-vis de la nature du semi-conducteur

Pour cela, le processus de déduction des modèles nodaux a été appliqué sur des composants munis de semi-conducteur à base d'arséniure de gallium D1.2.

Ce semi-conducteur est moins conducteur de la chaleur que le silicium des circuits intégrés. En outre, il présente une plus forte dépendance de sa conductivité thermique en fonction de la température.

Cette dépendance est très souvent déclinée sous la forme d'une loi en puissance :

$$k(T) = k_{ref}\left(T_{ref}/T\right)^{-\alpha} \qquad \text{(e71)}$$

Pour le silicium, pour une température de référence (T_{ref}) de 300K, la valeur de référence k_{ref} est de 148W m^{-1} K^{-1} et l'exposant α est égal à 1.3.

Pour l'arséniure de gallium, la valeur de référence est plus basse, celle-ci est de 46W m^{-1} K^{-1}. L'exposant est égal à 1.25 et à 125°C sa conductivité thermique diminue à 32.3W m^{-1} K^{-1}.

La Figure 83 décrit pour ces 2 semi-conducteurs la décroissance de leur capacité à drainer la chaleur dissipée en leur sein, lorsque la température croit.

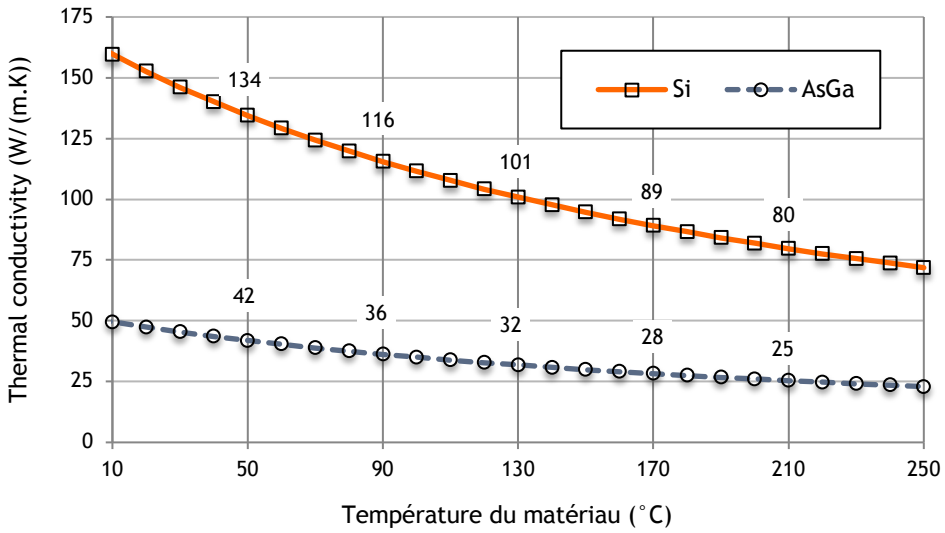


Figure 83 : Évolution de la conductivité thermique en fonction de la température

L'analyse menée au paragraphe F10 peut être reconduite de manière à mesurer l'influence d'une diminution de la conductivité thermique du semi-conducteur.

La Figure 84 présente l'impact qu'a ce semi-conducteur si le transfert thermique est quasi unidirectionnel.

L'influence du semi-conducteur apparait supérieure à celle engendrée par l'évolution des propriétés thermiques de la résine.

Toutefois, cette approche ne traduit pas correctement le comportement physique du matériau semi-conducteur. En effet, une forte variation de conductivité thermique n'est réellement effective que dans les zones présentant de fortes élévations de température.

En réalité, celles-ci sont localisées à proximité de la zone, ou des zones (D1.2), de dissipation.

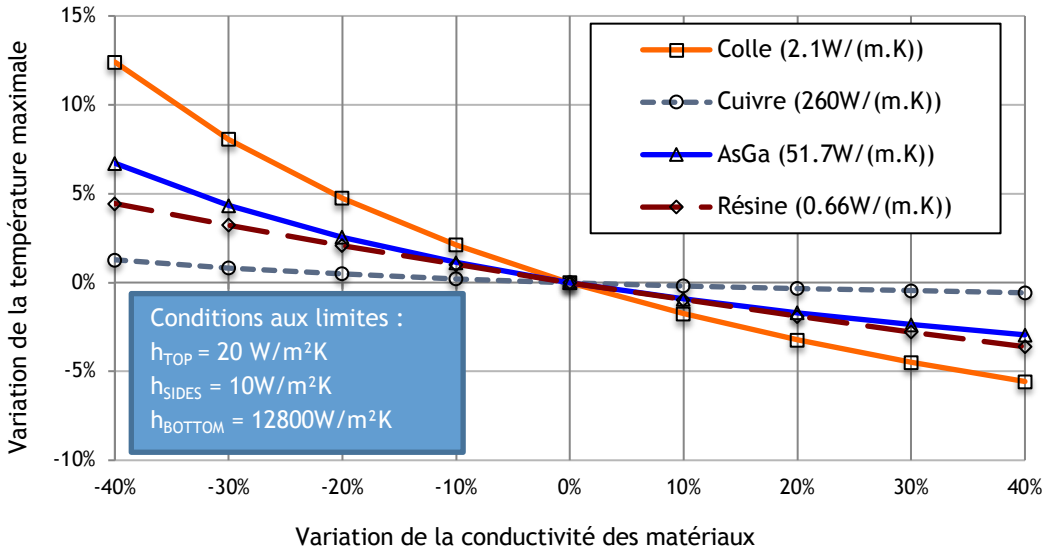


Figure 84 : Incertitude du modèle détaillé pour un semi-conducteur en arséniure de gallium

Ainsi la prise en compte de la non-linéarité de conductivité thermique en fonction de la température (Figure 83) n'influe que très peu sur sa température maximale vue par la puce.

Table 29 : Influence de la conductivité thermique réelle de l'arséniure de gallium

$h_{TOP} = 20W/(m^2\,K)$ $h_{SIDES} = 10W/(m^2\,K)$

$\boldsymbol{h_{BOTTOM}}$	$\Delta \boldsymbol{T_j}\big\vert_{\boldsymbol{max}} @\, k_{ref}$	$\Delta \boldsymbol{T_j}\big\vert_{\boldsymbol{max}} @\, k = f(T)$	$\delta \boldsymbol{T_j}$
$800\ W/(m^2\,K)$	112.1°C	113.0°C	0.814%
$1600W/(m^2\,K)$	68.6°C	69.1°C	0.813%
$3200\ W/(m^2\,K)$	42.6°C	43.0°C	0.8%
$6400W/(m^2\,K)$	26.9°C	27.1°C	0.789%
$12800W/(m^2\,K)$	17.5°C	17.6°C	0.777%

Le critère de précision sur les températures est défini par l'expression suivante :

$$\delta T_n = \left[T_{D_n} - T_{C_n}\right] / \left[T_{D_n} - T_\infty\right] \qquad \text{(e72)}$$

La faculté à générer des réseaux nodaux pour les composants électroniques équipés de ce semi-conducteur a également fait l'objet de plusieurs analyses [5]-[6].

A titre d'exemple, le réseau dérivé à partir des 49 scenarii d'entrainement est fourni en annexe P9.1, son score est estimé à 0.969.

Toutefois, le processus d'ajustement considère une plage de validité du modèle, plus limitée. Ainsi, la puissance dissipée pas la surface supérieure de la puce est ajustée en fonction des conditions aux limites pour restreindre la gamme de température vue par cette dernière entre 0°C et 300°C. Cette restriction garantit la pertinence des prédictions du modèle pour les conditions d'utilisation les plus sensibles pour la conception d'une carte électronique.

La qualité de l'ajustement est décrite en annexe 0, l'erreur maximale relevée sur l'estimation de la température de « Junction » demeure en deçà de 1.3%. L'évaluation de cette température reste probante (P9.3), moins de 2.6%, pour les 38 scenarii de test qui sont proposés par le standard JEDEC.

La prédiction des températures des cinq autres nœuds du réseau, pour l'ensemble des 87 conditions, est illustrée sur la Figure 85.

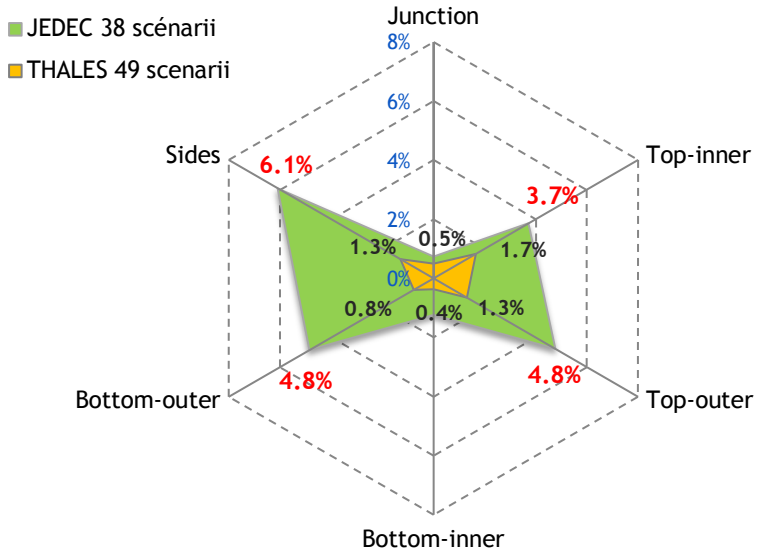


Figure 85 : Erreurs relatives moyennes des températures des 6 nœuds du réseau

L'erreur la plus importante se situe au niveau du nœud « Sides » pour lequel la détermination de la température moyenne est difficile à ajuster. Cette remarque est également valable pour les nœuds « Bottom-outer » ou « Top-outer ». En fait, le réseau nodal déduit est bâti sur une pondération entre la température de « Junction », les températures moyennes des surfaces externes et les flux les quittant.

Celui-ci est donc la résultante d'un compromis, ou « fonction coût » (e20), sur ces différents paramètres. La Figure 86 fournit la qualité de l'ajustement opéré sur les flux thermiques.

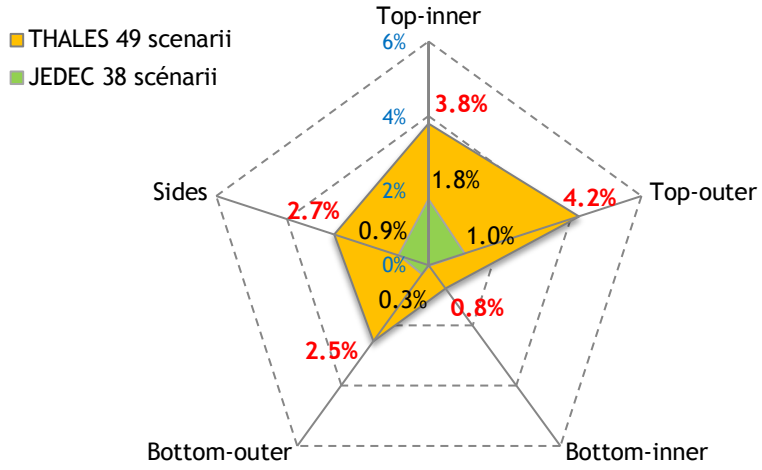


Figure 86 : Erreurs relatives moyennes des flux quittant les 5 nœuds externes

La majorité du flux est transférée par la surface « Bottom-inner » du modèle, on constate que c'est l'un des nœuds les plus précis, les autres surfaces externes sont pratiquement adiabatiques.

La génération d'un modèle nodal « universel » est un arbitrage sur de multiples objectifs, tous ne pourront être satisfaits, il faut pondérer ceux que l'on juge nécessaires et suffisants à sa pertinence.

Indubitablement, un réseau nodal constitué seulement de 6 nœuds offre une retranscription très acceptable du comportement thermique du composant originel pour une large gamme de conditions aux limites, ceci quelle que soit la nature de son semi-conducteur.

G2. Application à divers types de boitiers électroniques

Une analyse identique a été menée sur le cas d'un boitier QFN doté de 48 pattes.

Celle-ci a fait l'objet de deux publications en 2010 respectivement aux conférences internationales EUROSIME [5] et ITHERM [6].

Compte tenu du nombre de broches et de leur pas (0.5mm), la surface d'implantation du boitier est pratiquement doublée par rapport à celle du QFN16. Ces dimensions sont synthétisées dans la Table 30.

Table 30 : Définition des différentes caractéristiques du composant QFN48 étudié

QFN48	*L (mm)*	*W (mm)*	*H (mm)*	*k @ 25°C (W m^{-1} K^{-1})*
Puce	5	5	0.25	46
Colle	5	5	0.030	2.1
Plate-forme	5.1	5.1	0.2	260
Broche x 48	0.23	0.4	0.2	260
Boîtier	7	7	0.9	0.66

Comme précédemment, la puissance de la puce est appliquée sur la partie supérieure de la puce.

Pour valider, le réseau thermique déduit par l'algorithme génétique, celui est considéré monté au centre d'une carte de test ayant les dimensions et les propriétés thermiques suivantes :

- La longueur, la largeur et l'épaisseur du substrat sont de 101.5mm, 114.5mm et 1.6mm.
- La conductivité thermique est orthotrope avec pour valeurs $\mathrm{k_X} = \mathrm{k_Y} = 20\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ suivant l'axe longitudinal et $\mathrm{k_Z} = 0.35\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ suivant l'axe transversal au substrat.
- La carte en position verticale est supposée refroidie par convection naturelle couplée à du rayonnement thermique. Son émissivité et le facteur de vue sont fixés à 0.9 et à 1.

La Table 31 et la Table 32 soulignent la qualité de l'ajustement du réseau de ce composant pour deux dissipations thermiques distinctes [6].

Table 31 : Bilan des prédictions du réseau nodal pour une puissance de Q=1W à T_A = 35°C

Nœud i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
« Junction »	69.3°C	69.2°C	<1%	-1W	-1W	0%
« Top-inner »	68.9°C	68.9°C	<1%	16mW	5mW	1.1%
« Top-outer »	64.8°C	65.2°C	<1%	23mW	23mW	<1%
« Bottom-inner »	68.2°C	67.8°C	<1%	763mW	786mW	2.3%
« Bottom-outer »	59.5°C	59.5°C	<1%	177mW	173mW	<1%
« Sides »	59.4°C	59.3°C	<1%	8mW	12mW	<1%

Avec pour critère de précision sur les flux de chaleur, l'expression suivante :

$$\delta \dot{q}_n = \left| q_{C_n} - q_{D_n} \right| / Q \qquad \text{(e73)}$$

Un résultat quasi similaire est trouvé si la température ambiante est portée à 85°C [5].

Indéniablement, l'impact sur l'estimation de la température de jonction d'une variation importante de la valeur de la conductivité thermique du semi-conducteur reste marginal, dans le cas étudié d'un composant refroidi par le substrat d'une carte électronique.

La représentativité des flux de chaleur quittant les différentes surfaces isothermes du réseau est désormais déterminée avec plus d'exactitude.

Table 32 : Bilan des prédictions du réseau nodal pour une puissance de Q=2.5W à T_A = 35°C

Nœud i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
« Junction »	119.1°C	119.1°C	<1%	-2.5W	-2.5W	0%
« Top-inner »	118.3°C	118°C	<1%	18.6mW	12mW	<1%
« Top-outer »	107.7°C	107.8°C	<1%	65.8mW	76mW	<1%
« Bottom-inner »	117.0°C	116.3°C	<1%	1.9W	1.89W	<1%
« Bottom-outer »	94.7°C	94.7°C	<1%	473mW	486mW	<1%
« Sides »	94.2°C	94.3°C	<1%	41.5mW	38.4mW	<1%

Celle-ci va autoriser l'analyse de différentes solutions susceptibles de minimiser les températures vues par le semi-conducteur du boitier.

Par définition, le réseau nodal déduit est restreint à 6 nœuds, celui-ci est fourni en P10.1.

Des analyses similaires ont été menées sur des boitiers QFN32 et QFN64, la qualité de l'ajustement du réseau thermique nodal déduit est comparable.

Toutefois, la restriction de la méthodologie DELPHI, d'une subdivision limitée à deux surfaces pour la partie inférieure du boitier, vue Figure 59, influe sur le score (e51) atteint par l'algorithme génétique.

Celui-ci se dégrade si le ratio, entre la taille de la plateforme et celle du boitier, est important comme l'indique Table 33.

Table 33 : Panel de scores $R(T, q)$ obtenus pour quelques exemples de boitiers QFN

Type du boitier	Boitier (mm)	Plateforme (mm)	Ratio	Score pour 49 cas tests
QFN16	3x3	1.85x1.85	38%	0.917
QFN16	4x4	2.25x2.25	35%	0.924
QFN32	5x5	3.9x3.9	61%	0.993
QFN48	7x7	4.7x4.7	45%	0.949
QFN64	9x9	7.8x7.8	75%	0.992

Ce point met en exergue, la déficience de règles précises sur la sélection des surfaces d'un modèle compact de type DELPHI. Outre le choix leurs dimensions, faut-il ou non, conserver un nombre réduit de surfaces isothermes au détriment de la précision du modèle, tel est le dilemme.

Du côté pratique, à partir de la connaissance de la température de jonction, Table 31, l'évaluation de la résistance thermique jonction-ambiante (e6) favorise une comparaison rapide de ses performances par rapport à d'autres familles de boitiers (Figure 34, boitier « 7x7 »).

Pour notre exemple, ce métrique thermique (R_{JA}) varie entre 34.3°C/W à 1W et 33.6°C/W à 2.5W.

Cette diminution met en relief l'influence de la densité de puissance sur l'augmentation des échanges thermiques, laquelle est exposée Figure 53.

G3. Initiative sur le couplage de réseaux nodaux

Les boitiers de type QFN (Figure 18) n'ont de réel intérêt d'un point de vue thermique que si la plateforme supportant la puce se trouve reliée par l'intermédiaire de vias en cuivre aux plans métalliques de la carte sur laquelle il est brasé (Figure 47).

L'objectif de l'analyse menée était de minimiser la définition de la représentation numérique de ces chemins thermiques primordiaux, ceci au moyen d'un réseau nodal.

Le nouveau concept proposé consiste à détourner la méthodologie DELPHI au profit de cette modélisation.

Ainsi, une zone réduite de la carte contribuant fortement à la diffusion de la chaleur d'un composant est ciblée. La zone étudiée est située en dessous du composant, celle-ci regroupe un ensemble de vias.

La représentation physique de ce modèle est explicitée en Figure 87. Le modèle physique est décrit à gauche et le concept d'une superposition de deux modèles nodaux à droite.

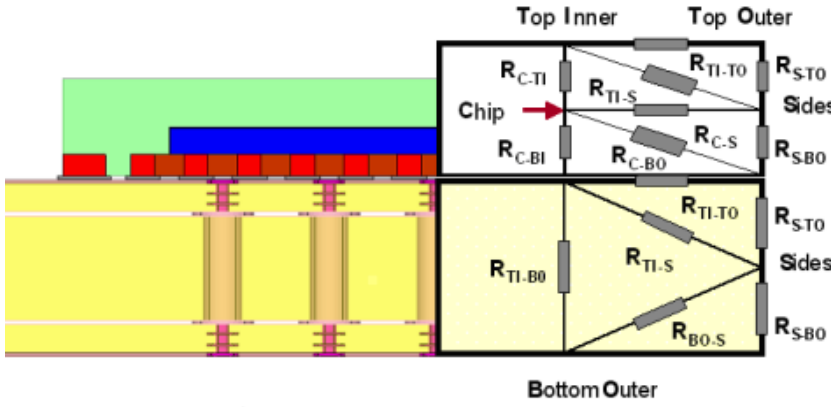


Figure 87 : Description du couplage de deux réseaux nodaux

Cette modélisation compacte des structures d'interconnexion « thermique » a fait l'objet d'un acte de congrès, en 2010, à THERMINIC [7] puis d'une publication scientifique, en 2011, dans la revue « Journal of Electronic Packaging » [40].

Ces deux publications fournissent les résultats du processus d'identification d'un réseau nodal dédié à cette zone située sous le composant. Dans l'exemple étudié, celle-ci est équipée d'une structure composée de 25 vias.

Le réseau déduit est constitué d'un jeu de 7 nœuds externes, reliant les surfaces suivantes :

- Deux nœuds pour la partie supérieure de la zone ciblée : « Top-inner » et « Top-outer »,
- Un nœud pour sa face inférieure : « Bottom-outer »,
- Quatre nœuds pour ses faces latérales : « Side x- », « Side x+ », « Side y- » et « Side y+ »

Les quatre nœuds « Side », au cœur de la carte, permettent la prise en compte d'un transfert thermique asymétrique. En effet, celui est susceptible d'être contrecarré par la présence d'autres composants actifs implantés à proximité. Il est à noter que les surfaces en vis-à-vis des deux modèles nodaux sont identiques.

La Table 34 souligne la qualité des prédictions de cette approche lorsque le boitier QFN48 précédent est soumis à une dissipation de 2.5W pour un environnement dont la température est de 35°C.

Table 34 : Comparaison des températures du modèle détaillé et de son modèle compact

	Nœud i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
Boitier QFN48	« Junction »	87.3°C	87.3°C	<1%	-2.5W	-2.5W	-
	« Top-inner »	85.4°C	85°C	<1%	18mW	22mW	<1%
	« Top-outer »	82°C	81.8°C	<1%	20mW	23mW	<1%
	« Bottom-inner »	84.8°C	84°C	1.6%	2.31W	2.24W	2.8%
	« Bottom-outer »	77.1°C	77.5°C	<1%	179mW	200mW	<1%
	« Sides »	76.1°C	77.6°C	3.6%	12mW	15mW	<1%

Les prédictions des températures et des flux déduites du modèle nodal sont très proches du modèle numérique, moins de 5% d'erreur.

L'amélioration de la diffusion de la chaleur liée à la présence de vias thermiques au sein de la carte est dès lors facilement quantifiable.

Celle-ci est ainsi réduite de 33.6°C/W à 21°C/W. Cette réduction met en évidence l'influence de l'architecture de la métallisation de la carte sur le refroidissement d'un composant électronique miniaturisé.

La Table 35 fournit, quant à elle, la prédiction des températures moyennes au sein de la structure du substrat de la carte électronique. Là encore les prédictions sont conformes aux attentes.

Table 35 : Comparaison des deux modèles de structure

Nœud i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
« Top-inner »	84.8°C	84°C	1.6%	-2.31W	-2.24W	2.8%
« Top-outer »	77.1°C	77.5°C	<1%	-0.179W	-0.2W	<1%
« Bottom-outer »	72.9°C	74.1°C	3.2%	0.6W	0.6W	<1%
« Side x- »	69.2°C	69.7°C	1.5%	0.6W	0.59W	<1%
« Side x+ »	69.2°C	69.7°C	1.5%	0.61	0.61W	<1%
« Side y- »	69.2°C	69.7°C	1.5%	0.61W	0.61W	<1%
« Side y+»	69.2°C	69.7°C	1.5%	21mW	29mW	<1%

Néanmoins, une restriction majeure à cette approche est liée à la présence de composants actifs pouvant être positionnés, sur la face inférieure, en vis à vis.

G4. Considération de multiples sources de chaleur

Comme évoqué, pour les amplificateurs à haute puissance, la génération de cette puissance s'effectue à proximité d'un ensemble de zones de taille submicronique, ce phénomène est exposé au D1.2.

La prise en compte de ces contraintes dans les transistors de puissance est par conséquent essentielle pour prédire avec précision leur performance électrique.

Cette évolution est un second pas vers une extension de la méthodologie DELPHI pour adresser les modèles disposant de multiples sources de chaleur. Il s'agit de créer des modèles nodaux capables d'observer simultanément un ensemble de zones sensibles (Figure 12).

Le réseau nodal à déduire est composé plusieurs sources de chaleur ayant chacune une dissipation thermique qui lui est propre. L'identification des résistances est basée sur le principe de superposition, ainsi toutes les zones actives du composant sont sollicitées successivement, puis simultanément.

En pratique, pour chaque cas d'activation, les 38 scenarii JEDEC ou les 49 scenarii DELPHI+1 sont imposés aux frontières du modèle numérique représentant le composant. Le réseau nodal dit « multi-jonction » est déduit par l'algorithme génétique sur la base de « n+1 » jeux de résultats numériques, où n représente le nombre de sources de chaleur à observer.

D'autre part, la fonction « objectif » est modifiée de manière à considérer dans l'expression du score l'ensemble de ces observables :

$$\Delta T_{1\le j\le nJ}\big|_{max} = \max_{1\le j\le nJ}\left[\left|T_{D_j}^{<k>} - T_{C_j}^{<k>}\right| / \left(T_{D_j}^{<k>} - T_{\infty}\right)\right] \qquad \text{(e74)}$$

Le modèle compact dérivé est de facto la meilleure approximation possible entre les nJ températures de jonction, les températures moyennes de tous les nœuds, les températures maximales des surfaces externes et les flux, maximum et pondérés, les quittant.

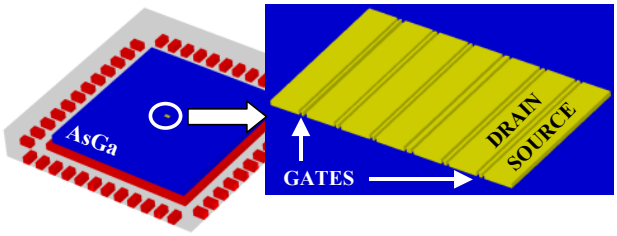
Cette approximation considère également les variations non-linéaires des propriétés des matériaux des semi-conducteurs (Figure 83). A l'époque, ce développement est inédit et a peu d'équivalent aujourd'hui.

Les premiers résultats de cette approche sont rapportés dans deux publications en 2010 respectivement aux conférences internationales EUROSIME [5] et ITHERM [6].

Les articles liés à ces deux conférences décrivent la mise en œuvre des algorithmes génétiques, son mode opératoire, ainsi que les paramètres retenus pour déterminer le réseau nodal le plus conforme à une fonction « multi-objective » donnée.

L'exemple d'un modèle nodal d'un composant mono-puce fournissant le comportement d'un ensemble de sources de chaleur miniaturisées est évoqué dans l'article [6].

Celui-ci reproduit l'architecture d'un transistor MESFET (Figure 8) comme l'indique la Figure 88.



Dimensions de la zone active surfacique dite « *gate* » : Lg=2µm, Wg=150µm

Figure 88 : Simulation d'un transistor MESFET dans un boitier QFN48

Le semi-conducteur considéré est à base d'Arséniure de Gallium (Figure 8). Un matériau dont la conductivité thermique varie très fortement avec la température (Figure 83). Cinq doigts de grille, espacés de 20µm, sont simulés. Ceux-ci sont soumis à une densité de puissance linéique uniforme égale à 0.266W/mm.

La Table 36 détaille les températures observées par le modèle nodal, à savoir la valeur maximale de chacun des cinq doigts ($J_i, 1 \leq i \leq 5$) ainsi que la température moyenne de la puce (Chip).

Table 36 : Prédiction du modèle compact d'un transistor MESFET constitué de 11 nœuds

Nœuds i du réseau	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
« Chip»	61.8°C	61.3°C	0.8%	0	0	-
« Junction-1»	153.7°C	158.7°C	3.3%	-0.2	-0.2	-
« Junction-2 »	165.2°C	170.5°C	3.2%	-0.2	-0.2	-
« Junction-3 »	**168.3**°C	**173.8**°C	**3.3%**	-0.2	-0.2	-
« Junction-4 »	165.2°C	170.4°C	3.1%	-0.2	-0.2	-
« Junction-5 »	153.7°C	158.8°C	3.3%	-0.2	-0.2	-
« Top-inner »	70.9°C	70.4°C	<1%	14mW	5mW	<1%
« Top-outer »	68.8°C	69.4°C	<1%	11mW	21mW	1%
« Bottom-inner »	62.8°C	62.1°C	1.1%	0.77W	0.75W	**2%**
« Bottom-outer »	68.8°C	68.2°C	<1%	0.21W	0.2W	1%
« Sides »	59.1°C	59.7°C	1%	10mW	20mW	1%

La qualité des prédictions de modèles nodaux pouvant observer un ensemble de points sensibles, dits « Junction », pour une large gamme de sollicitations thermiques, est mise en évidence. Le réseau déduit est jugé indépendant des conditions imposées à ses frontières, dans le cadre d'une application à vocation industrielle.

Plus important, ces investigations démontrent la possibilité d'étendre cette technique de déduction aux composants disposant de plusieurs semi-conducteurs eux-mêmes dotés de multiples zones de dissipations.

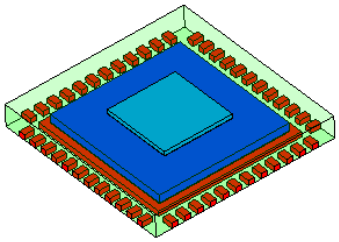
La suite de ce chapitre décrit les analyses menées sur un jeu de des composants électroniques disposant d'un ensemble de puces électroniques.

Ainsi, plusieurs dispositions de puces électroniques ont été traitées, telles que empilées ou associées côte à côte (Figure 25).

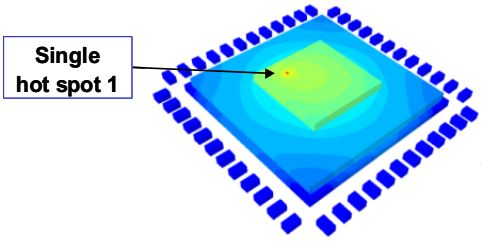
La Figure 89 explicite un des cas étudiés. Deux puces (en bleu) de tailles distinctes sont empilées à l'intérieur d'un boitier QFN48. Les dimensions de ce boitier ont été précisées en Table 30.

La présence de zones actives sur la surface d'une puce supérieure est également abordée dans cet exemple. Pour ce type de boitier, plusieurs types d'observations des températures de deux puces sont retenues.

Ainsi, la température maximale du point chaud de la puce et les températures moyennes des deux puces sont retenues dans l'établissement du réseau nodal.



Dimensions en millimètre de la puce supérieure :
2.54 x 2.54 x 0.25



Dimensions en micron de la zone active :
90 x 30 x15

Figure 89 : Concept d'un empilage pyramidal de deux puces dans un boitier QFN48

La Table 37 décrit la qualité de l'approximation fournie par le réseau nodal déduit, lorsque les puces et la zone active sont respectivement soumises à dissipation de 1W, 1W et 0.25W pour une température ambiante fixée à 35°C.

Table 37 : Prédiction des températures déduites du modèle compact constitué de 8 nœuds

Nœuds i du réseau	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
« Junction – Upper chip»	116.9°C	117.1°C	<1%	-1W	-1W	-
« Junction – Lower chip»	110.5°C	110.7°C	<1%	-1W	-1W	-
« Junction – Area 1»	**142.2**°C	**144.7**°C	**1.7%**	-0.25W	-0.25W	-
« Top-inner »	116.0°C	115.3°C	<1%	12mW	13mW	<1%
« Top-outer »	99.8°C	100.6°C	<1%	64mW	67mW	<1%
« Bottom-inner »	109.1°C	109.1°C	<1%	1.72W	1.76W	1.8%
« Bottom-outer »	90.2°C	88.5°C	<1%	0.421W	0.375W	**2.0%**
« Sides »	88.4°C	88.3°C	<1%	21mW	34mW	<1%

La comparaison des Table 31 et Table 37 révèle l'accentuation des contraintes thermiques vues par la puce supérieure ainsi que l'incidence d'une concentration de la chaleur sur une zone de celle-ci.

Ces deux exemples illustrent la flexibilité d'un algorithme génétique pour répondre à de multiples objectifs, tels que l'observation précise des températures maximale ou moyenne de différentes zones mais également celle des flux quittant toutes les faces du composant.

Le concept d'un modèle compact observant plusieurs sources de chaleur internes est dès lors entériné, sa robustesse sur les plusieures technologies boitiers a été démontrée progressivement. Toutefois, son application aux composants dont les semi-conducteurs sont associés côte à côte (Figure 25), s'est avéré plus compliqué [5]-[6].

Cette problématique est illustrée dans les deux articles sur diverses topologies de composant en particulier sur un concept de composant, dit « System in Package », lequel intègre cinq fonctions électroniques placées horizontalement au sein du boitier (Figure 27).

La principale raison est liée à l'absence de règles ou de recommandations sur la sélection des surfaces d'un modèle compact de type DELPHI. Cette subdivision est apparue indispensable, les zones surfaciques isothermes sélectionnées a priori n'étant pas optimales. C'est un verrou majeur au développement de réseaux plus sophistiqués.

La mise en œuvre d'une approche systémique est exposée par la suite. Celle-ci a ouvert une voie pour améliorer notablement la qualité de l'ajustement d'un modèle compact sur le comportement du modèle numérique réaliste.

En définitive, ces travaux exploratoires ont permis d'identifier les difficultés à surmonter pour adapter le concept de la méthodologie DELPHI aux composants électroniques émergents, lesquels intègrent dorénavant de multiples fonctions électroniques en leur sein (Figure 30).

G5. Extension aux modules électroniques intégrant de multiples fonctions

La complexité des composants « System in Package » (Figure 27) est révélatrice des chalenges à relever pour modéliser les nouvelles technologies de composants.

L'intégration de plusieurs semi-conducteurs est complétée par l'association de boitiers conventionnels, tel le boitier QFN16 étudié dans les chapitres précédents. Le tout nécessite la création de modèles numériques beaucoup plus sophistiqués. Leur exploitation par une technique de d'ajustement, tels que les algorithmes génétiques, n'en est que plus ardue.

Le processus d'identification stochastique mis en œuvre pour la déduction de modèles nodaux statiques considérant de multiples sources de chaleur a été appliqué à ces composants complexes.

Pour cette analyse, des composants électroniques discrets, actifs ou passifs, ont été associés à un jeu de semi-conducteurs conventionnels. Ce type d'assemblage de plusieurs technologies est défini par l'anglicisme « Package in Package ».

La première configuration d'assemblage étudiée est définie par la Figure 90. Ces travaux font l'objet de deux présentations l'une à la conférence Américaine ITHERM-2012 [13] et l'autre à la conférence Européenne EUROTHERM-2012 [8] [14].

Pour cette analyse initiale, l'inductance miniaturisée (en bleu) est modélisée par un bloc isotrope soumis à une puissance volumique uniforme.

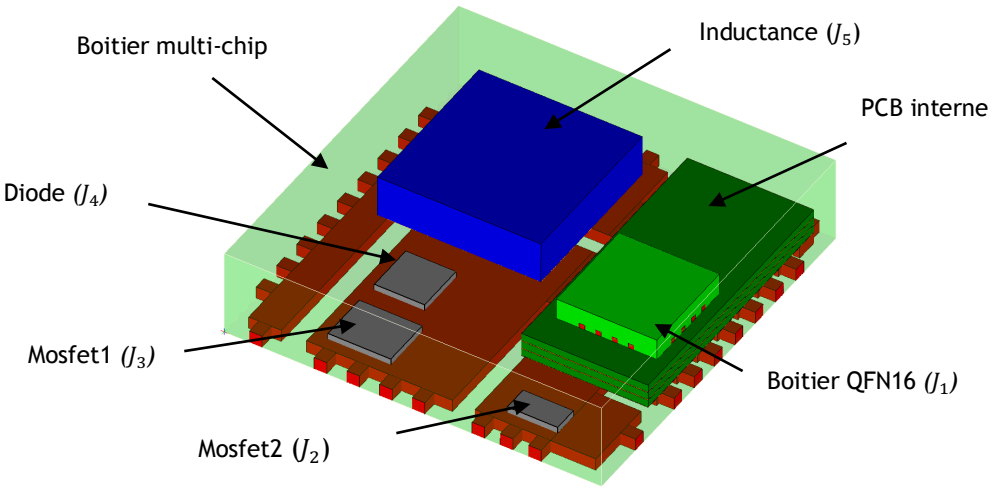


Figure 90 : Investigation initiale du comportement thermique d'un boitier SiP

Ce système miniature a les dimensions suivantes ; $L_P = 15mm$, $W_P = 15mm$ et $H_P = 3.5mm$.

Les dimensions des autres éléments du boitier sont synthétisées dans la Table 38.

Table 38 : Dimensions caractéristiques des constituants du boitier SiP

Éléments	Dimensions (en mm)
PCB interne	5 x 10.6 x 0.36
Boitier QFN16 - J_1	4 x 4 x 0.9
Mosfet1 - J_2	2 x 1 x 0.25
Mosfet2 - J_3	2.5 x 2 x 0.2
Diode - J_4	2 x 2 x 0.25
Inductance - J_5	6.5 x 6.5 x 1.7

Le circuit intégré (J_1) correspond au composant QFN16, lequel a été préalablement étudié (Figure 67). Celui-ci est modélisé avec l'intégralité de ces éléments internes.

Le modèle numérique créé se veut le plus réaliste possible. Ainsi, le boitier plastique QFN16 est monté sur une carte électronique miniature et sa dissipation de chaleur est drainée vers le bas du boitier au moyen d'un ensemble de 9 vias thermiques.

Le matériau des 3 puces nues est du silicium. Sa conductivité thermique varie en fonction de la température vue par chaque puce (Figure 83).

L'objectif de l'étude a consisté à approximer le comportement thermique de ce composant par un réseau nodal unique doté de 5 nœuds internes. Des scenarii de dissipation sont appliqués sur ces nœuds sensibles, ceux-ci peuvent par conséquent être assimilés à des nœuds de jonction ($J_i, 1 \leq i \leq 5$).

L'optimisation vise à décrire leur température maximale respective, ceci pour diverses sollicitations thermiques et conditions d'environnement.

Comme évoqué, la topologie globale du réseau nodal dépend du nombre de surfaces externes retenues pour caractériser d'une manière appropriée les échanges du composant avec son environnement.

Ainsi, la définition géométrique externe du modèle compact fait l'hypothèse de la décomposition suivante des faces du boitier du composant :

- Le regroupement des surfaces latérales en contact avec l'air en un nœud unique,
- Quatre nœuds pour les subdivisions de la surface supérieure en contact avec l'air,
- Cinq nœuds pour les subdivisions de la surface inférieure en contact avec la carte.

La subdivision des zones de la surface inférieure se base sur la présence et la forme de plateformes métalliques, les parties en rouge de la Figure 90.

Le repérage des nœuds de cette surface du modèle nodal est explicité sur la Figure 91.

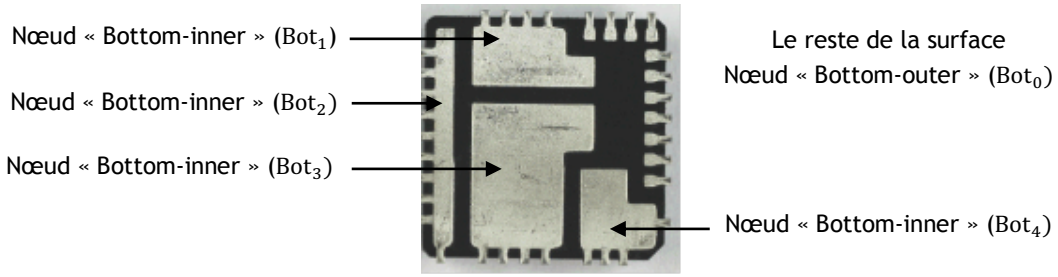


Figure 91 : Description du découpage de la face inférieure du boitier SiP étudié

Ces dernières sont destinées à drainer la chaleur du composant vers la carte par un jeu de vias.

En conséquence, il est indispensable de les inclure dans la définition du modèle nodal.

Le réseau nodal recherché est par conséquent constitué de 5 nœuds internes ($nJ = 5$) et de 10 nœuds externes, soit $nN = 15$. Son élaboration impose d'identifier 105 conductances thermiques inconnues (e47).

Le nombre de nœuds internes fixe également le nombre de scenarii à satisfaire :

$$nCJ = (nJ + 1)\, nC, \qquad avec\, nC = 49\ (DELPHI)\ ou\ nC = 38\ (JEDEC) \tag{e75}$$

La fonction multi-objective utilise la fonction d'ajustement des flux (e64) vue au paragraphe F8.2.

La fonction d'ajustement des températures, quant à elle, tient compte des nJ sources de chaleur (e74).

$$f(T)_{nC=\,nCJ} = A_1\, \overline{\Delta T} + A_2\, \Delta T_{1\leq j\leq nJ}\big|_{max} + A_3\, \Delta T_{n\neq j}\big|_{max} \tag{e76}$$

Les valeurs de chacun des coefficients sont indiquées dans la Table 39.

Table 39 : Définition des poids des différentes erreurs

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	ω
0.5	0.2	0.3	0.5	0.5	0.8

Au final, le réseau est représenté sous la forme d'une matrice carrée symétrique ($Y_{i,j} = Y_{i,j}$) de 16 par 16. Les 15 éléments diagonaux correspondent à la matrice des degrés, à savoir $Y_{i,i} = -\sum_{j=1}^{n} Y_{i,j} \ \forall i \neq j$.

Même si la complexité du réseau nodal est accentuée par le nombre de nœuds, sa déduction grâce aux algorithmes génétiques s'avère aisément réalisable.

La pertinence du modèle nodal déduit a été testée sur un jeu de conditions aux limites indépendant des scenarii de création. Celui-ci est précisé Table 23. A l'instar de la Table 29 les échanges thermiques du composant vers la carte sont jugés prépondérants.

Pour cette condition particulière, les résultats obtenus en considérant une température ambiante de 35°C et une puissance totale dissipée de 5W, sont repris dans la Table 40.

Table 40 : Comparaison des prédictions du modèle nodal constitué de 15 nœuds

Nœuds i	Repère	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	q_{D_i}	q_{C_i}	$\delta \dot{q}_i$
Boitier QFN16	J_1	72.2°C	72.0°C	< 1%	0.5W	0.5W	-
Mosfet1	J_2	71.8°C	71.2°C	1.6%	1W	1W	-
Mosfet2	J_3	82.0°C	82.7°C	1.5%	1W	1W	-
Diode	J_4	69.9°C	70.2°C	< 1%	0.5W	0.5W	-
Inductance	J_5	68.5°C	69.0°C	1.5%	2W	2W	-
« Top-inner »	Top_1	64.8°C	65.0°C	< 1%	0.026W	0.025W	< 1%
	Top_2	65.7°C	65.2°C	1.6%	0.007W	0.0075W	< 1%
	Top_3	68.9°C	68.7°C	< 1%	0.0104W	0.006W	< 1%
« Top-outer »	Top_0	62.4°C	62.0°C	1.5%	0.091W	0.087W	< 1%
« Bottom-inner »	Bot_1	66.1°C	65.4°C	2.3%	1.492W	1.41W	1.6%
	Bot_2	64.2°C	63.5°C	2.4%	0.632W	0.61W	< 1%
	Bot_3	73.1°C	72.8°C	< 1%	0.618W	0.588W	< 1%
	Bot_4	60.8°C	61.1°C	1.2%	0.372W	0.375W	< 1%
« Bottom-outer »	Bot_0	56.0°C	57.2°C	**5.7%**	1.691W	1.84W	3.0%
« Sides »	Sides	62.8	62.7°C	< 1%	0.058W	0.058W	< 1%

Force est de constater que l'erreur sur la condition d'environnement de la Table 23 n'excède pas 10%.

La création de ce type de réseau à multiples jonctions, pour différents boitiers SiP, a permis de démontrer à la communauté scientifique la capacité de notre approche à déduire des modèles compacts très sophistiqués et peu dépendants des conditions à leurs limites.

Toutefois, son temps de création dépend fortement de la taille du modèle numérique à résoudre pour obtenir les températures et les flux thermiques, lesquels sont à confronter aux estimateurs T_{CTM} et q_{CTM}.

Dans le but de limiter les temps des calculs numériques, une nouvelle approche considérant une sous-structuration du modèle est débattue dans les articles [13] et [14].

G6. Sous-structuration des modèles intégrant de multiples sources de chaleur

Pour expliciter ce concept, le circuit intégré encastré dans le boitier SiP de la Figure 90 est analysé indépendamment des autres éléments.

L'objectif visé est de déduire son modèle nodal selon la procédure fournie au paragraphe F8.4, puis d'introduire celui-ci en lieu et place de son modèle détaillé.

Les surfaces externes, assumées isothermes, sont matérialisées par un jeu de couleur. Celles-ci sont associées à un réseau nodal capable d'observer les évolutions de la température jonction du QFN16.

La Figure 92 montre l'intégration de sa représentation physique tridimensionnelle au sein du boitier.

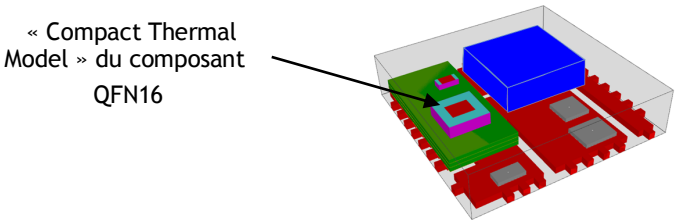


Figure 92 : Principe de sous-structuration du modèle numérique d'un boitier SiP

Cette approche préfigure l'emploi d'un modèle nodal pour des conditions appliquées à ces surfaces externes, dépendantes de ses sollicitations internes mais également de son environnement proche.

D'autre part, cette analyse [13]-[14] intègre également un réseau nodal dédié à une zone de via, disposée sous le composant, à l'instar des travaux menés au paragraphe G3 sur le couplage de réseaux nodaux.

Ce travail constitue la première démarche visant à minimiser la taille du modèle numérique au moyen de l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles compacts, dénommé « Sub-Compact Thermal Model ».

Cette solution a eu pour bénéfice de réduire le temps d'obtention d'un modèle nodal d'un composant muni de multiples puces ou boitiers électroniques comme l'indique la Table 41.

Table 41 : Bilan des temps de simulation des scenarii en fonction de la complexité du modèle

Nature du modèle	Taille du modèle numérique (Flotherm®)	Temps de résolution
Modèle mono-puce : **QFN16**	10000 nœuds de maillage	5 min / scénario
Modèle multi-puce : **SiP**	5.5 millions de nœuds de maillage	4h30 / scénario
Modèle Mixte : « **CTM** in **DTM** »	1 million de nœuds de maillage	40 min / scénario

Le réseau nodal déduit fournit pour les 49 scenarii de la Table 10, une prédiction des températures des éléments sensibles du composant inférieure à 2%.

Bien évidemment, l'enjeu consiste à maintenir une bonne qualité des prédictions du modèle compact global malgré l'utilisation de multiples sous-modèles ayant de par leur conception une précision dégradée.

Différentes stratégies pour l'obtention de modèles comportementaux statiques sont par conséquent envisageables, leur objectif est de minimiser les temps de calcul numérique.

Il est également légitime de se poser la question de la définition et du nombre de scénarios indispensables à la génération de modèles compacts indépendants des conditions aux limites.

Cet aspect est peu traité dans la littérature scientifique concernant la création de modèles thermiques compacts et de ce fait reste à parfaire.

G7. Problématique des composants passifs

Lors de l'analyse menée sur les composants de type « System in Package », ITHERM-2012 [13], il a été observé que l'inductance miniaturisée, vue en Figure 90, était l'élément le plus critique de ce composant.

En fait, celle-ci est susceptible d'être soumise à des courants fortement pulsés au regard de sa taille. Ces derniers vont engendrer au sein de ce composant, une dissipation de chaleur liée à l'activation des phénomènes électromagnétiques.

Ainsi le corps du boitier, la partie magnétique, et son solénoïde, la partie électrique, vont être sollicités de manière distincte.

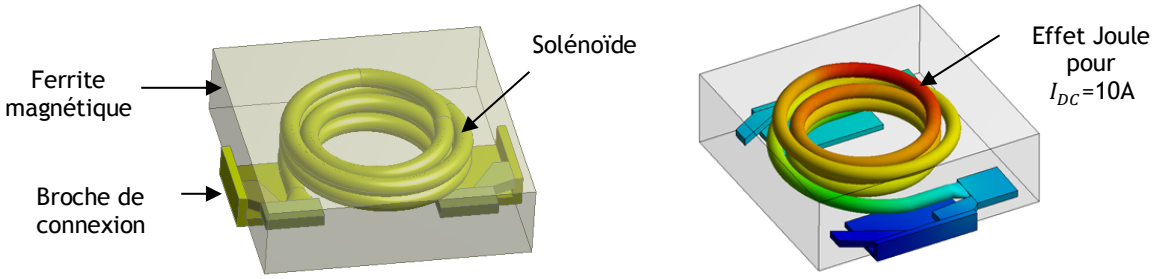


Figure 93 : Modélisation thermoélectrique d'une inductance miniaturisée

La température de boitier résultante de ces deux interactions est susceptible de provoquer une dégradation accélérée de ses propriétés physiques (Chapitre IID6).

Aussi, il est apparu indispensable de mieux comprendre le comportement thermique de ces composants passifs de manière à garantir les conditions de leur intégrité. Cette analyse a fait l'objet d'une publication à THERMINIC-2013 [16].

La difficulté majeure pour la modélisation thermique de ce type de composants électroniques est de connaitre avec exactitude la valeur de la conductivité thermique du matériau magnétique, lequel est pressé autour d'un solénoïde en cuivre comme l'indique la Figure 93.

Le plus souvent, les données fournies par les fabricants sont inconsistantes et très fluctuantes suivant la source d'information. Ainsi, les valeurs des conductivités thermiques effectives (k_C) procurées varient dans une gamme comprise entre 1Wm^{-1} K^{-1} et 5Wm^{-1} K^{-1}.

L'impact de cette valeur sur les températures des éléments de l'inductance est illustré dans la Table 42.

Table 42 : Évolution des températures maximales vues par l'inductance

k_{CORE}	Solénoïde « *Coil* »	Noyau « *Core* »	Enveloppe « *Case* »	Broches « *Leads* »
$1W/(m.K)$	112°C	103°C	112°C	99°C
$2W/(m.K)$	107°C	101°C	107°C	97°C
$5W/(m.K)$	97°C	95°C	97°C	94°C

Ces températures sont obtenues en supposant l'inductance montée sur un véhicule de test refroidi par convection naturelle et rayonnement thermique dans une ambiante de 35°C. L'inductance est dans ce cas soumise à un courant continu de 5A.

La Table 42 démontre que la température de l'inductance n'est pas uniforme. En fonction de la conductivité thermique les écarts peuvent être supérieurs à 10°C. Les deux éléments internes sont par conséquent à considérer pour l'établissement d'un modèle numérique pertinent.

Afin de pallier le manque d'information sur le matériau magnétique, le modèle de mélange de Maxwell (e69) est appliqué pour déterminer la conductivité thermique d'un ensemble de billes de fer agglomérées dans une résine.

Comme évoqué, sa conductivité thermique (k_m) dépend de la nature de la résine. Notre choix s'est porté sur un polymère à base d'une résine époxyde ayant une conductivité thermique typique égale à 0.345W m^{-1} K^{-1} à 25°C. La conductivité typique d'une poudre de fer, à 25°C, est de l'ordre de 75W m^{-1} K^{-1}. Dans l'hypothèse de particules sphériques aléatoirement distribuées (Table 25), la conductivité thermique effective du composé est estimée à 2.1W m^{-1} K^{-1}.

En première approche, les pertes électrique et magnétique sont calculées manuellement puis imposées sous la forme d'une puissance volumique au solénoïde et à la structure magnétique du modèle.

Le concept d'un modèle nodal à deux sources de chaleur a été investigué.

Le graphe du réseau s'appuie sur la définition des 8 nœuds (nN) suivants :

- La création de deux nœuds internes pour observer la température maximale de la partie

magnétique et de la partie électrique $(J_i, 1 \leq i \leq 2)$,

- Le regroupement en un nœud unique des quatre surfaces latérales en contact avec l'air,
- La subdivision en trois zones de la surface supérieure en contact avec l'air,
- La subdivision en deux zones de la surface inférieure en contact avec la carte.

Cette étude vise à déterminer un ensemble de 28 conductances thermiques (e47) à partir des données issues de la simulation de 147 scenarii (DELPHI, (e75)) imposés aux frontières du modèle numérique.

Ainsi, la superposition des profils est appliquée pour caractériser le comportement propre de chacune des parties, électrique et magnétique, ceci en fonction de leur activation simultanée ou non.

La qualité de l'approximation du réseau nodal est évaluée à partir de la fonction cout (e76), laquelle est explicitée au paragraphe G5.

Les résultats numériques d'une part du modèle détaillé (DTM) et d'autre part ceux du modèle nodal (CTM) sont comparés dans la Table 43. La température de l'environnement est supposée stabilisée à 35°C.

Une puissance volumique distincte (Q_j) est imposée à chacun des nœuds internes pour simuler un comportement thermique proche des conditions de fonctionnement réelles.

Table 43 : Prédictions des températures maximales des deux nœuds internes

Éléments i	Q_i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i
Solénoïde « Coil »	0.335W	107.7°C	107.5°C	0.1%
Noyau magnétique « Core »	0.165W	104.9°C	103.8°C	1.6%

La qualité des prédictions du réseau de résistances thermiques déduit du modèle numérique démontre la capacité de notre approche à adresser d'autres familles de composants électroniques.

L'erreur relevée entre le modèle numérique et son modèle nodal n'excède pas 5%. Néanmoins, le modèle numérique est établi sur la base de nombreuses approximations. Celles-ci doivent être justifiées.

La principale originalité de l'étude, menée en 2013, tient au fait que certaines zones isothermes sur la face supérieure ont une forme circulaire ou ovale. Celles-ci sont dépeintes dans la Figure 94.

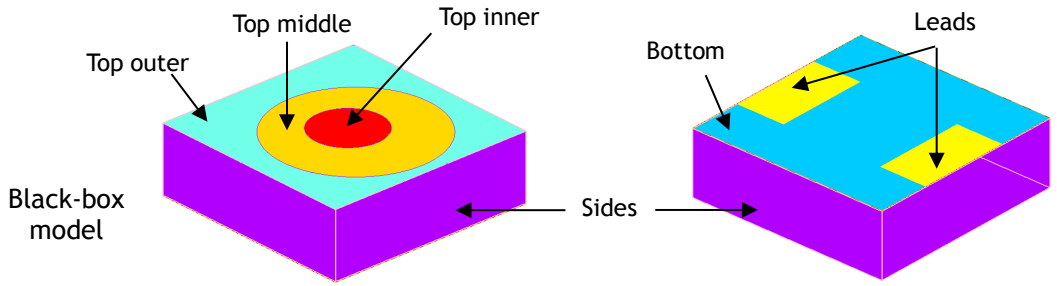


Figure 94 : Représentation tridimensionnelle de la forme du modèle compact de l'inductance

Cette analyse démontre que le découpage en plusieurs zones isothermes est susceptible d'avoir n'importe quelle forme. Par conséquent, le nombre de zones et leur forme nécessitent d'être optimisés afin de satisfaire le critère d'acceptation sur la précision des modèles: $R(T, q) > 0.90$.

Ce constat prouve que la définition des surfaces externes est un prérequis à l'établissement d'un modèle nodal. Cette définition doit s'appuyer sur une analyse préalable des gradients thermiques du composant à réduire.

C'est un aspect complètement éludé par la méthodologie DELPHI (F3) ou le standard JEDEC (F13), pourtant celui-ci est le garant de sa précision.

Indubitablement, le comportement thermique de cette famille de composant nécessite une validation expérimentale pour calibrer correctement son modèle numérique. Plus loin, l'évaluation des pertes magnétiques et électriques et leur localisation du sein du boitier exigent aussi une analyse approfondie.

G8. Caractérisation expérimentale d'un module à multiples composants

Une caractérisation expérimentale du composant à multiples éléments actifs de la Figure 90 a été présentée lors des conférences : ITHERM-2014 [18] et THERMINIC-2014 [20].

La modélisation numérique d'un composant « SiP » industriel est complétée par une validation expérimentale. Hormis le circuit intégré la constitution interne de ce composant est quasi identique à celui présenté en Figure 90. Le boitier QFN16 est remplacé par un boitier DFN10.

La validation du modèle est opérée sur une carte de démonstration, exposée ci-dessous.

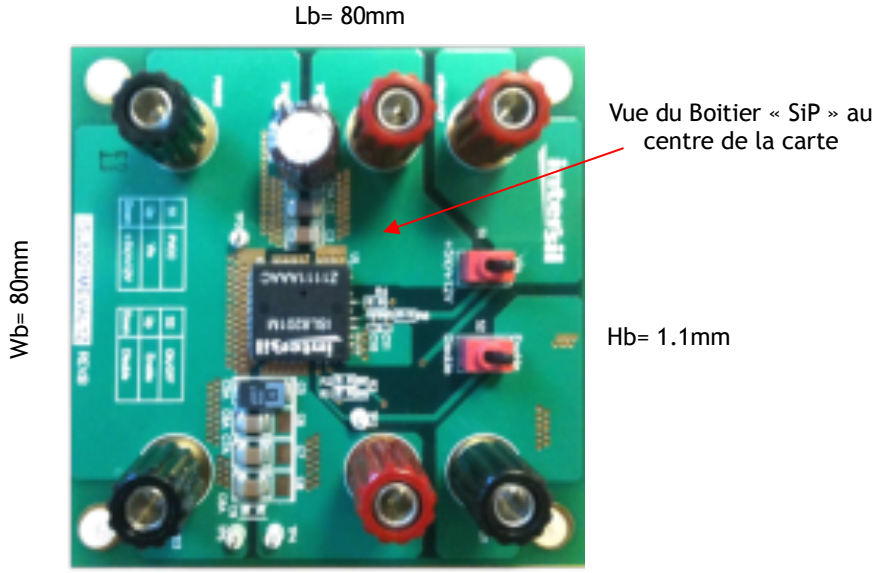


Figure 95 : Vision de la Carte de démonstration du module SiP

Cette dernière est destinée à caractériser les performances électriques de ce composant. Une identification des puissances dissipées par un ensemble d'éléments de la fonction électronique, tels que ses transistors de puissance ou son inductance, est possible. Néanmoins, cette analyse doit être effectuée pour divers points de fonctionnement électrique.

L'étude relate l'observation des températures vues par sa face supérieure du boitier. Celles-ci sont relevées au moyen d'une caméra infrarouge dotée d'un objectif capable de discerner un nombre de pixels suffisants sur des zones ciblées de très petites dimensions.

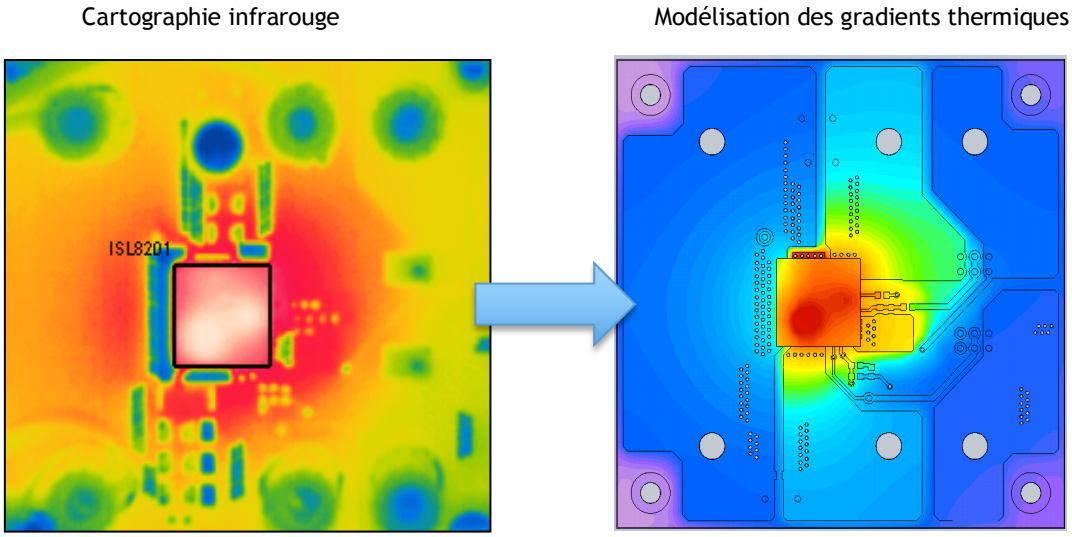


Figure 96 : illustration de la phase d'ajustement du modèle numérique

Les températures maximales et moyennes d'un ensemble de zones sont observées de manière à ajuster la représentativité du modèle numérique développé. Il est à noter que le modèle numérique, à droite, prend en compte tous les détails de toutes les couches de la carte [18].

C'est un point essentiel pour décrire avec pertinence les différents transferts thermiques des diverses plateformes du composant (Figure 91) au travers de la structure de la carte.

L'ajustement du modèle est opéré sur 5 zones surfaciques selon un point de fonctionnement électrique.

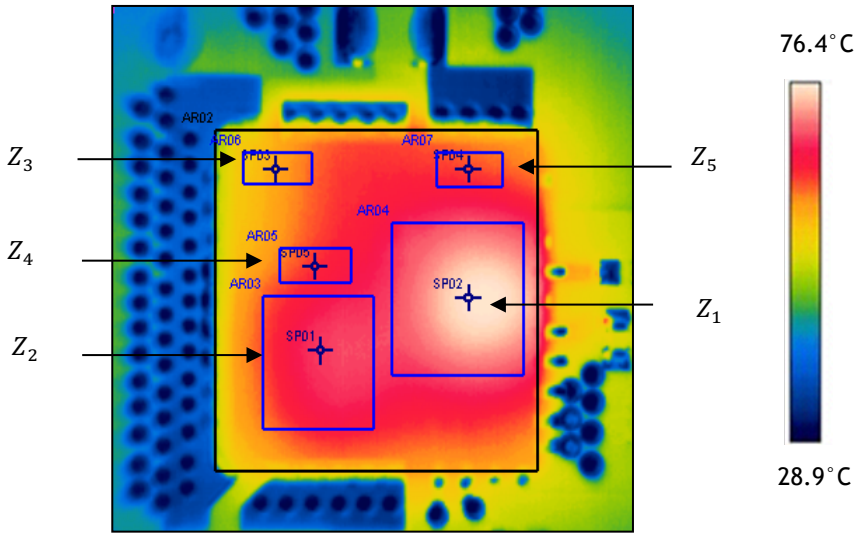


Figure 97 : Descriptif des zones du boitier observées à Q=3.31W et T_A=19°C

La modélisation numérique de l'ensemble du modèle a été accomplie sous deux codes commerciaux de thermofluidique : Flotherm-XT® (en grisé) et Icepak®. Celle-ci exige environ 20 millions de mailles.

L'écart sur la prédiction de ces températures de surface est inférieur à 6%, comme l'indique la Table 44.

Table 44 : Comparaison des températures mesurées et calculées sur la surface supérieure

Zones i	$T_{M=IR_i}$	T_{D_i}	δM_i	T_{D_i}	δM_i
Z_1	74.0°C	72.2°C	3.3%	73.0°C	1.8%
Z_2	63.5°C	64.8°C	2.9%	65.1°C	3.6%
Z_3	61.3°C	63.6°C	5.4%	62.5°C	2.8%
Z_4	60.8°C	59.1°C	4.1%	58.5°C	5.5%
Z_5	57.6°C	58.2°C	1.6%	59.0°C	3.6%

L'erreur indiquée est calculée selon la relation :

$$\delta M_i = \left| \left(T_{M_i} - T_{D_i}\right) / \left(T_{M_i} - T_\infty\right) \right| \qquad \text{(e77)}$$

Sur le principe des méthodes inverses, le recalage des températures surfaciques du boitier permet d'estimer les dissipations Q_i de chacune des sources de chaleur. Celles-ci sont indiquées dans la Table 45.

Cette dernière fournit également les niveaux de température atteints par chacun des éléments sensibles. Force est de constater que les contraintes thermiques sont très élevées au sein du composant.

Celles-ci seront dommageables lorsque que le composant sera monté sur une carte électronique industrielle soumise à des conditions d'environnement très sévères.

Il par conséquent indispensable de disposer d'un modèle comportemental pour appréhender rapidement le caractère critique d'une conception.

Table 45 : Déduction des températures des éléments sensibles du composant

Éléments i	Q_i	T_{D_i}	T_{D_i}
DFN10	0.75W	85.8°C	85.5°C
Mosfet1	0.48W	65.3°C	66.6°C
Mosfet2	0.48W	63.7°C	63.6°C
Diode	0.38W	65.6°C	66.8°C
Inductance	1.22W	73.0°C	72.9°C

D'autre part, dans le cadre de ces travaux, la méthodologie d'obtention de nos réseaux nodaux fait appel à la pré-étape de construction évoquée en conclusion du paragraphe G7.

La détermination des subdivisions des surfaces supérieure et inférieure est optimisée via un processus d'identification des zones les plus pertinentes, ceci pour les divers scenarii de conditions aux limites (Table 10 ou Table 27), appliqués sur les faces du modèle numérique.

Le processus mis en œuvre pour les identifier est décrit ci-dessous.

- En premier lieu, les surfaces supérieure ou inférieure du modèle numérique détaillé sont scindées en un ensemble de ng^2 zones, pour lesquelles les jeux de températures et de flux sont extraits.
- Ces grilles surfaciques sont formées d'éléments uniformes, leur nombre peut être accentué afin de parfaire la délimitation des frontières de zones (Z_j) dont les gradients thermiques sont significatifs et doivent être distingués pour établir un modèle nodal concordant.
- De manière à faciliter leur classification, les températures minimale et maximale de chacune des cellules élémentaires d'une face sont normalisées pour varier entre 0 et 1.
- Puis un algorithme génétique recherche des groupements de surface isothermes capables de reproduire le comportement physique du composant pour l'ensemble des sollicitations.

A l'issue de cette procédure, sept zones ont été distinguées sur la surface supérieure et huit sur la surface inférieure pour le composant analysé.

Elles permettent de caractériser, avec une précision prédéfinie, le comportement du composant, ceci quelques soient les conditions appliquées à ces frontières.

Les zones déduites sont dépeintes sur la Figure 98 par différentes surfaces colorées. Les éléments de la grille ayant servi à cette phase d'identification sont également représentés.

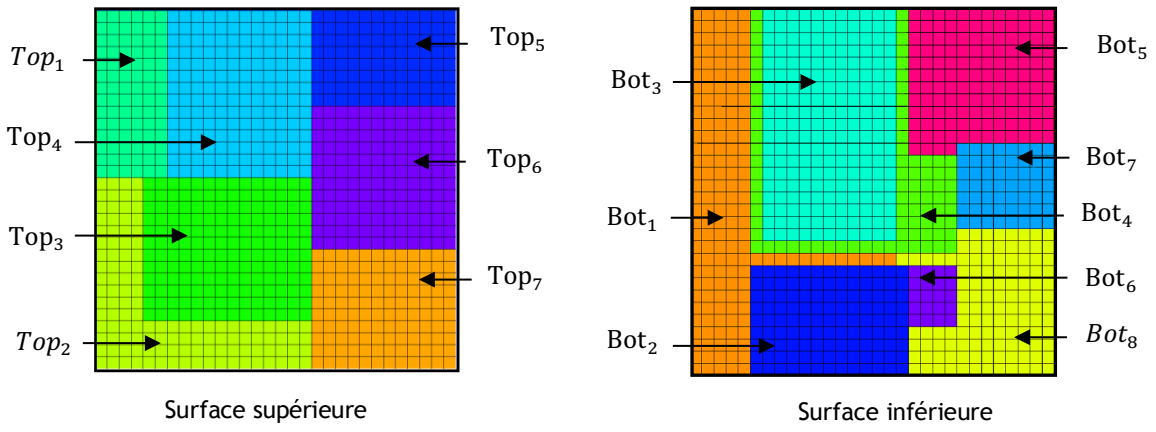


Figure 98 : Descriptif du regroupement des « meilleures » zones isothermes

Dès lors, la topologie du réseau à créer est beaucoup plus conséquente. Celui-ci est constitué de 15 nœuds, lesquels sont répartis en :

- 6 nœuds de jonction pour les éléments sensibles du boitier,
- 4 nœuds pour les surfaces latérales en contact avec le fluide,

- 7 nœuds pour la surface supérieure en contact avec le fluide,
- 8 nœuds pour la surface inférieure en contact avec la carte.

L'identification des 105 conductances est faite en ajustant le comportement thermique pour les 49 jeux de conditions aux limites, dit DELPHI+1. Le score du meilleur réseau est 0.918.

La Table 46 reprend les résultats fournis dans les deux articles [18] et [20].

Table 46 : Déduction des températures des éléments sensibles du composant

Éléments i	Q_i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i	T_{D_i}	T_{C_i}	δT_i
DFN10	0.75W	85.8°C	83.2°C	3.9%	85.5°C	86.2°C	1.1%
Mosfet1	0.48W	65.3°C	65.2°C	0.2%	66.6°C	66.3°C	0.6%
Mosfet2	0.48W	63.7°C	63.4°C	0.7%	63.6°C	64.1°C	1.1%
Diode	0.38W	65.6°C	63.0°C	5.6%	66.8°C	66.1°C	1.5%
Inductance	1.22W	73.0°C	71.3°C	3.1%	72.9°C	72.5°C	0.7%

La comparaison de deux solutions numériques met en lumière les incertitudes inhérentes à ces méthodes de résolution même si beaucoup d'attention a été porté à l'assurance de l'indépendance des résultats vis-à-vis du maillage.

La représentation et le calcul des modèles thermiques compacts sont également dépendants des interprétations propres à chacun de ces logiciels.

Par exemple, imposer une condition de Dirichlet, sur une large surface, à l'interface entre le composant et le substrat de la carte, est loin d'être représentatif du comportement physique.

L'étude présente également une analyse pour juger de la qualité du modèle compact. Ainsi, la cartographie infrarouge, de la Figure 97, est exploitée.

L'objectif est de connaitre l'écart entre les prédictions du modèle nodal sur les zones isothermes déduites et les températures moyennes mesurées.

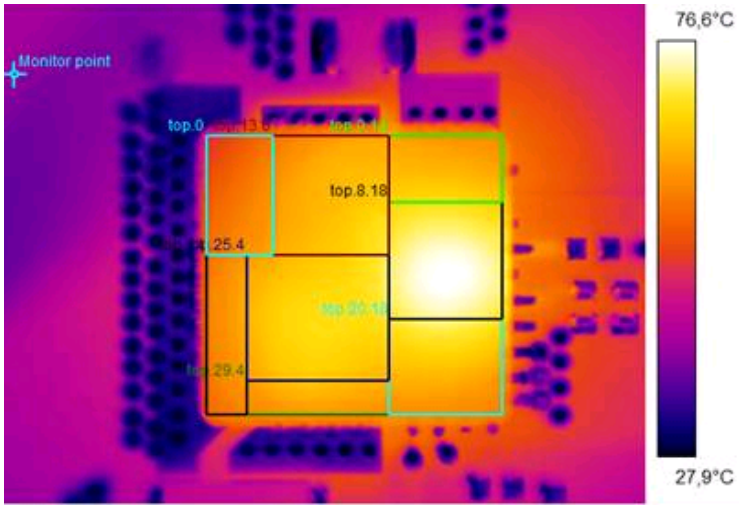


Figure 99 : Vision sur la cartographie infrarouge des zones à valider

Les résultats obtenus, en Table 47, démontrent la validité d'une définition « intelligente » d'un jeu de surfaces isothermes pour la déduction de modèle nodal.

Cette approche s'avère indispensable pour traiter des composants électroniques de plus en plus complexes, notre objectif principal.

Table 47 : Validation des prédictions du modèle nodal vis à vis des mesures infrarouges

Zones Top i	$T_{M=IR_i}$	T_{D_i}	δM_i
Top_1	54.7°C	57.4°C	7.6%
Top_2	59.8°C	62.2°C	5.9%
Top_3	64.0°C	65.4°C	3.1%
Top_4	61.7°C	62.7°C	2.3%
Top_5	61.5°C	62.5°C	2.4%
Top_6	70.7°C	69.9°C	1.6%
Top_7	62.3°C	64.0°C	3.9%

Ces travaux ont démontré la consistance du réseau nodal déduit pour un composant très sophistiqué.

Ce dernier s'avère capable de prédire, avec une divergence inférieure à 10 %, les températures clefs d'un composant accueillant de multiples sources de dissipation, ceci pour des sollicitations diverses.

En conclusion, les bases d'une méthodologie d'ajustement des modèles numériques de composants disposant de plusieurs puces actives sont formalisées.

G9. Modélisation des phénomènes électromagnétiques propres aux inductances

Comme mentionné, la caractérisation des phénomènes physiques propres aux inductances miniaturisées demeure une problématique pour générer un modèle nodal représentatif.

Pour cela, l'analyse initiale a été complétée, en 2015, sur une fonction électronique décomposée en plusieurs boitiers discrets.

Les performances électriques et thermiques propres à l'inductance sont par conséquent mesurables indépendamment des autres composants constituant de ce convertisseur DC/DC.

Ceux-ci sont disposés sur une carte de démonstration présentée sur la Figure 100.

A l'instar de l'analyse du boitier « SiP », (Figure 96), un modèle numérique très détaillé, de la carte de démonstration et de ses composants électroniques, a été construit.

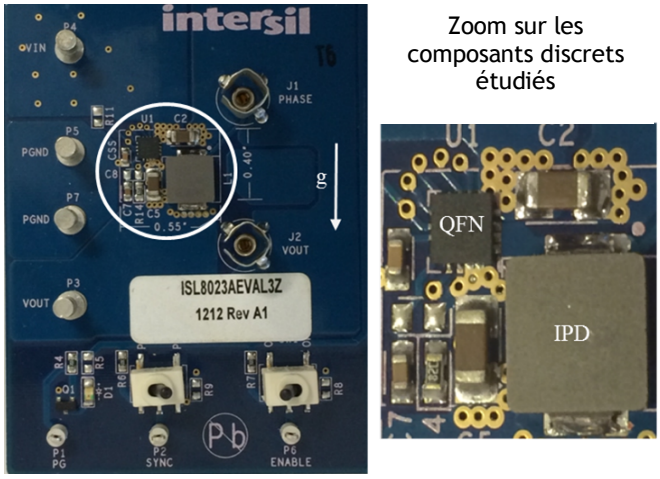


Figure 100 : Vision de la carte de démonstration d'une fonction électronique classique

Pour parfaire la représentativité de ce modèle, les pertes électromagnétiques de l'inductance ont fait l'objet d'une modélisation couplée à partir de logiciels commerciaux afin matérialiser leur impact du point de vue thermique.

Cette modélisation a permis, par exemple, de visualiser les effets de peau et de localiser les concentrations des champs magnétiques au sein du noyau ferreux. Ceux-ci sont explicités en Figure 101.

Concentration des courants liés à l'effet de peau

Champs magnétiques autour du solénoïde

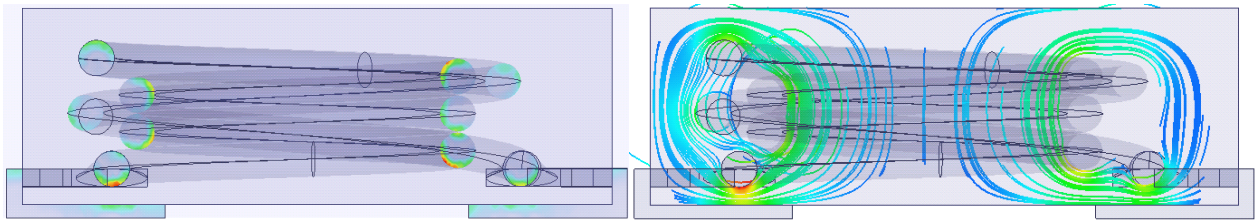


Figure 101 : Comportement magnéto-électrique de l'inductance pour un courant de 2.6A à 2MHz

Ces travaux de caractérisation expérimentale des modèles numériques destinés aux inductances ont fait l'objet d'une présentation à la conférence THERMINIC-2015 [22].

Celle-ci a obtenu une récompense intitulée « best poster Awards » prouvant l'intérêt de l'extension de la méthodologie Delphi aux composants passifs.

Les prédictions du modèle électro-magnéto-thermique ont été confrontées à un ensemble de mesures infrarouges effectuées pour différents points de fonctionnement électrique.

Cette comparaison démontre qu'il est envisageable de créer un modèle numérique capable de reproduire assez fidèlement le comportement physique d'une inductance miniaturisée, notre propos.

L'objectif est à terme de proposer un modèle nodal qui soit capable de reproduire les contraintes thermiques engendrées au sein du boitier en fonction des conditions électriques en fréquence et en intensité.

G10. Investigation sur les propriétés thermiques des matériaux magnétiques

En 2016, une caractérisation par microscopie thermique de la conductivité thermique des matériaux magnétiques d'inductances miniaturisées, présentée en Figure 40, est lancée en partenariat avec l'université de Reims.

Il s'agit de valider la représentativité du modèle de mélange de Maxwell pour estimer l'ordre de grandeur de cette propriété.

La méthode utilisée pour cette analyse est la microscopie thermique par sonde thermoélectrique [R42].

Dans un premier temps, la détermination de la conductivité thermique a été faite sur des zones carrées de l'ordre de 5µm. Un premier constat est que les valeurs locales mesurées ne permettent pas de déduire une valeur macroscopique. La difficulté réside dans le fait que le matériau, étant donné sa nature, est très hétérogène. Le profil thermique analysé est dépendant de la proximité, ou non, des microbilles de fer noyées dans la résine de protection.

Ainsi, les conductivités thermiques observées sur une zone carrée de 50µm varient de 0.4 à 60W m^{-1} K^{-1}, des valeurs proches des conductivités thermiques des deux constituants de l'amalgame. Le procédé de mesure est à parfaire. Une zone d'observation plus large que celle initialement analysée doit être décomposée avec un échantillonnage plus conséquent, par exemple 300 lignes par 300 lignes avec 300 points de mesure par ligne.

Cette première analyse des résines chargées de fer souligne les difficultés pour caractériser plus finement les propriétés thermiques d'un amalgame.

Les travaux menés sur la caractérisation des modèles numériques destinés aux inductances ont fait l'objet d'un nouvel article et d'un poster pour le congrès de la SFT-2016 [23].

Cette analyse sera poursuivie afin de formaliser un processus de création de modèles nodaux, puis étendue à d'autres catégories d'inductance miniaturisée.

G11. Une première projection au-delà des composants

Le processus de réduction d'un modèle numérique détaillé sous une forme nodale a été appliqué au niveau d'une carte électronique. Celui-ci s'appuie d'une part sur le principe d'un découpage des surfaces de la carte en zones isothermes caractéristiques et d'autre part sur celui de la sous-structuration avec une

utilisation des modèles de composants dits compacts.

L'objectif de cette nouvelle réflexion vise à créer un modèle compact de carte en mesure de minimiser les temps de calcul de chacune des températures de jonction des composants actifs de celle-ci.

Ces travaux de réduction ont été menés sur un véhicule de test thermique sur lequel sont montés 7 composants. La Figure 102 présente la vue supérieure de ce véhicule de test, dénommé « thermo-carte ».

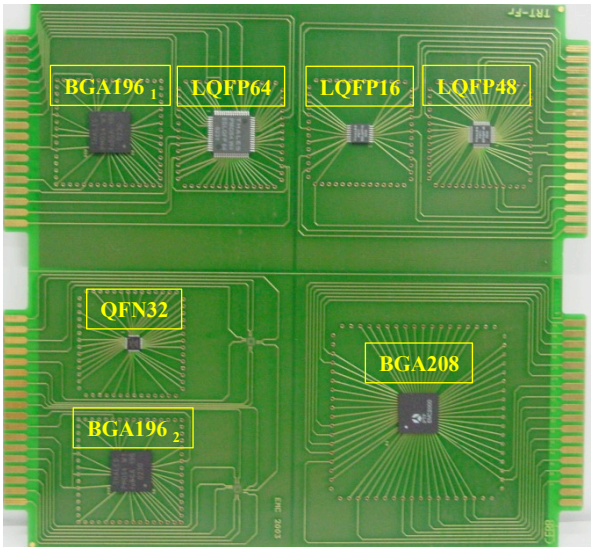


Figure 102 : Carte électronique de test à réduire sous une forme nodale

La description de ce substrat et de ses composants est fournie dans l'article publié à ITHERM-2008 [4].

Le substrat est composé d'un empilage de sept couches pour être en accord avec les critères de mesure préconisés par le standard JEDEC (D3), comme l'indique la Table 48.

Table 48 : Géométrie du véhicule de test étudié

Type	$L_B\ (mm)$	$W_B\ (mm)$	$H_B\ (mm)$	Plans (x2)	Signaux (x2)	Isolants (x3)
2S/2P	200	203	≈1.6	35µm	70µm	465µm

Celui dispose de quatre couches métalliques en cuivre (Plans et signaux) séparées par trois couches diélectriques en résine époxy renforcées de fibres de verre. Les deux couches externes sont destinées à la transmission des signaux et deux plans internes sont des plans d'alimentation et de masse.

Le taux de cuivre des couches signaux est inférieur à 15% et celui des plans de l'ordre de 95%.

Les sept composants font partie des familles de circuits intégrés les plus employées. Les dimensions des boitiers sélectionnés pour cette analyse sont reprises Table 49.

Table 49 : Tailles et positions centrales des composants équipant la carte étudiée

Boitier i	$L_{P_i}\ (mm)$	$W_{p_i}\ (mm)$	$H_{P_i}\ (mm)$	$X_{P_i}\ (mm)$	$Y_{P_i}\ (mm)$
BGA196-1	15	15	1.405	30	153
LQFP64	14	14	1.595	74.5	153
LQFP16	7	7	1.478	122	153.5
LQFP48	7	7	1.131	167	153.5
BGA196-2	15	15	1.369	38	29.5
QFN32	5	5	0.975	39	76.5
BGA208	15	15	1.341	144	50.5

Ces composants sont équipés de puces thermiques dont les références sont déclinées dans la Table 50. Leur constitution typique sera décrites ultérieurement (I7.1).

Table 50 : Tailles des puces équipant les composants étudiés

Boitier	Puce	$L_C\ (mm)$	$W_C\ (mm)$	$H_C\ (mm)$
BGA196	PMOS4	10	10	0.26
BGA208	PST503	7.77	7.77	0.26
LQFP64	PMOS4	10	10	0.26
LQFP16	PST302	5.08	5.08	0.26
LQFP48	PST302	5.08	5.08	0.26
QFN32	PST102	2.54	2.54	0.3

Ces dernières offrent l'opportunité d'identifier avec précision d'un part la puissance réellement dissipée et d'autre part la température maximale atteinte par la puce. Les données expérimentales utilisées pour valider la représentativité du modèle numérique sont également déclinées dans l'article ITHERM-2008 [4].

Une bonne corrélation entre les températures expérimentales et numériques a été supposée être la garantie de la validité des modèles détaillés utilisés pour chacun des composants et des modèles compacts qui en sont dérivés.

Toutefois, la modélisation détaillée de la carte demeure une difficulté, dans la grande majorité des approches conventionnelles, celle-ci est réduite à un bloc homogène, de taille équivalente, ayant au mieux des propriétés thermiques anisotropes. Cette hypothèse pratique en phase de préconception est impropre à une modélisation thermique réaliste d'une carte électronique.

Aussi, l'analyse thermique a été menée en subdivisant le substrat en n cellules de 2.5mm par 2.5mm ayant des propriétés thermiques distinctes. Par ce biais, une meilleure interprétation des chemins thermiques au cœur du substrat et autour de chacun des composants est rendu possible.

La Figure 103 dépeint le rendu des conductivités thermiques variant de 0.3W m^{-1} K^{-1} à 380W m^{-1} K^{-1} du modèle du substrat discrétisé.

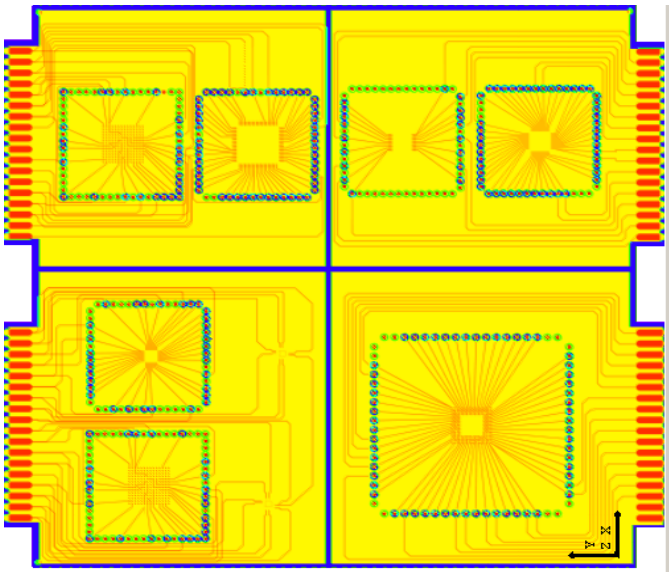


Figure 103 : Interprétation de conductivité thermique locale d'un substrat multicouche

Force est de constater que l'on distingue clairement les pistes qui vont favoriser la diffusion de la chaleur ainsi que les barrières thermiques, en bleu, qui vont s'y opposer.

Naturellement, en adoptant une subdivision plus accentuée de la carte, telle que 0.5mm par 0.5mm, la distinction des zones diélectriques est plus fine. Par conséquent les températures vont être plus élevées.

La Figure 104 dépeint les délimitations liées à la présence de rangées de vias autour de chacun des composant ainsi que celle induite par la coupure des plans de masse.

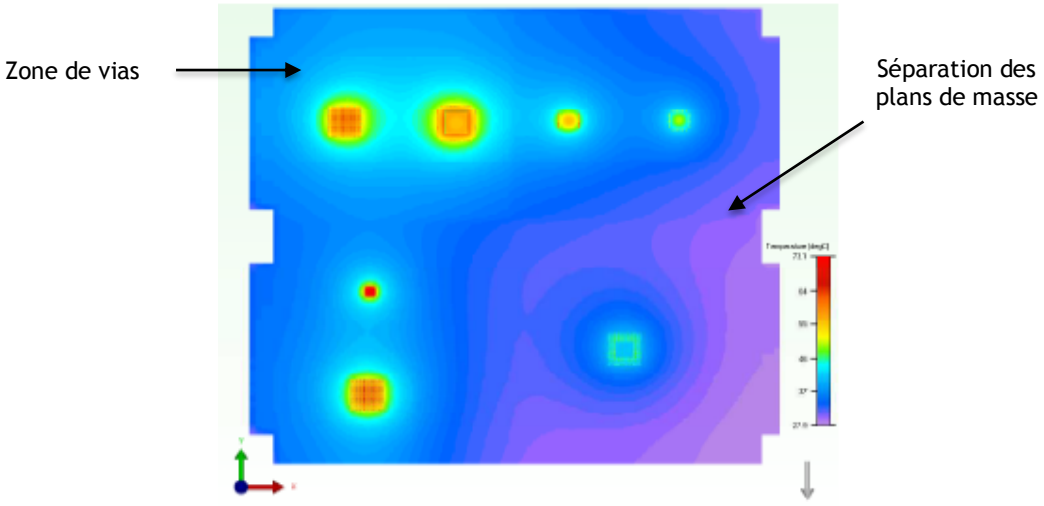


Figure 104 : Visualisation des gradients thermiques fournis par un substrat discrétisé

La Table 51 illustre l'impact d'une discrétisation plus forte et la baisse de conformité du modèle en fonction du degré de représentation des éléments du substrat.

Table 51 : Recalage du modèle numérique de la thermo-carte

	$T_\infty = 25°C$	Expérience	Modèle dit 2.5 x 2.5		Modèle dit 0.5 x 0.5	
Composant i	$\boldsymbol{Q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{T}_{M_i}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{D_i}\ (°C)$	$\delta\boldsymbol{M}_i\ (\%)$	$\boldsymbol{T}_{D_i}\ (°C)$	$\delta\boldsymbol{M}_i\ (\%)$
LQFP64	2.196	81.8	82	-0.4	82	-0.4
LQFP16	0.905	75	76.1	-2.2	75.8	-1.6
LQFP48	0.743	68.1	65.7	5.6	73.7	-13
BGA208	0.991	56.2	57.8	-5.1	61.2	-16
BGA196-1	1.8	76.6	79.1	-4.8	80.5	-7.6
BGA196-2	1.663	75.5	78.2	-5.3	81.2	-11.3
QFN32	0.794	75.4	77.5	-4.2	79.7	-8.5

Clairement, un modèle numérique dépend fortement des hypothèses retenues pour sa création.

Comme mentionné, les composants sont modélisés sous une forme nodale en accord avec la procédure de réduction DELPHI. Malgré tout, le niveau de précision obtenu est quasiment identique (Table 52).

Table 52 : Recalage du modèle numérique utilisant des composants compacts

	$T_\infty = 25°C$	Expérience	Modèle dit 2.5 x 2.5	
Composant i	$\boldsymbol{Q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{T}_{M_i}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{C_i}\ (°C)$	$\delta\boldsymbol{M}_i\ (\%)$
LQFP64	2.196	81.8	82.4	-1.1
LQFP16	0.905	75	75.7	1.4
LQFP48	0.743	68.1	68.3	-0.5
BGA208	0.991	56.2	56.1	0.3
BGA196-1	1.8	76.6	74.1	4.8
BGA196-2	1.663	75.5	73.8	3.4
QFN32	0.794	75.4	73.8	3.2

Les étapes pour la déduction d'un réseau nodal pour cette carte électronique sont indiquées ci-après.

Une décomposition, en 40 zones, des surfaces supérieure et inférieure de la carte à multiples couches, est opérée. A l'opposé de la méthodologie DELPHI, les coefficients d'échange thermique appliqués à la carte ne sont pas uniformes mais représentatifs des mouvements de l'air créés par les phénomènes de convection naturelle ou forcée.

Ainsi le jeu de conditions aux limites retenu pour notre analyse est constitué des scenarii suivants :

- Deux cas de convection naturelle basés sur l'orientation de la carte.

  Le véhicule de test est successivement disposé verticalement et horizontalement.

- Trois cas de convection forcée

  Les vitesses d'air retenues pour cette étude sont 1m/s, 5m/s et 10m/s.

- Une condition de convection en espace confiné est prise en compte.

  L'espace d'air autour de la carte est réduit de manière à considérer les phénomènes de stratification.

- Une condition de conduction thermique

  La présence de zones sur les côtés de la carte de deux zones ayant des températures fixes (Dirichlet) est prise en compte. On parle dans ce cas de glissières thermiques

Le score de la fonction coût ((e64)-(e66)-(e76)) est de l'ordre de 0.9.

Bien entendu d'autres scenarii pourraient être définis pour rendre le modèle nodal déduit toujours plus faiblement dépendant des conditions imposées sur ces faces.

On peut considérer que le modèle est encourageant au niveau des températures de jonctions où les erreurs ne dépassent pas 9%. Toutefois la prédiction des températures vues sur les différentes zones « cibles » de la carte est loin d'être satisfaisante.

Celle-ci affecte notablement la représentativité des flux quittant la carte. Ce premier modèle réduit d'une carte électronique, plutôt « simple », apparait prometteur même si de nombreuses incertitudes restent à lever. Le statut actuel peut être comparé aux prédictions d'un modèle « 2R » vis-à-vis de celles d'un modèle « DELPHI », débattu au paragraphe F9.

Ces travaux demeurent confidentiels et ils ne font pas l'objet d'une dissémination externe.

Le processus de réduction des composants électroniques sous une forme nodale a été un travail long et a nécessité plusieurs années pour parfaire la définition du modèle compact telle qu'elle est aujourd'hui.

Pour ce deuxième niveau d'analyse, l'enjeu est de maintenir une bonne précision de calcul des températures de jonction tout en minimisant la complexité des calculs numériques qu'impliquent les simulations de modèles intégrant la constitution, plus ou moins détaillée, du substrat d'une carte.

G12. Industrialisation d'un générateur de modèle pour composant multi-source

En 2016, le prototype d'un générateur destiné aux composants pouvant posséder de multiples puces a été développé en Java. Ce dernier intègre toutes les avancées énumérées dans ce chapitre.

Ainsi, cet outil génère un réseau de résistances thermiques quelle que soit la technologie du composant.

Celui-ci intègre une décomposition automatique des surfaces du composant basée sur une identification sélective de zones isothermes au moyen d'un algorithme génétique. Le processus de création apprend par lui-même à détecter les éléments qui vont constituer le réseau, puis le créer et enfin le teste.

Toutefois cette automatisation a mis en évidence le besoin de minimiser le nombre de scénarii nécessaire à l'obtention de ce modèle comportemental. Une analyse de la représentativité et une classification des scénarii de conditions aux limites DELPHI et JEDEC sont à mener avec pour objectif d'optimiser leur nombre.

En effet, en fonction du nombre de sources de chaleur à distinguer, la multiplication de ces scenarii engendre un coût de calcul numérique très lourd, lequel ne sera qu'exacerbé si l'on envisage la création des modèles temporels.

Les étapes mises en œuvre pour ce nouveau développement sont détaillées au Chapitre IV.

Chapitre IV

Modélisation spatio-temporelle des composants électroniques

Fort de l'expérience acquise sur la modélisation nodale en régime stationnaire concernant des composants complexes à multiples sources de chaleur, la problématique de leur adaptation au domaine temporel est explicitée. La première partie énumère les différentes pratiques pour établir un modèle thermique spatio-temporel, le plus souvent celui-ci est unidirectionnel, d'une source de chaleur vers un puits. Puis, dans un deuxième temps, une description des évolutions proposées pour étendre le spectre d'applicabilité à la méthodologie DELPHI est explicitée.

Contenu

H. Établissement d'un modèle nodal temporel 113

H1. Élaboration analytique simplifiée d'un réseau temporel 113
H2. Construction numérique d'un réseau temporel 117
H3. L'apport de l'analogie électrique pour la construction d'un réseau temporel 119
H4. Forme généralisée d'un réseau temporel unidirectionnel 121
H5. L'analyse fréquentielle 121
H6. Les formes conventionnelles des réseaux RC unidirectionnels 122
H6.1. Réseau parallèle dit de « Cauer » 122
H6.2. Réseau dit de « Foster » 123
H7. Recombinaison des réseaux 132
H8. Reconstruction physique des réseaux RC unidirectionnels 133
H9. La réduction d'ordre des réseaux RC unidirectionnels 134
H10. Manipulation des réseaux RC : l'emploi des quadripôles 141
H11. Reconstruction numérique des réponses temporelles 145
H12. L'utilisation des méthodes d'optimisation stochastique 146
H13. Réduction de modèle à multiples entrées et à multiples sorties 148
H13.1. Méthodes d'approximation basées sur la correspondance des moments 149
H13.2. Méthodes d'approximation des modes 151
H14. Concepts préexistants de création d'un réseau nodal multidirectionnel 153
H15. Constat sur l'état de l'art des modèles nodaux dynamiques 154

I. Au-delà de la méthodologie DELPHI 155

I1. Mise en œuvre d'un réseau multidirectionnel temporel 155
I2. Pertinence des algorithmes génétiques pour la génération de réseaux RC 157

I3. Des modèles dynamiques destinés aux composants intégrant deux puces 157
I4. Discussion sur la représentativité des modèles tridimensionnels 158
I5. Des modèles dynamiques pour des composants intégrant de multiples puces 158
I6. Caractérisation d'un module intégrant de multiples composants 159
I7. Caractérisation expérimentale de modules intégrant de multiples puces 161
I7.1. Mise en œuvre d'un protocole de test 161
I7.2. Apport à la création de modèles thermiques dynamiques 165
J. Rétrospective des avancées et des verrous à lever 166
J1. Nouvelles méthodologies mises en œuvre 166
J2. Énoncé des verrous scientifiques restant à lever 166

H. ÉTABLISSEMENT D'UN MODELE NODAL TEMPOREL

H1. Élaboration analytique simplifiée d'un réseau temporel

Le comportement thermique temporel d'un composant en phase de préconception est la plupart du temps modélisé sous la forme d'un couplage en série d'un ensemble de cellules élémentaires dites RC.

Le réseau créé traduit un transfert thermique unidirectionnel d'une source de chaleur vers un puits thermique dont la température est supposée constante (Dirichlet). Cette approximation établit le postulat que l'intégralité de la chaleur dissipée passe successivement au travers des divers constituants de la structure, lesquels vont stocker puis transmettre celle-ci en fonction de la nature de leur matériau et de la qualité du contact à leur interface.

La Figure 105 dépeint la correspondance effectuée entre une structure physique et son modèle thermique sous une forme nodale.

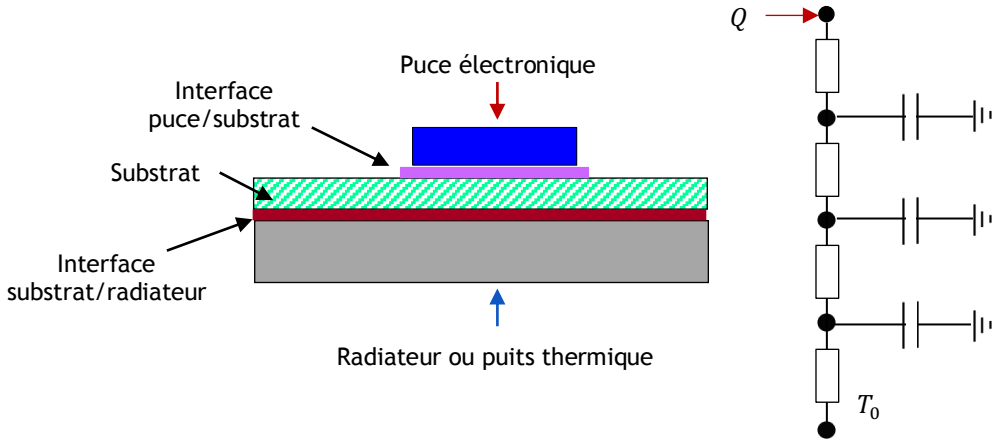


Figure 105 : Empilage typique d'une structure de refroidissement

Le transfert de chaleur est schématisé sous la forme d'une succession de résistances et de capacités.

Comme illustré aux paragraphes F1 et F4, l'intérêt de cette représentation est de pourvoir transposer au domaine thermique l'ensemble des expressions définissant l'impédance (Z_i) ou l'admittance ($Y_i = 1/Z_i$).

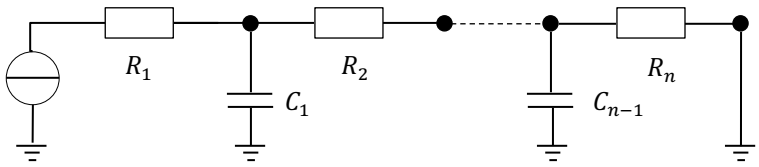


Figure 106 : Schématisation du transfert électrique d'un signal

La construction du réseau du système peut être conçue au moyen d'une approche purement analytique, laquelle a été illustrée en annexe P3.

Toutefois, cette approche cumulative est dépendante de la connaissance des angles de diffusion de la chaleur au sein d'un matériau, c'est sa principale contrainte. Dans la plupart des cas pratiques, les auteurs font l'hypothèse d'un angle égal à 45° [R43].

Une fois l'angle connu, il est possible de définir la résistance thermique (R_i) d'une pyramide tronquée (e12) ainsi que la valeur de sa capacité calorifique (C_i).

L'exemple pour une source de forme carrée est donné ci-dessous ($L_1 = W_1$ & $L_2 = W_2$).

$$C_i = \rho_i \, Cp_i \, V_i \quad avec \; V = \frac{H}{3}\left[{L_1}^2 + L_1 \, L_2 + {L_2}^2\right] \; où \; L_2 = 2 \, H \, tg(45) \tag{e78}$$

Pour ce cas particulier, une quantification plus précise de l'angle de diffusion de la chaleur est proposée par An [R38], laquelle est reprise ci-dessous.

$$\alpha = \begin{cases} 5.86 \, ln[H/As] + 40.4 & H/As \leq 1 \\ 46.45 - 6.048 \, [H/As]^{-0.969} & H/As > 1 \end{cases} \tag{e79}$$

Le paramètre As est la surface de la source de chaleur fictive entre deux éléments adjacents comme l'indique la Figure 107. L'une des deux expressions suggérées par cet auteur traite du cas où l'angle de diffusion est contraint par les bords du domaine.

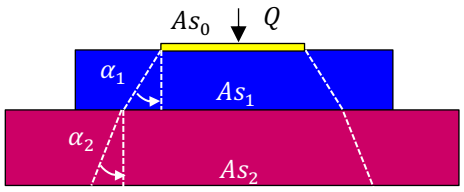


Figure 107 : Schématisation de la juxtaposition des angles de diffusion au sein d'une structure

Pour établir une corrélation propre à un cas spécifique, d'autres auteurs conseillent d'exploiter les données extraites d'un modèle analytique ou numérique. Le cas d'une source circulaire sur un substrat parallélépipédique est exposé sur la Figure 108.

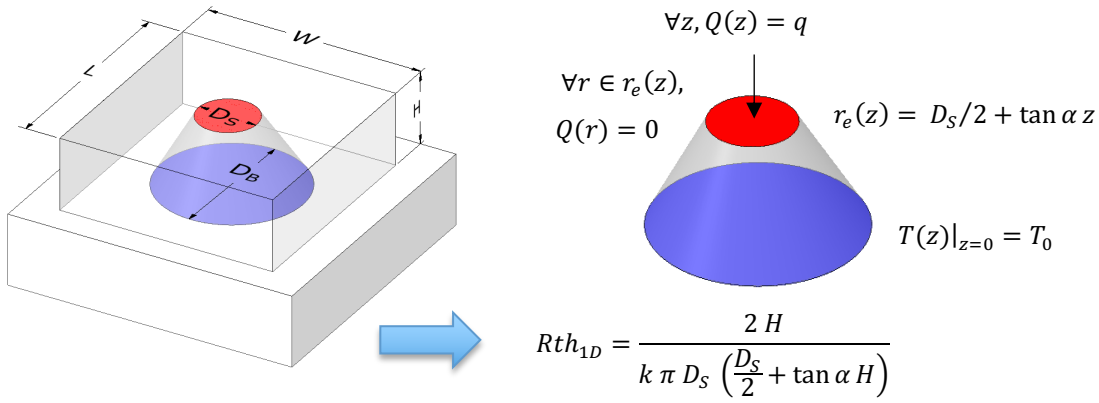


Figure 108 : Représentation de l'approximation recherchée

La démarche vise à déterminer une relation capable d'évaluer analytiquement l'angle de diffusion, ceci quelles que soient la taille du substrat et celle de la source de chaleur.

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{2 \, f}{k \, H \, \theta_{3D}(xc, yc, zc)/qs} - \frac{1}{2 \, \pi \, f}\right) \; avec \; f = H/(\pi \, D_S) \tag{e80}$$

Les coordonnées du gradient (xc, yc, zc) correspondent au centre de celle-ci.

Le facteur adimensionnel f est un paramètre géométrique relatif au périmètre de la source de chaleur.

Pour des formes simples, la démarche s'appuie sur la résolution de l'équation de la chaleur tridimensionnelle pour un milieu isotrope homogène.

Sa résolution en stationnaire par la méthode de séparation de variable sera explicitée dans une autre partie de cette thèse.

Le modèle est établi en considérant un jeu de conditions thermiques sur ces frontières, comme l'illustre la Figure 109. Ces hypothèses déterminent le domaine de validité du modèle.

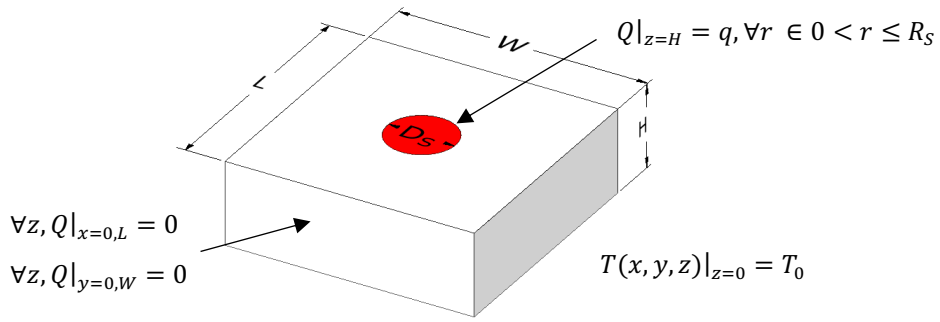


Figure 109 : Définition des conditions aux limites appliquées au modèle analytique 3D

L'expression tridimensionnelle de la température de cette source est reprise ci-dessous :

$$\theta_{3D}(x,y,z) = \frac{4\,qs}{L\,W\,k}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\frac{A_m\,B_n\,\omega_{m,n}(z)}{(\delta_m+1)\,(\delta_n+1)}\,cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,cos\left(\frac{n\,\pi}{W}\,y\right) \quad \text{(e81)}$$

$$\omega_{m,n}(z) = \left[\frac{1-e^{-2z\,r_{m,n}}}{r_{m,n}+\delta_m\,\delta_n}+2z\,\delta_m\,\delta_n\right]/[k\,(1+e^{-2\cdot z\cdot r_{m,n}})] \quad o\grave{u}\ r_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{m\,\pi}{Lb}\right)^2+\left(\frac{n\,\pi}{Wb}\right)^2} \quad \text{(e82)}$$

$$et\ A_m\,B_n = cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\,xc\right)\,cos\left(\frac{n\,\pi}{W}\,yc\right)\left[J_2\left(\frac{D_S}{2}\,r_{m,n}\right)+J_0\left(\frac{D_S}{2}\,r_{m,n}\right)\right] \quad \text{(e83)}$$

Les termes J_2 and J_0 sont des fonctions dites de Bessel de première espèce.

L'identification de l'angle de diffusion est calculée sous la forme :

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{2f}{H\,\psi_{3D}}-\frac{1}{2\pi\,f}\right) \quad \text{(e84)}$$

$$avec\ \ \psi_{3D} = \frac{2}{L\,W}\sum_{m=0}^{M/2}\sum_{n=0}^{N/2}\frac{J_2(\,Ds\,r_{m,n})+J_0(Ds\,r_{m,n})}{(\delta_m+1)\cdot(\delta_n+1)}\,\omega_{m,n} \quad \text{(e85)}$$

$$et\ \ \omega_{m,n} = \left(\frac{1-e^{-4H\,r_{m,n}}}{r_{m,n}+\delta_m\,\delta_n}+4H\,\delta_m\,\delta_n\right)/[1+e^{-4\cdot H\cdot r_{m,n}}] \quad \text{(e86)}$$

Cette formulation démontre que la valeur de l'angle est indépendante de la conductivité thermique du matériau dans le cas où une condition de première espèce est imposée à la base du matériau.

Cette approche offre la capacité de déduire des corrélations reliant la géométrie étudiée à l'angle de diffusion.

$$\alpha = exp(3.806-0.066\,f^{-1}-0.004\,f^{-2}) \quad pour\ f \leq \frac{1}{4\pi}\left(\frac{L}{Ds}-1\right) \quad \text{(e87)}$$

$$o\grave{u}\ \alpha = 41.699-\frac{2.592}{f}-\frac{0.036}{f^2}+\frac{0.005}{f^3} \quad \text{(e88)}$$

Les coefficients de corrélation $\hat{r}$ sont de l'ordre 0.99999974. Sa définition est donnée en P11.

Il est intéressant de vérifier la pertinence du choix d'un angle de diffusion à 45°.

La Figure 110 révéle que cette hypothèse simplificatrice n'est pas toujours judicieuse.

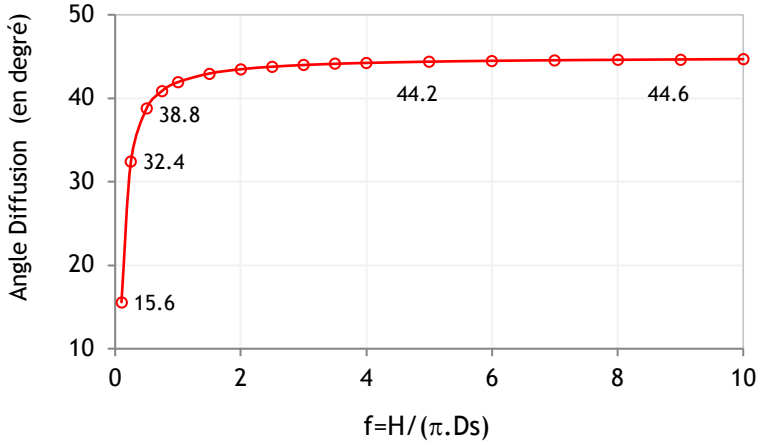


Figure 110 : Visualisation de l'évolution de l'angle de diffusion pour diverses géométries

Cependant, il n'est pas toujours aisé de résoudre l'équation de la chaleur. Aussi, les gradients thermiques nécessaires à l'identification des corrélations peuvent provenir d'une simulation numérique.

La Figure 111 démontre que la modélisation analytique à partir d'un modèle 1D est bien en adéquation avec les résultats fournis par les modèles analytique ou numérique 3D.

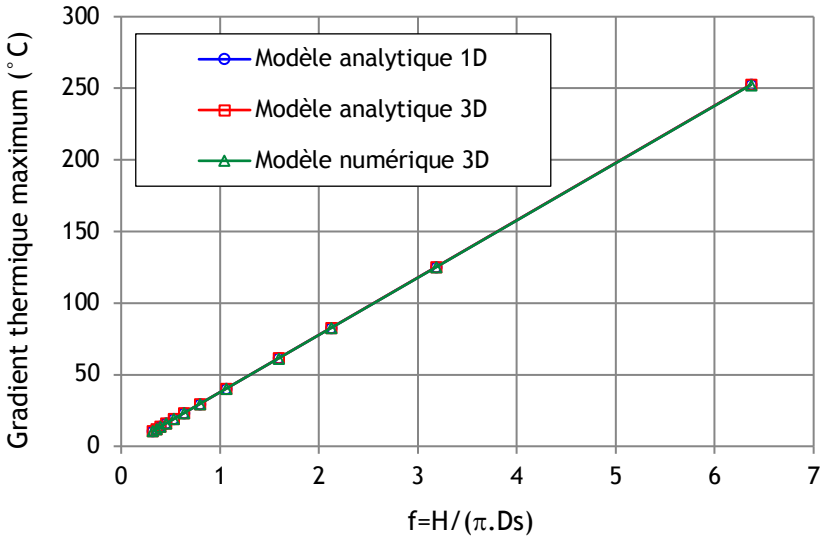


Figure 111 : Comparaison des prédictions des trois approches de modélisation

Le cas étudié décrit le comportement d'une source de chaleur quelconque de 10W monté sur un substrat ayant les dimensions et la propriété thermique suivantes : L=W=25mm, H=5mm et k=100W m^{-1} K^{-1}.

Un exercice similaire donne pour une source carrée l'expression et le domaine de validité suivants :

$$\alpha = exp(3.731 - 0.062\, f^{-1} - 0.003\, f^{-2}) \quad pour \;\; f \leq \frac{1}{16}\left(\frac{L}{Ls} - 1\right) \qquad \text{(e89)}$$

L'applicabilité de ces formulations est restreinte au cas d'une condition de Dirichlet.

Les travaux de Koito [R45] révèlent l'influence d'une condition de 3eme espèce sur l'angle de diffusion.

Cet auteur démontre qu'il est indispensable de tenir compte de la valeur du coefficient d'échange thermique dans l'expression de l'angle de diffusion.

La Figure 112 souligne l'impact d'une condition de Fourier appliquée sur l'embase d'un substrat parallélépipédique échauffé par une source circulaire.

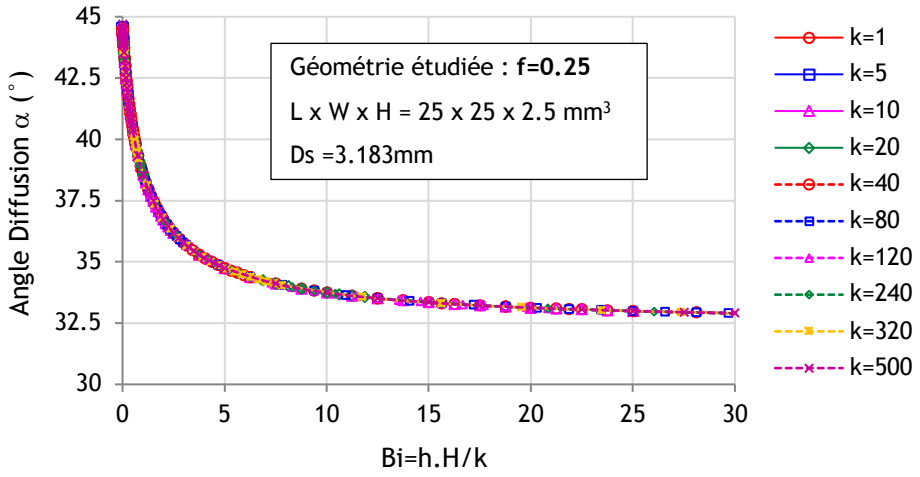


Figure 112 : Evolution de l'angle de diffusion en fonction du nombre de Biot

Là encore, l'angle de diffusion n'est pas toujours égal à 45°.

Plusieurs autres configurations géométriques sont fournies en annexe P11.

Naturellement, lorsque le nombre de Biot est très grand (h=10^9W m^{-2} K^{-1}), la solution tend vers une condition de Dirichlet, dès lors les formulations (e87) et (e88) sont pleinement applicables.

Si la méthode de création du modèle parait simple, le nombre de cellules RC nécessaire pour modéliser judicieusement l'empilage d'une structure de refroidissement reste à définir par le concepteur.

Bien entendu, cette modélisation est loin d'être rigoureuse en particulier l'hypothèse d'une condition de flux uniforme à chaque interface intermétallique. En fait, pour appréhender correctement l'influence du rapport des conductivités thermiques des divers éléments superposés, ceux-ci ne peuvent être dissociés.

Le cas d'une structure cylindrique composée de deux couches (Figure 107) a été débattu par Yovanovicth [R46]. Ce dernier définit la résistance thermique monodimensionnelle d'un assemblage par l'expression :

$$Rth_{1D} = \frac{4}{\pi}\frac{D_S}{D}\left[\frac{H_1}{D} + \frac{k_1}{k_2}\frac{H_2}{D} + \frac{1}{Bi}\right] \qquad \text{(e90)}$$

Cette approche attrayante par sa simplicité s'avère vite erronée quant à la justesse de ses prédictions.

H2. Construction numérique d'un réseau temporel

Un modèle numérique de type éléments finis est le plus souvent créé pour connaitre l'évolution des températures à différents points de la structure à modéliser sous une forme nodale.

Celles-ci sont exploitées pour déterminer les valeurs des résistances et des capacités propres à chacun des échelons représentés en Figure 106. Un exemple décrivant le cas d'un module électronique est explicité dans la thèse de Habra [R38], celui se base sur la méthode de retard d'Elmore.

Les étapes du processus de création d'un modèle nodal par cette méthode sont détaillées ci-après.

Celles-ci ont été synthétisées lors des travaux de Yun [R47]. Ce dernier a initié le concept d'un modèle unidirectionnel qu'il dénomme « RC Component Model », ou RCCM, puis l'a appliqué à un module IGBT.

Les variations temporelles des températures sont exploitées pour faire apparaître les impédances thermiques propres à chacune des couches observées.

$$Z_i(t) = [\,T_i(t) - T_{i+1}(t)\,]/Q \;\; avec\; T_n(t) = T_0 \qquad \text{(e91)}$$

On note que la connaissance précise du flux Q est un prérequis à l'élaboration du réseau.

Ainsi, la détermination des impédances pose la question de la puissance à considérer. Faut-il considérer celle appliquée à la surface de la puce, ici 0.5W, ou bien celle réellement évacuée par la plateforme, dans ce cas 0.488W. La différence dénote qu'en pratique les broches de connexions participent au transfert de la chaleur vers le puits thermique.

Manifestement, les données issues de cette méthode doivent être prises avec circonspection dans le cas d'un composant électronique.

La Figure 113 expose les trois réponses obtenues pour le cas du QFN16 (Figure 73) lorsqu'une condition de Dirichlet est imposée à son embase et que les autres surfaces sont supposées adiabatiques.

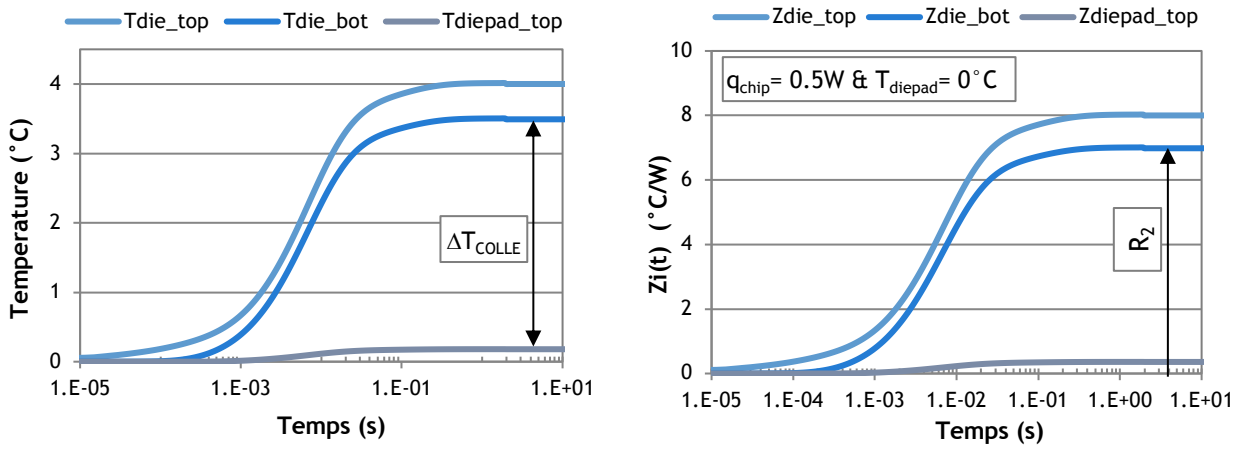


Figure 113 : Evolution temporelle des températures internes d'un composant électronique

Le pas temps initial est calculé sur la base de la plus petite maille et de ses propriétés thermiques.

$$\Delta t = \Delta L^2/(4\,a) \;\; o\grave{u}\; a = k/\left(\rho\, C_p\right) \tag{e92}$$

Cette contrainte de calcul est ensuite relâchée lorsque les gradients mis en jeu sont plus faibles.

$$\Delta t = ln\,[a\,(T_{t-1} - T_0) + 1]/(T_{t-1} - T_0) \tag{e93}$$

Le graphe à droite montre que le principal frein au transfert thermique est la présence d'un joint de colle entre la puce et la plateforme l'accueillant. La réponse à gauche est normalisée pour que l'ensemble des évolutions soit compris entre 0 et 1.

$$y_i(t) = Z_i(t)/R_i \;\; avec\; R_i = \; Z_i(t)|_{t\to\infty} \tag{e94}$$

La stabilisation des profils thermiques fournit la connaissance des n valeurs des résistances thermiques du réseau RC recherché. L'étape finale consiste à déterminer les valeurs des capacités thermiques.

Pour cela, les temps de retard d'Elmore (E_i) propres à chacune des couches sont calculés à partir de l'intégration suivante :

$$E_i = \int_0^\infty t\,\frac{dy_i(t)}{dt}\,dt \;\; ou \;\; E_i = \int_0^\infty \left(1 - y_i(t)\right) dt \tag{e95}$$

A un instant donné, l'expression de ces temps est reliée aux capacités par la formulation :

$$\tau_i = E_i - E_{i-1} = C_i \sum_{j=i}^{n} R_j \;\; avec\; E_0 = 0 \;\rightarrow\; C_i = \left[E_i - E_{i-1}\right] \Big/ \sum_{j=i}^{n} R_j \tag{e96}$$

Chacun des profils est modélisé par une seule cellule RC, ayant pour représentation mathématique une fonction exponentielle. Son intégrale doit être identique à la réponse réelle, un point souvent difficile à satisfaire, comme il sera vu dans les paragraphes suivants.

Pour juger de la qualité de cette méthode d'extraction des capacités, il est judicieux de partir d'un réseau RC unidirectionnel connu afin de vérifier si les capacités thermiques du modèle originel sont correctement identifiées. Cette méthode d'investigation a déjà été illustrée au paragraphe F6.

La Table 53 fournit une comparaison des résistances et des capacités déduites par la méthode d'Elmore.

Table 53 : Reconstruction d'un réseau RC unidirectionnel à partir des délais d'Elmore

Réseau RC	R_g	C_g	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3
3 cellules - 0riginale	46.355	0.0117	33.363	0.013	10.501	0.128	2.49	1.663
3 cellules - Elmore	46.354	0.0117	33.363	0.013	10.501	0.128	2.49	1.6627

Les trois cellules sont bien retrouvées, ceci démontre l'intérêt de cette approche si l'hypothèse d'un flux unidirectionnel est respectée.

Évidemment, cette identification est liée à l'accès à l'évolution temporelle de plusieurs niveaux de température du système que l'on souhaite représenter sous une forme nodale.

H3. L'apport de l'analogie électrique pour la construction d'un réseau temporel

La création d'un réseau nodal unidirectionnel, traduisant le comportement temporel d'un système, s'inspire initialement des travaux effectués dans le domaine électrique.

Ainsi, les méthodes appliquées aux réseaux électriques telles que les lois de Kirchhoff sur les nœuds et sur les mailles s'avèrent très utiles pour interpréter le comportement de systèmes thermiques.

Un exemple simple de réseau est explicité ci-après.

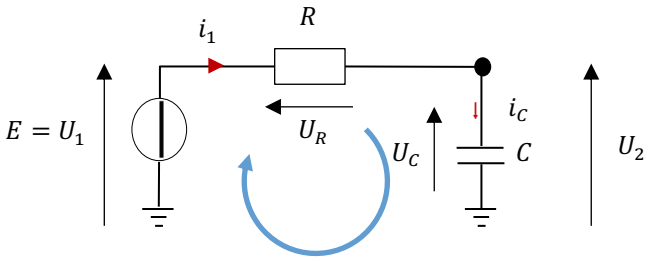


Figure 114 : Principe de la loi des mailles de Kirchhoff

En accord avec ces lois, la somme des courants d'un nœud ou des tensions d'une maille est toujours nulle.

Loi des nœuds

$$i_1 = i_c = C\,\frac{dU_C}{dt} = C\,\frac{dU_2}{dt}$$

Loi des mailles

$$U_1 = U_R + U_C \quad avec\ U_R = i_1\,R\ et\ U_C = U_2 \qquad \text{(e97)}$$

En groupant ces deux expressions, l'équation différentielle ordinaire (EDO) dans le domaine temporel pour ce circuit élémentaire a la forme linéaire suivante :

$$\begin{cases} U_1(t) = [C\ dU_C(t)/dt]\,R + U_C(t) \\ U_2(t) = U_C(t) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} U_1(t) = \tau\ dU_C(t)/dt + U_C(t) \\ U_2(t) = U_C(t) \end{cases} \quad avec\ \tau = R\,C \qquad \text{(e98)}$$

Pour s'affranchir du domaine temporel, cette fonction causale ($U_C(t) = 0\ sur\ ]-\infty, 0[$) est retranscrite dans le domaine de Laplace.

On se fonde sur le calcul symbolique inventé par Oliver Heaviside (1880).

$$\mathcal{L}\{U_i(t)\} = V_i(p)\ ;\ \mathcal{L}\{U_C(t)\} = V_C(p)\ \ et\ \ \mathcal{L}\left\{\frac{dU_C(t)}{dt}\right\} = p\,V_C(p) \tag{e99}$$

$$\Sigma = \begin{cases} V_1(p) = \tau\, p\, V_C(p) + V_C(p) \\ V_2(p) = V_C(p) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1(p) = [\,\tau\, p + 1\,]\, V_C(p) \\ V_2(p) = V_C(p) \end{cases} \tag{e100}$$

Où $V_1(p), V_2(p)$ et $V_C(p)$ désignent les transformées de Laplace du système. La fonction $\mathrm{V_2(p)}$ correspond au paramètre à observer. Celle-ci se réfère indifféremment à la tension (U_C) ou au courant de sortie (i_C).

L'élimination de $\mathrm{V_C(p)}$ fournit la fonction rationnelle décrivant mathématiquement la réponse du système.

$$Z(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{1}{1 + \tau\, p} = \frac{a_0}{b_0 + b_1\, p} \tag{e101}$$

La tension de sortie $V_2(p)$ dépend de la forme du signal imposée à l'entrée $V_1(p)$.

$$V_2(p) = Z_2(p)\, i_1\ \rightarrow\ Z_2(p) = V_2(p)/i_1 = 1/C\, p \tag{e102}$$

Si l'application de la tension est instantanée et invariante, on applique une fonction Heaviside.

$$\Gamma(t) = 1\ \ \forall\ \ t \in [0, +\infty[\ \ \ avec\ \ F(p) = \int_0^{+\infty} \Gamma(t)\, e^{-p\cdot t}\, dt = 1/p \tag{e103}$$

La forme de la fonction de transfert pour un échelon unitaire pour une amplitude égale à E s'écrit :

$$V_2(p) = Z(p)\, V_1(p) = \left[\frac{1}{1 + \tau\, p}\right]\frac{E}{p} = \left[\frac{a_0}{b_0 + b_1\, p}\right]\frac{E}{p} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{e104}$$

Le retour au domaine temporel se fait par une transformée inverse en décomposant la fonction rationnelle en une somme de fractions simples. C'est la deuxième règle de Heaviside, laquelle impose que le degré du polynôme du numérateur $N(p)$ soit supérieur au degré du dénominateur.

Il en découle la recherche deux fractions ayant des racines distinctes ($p \neq 0, p \neq -\tau^{-1}$).

$$V_2(p) = E\left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau\, p}\right] \rightarrow V_2(p) = E\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau^{-1} + p}\right] \tag{e105}$$

Cette forme rend l'identification des transformées inverses de Laplace plus aisée et l'écriture de la tension de sortie dans le domaine temporel est immédiate.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1\ \ et\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\tau^{-1} + p}\right\} = e^{-t/\tau} \tag{e106}$$

$$V_2(t) = E\,\Gamma(t)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{e107}$$

Cette démarche expose les différentes étapes inhérentes à la formulation des états d'un système unidirectionnel capable de prédire son comportement en réponse à une entrée donnée, ici un échelon unitaire.

Elle met en lumière la mise en œuvre des transformées de Laplace pour l'analyse d'un système simple et l'emploi des transformées inverses pour revenir dans l'espace temporel, un exercice souvent laborieux. En effet, il n'est pas toujours facile de déduire une solution purement analytique et le recours à une inversion numérique est fréquemment nécessaire.

Les techniques les plus référencées sont les méthodes de Gaver-Stehfest, de Zakian ou de Fourier. Une

comparaison de leur performance respective est explicitée par Hassanzadeh [R48] pour plusieurs fonctions connues. Une application pratique de la méthode de Gaver-Stehfest est donnée au paragraphe H11.

H4. Forme généralisée d'un réseau temporel unidirectionnel

De nombreuses analyses électriques ou thermiques s'appuient sur des modèles dits mono-entrée/mono-sortie, en anglais Single-Input/Single-Output (SISO). Celui-ci va retranscrire le comportement de variables de sortie du système au cours du temps en fonction de la définition d'une condition d'entrée.

Il en découle que seule la température en quelques points sensibles du système est observée.

Ce système linéaire est généralisable sous la forme d'équations différentielles ordinaires :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{C}\ \dfrac{dT(t)}{dt} = -\,\boldsymbol{G}\ T(t) + \boldsymbol{B}\ Q(t) & \text{équation d'état} \\ q(t) = \boldsymbol{G_e}^{\boldsymbol{T}}\ T(t) & \text{équation des sorties (les flux dans ce cas)} \end{cases} \tag{e108}$$

Les matrices $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{G}$ correspondent respectivement à la matrice d'inertie thermique (masse en anglais Mass) et la matrice des conductances (raideur en anglais Stiffness), leur taille dépend de l'ordre du système et leurs coefficients sont constants dans le temps.

La matrice $\boldsymbol{G_e}$ est la matrice des échanges externes**.** Le vecteur $T(t)$ représente la température en tout point du réseau à l'instant t. Le vecteur $Q(t)$ correspond à la puissance imposée à un nœud du système.

Ces deux vecteurs sont généralement désignés dans la littérature par les notations $\boldsymbol{X}(t)$ et $\boldsymbol{U}(t)$. Les observables ou sorties du modèle sont quant à elles décrites sous la forme d'un vecteur dénommé $\boldsymbol{Y}(t)$.

Comme évoqué, la définition de la fonction de transfert est étudiée dans le domaine de Laplace, ainsi :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) + \ \boldsymbol{G}\ X(p) = \boldsymbol{B}\ U(p) \\ Y(p) = \boldsymbol{A^T}\ X(p) \end{cases} \rightarrow\ Z(p) = Y(p)/U(p) = \ \boldsymbol{A^T}\ (\ \boldsymbol{C}\ p + \boldsymbol{G}\ )^{-1}\ \boldsymbol{B} \tag{e109}$$

Pour un réseau SISO, le système se réduit sous une forme rationnelle dépendant du nombre de cellules.

$$Z(p) = Y(p)/U(p) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i\ p^i) \Big/ \sum_{i=0}^{n}(b_i\ p^i) = \frac{a_0 + \cdots + a_i\ p^i + \cdots + a_{n-1}\ p^{n-1}}{b_0 + \cdots + b_i\ p^i + \cdots + b_n\ p^n} \tag{e110}$$

Si celui-ci équivaut à 3 ($n = 3$), sa fonction de transfert sous forme matricielle est définie par :

$$Z_3(p) = \boldsymbol{A^T}\ (\ \boldsymbol{C}\ p + \boldsymbol{G}\ )^{-1}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{e111}$$

H5. L'analyse fréquentielle

Les signaux électroniques sont généralement périodiques aussi l'analyse de leur comportement est souvent menée dans le domaine fréquentiel.

La forme complexe de l'impédance $Z\ (j\omega)$ est alors substituée à celle de Laplace $\boldsymbol{Z}\ (p)$ et la pulsation devient le paramètre variable ($\omega = 2\pi\ f$). Plusieurs auteurs ont appliqué cette solution à l'équation de la chaleur de manière à évaluer l'impédance thermique de diverses structures ayant une forme parallélépipédique ou cylindrique.

Celle-ci a été débattue, par exemple, dans la thèse de Vintrou [R49]. Celui-ci s'appuie sur les diagrammes dits de Nyquist pour visualiser l'influence de plusieures conditions de 3eme espèce imposées à l'embase d'un empilage de couches parallélépipédiques dont les dimensions sont finies.

De plus, ces travaux traitent de la prise en compte de multiples sources de chaleur surfaciques, un cas éminemment pratique également commenté dans la thèse de Dia [55].

H6. Les formes conventionnelles des réseaux RC unidirectionnels

Comme illustré au paragraphe H2, les paramètres d'un réseau SISO sont fréquemment ajustés au moyen d'une simulation numérique mais d'autres approches exploitent elles les données issues de l'expérimentation. Il s'agit dans ce dernier cas d'identifier des paramètres d'une relation connue ou présumée, ceci à partir du comportement que l'on est mesure d'observer.

En fait, ces deux démarches prédéterminent la structure du réseau retenue pour sa modélisation. Son graphe est représenté soit sous la forme d'un réseau parallèle, dit de Cauer, soit sous celle d'un réseau série, dit de Foster. Les spécificités propres à ces deux réseaux sont successivement présentées.

H6.1. Réseau parallèle dit de « Cauer »

Les approches employées pour concevoir ce type réseau ont été exposées aux paragraphes H1 et H2. La forme de ce réseau est explicitée en Figure 106.

Il en résulte que l'impédance du système est modélisée sous la forme d'une fraction continue alternant un jeu d'impédance et d'admittance.

$$Z(p) = Z_0 + \cfrac{1}{Y_{1,1} + \cfrac{1}{Z_{1,2} + \cfrac{1}{Y_{2,1} + \cfrac{1}{Z_{2,1} + \cdots}}}} \qquad \text{(e112)}$$

La Figure 115 décrit l'agencement des éléments d'un circuit possédant deux cellules, lorsque l'impédance Z_0 en amont de l'admittance $Y_{1,1}$ est supposée nulle.

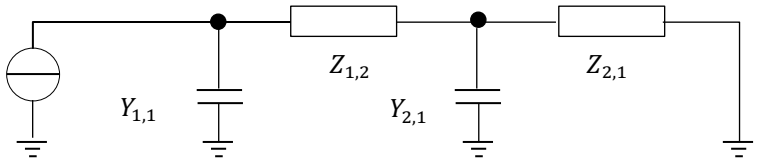


Figure 115 : Schématisation d'un réseau Cauer à 2 cellules

La définition symbolique des éléments du circuit est effectuée sur la base des éléments suivants :

- Résistance : $Z_i(p) = R_i \longrightarrow Y_i(p) = 1/R_i$
- Capacité (e102): $Z_i(p) = 1/(p\ C_i) \longrightarrow Y_i(p) = p\ C_i$

Sa formulation analytique ci-dessous met en exergue la difficulté à manipuler l'imbrication des cellules.

$$Z_{n=2}(p) = \cfrac{1}{p\ C_1 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{p\ C_2 + \cfrac{1}{R_2}}}} = \frac{R_1 + R_2 + R_1\ R_2\ C_2\ p}{1 + [\ R_1\ C_1 + R_2\ C_2 + R_2\ C_1\ ]\ p + R_1\ R_2\ C_1\ C_2\ p^2} \qquad \text{(e113)}$$

Cette dernière procure les expressions des paramètres a_i et b_i définis dans l'expression (e110).

Table 54 : Expressions des paramètres a_i et b_i d'un réseau de Cauer

Paramètre	a_0	a_1	b_0	b_1	b_2
$n = 2$	$R_1 + R_2$	$R_1\ R_2\ C_2$	1	$R_1\ C_1 + R_2\ C_2 + R_2\ C_1$	$R_1\ R_2\ C_1\ C_2$

Pour des réseaux d'ordre supérieur à 2, on s'appuiera sur le calcul symbolique proposé par les logiciels de mathématiques Mathcad® ou Mathematica®.

Sa résolution pour un réseau à 2 cellules s'inspire de la décomposition en plusieurs fractions rationnelles simples, décrite en (e105), et sur la notion de pôles, tels que p_1 et p_2 ci-dessous :

$$Z(p) = \left[\frac{R_1 + R_2 + R_1\, R_2\, C_2\, p}{(p - p_1)\,(p - p_2)} \right] \qquad \text{(e114)}$$

Ceux-ci correspondent aux racines de la fonction polynomiale d'ordre 2 du dénominateur :

$$p_1 = \left[-(\tau_1 + \tau_2 + R_2\, C_1) - \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + R_2\, C_1)^2 - 4\,\tau_1\,\tau_2} \right] / [\,2\,\tau_1\,\tau_2]$$
$$p_2 = \left[-(\tau_1 + \tau_2 + R_2\, C_1) + \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + R_2\, C_1)^2 - 4\,\tau_1\,\tau_2} \right] / [\,2\,\tau_1\,\tau_2] \qquad \text{(e115)}$$

Réécrite sous la forme d'une somme de fractions simples, la fonction déduite facilite le retour dans le domaine de temporel au moyen de transformées inverses de Laplace usuelles.

La multiplication par un échelon unitaire $(1/p)$ fournit l'expression suivante de la réponse temporelle d'un réseau de Cauer à 2 cellules :

$$Z(t) = (R_1 + R_2)\left[1 + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(p_2\, e^{t\,p_1} - p_1\, e^{t\,p_2} + \frac{1}{(R_1 + R_2)\, C_1} \cdot (e^{t\,p_1} - e^{t\,p_2}) \right) \right] \qquad \text{(e116)}$$

Il est clair que la résolution d'un polynôme d'ordre supérieur rend l'écriture de ces expressions très vite rébarbative. L'utilisation d'un logiciel de calcul de réseau tel que Spice® est une alternative pratique à l'analyse d'un réseau plus complexe.

H6.2. Réseau dit de « Foster »

L'emploi de cette forme de réseau dit « série » s'avère plus pratique pour identifier les paramètres d'un modèle capable de reproduire la réponse d'un équipement à partir de sa mesure.

Le réseau associe un ensemble de cellules disposant d'une résistance et d'une capacité en parallèle.

La forme d'une cellule élémentaire, encadrée en rouge, est schématisée en Figure 116.

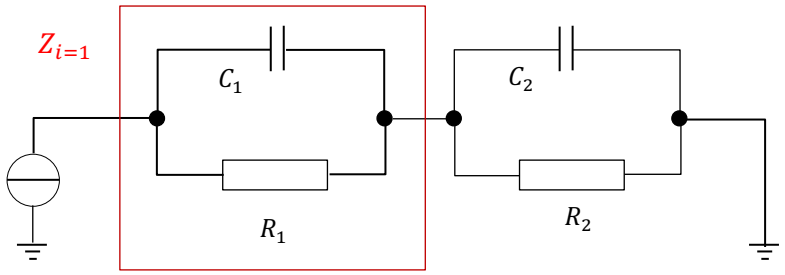


Figure 116 : Schématisation d'un réseau de type Foster à 2 cellules

Dans le domaine Laplace, son impédance a pour expression :

$$Z_i(p) = \left[\, Y_{i,1} + Y_{i,2} \,\right]^{-1} = [\,1/R_i + p\, C_i\,]^{-1} = R_i/[\,1 + p\, R_i\, C_i\,] = R_i/[\,1 + p\,\tau_i\,] \qquad \text{(e117)}$$

La réponse du système est obtenue en sommant les cellules, ainsi pour 2 cellules (annexe P13) :

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p) = \frac{R_1}{1 + p\, C_1 R_1} + \frac{R_2}{1 + p\, C_2\, R_2} = \frac{R_1 + R_2 + R_1\, R_2\, [C_1 + C_2]\, p}{1 + [\,R_1\, C_1 + R_2\, C_2\,]\, p + R_1\, R_2\, C_2\, C_1\, p^2} \qquad \text{(e118)}$$

Dans le domaine temporel cette expression est généralisée pour une réponse à un échelon unitaire sous la forme :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i \left[1 - exp(-t/R_i\, C_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} R_i \left[1 - exp(-t/\tau_i)\right] \quad \text{(e119)}$$

Ainsi, l'impédance $Z(t)$ du système quelconque est déduite de la superposition de fonctions exponentielles d'amplitude R_i dont la forme dépendant d'une constante de temps τ_i.

Cette forme condensée montre l'attrait porté à ce type de réseau.

L'interprétation mathématique de la réponse d'un système dépend de la granularité souhaitée pour le représenter avec réalisme. Un exemple est commenté dans Thèse Cheikh DIA (Figure 62, [55]). Celui-ci démontre que le nombre de cellules pour un ajustement adéquat, doit être supérieur ou égal à 3.

La Table 55 montre la variabilité de l'ajustement obtenu, à partir du logiciel Tablecurve®, en fonction du nombre de cellules.

Table 55 : Décomposition de la réponse temporelle d'un composant DFN12

Réseau Foster	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3	R_4	C_4	$\hat{r}$
1 cellule	45.458	0.0201	-	-	-	-	-	-	0.9579
2 cellules	31.999	0.0151	14.772	0.1888	-	-	-	-	0.9987
3 cellules	16.073	0.0849	6.236	0.7477	24.046	0.0160	-	-	0.9992
4 cellules	6.029	0.0783	15.658	0.0904	14.012	0.0288	10.656	0.0354	0.9925

Ces valeurs ont été corroborées sous le logiciel Mathcad®, à partir d'une approche itérative sur basée l'algorithme de Gauss-Newton. Les paramètres du réseau ont été ajustés pour minimiser l'expression :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(z_j - \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left[1 - exp\left(-\omega_{i+1}\, t_j\right)\right] \right)^2 = \left\| Z - \hat{Z} \right\|^2 \quad \text{(e120)}$$

Cette équation quadratique possède une solution exacte, telle que

$$\Delta E(W) = -\left(J_\varepsilon{}^T J_\varepsilon\right)^{-1} J_\varepsilon{}^T \left(Z - \hat{Z}\right) \quad \text{(e121)}$$

Où le terme *J* correspond à la matrice Jacobienne, laquelle regroupe les dérivées partielles du premier ordre des inconnues ω du réseau à rechercher.

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega_2} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega_n} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \omega_2} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \omega_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \omega_2} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \omega_n} \end{bmatrix} \quad si\ n = 2 \rightarrow J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 - exp\left(-\omega_2\, x_1\right) & \omega_1\, x_1\, exp\left(-\omega_2\, x_1\right) \\ 1 - exp\left(-\omega_2\, x_2\right) & \omega_1\, x_2\, exp\left(-\omega_2\, x_2\right) \\ \vdots & \vdots \\ 1 - exp\left(-\omega_2\, x_m\right) & \omega_1\, x_m\, exp\left(-\omega_2\, x_m\right) \end{bmatrix} \quad \text{(e122)}$$

Il en découle que :

$$W^{<k+1>} = W^{<k>} + \left(J_\varepsilon{}^T J_\varepsilon\right)^{-1} J_\varepsilon{}^T \left(Y - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \omega_i \left[1 - exp\left(-\omega_{i+1}\, x_j\right)\right] \right) \quad \text{(e123)}$$

Clairement la modélisation réalisée au moyen d'une unique cellule ($n = 1$) n'est pas satisfaisante. De plus, si le nombre de cellules est supérieur à 3, les difficultés pour converger efficacement s'accentuent et par conséquent la qualité de la solution diminue.

Il est à noter également que les valeurs ajustées n'ont pas de réalité physique, chaque cellule est échangeable en termes de position, comme l'indique l'étagement des constantes de temps pour des réseaux possédant 3 ou 4 cellules de la Table 56.

Seules les valeurs globales de la résistance et de la capacité sont probantes.

Table 56 : Expression des constantes de temps en secondes d'un composant DFN12

Réseau Foster	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	ΣR	ΣC
1 cellule	0.9137	-	-	-	45.4580	0.0201
2 cellules	0.4832	2.7890	-	-	46.7710	0.0140
3 cellules	1.3646	4.6627	0.3847	-	46.3550	0.0132
4 cellules	0.4721	1.4155	0.4035	0.3772	46.3550	0.0115

D'autre part, l'expérimentation fournit une observation qui est la plupart du temps bruitée, laquelle est source d'erreur. Celle-ci est reliée à une condition d'environnement imposée et à un point pouvant être mesuré. Ce dernier est généralement une interprétation de la température vue par la puce.

Ces aspects sont traités par le standard JEDEC JESD51-14 [R50], lequel propose une reconstruction « plus physique » de l'évolution temporelle de la température d'un composant.

Celle-ci implique une interprétation de la réponse temporelle de la structure à identifier à partir d'un produit de convolution. La convolution introduit l'idée d'une mémoire dans la réponse d'un système.

Ainsi, l'intégrale de convolution relie le signal de sortie $y\ (t)$ à celui-ci de l'entrée $x\ (t)$. Cette dernière est soumise à une réponse impulsionnelle $h\ (t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\ x(t)\ d\tau = h(t) * x(t) \tag{e124}$$

La méthode vise à distinguer les principaux paliers temporels liés au stockage progressif de la chaleur dans la succession de matériaux intercalés entre la source et le puits de refroidissement sous la forme d'un réseau de Foster puis de retranscrire celui-ci par un réseau de Cauer afin d'en déduire les éléments significatifs du réseau.

Comme illustré Figure 116, un réseau de Foster présente l'intérêt de juxtaposer des dipôles ayant $N\tau$ constantes de temps $(\tau_i = R_i\ C_i)$. Ainsi, la réponse du système $Z(t)$ est décomposée en une somme d'impulsion rectangulaire (Dirac) de largeur $\delta\tau$ afin de faire apparaitre les caractéristiques d'un réseau.

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\ [1 - exp(-t/\tau)]\ d\tau \tag{e125}$$

$$Avec\ R(\tau) = \sum_{i=1}^{N\tau} R_i\ \delta(\tau - \tau_i) \tag{e126}$$

La position des constantes de temps (τ_i) et l'amplitude du signal (R_i) à cet instant vont fournir les éléments nécessaires à l'identification des cellules RC du réseau de Foster.

Compte tenu des temps courts à traiter, généralement en deçà de la microseconde, une échelle logarithmique $z_j = ln\ (t_j)$ et $\xi_i = ln\ (\tau_i)$ est naturellement adoptée.

$$Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi)\ [1 - exp(-exp\ (z-\xi))]\ d\xi \tag{e127}$$

$$\frac{dZ(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi)\ [1 - exp((z-\xi) - exp\ (z-\xi))]\ d\xi = R(z) * \dot{W}(z) \tag{e128}$$

$$avec\ \dot{W}(z) = exp\ (z - exp(z)) \tag{e129}$$

Plusieurs approches mathématiques peuvent être choisies pour le traitement du signal, telles que les transformées de Fourier considérées, par exemple, par Génevé dans sa thèse [R51].

Toutefois, cette méthode directe nécessite pour l'extraction du spectre $R(z)$ de procéder à une dérivée numérique de la réponse $Z(z)$. Pour éviter de générer une erreur liée à toute approximation numérique une dérivée centrée d'ordre 2 sera préférée.

$$\frac{dZ(z)}{dz} \cong \left[Z(z)_{j+1} - Z(z)_{j-1} \right] / 2 \left[z_{j+1} - z_{j-1} \right] \qquad \text{(e130)}$$

Néanmoins, il est possible de s'affranchir de cette dérivation en procédant à une déconvolution par une méthode itérative basée sur le théorème de Bayes, comme l'illustre Ousten [R52] dans ses travaux.

Les formulations du domaine continu sont transposées au domaine discret et les données sont traitées sur un intervalle de temps borné. Ainsi, le signal mesuré $Z(t)$ est approximé à partir de l'expression :

$$Z(z_j) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i) \left[1 - exp\left(-exp\left(z_j - \xi_i \right) \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i) W_{ji} \quad ou \quad Z_j = \sum_{i=1}^{n} R_i W_{ji} \qquad \text{(e131)}$$

Cette formulation du signal est le modèle discret d'observation émanant de l'expérience (a priori).

Puis au moyen du théorème de Bayes [R54], une loi récursive est établie telle que les amplitudes $R_i^{<k+1>}$ et $R_i^{<k>}$du spectre discret soient corrélées. Cette procédure probabiliste itérative permet de combiner une information a priori sur la fonction (R_i^k) avec l'information contenue dans les données (Z_j).

$$R_i^{<k+1>} = \frac{R_i^{<k>}}{\sum_{j=1}^{m} W_{ji}} \sum\nolimits_{j=1}^{m} \left[W_{ji} \, Z_j / \sum\nolimits_{p}^{n} W_{jp} \, R_p^{<k>} \right] \qquad \text{(e132)}$$

Le nombre d'itérations (k) va dépendre du nombre d'observations (m) et du nombre de cellules RC (n).

Dérivé de l'estimateur du maximum a postériori de Bayes, ce processus fait apparaitre en définitive les constantes de temps les plus contributives, comme l'atteste la Figure 117.

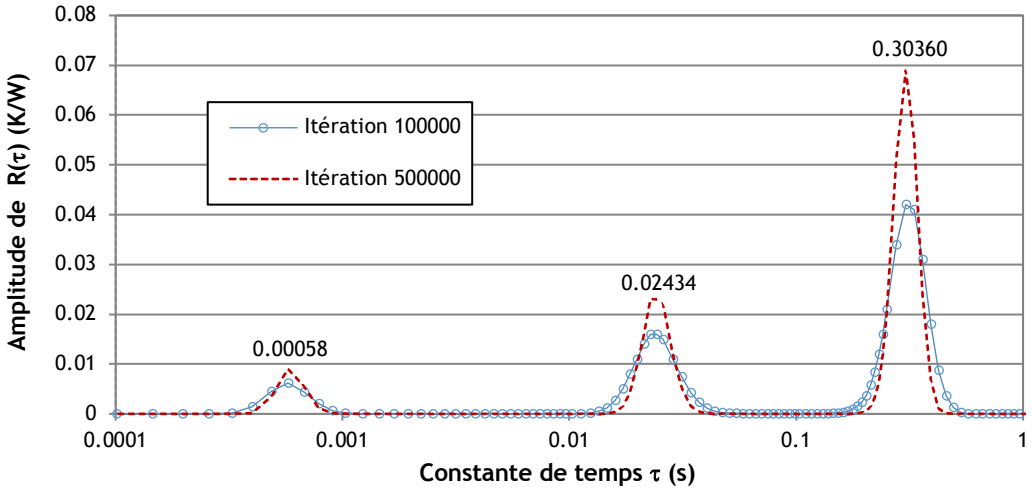


Figure 117 : Exemple d'identification décliné dans les travaux d'Ousten

Les diverses constantes de temps sont reportées sur l'axe des abscisses et celles des résistances sur l'axe des ordonnées.

Pour initier la recherche stochastique des éléments de ce réseau, Ousten fixe une valeur initiale « a priori », égale à : $R_i^{<0>} = 10^{-2}\ K/W$, sans réelle justification.

Toutefois une formalisation a été énoncée par Richardson [R54], un postulat qui a été investigué.

$$R_i^{<0>} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} W_{ji}} \sum\nolimits_{j=1}^{m} \left[W_{ji}\, Z_j / \sum\nolimits_{p}^{n} W_{jp} \right] \quad \text{(e133)}$$

La prise en compte de ce vecteur au regard des résultats rapportés a mis en lumière l'influence de paramètre sur les itérations à effectuer pour atteindre une même distribution.

Cette optimisation a été reprise en 2014 par Belkacem-Beldi [R53]. Cet auteur considère que le terme $\sum_j W_{ji}$ équivaut à 1. Cet algorithme est connu sous le nom de Richardson-Lucy.

$$R_i^{<k+1>} = R_i^{<k>} \sum\nolimits_{j=1}^{m} \left[W_{ji}\, Z_j / \sum\nolimits_{p}^{n} W_{jp}\, R_p^{<k>} \right] \quad \text{(e134)}$$

La procédure aboutit à la distinction de l'ensemble $N\tau$ pics résiduels, lesquels fournissent une reconstruction discrète de la réponse analysée mais en dehors de trois zones d'intérêt nettement discernées, toutes les autres amplitudes sont nulles. Aussi, la réponse du système se résume à leur sommation.

$$Z_n(t) = \sum_{i=\tau_{min}^{<1>}}^{\tau_{max}^{<1>}} R(\tau_i)\,[1 - exp(-t/\tau_i)] + \cdots + \sum_{i=\tau_{min}^{<3>}}^{\tau_{max}^{<3>}} R(\tau_i)\,[1 - exp(-t/\tau_i)] \quad \text{(e135)}$$

Ces trois zones indiquent que le réseau de Foster final ne sera constitué que de trois cellules RC mais signifient également que nombre d'itérations doit être accentué pour déterminer avec exactitude les trois constantes de temps indispensables au calcul des valeurs des trois capacités thermiques.

Après 500 mille itérations, le tracé révèle que la position des trois constantes de temps n'est pas figée. Afin de limiter le nombre d'itérations, une recherche mathématique du centre des trois Gaussiennes est envisageable. Par exemple, le calcul de la moyenne pondérée propre à chacune des formes gaussiennes s'avère probant.

$$\overline{\tau}_n = \sum_{i=\tau_{min}^{<n>}}^{\tau_{max}^{<n>}} [\,\tau_i\, R(\tau_i)\,] \Big/ \sum_{i=\tau_{min}^{<n>}}^{\tau_{max}^{<n>}} R(\tau_i) \quad \text{(e136)}$$

La Table 57 décrit la qualité de l'ajustement en fonction du nombre d'itérations réalisées. Pour 5 millions d'itérations, l'erreur concernant chacun des paramètres RC des trois cellules n'excède pas 1%.

Table 57 : Définition des paramètres du réseau étudié par Ousten

Itération	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3	$\hat{r}$
Cible	0.0200	0.0300	0.1200	0.2000	0.2500	1.2000	-
5.10^5	0.0193	0.0307	0.1191	0.2004	0.2525	1.2294	0.99984
10^6	0.0195	0.0303	0.1204	0.1986	0.2531	1.2128	0.99993
5.10^6	0.0198	0.0303	0.1195	0.2003	0.2508	1.2074	0.99999
	0.97%	-0.91%	0.43%	-0.17%	-0.32%	-0.61%	

Malgré des temps de calcul conséquents, cette approche statistique procure une méthode inverse capable de reconstruire un réseau inconnu en exploitant sa réponse temporelle.

Une accélération du processus est envisageable en éliminant au moyen de la moyenne pondérée les pas temps dont l'amplitude est faible et en concaténant leurs amplitudes.

A l'instar des analyses précédentes, un réseau de Foster préfixé a été étudié. L'objectif est de vérifier si l'identification par déconvolution Bayésienne s'avère capable d'identifier avec précision sa structure originale.

Dans cette optique, le réseau à 3 cellules du DFN12 de la Table 55 a été ciblé.

La Figure 118 décrit le traitement du spectre pour un nombre similaire d'itérations au cas précédent, à savoir 10^5 et 5.10^5 mais également pour 5 millions d'itérations.

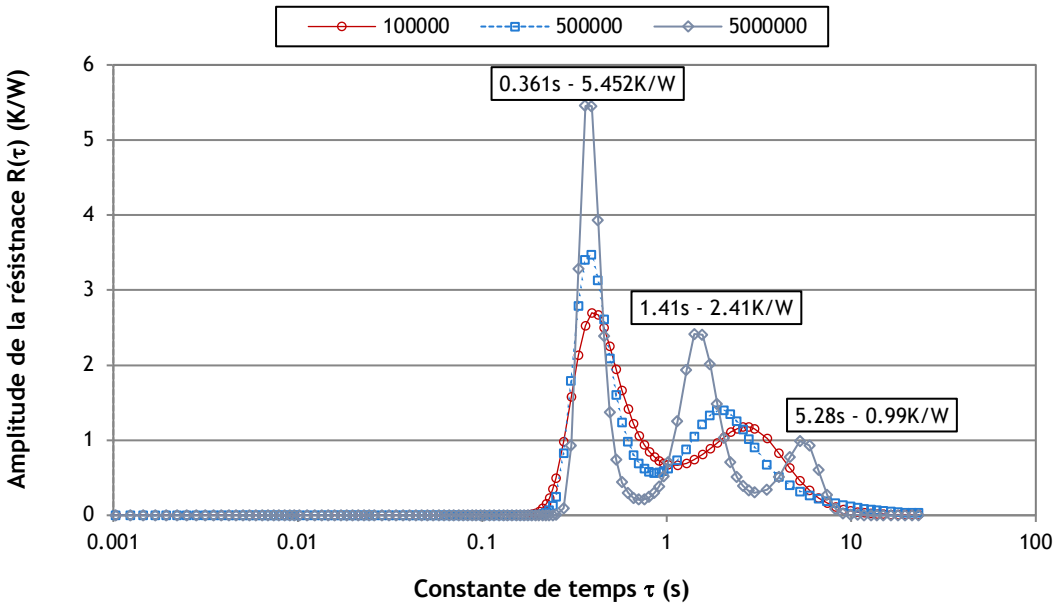


Figure 118 : Identification du réseau unidirectionnel du DFN12 composé de 3 cellules RC

Au terme de 100 mille itérations, la distribution spectrale calculée ne distingue que deux zones bien que le réseau étudié soit constitué de trois cellules.

Si ce nombre est porté, à 5 millions, les trois pics recherchés apparaissent plus nettement.

En conséquence, un plus grand nombre d'itérations est à exécuter pour délimiter les zones d'intérêt.

En fait, plusieurs millions (>200) sont nécessaires comme le prouve la Figure 119.

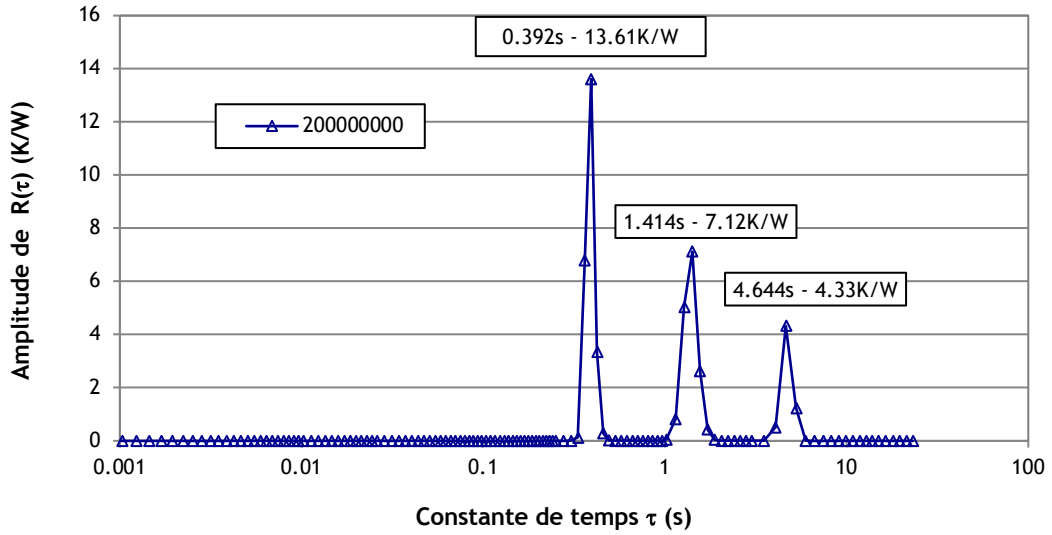


Figure 119 : Délimitation des zones Gaussiennes du réseau du DFN12 à 3 cellules RC

Après 200 millions d'itérations, la fonction de transfert $Zr\ (t)$ se résume à un réseau de Foster constitué de 13 cellules RC significatives.

La sommation des amplitudes, non nulles, fournit les trois valeurs supposées des résistances du réseau.

Celles-ci sont fournies dans la Table 58.

Table 58 : Réseau de Foster du DFN12 après 200 millions d'itérations

	Nb Cellule	1	2	3	4	5	$\sum R_i$
	R_i	0.126	6.782	13.608	3.337	0.278	24.13
Pic_1	τ_i	0.332	0.361	0.392	0.424	0.457	
	C_i	2.633	0.053	0.029	0.127	1.644	
	R_i	0.820	5.035	7.119	2.628	0.429	16.03
Pic_2	τ_i	1.143	1.275	1.414	1.560	1.713	
	C_i	1.394	0.253	0.199	0.594	3.994	
	R_i	0.512	4.326	1.230	-	-	6.07
Pic_3	τ_i	4.052	4.644	5.276	-	-	
	C_i	7.914	1.074	4.290	-	-	

A l'instar du cas précédent, les valeurs des trois constantes de temps ont été évaluées en calculant la moyenne pondérée des pics propres à chacune des zones.

Table 59 : Constante de temps des 3 échelons du réseau du DFN12

Itération	τ_1	τ_2	τ_3
Cible	0.385s	1.365s	4.663s
200 10^6	0.388s	1.389s	4.721s

L'accord obtenu, pour les constantes de temps τ_1 et τ_2, est satisfaisant mais reste à parfaire pour la constante de temps τ_3.

L'augmentation du nombre d'iterations tend progressivement à identifier correctement les valeurs de la fonction de transfert du système mais il faut être patient.

L'ensemble des paramètres thermiques déduits par cette technique ainsi que l'erreur d'identification sont résumés dans la Table 60.

Table 60 : Pertinence de la reconstruction du réseau du DFN12

Itération	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3	$\hat{r}$
Cible	16.073	0.0849	6.236	0.7477	24.046	0.0160	-
200x10^6	16.128	0.0861	6.083	0.776	24.148	0.0161	0.9999
	-0.34%	-1.42%	2.45%	-3.80%	-0.42%	-0.47%	

L'identification des paramètres du réseau est obtenue avec une erreur n'excédant pas 4%. Il est à noter que les échelons répertoriés dans cette table ne sont pas classés par ordre temporel.

Une meilleure définition du nombre n de pas de temps, ici 145, ainsi que de leur répartition par décade est sans nul doute à parfaire.

La Figure 120 présente l'agrément de la réponse temporelle des réseaux de Foster composés respectivement de 13 (en rouge) et de 3 cellules RC (en bleu) par rapport à celle prise comme référence ($Zo\ (t)$).

Les erreurs relevées sur le réseau réduit à 3 cellules RC sont très proches de celles constatées sur le réseau déduit par déconvolution, il est par conséquent possible de réduire le nombre d'itérations en interprétant les données des zones Gaussiennes.

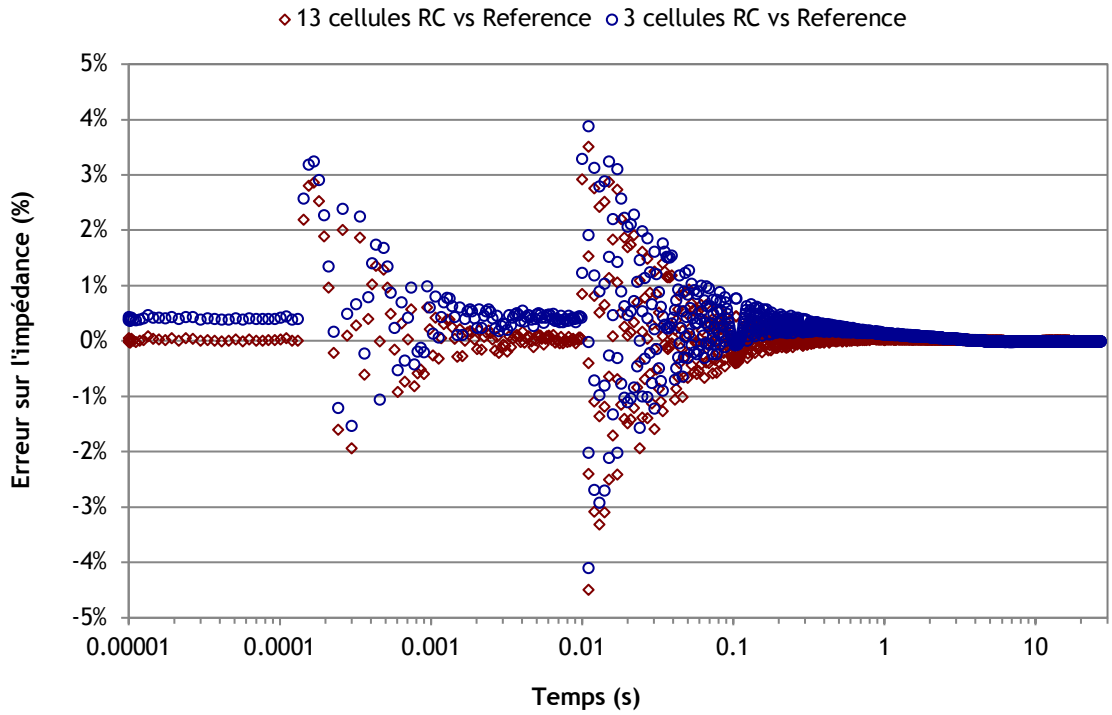


Figure 120 : Réponse temporelle du réseau de Foster reconstruit

Force est de constater qu'il est possible de recréer la fonction de transfert reliant le signal de sortie $y\,(t)$ au signal appliqué à son entrée $x\,(t)$ avec un nombre réduit d'échelons RC.

Pour compléter cette démonstration, la procédure a été appliquée au traitement de la réponse directement mesurée sur un composant DFN10, comme le présente la Figure 121.

Là encore le traitement du signal pour un faible nombre d'iterations ne permet pas de distinguer les zones caractéristiques du signal. A partir de 50000 itérations l'amorce de trois cassures apparaît.

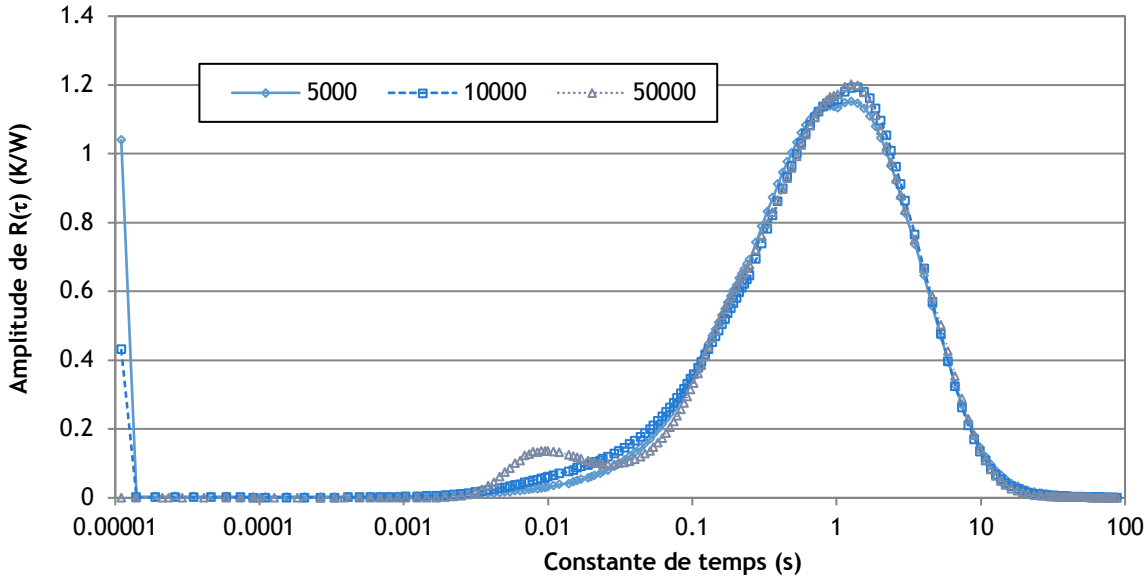


Figure 121 : Identification du réseau de Foster d'un signal mesuré du DFN10

Après 20 millions d'iterations (Figure 122) quatre zones d'intérêt sont plus nettement démarquées mais le processus d'identification est loin d'être achevé.

Le nombre de constantes de temps non nulles demeure important. Ceux-ci vont progressivement disparaître si le nombre d'iterations est accentué.

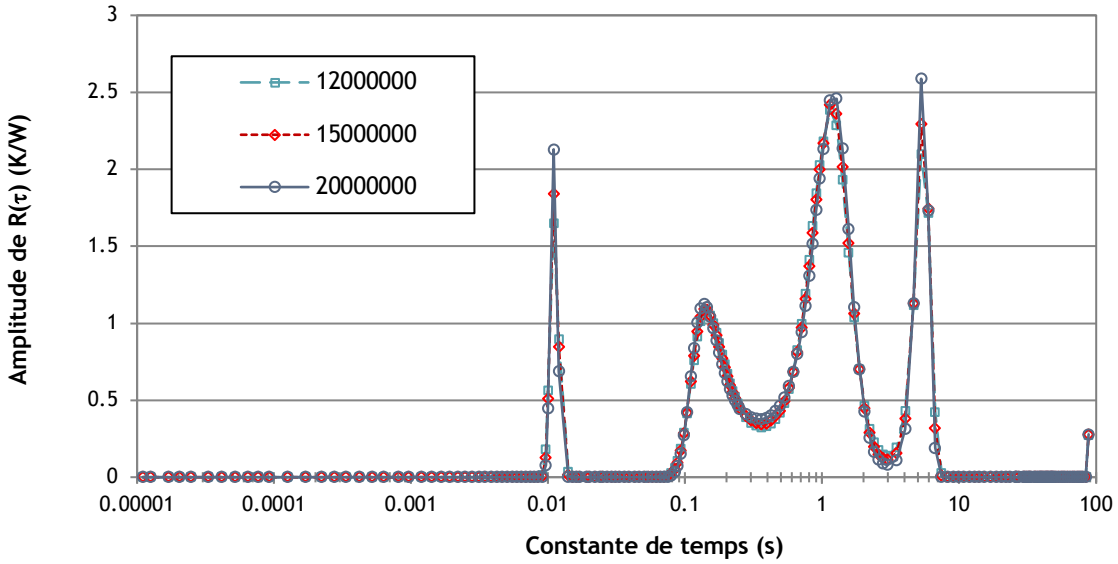


Figure 122 : Visualisation des quatre pics caractérisant le réseau de Foster du DFN10

Naturellement, l'ajustement du nombre de cellules déduites dépend du nombre d'observations que le système d'acquisition est en mesure de réaliser en particulier dans les premiers pas de temps.

Il est à noter un artefact lorsque la constante de temps est proche de 100s. En fait, la stabilisation du signal ainsi que le choix des constantes de temps initiale et finale nécessitent une attention particulière.

Le travail effectué apporte, une nouvelle fois, une solution pratique pour pouvoir appliquer le standard JEDEC JESD51-14 [R50].

Deux méthodes de déconvolution bayésienne sont explicitées mais d'autres algorithmes sont susceptibles d'être exploités, tels que :

- Muller $$R_i^{<k+1>} = R_i^{<k>} \sum_{j=1}^{m} \left[W_{ji}\, Z_j \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} W_{ji} \sum_{p=1}^{n} W_{jp}\, R_p^{<k>} \right) \right] \quad \text{(e137)}$$

- MAPDA [17] $$R_i^{<k+1>} = R_i^{<k>}\ exp\left[\sum_{j=1}^{m} W_{ji} \left(\left[Z_j \Big/ \sum_{p=1}^{n} W_{jp}\, R_p^{<k>} \right] - 1 \right) \right] \quad \text{(e138)}$$

- Gold [R55] $$R_i^{<k+1>} = R_i^{<k>} \left[A_j \Big/ \sum_{p=1}^{n} B_{jp}\, R_p^{<k>} \right] \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W}\ et\ A = \boldsymbol{W}^T Z \quad \text{(e139)}$$

Ce dernier algorithme résout le système si la matrice des paramètres est mal conditionnée.

Leur principal avantage de ces méthodes de déconvolution réside dans le fait qu'elles sont stables même si le signal est bruité. Toutefois leur utilisation s'avère couteuse en termes de temps de calcul.

Pour limiter les temps de résolution, l'utilisation de la concaténation des pics mineurs et l'expression de la moyenne pondérée de leur pas temps offrent une solution attractive pour accélérer la convergence.

Cette identification aveugle des pics caractéristiques issus du traitement d'un signal peut être ensuite comparée aux données extraites d'une simulation numérique afin de vérifier la pertinence des propriétés thermiques imposées au modèle.

Naturellement cette approche n'a d'intérêt que si l'hypothèse d'un flux unidirectionnel est respectée.

H7. Recombinaison des réseaux

De par la simplicité de son expression, le réseau de Foster est plébiscité pour ajuster un modèle ne comportant pas trop de cellules. L'emploi d'un modèle équivalent de Cauer est lui très utile pour interpréter rapidement la réponse discrète déduite d'une identification par déconvolution Bayésienne.

Celui-ci permet de représenter graphiquement l'évolution des capacités thermiques en fonction des résistances thermiques (Structure function). De cette représentation, il est possible de définir graphiquement les transitions thermiques de la structure.

Plusieurs travaux [R56]-[R57] proposent des méthodes capables de transformer ces deux types de réseau.

Le principe général de cette transformation peut être vu comme la recombinaison (e140) d'une fonction fractionnelle sous la forme d'une fraction continue alternant un jeu de résistances (impédance) et de capacité (admittance).

$$Z_n(p) = \frac{a_0 + p\,a_1 + p^2\,a_2 + \cdots + p^{n-1}\,a_{n-1}}{b_0 + p\,b_1 + p^2\,b_2 + \cdots + p^n\,b_n} \;\Rightarrow\; Z(p) = \cfrac{1}{p\,Cc_1 + \cfrac{1}{Rc_1 + \cfrac{1}{p\,Cc_2 + \cdots}}} \tag{e140}$$

Ainsi la fonction de transfert d'un réseau de Foster, telle que l'expression (e118) est le point de départ.

En se basant sur un algorithme récursif présenté dans la thèse de Freixes [R58], il est possible de déduire un jeu d'expressions pour transformer le réseau de la Figure 116 sous la forme décrite par la Figure 115.

Dans ce cas de figure, d'une fonction de transfert d'ordre 2, on établit les relations suivantes :

$$Cc_1 = \frac{b_2}{a_1}\ ,\ Rc_1 = \frac{a_1}{(b_1 - Cc_1\,a_0)}\ ,\ Cc_2 = \frac{a_1}{Rc_1\,(a_0 - Rc_1\,b_0)}\ ,\ Rc_2 = \frac{a_1}{b_0\,Rc_1\,Cc_2} \tag{e141}$$

$$On\ déduit :\ Cc_1 = \frac{R_1\,R_2\,C_2\,C_1}{R_1\,R_2\,[C_1 + C_2]}\ ,\ Rc_1 = \frac{R_1\,R_2\,[C_1 + C_2]}{[\,R_1\,C_1 + \,R_2\,C_2\,] - Cc_1\,[R_1 + R_2]} \tag{e142}$$

$$Puis :\ Cc_2 = \frac{R_1\,R_2\,[C_1 + C_2]}{Rc_1\,(R_1 + R_2 - Rc_1)}\ ,\ Rc_2 = \frac{R_1\,R_2\,[C_1 + C_2]}{Rc_1\,Cc_2} \tag{e143}$$

Si la fonction est d'ordre 3, ces expressions seront remplacées par les formulations suivantes :

$$Cc_1 = \frac{a_3}{b_2}\ ,\ Rc_1 = \frac{{b_1}^2}{(a_2\,b_2 - a_3\,b_1)}\ ,\ Cc_2 = \frac{b_2}{Rc_1\,[b_1 - Rc_1\,(a_1 - b_0\,Cc_1)]} \tag{e144}$$

$$Rc_2 = \frac{b_2\,(Rc_1\,Cc_2)^{-1}}{a_1 - b_0\,(Cc_1 + Cc_2) + Cc_2\,Rc_1\,a_0} \tag{e145}$$

$$Rc_3 = \frac{b_0 - a_0\,(Rc_1 + Rc_2)}{a_0},\ Cc_3 = \frac{a_0\,b_2}{Rc_1\,Rc_2\,Rc_3\,Cc_2} \tag{e146}$$

Celles-ci offrent une solution pour convertir des réseaux à 2 et 3 cellules, tels que ceux de la Table 55.

$$Z_2(p) = \frac{46.171 + 94.574\,p}{1 + 3.263\,p + 1.322\,p^2} \tag{e147}$$

$$Z_3(p) = \frac{46.355 + 236.967\,p + 185.104p^2}{1 + 6.412\,p + 8.682\,p^2 + 2.448p^3} \tag{e148}$$

Le résultat de la transformation est indiqué dans la Table 61.

Table 61 : Réseaux de Cauer déduits d'un jeu de réseaux de Foster

Réseau Cauer	Rc_g	Cc_g	Rc_1	Cc_1	Rc_2	Cc_2	Rc_3	Cc_3
2 cellules	46.171	$13.3\text{x}10^{-3}$	36.13	0.014	10.041	0.261	-	-
3 cellules	46.355	$11.9\text{x}10^{-3}$	33.363	0.013	10.501	0.128	2.49	1.663

La Figure 123 démontre, dans le domaine fréquentiel, l'adéquation de ces deux réseaux de Cauer. Toutes les courbes sont confondues.

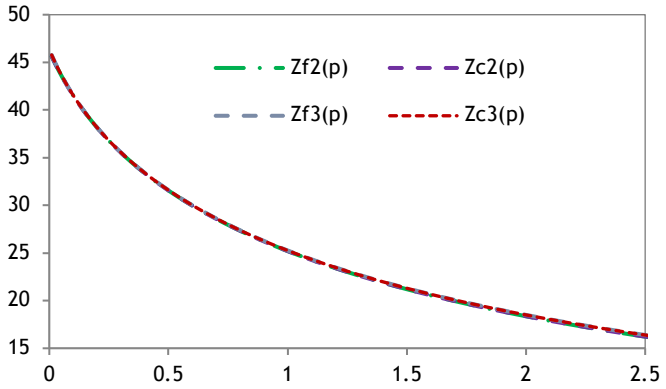


Figure 123 : Validité de la recombinaison des réseaux de Foster d'ordre 2 et 3

Pour un réseau d'ordre 2, la comparaison du réseau original et du réseau déduit a été effectuée dans le domaine temporel en s'appuyant sur les formulations (e116) et (e119), comme le montre la Figure 124.

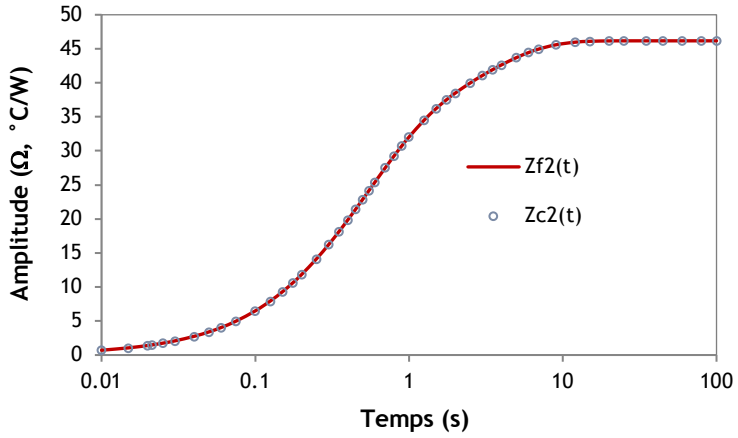


Figure 124 : Confrontation des réponses temporelles des réseaux de Foster et de Cauer

Les formulations établies offrent une approche pratique pour définir des réseaux simples d'ordre 2 ou 3.

La manipulation mathématique de réseaux possédant de multiples cellules RC requiert un travail conséquent, ceci pour l'établissement de modèles unidirectionnels dont l'intérêt est en définitive limité.

H8. Reconstruction physique des réseaux RC unidirectionnels

La déduction de valeurs physiques du réseau sous la forme d'un réseau de Cauer d'ordre 2 a été explicitée. Les expressions développées fournissent les valeurs des résistances et des capacités.

Il est également possible de déduire les valeurs d'un réseau de Foster (e118) à partir d'une fonction rationnelle quelconque :

$$Z_2(p) = \frac{46.356 \ + 173.691\, p}{1 + 5.048\, p + 2.908\, p^2} \tag{e149}$$

Pour cela, on identifie une équation quadratique en considérant $\tau_1 + \tau_2 = b_1$ et $\tau_1\, \tau_2 = b_2$. Celle-ci procure les expressions des deux constantes de temps et celles des deux résistances.

Finalement, les valeurs des deux capacités sont déterminables. Toutefois celles-ci se doivent d'être réelles et positives.

$$\tau_1 = R_1\, C_1 = \frac{1}{2}\left[b_1 + \sqrt{{b_1}^2 - 4\, b_2}\right], \quad \tau_2 = R_2\, C_2 = \frac{1}{2}\left[b_1 - \sqrt{{b_1}^2 - 4\, b_2}\right] \tag{e150}$$

$$R_2 = (a_1 - a_0\, \tau_2)/(\,\tau_1 - \tau_2), \; R_1 = (a_0\, \tau_1 - a_1)/(\,\tau_1 - \tau_2) \tag{e151}$$

La Table 62 décline les valeurs calculées des deux réseaux pour la fonction de transfert (e153).

Table 62 : Réseaux de Cauer et de Foster déduits de la fonction réduite d'ordre 2

Réseau	Rx_g	Cx_g	Rx_1	Cx_1	Rx_2	Cx_2
Cauer	46.356	16.4x10-3	40.659	0.0167	5.697	0.750
Foster	46.356	16.7x10-3	7.946	0.0173	38.41	0.552

Ce travail préliminaire met en lumière la complexité des expressions à manipuler lorsqu'un réseau unidirectionnel est constitué de multiples échelons.

Celle-ci souligne également la nécessité de les réduire pour faciliter l'analyse du comportement thermique de l'élément que l'on souhaite observer.

H9. La réduction d'ordre des réseaux RC unidirectionnels

Le nombre de cellules RC pour modéliser, de manière appropriée, l'empilage d'une structure de refroidissement peut être initialement substantiel, à l'instar de l'analyse probabiliste menée sur le DFN12 (Figure 120).

En conséquence, la fonction de transfert du système sera d'un ordre supérieur à celles formulées en (e113) ou (e118), ce qui rend son calcul analytique plus ardu.

Pour pallier cette problématique, de multiples techniques de réduction ont été envisagées, telle que la méthode de Routh proposée par Hutton [R59].

Celle-ci propose une approche tabulée pour construire un modèle de Cauer d'ordre réduit à partir des polynômes du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert originale.

$$Z_n(p) = \frac{N_{n-1}(p)}{D_n(p)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, p^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} b_i\, p^i \;\Longrightarrow \tilde{Z}_r(p) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j\, p^j \Big/ \sum_{j=0}^{r} b_j\, p^j \quad avec\ k < n \tag{e152}$$

Comme mentionnée, la méthode est caractérisée par deux tables, où les coefficients du dénominateur et du numérateur sont agencés.

Puis, deux jeux de coefficients indépendants, dénommés α_i et β_j [R61], sont dérivés de manière itérative des coefficients b_j et a_i.

$$\begin{gathered} D_{0,0} = b_0,\; D_{0,1} = b_1,\; D_{2,0} = b_2,\; D_{2,1} = b_1,\; D_{4,0} = b_4,\; D_{4,1} = b_5 \\ \alpha_{j\neq 0} = D_{0,j-1}/\, D_{0,j} \quad \forall\, j \neq 0 \\ D_{i,j} = \; D_{i+2,j-2} - \alpha_{j-1}\, D_{i+2,j-1} \quad pour \;\; j = 2 \cdots n, i = 0{,}2 \ldots n-2 \end{gathered} \tag{e153}$$

$$\beta_{j\neq 0} = N_{0,j} / D_{0,j} \quad \forall\, j \neq 0$$
$$N_{i,j} = D_{i+2,j-2} - \beta_{j-2}\, N_{i+2,j-2} \quad pour \;\; j = 3 \cdots n, i = 0{,}2 \ldots n-2 \tag{e154}$$

Ceux-ci sont ensuite utilisés dans l'écriture de l'équation réciproque réduite.

$$\tilde{R}_r(p) = \frac{1}{p}\, \tilde{Z}_r\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \prod_{i=1}^{j} F_{i,j}(p) \tag{e155}$$

La forme des réponses pour des polynômes d'ordre 2 et 3 est déclinée ci-après.

$$\tilde{R}_{r=2}(p) = \beta_1 \frac{1}{(p\,\alpha_1 + 1) + \dfrac{1}{p\,\alpha_2}} + \beta_2 \frac{1}{(p\,\alpha_1 + 1) + \dfrac{1}{p\,\alpha_2}} \cdot \frac{1}{p\,\alpha_2} \tag{e156}$$

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{\beta_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \; + \beta_2 \;\alpha_3\, p + (\beta_1 + \beta_3)\, p^2}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 + \alpha_2 \;\alpha_3\, p + (\,\alpha_1 + \alpha_3)\, p^2 + p^3} \tag{e157}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{\beta_1\,\alpha_2 + \beta_2\, p}{\alpha_1\,\alpha_2 + \alpha_2\, p + p^2} \tag{e158}$$

La connaissance des coefficients α_i et β_j donne accès à un jeu d'expression d'ordre réduit.

De nombreux exemples sont disponibles dans la littérature [R61]-[R63]. Ceux-ci déclinent généralement des traitements de fonction de transfert d'ordre 4 $(r = 4)$ pour obtenir des approximations d'ordre 2.

Un exemple issu des travaux de Hutton [R59] sert souvent de référence à beaucoup d'approches publiées.

La fonction traitée ainsi que les fonctions d'ordre réduit obtenues sont reprises ci-après.

$$Z_{n=4}(p) = \frac{4320 + 1400\, p + 528\, p^2 + 12\, p^3}{240 + 360\, p + 204\, p^2 + 36\, p^3 + 2\, p^4} \tag{e159}$$

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{3240 + 1080\, p + 360\, p^2}{180 + 270\, p + 151\, p^2 + 24\, p^3} \quad avec \;\; \hat{r} = 0.99574 \tag{e160}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{72 + 24\, p}{4 + 6\, p + 3\, p^2} \quad avec\, \hat{r} = 0.99774 \tag{e161}$$

Leur pertinence est exprimée sous la forme d'un coefficient de détermination ($\hat{r}$). L'application de la méthode de Routh, telle qu'explicitée par Sambariya [R61], pour un réseau de Cauer permet d'obtenir des expressions réduites différentes.

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{135 + 45\, p + 15\, p^2}{7.5 + 11.25\, p + 6.292\, p^2 + p^3} \quad avec\, \hat{r} = 0.99574 \tag{e162}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{24 + 8\, p}{1.333 + 2\, p + p^2} \quad avec\, \hat{r} = 0.99774 \tag{e163}$$

L'ajustement proposé par ces deux fonctions réduites est assez fidèle comme le montre la Figure 125.

Les expressions (e160), (e161), (e162) et (e163) fournissent pratiquement les mêmes résultats.

Bien évidemment, les expressions d'ordre 3 préservent mieux le comportement de la fonction originale.

En fait, les fonctions d'ordre 2 dérivent plus fortement dès que la valeur de p est importante.

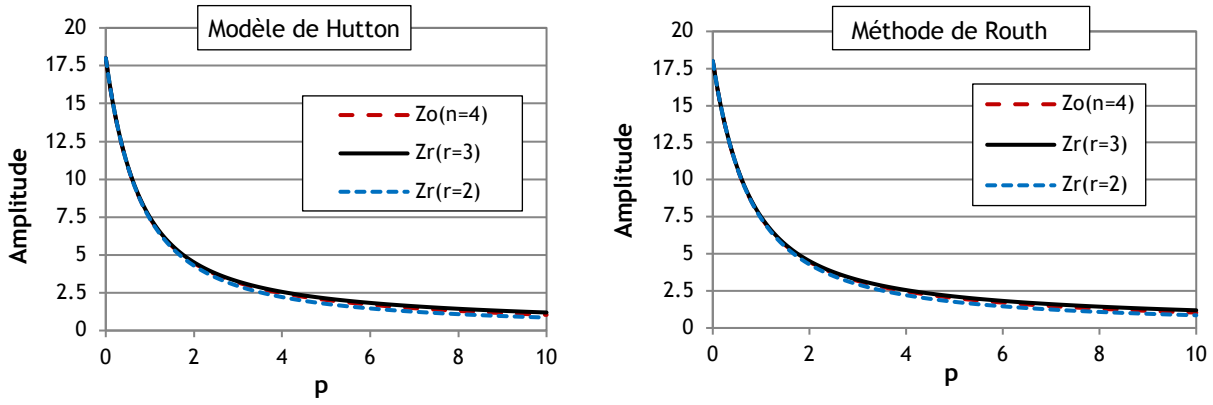


Figure 125 : Comparaison des réponses réduites de la fonction de Hutton

L'application de la méthode de Routh sur la réponse temporelle issue d'un test expérimental effectué sur un composant électronique s'est avérée moins satisfaisante.

Ainsi à partir des données répertoriées en Table 55, une fonction rationnelle d'ordre 4 a été étudiée.

Celle-ci a été réduite en considérant une fonction rationnelle d'ordre 3 puis d'ordre 2.

La qualité de l'ajustement des deux fonctions déduites révèle la faiblesse de la méthode de Routh.

$$Z_{n=4}(p) = \frac{46.356 + 260.415\,p + 291.444p^2 + 76.637\,p^3}{1 + 6.919\,p + 11.63\,p^2 + 6.154\,p^3 + 1.018\,p^4} \qquad \text{(e164)}$$

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{8.431 + 47.364\,p + 52.208\,p^2}{0.182 + 1.258\,p + 2.098\,p^2 + p^3} \quad avec\ \hat{r} = 0.98877 \qquad \text{(e165)}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{4.316 + 24.246\,p}{0.093 + 0.644\,p + p^2} \quad avec\ \hat{r} = 0.89285 \qquad \text{(e166)}$$

La Figure 126 souligne l'écart des fonctions réduites vis-à-vis de la fonction originale en fonction de la fréquence. Clairement, la réduction d'ordre doit être limitée à une fonction d'ordre 3, ceci pour garantir une bonne précision.

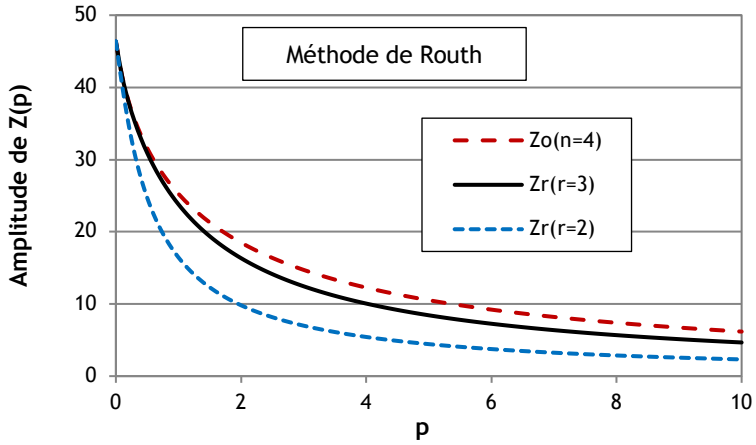


Figure 126 : Représentativité des réponses réduites de la fonction de transfert d'un composant

La piètre représentativité tient au fait d'imposer une forme de Cauer aux deux réseaux réduits.

Pour juger de la qualité du réseau, la comparaison des moments des fonctions originales et des fonctions dont l'ordre a été réduit est révélatrice.

Les moments m_i d'une fonction $Z_n(p)$ sont calculés en développant celle-ci en série de Maclaurin [R66].

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx}\, x + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(0)}{dx^2}\, x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f(0)}{dx^3}\, x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf(0)}{dx^n}\, x^n \qquad \text{(e167)}$$

$$f(x) = m_0 + m_1\, x + m_2\, x^2 + m_3\, x^3 + \cdots + m_n\, x^n \qquad \text{(e168)}$$

La Table 63 et la Table 64 présentent les six premiers coefficients des différents cas analysés.

Leur examen met en évidence que les valeurs des moments diffèrent rapidement pour des fonctions réduites d'ordre 2 et par conséquence l'ajustement de la fonction originale s'en trouve dégradé.

Table 63 : Définition des valeurs des moments des fonctions réduites et de Hutton

Coefficients des moments	Originale (e159)	Réduite n=3 (e160)	Réduite n=2 (e161)	Réduite n=3 (e162)	Réduite n=2 (e163)
m_0	18	18	18	18	18.005
m_1	-21.17	-21	-21	-21	-21.012
m_2	18.65	18.4	18	18.399	18.019
m_3	-12.63	-12.383	-11.25	-12.381	-11.273
m_4	5.96	5.939	3.375	5.936	3.395
m_5	-0.985	-0.974	3.375	-0.97	3.362

Ce constat montre la faiblesse de la méthode d'Elmore, vue au paragraphe H2, laquelle se base sur un seul moment. Cette divergence est également visible, lorsque la fonction de transfert est issue de l'expérimentation.

Table 64 : Définition des valeurs des moments des fonctions réduites et de Foster

Coefficients des moments	Originale (e164)	Réduite n=3 (e165)	Réduite n=2 (e166)
m_0	46	46.32	46.41
m_1	-60.32	-59.95	-60.66
m_2	169.69	167.27	-78.98
m_3	-681.19	-719.59	1199
m_4	3064	3375	-7455
m_5	-14260	-15950	38730

Pour améliorer ce point, d'autres méthodes dites de décomposition des moments ont été étudiées, tel que l'approximant d'Henri-Eugène Padé.

Cette dernière vise à approcher la fonction originale directement au moyen de ces multiples moments.

$$Z_n(p) \cong \sum_{i=0}^{K} \frac{(-1)^i}{i!}\, \frac{d^iZ_n(0)}{dp^i} p^i = \sum_{i=0}^{K} m_i\, p^i \qquad \text{(e169)}$$

Le nombre de moments (K) est induit par la somme des exposants maximum des polynômes $N(p)$ et $D(p)$.

Le principe associé à cette recherche est synthétisé par l'erreur suivante :

$$Z_n(p) - \tilde{Z}_r(p) = \sum_{i=0}^{K} m_i\, p^i - \sum_{i=0}^{r-1} a_i\, p^i \Big/ 1 + \sum_{i=1}^{r} b_i\, p^i \qquad \text{(e170)}$$

$$Avec\ \tilde{Z}_r(0) = Z_n(0)\ \ et\ \ \left.\frac{d^k\,\tilde{Z}_r(p)}{dp^k}\right|_{p=0} = \left.\frac{d^k Z_n(p)}{dp^k}\right|_{p=0}\ \ pour\ k = 0 \cdots K$$

Il est à noter que la valeur de b_0 est par définition fixée à 1, ceci implique que la valeur a_0 du numérateur sera égale à celle du premier moment m_0. Cette dernière correspond à la valeur de la fonction $Z_n(0)$, laquelle équivaut à la somme des résistances du réseau ((e113)-(e118)).

La détermination des éléments des deux polynômes s'appuie sur la résolution d'un système dépendant de l'ordre de la fonction. Pour cela, on procède à la mise en forme matricielle des coefficients propres à chaque p^i, comme l'illustre pour une fonction de transfert d'ordre 2, l'exemple ci-dessous.

$$(b_1\,p + b_2\,p^2)\,(m_0 + m_1\,p + m_2\,p^2 + m_3\,p^3) - a_1\,p \rightarrow \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_0 & 0 \\ 0 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(e171)}$$

On en déduit le système d'équations à résoudre en fonction de l'ordre recherché :

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & -1 \\ m_1 & m_0 & 0 \\ m_2 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}\ \ pour\ \ r = 2 \quad \text{(e172)}$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 & -1 \\ m_2 & m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_3 & m_2 & m_1 & 0 & 0 \\ m_4 & m_3 & m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix}\ \ pour\ \ r = 3 \quad \text{(e173)}$$

Appliquée à la fonction de transfert (e164), cette approche s'avère beaucoup plus performante.

Les deux coefficients de corrélation linéaire ($\hat{r}$) sont très proches de 1, les fonctions réduites et la fonction originale sont par conséquent fortement corrélées.

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{46.356 + 242.382\,p + 197.172\,p^2}{1 + 6.53\,p + 9.09\,p^2 + 2.62\,p^3}\ \ avec\ \hat{r} = 1 \quad \text{(e174)}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{46.356 + 173.691\,p}{1 + 5.048\,p + 2.908\,p^2}\ \ avec\ \ \hat{r} = 0.99559 \quad \text{(e175)}$$

Toutefois, cette approche attractive est souvent reliée à des critères de stabilité, tels ceux de Mihailov ou de Routh–Hurwitz, lesquels sont destinés à trouver un modèle d'ordre réduit viable.

En pratique, la stabilité du réseau est validée à partir d'une analyse fréquentielle en déterminant son amplitude ($|Z(j\omega)|$) et le déphasage ($\varphi(\omega)$) entre l'entrée et la sortie puis en étudiant leur projection sur un diagramme de Nyquist.

Le tracé dit de Nyquist des expressions (e164), (e174) et (e175) est présenté sur la Figure 127.

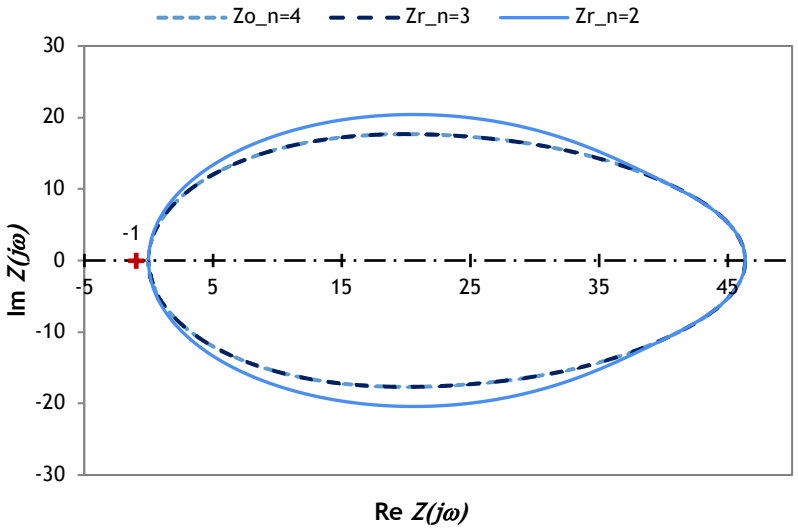


Figure 127 : Diagramme de Nyquist montrant la stabilité du système

Le comportement du système est symétrique par rapport à l'axe réel et sa représentation forme une boucle fermée.

Le système est dit stable si et seulement si le point -1 est laissé à gauche lorsque l'on parcourt le lieu de Nyquist de $Z_n(j\omega)$ dans le sens des ω croissants ($\omega \geq 0$).

La Figure 127 met en évidence la stabilité des expressions réduites, le point -1 étant positionné à gauche, quelle que soit l'expression tracée.

Plus loin, ce tracé souligne la qualité de l'ajustement, en particulier pour la relation d'ordre 3, cette dernière est confondue avec l'expression originale.

Une autre voie pour affiner la réduction est de considérer un développement de Taylor pratiqué autour de l'infini.

Dans ce cas, la recherche des modèles d'ordre réduits se base sur l'optimisation du système suivant :

$$Z_n(p) - \tilde{Z}_r(p) = \sum_{i=0}^{K} j_i \, p^{-(i+1)} - \sum_{i=0}^{r-1} a_i \, p^i \Big/ 1 + \sum_{i=1}^{r} b_i \, p^i \qquad \text{(e176)}$$

Les coefficients j_i sont appelés paramètres de Markov.

La détermination des premiers paramètres dépend de l'ordre du système (n) puis au delà ($q \geq n$) des paramètres de Markov déjà calculés [R60]. Les deux étapes de ce calcul sont explicitées ci-après.

$$0 \leq i \leq n-1 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} j_0 \\ j_1 \\ \vdots \\ j_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$n \leq i \leq q \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} j_q \\ j_{q+1} \\ \vdots \\ j_{q+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} & \ldots & -b_1 \end{bmatrix}^{q} \begin{bmatrix} j_0 \\ j_1 \\ \vdots \\ j_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(e177)}$$

D'autre part, les paramètres de Markov fournissent une nouvelle voie pour vérifier l'adéquation des fonctions réduites (e174) et (e187) vis-à-vis de la fonction originale (e164) comme l'indique la Table 65.

Table 65 : Définition des valeurs des paramètres de Markov

Coefficients de Markov	Originelle (e164)	Réduite n=3 (e174)	Réduite n=2 (e175)
j_0	75.3	75.3	59.7
j_1	-168.8	-168.6	-87.7
j_2	416.2	415.1	131.8
j_3	-1054	-1048	-198.6
j_4	2688	2668	-
j_5	-6876	-6800	-

Cette comparaison confirme les plus faibles performances de la fonction d'ordre 2 pour reproduire le comportement de la fonction originale. La fonction réduite d'ordre 3, quant à elle, est mieux ajustée.

Pour parfaire la qualité des modèles d'ordre réduit, la démarche d'ajustement des moments exposée précédemment peut être complétée par un ajustement sur les paramètres de Markov.

Une approche basée sur l'emploi de matrices modifiées de Hankel est suggérée par Vishwakarma [R64].

Celui-ci redéfinit le calcul des paramètres d'ajustement à partir de l'expression généralisée (e109).

$$Z_n(p) = Y(p)/U(p) = \boldsymbol{A}^T\,(\boldsymbol{I_n}\,p + \boldsymbol{G})^{-1}\,\boldsymbol{B} \quad avec \quad \begin{cases} m_i = A\,G^{-i}B \\ j_i = A\,G^{i-1}B \end{cases} \tag{e178}$$

De là, deux types de matrice de Hankel (skew-diagonal matrix) sont construits.

Le premier type, dit $MH_{1\beta}$, considère une optimisation effectuée à partir d'un seul moment ($\alpha = m_0$). Les autres valeurs sont calculées à partir de β paramètres de Markov (j_i) comme l'indique l'expression ci-dessous. Le deuxième type $(MH_{\alpha 1})$ présente une configuration inversée.

$$[MH_{15}]^0_{i=4,j=4} = \begin{bmatrix} m_0 & j_0 & j_1 & j_2 \\ j_0 & j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{bmatrix} \rightarrow [MH_{15}]^0_{i=4,j=4} = \begin{bmatrix} A\,B & A\,G^{-1}B & A\,B & A\,G\,B \\ A\,G^{-1}B & A\,B & A\,G\,B & A\,G^2B \\ A\,B & A\,G\,B & A\,G^2B & A\,G^3B \\ A\,G\,B & A\,G^2B & A\,G^3B & A\,G^4B \end{bmatrix} \tag{e179}$$

La matrice Hankel est ensuite ré-agencée sous la forme normale d'Hermite afin de faire apparaitre les vecteurs B et A ainsi que la matrice G. La taille du système dépend de l'ordre de réduction souhaité.

Les deux configurations ont été testées sur le cas de la fonction de transfert d'ordre 4, $Z_{n=4}(p)$, formulée en (e164). La matrice (G) et les vecteurs initiaux (A, B) de cette fonction sont exprimés sous la forme.

$$\boldsymbol{A} = [\,a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4\,] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{e180}$$

Cette analyse a démontré que les deux types de matrices $MH_{1\beta}$ ou $MH_{\alpha 1}$) donnent d'excellents résultats.

Les coefficients de corrélation linéaire sont tous proches de 1, ceci quel que soit l'ordre de réduction visé comme le confirme le coefficient de corrélation des relations (e181), (e182) et (e199).

$$\tilde{Z}_{r=3}(p) = \frac{75.282\,p^2 + 105.524\,p + 27.309}{p^3 + 3.644\,p^2 + 3.005\,p + 0.59} \quad avec \quad \hat{r} = 1 \tag{e181}$$

$$\tilde{Z}_{r=2}(p) = \frac{75.282\,p + 60.957}{p^2 + 3.052\,p + 1.316} \quad avec\ \hat{r} = 0.98233 \tag{e182}$$

$$\tilde{Z}_{r=1}(p) = \frac{75.282}{p + 1.624} \quad avec\ \hat{r} = 0.99838 \tag{e183}$$

La conformité des paramètres de Markov de ces trois fonctions est aisément vérifiable.

$$\tilde{j}_{i,r} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_r\,\widetilde{\boldsymbol{G}}_r^{i-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}_r \ \ et\ \ \tilde{m}_{i,r} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_r\,\widetilde{\boldsymbol{G}}_r^{-i}\widetilde{\boldsymbol{B}}_r \tag{e184}$$

Indéniablement, les fonctions réduites résultant d'un couplage des moments et des paramètres de Markov ajustent plus efficacement le comportement de la fonction originale.

Bien entendu, la liste des méthodes exposées dans cet état de l'art est non-exhaustive.

Il est à noter que beaucoup de logiciels de mathématiques offrent aussi des capacités d'optimisation de fonctions rationnelles, telle que la fonction « rationalfit » de Mathcad®.

Celle-ci fournit un vecteur γ_k en fonction de l'ordre de réduction voulu.

$$Z(p,\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k\,p^k \Big/ 1 + \sum_{k=1}^{d} \gamma_{k+n}\,p^k \tag{e185}$$

Cette analyse met en lumière la capacité à déduire d'une fonction mathématique, extraite d'un réseau unidirectionnel constitué de plusieurs cellules RC, un modèle d'ordre réduit.

Toutefois, ce type de procédure de réduction exige un effort d'optimisation mathématique significatif, potentiellement rédhibitoire pour une application à vocation industrielle.

H10. Manipulation des réseaux RC : l'emploi des quadripôles

La méthode des quadripôles peut être vue comme la mise en équation de la loi des mailles. La représentation d'un circuit par un quadripôle simplifie considérablement son étude. Il est plus aisé de définir des grandeurs caractéristiques, telles que les tensions et les courants ou l'impédance du circuit.

Un quadripôle est une boite noire, Figure 128, ayant deux entrées et deux sorties.

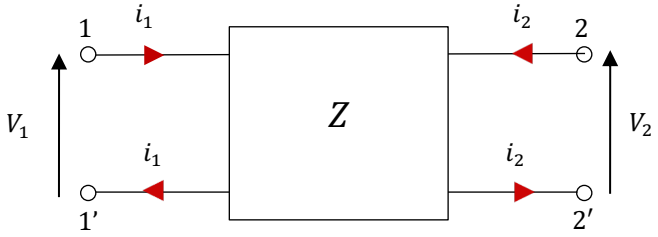


Figure 128 : Concept d'un quadripôle

La dépendance des entrées et des sorties est décrite au moyen de deux équations, lesquelles sont transposables sous une forme matricielle.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} V_1 = Z_{11}\,i_1 + Z_{12}\,i_2 \\ V_2 = Z_{21}\,i_1 + Z_{22}\,i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{e186}$$

Les quatre éléments de la matrice sont des impédances équivalentes en ohms.

L'identification de ces éléments résulte de l'application des lois de Kirchhoff à un réseau donné.

Si le réseau interne du quadripôle a la configuration d'un « L », celui-ci sera constitué de deux impédances Z_1 et Z_2. Ces dernières seront interconnectées suivant le schéma électrique de la Figure 129.

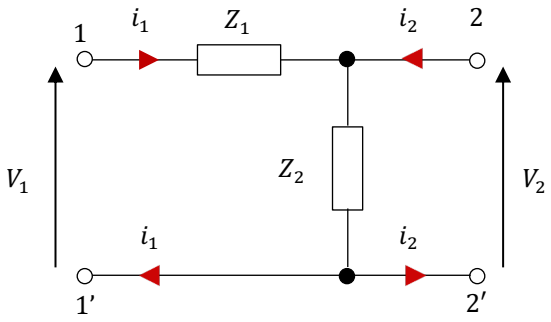


Figure 129 : Exemple d'un quadripôle élémentaire

Les valeurs des impédances équivalentes vont être déduites de l'expression des sommes des tensions lorsque les courants i_1 et i_2 sont successivement annulés.

$$\left.\frac{V_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \rightarrow Z_{21} \;;\; \left.\frac{V_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \rightarrow Z_{22} \quad \& \quad \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \rightarrow Z_{11} \;;\; \left.\frac{V_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \rightarrow Z_{21} \tag{e187}$$

La forme matricielle du quadripôle est donnée ci-dessous.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} \tag{e188}$$

Cette approche est applicable à différents types de réseaux. Ainsi si : $i_2 = 0,\ Z_1 = R$ et $Z_2 = 1/[C\,p]$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{C\,p} & \frac{1}{C\,p} \\ \frac{1}{C\,p} & \frac{1}{C\,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = [R + 1/(C\,p)]\, i_1 \\ V_2 = [1/(C\,p)]\, i_1 \end{cases} \tag{e189}$$

Le rapport des tensions de sortie et d'entrée, fait apparaitre la fonction de transfert (e101).

Il est clair que cette forme matricielle est mathématiquement plus pratique à manipuler. Les matrices peuvent être conditionnées (matrices hybrides) pour reformuler les variations que l'on désire observer.

Plusieurs types de réseau sont disponibles dans la littérature, tels que les quadripôles dits en « T » ou en « π », lesquels sont repris en annexe P14.

Pour l'association de plusieurs quadripôles consécutifs, on parle d'une mise en cascade.

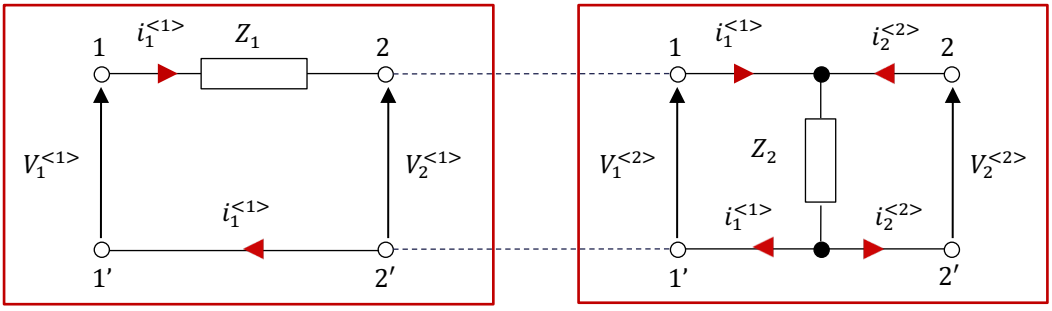


Figure 130 : Principe d'une disposition en cascade de deux quadripôles

Laquelle signifie la connexion des deux sorties du premier quadripôle aux deux entrées du suivant.

La représentation matricielle est modifiée pour avoir des vecteurs dédiés à l'entrée et à la sortie du groupement des quadripôles. Celle-ci est désignée comme la matrice de transfert de la cellule.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{cases} V_1 = A\,V_2 + B\,i_2 \\ i_1 = C\,V_2 + D\,i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{e190}$$

Par exemple, pour une cellule en « L », présentée en Figure 130, la matrice de transfert a pour expression :

- Z en série

$$\begin{cases} V_1^{<1>} = V_2^{<1>} - Z_1\,i_2^{<1>} \\ i_1^{<1>} = -i_2^{<1>} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1^{<1>} \\ i_1^{<1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^{<1>} \\ i_2^{<1>} \end{bmatrix}$$
$$[\,T_s^{<1>}] = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{e191}$$

- Z en paralléle

$$\begin{cases} V_1^{<2>} = V_2^{<2>} \\ i_1^{<2>} = \dfrac{V_2^{<2>}}{Z_2} - i_2^{<2>} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1^{<2>} \\ i_1^{<2>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ {Z_2}^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^{<2>} \\ i_2^{<2>} \end{bmatrix}$$
$$\left[\,T_p^{<2>}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ {Z_2}^{-1} & -1 \end{bmatrix} \tag{e192}$$

- Z de la cellule

$$\begin{cases} V_2^{<1>} = V_1^{<2>} \\ i_2^{<1>} = -i_1^{<2>} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1^{<1>} \\ i_1^{<1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -{Z_2}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^{<2>} \\ i_2^{<2>} \end{bmatrix}$$
$$[\,T_L] = \begin{bmatrix} [Z_1/Z_2] + 1 & -Z_1 \\ {Z_2}^{-1} & -1 \end{bmatrix} \tag{e193}$$

Il ressort que la matrice T_L est bien en adéquation avec la fonction de transfert vue en (e188).

Un parcours similaire peut être accompli pour déduire un réseau de Cauer vu au chapitre H6.1 en associant un quadripôle en π (P14.1) et une impédance en parallèle $Z_4 = 1/Y_4$.

$$\begin{bmatrix} V_1^{<1>} \\ i_1^{<1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\,Y_2 + Y_3\,)/Y_2 & -1/Y_2 \\ [\,Y_1\,(Y_2 + Y_3)/Y_2\,] + (\,Y_3 + Y_4\,) & -Y_1/Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^{<2>} \\ i_2^{<2>} \end{bmatrix} \tag{e194}$$

La tension $V_2^{<2>}$ et le courant $i_2^{<2>}$ correspondent aux conditions appliquées aux bornes du nouveau dipôle Z_4 relié au réseau en π.

Cette première relation autorise la détermination des expressions des impédances propres aux nœuds 1 et 2 du réseau décrit en H6.1.

$$\begin{bmatrix} i_1^{<1>} \\ i_1^{<1>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ Y_1 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{<1>} \\ V_2^{<2>} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ Y_1 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{<1>}/i_1^{<1>} \\ V_2^{<2>}/i_1^{<1>} \end{bmatrix} \tag{e195}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{n=2}^{<1>} \\ Z_{n=2}^{<2>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ Y_1 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Z_{n=2}^{<1>} \\ Z_{n=2}^{<2>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,p + \dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{R_1} \\ C_1\,p & C_2\,p + \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{e196}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{n=2}^{<1>} \\ Z_{n=2}^{<2>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_1 + R_2 + R_1\,R_2\,C_2\,p}{1 + [R_1\,C_1 + R_2\,C_2 + R_2\,C_1]\,p + R_1\,R_2\,C_1\,C_2\,p^2} \\ \dfrac{R_2}{1 + [R_1\,C_1 + R_2\,C_2 + R_2\,C_1]\,p + R_1\,R_2\,C_1\,C_2\,p^2} \end{bmatrix} \tag{e197}$$

Le premier terme du vecteur procure la fonction de transfert global du réseau vue (e188).

Le second fournit l'évolution des conditions entre les deux cellules RC ($n = 2$) constituant le réseau.

On peut en déduire l'expression de la réponse temporelle d'un réseau de Cauer à 2 cellules pour un échelon unitaire, à savoir :

$$Z_{n=2}^{<2>}(t) = R_2 \left[1 + \frac{1}{p_1 - p_2} \left[p_2 \, e^{t\,p_1} - p_1 \, e^{t\,p_2} \right] \right] \qquad \text{(e198)}$$

La Figure 131 décrit l'évolution temporelle des impédances des deux nœuds d'un réseau de Cauer à 2 cellules. Celui-ci est explicité en Table 61. La comparaison menée avec le logiciel Spice® est indiquée.

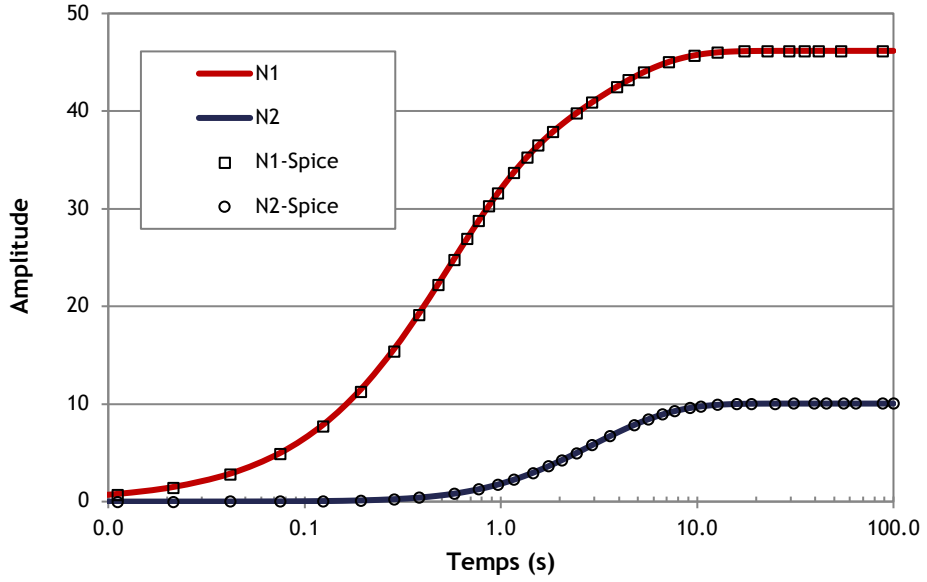


Figure 131 : Visualisation des réponses temporelles d'un réseau de Cauer d'ordre 2

Une généralisation de la forme de l'expression (e200), peut être développée à partir des V_i tensions du système. Celle-ci va pourvoir à l'analyse du comportement de réseau de Cauer d'ordre supérieur.

La matrice résultante a un rangement tri-diagonal (e199), tous les autres coefficients sont nuls.

$$\begin{bmatrix} Z_{n=j}^{<1>} \\ Z_{n=j}^{<2>} \\ Z_{n=j}^{<3>} \\ \vdots \\ Z_{n=j}^{<j>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,p + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & C_2\,p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & C_3\,p + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -\frac{1}{R_{j-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{R_{j-1}} & C_j\,p + \frac{1}{R_{j-1}} + \frac{1}{R_j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(e199)}$$

Sa structure est facilement exploitable. Ainsi toutes les capacités thermiques sont positionnées sur la diagonale et elles sont associées à la somme des éléments de chacune des lignes ou des colonnes.

En régime transitoire, l'emploi des quadripôles fournit une approche matricielle compacte pour formaliser la structure complexe d'un réseau mono-entrée mono-sortie afin d'étudier les fonctions de transfert de ses multiples échelons.

L'application de la méthode des quadripôles au domaine thermique a été étudiée par Carslaw et Jaeger [R67]. Les quadripôles thermiques traduisent la similitude entre un circuit électrique et un système thermique unidimensionnel homogène isotrope.

La température et le flux se substituent respectivement à la tension et au courant, décrits sur Figure 130

Comme vu précédemment, les grandeurs d'entrée et de sortie sont liées par une matrice de transfert. Celle-ci résume l'état thermique aux frontières du système.

$$\begin{cases} T_1 = A\,T_2 + B\,q_2 \\ q_1 = C\,T_2 + D\,q_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{(e200)}$$

Cette méthode explicite exacte est très répandue, les travaux d'Alain Degiovanni (LEMTA[15]) et de Denis Maillet sont à citer.

Ceux-ci ont été synthétisés dans la thèse Maranzana [R68]. Celui-ci a exploité cette approche pour le cas de composants électroniques de puissance (IGBT) ayant une structure pouvant être pyramidale constituée d'un empilement de multiples blocks isotropes [R69], lesquels sont refroidis par leur embase.

La solution analytique du système global est décrite par le produit de n matrices élémentaires, laquelle est résolue en régime fréquentiel.

$$\begin{bmatrix} T_1(j\omega) \\ q_1(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n+1}(j\omega) \\ q_{n+1}(j\omega) \end{bmatrix} = \left[[\,Mp_1\,]\,[\,Mp_2\,] \cdots [\,Mp_n\,] \right] \begin{bmatrix} T_{n+1}(j\omega) \\ q_{n+1}(j\omega) \end{bmatrix} \quad \text{(e201)}$$

Ces différents travaux démontrent qu'un système thermique unidirectionnel quelconque, sans limite d'éléments, peut être aisément formalisé au moyen d'une matrice de transfert.

En 2009, Vintrou [R49] a abordé le développement d'une solution analytique d'un système constitué d'un empilement de multiples couches auquel une condition de 3eme espèce est appliquée sur sa face inférieure.

Pour cela, il exprime les matrices de transfert intercouches sous la forme (e202).

$$[\,Mp_i\,] = \begin{bmatrix} ch(r_i\,H_i) & \dfrac{1}{r_i\,k_i}\,sh(r_i\,H_i) \\ r_i\,k_i\,sh(r_i\,H_i) & ch(r_i\,H_i) \end{bmatrix} \; avec \; r_i = \sqrt{\left(\frac{n_x\,\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y\,\pi}{W}\right)^2 + \frac{p}{a_i}} \quad \text{(e202)}$$

D'autre part, celui-ci peut être sollicité par plusieurs sources de chaleur surfaciques.

Ainsi, son analyse introduit le traitement d'un système linéaire plus complet, lequel est défini par l'anglicisme Multiple-Input/Single-Output (MISO).

Les hypothèses prises en compte pour la résolution de l'équation de la chaleur seront explicitées au paragraphe K2.1.

Celui-ci aborde l'établissement de solutions analytiques destinées à modéliser le substrat d'une carte électronique (Figure 45).

H11. Reconstruction numérique des réponses temporelles

La formulation des réponses temporelles du réseau, telles que les expressions (e116) et (e198), est dépendante de la forme du signal d'entrée.

En effet, celles-ci supposent une application instantanée et permanente de l'activation, laquelle est représentée par une fonction Heaviside (e103).

Il est clair que pour des réseaux d'ordre supérieur (e199), l'établissement de ces formulations est très vite rébarbatif. Comme évoqué au paragraphe H3, la méthode de Gaver-Stehfest (1970) procure une alternative numérique au développement de ces formulations analytiques.

Ainsi, quelle que soit la réponse temporelle recherchée, celle-ci est ajustée au moyen d'une fonction unique, simplifiée.

$$Z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} \cong \frac{ln\,2}{t} \sum_{i}^{nV} \left[V_i\,F\left(\frac{ln\,2}{t}\,i\right) \right] \quad \text{(e203)}$$

Le paramètre nV est le nombre de coefficient V_i pris en compte pour affiner la précision de l'ajustement. En pratique, ce nombre est limité à 10 et les valeurs des coefficients V_i sont tabulées.

La Table 66 reprend les coefficients utilisés pour reconstruire la fonction temporelle.

Table 66 : Coefficients de Stehfest pour un nombre de sommation $nV = 10$

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
$\frac{1}{12}$	$\frac{-385}{12}$	1279	$\frac{-46871}{3}$	$\frac{505465}{6}$	$\frac{-473915}{2}$	$\frac{1127735}{3}$	$\frac{-1020215}{3}$	$\frac{328125}{2}$	$\frac{-65625}{2}$

Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que l'influence du nombre de sommation nV peut être étudiée en calculant un nouveau vecteur de valeur.

$$V_i|_{j=\frac{nV}{2}} = (-1)^{j+i} \sum_{k=\lfloor (i+1)/2 \rfloor}^{min\,(i,j)} \left[\frac{k^j\ (2k)!}{(j-k)!\ (k)!\,(k-1)!\ (i-k)!\ (2k-i)!} \right] \qquad \text{(e204)}$$

La Figure 132 démontre l'intérêt de cette méthode même si le nombre de sommation, pour limiter le temps de calcul, est inférieur à 10.

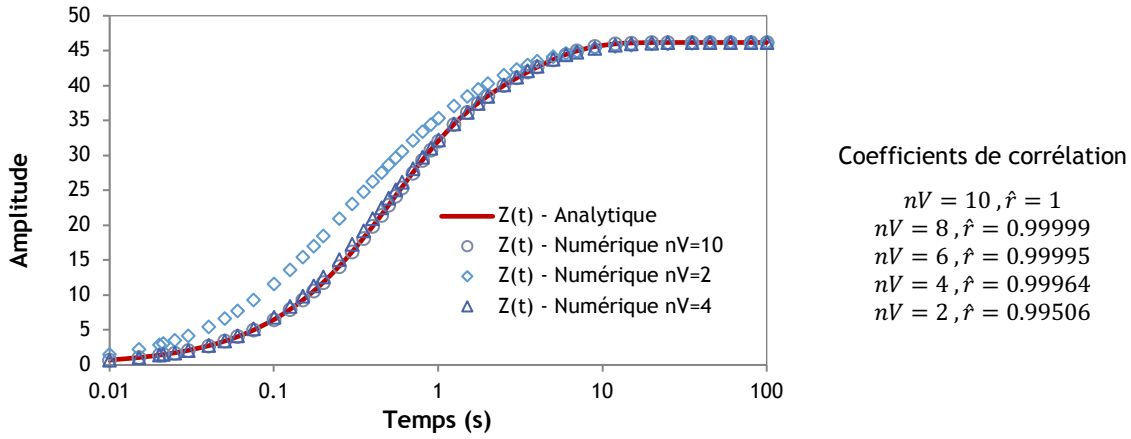


Figure 132 : Validation des réponses temporelles numériques d'un réseau de Cauer d'ordre 2

L'exemple présenté décrit l'inversion numérique de la fonction de Laplace $Z_{n=2}^{<1>}(p)$ définie en (e197), si celle-ci est soumise à un échelon unitaire.

Le profil thermique résultant est ensuite confronté à la réponse temporelle déduite de l'approche analytique (e116). Cette analyse a été reconduite pour l'expression $Z_{n=2}^{<2>}(p)$ (e197) et comparée avec succès à l'expression analytique fournie en (e460).

Indubitablement, la méthode de Stehfest est un moyen simple pour calculer la transformée inverse d'un réseau unidirectionnel à multiples cellules RC.

H12. L'utilisation des méthodes d'optimisation stochastique

A l'instar des travaux (e153) et (e154) basés sur la méthode de Routh, la procédure d'identification des paramètres d'une fonction d'ordre réduit est le souvent décomposée en deux étapes. Dans un premier temps on détermine les éléments du dénominateur, en particulier la connaissance des pôles dominants (λ_i), puis par la suite ceux du numérateur.

$$Z_n(p) = \frac{N_{n-1}(p)}{D_n(p)} = \frac{N_{n-1}(p)}{(p+\lambda_1)\,(p+\lambda_2)\cdots(p+\lambda_n)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(a_i\,p^i)}{(p+\lambda_1)\,(p+\lambda_2)\cdots(p+\lambda_n)} \qquad \text{(e205)}$$

Les formulations (e197) et (e199) démontrent que l'expression du dénominateur est identique en tout point d'un réseau unidirectionnel, un point qui justifie l'intérêt de cette approche.

Là encore, cette procédure de réduction d'un système est calculable au moyen d'une optimisation stochastique, telle que l'approche proposée par Young et al. en 2002.

Son principe et ses résultats sont exposés dans les travaux de Malti [R70].

Plusieurs autres approches heuristiques ont été étudiées et comparées, telles que :

- Les algorithmes évolutionnaires par Yadav [R71],
- Les algorithmes génétiques par Saini [R72], et Kranthi-Kumar [R73],
- Les algorithmes à essaim de particules par Panda [R74],

Le principal avantage des méthodes d'optimisation stochastiques est de pouvoir imposer à la solution à identifier des contraintes physiques telles que tous les paramètres soient réels et positifs ou bien une forme en fraction continue des réseaux réduits (e140) et de multiples objectifs d'optimisation.

A titre d'exemple, pour certains de ces travaux, la fonction coût doit minimiser les moments ou les paramètres de Markov de la fonction réduite sur ceux de la fonction originelle.

$$f(m) = \sum_{i=0}^{\alpha} \left(1 - \frac{\tilde{m}_i}{m_i}\right)^2 \quad ou \quad f(j) = \sum_{i=0}^{\beta} \left(1 - \frac{\tilde{j}_i}{j_i}\right)^2 \tag{e206}$$

Un cas pratique d'optimisation stochastique est donné par Lavania [R75].

Cet auteur se base sur la connaissance de α moments et de β paramètres de Markov puis il mène une recherche itérative d'une fonction rationnelle réduite au moyen de l'approximant de Padé.

$$\tilde{Z}_r(p) = \frac{\tilde{a}_1\, p^{r-1} + \tilde{a}_1\, p^{r-2} + \cdots + \tilde{a}_r}{p^r + \tilde{b}_1\, p^{r-1} + \cdots + \tilde{b}_r} \quad avec\ \tilde{a}_0 = 0\ et\ \tilde{b}_0 = 1 \tag{e207}$$

Pour plus de clarté sur la procédure employée pour le calcul des moments ou des paramètres de Markov, celle-ci est mise sous une forme matricielle. Ainsi pour les moments, les coefficients du dénominateur sont disposés en colonne de manière décroissante dans la matrice triangulaire inférieure.

$$\tilde{m}_r = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0 \\ \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{m}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{r-1} & b_r & 0 & \cdots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_r & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{r-1} & b_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_r \\ a_{r-1} \\ \vdots \\ a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{e208}$$

$$\tilde{j}_r = \begin{bmatrix} \tilde{j}_0 \\ \tilde{j}_1 \\ \tilde{j}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{j}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{r-1} & b_{r-2} & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ b_r & b_{r-1} & b_{r-2} & \cdots & b_0 & 0 \\ 0 & b_r & b_{r-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{e209}$$

Le meilleur candidat est celui qui satisfait au mieux les deux critères énoncés en (e206).

L'intérêt par rapport à la méthode utilisée par Vishwakarma est de pouvoir augmenter le nombre de conditions d'ajustement ($\alpha + \beta \leq 2r$).

Les travaux cités présentent des fonctions réduites ayant des qualités d'ajustements équivalentes aux méthodes décrites précédemment. Ces travaux restent souvent restreints à une réduction de réseau « Single-Input/Single-Output » d'un système linéaire invariant.

Pour des systèmes plus complexes, supposant de multiples sources de chaleur (i) et de nombreux chemins d'évacuation de la chaleur (o), la détermination des fonctions de transfert s'avère vite rédhibitoire.

$$Y_{o=1}(p) = \frac{N_{n-1}(p)}{D_n(p)}\, U_{i=1}(p) \;\rightarrow\; Y_o(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_{n-1}(p)}{D_n(p)}\, U_i(p) \qquad \text{(e210)}$$

A celle-ci, il faudra associer la définition des résistances et des capacités thermiques du réseau (H8), laquelle est loin d'être évidente.

En définitive, l'emploi d'une forme matricielle [R78], évoqué au paragraphe H4, apparait plus pratique pour la création directe de réseaux thermiques de composants électroniques complexes.

Il est à noter que les approches de réduction évoquées ci-dessus sur l'ajustement de moments ou des paramètres de Markov sont parfaitement transposables à ce type d'approche.

H13. Réduction de modèle à multiples entrées et à multiples sorties

L'idée directrice du projet DELPHI était d'exploiter aussi bien les résultats d'un modèle numérique que ceux d'un ou plusieurs essais suffisants à valider son comportement thermique.

Ainsi le consortium à l'origine de cette méthodologie a décliné trois conditions aux limites basées sur l'utilisation de deux plaques froides.

Un concept désigné par l'anglicisme « Dual cold plate Measurement », lequel a fait l'objet de nombreux travaux [R79] en particulier ceux de Rencz et de Székely [R80].

Les plaques froides sont activées séparément ou bien conjointement afin reproduire des conditions de Dirichlet sur les faces supérieure ou/et inférieure du composant.

Le traitement de ces mesures a été commenté au paragraphe H6.2.

A l'opposé de cette démarche, un autre axe de recherche considère la création d'un modèle réduit à partir de la discrétisation spatiale d'un modèle numérique.

La taille du système matriciel à calculer est conditionnée par le nombre de mailles nécessaire pour reproduire correctement les phénomènes physiques à retranscrire. Les coûts de calcul numérique sont généralement conséquents et de ce fait ils restreignent l'analyse de son comportement à une unique condition de fonctionnement.

D'autre part, sa résolution requiert une algorithmie spécifique capable de traiter des matrices creuses, où seul un faible nombre de valeurs sont non-nulles et localisées sur plusieurs bandes.

Il en découle que la substitution du modèle initial par un modèle réduit capable de conserver son comportement physique est un besoin crucial si l'on envisage d'explorer une large gamme de sollicitations. La méthode de réduction vise alors à créer un modèle approché, suffisamment précis, calculable à partir d'un plus petit ensemble de données.

Pour cela, on recherche une nouvelle représentation des états $X(t)$ du système [R81].

Celle-ci est reliée à une opération de changement de variables visant à limiter sa taille.

$$X \cong \boldsymbol{V}\, X_r \quad o\grave{u}\; X \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\; et\; \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{r}},\; X_r \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{r}} \qquad \text{(e211)}$$

La matrice $\boldsymbol{V}$ correspond à une matrice de passage d'ordre $[n, r]$. Celle-ci a pour propriété d'être inversible et orthogonale telle que :

$$\boldsymbol{V^T V = I_r} \qquad \text{(e212)}$$

La substitution de X conduit à l'écriture d'un nouveau système possédant de q entrées et s sorties, lui-même linéaire et invariant, tel que :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{C}\,\dfrac{dX(t)}{dt} + \boldsymbol{G}\,X(t) = \boldsymbol{B}\,U(t) \\ Y(t) = \boldsymbol{A^T}\,X(t) \end{cases} (\times \boldsymbol{V^T}) \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{V^T C\,V}\,\dfrac{dX_r(t)}{dt} + \boldsymbol{V^T G\,V}\,X_r(t) = \boldsymbol{V^T B}\,U(t) \\ Y(t) = \boldsymbol{A^T\,V}\,X_r(t) \end{cases} \qquad \text{(e213)}$$

$$\boldsymbol{C\ et\ G} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{n}},\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{q}}\ et \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{s}\times \boldsymbol{n}}$$

Celui-ci ne fait intervenir que des matrices inversibles de taille réduite ($r \ll n$), notre objectif.

$$\boldsymbol{\Sigma_r} = \begin{cases} \boldsymbol{C_r}\,\dfrac{dX_r(t)}{dt} + \boldsymbol{G_r}\,X_r(t) = \boldsymbol{B_r}\,U(t) \\ Y(t) = \boldsymbol{A_r}^{\boldsymbol{T}}\,X_r(t) \end{cases} \quad avec \quad \begin{matrix} \boldsymbol{C_r} = \boldsymbol{V^T C\,V}\,,\ \boldsymbol{G_r} = \boldsymbol{V^T G\,V} \\ \boldsymbol{B_r} = \boldsymbol{V^T B}\,,\ \boldsymbol{A_r}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A^T\,V} \end{matrix} \tag{e214}$$

Par la suite, il s'agit de déterminer un nombre réduit de vecteurs d'état X_r capable d'approximer le comportement du système par une combinaison linéaire des r colonnes d'une matrice orthogonale $\boldsymbol{V}$.

H13.1. Méthodes d'approximation basées sur la correspondance des moments

Cette approche dont le principe a été décrit au cours des paragraphes précédents (H9 et H12) pour des réseaux RC simples est généralement désignée par l'anglicisme « Multi-point Matching Moments ».

Une des méthodes parmi les plus abouties pour la modélisation des composants électronique a été mise au point par Codecasa [R81]. Le processus de création est dénommé « Fast novel thermal analysis simulation tool for integrated circuits » (FANTASTIC).

Les travaux menés par Magnini [R82] décrivent les évolutions qui ont été progressivement apportées à cette approche pour améliorer ces performances.

A l'instar de l'équation (e178), l'identification des moments se base sur l'impédance du système définie dans le domaine de Laplace ainsi que sur son développement en série de MacLaurin.

$$Z(p) = \boldsymbol{A}^T\,(\,\boldsymbol{C}\;p + \boldsymbol{G}\,)^{-1}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T\,(\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Y}\,p)^{-1}\,\boldsymbol{R} \tag{e215}$$

$$En\ fixant :\ \boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{G^{-1}C}\ \ et\ \ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{G^{-1}B}$$

$$D'o\grave{u}\ \ \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dp^i}Z(p)\bigg|_{p=0} \rightarrow\ \ \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{Y}^i\,\boldsymbol{R} \tag{e216}$$

$$Avec\ \ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{R}\ \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}}\ et\ \boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{q}}$$

A partir de cette définition matricielle, il est possible de vérifier, par exemple, les valeurs des moments du réseau de Cauer d'ordre 3 (e148), dont les données thermiques sont décrites en Table 61 puis de les comparer aux données fournies en Table 64.

Dans ce cas, les trois matrices de ce système mono-entrée mono-sortie ont pour expressions :

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ \ et\ \ R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.354 \\ 12.991 \\ 2.49 \end{bmatrix} \tag{e217}$$

$$\boldsymbol{Y} = -\begin{bmatrix} C_1\,(R_1 + R_2 + R_3) & C_2\,(R_2 + R_3) & C_3\,R_3 \\ C_1\,(R_2 + R_3) & C_2\,(R_2 + R_3) & C_3\,R_3 \\ C_1\,R_3 & C_2\,R_3 & C_3\,R_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.603 & 1.663 & 4.141 \\ 0.169 & 1.663 & 4.141 \\ 0.032 & 0.319 & 4.141 \end{bmatrix} \tag{e218}$$

La forme de la matrice des conductances ($\boldsymbol{Y}$) est déduite de l'expression généralisée (e199).

La méthode d'ajustement des moments, développée par ces deux auteurs, introduit la projection orthogonale des matrices du système dans un sous-espace dit de Krylov [R83], tel que :

$$K_r\,(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{R}) = \{\,\boldsymbol{R}, \boldsymbol{YR}, \boldsymbol{Y^2R}, \cdots, \boldsymbol{Y^iR}, \cdots, \boldsymbol{Y^{r-1}R}\,\} \rightarrow \boldsymbol{V} = \{\,\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \cdots, \boldsymbol{V_i}, \cdots, \boldsymbol{V_r}\,\} \tag{e219}$$

Où $\boldsymbol{V}$ est la base orthonormée du sous-espace de Krylov $K_r\,(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{R})$ engendré par $\boldsymbol{R}$.

L'indice r décline la dimension du sous-espace. Il fournit le nombre de colonnes, lesquelles sont constituées de $n \times q$ matrices, si $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n \times q}$.

A l'image des travaux précédents, lorsque $\boldsymbol{R}$ est un vecteur ($\mathbb{R}^{n \times 1}$) on peut déduire que :

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Y}^i \boldsymbol{R} = \boldsymbol{V} \boldsymbol{A_r}^T \boldsymbol{Y_r}^i \boldsymbol{R_r} \quad \text{(e220)}$$

Où i définit nombre de moments retenu pour ajuster le modèle réduit sur ceux de la fonction originelle.

La création de la base orthonormée est réalisée au moyen d'une méthode de projection itérative connue sous le nom de procédé d'Arnoldi.

Son processus est classiquement établi, si $\mathrm{r} \ll n$, via une ortho-normalisation de type Gram-Schmidt comme l'explicite le pseudocode, ci-après.

Pseudocode 3: Logique de l'algorithme d'Arnoldi - Gram Schmidt Classique (CGS)

Choix du vecteur initial : $v_1 = R_1/\|R\|$

Itération : Tant $j = 1, 2, \cdots, m$ **faire**

Calculer pour $i = 1, \cdots, j$ **:**

$h_{i,j} = v_i{}^T \boldsymbol{Y}\ v_j$

$w_j = \boldsymbol{Y}\ v_j - \sum_{i=1}^{j} h_{i,j}\, v_i$

$h_{j+1,j} = \|w_j\|$ si $h_{j+1,j} = 0$, arrêt

$v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$

Fin

Son intérêt est de restreindre le calcul à des multiplications de matrices et de vecteurs.

L'algorithme procède d'une manière récursive à une décomposition de la matrice $\boldsymbol{Y}$, dite de type QR.

La matrice $\boldsymbol{V}$ résultante est orthogonale. La matrice $\boldsymbol{H}$, quant à elle, a la forme d'une matrice supérieure de Hessenberg d'ordre m.

Cette dernière est presque triangulaire, tous ses éléments en dessous de la première diagonale sont nuls ($h_{i,j} = 0\ \forall\ i > j + 1$).

Le terme $h_{j+1,j}$ est le critère d'arrêt de la décomposition de Hessenberg par la méthode d'Arnoldi.

Ainsi, le processus peut être stoppé à un ordre donné, par exemple $m = r$, avec $r \ll n$, on parle de décomposition incomplète. L'algorithme fournit la forme du système réduit recherché, à savoir :

$$\boldsymbol{Y}\, \boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{V_r}\, \boldsymbol{H_r} \iff \boldsymbol{Y_r} = \boldsymbol{H_r} = \boldsymbol{V_r}^T \boldsymbol{Y}\, \boldsymbol{V_r} \quad \text{(e221)}$$

La matrice orthogonale $\mathbf{V_r}$ permet de s'affranchir d'une inversion de la matrice $\mathbf{Y}$, car $\mathbf{V_r}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V_r}^{-1}$.

L'ordre minimal de réduction r peut être validé en comparant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{Y}$, à celles de la matrice de Hessenberg ($\boldsymbol{H_r}$). Théoriquement cette dernière doit avoir les mêmes valeurs propres.

De manière à mieux appréhender cette construction d'un système réduit, les vues d'un exemple d'un réseau de type SiSo, traité par Poussot-Vassal [R84] sont reprises ci-dessous.

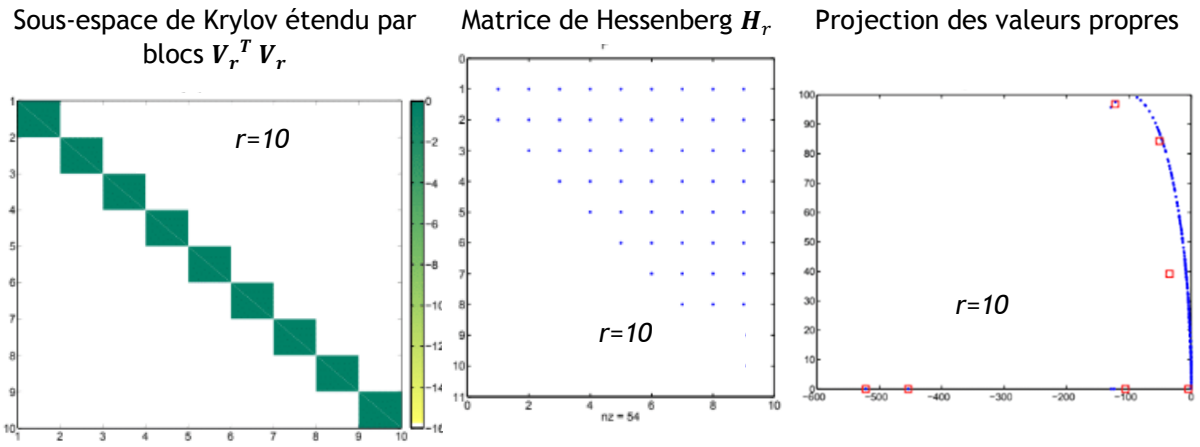


Figure 133 : Visualisation de la transformation d'un système SiSo de380 éléments

Ainsi, la vue de gauche montre la structure par bloc des sous-espaces de Krylov, la matrice de Hessenberg déduite de l'algorithme d'Arnoldi et la correspondance des valeurs propres du système réduit vis-à-vis de celles du système original.

Lorsque le groupement $\boldsymbol{R}$ comprend de multiples colonnes ($\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n \times q}$), plusieurs vecteurs ($q$) de départs sont à considérer, comme le décrit la méthode dite « passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm » ou répertoriée sous l'acronyme PRIMA [R85].

Cette méthode est en fait une amélioration de la méthode d'Arnoldi, elle permet de s'affranchir de la décomposition de Hessenberg grâce à une projection explicite des matrices $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{G}$.

Les spécificités et les limitations de cette méthode, ainsi que les alternatives envisageables, sont débattues par Martins [R66] dans son mémoire de thèse.

Pour cet auteur, le principal critère de choix d'une méthode de réduction est la capacité à conserver la géométrie des ports d'entrée et de sortie, ceci dans le but d'interconnecter plusieurs modèles d'ordre réduit, un objectif que nous partageons.

Indubitablement la déduction de la base orthogonale s'avère vite extrêmement compliquée et chronophage en termes de ressources de calcul.

H13.2. Méthodes d'approximation des modes

Cette autre classe de méthodes propose de projeter une ou plusieurs simulations d'un système thermique sur un jeu de bases réduites.

La décomposition du système utilise la résolution de l'équation de la chaleur au moyen de la méthode de séparation des variables temporelles et spatiales, laquelle sera mise en pratique au Chapitre V.

$$\boldsymbol{T}(x,y,z,t) = f(x)\, g(y)\, h(z)\, i(t) = f(M)\, i(t) \qquad \text{(e222)}$$

Dès lors, on cherche à déterminer une base de fonctions harmoniques sous la forme de séries de Fourier.

$$\boldsymbol{T}(M,t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)\, V_i(M) \qquad \text{(e223)}$$

La géométrie du système étant extraite du modèle numérique, il reste à définir les fonctions d'excitation $x_i(t)$.

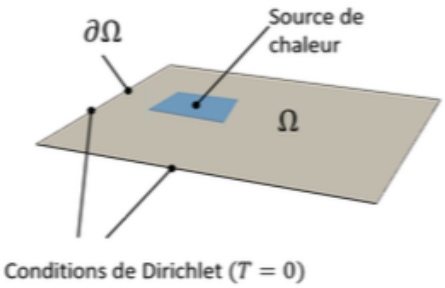
Celle-ci peut être conduite par exemple à partir d'un jeu de scenarii, un concept proche de Nk scénarii de la méthode DELPHI.

Les résultats d'un jeu de sollicitations sont regroupés dans une matrice, dite « matrice des Snapshots ».

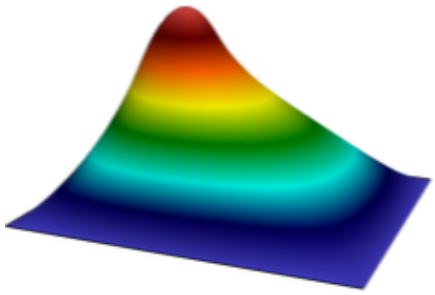
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} u(M_1,t_1)^1 & u(M_1,t_2)^1 & \cdots & u(M_1,t_{Nt-1})^1 & u(M_1,t_{Nt})^1 \\ u(M_2,t_1)^1 & u(M_2,t_2)^1 & \cdots & u(M_2,t_{Nt-1})^1 & u(M_2,t_{Nt})^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(M_{Nn},t_1)^1 & u(M_{Nn},t_2)^1 & \cdots & u(M_{Nn},t_{Nt-1})^1 & u(M_{Nn},t_{Nt})^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(M_1,t_1)^k & u(M_1,t_2)^k & \cdots & u(M_1,t_{Nt-1})^k & u(M_1,t_{Nt})^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\boldsymbol{Nn}\times\boldsymbol{Nk})\times\boldsymbol{Nt}} \quad \text{(e224)}$$

Naturellement, celles-ci sont liées à une ou plusieurs fonctions d'excitation, au pas de temps ou à la durée de la simulation qu'il faut choisir judicieusement. Par exemple, la stabilisation complète du système peut s'avérer difficile à obtenir.

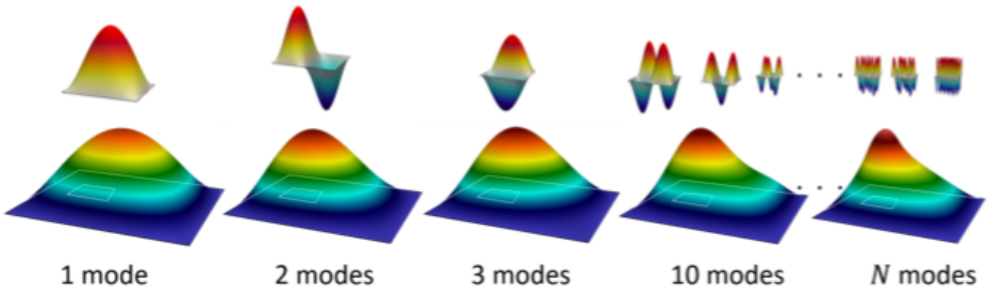
Comme mentionné l'identification se base sur la décomposition proposée Joseph Fourier, lequel a démontré que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus permettent de représenter n'importe quelle fonction temporelle comme figuré ci-dessous.



Cas de référence



Champ de température de référence



Reconstruction du champ de température de référence

Figure 134 : Exemple d'approximation du comportement d'un système (données LMEE)

Ainsi, une fonction cosinus dont la périodicité va être accentuée est utilisée pour représenter le comportement du système étudié.

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \cos(n\,\omega_i\,t + \psi_n) \quad \text{(e225)}$$

Par cette approche, la description des états du système peut être approximée par un jeu approprié de modes propres. Leur choix est à définir, par exemple, ceux possédant les plus grandes constantes de temps ou les modes les plus énergétiques comme l'explicite Da Silva [R86] sur un cas de refroidissement thermique d'une carte électronique.

Cet auteur s'appuie sur une méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres, connue sous l'acronyme POD, et il décline une analyse sur l'influence de ce critère sur la précision d'un modèle d'ordre réduit de sa carte.

Les modes sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres λ_i, tel que :

$$\boldsymbol{S\,S^T V} = \boldsymbol{\Lambda\, V} \quad o\grave{u}\ \boldsymbol{\Lambda} = [I]_m\,[\lambda]_m \tag{e226}$$

$$avec\ \lambda_1 > \lambda_i > \cdots > \lambda_m$$

La comparaison est menée vis-à-vis d'une méthode de troncature basée sur le critère de Marshall, laquelle ne conserve que les r premiers modes propres vérifiant ce critère.

La réduction du modèle consiste à sélectionner mathématiquement un nombre minimal de modes dominants pour établir un modèle du champ température à chaque instant t sous la forme recherchée, à savoir :

$$\boldsymbol{T}(M,t) = \sum_{i=1}^{m} x_i(t)\,V_i(M) \ \rightarrow\ \boldsymbol{T}(M,t) \approx \sum_{i=1}^{r} \tilde{x}_i(t)\,\tilde{V}_i(M) = \boldsymbol{V\,X_r} \tag{e227}$$

Où $x_i(t)$ et V_i sont respectivement le vecteur d'état à tout instant et le vecteur propre du mode i.

On retrouve la représentation vue précédemment (H13) des états $X(t)$ du système et les transformations matricielles (e213)-(e214) destinées à la résolution du système sont reconduites.

Indubitablement, la pertinence du choix des modes est le cœur de l'approche modale [R87].

Plusieurs types de modes peuvent être couplés, par exemple, les modes de Dirichlet (Figure 134) et de Steklov (conditions de Fourier sur les surfaces externes), puis amalgamés, à l'instar de l'approche développée, ces dernières années, par le LMEE.

$$\boldsymbol{T}(M,t) = \boldsymbol{V^{<D>}\,X_r^{<D>}} + \boldsymbol{V^{<S>}\,X_r^{<S>}} \tag{e228}$$

Celle-ci est explicitée par Oulefki [R88], lequel expose l'intérêt de conserver les modes mineurs sous une forme amalgamée avec les modes dominants.

Ceux-ci sont alors désignés sous le nom de pseudo-modes. On parle de réduction par amalgame modal [R89]. Ce processus de création est dénommé « Simulateur par Analyse Modale utilisant des modes de Branches Amalgamée » (SAMBA).

En définitive, ces différentes méthodes d'approximation permettent de réduire fortement les équations du système linéaire (**Σ**) issu d'un modèle numérique discrétisé avec une perte de précision pouvant être minimisée.

Leur indéniable avantage est de conserver l'information sur le comportement du système complet et par conséquent de pouvoir le reconstruire à tout moment.

Il est clair, que le choix de la méthode la plus adaptée nécessite d'analyser de nombreux travaux académiques afin de statuer sur leur pertinence et leur performance à une problématique donnée.

Malgré tout ce nouveau modèle multidimensionnel présente des dimensions bien supérieures au regard d'un modèle nodal inspiré de la méthodologie proposée par le consortium DELPHI.

Enfin, si les méthodes de réduction pour des systèmes linéaires de grandes dimensions sont matures, la résolution de système non-linéaire, notre besoin, reste à parfaire.

H14. Concepts préexistants de création d'un réseau nodal multidirectionnel

Une première démarche concernant la création de réseau multidirectionnel est déclinée dans les travaux de Marami [R28].

Logiquement, une capacité thermique est attribuée au nœud sensible à observer. Puis cet auteur propose de scinder en deux tous les chemins déterminés par l'optimisation dans le domaine spatial afin d'introduire une capacité thermique sur ces nœuds (C_i).

Les nœuds de surface ne sont pas considérés dans l'établissement du modèle temporel.

La représentation de la matrice des capacités synthétise l'idée directrice de l'optimisation recherchée.

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{pmatrix} C_1 = C_J & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_i & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{i+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n \end{pmatrix} \quad \text{(e229)}$$

La première capacité thermique C_J est liée au nœud de jonction. Les nœuds associés à une surface externe ($2 \leq C_x < C_i$) ont une capacité thermique nulle.

Cette décomposition des chemins thermiques est également plébiscitée par Christiaens et al. [R76] pour intégrer à l'optimisation des conditions de première espèce. Dans ce cas particulier, les capacités des nœuds externes n'ont aucune influence et la présence de plusieurs nœuds internes favorise l'ajustement.

D'autre part, cet auteur introduit la notion d'un facteur d'ajustement du découpage des résistances même si ces travaux présentés font état d'une valeur égale à 0.5.

Par exemple, pour un nœud interne, dénommé f, la résistance thermique initiale R_{ji} est décomposée en deux nouvelles résistances, nommées $R_{i,f}$ et $R_{f,j}$, lesquelles sont ensuite incorporées au réseau.

$$R_{ji} = \gamma\, R_{i,f} + (1-\gamma)\, R_{f,j} \quad \text{(e230)}$$

Le paramètre, dénommé γ, est destiné à optimiser la réponse temporelle du nouveau réseau.

A l'instar des travaux Marami, l'étude de Christiaens ne fournit aucune information sur la technique minimisation utilisée, ni sur sa pertinence ou sa robustesse.

Un autre exemple d'optimisation d'un modèle nodal dynamique est abordé par Salleras [R77].

L'optimisation est établie à partir d'une méthode non-linéaire des moindres carrés, sans doute Levenberg-Marquardt, mais là encore la qualité de l'ajustement n'est pas débattue.

H15. Constat sur l'état de l'art des modèles nodaux dynamiques

Cet exposé des techniques de création de réseaux nodaux, sous une forme matricielle, a permis d'initier une réflexion sur la modélisation des composants électroniques en régime instationnaire.

Plusieurs idées ont été exploitées afin de définir un nouveau concept de modèle nodal, lequel est désigné sous l'appellation anglo-saxonne « Dynamic Compact Thermal Model », ou par l'acronyme DCTM.

Cette analyse a souligné que l'établissement d'un modèle nodal est dans la plupart des cas effectué en considérant un transfert de chaleur supposé unidirectionnel.

Malgré la simplicité des réseaux déduits (Foster, Cauer, quadripôles), cette approche est loin d'être satisfaisante dans un cadre du refroidissement d'une carte électronique où plusieurs modes de transferts de la chaleur sont couplés pour maintenir sa température interne maximale en deçà d'une valeur limite.

Dès lors, la représentativité d'un modèle nodal est liée au nombre de nœuds retenus pour reproduire au mieux les phénomènes observés.

Il en découle que les techniques de réduction utilisées vont dépendre du nombre d'observables et de la précision souhaitée, un compromis est à trouver.

Par exemple, si l'on considère la réduction mathématique d'un modèle numérique, un seuil de précision est fixé préalablement, ceci au détriment de la simplicité du réseau. In fine, la taille finale du modèle réduit reste aléatoire.

D'autre part, de par leur nature intrinsèque les composants électroniques présentent l'inconvénient majeur d'être des systèmes non linéaires, aussi d'autres voies doivent être considérées pour aborder la modélisation plus ou moins réaliste de leur comportement thermique.

I. AU-DELA DE LA METHODOLOGIE DELPHI

I1. Mise en œuvre d'un réseau multidirectionnel temporel

En 2013, afin de maitriser le processus d'optimisation d'un réseau nodal temporel, un doctorant a été affecté à cette nouvelle thématique de recherche. L'objectif principal de la thèse CIFRE de Cheikh DIA se proposait, in fine, d'étudier la capacité de reproduire, avec une très bonne précision, la variation temporelle des températures internes d'un composant électronique.

Les principales étapes liées à la détermination de capacités thermiques d'un réseau sont :

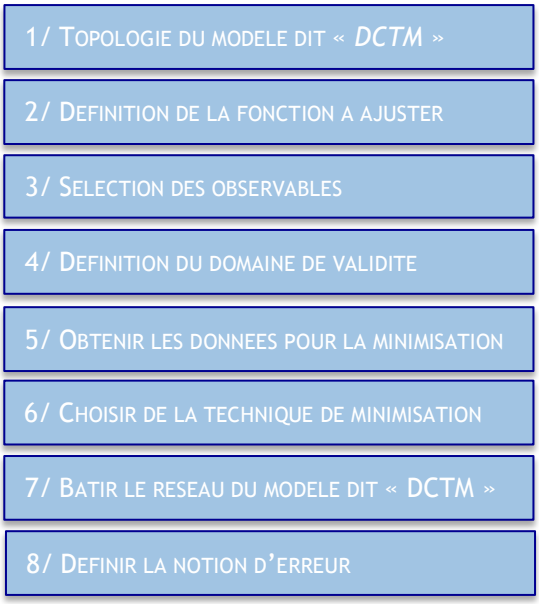


Figure 135 : Processus lié à la création d'un modèle nodal dynamique

- Étape 1 : Topologie initiale du modèle DCTM

  Le processus suppose que les valeurs du réseau de résistance ont été ajustées en exploitant les résultats des simulations des scenarii mis en place par la méthodologie DELPHI ou le standard JEDEC. La topologie du réseau (nN nœuds) ainsi que ses conductances thermiques $Y_{i,j}$ du réseau sont connues et il reste à ajouter à chacun de ces nœuds internes et externes du modèle, les valeurs optimisées des capacités thermiques, notées C_i.

- Étape 2 : Définition de la fonction à ajuster

  La résolution pour calculer les températures et les flux donnant les performances réseau au cours du temps est opérée en étendant la définition de loi des nœuds au domaine temporel :

$$Q_i = C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{nN} Y_{i,j}\left(T_i - T_j\right) + Y_{i,ext}\left(T_i - T_\infty\right) \qquad \text{(e231)}$$

  Un jeu de « l » nouvelles conditions aux limites indépendantes des conditions statiques reste à formaliser pour établir l'expression des conductances externes $Y_{i,ext}$.

  La résolution de l'équation différentielle se base sur un schéma implicite (rétrograde en temps), inconditionnellement stable, proposée par la méthode d'Euler. Ainsi la dérivée temporelle est décrite sous sa forme discrète d'ordre 1.

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} \cong \frac{T_i^{<\tau>} - T_i^{<\tau-1>}}{\Delta t} \cong \frac{T_i^{<\tau>} - T_i^{<\tau-1>}}{t_\tau - t_{\tau-1}} \qquad \text{(e232)}$$

Ce schéma nécessite de résoudre à chaque étape temporelle un système linéaire dont la matrice est inversible. La résolution matricielle des températures de l'équation (e231), si, $T_\infty = 0$, est définie par :

$$[\,T^{<\tau>}\,]^{<l>} = \left[\frac{[I]_n\,[C]}{\Delta t} + [G] + [I]_n\,[G_{ext}]^{<l>}\right]^{-1}\left[[Q] + \frac{[I]_n\,[C]}{\Delta t}\,[\,T^{<\tau-1>}\,]^{<l>}\right] \qquad \text{(e233)}$$

Les températures à venir T^{τ} sont calculées à partir des températures courantes $T^{\tau-1}$ et des conditions de flux propres à celle-ci. Ainsi, ce schéma implique que les températures à cet instant soient connues. Le vecteur [C] correspond au chromosome des capacités thermiques à déterminer.

La stabilité de la méthode implicite permet de moduler le pas de temps afin de réduire ainsi le nombre d'iterations et par conséquent le temps de calcul. Naturellement, cette discrétisation du pas de temps ainsi que la durée d'activation de la source de chaleur requièrent un paramétrage.

- Étape 3 : Sélection des observables

L'ajustement des flux externes, par exemple dans les premiers instants de l'activation, est apparu peu judicieux.

Aussi, la fonction « coût » temporelle proposée est établie exclusivement sur la conformité des températures vues d'une part par le semi-conducteur (T_j) mais également sur celles des surfaces extérieures $(T_{n\neq j})$ de l'enveloppe du boitier.

$$f(T,t) = \frac{1}{nC\;nt}\sum_{k=1}^{nC}\sum_{n=1}^{nN}\sum_{t=0}^{nt}\left[\beta\left(\frac{T_{C_{j,t}}^{<k>} - T_{D_{j,t}}^{<k>}}{T_{D_{j,t}}^{<k>} - T_\infty}\right)^2 + \frac{(1-\beta)}{nN-1}\left(\frac{T_{C_{n\neq j,t}}^{<k>} - T_{D_{n\neq j,t}}^{<k>}}{T_{D_{n\neq j,t}}^{<k>} - T_\infty}\right)^2\right] \qquad \text{(e234)}$$

La prise en compte de toutes les températures externes constitue une des originalités de notre démarche.

Elle procure l'opportunité de pondérer tous les chemins thermiques qui participent, d'une manière significative, à l'évacuation de la chaleur de la puce.

- Étape 4 : Définition du domaine de validité

Un jeu de sollicitations indépendantes des conditions déclinées par la méthodologie DELPHI ou le standard JEDEC [R41] a été retenu par Cheikh Dia [55].

Ces conditions sont constituées d'un jeu de 10 scénarii de coefficients d'échange thermique (Fourier) appliqué également sur chacune des faces externes du modèle du composant.

Table 67 : Conditions aux limites destinées à la génération du modèle dynamique

Cas Test	Face	Face inférieure	Faces latérales
1	15	100	5
2	50	250	15
3	800	20	5
4	10^8	10^8	10^8
5	40	1000	15
6	10^8	100	50
7	1000	40	100
8	100	10^8	5
9	15	200	200
10	30	200	50

Ce nombre de scénarii limité est suffisant pour déterminer avec précision les capacités du réseau.

Dans l'approche proposée par Christiaens [R76], celui-ci se limitait également à un nombre réduit, à savoir 6 scénarii.

- Étape 5 : Obtention des données

  A l'instar des « CTMs », les « DCTMs » sont également créés sur la base des réponses temporelles d'un modèle numérique réaliste.

- Étape 6 : Méthode d'optimisation

  Pour reproduire avec précision, la réponse thermique du composant à une sollicitation pouvant évoluer au cours du temps, il a été retenu de traiter l'ensemble des données extraites de la simulation au moyen d'un algorithme génétique.

- Étape 7 : Minimisation des écarts

  Cette étape constitue le point crucial de l'algorithme d'optimisation.

  Elle fournit une fonction « coût » temporelle capable d'identifier un réseau probant, ceci quel que soit le composant traité.

  Il s'agit de fixer les critères de pondération de la fonction « objective » pour ajuster l'approximation des réponses temporelles des plusieurs observables.

- Étape 8 : Amélioration de la représentativité du réseau

  L'amélioration de la qualité de l'ajustement du modèle dynamique, si elle s'avère nécessaire, passe par la capacité à générer un ensemble de cellules d'éléments RC susceptible d'ajuster plus fidèlement les paliers de la montée, ou de la descente, en température du composant.

  En fait, il s'agit de discerner, moins grossièrement, le chargement thermique temporel des matériaux constitutifs du boitier électronique (H1). Ainsi les résistances thermiques du réseau nodal initial peuvent être scindées en deux (e230), voire en un nombre plus conséquent.

  Les valeurs distinctives de ces résistances internes fictives ainsi que celles des capacités thermiques des nouveaux nœuds sur lesquelles elles se raccrochent sont déduites d'un processus d'ajustement.

Pour résumer, le processus destiné à la génération d'un réseau spatio-temporel s'appuie sur :

- Une première étape inspirée de la méthodologie DELPHI, laquelle crée le réseau nodal spatial constitué de M résistances thermiques distinctes,
- La seconde étape, à partir d'un jeu de scénarios temporels additionnels, détermine les nN capacités thermiques à associer à chacun des nœuds du réseau de résistances thermiques,
- L'étape finale consiste, en fonction de la précision souhaitée, à scinder les chemins thermiques prépondérants pour introduire des nœuds « fictifs » internes.

I2. Pertinence des algorithmes génétiques pour la génération de réseaux RC

Les premiers résultats sont diffusés lors d'un workshop IMAPS (6) [8], du congrès de la SFT (5) [9].

Ces publications adressent dans un premier temps le cas d'un composant miniature (QFN16), lequel a été étudié en 2006 par Arunasalam [R34] à savoir un boitier de type QFN16 (Figure 67).

La qualité de l'ajustement pour un composant de taille supérieure (QFN32) a été décrite lors de la conférence internationale THERMINIC (3) [10]. Celle-ci a également été confirmée sur d'autres références, telles que des boitiers QFN48 et QFN64.

Les principaux écarts constatés entre le modèle numérique original et sa représentation sous une forme nodale approximée se situent lors des tout premiers instants de la sollicitation d'un semi-conducteur. Ceux-ci seront à considérer avec précision lors des phases d'activation et de désactivation des fonctions du semi-conducteur.

Toutefois, ces analyses démontrent la pertinence d'un processus de déduction de réseaux nodaux statique et dynamique basé sur l'utilisation des algorithmes génétiques.

D'autre part, ces derniers s'avèrent adéquats pour parfaire la qualité d'un modèle thermique dynamique par l'ajout de nœuds complémentaires, dits fictifs.

I3. Des modèles dynamiques destinés aux composants intégrant deux puces

La création de modèles nodaux transitoires est étendue aux composants électroniques disposant de deux puces juxtaposées sous une forme pyramidale (Figure 28).

Cette approche, présentée lors de la conférence SEMI-THERM (7)-2012 [11], ouvre la voie à la génération systématisée de modèles nodaux dits « dynamic multi-junction model », un champ d'investigation pratiquement inexploré.

Ainsi, le modèle nodal généré considère deux nœuds jonction et 4 nœuds externes pour décrire le comportement des surfaces : supérieures (2 nœuds), inférieures (2 nœuds) et latérales (1 nœud).

Le principe de subdivision des résistances du réseau est appliqué, 3 nœuds supplémentaires sont associés au réseau, ceci de manière à garantir une très bonne adéquation entre les prédictions du modèle numérique détaillé et son modèle nodal.

L'évolution temporelle des températures, maximale ou moyenne, des deux semi-conducteurs empilés au sein du boitier électronique, est dès lors observable, ceci tout au long des cycles d'activation ou de désactivation. C'est une nouvelle avancée pour enrichir le spectre de la méthodologie de création de modèles compacts de type DELPHI.

Il s'agit d'une réponse argumentée pour l'extension de la méthodologie DELPHI aux composants multi-puce dans le domaine temporel.

I4. Discussion sur la représentativité des modèles tridimensionnels

En 2013, deux nouveaux cas d'application concernant la création de modèle thermique nodal transitoire (DCTM) pour des composants mono-puce sont présentés respectivement au congrès de la SFT-2013 [15].

L'objectif est d'identifier les divers points de blocage pouvant empêcher l'obtention d'un modèle nodal.

La modélisation thermique de composants électroniques, dénommés « Powerpaks », est décrite. Cette analyse décline l'impact thermique de la représentation des fils de connexion électrique (Figure 74) sur la température maximale du semi-conducteur encapsulé dans ce type de boitier électronique.

En pratique, les connexions électriques, de la puce vers les broches de connexion à la carte, sont le plus souvent négligées dans la modélisation numérique des composants électroniques. Ce type de boitier mono-puce peut abriter deux procédés de connexions électriques. Dans la majorité des cas, le câblage du semi-conducteur se fait par un ensemble de fils métalliques, usuellement en or. L'autre solution est basée sur l'emploi d'un « clip » métallique massif, en cuivre, lequel connecte d'une manière uniforme un ensemble de broches et de zones entrées-sorties du semi-conducteur.

Une représentation fidèle de ces connexions réduit les températures maximales vues par le semi-conducteur, de l'ordre de 10%. D'autre part, la masse propre au « clip » influence le comportement thermique temporel de ce type de composant.

La création du modèle nodal dynamique, selon le processus établi en 2012, a été menée avec succès.

Toutefois, l'absence des connexions électriques génère une très forte asymétrie thermique, une des faces latérales du composant est nettement plus froide que les trois autres. Ceci affecte la qualité du modèle nodal lorsque les quatre surfaces latérales sont regroupées en un nœud unique.

Cette étude démontre la nécessité de dissocier ses surfaces en deux nœuds distincts. Ce problème est atténué si la présence des fils de connexion est prise en compte dans la modélisation détaillée du composant.

Il est clair que la représentation de tous les éléments susceptibles de conduire la chaleur est indispensable pour avoir un modèle original plus réaliste.

Toutefois, celle-ci a un impact non négligeable sur le temps de calcul numérique et par conséquence sur l'obtention d'un modèle nodal.

I5. Des modèles dynamiques pour des composants intégrant de multiples puces

Un exemple de composant à multiples puces est détaillé dans l'article THERMINIC-2013 [17]. Celui-ci est doté de trois semi-conducteurs actifs, en silicium.

La particularité de ce composant multi-puce par rapport à l'article SEMI-THERM-2012 [11] est d'offrir un exemple lorsque le placement des puces est dit « Side-by-Side ». Celui-ci est décrit Figure 136.

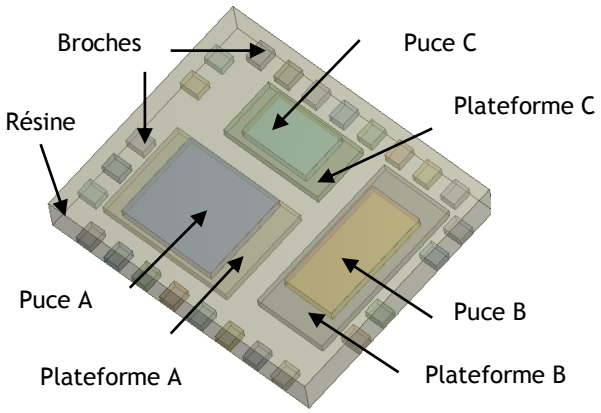


Figure 136 : Module électronique équipé de 3 semi-conducteurs

La définition de son modèle compact tient compte de la décomposition suivante du composant :

- Un nœud est affecté à chacun des trois semi-conducteurs,
- Un nœud unique regroupe les surfaces latérales en contact avec l'air,
- Quatre nœuds pour les subdivisions de la surface supérieure en contact avec l'air,
- Quatre nœuds pour les subdivisions de la surface inférieure en contact avec la carte.

Ainsi, le modèle est constitué de 12 nœuds caractéristiques, d'où 66 résistances thermiques inconnues sont à identifier par l'algorithme génétique.

Les différentes phases du procédé de déduction ont permis de générer un modèle compact dynamique, multi-jonction, en accord avec nos critères de précision [17].

Le concept d'une sous-structuration d'un modèle numérique pour ce composant muni de 3 puces dans l'optique d'établir plus rapidement le modèle approximé du boitier complet.

C'est pourquoi, trois volumes entourant les semi-conducteurs sont analysés séparément (Figure 137), en vue de créer un sous modèle nodal propre à chacun d'eux.

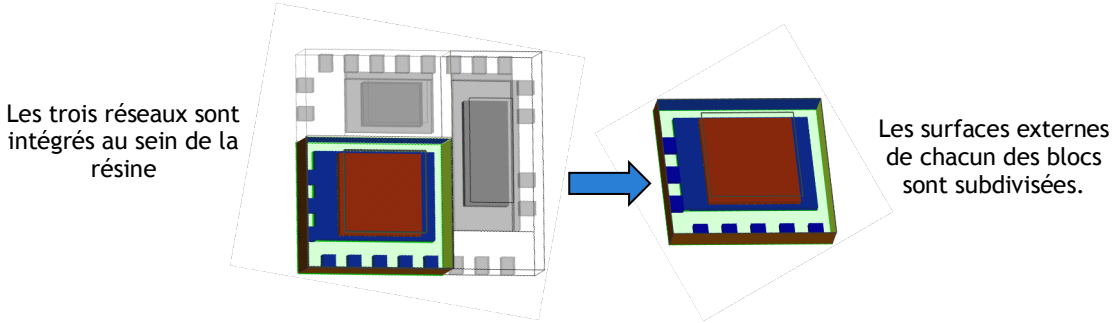


Figure 137 : Module électronique équipé de 3 semi-conducteurs

Comme pour les travaux précédents, cette technique vise à réduire la taille du modèle numérique global et par conséquent les temps de simulation des (3+1) par 49 ou (3+1) par 38 scenarii nécessaires à la détermination du réseau nodal global.

L'ensemble des résultats de ces travaux a été explicité dans la thèse de Cheikh Dia [55].

I6. Caractérisation d'un module intégrant de multiples composants

Parallèlement, en 2015, des travaux collaboratifs sont entrepris avec le laboratoire LMEE [14] sur la réduction des modèles numériques par l'approche modale commentée au paragraphe H13.2.

Une première analyse des performances de cette réduction a porté sur le cas de deux composants électroniques, l'un d'eux se réfère au QFN16 représenté en Figure 67 dont les caractéristiques sont fournies en Table 18.

L'autre cas étudié, un DFN12, est doté de deux puces actives représentées Figure 138.

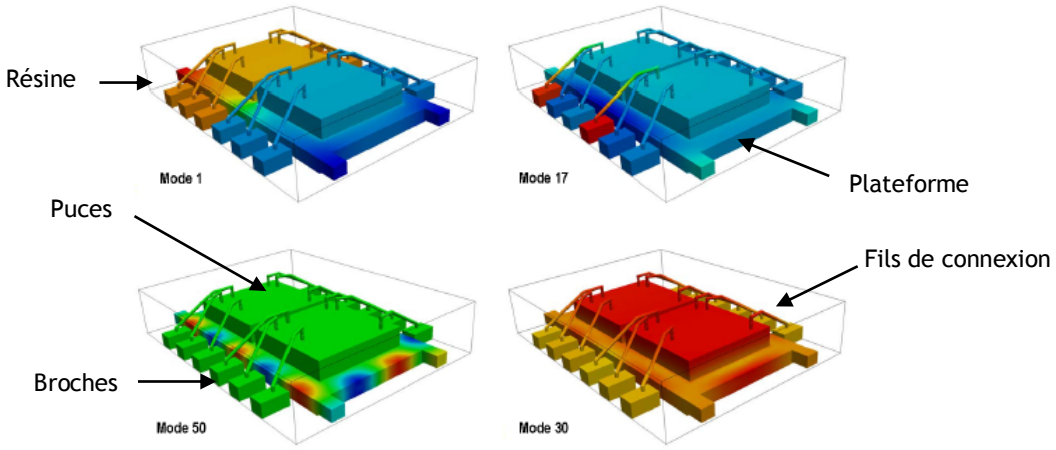


Figure 138 : Exemple de modes propres du composant DFN12

Cette figure met en évidence un jeu de modes produits par la méthode d'analyse modale développée par le LMEE. A l'instar de la méthode DELPHI, la création du modèle réduit nécessite de calculer un ensemble de modes, dans ce cas 124000 modes, puis de les interpréter pour les conserver ou bien les amalgamer.

Pour cet exemple, seulement 1173 modes de Dirichlet et 3165 modes de Steklov ont été calculés et en définitive 100 modes ont été conservés pour garantir un bon accord du modèle.

La Figure 139 présente les erreurs sur l'évaluation de la température de jonction en régime établi pour l'une des deux puces en fonction du nombre de modes retenu. Ainsi pour 100 modes, l'erreur ne dépasse pas 0.5% à l'exception du scénario 49, pour lequel une erreur de l'ordre 11% est constatée.

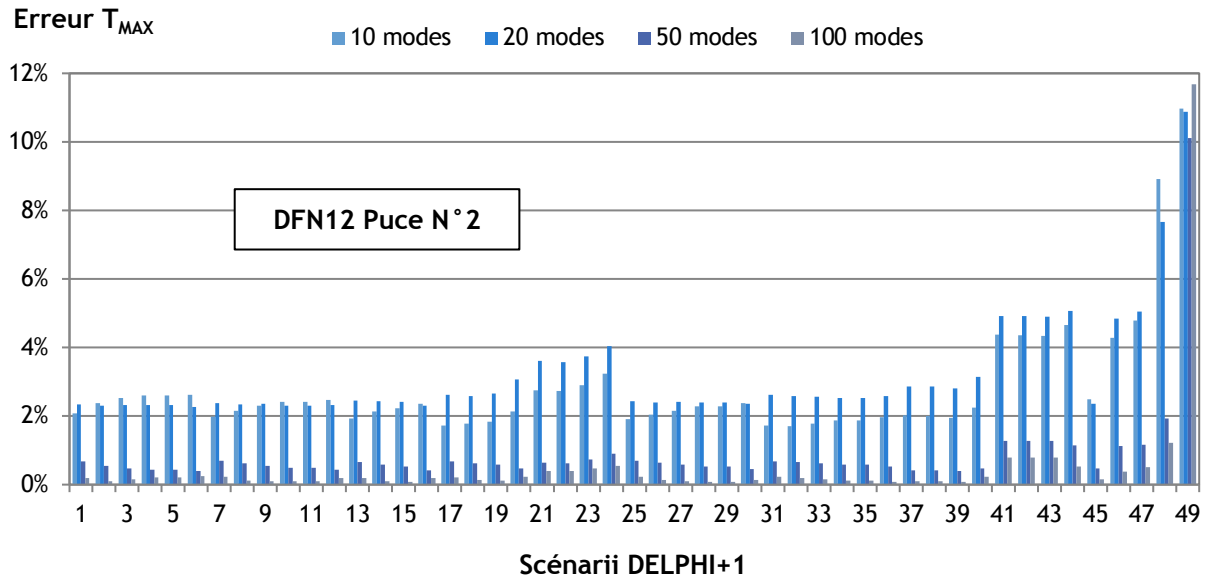


Figure 139 : Erreurs en fonction du nombre de modes pour les 49 scenarii DELPHI+1

Un résultat pratiquement identique est obtenu en régime transitoire.

C'est une problématique récurrente, à l'exception de notre approche, pratiquement toutes les autres méthodes d'optimisation étudiées échouent pour ce mode de Dirichlet ($h = 10^9 W\ m^{-1}\ K^{-1}$)

Le temps de réalisation de cette réduction est de l'ordre de 45 minutes. Là encore, une méthode de sous structuration peut être employée afin de minimiser la taille du système à simuler.

Ainsi les éléments du composant ont été scindés en plusieurs entités, tels que les broches, les semi-conducteurs ou la plateforme.

Ces premiers travaux [R90] ont permis d'explorer une voie mathématique pour minimiser la taille d'un modèle numérique, ceci dans une forte proportion (100 modes/127000 modes) tout en acceptant une dégradation mineure de sa précision par rapport à celle d'un modèle nodal de type DELPHI.

Toutefois, les modèles ainsi créés ne sont pas actuellement exploitables dans un logiciel commercial et par conséquent ils ne peuvent servir, en l'état, à la modélisation de nos cartes.

L'intérêt majeur de cette approche est de conserver la possibilité de discerner plus finement les températures locales du composant et non leur température moyenne sur un jeu de surfaces plus ou moins représentatif. D'autre part, on conserve la possibilité de remonter au modèle original.

Même si elle est fortement minimisée la taille du modèle réduit avec ces 100 modes demeure importante au regard d'un modèle nodal et il est nécessaire de procéder au calcul de nombreux modes.

De plus, pour un modèle possédant de nombreux éléments sensibles un traitement s'impose pour calculer leur température maximale et leur localisation, lesquelles évoluent en fonction des diverses sollicitations appliquées à chacune des sources de chaleur et des conditions aux limites.

Une problématique résolue par un modèle nodal pour lequel la température maximale restituée n'a pas de localisation exacte.

I7. Caractérisation expérimentale de modules intégrant de multiples puces

Un nouveau projet de thèse CIFRE, en partenariat avec le laboratoire LTIE [(13)], est établi en juin 2015, sa thématique concerne principalement la validation expérimentale des modèles thermiques nodaux possédant de multiples puces en régime transitoire.

Ainsi cette thèse CIFRE s'intitule « Apport à la caractérisation des modèles thermiques spatio-temporels destinés aux composants électroniques » et elle a été confiée à Brice ROGIE [56].

Dans ce cadre de cette thèse, il s'agit pour Brice ROGIE, de délivrer un modèle comportemental nodal déduit d'un modèle physique détaillé, qu'il soit statique ou étendu aux phénomènes temporels, dont les propriétés thermiques soient validées par un protocole de test.

Un deuxième aspect développé au cours de ce travail a été la capacité de mettre en œuvre une nouvelle procédure de réduction susceptible d'apporter une baisse significative des temps de calculs tout en conservant une précision identique.

Les solutions proposées pour ces deux thématiques sont commentées ci-après.

I7.1. Mise en œuvre d'un protocole de test

La caractérisation du comportement d'un composant électronique est liée à la connaissance précise de l'évolution de la température de ses éléments sensibles.

En pratique, cette mesure in situ n'est pas prévue et nécessite d'utiliser une fonction électronique (diode ou transistor) disponible au sein du boitier. Le cas particulier d'une diode soumise à courant continu est abordé par le guide JEDEC JESD286-B [R15]. Ce dernier décrit les performances nécessaires pour effectuer une mesure temporelle de bonne qualité à partir d'une diode mais toutes les diodes ne sont pas éligibles.

La difficulté majeure consiste à appliquer une puissance contrôlée puis de mesurer un paramètre électrique (tension ou courant) dans un temps très bref dès que la puissance est désactivée. Il est aussi impératif de connaitre la surface sur laquelle celle-ci est réellement imposée. Un processus extrêmement délicat à maitriser.

Une autre voie suggérée par le consortium JEDEC s'appuie sur l'emploi d'une puce électronique dite thermique. Le guide JEDEC JESD51-4 [R16] décline les spécifications de ce type de capteur de température miniature et de la source de chaleur associée.

Ainsi, une dissipation thermique doit être imposée sur au moins 85% de la surface supérieure du semi-conducteur. Celui-ci est en silicium.

Le dessus de puce possède une sérigraphie spécifique où un ensemble de diodes possitionnées à diverses localisations est dessiné.

La représentation physique et le schéma de principe d'une puce TEMP01, fabriquée par la société DELPHI, sont illustrés dans la Figure 140.

Plusieurs autres formats de puces thermiques ont été mentionnés au paragraphe G11.

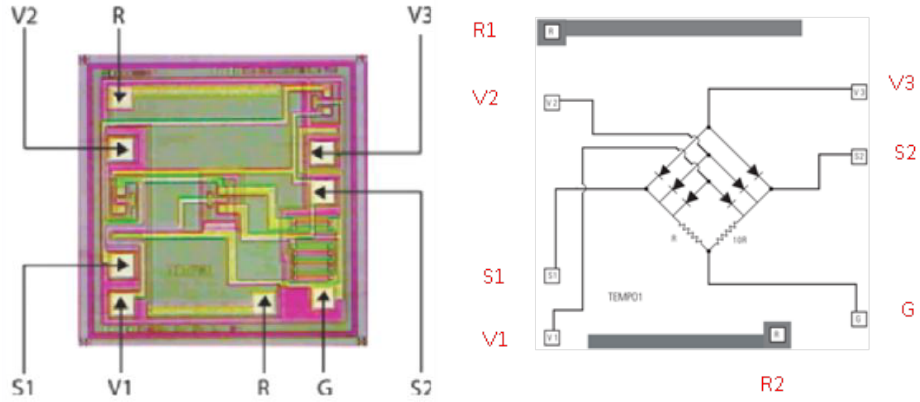


Figure 140 : Schéma de la puce thermique TEMP-01

Cette puce de forme carrée est la plus petite du marché avec ses 1.4mm de côté.

Les repères R correspondent à la résistance chauffante dédiée à l'application d'une dissipation thermique.

Les diodes, ou plutôt le pont de diodes, vont permettre d'enregistrer l'évolution de leur tension en fonction des variations de température vues par le semi-conducteur.

Cette relation exige une calibration initiale pour un courant préfixé. Le plus souvent, celle-ci est effectuée dans un bain d'huile dont la température est ajustée à différents paliers.

Une relation linéaire entre la température et la tension de diode est établie sous la forme :

$$T = a\,U + b \tag{e235}$$

Un exemple de coefficients a et b concernant chacune des diodes présentes dans un composant étudié par Brice Rogié est fourni en Table 68.

Table 68 : Définition des coefficients d'une diode pour un courant continu de 1mA

Composant	Diode	a	b	R^2
DFN 10	1	-526.9 ± 4.804	397.4 ± 2.971	0.9999
	2	-524.6 ± 5.399	395.9 ± 3.323	0.9999
	3	-525.0 ± 5.556	396.2 ± 3.430	0.9999

Il est à noter que la tension diminue en fonction de la montée en température de la puce.

Dès lors, il est indispensable de s'assurer que celle-ci soit suffisante pour mesurer correctement la température maximale à relever.

Pour résoudre cette contrainte, certaines puces disposent de plusieurs diodes montées en série pour disposer d'une plus large latitude de mesure.

D'autre part, le courant est très faible pour prévenir tout échauffement parasite, par effet Joule, de la puce.

Comme évoqué, la puce réelle ne dispose a priori d'aucun moyen de mesurer, in situ, la température aussi celle-ci doit être remplacée par une puce de mesure, comme indiquée Figure 141.

Le procédé constitue à ouvrir le boitier, retirer la puce implantée, refaire l'état de surface, intégrer la nouvelle puce puis refermer le boitier avec une résine d'encapsulation appropriée.

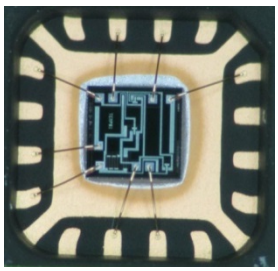


Figure 141 : Mise en place d'une puce thermique au sein d'un boitier

Compte tenu, des dimensions de boitiers actuels (N1), ceux-ci doivent impérativement être montés sur une carte électronique pour identifier adéquatement leurs performances thermiques.

Afin de caractériser expérimentalement le comportement dynamique des composants électroniques, un jeu de cartes électroniques inspiré du standard JEDEC a été conçu. Par commodité, chacun des substrats fabriqués a les mêmes dimensions, à savoir : 101.5mm x 76.2mm x 1.6mm.

Vis-à-vis du standard JEDEC, seuls les connecteurs ont été modifiés. L'objectif est de garantir la qualité de l'interconnexion électrique et par conséquent celle du signal mesuré (bruit de mesure).

Une vue d'une carte analysée par Brice Rogié est reprise en Figure 142.

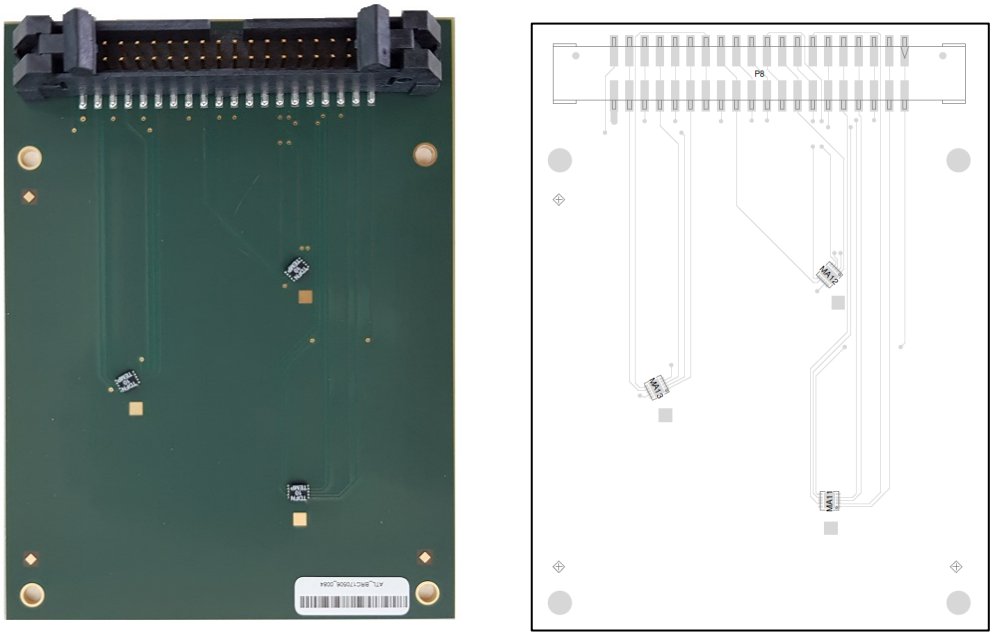


Figure 142 : Vue de face (gauche) et schéma (droite) de la carte de test n°8

La carte ci-dessus est composée de trois boitiers DFN10 orientés à 0°, 27° et 45°.

La largeur des pistes est déterminée en fonction de la puissance que l'on souhaite appliquer à chacun des circuits intégrés. L'idée est de minimiser tout échauffement du substrat par effet Joule.

Il est indubitable que toutes les mesures effectuées vont dépendre de la nature du substrat ainsi que du mode de report du composant sur celui-ci, une problématique récurrente.

Aussi il est obligatoire de caractériser les propriétés propres à chacune de ces deux composantes pour qualifier la qualité d'un modèle numérique détaillé de n'importe quel composant.

Là encore, il semble que la majorité des chercheurs n'ait été confrontée à cette problématique.

Le plus souvent, la carte est placée à l'horizontale sur une plaque froide et maintenue par vissage sur celle-ci. La qualité du contact thermique est assurée par un matériau d'interface malléable.

Dans le cadre de la mise en place d'une procédure de test, au sein du laboratoire LTIE, une analyse comparative a été menée de manière à valider les résultats obtenus pour l'analyse du comportement thermique d'un composant électronique puis à terme les parfaire.

Ainsi L'acquisition des températures est ici réalisée par un laboratoire externe, en Hongrie, au moyen de l'outil T3STER (Transient Thermal Tester) développé par Mentor Graphics.

Le type de réponse temporelle mesurée est exposé en Figure 143.

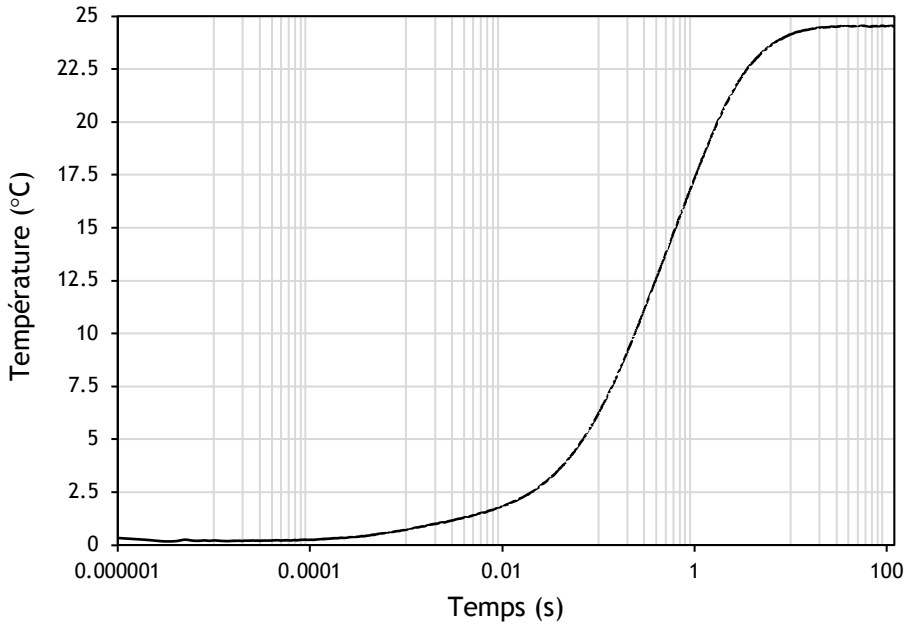


Figure 143 : Variation de la température interne d'un DFN10 sur une plaque froide à 25°C

Cet essai en régime transitoire a été répété pour chacun des DFN10 montés sur la carte vue en Figure 142. La puissance injectée à la puce thermique est de 0.44W (0.1A).

La stabilisation de la température de ces composants miniatures est de 120s et 95% de l'échauffement de la puce est atteint en moins de 2s. Ce graphe révèle également que si l'acquisition des mesures est de l'ordre de 100hz (0.01s), une grande partie des phénomènes à examiner sera occultée.

La projection du profil est effectuée sur une échelle logarithmique, un aspect indispensable pour s'assurer que l'équilibre thermique soit achevé. Dès lors, un traitement statistique vu au paragraphe H6.2 peut être entrepris.

L'analyse des courbes fournies par le laboratoire de Mentor Graphics a mis en lumière de l'instabilité dans l'alimentation des composants lors de la montée en température. Ceci remet en cause l'interprétation du signal, pour lequel, l'hypothèse d'une application instantanée permanente (heavyside) a été faite. Dès lors, un relevé de température en phase de descente doit être retenu.

Outre la problématique de l'alimentation, ce dispositif de caractérisation n'autorise pas l'acquisition simultanée de l'évolution des températures de surfaces vues par le composant et par le substrat.

Celles-ci sont apparues vitales pour recaler correctement la réponse de tout modèle numérique sur les observations expérimentales. Un exemple de recalage est décrit dans la thèse de Rogié [56].

Enfin, il a été démontré qu'il est obligatoire de combiner plusieurs tests environnementaux pour caractériser les matériaux d'une part du substrat puis ceux liés au composant.

Ainsi, l'essai sur plaque froide est associé à des essais du véhicule de test en convection naturelle verticale. Cette démarche a fait l'objet d'une publication lors de la conférence Therminic [36].

Le traitement des données de ces deux modes de transfert permet de parfaire le modèle numérique et ainsi la création d'un modèle nodal de qualité.

I7.2. Apport à la création de modèles thermiques dynamiques

Une nouvelle évolution dans la création des réseaux nodaux, dits DCTMs, est étudiée. Son objectif est de s'affranchir des temps de calcul prohibitifs d'un modèle numérique pour de nombreux scenarii, notamment en régime transitoire.

L'idée directrice s'appuie sur l'utilisation d'un modèle mathématique d'ordre réduit ou ROM, dont le principe a été exposé au paragraphe H13. La réduction d'ordre autorise des temps de résolution très courts, généralement quelques millisecondes sont suffisantes, pour des matrices d'ordre 100.

Ainsi, une étape supplémentaire est introduite dans le processus de création d'un modèle nodal dynamique comme le synthétise la Figure 144.

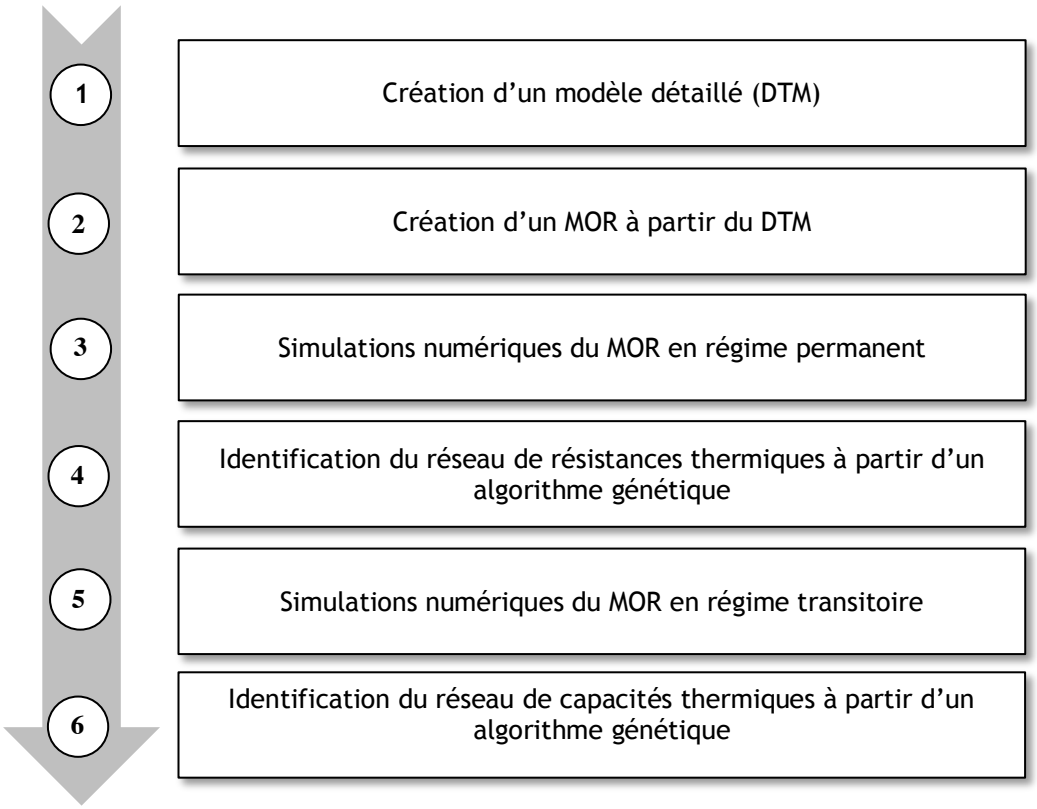


Figure 144 : Processus de création d'un DCTM proposé par Brice Rogié

Le nombre initial d'étapes est complété par une 6eme étape. Toutefois, il faut s'assurer le bénéfice apporté à la réalisation des calculs des scénarii ne soit pas contrecarré par le temps d'élaboration du modèle d'ordre réduit.

Cet examen a été mené en partenariat avec dans un premier temps l'école polytechnique de Milan (méthode des moments) puis dans un second avec le laboratoire LMEE (méthode modale).

Plusieurs cas de composants complexes ont été examinés [35][36][37][38][39].

Cette confrontation de deux types de MOR a permis de valider cette nouvelle procédure dans le cas où la variation de la conductivité thermique du semi-conducteur, par exemple celle du silicium, peut être jugée négligeable.

J. RETROSPECTIVE DES AVANCEES ET DES VERROUS A LEVER

J1. Nouvelles méthodologies mises en œuvre

Les travaux effectués dans le cadre de ces différentes études ont pour finalité de proposer des méthodologies suivantes :

- Une technique d'ajustement basé sur les algorithmes génétiques,
- Un processus pour établir des modèles réduits pour des composants ayant plusieurs puces,
- Un processus pour établir leur modèle réduit temporel,
- Des voies pour améliorer la précision des modèles ainsi réduits, telles que : la subdivision des surfaces, ou la subdivision des résistances thermiques,
- La possibilité d'une extension pour la création de modèles nodaux destinés aux composants passifs,
- Une réflexion sur la réduction d'ordre multiple.

J2. Énoncé des verrous scientifiques restant à lever

Le processus de création de modèles nodaux de composants mono-puce ou à multiples puces nécessite la levée d'un ensemble de verrous répertoriés ci-dessous :

- Établir un modèle numérique réaliste et validé du composant :

  La validation expérimentale doit être le point de départ pour juger de la qualité du modèle détaillé. Il est toujours difficile de mesurer avec précision les dissipations et les températures des différents éléments constituants d'un composant électronique.

  La modélisation des phénomènes thermoélectriques ou thermomagnétiques couplés demeure difficile à maitriser pour accorder le modèle aux données expérimentales.

  La caractérisation des matériaux dont les propriétés thermiques dépendent de la température fait également partie des problématiques à résoudre.

- Définir des conditions aux limites pertinentes :

  Pour être utilisable quel que soit l'environnement auquel il est soumis, le modèle nodal dérivé d'un modèle numérique doit être indépendant des conditions appliquées à ces limites physiques.

  Deux jeux de scenarii sont proposés, d'une part pour la déduction de modèle statique, 49 conditions, et d'autre part pour dériver un modèle dynamique, 10 conditions.

  Ceux-ci sont appliqués quel que soit la topologie du composant, aussi leur représentativité physique et leur nombre restent à optimiser [30] pour parfaire la qualité des données dédiées à la réduction.

  Des méthodes d'apprentissage pour l'organisation du déroulement des scenarii sont à explorer.

- Définir la topologie du modèle nodal dérivé du modèle numérique :

  La complexité du réseau doit être limitée en garantissant toutefois une bonne précision.

  La qualité des modèles est liée à la décomposition de ces faces externes en un jeu de surfaces isothermes représentatives des échanges caractéristiques du composant réel. Le comportement de celui-ci est désormais lié à un processus qui s'attache à regrouper, de proche en proche, des éléments discrétisés de la surface étudiée en fonction d'un critère de température, ceci au moyen d'un algorithme génétique. Finalement en fonction d'un nombre de scenarii, une subdivision "intelligente" de la surface doit être obtenue.

  L'ensemble des surfaces déduites et les observables des points sensibles retenus constituent les nœuds du réseau à déduire.

  La multiplicité des éléments du réseau thermique pose la question du nombre de scenarii nécessaires à sa réalisation, celui-ci peut s'avérer rédhibitoire en particulier pour des modules électroniques très sophistiqués.

  D'autres techniques de réduction d'ordre du modèle (MOR) basées sur la minimisation matricielle

du modèle numérique ([30] à [39], [52]-[54]) sont peut-être plus appropriées même si elles nécessitent de fortement complexifier l'algorithmie de création des modèles déclinée dans cette thèse.

L'idée est de réduire fortement l'ordre du modèle tout en conservant les observables identiques au modèle numérique de départ.

- Choisir une technique d'identification optimale :

  Celle-ci est basée sur l'utilisation d'algorithmes génétiques qui font office de fonction d'ajustement. Ce type d'algorithme est dépendant de la stratégie d'évolution et de nombreux paramètres retenus pour l'identification des réseaux. D'autre part, ils sont liés aux choix des scenarii et d'une fonction dite « coût ».

  La qualité de la réduction se doit de rester physique et stable ce qui n'est pas toujours le cas en fonction de la complexité du réseau à déterminer.

  Une hybridation avec d'autres algorithmes évolutionnaires comme par exemple l'optimisation par les essaims de particules [34], agrégeant une stratégie d'évolution sur les gènes et sur les chromosomes est à explorer, afin de garantir l'optimalité des réseaux déduits.

- Définir une fonction « multi-objectif » :

  Celle-ci est destinée à mesurer l'écart acceptable entre le modèle numérique et le modèle nodal dit compact. Il s'agit de statuer sur le poids d'un jeu de paramètres permettant de définir la précision des observables du modèle compact, tels que la température maximale des points sensibles ou les flux thermiques et les températures moyennes des surfaces du modèle compact.

  Si l'emploi du principe de superposition et l'optimisation d'une fonction coût à multiples critères ont permis de minimiser l'erreur, certains cas sont perfectibles en particulier pour les composants où les puces sont disposées horizontalement dans le boîtier.

- Limiter la taille des modèles numériques :

  La taille des modèles numériques détaillés à analyser demeure un problème, plusieurs millions de mailles. Une première investigation a porté sur une nouvelle approche basée sur une sous-structuration du modèle numérique initial.

  Dans ces conditions, une décomposition des différents éléments du composant est opérée, ceux-ci sont dérivés de manière indépendante, puis réinjectés sous une forme nodale afin de procéder à la déduction du modèle nodal du composant à partir de la méthodologie précitée.

  La question est de savoir si le cumul des divergences propres à chacun des modèles pré-réduits reste en deçà du critère d'acceptation actuel des modèles.

  La définition des conditions d'interconnexion des divers modèles est également un point à investiguer.

Chapitre V

Modélisations analytiques des cartes électroniques

Ce chapitre décrit la démarche mise en œuvre dans le but de rendre plus efficiente la pratique de la simulation thermique des cartes électroniques et de leurs composants. Deux concepts basés sur l'exploitation de résultats numériques et de données expérimentales sont, dans un premier temps, exposés. Puis dans un second temps, les développements, en collaboration avec un partenaire académique, de résolutions analytiques de l'équation de chaleur sont relatés et leurs performances respectives référencées.

Contenu

K. Établissement de solutions analytiques 170

K1. Premier développement d'une approche nodale de composant isolé 170

K1.1. Méthode de Tagushi 171

K1.2. Expression de la résistance thermique jonction-ambiante 176

K1.3. Apports résultant de ces travaux 178

K2. Premier développement d'un modèle nodal pour de multiples composants 179

K2.1. Définition de la modélisation analytique d'un substrat 179

K2.2. Processus d'identification 182

K2.3. Exploitation des données expérimentales 183

K2.4. Pertinence du processus d'identification 185

K2.5. Limites de l'approche et validation du modèle analytique 185

K2.6. Dissémination du concept de caractérisation d'une carte inconnue 188

K2.7. Perspectives complémentaires 188

K3. Formalisation d'un concept pour la modélisation des cartes conventionnelles 190

K3.1. Modélisation plus réaliste des propriétés thermiques d'une carte 190

K3.2. Révisions du modèle anisotrope initial 193

K3.3. Influence des transferts thermiques liés aux faces latérales 195

K3.4. Résolution de multiples formes d'équations transcendantes 199

K3.5. Considération des transferts conductifs externes locaux 200

K3.6. Validation expérimentale de la modélisation des zones d'appui 207

K3.7. Expression des échanges thermiques advectifs 210

K3.8. Méthode des asymptotes 215

K3.9. Modélisation de sources de chaleur à multiples orientations 218

K3.10. Prise en compte de multiples couches 219

K4. Modélisation de multiples sources de chaleur 223
K4.1. Approche mathématique dédiée à de multiples sources de chaleur 223
K4.2. Considération de multiples formes 225
K4.3. Groupement de multiples surfaces d'interconnexion 227
K5. Nouvelles approches dédiées aux transferts intrinsèques au substrat 229
K5.1. Modélisation des transferts conductifs internes locaux 229
K5.2. Modélisation de dissipations internes locales 231
K5.3. Modélisation de multiples couches internes actives 237
K5.4. Prise en compte de transferts thermiques intercouches locaux 238
K5.5. Modélisation d'une source volumique de chaleur enterrée au sein d'un substrat 239
K6. Au-delà de la modélisation des substrats 240
K6.1. Modélisation d'un drain thermique à partir du modèle à multiples couches 240
K6.2. Modélisation d'un composant à partir du modèle à multiples couches 243
K7. Bilan des avancées réalisées dans l'établissement de modèles analytiques 244
K8. Programmation des futurs travaux envisagés 244

K. ÉTABLISSEMENT DE SOLUTIONS ANALYTIQUES

K1. Premier développement d'une approche nodale de composant isolé

En 2004, une modélisation analytique 1D est mise en œuvre dans notre « générateur de modèle thermique ».

Sa stratégie de développement répond aux problématiques suivantes :

- Pourquoi réaliser des simulations numériques complexes quand la géométrie de la carte électronique ou la consommation électrique des composants sont partiellement définies,
- Pourquoi calculer des milliers de nœuds, quand la vérification préliminaire concerne seulement la détermination de la température critique d'un ensemble de puces semi-conductrices,

Très souvent la précision de la solution est moins importante que la capacité a rapidement :

- Quantifier des paramètres critiques d'une conception,
- Établir les choix les plus judicieux pour garantir sa fiabilité.

Une solution analytique, certes moins précise qu'une modélisation numérique, a pour avantage de fournir des évaluations reproductibles, ceci quel que soit le niveau d'expertise de l'utilisateur.

En pratique, cet outil couple un réseau nodal décrit au Chapitre III, lequel est déduit d'un processus d'optimisation stochastique. La forme du système linéaire à résoudre est explicitée, en annexe P4. Les températures des différents nœuds et les flux des surfaces d'échange propres à chaque composant sont fournis par ces expressions dès lors que les conditions aux limites, décrivant macroscopiquement les transferts thermiques vers le fluide environnant et le solide sur lequel il est monté, sont définies.

Comme évoqué au paragraphe Chapitre IID3, les performances thermiques d'un composant électronique sont définies par le standard américain Jedec-Jesd51. Celles-ci sont caractérisées par l'expression d'une résistance thermique dite « Résistance Jonction-Ambiante », ou R_{JA} (e6).

Celle-ci décroit en fonction du régime et de la vitesse d'écoulement d'air (Table 6). De plus, elle est également liée à la structure interne de la carte de test. Les vitesses typiques d'écoulement (U_0) sont généralement 0m/s, 1m/s, 2m/s et 3m/s. Le composant est monté seul sur un véhicule de test dont la forme, la conception et la constitution, sont spécifiées par un ensemble de guides du standard.

Si pour la convection naturelle, une approche analytique peut être envisagée, le cas de la convection forcée est plus complexe à appréhender, en particulier la caractérisation des décollements des couches limites du bord d'attaque de la carte ou à proximité du composant.

Dans un premier temps, la caractérisation de lois empiriques sur l'évolution des coefficients d'échange thermique en régime laminaire basée sur les travaux de Gorski [R92] a été envisagée.

Cet auteur propose une expression pour une source de chaleur sur un substrat isotrope dépendant de sa distance par rapport au bord d'attaque, ici désigné par X_S. La longueur caractéristique ℓ retenue dépend de la dimension de la source prise dans le sens de l'écoulement, à savoir W_s.

$$\overline{Nu}_{\ell=W_S} = \overline{h}_S \, W_S/k_f \quad et \;\; Pe = U_0 \, X_S/a_f \tag{e236}$$

$$\overline{Nu}_{W_S} = A_0 \, Pe^{A_1} \, (W_S/\, X_S)^{\,A_2} \, (W_s/\, [2A_S/P_S])^{\,A_3} \quad pour \;\; k_S/\, k_f = \, A_4 \tag{e237}$$

$$Q_f/Q = B_0 \, [Pe \, (W_S/\, X_S)^{\,B_2} \, ([2A_S/P_S]/W_s\,)^{\,B_3}\,]^{\,B_1} \;\; pour \;\; k_S/\, k_f = \, A_4 \tag{e238}$$

Où les termes des équations correspondent respectivement :

- Au nombre de Pecklet,
- A la conductivité thermique (k_f) et à la diffusivité thermique (a_f)du fluide,
- A la conductivité thermique (k_S) du substrat,
- A la surface (A_S) et au périmètre (P_S) de la source,

- A la fraction du flux extraite par le fluide (Q_f).

Les résultats obtenus ont été insuffisamment probants, aussi l'expression a été remaniée en s'inspirant de l'ouvrage [R93] pour distinguer le caractère bidirectionnel du transfert thermique vers le substrat.

$$\overline{h}_{\ell=W_S} = A_0 \left(k_f / W_S\right) Pe^{A_1} \left(W_S / X_s\right)^{A_2} \left(k_{XY} / k_f\right)^{A_3} \left(k_Z / k_f\right)^{A_4} \quad pour \quad k_S / k_f = A_5 \qquad \text{(e239)}$$

La définition des deux conductivités thermiques k_{XY} et k_Z est explicitée dans le prochain paragraphe.

Malgré des résultats plus conformes aux données numériques, cette approche reste imprécise lorsque la gamme de variation des paramètres est très large. Finalement, la création d'un méta-modèle inspiré de la technique des plans d'expérience développée par Tagushi [R94] a été retenue.

Celui-ci a pour but de déterminer les résistances dites Jonction-Ambiante, d'un composant à partir de l'interprétation des données d'un modèle numérique. La création du modèle numérique s'appuie sur la géométrie de la carte et celle de l'environnement de test, toutes les deux sont spécifiées par le standard Jedec-Jesd51.

A terme notre objectif est de disposer d'un modèle nodal de carte associé à celui d'un composant.

Ce modèle couplé doit être en mesure d'évaluer les métriques fournis par son fabricant. Il s'agit également d'un moyen pratique pour juger de la pertinence du modèle nodal sur un nouveau cas test.

K1.1. Méthode de Tagushi

Au moyen de cette méthode notre intention est d'étudier :

- Un grand nombre de paramètres avec un nombre réduit d'expériences,
- Le poids des interactions entre les paramètres sélectionnés,
- Une formalisation simplifiée des résultats d'un grand nombre de simulations numériques,
- La prédiction instantanée avec une bonne précision pour une large gamme de variation de plusieurs paramètres, et non pour un ou deux points.

La définition du plan d'expérience, commentée ci-après, s'appuie sur un plan factoriel complet à deux niveaux, soit 2^k simulations numériques à réaliser.

Les 2 niveaux, correspondent aux extrémités du domaine de variation définies pour chacune des variables retenues pour le plan d'expérience. Chaque variable est recentrée (e70) pour ne varier qu'entre –1 et +1. Ces valeurs sont affectées aux niveaux bas ($V_{min} = -1$) et haut ($V_{min} = 1$).

Puis il s'agit d'exécuter les simulations numériques en adéquation avec une table de Tagushi.

La Table 69 explicite pour un plan d'expérience à 3 variables, la matrice des effets et des interactions destinées à formuler l'expression d'un phénomène quelconque, ici « $h = f\ (V_1, V_2, V_3)$ ».

Table 69 : Table de Tagushi à 3 variables

Test	Moy.	Variables			Interactions d'ordre 1 et 2				Données
i	X_0=V_0	X_1=V_1	X_2=V_2	X_3=V_3	X_4=V_1 V_2	X_5=V_1 V_3	X_6=V_2 V_3	X_7=V_1 V_2 V_3	h_i
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	h_1
2	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	h_2
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	h_3
4	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	h_4
5	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	h_5
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	h_6
7	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	h_7
8	1	1	1	1	1	1	1	1	h_8
Effets	C_0=E_0	C_1=E_1	C_2=E_2	C_3=E_3	C_4 = E_{12}	C_5 = E_{13}	C_6 = E_{23}	C_7 = E_{123}	

Cette dernière agence sous une forme matricielle l'ensemble des valeurs des variables et de leurs interactions et elle va fournir les éléments pour établir la fonction recherchée. Le plan d'expérience numérique est matérialisé par la zone grisée. Les variables alternent entre leur niveau haut et bas.

Le calcul des coefficients d'effet (E_i), des interactions d'ordre 1 (E_{ij}), et d'ordre 2 (E_{ijk}) se fait sur la base des valeurs des cases de la matrice, suivant le schéma :

$$C_j = \frac{1}{nE} \sum_{k=1}^{nE} x_{k,j}\, h_k \;\; avec\; 1 \leq j \leq 7 \tag{e240}$$

Où V et h sont les différentes colonnes de la table.

L'expression finale de la fonction des réponses aux sollicitations V_i se présente sous la forme :

$$f(V_1, V_2, V_3) = E_0 + E_1\, V_1 + E_2\, V_2 + \cdots + E_{12}\, V_1\, V_2 + \cdots + E_{123}\, V_1\, V_2\, V_3 \tag{e241}$$

$$f(V_1, V_2, V_3) = E_0 + \sum_{i=1}^{n=3} E_i\, V_i + \sum_{i=1}^{n-1=2} \sum_{j=i+1}^{n=3} E_{ij}\, V_i\, V_j + \sum_{i=1}^{n-2=1} \sum_{j=i+1}^{n-1=2} \sum_{k=j+1}^{n=3} E_{ijk}\, V_i\, V_j\, V_k \tag{e242}$$

Pour illustrer, l'apport et les limites de cette technique statistique, un plan à 6 variables est décrit en annexe P15. La fonction recherchée est par conséquent un espace à 6 dimensions.

La table de Tagushi présentée formalise un plan des 64 simulations à effectuer.

Les six variables V_i retenues sont décrites ci-dessous :

- La longueur L_C de la source de chaleur sur la carte,
- L'angle β permettant de définir la forme de la source de chaleur, carrée ou rectangulaire.
- La vitesse U du flux d'air,
- La conductivité thermique équivalente k_{XY} de la carte, suivant les axes x et y,
- La conductivité thermique équivalente k_Z de la carte, suivant l'axe z,
- La hauteur H_C du bloc isotrope et isotherme représentant le composant.

Pour traduire le comportement thermique du substrat d'une carte électronique constitué de nC couches superposées (Table 9), il est obligatoire de traduire son anisotropie, à savoir, la capacité de sa structure hétérogène à drainer la chaleur.

Par exemple, les couches signaux en cuivre (kc) sont toujours isolées par un matériau diélectrique (kd). Ce dernier va très fortement pénaliser les transferts dans l'axe transversal supposé, par définition, être suivant la direction z. Ainsi, la conductivité thermique dépend de l'axe considéré.

Une approche pratique permet d'approximer des conductivités thermiques dites « équivalentes » en faisant l'hypothèse que la dissipation est uniforme sur toute la surface d'une face de référence.

Puis on procède au calcul des résistances thermiques de chacune des couches disposées soit en série ou bien en parallèle afin de déterminer les propriétés fictives à appliquer à un bloc homogène.

$$k_Z = 1/\sum_{i=1}^{nC} [\,([k_C - k_D]\, f_i + k_D)^{-1}\, (t_i/H_B)] \tag{e243}$$

$$k_{XY} = \sum_{i=1}^{nC} [([k_C - k_D]\, f_i + k_D)\, (t_i/H_B)] \tag{e244}$$

Où :

- Le paramètre nf_i représente la fraction de cuivre de la couche i,
- Le terme t_i est l'épaisseur relative à couche i,
- Le terme H_B correspond à l'épaisseur globale du substrat.

Par cet artifice, il est possible de relier la définition de la structure à multiples couches d'une carte à deux paramètres thermiques.

Puis il s'agit de fixer le domaine expérimental pour chacune de 6 variables. Les bornes minimales (-1) et maximales (1), ci-dessous, ont été retenues :

- $2.5mm \leq L_C \leq 25mm$,
- $14.5° \leq \beta \leq 45°$,
- $0.5m/s \leq U \leq 5m/s$,
- $2W/(m.K) \leq k_{XY} \leq 30W/(m.K)$,
- $0.3W/(m.K) \leq k_Z \leq 1W/(m.K)$,
- $0.5mm \leq H_C \leq 5mm$.

Il est clair que le champ d'analyse couvert par les bornes du domaine répond à beaucoup de configurations rencontrées par un composant monté seul sur une carte de test. Dès lors, l'influence de chacun des paramètres sur le comportement physique à traduire est quantifiable ainsi que leur interaction. Notre plan d'expérience va fournir une vision de phénomènes complexes.

Un autre intérêt des plans d'expérience est de faciliter la mise en évidence des effets influents. On parle alors de screening, lequel a pour objectif de limiter le nombre de variables.

La Figure 145 visualise les effets d'une interaction, par exemple E_{12} (à gauche) et E_{52} (à droite).

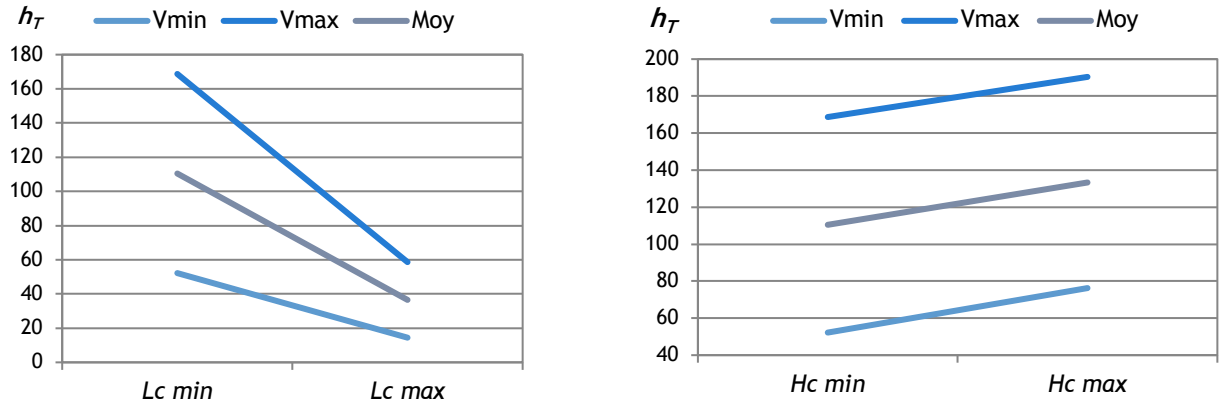


Figure 145 : Vision des interactions entre la forme du composant et la vitesse

Ainsi si les trois droites sont parallèles, l'interaction est négligeable. Il est à noter que les interactions d'ordre supérieur à 1, telles que E_{123} ou E_{1234} ou E_{12345}, sont généralement négligées.

Toutefois, comme le révèle la Figure 146, notre analyse a démontré qu'il est indispensable de conserver tous les niveaux d'interaction.

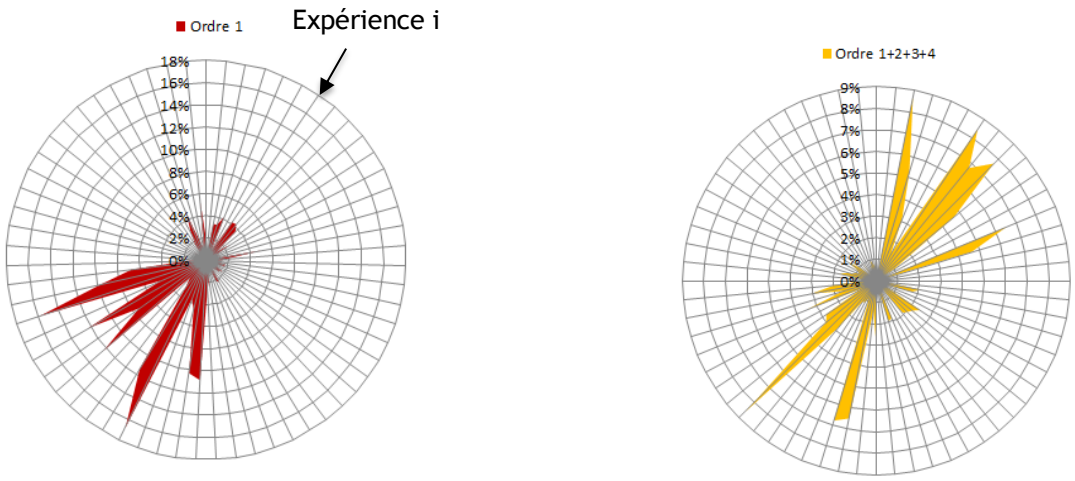


Figure 146 : Présentation des erreurs pour les 64 expériences en fonction des interactions

A l'opposé des pratiques statistiques, notre but n'est pas d'estimer la réponse de manière acceptable mais que celle-ci soit réellement représentative de la physique à modéliser.

Aussi, la conservation de l'ensemble des interactions dans la fonction déduite du plan d'expérience de Tagushi réduit l'erreur sur les bornes du plan à moins de 9%. Certes l'écriture complète de l'équation est très lourde comme le montre l'exemple de l'annexe P15.

Typiquement, la méthode des plans d'expérience de Tagushi offre un calcul précis lorsque les variations des variables sont linéaires. Mais ces plans d'expérience s'avèrent vite problématiques, pour retranscrire avec précision les non-linéarités des phénomènes advectifs observés.

A titre d'exemple, l'évolution du coefficient d'échange thermique en fonction de la géométrie de la source chaleur est tracée en Figure 147. Indubitablement ces évolutions ne sont pas linéaires.

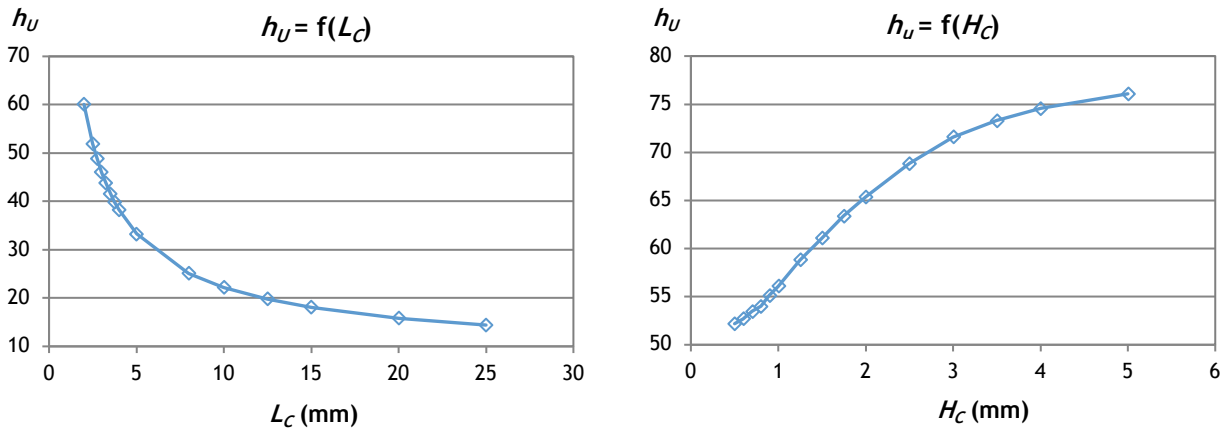


Figure 147 : Influence de la longueur et de la hauteur de la source sur l'échange thermique

Si cette hypothèse ne peut être retenue, le choix d'un plan factoriel à 3 niveaux est à envisager ou bien l'utilisation de la méthode des surfaces de réponses quadratiques. Pour cette dernière, l'expression (e242) est transformée afin de considérer un polynôme du second degré.

$$g(V_1, V_2, V_3) = f(V_1, V_2, V_3) + \sum_{i=1}^{n=3} E_{ii}\, {V_i}^2 \qquad \text{(e245)}$$

L'ajustement est le plus souvent restreint aux effets et aux interactions d'ordre 1 et 2. Ceux-ci sont alors assimilables aux gènes d'un chromosome et leur détermination peut être menée au moyen d'une optimisation stochastique évolutionnaire (F6).

Par ce biais, il est possible d'associer des points complémentaires aux bornes du plan d'expérience pour parfaire l'ajustement.

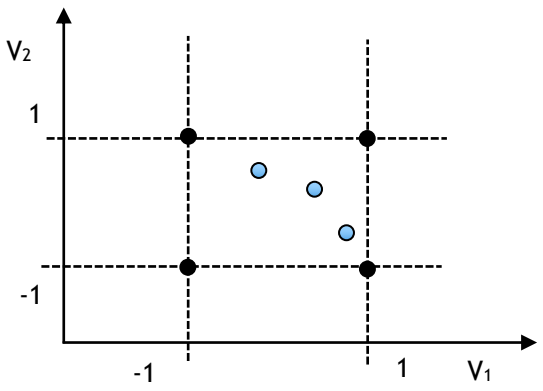


Figure 148 : Points expérimentaux définis dans le domaine de validité

Toutefois, pour garantir une meilleure représentativité, une méthode mixte a été mise en œuvre. Celle-ci couple un modèle de Tagushi et une loi marginale d'ajustement propre à chacune des variables.

Ainsi, la solution adoptée fait appel à la recherche d'une loi d'évolution dédiée à chacune des variables sélectionnées, telle que :

$$X_i(V) = (A_i + B_i\, V^{0.5})/(1 + C_i\, V^{0.5} + D_i\, V) \qquad \text{(e246)}$$

La modélisation de chacune des contributions du modèle est ajustée en utilisant une fonction rationnelle, laquelle est apparue plus fiable. Le jeu d'expressions obtenu est exposé en annexe P15.

Ces expressions sont destinées à compenser les effets non-linéaires entre les niveaux bas et haut du domaine de variation des variables. Les fonctions ajustées dépendent uniquement d'une variable, les autres dans notre cas sont fixées à leur niveau bas (-1).

Il est évident que ces lois d'évolution réclament un nombre supplémentaire d'expériences. Généralement une dizaine de points est nécessaire pour représenter le profil propre à une variable.

Il en résulte une expression de Tagushi révisée, laquelle se présente alors sous la forme générique :

$$g(V_1, V_2 \ldots, V_n) = E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i\, X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E_{ij}\, X_i\, X_j + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} E_{ijk}\, X_i\, X_j\, X_k + \cdots \qquad \text{(e247)}$$

Il est entendu que les interactions d'ordre élevé sont conservées afin de maintenir une bonne précision, sur l'intégralité du domaine du plan d'expérience, généralement inférieure à 10%.

In fine, celle-ci est facilement programmable dans Excel® en Visual Basic Application.

La Figure 149 démontre l'intérêt de cette méthode mixte sur le cas de l'annexe P15.

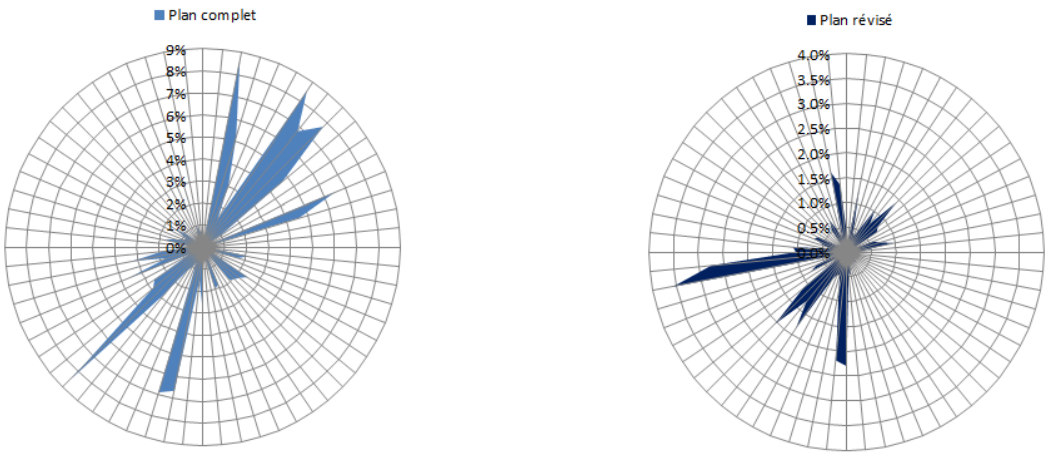


Figure 149 : Comparaison des 64 erreurs des deux approches

Sur le graphique droit, l'erreur maximale sur les 64 bornes du plan est réduite à moins de 3.5%.

L'ensemble des valeurs des effets et des interactions utilisées pour cette expression est également communiqué en annexe P15.

Il est également intéressant de vérifier que l'expression dérivée de cette méthode demeure précise en dehors des bornes du plan (points bleus Figure 148).

A titre d'exemple, La Figure 150 montre la prédiction de l'évolution du coefficient d'échange étudié lorsque la vitesse de l'écoulement varie entre les deux limites fixées, à savoir 0.5m/s et 5m/s. Toutes les autres variables sont positionnées sur leur niveau bas.

Le modèle statistique reproduit fidèlement le profil introduit au moyen d'une fonction quadratique.

L'erreur maximale indiquée sur l'ordonnée de droite n'excède pas 0.8%. Un résultat similaire est observé sur la représentation des profils des cinq autres paramètres.

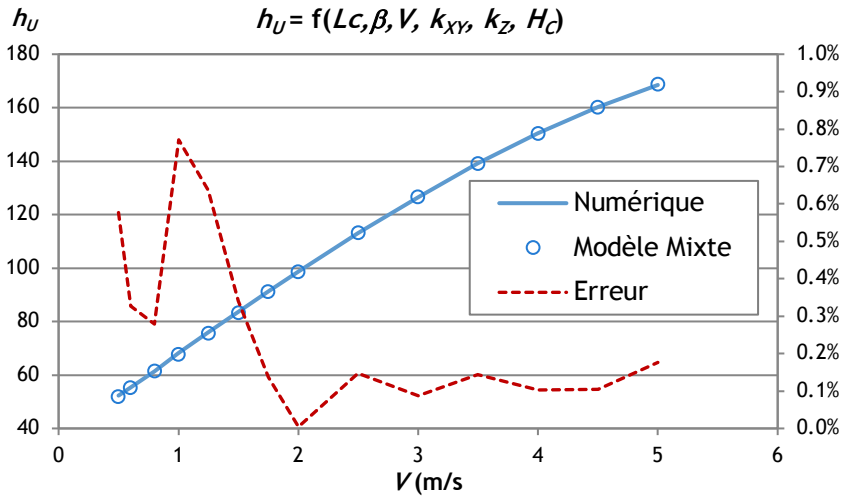


Figure 150 : Visualisation de la prise en compte d'un profil de variation d'une variable

Naturellement, la précision sur les bornes du plan est par définition excellente. Ceci est dû au fait que celles-ci ont été utilisées pour établir la formulation.

Néanmoins, pour statuer définitivement sur la pertinence de cette méthode, il convient de vérifier les prédictions du modèle, cette fois, pour un jeu de données aléatoirement sélectionné.

La Table 70 décline les écarts de prédiction du modèle vis-à-vis des résultats issus de la simulation.

Table 70 : Performances d'une approche mixte

Exp	L_C	U	β	k_{XY}	k_Z	H_C	$\overline{h}_{U_{SIM}}$	$\overline{h}_{U_{MOD}}$	%
1	23	1.8	15	10	1	0.5	27.98	28.67	-2.47%
2	17	4.9	44	8	0.8	3	62.02	59.42	4.20%
3	25	4	31	19	0.6	3	48.29	47.78	1.05%
4	4	4.8	42	29	0.3	3	127.7	118.07	7.54%
5	5	3.8	33	2	0.5	1	106.6	91.44	14.22%
6	22	2.8	22	7	0.6	5	42.3	42.47	-0.41%
7	3	3.1	36	15	0.9	4	121	112.70	6.86%
8	15	0.7	15	6	0.6	3	27.33	25.16	7.95%
9	25	4.6	18	27	0.6	3	56	54.80	2.15%
10	4	0.5	31	23	0.3	1	33.12	32.54	1.74%

Force est de constater que dans la grande majorité des cas analysés, l'erreur du modèle statistique n'excède pas 5%.

La connaissance du coefficient d'échange quel que soit le jeu de paramètre pris dans le domaine d'applicabilité permet de quantifier la conductance externe $(1/[\overline{h}_U\ \beta\ {L_C}^2])$, laquelle est ensuite imposée au modèle d'un composant électronique monté sur une carte de test Jedec.

K1.2. Expression de la résistance thermique jonction-ambiante

Cette fonction est déduite en appliquant la démarche du plan d'expérience explicitée ci-dessus.

Celle-ci va logiquement dépendre de 6 variables, telle que $R_{JA} = f(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$.

La définition d'une loi marginale a été appliquée à toutes les grandeurs physiques de manière à analyser la répartition des flux thermiques du bloc vers la carte ou vers le fluide ambiant.

La définition des conditions d'écoulement est décrite dans l'article [51]. Dans le cas étudié, le régime du fluide est laminaire et la densité de puissance volumique n'influence pratiquement pas ses caractéristiques.

Ainsi la méthode de Tagushi a permis de formuler pour le bloc les expressions ci-dessous.

- Le coefficient d'échange thermique moyen de la face supérieure du bloc, dit $\overline{h}_U(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$, dont les expressions sont données en annexe P15,
- Le coefficient d'échange thermique moyen des 4 faces latérales du bloc, dit $\overline{h}_S(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$ dont les expressions sont données en annexe P16.1.

Au niveau substrat de la carte électronique, la zone en dessous du bloc est décomposée en 2 résistances thermiques.

- La résistance thermique entre la face supérieure et inférieure coefficient, dite $R_{XY}(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$ dont les expressions sont données en annexe P16.3,
- La résistance thermique entre la face supérieure et les faces latérales de la zone sous le bloc, dite $R_Z(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$ dont les expressions sont données en annexe P16.4.

Pour le comportement du reste de la carte les 2 fonctions suivantes sont formulées :

- Le coefficient d'échange thermique moyen de zone en dessous du bloc, dit $\overline{h}_B(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$ dont les expressions sont données en annexe P16.2,
- La résistance thermique entre les faces latérales de la zone sous le bloc et l'ambiante, dite $R_{CA}(L_C, U, \beta, kxy, kz, H_C)$ dont les expressions sont données en annexe 0.

Cet ensemble de fonctions autorise la création d'un réseau nodal très simplifié :

$$R_{JA} = \left[\left(\overline{h}_U \, S_U \right)^{-1} + \left(\overline{h}_S \, S_S \right)^{-1} + (R_{XY} + R_{CA})^{-1} + \left(R_Z + \overline{h}_B \, S_T \right)^{-1} \right]^{-1} \quad \text{(e248)}$$

Ce dernier procure un moyen pratique de retrouver les prédictions de l'expression de la résistance jonction-ambiante d'un bloc homogène isotherme.

La substitution du bloc par le réseau nodal propre à un composant électronique est ensuite opérée. Le système linéaire résultant a été explicité en P4.1, celui-ci est repris ci-après.

$$[T] = ([\boldsymbol{Y}] + [\boldsymbol{I}]_n \, [Y_{ext}])^{-1} ([Y_{ext}] \cdot T_\infty + [Q]) \quad \text{(e249)}$$

$$[q] = [\boldsymbol{I}]_n \cdot [Y_{ext}] ([T] - T_\infty) \quad \text{(e250)}$$

Dans le cas d'un réseau tel que celui de la Table 11, la dernière ligne de la matrice des conductances est dédiée au nœud de jonction ($Y_{6,J}$). Les autres lignes correspondent à des nœuds associés à une surface externe ($1 \leq n \leq nN - 1$). Ceux-ci sont reliés à la température de référence par l'intermédiaire d'un vecteur définissant les conductances externes du réseau.

$$[Y_{ext}] = \begin{bmatrix} \overline{h}_U \, S_{Top-Inner} \\ \overline{h}_U \, S_{Top-Outer} \\ R_{BA} \, (S_{Bottom-Inner}/S_{Bottom}) \\ R_{BA} \, (S_{Bottom-Outer}/S_{Bottom}) \\ \overline{h}_S \, S_{Sides} \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{(e251)}$$

Ces dernières sont calculées au moyen des expressions de coefficients d'échange thermique, lesquelles ont définies grâce à un plan d'expérience.

On retrouve l'expression de la résistance de la carte vers le fluide ambiant, dénommée R_{BA}. Celle-ci est destinée au calcul des réseaux nodaux.

$$R_{BA} = \left[(R_{XY} + R_{CA})^{-1} + \left(R_Z + \overline{h}_B \, S_{Bottom} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad \text{(e252)}$$

La Table 71 fournit les résultats de « R_{JA} » donné par le logiciel Flotherm® pour le modèle d'un BGA 208 (Figure 35).

Puis ceux-ci sont comparés à l'estimation basée sur la décomposition en résistances externes et l'emploi des coefficients d'échange thermique.

Table 71 : Évaluation de la résistance thermique jonction-ambiante d'un BGA 208

Exp	L_C	V	β	k_{XY}	k_Z	H_C	$R_{JA_{SIM}}$	$R_{JA_{MOD}}$	%
1	15	0.5	45	2	0.3	1.35	56.9	59.5	4.3
2	15	2	45	2	0.3	1.35	41.2	43.8	6.0
3	15	5	45	2	0.3	1.35	32.2	35.4	8.8
4	15	2	45	30	0.3	1.35	23.8	26.3	9.5

Pour de fortes variations de vitesse, les valeurs déduites du modèle statistique sont toujours pessimistes. En outre, l'erreur reste en deçà de 10%.

Cette approche pragmatique a été diffusée auprès de la communauté scientifique, en 2004, lors de la conférence ITHERM-2004 [3].

Le modèle statistique déduit propose une comparaison quasi instantanée, en accord avec le standard JEDEC, des métriques thermiques associées à tout composant électronique.

Celle-ci ne nécessite pas la connaissance d'un code de calcul numérique et par conséquent elle est accessible à un large panel d'utilisateurs.

Ces travaux démontrent que l'utilisation de la technique des plans d'expérience de Tagushi apporte une solution originale pour établir des lois d'évolution prenant en compte plusieurs variables.

Les limitations de ces plans factoriels ont été mises en exergue, en particulier la représentation de phénomènes non-linéaires puis une solution pour y remédier a été formalisée.

K1.3. Apports résultant de ces travaux

La modélisation d'un substrat orthotrope offre l'opportunité de simuler le comportement thermique simplifié d'une carte électronique et de son composant via le couplage de son réseau nodal.

L'approche considère des réseaux complexes constitués de plusieurs nœuds reliés à plusieurs surfaces, la loi des nœuds est appliquée pour résoudre le système matriciel (e249).

Il est envisageable de tenir compte de la dépendance des conditions d'échange en fonction de la température vue par du substrat ou de celle du composant. Typiquement pour un refroidissement par convection naturelle, le système matriciel est résolu de manière itérative.

La matrice diagonale des conductances externes Y_{ext} dépend d'un coefficient d'échange thermique moyen respectivement déterminé pour le composant et pour la carte.

- $Y_{ext}(\overline{h}_C) = \overline{h}_C\, S_C$, le coefficient $\overline{h}_C$ est appliqué de manière uniforme sur la surface S_C, celle-ci correspond à la surface du composant mouillée par le fluide,
- $Y_{ext}(\overline{h}_U, \overline{h}_B) = 1/R_{BA}(\overline{h}_U, \overline{h}_B)$, les coefficients d'échange $\overline{h}_U$ et $\overline{h}_B$ sont respectivement appliqués à la surface supérieure et la surface inférieure du substrat.

Comme il sera commenté par la suite, la résistance thermique $R_{BA}(\overline{h}_U, \overline{h}_B)$ peut être déterminée au moyen de l'expression de l'équation de la chaleur appliquée au cas d'un matériau anisotrope, ou orthotrope, lequel est soumis à des conditions de Fourier sur ces faces supérieure et inférieure, les faces latérales étant, quant à elles, supposées adiabatiques.

Le calcul est initié en considérant que l'ensemble de la puissance dissipée par le composant est drainé uniquement par la carte. Puis les différentes conductances sont progressivement ajustées.

La spécificité du modèle est sa capacité à prendre en compte des coefficients d'échange thermique sur les faces supérieure et inférieure de la carte, ceci afin de considérer les orientations verticales ou horizontales.

K2. Premier développement d'un modèle nodal pour de multiples composants

En 2004, la problématique de l'emploi, par une unité, de cartes électroniques commerciales a été étudiée. Son objectif visait à définir une approche pertinente pour modéliser le comportement thermique de ces cartes dont les caractéristiques sont inconnues.

Celle-ci se rapproche des méthodologies basées sur les méthodes inverses. Son processus s'appuie sur l'expression d'un modèle analytique, en régime permanent, d'une carte équipée de ses composants ainsi que la réalisation de mesures électriques et thermiques visant à le caractériser.

Cette caractérisation est opérée pour des conditions d'environnement dites de laboratoire, avec pour objectif de mener celle-ci lors de tests fonctionnels d'une carte industrielle (Figure 43).

L'idée directrice développée est d'identifier au prorata de la puissance totale dissipée par la carte, les dissipations propres aux composants électroniques en fonction du niveau de température observé sur leur surface. Pour cela, la carte est positionnée verticalement pour mesurer indifféremment le comportement thermique de ses deux surfaces d'implantation.

Les données disponibles pour traduire le comportement intrinsèque d'un composant sont les résistances thermiques jonction-ambiante (e6). Ces valeurs standardisées sont relevées sur un composant isolé placé au centre d'une carte de test, constituée de 2 ou 4 couches métalliques, respectivement 2S/0P ou 2S/2P, pour des conditions d'environnement spécifiées.

Par conséquence, une autre voie est nécessaire pour traiter le comportement de plusieurs composants montés sur une carte électronique. Le modèle établi doit déterminer les contraintes liées au placement d'un composant et à l'échauffement qu'il subit, ou non, de la part des autres composants.

Plusieurs études ont été publiées, tels les travaux menés par Yovanovitch [R95] ou Muzychka [R96]. Celles-ci proposent des méthodes basées sur la résolution de l'équation de la chaleur à partir des séries de Fourier.

Les fonctions de Green procurent également une solution mais elles sont mathématiquement plus complexes à manier.

Puis en utilisant le principe de superposition, la sommation des contributions de toutes les sources de chaleur est effectuée.

K2.1. Définition de la modélisation analytique d'un substrat

Comme mentionné, la carte est supposée en position verticale, aussi l'hypothèse d'un coefficient d'échange thermique identique sur celles-ci a été initialement retenue.

La corrélation vue en (e8) pour une plaque verticale supposée isotherme, ou « Uniform Wall Temperature », est reconduite.

Celle-ci est issue des travaux de Lewandowski [R97], lequel a exploité les résultats de 45 corrélations, en régime laminaire. La longueur caractéristique est ici W_B.

$$\overline{h}_{\ell=W_B} = 0.55\, {Ra_{W_B}}^{0.25} \left(k_f / W_B\right) \tag{e253}$$

Et la définition du nombre de Rayleigh est alors donnée par la relation :

$$Ra_{\ell=W_B} = (g\,\beta/\nu\,a)\,(T_B - T_\infty)\,{W_B}^3 \tag{e254}$$

L'équation de la chaleur pour un matériau isotrope est écrite en supposant un coefficient d'échange thermique identique et uniforme (3eme espèce), sur les surfaces supérieure et inférieure.

$$\frac{d^2\theta(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\theta(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\theta(x,y,z)}{dz^2} = \frac{2\,\overline{h}}{k\,H_B}\,\theta(x,y,z) \tag{e255}$$

Cette condition est imposée à la surface de la source Ω_s, ceci au regard de sa taille vis-à-vis de celle du substrat.

La solution est alors établie en considérant les conditions aux limites suivantes :

- Sur la face supérieure et sur la face inférieure

$$k \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dz}\right|_{z=0} = 0 \;\;\&\;\; k \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dz}\right|_{z=H_B} = f(x,y) \tag{e256}$$

$$Avec\;\; f(x,y) = \begin{cases} \dot{q} & si\;\; x_i \le x \le x_f \;et\; y_i \le y \le y_f \\ 0 & si\; x,y \notin \Omega_s \end{cases} \tag{e257}$$

- Au regard du ratio de surface, les surfaces latérales du substrat sont considérées adiabatiques.

$$\left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dx}\right|_{x=0,L_B} = 0 \;\;\&\;\; \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dy}\right|_{y=0,W_B} = 0 \tag{e258}$$

Ce choix initial d'un matériau isotrope ($k = k_{XY} = k_Z$) est dicté par l'identification d'une seule inconnue pour ajuster la conductivité thermique inconnue de la carte électronique.

En utilisant la méthode de séparation des variables $\theta(x,y,z) = f(x)\, g(y)\, h(z)$, laquelle est explicitée sur un exemple fourni en annexe P17.

La résolution mène à une solution sous la forme d'un développement en série de fonctions orthogonales. Ainsi la solution analytique correspond à la sommation des termes suivants :

$$\begin{aligned} \theta(x,y,z) = A_0\, B_0\, \phi_{0,0}(z) + \sum_{m=1}^{M} A_m\, B_0\, \phi_{m,0}(z)\, cos(\alpha_m\, x) + \sum_{n=1}^{N} A_0\, B_n\, \phi_{0,n}(z)\, cos(\beta_n\, y) \\ + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} A_m\, B_n\, \phi_{m,n}(z)\, cos(\alpha_m\, x)\, cos(\beta_n\, y) \end{aligned} \tag{e259}$$

Les entiers M et N sont les valeurs de troncature des séries de Fourier, lesquelles sont différenciées en fonction des axes x et y.

Les paramètres A_0 et B_0 et les fonctions A_m et B_n sont les coefficients de Fourier, ils ne dépendent que des dimensions de la source, lesquelles sont dénommées L_S et W_S (Figure 151).

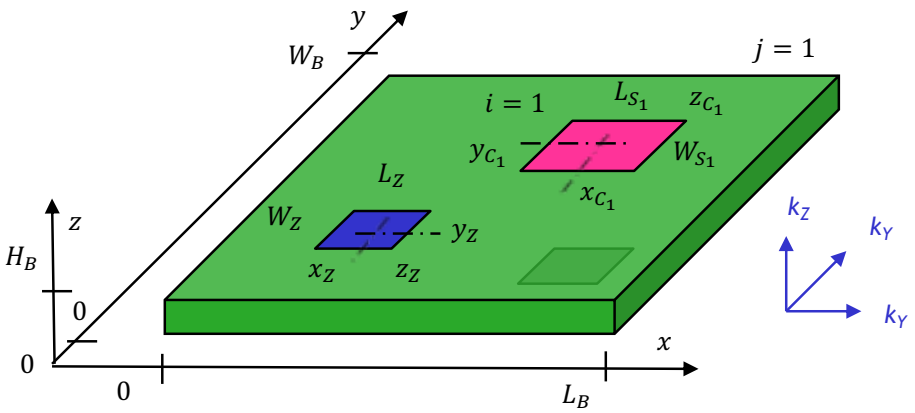


Figure 151 : Définition des paramètres du modèle analytique

Par commodité, la position de la source sur le substrat est référencée en centre X_S et Y_S.

$$A_0 = L_S \,/\, L_B \;\;\&\;\; B_0 = W_S \,/\, W_B \tag{e260}$$

$$A_{m>0} = 2\left[sin\left(\alpha_m \left[\frac{2\,X_S + L_S}{2}\right]\right) - sin\left(\alpha_m \left[\frac{2\,X_S - L_S}{2}\right]\right)\right] / \, m\,\pi \;\; avec\; \alpha_m = m\,\pi / \, L_B \tag{e261}$$

$$B_{n>0} = 2\left[sin\left(\beta_n\left[\frac{2\,Y_S + W_S}{2}\right]\right) - sin\left(\beta_n\left[\frac{2\,Y_S - W_S}{2}\right]\right)\right] / \,n\,\pi \;\; avec\; \beta_n = n\,\pi / W_B \tag{e262}$$

Les vecteurs α_m et β_n définissent les valeurs propres vérifiant les conditions aux limites (e258).

On note que les paramètres A_0 et B_0 correspondent aux limites de A_n et de B_n quand celles-ci tendent respectivement vers 0.

Aussi, les expressions ont été réécrites en utilisant une fonction de Kronecker pour lever l'indétermination et aboutir à un résultat quelle que soit la valeur de n.

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & si\;\; i = 0 \\ 0 & si\; i \neq 0 \end{cases} \tag{e263}$$

Les fonctions révisées A_m et B_n sont reprises ci-dessous :

$$A_m = 2\; sinc\left(\alpha_m\,\frac{L_S}{2}\right) cos(\alpha_m\, X_S)\,(L_S\,/\,L_B)\,/(1+\delta_m) \tag{e264}$$

$$B_n = 2\; sinc\left(\beta_n\,\frac{W_S}{2}\right) cos(\beta_n\, Y_S)\;\; (W_S\,/\,W_B)/(1+\delta_n) \tag{e265}$$

La fonction $\mathrm{sinc}(X)$ correspond au sinus cardinal.

La fonction $\phi_{m,n}$ distingue le profil thermique suivant l'axe transversal, ici z.

$$\phi_{m,n} = \frac{\dot{q}}{k}\left(ch(r_{m,n}\,z)/\left[\,r_{m,n}\;sh(r_{m,n}\;H_B)\right]\right) = \frac{\dot{q}}{k}\;\omega_{U_{m,n}} = \frac{q}{k\;L_S\;W_S}\;\omega_{U_{m,n}} \tag{e266}$$

$$avec\;\; r_{m,n} = \sqrt{{\alpha_m}^2 + {\beta_n}^2 + \frac{2\,\overline{h}}{k\;H_B}} \tag{e267}$$

Et où $ch(a)$ et $sh(a)$ désignent respectivement le cosinus et le sinus hyperbolique de a.

Cette fonction est définie quelles que soient les valeurs de m et de n.

L'expression finale du profil ou de la résistance thermique de température se présente sous la forme simplifiée d'une double sommation bornée d'une série de fonctions trigonométriques.

$$\theta(x,y,z) = \frac{q}{k\;L_S\;W_S}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} A_m\;B_n\;\;cos(\alpha_m\,x)\;\;cos(\beta_n\,y)\;\;\omega_{U_{m,n}}(z) \tag{e268}$$

$$R_{BA}(x,y,z) = \frac{1}{k\;L_S\;W_S}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} A_m\;B_n\;\;cos(\alpha_m\,x)\;\;cos(\beta_n\,y)\;\;\omega_{U_{m,n}}(z) \tag{e269}$$

Finalement, le principe de superposition est appliqué de manière à prendre en compte les interactions mutuelles de l'ensemble des sources de chaleur disposées sur l'intégralité de la carte.

$$T_B(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nS}\theta_i(x,y,z) + T_\infty \tag{e270}$$

L'examen des diverses expressions fournissant $T_B(x,y,z)$ montre que si la surface des composants (L_S et W_S), leur placement (X_S et Y_S), les dimensions de la carte (L_B, W_B et H_B), les conditions d'échange vers l'ambiante ($\overline{h}$) et sa constitution (k) sont connues, ou bien en mesure d'être calculées, la seule inconnue restante concerne la dissipation des composants (q_i).

L'approche proposée pour parvenir à les identifier est décrite dans les prochains paragraphes.

K2.2. Processus d'identification

Les étapes successives de ce processus sont reprises ci-dessous :

- Un modèle volumique de la carte électronique est construit.
- La puissance liée aux transferts couplés advectif et radiatif, de chaque composant, vers l'ambiante est évalué à partir de la température maximale relevée sur leur surface supérieure, à savoir $T_{M_{P_i}}$. Celle-ci est définie par le terme :

$$\Sigma Q_U = \sum_{i=1}^{Np} q_{U_i} = \sum_{i=1}^{Np} L_{P_i} W_{P_i} \left[\overline{h}_{W_{P_i}}(T_{M_{P_i}}) \left(T_{M_{P_i}} - T_\infty \right) + \sigma \epsilon_{P_i} f_{S\to\infty} \left({\Theta_{M_{P_i}}}^4 - {\Theta_\infty}^4 \right) \right] \quad \text{(e271)}$$

- La puissance électrique globale Q_M mesurée sur l'alimentation de la carte permet de déduire la puissance transmise par conduction au substrat (Q_B) et le coefficient d'échange thermique à appliquer au modèle analytique (Uniform Heat flux)

  Puis celle-ci est équirépartie sur les N_P composants de carte.

- Dans ces conditions, une évaluation de la température

$$q_{B_i} = [\, Q_M - \Sigma Q_U \,] / N_p \quad \text{(e272)}$$

- La température moyenne $\overline{T}_B$ de la face supérieure et de celle de la face inférieure du substrat, en dehors des sources, est effectuée. Puis les coefficients d'échange thermiques des surfaces sont réévalués.

$$\overline{h}\,(\overline{T}_{B\,U,B}) = \left[\overline{h}_{W_B}(\overline{T}_{B\,U,B}) \left(\overline{\Theta}_{B\,U,B} - \Theta_\infty \right) + \sigma \epsilon_{B\,U,B} f_{B\,U,B\to\infty} \left({\overline{\Theta}_{B\,U,B}}^4 - {\Theta_\infty}^4 \right) \right] \quad \text{(e273)}$$

- Dès lors, il est possible de procéder à un calcul des températures en tout point j du substrat (e270), à savoir : $T_B(x_j, y_j, z_j)$.

  La résistance thermique de diffusion de la chaleur au point central de chacun des i composants est ensuite déduite.

$$R_{BA_i} = [T_B(x_i, y_i, H_B) - T_\infty] / q_{B_i} \quad pour \;\; 1 \le i \le Np \quad \text{(e274)}$$

Dans un second temps, la prise en compte de la température moyenne de la source de chaleur a également été analysée. Les valeurs de dissipation aléatoirement préfixées sont ajustées simultanément sur un ensemble de mesures de température non-intrusives (mesures infrarouges). Lesquelles sont localisées à proximité immédiate des composants actifs du point de vue thermique.

Celles-ci sont définies par le terme $T_{M_B}(x_r, y_r, H_B)$, où r correspond à l'indice du relevé.

La fonction d'ajustement est basée sur une correction progressive liée à l'écart des températures :

$$[q_B]^{i+1} = [q_B]^i + \left[\left([T_B]^i - \left[T_{M_B} \right] \right) / [R_{BA}]^i \right] \quad \text{(e275)}$$

Le vecteur $[q]$ représente les puissances à imposer au substrat pour respecter les températures locales mesurées auprès de chaque composant.

Les résistances thermiques sont recalculées pour prendre en compte l'évolution des températures moyennes de la carte. La correction est également pondérée vis à vis de la puissance électrique mesurée sur la carte :

$$[q_B]^{i+1} = [q_B]^{i+1} \left[Q_M / \sum_{i=1}^{Np} {q_j}^{i+1} \right] \quad \text{(e276)}$$

- Ce processus de détermination des puissances transmises au substrat est complété par une modification progressive de sa conductivité thermique isotrope (k), ceci jusqu'à ce que l'écart, entre les mesures et les prédictions du modèle, soit minimisé :

$$[T_B]^i - [T_{M_B}] \rightarrow 0 \qquad \text{(e277)}$$

- Les puissances liées aux échanges thermiques de chaque composant sont finalement cumulées.

A partir de ce processus élémentaire, la prédiction des dissipations des composants de la carte vis à vis de celles réellement imposées s'est avérée de l'ordre de 15%, ceci sur plusieurs configurations d'activation.

Compte tenu, du contexte considérant le postulat d'une carte électronique totalement inconnue, ce résultat peut être jugé conforme aux attentes en termes de représentativité du modèle analytique.

Toutefois, le critère principal pour statuer sur la pérennité de la conception d'une carte électronique est la température de jonction. Par conséquent, il est indispensable de relier le comportement thermique de la carte à celui identifié sur les faces du composant électronique (e271).

Cette identification se fait par la création d'un réseau nodal simplifié, Figure 152, de type « 2R » (F9). La valeur de cette résistance thermique « jonction-top » est calculée à partir de l'expression.

$$R_{JT_i} = H_R/(k_R\, L_p\, W_p) \qquad \text{(e278)}$$

Une hypothèse discutable, elle suppose une dissipation uniforme à l'interface, or ce n'est pas le cas. Il serait plus judicieux de fixer la surface de la puce et de calculer une résistance de diffusion au moyen des expressions proposées au paragraphe H1.

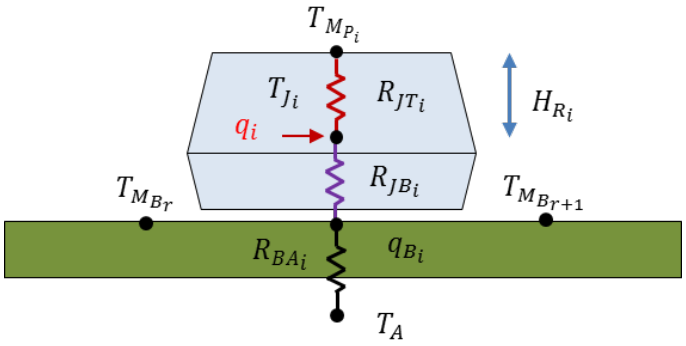


Figure 152 : Visualisation de la modélisation simplifiée des composants

Le calcul de R_{JT_i} estime que le semi-conducteur moulé dans le boitier électronique est protégé par une résine d'encapsulation ayant une épaisseur, H_R, maximale de 0.3mm. Sa connaissance permet de déterminer la seconde résistance du réseau, à savoir R_{JB}.

Il est alors possible de transposer les données « calibrées » du modèle analytique dans un modèle numérique de manière à valider le comportement de cette carte pour des environnements plus sévères, notre besoin initial.

Cette analyse est synthètisée dans l'article [4] présenté lors de la conférence ITHERM 2008.

K2.3. Exploitation des données expérimentales

La justification expérimentale de cette procédure d'identification des puissances, à partir d'un modèle analytique, dite méthode « COTS », est menée sur un véhicule de test composé de 7 composants électroniques, lequel a été décrit au paragraphe G11.

Comme mentionné, ces composants sont « fictifs », leur semi-conducteur ayant été remplacé par une puce thermique (Figure 140). Dès lors, il est possible de vérifier l'adéquation entre la puissance réellement dissipée et celle déduite au moyen du processus d'identification.

Un point notable, lors de cette analyse est l'influence des thermocouples sur les relevées des températures de surface. En définitive, ceux-ci sont à proscrire pour les cartes électroniques.

Une mesure non-intrusive des températures est obligatoire, l'usage d'une mesure infrarouge est une prérogative, tout comme l'emploi d'un zoom pour observer finement la face supérieure des composants analysés et des zones avoisinantes.

La comparaison des deux uen analyse en pré de la Figure 153 souligne une différence notable de température si le nombre de pixels est accentué localement (cartographie de droite).

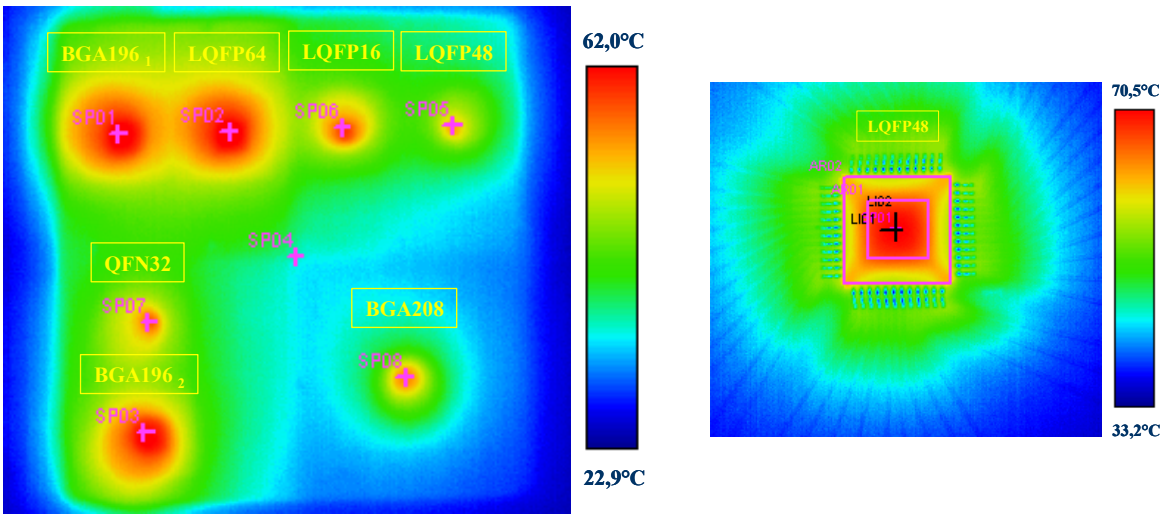


Figure 153 : Illustration de mesures de températures de surface du véhicule de test

La mesure conventionnelle à gauche est faite avec un objectif de 12°. Elle indique une température maximale de 62°C mais en réalité le niveau de température est nettement plus élevé.

La Table 72 démontre que la température de surface mesurée (colonne grisée) sur le dessus du boitier est bien en accord avec celle vue au niveau la puce.

Table 72 : Mesures thermiques internes et externes à $T_\infty = 27°C$

Référence i	$q_{M_i}\ (W)$	$T_{M_{P_i}}\ (°C)$	$T_{M_{J_i}}\ (°C)$	$T_{M_{B_i}}\ (°C)$
BGA196-1	1.677	83.6	80.9	54.7
LQFP64	1.702	83.6	80.4	53.5
LQFP16	0.933	82.3	81.6	45.8
LQFP48	0.751	72.5	73.5	41.5
BGA196-2	1.79	82.5	79.6	52.1
QFN32	0.802	81.9	80.8	48.
BGA208	1.018	60.1	60.4	39.2

La dernière colonne décrit l'écart de température entre le substrat, le boitier et la puce.

Les valeurs des deux colonnes grisées sont utilisées pour identifier les puissances relatives à chacun des composants.

Bien entendu, d'autres mesures toutes autour des différents boitiers vont améliorer l'ajustement des puissances. Les mesures de puissance et température de chacune des puces offrent l'opportunité de contrôler de la pertinence de la méthode.

D'autre part, l'utilisation d'un zoom procure plus de détails du composant, tels que la répartition et le nombre de pattes, la forme de la plate-forme ou la taille de la puce.

Ceux-ci sont susceptibles d'être exploités, par exemple, pour en déduire une valeur de résistance R_{JT_i} plus réaliste.

K2.4. Pertinence du processus d'identification

La campagne de mesure initiale a considéré que tous les composants sont alimentés et que les mesures de surfaces sont effectuées sur la face supérieure uniquement.

Puis une seconde configuration industrielle a été envisagée, à savoir la mise en œuvre d'une source additionnelle sur la face inférieure.

Pour cette nouvelle analyse, le modèle analytique est amendé pour prendre en compte des sources de chaleur pouvant être disposées sur la face inférieure du substrat.

Pour cela, un jeu inversé de conditions de 3eme espèce est appliqué.

$$k\left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dz}\right|_{z=H_B} = 0 \;\&\; k\left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dz}\right|_{z=0} = b(x,y) \tag{e279}$$

Pour ces conditions, seule l'expression du profil thermique suivant z doit être révisée.

$$\omega_{B_{m,n}}(z) = \omega_{U_{m,n}}\left[1 - th\left(r_{m,n}\ H_B\right)\ th\left(r_{m,n}\ z\right)\right] \tag{e280}$$

Où $th(a)$ désigne respectivement la tangente hyperbolique de a.

La superposition des contributions de chacune des sources de chaleur est menée en définissant la position de la source $z_S = 0\ ou\ H_B$.

$$\omega_{m,n}(z, z_S) = \left(1 - (z_S/H_B)\right)\omega_{B_{m,n}}(z) + (z_S/H_B)\,\omega_{U_{m,n}}(z) \tag{e281}$$

La Table 73 reprend une partie des résultats publiés [4].

Table 73 : Distribution des puissances identifiées pour un modèle à 7 composants

Référence i	$\boldsymbol{q}_{M_i}$ (W)	$\boldsymbol{q_i}$ $(°\boldsymbol{C})$	$\delta\boldsymbol{q_i}$
BGA196-1	1.677	1.853	+10.5%
LQFP64	1.702	1.753	+3%
LQFP16	0.933	0.811	-13%
LQFP48	0.751	0.666	-11.3%
BGA196-2	1.79	1.825	+1.9%
QFN32	0.802	0.784	-2.2%
BGA208	1.018	0.947	-7.0%

A partir d'un jeu de températures références et d'une mesure électrique, cette méthode rudimentaire détermine une distribution de puissance assez proche de la réalité, pour une carte simple ou à double face disposant de plusieurs composants actifs.

Cette procédure à vocation industrielle procure également à partir de ces paramètres une valeur pour la conductivité thermique du substrat de la carte ainsi qu'un réseau nodal « 2R » (Figure 57) pour chacun de ces composants pouvant être critiques du point de vue thermique.

Il est certain que la connaissance potentielle de la constitution de la structure du substrat et des composants l'équipant est en mesure de palier aux nombreuses incertitudes du modèle établi.

K2.5. Limites de l'approche et validation du modèle analytique

Des points de blocages pour l'extension de cette méthodologie ont été soulevés, par exemple :

- Lorsque les composants électroniques sont en vis-à-vis, c'est le cas des cartes doubles faces,
- Ou bien si les points chauds de la carte ne représentent qu'une faible proportion de la puissance dissipée globale (effets joule dans les pistes),

D'autre part, la pertinence du choix d'un matériau isotrope pour le substrat de la carte a été explorée.

Comme évoqué au paragraphe K1.1, la superposition de couches électriques très conductrices de la chaleur et des couches diélectriques très isolantes conduit à des transferts thermiques très différents en fonction des axes longitudinaux (x, y) et transversal (z) de la carte.

Là encore, le modèle analytique est adapté pour palier à cette problématique. L'équation de la chaleur est modifiée pour interpréter la disproportion des conductivités thermiques, telle que :

$$k_r = \sqrt{k_Z \, k_{XY}} \tag{e282}$$

Toutefois d'autres modes de calcul ont été étudiés par Culham [R103], tels que :

$$k_r = (k_Z + k_{XY})/2 \quad ou \quad k_r = 2\, k_Z \, k_{XY}/(k_Z + k_{XY}) \tag{e283}$$

Un changement de variable est opéré sur l'intégralité des formulations analytiques précédentes, de manière à ce que l'axe transversal du substrat correspond à :

$$\xi(z) = z/\sqrt{k_{XY}/k_Z} \quad avec \;\; 0 \le z \le H_B \tag{e284}$$

La Table 74 montre l'influence de la conductivité thermique transversale sur les températures maximales des sources, lorsque les conductivités thermiques sont respectivement fixées pour le substrat isotrope à $k = 18 Wm^{-1}K^{-1}$ et celles du substrat anisotrope à $k_{XY} = 18 Wm^{-1}K^{-1}$ et $k_Z = 1 Wm^{-1}K^{-1}$.

Table 74 : Comparaison des températures pour un substrat isotrope ou anisotrope

Référence i	$\boldsymbol{q_i}\ (W)$	$\boldsymbol{\xi_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T_{T_k}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T_{T_{k_r}}}\ (°C)$
BGA196-1	1.625	1.6	27.4	30.9
LQFP64	1.553	1.6	26.4	30.3
LQFP16	0.757	1.6	18.8	24.9
LQFP48	0.624	1.6	14.6	19.7
BGA196-2	1.603	1.6	25.5	29.0
QFN32	0.755	1.6	21.8	32.0
BGA208	0.83	1.6	12.2	13.9

Le coefficient d'échange thermique global est, quant à lui, choisi égal à $\overline{h} = 10\ Wm^{-2}K^{-1}$.

Les dimensions du substrat sont indiquées Table 48. Celles des sources sont fournies Table 49.

La prise en compte d'une conductivité transversale faible accentue les niveaux de températures des composants, en particulier pour ceux dont les dimensions sont faibles.

C'est le cas, par exemple, du boitier QFN32 (zone grisée) pour lequel on relève une augmentation de plus de 10°C. Cet écart de prédiction des températures est d'autant plus grand que la conductivité thermique transversale est proche de celle du matériau diélectrique.

Le cas d'un substrat ayant une conductivité thermique $k_Z = 0.35 Wm^{-1}K^{-1}$ est fourni en annexe P18.1, pour lequel l'augmentation est de l'ordre de 20°C.

La procédure d'identification peut être reconduite en fixant, par exemple, la conductivité thermique transversale puis en identifiant celle relative au plan.

La caractérisation exacte de ces deux conductivités thermiques implique obligatoirement de disposer pour les deux faces de la carte, d'un jeu de températures supplémentaires.

L'agrément de ce modèle analytique destiné à de multiples sources de chaleur a été confronté à un modèle numérique sur plusieurs types de configurations, ainsi des composants ont été déplacés sur la face inférieure du substrat.

A titre d'exemple, la Table 75 expose la comparaison des résultats analytiques et numériques, lorsque

les composants nommés BGA196-1 et QFN32 sont implantés sur la face inférieure ($\xi = 0$).

Les températures relevées en vis à vis sur l'autre face de la carte sont données en annexe P18.1. Cette annexe fait également état des températures moyennes vues par les sources de chaleur.

Il est à noter qu'il est souvent difficile de s'assurer que la comparaison des résultats entre le modèle analytique et ceux du modèle numérique est bien effectuée sur les mêmes points surfaciques ou sur les mêmes aires.

C'est un aspect essentiel lié à tout calcul numérique, il est indispensable de s'assurer que les données sont indépendantes du maillage et de comprendre également comment celles-ci sont finalement interprétées par le code de calcul utilisé.

Table 75 : Températures centrales des sources à $\xi = \xi_{H_B}$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	25.2	25.2	0.10%
LQFP64	1.553	1.6	30	30.1	-0.40%
LQFP16	0.757	1.6	24.7	24.9	-0.80%
LQFP48	0.624	1.6	19.5	19.7	-0.90%
BGA196-2	1.603	1.6	28.8	29	-0.70%
QFN32	0.755	0	17.2	17.2	-0.10%
BGA208	0.83	1.6	13.9	14	-0.50%

Les températures moyennes du modèle analytique sont déterminées au moyen de l'expression explicitée ci-dessous :

$$\overline{\theta}(x_I, x_S, y_I, y_S, \xi) = \frac{q}{k\ L_S\ W_S} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} A_m\ B_n\ \omega_{m,n}(\xi, \xi_S) \int_{x_I}^{x_S} \int_{y_I}^{y_S} cos(\alpha_m\ x)\ cos(\beta_n\ y)\ dx\ dy \qquad \text{(e285)}$$

$$L_Z = x_S - x_i \ \ \&\ W_Z = y_S - y_i \quad avec\ \ x_I < x_S \ \ \&\ y_I < y_S \qquad \text{(e286)}$$

$$\overline{A}_m = cos\left(\alpha_m \left[\frac{x_S + x_i}{2}\right]\right) sinc\left(\alpha_m \frac{L_Z}{2}\right) \ \ \&\ \overline{B}_n = cos\left(\beta_n \left[\frac{y_S + y_i}{2}\right]\right) sinc\left(\beta_n \frac{W_Z}{2}\right) \qquad \text{(e287)}$$

$$\overline{A}_m = cos(\alpha_m\ [X_Z])\ sinc\left(\alpha_m \frac{L_Z}{2}\right) \ \ \&\ \overline{B}_n = cos(\beta_n\ [Y_Z])\ sinc\left(\beta_n \frac{W_Z}{2}\right) \qquad \text{(e288)}$$

$$\overline{\theta}(x_I, x_S, y_I, y_S, \xi) = \frac{q}{k\ L_S\ W_S} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} A_m\ B_n\ \overline{A}_m\ \overline{B}_n\ \omega_{m,n}(\xi, \xi_S) \qquad \text{(e289)}$$

Pour alléger la formulation, la superposition des profils n'est pas réécrite. La définition des paramètres L_Z et W_Z est donnée en Figure 151.

La précision obtenue dépend du nombre de sommations M_i ou N_i des séries de Fourier. Les résultats présentés sont basés sur un entier dépendant des tailles relatives de la source et du substrat.

$$M_i = \eta\left(L_B / L_{P_i}\right) \ \ \&\ \ N_i = \eta\left(W_B / W_{P_i}\right)\ avec\ \eta = 3 \qquad \text{(e290)}$$

Les températures des composants pour cette valeur de η montrent un écart inférieur à 3% par rapport à celles issues de la simulation numérique.

Cette précision est souvent suffisante pour statuer sur la criticité d'une conception thermique.

Il est à noter que les sources de faibles dimensions vont exiger un nombre élevé d'iterations.

L'influence du paramètre η a fait ultérieurement l'objet de plusieurs analyses [42]-[44] pour fixer le meilleur compromis entre précision et rapidité, généralement sa valeur est fixée à 9.

Pour conclure, cette technique d'ajustement expérimentale a ouvert de nouvelles perspectives pour valider la véracité des dissipations des composants d'une carte électronique, un aspect toujours sensible lors de la conception des cartes électroniques.

K2.6. Dissémination du concept de caractérisation d'une carte inconnue

En 2008, cette méthode de caractérisation d'une carte électronique, dite « COTS », fait l'objet d'un brevet [2] puis d'une présentation à la conférence IEEE, ITHERM-2008 [4].

Le modèle analytique d'un véhicule de test, créé par cette méthodologie, procure une solution pour l'analyse du comportement thermique d'une carte commerciale, ceci pour des conditions de fonctionnement extrêmes et la mise en œuvre éventuelle de solutions de durcissement.

Cette analyse est illustrée dans l'article ITHERM-2008 [4], lequel décrit la création de son modèle numérique et la confrontation de ces prédictions par rapport à des relevés expérimentaux.

Pour cette analyse, le véhicule de test est soumis à plusieurs conditions d'environnement représentatives des applications du secteur de l'électronique, telles que :

- La carte est confinée dans un boitier fermé. Les échanges thermiques convectifs sont par conséquent restreints.
- La carte est refroidie par convection forcée. Deux vitesses d'air sont considérées.
- La carte est munie d'un drain thermique externe. Celui-ci draine la chaleur dissipée par les composants vers une structure en aluminium, celle-ci étant refroidie par convection naturelle.

Les résultats de cette étude d'une carte « inconnue » démontrent qu'il est envisageable d'évaluer la température vue par les jonctions des composants d'un véhicule test avec une erreur moyenne inférieure à 15%.

K2.7. Perspectives complémentaires

La traduction sous une forme nodale, des caractéristiques thermiques intrinsèques d'un composant ainsi que celles du substrat d'une carte électronique, fournit une solution pour l'analyse, en phase de pré-design, du comportement thermique d'une carte.

Celle-ci s'appuie sur une méthode de calcul simple [R91] et très facilement amendable. Ainsi, il est possible de reconsidérer séparément chacun des éléments du modèle analytique établi (e268)-(e289) pour interpréter le comportement d'une carte électronique multi-face à multiples composants.

Par exemple, l'opportunité de distinguer les coefficients d'échange appliqués aux deux surfaces non-adiabatiques est illustrée ci-après.

Seuls les profils thermiques suivant l'axe z sont dans ce cas à reformuler, tels que :

$$\omega_{B_{m,n}}(z) = \frac{\left[K_{m,n} + \overline{h}_U \ th\left(r_{m,n}\,\xi(H_B)\right)\right] \ ch\left(r_{m,n}\,\xi(z)\right) - \left[\overline{h}_U + K_{m,n} \ th\left(r_{m,n}\,\xi(H_B)\right)\right] \ sh\left(r_{m,n}\,\xi(z)\right)}{K_{m,n}\left[\,\overline{h}_U + \overline{h}_B\,\right] + \left[\,{K_{m,n}}^2 + \overline{h}_U\,\overline{h}_B\,\right] \ th\left(r_{m,n}\,\xi(H_B)\right)} \qquad \text{(e291)}$$

$$\omega_{U_{m,n}}(z) = \frac{K_{m,n} \ ch\left(r_{m,n}\,\xi(z)\right) + \overline{h}_B \ \ sh\left(r_{m,n}\,\xi(z)\right)}{ch\left(r_{m,n}\,\xi(H_B)\right)\left\{K_{m,n}\left[\,\overline{h}_U + \overline{h}_B\,\right] + \left[\,{K_{m,n}}^2 + \overline{h}_U\,\overline{h}_B\,\right] \ th\left(r_{m,n}\,\xi(H_B)\right)\right\}} \qquad \text{(e292)}$$

$$avec \ \ K_{m,n} = k_r\, r_{m,n} \ \ \ et \ \ r_{m,n} = \sqrt{{\alpha_m}^2 + {\beta_n}^2} \qquad \text{(e293)}$$

La fonction $r_{m,n}$ pouvant être nulle, quand $m = n = 0$, il convient de caractériser ce cas particulier.

$$\lim_{m \wedge n \to 0} \omega_{B_{m,n}}(z) \ \ et \ \ \lim_{n \wedge m \to 0} \omega_{U_{m,n}}(z) \qquad \text{(e294)}$$

$$\omega_{B_{0,0}}(z) = \left[k_r + \overline{h}_B\,[\,\xi(H_B) - \xi(z)]\right] / \left[k_r\,[\,\overline{h}_U + \overline{h}_B] + \overline{h}_U\,\overline{h}_B\,\xi(H_B)\right] \quad \text{(e295)}$$

$$\omega_{U_{0,0}}(z) = \left[k_r + \overline{h}_B\,\xi(z)\right] / \left[k_r\,[\,\overline{h}_U + \overline{h}_B\,] + \overline{h}_U\,\overline{h}_B\,\xi(H_B)\right] \quad \text{(e296)}$$

La qualité des prédictions pour le cas d'un substrat anisotrope dont les coefficients sont respectivement $\overline{h}_U = 10\,Wm^{-2}K^{-1}$ et $\overline{h}_B = 0\,Wm^{-2}K^{-1}$ est présentée en annexe P18.3.

L'autre intérêt de cette formulation est de pouvoir imposer des températures de référence propres à chacune de faces de la carte.

Ainsi, la température la plus chaude est prise comme référence et le coefficient d'échange thermique de la face la plus froide est corrigé selon le principe ci-dessous.

$$\overline{h}(\overline{T}_{B_X}) = \left[\overline{h}_{W_B}(\overline{T}_{B_X})(\,\overline{\Theta}_{B_X} - \left[\Theta_\infty - \Delta T_{\infty_X}\right]) + \sigma\,\epsilon_{B_X}\,f_{B_X\to\infty}\,(\,\overline{\Theta}_{B_X}{}^4 - \left[\Theta_\infty - \Delta T_{\infty_X}\right]^4)\right] \quad \text{(e297)}$$

$$si\ \ T_{U_\infty} > T_{B_\infty}\ \rightarrow\ \Delta T_{\infty_X} = \begin{cases} \Delta T_{\infty_U} = 0 \\ \Delta T_{\infty_B} = T_{\infty_U} - T_{\infty_B} \end{cases} \quad \text{(e298)}$$

Il apparaît que par le biais d'une approche nodale, un ensemble de solutions analytiques peut être substitué aux résolutions numériques conventionnelles.

Ces dernières sont habituellement retenues pour l'analyse thermique des cartes équipées de leurs composants.

A titre d'exemple, la Figure 154 compare l'impact thermique sur la surface supérieure d'un substrat lorsque deux sources de chaleur (BGA196-1 et QFN32) sont montées sur sa surface inférieure.

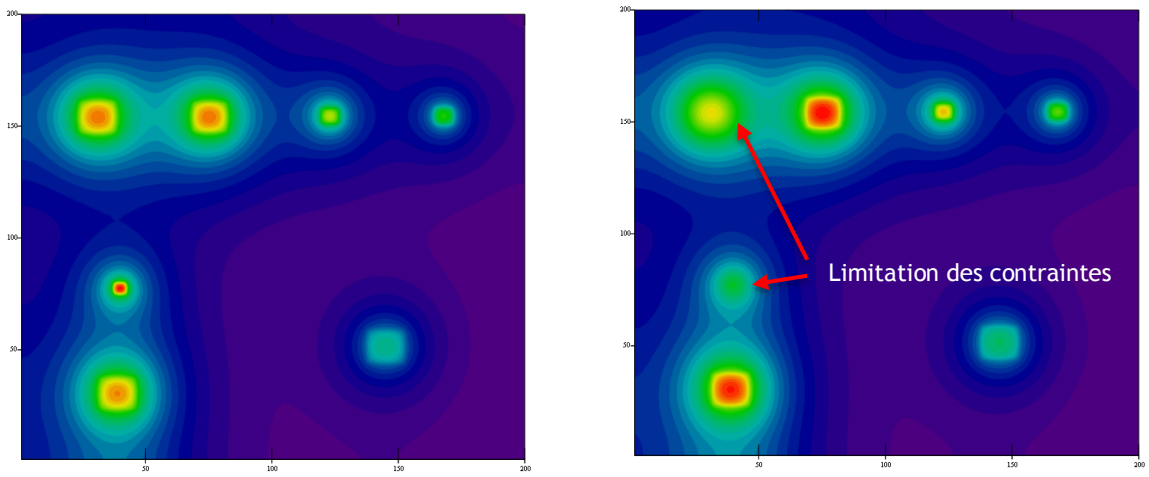


Figure 154 : Illustration de l'analyse thermique d'un placement de composant

Ces solutions sont en mesure d'identifier au plus tôt l'importance des contraintes thermiques vues par ces composants actifs puis de faciliter la validation des prédictions des niveaux de température par le biais de mesures pour des conditions dites de laboratoire.

K3. Formalisation d'un concept pour la modélisation des cartes conventionnelles

Une première approche nodale pour l'analyse en régime stationnaire d'une carte électronique de forme parallélépipédique et de ses composants, a fait l'objet de l'écriture d'un brevet [1] en 2005. Son intérêt est de disposer d'une solution exacte, libre de tout maillage, accessible par conséquent à des non-spécialistes, tels que les ingénieurs électroniciens.

Malgré d'évidentes limitations, la solution est restreinte à conditions aux limites uniformes, celle-ci offre l'opportunité de figer rapidement les choix initiaux d'une conception.

La qualité des résultats de cette approche analytique dépend essentiellement du modèle nodal (2R, nR) retenu pour étudier le comportement d'un composant électronique, un aspect débattu au paragraphe F9.

Pour cela, il faut être en mesure de créer des modèles nodaux précis puis d'avoir la capacité d'analyser rapidement leur comportement sur le substrat d'une carte électronique (Figure 2).

K3.1. Modélisation plus réaliste des propriétés thermiques d'une carte

L'amélioration de la qualité des prédictions de l'outil « Évaluateur de carte » passe par la mise en place d'une subdivision du substrat des cartes électroniques pour distinguer les discontinuités métalliques (Figure 103) et en déduire des conductivités thermiques en adéquation avec la forme réelle des éléments constitutifs de cette architecture composite.

Dès lors, toutes les traces des signaux électriques pour l'ensemble des couches de la carte sont exportées des outils de conception afin de déterminer avec précision les surfaces occupées respectivement par la métallisation en cuivre et par la résine isolante.

Cette identification a pour objectif de quantifier les phénomènes de barrière thermique.

Le principe de cette analyse de la conductivité thermique du véhicule de test présenté au paragraphe G11 est repris ci-après.

L'ensemble des couches de la carte est décomposé en une série de cellules (i, j, k) afin de déterminer leur fraction axiale de cuivre ($f_{i,j,k}$) et d'en déduire leur conductivité thermique ($k_{i,j,k}$).

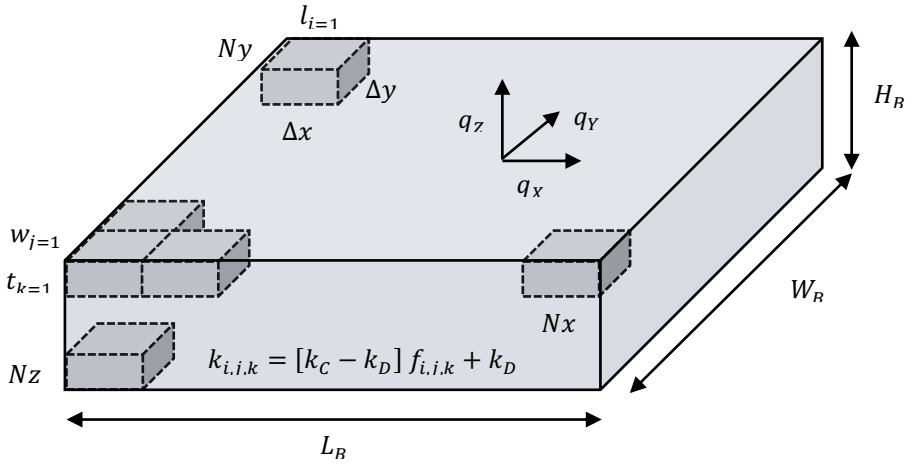


Figure 155 : Principe de l'interprétation de la conductivité globale d'un substrat réel

Puis, un ensemble de regroupements en série puis en parallèle des résistances thermiques est réalisé pour évaluer la conductivité thermique effective pour chacun des axes du substrat : k_X, k_Y et k_Z.

$$k_X = L_B \sum_{k=1}^{Nz} t_k \left[\sum_{j=1}^{Ny} w_j \Big/ \sum_{i=1}^{Nx} \left(l_i / k_{i,j,k} \right) \right] \qquad \text{(e299)}$$

En fonction de la finesse du découpage, cette approche détecte, ou non, les discontinuités des zones métallisées et ainsi souligne l'influence des zones diélectriques à faible conductivité thermique sur la capacité à diffuser la chaleur dans le plan du substrat.

La Table 76 décrit l'évolution des conductivités en fonction de la taille de la cellule de référence.

Table 76 : Évaluation de la conductivité multiaxiale du véhicule de test

Modèle	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
1.5x1.5mm²	14.9	13.7	0.491
1x1mm²	7.3	10	0.478
0.5x0.5mm²	5.4	7.3	0.475
« a priori »	18.1	18.1	0.59

La diminution des deux conductivités longitudinales est liée à la présence d'une coupure des deux plans, laquelle est observable sur la Figure 103. Celle-ci met en lumière une croix bleue au centre.

Cette table met aussi en évidence la dissymétrie des conductivités thermiques longitudinales k_X et k_Y.

Conventionnellement, en l'absence d'information sur la structure de la carte, par exemple lors des phases amont de la conception, le calcul des conductivités thermiques axiales ((e243)-(e244), est basé sur les pourcentages fixés « a priori » de métallisation. Au regard de celles dérivées d'une décomposition, celles-ci sont très optimistes.

Ce modèle d'estimation de la conductivité thermique effective fait le postulat que les zones de cuivre et de résine sont arrangées en 2 fractions continues parallèles (Figure 156).

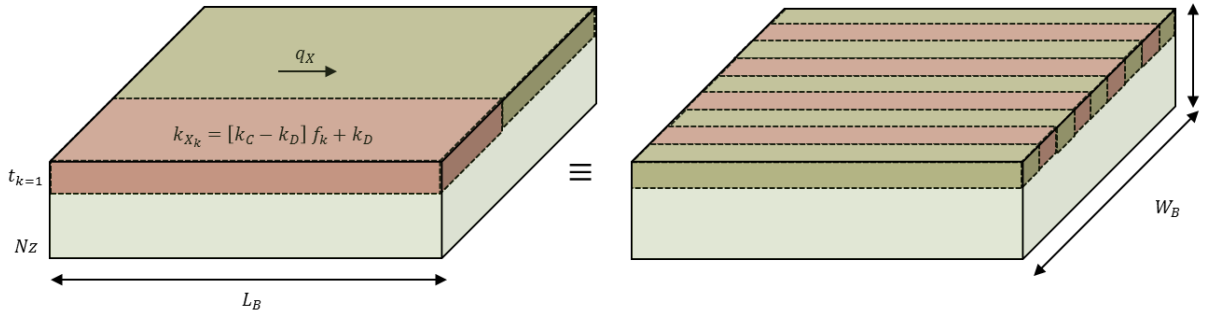


Figure 156 : Principe de la méthode basée sur le pourcentage de cuivre

Cette approximation a été appliquée à plusieurs types de substrat [51], ses résultats sont loin d'être probants. D'autres méthodes sont proposées dans la littérature [R29]-[R116], certaines d'entre elles exploitent statistiquement des données expérimentales issues de tests menés sur un échantillon représentatif de substrats industriels [R117].

Les sources de chaleur sont locales de manière à mieux représenter la propagation tridimensionnelle de la chaleur au sein d'une structure composite les avoisinant. La zone d'influence est limitée à un élément dont la forme est cylindrique ou ellipsoïdale (e461).

Ce constat d'une prédiction très optimiste des températures a poussé à la recherche d'un modèle plus pertinent pour les phases de préconception, lorsque le dessin des pistes n'est pas encore figé.

La problématique est de retranscrire pour les faibles pourcentages de cuivre, le fait que les pistes sont éparses et à contrario pour les forts taux de cuivre que l'incidence des zones diélectriques soit mineure.

La plupart des modèles s'avèrent pessimistes, tel celui de Bruggeman-Laudauer [R118] ci-dessous.

$$k_i = \left[\gamma_i + \sqrt{{\gamma_i}^2 + 8\, k_C\, k_D} \right] / 4 \qquad \text{(e300)}$$

$$Avec\ \ \gamma_i = (3\, f_i - 1)\, k_C\ + [3\,(1 - f_i) - 1]\, k_D \qquad \text{(e301)}$$

Celui-ci élimine de l'estimation de la conductivité thermique effective toutes les couches dont le pourcentage de cuivre est faible. L'impact sur les couches à fort taux de cuivre est également très accentué comme le montre la Figure 157.

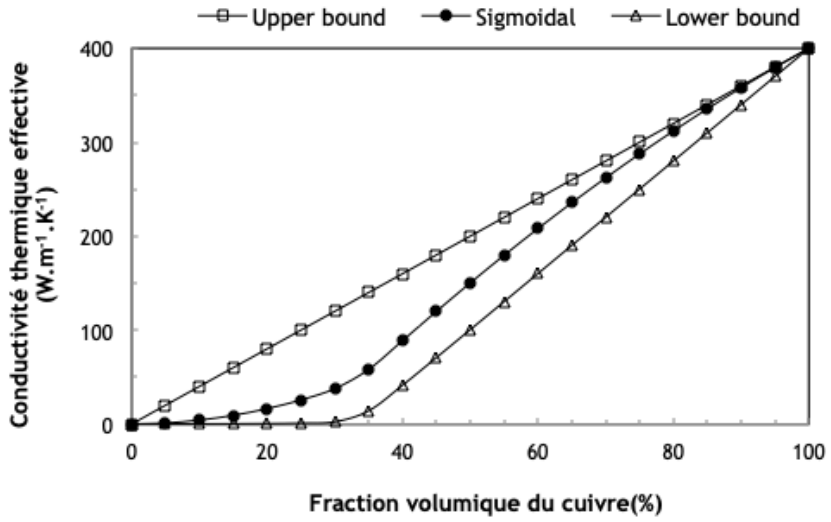


Figure 157 : Modélisation de la conductivité en fonction du pourcentage de cuivre

Afin d'obtenir un comportement plus atténué les deux méthodes de calcul ont été associées au moyen d'une fonction sigmoïdale [R119]. Cette fonction présente l'intérêt de pouvoir coupler le modèle initial (upper bound -k_i^u) à celui de Bruggeman (Lower bound - k_i^l), telle que :

$$k_i^s = f_i\, k_i^u + (1 - f_i)\, k_i^l \tag{e302}$$

La comparaison de ces interprétations de la conductivité effective est dépeinte en Figure 157.

A la place d'une variation linéaire, le modèle sigmoïdal minimise fortement la valeur de la conductivité thermique effective lorsque les éléments métalliques présents dans une couche donnée sont en faible proportion. La Table 77 présente les conductivités thermiques déduites de ces trois modèles.

Table 77 : Estimation des conductivités thermiques effectives du véhicule de test

Modèle	Repère	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
« a Priori »	$\boldsymbol{T_{TP_{S_i}}}$	18.1	18.1	0.59
« Bruggeman »	$\boldsymbol{T_{TB_{S_i}}}$	15.6	15.6	0.59
« Sigmoïdal »	$\boldsymbol{T_{TS_{S_i}}}$	14.6	14.6	0.59

L'apport de ce nouveau mode de calcul de la conductivité thermique effective d'un substrat orthotrope fait l'objet des articles [45]-[51].

La Table 78 révèle l'influence de ces modèles de calcul sur les prédictions des températures.

Table 78 : Températures centrales des sources en fonction des conductivités effectives

Référence i	$\boldsymbol{q_i}\ (W)$	$\boldsymbol{\xi_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T_{TP_{S_i}}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T_{TB_{S_i}}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T_{TS_{S_i}}}\ (°C)$
BGA196-1	1.625	1.6	32.9	34.9	35.9
LQFP64	1.553	1.6	32.3	34.4	35.4
LQFP16	0.757	1.6	28.0	29.7	30.5
LQFP48	0.624	1.6	22.1	23.3	24.0
BGA196-2	1.603	1.6	30.9	32.9	33.9
QFN32	0.755	1.6	36.5	38.6	39.6
BGA208	0.83	1.6	15.0	15.9	16.3

Plusieurs autres modèles théoriques d'estimation de la conductivité thermique effective pour des matériaux composites ont été testés mais leur pertinence demeure très fluctuante.

Par exemple, le modèle décrit par Wu [R29], lequel considère pour chacune des cellules, les fractions du milieu (e302) pouvant être représentées par un modèle parallèle et par un modèle série.

Cette analyse effectuée, en 2006, sur la modélisation des propriétés thermiques d'un substrat a mis en évidence le besoin de dissocier les deux conductivités thermiques relatives au plan, à savoir les axes x et y. Cette amélioration vise à parfaire la définition des transferts thermiques au sein du substrat.

K3.2. Révisions du modèle anisotrope initial

A la vue des résultats précédents, l'objectif est de disposer d'un modèle théorique capable de prendre en compte une conductivité thermique spécifique sur chacun des axes du substrat.

La modélisation analytique tridimensionnelle, basée sur la résolution de l'équation de la chaleur d'une source, carrée ou rectangulaire montée sur un substrat orthotrope monocouche, est reprise, de manière à intégrer ce nouveau besoin.

L'équation étudiée néglige le terme lié à une potentielle source de chaleur volumique. La présence de composants placés sur la face inférieure de la carte est conservée, celle-ci constitue une des originalités du modèle développé.

Le point de référence pour la superposition des deux modèles développés demeure la face inférieure du substrat, à savoir $z = 0$.

Les conditions à leurs limites respectives sont reconsidérées, ainsi :

- Pour une source de chaleur positionnée sur la surface supérieure :

  à $Z_P = H_B$ pour $f(x,y) \in \ 0 \le x \le Lb$ et $0 \le y \le Wb$

$$- k_Z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=Hb} = \overline{h}_U\, \theta(x,y,Hb) - fx,y) \qquad \text{(e303)}$$

$$- k_Z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\,\overline{h}_B\, \theta(x,y,0) \qquad \text{(e304)}$$

- Pour une source de chaleur positionnée sur la surface inférieure :

  à $Z_P = 0$ pour $b(x,y) \in \ 0 \le x \le Lb$ et $0 \le y \le W_B$

$$- k_Z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\,\overline{h}_B\, \theta(x,y,0) + b(x,y) \qquad \text{(e305)}$$

$$- k_Z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=Hb} = \overline{h}_U\, \theta(x,y,Hb) \qquad \text{(e306)}$$

Les conditions de Fourier, propres à chacune des faces de la carte, sont appliquées de manière uniforme en supposant que la taille des sources est minime vis à vis de celle du substrat.

Puis celles-ci sont révisées sur les zones d'application des sources de chaleur.

- Au regard du ratio de surface, les surfaces latérales du substrat sont considérées adiabatiques.

$$k_X \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dx}\right|_{x=\,0,L_B} = 0 \quad \& \quad k_Y \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dy}\right|_{y=\,0,W_B} = 0 \qquad \text{(e307)}$$

L'établissement des formulations dérivées de la méthode de séparation des variables et son développement en séries de Fourier sont illustrés en annexe P17.

Les expressions obtenues pour ce nouveau modèle sont reprises ci-dessous. Celles-ci sont valables quelles que soient les valeurs prises par m et n.

D'autre part, ce modèle analytique permet de superposer de multiples sources de chaleur en définissant la position de la source (e281).

$$\omega_{m,n,i}(z) = \left[N_{m,n,i}\ ch(r_{m,n}\ z) - M_{m,n,i}\left[(\ k_Z\ sh(r_{m,n}\ z)/\ K_{m,n}) + z\ \delta_m\ \delta_n\ \right]\right]/D_{m,n} \quad \text{(e308)}$$

$$avec\ N_{m,n,i} = \left(Z_{S_i}/H_B\right) + \left[1 - Z_{S_i}/H_B\right] X_{m,n} \quad \text{(e309)}$$

$$M_{m,n,i} = \left(\overline{h}_B\ Z_{S_i}/k_Z\ H_B\right) + \left[1 - Z_{S_i}/H_B\right] Y_{m,n} \quad \text{(e310)}$$

$$X_{m,n} = ch(r_{m,n}\ H_B) + \overline{h}_U\left[\ sh(r_{m,n}\ H_B)/K_{m,n} + H_B\ \delta_m\ \delta_n/k_Z\ \right] \quad \text{(e311)}$$

$$Y_{m,n} = -(1/k_Z)\left[\ \overline{h}_U\ ch(r_{m,n}\ H_B) + K_{m,n}\ sh(r_{m,n}\ H_B)\right] \quad \text{(e312)}$$

$$D_{m,n} = \left[\ \overline{h}_U + \overline{h}_B\ \right] ch(r_{m,n}\ H_B) + \left[\ K_{m,n} + \left(\overline{h}_U\ \overline{h}_B/K_{m,n}\right)\ \right]\ sh(r_{m,n}\ H_B) + \overline{h}_U\ \overline{h}_B\ H_B\ \delta_m\ \delta_n/k_Z \quad \text{(e313)}$$

$$et\ K_{m,n} = k_Z\left(r_{m,n} + \delta_m\ \delta_n\ u\right) = k_Z\left(\sqrt{{\alpha_m}^2\ (k_X/k_Z) + {\beta_n}^2\ (k_Y/k_Z)} + \delta_m\ \delta_n\ u\right) \quad \text{(e314)}$$

La Table 79 démontre que le modèle orthotrope du substrat est pertinent quelle que soit la position de la source sur n'importe quelle surface d'implantation.

Table 79 : Températures centrales des sources à $\xi = \xi_{H_B}$ du modèle orthotrope

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	25.2	25.2	-0.1%
LQFP64	1.553	1.6	30	30.2	-0.5%
LQFP16	0.757	1.6	24.7	24.9	-0.6%
LQFP48	0.624	1.6	19.5	19.6	-0.4%
BGA196-2	1.603	1.6	28.8	29.0	-0.6%
QFN32	0.755	0	17.2	17.2	-0.1%
BGA208	0.83	1.6	13.9	13.9	-0.4%

Indéniablement, celui-ci est capable de déterminer avec précision, le comportement thermique d'un jeu de composants pouvant être répartis sur les faces supérieure et inférieure de la carte, pour différentes conditions d'environnement.

Bien entendu, le modèle théorique proposé est désormais en mesure de prendre en compte une conductivité thermique propre à chacun des axes du substrat, comme le confirme la Table 80.

Les résultats propres à la surface inférieure sont communiqués en annexe P18.4.

Cette analyse comparative, à partir du logiciel Flotherm® (T_N), a permis de juger des performances de ce modèle théorique. Il en découle que les prédictions des températures des composants ont une précision inférieure à 5%.

Par commodité, la forme de la solution est généralisée de manière à pouvoir faire évoluer, comme évoqué précédemment, séparément chacune des fonctions.

$$\theta(x,y,z) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{q_i}{L_{P_i}\ W_{P_i}} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{n=0}^{N_i} A_{m,i}\ B_{n,i}\ cos(\alpha_m\ x)\ cos(\beta_n\ y)\ \omega_{m,n,i}(z) = \sum_{i=1}^{Np} R_{P_i}\ q_i \quad \text{(e315)}$$

$$\overline{\theta}(x_I, L_Z, y_I, W_Z, z) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{q_i}{L_{P_i}\, W_{P_i}} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{n=0}^{N_i} A_{m,i}\, B_{n,i}\, \overline{A}_m(x_I, L_Z)\, \overline{B}_n(y_I, W_Z)\, \omega_{m,n,i}(z) = \sum_{i=1}^{Np} \overline{R}_{P_i}\, q_i \qquad \text{(e316)}$$

Table 80 : Températures centrales des sources à $z = H_B$ du modèle orthotrope

Conditions	$\overline{h}_U\ (W/m^2.K)$	$\overline{h}_B\ (W/m^2.K)$	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
	10	8	5.5	7.5	0.5
Référence i	$\boldsymbol{q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{Z}_{C_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta \boldsymbol{T}_i$
BGA196-1	1.625	0	43.9	43.8	0.2%
LQFP64	1.553	1.6	55.0	55.2	-0.4%
LQFP16	0.757	1.6	46.0	46.3	-0.6%
LQFP48	0.624	1.6	36.8	37.0	-0.7%
BGA196-2	1.603	1.6	53.7	54.1	-0.8%
QFN32	0.755	0	29.7	29.7	0.1%
BGA208	0.83	1.6	25.9	26.1	-0.7%

Ses évolutions successives vont faire l'objet des prochains paragraphes de cette thèse.

K3.3. Influence des transferts thermiques liés aux faces latérales

A l'instar du modèle présenté, la majorité des solutions analytiques de la littérature traitant du comportement thermique d'une source de chaleur sur un substrat orthotrope considère que ses surfaces latérales sont adiabatiques.

Cette hypothèse simplificatrice permet de s'affranchir de la résolution d'une équation transcendante complexe pour déterminer les valeurs des paramètres α_n et β_n.

Dans le cas contraire, il faut reformuler la solution en tenant compte de quatre nouvelles conditions.

$$-k_X \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dx}\right|_{x=0} = -\overline{h}_{x=0}\ \theta(x,y,z) \quad \& \quad -k_X \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dx}\right|_{x=L_B} = \overline{h}_{x=L_B}\ \theta(x,y,z) \qquad \text{(e317)}$$

$$-k_Y \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dy}\right|_{y=0} = -\overline{h}_{y=0}\, \theta(x,y,z) \quad \& \quad -k_Y \left.\frac{d\theta(x,y,z)}{dy}\right|_{y=0,W_B} = \overline{h}_{y=W_B}\, \theta(x,y,z) \qquad \text{(e318)}$$

Bien entendu, cette solution sous-entend de connaitre les quatre coefficients d'échange à imposer aux faces latérales, une difficulté non-négligeable.

Il en découle deux équations transcendantes relatives à ce choix de conditions aux limites.

$$\left((\alpha_m\, L_B)^2 - Bi_{x=L_B}\, Bi_{x=0}\right)\, tan(\alpha_m\, L_B) = \alpha_m\, L_B \left[Bi_{x=L_B} + Bi_{x=0}\right] \qquad \text{(e319)}$$

$$\left((\beta_n W_B)^2 - Bi_{y=W_B}\, Bi_{y=0}\right)\, tan(\beta_n\, W_B) = \beta_n\, W_B \left[Bi_{y=W_B} + Bi_{y=0}\right] \qquad \text{(e320)}$$

Où les nombres de Biot dépendent des coefficients d'échange appliqués sur les faces latérales.

$$Bi_{x=L_B} = \overline{h}_{x=L_B}\, L_B/k_X \ \ et \ \ Bi_{x=0} = \overline{h}_{x=0}\, L_B/k_X \qquad \text{(e321)}$$

$$Bi_{y=W_B} = \overline{h}_{y=W_B}\, W_B/k_Y \ \ et \ \ Bi_{y=0} = \overline{h}_{y=0}\, W_B/k_Y \qquad \text{(e322)}$$

La forme générique de l'équation transcendante correspond à :

$$({x_n}^2 - \gamma)\, tan(x_n) = \mu\, x_n \qquad \text{(e323)}$$

Sa résolution a été traitée par la méthode de Newton-Raphson mais celle-ci n'a pas donné satisfaction. Son principal inconvénient est d'identifier des racines non uniques et non ordonnées.

Une résolution plus efficace est proposée par Cheikh DIA [55] dans son annexe B. Ce nouveau processus opératoire s'attache à distinguer, par dichotomie, sur un intervalle prédéfini, l'intersection de deux fonctions distinctes, à savoir :

$$u(x) = tan(x)\ \ et\ \ v(x) = \mu\, x/(x^2 - \gamma) \qquad \text{(e324)}$$

Cette technique garantit une bien meilleure stabilité dans la détermination de toutes les racines de l'équation et surtout un gain de temps, la recherche de chaque racine étant unique.

Toutefois, là encore, les méthodes d'optimisation de type méta-heuristiques fournissent une solution pratique pour résoudre des équations transcendantes difficiles à appréhender, telle que :

$$x_n\ J_1(x_n) - Bi\ J_0(x_n) = 0 \qquad \text{(e325)}$$

Le processus de recherche stochastique s'attache cette fois à identifier un ensemble de solutions locales correspondant aux nombres de racines de la fonction à calculer.

L'algorithme retenu se fonde sur l'évolution génétique de niches étudiée par Pétrowski [R115].

Le domaine de recherche est scindé en sous-espaces liés à un rayon d'exploration évolutif. Ces sous-espaces sont assimilés à des niches. Les multiples solutions potentielles sont classées en leur sein.

La Figure 158 explicite la mise en œuvre de processus de recherche stochastique.

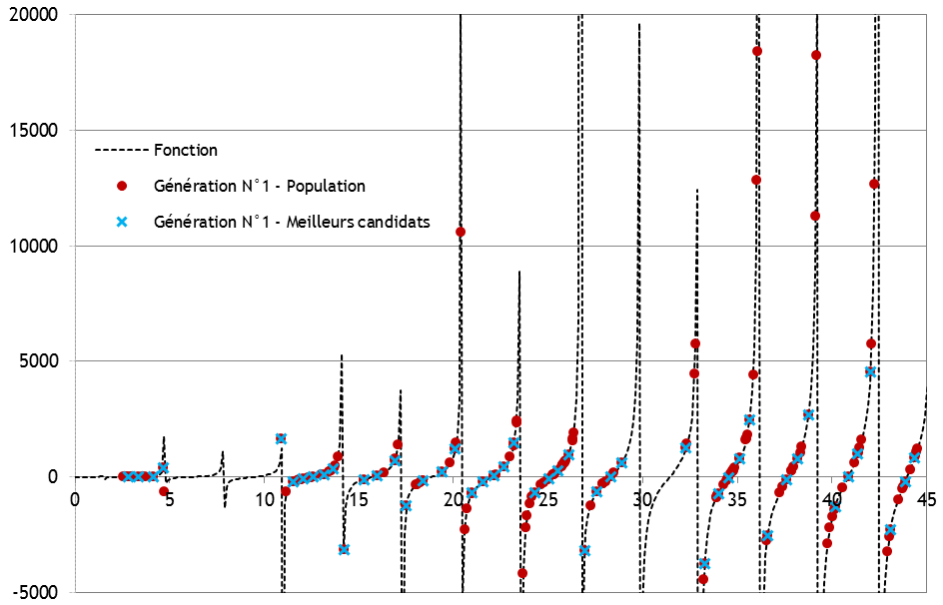


Figure 158 : Processus de génération et d'identification des racines de la fonction (e319)

A l'étape initiale les niches ne couvrent pas l'ensemble du domaine de recherche, par exemple, aucune n'est présente entre les abscisses 5 et 10.

Les meilleurs candidats (croix bleues) de ces sous-populations vont former les parents de la nouvelle génération et leurs enfants vont évoluer par mutation. Les niches proches sont progressivement amalgamées.

La Figure 159 montre le résultat à l'étape finale du processus de recherche stochastique. La majorité des solutions potentielles sont concentrées entre les pics de la fonction.

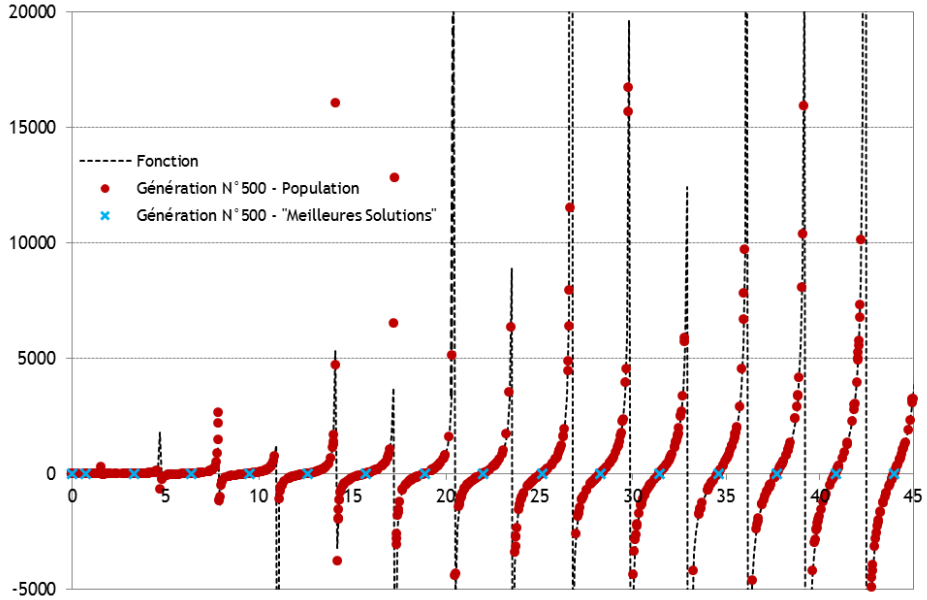


Figure 159 : Identification des racines de la fonction (e319)

Au sein de chacune des niches, seules les solutions présentant le meilleur score sont conservées pour affiner la recherche itérative de la valeur exacte de la racine.

Finalement, les valeurs les plus proches de zéro matérialisées par les croix bleues sont sélectionnées.

La Table 81 fournit le résultat de l'identification des 8 premières racines de l'équation (e319) dans le cas du véhicule de test lorsque le coefficient d'échange est identique avec pour valeur 25W m^{-1} K^{-1}.

La longueur du substrat est de 200mm et la conductivité thermique suivant l'axe x est fixée à 18W m^{-1} K^{-1}. Le nombre de Biot résultant est égal à 0.2778.

Table 81 : Valeurs des racines déduites des deux méthodes

Méthode	1	2	3	4	5	6	7	8
«bi-fonction »	0.000	0.729	3.309	6.370	9.483	12.610	15.743	18.879
« AGN »	0.000	0.729	3.309	6.370	9.483	12.610	15.743	18.879

L'optimisation stochastique délivre les mêmes résultats que la méthode proposée par Dia ainsi qu'une alternative aux méthodes graphiques, ceci quelle que soit la forme de l'équation transcendante.

La transformation de l'équation transcendante oblige à réviser les fonctions des profils longitudinaux.

Dans ce cas, la fonction propre pour résoudre l'équation de la chaleur par la méthode des fonctions orthogonales est inspirée de celle disponible dans l'ouvrage d'Ozisik [R104] ou de Hahn [R105].

$$X(\alpha_m, x) = Bi_{x=0}\ sin(\alpha_m\, x) + \alpha_m\ cos(\alpha_m\, x) \tag{e326}$$

Il en découle les expressions :

$$\theta(x,y,z) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{q_i}{L_{P_i}\, W_{P_i}} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{n=0}^{N_i} A^*_{m,i}\, B^*_{n,i}\ X(\alpha_m\, x)\ Y(\beta_n\, y)\ \omega_{m,n,i}(z) \tag{e327}$$

$$A^*_{m,i} = \frac{L_{S_i}}{L_B} \left\{ \frac{2\ sinc(\alpha_m\ L_{S_i}/2\, L_B)\left[\, Bi_{x=0}\ sin(\alpha_m\ X_{S_i}/L_B) + \alpha_m\ cos(\alpha_m\ X_{S_i}/L_B)\,\right]}{{\alpha_m}^2 + \left({\alpha_m}^2 + {Bi_{x=0}}^2\right) sinc(2\,\alpha_m) + {Bi_{x=0}}^2 + 2\, Bi_{x=0}\ sin(\alpha_m)^2 + \delta_m} + \delta_m \right\} \tag{e328}$$

$$B_{n,i}^{*} = \frac{W_{S_i}}{W_B}\left\{\frac{2\ sinc(\beta_n\ W_{S_i}/2\ W_B)\left[\ Bi_{y=0}\ sin(\beta_n\ Y_{S_i}/W_B)\ +\alpha_m\ cos(\beta_n\ Y_{S_i}/W_B)\ \right]}{{\beta_n}^2+\left({\beta_n}^2+{Bi_{y=0}}^2\right)\ sinc(2\ \beta_n)+{Bi_{y=0}}^2+2\ Bi_{y=0}\ sin(\beta_n)^2+\delta_n}+\delta_n\right\} \quad \text{(e329)}$$

$$X(\alpha_m\ x) = Bi_{x=0}\ sin(\alpha_m\ x/L_B)\ +\alpha_m\ cos(\alpha_m\ x/L_B) \quad \text{(e330)}$$

$$Y(\beta_n\ y) = Bi_{y=0}\ sin(\beta_n\ y/W_B)\ +\beta_n\ cos(\beta_n\ y/W_B) \quad \text{(e331)}$$

Les expressions des fonctions $\overline{A_m^*}$ et $\overline{B_n^*}$ sont, quant à elles, données en annexe P19.

Force est de constater que celle-ci requiert un effort conséquent en termes de calcul et il est judicieux de mesurer l'influence et les incertitudes liées à cette nouvelle définition du modèle.

La Figure 160 compare l'impact de cette modélisation sur les températures des sources de chaleur lorsque l'hypothèse d'un coefficient d'échange identique sur les quatre surfaces est considérée.

Pour de faibles valeurs de coefficients d'échange, l'écart de température est quasi nul au regard d'un modèle supposant des surfaces latérales adiabatiques. Dans ce cas de figure, cette approximation peut être retenue sans perte notable de précision.

De plus, cette évaluation pose la question d'être en mesure d'estimer les valeurs des coefficients d'échange thermique ce qui accroît fortement sa complexité.

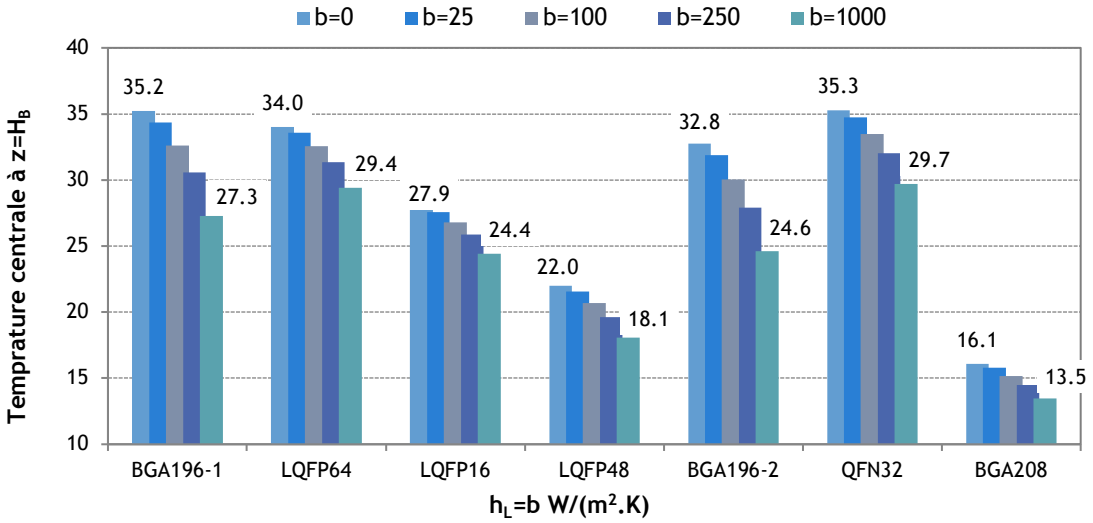


Figure 160 : Influence des échanges latéraux sur les températures des sources

A titre d'exemple, les coefficients d'échange thermique du substrat soumis à l'excitation des sept sources ont été extraits d'une simulation thermofluidique. Ceux-ci sont détaillés en Table 82.

Table 82 : Valeurs des coefficients d'échange déduits de la simulation

$\overline{h_i}\ (W\ m^{-2}K^{-1})$	CVN	CVN + RAY
$\overline{h}_{x=L_B}$	6.61 (0.34%)	6.21 (0.13%)
$\overline{h}_{x=0}$	6.89 (0.7%)	6.58 (0.35%)
$\overline{h}_{Y=W_B}$	2.38 (0.21%)	1.91 (0.08%)
$\overline{h}_{y=0}$	5.85 (0.35%)	5.71 (0.17%)
$\overline{h}_U$	5.06 (51.9%)	9.85 (50.8%)
$\overline{h}_B$	4.49 (46.5%)	9.26 (48.6%)

La simulation numérique a été accomplie en convection naturelle pour une température ambiante à 20°C, avec et sans rayonnement thermique, lorsque que la carte est disposée verticalement. Les échanges radiatifs sont basés sur une émissivité du substrat fixée à 0.9. D'autre part, les propriétés du fluide en mouvement évoluent en fonction de la température.

Cette table révèle que chacune des surfaces à un coefficient d'échange qui lui est propre. Elle indique également le pourcentage du flux extrait par chacune d'elles. Clairement, les flux extraits par les faces latérales sont parfaitement négligeables vis à vis de ceux des surfaces supérieure et inférieure.

Dès lors il est légitime de s'interroger sur la nécessité d'utiliser, ou non, ces formulations si l'on souhaite statuer rapidement sur un choix de conception.

Les valeurs moyennes des coefficients d'échange globaux pour ce substrat orthotrope échauffé par sept sources de chaleur, de tailles différentes, réparties aléatoirement sur sa surface sont respectivement égales à 4.8 en l'absence de rayonnement thermique et à 9.5 quand les deux échanges sont actifs. On retrouve l'ordre de grandeur des coefficients d'échange thermique appliqués pour une plaque isotherme (Figure 52).

Testée sur plusieurs configurations, l'approximation analytique est fidèle au comportement du modèle numérique du substrat.

La Table 83 présente les écarts de prédictions des températures vues par chacune des sources entre une approche analytique et une modélisation thermofluidique réaliste.

Table 83 : Températures centrales des sources du modèle pour les conditions numériques

Conditions	$\overline{h}_i\ (W/m^2\ K)$	$k_X\ (W/m\ K)$	$k_Y\ (W/m\ K)$	$k_Z\ (W/m\ K)$	$T_\infty\ (°C)$
	Table 82 (CVN)	18	18	1	20
Référence i	$\boldsymbol{q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{Z}_{C_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_i$
BGA196-1	1.625	1.6	64.6	64.5	0.2%
LQFP64	1.553	1.6	62.7	62.8	-0.1%
LQFP16	0.757	1.6	55.3	55.1	0.3%
LQFP48	0.624	1.6	48.8	48.1	1.4%
BGA196-2	1.603	1.6	57.5	61.0	-6.1%
QFN32	0.755	1,6	61.9	63.5	-2.7%
BGA208	0.83	1.6	41.1	41.5	-1.0%

Ses résultats sont généralement pessimistes, un aspect important si l'on désire alerter le concepteur sur la criticité thermique d'un ensemble de composants.

K3.4. Résolution de multiples formes d'équations transcendantes

Indéniablement la prise en compte de conditions aux limites de 3eme espèce, (e323) ou (e325), rend vite rébarbative la résolution de l'équation de la chaleur.

Pour des échanges externes multiples, il s'avère nécessaire de traiter simultanément plusieurs équations transcendantes (e319)-(e320) afin de calculer le profil de température recherché. D'autre part, plusieurs types d'équations transcendantes sont susceptibles d'être utilisés.

C'est par exemple, le cas d'un cylindre orthotrope dissipant une puissance uniforme au sein de sa structure, laquelle est supposée refroidie par l'ensemble de ces trois surfaces externes.

L'équation de la diffusion de la chaleur en coordonnées cylindriques se traduit par :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d\theta(r,z)}{dr}\right)+\frac{k_Z}{k_R}\left(\frac{R_C}{H_C}\right)^2\frac{d^2\theta(r,z)}{dz^2}+\frac{{R_C}^2}{k_R}\,\ddot{q}=0 \qquad \text{(e332)}$$

Où les paramètres H_C et R_C représentent respectivement la hauteur et le rayon du cylindre.

Ainsi les conditions aux limites sont régies par trois nombres de Biot, à savoir :

$$Bi_U|_{z=H_C} = \overline{h}_U\, H_C/k_Z\,,\; Bi_B|_{z=0} = \overline{h}_B\, H_C/k_Z \;\; et \;\; Bi_R|_{r=R_C} = \overline{h}_R\, R_C/k_R \tag{e333}$$

Le calcul en tout point des températures passe par la détermination des m ou n racines des deux équations suivantes :

$$[(\alpha_m)^2 - Bi_U\, Bi_B]\, tan(\alpha_m) - \alpha_m\, [Bi_U + Bi_B] = 0 \tag{e334}$$

$$\beta_n\, J_1(\beta_n) - Bi_R\, J_0(\beta_n) = 0 \tag{e335}$$

Dès lors, on comprend mieux l'intérêt d'avoir un processus d'identification des racines qui soit générique et de fait indépendant de la forme de l'équation transcendante.

Là encore, la résolution du système d'équation s'appuie sur l'utilisation des séries de Fourier et la méthode de séparation des variables.

Le modèle analytique déduit de cette approche est décliné en annexe P21.

K3.5. Considération des transferts conductifs externes locaux

Afin de pouvoir traiter la conduction thermique des cartes électroniques vers des éléments plus froids de la structure mécanique le modèle de calcul du module « Évaluateur de carte » a été complété.

Des transferts locaux vers des points d'appui, telles que les glissières thermiques, sont envisagés.

Cette extension pose la problématique du couplage de plusieurs types de conditions aux limites : Dirichlet, Neumann et Fourier.

En effet, le couplage de plusieurs conditions est sujet à des singularités ayant des conséquences sur la justesse du résultat. Les erreurs apparaissent à la jonction de deux conditions mais également à leur voisinage.

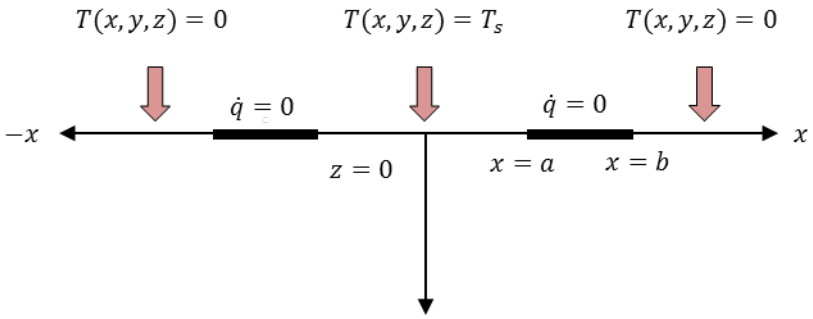


Figure 161 : Exemple de conditions aux limites présentant des singularités

Dès lors, la solution doit être complétée par une interprétation de ces phénomènes, ce que met en évidence l'article publié dans la revue Thermal Science [41]. La source de chaleur (T_S) est circulaire et isolée. La zone adiabatique a une forme annulaire.

Ainsi, au niveau d'une carte électronique, notre besoin consiste à approximer le flux de chaleur, Q_P, en mesure d'être évacué par des puits thermiques disposés dans des zones où les champs de température sont supposées homogènes.

La Figure 162 schématise la définition d'un substrat évacuant une partie de la dissipation, d'un jeu de source de chaleur, par conduction thermique vers des puits thermiques, en bleu.

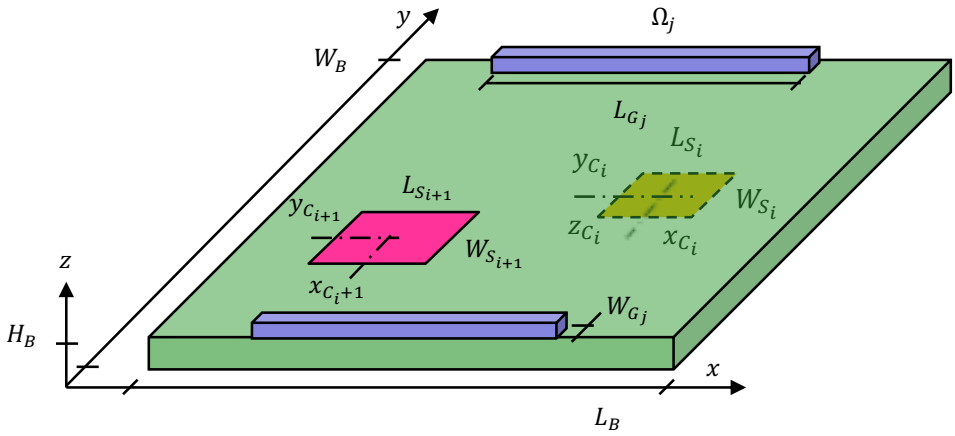


Figure 162 : Principe de l'interconnexion de structures sur un substrat

Le choix pragmatique de l'addition des conditions suivantes est appliqué pour la résolution de l'équation de chaleur.

- Pour une source de chaleur positionnée sur la surface supérieure :

$$\text{à } z = H_B \ \ pour \ \ 0 \le x \le Lb \ \ et \ \ 0 \le y \le Wb$$

$$-k_z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H_B} = \overline{h}_U \, \theta(x,y,Hb)|_{\Omega-\delta\Omega_S-\delta\Omega_p} - f(x,y)|_{\delta\Omega_S} + g(x,y)|_{\delta\Omega_P} \qquad \text{(e336)}$$

Où fonction $g\ (x,y)$ correspond à la définition des puits thermiques

- Pour une source de chaleur positionnée sur la surface inférieure :

$$\text{à } z = 0 \ \ pour \ \ 0 \le x \le Lb \ \ et \ \ 0 \le y \le Wb$$

$$-k_z \left.\frac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\left[\overline{h}_B \, \theta(x,y,0)\right]\Big|_{\Omega-\delta\Omega_S-\delta\Omega_p} + f(x,y)|_{\delta\Omega_S} - g(x,y)|_{\delta\Omega_P} \qquad \text{(e337)}$$

Pour chaque zone d'appui, dénommée $\delta\Omega_P$, la température est constante et égale à θ_0. Cette contrainte de continuité de la température entre le substrat et le puits est traduite sous la forme :

$$q_P = [\delta\Omega/R_I]\,[\theta(x,y,z) - \theta_0]|_{\delta\Omega_P} \qquad \text{(e338)}$$

Où R_I est la résistance thermique surfacique introduite pour matérialiser l'influence d'un contact thermique imparfait à l'interface des deux structures.

La résolution de ce système se base généralement sur une méthode semi-analytique et la problématique du couplage des différentes conditions aux limites doit être opérée.

Cet interfaçage de conditions aux limites a été abordée par Martins [R66] dans la définition de modèles désignés sous l'appellation de « Flexible Compact Thermal Model ». Ces travaux proposent une méthodologie destinée à construire un modèle global du système complet en décomposant celui-ci en éléments de forme parallélépipédique.

Dans notre cas, pour minimiser le temps de calcul, la température moyenne de la zone a été retenue.

$$q_P = [\delta\Omega/R_I]\left[\overline{\theta}(x,y,z)\big|_{\delta\Omega_P} - \theta_0\right] \qquad \text{(e339)}$$

Cette approximation vise à s'affranchir d'une définition précise des nœuds propres à chacune des interfaces et de leur interconnexion. Évidemment, celle-ci se fait au détriment de la précision.

Au niveau d'une carte, la température moyenne de la zone de contact est la résultante des contributions des différentes sources de chaleur et des puits thermiques.

$$\overline{\theta}_P(\delta\Omega_j) = \sum_{k=1}^{nG}\left[\overline{R}_{P_k}(\delta\Omega_j) + \delta_{j,k}\,\frac{R_I}{\delta\Omega_j}\right] q_{P_k} + \sum_{i=1}^{nS}\overline{R}_{PS_i}(\delta\Omega_j)\, q_{S_i} \qquad \text{(e340)}$$

$$avec\ \delta_{j,k} = \begin{vmatrix} 1 & si\ j = k \\ 0 & si\ j \neq k \end{vmatrix}$$

On en déduit l'expression du vecteur des températures caractérisant l'ensemble des nG puits.

$$\left[\overline{\theta}_P\right] = \left[\left[\overline{\boldsymbol{R}}_P\right] + [\boldsymbol{R}_I]\right][q_P] + \left[\overline{\boldsymbol{R}}_{PS}\right][q_S] = \left[\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\Omega_P}\right] + [\boldsymbol{R}_I]\right][q_P] + \left[\overline{\theta}_{SP}\right] = \left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\Omega_P}\right][q_P] + \left[\overline{\theta}_{SP}\right] \qquad \text{(e341)}$$

Où :

- Le terme $\left[\overline{\theta}_G\right]$ correspond au vecteur des températures moyennes des zones de contact,
- Le terme $\left[\overline{\boldsymbol{R}}_P\right]$ est la matrice des résistances moyennes de diffusion des puits,
- Le terme $[\boldsymbol{R}_I]$ est la matrice diagonale des résistances à l'interface de chacun des contacts,
- Le terme $\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{SP}\right]$ est la matrice des résistances moyennes de diffusion des sources influant sur le puits,
- Les termes $[q_P]$ et $[q_S]$ les sollicitations thermiques appliquées au système.

Dès lors, la résolution du système s'effectue à partir de l'estimateur des moindres carrés, sans contraintes, pour déterminer de manière itérative l'ensemble des puissances des sources de chaleur.

$$\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\Omega_P}\right][q_P] = \left[\overline{\theta}_P\right] - \left[\overline{\theta}_{SP}\right] \rightarrow [\widehat{q_P}] = \left(\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\delta\Omega_P}\right]^T\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\delta\Omega_P}\right]\right)^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\Omega_P}\right]^T\left(\left[\overline{\theta}_P\right] - \left[\overline{\theta}_{SP}\right]\right) \qquad \text{(e342)}$$

Le terme $\left(\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\delta\Omega_P}\right]^T\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\delta\Omega_P}\right]\right)^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{R}}_{\Omega_P}\right]^T$ correspond à la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose.

L'article [42] publié dans Thermal Science fournit un premier cas d'application de cette approche.

La carte étudiée, placée verticalement dans un environnement extrême (85°C), est refroidie au moyen de deux puits thermiques disposés sur sa surface supérieure (Figure 162). Ceux-ci sont maintenus à une température fixe (70°C). Une résistance thermique à l'interface, entre la structure et le substrat, est imposée et fixée à $2{,}5°C\ cm^{-2}\ W^{-1}$.

Enfin, le refroidissement de deux composants, modélisés sous une forme nodale, est analysé.

Les prédictions des températures de ces deux sources de chaleur et des zones d'appui sont en deçà de 10% d'erreur. Les flux extraits à ces interfaces sont également compris dans cette marge d'erreur.

In fine, la comparaison des prédictions du modèle analytique aux résultats issus de simulations numériques a permis de statuer sur la pertinence de cette approche pragmatique.

Bien entendu, il est possible de modéliser de nombreuses zones $\delta\Omega_j$ ayant des températures imposées différentes de l'ambiante afin de déterminer les flux thermiques pouvant être évacués par celles-ci.

Toutefois, les prédictions se dégradent lorsque la taille de la zone de contact est significative au regard de celle du substrat.

Pour remédier à ce problème, les zones de contact initialement définies par une grille grossière sont subdivisées, suivant une méthode dite bigrilles, jusqu'à minimiser l'erreur sur les flux extraits

La procédure employée est schématisée en Figure 163.

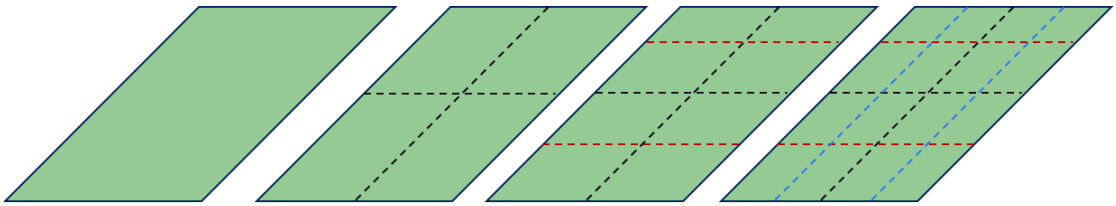


Figure 163 : Principe de la méthode bigrille

L'exemple ci-après décrit l'application de cette méthodologie pour une carte possédant un jeu de trois puits thermiques (G_i) et de trois sources de chaleur (S_i).

Les données géométriques relatives à ce cas sont reprises dans la Table 84.

Table 84 : Géométrie du cas présenté (en millimètres)

Repère	L_i	W_i	H_i	X_{C_i}	Y_{C_i}	Z_{C_i}
PCB	100	110	1.6	-	-	-
G_1	4	110	-	2	55	1.6
G_2	4	110	-	2	55	1.6
G_3	5	5	-	50	55	1.6
S_1	15	15	-	17.5	17.5	1.6
S_2	15	15	-	17.5	65	1.6
S_3	15	15	-	72.5	55	1.6

Les zones latérales G_1 et G_2 sont découpées en 4 parties identiques de 4mm par 27.5mm. La zone G_3 est positionnée au centre du substrat et celle-ci est subdivisée en 5 zones de 1mm par 1mm.

Une température de 10°C est fixée pour ces zones d'appui et celle de l'ambiante équivaut à 20°C.

Les puissances dissipées par chacune des sources sont respectivement 0.5W, 0.75W et 1W. Le substrat est supposé anisotrope comme l'indique la Table 85.

Table 85 : Caractéristiques thermiques du modèle

$\overline{h}_U$	$\overline{h}_B$	k_X	k_Y	k_Z
$12 W m^{-2} K^{-1}$	$8 W m^{-2} K^{-1}$	$20 W m^{-1} K^{-1}$	$20 W m^{-1} K^{-1}$	$0.35 W m^{-1} K^{-1}$

La confrontation des prédictions des flux extraits pour chaque zone ainsi que celles de la température centrale de chacune des sources de chaleur sont données en Table 86.

Table 86 : Comparaison des modèles : numérique (Flotherm) et analytique

Repère	$\boldsymbol{q}_{N_{G_i}}$	$\boldsymbol{q}_{T_{G_i}}$	$\delta \boldsymbol{q}_i$	Repère	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}$	$\boldsymbol{T}_{T_S}$	$\delta \boldsymbol{T}_i$
G_1	-1.388W	-1.43W	-3%	S_1	22.8°C	55°C	-0.1%
G_2	-1.094W	-1.136W	-3.8%	S_2	25.5°C	25.3°C	0.5%
G_3	-0.291W	-0.305W	-4.8%	S_3	29.9°C	29.9°C	0.01%

Ce cas test confirme la cohérence du modèle analytique pour évaluer le comportement thermique d'une carte électronique soumise à des conditions de type Dirichlet ou « puits thermiques ».

Il est à noter que la puissance globale extraite par les zones d'appui est supérieure à celle dissipée par les trois sources de chaleur. En fait, une partie de la puissance récupérée émane de l'environnement, lequel a une température plus élevée.

Malgré tout il est souvent difficile de déterminer des conditions thermiques réalistes à appliquer aux points d'interface entre le substrat et une structure métallique.

Ainsi, à l'instar de la méthodologie débattue par Martins, il est apparu utile de coupler le modèle analytique du substrat, présenté au paragraphe K3.2 à celui décrit au paragraphe K3.3 avec pour objectif de modéliser un jeu de plusieurs éléments d'une structure puis de les coupler au substrat.

Une partie de la chaleur dissipée par les composants est alors drainée au sein de ces structures par le biais des zones de contact définies sur le substrat.

La Figure 164 décrit l'exemple d'un couplage entre le substrat d'une carte et un châssis métallique.

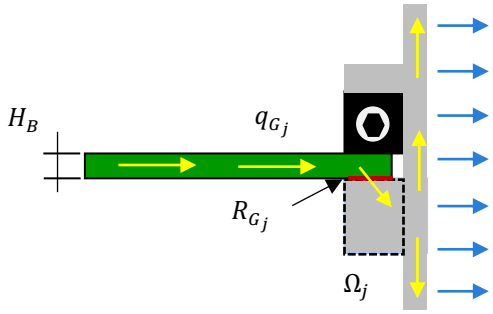


Figure 164 : Définition d'une zone de contact entre la structure et un substrat

La solution de l'équation aux dérivées partielles est alors subdivisée en une succession de résolutions itératives de sous-domaines sans recouvrement, lesquels sont désignés par Ω_j.

Chacun des modèles analytiques permet de calculer la température en tout point de son domaine, la température moyenne de ses surfaces ainsi que les flux quittant ses frontières.

Le modèle analytique décrivant l'intégralité des transferts des six faces (K3.3) est utilisé pour modéliser les diverses structures métalliques en contact avec le substrat, en considérant un matériau homogène isotrope. Dans le cas présenté, une zone partielle d'une de ses surfaces (en rouge sur la Figure 164) est reliée à celle du substrat.

L'intérêt de cette décomposition en sous-domaines de calcul est de pouvoir représenter la forme propre à une structure de refroidissement et les constrictions inhérentes aux transferts des flux.

Ainsi, ces éléments parallélépipédiques de structure sont susceptibles d'être soumis :

- Sur sa surface supérieure ou inférieure, à une ou plusieurs sources de chaleur, carrées ou rectangulaires,
- Sur toutes les autres surfaces, à des conditions de 3eme espèce.

Le choix d'un coefficient d'échange thermique, de l'ordre de $10^9 \mathrm{W/(m^2\,K)}$, sur une de ces surfaces, correspond à fixer la température de référence de la structure. De la même manière, certaines faces peuvent être considérées adiabatiques en minimisant la valeur de leur coefficient d'échange thermique.

Le couplage de plusieurs modèles analytiques est effectué en introduisant dans l'expression des calculs des flux extraits par chacun des puits la résistance thermique de diffusion R_s liée à chacune de leurs structures, telle que :

$$[\overline{\theta}_P] = \left[[\overline{\boldsymbol{R}}_P] + [\boldsymbol{R}_I] + [\boldsymbol{R}_s]\right][q_P] + [\overline{\boldsymbol{R}}_{PS}]\,[q_S] \qquad \text{(e343)}$$

Où $[R_S]$ est la matrice diagonale des résistances thermiques de diffusion des structures susceptibles de participer au refroidissement du substrat et de ses sources de chaleur.

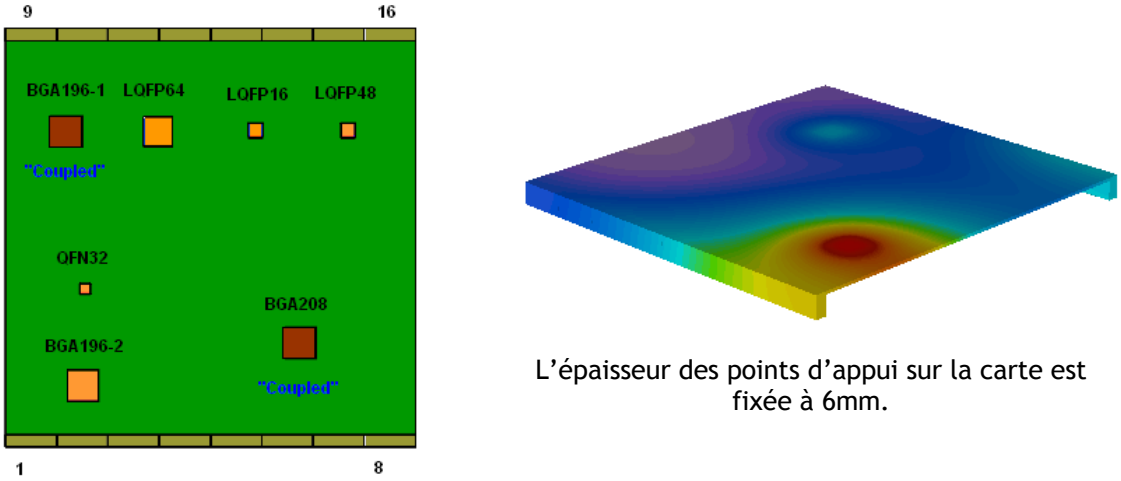
Cette expression permet de calculer le vecteur de flux $[q_P]$. Ces derniers sont ensuite itérativement appliqués à chacun des domaines de calcul.

Comme évoqué, ce recours à cette décomposition procure une solution pour construire un modèle analytique d'un système plus complet capable, par exemple, d'évaluer, en régime stationnaire, l'influence de la présence de capots métalliques et le couplage de composants à ceux-ci.

La Figure 165 présente l'analyse d'une solution de refroidissement du véhicule de test décrit précédemment, ceci lorsque ce dernier est associé à un capot en aluminium (k=150W m^{-1} K^{-1}).

Le capot possède des dimensions identiques à celles du substrat (Table 48). Les zones de contact sont subdivisées en 16 parties dont on va accorder les températures moyennes.

Deux composants de cette carte sont considérés couplés à ce capot par des plots métalliques afin d'estimer la réduction des températures engendrées par cette solution



L'épaisseur des points d'appui sur la carte est fixée à 6mm.

Figure 165 : Illustration de l'interconnexion d'un capot sur un substrat

La représentation de la forme du capot est matérialisée sur la vue de droite. Celle-ci décrit également son comportement thermique et l'influence des composants couplés sur celui-ci.

La Figure 166 souligne l'intérêt d'une connexion thermique entre le capot et les deux composants sélectionnés. La dissipation de ces composants est dès lors dissociée du substrat de la carte.

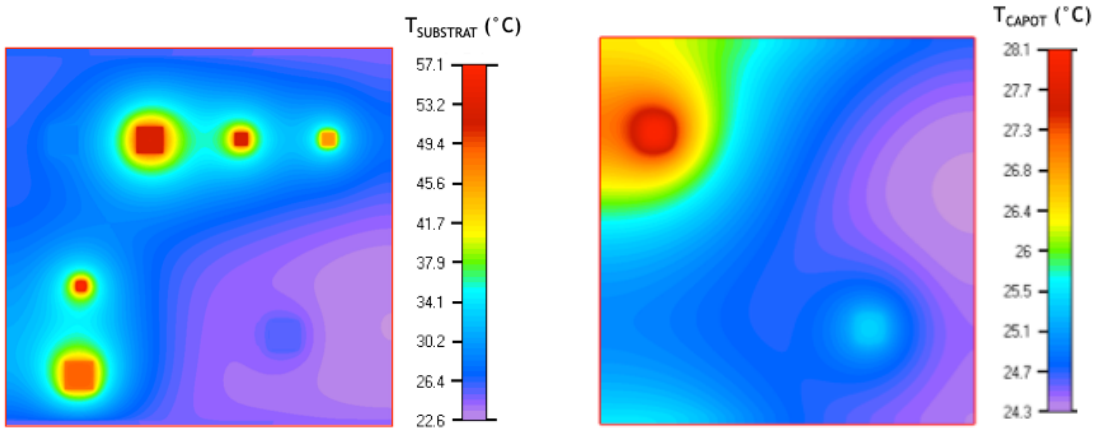


Figure 166 : Gradients thermiques liés à la présence d'un capot métallique

La Table 87 précise l'adéquation des prédictions du modèle analytique avec les résultats d'une simulation numérique, ceci lorsque les coefficients d'échange thermique sur les faces du substrat, celles des composants et du capot sont imposés.

La température ambiante est fixée à 20°C.

Table 87 : Prédictions des températures dans le cas d'un couplage

Boitier i	$T_{N_{J_i}}$	$T_{T_{J_i}}$	δT_{J_i}	$T_{N_{P_i}}$	$T_{T_{P_i}}$	δT_{P_i}
BGA196-1	33.4°C	33.5°C	0.3%	28.4°C	28.6°C	0.7%
LQFP64	72.5°C	73.1°C	0.8%	67.1°C	67.7°C	0.9%
LQFP16	74.1°C	74.4°C	0.4%	68°C	68.3°C	0.4%
LQFP48	67°C	67.2°C	0.3%	55°C	55.2°C	0.4%
BGA196-2	72.4°C	72.9°C	0.7%	69.3°C	69.8°C	0.7%
QFN32	70°C	70.3°C	0.4%	64.6°C	64.9°C	0.5%
BGA208	33.2°C	33.1°C	0.3%	25.6°C	25.6°C	<0.1%

Les écarts de prédictions constatés sur les températures de jonction et de capot des composants sont en deçà de 1% d'erreur.

Il est également intéressant de valider les flux transmis d'une part à la carte et ceux drainés vers la structure métallique.

Ceux-ci sont répertoriés dans la Table 88.

Table 88 : Prédictions des flux dans le cas d'un couplage

Boitier i	$q_{N_{B_i}}$	$q_{T_{B_i}}$	δq_{J_i}	$q_{N_{P_i}}$	$q_{T_{P_i}}$	δq_{P_i}
BGA196-1	0.113W	0.145W	**-28%**	-1.703W	-1.671W	1.9%
LQFP64	1.643W	1.648W	-0.3%	-0.17W	-0.168W	-1,1%
LQFP16	0.906W	0.905W	-0.1%	-0.047W	-0.048W	-2.1%
LQFP48	0.736W	0.736W	<-0.1%	-0.032W	-0.032W	-0.2%
BGA196-2	1.555W	1.552W	-0.2%	-0.198W	-0.201W	-1.7%
QFN32	0.805W	0.805W	<-0.1%	-0.023W	-0.023W	-1.7%
BGA208	0.22W	0.237W	**-7.9%**	-0.816W	-0.799W	-2.13%

L'erreur relevée est plus significative même s'il s'agit au maximum d'une trentaine de milliwatts.

Toutefois, celle-ci peut être facilement réduite en augmentant la subdivision des points de contact (Figure 163) mais au détriment toutefois du temps de calcul.

Le modèle analytique global fournit, malgré tout, une vision très réaliste des transferts thermiques ainsi que la capacité à statuer de l'efficacité d'une solution de refroidissement.

Par exemple, ces prédictions peuvent être comparées aux niveaux de température atteints si aucun des composants n'est couplé à la structure. Les résultats obtenus sont repris en annexe P22.

Il ressort que les températures des BGA196-1 et BGA208 sont abaissées de 40°C et de 20°C.

Indubitablement, cette approche pragmatique ouvre la voie à la prise en compte au niveau de la modélisation d'une carte électronique d'un ensemble d'éléments architecturels, lesquels vont participer à l'évacuation de la chaleur dissipée par l'ensemble des composants.

Toutefois, il découle de nouveaux obstacles scientifiques à lever, tels que :

- La détermination de la température interne sous capot,
- Les corrélations à utiliser pour l'estimation des transferts advectifs en espace confiné,
- La prise en compte de colonnes de fixation métallique reliant la carte et le capot,

- La modélisation thermique de structures plus complexes en contact avec le substrat,
- Le couplage de plusieurs cartes en particulier celui d'une carte dite mezzanine.

K3.6. Validation expérimentale de la modélisation des zones d'appui

Cette validation a été menée sur la thermo-carte, présentée Figure 102, dans le but de vérifier les prédictions des températures internes fournies par le modèle analytique à un ensemble de mesure.

A partir de ce véhicule de test, comme évoqué, il est possible d'appliquer une puissance maîtrisée ($\boldsymbol{q}_{M_i}$) et de mesurer la température atteinte au centre de la partie supérieure de la puce au moyen d'une diode étalonnée.

La campagne de mesure est constituée des deux essais suivants :

- La carte, en convection libre horizontale, est refroidie au moyen de 2 glissières thermiques
- La carte isolée est refroidie uniquement via ces 2 puits thermiques

La surface de contact des puits est restreinte par comme l'indique la Table 89.

Table 89 : Tailles et positions centrales des glissières équipant la carte étudiée

Repère	$L_{G_i}\,(mm)$	$W_{G_i}\,(mm)$	$H_{P_i}\,(mm)$	$X_{P_i}\,(mm)$	$Y_{P_i}\,(mm)$
G_1	145	6	6	100	200
BGA208	145	6	6	100	3

Pour être représentatif des conditions de transfert au niveau de ces surfaces, une résistance thermique d'interface doit être prise en compte entre ces glissières et le substrat.

La Table 90 détaille, pour ces deux essais, les valeurs obtenues par l'interprétation de la réponse de la diode interne des composants ($\boldsymbol{T}_{M_{J_i}}$) et celles relevées par mesures infrarouges ($\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{P}_i}}$). Ces dernières ont été prises sur des pastilles dont l'émissivité est contrôlée, à 0.93.

Les températures au niveau des glissières et celle relative à l'ambiante sont respectivement de 11.8°C et de 20°C. Il est à noter que ces deux essais ont été répétés deux fois et que la divergence des mesures constatée est inférieure à 3%.

La puissance globale appliquée à la carte est pratiquement de 9W. Celle-ci est légèrement réduite à 8.6W pour le second essai.

Table 90 : Mesures thermiques internes et externes pour les essais

Référence i	$\boldsymbol{q}_{M_i}\,(W)$	$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}_{J_i}}\,(°\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{T}_{M_{P_i}}\,(°C)$	$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}_{B_i}}\,(°\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{q}_{M_i}\,(W)$	$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}_{J_i}}\,(°\boldsymbol{C})$
BGA196-1	1.816	72.8	73	51	1.78	88.2
LQFP64	1.816	72.8	74	48	1.696	87.1
LQFP16	0.953	75.3	72.8	45	0.935	84.7
LQFP48	0.768	67.5	63.9	38.2	0.762	73.8
BGA196-2	1.753	70.4	69	45.5	1.627	77.1
QFN32	0.828	74.5	71.4	45.1	0.802	87.3
BGA208	1.036	53.3	51.8	34	1.031	59.3

Pour cette validation de notre modèle analytique, le comportement thermique intrinsèque de chacun des composants montés est traduit au moyen d'un réseau simple décrit en Table 21.

Celui-ci est constitué de trois résistances thermiques dont les valeurs sont données dans la Table 91.

Table 91 : Résistances thermiques des modèles CTM

Boitier i	$\boldsymbol{R}_{JB_i}(K/W)$	$\boldsymbol{R}_{JT_i}(K/W)$	$\boldsymbol{R}_{BT_i}(K/W)$
BGA196-1	24.7	3.0	16.9
LQFP64	14.9	10.3	40.1
LQFP16	25.9	38.0	126.1
LQFP48	31.0	103.8	100.0
BGA196-2	34.0	2.9	23.3
QFN32	15.5	65.1	101.1
BGA208	29.2	9.4	24.8

Les écarts les plus significatifs entre le modèle analytique et sa confrontation avec d'une part un modèle numérique et d'autre part avec les relevés expérimentaux ont été notés lorsque la carte est positionnée horizontalement et soumise aux phénomènes advectifs et radiatifs.

Aussi, seuls les résultats des modèles analytique et numérique et ceux des relevés expérimentaux propres à cette configuration sont rapportés ci-après.

Par ailleurs, la modélisation numérique est une abstraction d'un modèle physique et il n'est pas envisageable de représenter tous les éléments servant à la réalisation des tests.

Ainsi, les connecteurs et les nappes de fils les reliant aux instruments de mesure sont exclus de la simulation numérique. Certes, ceux-ci ont forcément une incidence sur le transfert thermique mais celle-ci est difficilement quantifiable.

D'autre part, la définition exacte d'une résistance thermique d'interface est également complexe. Celle-ci dépend de l'état de surface des deux éléments en contact ainsi que de la pression exercée.

Pour cerner sa valeur, une mesure de température de surface au niveau du substrat à proximité de chacune des glissières doit être effectuée. A défaut, celle-ci est typiquement fixée à 2.5K cm^2 K^{-1}.

La Figure 167 fournit la description du modèle analytique et numérique qui a été confronté aux données expérimentales.

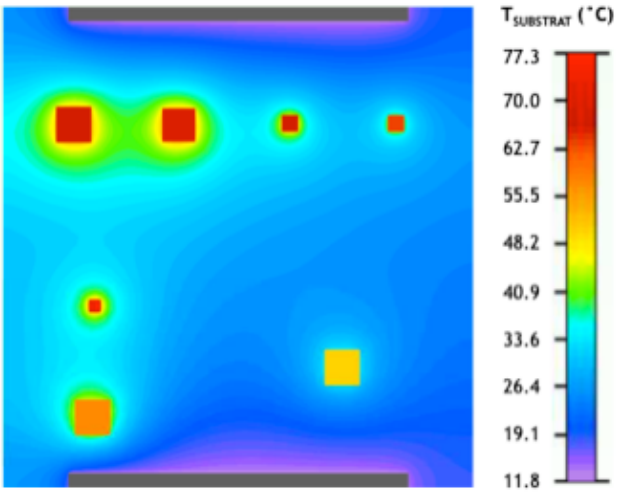


Figure 167 : Gradients thermiques liés à la présence des glissières thermiques

Basé sur le principe de superposition, le modèle fournit les contraintes thermiques vues par une carte pouvant avoir un refroidissement distinct sur ces 2 faces et les interactions entre ses composants.

Les Table 92 et Table 93 décrivent à gauche les écarts constatés entre les deux modèles établis et à droite la qualité des prédictions du modèle analytique par rapport aux relevés expérimentaux.

Table 92 : Comparaison des températures internes du premier essai

Référence i	$\boldsymbol{q}_{M_i}\,(W)$	$\boldsymbol{T}_{N_{J_i}}\,(°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{J_i}}\,(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{J_i}$	$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}_{J_i}}\,(°\boldsymbol{C})$	$\delta\boldsymbol{T}_{J_i}$
BGA196-1	1.816	71	75	5.6%	72.8	-3.0%
LQFP64	1.816	72.7	76.5	5.2%	72.8	-5.1%
LQFP16	0.953	71.6	75.1	4.9%	75.3	0.3%
LQFP48	0.768	64.8	67.6	4.3%	67.5	-0.1%
BGA196-2	1.753	68.6	72.6	5.8%	70.4	-3.1%
QFN32	0.828	70	74.9	7.0%	74.5	-0.5%
BGA208	1.036	50.9	52.9	3.9%	53.3	0.8%

A l'exception de la température de surface du QFN32, le composant le plus petit monté sur le substrat, les écarts de prédiction constatés ne dépassent pas 8%.

De plus, la répartition des températures vues par chacun des composants au regard des transferts thermiques couplés est cohérente.

Table 93 : Comparaison des températures externes du premier essai

Référence i	$\boldsymbol{q}_{M_i}\,(W)$	$\boldsymbol{T}_{N_{P_i}}\,(°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{P_i}}\,(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{P_i}$	$\boldsymbol{T}_{M_{P_i}}\,(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{P_i}$
BGA196-1	1.816	67.8	71.8	-5.9%	73	1.6%
LQFP64	1.816	67.5	71.1	-5.3%	74	3.9%
LQFP16	0.953	65.6	69	-5.2%	72.8	5.2%
LQFP48	0.768	53	55.7	-5.1%	63.9	12.8%
BGA196-2	1.753	65.5	69.5	-6.1%	69	-0.7%
QFN32	0.828	64.6	69.4	-7.4%	71.4	2.8%
BGA208	1.036	46.1	48	-4.1%	51.8	7.3%

Le modèle numérique est en mesure de fournir une interprétation assez réaliste des transferts thermiques liés aux phénomènes advectifs et radiatifs.

Ces derniers peuvent être alors comparés aux résultats déduits du modèle analytique.

Les Table 94 et Table 95 décrivent successivement les flux extraits au niveau de chacune des glissières et de chacun des composants montés sur le substrat.

Table 94 : Comparaison des flux extraits par les puits

Repère	$\boldsymbol{q}_{N_{G_i}}$	$\boldsymbol{q}_{T_{G_i}}$	$\delta\boldsymbol{q}_i$
G_1	-1.81W	-1.7W	6.3%%
G_3	-1.97W	-2.01W	-2.2%

Comme évoqué, un ajustement plus précis est atteignable si la discrétisation opérée au niveau de ces des zones d'appui est plus accentuée.

Pour les flux transférés par la surface supérieure $\boldsymbol{q}_{T_{T_i}}$, il est clair que compte tenu de la faiblesse des échanges, quelques milliwatts, les pourcentages d'erreur sont à relativiser.

Un point déjà soulevé lors de l'ajustement des réseaux nodaux destinés aux composants électroniques. Pour ces derniers, l'erreur est pondérée.

Table 95 : Comparaison des flux aux interfaces des réseaux résistifs

Référence i	$\boldsymbol{q}_{N_{T_i}}(W)$	$\boldsymbol{q}_{T_{T_i}}(W))$	$\delta \boldsymbol{q}_i$	$\boldsymbol{q}_{N_{B_i}}(W)$	$\boldsymbol{q}_{T_{B_i}}(W)$	$\delta \boldsymbol{q}_i$
BGA196-1	0.166	0.21	-26.5%	1.65	1.61	2.4%
LQFP64	0.148	0.18	-21.6%	1.668	1.64	1.7%
LQFP16	0.044	0.05	-13.6%	0.909	0.91	-0.1%
LQFP48	0.029	0.03	-3.4%	0.739	0.74	-0.1%
BGA196-2	0.17	0.2	-17.6%	1.583	1.56	1.5%
QFN32	0.022	0.03	-36.4%	0.806	0.8	0.7%
BGA208	0.085	0.1	-17.6%	0.951	0.94	1.2%

D'autre part, la Table 96 compare les valeurs des coefficients d'échange équivalents liées aux transferts thermiques de la carte et de ses composants vers l'environnement ambiant.

Table 96 : Comparaison des coefficients équivalents d'échange thermique

Repère	$\boldsymbol{h}_{N_i}(W/m^2.K)$	$\boldsymbol{h}_{T_i}(W/m^2.K)$	$\delta \boldsymbol{h}_i$
$\overline{h}_U$	9.6	9	6.3%
$\overline{h}_B$	8.2	7.2	12.2%
$\overline{h}_{BGA196-1}$	15.4	17.7	-14.9%
$\overline{h}_{LQFP64}$	15.9	17.9	-12.6%
$\overline{h}_{LQFP16}$	19.9	19.7	1.0%
$\overline{h}_{LQFP48}$	17.8	18.3	-2.8%
$\overline{h}_{BGA196-2}$	16.6	17.5	-5.4%
$\overline{h}_{QFN32}$	19.6	20.9	-6.6%
$\overline{h}_{BGA208}$	14.5	15.4	-6.2%

L'écart le plus significatif en termes d'échange thermique est constaté au niveau de la face inférieure du substrat $\overline{h}_B$.

L'hypothèse d'une corrélation empirique basée sur l'expression (e253), laquelle est divisée par 2 pour la face inférieure apparait clairement inappropriée pour une carte placée horizontalement.

Pour conclure, l'analyse effectuée pour ces différents cas tests démontre la capacité à appréhender d'une manière pragmatique le comportement thermique d'un ensemble de composants montés sur un substrat pour un jeu varié de conditions d'environnement.

K3.7. Expression des échanges thermiques advectifs

Les travaux de Lewandowski [R97] mettent en exergue la variabilité des expressions dédiées aux calculs des coefficients d'échange thermique d'une plaque plane en convection naturelle.

Les corrélations reliant le nombre de Nusselt moyen à celui du nombre de Rayleigh sont établies à partir de la compilation de diverses expérimentations. Leur examen révèle la disparité des choix retenus concernant la définition de la longueur caractéristique.

Ainsi, si la plaque est en position verticale, des auteurs tels que Churchill et Chu (e345) ou McAdams (e346) [R98] ont pris comme référence physique, la distance à partir du bord d'attaque de la carte.

Dans notre cas, le nombre de Nusselt local est intégré sur la largeur de la carte, on en déduit :

$$\overline{Nu}_W = \overline{h}\, W/k_f = (1/W)\int_0^W Nu_y\, dy = (C/3n)\, {Ra_W}^n \tag{e344}$$

Il en résulte pour les nombres de Nusselt moyens les expressions suivantes :

$$\overline{Nu}_W = 0.68 + 0.67\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{-4/9} {Ra_W}^{1/4} \quad pour\ 10^{-1} < Ra_W < 10^8 \tag{e345}$$

$$\overline{Nu}_W = 0.59\, {Ra_W}^{1/4} \tag{e346}$$

Le coefficient 0.68 utilisé par Churchill correspond à la limite de diffusion de la chaleur par conduction. Celui-ci est négligé si les phénomènes advectifs prédominent. Dès lors, sur la base de ces deux expressions, la corrélation va varier dans une gamme non négligeable :

$$0.514\, {Ra_W}^{1/4} \le \overline{Nu}_W \le 0.59\, {Ra_W}^{1/4} \quad pour \quad Pr = 0.7 \tag{e347}$$

Pour les plaques horizontales, d'autres auteurs comme Raithby et Hollands considèrent, par exemple, le ratio de la surface mouillée sur le périmètre, tel que :

$$\eta = L\, W/[2\,(L + W)] \tag{e348}$$

$$\overline{Nu}_\eta = 0.56\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{-4/9} \left(Ra_\eta\right)^{1/4} pour\ 2\ 10^4 < Ra_\eta < 8\ 10^8 \tag{e349}$$

La comparaison directe des différentes corrélations est par conséquent délicate. Celle-ci est abordée par différents auteurs au moyen d'une transformation des longueurs caractéristiques.

$$\overline{Nu}_\eta = \overline{Nu}_W\, \Gamma = C\, (Ra_W)^n\, \Gamma^{3n} \quad avec\ \Gamma = 1/[2\,(1 + W/L)] \tag{e350}$$

Il est alors possible d'avoir une définition similaire pour calculer la valeur du nombre de Nusselt.

$$\overline{Nu}_W = C\, (Ra_W)^n\, \Gamma^{3n-1} \tag{e351}$$

Dans l'hypothèse où la plaque est carrée, la transformation de l'équation (e349) aboutit à :

$$\overline{Nu}_W = 0.792\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{-4/9} (Ra_W)^{1/4} = 0.607\, (Ra_W)^{1/4}\ si\ L_B = W_B \tag{e352}$$

Cette transformation révèle que le coefficient révisé est plus optimiste que celui préconisé par McAdams [R98], à savoir 0.54.

Il est à noter que d'une publication à l'autre le domaine de validité stipulé par le nombre de Rayleigh ou de Grashof fluctue, aussi les bornes répertoriées ici sont indicatives. Un moyen de s'affranchir de la connaissance exacte du domaine de validité est l'utilisation de la méthode des asymptotes [R99].

Indéniablement, le choix d'une dimension caractéristique pour l'établissement d'expressions empiriques nécessite une attention particulière surtout si la plaque est rectangulaire.

Pour aborder l'influence d'une forte disproportion entre les côtés d'une plaque, on peut s'inspirer de l'approche proposée par Yovanovitch et al [R99]. Cette dernière est basée sur la racine carrée de la surface active, laquelle est plus simple à appréhender que le ratio de la surface mouillée sur le périmètre. Dans ce cas de figure, toutes les dimensions de l'objet vont interagir.

$$\ell = \sqrt{A_B} = \sqrt{2\, L_B\, W_B + 2\, H_B\, [L_B + W_B]} \tag{e353}$$

Cet auteur propose également une expression révisée du coefficient d'échange reprise ci-dessous.

$$\overline{h}_{\ell=\sqrt{A_B}} = G_\ell\ F(Pr)\, (Ra_\ell)^n \left(k_f/\ell\right) = \overline{N}u_\ell \left(k_f/\ell\right) \tag{e354}$$

Où le terme $F(Pr)$ reprend pour partie la fonction universelle établie par Churchill (e345).

$$F(Pr) = 0.67\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{-4/9} \; avec \; 0 < Pr < \infty \tag{e355}$$

Celle-ci est déduite de la méthode des asymptotes, laquelle sera commentée au prochain paragraphe.

L'approche développée définit un terme dit « body gravity function », ou G_ℓ. Celui-ci introduit la géométrie dans l'échange se produisant entre la paroi et le fluide. Cette fonction permet d'adapter l'expression simplifiée de Churchill (e345) à la nouvelle définition de la longueur caractéristique.

Ainsi, si la plaque est verticale ou horizontale, que son épaisseur est négligeable et que ses deux surfaces sont actives, ce facteur correctif se résume aux deux expressions suivantes :

$$G_{\ell\updownarrow} = \left[\sqrt{n_F\, L_B/W_B}\,\right]^{1/4} = [\, n_F\, L_B/W_B\,]^{1/8} \; avec \; n_F = 2 \tag{e356}$$

$$G_{\ell\leftrightarrow} = 0.764\,[\, n_F\, W_B/L_B\,]^{1/8} \; avec \; n_F = 2 \tag{e357}$$

Pour une plaque horizontale, le coefficient est déduit de l'association des termes de gravité.

Les échanges thermiques des différentes faces sont associés en série suivant la formulation :

$$G_\ell = \left[\sum_i \left({G_i}^{4/3}\, {A_i}^{7/6}\right) \Big/ \sum_i {A_i}^{7/6}\right]^{3/4} \tag{e358}$$

Les expressions des trois composantes dans le cas d'un substrat sont explicitées ci-dessous :

$$A_1 = A_3 = L_B\, W_B \;\; et \;\; A_2 = 2\, H_B\, [L_B + W_B] \tag{e359}$$

$$G_2 = \left[\, 2\,(L_B + W_B)/\sqrt{2\, H_B\, [L_B + W_B]}\,\right]^{1/4} \tag{e360}$$

$$G_1 = G_3/2 \;\; et \;\; G_3 = [n_F\, W_B/L_B]^{1/8} \; avec \;\; n_F = 2 \tag{e361}$$

Les termes G_i représentent respectivement la face inférieure, les surfaces latérales et celle de la surface supérieure du substrat. En négligeant les échanges liés aux faces latérales, on retrouve le coefficient propre à cette condition. L'analyse des éléments de cette fonction met en évidence le postulat d'une division par deux du coefficient d'échange pour la face inférieure.

Un point fort discutable, au vu des résultats de la Table 96, où toutes les faces participent aux mouvements du fluide. Ceux-ci démontrent que les coefficients d'échange de la face inférieure sont supérieurs et assez proches de ceux de la face supérieure.

Pour un substrat en position verticale, l'association des surfaces considère une disposition parallèle, laquelle est définie par l'expression :

$$G_\ell = \sum_i G_i\, {A_i}^{7/8} \Big/ \sum_i {A_i}^{7/8} \tag{e362}$$

$$A_1 = A_2 = L_B\, W_B \;\; et \;\; G_1 = G_2 = [n_F\, L_B/W_B]^{1/8} \;\; avec \;\; n_F = 2 \tag{e363}$$

On en déduit deux relations caractérisant l'expression d'un coefficient d'échange moyen global en régime laminaire, lequel est prédominant pour les cartes électroniques (Chapitre IIE3).

$$\overline{h}_{\ell\updownarrow} = 0.56\,(Ra_\ell)^{1/4}\left(k_f/\ell\right) \; si \;\; L_B = W_B \; et \; Pr = 0.7 \tag{e364}$$

$$\overline{h}_{\ell\leftrightarrow} = 0.428\,(Ra_\ell)^{1/4}\left(k_f/\ell\right) \; si \;\; L_B = W_B \; et \; Pr = 0.7 \tag{e365}$$

Ces dernières sont établies pour une plaque supposée isotherme.

La Table 97 décline pour deux températures l'estimation des coefficients d'échange moyen pour une plaque rectangulaire ayant pour longueur $L_B = 100mm$ et pour hauteur $W_B = 200mm$.

Table 97 : Coefficients d'échange d'une plaque isotherme en position verticale ($T_\infty = 20°C$)

Référence i	T_p (°C)	ℓ	ℓ_i (m)	Ra_{ℓ_i}	$\overline{h}_{T_i}$	$\overline{h}_{N_i}$	$\delta\overline{h}_i$
(e364)	45	$\sqrt{A_B}$	0.204	1.83 10^7	4.39	4.84	-9.3%
(e346)		W_B	0.203	1.81 10^7	5.05		4.3%
(e345)		W_B	0.203	1.81 10^7	5.03		4%
(e364)	50	$\sqrt{A_B}$	0.204	2.12 10^7	4.58	4.92	-6.8%
(e346)		W_B	0.203	2.09 10^7	5.27		7.2%
(e345)		W_B	0.203	2.09 10^7	5.23		6.3%

Le calcul des propriétés de l'air est basé sur les expressions communiquées en annexe P20.

Ces valeurs ont été confrontées aux données issues d'une modélisation numérique avec une résolution des équations de continuité et de Navier-Stockes.

Pour cela, les dimensions du domaine fluide ont été fixées à quatre fois la dimension maximale de la plaque. Ce facteur de forme influe sur la valeur du nombre de Nusselt moyen comme l'illustre Oztop dans ces travaux [R100].

Force est de constater que la prise en compte de la longueur de la plaque proposée par Yovanovitch est pessimiste vis à vis des résultats issus de la simulation fluidique, un aspect souligné par le domaine de variation des nombres de Nusselt moyen (e347).

Il est également intéressant de comparer les prédictions du modèle lorsque la plaque est en position horizontale et que l'air circule tout autour de celle-ci sans aucune contrainte.

La Table 98 présente la comparaison du coefficient d'échange moyen déduit de l'expression analytique à la valeur fournie par le modèle numérique.

Table 98 : Coefficients d'échange d'une plaque isotherme en position horizontale

Référence i	T_p (°C)	ℓ	ℓ_i (m)	Ra_{ℓ_i}	$\overline{h}_{T_i}$	$\overline{h}_{N_i}$	$\overline{h}_{N_i}$	$\overline{h}_{N\leftrightarrow}/\overline{h}_{N\updownarrow}$
(e365)	45	$\sqrt{A_B}$	0.204	1.83 10^7	4.02	3.84	-4.8%	0.793
	50	$\sqrt{A_B}$	0.204	2.12 10^7	4.20	4.25	-1.2%	0.864

La dernière colonne démontre que le rapport entre les coefficients d'échange relatifs à la position horizontale et à la position verticale dépend des échanges thermofluidiques.

Les corrélations débattues ci-dessus font le postulat d'une température de paroi uniforme, une hypothèse en pratique peu réaliste pour le refroidissement d'une carte électronique. En fait, l'hypothèse d'une température non uniforme est plus concevable.

Des auteurs tels que Lloyd (e366) ou Churchill et Ozoe (e367) ont établi pour une plaque verticale des corrélations propres à ce cas.

$$\overline{Nu}_W = 0.678\,[Pr/(0.952+Pr)]^{1/4}\,{Ra_W}^{1/4} \quad pour\ 10^5 < Ra < 10^9 \qquad \text{(e366)}$$

$$\overline{Nu}_W = 0.751\left[1+(0.437/Pr)^{9/16}\right]^{-4/9}\,{Ra_W}^{1/4} \quad pour\ 10^6 < Ra < 3\,10^8 \qquad \text{(e367)}$$

Aussi, il convient de retenir le jeu d'expression le plus approprié mais également de définir la manière dont la puissance est dissipée. Plusieurs hypothèses ont été explorées, telles que :

- Une dissipation surfacique sur la face supérieure ou inférieure,
- Une dissipation surfacique équirépartie sur les deux faces du substrat,

- Une dissipation appliquée sur l'intégralité de son volume.

Finalement, les coefficients d'échange extraits de ces simulations numériques sont très proches.

La Table 99 expose la comparaison des résultats obtenus si une puissance de 3.875W est uniformément appliquée sur chacune des surfaces verticales d'un substrat de 200mm par 203mm.

Table 99 : Coefficients d'échange d'une plaque non isotherme en position verticale ($T_\infty = 20°C$)

Référence i	$Q\ (W)$	ℓ	$\ell_i\ (m)$	Ra_{ℓ_i}	$\overline{h}_{T_i}$	$\overline{h}_{N_i}$	$\delta\overline{h}_i$
(e364)	7.75	$\sqrt{A_B}$	0.287	4.37 10^7	4.19	4.56	-8.1%
(e346)		W_B	0.203	1.54 10^7	4.82		5.6%
(e345)		W_B	0.203	1.54 10^7	4.83		5.9%
(e366)		W_B	0.203	1.54 10^7	4.48		-1.9%
(e366)		$\sqrt{A_B}$	0.287	4.37 10^7	4.47		-2.1%
(e367)		W_B	0.203	1.54 10^7	4.77		4.5%

Les corrélations propres aux configurations non-isothermes corrèlent plus précisément les valeurs déduites du calcul numérique. La corrélation proposée pour une plaque isotherme par Yovanovitch demeure pessimiste. La détermination analytique du coefficient d'échange pour une plaque en position horizontale montre un écart 5% vis à vis de la valeur numérique ($\overline{h}_T = 3.48W\ m^{-2}\ K^{-1}$ et $\overline{h}_T = 3.32W\ m^{-2}\ K^{-1}$).

Toutefois, ce panel d'expressions nécessitent de connaitre la température à la paroi pour déterminer la valeur du coefficient d'échange. Une expression reliée à la densité de flux s'avère plus pratique à utiliser. Pour cela, l'expression du nombre de Rayleigh peut être reformulée.

$$Ra_\ell^* = g\ \beta\ \dot{q}\ \ell^4/k\ \nu\ a = \overline{Nu}_\ell\ Ra_\ell \tag{e368}$$

On en déduit la forme générique du nombre de Nusselt moyen suivante :

$$\overline{Nu}_\ell = C^{1/(m+1)}\ (Ra_\ell^*)^{m/(m+1)} \tag{e369}$$

Il en découle de nouvelles formulations, par exemple, pour l'expression (e366) :

$$\overline{Nu}_W = 0.733\ [Pr/(0.952 + Pr)]^{1/5}\ {Ra_W}^{1/5} \quad pour\ 10^5 < Ra < 10^9 \tag{e370}$$

Ces dernières peuvent être confrontées aux corrélations déclinées par Raithby et Hollands (e371) ou par Sparrow (e373) pour une plaque verticale en régime laminaire.

$$\overline{Nu}_W = 0.788\ [Pr/(4 + Pr)]^{1/5}\ (Ra_W^*)^{1/5} \tag{e371}$$

$$\overline{h}_{W\updownarrow} = 0.529\ {Ra_W^*}^{1/5}\ \left(k_f/W\right)\ \ pour\ Pr = 0.7 \tag{e372}$$

$$\overline{Nu}_W = 0.616\ [Pr/(0.8 + Pr)]^{1/5}\ (Ra_W^*)^{1/5} \tag{e373}$$

$$\overline{h}_{W\updownarrow} = 0.538\ {Ra_W^*}^{1/5}\ \left(k_f/W\right)\ pour\ Pr = 0.7 \tag{e374}$$

Au moyen de ce jeu d'expression, les calculs des échanges convectifs propres au substrat d'une carte électronique parallélépipédique ont été étudiés avec pour finalité de mieux les formaliser. Leur comparaison sur plusieurs configurations géométriques a démontré que l'expression modifiée de Lloyd (e370) est le meilleur compromis dans la grande majorité des cas.

Cette analyse procure également une première solution pour le cas particulier d'un substrat en position horizontale où toutes les surfaces mouillées par le fluide participent simultanément à son mouvement.

Cependant, la véracité des simulations numériques est à contrôler au moyen d'un ensemble de codes, à l'instar des travaux menés par Purusothaman [R101].

Ce type d'approche a été mené pour caractériser numériquement les performances thermiques d'un composant électronique monté sur un véhicule de test. Cette procédure de qualification fait l'objet des articles [25] et [51].

Celle-ci décrit pour quatre outils de simulations thermofluidiques commerciaux :

- La capacité à modéliser d'une manière très détaillée un composant complexe et la carte le supportant,
- L'export des données nécessaires à leur création,
- La précision obtenue au regard des résultats expérimentaux.

Ainsi deux architectures de carte électronique, dites 2s0p et 2s2p, sont simulées pour différentes conditions d'environnement, à savoir en convection libre et forcée.

Pour la convection forcée, trois vitesses d'air ont été investiguées, à savoir 1, 2 et 3m/s. Cet ensemble de cas tests offre l'opportunité de juger de la pertinence du modèle numérique établi pour la caractérisation des performances du composant brassé sur ces deux types de cartes électronique.

Ainsi, huit valeurs de résistances thermiques jonction-ambiante sont confrontées aux données expérimentales. Les résultats obtenus mettent en évidence la capacité à représenter fidèlement le comportement thermofluidique d'un composant.

C'est un aspect primordial pour la réalisation de modèles thermiques nodaux pertinents. La modélisation du substrat multicouche des cartes et sa simplification sont également débattues.

Il convient également de vérifier la pertinence de ces corrélations empiriques lorsque les sources de chaleur sont éparses. Celle-ci a été décrite dans les articles [12]-[42] et sera partiellement reprise au paragraphe K5.5.

K3.8. Méthode des asymptotes

Afin de s'affranchir d'un contrôle systématique du domaine de validité, les régimes stratifié ($\overline{Nu}_{C_\ell}$), laminaire $\overline{Nu}_{L_\ell}$ et turbulent $\overline{Nu}_{T_\ell}$ d'un écoulement sont regroupés au moyen de la méthode des asymptotes. Celle-ci a été utilisée par Churchill (e355) ainsi que par Yovanovitch [R99].

La méthode suggère d'interconnecter ces régimes sous la forme mathématique ci-dessous :

$$\overline{N}u_\ell = \left[\left[\left({Nu_{C_\ell}}^n + {\overline{N}u_{L_\ell}}^n \right)^{1/n} \right]^m + {\overline{N}u_{T_\ell}}^m \right]^{1/m} \quad \text{(e375)}$$

Pour les très faibles nombres de Rayleigh, l'échange thermique se résume à une conduction thermique vers le fluide entourant la plaque. Par définition, le nombre de Nusselt est égal à 1.

$$Nu_{C_\ell} = 1 \quad \text{(e376)}$$

A l'opposé, pour les forts nombres de Raleigh, le calcul du nombre de Nusselt s'appuie sur les corrélations regroupées dans les travaux de Yovanovitch sur les plaques planes [R106].

Là encore, de nombreuses corrélations sont disponibles dans la littérature.

$$\overline{Nu}_{T_\ell} = 0.13\ (Ra_\ell)^{1/3}\ pour\ Ra_\ell > 2\ 10^7 \quad \text{(e377)}$$

La Figure 168 décrit graphiquement les trois régimes d'échange thermique à regrouper.

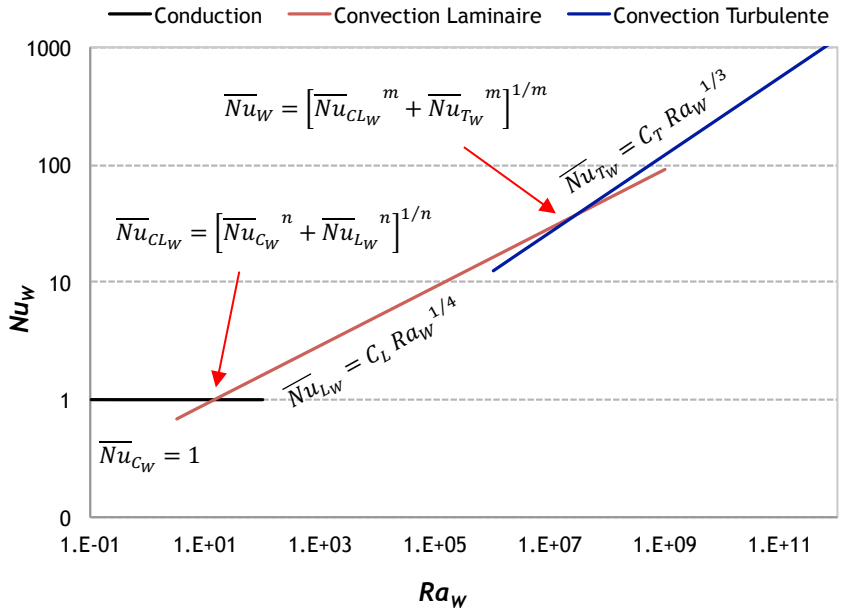


Figure 168 : Principe d'une modélisation compacte des régimes d'échange thermique

Il est intéressant de tracer sur ces évolutions, le résultat de la relation (e345) établie par Churchill.

Le tracé de la corrélation empirique de Churchill montre que cette dernière englobe effectivement le régime stratifié ($\overline{Nu}_{C_\ell}$) et le régime laminaire $\overline{Nu}_{L_\ell}$.

Au-delà d'une valeur de Rayleigh égale à10^8, celle-ci s'écarte de la corrélation établie par McAdams pour un régime turbulent (e377).

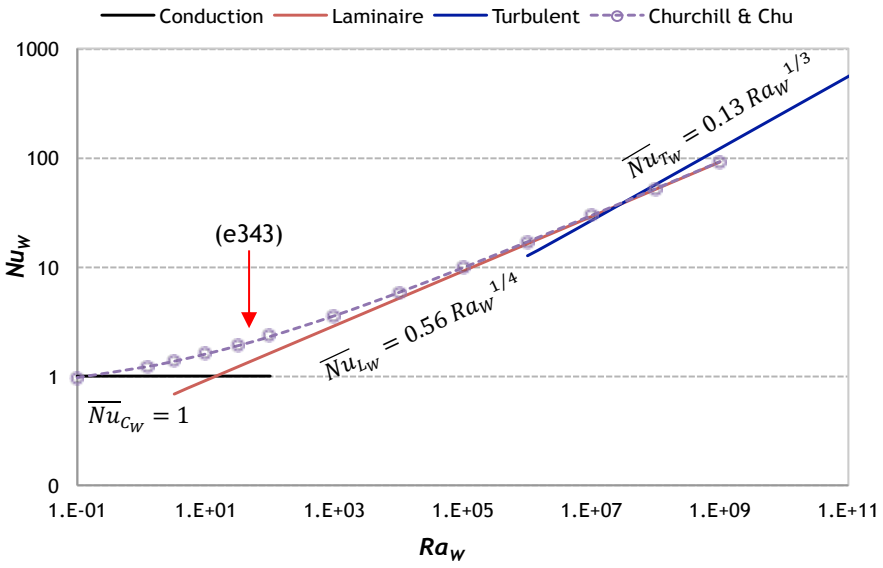


Figure 169 : Évolution corrélée du nombre de Nusselt d'une plaque verticale

Pour associer le régime turbulent, Churchill a défini la corrélation suivante :

$$\overline{Nu}_W = \left[0.825 + 0.387\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{-8/27} Ra_W{}^{1/6}\right]^2 \quad \forall\, Ra_W \qquad \text{(e378)}$$

La Figure 170 présente le tracé de cette corrélation mais également le résultat de la méthode des asymptotes (croix rouge) si $n = 1.4$ et $m = 6$.

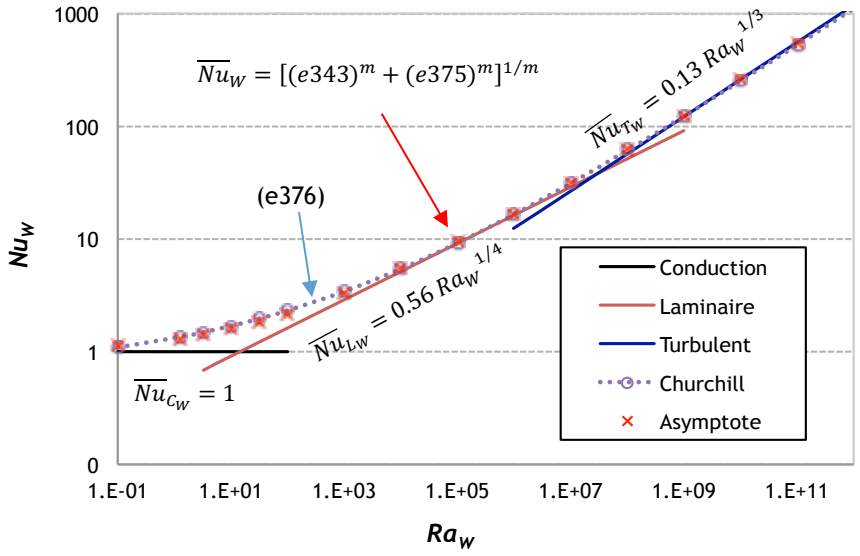


Figure 170 : Expressions corrélées du nombre de Nusselt pour une plaque verticale

Ainsi, la méthode des asymptotes offre la capacité de sélectionner puis d'associer les corrélations les plus adaptées à la problématique à modéliser. La définition des deux exposants caractérisant les transitions des régimes est quant à elle effectuée de manière numérique.

A titre d'exemple, la Figure 171 indique la superposition des nombres de Nusselt déduits d'une modélisation thermofluidique (Icepak®). Cette étude a été menée sur des formats standardisés de carte électronique (Figure 49), ceci pour différentes sollicitations thermiques.

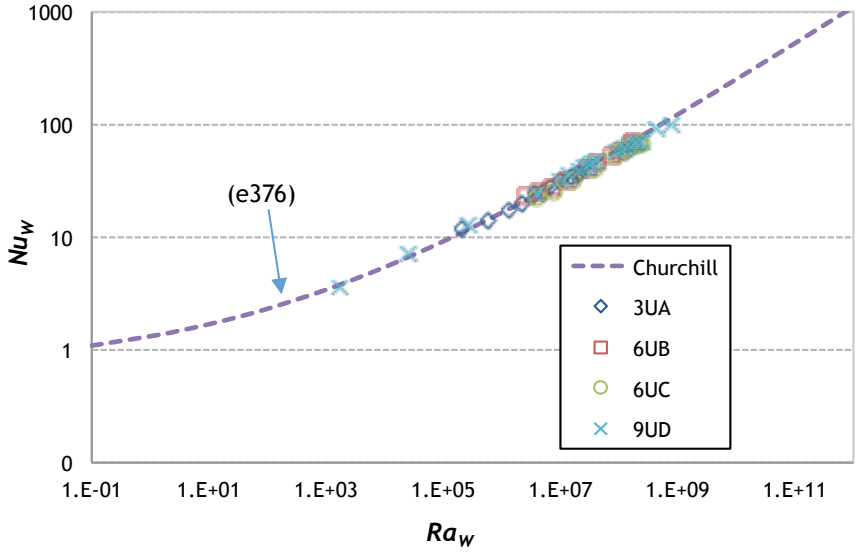


Figure 171 : Validation numérique des expressions corrélées du nombre de Nusselt

Le cas d'une convection confinée d'une carte protégée par un capot métallique pour plusieurs régimes d'écoulement a fait l'objet d'un traitement identique.

$$\overline{Nu}_\ell = \left[1 + \left[0.21\, Ra_\ell^{1/4} \right]^{-m} + \left[0.069\, Pr^{0.074}\, Ra_\ell^{1/3} \right]^{-m} \right]^{-1/m} \qquad \text{(e379)}$$

La longueur caractéristique (ℓ) est basée, dans ce cas de figure, sur la distance entre le capot et le substrat. Le coefficient d'échange dépend de la différence de température entre le substrat et le capot. Les parois latérales sont généralement supposées adiabatiques.

Les phénomènes de convection confinée sont actifs pour de faibles écarts de températures.

La position du substrat vis-à-vis du capot est importante pour pallier les phénomènes de stratification de l'écoulement. Ceux-ci sont étudiés dans la thèse de Esther Zarco Zernia [R107] et ils font l'objet d'un travail collaboratif avec le professeur Bairi sur les phénomènes convectifs internes à une cavité parallélépipédique [43].

Même si ces expressions sont discutables, elles fournissent, malgré tout, une approche simple et pragmatique pour pressentir le niveau de criticité d'une conception dans le cas où le substrat d'une carte électronique est refroidi par convection naturelle.

K3.9. Modélisation de sources de chaleur à multiples orientations

Lié à de nouvelles contraintes de conception des cartes électroniques, telle que la limitation des impédances des lignes de transmission des signaux, l'axe d'orientation des composants implantés sur la face d'une carte est susceptible d'avoir un angle quelconque (Figure 172).

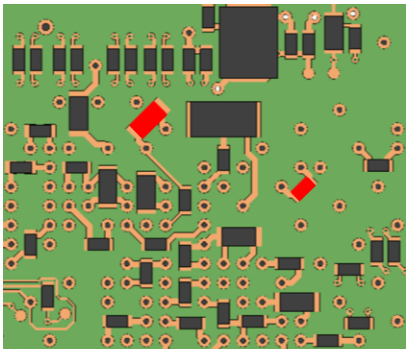


Figure 172 : Illustration des multiples orientations des composants électroniques

C'est une transition majeure, les composants étant jusqu'alors orientés avec des rotations de 90°.

C'est également une rupture pour certains outils de simulations thermofluidiques incapables de représenter correctement ce nouveau placement des composants sur un substrat.

Une nouvelle implémentation du modèle analytique est entreprise afin de résoudre la problématique de sources de chaleur ayant de multiples orientations sur un substrat orthotrope à multiples couches.

Cette définition angulaire est introduite dans la solution de l'équation de la chaleur.

$$A_{m,i}\, B_{n,i} = S_{S_i}\left[f_{m,n,j} + f_{m,-n,j}\right]/2 \quad avec \;\; S_{S_i} = L_{S_i}\, W_{S_i} \tag{e380}$$

$$\text{Où} \;\; f_{m,n,j} = cos\left(\alpha_m\, X_{S_i} + \beta_n\, Y_{S_i}\right) \cdot sinc\left(\kappa_{m,n,j}\right) \cdot sinc\left(\xi_{m,n,j}\right) \tag{e381}$$

$$Et\; \kappa_{m,n,i} = L_{S_i}\left[\alpha_m\, cos(\Theta_i) + \beta_n\; sin(\Theta_i)\right]/2 \tag{e382}$$

$$\xi_{m,n,i} = W_{S_i}\left[\alpha_m\; sin(\Theta_i) - \beta_n\; cos(\Theta_i)\right]/2 \tag{e383}$$

L'expression du profil des températures dépend dès lors de l'orientation vis-à-vis de la position horizontale (Θ).

La pertinence de cette approche est explicitée dans l'article [46]. Un ensemble de points localisés (P_i) sur la surface du substrat a été corroboré par une simulation numérique.

Ceux-ci sont décrits pour différentes valeurs angulaires sur la Figure 173.

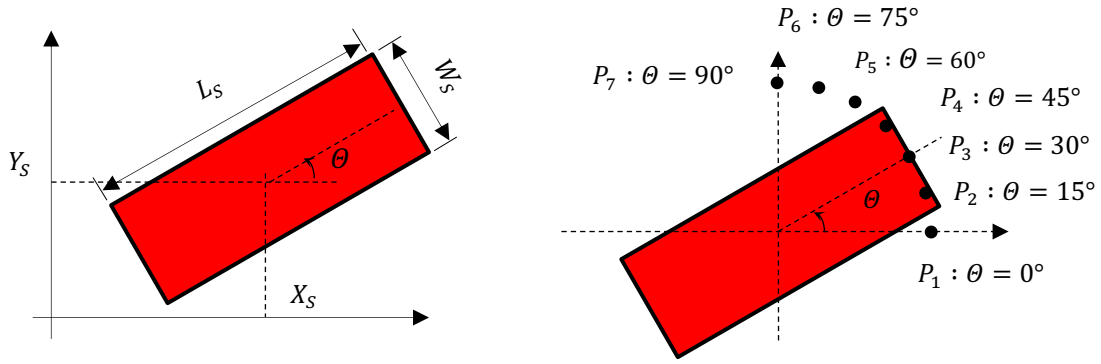


Figure 173 : Définition d'une source possédant une orientation quelconque

La Table 100 reprend les résultats publiés. Une source de chaleur orientée est montée sur un substrat constitué de 6 couches. Sa longueur et sa largeur font respectivement 5mm et 2.5mm. La dissipation appliquée est de 0.2W et la température ambiante est fixée à 85°C.

Table 100 : Confrontation des résultats analytiques (T_{T_p}) et numériques (T_{N_P})

Coordonnées des points observés (mm)				$T_{T_{P_i}}$ $(°C)$ Angle de la source					$T_{N_{P_i}}$ $(°C)$ Angle de la source				
Position	X_i	Y_i	Z_i	0°	30°	45°	60°	90°	0°	30°	45°	60°	90°
P1	40.0	50.0	1.6	95.0	93.9	91.5	90.5	90.0	95.0	93.9	91.5	90.5	90.0
P3	39.7	51.3	1.6	93.9	95.0	95.2	93.9	90.5	93.9	95.0	95.2	93.9	90.6
P4	39.3	51.8	1.6	91.5	95.2	95.0	95.2	91.5	91.5	95.2	95.0	95.2	91.5
P5	38.8	52.2	1.6	90.6	93.9	95.2	95.0	93.9	90.6	93.9	95.2	95.0	93.9
P7	37.5	52.5	1.6	90.0	90.6	91.5	93.9	95.0	90.0	90.6	91.5	93.9	95.0

Les températures calculées analytiquement sont effectivement en adéquation avec celles obtenues numériquement, ceci quelle que soit l'orientation. Les zones grisées représentent les températures axiales vues sur le bord de la surface orientée.

Cette nouvelle fonctionnalité du modèle analytique offre l'opportunité inédite de décrire avec justesse l'emplacement exact de composants électroniques disposés de m'importe qu'elle manière sur le substrat et d'en déduire avec précision l'évolution de ses températures.

K3.10. Prise en compte de multiples couches

Cette nouvelle thématique vise à parfaire la représentation des transferts thermiques au sein d'un substrat. Conventionnellement, un monobloc possédant une géométrie et des propriétés thermiques équivalentes est substitué à la représentation détaillée de toutes les couches.

Aussi, il est légitime de s'interroger sur la véracité de cette méthode de calcul, employée depuis des décennies, pour déduire la conductivité thermique de l'ensemble de couches d'un substrat suivant ses trois axes.

En effet, cette approche grossière s'avère incapable de discerner l'empilement directionnel des diverses couches métalliques et diélectriques de différentes épaisseurs, constituant le substrat. En réalité, en fonction de leurs propriétés thermiques spécifiques, celles-ci vont influer de manière différente sur la conduction thermique longitudinale et transversale au sein du substrat.

Dès lors, la création de modèles analytiques destinés à représenter la structure composite présentant de multiples couches est envisagée. Celle-ci vise à mieux discerner la répartition des transferts thermiques longitudinaux au sein d'un substrat alternant des couches très conductrices de la chaleur et celles faisant obstacle à sa diffusion.

A nouveau, l'équation du profil de température basée sur les séries de Fourier est reprise pour introduire cette fonctionnalité. Pour cela, les échanges sur les surfaces latérales de chacune des

couches sont négligés. Les travaux de Culham [R108] décrivent la forme des formulations à établir si l'on souhaite les conserver mais ceux-ci ne concernent que les matériaux isotropes.

Deux conditions sont introduites pour caractériser le transfert thermique entre les *j* couches.

$$\theta_{j+1}(x,y,z)\big|_{z=z_j} = \theta_j(x,y,z)\big|_{z=z_j} \quad for\ 1 \le j \le nC-1 \tag{e384}$$

$$k_{Z_{j+1}} \left.\frac{\partial \theta_{j+1}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_j} - k_{Z_j} \left.\frac{\partial \theta_j(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_j} = 0 \quad for\ 1 \le j \le nC-1 \tag{e385}$$

A nouveau, seuls les profils thermiques $\omega_{U_{m,n}}(z)$ et $\omega_{B_{m,n}}(z)$ suivant l'axe z sont à reformuler pour tenir compte de l'empilement des couches, tels que :

$$\omega_{B_{m,n,j}}(z) = \frac{N_{B_{m,n,j}}}{D_{B_{m,n}}} \left[E_{m,n,j}(z_j - z) + \frac{\chi_{B_{m,n,j}}}{k_{Z_j}} F_{m,n,j}(z_j - z) \right] e^{-(z+H_B)\, r_{m,n,j}} \quad avec \quad H_B = \sum_{j=1}^{nC} \iota_j \tag{e386}$$

$$\omega_{U_{m,n,j}}(z) = \frac{N_{U_{m,n,j}}}{D_{U_{m,n}}} \left[E_{m,n,j}(z - z_{j-1}) + \frac{\chi_{U_{m,n,j}}}{k_{Z_j}} F_{m,n,j}(z - z_{j-1}) \right] e^{(z-H_B)\, r_{m,n,j}} \tag{e387}$$

$$Avec \quad r_{m,n,j} = \sqrt{\left(\frac{m\,\pi}{L_B}\right)^2 \frac{k_{X_j}}{k_{Z_j}} + \left(\frac{n\,\pi}{W_B}\right)^2 \frac{k_{Y_j}}{k_{Z_j}}} \tag{e388}$$

$$O\grave{u} \quad E_{m,n,j}(z) = 1 + e^{-2\,z\,r_{m,n,j}} \quad et \quad F_{m,n,j}(z) = \left[1 - e^{-2\,z\,r_{m,n,j}}\right] / r_{m,n,j} \tag{e389}$$

Le terme $\chi_{B_{m,n,j}}$ (ou $\chi_{U_{m,n,j}}$) introduit une relation de récurrence propre à chacun des profils.

$$\chi_{B_{m,n,j}} = \frac{k_{Z_{j+1}} \left(r_{m,n,j+1}\right)^2 F_{m,n,j+1}(\iota_{j+1}) + \chi_{B_{m,n,j+1}} E_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})}{E_{m,n,j+1}(\iota_{j+1}) + \left[\chi_{B_{m,n,j+1}} / k_{Z_{j+1}}\right] F_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})} \quad avec\ \chi_{B_{m,n,nC}} = \overline{h}_U \tag{e390}$$

$$\chi_{U_{m,n,j+1}} = \frac{k_{Z_j} \left(r_{m,n,j}\right)^2 F_{m,n,j}(\iota_j) + \chi_{U_{m,n,j}} E_{m,n,j}(\iota_j)}{E_{m,n,j}(\iota_j) + \left[\chi_{U_{m,n,j}} / k_{Z_j}\right] F_{m,n,j}(\iota_j)} \quad avec \quad \chi_{U_{m,n,1}} = \overline{h}_B \tag{e391}$$

La définition des autres termes est explicitée ci-après.

$$N_{B_{m,n,j}} = \frac{e^{-\,r_{m,n,1}\,\iota_1}}{e^{\,r_{m,n,j}\,(z_j - H_B)}} \prod_{k=j}^{2} \frac{2\,e^{-\,r_{m,n,k}\,\iota_k}}{E_{m,n,k}(\iota_k) + \left[\chi_{B_{m,n,k}} / k_{Z_k}\right] F_{m,n,k}(\iota_k)} \quad avec\ N_{B_{m,n,1}} = e^{r_{m,n,1}\,(H_B - 2\,\iota_1)} \tag{e392}$$

$$D_{B_{m,n}} = F_{m,n,1}(\iota_1) \left[k_{Z_1} \left(r_{m,n,1}\right)^2 + \left[\chi_{B_{m,n,1}} / k_{Z_1}\right] \overline{h}_B \right] + E_{m,n,1}(\iota_1) \left[\chi_{B_{m,n,1}} + \overline{h}_B\right] \tag{e393}$$

$$N_{U_{m,n,j}} = \frac{e^{-\,r_{m,n,nC}\,\iota_{nC}}}{e^{\,r_{m,n,j}\,(z_{j-1} - H_B)}} \prod_{k=j}^{nc-1} \frac{2\,e^{-\,r_{m,n,k}\,\iota_k}}{E_{m,n,k}(\iota_k) + \left[\chi_{U_{m,n,k}} / k_{Z_k}\right] F_{m,n,k}(\iota_k)} \quad avec\ N_{U_{m,n,nC}} = 1 \tag{e394}$$

$$D_{U_{m,n,j}} = F_{m,n,nC}(\iota_{nC}) \left[k_{Z_{nC}} \left(r_{m,n,nC}\right)^2 + \left[\chi_{U_{m,n,nC}} / k_{Z_{nC}}\right] \overline{h}_U \right] + E_{m,n,nC}(\iota_{nc}) \left[\chi_{U_{m,n,nc}} + \overline{h}_U\right] \tag{e395}$$

A partir de ce modèle analytique, il est également possible d'appliquer à chacune des couches la loi des mélanges qui a été proposée pour des milieux hétérogènes (e302).

Cette étude a fait l'objet d'un article [42] publié dans la revue « Solid-State » en 2015. Celui-ci reprend l'ensemble des conditions aux limites retenues pour aborder la modélisation d'un ensemble de couches ayant des propriétés thermiques en accord avec la constitution alternée des substrats.

L'exemple d'une carte JEDEC 2s2p, constituée de 7 couches (Figure 174), est traité dans cette analyse ainsi que ceux de substrats industriels possédant un nombre plus conséquent de couches.

Les conditions aux limites, les dimensions du substrat et les propriétés choisies pour chacune des couches sont explicitées dans les articles [19]-[42].

A l'instar des travaux précédents, les prédictions du modèle analytique ont été confrontées aux résultats numériques obtenus indifféremment à partir des logiciels Flotherm® ou Icepak®.

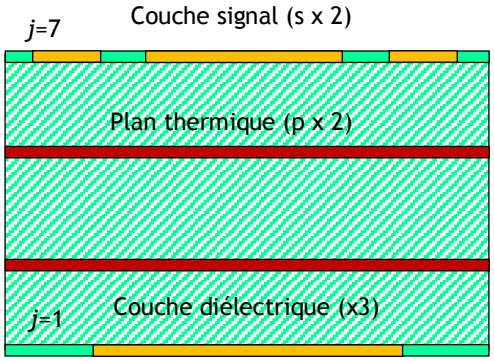


Figure 174 : Description schématique de l'empilement des couches d'une carte 2s2p

La Table 101 reprend l'estimation des températures pour une source carrée de 5mm de côté, laquelle est placée au centre d'un substrat.

Table 101 : Comparaison des températures centrales et moyennes (Flotherm)

Référence i	$\boldsymbol{T}_{N_{C_i}}(W)$	$\boldsymbol{T}_{T_{C_i}}(W))$	$\delta\boldsymbol{T}_i$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{N_{\delta\Omega_i}}(W)$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{T_{\delta\Omega_i}}(W)$	$\delta\overline{\boldsymbol{T}}_i$
z_7	46.21	46.18	0.06%	43.16	43.18	-0.05%
z_6	46.12	46.16	-0.09%	43.12	43.17	-0.12%
z_5	36.44	36.48	-0.11%	35.74	35.77	-0.08%
z_4	36.44	36.48	-0.11%	35.74	35.77	-0.08%
z_3	31.85	31.83	0.06%	31.77	31.74	0.09%
z_2	31.85	31.83	0.06%	31.77	31.74	0.09%
z_1	31.64	31.61	0.09%	31.56	31.54	0.06%
z_0	31.64	31.61	0.09%	31.56	31.54	0.06%

Bien entendu, cette conformité a été vérifiée pour différentes tailles de sources ou lorsque plusieurs sources sont disposées sur le substrat. A nouveau, les prédictions du modèle analytique sont excellentes, ceci quelle que soit la couche analysée.

Plus loin, une confrontation de ce modèle à multiples couches à une modélisation d'un bloc homogène ayant des propriétés thermiques orthotropes a été menée. Cette dernière a démontré la faible représentativité de cette approche et a révélé que l'erreur de prédiction peut excéder 50%.

Le concept de modèle détaillé (PCB-DTM) et de modèle compact (PCB-CTM) a été retenu pour distinguer ces deux représentations.

La Table 102 récapitule les écarts de prédiction constatés sur les températures centrales de différentes sources de chaleur entre ces deux approches.

Comme mentionné, la conductivité thermique orthotrope équivalente est calculée à partir de l'expression (e300). Les valeurs de conductivité thermiques déduites sont égales à k_{XY}= 16.5W m^{-1} K^{-1} et k_Z= 0.323W m^{-1} K^{-1}.

Table 102 : Comparaison des températures centrales des modèles PCB-DTM et PCB-CTM

Source		PCB-DTM			PCB-CTM		
$S_i\ (mm^2)$	$T_{N_{C_i}}(W)$	$T_{T_{C_i}}(W))$	δT_i	$T_{N_{C_i}}(W)$	$T_{T_{C_i}}(W))$	δT_i	$\lvert\delta T_i\rvert$
2.5 x 2.5	116.2	116.4	-0.17%	76.8	76.7	0.13%	34.1%
5 x 5	57.9	58.2	-0.52%	52.6	52.5	0.19%	9.8%
10 x 10	40.8	40.9	-0.25%	40.5	40.4	0.25%	1.2%

Les premières colonnes confrontent les prédictions du modèle analytique à celles des modèles numériques. La dernière colonne, quant à elle, présente l'erreur entre les deux représentations du substrat. On note que l'erreur croit énormément lorsque la taille de la source est faible, celle-ci est de l'ordre de 35% pour la plus petite source analysée dans le cadre de cette étude.

La méthode conventionnelle de calcul d'une conductivité équivalente est par conséquent contestable pour analyser le comportement thermique d'une multitude de composants miniaturisés.

Il est clair qu'une autre méthode de simplification doit être utilisée pour modéliser correctement les transferts thermiques d'une ou plusieurs sources positionnées sur cet assemblage hétéroclite. Dans cette optique, une démarche de regroupement des couches a été initiée par Brice Rogié dans l'article [53]. Cette dernière ambitionne d'amalgamer les couches ayant un apport minime sur le refroidissement des sources de chaleur. C'est par exemple le cas des couches métalliques possédant un très faible pourcentage de cuivre. Ces dernières sont susceptibles d'être associées avec les couches diélectriques voisines.

La Figure 175 montre le résultat de cette procédure de simplification pour un substrat composé de 21 couches, lequel accueille une source de chaleur interne. Le profil de température d'un substrat simplifié à 11 couches est comparé à celui du substrat réel de température (en rouge).

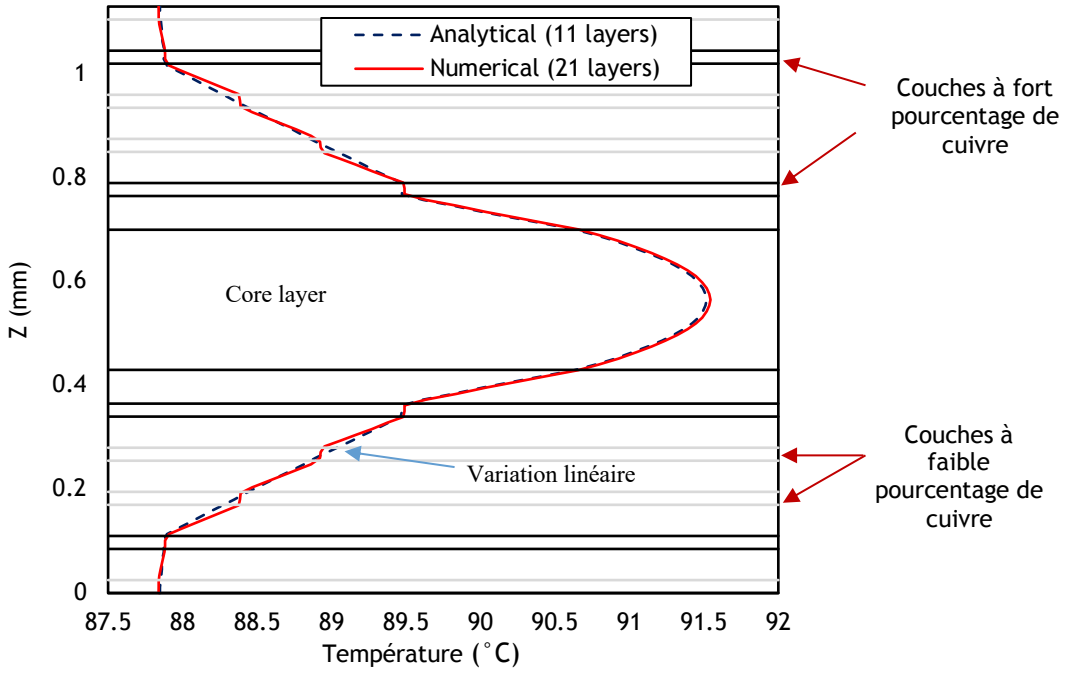


Figure 175 : Illustration de la conduction thermique au sein d'un substrat

Le groupement des couches peu conductrices de la chaleur se traduit par une variation linéaire des températures. Ces travaux ont été complétés et ils font l'objet d'un chapitre de la thèse CIFRE [56].

K4. Modélisation de multiples sources de chaleur

K4.1. Approche mathématique dédiée à de multiples sources de chaleur

Pour commenter ce cas de figure, l'interconnexion d'un boitier BGA disposant de 208 billes est abordée ci-après. Les dimensions de ce boitier sont fournies en Figure 35.

D'autre part, ce composant a fait l'objet d'une validation expérimentale de ces performances pour différents types de substrat, tel que le JEDEC 2s2p décrit en Figure 32.

La disposition des billes d'interconnexion de ce boitier est décrite sur la Figure 176, (vue de gauche).

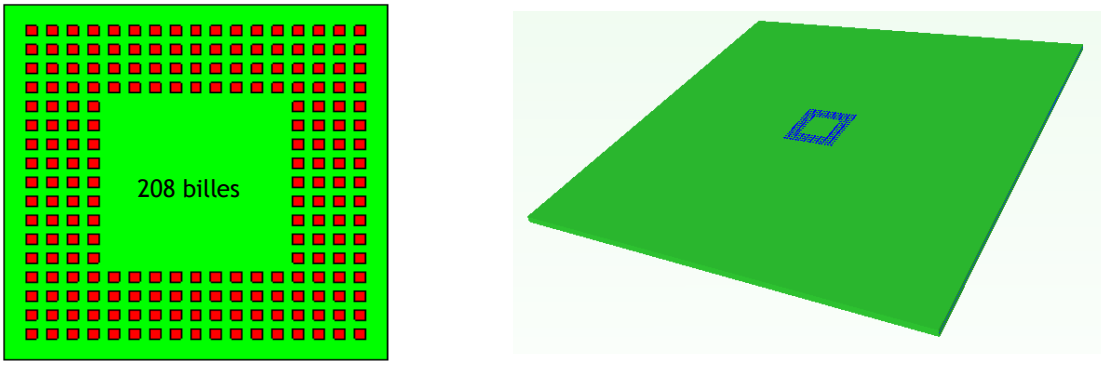


Figure 176 : Illustration de l'interconnexion de boitier complexe sur un substrat

La vue de droite, quant à elle, montre le rapport de taille entre le substrat et celles des 208 zones de contact de ce composant. Ces dernières sont représentées sous une forme carrée de 0.43mm de coté au pas de 0.8mm. Le pas et la géométrie d'une bille sont dupliqués n fois, on peut alors simplifier l'expression du calcul des températures du substrat.

$$\theta(x,y,z) = \frac{q}{L_S\, W_S} \sum_{m=0}^{M} cos(\alpha_m\, x) \left\{ \sum_{n=0}^{N} cos(\beta_n\, y)\ \omega_{m,n}(z) \sum_{i=1}^{nRx} A_{m,i} \left[\sum_{j=1}^{nRy} B_{n,j}\, Mq_{i,j} \right] \right\} \qquad \text{(e396)}$$

Où :

- Les paramètres L_b et W_b sont les dimensions de la bille ramenées à une surface carrée,
- Les paramètres nRx et nRy sont les nombres de rangées de billes suivant x et y,
- Le terme Mq est une matrice de coefficients pour décrire les sollicitations appliquées aux billes.

L'analyse du comportement thermique de cette matrice de billes s'avère chronophage en termes de temps de calcul. Ainsi, si le facteur de troncature η est fixé à 3, le nombre de sommations ($M_i \times N_i$) nécessaire équivaut à 600 par 600 qu'il faut répéter pour l'intégralité des 208 billes.

Afin de restreindre les temps de calcul, l'utilisation d'une transformée de Fourier bidirectionnelle procure une démarche mathématique plus segmentée où les sommations inhérentes au calcul algébrique sont susceptibles d'être dissociées.

La transformée de Fourier correspond dans ce cas à la double sommation du profil $\theta(x,y,z)_{m,n}$, laquelle est effectuée en deux temps, d'abord sur la variable m puis menée sur la variable n.

$$F_{u,v} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \boldsymbol{\theta}_{m,n}\, e^{-2\pi i\,(m\,u/M)} \right] e^{-2\pi i\,(n\,v/N)} \qquad \text{(e397)}$$

La sommation sur m, pour tout n, correspond à une transformée discrète monodimensionnelle sur chacune des lignes de la matrice $\boldsymbol{\theta}_{m,n}$ de dimensions $M \times N$ avec $M = N = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Celle-ci est calculée au moyen d'une transformée de Fourier rapide monodimensionnelle décrite par Cooley et al [R109].

Cette transformée vise à réduire le nombre de calculs par une mise en facteur des valeurs de sinus et cosinus communes ainsi que par une optimisation des opérations de multiplication et d'addition répétitives en une seule opération.

Il existe plusieurs variantes algorithmiques pour optimiser cette fonction, celles-ci sont répertoriées dans la thèse de Bergach [R110].

$$F_{u,n} = \sum_{m=0}^{M-1} \boldsymbol{\theta}_{m,n}\, e^{-2\pi i\,(m\,u/M)} = \sum_{m=0}^{M-1} \boldsymbol{\theta}_{m,n}[cos(2\pi\, m\, u/M) - i\ sin(2\pi\, m\, u/M)] \quad \text{(e398)}$$

Une fois celle-ci calculée, la transformée de Fourier de chacune des colonnes de la matrice est déterminée en appliquant une nouvelle fois la transformée de Fourier rapide monodimensionnelle.

$$F_{u,v} = \sum_{n=0}^{N-1} F_{u,n}\, e^{-2\pi i\,(n\,v/N)} \quad \text{(e399)}$$

Le retour au domaine spatial de cette expression fréquentielle nécessite l'utilisation d'une transformée inverse, laquelle est donnée par l'expression :

$$\theta = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} \boldsymbol{\theta}_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F_{u,v}\ e^{2\pi i\,(m\,u/M)}\right] e^{2\pi i\,(n\,v/N)}\right\} \quad \text{(e400)}$$

On en déduit deux expressions pour calculer successivement les lignes et les colonnes de matrice.

$$\theta = \sum_{n=0}^{N-1} IFFT(FFT(L_n))\ \ avec\ \ L_n = \sum_{m=0}^{M-1} IFFT(FFT(\boldsymbol{\theta}_{m,n})) \quad \text{(e401)}$$

L'intérêt de ces formulations réside dans le fait que pour calculer le terme $IFFT\left(FFT(\boldsymbol{\theta}_{m,n})\right)$, le nombre d'opération est réduit de M^2 à $M\ log(M)$.

Un autre avantage est la possibilité de multiplier des vecteurs réels de même taille. Ainsi les éléments tel que $\cos(\alpha_m\, x)$ de $\boldsymbol{\theta}_{m,n}$ sont dissociables et calculables séparément en les conditionnant correctement pour $N = 2^k$.

Les températures maximales et moyennes déduites de cette démarche ont été confrontées à celles d'un modèle numérique.

La Figure 177 dépeint le niveau et la localisation des écarts entre les prédictions du modèle analytique et celles du modèle fait sous Icepak®.

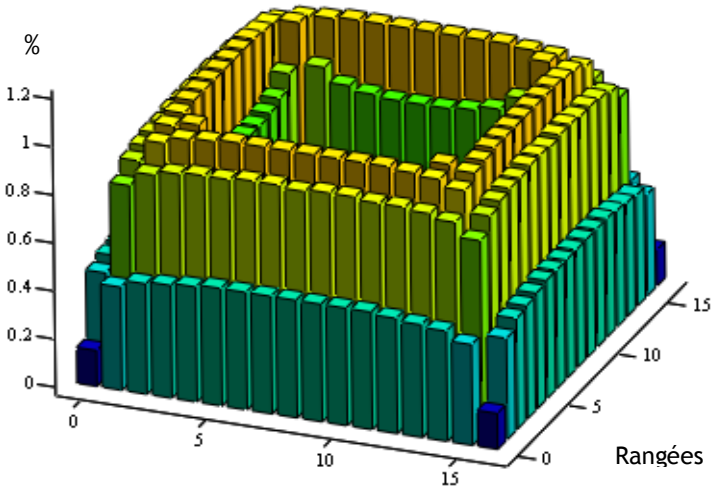


Figure 177 : Visualisation des écarts de températures pour la matrice de billes

Ceux-ci ont été calculés à partir des conditions aux limites décrites dans la Table 103.

Table 103 : Conditions thermiques appliquées au substrat

Q	T_∞	$\overline{h}_U$	$\overline{h}_B$	k_X	k_Y	k_Z
2W	$0°C$	$0\ W/m^2\ K$	$10^6\ W/m^2\ K$	$19\ W/m\ K$	$19\ W/m\ K$	$0.6\ W/m\ K$

La puissance est supposée uniformément répartie dans toutes les billes, une configuration peu réaliste.

La précision du modèle analytique demeure satisfaite malgré une limitation obligatoire du nombre de sommations reliées à des aberrations mathématiques. Lesquelles apparaissent dès que les valeurs de n ou m sont élevées.

Pour pallier ces artéfacts de calcul sous Mathcad®, les fonctions hyperboliques du profil thermique transversal doivent être remplacées par leurs expressions exponentielles.

Ces dernières sont cependant adaptées afin de tendre vers zéro lorsque leur exposant croit. Cette nouvelle révision des formulations est fournie ci-dessous.

$$\omega_{B_{m,n}}(z) = \frac{B_{m,n}\ exp(r_{m,n}\,[z - 3\,H_B]) + exp(r_{m,n}\,[-z - H_B])}{\overline{h}_B\,\left[D_{m,n} + exp(-\,r_{m,n}\,H_B)\right] - r_{m,n}\,k_Z\,\left[D_{m,n} - exp(-r_{m,n}\,H_B)\right]} \quad \text{(e402)}$$

$$B_{m,n} = \left[k_Z\,r_{m,n} - \overline{h}_U\right]/\left[k_Z\,r_{m,n} + \overline{h}_U\right]\ et\ D_{m,n} = B_{m,n}\ exp(-3\,r_{m,n}\,H_B) \quad \text{(e403)}$$

$$\omega_{U_{m,n}}(z) = \frac{C_{m,n}\ exp(r_{m,n}\,[z - H_B]) + exp(r_{m,n}\,[-z - H_B])}{r_{m,n}\,k_Z\,\left[C_{m,n} - exp(-2\,r_{m,n}\,H_B)\right] + \overline{h}_U\,\left[C_{m,n} + exp(-2\,r_{m,n}\,H_B)\right]} \quad \text{(e404)}$$

$$C_{m,n} = \left[k_Z\,r_{m,n} + \overline{h}_B\right] / \left[k_Z\,r_{m,n} - \overline{h}_B\right] \quad \text{(e405)}$$

Les prédictions obtenues à partir de cette nouvelle formulation pour le calcul des températures locales et moyennes du substrat du véhicule de test sont disponibles en annexe P18.5.

Un autre aspect à amender est la forme de la source de chaleur sur le substrat. Celle-ci n'est évidemment pas carrée une forme cylindrique doit lui être substituée (Figure 108).

Bien que les temps de calculs soient réduits, cette représentation détaillée est vite inexploitable si le niveau de l'analyse est celui d'une carte électronique.

K4.2. Considération de multiples formes

Une collaboration avec le laboratoire LTIE sous la forme d'un post-doctorat est établie en 2012.

Cette tâche est confiée à Nhat-Minh NGUYEN, sa thématique se focalise sur « Modélisation analytique des cartes électroniques ».

Il s'agit en premier lieu d'optimiser la définition des modèles analytiques exploités pour le dimensionnement thermique, puis à terme de développer de nouvelles fonctionnalités.

Par exemple en vue de modéliser avec plus de précision les liaisons entre le modèle analytique d'un substrat parallélépipédique orthotrope et un capot, l'implémentation de plusieurs modèles analytiques de sources de chaleur à multiples formes est mise en œuvre.

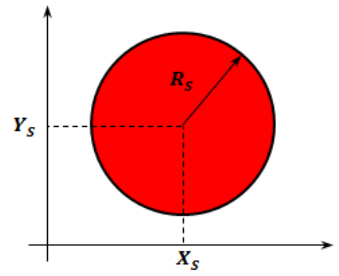
Ainsi la définition des termes $A_{m,i}$ et $B_{n,i}$ décrivant la géométrie de la source de chaleur est adaptée pour modéliser la forme d'un triangle, d'un losange, d'un cercle ou d'un anneau.

$$\theta(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nS} 4\frac{q_i}{S_b\ S_{S_i}^{<S>}} \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{A_{m,i}^{<s>}}{\delta_m + 1}\,\frac{B_{n,i}^{<s>}}{\delta_n + 1} cos(\alpha_m\,x)\ cos(\beta_n\,y)\,\omega_{m,n}(z) \quad \text{(e406)}$$

Les formulations les plus utiles sont reprises ci-après :

- Source de chaleur circulaire :

L'expression est basée sur le rayon de la source de chaleur.



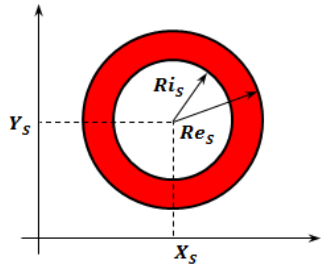
$$AB_{m,n,i}^{<2>} = S_{S_i}^{<2>} \cos(\alpha_m X_{S_i}) \cos(\beta_n Y_{S_i}) f(K)|_{K=R_{S_i}} \quad \text{(e407)}$$

$$\text{Avec } S_{S_i}^{<2>} = \pi {R_{S_i}}^2$$

$$f(K) = K (J_2 + J_0) \sqrt{{\alpha_m}^2 + {\beta_n}^2} \quad \text{(e408)}$$

- Source de chaleur annulaire :

L'expression est basée sur les deux rayons caractérisant la source de chaleur.



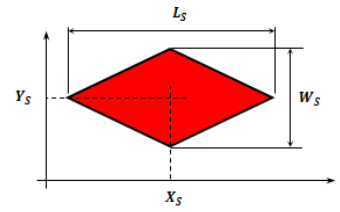
$$AB_{m,n,i}^{<3>} = S_{S_i}^{<3>} \cos(\alpha_m X_{S_i}) \cos(\beta_n Y_{S_i}) \left[f(K)|_{K=Re_{S_i}} - f(K)|_{K=Ri_{S_i}} \right] \quad \text{(e409)}$$

$$\text{Avec } S_{S_i}^{<3>} = \pi \left({Re_{S_i}}^2 - {Ri_{S_i}}^2 \right) \quad \text{(e410)}$$

$$f(K) = K (J_2 + J_0) \sqrt{{\alpha_m}^2 + {\beta_n}^2}$$

- Source de chaleur en forme de losange :

L'expression dépend des deux diagonales de la source de chaleur.



$$AB_{m,n,i}^{<4>} = S_{S_i}^{<4>} \cos(\alpha_m X_{S_i}) \cos(\beta_n Y_{S_i}) \; sinc(\kappa_{m,n,i}) \; sinc(\xi_{m,n,i}) \quad \text{(e411)}$$

$$\text{Avec } S_{S_i}^{<4>} = L_{S_i} W_{S_i}/2 \quad \text{(e412)}$$

$$\kappa_{m,n,i} = \frac{1}{4} \left[\alpha_m L_{S_i} + \beta_n W_{S_i} \right] \& \; \xi_{m,n,i} = \frac{1}{4} \left[\alpha_m L_{S_i} - \beta_n W_{S_i} \right] \quad \text{(e413)}$$

La pertinence de la modélisation d'une source cylindrique sur un substrat ayant de multiples couches est décrite dans l'article [44].

Ainsi l'exemple du comportement thermique d'une matrice de 25 sources d'un diamètre de 0.6mm, au pas de 0.8mm, dissipant 20mW est comparé à celui d'un modèle numérique Icepak®.

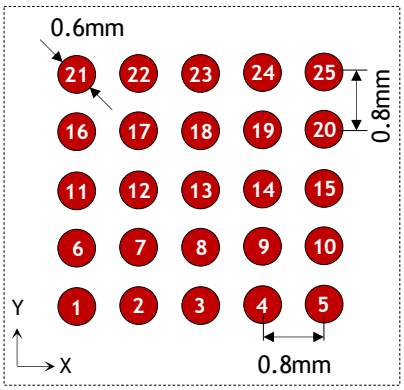


Figure 178 : Vision de la configuration des 25 sources de chaleur

L'erreur constatée sur les températures centrale ou moyenne vues par chacune des sources est inférieure à 0.1%, soit un écart de température de 0.01°C. Un résultat identique est obtenu si une source carrée est orientée à 45° pour représenter la forme d'un losange [44]. Ce dernier peut également être décomposé en deux triangles isocèles partageant la même base.

En définitive, il est aisé de modéliser différentes formes de sources disposées indifféremment sur la surface inférieure ou supérieure d'un substrat en sélectionnant le couple de termes $A_{m,i}$ et $B_{n,i}$ approprié.

K4.3. Groupement de multiples surfaces d'interconnexion

L'exemple du BGA 208 a mis en lumière la nécessité de traiter de manière efficace la résolution d'un grand nombre de sources miniatures de chaleur pour simuler le comportement thermique d'un substrat.

Comme le démontre l'emploi des transformées de Fourier rapides, il est opportun d'optimiser la manière d'agencer la sommation des calculs résultants de la superposition des profils thermiques.

En effet, des solutions plus compactes existent si des sources de tailles identiques sont disposées selon des pas connus, ainsi :

$$A_m = 2\ sinc\left(\alpha_m\ \frac{L_S}{2}\right) \sum_{i=1}^{nRx} cos\left(\alpha_m\ X_{S_i}\right)(L_S\ /\ L_B) \quad o\grave{u}\ \alpha_m = m\,\pi/\ L_B \tag{e414}$$

$$A_m = 2\ sinc\left(\alpha_m\ \frac{L_S}{2}\right) \sum_{i=0}^{nRx-1} cos\{\alpha_m\ [X_0 + i\ P_X]\}\ (L_S\ /\ L_B) \tag{e415}$$

Où

- Le terme X_0 correspond au centre de la première source,
- Le terme P_X représente le pas des sources de chaleur.

Cette transformation est bien entendue applicable à la fonction B_n (e265).

Comme le démontre Ditri [R111], cette expression peut être révisée au moyen de la relation :

$$\sum_{i=0}^{N-1} cos(x + i\ y) = cos\left(x + \frac{N-1}{2}\ y\right)\ sin\left(\frac{N}{2}\ y\right)\ cosec\left(\frac{y}{2}\right)\ o\grave{u}\ \ cosec(y) = 1/sin(y) \tag{e416}$$

$$\sum_{i=0}^{nRx-1} cos[\alpha_m\ X_0 + i\ \alpha_m\ P_X]\ = cos\left[\alpha_m\ \left(X_0 + \frac{nRx-1}{2}\ P_X\right)\right]\left[sin\left(\frac{nRx}{2}\ \alpha_m\ P_X\right)\Big/ sin\left(\alpha_m \frac{P_X}{2}\right)\right] \tag{e417}$$

Cette première formulation a été révisée pour lever l'indétermination quand $n = 0$.

$$\sum_{i=0}^{nRx-1} cos(\alpha_m\ [X_0 + i\ P_X]) = cos\left(\alpha_m \left[X_0 + \frac{nRx-1}{2}\ P_X\right]\right)\ \psi_m \tag{e418}$$

$$Avec\ \ \psi_m = nRx\ \ sinc\left(nRx\ \alpha_m\ \frac{P_X}{2}\right)\Big/ sinc\left(\alpha_m \frac{P_X}{2}\right) \tag{e419}$$

$$Ou\ encore:\ \psi_n = nRy\ \ sinc\left(nRy\ \beta_n\ \frac{P_Y}{2}\right)\Big/ sinc\left(\beta_n \frac{P_Y}{2}\right) \tag{e420}$$

D'autre part, la référence de la fonction cosinus correspond au centre de la zone couverte par les sources de chaleur comme l'illustre la Figure 179.

$$\sum_{i=0}^{nRx-1} cos(\alpha_m\,[X_0 + i\,P_X]) = cos(\alpha_m\,X_{\Sigma S})\,\psi_m \qquad \text{(e421)}$$

Dans ce cas, la forme de la fonction A_m est conservée, telle que :

$$A_m = 2\,sinc\left(\alpha_m\,\frac{L_S}{2}\right)\,cos(\alpha_m\,X_{\Sigma S})(L_S\,/\,L_B) \qquad \text{(e422)}$$

Si le nombre de rangées est réduit à 1, on voit immédiatement que la fonction ψ_m est égale à 1.

Les performances en termes de précision de cette version corrigée sont publiées dans l'article [44].

Ces deux formulations font l'hypothèse que la densité de flux dissipée par chacune des sources de chaleur est similaire. Toutefois, celles-ci sont adaptables si le profil des flux est connu.

Dans un deuxième article [R112], Ditri fait l'hypothèse d'un profil gaussien pour aborder la simulation des multiples doigts d'un MOSFET (Figure 7).

Indéniablement la régularité de certaines géométries autorise des simplifications et elle procure une méthode de groupement capable de minimiser les temps de calcul.

Les travaux précédents sur la modélisation du substrat offrent des solutions pour analyser les interactions thermiques entre différentes sources de dissipation qu'il convient également d'interconnecter aux réseaux nodaux de composants, comme le schématise la Figure 179.

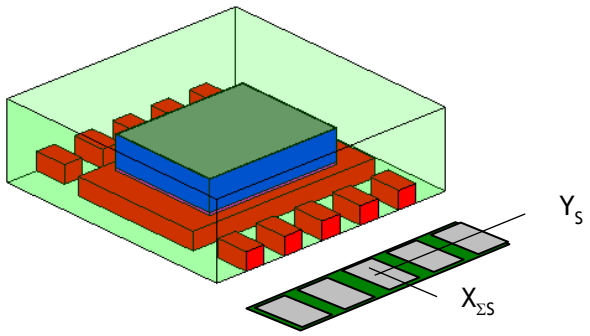


Figure 179 : Représentation d'une configuration disposant de 5 sources de chaleur

Dans ce cas de figure, les géométries des deux rangées identiques de points d'interconnexion sont à considérer. Les zones d'interconnexion peuvent dès lors être scindées de manière à ne pré-calculer qu'un seul motif.

Plusieurs options de raccordement sont susceptibles de convenir, telles que :

- Le nœud central où la température est supposée être la plus élevée ($T_{B_{MAX}}$) [R113],
- Un ensemble de nœuds avec la mise en œuvre d'un maillage non-conforme,
- Une surface en exprimant la température moyenne locale d'une zone spécifique du substrat,
- Un ensemble de surfaces correspondant aux chemins thermiques prépondérants d'évacuation de la chaleur du composant vers la carte [R114].

Le choix est par conséquent lié à la définition du modèle nodal et à la prise en compte, ou non, d'une résistance thermique à l'interface entre le composant et le substrat.

A titre d'exemple, la première option a été retenue pour l'identification d'un modèle nodal d'une carte électronique inconnue (COTS). Ce choix est lié à l'utilisation de modèle 2R pour chacun des composants.

Par définition, pour ce type de modèle la température à l'interface est uniforme et égale à la valeur maximale vue par le substrat. Les modèles et les résultats obtenus pour cette configuration sont détaillés dans l'article ITHERM-2008 [4].

Toutefois, nos analyses thermiques ont vocation à employer des modèles nodaux (DELPHI) décrivant de

multiples chemins d'évacuation de la chaleur vers le substrat. Dès lors, il est nécessaire de trouver une alternative pour calculer rapidement les zones présentant de multiples points de contact.

L'idée directrice est de calculer une zone de contact plus large, à droite, mais de faire en sorte que celle-ci soit représentative du transfert thermique entre le composant et la carte, à gauche.

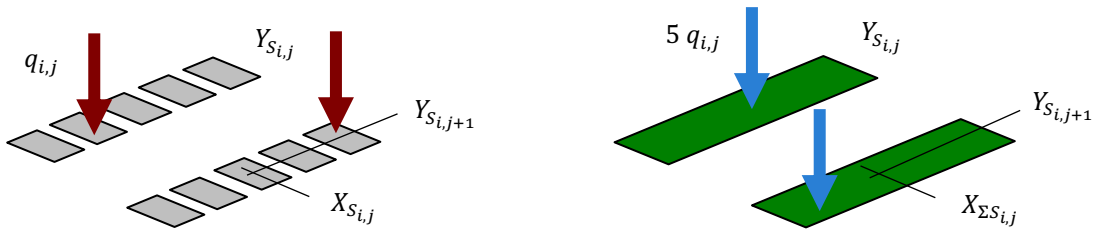


Figure 180 : Démarche destinée au groupement des sources

Évidemment, l'estimation de la température centrale de la zone groupée est en deçà de celle calculée au centre de la patte centrale. Pour corriger celle-ci, il est nécessaire d'associer le gradient crée par la constriction thermique.

Il est alors possible de définir la notion d'une résistance thermique pour chacune des zones, à savoir :

$$\overline{R}(x_I, L_Z, y_I, W_Z, z) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{1}{L_{P_i}\, W_{P_i}} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{n=0}^{N_i} D_{m,i}\, B_{n,i}\, \overline{A}_m(x_I, L_Z)\, \overline{B}_n(y_I, W_Z)\ \omega_{m,n,i}(z) \qquad \text{(e423)}$$

Pour cela, le facteur de forme géométrique de la source groupée est amendé en considérant l'expression suivante :

$$D_m = (2/L_B)\left[L_s\, sinc\left(\alpha_m \frac{L_s}{2}\right) \psi_m - L_Z\, sinc\left(\alpha_m \frac{L_Z}{2}\right)\right] cos(\alpha_m\, X_{S_i}) \qquad \text{(e424)}$$

Par cet artifice, les calculs des zones disposant de multiples contacts peuvent être minimisés en décomposant les sommations au moyen d'une transformée de Fourier rapide.

K5. Nouvelles approches dédiées aux transferts intrinsèques au substrat

Les dernières évolutions technologiques des substrats ont mis en évidence la nécessité de développer de nouvelles approches analytiques.

Celles-ci doivent être capables d'analyser efficacement la conception des cartes dites à haute densité ainsi que les contraintes engendrées par l'intégration de semi-conducteurs au cœur des couches diélectriques.

K5.1. Modélisation des transferts conductifs internes locaux

La densification des connexions électriques des cartes électroniques, dites « High Density Interconnect », ou HDI, en vue d'une accentuation de leurs performances électriques fait l'objet du projet Européen IPITECH [10].

Cette technologie est basée sur la multiplication de couches denses d'interconnexion au sein des substrats conventionnels. Ces couches compactes sont juxtaposées à proximité immédiate des composants pour limiter les temps de transmission de leurs signaux.

La liaison électrique inter-couche est assurée par un jeu de micro-via en cuivre comme le représente la Figure 181.

Le premier volet thermique de ces travaux [7] été présenté en 2010, au workshop THERMINIC [3]. Ceux-ci abordent plusieurs aspects tel que l'influence du remplissage des vias pour accroitre leur capacité à drainer la chaleur vers les plans métalliques internes.

Les architectures étudiées comprennent trois niveaux de signaux, les micro-vias les reliant peuvent être disposés en quinconce (à gauche) ou en ligne (à droite).

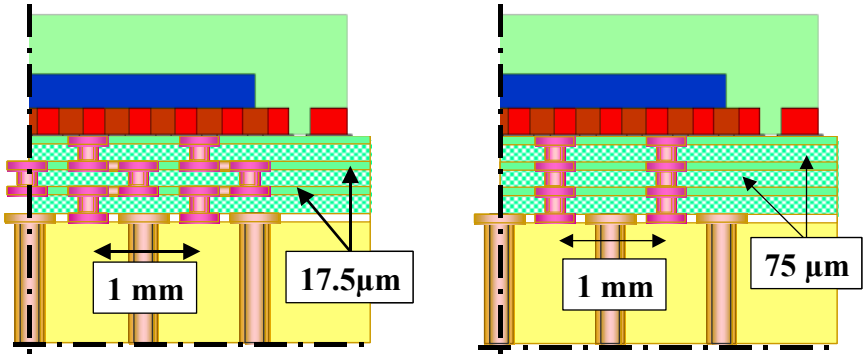


Figure 181 : Exemples d'architecture dite HDI

Cette analyse décline les performances thermiques (R_{JA}) de plusieurs enchevêtrements de structures micro-via par rapport à des structures conventionnelles basées sur des trous mécaniquement percés puis métallisés.

Naturellement, les structures de vias remplis, disposés en ligne, sont les plus efficaces pour drainer la chaleur vers les plans métalliques d'une carte électronique. Celles-ci ont également l'avantage de palier aux défauts de continuité des joints brassés sous les composants.

Ces travaux sont complétés, en 2011, par une publication dans la revue « Journal of Electronic Packaging » [40]. Cette communication scientifique synthétise les résultats obtenus sur un boitier électronique émergeant de type Micro-Lead-Frame (Figure 54) possédant 48 broches de connexion.

L'expression de sa résistance thermique jonction-ambiante est explicitée pour différentes configurations d'interconnexion basées sur des structures de vias conventionnelles aussi bien que sur des structures mixtes de micro-vias. L'ensemble des cas étudiés est illustré en Figure 182.

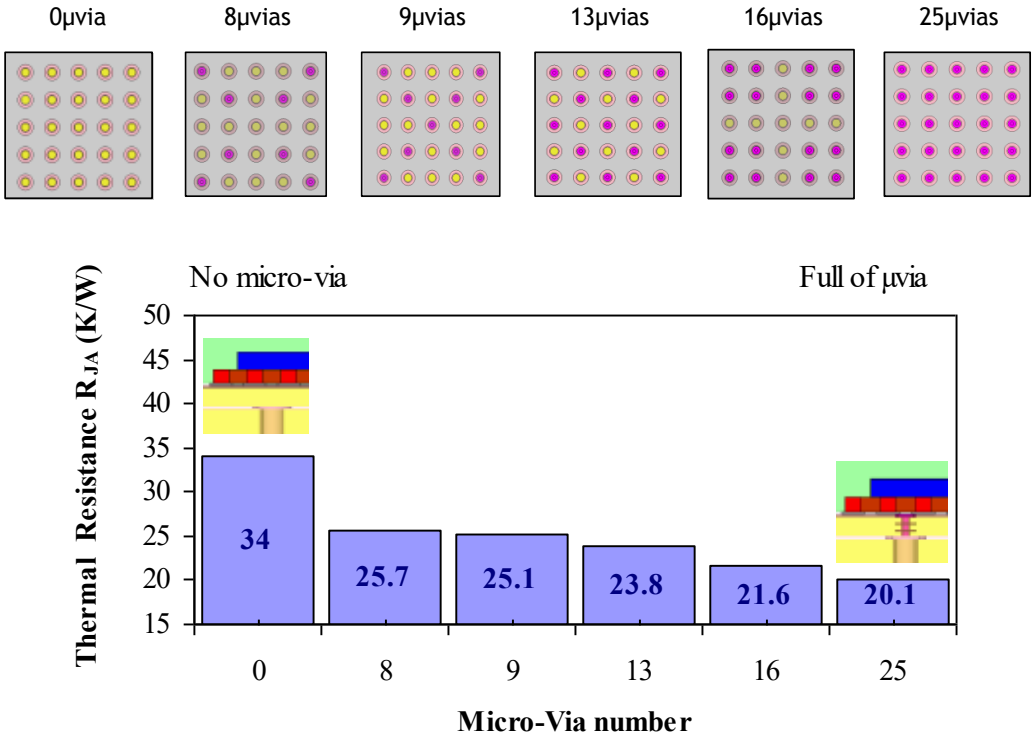


Figure 182 : Performances thermiques de diverses configurations de structure HDI

Cette analyse démontre que ces structures imbriquées réduisent de manière significative les barrières thermiques liées à la présence des couches diélectriques, très peu conductrices de la chaleur.

Compte tenu des ratios de taille et du nombre d'éléments à modéliser, la création d'un réseau nodal

pour ces structures de carte propres à chacun des composants électroniques a été investiguée.

Le processus de génération est identique à celui des composants électroniques.

La définition de ces multiples réseaux nodaux de résistances thermiques « carte » s'appuie sur :

- Une subdivision de sa surface en contact avec le composant. Celle-ci correspond à la description choisie pour établir le modèle compact du composant : « bottom inner », « bottom outer ».
- La surface de la carte opposée à la source de chaleur.
- Les quatre surfaces latérales de la zone de la carte située directement en dessous du composant.

A l'instar de la minimisation des modèles numériques de composants électroniques, cette technique inédite procure une solution rapide pour optimiser les transferts thermiques de cet élément vers la structure de la carte. Toutefois, l'interconnexion de deux réseaux nodaux s'avère être une problématique majeure du point de vue numérique.

Ainsi, la minimisation des températures des semi-conducteurs des composants émergeants (Figure 15) passe par la mise en œuvre de ces solutions de diffusion thermique vers les plans métalliques ayant de forts pourcentages de cuivre.

Toutefois afin d'appréhender l'apport de ces structures à assurer un refroidissement efficace, il est apparu nécessaire de disposer d'une solution analytique pragmatique permettant de s'affranchir dans un premier temps d'une représentation numérique détaillée. La méthodologie retenue sera explicitée dans les chapitres suivants.

K5.2. Modélisation de dissipations internes locales

En 2010, la participation au projet Européen HERMES [11] a permis d'étudier l'intégration de semi-conducteurs actifs au cœur d'un substrat, un procédé schématisé en Figure 50.

Du point de vue thermique, la présence de sources de chaleur implantées dans les couches diélectriques de la carte va contrecarrer leurs transferts thermiques vers les couches métalliques du substrat. Afin de mieux cerner l'influence de ces sources sur les températures maximales admissibles par un composant, un nouveau modèle analytique est étudié. Dans un premier temps, celui-ci est limité à la représentation de deux couches anisotropes distinctes comme l'explicite la Figure 183.

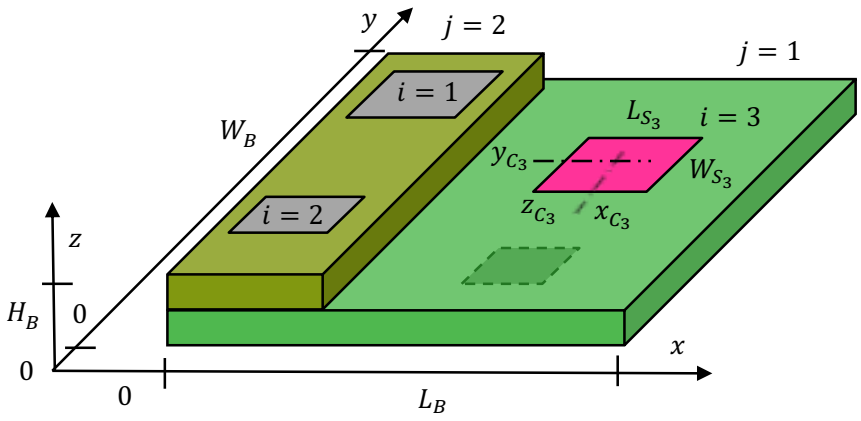


Figure 183 : Définition des paramètres du modèle analytique pour des sources encastrées

Pour cette évaluation, le semi-conducteur actif, ici en rose, est positionné à l'interface de deux matériaux orthotropes. Celui-ci est assimilé à une source de chaleur surfacique de forme carrée ou rectangulaire. Cette hypothèse fait le postulat que les transferts thermiques au sein de la résine sont négligeables au regard de celui du semi-conducteur vers la couche métallique qui l'interconnecte.

La détermination des températures du substrat est basée sur la superposition de son profil de température avec ceux des sources de chaleur positionnées sur les surfaces inférieure et supérieure.

$$\omega_{m,n,i}(z) = \omega_{B_{m,n,i}}(z)\,\delta_0|_{z_{S_i}=0} + \omega_{I_{m,n,i}}(z)\,\delta_0|_{0<z_{S_i}<H_B} + \omega_{U_{m,n,i}}(z)\,\delta_0|_{z_{S_i}=H_B} \qquad \text{(e425)}$$

Pour décrire la ou les sources, une nouvelle condition non-homogène $e(x,y)$ est introduite à la frontière de ces deux couches. Cette fonction peut également servir à définir plusieurs zones actives distinctes au cœur du substrat.

La solution considère deux conditions aux limites définies à ι_1 :

$$k_{Z_2}\left.\frac{\partial\theta_2(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_{S_1}} - k_{Z_1}\left.\frac{\partial\theta_1(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_{S_1}} = e(x,y) \tag{e426}$$

$$\theta_1(x,y,z)|_{z=Z_{S_1}} = \theta_2(x,y,z)|_{z=Z_{S_1}} \; o\grave{u} \; Z_{S_1} = \iota_1 \tag{e427}$$

La version s'appuyant sur les fonctions hyperboliques est détaillée dans l'article publié dans la revue scientifique « Thermal Science » [42]. Les formulations proposées sont reprises ci-après.

Le profil thermique suivant l'axe z $\omega_{I_{m,n}}(z)$ dépend de la localisation du point ou des points à observer.

$$Si \;\; 0 \le z \le Z_{S_1} \implies \omega_{I_{m,n,1}}(z) = N_{I_{m,n,1}}\left[ch\left(r_{m,n,1}\, z\right) + \frac{\overline{h}_B}{k_{Z_1}}\, G_{m,n,1}(z)\right]\Big/ D_{I_{m,n,1}} \tag{e428}$$

$$Si \;\; Z_{S_1} \le z \le H_B \implies \omega_{I_{m,n,2}}(z) = \left[ch\left(r_{m,n,2}\, z\right) + \frac{\overline{h}_U}{k_{Z_2}}\, G_{m,n,2}(z)\right]\Big/ D_{I_{m,n,1}} \tag{e429}$$

$$O\grave{u} \;\; G_{m,n,j}(z) = z\,\delta_m\,\delta_n + \left[sh\left(r_{m,n,j}\, z\right)/\left(r_{m,n,j} + \delta_m\,\delta_n\right)\right] \; avec \;\; 1 \le j \le 2 \tag{e430}$$

Là encore, les coefficients de Kronecker sont introduits pour considérer les cas où m et n sont nuls.

La définition des autres termes est explicitée ci-après.

$$N_{I_{m,n,1}} = \frac{ch\left(r_{m,n,2}\, Z_{S_1}\right) + \left(\chi_{B_{m,n,2}}/k_{Z_2}\right) G_{m,n,2}\left(Z_{S_1}\right)}{ch\left(r_{m,n,1}\, Z_{S_1}\right) + \left(\overline{h}_B/k_{Z_1}\right) G_{m,n,1}\left(Z_{S_1}\right)} \tag{e431}$$

$$\chi_{B_{m,n,2}} = -\left[\frac{k_{Z_2}\left(r_{m,n,2}\right)^2 G_{m,n,2}(H_B) + \overline{h}_U\, ch\left(r_{m,n,2}\, H_B\right)}{ch\left(r_{m,n,2}\, H_B\right) + \left(\overline{h}_U/k_{Z_2}\right) G_{m,n,2}(H_B)}\right] \tag{e432}$$

$$\begin{aligned} D_{I_{m,n,1}} = N_{I_{m,n,1}} &\left[k_{Z_1}\left(r_{m,n,1}\right)^2 G_{m,n,1}\left(Z_{S_1}\right) + \overline{h}_B\, ch\left(r_{m,n,1}\, Z_{S_1}\right)\right] \\ &- \left[k_{Z_2}\left(r_{m,n,2}\right)^2 G_{m,n,2}\left(Z_{S_1}\right) + \chi_{B_{m,n,2}}\, ch\left(r_{m,n,2}\, Z_{S_1}\right)\right] \end{aligned} \tag{e433}$$

L'écriture des équations pour un modèle constitué de seulement deux ou trois couches s'avère très vite lourde à manipuler.

Pour simplifier ces expressions il est préférable d'utiliser les formules de récurrence vues au paragraphe K3.10. La forme définitive proposée est fournie au paragraphe K5.3.

Les premiers résultats liés à ce modèle bicouche sont décrits dans l'article [12] présenté lors de la conférence EUROSIME en 2012. Le cas d'un substrat composé de 21 couches est traité (Figure 175). Ses dimensions externes sont reprises en Table 104.

Table 104 : Géométrie du substrat étudié

Type	$L_B\ (mm)$	$W_B\ (mm)$	$H_B\ (mm)$
$nC = 19$	100	160	≈1.13

Pour cette première analyse, les différentes couches sont regroupées en deux blocs homogènes ayant des propriétés thermiques anisotropes. Le calcul de la conductivité thermique équivalente s'appuie sur

les équations (e243) et (e244).

La Table 105 décrit les valeurs déduites de ces expressions.

Table 105 : Conductivités thermiques effectives du modèle

Couche	Index	$H_i\ (mm)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
$0 \le z \le \iota_1$	1	0.7	28.7	28.7	1.17
$\iota_1 \le z \le H_B$	2	0.43	46	46	1.17

A l'instar des travaux précédents, les prédictions du calcul analytique ont été confrontées aux résultats d'une modélisation numérique décrivant, en régime permanent, le comportement de diverses sources enterrées au sein de ce substrat. Les configurations étudiées sont indiquées dans la Table 106.

Table 106 : Tailles et positions centrales des composants équipant la carte étudiée

Cas i	$L_{S_i}\ (mm)$	$W_{S_i}\ (mm)$	$X_{S_i}\ (mm)$	$Y_{S_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{q}_s\ (W)$)
1	7	7	50	80	1.5
2	4	4	50	80	1.5
3	10	10	50	80	1.5
4	13	13	50	80	1.5
5	7	7	50	80	3
6	7	7	5	5	1.5
7	7	7	5	80	1.5

La Table 107 reprend la comparaison des prédictions des températures vue par la source. Les résultats ont été obtenus en fixant une température ambiante de 20°C et un coefficient d'échange thermique uniforme de 10W m^{-2} K^{-1} sur les faces supérieure et inférieure du substrat.

Table 107 : Comparaison des températures centrales et moyennes d'une source encastrée

Cas i	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta \boldsymbol{T}_{J_i}$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{N_{S_i}}\ (°\boldsymbol{C})$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{T}_{S_i}}\ (°\boldsymbol{C})$	$\delta \boldsymbol{T}_{J_i}$
1	41.8	42.1	-0.7%	40.2	40.2	0.0%
2	48.9	49.5	-1.2%	46.6	46.7	-0.2%
3	38.6	38.9	-0.8%	37.1	37.2	-0.3%
4	36.7	36.8	-0.3%	35.2	35.3	-0.3%
5	81.7	82.2	-0.6%	78.2	78.4	-0.3%
6	68.3	68.6	-0.4%	66.5	66.7	-0.3%
7	50.8	51.1	-0.6%	49.1	49.2	-0.2%

Les écarts indiqués démontrent la qualité du modèle analytique développé. Bien entendu, la précision est susceptible d'être améliorée en augmentant le nombre de termes des séries de Fourier, en particulier pour les sources de petites dimensions (cas N°2).

L'article [12] fournit également une analyse des coefficients d'échange thermiques vus par ce substrat pour différentes orientations. Ainsi, la simulation numérique réalisée a permis de statuer sur la pertinence des expressions proposées au paragraphe K3.7.

Par exemple, la Table 108 explicite pour la première configuration de la Table 107, la confrontation des valeurs déduites de l'estimation analytique et celles où les mouvements convectifs sont calculés numériquement.

La longueur caractéristique utilisée pour la modélisation analytique est définie par l'équation (e353).

Table 108 : Évaluation des coefficients d'échange thermique pour une source dissipant 2W.

	Orientation verticale g = -y			Orientation horizontale g = -z		
Face	$\overline{\boldsymbol{h}}_{N_i}\,(W/m^2K)$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{T_i}\,(W/m^2\,K)$	$\delta\overline{\boldsymbol{h}}_i$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{N_i}\,(W/m^2K)$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{T_i}\,(W/m^2\,K)$	$\delta\overline{\boldsymbol{h}}_i$
Top	2.6	3.3	-26.9%	1.78	2.1	-18.0%
Bottom	2.5	3.3	-32.0%	1.68	2.1	-25.0%
Top	10.1	10.1	0.0%	10.1	10.1	0.0%
Bottom	10.1	10.1	0.0%	10.0	10.1	-1.0%

L'évaluation des coefficients d'échange convectifs pour une mono source de chaleur de dimensions réduites s'avère très optimiste au regard des valeurs numériques, ceci quelle que soit l'orientation de la carte. La corrélation retenue n'est clairement pas adaptée à ce cas de figure.

Toutefois, on constate que les transferts de chaleur par rayonnement thermique vont régir le comportement thermique de la carte et de ce fait minimiser l'erreur liée à la surévaluation des échanges convectifs. En définitive, les prédictions du modèle analytique lorsque que le comportement de la carte est observé pour des conditions de laboratoire sont suffisamment précises.

D'autre part, la comparaison des échanges d'une carte en position horizontale vis à vis de la position verticale fait apparaitre pour la simulation numérique un ratio de l'ordre de 0.675. Cette valeur est inférieure à celle retenue par Yovanovitch.

Cette analyse du comportement thermique de sources enterrées a été complétée en considérant trois sources de chaleur (en jaune), lesquelles sont schématisées sur la Figure 184.

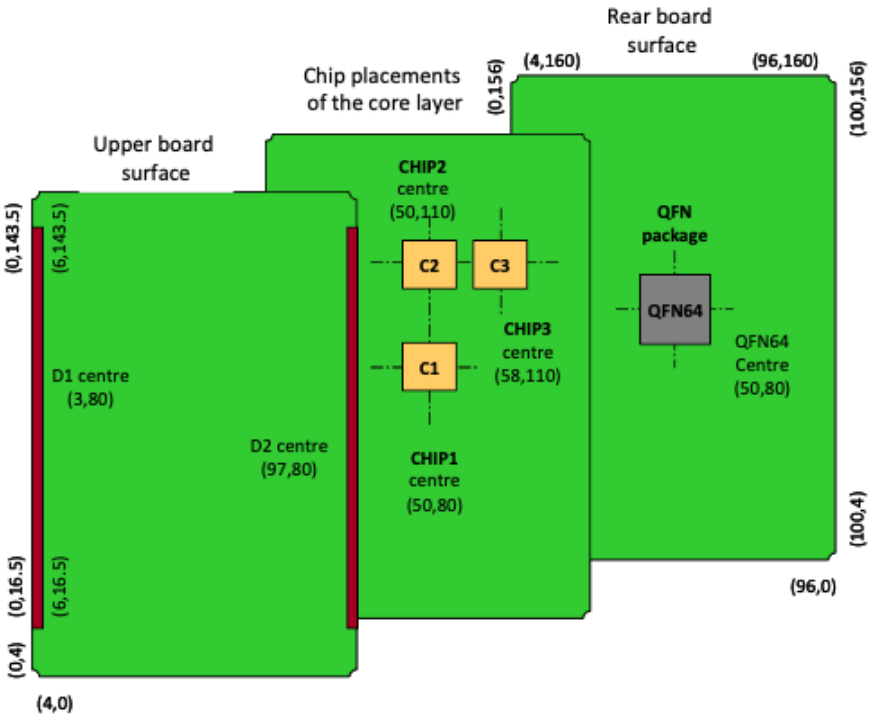


Figure 184 : Présentation du modèle analytique étudié

Les résultats liés à la superposition des trois profils thermiques de ces sources sont fournis en annexe P23. Ceux-ci montrent que les écarts de prédiction constatés sur leur température centrale et moyenne ne dépassent pas 1% d'erreur.

La Table 109 détaille, quant à elle, les valeurs des coefficients d'échange advectifs issues de cette analyse. L'estimation s'avère beaucoup plus conforme aux résultats numériques.

Table 109 : Évaluation des coefficients d'échange thermique pour 3 sources actives

	Orientation verticale g = -y			Orientation horizontale g = -z		
Face	$\overline{\boldsymbol{h}}_{N_i}\,(W/m^2K)$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{T_i}\,(W/m^2\,K)$	$\delta\overline{\boldsymbol{h}}_i$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{N_i}\,(W/m^2K)$	$\overline{\boldsymbol{h}}_{T_i}\,(W/m^2\,K)$	$\delta\overline{\boldsymbol{h}}_i$
Top	4.1	4.5	-9.8%	2.60	2.8	-7.7%
Bottom	4.1	4.4	-7.3%	2.50	2.8	-12%
Top	10.6	10.3	2.8%	10.6	10.4	1.9%
Bottom	10.6	10.4	1.9%	10.5	10.5	0.0%

D'autre part, l'influence de ces semi-conducteurs enterrés sur un composant monté en surface (QFN64 Figure 184) est abordée dans l'article [42].

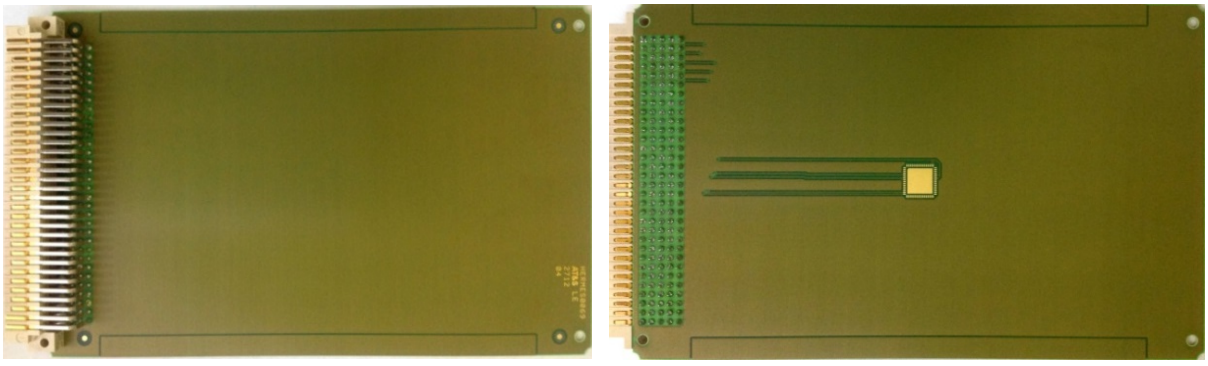
Cet article traite également du cas d'un transfert par conduction vers deux puits thermiques positionnés sur les flancs du substrat (zones en rouge).

In fine, cette première communication scientifique introduit plusieurs aspects destinés à parfaire la modélisation d'une carte électronique, à savoir :

- La modélisation de sources de chaleur encastrées entre deux couches anisotropes.
- La multi-location de sources de chaleur surfaciques encastrées ou non.
- La prise en compte des points d'appui d'une structure plus froide.
- La considération de deux réseaux nodaux figurant de multiples composants électroniques.

Indubitablement, ce premier modèle analytique offre l'opportunité d'appréhender aisément l'influence du positionnement potentiel de multiples semi-conducteurs au cœur d'un substrat.

Parallèlement à l'établissement de ce modèle analytique, la fabrication d'un véhicule de test est lancée. Présenté en Figure 185, celui vise à valider le concept d'enfouissement de puces actives.



Vue de la face supérieure Vue de la face inférieure

Figure 185 : Véhicule de test dit HERMES

Ce dernier est constitué de trois sources internes de chaleur identiques (Figure 184) pouvant être activées, simultanément ou non. Le report d'un composant factice est aménagé sur sa face inférieure.

Les trois sources sont localisées au centre d'un substrat dénommé « core layer » d'une épaisseur de 0.45mm. Ce dernier est assemblé entre deux substrats multicouche dont la constitution est identique.

Chacune des puces thermiques encastrée est un motif constitué de huit couples de diodes Schottky fournies par la société Rohm (référence RB085B-40) dans le cadre de ce projet Européen.

La surface définitive de la puce, en silicium, est de 7.15mm par 7.15mm et son épaisseur est de

0.26mm. Celle-ci est dépeinte en Figure 186.

Les douze diodes périphériques ($D_{1,1}, D_{1,2}$ ….) sont destinées à assurer l'application d'une puissance contrôlée. Les quatre diodes centrales ($D_{3,3}, D_{4,1}$ ….) sont quant à elles dédiées à la mesure de la température interne vue par les puces enterrées.

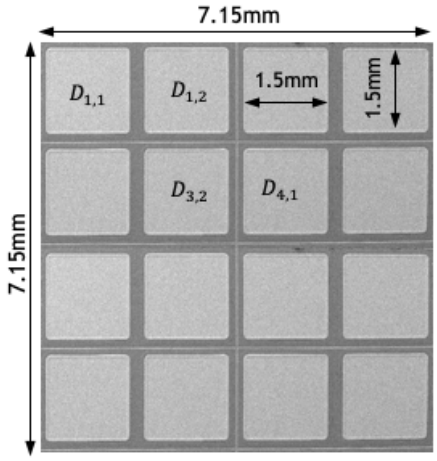


Figure 186 : Puce thermique du support de test HERMES

Le principe d'interconnexion des diodes des trois puces thermiques est décrit en Figure 187.

Ainsi, un stratifié plaqué d'une couche de cuivre est creusé pour accueillir la puce. La cavité est ensuite remplie de résine époxyde puis recouverte d'un feuillard de cuivre. Un perçage laser est opéré pour relier les plots de connexion de la puce aux deux plans de cuivre. Une recharge électrolytique en cuivre finalise la fabrication de la couche interne désormais active.

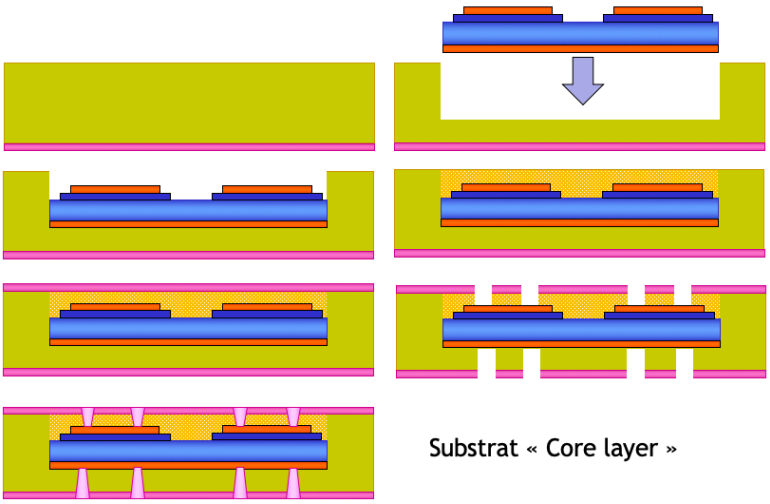


Figure 187 : Principe de fabrication de la « Core layer » du support de test HERMES

L'inconvénient majeur des diodes de chez Rohm est de posséder un point de masse commun (bas de la puce) ce qui ne permet pas de dissocier le circuit d'alimentation de celui de la mesure. Dès lors, la valeur du courant continu de l'alimentation interfère sur la précision de la mesure.

En conséquence, la comparaison des prévisions des modèles analytique et numérique vis-à-vis des données expérimentales montre toujours un écart inhérent à ce choix de puce.

La comparaison du modèle analytique vis-à-vis des données expérimentales a été présenté à la conférence ITHERM [29] en 2017. Cet article propose également de modéliser la source sous une forme volumique. Une nouvelle approche qui sera abordée plus loin dans cette thèse (K5.5).

Toutefois, ce premier modèle considère que tous les semi-conducteurs sont implantés au sein d'une

seule et même couche. Une restriction difficilement concevable pour un concepteur de carte.

K5.3. Modélisation de multiples couches internes actives

Suite aux travaux exploratoires menés sur le projet HERMES [11] et sur son véhicule de test, la limitation à deux couches ayant des conductivités thermiques effectives distinctes est repoussée.

Comme évoqué, le regroupement des couches au moyen d'un matériau homogène orthotrope ne permet pas de distinguer l'impact de la proximité des couches conductrices sur les sources de chaleur. Il est clair qu'une description détaillée de la juxtaposition des couches du substrat apparait incontournable pour parfaire l'optimisation des transferts thermiques.

Aussi, la définition du modèle analytique est étendue pour traiter de nombreuses sources pouvant être localisées entre n'importe quelle couche d'un substrat ayant de multiples couches (Figure 50).

L'écriture d'expressions récursives pour calculer les coefficients des séries de Fourier propres à chacune des couches est établie en 2014.

Les formules de récurrence dérivées pour accentuer le nombre de couches du substrat sont alors :

- Si le profil calculé est en dessous de la source encastrée ($0 \leq z \leq z_S$) :

$$\omega_{EB_{m,n,j}}(z) = \frac{N_{EB_{m,n,j}}}{D_{EB_{m,n}}} \left[E_{m,n,j}\left(z - z_{j-1}\right) + \frac{\chi_{U_{m,n,j}}}{k_{Z_j}} F_{m,n,j}\left(z - z_{j-1}\right) \right] e^{(z-H_B)\, r_{m,n,j}} \tag{e434}$$

- A l'opposé si le profil est au-dessus de la source encastrée ($z_S \leq z \leq \mathrm{H_B}$) :

$$\omega_{EU_{m,n,j}}(z) = \frac{N_{EU_{m,n,j}}}{D_{EU_{m,n}}} \left[E_{m,n,j}\left(z_j - z\right) + \frac{\chi_{B_{m,n,j}}}{k_{Z_j}} F_{m,n,j}\left(z_j - z\right) \right] e^{-(z+H_B)\, r_{m,n,j}} \tag{e435}$$

La définition des autres termes est explicitée ci-après.

$$N_{EU_{m,n,j}} = \frac{e^{-\,r_{m,n,s+1}\,\iota_{s+1}}}{e^{-r_{m,n,j}\,(z_j+H_B)}} \prod_{k=j}^{s+2} \frac{2\, e^{-\,r_{m,n,k}\,\iota_k}}{E_{m,n,k}(\iota_k) + \left[\chi_{B_{m,n,k}}/k_{Z_k}\right] F_{m,n,k}(\iota_k)} \tag{e436}$$

$$D_{EU_{m,n}} = \left[\chi_{U_{m,n,s+1}} + \chi_{B_{m,n,s}}\right] \left[E_{m,n,s+1}(\iota_{s+1}) + \left[\chi_{B_{m,n,s+1}}/k_{Z_{s+1}}\right] F_{m,n,s+1}(\iota_{s+1})\right] \tag{e437}$$

$$N_{EB_{m,n,j}} = \frac{e^{-\,r_{m,n,s}\,\iota_s}}{e^{\,r_{m,n,j}\,(z_{j-1}-H_B)}} \prod_{k=j}^{s-1} \frac{2\, e^{-\,r_{m,n,k}\,\iota_k}}{E_{m,n,k}(\iota_k) + \left[\chi_{U_{m,n,k}}/k_{Z_k}\right] F_{m,n,k}(\iota_k)} \tag{e438}$$

$$D_{EB_{m,n}} = \left[\chi_{U_{m,n,s+1}} + \chi_{B_{m,n,s}}\right] \left[E_{m,n,s}(\iota_s) + \left[\chi_{U_{m,n,s}}/k_{Z_s}\right] F_{m,n,s}(\iota_s)\right] \tag{e439}$$

Les travaux sur la comparaison du comportement thermique d'un substrat à six couches à celui d'un monobloc possédant une conductivité thermique effective orthotrope sont présentés à la conférence THERMINIC-2014 [19] puis publiés dans la revue internationale « Solid-State Electronics » [44].

Ceux-ci mettent en évidence l'erreur significative liée au regroupement de couches conductrice (cuivre) et diélectrique (résine) dans la modélisation d'un bloc unique, en particulier lorsque que la taille des composants électroniques est très petite au regard de celle de la carte qui l'accueille.

L'incertitude sur la prédiction de la température d'une source est également affectée par la proximité d'autres sources chaleur actives, aussi cette simplification est à proscrire.

D'autre part, l'analyse reprend aussi le débat sur la manière d'appréhender la discontinuité des traces en cuivre véhiculant les signaux électroniques de la carte et de l'impact de leur isolation électrique par un matériau peu conducteur de la chaleur.

La loi de mélange usuelle de premier ordre, sur les conductivités thermiques effectives, supposant les deux phases arrangées parallèlement est révisée par une fonction sigmoïde, laquelle tient compte du

modèle de second ordre de Maxwell. Ce modèle est basé sur l'hypothèse d'une répartition aléatoire de petits volumes de cuivre discontinus au sein d'une couche signal.

En fait, cette fonction en « S » conjugue les deux modèles afin d'appréhender statistiquement toutes les configurations des pistes de cuivre en fonction de leur pourcentage de métallisation.

K5.4. Prise en compte de transferts thermiques intercouches locaux

En 2015, une publication [45] est faite dans la revue scientifique « *Thermal Science* » sur les travaux relatifs à une approche analytique capable de modéliser succinctement des zones de vias thermiques dans les couches diélectriques constitutives d'une carte électronique.

Cette approche est destinée à quantifier rapidement leur impact sur le comportement thermique d'une source de chaleur. Le modèle analytique se base sur la modélisation de sources de chaleur surfaciques, Figure 188, disposées de part et d'autre d'une couche diélectrique (zones vertes).

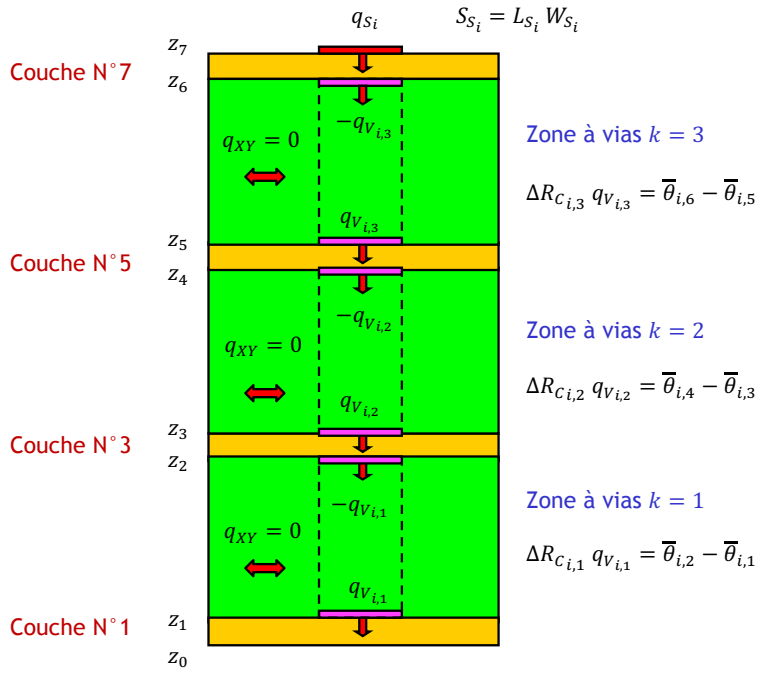


Figure 188 : Principe de modélisation de l'influence des zones de vias

Ces sources de chaleur fictives vont permettre d'extraire et d'appliquer une puissance relative à l'amélioration des conditions du transfert de chaleur dues à la présence d'une zone locale dotée d'un jeu de vias thermiques (Figure 181).

Le transfert thermique latéral (q_{XY}) de cette zone locale $(L_{S_i}\, W_{S_i})$ vers le reste de la couche diélectrique est supposé négligeable en raison de la faible conductivité thermique de la résine. La résistance thermique liée à cette couche est alors considérée unidirectionnelle.

Celle-ci est ensuite ajustée pour correspondre à la résistance thermique effective (R_v) d'un ensemble de n_v vias, en cuivre (k_v) et d'une épaisseur (W_v).

$$R_{V\,i,k} = \frac{(z_{2k} - z_{2k-1})}{\left[k_r + \left\{(k_v - k_r)\, n_v\, \pi\, W_v\, (D - W_v)/L_{S_i}\, W_{S_i}\right\}\right] L_{S_i}\, W_{S_i}} \quad avec\ \ 1 \le k \le (nC - 1)/2 \qquad \text{(e440)}$$

Ceux-ci sont assumés entourés et remplis de résine (k_r)

L'ajustement est opéré simultanément sur l'ensemble des couches diélectriques de la carte en utilisant pour la définition de la résistance thermique d'une couche diélectrique, l'expression :

$$\Delta\overline{R}_{C\,i,k} = \frac{1}{L_{S_i}\,W_{S_i}} \sum_{m=0}^{M_i} \sum_{n=0}^{N_i} A_{m,i}\,B_{n,i}\,\overline{A}_m(x_I, L_{S_i})\,\overline{B}_n(y_I, W_{S_i})\left[\omega_{m,n,i}(z_{2k}) - \omega_{m,n,i}(z_{2k-1})\right] \quad \text{(e441)}$$

Il en découle le système linéaire suivant :

$$\sum_{k=1}^{(nC-1)/2} \left(\Delta R_{C\,i,k} + I_{(nC-1)/2}\,R_{V\,i,k}\right) q_{V\,i,k} = \overline{\theta}_{i,2k} - \overline{\theta}_{i,2k-1} \quad avec\ 1 \le k \le (nC-1)/2 \quad \text{(e442)}$$

Sa résolution s'effectue à partir de l'opérateur des moindres carrés pour déterminer de manière itérative l'ensemble des puissances des sources de chaleur.

$$\left[\overline{\boldsymbol{R}}_C\right]_{\boldsymbol{i}}\,[q_V]_i = \left[\Delta\overline{\theta}\right]_i \;\rightarrow\; [\widehat{q_V}] = \left(\left[\left[\overline{\boldsymbol{R}}_C\right]_{\boldsymbol{i}}\right]^T \left[\left[\overline{\boldsymbol{R}}_C\right]_{\boldsymbol{i}}\right]\right)^{-1} \left[\left[\overline{\boldsymbol{R}}_C\right]_{\boldsymbol{i}}\right]^T \left[\Delta\overline{\theta}\right]_i \quad \text{(e443)}$$

Il est alors possible de connaitre la puissance successivement transférée aux multiples plans métalliques et de juger de l'efficacité de la présence de vias thermiques dans toutes les couches diélectriques.

La Table 110 reprend les résultats de la comparaison d'un modèle numérique détaillé ayant 25 vias vis-à-vis de la modélisation de multiples sources encastrées au sein du substrat. Ce dernier est constitué de 7 couches en accord avec la représentation donnée en Figure 188.

Le cas étudié est une source de chaleur carrée de 5mm de côté. Celle-ci est montée sur un substrat ayant une longueur de 75mm, une largeur de 100mm et une épaisseur de 1.6mm. Celui-ci est placé dans une ambiante dont la température est fixée à 85°C. Cette source de petite dimension dissipe 0.5W [45].

Table 110 : Comparaison des températures centrales et moyennes d'une zone interconnectée

Couche i	$q_i\,(W)$	$\boldsymbol{T}_{N_{Z_i}}\,(°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{Z_i}}\,(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{Z_i}$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{N_{Z_i}}\,(°\boldsymbol{C})$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{T}_{Z_i}}\,(°\boldsymbol{C})$	$\delta\overline{\boldsymbol{T}}_{Z_i}$
z_7	0.496	95.7	96.2	0.52%	95.4	95.3	-0.10%
z_6	-0.479	95.7	96.2	0.52%	95.4	95.3	-0.10%
z_5	0.479	95.3	95.7	0.42%	94.8	94.8	<0.05%
z_4	-0.218	95.3	95.7	0.42%	94.8	94.8	<0.05%
z_3	0.218	94.5	94.8	0.32%	93.9	94.1	0.21%
z_2	-0.004	94.5	94.8	0.32%	93.9	94.1	0.21%
z_1	0.004	94.5	94.8	0.32%	93.9	94.1	0.21%
z_0	0	94.5	94.8	0.32%	93.9	94.1	0.21%

La comparaison de l'approche proposée avec la modélisation numérique détaillée de vias thermiques disposés sous un composant électronique démontre la possibilité de rapidement qualifier la réduction de température liée à ce type de diffusion de la chaleur vers les couches métalliques du substrat.

La Table 110 fournit également l'efficacité du transfert vers les plans ayant un fort de taux de cuivre, ici les couches 5 et 3. Ainsi, la totalité de la puissance dissipée par le composant est drainée par ces deux couches. L'optimisation de la disposition des couches métalliques au sein du substrat est par conséquent facilitée.

D'autre part, le modèle autorise la prise en compte de configurations variées de vias ou de micro-vias.

K5.5. Modélisation d'une source volumique de chaleur enterrée au sein d'un substrat

L'hypothèse d'une source surfacique est contestable. Aussi de nouveaux modèles 2, 3 et n couches sont développés pour tenir compte d'une dissipation cette fois volumique au sein d'une couche donnée.

Dès lors, la résolution du modèle analytique d'un substrat à multiples couches ($n = j$) nécessite de considérer un modèle dépendant de cette source volumique, tel que :

$$k_{x_k}\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}+k_{y_k}\frac{\partial^2 T_k}{\partial y^2}+k_{z_k}\frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2}+\ddot{q}=0 \quad si\ j=k \tag{e444}$$

$$k_{x_j}\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2}+k_{y_j}\frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2}+k_{z_j}\frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2}=0 \quad pour\ j\neq k \tag{e445}$$

Pour expliciter la démarche à suivre, la résolution d'un modèle analytique constitué de 3 couches est donnée en annexe P24. Celui-ci suppose que les surfaces latérales ne participent pas à l'échange thermique, en raison de la faible épaisseur du substrat au regard de ces surfaces supérieure et inférieure de la carte, une condition formulée en (e258).

La principale difficulté mathématique de ce modèle est la résolution d'une équation transcendante (e661) dont la résolution a été abordée au paragraphe K3.3. La validation de ce modèle a été réalisée par Brice Rogié sur le cas du projet HERMES[11]. Les travaux sur les sources considérées surfaciques sont repris en supposant, cette fois, l'encastrement au sein d'une carte électronique, rectangulaire ou carrée, d'une source ou plusieurs de chaleurs volumiques parallélépipédiques destinées à simuler l'intégration de composants passifs ou de puces actives nues.

Les résultats de cette étude sur la modélisation analytique d'une ou plusieurs sources volumiques enterrées dans un substrat monocouche anisotrope sont synthétisées dans un article inscrit dans les actes de la conférence internationale EUROTHERM-2016 [26].

La comparaison des prédictions de ce modèle analytique « grossier » vis-à-vis des résultats obtenus au moyen d'un modèle numérique très détaillé de la carte démontre que l'approche analytique est suffisante pour identifier correctement l'influence de ces sources volumiques internes sur les composants électroniques montés en surface.

L'extension de ce modèle tri-couches à un nombre plus conséquent est exposé dans le second chapitre de la thèse de Brice Rogié [56] et dans l'article publié en 2018 [53].

En conséquence, la prise en compte de multiples sources de chaleur sous une forme volumique est envisageable au sein de plusieurs couches diélectriques d'un substrat industriel.

K6. Au-delà de la modélisation des substrats

Naturellement, les solutions analytiques développées pour la modélisation des substrats à multiples couches sont aisément applicables à d'autres problématiques où un pré-dimensionnement thermique est nécessaire. Deux exemples sont illustrés ci-après.

Le premier concerne la modélisation d'un concept de structure composite capable de drainer plus efficacement la chaleur vers un puits thermique.

Le second cas décrit les possibilités d'une modélisation simplifiée d'un composant électronique en reprenant la modélisation d'une source de chaleur volumique P24.

K6.1. Modélisation d'un drain thermique à partir du modèle à multiples couches

La modélisation analytique de capots ou d'embases à forte conductivité thermique est étudiée.

L'objectif visé est d'obtenir des performances thermiques supérieures à celle d'une structure en cuivre tout en conservant la légèreté de l'aluminium. La solution envisagée est l'encapsulation d'un matériau fragile à base de graphite pyrolytique recuit dans une structure en aluminium.

Cette structure composite à hautes performances thermiques est décrite sur la Figure 189

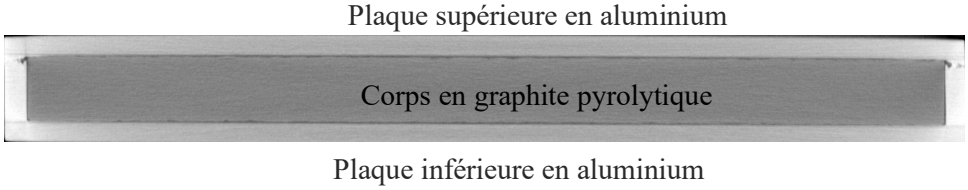


Figure 189 : Vue en coupe d'un drain en Annealed Pyrolytic Graphite (APG)

Le matériau envisagé est anisotrope. En fonction de son traitement thermique, il offre une conductivité thermique longitudinale pouvant être en théorie quatre fois supérieure à celle du cuivre.

Ainsi, les valeurs des conductivités thermiques du matériau sélectionné sont estimées à 1600W m^{-1} K^{-1} et à 8W m^{-1} K^{-1} respectivement pour l'axe longitudinal (k_{XY}) et pour l'axe transversal (k_Z).

Cette attractive perspective pour drainer la chaleur vers un puits thermique est toutefois pénalisée par une très faible conductivité thermique transversale liée à l'orientation de sa structure cristalline. Dès lors, la diffusion d'une source de chaleur surfacique s'avère fortement contrecarrée par rapport aux matériaux conventionnels, tels que le cuivre ou l'aluminium.

D'autre part, l'encapsulation de ce matériau pose la problématique des contacts entre celui-ci et son enveloppe de protection structurelle. Ceux-ci ne peuvent être supposés parfaits, loin de là.

Aussi, le modèle analytique d'une source sur un substrat à multiples couches doit être amendé afin de prendre en compte ces résistances thermiques intercouches, dites R_{IL_j}.

$$-k_{z_j}\left.\frac{\partial\theta_j(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=z_j}=\left[\theta_j(x,y,z)\big|_{z=z_j}-\theta_{j+1}(x,y,z)\big|_{z=z_j}\right]{R_{IL_j}}^{-1} \qquad \text{(e446)}$$

Les formulations du modèle analytique font l'objet de plusieurs articles [21]-[24], seules les modifications apportées aux fonctions de récurrence sont reprises ci-après.

Ainsi pour tout j compris en 1 et $nC-1$:

$$\chi_{U_{m,n,j+1}}=\frac{k_{Z_j}\left(r_{m,n,j}\right)^2F_{m,n,j}(\iota_j)+\chi_{U_{m,n,j}}E_{m,n,j}(\iota_j)}{\left[k_{Z_j}\left(r_{m,n,j}\right)^2F_{m,n,j}(\iota_j)+\chi_{U_{m,n,j}}E_{m,n,j}(\iota_j)\right]R_{IL_j}+E_{m,n,j}(\iota_j)+\left[\chi_{U_{m,n,j}}/k_{Z_j}\right]F_{m,n,j}(\iota_j)} \qquad \text{(e447)}$$

$$\chi_{B_{m,n,j}}=\frac{G_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})}{G_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})\,R_{IL_j}+E_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})+\left[\chi_{B_{m,n,j+1}}/k_{Z_{j+1}}\right]F_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})} \qquad \text{(e448)}$$

$$Avec\ \ G_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})=k_{Z_{j+1}}\left(r_{m,n,j+1}\right)^2F_{m,n,j+1}(\iota_{j+1})+\chi_{B_{m,n,j+1}}E_{m,n,j+1}(\iota_{j+1}) \qquad \text{(e449)}$$

Si la valeur de la résistance thermique d'interface (R_{IL_j}) est nulle, on retrouve les expressions des fonctions de récurrence (e390) et (e391).

Il est implicite que ce modèle est en mesure de prendre en compte plusieures sources et puits de chaleur pouvant avoir des formes variées.

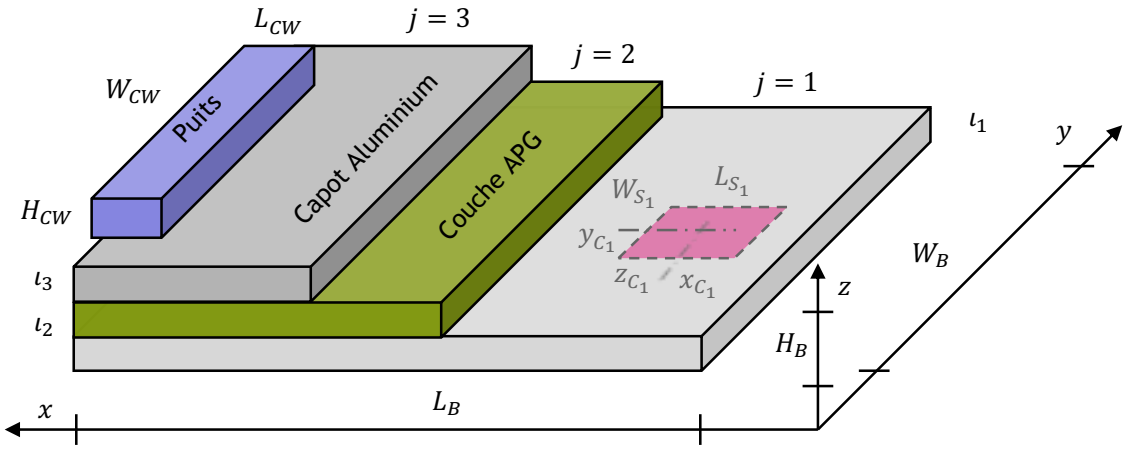


Figure 190 : Définition du modèle analytique proposé pour la structure APG

Dorénavant, le transfert thermique est lié à la qualité du contact thermique entre les trois couches constitutives du drain thermique, comme l'explicite la Figure 191.

Celle-ci est inhérente au procédé de fabrication et difficilement quantifiable.

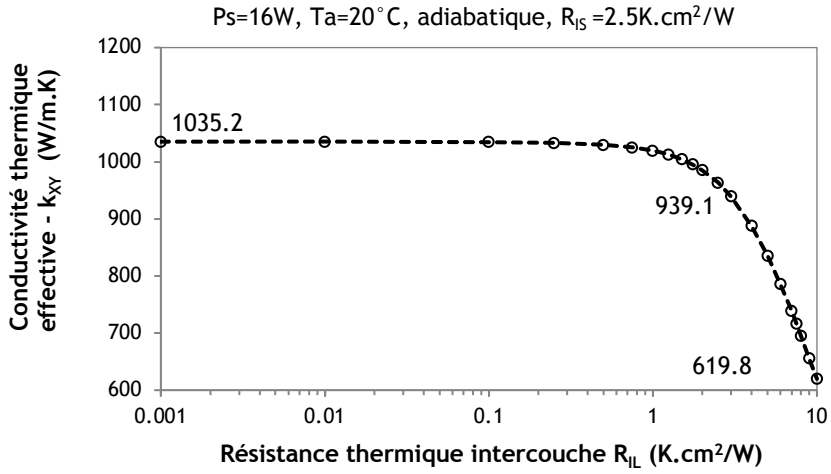


Figure 191 : Influence de la qualité du contact intercouches

Le cas exposé est détaillé dans l'article présenté lors des conférences ITHERM [24] et THERMAM [27] en 2016. L'épaisseur du drain est de 3.2mm d'épaisseur et celle du graphite pyrolytique de 2mm. Cette analyse révèle que l'adjonction de deux flancs en aluminium, ici de 0.6mm d'épaisseur, réduit nettement la capacité à conduire la chaleur dans le plan longitudinal.

Ce phénomène est fortement amplifié si la qualité du contact n'est pas maitrisée. Il est clair qu'un choix a priori va conduire à de mauvaises orientations de conception.

Un autre aspect est le dimensionnement des épaisseurs à mettre en œuvre pour disposer des performances optimales. Une analyse d'un spectre valeur a été conduite dans l'étude [50] publiée dans la revue scientifique « International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow ».

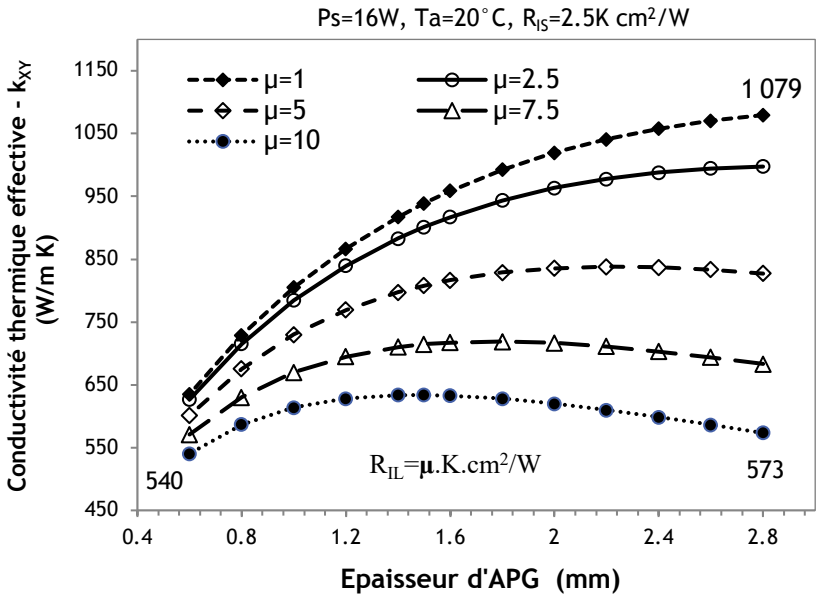


Figure 192 : Influence de la qualité du contact intercouches

L'utilisation du modèle analytique permet de statuer rapidement sur le fait que la réduction de l'épaisseur du matériau encapsulé pénalise les performances thermiques du drain.

De manière à valider plus exactement son ordre de grandeur une campagne de mesures a été menée sur un ensemble de véhicule de test (Figure 189). A l'issue de ces tests, la valeur de la résistance thermique inter-couche a été estimée proche de 10cm² K W^{-1}.

La procédure d'identification de cette valeur est exposée dans l'article [21], celle-ci s'appuie sur la modélisation de multiples zones circulaires, tout au long de la structure, dont les températures sont corrélées aux valeurs mesurées sur la paroi. La confrontation des prédictions analytiques et numériques est également commentée.

Ces travaux exploratoires ont mis en lumière la nécessité de maitriser le procédé d'assemblage pour obtenir un drain thermique possédant des performances supérieures aux procédés conventionnels. Celui-ci a également permis de statuer sur l'utilisation de ce procédé. Il apparaît que celui-ci ne peut être retenu pour les capots métalliques devant à avoir une faible épaisseur, typiquement en deçà de 2 millimètres.

Plus loin, l'implémentation de ce modèle a permis d'analyser l'impact de la présence de ces résistances thermiques intercouches au sein d'une carte électronique conventionnelle. Ces résistances sont usuellement négligées pour l'estimation des caractéristiques thermiques effectives du substrat et des températures vues par les composants.

L'influence des résistances thermiques intercouches est surtout sensible quand la taille de la source est réduite, par exemple 2.5mm par 2.5mm. Pour une source de 10mm par 10mm, l'influence est négligeable pour des valeurs de résistance thermique variant de 0.003 $cm^2\ K\ W^{-1}$ à 1.0 $cm^2\ K\ W^{-1}$.

Des mesures de températures intrinsèques sont à envisager de manière à valider la qualité du contact thermique entre les couches métallisées et diélectriques.

K6.2. Modélisation d'un composant à partir du modèle à multiples couches

Une nouvelle approche analytique est lancée en considérant à nouveau la modélisation volumique d'une source de chaleur interne dessinée, en rose, au sein d'une structure hétérogène composée de trois couches, comme l'explicite la Figure 193.

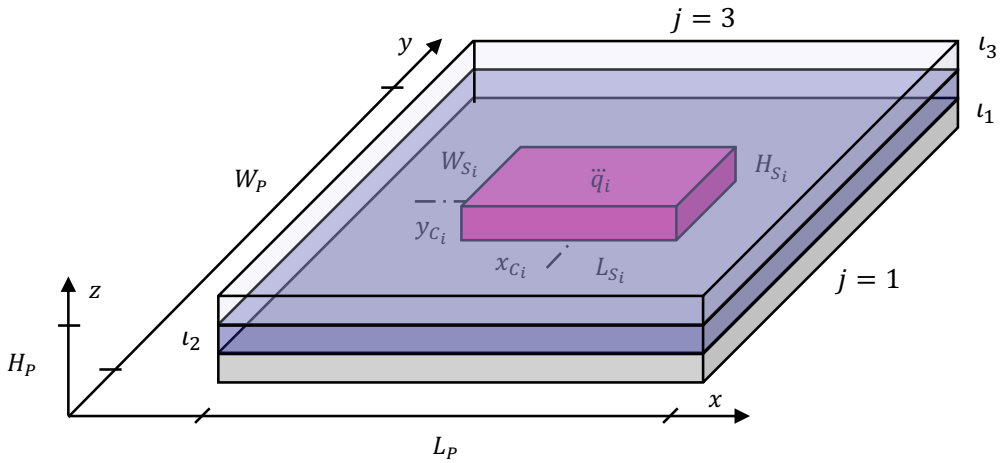


Figure 193 : Définition du modèle analytique proposé pour un composant électronique

L'idée directrice est de pouvoir améliorer la représentativité d'une modélisation simplifiée d'un composant électronique en ajustant à partir d'un jeu de données expérimentales d'une part les propriétés thermiques des couches retenues et d'autre part les dimensions du semi-conducteur.

Pour cela, la température du (ou des) semi-conducteur protégé par un boitier plastique est supposée constante. La résolution du modèle analytique nécessite de considérer les conditions aux limites (e317) et (e318). Les coefficients α_m et β_n sont alors issus de la résolution des équations transcendantes (e319) et (e320). Les résultats obtenus sont débattus dans la thèse de Brice Rogié [56].

D'autre part, celui-ci aborde sur cet exemple la modélisation analytique dans le cas où l'activation de la source de chaleur varie dans le temps de manière à pouvoir ajuster plus finement ce nouveau type de modèle de composants électroniques.

D'autres formes de composant ont été explorées, comme le cas d'un cylindre soumis à une source de chaleur volumique (P21). Une analyse, toujours réaliste, du comportement thermique d'une carte électronique en phase amont de sa conception, est alors disponible.

K7. Bilan des avancées réalisées dans l'établissement de modèles analytiques

Les diverses formulations analytiques établies dans le cadre de ces recherches fournissent une solution rapide pour évaluer le profil de température d'une carte soumise à de multiples sollicitations liées à la présence de composants électroniques en tenant compte des multiples couches de sa structure.

Le modèle analytique développé sur la base des séries de Fourier possède les limites et les capacités suivantes :

- Les transferts thermiques instationnaires ne sont pas supportés mais peuvent être envisagés,
- Les températures locales ou moyennes, de sources multiples superposées, sont calculables,
- La forme de la carte est obligatoirement parallélépipédique,
- Les matériaux constitutifs des diverses couches d'une carte peuvent être orthotropes,
- Les faces supérieure et inférieure de la carte sont soumises à un coefficient d'échange uniforme,
- Le coefficient d'échange est distinct, ou non, pour chacune de ces surfaces,
- Une température ambiante distincte peut être imposée,
- Une condition de Fourier ou de Neumann peut être sélectionnée pour les faces latérales de la carte,
- Le contact thermique inter-couche peut être assumé parfait ou non,
- Les sources de chaleur sont susceptibles d'avoir des formes triangulaires, isocèles, carrées, rectangulaires, cylindriques ou annulaires,
- Une orientation quelconque d'une source de chaleur carrée ou rectangulaire est possible,
- L'établissement de formules de récurrence pour calculer les coefficients des séries de Fourier de multiples couches sont exprimées,
- Des sources de chaleur surfaciques sont applicables à n'importe quelle couche de la carte,
- Des sources volumiques internes positionnées dans une couche du substrat sont modélisables,
- Le couplage d'un ou plusieurs réseaux nodaux de composants électroniques est considéré,
- Le couplage avec une structure externe parallélépipédique est envisageable,

L'utilisation des séries de Fourier a permis de dissocier les différents paramètres intervenant dans le calcul de profils thermiques superposés, offrant la flexibilité de pouvoir les adapter indépendamment aux futurs besoins des dernières innovations technologiques.

Il est à noter également que l'ensemble des modèles établis a fait l'objet d'une validation expérimentale, en s'appuyant sur la fabrication de plusieurs véhicules de test.

Notre objectif visant à proposer, aux acteurs de la conception, une approche en mesure de fournir une prédiction réaliste de la température d'un grand nombre de composants sur une carte complexe est atteint comme le démontrent les exemples commentés dans cette thèse.

Force est de constater qu'une approche pragmatique du comportement thermique d'une carte électronique est toujours problématique pour beaucoup de sociétés.

K8. Programmation des futurs travaux envisagés

La modélisation analytique dédiée aux cartes électroniques est devenue un outil indispensable pour juger rapidement de la criticité du comportement de leur composant et de la nécessité d'avoir recours, ou non, à des modélisations numériques très détaillées de leur structure.

La densification permanente des cartes électroniques exige d'étendre les capacités de leur modélisation, celles-ci passent par l'établissement continu d'approches analytiques capables de considérer :

- Une représentation suffisamment « réaliste » des échanges convectif et radiatif reste à mener expérimentalement pour parfaire les prédictions de l'approche analytique.
- La présence de mini carte électronique dite « mezzanine » est à investiguer en particulier l'influence des échanges convectif et radiatif dans l'espace les séparant. Le couplage sur une zone

spécifique de cette carte mezzanine au substrat d'une carte électronique reste également à expérimenter.

- L'effet joule dans les pistes des différentes couches d'une carte électronique. L'expression de la dissipation liée à la circulation unidirectionnelle d'un courant dans une piste d'une carte électronique est à mettre en œuvre.
- La problématique de traiter des formes de cartes pouvant être exotiques est à analyser. Une première approche par le couplage de plusieurs éléments de formes parallélépipédiques peut être initiée.
- Le couplage des équations de la chaleur et de Navier-stockes en utilisant les séries de Fourier est à approfondir. Il est également possible d'imaginer une fonction corrective des coefficients d'échange thermiques uniformes imposés à la carte.

Enfin, la modélisation des transferts thermiques temporels au sein d'un substrat peut s'avérer à terme, un point bloquant pour la conception des cartes électroniques accueillant par exemple des composants actifs en leur sein.

CONCLUSION

Ce mémoire décrit les étapes de ma recherche et synthètise ses avancées du travail que j'ai mené pendant plus d'une décénie. Il présente des voies que j'ai exploré et celles que j'ai en définitive retenues afin de parfaire la modélisation des cartes électroniques et de leurs nombreux composants sous une forme réduite nodale.

Ainsi, il en résulte que l'accès à la connaissance des contraintes thermiques liées à la dissipation des composants électroniques doit être assuré au moyen de réseaux nodaux possédant de multiples entrées et de multiples sorties, l'objectif étant de représenter le plus fidèlement possible les transferts thermiques intrinsèques d'un ou de plusieurs semi-conducteurs vers les puits thermiques l'avoisinant.

La création des réseaux nodaux doit s'appuyer, pour moi, sur des techniques d'apprentissage supervisé capable de prendre en compte les phénomènes non-linéaires propres aux propriétés des semi-conducteurs et de créer un modèle peu dépendant des conditions appliquées aux frontières. Au moyen de ces modèles comportementaux, il est dès lors possible d'analyser simultanément, avec une précision suffisante, l'évolution de la température la plus sensible de plusieurs composants interagissant les uns sur les autres.

Les techniques d'apprentissage que j'ai étudiées, et celle qui a été retenue, s'inspirent de la nature. Plusieurs algorithmes ont été testés, tels que les algorithmes évolutionnaires, afin de juger de leur capacité à satisfaire de nombreux objectifs d'optimisation, telles que les températures maximales, les températures moyennes ou les flux thermiques aux frontières. Ces algorithmes à base de population s'avèrent performants pour explorer d'une manière itérative non-structurée l'espace des solutions possibles. L'hybridation de ces techniques d'optimisation stochastiques a également été abordée afin d'améliorer les performances de ce type d'algorithmie en termes de temps de résolution et de précision

Outre la détermination des résistances et des capacités de n'importe quel réseau, l'utilisation de ces techniques d'optimisation a permis de mettre en œuvre une identification intelligente de son graphe en délimitant un jeu de surfaces pouvant être considérées comme isothermes.

Les modèles obtenus par cette approche ont été confrontés à des modèles d'ordre réduit issus de techniques purement mathématiques, telle que la méthode d'ajustement des moments. Si ces méthodes de réduction apparaissent plus précises et matures pour des systèmes linéaires, la résolution de système non-linéaire reste à parfaire. D'autre part, les matrices réduites déduites de ces approches présentent des dimensions bien supérieures au regard d'un modal dérivé d'un jeu d'exemples de comportements. De ce fait, il est nécessaire d'optimiser efficacement le couplage de la multiplicité des points d'interconnexion de ces modèles à leur environnement.

In fine, un réseau nodal possédant de multiples entrées-sorties permet d'éviter un ajustement trop étroit des données d'apprentissage souvent préjudiciables à une prédiction fiable pour d'autres conditions.

Bien entendu, cette description détaillée des échanges thermiques entre le composant et son environnement implique également une modélisation pertinente du substrat sur lequel celui-ci est impérativement connecté.

Ainsi, brique par brique, la qualité des prédictions des températures des composants a été accentuée en partant d'une représentation élémentaire d'un substrat sous la forme d'un monobloc isotrope jusqu'à la modélisation de multiples couches orthotropes. Fort de cette avancée, diverses simplifications peuvent être alors envisagées afin d'obtenir, d'une manière plus rigoureuse, le meilleur compromis entre précision et temps de calcul.

Pour la modélisation analytique d'un substrat, mon choix, est basé pour sur la résolution de l'équation de la chaleur au moyen des séries de Fourier et du principe de superposition. Cette approche pragmatique est apparue très flexible pour implémenter progressivement la qualité de la représentativité de la solution développée. Comme relaté dans ce mémoire, brique par brique, un jeu d'expressions est ajouté au modèle précédent sans modifier la structure du calcul des températures des composants sur leur substrat.

L'ensemble des modèles analytiques établis ou des réseaux thermiques dérivés de l'approche stochastique proposée a fait l'objet d'une validation expérimentale en s'appuyant sur la réalisation de nombreux véhicules de test. Cette confrontation des données analytiques et expérimentales à permis de juger de la qualité du couplage des modèles développés.

En conclusion, la définition d'une solution industrielle en mesure de fournir une prédiction réaliste de la température d'un grand nombre de composants sur une carte complexe est dessinée.

Chapitre VI

Références et Annexes

La liste des diverses références mentionnées et des données complémentaires destinées à faciliter l'appropriation par le lecteur des concepts de modélisation déclinés dans ce travail sont ici répertoriées.

Contenu

L. Principaux acronymes 250

L1. Intitulé des conférences 250
L2. Intitulé des projets Européens 250
L3. Intitulé des organismes de recherche 250
L4. Intitulé des sigles 250

M. Nomenclature 251

N. Références externes citées 253

N1. Données technologiques 253
N2. Normalisation pour la caractérisation des composants électroniques 253
N3. Modélisation des composants électroniques 253
N4. Modélisation des cartes électroniques 257

O. Principales publications 259

O1. Brevets 259
O2. Conférences nationales et internationales avec actes et comité de lecture 259
O3. Revues scientifiques internationales avec comité de lecture 261
O4. Thèse de doctorat 262

P. Annexes 263

P1. Descriptif des dimensions caractéristiques de divers composants 263
P1.1. Composant de type « Quad Flat pack No-lead » 263
P1.2. Composant de type « Chip Scale Package » 263
P1.3. Caractéristiques nominales des boitiers CMS des résistances 264
P2. Décomposition nodale d'un boitier « Small Outline » 264
P2.1. Définition de la topologie interne du boitier 264
P2.2. Données indispensables à la création de la constitution interne 265
P2.3. Valeurs géométriques par défaut pour le boîtier 265
P2.4. Topologie du réseau nodal de ce boitier 266

P2.5. Définition des surfaces d'échange du modèle nodal 266
P2.6. Définition des résistances thermiques du réseau nodal 266
P2.7. Définition de la fonction dite « *elliptic* » 267
P3. Définition des résistances thermiques de forme prismatique 267
P4. Approximation d'un réseau par les méthodes d'optimisation directes 268
P4.1. Génération des données 268
P4.2. La méthode du Simplexe (SM) 269
P4.3. La méthode de Levenberg-Marquardt (LMM) 269
P4.4. La méthode de Quasi-Newton (QNM) 270
P4.5. Comparaison des prédictions des 3 méthodes de minimisation de l'erreur 271
P5. Approximation d'un réseau thermique par la méthode « simultanée » 271
P5.1. Méthode Pivot de Gauss 271
P5.2. Méthode de remontée 272
P5.3. Résultat de la méthode de régression linéaire (SM) 272
P5.4. La méthode de régression non-linéaire (QNM) 273
P5.5. La méthode de régression non-linéaire (CGM) 274
P6. Mise en œuvre d'un algorithme génétique 274
P6.1. Initialisation – Choix aléatoire des réseaux 274
P6.2. Évaluation – test des scores 275
P6.3. Sélection - Tri des meilleurs parents 276
P6.4. Création des enfants par croisement 276
P6.5. Formation de la nouvelle génération à évaluer 277
P7. Approximation d'un réseau thermique par les algorithmes génétiques 277
P7.1. Réseau élaboré sur 6 conditions aux limites 277
P7.2. Réseau construit à partir de 7 conditions aux limites 278
P7.3. Comparaison des prédictions des 2 réseaux déduits par l'Algorithme génétique 279
P8. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 via les algorithmes génétiques 279
P8.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites 279
P8.2. État des erreurs maximales sur les 6 nœuds du réseau DELPHI (49-cas) 279
P8.3. Réseau simplifié de type 2R et 3R 280
P8.4. Réseau élaboré sur la base de 38 conditions aux limites 281
P9. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 doté d'une puce AsGa 281
P9.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites 281
P9.2. Qualité de l'ajustement du réseau pour les 49 conditions aux limites 281
P9.3. Validation du réseau pour les 38 conditions aux limites de « test » 282
P10. Approximation du réseau nodal d'un QFN48 282
P10.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites 282
P10.2. Qualité de l'ajustement du réseau pour les 49 conditions aux limites 283
P11. Définition du coefficient de corrélation 283
P12. Variabilité de l'angle de diffusion de la chaleur 283

P13. Fonction de transfert temporel d'ordre 2 284
P14. Expression matricielle de quadripôles usuels 284
P14.1. Quadripôles en π 284
P14.2. Quadripôles en T 285
P15. Table de Tagushi 286
P16. Formulation multi-variable de Tagushi d'une résistance thermique 289
P16.1. Expression du coefficient d'échange des faces latérales du composant 289
P16.2. Estimation du coefficient d'échange au droit de la source 290
P16.3. Estimation du transfert thermique longitudinal au sein du substrat 292
P16.4. Estimation du transfert thermique transversal au sein du substrat 293
P16.5. Calcul de la résistance dite Case-Ambient 295
P17. Principe de l'établissement d'un modèle analytique 297
P17.1. Governing heat conduction equation 297
P17.2. Boundary conditions definition 297
P17.3. Solution of the conventional three-dimensional heat equation: 298
P17.4. Determination of function parameters using orthogonal functions method 301
P17.5. The thermal profiles along z-axis 302
P17.6. Definition of the source geometrical functions 303
P17.7. The final forms of the solutions 303
P18. Pertinence de la modélisation analytique d'un substrat anisotrope 305
P18.1. Influence de la conductivité thermique du substrat 305
P18.2. Coefficient d'échange thermique uniforme 306
P18.3. Coefficients d'échange thermique différenciés 307
P18.4. Conductivités thermiques différenciées sur les trois axes 308
P18.5. Formulation exponentielle 308
P19. Formulation pour les échanges thermiques latéraux 309
P20. Formulation du calcul des propriétés de l'air 310
P20.1. Conductivité thermique 310
P20.2. Viscosité cinématique 310
P20.3. Chaleur spécifique 310
P21. Modélisation d'une source de chaleur cylindrique 310
P22. Caractérisation analytique d'une carte munie d'un capot 311
P23. Multiples sources encastrées 312
P24. Établissement du modèle analytique d'une source volumique dans un substrat 312
P24.1. Governing heat conduction equation 312
P24.2. Boundary conditions definition 313
P24.1. Partial forms of the conventional three-dimensional heat equation: 313
P24.2. Definition of the parameters of each partial solution forms: 314
P24.3. Determination of function parameters using orthogonal functions method 316
P24.1. Definition of the final forms of the solutions 318

L. PRINCIPAUX ACRONYMES

L1. Intitulé des conférences

(1) DAC : Design Automation Conference

(2) ITHERM: Intersociety Conference on Thermal and Thermo-mechanical Phenomena in Electronic Systems

(3) THERMINIC: International workshop on THERMal INvestigations of ICs and systems

(4) EUROSIME: international conference on Thermal, Mechanical and Multi-physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Micro-Systems

(5) SFT: Société Française de Thermique

(6) IMAPS: International Microelectronics Assembly and Packaging Society

(7) SEMI-THERM: SEMI-conductor THERMal management symposium

(8) EUROTHERM: European Thermal-Sciences Conference

L2. Intitulé des projets Européens

(9) DELPHI: Development of Libraries and Physical Models

(10) IPITECH: Innovative PCB Integration Technologies for HDI Boards in Harsh Environment, Euripides project, 06-108, 2007-2010.

(11) HERMES: High-density integration by Embedding chips for Reduced size Modules and Electronic Systems, FP7-ICT project, 224611, 2008-2012.

L3. Intitulé des organismes de recherche

(12) ANRT : Association Nationale de la Recherche et de la Technologie

(13) LTIE : Laboratoire de Thermique Interfaces et Environnement, de Ville d'Avray

(14) LMEE : Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry

(15) LEMTA : Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée de Nancy

L4. Intitulé des sigles

(16) CFD : Computational Fluid Dynamics

(17) MAPDA : Maximum A Posteriori Déconvolution Algorithm

M. NOMENCLATURE

x, y, z	Directions axiales	m
$Z_{m,n}(z)$	Profil thermique suivant l'axe z,	
$Z(t)$	Réponse impulsion du système, impédance du système	°C
f	Fréquence	Hz
T, T_i	Température	°C, K
Θ	Température absolue	K
$\theta, \Delta\theta$	Écart de température	K
Q	Flux thermique	W
q	Densité de flux thermique	W m^{-2}
h, h_S	Coefficient d'échange thermique	W m^{-2} K^{-1}
$\bar{h}$	Coefficient d'échange thermique moyen	W m^{-2} K^{-1}
k, k_0, k_i	Conductivité thermique	W m^{-1} K^{-1}
C	Capacité thermique	$J.K^{-1}$
R, R_x	Résistance thermique	°C W^{-1}, K W^{-1}
$Y, Y_{i,j}$	Conductance thermique	W K^{-1}
L, W, H	Longueur, Largeur, Épaisseur	m
d, D, r	Distance inter-plaque, Diamètre d'un cylindre, Rayon d'un cylindre	m
S	Surface	m^2
t, τ	Temps	s
Δt	Pas de temps	s
U_0	Vitesse d'écoulement du fluide	M s^{-1}
Bi_x	Nombre de Biot rapporté à la longueur caractéristique x	
Nu_x	Nombre de Nusselt rapporté à la longueur caractéristique x	
Ra_x	Nombre de Raleigh rapporté à la longueur caractéristique x	
Pr	Nombre de Prandtl	
J_0, J_1	Fonctions de Bessel	
α_m, β_n	Racine de l'équation transcendantale	
α	Angle	
ρ	Masse volumique	Kg m^{-3}
ν	Viscosité cinématique	m^2 s^{-1}
a	Diffusivité thermique	m^2 s^{-1}
β	Coefficient de dilatation thermique volumétrique	
C_p	Capacité thermique massique	J kg^{-1} K^{-1}
U	Tension électrique aux bornes du système	V
i	Intensité électrique imposée au système	A

δ, δ_i, $\delta_{i,j}$	Fonction de Kronecker $\boldsymbol{\delta(0) = 1 \text{ et } \delta(\neq 0) = 0}$
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\boldsymbol{M^{n \times m}}$	Matrice $\boldsymbol{M}$ à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{m}$ colonnes
$\boldsymbol{M^T}$	Transposée de la matrice $\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{M^{-1}}$	Inverse de la matrice $\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{I_n}$	Matrice identité de taille $\boldsymbol{n\,x\,n}$
$\boldsymbol{M_r}$	Matrice réduite
$\boldsymbol{X^T}$	Transposée du vecteur $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{X_r}$	Vecteur réduit
$\boldsymbol{K_r}$ $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{R})$	Sous-espace de Krylov par blocs de dimension $\boldsymbol{r}$
$\|X\|$	Norme Euclidienne
Tapez une équation ici.	

N. REFERENCES EXTERNES CITEES

La liste des références reprises ci-dessous est non-exhaustive des documents qui ont permis d'étayer cette thèse. D'autres sources sont mentionnées dans les différents articles récapitulés dans le paragraphe O.

N1. Données technologiques

[R1] A. Singh, S Singh, Evolution of CMOS Technology, International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), Vol. 5 Issue 02, February-2016.

[R2] W. Huang, M. R. Stany, K. Skadron, K. Sankaranarayanan, S. Ghosh, S. Velusamy, Compact Thermal Modeling for Temperature Aware Design, DAC 2004, June 2004, San Diego, California, USA.

[R3] H. Iwai, Roadmap for 22nm and beyond, Microelectronic Engineering, vol. 83, issues 7-9, pp 1520-1528, 2009, 10.1016/j.mee.2009.03.129.

[R4] Thèse Audrey Martin, Étude d'une nouvelle filière de composants sur technologie nitrure de gallium. Conception et réalisation d'amplificateurs distribués de puissance large bande à cellules cascades en montage flip-chip et technologie MMIC, Université de limoges, N°71-2007, 2010.

[R5] Thèse Lény Baczkowski, Modélisation et caractérisation thermique de transistors de puissance hyperfréquence GaN et conséquences sur la fiabilité de modules radars d'émission/réception en bande X, Université de Lille, N°1022-2012, 2015.

[R6] Thèse Charles TEYSSANDIER, Contribution à la modélisation non-linéaire de transistors de puissance HEMT Pseudo-morphiques sur substrat AsGa : Analyse des effets parasites, Université de Limoges, 2008.

N2. Normalisation pour la caractérisation des composants électroniques

[R7] JEDEC Standard N°51: Methodology for the Thermal Measurement of Component Packages (Single Semiconductor Device), JEDEC solid-state technology association, December 1995.

[R8] JEDEC Standard N°51-2a: Integrated Circuit Thermal Test Method Environmental Conditions—Natural Convection (Still Air), JEDEC solid-state technology association, January 2002.

[R9] JEDEC Standard N°51-3: Low Effective Thermal Conductivity Test Board for Leaded Surface Mount Packages, JEDEC solid-state technology association, August 1996.

[R10] JEDEC Standard N°51-4: Thermal Test Chip Guideline (Wire Bond Type Chip), JEDEC solid-state technology association, February 1997.

[R11] JEDEC Standard N°51-6: Integrated Circuit Thermal Test Method Environmental Conditions—Forced Convection (Moving Air), JEDEC solid-state technology association, March 1996.

[R12] JEDEC Standard N°51-7: High Effective Thermal Conductivity Test Board for Leaded Surface Mount Packages, JEDEC solid-state technology association, February 1999.

[R13] S. H. Ore, W.H. Zhu, W.L. Yuan, N. Suthiwongsunthorn, A new tool development for the thermal design and quick performance evaluation of FBGA devices, 11th International Conference on Electronic Packaging Technology & High Density Packaging, 2010, 10.1109/ICEPT.2010.5582855.

[R14] AFNOR Norme NF C83-241-802 - NF EN 140401-802, Spécification particulière : Résistances couche fixes à faible dissipation CMS Rectangulaires, Avril 2008.

[R15] JEDEC Standard - JESD286-B, Standard for Measuring Forward Switching Characteristics of Semiconductor Diodes, 2000.

[R16] JEDEC Standard – JESD51-A, Thermal Test Chip Guideline – Wire Bound Type Chip, 1997.

N3. Modélisation des composants électroniques

[R17] JEDEC Standard N°15-3: Two-Resistor Compact Thermal Model Guideline, JEDEC solid-state technology association, 2008.

[R18] Bar-Cohen A., Krueger W.B., Thermal Characterization of Chip Packages—Evolutionary Development of Compact Models, IEEE Transactions on Components, packaging and Manufacturing Technology, Part A,

Volume 20, No 4, 1997.

[R19] Lasance C. J. M., Rosten H. I., Vinke H., Weiner K-L., A Novel Approach for the Thermal Characterization of Electronic Parts, Proceedings of the Eleventh IEEE SEMI-THERM Symposium, San Jose, Feb 1995.

[R20] Rosten H., Parry J., Lasance C. J. M., Final Report to SEMI-THERM XIII on the European-Funded Project DELPHI - The Development of Libraries and Physical Models for an Integrated Design Environment, Proceedings of the Thirteenth IEEE SEMI-THERM Symposium, Austin, TX USA, January 28-30, 1997

[R21] Gautier T., Marquis E., Paulet G., Procédé et système de modélisation thermique d'un composant, 1992, références W09211606 - FR9015851.

[R22] Kromann G. B., Thermal Management of a C4/Ceramic-Ball-Grid Array: The Motorola PowerPC 603™ and PowerPC 604™ RISC Microprocessors, Proceedings of the Eleventh IEEE SEMI-THERM, March 1996.

[R23] Aranyosi A., Ortega A., Evans J., Development of Compact thermal Models for advanced Electronic packaging: Methodology and experimental Validation for a Single-Chip CPGA Package, 2000, Inter Society Conference on Thermal phenomena.

[R24] M. N. Sabry, Compact Thermal Models for Electronic Systems, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, 2001, 10.1109/TCAPT.2002.808009.

[R25] E. G. T. Bosch, M.N. Sabry, Thermal Compact Models for Electronic Systems, IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, 2002, 10.1109/STHERM.2002.991341.

[R26] Lagonotte P., Eichenlaub Y., Réseaux électrocinétiques et algèbre linéaire, Revue J3EA, 2006.

[R27] J.C. Smith, D. L. Henderson, A. Ortega · J. DeVoe, A parameter optimization heuristic for a temperature estimation model, Optimization and Engineering, Volume 10, issue 1, pp 19-42, 2008 10.1007/s11081-008-9039-1.

[R28] Thesis of Mohsen Marami: Generation and evaluation of dynamic compact thermal model of electronic packages, University of technology of Teheran, 2007.

[R29] Thèse de Tingting WU, Formalisme des impédances thermiques généralisées application à la caractérisation thermique de parois de bâtiments, Université d'Artois, 2011.

[R30] Barnier N., Brisset P., Optimisation par algorithme génétique sous contraintes, Technique et science informatiques, Volume 18, issue 1, 1999.

[R31] S. K. Tomar, R. Prasad, S. Panda, C. Ardil, Conventional and PSO Based Approaches for Model Reduction of SISO Discrete Systems, World Academy of Science, Engineering and Technology, 2010.

[R32] Clarksean R.L, Torkelson J., The Application of a Genetic Algorithm to develop a Compact Thermal Model, Thermal Challenges in Next Generation Electronic Systems, 2002, edition Joshi & Garimellla, ISBN 90-77017-03-8.

[R33] Raghupathy A. P., Aranyosi A., Maltz W., Ghia K., Ghia U., A Preliminary Study of Optimization Techniques for Compact Thermal Model Development of Multi-Heat Source Components, IMAPS ATW, 2007.

[R34] P. Arunasalam; K. N. Seetharamu; I. A. Azid, Determination of Thermal Compact Model via Evolutionary Genetic Optimization Method, IEEE Transactions on components and packaging technologies, 2005, Vol. 28, issue2, pp 345-352, 10.1109/TCAPT.2005.848538.

[R35] C.W. Chien, Z.R. Hsu, W.P. Lee, Improving the Performance of Differential Evolution Algorithm with Modified Mutation Factor, International Conference on Machine Learning and Computing, 2009.

[R36] Thèse de doctorat, Laetitia Jourdan, Méta-heuristiques pour l'extraction de connaissances : application à la génomique, Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, 2003.

[R37] Thèse de doctorat, Nicolas Durand, Algorithmes Génétiques et autres méthodes d'optimisation appliquées à la gestion de trafic aérien, Institut national polytechnique de Toulouse, Laboratoire d'Optimisation Globale CENA-ENAC, 2004.

[R38] Thèse de doctorat, Wasim Habra, Développement de Modèles Thermiques Compacts en Vue de la Modélisation Électrothermique des Composants de Puissance, Laboratoire d'Analyse et d'Archetière des Systèmes LAAS-CNRS, 2007.

[R39] Thèse de doctorat, Jerzy Piotr Nowakowski, Development of a new electro-thermal simulation tool for RF circuits, Università Degli Studi di Napoli "Federico II", 2008.

[R40] JEDEC Standard N°59: Bond Wire Modelling standard, JEDEC solid-state technology association, June 1997.

[R41] JEDEC Standard N°15-4: DELPHI Compact Thermal Model Guideline, JEDEC solid-state technology association, October 2008.

[R42] Thèse de Alexia Bontempi, Microscopie thermique par sonde thermoélectrique, école doctorale des sciences pour l'ingénieur et microtechniques, université de Franche-Comté, 2015.

[R43] F.N. Masana, A closed form solution of junction to substrate thermal resistance in semiconductor chips, IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology, Volume 19, Issue 4, 1996, 10.1109/95.554935.

[R44] N. An, M. Du, Z. Hu, K. Wei, A High-Precision Adaptive Thermal Network Model for Monitoring of Temperature Variations in Insulated Gate Bipolar Transistor (IGBT) Modules, Energies journal, Volume 11, issue 3, 2018, https://doi.org/10.3390/en11030595.

[R45] Y. Koito, S. Okamoto, T. Tomimura, Two-Dimensional Numerical Investigation on Applicability of 45° Heat Spreading Angle, Journal of Electronics Cooling and Thermal Control, Volume 4, issue 1, 2014, 10.4236/jectc.2014.41001.

[R46] M. M. Yovanovitch, J. R. Culham, P. Teertstra, Analytical Modeling of Spreading Resistance in Flux Tubes, Half Spaces, and Compound Disks, IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology, part A, volume 21, issue 1, pages 168-176, 1998, 10.1109/95.679046.

[R47] C. S. Yun, P. Malberti, M. Ciappa, W. Fichtner, Thermal Component Model for Electrothermal Analysis of IGBT Module Systems, IEEE Transactions on Advanced Packaging, Volume 24, Issue 3, Aug 2001, 10.1109/6040.938309.

[R48] H. Hassanzadeh, M. Pooladi-Darvish, Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications, Applied Mathematics and Computation, volume 189, issue 2, pp 1966-1981, 10.1016/j.amc.2006.12.072.

[R49] Thèse de doctorat de Vincent Vintrou, Contribution à l'étude du comportement thermique des composants électroniques, Laboratoire Thermique Interface Environnement, 2009.

[R50] Jedec Solid State Technology Association, Jedec standard Jesd51-14, Transient Dual Interface Test Method for the Measurement of the Thermal Resistance Junction to Case of Semiconductor Devices with Heat Flow Through a Single Path, 2010.

[R51] Thèse de doctorat de Thomas Génevé, méthode de diagnostic des piles à combustible, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP), 2016.

[R52] Thèse de doctorat Jean-Pierre Ousten, Etude du comportement au vieillissement des interfaces thermiques pour modules électroniques de puissance dédiés à des applications transports, École Normale Supérieure de Cachan, 2013.

[R53] Thèse de doctorat Ghania Belkacem-Beldi, Contribution à l'étude de l'effet du vieillissement de modules de puissance sur leur comportement électrothermique, École Normale Supérieure de Cachan, 2014.

[R54] W. H. Richardson, Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration, Journal of the optical society of America, volme 63, issue 1, 1972.

[R55] R. Gold, An Iterative Unfolding Method for Matrices, Tech. Rep. ANL-6984, Argonne National Laboratory, 1964.

[R56] K.V.V. Murphy, R.E. Bedford, Transformation Between Foster and Cauer Equivalent Networks, IEEE Transactions on Circuits and System, volume 25, issue 4, pages 238-239, 1978.

[R57] Y.C. Gerstenmaier, W. Kiffe, G. Wachutka, Combination of Thermal Subsystems Modeled by Rapid Circuit Transformation, 13th International Workshop on Thermal Investigation of ICs and Systems (THERMINIC), 2007, 10.1109/THERMINIC.2007.4451758.

[R58] Thesis M. S. Freixes, Thermal Modeling of Microsystems and Electronic Component: Model Order reduction, Universitat de Barcelona, 2003

[R59] M. Hutton, B. Friedland, Routh approximations for reducing order of linear time-invariant systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, Issue 3, pp 329-337, 1975, 10.1109/TAC.1975.1100953.

[R60] D. Medhi, A. Rachid, Réalisation, Réduction, Commande des systèmes linaires, éditions Technip, 1997.

[R61] D.K. Sambariya, R Prasad, Routh Approximation based Stable Reduced Model of Single Machine Infinite Bus System with Power System Stabilizer, IX Control Instrumentation System Conference, 2012.

[R62] H. Singh, V.R. Singh, Development of Model Reduction using Stability Equation and Cauer Continued Fraction Method, International Journal of Electrical and Computer Engineering, Volume 5, issue 1, pp 1-7.

[R63] E. Kahoraho, J.L. Gutierrez, S. Dormido, Inversion algorithm to construct Routh approximants, Electronics Letters, Volume 21, Issue 10, pp 424-426, 1985, 10.1049/el.19850302.

[R64] CB Vishwakarma, Modified Hankel matrix approach for model order reduction in time domain, World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Physical and Mathematical Sciences, Volume 8, Issue 2, pp 404-410, 2014.

[R65] P. K. Lodhwal, S.K.Jha, Performance Comparison of Different type of Reduced Order Modeling Methods, 3rd International Conference on Advanced Computing & Communication Technologies, 2013, 10.1109/ACCT.2013.25.

[R66] Thèse de doctorat, Olivier Martins, Méthodologie d'analyse thermique multi-niveaux de systèmes électroniques par des modèles compacts, Laboratoire de Génie électrique de Grenoble (G2Alab), 2010.

[R67] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford university press, 1959.

[R68] Thèse de doctorat, Gaël Maranzana, Modélisation des composants électroniques de puissance par la méthode de quadripôles, Institut National Polytechnique de Loraine (INPL), 2003.

[R69] G. Maranzana, I. Perry, D. Maillet, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Volume 42, Issue 6, Pages 499-521, 2010, 10.1080/10407790260444796.

[R70] R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup, H. Garnier, An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification, 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control, 2008.

[R71] J.S. Yadav, N. P. Patidar, J. Panda, C. Ardil, A combined Conventional and differential Evolution Method for Model Order Reduction, International Journal of Electrical and Computer Engineering, Volume 5, Issue 9, 2011.

[R72] D.K. Saini, R. Prasad, Order Reduction of Linear Interval Systems Using Genetic Algorithm, International Journal of Engineering and Technology Volume 2, issue 5, pp 316-319, 2010.

[R73] D. Kranthi-Kumar, S. K. Nagar, S. K. Bharadwaj, Model Order Reduction of S.I.S.O and M.I.M.O Systems Based on Genetic Algorithm, International Conference on Automation, Robotics and Control Systems, 2010.

[R74] S. Panda, S. K. Tomar, R. Prasad, C. Ardil, Model Reduction of Linear Systems by Conventional and Evolutionary Techniques, World Academy of Science, Engineering and Technology, 2009.

[R75] S. Lavania, D. Nagaria, Genetic Algorithm and Padé-Moment Matching for Model Order Reduction, International Journal of Electrical and Computer Engineering, Volume 9, Issue 6, pp 361-363, 2015.

[R76] F. Christiaens, B. Vandevelde, E. Beyne, R. Mertens, J. Berghmans, A Generic Methodology for Deriving Compact Dynamic Thermal Models Applied to the PSGA Package, IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology, Volume 21, Issue 4, 1998, 10.1109/95.740049.

[R77] M. Salleras, J. Palacín, M. Moreno, J. Santander, L. Fonseca, J. Samitier, S. Marco, A methodology to extract dynamic compact thermal models under time-varying boundary conditions: application to a thermopile based IR sensor, Microsystem Technology, Volume 12, issue 1-2, pp 21-29, 2005, 10.1007/s00542-005-0016-8.

[R78] N. Munro, R.S. McLeod, Minimal realization of transfer-function matrices using the system matrix, Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Vol. 118, Issue 9, 1971, 10.1049/piee.1971.0236.

[R79] H. Pape, D. Schweitzer, J.H.J. Janssen, A. Morelli, C. M. Villa, Thermal Transient Modeling and Experimental Validation In The European Project PROFIT, 19th Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, SEMITHERM, 2003, 10.1109/STHERM.2003.1194370.

[R80] M. Rencz, G.Farkas, A. Poppe, V. Szekely, B. Courtois, A Methodology for the Generation of Dynamic Compact Models of Packages and Heat Sinks from Thermal Transient Measurements, 28th International Electronics Manufacturing Technology Symposium, 2003, 10.1109/IEMT.2003.1225887.

[R81] L. Codecasa, D. D'Amore, P. Maffezzoni, An Arnoldi Based Thermal Network Reduction Method for Electro-Thermal Analysis, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Volume 26, Issue 1, 2003, 10.1109/TCAPT.2002.808005.

[R82] Tesi di Dottorato, Alessandro Magnani, Dynamic Thermal Feedback Blocks for Electrothermal Simulation of Devices Circuits and Systems, Università Degli Studi di Napoli "Federico II, 2014.

[R83] B. Salimbahrami, B. Lohmann: Krylov Subspace Methods in Linear Model Order Reduction: Introduction and Invariance Properties, Science Republic Institute of Automation, 2002.

[R84] C. Poussot-Vassal, P. Vuillemin, I Pontes Duff, Large Scale Dynamical Model Approximation, Moment Matching and Krylov Subspaces based on Techniques, Lecture 4, Ecole Doctorale des Systèmes, 2016.

[R85] A. Odabasioglu, M. Celik, L. Pileggi, PRIMA: Passive reduced order interconnect macromodeling algorithm, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, volume 17, issue 8, pp. 645-654, 1998, 10.1109/43.712097.

[R86] Thèse de doctorat, Frédéric Da Silva, Méthodologies de réduction de modèles multi-physiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique, Université Paris-Saclay, école doctorale 53, 2015.

[R87] D. Petit, R Pasquetti, Réduction de modèle par identification de modes dominants : application à un modèle bidimensionnel de diffusion thermique, Revue de Physique Appliquée, volume 25, pp 831-842, 1990, 10.1051/01990002508083100.

[R88] A. Oulefki, A. Neveu, Réduction par amalgame modal d'un modèle thermique, Journal de Physique, EDP Sciences, Volume 3, issue 2, pp 303-320, 1993.

[R89] P. O. Laffay, O. Quéméner, A. Neveu, B. Elhajjar, The Modal Substructuring Method: An Efficient Technique for Large-Size Numerical Simulations, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Volume 60, Issue 4, pp. 278-304, 2011, 10.1080/10407790.2011.609113.

[R90] S. Carmona, F. Joly, A. Neveu, Rapport d'avancement N°2 du contrat de prestation Thalès-LMEE, Évaluation de la technique de réduction par analyse modale du modèle d'une Carte électronique, 2014.

N4. Modélisation des cartes électroniques

[R91] G.N. Ellison, Thermal analysis of circuit boards and microelectronic components using an analytical solution to the heat conduction equation, Semiconductor Thermal Measurement and Management IEEE Symposium - SEMI-THERM , pp. 144-150, 1996.

[R92] M. A. Gorski, O.A. Plumb, Conjugate Heat Transfer from an Isolated heat Source in a Plane Wall, Proceedings of Winter Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers, ASME IITD-210 edition, pp 99-105, 1992.

[R93] S. J. Kim, S.W. Lee, Air Cooling Technology for Electronic Equipment, CRC Press, 1996.

[R94] C. Constant, La méthodologie Tagushi: introduction à la recherche technologique - gestion fonctionnelle de la qualité ou gestion « offline », Revue de Statistique Appliquée, Volume 37, issue. 2, pp. 47-77, 1989.

[R95] Yovanovitch, M. M., Culham, J. R., and Teertstra, P. M., Analytical Modelling of Spreading Resistance in Flux Tubes - Half Spaces and Compound Disks, IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology - Part A, Volume 21, issue 1, pp. 168-176, 1998.

[R96] Y.S Muzychka, Influence coefficient method for calculating discrete heat source temperature on finite convectively cooled substrates, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Volume 29, Issue 3, 2006, 10.1109/TCAPT.2006.880477.

[R97] W.M Lewandowski, P. Kubski, Methodical investigation of free convection from vertical and horizontal plates, Heat and Mass transfer, Volume 17, issue 3, pp 147-155, 10.1007/BF02570524.

[R98] W. H. McAdams, principle of heat transfer, third edition, F. Kreith, 2012.

[R99] M. M. Yovanovitch: Asymptotes and Asymptotic Analysis for Development of Compact Models for Microelectronics Cooling, 19th Annual Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium and Exposition, SEMI-THERM, 2003.

[R100] H. F. Oztop, I. Dagtekin, A. Bahloul, Comparison of position of a heated thin plate located in a cavity for natural convection, International Communications in Heat and Mass Transfer, Volume 31, Issue 1, pp. 121-132, 2004.

[R101] A. Purusothaman, A. Bairi, N. Nithyadevi, 3D natural convection on a horizontal and vertical thermally active plate in a closed cubical cavity, International Journal of Numerical Methods for Heat &

Fluid Flow, Vol. 26, No. 8, pp. 2528-2542, 2016, 10.1108/HFF-08-2015-0341.

[R102] E. M. Sparrow, Technical note 3508, National Advisory for aeronautics, 1955.

[R103] J.R Culham, M.M Yovanovitch, Factors Affecting the Calculation of Effective conductivity in Printed Circuit Boards, Proceedings of the Sixth Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems, 1998, 10.1109/ITHERM.1998.689603.

[R104] N. Ozisik, heat conduction, second edition, John Wiley Interscience Publication, 1993.

[R105] D. W. Hahn, N. Özisik, heat conduction, third edition, John Wiley & sons, 2012.

[R106] M.M. Yovanovicth, K. Jafarpur, Bounds on laminar natural convection from isothermal disks and finite plates of arbitrary shape for all orientations and Prandtl numbers, university of Waterloo, 1993.

[R107] Thèse Esther Zarco Zernia, Optimisation des montages industriels et économie d'énergie par maîtrise de la convection naturelle dans les cavités thermiques diodes, Laboratoire Thermique Interface et Énergie, LTIE, 2013.

[R108] J. R. Culham, M. M. Yovanovitch, T. F. Lemczy, Thermal Characterization Of Electronic Packages Using A Three-Dimensional Fourier Series Solution, Journal of electronic packaging, volume 122, issue 3, pp. 233-239, 2000, 10.1115/1.1287928.

[R109] J.W. Cooley and J.W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Mathematic Computation, vol. 19, pp. 297–301, 1965.

[R110] M. A. Bergach, Adaptation du calcul de la Transformée de Fourier Rapide sur une architecture mixte CPU/GPU intégrée, Université Nice-Sophia Antipolis, École doctorale Science et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC), 2015.

[R111] J. Ditri, Heat Conduction in Microwave Devices with Orthotropic and Temperature-Dependent Thermal Conductivity IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Volume 55, Issue 3, 2007.

[R112] J. Ditri, Efficient Fourier Series Solutions to Non-linear Steady-State Heat Conduction Problems in Microwave Circuits, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Volume 32, Issue 1, 2007.

[R113] G. Ellison, Extensions of a closed form method for substrate thermal analysers to include thermal resistances from source-to-substrate and source-to-ambient, Seventh IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, 1991, 10.1109/STHERM.1991.152927.

[R114] M. Rencz, V. Szekely, A. Poppe, B. Courtois, Inclusion of RC compact models of packages into board level thermal simulation tools, Eighteenth Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, 2002, 10.1109/STHERM.2002.991348.

[R115] A. Pétrowski, A Clearing Procedure as a Niching Method for Genetic Algorithms, Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 1996, 10.1109/ICEC.1996.542703.

[R116] Thèse de doctorat, Abderrahim Boudenne, Étude expérimentale et théorique des propriétés thermo physiques de matériaux composites à matrice polymère, Université Paris XII, 2003.

[R117] M. B. Dogruoz, G. Shankaran, Spatial Variation of Temperature on Printed Circuit Boards: Effects of Anisotropic Thermal Conductivity and Joule Heating, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Volume 2, Issue 10, 2012.

[R118] Y. Shabany, Component size and effective thermal conductivity of Printed Circuit Board, Proceeding of 8th Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITHERM 2002), 2002, 10.1109/ITHERM.2002.1012496.

[R119] W Pabst, E Gregorová, The sigmoidal average – a powerful tool for predicting the thermal conductivity of composite ceramics, Journal of Physics: Conference Series, volume 395, 2012, 10.1088/1742-6596/395/1/012021.

O. PRINCIPALES PUBLICATIONS

O1. Brevets

[1] E. Monier-Vinard, J. Dufrenne, Procédé de modélisation d'un système comprenant des cartes électroniques comportant des composants unitaires, 2005, référence FR2863141.

[2] J. M. Deu, E. Monier-Vinard, Procédé pour créer un modèle thermique d'une carte électronique et ajuster les composants de la carte en fonction du modèle, 2008, référence FR2911975.

O2. Conférences nationales et internationales avec actes et comité de lecture

[3] E. Monier-Vinard, A. Le Gal, PCB design flow under thermal control, ITHERM IX, 2004, Las Vegas, USA, 10.1109/ITHERM.2004.1319243.

[4] E. Monier-Vinard, J.M. DEU, Thermal characterization of COTS electronic boards, ITHERM XI, 2008, Orlando, USA, 10.1109/ITHERM.2008.4544264.

[5] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, P. Murphy, O. Daniel, J. Dufrenne, Thermal modeling of the emerging multi-chip packages, EUROSIME XII, 2010, Bordeaux, France, 10.1109/ESIME.2010.5464514.

[6] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, P. Murphy, O. Daniel, J. Dufrenne, DELPHI style compact modeling for multi-chip package including its bottom board area based on genetic algorithm optimization, ITHERM XII, 2010, Las Vegas, USA, 10.1109/ITHERM.2010.5501405.

[7] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, O. Daniel, M. Brizoux, A. Grivon, W. Maia, Impact of PCB via and micro-via structure on component thermal performances, THERMINIC XVII, 2010 Barcelona, Spain.

[8] C. Dia, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, O. Daniel, Dynamic compact thermal model of electronic component using genetic algorithm fitting approach, IMAPS VI, 2011 La Rochelle France.

[9] C. Dia, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Modélisation thermique des composants électroniques en régime transitoire, Congrès de la Société Française de Thermique, 2011, Perpignan, France.

[10] E. Monier-Vinard, C. Dia, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Extension of the DELPHI methodology to Dynamic Compact Thermal Model of electronic Component, THERMINIC XVIII, 2011, Paris, France.

[11] E. Monier-Vinard, C. Dia, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Dynamic compact thermal model for stacked-dies electronic components, SEMI-THERM XXVII, 2012, San José, USA, 10.1109/STHERM.2012.6188821.

[12] E. Monier-Vinard, C. Dia, V. Bissuel, O. Daniel, Thermal modeling of active embedded chip into high density electronic board, EUROSIME XIV, 2012, Lisbon, Portugal, 10.1109/ESimE.2012.6191720.

[13] E. Monier-Vinard, C. Dia, V. Bissuel, O. Daniel, DELPHI style compact modeling by means of genetic algorithms of System in Package devices using composite sub-compact thermal models dedicated to model order reduction, ITHERM XIII, 2012, San Diego, USA, 10.1109/ITHERM.2012.6231555.

[14] C. Dia, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, O. Daniel, Advanced thermal modeling by means of genetic algorithms of high-density 3D electronic packages, EUROTHERM 2012, Poitier, France.

[15] C. Dia, N. Laraqi, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, Modélisation Thermique Dynamique des « Powerpaks », Congrès de la Société Française de Thermique, 2013, Gérardmer, France.

[16] E. Monier-Vinard, C. Dia, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Investigation of DELPHI Compact Thermal Model style for modeling surface-mounted soft magnetic composite inductor, THERMINIC XIX, 2013, Berlin, Germany, 10.1109/THERMINIC.2013.6675210.

[17] E. Monier-Vinard, C. Dia, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Dynamic sub compact model and global compact model reduction for Multi-Chip Components, THERMINIC XIX, 2013, Berlin, Germany, 10.1109/THERMINIC.2013.6675190.

[18] E. Monier-Vinard, C. Dia, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, Latest developments of Compact Thermal Modeling of System in Package devices by means of Genetic Algorithm, ITHERM XIV, 2014, Orlando, USA, 10.1109/ITHERM.2014.6892390.

[19] N. Nguyen, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, C. Dia, V. Bissuel, Calculation Limits of the homogeneous

effective Thermal Conductivity Approach in Modeling of Printed Circuit Board, THERMINIC XX, 2014, London, United Kingdom, 10.1109/THERMINIC.2014.6972484.

[20] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, C. Dia, O. Daniel, N. Laraqi, Electronic Board modeling by the means of DELPHI Compact Thermal Model of Components, THERMINIC XX, 2014, London, United Kingdom, 10.1109/THERMINIC.2014.6972491.

[21] E. Monier-Vinard, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, Practical Analytical Steady-State Temperature Solution for Annealed Pyrolytic Graphite Spreader: partial results, THERMINIC XXI, 2015, Paris, France, 10.1109/THERMINIC.2015.7389615.

[22] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, D. Signing, Experimental Characterization of DELPHI Compact Thermal Model For Surface-Mounted Soft Magnetic Composite Inductor, THERMINIC XXI, 2015, Paris, France, 10.1109/THERMINIC.2015.7389618.

[23] B. Rogié, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, V. Bissuel, Modélisation électro-magnéto-thermique des composants électroniques passifs miniaturisés, Congrès de la Société Française de Thermique, 2016, Toulouse, France.

[24] E. Monier-Vinard, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Steady-State Temperature Solution for Early Design of Annealed Pyrolytic Graphite Heat Spreader: Full Results, ITHERM XV, 2016, Las Vegas, USA, 10.1109/ITHERM.2016.7517647.

[25] E. Monier-Vinard, B. Rogié, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, M.C. Kotelon, State of the Art of Numerical Thermal Characterization of Electronic Component, EUROSIME XVIII, 2016, Montpellier, France, 10.1109/EuroSimE.2016.7463296.

[26] E. Monier-Vinard, B. Rogié, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Practical Steady-State Temperature Prediction of Active Embedded Chips into High Density Electronic Board, EUROTHERM VII, 2016, Krakow, Poland, 10.1088/1742-6596/745/3/032095.

[27] E. Monier-Vinard, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Analysis of Heat-Spreading Capability of encapsulated Annealed Pyrolytic Graphite Cores, THERMAM III, 2016, Izmir, Turkey.

[28] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, Brice Rogié, N. Laraqi, O. Daniel, Marie-Cécile Kotelon, Evolution of the DELPHI Compact Thermal Modeling Method: an Investigation on the Boundary Conditions Scenarios, THERMINIC XXII, 2016, Budapest, Hungary, 10.1109/THERMINIC.2016.7748651.

[29] B. Rogié, E. Monier-Vinard, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, O. Daniel, Three dimensional steady-state temperature prediction of volumetric heating sources embedded into multi-layer electronic board substrate, ITHERM XVI, 2017, Orlando, USA, 10.1109/ITHERM.2017.7992528.

[30] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, B. Rogié, N. Laraqi, O. Daniel, Investigation on boundary conditions scenarios for optimizing the creation of DELPHI-style surrogate thermal models, ITHERM XVI, 2017, Orlando, USA, 10.1109/ITHERM.2017.7992503.

[31] B. Rogié, L. Codecasa, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, D. D'Amore, A. Magnani, V. d'Alessandro, N. Rinaldi, Delphi-like Dynamical Compact Thermal Models using Model Order Reduction, THERMINIC XXIII, 2017, Amsterdam, Netherlands, 10.1109/THERMINIC.2017.8233812.

[32] B. Rogié, S. Grosjean, E. Monier-Vinard, F. Joly, V. Bissuel, O. Daniel, N. Laraqi, K. Vera, Delphi-like Compact Thermal Models using Model Order Reduction based on Modal Approach, SEMI-THERM XXXIV, 2018, San José, USA, 10.1109/SEMI-THERM.2018.8357347.

[33] V. Bissuel, E. Monier-Vinard, A. Olivier, B. Rogie, A. Mahé, N. Laraqi, Investigation of Inspired-DELPHI Compact Thermal Model for modelling planar transformer, EUROSIME XX, 2018, Toulouse, France, 10.1109/EuroSimE.2018.8369907.

[34] E. Monier-Vinard, Olivier Daniel, V. Bissuel, B. Rogié, M-N Nguyen, N. Laraqi, I. Aliouat, Hybridizing Nature-Inspired Algorithms to Derive Accurate Surrogate Thermal Model: Genetic and Particle Swarm Optimization, ITHERM XVI, 2018, San Diego, USA, 10.1109/ITHERM.2018.8419587.

[35] V. Bissuel, L. Codecasa, E. Monier-Vinard, B. Rogié, A. Olivier, A. Mahé, N. Laraqi, V. d'Alessandro, C. Gougis, Novel Approach to the Extraction of Delphi-like Boundary-Condition-Independent Compact Thermal Models of Planar Transformer Devices, THERMINIC XXIV, 2018, Sweden, 10.1109/THERMINIC.2018.8593283.

[36] E. Monier-Vinard, L. Codecasa, B. Rogié, V. Bissuel, N. Laraqi, V. d'Alessandro, Experiment Characterization of MOR-based and Delphi-like BCI DCTMs, THERMINIC XXIV, 2018, Sweden, 10.1109/THERMINIC.2018.8593294.

[37] V. Bissuel, V. Fox, E. Monier-Vinard, A. Neveu, F. Joly, O. Daniel, Multi-port Dynamic Compact Thermal Models of BGA package using Model Order Reduction and Meta-heuristic Optimization, ITHERM XVII, 2019, USA, 10.1109/ITHERM.2019.8757303.

[38] V. Bissuel, E. Monier-Vinard, L. Codecasa, M.N. Nguyen, A. Mahé, O. Daniel, N. Laraqi, V. d'Alessandro, Practical Thermal Modelling of Planar Magnetic Component devices, ITHERM XVII, 2019, USA, 10.1109/ITHERM.2019.8757289.

[39] V. Bissuel, E. Monier-Vinard, F. Joly, O. Daniel, A. Neveu, Thermo-Fluidic Characterizations of Multi-Port Compact Thermal Model of BGA Electronic Package, THERMINIC XXV, 2019.

O3. Revues scientifiques internationales avec comité de lecture

[40] V. Bissuel, M. Brizoux, A. Grivon, E. Monier-Vinard, F. Pires, Impact of PCB via and micro-via structures on component thermal performances, Journal of Electronic Packaging, 2011, 10.1115/1.4004830.

[41] N. Laraqi, E. Monier-Vinard, New analytical solution for solving steady-state heat conduction problems with singularities, Thermal Science, special issue on Analytical methods, 2013, 10.2298/TSCI120826070L.

[42] E. Monier-Vinard, N. Laraqi, C. Dia, V. Bissuel, N. Nguyen, Analytical thermal modeling of multilayered active embedded chips into high density electronic board, Thermal Science, 2013, 10.2298/TSCI120826072M.

[43] A. Bairi, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, M.N. Nguyen, C. Dia, Natural convection in inclined hemispherical cavities with isothermal disk and dome faced downwards - Experimental and numerical study, Applied Thermal Science, 2014, 10.1016/j.applthermaeng.2014.09.012.

[44] E. Monier-Vinard, N. Laraqi, C. Dia, M.N. Nguyen, V. Bissuel, Analytical modeling of multi-layered Printed Circuit Board dedicated to electronic component thermal characterization, Solid-State Electronics, 2015, 10.1016/j.sse.2014.09.004.

[45] E. Monier-Vinard, N. Laraqi, C. Tidiane Dia, M.N. Nguyen, V. Bissuel, Analytical modeling of multi-layered Printed Circuit Board using stacked via clusters as component heat spreader, Thermal Science, Vol. 20, issue 5, 2016, 10.2298/TSCI140403143M.

[46] M.N. Nguyen, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, V. Bissuel, Effect of Heat Source Orientation on the Thermal Behavior of N-Layer Electronic Board, International journal of Thermal Science, 2016, 10.1016/j.ijthermalsci.2016.05.026.

[47] N. Laraqi, E. Chahour, E. Monier-Vinard, N. Fahdi, C. Zerbini, Simple and accurate correlations for some problems of heat conduction with nonhomogeneous boundary conditions, Thermal Science, 2017,10.2298/TSCI160411243L.

[48] E. Monier-Vinard, B. Rogié, C. Dia, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, M-C. Kotelon, A-I.Fahad, Experimental Characterization of Predictive Thermal Behavior Model of a Surface-Mounted Soft Magnetic Composite Inductor, Microelectronics Reliability, vol. 67, 2016, 10.1016/j.microrel.2016.09.020.

[49] E. Monier-Vinard, M.N. Nguyen, N. Laraqi, V. Bissuel, Thermal Modeling of Multi-Shape Heating Sources on N-Layer Electronic Board, Thermal Science, online first 2016.

[50] M.N. Nguyen, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, V. Bissuel, Practical Analytical Steady-State Temperature Solution for Annealed Pyrolytic Graphite Heat Spreader, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, vol. 27, issue 1, 2017,10.1108/HFF-08-2015-0311.

[51] E. Monier-Vinard, B. Rogie, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, M-C. Kotelon, State of the Art of Thermal Characterization of Electronic Components using Computational Fluid Dynamic tools, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, vol. 27, issue 7, 2017, 10.1108/HFF-10-2016-0380.

[52] E. Monier-Vinard, O. Daniel, V. Bissuel, B. Rogie, N. Laraqi, Investigation on Steady-State and Transient Boundary Conditions Scenarios for Optimizing the Creation of Multi-port Surrogate Thermal Models, IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, Volume 8, Issue 6, Pages 1042-1055, June 2018, 10.1109/TCPMT.2017.2778511.

[53] B. Rogié, E. Monier-Vinard, M-N. Nguyen, N. Laraqi, Practical analytical modeling of 3D multi-layer Printed Wired Board with buried volumetric heating source, International Journal of Thermal Science, Volume 129, Pages 404–415, July 2018, 10.1016/j.ijthermalsci.2018.03.016.

[54] B. Rogié, L. Codecasa, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, D. D'Amore, A. Magnani, V. d'Alessandro, N. Rinaldi, Multi-port Dynamic Compact Thermal Models of dual-chip package using Model

Order Reduction and Meta-heuristic Optimization, Microelectronics Reliability Journal, Volume 87, pages 222-231, August 2018, 10.1016/j.microrel.2018.06.009.

O4. Thèse de doctorat

[55] Cheikh DIA, Génération de Modèles Compacts Thermiques Dynamiques de Composants Électroniques via les algorithmes Génétiques, Université Paris Ouest, Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, LTIE – AE 4415, soutenue le 11 décembre 2015.

[56] Brice ROGIE, Apport à la caractérisation des modèles thermiques spatio-temporels destinés aux composants électroniques, Université Paris Ouest, Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, LTIE – AE 4415, soutenue le 19 décembre 2018.

P. ANNEXES

P1. Descriptif des dimensions caractéristiques de divers composants

P1.1. Composant de type « Quad Flat pack No-lead »

La Table 111 fournit un descriptif de la minimisation de l'empilage des éléments de ce boitier.

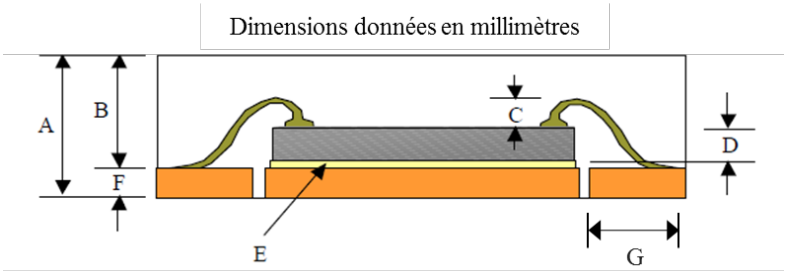


Table 111 : Dimensions typiques d'un boitier « QFN »

Hauteur du composant (A)	0.8	1.0
Hauteur encapsulant (B)	0.55	0.7
Contrainte du câblage filaire (C)	0.175	0.2
Épaisseur maximale de la puce (D)	0.125	0.25
Épaisseur maximale de colle sous puce (E)	0.05	0.05
Épaisseur typique de la plateforme (F)	0.2	0.2
Longueur minimale de broche pour un fil (G)	0.2	0.2

P1.2. Composant de type « Chip Scale Package »

La Table 112 décrit la minimisation de l'empilage des éléments constituants de ce boitier.

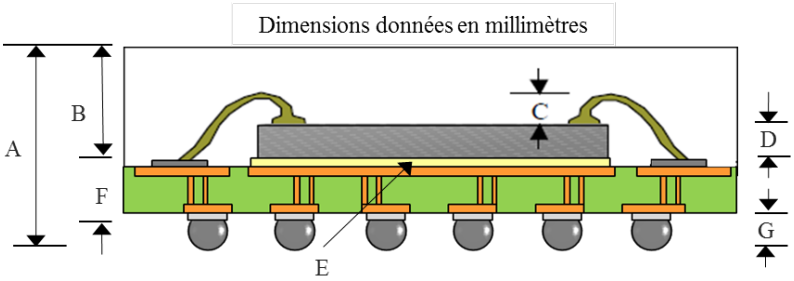
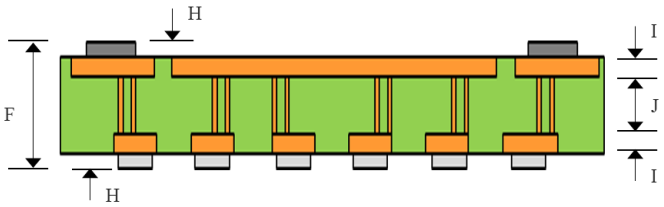


Table 112 : Dimensions typiques d'un boitier CSP

Hauteur du composant (A)	1.0	1.2	1.4
Hauteur encapsulant (B)	0.45	0.5	0.7
Contrainte du câblage filaire (C)	0.15	0.15	0.15
Épaisseur maximale de la puce (D)	0.165-0.175	0.165-0.175	0.330
Épaisseur maximale de colle sous puce (E)	0.05	0.05	0.05
Hauteur finale minimale des billes (G)	0.2	0.25-0.35	0.25-0.35

La Table 113 détaille les éléments constituant le substrat de ce boitier.

Table 113 : Dimensions typiques des constituants du substrat d'un boitier CSP



Épaisseur typique du substrat (F)	0.22	0.26-0.36	0.26-0.36
Épaisseur typique du diélectrique (J)	0.1	0.15	0.2
Épaisseur maximale des couches signal (I)			
Métallisation cuivre initiale	0.015	0.015	0.015
Recharge métallique des vias	0.015	0.015	0.015
Épaisseur du masque de brasure (H)	0.04	0.04	0.04

P1.3. Caractéristiques nominales des boitiers CMS des résistances

Table 114 : Dimensions normalisées des résistances CSM

Toutes les dimensions sont en millimètre

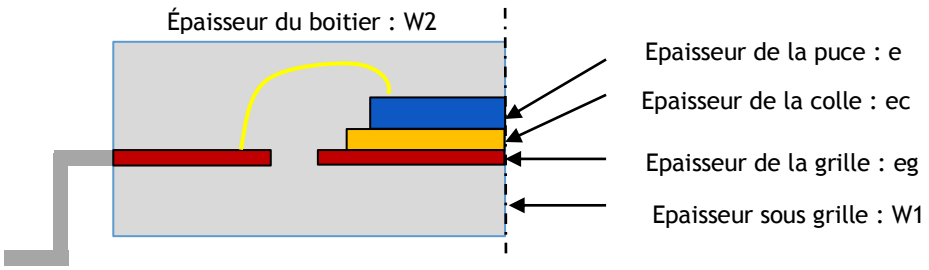
EIA - « *Electronic Industries Alliance standard* »

Code EIA*	Code SI	L	W	H	A	B	C	PMAX
2512	6332	6.3	3.2	0.6	3.5	1.6	3.8	1W
2010	5025	5	2.5	0.6	2.8	0.9	3.8	3/4W
1210	3225	3.2	2.5	0.55	4.8	0.9	2	1/2W
1206	3216	3.2	1.6	0.55	1.6	0.9	2	1/4W
0805	2012	2	1.2	0.45	1.3	0.7	1.2	1/8W
0603	1608	1.55	0.85	0.45	0.9	0.6	0.9	1/10W
0402	1005	1	0.5	0.35	0.6	0.5	0.5	1/16W
0201	0603	0.6	0.3	0.25	0.3	0.3	0.3	1/20W

P2. Décomposition nodale d'un boitier « Small Outline »

P2.1. Définition de la topologie interne du boitier

Les principales épaisseurs des éléments du boitier sont inventoriées.



Les dimensions nécessaires aux calculs analytiques sont toutes répertoriées.

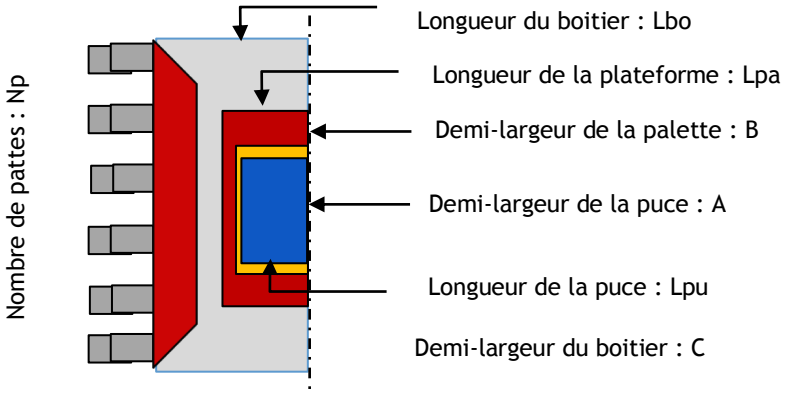


Figure 194 : Descriptif des éléments constituant un composant dit « Small Outline »

P2.2. Données indispensables à la création de la constitution interne

Les valeurs indispensables à la modélisation d'un boitier de type « SO » sont :

- Le nombre de pattes : Np,
- La demi-longueur du boitier : Lbo,
- La demi-largeur du boitier : C,
- L'épaisseur du boitier : $W2$,
- Le nombre de rangées de pattes : Nrp.

P2.3. Valeurs géométriques par défaut pour le boîtier

Table 115 : Expression des données géométriques capitalisées

Valeur par défaut	G.M.T. 2000
Lpu - demi-longueur puce	0.2 x Lbo si Np<28 ou 0.3 x Lbo si Np >=28
Lpa - demi-longueur palette	0.35 x Lbo si Np<28 ou 0.43 x Lbo si Np >=28
A - demi-largeur puce	0.3 x C si Np <28 ou 0.44 x C si Np >=28
B - demi-largeur palette	0.54 x C
$W1$ - épaisseur couche 1	W2/3
e - épaisseur puce	0.4
Lp - longueur pattes	1.1 x $W11$
Sp - surface d'une patte	0.08
eg - épaisseur grille	0.2
kpu - conductivité thermique de la puce	100
$kcol$ - conductivité thermique de la colle	2
$kres$ - conductivité thermique de la résine	0.67
α - angle du boitier	54 arctan (Lbo/C) +1
keq - conductivité thermique effective	(0.5 kg.eg / Weq) + kres
Weq	W2
kg - conductivité thermique de la grille	260
ec - épaisseur colle puce	16 x 0.001 x ln (4 x A x Lpu+1.5)
Ct - demi-largeur intermédiaire	0.8+B
$W11$ - hauteur sous pattes	W2/2

P2.4. Topologie du réseau nodal de ce boitier

Le réseau est constitué de 7 résistances thermiques lesquelles sont reliées à 5 surfaces d'échange.

Les *S1* et *Ss* sont en contact avec le fluide ambiant.

La surface Sp est directement en contact avec la carte.

Les surfaces *S2* et *Si* sont en contact avec la carte via une lame d'air sous le boitier.

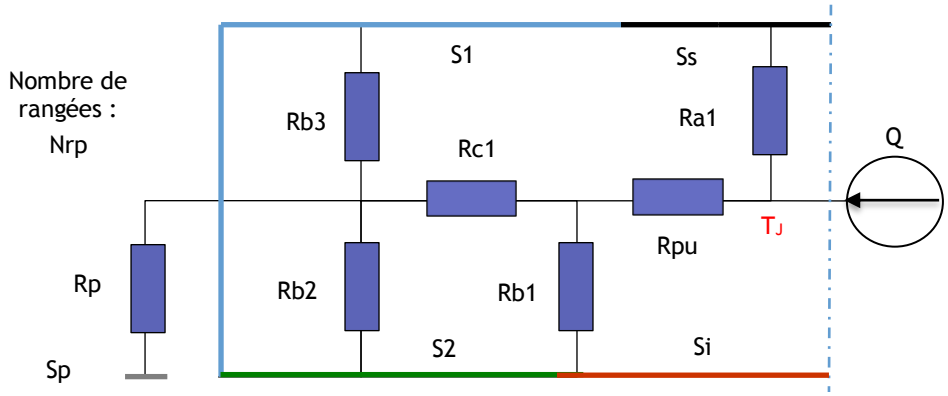


Figure 195 : Réseau nodal d'un boitier dit « Small Outline »

P2.5. Définition des surfaces d'échange du modèle nodal

Les surfaces sont exprimées en mm^2.

- Surface supérieure dans la zone ellipsoïdale d'influence de la puce

$$Ss = \pi \cdot \sqrt{A^2 + W0^2}\,\sqrt{Lpa^2 + W0^2} \quad o\grave{u}\ W0 = W2 - (W1 + ec + eg + e) \tag{e450}$$

- Surface supérieure du boitier en dehors de la surface de puce

$$S1 = 4\,C\,Lbo - Ss + 4\,W2\,(C + Lbo) \tag{e451}$$

- Surface inférieure ellipsoïdale du boitier sous la plateforme

$$Si = \pi\,\sqrt{B^2 + W1^2}\,\sqrt{Lpa^2 + W1^2} \tag{e452}$$

- Surface inférieure du boitier en dehors de la plateforme

$$S2 = 4\,C\,Lbo - Si \tag{e453}$$

P2.6. Définition des résistances thermiques du réseau nodal

Les résistances thermiques sont exprimées en K/W.

$$Rpu = \frac{1000\,e}{kpu\,A\,Lpu} + \frac{1000\,ec}{kcol\,A\,Lpu} \tag{e454}$$

$$Ra1 = \frac{1000\,W0}{kres\,\sqrt{Ss\,(4\,A\,Lpu)}} \tag{e455}$$

$$Rb1 = \frac{1000\,W1}{kres\,\sqrt{Si\,(4\,B\,Lpa)}} \tag{e456}$$

$$Rb2 = \frac{1000\,(W2 - W1)}{kres\,\sqrt{(4\,C\,Lbo - Ss)\,(4\,C\,Lbo - 4\,Ct\,Lpa)}} \tag{e457}$$

$$Rb3 = \frac{1000\ W1}{kres\ \sqrt{S2\ (4\ C\ Lbo - 4\ Ct\ Lpa)}} \tag{e458}$$

$$Rc1 = elliptic(A, Lpu, B, Lpa, kg, eg, 90) + elliptic\left(B, Lpa, Ct, Lpa + 0.8, \frac{kg}{2}, eg, 90\right) + \frac{elliptic(Ct, Lpa + 0.8, C, Lbo, ke, W2, \alpha)}{2} \tag{e459}$$

$$Rp = \left[\frac{elliptic(Ct, Lpa + 0.8, C, Lbo, ke, Weq, \alpha)}{2}\right] + \left[\frac{1000\ Lp}{kg\ Sp\ Np}\right] \tag{e460}$$

P2.7. Définition de la fonction dite « *elliptic* »

Les résistances thermiques calculées pour une forme elliptique sont exprimées en K/W.

Celles-ci sont définies par les expressions suivantes :

$$Re_i = elliptic(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, k_i, e_i, \alpha_i)$$

$$Re_i = \frac{ln(\ [b_{i+1} + a_{i+1}]/[b_{i+1} - a_{i+1}]\ ) - ln(\ [b_i + a_i]/[b_i - a_i]\ )}{2\ k_i\ e_i\left(\frac{\pi}{90} \cdot \alpha_i\right)} \tag{e461}$$

P3. Définition des résistances thermiques de forme prismatique

Ce type résistance est très utilisé en première approche par les ingénieurs.

A partir de la démonstration ci-dessous plusieurs variantes ont pu être développées pour établir des formulations pour différents réseaux.

$$R = \frac{1}{k}\int_0^H \frac{dz}{S} = \frac{1}{k}\int_0^H \frac{dz}{(L_1 + 2\ tan\,\alpha_x\ z)\left(W_1 + 2\,tan\,\alpha_y\ z\right)} \tag{e462}$$

L'intégrale peut être mise sous la forme :

$$R = \frac{1}{k}\int_0^H \left[\frac{A}{(L_1 + 2\ tan\,\alpha_x\ z)} + \frac{B}{\left(W_1 + 2\ tan\,\alpha_y\ z\right)}\right] dz \tag{e463}$$

Les expressions de A et B sont résolus en considérant le système suivant :

$$A\ 2\,tan\,\alpha_y + B\ 2\,tan\,\alpha_x = 0\ \ et\ \ A\,W_1 + B\,L_1 = 1 \tag{e464}$$

$$A = \frac{-2\,tan\,\alpha_x}{\left[L_1\ 2\ tan\,\alpha_y - W_1\ 2\ tan\,\alpha_x\right]}\ \ et\ \ B = \frac{2\,tan\,\alpha_y}{\left[L_1\ 2\,tan\,\alpha_y - W_1\ 2\,tan\,\alpha_x\right]} \tag{e465}$$

On en déduit :

$$R = \frac{1}{k\,\Delta}\left[\int_0^H \frac{-2\,tan\,\alpha_x}{(L_1 + 2\,tan\,\alpha_x\ z)}\ dz + \int_0^H \frac{2\,tan\,\alpha_y}{\left(W_1 + 2\,tan\,\alpha_y\ z\right)}\ dz\right] \tag{e466}$$

$$Avec\ \ \Delta = \left[L_1\ 2\,tan\,\alpha_y - W_1\ 2\,tan\,\alpha_x\right]$$

Pour expliciter la forme des primitives à résoudre on pose :

$$u = \ (L_1 + 2\,tan\,\alpha_x\ z)\ \rightarrow du = \ 2\,tan\,\alpha_x\ dz \tag{e467}$$

$$v = \left(W_1 + 2\tan\alpha_y\ z\right) \rightarrow dv = 2\tan\alpha_y\ dz \tag{e468}$$

La forme de la solution est alors beaucoup plus facile à identifier :

$$R = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\Delta}\ ln\left(\frac{v}{u}\right)\right]_0^H \tag{e469}$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{dx}{u\,v} = \frac{1}{\Delta}\ ln\left(\frac{v}{u}\right)\ \text{où}\ u = a + bx\,, v = \alpha + \beta x\ et\ \Delta = a\beta - \alpha b \tag{e470}$$

Un résultat donné par la formule 2.154 de l'ouvrage « Table of Integrals, Series, Products - 7th edition ».
Finalement, l'expression de la résistance s'écrit :

$$R = \left[ln\left(\frac{W_1 + 2\tan\alpha_y\ z}{L_1 + 2\tan\alpha_x\ z}\right)\right]_0^H \Big/ \left[k\left(L_1\ 2\tan\alpha_y - W_1\ 2\tan\alpha_x\right)\right] \tag{e471}$$

$$R = ln\left(\frac{L_1}{W_1}\frac{W_1 + 2\tan\alpha_y\ H}{L_1 + 2\tan\alpha_x\ H}\right) / \left[k\left(L_1\ 2\tan\alpha_y - W_1\ 2\tan\alpha_x\right)\right] \tag{e472}$$

En fonction des valeurs des angles, il a été possible d'adapter celle-ci à nos besoins.

P4. Approximation d'un réseau par les méthodes d'optimisation directes

P4.1. Génération des données

Le calcul analytique des températures et des flux du réseau est réalisé au moyen des expressions :

$$[T]^{<k>} = (\,[\boldsymbol{Y}] + [\boldsymbol{I}]_n\,[Y_{ext}]^{<k>}\,)^{-1}\,(\,[Y_{ext}]^{<k>}\,T_\infty + [Q]\,) \tag{e473}$$

$$[q]^{<k>} = [\boldsymbol{I}]_n\,[Y_{ext}]^{<k>}\,(\,[T]^{<k>} - T_\infty\,) \tag{e474}$$

Avec :

- $[T]^{<k>}$: le vecteur des températures des nœuds du réseau pour la condition k,
- $[\boldsymbol{Y}]$: la matrice des conductances du réseau (e25),
- $[\boldsymbol{I}]_n$: la matrice identité fonction du nombre de nœuds du réseau,
- $[Y_{ext}]^{<k>}$: le vecteur des conductances externes pour la condition k,
- T_∞ : la température de référence sous forme scalaire,
- $[Q]$ et $[q]^{<k>}$: les vecteurs des puissances appliquées au réseau et des flux extraits par les faces.

Les températures et les flux utilisés pour la détermination « en descente » des éléments du réseau, supposé inconnu, sont procurés dans la Table 116.

Table 116 : Comportement thermique du réseau thermique « fictif »

Initial	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<1>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	210.1	-18.4	72.2	-20.2	13.43	-47.	127.1	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.8	62.1	61.5	-61.5	8.02	-100.2	118.6	-22.2	71.8	-13.5
« Bot 3 »	213.2	-1.2	75.6	-2.1	20.9	-0.6	128.1	-36.0	80	-45
« Bot 4 »	202.8	-2.1	65.4	-3.4	13.49	-0.7	118.3	-61.4	70.5	-73.1
« Side 5 »	194.7	-66.2	57.7	-62.8	10.69	-1.4	116.3	-23.7	69.8	-14.2
« Junc 6 »	213.5	150	75.9	150	21.16	150	128.4	150	80.4	150

Dans cet exemple, la puissance imposée au nœud de « Junction » (6) et la température de référence sont respectivement fixées à 150mW et à 0°C. Les températures et les flux sont respectivement exprimés en degré et en milliwatt.

Les matrices de conductances thermiques retournées par les différents algorithmes de minimisation ainsi que les prédictions des températures et des flux à chaque nœud sont récapitulées ci-après.

P4.2. La méthode du Simplexe (SM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode SM :

$$[\boldsymbol{G}]_{SM} = \begin{pmatrix} 6.3 & 0 & -1.13 & 0 & -0.13 & -5.05 \\ 0 & 15.6 & -3.91 & -6.61 & -5.13 & 0 \\ -1.13 & -3.91 & 230.27 & 0 & 0 & -225.2 \\ 0 & -6.61 & 0 & 19.1 & -5.62 & -6.92 \\ -0.13 & -5.13 & 0 & -5.62 & 10.88 & 0 \\ -5.05 & 0 & -225.2 & -6.92 & 0 & 237.2 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e475)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode SM :

$$[\boldsymbol{R}]_{SM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 888 & 0 & 7731.7 & 198.2 \\ 0 & 0 & 255.6 & 151.4 & 194.8 & 0 \\ 888 & 255.6 & 0 & 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & 151.4 & 0 & 0 & 178 & 144.5 \\ 7731.7 & 194.8 & 0 & 178 & 0 & 0 \\ 198.2 & 0 & 4.4 & 144.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e476)}$$

Bilan des prédictions du modèle SM :

Table 117 : Comportement thermique du réseau de résistances SM

MCM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	209.9	-18.4	72	-20.2	13.4	-46.8	126.9	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.7	-62.1	61.4	-61.4	8	-100.4	118.7	-22.2	71.8	-13.5
« Bot 3 »	213	-1.2	75.4	-2.1	20.8	-0.6	128	-36	79.9	-45
« Bot 4 »	202.7	-2.1	65.3	-3.4	13.5	-0.7	118.3	-61.4	70.5	-73.1
« Side 5 »	194.8	-66.2	57.8	-62.9	10.8	-1.5	116.4	-23.7	69.9	-14.3
« Junc 6 »	213.2	150	75.6	150	21.1	150	128.3	150	80.3	150

La méthode du Simplexe donne des résultats probants, l'erreur maximale est de l'ordre de 1%.

P4.3. La méthode de Levenberg-Marquardt (LMM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode LMM :

$$[\boldsymbol{G}]_{LMM} = \begin{pmatrix} 7.08 & 0 & 0 & -0.13 & -0.09 & -6.86 \\ 0 & 14.91 & -2.39 & -5.43 & -5.1 & -1.99 \\ 0 & -2.39 & 187.1 & 0 & -1.03 & -183.7 \\ -0.13 & -5.43 & 0 & 19.0 & -6.44 & -7.01 \\ -0.09 & -5.1 & -1.03 & -6.44 & 12.67 & 0 \\ -6.86 & -1.99 & -183.7 & -7.01 & 0 & 199.55 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e477)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode LMM :

$$[\boldsymbol{R}]_{LMM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8108.9 & 147.4 \\ 0 & 0 & 499.2 & 198.7 & 178.4 & 411.4 \\ 0 & 499.2 & 0 & 0 & 2757.4 & 6.3 \\ 0 & 198.7 & 0 & 0 & 147.9 & 140 \\ 8108.9 & 178.4 & 2757.4 & 147.9 & 0 & 0 \\ 147.4 & 411.4 & 6.3 & 140 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e478)}$$

Bilan des prédictions du modèle LMM :

Table 118 : Comportement thermique du réseau de résistances LMM

LMM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	208.4	-18.2	70.7	-19.8	13.3	-46.6	126.3	-6.6	78.9	-4.1
« Top 2 »	198.3	-62	61.1	-61.1	8	-100.6	119.1	-22.3	72.3	-13.6
« Bot 3 »	211.1	-1.2	73.7	-2.1	20	-0.6	127.2	-35.8	79.3	-44.6
« Bot 4 »	202.2	-2.1	64.8	-3.4	13.8	-0.7	118.3	-61.4	70.6	-73.3
« Side 5 »	195.6	-66.5	58.5	-63.7	11.3	-1.5	117.1	-23.9	70.6	-14.4
« Junc 6 »	211.4	150	73.9	150	20.2	150	127.5	150	79.7	150

Sur ce cas, l'erreur relative maximale sur la température dite de « Junction » de l'ordre de 6%.

P4.4. La méthode de Quasi-Newton (QNM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode QNM :

$$[\boldsymbol{G}]_{QNM} = \begin{pmatrix} 6.97 & 0 & 0 & -0.06 & -0.12 & -6.78 \\ 0 & 15.4 & -1.35 & -6.03 & -5.31 & -2.72 \\ 0 & -1.35 & 162.8 & 0 & -0.94 & -160.5 \\ -0.06 & -6.03 & 0 & 19.08 & -6.02 & -6.96 \\ -0.12 & -5.31 & -0.94 & -6.02 & 12.39 & 0 \\ -6.78 & -2.72 & -160.5 & -6.96 & 0 & 176.9 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e479)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode LMM :

$$[\boldsymbol{R}]_{QNM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8108.9 & 147.4 \\ 0 & 0 & 743.3 & 165.9 & 188.4 & 367.6 \\ 0 & 743.3 & 0 & 0 & 1061.6 & 6.2 \\ 0 & 165.9 & 0 & 0 & 166 & 1143.6 \\ 8108.9 & 188.4 & 1061.6 & 166 & 0 & 0 \\ 147.4 & 367.6 & 6.2 & 143.6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e480)}$$

Bilan des prédictions du modèle QNM :

Table 119 : Comportement thermique du réseau de résistances QNM

QNM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	208.1	-18.2	70.4	-19.7	13.3	-46.5	126.2	-6.6	78.8	-4.1
« Top 2 »	198.2	-61.9	61	-61	8.1	-100.7	118.9	-22.3	72.2	-13.5
« Bot 3 »	210.8	-1.2	73.4	-2.1	20	-0.6	127	-35.7	79.2	-44.6
« Bot 4 »	202.1	-2.1	64.7	-3.4	13.6	-0.7	118.3	-61.4	70.7	-73.3
« Side 5 »	195.8	-66.6	58.7	-63.9	11.6	-1.6	117.4	-24	70.9	-14.5
« Junc 6 »	211.1	150	73.6	150	20.1	150	127.4	150	79.6	150

Les températures dites de « Junction » par le réseau obtenu par la méthode QNM sont très optimistes. L'erreur maximale relevée est de l'ordre de 10%, elle concerne le scénario nommé BC10.

P4.5. Comparaison des prédictions des 3 méthodes de minimisation de l'erreur

Les erreurs relatives sur les températures et sur les flux sont identiques.

Table 120 : État de la précision des 3 réseaux de résistances créés

SM	k=1 (BC3)	k=2 (BC6)	k=3 (BC10)	k=4 (BC26)	k=5 (BC40)
« Top 1 »	0.11%	0.30%	0.39%	0.08%	0.11%
« Top 2 »	0.03%	0.07%	-0.17%	-0.02%	-0.03%
« Bot 3 »	0.10%	0.27%	0.40%	0.05%	0.05%
« Bot 4 »	0.04%	0.11%	-0.20%	0.00%	0.00%
« Side 5 »	-0.06%	-0.18%	**-0.98%**	-0.10%	-0.14%
« Junc 6 »	0.12%	0.31%	0.41%	0.10%	0.13%

LMM	k=1 (BC3)	k=2 (BC6)	k=3 (BC10)	k=4 (BC26)	k=5 (BC40)
« Top 1 »	0.83%	2.17%	0.97%	0.6%	0.74%
« Top 2 »	0.23%	0.66%	-0.38%	-0.36%	-0.76%
« Bot 3 »	0.95%	2.54%	4.17%	0.69%	0.85%
« Bot 4 »	0.29%	0.85%	-2.01%	-0.06%	-0.21%
« Side 5 »	-0.47%	-1.48%	**-5.93**%	-0.74%	-1.11%
« Junc 6 »	0.99%	2.65%	4.54%	0.72%	0.87%

QNM	k=1 - BC3	k=2 - BC6	k=3 - BC10	k=4 - BC26	k=5 - BC40
« Top 1 »	0.96%	2.54%	1.21%	0.68%	0.84%
« Top 2 »	0.27%	0.78%	-0.47%	-0.25%	-0.56%
« Bot 3 »	1.09%	2.91%	4.31%	0.78%	0.96%
« Bot 4 »	0.36%	1.03%	-0.48%	-0.06%	-0.24%
« Side 5 »	-0.55%	-1.73%	**-8.16%**	-0.98%	-1.53%
« Junc 6 »	1.13%	3.03%	4.78%	0.81%	0.98%

P5. Approximation d'un réseau thermique par la méthode « simultanée »

P5.1. Méthode Pivot de Gauss

Le système linéaire des scénarii imbriqués peut être mis sous une forme triangulaire de manière à faciliter sa résolution.

```
tr_MT2 := | b ← Q
          | A ← MT
          | n ← lignes(MT)
          | for k ∈ 1..n − 1
          |   | pivot ← A_{k,k}
          |   | for i ∈ k + 1..n
          |   |   | q ← A_{i,k} / pivot
          |   |   | b_i ← b_i − q·b_k
          |   |   | for j ∈ k + 1..n
          |   |   |   A_{i,j} ← A_{i,j} − q·A_{k,j}
          |   |   | A_{i,k} ← 0
          | A
```

P5.2. Méthode de remontée

Si $[\Delta \boldsymbol{T}]$ est une matrice triangulaire supérieure et si sa diagonale n'a aucun élément nul, la solution est du système s'écrit :

$$[\Delta \boldsymbol{T}][Y] = q \quad avec \quad [T] = \begin{cases} Y_n = q_n / \Delta T_{n,n} \\ Y_i = \left[q_i - \sum_{j=i+1}^{n} \Delta T_{i,j} \cdot Y_j \right] \Big/ \Delta T_{i,i} \end{cases} \tag{e481}$$

On en déduit les conductances du réseau sous la forme d'un vecteur.

P5.3. Résultat de la méthode de régression linéaire (SM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode SM :

$$[\boldsymbol{G}]_{SM} = \begin{pmatrix} 6.48 & -0.23 & 0 & 0 & 0 & -6.25 \\ -0.23 & 15.95 & -3.72 & -6.7 & -5.28 & -0.03 \\ 0 & -3.72 & 187.92 & -0.02 & 0 & -184.19 \\ 0 & -6.7 & -0.02 & 19.15 & -5.55 & -6.88 \\ 0 & -5.28 & 0 & -5.55 & 10.83 & 0 \\ -6.25 & -0.03 & -184.19 & -6.88 & 0 & 197.35 \end{pmatrix} \cdot mW/K \tag{e482}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode SM :

$$[\boldsymbol{R}]_{SM} = \begin{pmatrix} 0 & 4309.8 & 0 & 0 & 0 & 160 \\ 4309.8 & 0 & 269 & 149.3 & 189.5 & 0 \\ 0 & 269 & 0 & 0 & 0 & 5.4 \\ 0 & 149.3 & 0 & 0 & 180.2 & 145.3 \\ 0 & 189.5 & 0 & 180.2 & 0 & 0 \\ 160 & 0 & 5.4 & 145.3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \tag{e483}$$

Bilan des prédictions du modèle :

Table 121 : Comportement thermique du réseau de résistances SM

SM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	210.1	-18.4	72.2	-20.2	13.4	-47	127.1	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.8	-62.1	61.5	-61.5	8	-100.2	118.6	-22.2	71.8	-13.5
« Bot 3 »	213.2	-1.2	75.6	-2.1	20.9	-0.6	128	-36	80	-45
« Bot 4 »	202.8	-2.1	65.4	-3.4	13.5	-0.7	118.3	-61.4	70.5	-73.1
« Side 5 »	194.7	-66.2	57.7	-62.8	10.7	-1.5	116.3	-23.7	69.8	-14.2
« Junc 6 »	213.5	150	75.9	150	21.2	150	128.4	150	80.4	150

Cette méthode donne des résultats réellement probants, lorsque les matrices des températures sont imbriquées.

L'erreur maximale relevée est de l'ordre de 0.01%.

P5.4. La méthode de régression non-linéaire (QNM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode QNM :

$$[\boldsymbol{G}]_{QNM} = \begin{pmatrix} 6.41 & -0.22 & 0 & 0 & 0 & -6.19 \\ -0.22 & 15.95 & -3.76 & -6.69 & -5.28 & 0 \\ 0 & -3.76 & 189.49 & 0 & 0 & -185.73 \\ 0 & -6.69 & 0 & 19.15 & -5.55 & -6.9 \\ 0 & -5.28 & 0 & -5.55 & 10.83 & 0 \\ -6.19 & 0 & -185.73 & -6.9 & 0 & 198.82 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e484)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode QNM :

$$[\boldsymbol{R}]_{QNM} = \begin{pmatrix} 0 & 4593.1 & 0 & 0 & 0 & 161.5 \\ 4593.1 & 0 & 266.1 & 149.4 & 189.4 & 0 \\ 0 & 266.1 & 0 & 0 & 0 & 5.4 \\ 0 & 149.4 & 0 & 0 & 180.1 & 145 \\ 0 & 189.4 & 0 & 180.1 & 0 & 0 \\ 161.5 & 0 & 5.4 & 145 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e485)}$$

Bilan des prédictions du modèle QNM :

Table 122 : Comportement thermique du réseau de résistances QNM

QNM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	210.1	-18.4	72.2	-20.2	13.4	-46.9	127.1	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.8	-62.1	61.5	-61.5	8	-100.3	118.6	-22.2	71.8	-13.5
« Bot 3 »	213.2	-1.2	75.6	-2.1	20.9	-0.6	128	-36	80	-45
« Bot 4 »	202.8	-2.1	65.4	-3.4	13.5	-0.7	118.3	-61.4	70.5	-73.1
« Side 5 »	194.7	-66.2	57.7	-62.8	10.7	-1.5	116.3	-23.7	69.8	-14.2
« Junc 6 »	213.5	150	75.9	150	21.2	150	128.4	150	80.4	150

Cette méthode donne des résultats très proches, l'erreur maximale relevée est de l'ordre de 0.25%.

P5.5. La méthode de régression non-linéaire (CGM)

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode CGM :

$$[\boldsymbol{G}]_{CGM} = \begin{pmatrix} 6.41 & -0.22 & 0 & 0 & 0 & -6.19 \\ -0.22 & 15.95 & -3.76 & -6.69 & -5.28 & 0 \\ 0 & -3.76 & 189.49 & 0 & 0 & -185.73 \\ 0 & -6.69 & 0 & 19.15 & -5.55 & -6.9 \\ 0 & -5.28 & 0 & -5.55 & 10.83 & 0 \\ -6.19 & 0 & -185.73 & -6.9 & 0 & 198.82 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e486)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode CGM :

$$[\boldsymbol{R}]_{CGM} = \begin{pmatrix} 0 & 4593.1 & 0 & 0 & 0 & 161.5 \\ 4593.1 & 0 & 266.1 & 149.4 & 189.4 & 0 \\ 0 & 266.1 & 0 & 0 & 0 & 5.4 \\ 0 & 149.4 & 0 & 0 & 180.1 & 145 \\ 0 & 189.4 & 0 & 180.1 & 0 & 0 \\ 161.5 & 0 & 5.4 & 145 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e487)}$$

Bilan des prédictions du modèle CGM :

Table 123 : Comportement thermique du réseau de résistances CGM

CGM	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	210.1	-18.4	72.2	-20.2	13.4	-46.9	127.1	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.8	-62.1	61.5	-61.5	8	-100.3	118.6	-22.2	71.8	-13.5
« Bot 3 »	213.2	-1.2	75.6	-2.1	20.9	-0.6	128	-36	80	-45
« Bot 4 »	202.8	-2.1	65.4	-3.4	13.5	-0.7	118.3	-61.4	70.5	-73.1
« Side 5 »	194.7	-66.2	57.7	-62.8	10.7	-1.5	116.3	-23.7	69.8	-14.2
« Junc 6 »	213.5	150	75.9	150	21.2	150	128.4	150	80.4	150

Comme le démontre cette table, la méthode des gradients conjugués donne dans ce cas les mêmes résultats que la méthode Quasi-Newton.

P6. Mise en œuvre d'un algorithme génétique

P6.1. Initialisation – Choix aléatoire des réseaux

- Définition des variables locales :
- Choix du nombre de population : Np ;
- Définition du nombre de nœuds du réseau : Nr ;
- Définition de la valeur maximum des résistances thermiques : $R_{i,j} = 10^n\, K/W$
- Génération de Np matrices supérieures de taille $Nr \times Nr$:

```
MR := | for kk ∈ 1..Np
      |   for ii ∈ 1..Nn
      |     for jj ∈ ii..Nn
      |       R_{ii,jj} ← 10^aléatoire(6)
      |       R_{ii,ii} ← 0
      |   A_kk ← R
      | A
```

P6.2. Évaluation – test des scores

- Définition des variables locales :
- Définition du nœud de jonction : Nj ;
- Choix de la pondération température/flux : ω
- Définition du nombre de conditions aux limites Nbc ;
- Définition des surfaces externes S_i ;
- Définition des coefficients d'échange thermique $h_i^{<Nbc>}$;
- Définition des conductances thermiques du réseau $G_{i,j} = 1/R_{i,j}$
- Identification du nœud source ou jonction

```
Js(Nj,Nn) := | for i ∈ 1..Nn
             |   Js_i ← 0
             |   Js_i ← 1 if i = Nj
             | Js
```

- Génération des conductances thermiques externes

```
Ge(Nbc) := | "Junction - noeuds 1"
           | Ge_1 ← 0
           | for i ∈ 1..Nn − 1
           |   Ge_{i+1} ← S_i·(h^⟨Nbc⟩)_i
           | Ge
```

- Création du réseau de conductances thermiques $G_{i,j}$

```
Gc(LU) := | RC ← LU + LU^T
          | nN ← lignes(RC)
          | for i ∈ 1..nN
          |   for j ∈ 1..nN
          |     Gc_{i,j} ← 0·W/K if RC_{i,j} = 0
          |     Gc_{i,j} ← −1/(RC_{i,j}·K/W) otherwise
          |   Gc_{i,i} ← −Σ_{j=1}^{nN} Gc_{i,j}
          | "Réseau complet"
          | Gc ← Gc
```

- Calcul des températures et des flux externes pour chacun des scénarios

$$Tx(LU, Nbc) := (Gc(LU) + diag(Ge(Nbc)))^{-1} \cdot [Ge(Nbc) \cdot Ta + (Jc \cdot Pd_c)]$$

$$Px(LU, Nbc) := diag(Ge(Nbc)) \cdot (Tx(LU, Nbc) - Ta)$$

- Calcul du score

$$Sc(LU) := 1 - \left[\sum_{Nc=1}^{Nbc} \left[\omega \cdot \left| \frac{Tx(LU, Nc)_1 - \left(Tr^{\langle Nc \rangle}\right)_1}{\left(Tr^{\langle Nc \rangle}\right)_1 - Ta} \right|^2 + \frac{(1-\omega)}{(Nn-1)} \cdot \sum_{No=2}^{Nn} \frac{\left| Px(LU, Nc)_{No} - \left(Pr^{\langle Nc \rangle}\right)_{No} \right|}{\left(Pr^{\langle Nc \rangle}\right)_{No}} \right] \right]$$

P6.3. Sélection - Tri des meilleurs parents

- Définition des variables locales :
- Définition du nombre de parents retenus Nkp
- Identification du numéro des « meilleurs » parents

$$\begin{aligned}
&tri(Nkp, LU) := \\
&\quad \text{for } i \in 1..Np \\
&\quad\quad A_{i,1} \leftarrow i \\
&\quad\quad A_{i,2} \leftarrow Sc(LU_i) \\
&\quad B \leftarrow tricol(A, 2) \\
&\quad i \leftarrow 1 \\
&\quad \text{for } j \in Np..(Np - Nkp) + 1 \\
&\quad\quad C_i \leftarrow B_{j,1} \\
&\quad\quad i \leftarrow i + 1 \\
&\quad C
\end{aligned}$$

- Reconfiguration des parents sélectionnés

$$\begin{aligned}
&Parent(LU) := \\
&\quad Npp \leftarrow tri(Nk, LU) \\
&\quad pop \leftarrow lignes(tri(Nk, LU)) \\
&\quad \text{for } i \in 1..pop \\
&\quad\quad j \leftarrow Npp_i \\
&\quad\quad Rp_i \leftarrow sousmatrice(LU_j, 1, Nn - 1, 2, Nn) \\
&\quad Rp
\end{aligned}$$

P6.4. Création des enfants par croisement

- Croisement aléatoire d'un nombre aléatoire de résistances pour des parents aléatoirement choisis

```
Enfant(LU) := | "crossover"
              | for m ∈ 1.. Np − Nk
              |   "sélection aléatoire des parents"
              |   Sp ← partentière(aunif(2, 1, Nk))
              |   pp ← Sp_{1,1}
              |   mm ← Sp_{2,1}
              |   X ← Parent(LU)_pp
              |   Y ← Parent(LU)_mm
              |   XY ← Parent(LU)_pp
              |   k ← 1
              |   "Sélection aléatoire des résistances échangées"
              |   Sel ← arrondi(aunif(Nr_up, 0, 1), 0)
              |   for ii ∈ 1.. Nn − 1
              |     for jj ∈ ii.. Nn − 1
              |       | XY_{ii,jj} ← Y_{ii,jj} if Sel_k = 1
              |       | k ← k + 1
              |   Child_m ← XY
              | Child
```

P6.5. Formation de la nouvelle génération à évaluer

- Regroupement des meilleurs parents et des enfants créés

```
MPE := pile(MParent, MEnfant)
```

P7. Approximation d'un réseau thermique par les algorithmes génétiques

P7.1. Réseau élaboré sur 6 conditions aux limites

Matrice des conductances thermiques identifiées par la méthode GA :

$$[\boldsymbol{G}]_{GA} = \begin{pmatrix} 6.47 & 0 & -0.16 & -0.36 & 0 & -5.96 \\ 0 & 15.77 & -3.45 & -5.56 & -5.96 & -0.8 \\ -0.16 & -3.45 & 287.09 & -6.47 & 0 & -277.0 \\ -0.36 & -5.56 & -6.47 & 18.52 & -6.13 & 0 \\ 0 & -5.96 & 0 & -6.13 & 12.09 & 0 \\ -5.96 & -0.8 & -277.0 & 0 & 0 & 283.76 \end{pmatrix} \cdot mW/K \qquad \text{(e488)}$$

Matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode GA :

$$[\boldsymbol{R}]_{GA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6451.3 & 2813.3 & 0 & 167.9 \\ 0 & 0 & 290.0 & 179.7 & 167.8 & 1251.6 \\ 6451.3 & 290.0 & 0 & 154.5 & 0 & 3.61 \\ 2813.3 & 179.7 & 154.5 & 0 & 163.1 & 0 \\ 0 & 167.8 & 0 & 163.1 & 0 & 0 \\ 167.9 & 1251.6 & 3.61 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \qquad \text{(e489)}$$

Bilan des prédictions du modèle GA :

Table 124 : Comportement thermique du réseau de résistances GA

GA	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	209.8	-18.4	71.9	-20.2	13.4	-47.0	126.9	-6.7	79.4	-4.2
« Top 2 »	198.5	-62.1	61.3	-61.5	8.0	-100.2	118.8	-22.2	72.0	-13.5
« Bot 3 »	212.8	-1.2	75.2	-2.1	20.8	-0.6	128.1	-36.0	80.1	-45.0
« Bot 4 »	202.5	-2.1	65.1	-3.4	13.4	-0.7	118.1	-61.4	70.4	-73.1
« Side 5 »	195.0	-66.2	58.0	-62.8	10.6	-1.5	116.5	-23.7	70.0	-14.2
« Junc 6 »	213.2	150.0	75.7	150	21.1	150	128.6	150	80.6	150

P7.2. Réseau construit à partir de 7 conditions aux limites

Matrice des nouvelles conductances thermiques identifiées par la méthode GA :

$$[\boldsymbol{G}]_{GA} = \begin{pmatrix} 6.56 & 0 & -6.39 & -0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 15.21 & 0 & -5.57 & -5.47 & -4.16 \\ -6.39 & 0 & 197.26 & -2.19 & 0 & -188.68 \\ -0.17 & -5.57 & -2.19 & 17.71 & -5.55 & -4.23 \\ 0 & -5.47 & 0 & -5.55 & 11.02 & 0 \\ 0 & -4.16 & -188.68 & -4.23 & 0 & 197.07 \end{pmatrix} \cdot mW/K \quad \text{(e490)}$$

Matrice des nouvelles résistances thermiques identifiées par la méthode GA :

$$[\boldsymbol{R}]_{GA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 156.5 & 5800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 179.5 & 182.7 & 240.2 \\ 156.5 & 0 & 0 & 456.2 & 0 & 5.3 \\ 5800 & 179.5 & 456.2 & 0 & 180.3 & 236.6 \\ 0 & 182.7 & 0 & 180.3 & 0 & 0 \\ 0 & 240.2 & 5.3 & 236.6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \quad \text{(e491)}$$

Bilan des prédictions du modèle :

Table 125 : Comportement thermique du réseau de résistances ajusté sur 7 conditions

GA	k=1 (BC3)		k=2 (BC6)		k=3 (BC10)		k=4 (BC26)		k=5 (BC40)	
Nœuds	$T_i^{<1>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<2>}$	$Q_i^{<2>}$	$T_i^{<3>}$	$Q_i^{<3>}$	$T_i^{<4>}$	$Q_i^{<4>}$	$T_i^{<5>}$	$Q_i^{<5>}$
« Top 1 »	210.1	-18.4	72.2	-20.2	13.4	-47.0	126.9	-6.7	79.2	-4.2
« Top 2 »	198.7	-62.1	61.4	-61.5	8.0	-100.2	118.9	-22.2	72.1	-13.5
« Bot 3 »	213.2	-1.2	75.6	-2.1	20.8	-0.6	128.1	-36.0	80.1	-45.0
« Bot 4 »	202.8	-2.1	65.4	-3.4	13.6	-0.7	118.1	-61.4	70.4	-73.1
« Side 5 »	194.7	-66.2	57.7	-62.8	10.7	-1.5	116.3	-23.7	69.9	-14.2
« Junc 6 »	213.4	150.0	75.8	150	21.1	150	128.5	150	80.5	150

L'optimisation des valeurs du réseau par un algorithme génétique procure des résultats réellement probants. L'erreur maximale relevée sur les températures est de l'ordre de ±0.6% (Table 126).

Celle-ci n'excède pas ±0.15% pour la température de jonction et elle peut être considérée comme sur les flux quittant le réseau.

P7.3. Comparaison des prédictions des 2 réseaux déduits par l'Algorithme génétique

Les erreurs relatives sur les températures et sur les flux sont identiques.

Table 126 : Précision du réseau de résistances créé sur la base de 6 scénarii

AG 6 conditions	k=1 (BC3)	k=2 (BC6)	k=3 (BC10)	k=4 (BC26)	k=5 (BC40)	k=6 (BC46)
« Top 1 »	-0.16%	-0.41%	0.03%	-0.09%	-0.11%	-0.22%
« Top 2 »	-0.12%	-0.34%	0.00%	0.14%	0.32%	0.53%
« Bot 3 »	-0.18%	-0.46%	-0.43%	0.02%	0.12%	0.10%
« Bot 4 »	-0.16%	-0.47%	-0.53%	-0.13%	-0.18%	-0.52%
« Side 5 »	0.17%	0.51%	-0.47%	0.20%	0.27%	0.34%
« Junc 6 »	-0.12%	-0.30%	-0.08%	0.09%	0.22%	0.30%

Table 127 : Précision du réseau de résistances créé sur la base de 7 scénarii

AG 7 conditions	k=1 (BC3)	k=2 (BC6)	k=3 (BC10)	k=4 (BC26)	k=5 (BC40)	k=6 (BC46)
« Top 1 »	0.01%	0.00%	0.06%	-0.15%	-0.27%	-0.64%
« Top 2 »	-0.02%	-0.06%	-0.03%	0.19%	0.42%	0.64%
« Bot 3 »	0.01%	0.01%	-0.45%	0.07%	0.16%	0.09%
« Bot 4 »	-0.01%	-0.03%	0.64%	-0.12%	-0.19%	-0.43%
« Side 5 »	0.02%	0.06%	-0.05%	0.07%	0.16%	0.11%
« Junc 6 »	-0.02%	-0.06%	-0.11%	0.04%	0.12%	0.05%

P8. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 via les algorithmes génétiques

P8.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites

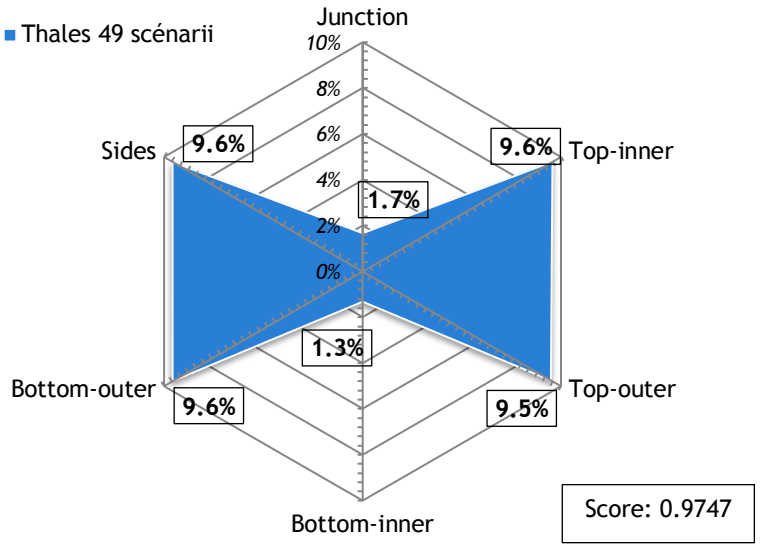
La matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode GA est fournie ci-dessous.

Les 6 nœuds sont définis en considérant l'ordre suivant : 1= « Junction », 2= « Top-inner »,3= « Top-outer »,4= « Bottom-inner », 5= « Bottom-outer » et 6= « Sides ».

$$[\boldsymbol{R}]_{49cas_Si} = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 0 & 5.4 & 144.9 & 0 \\ 160 & 0 & 4300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4300 & 0 & 267 & 149.3 & 189.4 \\ 5.4 & 0 & 267 & 0 & 0 & 0 \\ 144.9 & 0 & 149.3 & 0 & 0 & 180.2 \\ 0 & 0 & 189.4 & 0 & 180.2 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \qquad \text{(e492)}$$

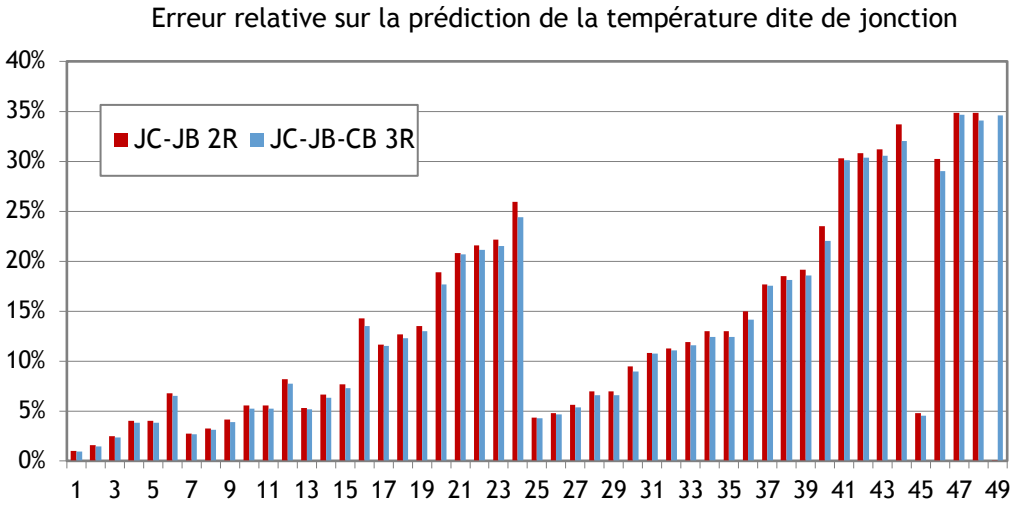
P8.2. État des erreurs maximales sur les 6 nœuds du réseau DELPHI (49-cas)

L'erreur relative sur les températures des surfaces externes du réseau (e492) n'excède pas 10%.

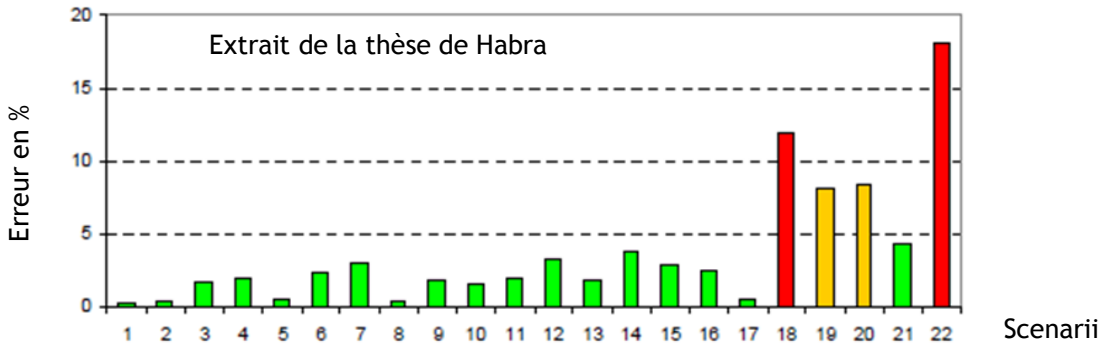


P8.3. Réseau simplifié de type 2R et 3R

Les réseaux de type « 2R » ou « 3R » sont à proscrire.



Les réseaux de type « star-model » ne procurent pas une solution peu dépendante des conditions limites comme l'illustre l'extrait ci-dessous.



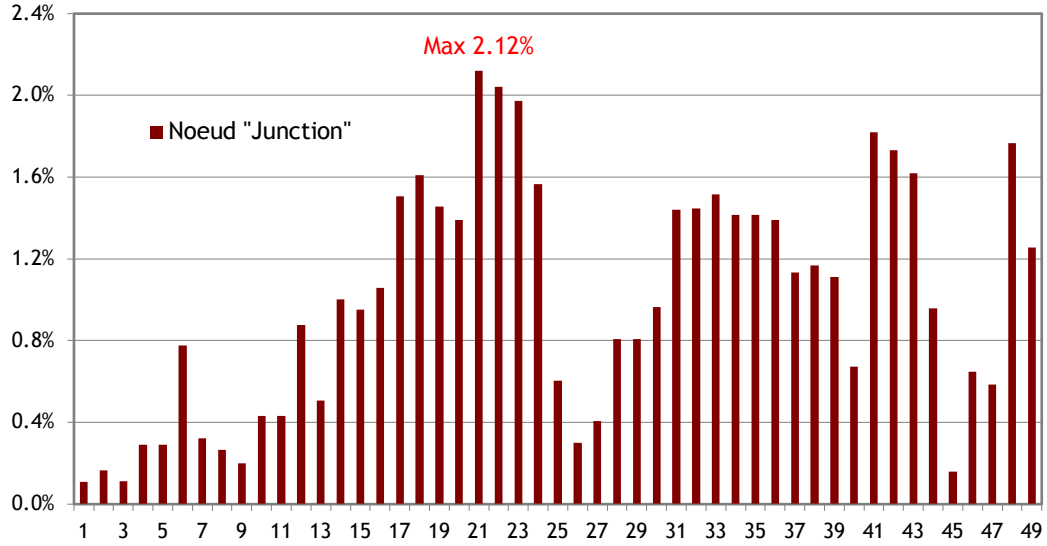
P8.4. Réseau élaboré sur la base de 38 conditions aux limites

La matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode GA est fournie ci-dessous.

$$[\boldsymbol{R}]_{38cas_Si} = \begin{pmatrix} 0 & 174.7 & 234 & 5.6 & 163 & 0 \\ 174.7 & 0 & 0 & 0 & 4428.6 & 0 \\ 234 & 0 & 0 & 0 & 167.2 & 173.4 \\ 5.6 & 0 & 267 & 0 & 0 & 0 \\ 163 & 4428.6 & 167.2 & 0 & 0 & 125.6 \\ 0 & 0 & 173.4 & 0 & 125.6 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \qquad \text{(e493)}$$

La pertinence des prédictions du modèle nodal (e493), testé sur le jeu de conditions aux limites du DELPHI (49-cas), est illustrée ci-après.

L'erreur relative maximale sur le nœud de « Junction » n'excède pas 2.5%. Le réseau nodal approximé apparait peu dépendant des conditions aux limites.



P9. Approximation du réseau nodal d'un QFN16 doté d'une puce AsGa

P9.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites

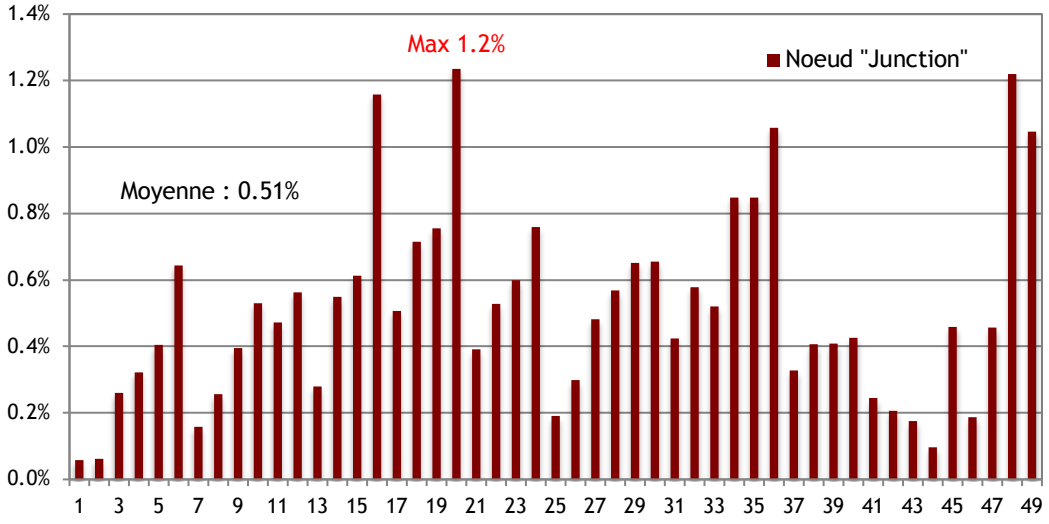
La matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode GA est fournie ci-dessous.

Les 6 nœuds sont définis en considérant l'ordre suivant : 1= « Junction », 2= « Top-inner »,3= « Top-outer »,4= « Bottom-inner », 5= « Bottom-outer » et 6= « Sides ».

$$[\boldsymbol{R}]_{49cas_AsGa} = \begin{pmatrix} 0 & 134 & 269.5 & 5.66 & 1474.8 & 4491.5 \\ 134 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 269.5 & 0 & 0 & 0 & 142.3 & 183.7 \\ 5.66 & 0 & 0 & 0 & 159.8 & 0 \\ 1474.8 & 0 & 142.3 & 159.8 & 0 & 183.5 \\ 4491.5 & 0 & 183.7 & 0 & 183.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \qquad \text{(e494)}$$

P9.2. Qualité de l'ajustement du réseau pour les 49 conditions aux limites

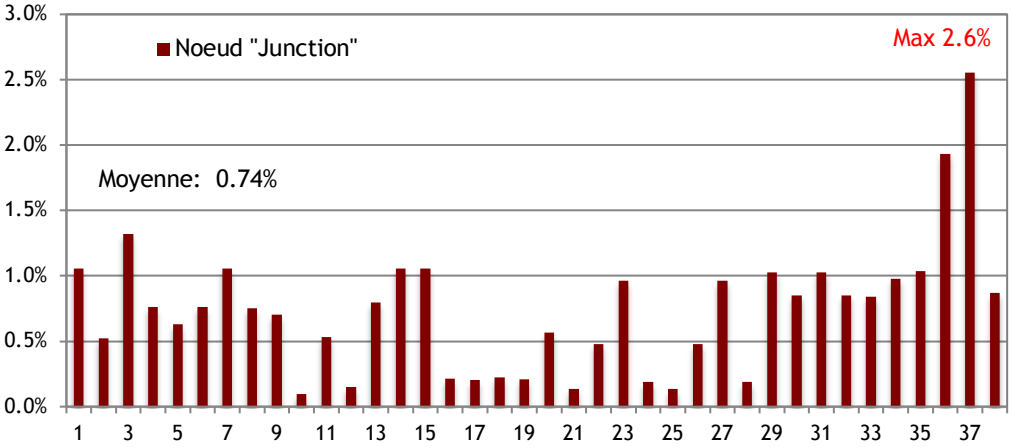
Les divergences entre le modèle détaillé et le modèle nodal dérivé (e494) sont décrites ci-après.



L'erreur maximale sur la température maximale du nœud dit de « Junction » est en deçà de 1.4%.

P9.3. Validation du réseau pour les 38 conditions aux limites de « test »

La représentativité des prédictions du réseau nodal (e494), est testée sur le jeu de 38 conditions aux limites du JEDEC. L'erreur relative maximale sur la température du nœud de « Junction » n'excède pas 2.6%.



P10. Approximation du réseau nodal d'un QFN48

P10.1. Réseau élaboré sur la base de 49 conditions aux limites

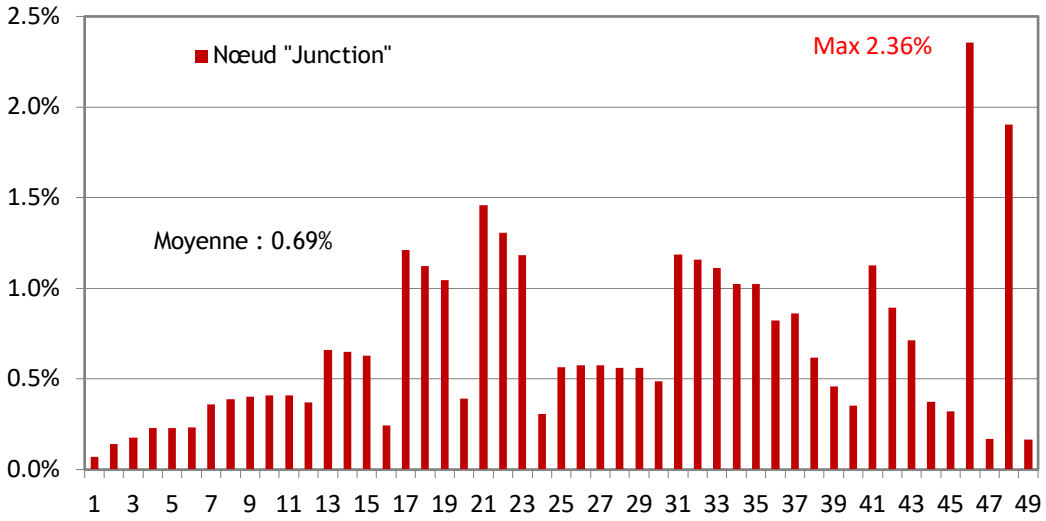
La matrice des résistances thermiques identifiées par la méthode GA est fournie ci-dessous.

Les 6 nœuds sont définis en considérant l'ordre suivant : 1= « Junction », 2= « Top-inner »,3= « Top-outer »,4= « Bottom-inner », 5= « Bottom-outer » et 6= « Sides ».

$$[R]_{49cas_QFN48} = \begin{pmatrix} 0 & 27.4 & 185 & 1.1 & 227.3 & 3619 \\ 27.4 & 0 & 0 & 0 & 32610 & 0 \\ 185 & 0 & 0 & 0 & 38.9 & 106.9 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 & 115.7 & 0 \\ 227.3 & 32610 & 38.9 & 115.7 & 0 & 127.7 \\ 3619 & 0 & 106.9 & 0 & 127.7 & 0 \end{pmatrix} \cdot K/W \qquad \text{(e495)}$$

P10.2. Qualité de l'ajustement du réseau pour les 49 conditions aux limites

Les divergences entre le modèle détaillé et le modèle nodal dérivé (e495) sont décrites ci-après.



L'erreur maximale sur la température maximale du nœud dit de « Junction » est en deçà de 2.4%.

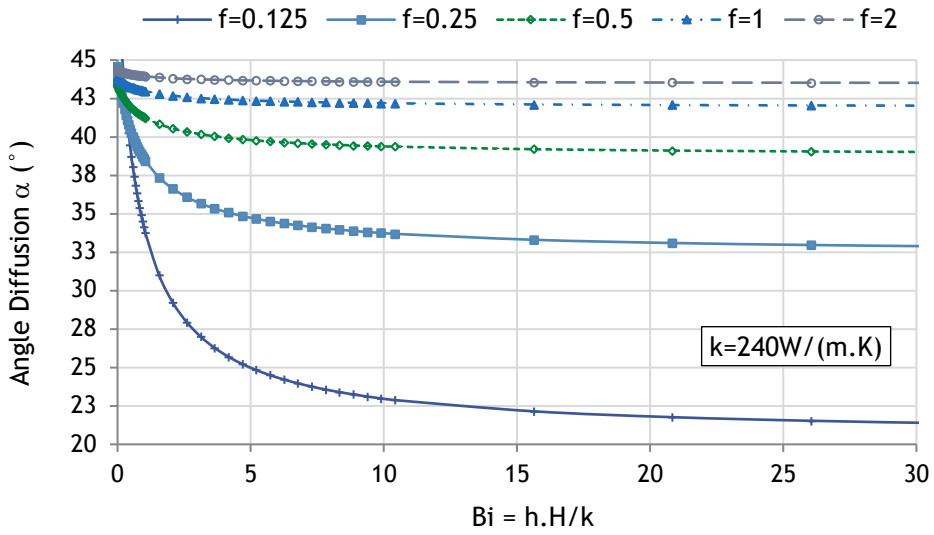
P11. Définition du coefficient de corrélation

L'expression retenue du coefficient de corrélation est la suivante :

$$\hat{r} = \{\sigma_{xy}/[\,\sigma_x\,\sigma_{xy}]\}^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right] \Big/ \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}\right] \qquad \text{(e496)}$$

P12. Variabilité de l'angle de diffusion de la chaleur

L'évolution de l'angle de diffusion pour une condition de Fourier est décrite pour quatre configurations géométriques. La taille de la source de chaleur et celle du substrat ont été modifiées. La conductivité thermique choisie correspond à celle d'un aluminium de bonne qualité.



L'angle de diffusion doit être correctement pris en compte pour éviter des erreurs significatives.

P13. Fonction de transfert temporel d'ordre 2

Dans le cas de cellule de réseau de type Foster décrit en Figure 116, l'impédance dans le domaine de Laplace est définie par :

$$Z(p) = \left[\frac{1}{Z_{1,1}} + \frac{1}{Z_{1,2}}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{Z_{2,1}} + \frac{1}{Z_{2,2}}\right]^{-1} = \left[C_1\, p + \frac{1}{R_1}\right]^{-1} + \left[C_2\, p + \frac{1}{R_2}\right]^{-1} \quad \text{(e497)}$$

$$Z(p) = \frac{R_1}{R_1\, C_1\, p + 1} = R_1 \left[\frac{1}{\tau_1\, p + 1}\right]$$

Si le signal a la forme d'une fonction d'Heaviside sa transformée de Laplace a pour expression :

$$\Gamma(\mathrm{t}) = 1 \text{ si } \mathrm{t} \in [0, +\infty[\;\rightarrow v_e(p) = \int_0^{+\infty} \Gamma(\mathrm{t})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\cdot\mathrm{t}} \cdot \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{\mathrm{p}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\cdot\mathrm{t}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\mathrm{p}} \quad \text{(e498)}$$

On retrouve entre les crochets, la forme de l'expression (e104) multipliée par la valeur de la résistance R_1.

$$Z(p)\, \frac{1}{p} = R_1/[\, p\, (R_1\, C_1\, p + 1)\,] = R_1/[p\, (\tau_1\, p + 1)] \quad \text{(e499)}$$

On en déduit, la forme généralisée dans le domaine temporel pour nRC cellules.

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{nRC} R_i\, [1 - exp\, (-t/R_i\, C_i)] = \sum_{i=1}^{nRC} R_i\, [1 - exp\, (-t/\tau_i)] \quad \text{(e500)}$$

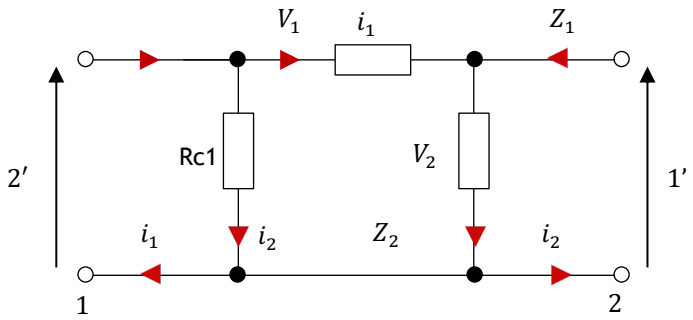
Celle-ci est aisément vérifiable en utilisant la transformation symbolique d'un outil comme Mathcad®.

$$\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \left(\frac{\mathrm{R}_1}{1 + \tau_1 \cdot \mathrm{p}} + \frac{\mathrm{R}_2}{1 + \tau_2 \cdot \mathrm{p}} + \frac{\mathrm{R}_3}{1 + \tau_3 \cdot \mathrm{p}}\right) \text{laplaceinv, p, t}$$
$$\rightarrow \mathrm{R}_1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \cdot \mathrm{R}_2 - e^{-\frac{t}{\tau_3}} \cdot \mathrm{R}_3 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cdot \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3 \quad \text{(e501)}$$

P14. Expression matricielle de quadripôles usuels

P14.1. Quadripôles en π

Son circuit électrique est schématisé ci-dessous.

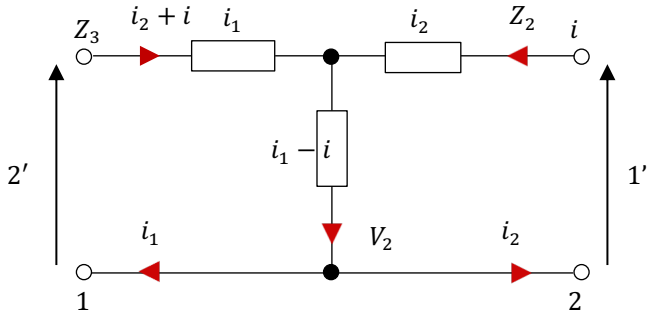


La matrice de ces impédances est définie par :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_3 \cdot (Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \; ou \; \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{(e502)}$$

P14.2. Quadripôles en T

Ce type de circuit a la forme ci-dessous.



La matrice de ces impédances est définie par :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{(e503)}$$

Si $Z_3 = 0$, on retrouve le cas exposé Figure 129 puis déduire l’expression (e101) si $i_2 = 0$.

P15. Table de Tagushi

Les Table 128 et Table 129 décrivent une table de Tagushi L64 destiné à identifier une relation dépendant de 6 variables.

Table 128 : Représentation du plan d'expériences utilisant 64 simulations

Cas	L_C	U	k_{XY}	k_Z	β	H_C	$\overline{h}_T$	Modèle
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	52.21	51.99
2	-1	-1	-1	-1	-1	1	76.26	76.11
3	-1	-1	-1	-1	1	-1	33.93	33.49
4	-1	-1	-1	-1	1	1	53.37	53.10
5	-1	-1	-1	1	-1	-1	49.23	49.06
6	-1	-1	-1	1	-1	1	76.23	75.87
7	-1	-1	-1	1	1	-1	31.81	31.48
8	-1	-1	-1	1	1	1	53.29	52.89
9	-1	-1	1	-1	-1	-1	56.93	56.12
10	-1	-1	1	-1	-1	1	76.60	75.97
11	-1	-1	1	-1	1	-1	35.70	35.44
12	-1	-1	1	-1	1	1	53.55	53.49
13	-1	-1	1	1	-1	-1	53.61	53.31
14	-1	-1	1	1	-1	1	76.67	76.14
15	-1	-1	1	1	1	-1	33.01	33.32
16	-1	-1	1	1	1	1	53.59	53.78
17	-1	1	-1	-1	-1	-1	168.70	168.80
18	-1	1	-1	-1	-1	1	190.40	190.53
19	-1	1	-1	-1	1	-1	152.70	152.62
20	-1	1	-1	-1	1	1	158.80	158.87
21	-1	1	-1	1	-1	-1	167.70	167.64
22	-1	1	-1	1	-1	1	190.40	190.26
23	-1	1	-1	1	1	-1	150.70	150.76
24	-1	1	-1	1	1	1	158.60	158.57
25	-1	1	1	-1	-1	-1	169.30	168.78
26	-1	1	1	-1	-1	1	190.30	189.82
27	-1	1	1	-1	1	-1	153.60	153.70
28	-1	1	1	-1	1	1	158.20	158.38
29	-1	1	1	1	-1	-1	168.20	167.98
30	-1	1	1	1	-1	1	190.00	189.67
31	-1	1	1	1	1	-1	150.80	151.52
32	-1	1	1	1	1	1	156.90	157.56

L'exemple ci-dessus donné traduit l'évolution du coefficient d'échange de la face supérieure d'un cube posé sur un substrat anisotrope ($k_{XY} \neq k_Z$).

Les résultats des simulations numériques sont donnés dans la partie grisée et la colonne dénommée « modèle » indique les prédictions fournis par un modèle révisé de Tagushi.

Les valeurs déduites de la simulation procurent les données nécessaires à la formulation de la moyenne, des effets et des interactions.

Table 129 : Représentation du plan d'expériences utilisant 64 simulations (bis)

Cas	L_C	U	k_{XY}	k_Z	β	H_C	$\overline{h}_T$	Modèle
33	1	-1	-1	-1	-1	-1	14.45	14.78
34	1	-1	-1	-1	-1	1	18.51	18.92
35	1	-1	-1	-1	1	-1	12.62	12.52
36	1	-1	-1	-1	1	1	15.05	14.98
37	1	-1	-1	1	-1	-1	14.05	14.12
38	1	-1	-1	1	-1	1	18.50	18.62
39	1	-1	-1	1	1	-1	12.38	12.15
40	1	-1	-1	1	1	1	15.01	14.82
41	1	-1	1	-1	-1	-1	13.64	13.36
42	1	-1	1	-1	-1	1	18.05	17.85
43	1	-1	1	-1	1	-1	10.93	10.95
44	1	-1	1	-1	1	1	14.10	14.21
45	1	-1	1	1	-1	-1	12.79	12.71
46	1	-1	1	1	-1	1	17.87	17.83
47	1	-1	1	1	1	-1	10.38	10.75
48	1	-1	1	1	1	1	13.87	14.25
49	1	1	-1	-1	-1	-1	58.64	59.24
50	1	1	-1	-1	-1	1	60.81	61.47
51	1	1	-1	-1	1	-1	55.70	55.90
52	1	1	-1	-1	1	1	53.02	53.27
53	1	1	-1	1	-1	-1	58.15	58.56
54	1	1	-1	1	-1	1	60.81	61.21
55	1	1	-1	1	1	-1	55.19	55.32
56	1	1	-1	1	1	1	52.99	53.12
57	1	1	1	-1	-1	-1	55.98	55.92
58	1	1	1	-1	-1	1	59.90	59.94
59	1	1	1	-1	1	-1	52.30	52.58
60	1	1	1	-1	1	1	52.43	52.81
61	1	1	1	1	-1	-1	54.34	54.60
62	1	1	1	1	-1	1	59.71	59.89
63	1	1	1	1	1	-1	50.02	50.84
64	1	1	1	1	1	1	52.19	52.90

Dans ce cas, l'erreur relative n'excède pas 3% sur les bornes du domaine de référence.

Le calcul de la fonction $\overline{h}_U = f\ (L_C, U, k_{XY}, k_Z, \beta, H_C)$ se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
72.901	-37.764	38.583	-0.230	-0.433	-6.753	5.098

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
-17.958	-0.625	0.186	4.628	-3.809	-0.368	-0.007	-0.722	-1.241

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
-0.116	-0.194	-0.023	-0.045	0.348	-1.561

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
0.071	-0.083	0.066	0.673	-0.023	0.066	0.468	0.033	-0.159

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
0.843	-0.060	0.089	0.234	-0.100	-0.049	-0.914	-0.035	0.055

E_{356}	E_{456}
0.117	0

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
-0.053	0.049	0.065	0.139	0.588	0.019	0.036	-0.012	0.002

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
0.002	-0.032	0.008	-0.085	0.065	0.009

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}
0.008	0.059	0.150	-0.030	0.005	0.006

&

E_{123456}
0.017

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[A_{L_C} + C_{L_C} \; {L_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{L_C} \; {L_C}^{0.5} + D_{L_C} \, L_C \right] \quad \text{(e504)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}
18.6675	-3.8305	-8.3114	-0.1937

$$X_2(U) = \left[A_U + C_U \; U^{0.5} \right] / \left[1 + B_U \; U^{0.5} + D_U \, U \right] \quad \text{(e505)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-1.31795	-0.5021	0.85103	0.14108

$$X_3(k_{XY}) = \left[A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}} \; {k_{XY}}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_{XY}} \; {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_{XY} \right] \quad \text{(e506)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{k_{XY}}$
-1.9801	-0.0244	0.68086	0.029

$$X_4(k_Z) = \left[A_{k_Z} + C_{k_Z} \; {k_Z}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_Z} \; {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_Z \right] \quad \text{(e507)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
-4.20990	0.30524	5.5514	0.033

$$X_5(\beta) = \left[A_\beta + C_\beta \; \beta^{0.5} \right] / \left[1 + B_\beta \; \beta^{0.5} + D_\beta \, \beta \right] \quad \text{(e508)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
-4.2320	-0.1563	0.86803	0.037

$$X_6(H_C) = \left[A_{H_C} + C_{H_C}\ {H_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{H_C}\ {H_C}^{0.5} + D_{H_C} H_C \right] \quad \text{(e509)}$$

A_{H_C}	B_{H_C}	C_{H_C}	D_{H_C}
-1.1763	-0.878	0.8647	0.346

P16. Formulation multi-variable de Tagushi d'une résistance thermique

P16.1. Expression du coefficient d'échange des faces latérales du composant

Fonction : $\overline{h}_S = f\ (L_C, U, k_{XY}, k_Z, \beta, H_C)$

Celui-ci se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
71.258	-32.337	32.655	3.134	-2.979	-5.781	-0.762

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
-11.932	-3.582	0.717	5.402	-0.296	-0.692	-0.110	-1.026	8.246

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
-0.562	-0.873	-3.035	-0.087	2.146	0.064

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
0.228	-0.254	2.269	-5.377	-0.096	-0.093	2.732	0.273	-0.554

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
0.807	-0.069	0.050	0.216	-0.182	-0.024	-1.456	-0.172	0.300

E_{356}	E_{456}
0.549	-0.044

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
-0.005	-0.087	-0.005	0.058	0.273	1.727	0.254	0.135	0.141

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
-0.115	-0.086	-0.063	-0.117	0.043	0.051

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}
0.013	0.114	0.217	0.046	-0.123	-0.018

&

E_{123456}
0.066

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[A_{L_C} + C_{L_C}\ {L_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{L_C}\ {L_C}^{0.5} + D_{L_C} L_C \right] \quad \text{(e510)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}
-22.41	3.7533	9.4627	0.2061

$$X_2(U) = \left[A_U + C_U\ U^{0.5} \right] / \left[1 + B_U\ U^{0.5} + D_U\ U \right] \quad \text{(e511)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-1.36275	-0.3712	0.83434	0.06622

$$X_3(k_{XY}) = \left[A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}}\ {k_{XY}}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_{XY}}\ {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}} k_{XY} \right] \quad \text{(e512)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{k_{XY}}$
-2.7227	0.20588	0.98582	0.01835

$$X_4(k_Z) = \left[A_{k_Z} + C_{k_Z}\ {k_Z}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_Z}\ {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}} k_Z \right] \quad \text{(e513)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
-5.62748	0.91268	7.5396	0

$$X_5(\beta) = \left[A_\beta + C_\beta\ \beta^{0.5} \right] / \left[1 + B_\beta\ \beta^{0.5} + D_\beta\ \beta \right] \quad \text{(e514)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
-4.7746	0.06879	0.9261	0

$$X_6(H_C) = \left[A_{H_C} + C_{H_C}\ {H_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{H_C}\ {H_C}^{0.5} + D_{H_C} H_C \right] \quad \text{(e515)}$$

A_{H_C}	B_{H_C}	C_{H_C}	D_{H_C}
-2.1479	-1.5495	2.4165	1.1411

P16.2. Estimation du coefficient d'échange au droit de la source

Fonction : $\overline{\boldsymbol{h_B}} = \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{L_C}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{k_{XY}}, \boldsymbol{k_Z}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{H_C})$

Celui-ci se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
31.403	-4.189	19.178	-4.893	0.615	-0.282	-0.085

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
-2.281	2.791	-0.644	-0.058	-0.049	-2.387	0.239	-0.080	-0.062

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
0.017	0.131	0.033	-0.058	-0.003	-0.041

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
1.553	-0.291	-0.007	-0.033	0.138	-0.065	0.025	0.016	-0.001

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
-0.014	0.069	0.018	0.014	-0.006	0.002	-0.034	0.030	-0.013

E_{356}	E_{456}
0.015	0.002

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
0.016	-0.041	0.020	-0.003	-0.003	-0.013	-0.046	0.000	0.008

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
-0.005	0.001	-0.011	0.009	-0.001	-0.005

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}
-0.005	0.002	0.007	-0.003	-0.001	-0.004

&

E_{123456}
-0.001

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[A_{L_C} + C_{L_C} {L_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{L_C} {L_C}^{0.5} + D_{L_C} L_C \right] \quad \text{(e516)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}
-1.468	-0.212	0.4541	0.0348

$$X_2(U) = [A_U + C_U U^{0.5}] / [1 + B_U U^{0.5} + D_U U] \quad \text{(e518)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-1.602	-0.175	1.0151	0.0126

$$X_3(k_{XY}) = \left[A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}} {k_{XY}}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_{XY}} {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}} k_{XY} \right] \quad \text{(e519)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{\ XY}$
-5.758	1.2303	2.2062	-0.047

$$X_4(k_Z) = \left[A_{k_Z} + C_{k_Z} {k_Z}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_Z} {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}} k_Z \right] \quad \text{(e520)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
-5.53430	0.8741	7.4053	0

$$X_5(\beta) = \left[A_\beta + C_\beta \ \beta^{0.5} \right] / \left[1 + B_\beta \ \beta^{0.5} + D_\beta \beta \right] \quad \text{(e521)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
-1.6028	-0.143	0.28	0.005

$$X_6(H_C) = 1 \qquad \text{(e522)}$$

P16.3. Estimation du transfert thermique longitudinal au sein du substrat

Fonction : $\boldsymbol{R_{XY}}\ (\boldsymbol{L_C}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{kxy}, \boldsymbol{kz}, \boldsymbol{H_C})$

Celui-ci se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
78.832	-73.280	-0.375	-22.781	-34.030	-34.575	-0.308

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
0.110	20.470	32.290	33.293	-0.136	0.272	0.440	0.464	-0.378

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
7.962	7.032	0.291	15.678	0.255	0.267

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
0.018	-0.075	-0.022	-0.067	-7.535	-6.992	0.147	-15.389	0.168

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
0.168	-0.368	-0.410	0.337	-0.375	0.313	0.289	-1.849	-0.255

E_{356}	E_{456}
-0.261	-0.258

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
-0.001	-0.020	0.106	-0.071	0.131	0.158	2.114	-0.174	-0.178

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
-0.187	0.340	-0.292	-0.266	-0.265	0.252

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}
-0.187	0.340	-0.292	-0.266	-0.265	0.252

&

E_{123456}
0.195

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[A_{L_C} + C_{L_C}\ {L_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{L_C}\ {L_C}^{0.5} + D_{L_C}\ L_C \right] \qquad \text{(e523)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}
4.3654	-1.022	-2.2133	-0.1043

$$X_2(U) = [\, A_U + C_U \;\; U^{0.5} \,]/[\, 1 + B_U \;\; U^{0.5} + D_U \, U \,] \quad \text{(e524)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-1.75960	-0.0613	1.1661	-0.006

$$X_3(k_{XY}) = \left[\, A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}} \;\; {k_{XY}}^{0.5} \,\right]/\left[\, 1 + B_{k_{XY}} \;\; {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_{XY} \,\right] \quad \text{(e525)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{k_{XY}}$
-27.287	6.3345	12.0971	0.1097

$$X_4(k_Z) = \left[\, A_{k_Z} + C_{k_Z} \;\; {k_Z}^{0.5} \,\right]/\left[\, 1 + B_{k_Z} \;\; {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_Z \,\right] \quad \text{(e526)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
11.552	-6.1806	-16.731	0

$$X_5(\beta) = \left[\, A_\beta + C_\beta \;\; \beta^{0.5} \,\right]/\left[\, 1 + B_\beta \;\; \beta^{0.5} + D_\beta \, \beta \,\right] \quad \text{(e527)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
7.6071	-0.8902	-1.5518	0.04826

$$X_6(H_C) = 1 \quad \text{(e528)}$$

P16.4. Estimation du transfert thermique transversal au sein du substrat

Fonction : $\boldsymbol{R_Z}\ (\boldsymbol{L_C}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{kxy}, \boldsymbol{kz}, \boldsymbol{H_C})$

Celui-ci se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
126903	-126783	-47179	103544	-72534	-104348	-2092

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
47134	-103466	72474	104253	2089	-38492	24096	38546	2013

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
-60005	-85886	-1857	60317	1754	1886

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
38466	-24074	-38509	-2015	59964	85821	1860	-60270	-1751

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
-1883	19797	31729	1611	-19886	-1658	-1855	50424	1580

E_{356}	E_{456}
1686	-1591

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
-19786	-31708	-1608	19868	1660	1857	-50391	-1582	-1689

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
1588	-16533	-1370	-1501	1547	-1443

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}	&	E_{123456}
16525	1367	1498	-1549	1445	1289		-1287

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[A_{L_C} + C_{L_C}\ {L_C}^{0.5} + E_{L_C}\, L_C \right] / \left[1 + B_{L_C}\ {L_C}^{0.5} + D_{L_C}\, L_C \right] \quad \text{(e529)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}	E_{L_C}
0.1107	-1.626	-1.194	0.6962	0.6428

$$X_2(U) = \left[A_U + C_U\ U^{0.5} \right] / \left[1 + B_U\ U^{0.5} + D_U\, U \right] \quad \text{(e530)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-9.03395	3.4488	7.9218	0

$$X_3(k_{XY}) = \left[A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}}\ {k_{XY}}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_{XY}}\ {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}}\, k_{XY} \right] \quad \text{(e531)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{k_{XY}}$
6.15059	-3.9499	-9.0983	0

$$X_4(k_Z) = \left[A_{k_Z} + C_{k_Z}\ {k_Z}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_Z}\ {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}}\, k_Z \right] \quad \text{(e532)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
10.5045	-0.4632	-2.3118	-0.0645

$$X_5(\beta) = \left[A_\beta + C_\beta\ \beta^{0.5} \right] / \left[1 + B_\beta\ \beta^{0.5} + D_\beta\, \beta \right] \quad \text{(e533)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
7.6071	-0.8902	-1.5518	0.04826

$$X_6(H_C) = \left[A_{H_C} + C_{H_C}\ {H_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{H_C}\ {H_C}^{0.5} + D_{H_C}\, H_C \right] \quad \text{(e534)}$$

A_{H_C}	B_{H_C}	C_{H_C}	D_{H_C}
-2.1696	-0.94988	2.1224	0.7205

P16.5. Calcul de la résistance dite Case-Ambient

Fonction : $\boldsymbol{R_{CA}}\ (\boldsymbol{L_C}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{kxy}, \boldsymbol{kz}, \boldsymbol{H_C})$

Celui-ci se base sur les paramètres de Tagushi suivants :

- Moyenne et effets

$Moy = E_0$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
41.177	-22.558	-8.231	-31.547	-0.844	-4.995	0.327

- Interactions d'ordre 1

E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{23}	E_{24}	E_{25}	E_{26}
2.854	18.893	0.600	2.109	0.125	6.210	0.234	0.697	-0.500

E_{34}	E_{35}	E_{36}	E_{45}	E_{46}	E_{56}
0.689	4.145	-0.270	0.220	-0.057	0.036

- Interactions d'ordre 2

E_{123}	E_{124}	E_{125}	E_{126}	E_{134}	E_{135}	E_{136}	E_{145}	E_{146}
-2.673	-0.209	-0.061	0.299	-0.488	-1.874	-0.135	-0.186	0.027

E_{156}	E_{234}	E_{235}	E_{236}	E_{245}	E_{246}	E_{256}	E_{345}	E_{346}
0.014	-0.188	-0.633	0.447	-0.127	0.082	0.126	-0.166	0.039

E_{356}	E_{456}
-0.042	-0.008

- Interactions d'ordre 3

E_{1234}	E_{1235}	E_{1236}	E_{1245}	E_{1246}	E_{1256}	E_{1345}	E_{1346}	E_{1356}
0.171	0.034	-0.271	0.106	-0.079	-0.073	0.138	-0.014	-0.003

E_{1456}	E_{2345}	E_{2346}	E_{2356}	E_{2456}	E_{3456}
0.012	0.103	-0.064	-0.104	-0.053	0.013

- Interactions d'ordre 4 et 5

E_{12345}	E_{12346}	E_{12356}	E_{12456}	E_{13456}	E_{23456}
-0.086	0.063	0.059	0.046	-0.016	0.040

&

E_{123456}
-0.034

La prise en compte de la non-linéarité des paramètres est traduite par les expressions suivantes :

$$X_1(L_C) = \left[\ A_{L_C} + C_{L_C}\ {L_C}^{0.5}\ \right] / \left[\ 1 + B_{L_C}\ {L_C}^{0.5} + D_{L_C}\ L_C\ \right] \qquad \text{(e535)}$$

A_{L_C}	B_{L_C}	C_{L_C}	D_{L_C}
-8.8537	1.5317	3.4459	-0.012

$$X_2(U) = \left[\ A_U + C_U\ U^{0.5}\ \right] / \left[\ 1 + B_U\ U^{0.5} + D_U\ U\ \right] \qquad \text{(e536)}$$

A_U	B_U	C_U	D_U
-3.1415	0.5877	2.4354	0

$$X_3(k_{XY}) = \left[A_{k_{XY}} + C_{k_{XY}} \, {k_{XY}}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_{XY}} \, {k_{XY}}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_{XY} \right] \quad \text{(e537)}$$

$A_{k_{XY}}$	$B_{k_{XY}}$	$C_{k_{XY}}$	$D_{k_{XY}}$
9.14318	-2.5026	-4.5284	-0.0996

$$X_4(k_Z) = \left[A_{k_Z} + C_{k_Z} \, {k_Z}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{k_Z} \, {k_Z}^{0.5} + D_{k_{XY}} \, k_Z \right] \quad \text{(e538)}$$

A_{k_Z}	B_{k_Z}	C_{k_Z}	D_{k_Z}
-22.6937	5.0522	32.4922	3.6971

$$X_5(\beta) = \left[A_\beta + C_\beta \, \beta^{0.5} \right] / \left[1 + B_\beta \, \beta^{0.5} + D_\beta \, \beta \right] \quad \text{(e539)}$$

A_β	B_β	C_β	D_β
-4.9736	0.16452	0.9457	-0.016

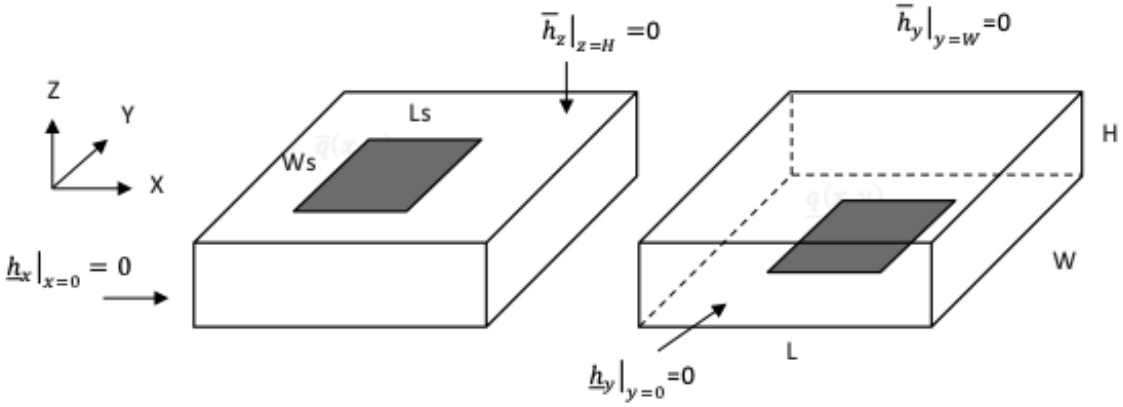
$$X_6(H_C) = \left[A_{H_C} + C_{H_C} \, {H_C}^{0.5} \right] / \left[1 + B_{H_C} \, {H_C}^{0.5} + D_{H_C} \, H_C \right] \quad \text{(e540)}$$

A_{H_C}	B_{H_C}	C_{H_C}	D_{H_C}
-2.0920	-1.2099	2.1826	0.854

P17. Principe de l'établissement d'un modèle analytique

Le modèle détaillé ci-après fait l'objet d'une fiche technique écrite en anglais.

- Studied Case: Three-dimensional heat equation in an anisotropic parallelepiped heated by rectangular surface source and cooled from its upper and lower surface



- Thematic Scope: Superposition principle and separation of variables
- Thermal Field: Steady-state conduction

P17.1. Governing heat conduction equation

The x, y or z dimensions of the domain are respectively L x W x H.

The material is anisotropic with three distinct thermal conductivities, named k_x, k_y and k_z.

The upper and lower surfaces are submitted to Fourier boundary conditions.

The lateral sides of parallelepiped are isolated. The distinct heat transfer coefficients that are applied on the rectangular surfaces of the parallelepiped are:

- For the four edges, named: $\overline{h}_x|_{x=L}$, $\underline{h}_x|_{x=0}$ and $\overline{h}_y|_{y=W}$, $\underline{h}_y|_{y=0}$.
- For the upper and lower ends, named $\overline{h}_z|_{z=H}$ and $\underline{h}_z|_{z=0}$.

The governing heat equation to solve is given by:

$$k_x \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(e541)}$$

P17.2. Boundary conditions definition

- Homogenous boundary conditions:

$$-k_x \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{x=0 \text{ or } x=L} = 0 \qquad \text{(e542)}$$

$$-k_y \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y}\bigg|_{y=0 \text{ or } y=W} = 0 \qquad \text{(e543)}$$

- Homogenous boundary conditions depending of heating source location

If the source, named $\overline{q}(x,y)$, is applied on the upper surface end

$$-k_z \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\underline{h}_z\,[T(x,y,z) - T_\infty] \;\; for \;\; 0 \le x \le L\,, 0 \le y \le W \qquad \text{(e544)}$$

If the source, named $\underline{q}(x,y)$, is applied on the lower surface end

$$-k_z \left.\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H} = \overline{h}_z \left[T(x,y,z) - T_\infty\right] \; for \; 0 \le x \le L \,, 0 \le y \le W \tag{e545}$$

- None-homogenous boundary conditions

  If the source is applied on the upper surface end

$$-k_z \left.\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H} = \overline{h}_z \left[T(x,y,z) - T_\infty\right] - \overline{q}(x,y) \tag{e546}$$

  If the source is applied on the lower surface end

$$-k_z \left.\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\underline{h}_z \left[T(x,y,z) - T_\infty\right] + \underline{q}(x,y) \tag{e547}$$

- Homogenous boundary conditions

  A definition of the temperature excess is made.

$$\theta(x,y,z) = T(x,y,z) - T_\infty \tag{e548}$$

$$\left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=0 \; or \; x=L} = 0 \tag{e549}$$

$$\left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial y}\right|_{y=0 \; or \; y=W} = 0 \tag{e550}$$

- Homogenous boundary conditions depending of heating source location

  If the source, named $\overline{q}(x,y)$, is applied on the upper surface end

$$\left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\underline{h}_z}{k_z}\,\theta(x,y,z) \tag{e551}$$

  If the source, named $\underline{q}(x,y)$, is applied on the lower surface end

$$\left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H} = -\frac{\overline{h}_z}{k_z}\,\theta(x,y,z) \tag{e552}$$

- None-homogenous boundary conditions

  If the source is applied on the upper surface end

$$-k_z \left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H} = \overline{h}_z\,\theta(x,y,z) - \overline{q}(x,y) \tag{e553}$$

  If the source is mounted on the lower surface end

$$-k_z \left.\frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\underline{h}_z\,\theta(x,y,z) + \underline{q}(x,y) \tag{e554}$$

P17.3. Solution of the conventional three-dimensional heat equation:

- The solution needs to resolve the following problem.

$$k_x \frac{\partial^2 \theta(x,y,z)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \theta(x,y,z)}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \theta(x,y,z)}{\partial y^2} = 0 \tag{e555}$$

- The method of separation of variables is used to resolve the equation (e555).

$$\theta(x,y,z) = f(x)\, g(y)\, w(z) \tag{e556}$$

$$k_x\, g(y)\, w(z)\, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + k_y\, f(x)\, w(z)\, \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + k_z\, f(x)\, g(y)\, \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{e557}$$

$$k_x\, \frac{1}{f(x)}\, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + k_y\, \frac{1}{g(y)}\, \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + k_z\, \frac{1}{w(z)}\, \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{e558}$$

$$\frac{1}{f(x)}\, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \;\; and \;\; \frac{1}{g(y)}\, \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = -\beta^2 \tag{e559}$$

$$\frac{1}{w(z)}\, \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = \frac{k_x}{k_z}\, \alpha^2 + \frac{k_y}{k_z}\, \beta^2 = a \cdot r^2 \;\; with\; a = \mp 1 \tag{e560}$$

- The solution forms of the x or y profile depend on the selected sign of a.
  Consequently, if the value of $a = 1$.

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \alpha^2\, f(x) = 0 \;\rightarrow\; f(x) = A\, \sin(\alpha\, x) + B\, cos\, (\alpha\, x) \tag{e561}$$

$$\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \beta^2\, g(y) = 0 \;\rightarrow\; g(y) = C\, \sin(\beta\, y) + D\, cos\, (\beta\, y) \tag{e562}$$

$$\frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} - r^2\, w(z) = 0 \;\rightarrow\; w(z) = E\, e^{-r \cdot z} + F\, e^{r \cdot z} \tag{e563}$$

- The missing C, D, E, F parameters are solved using the following set of boundary conditions.
  Homogenous boundary conditions

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0\; or\; x=L} = 0 \tag{e564}$$

$$\left.\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right|_{y=0\; or\; y=W} = 0 \tag{e565}$$

  Homogenous boundary conditions depending of heating source location

  If the source, named $\overline{q}(x,y)$, is applied on the upper surface end

$$\left.\frac{\partial w(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{h_z}{k_z}\, w(z) \tag{e566}$$

  If the source, named $\underline{q}(x,y)$, is applied on the lower surface end

$$\left.\frac{\partial w(z)}{\partial z}\right|_{z=H} = -\frac{\overline{h}_z}{k_z}\, w(z) \tag{e567}$$

- Applying (e564) and (e565) boundary conditions

$$\alpha\, A\, cos(0) - \alpha\, B\, sin(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$-B\, sin(\alpha\, L) = 0 \;\; or \;\; B \neq 0 \;\rightarrow sin(\alpha\, L) = 0$$

$$\alpha_m = (m\,\pi)/L \tag{e568}$$

$$\beta\ C\ cos(0) - \beta\ D\ sin(0) = 0\ \rightarrow C = 0$$

$$-D\ sin(\beta\ W) = 0\ or\ \ D \neq 0\ \rightarrow sin(\beta\ W) = 0$$

$$\beta_n = (n\,\pi)/W \tag{e569}$$

$$r_{m,n}{}^2 = \frac{k_x}{k_z}\,\alpha_m{}^2 + \frac{k_y}{k_z}\,\beta_n{}^2\ \rightarrow r_{m,n} = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}\,\alpha_m{}^2 + \frac{k_y}{k_z}\,\beta_n{}^2} \tag{e570}$$

- The deducted expressions of f(x) and g(y) are resumed by:

$$f_m(x) = A_m\ co\,s(\alpha_m\,x) = A_m\ co\,s\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) = A_m\,X_m(x) \tag{e571}$$

$$g_n(y) = B_n\ co\,s(\beta_n\,y) = B_n\ co\,s\left(\frac{n\,\pi}{W}\,y\right) = B_n\,Y_n(y) \tag{e572}$$

$$\theta(x,y,z) = A_m\,B_n\ co\,s\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\ co\,s\left(\frac{n\,\pi}{W}\,y\right)\ w(z) \tag{e573}$$

- Applying the on z-axis the homogenous boundary conditions (e566) and (e567)

  It can be deducted that:

  If the source, named $\overline{q}(x,y)$, is applied on the upper surface end

$$\left.\frac{\partial(E\ e^{-r\cdot z} + F\ e^{r\cdot z})}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\underline{h}_z}{k_z}\,(E\ e^{-r\cdot z} + F\ e^{r\cdot z})|_{z=0}$$

$$-E + F = \frac{\underline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z}\,[E + F]\ \rightarrow\ F = E\left(\frac{r_{m,n}\,k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z - \underline{h}_z}\right)$$

$$\overline{w}_{m,n}(z) = E_{m,n}\left[e^{-r_{m,n}\,z} + \left(\frac{r_{m,n}\,k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z - \underline{h}_z}\right)e^{r_{m,n}\,z}\right] \tag{e574}$$

$$\overline{Z}_{m,n}(z) = \left[\left(\frac{r_{m,n}\,k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z - \underline{h}_z}\right)e^{r_{m,n}\,z} + e^{-r_{m,n}\,z}\right] \tag{e575}$$

$$\overline{Z}_{m,n}(z) = \overline{\kappa}\,e^{r_{m,n}\,z} + e^{-r_{m,n}\,z}\quad with\quad \overline{\kappa} = \frac{r_{m,n}\,k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z - \underline{h}_z} \tag{e576}$$

  If the source, named $\underline{q}(x,y)$, is applied on the lower surface end

$$F = E\ e^{-2\,r_{m,n}\,H}\left(\frac{r_{m,n}\,k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z + \overline{h}_z}\right) \tag{e577}$$

$$\underline{w}_{m,n}(z) = E_{m,n}\left[\left(\frac{r_{m,n}\,k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z + \overline{h}_z}\right)\,e^{r_{m,n}(z-2H)} + e^{-r_{m,n}\,z}\right] \tag{e578}$$

$$\underline{Z}_{m,n}(z) = \left[\left(\frac{r_{m,n}\,k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z + \overline{h}_z}\right)e^{r_{m,n}\,(z-2H)} + e^{-r_{m,n}\,z}\right]\ with\ \underline{\kappa} = \tag{e579}$$

$$\underline{Z}_{m,n}(z) = \left[\ \underline{\kappa}\,e^{r_{m,n}(z-2H)} + e^{-r_{m,n}\,z}\right]\ \ with\ \ \ \underline{\kappa} = \frac{r_{m,n}\,k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\,k_z + \overline{h}_z} \tag{e580}$$

- The solution of $\overline{\theta}(x,y,z)$ if the source is on upper surface must be derived from:

$$\overline{\theta}(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_m(x)\, g_n(y)\overline{w}_{m,n}(z) \tag{e581}$$

$$\overline{\theta}(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{G}_{m,n}\, X_m(x)\, Y_n(y)\overline{Z}_{m,n}(z) \tag{e582}$$

- The solution of $\underline{\theta}(x,y,z)$ if the source is on lower surface must be derived from:

$$\underline{\theta}(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \underline{G}_{m,n}\, X_m(x)\, Y_n(y)\underline{Z}_{m,n}(z) \tag{e583}$$

P17.4. Determination of function parameters using orthogonal functions method

Thus the functions $X(x)$ and $Y(y)$ are used for resolving the equations (e582) and (e583).

- If the source is applied on the upper surface end

  The boundary condition (e553) must be solved.

$$-k_z \int_0^L\int_0^W \left.\frac{\partial\overline{\theta}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=H} X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy = \int_0^L\int_0^W \left[\overline{h}_z\, \overline{\theta}(x,y,z) - \overline{q}(x,y)\right] X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy$$

  The final form of the $G_{m,n}$ parameter is given by the following expression:

$$-\frac{k_z}{L\,W}\,\overline{G}_{m,n}\left.\frac{\partial\overline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\right|_{z=H}\int_0^L\int_0^W X_m(x)^2\, Y_n(y)^2\, dx\, dy$$
$$= \frac{\overline{h}_z}{L\,W}\,\overline{G}_{m,n}\,\overline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=H}\int_0^L\int_0^W X_m(x)^2\, Y_n(y)^2\, dx\, dy - \int_0^L\int_0^W \overline{q}(x,y)\, X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy$$

  The expression of $\overline{G}_{m,n}$ parameter is derived below:

$$\overline{G}_{m,n} = \frac{L\,W\,\int_0^L\int_0^W[\overline{q}(x,y)\, X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy]}{\left[k_z\left.\frac{\partial\overline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\right|_{z=H} + \overline{h}_z\,\overline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=H}\right]\int_0^L\int_0^W[X_m(x)^2\, Y_n(y)^2\, dx\, dy]} \tag{e584}$$

$$\overline{G}_{m,n} = \frac{L\,W\,\overline{q}\,\int_{xc-Ls/2}^{xc+Ls/2}\int_{yc-Ws/2}^{yc+Ws/2}[X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy]}{\left[k_z\left.\frac{\partial\overline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\right|_{z=H} + \overline{h}_z\,\overline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=H}\right]\int_0^L\int_0^W[X_m(x)^2\, Y_n(y)^2\, dx\, dy]} \tag{e585}$$

- If the source is applied on the lower surface end

  The boundary condition (e554) must be solved.

$$-k_z \int_0^L\int_0^W \left.\frac{\partial\underline{\theta}(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy = \int_0^L\int_0^W \left[-\underline{h}_z\,\underline{\theta}(x,y,z) + \underline{q}(x,y)\right] X_m(x)\, Y_n(y)\, dx\, dy$$

$$-\frac{k_z}{L\,W}\,\underline{G}_{m,n}\,\frac{\partial \underline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\Big|_{z=0}\int_0^L\int_0^W X_m(x)^2\,Y_n(y)^2\,dx\,dy$$

$$=-\frac{h_z}{L\,W}\,\underline{G}_{m,n}\,\underline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=0}\int_0^L\int_0^W X_m(x)^2\,Y_n(y)^2\,dx\,dy+\int_0^L\int_0^W \underline{q}(x,y)\,X_m(x)\,Y_n(y)\,dx\,dy$$

The expression of $\underline{G}_{m,n}$ parameter is derived below:

$$\underline{G}_{m,n}=\frac{L\,W\int_0^L\int_0^W\left[\underline{q}(x,y)\,X_m(x)\,Y_n(y)\,dx\,dy\right]}{\left[-k_z\,\frac{\partial \underline{w}_{m,n}(z)}{\partial z}\Big|_{z=0}+\underline{h}_z\,\underline{w}_{m,n}(z)\big|_{z=0}\right]\int_0^L\int_0^W[X_m(x)^2\,Y_n(y)^2\,dx\,dy]} \tag{e586}$$

$$\underline{G}_{m,n}=\frac{L\,W\,\underline{q}\int_{xc-Ls/2}^{xc+Ls/2}\int_{yc-Ws/2}^{yc+Ws/2}[X_m(x)\,Y_n(y)dx\,dy]}{\left[-k_z\,\frac{\partial \underline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\Big|_{z=0}+\underline{h}_z\,\underline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=0}\right]\int_0^L\int_0^W[X_m(x)^2\,Y_n(y)^2\,dx\,dy]} \tag{e587}$$

P17.5. The thermal profiles along z-axis

These ones are given by the following functions according with source location.

- If the source is applied on the upper surface end

$$\overline{Dz}_{m,n}(z)=k_z\,\frac{\partial \overline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\Big|_{z=H}+\overline{h}_z\,\overline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=H} \tag{e588}$$

$$\overline{Dz}_{m,n}(z)=k_z\,\frac{\partial(\overline{\kappa}\,e^{r_{m,n}z}+e^{-r_{m,n}z})}{\partial z}\Big|_{z=H}+\overline{h}_z\,(\overline{\kappa}\,e^{r_{m,n}z}+e^{-r_{m,n}z})|_{z=H}$$

$$\overline{Dz}_{m,n}(z)=k_z\,r_{m,n}\,[\overline{\kappa}\,e^{r_{m,n}H}-e^{-r_{m,n}H}]+\overline{h}_z\,[\overline{\kappa}\,e^{r_{m,n}H}+e^{-r_{m,n}H}] \tag{e589}$$

- If the source is applied on the lower surface end

$$\underline{Dz}_{m,n}(z)=-k_z\,\frac{\partial \underline{Z}_{m,n}(z)}{\partial z}\Big|_{z=0}+\underline{h}_z\,\underline{Z}_{m,n}(z)\big|_{z=0} \tag{e590}$$

$$\underline{Dz}_{m,n}(z)=-k_z\,\frac{\partial\left[\underline{\kappa}\,e^{r_{m,n}(z-2H)}+e^{-r_{m,n}z}\right]}{\partial z}\Big|_{z=0}+\underline{h}_z\left[\underline{\kappa}\,e^{r_{m,n}(z-2H)}+e^{-r_{m,n}z}\right]\Big|_{z=0}$$

$$\underline{Dz}_{m,n}(z)=-k_z\,r_{m,n}\left(\underline{\kappa}\,e^{-2\,r_{m,n}H}-1\right)+\underline{h}_z\left(\underline{\kappa}\,e^{-2\,r_{m,n}H}+1\right) \tag{e591}$$

- A fully determination of the $G_{m,n}$ parameter needs to achieve two integrations.

  The solutions of the first double integration are defined by:

$$\int_0^L\int_0^W X_m(x)^2\,Y_n(y)^2\,dx\,dy=\int_0^L X_m(x)^2\,dx\int_0^W Y_n(y)^2\,dy$$

$$Dx = \int_0^L X_m(x)^2\, dx = \int_0^L [cos(\alpha_m\, x)]^2\, dx = \left(\frac{L}{2} + \frac{sin(2\,\alpha_m\, L)}{4\,\alpha_m}\right) = \frac{L}{2} + \frac{sin(\alpha_m\, L)\ cos\,(\alpha_m\, L)}{2\,\alpha_m} = \frac{L}{2}$$

$$with\ by\ definition:\ sin(\alpha_m\, L) = 0\ \ and\ \ sin(\beta_n\, W) = 0$$

$$Dy = \int_0^W Y_n(y)^2\, dy = \int_0^W [cos(\beta_n\, y)]^2\, dy = \left(\frac{W}{2} + \frac{sin(2\,\beta_n\, W)}{4\,\beta_n}\right) = \frac{W}{2}$$

The second ones have the following expressions.

$$Nx = \int_{xc-Ls/2}^{xc+Ls/2} X_m(x)\, dx = \int_{xc-Ls/2}^{xc+Ls/2} cos(\alpha_m\, x)\, dx = \frac{2}{\alpha_m}\ cos(\alpha_m\, xc)\, sin\left(\frac{\alpha_m\, Ls}{2}\right)$$

$$Ny = \int_{yc-Ws/2}^{yc+Ws/2} Y_n(y)\, dy = \int_{yc-Ws/2}^{yc+Ws/2} cos(\beta_n\, y)\, dy = \frac{2}{\beta_n}\ cos(\beta_n\, yc)\ \ sin\left(\frac{\beta_n\, Ws}{2}\right)$$

P17.6. Definition of the source geometrical functions

- The ratio Nx/Dx and Ny/Dy can be defined as A_m and B_n functions.

$$A_m = \frac{Nx}{Dx} = \frac{4}{m\,\pi}\ sin\left(\alpha_m\ \frac{Ls}{2}\right)\ cos(\alpha_m\, xc) \quad for\ \ \alpha_m \neq 0 \tag{e592}$$

$$A_m = \frac{4}{m\,\pi + \delta_m}\ sin\left(\alpha_m\ \frac{Ls}{2}\right)\ cos(\alpha_m\, xc) + 2\,\frac{Ls}{L}\,\delta_m \quad \forall\, \alpha_m \tag{e593}$$

$$B_n = \frac{Ny}{Dy} = \frac{4}{n\,\pi + \delta_n}\ sin\left(\beta_n\ \frac{Ws}{2}\right)\ cos(\beta_n\, yc) + 2\,\frac{Ws}{W}\,\delta_m \tag{e594}$$

- The expression of $\overline{G}_{m,n}$ and $\underline{G}_{m,n}$ are now completely established:

$$\overline{G}_{m,n} = \frac{L\,W\,\overline{q}\,A_m\,B_n}{\overline{Dz}_{m,n}(z)} \tag{e595}$$

$$\underline{G}_{m,n} = \frac{L\,W\,\underline{q}\,A_m\,B_n}{\underline{Dz}_{m,n}(z)} \tag{e596}$$

P17.7. The final forms of the solutions

- These ones are expressed by the following mathematical formulae:

  If the source is applied on the upper surface end

$$\overline{\theta}(x,y,z) = \overline{q}\,L\,W \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m\,B_n\,cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\ x\right)\ cos\left(\frac{n\,\pi}{W}\ y\right)\ \overline{\omega}_{m,n}(z) \tag{e597}$$

  If the source is applied on the lower surface end

$$\underline{\theta}(x,y,z) = \underline{q}\, L\, W \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m\, B_n\, cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\, x\right) cos\left(\frac{n\,\pi}{W}\, y\right) \underline{\omega}_{m,n}(z) \tag{e598}$$

- These ones are depending of the following functions:

$$A_m = \frac{4}{m\,\pi + \delta_m}\, sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,\frac{Ls}{2}\right) cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\, xc\right) + \frac{Ls}{L}\,\delta_m \tag{e599}$$

$$B_n = \frac{4}{n\,\pi + \delta_n}\, sin\left(\frac{n\,\pi}{W}\,\frac{Ws}{2}\right) cos\left(\frac{n\,\pi}{W}\, yc\right) + \frac{Ws}{W}\,\delta_m \tag{e600}$$

- The z-axis profile is according with the source location

  If the source is applied on the upper surface end

$$\overline{Z}_{m,n}(z) = \left[\left(\frac{r_{m,n}\, k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z - \underline{h}_z}\right) e^{r_{m,n}\, z} + e^{-r_{m,n}\, z}\right] \frac{e^{-r_{m,n}\, H}}{e^{-r_{m,n}\, H}}$$

$$\overline{Z}_{m,n}(z) = \frac{1}{e^{-r_{m,n}\, H}} \left[\left(\frac{r_{m,n}\, k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z - \underline{h}_z}\right) e^{r_{m,n}\,(z-H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}\right]$$

$$\overline{Z}_{m,n}(z) = \frac{1}{e^{-r_{m,n}\, H}} \left[\overline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\,(z-H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}\right] \quad with\ \overline{\kappa} = \frac{r_{m,n}\, k_z + \underline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z - \underline{h}_z} \tag{e601}$$

$$\overline{Dz}_{m,n}(z) = \left[k_z\, r_{m,n}\, [\overline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\, H} - e^{-r_{m,n}\, H}] + \overline{h}_z\, [\overline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\, H} + e^{-r_{m,n}\, H}]\right] \frac{e^{-r_{m,n}\, H}}{e^{-r_{m,n}\, H}}$$

$$\overline{Dz}_{m,n}(z) = \frac{1}{e^{-r_{m,n}\, H}} \left[k_z\, r_{m,n}\, [\overline{\kappa} - e^{-2\, r_{m,n}\, H}] + \overline{h}_z\, [\overline{\kappa} + e^{-2\, r_{m,n}\, H}]\right] \tag{e602}$$

$$\overline{\omega}_{m,n}(z) = \frac{\overline{Z}_{m,n}(z)}{\overline{Dz}_{m,n}(z)} = \frac{\overline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\,(z-H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}}{k_z\, r_{m,n}\, [\overline{\kappa} - e^{-2\, r_{m,n}\, H}] + \overline{h}_z\, [\overline{\kappa} + e^{-2\, r_{m,n}\, H}]} \quad for\ n = m \neq 0 \tag{e603}$$

$$\lim_{r\to 0} \overline{\omega}_{m,n}(z) = \left(k_z + \underline{h}_z\, z\right) / \left[k_z\left(\underline{h}_z + \overline{h}_z\right) + H\, \underline{h}_z\, \overline{h}_z\right]$$

$$\overline{\omega}_{0,0}(z) = \frac{k_z + \underline{h}_z\, z}{k_z\left(\underline{h}_z + \overline{h}_z\right) + H\, \underline{h}_z\, \overline{h}_z} \tag{e604}$$

  If the source is applied on the lower surface end

$$\underline{Z}(z) = \left[\left(\frac{r_{m,n}\, k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z + \overline{h}_z}\right) e^{r_{m,n}\,(z-2H)} + e^{-r_{m,n}\, z}\right] \frac{e^{-r_{m,n}\, H}}{e^{-r_{m,n}\, H}}$$

$$\underline{Z}(z) = \frac{1}{e^{-r_{m,n}\, H}} \left[\left(\frac{r_{m,n}\, k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z + \overline{h}_z}\right) e^{r_{m,n}\,(z-3H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}\right]$$

$$\underline{Z}(z) = \frac{1}{e^{-r_{m,n}\, H}} \left[\underline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\,(z-3H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}\right] \quad with\ \underline{\kappa} = \left(\frac{r_{m,n}\, k_z - \overline{h}_z}{r_{m,n}\, k_z + \overline{h}_z}\right) \tag{e605}$$

$$\underline{Dz}_{m,n}(z) = \left[-k_z\, r_{m,n}\left(\underline{\kappa}\, e^{-2\, r_{m,n}\, H} - 1\right) + \underline{h}_z\left(\underline{\kappa}\, e^{-2\, r_{m,n}\, H} + 1\right)\right] \frac{e^{-r_{m,n}\, H}}{e^{-r_{m,n}\, H}}$$

$$\underline{Dz}_{m,n}(z) = \frac{\left[-k_z\, r_{m,n}\left(\underline{\kappa}\, e^{-3\, r_{m,n}\, H} - e^{-r_{m,n}\, H}\right) + \underline{h}_z\left(\underline{\kappa}\, e^{-3\, r_{m,n}\, H} + e^{-r_{m,n}\, H}\right)\right]}{e^{-r_{m,n}\, H}} \tag{e606}$$

$$\underline{\omega}_{m,n}(z) = \frac{\underline{\kappa}\, e^{r_{m,n}\,(z-3H)} + e^{-r_{m,n}\,(z+H)}}{-k_z\, r_{m,n}\left(\underline{\kappa}\, e^{-3\, r_{m,n}\, H} - e^{-r_{m,n}\, H}\right) + \underline{h}_z\left(\underline{\kappa}\, e^{-3\, r_{m,n}\, H} + e^{-r_{m,n}\, H}\right)} \tag{e607}$$

$$\lim_{r\to 0} \underline{\omega}_{m,n}(z) = \left(k_z + \overline{h}_z\,(H-z)\right)\Big/\left[k_z\left(\underline{h}_z + \overline{h}_z\right) + H\,\underline{h}_z \cdot \overline{h}_z\right]$$

$$\underline{\omega}_{0,0}(z) = \frac{k_z + \overline{h}_z\,(H-z)}{k_z\left(\underline{h}_z + \overline{h}_z\right) + H\,\underline{h}_z\,\overline{h}_z} \tag{e608}$$

- The expression of $r_{m,n}$ is given by:

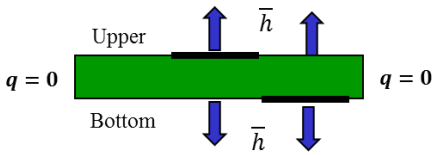
$$r_{m,n} = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}\left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_y}{k_z}\left(\frac{n\,\pi}{W}\right)^2} \tag{e609}$$

P18. Pertinence de la modélisation analytique d'un substrat anisotrope

P18.1. Influence de la conductivité thermique du substrat

Les modèles analytiques isotrope et anisotrope sont comparés.

- Conditions d'échange :



$T_\infty = 0°C$			
$\overline{h}_U = \overline{h}$	$\overline{h}_B = \overline{h}$	k_{XY}	k_Z
10W m^{-2} K^{-1}	10W m^{-2} K^{-1}	18W m^{-1} K^{-1}	0.35W m^{-1} K^{-1}

- Résultats :

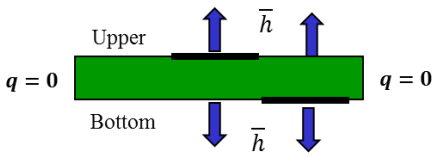
Table 130 : Températures centrales des sources à $\xi = \xi_{H_B}$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{T_k}\ (°C)$	$T_{T_{k_r}}\ (°C)$
BGA196-1	1.625	1.6	27.4	36.9
LQFP64	1.553	1.6	26.4	36.7
LQFP16	0.757	1.6	18.8	32.8
LQFP48	0.624	1.6	14.6	26.3
BGA196-2	1.603	1.6	25.5	35.0
QFN32	0.755	1.6	21.8	44.0
BGA208	0.83	1.6	12.2	17.0

P18.2. Coefficient d'échange thermique uniforme

Un jeu de cas tests est comparé aux résultats obtenus à partir du logiciel Flotherm®.

- Conditions d'échange :



$T_\infty = 0°C$

$\overline{h}_U = \overline{h}$	$\overline{h}_B = \overline{h}$	k_{XY}	k_Z
10W m^{-2} K^{-1}	10W m^{-2} K^{-1}	18W m^{-1} K^{-1}	1W m^{-1} K^{-1}

- Résultats :

Table 131 : Températures centrales des sources à $\xi = 0$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	30.7	30.8	-0.3%
LQFP64	1.553	1.6	24.1	24.1	-0.1%
LQFP16	0.757	1.6	15.8	15.7	0.1%
LQFP48	0.624	1.6	12.1	12.1	0.4%
BGA196-2	1.603	1.6	23.4	23.4	0.1%
QFN32	0.755	0	31.6	31.9	-0.8%
BGA208	0.83	1.6	11.1	11.1	0.0%

Table 132 : Températures moyennes des sources à $\xi = \xi_{H_B}$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	23.5	23.5	0.1%
LQFP64	1.553	1.6	27.3	27.1	0.9%
LQFP16	0.757	1.6	22.6	22.2	1.8%
LQFP48	0.624	1.6	17.8	17.4	1.9%
BGA196-2	1.603	1.6	26.1	25.9	0.9%
QFN32	0.755	0	16.9	16.9	-0.1%
BGA208	0.83	1.6	12.5	12.4	0.9%

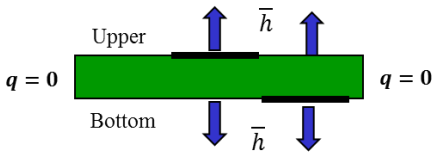
Table 133 : Températures moyennes des sources à $\xi = 0$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	28	27.8	0.80%
LQFP64	1.553	1.6	22.5	22.5	0.10%
LQFP16	0.757	1.6	15.3	15.3	0.10%
LQFP48	0.624	1.6	11.7	11.7	0.20%
BGA196-2	1.603	1.6	21.7	21.7	0.10%
QFN32	0.755	0	28.9	28.2	2.50%
BGA208	0.83	1.6	10.2	10.2	0.10%

P18.3. Coefficients d'échange thermique différenciés

Un jeu de cas tests est comparé aux résultats obtenus à partir du logiciel Flotherm®.

- Conditions d'échange :



$T_\infty = 0°C$

$\overline{h}_U$	$\overline{h}_B$	k_{XY}	k_Z
10W m^{-2} K^{-1}	0	25W m^{-1} K^{-1}	0.35W m^{-1} K^{-1}

- Résultats :

Table 134 : Températures centrales des sources à $\xi = \xi_{H_B}$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	31.9	31.9	0.1%
LQFP64	1.553	1.6	42.7	42.9	-0.4%
LQFP16	0.757	1.6	38.1	38.3	-0.5%
LQFP48	0.624	1.6	31.3	31.4	-0.6%
BGA196-2	1.603	1.6	41	41.3	-0.6%
QFN32	0.755	0	24.7	24.7	-0.1%
BGA208	0.83	1.6	22.6	22.7	-0.3%

Table 135 : Températures centrales des sources à $\xi = 0$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	45.2	45.4	-0.3%
LQFP64	1.553	1.6	30.4	30.3	0.3%
LQFP16	0.757	1.6	22.5	22.3	0.8%
LQFP48	0.624	1.6	18.3	18.2	0.7%
BGA196-2	1.603	1.6	29.5	29.4	0.3%
QFN32	0.755	0	49.9	50.1	-0.5%
BGA208	0.83	1.6	16.7	16.6	0.3%

Table 136 : Températures moyennes des sources à $\xi = \xi_{H_B}$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	31.2	31.2	0.1%
LQFP64	1.553	1.6	39.5	39.1	1.0%
LQFP16	0.757	1.6	35.2	34.6	1.8%
LQFP48	0.624	1.6	28.9	28.3	1.8%
BGA196-2	1.603	1.6	37.9	37.5	1.0%
QFN32	0.755	0	24.6	24.6	-0.2%
BGA208	0.83	1.6	21	20.8	0.8%

Table 137 : Températures moyennes des sources à $\xi = 0$

Référence i	$q_i\ (W)$	$\xi_i\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	42	41.6	0.8%
LQFP64	1.553	1.6	29.6	29.6	0.1%
LQFP16	0.757	1.6	22.2	22.2	0.0%
LQFP48	0.624	1.6	18.1	18.1	0.1%
BGA196-2	1.603	1.6	28.8	28.7	0.0%
QFN32	0.755	0	46	44.9	2.6%
BGA208	0.83	1.6	16.2	16.3	0.0%

P18.4. Conductivités thermiques différenciées sur les trois axes

Un jeu de cas tests est comparé aux résultats obtenus à partir du logiciel Flotherm®.

- Conditions d'échange :

$\overline{h}_U$	$\overline{h}_B$	k_X	k_Y	k_Z	T_∞
10W m^{-2} K^{-1}	8W m^{-2} K^{-1}	5.5W m^{-1} K^{-1}	7.5 W m^{-1} K^{-1}	0.5W m^{-1} K^{-1}	0 °C

- Résultats :

Table 138 : Températures centrales des sources à $z = 0$

Référence i	$q_i\ (W)$	$Z_{C_i}\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	55.2	55.3	-0.2%
LQFP64	1.553	1.6	43	43.1	-0.1%
LQFP16	0.757	1.6	26.8	26.7	0.4%
LQFP48	0.624	1.6	20.9	20.7	0.9%
BGA196-2	1.603	1.6	42.9	42.8	0.2%
QFN32	0.755	0	61.6	62.2	-1.0%
BGA208	0.83	1.6	20.3	20.3	0.0%

P18.5. Formulation exponentielle

Les résultats sont donnés pour une valeur du paramètre égale à $\eta = 9$.

Table 139 : Températures centrales des sources à $z = H_B$ du modèle orthotrope révisé

Conditions aux limites	$\overline{h}_U\ (W/m^2.K)$	$\overline{h}_B\ (W/m^2.K)$	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
	10	8	5.5	7.5	0.5
Référence i	$q_i\ (W)$	$Z_{C_i}\ (mm)$	$T_{N_{S_i}}\ (°C)$	$T_{T_{S_i}}\ (°C)$	δT_i
BGA196-1	1.625	0	43.9	43.9	0.0%
LQFP64	1.553	1.6	55.0	54.9	0.2%
LQFP16	0.757	1.6	46.0	46.0	0.0%
LQFP48	0.624	1.6	36.8	36.8	0.1%
BGA196-2	1.603	1.6	53.7	53.7	0.1%
QFN32	0.755	0	29.7	29.6	0.4%
BGA208	0.83	1.6	25.9	25.9	-0.1%

Table 140 : Températures centrales des sources du modèle orthotrope révisé ; à $z = 0$

Conditions aux limites	$\overline{h}_U\ (W/m^2.K)$	$\overline{h}_B\ (W/m^2.K)$	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
	10	8	5.5	7.5	0.5
Référence i	$\boldsymbol{q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{Z}_{C_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta \boldsymbol{T}_i$
BGA196-1	1.625	0	55.2	55.1	0.1%
LQFP64	1.553	1.6	43	43.0	0.1%
LQFP16	0.757	1.6	26.8	26.7	0.3%
LQFP48	0.624	1.6	20.9	20.8	0.3%
BGA196-2	1.603	1.6	42.9	42.9	0.0%
QFN32	0.755	0	61.6	61.6	0.0%
BGA208	0.83	1.6	20.3	20.3	-0.2%

Table 141 : Températures moyennes des sources du modèle orthotrope révisé ; à $z = \boldsymbol{H_B}$

Conditions aux limites	$\overline{h}_U\ (W/m^2.K)$	$\overline{h}_B\ (W/m^2.K)$	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
	10	8	5.5	7.5	0.5
Référence i	$\boldsymbol{q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{Z}_{C_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta \boldsymbol{T}_i$
BGA196-1	1.625	0	39.1	39.1	0.1%
LQFP64	1.553	1.6	48.4	48.2	0.4%
LQFP16	0.757	1.6	41.1	40.5	1.4%
LQFP48	0.624	1.6	32.7	32.2	1.4%
BGA196-2	1.603	1.6	47.2	47.0	0.4%
QFN32	0.755	0	28.7	28.6	0.4%
BGA208	0.83	1.6	22.6	22.5	0.6%

Table 142 : Températures moyennes des sources à $z = 0$ du modèle orthotrope révisé

Conditions aux limites	$\overline{h}_U\ (W/m^2.K)$	$\overline{h}_B\ (W/m^2.K)$	$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$
	10	8	5.5	7.5	0.5
Référence i	$\boldsymbol{q}_i\ (W)$	$\boldsymbol{Z}_{C_i}\ (mm)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}\ (°C)$	$\delta \boldsymbol{T}_i$
BGA196-1	1.625	0	48.6	48.4	0.5%
LQFP64	1.553	1.6	38.5	38.4	0.2%
LQFP16	0.757	1.6	25.3	25.2	0.2%
LQFP48	0.624	1.6	19.8	19.6	0.9%
BGA196-2	1.603	1.6	38.1	38.1	0.0%
QFN32	0.755	0	55.1	54.1	1.9%
BGA208	0.83	1.6	17.9	17.8	0.4%

P19. Formulation pour les échanges thermiques latéraux

Les expressions ci-dessous sont dédiées au calcul des coefficients de Fourier pour évaluer les températures d'une zone définie par les coordonnées de son centre et ses dimensions, à savoir X_Z, Y_Z, L_Z et W_Z.

$$\overline{A_m^*} = sinc(\alpha_m\ L_Z/2\ L_B)\ [\ Bi_{x=0}\ sin(\alpha_m\ X_Z/L_B)\ + \alpha_m\ cos(\alpha_m\ X_Z/L_B)\ ] \quad \text{(e610)}$$

$$\overline{B_n^*} = sinc(\beta_n\ \ W_Z/2\ W_B)\ \left[\ Bi_{y=0}\ sin(\beta_n\ Y_Z/W_B)\ + \alpha_m\ cos(\beta_n\ Y_Z/W_B)\ \right] \quad \text{(e611)}$$

P20. Formulation du calcul des propriétés de l'air

P20.1. Conductivité thermique

Celle-ci est définie par l'équation de Sutherland, ci-dessous :

$$k_f(T_f) = \beta t\ {T_f}^{3/2}/\left[\ T_f + St\ 10^{-12/T_f}\ \right] \quad \text{(e612)}$$

Avec $\beta t = 2.6481 \cdot 10^{-3} W\ m^{-1}\ K^{-1.5}$ et $St = 245.5K$

Où T_f est la température de fluide dans la couche limite à proximité de la surface solide.

P20.2. Viscosité cinématique

Celle-ci est définie par l'équation de Sutherland, ci-dessous :

$$\nu_f(T_f) = \beta s\ {T_f}^{3/2}/\left[\ \left(T_f + Ss\ \right)\ \rho_f(T_f)\right] \quad \text{(e613)}$$

Avec $\beta s = 1.456\ 10^{-6}\ kg\ m^{-1}\ s^{-1} K^{-0.5}$ et $Ss = 110.4K$

Où $\rho_f\ (T_f)$ est la masse volumique du fluide

$$\rho_f(T_f) = P/\left[R\ T_f\right] \quad \text{(e614)}$$

Avec la constante des gaz parfaits : $R = 287.052\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$.

P20.3. Chaleur spécifique

La corrélation est basée sur une expression donnée par Yovanovitch en fonction de la température pour une plage allant de 200 à 400 K

$$Cp\left(T_f\right) = 1030.5 - 0.19975\ T_f + 3.9734\ 10^{-4}\ {T_f}^2 \quad \text{(e615)}$$

P21. Modélisation d'une source de chaleur cylindrique

Le profil de température en tout point est défini par les fonctions suivantes :

$$\theta(r^*, z^*) = \ddot{q}\ (R_C\ H_C)^2 \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{A_m\ B_n}{k_R\ {H_C}^2\ {\beta_n}^2 + k_Z\ {R_C}^2 {\alpha_m}^2}\ \omega(r^*, z^*) \quad \text{(e616)}$$

$$\text{Avec}\ \ 0 \le r^* \le 1\ \ o\text{ù}\ \ r^* = r/R_C$$

$$\text{Où}\ \ \omega(r^*, z^*) = [Bi_B\ \ sinc(\alpha_m\ z^*)\ z^* + cos(\alpha_m\ z^*)]\ [J_0(\beta_n\ r^*)] \quad \text{(e617)}$$

$$A_m = \frac{2\ \overline{h}_S\ \ sinc\left(\alpha_m\ \overline{h}_S/2\right)\ [Bi_B\ \ sinc(\alpha_m\ z_C^*)\ z_C^* + cos(\alpha_m\ z_C^*)]}{[1 + (Bi_B/\alpha_m)^2] + [1 - (Bi_B/\alpha_m)^2]\ sinc(2\ \alpha_m) + 2\ Bi_B\ sinc^2(\alpha_m)} \quad \text{(e618)}$$

$$\text{Avec } \; 0 \leq z_C^* \leq 1 \;\; o\grave{u} \;\; z^* = z/H_C$$

$$B_n = \left[\, 2\,\beta_n\, r_S^* / \left(\beta_n{}^2 + Bi_S{}^2\right)\right] \left[J_1(\beta_n\, r_S^*)/J_0(\beta_n)^2\right] \qquad \text{(e619)}$$

Le paramètre z_C^* correspond à la valeur adimensionnée relative au centre de la source de chaleur.

P22. Caractérisation analytique d'une carte munie d'un capot

Les tables ci-après déclinent les prédictions d'une carte équipée de 7 composants électroniques protégés par un capot en aluminium.

Table 143 : Prédictions des températures en l'absence de couplage

Conditions aux limites	$\overline{h}_i\ (W/m^2.K)$		$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$	$T_\infty\ (°C)$
	K3.7		12.6	12.6	0.6	20
Boitier i	$\boldsymbol{T}_{N_{J_i}}$	$\boldsymbol{T}_{T_{J_i}}$	$\delta\boldsymbol{T}_{J_i}$	$\boldsymbol{T}_{N_{P_i}}$	$\boldsymbol{T}_{T_{P_i}}$	$\delta\boldsymbol{T}_{P_i}$
BGA196-1	73.2°C	73.1°C	-0.1%	69.7°C	69.9°C	0.3%
LQFP64	75.5°C	75.5°C	<0.1%	69.6°C	70.1°C	0.7%
LQFP16	74.4°C	74.5°C	0.1%	67.8°C	68.3°C	0.7%
LQFP48	66.9°C	67°C	0.1%	54.6°C	55°C	0.7%
BGA196-2	72.1°C	72.4°C	-0.4%	68.6°C	69.3°C	1%
QFN32	71.4°C	71.4°C	<0.1%	68.5°C	65.9°C	0.6%
BGA208	52.8°C	52.9°C	0.2%	47.9°C	48.1°C	0.4%

Les écarts de prédiction constatés sur les températures de jonction et de capot des composants ne dépassent pas 1% d'erreur.

Table 144 : Prédictions des flux dans le cas d'un couplage

Conditions aux limites	$\overline{h}_i\ (W/m^2.K)$		$k_X\ (W/m.K)$	$k_Y\ (W/m.K)$	$k_Z\ (W/m.K)$	$T_\infty\ (°C)$
	K3.7		12.6	12.6	0.6	20
Boitier i	$\boldsymbol{q}_{N_{B_i}}$	$\boldsymbol{q}_{T_{B_i}}$	$\delta\boldsymbol{q}_{J_i}$	$\boldsymbol{q}_{N_{P_i}}$	$\boldsymbol{q}_{T_{P_i}}$	$\delta\boldsymbol{q}_{P_i}$
BGA196-1	1.614W	1.614W	<0.1%	-0.202W	-0.202W	<0.1%
LQFP64	1.636W	1.638W	0,1%	-0.179W	-0.178W	-0.6%
LQFP16	0.906W	0.905W	-0.1%	-0.047W	-0.048W	2.1%
LQFP48	0.736W	0.736W	<0.1%	-0.032W	-0.032W	<0.1%
BGA196-2	1.558W	1.554W	-0.3%	-0.196W	-0.199W	1.5%
QFN32	0.804W	0.804W	<0.1%	-0.024W	-0.024W	<0.1%
BGA208	0.937W	0.936W	-0.1%	-0.099W	-0.1W	-1%

Ceux sur les flux n'excèdent pas 3% d'erreur.

P23. Multiples sources encastrées

Les tables ci-dessous fournissent les prédictions pour 2 orientations relatives au modèle dit 2 couches de la carte Hermès, lorsque les 3 sources internes sont activées simultanément.

Table 145 : Prédictions des températures en position verticale ($\vec{g} = -y$)

Conditions aux limites	$\overline{h}_i\ (W/m^2.K)$		$T_\infty\ (°C)$	$k_{X_j}\ (W/m.K)$	$k_{Y_j}\ (W/m.K)$	$k_{Z_j}\ (W/m.K)$	
	Table 109		85		Table 105		
Source i	$\boldsymbol{q}_{S_i}\ (W)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{S_i}$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{T_{S_i}}(°C)$	$\delta\overline{\boldsymbol{T}}_{S_i}$
Chip 1	2	122.6	122.7	-0.1%	120.2	120.1	0.1%
Chip 2	1.5	127.1	127.3	-0.2%	125.3	125.5	-0.2%
Chip 3	2	130.1	130.4	-0.2%	127.7	127.9	-0.2%

Table 146 : Prédictions des températures en position horizontale ($\vec{g} = -z$)

Conditions aux limites	$\overline{h}_i\ (W/m^2.K)$		$T_\infty\ (°C)$	$k_{X_j}\ (W/m.K)$	$k_{Y_j}\ (W/m.K)$	$k_{Z_j}\ (W/m.K)$	
	Table 109		85		Table 105		
Source i	$\boldsymbol{q}_{S_i}\ (W)$	$\boldsymbol{T}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\boldsymbol{T}_{T_{S_i}}(°C)$	$\delta\boldsymbol{T}_{S_i}$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{N_{S_i}}\ (°C)$	$\overline{\boldsymbol{T}}_{T_{S_i}}(°C)$	$\delta\overline{\boldsymbol{T}}_{S_i}$
Chip 1	2	122.6	122.9	-0.2%	120.2	120.3	-0.1%
Chip 2	1.5	127.1	127.6	-0.4%	125.3	125.7	-0.3%
Chip 3	2	130.1	130.7	-0.5%	127.7	128.1	-0.3%

Les écarts de prédiction constatés sur les températures centrales et moyennes des 3 sources encastrées sont en deçà de 1% d'erreur.

P24. Établissement du modèle analytique d'une source volumique dans un substrat

Le modèle détaillé ci-après fait l'objet d'une fiche technique écrite en anglais.

- Studied Case**:** Three-dimensional heat equation in an anisotropic parallelepiped heated by rectangular surface source and cooled from its upper and lower surface
- Thermal Field: Steady-state conduction

P24.1. Governing heat conduction equation

The x, y or z dimensions of the domain are respectively L x W x H.

The layer number is fixed to: $1 \leq j \leq 3$

A substitution of x, y and z is made to have a dimensionless problem:

$$X = \frac{x}{L}\ ,\ Y = \frac{y}{W}\ ,\ Z = \frac{z}{H}\ \Longrightarrow dX = \frac{dx}{L},\ dY = \frac{dx}{W},\ dZ = \frac{dz}{H} \qquad \text{(e620)}$$

The definition of the temperature excess (e548) is used.

The modified governing heat equations to solve are resumed by:

$$k_{x_j}\frac{\partial^2\theta_j(X,Y,Z)}{L^2\,\partial X^2} + k_{y_j}\frac{\partial^2\theta_j(X,Y,Z)}{W^2\,\partial Y^2} + k_{z_j}\frac{\partial^2\theta(X,Y,Z)}{Z^2\,\partial Z^2} = 0 \quad for\ j = 1,3 \qquad \text{(e621)}$$

$$k_{x_2}\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{L^2\,\partial X^2}+k_{y_2}\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{W^2\,\partial Y^2}+k_{z_2}\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{H^2\,\partial Z^2}+\ddot{q}=0 \quad \text{(e622)}$$

P24.2. Boundary conditions definition

- Homogenous boundary conditions:

$$-k_{x_j}\left.\frac{\partial\theta_j(X,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}{\partial X}\right|_{X=0\ or\ X=1}=0 \quad \text{(e623)}$$

$$-k_{y_j}\left.\frac{\partial\theta_j(X,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}{\partial Y}\right|_{Y=0\ or\ Y=1}=0 \quad \text{(e624)}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_1(X,Y,Z)}{\partial Z}\right|_{Z=0}=Bi_B\,\theta_1(X,Y,0)\quad \text{where } Bi_B=\frac{H\,\underline{h}_z}{k_{z_1}} \quad \text{(e625)}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_3(X,Y,Z)}{\partial Z}\right|_{Z=1}=-Bi_U\,\theta_3(X,Y,1)\quad \text{where } Bi_U=\frac{H\,\overline{h}_z}{k_{z_3}} \quad \text{(e626)}$$

$$\theta_j(X,Y,Z)\big|_{Z=\xi_j}=\theta_{j+1}(X,Y,Z)\big|_{Z=\xi_j}\quad \text{where } \xi_j=z_j/H \quad \text{(e627)}$$

$$-k_{z_j}\left.\frac{\partial\theta_j(X,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}{\partial Z}\right|_{Z=\xi_j}=-k_{z_{j+1}}\left.\frac{\partial\theta_{j+1}(X,\mathrm{Y},\mathrm{Z})}{\partial Z}\right|_{Z=\xi_j} \quad \text{(e628)}$$

- None-homogenous boundary conditions

$$\ddot{q}_i=\mathrm{q}_i/\left[L_{S_i}\,W_{S_i}\,H_{S_i}\right] \quad \text{(e629)}$$

P24.1. Partial forms of the conventional three-dimensional heat equation:

- The solution needs to resolve the following equation system:

$$\frac{k_{x_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_j(X,Y,Z)}{\partial X^2}+\frac{k_{y_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{W^2}\frac{\partial^2\theta_j(X,Y,Z)}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta(X,Y,Z)}{\partial Z^2}=0\quad \text{for } j\neq 2 \quad \text{(e630)}$$

$$\frac{k_{x_2}}{k_{z_2}}\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{\partial X^2}+\frac{k_{y_2}}{k_{z_2}}\frac{H^2}{W^2}\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta_2(X,Y,Z)}{\partial Z^2}+\frac{\ddot{q}\,H^2}{k_{z_2}}=0 \quad \text{(e631)}$$

- The method of separation of variables is used to rewrite the first heat equation (e630).

$$\theta_j(X,\mathrm{Y},\mathrm{Z})=f_j(X)\,g_j(Y)\,h_j(\mathrm{Z})\ \text{ for } j\neq 2 \quad \text{(e632)}$$

$$\frac{k_{x_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{L^2}\frac{1}{f_j(X)}\frac{\partial^2 f_j(X)}{\partial X^2}+\frac{k_{y_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{W^2}\frac{1}{g_j(Y)}\frac{\partial^2 g_j(Y)}{\partial Y^2}+\frac{1}{h_j(Z)}\frac{\partial^2 h_j(Z)}{\partial Z^2}=0 \quad \text{(e633)}$$

$$\text{if}\quad \frac{1}{f_j(X)}\frac{\partial^2 f_j(X)}{\partial X^2}=-\alpha_j^2\ ,\ \frac{1}{g_j(Y)}\frac{\partial^2 g_j(Y)}{\partial Y^2}=-\beta_j^2\ \text{ and }\ \frac{1}{h_j(Z)}\frac{\partial^2 h_j(Z)}{\partial Z^2}=\gamma_j{}^2 \quad \text{(e634)}$$

$$-\frac{k_{x_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{L^2}\alpha_i^2-\frac{k_{y_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{W^2}\beta_j^2+\gamma_j^2=0\ \rightarrow\gamma_j^2=\sqrt{\frac{k_{x_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{L^2}\alpha_j^2+\frac{k_{y_j}}{k_{z_j}}\frac{H^2}{W^2}\beta_j^2} \quad \text{(e635)}$$

- A similar procedure is performed to rewrite the second heat equation (e631).

$$-\frac{k_{x_2}}{k_{z_2}}\frac{H^2}{L^2}\alpha_2^2-\frac{k_{y_2}}{k_{z_2}}\frac{H^2}{W^2}\beta_2^2-\gamma_2^2+\frac{\ddot{q}\,H^2}{k_{z_2}\,\theta_2(x,y,z)}=0 \quad \text{for } j=2 \tag{e636}$$

$$\ddot{q}=k_{z_2}\left[\frac{k_{x_2}}{k_{z_2}}\left(\frac{\alpha_2}{L}\right)^2+\frac{k_{y_2}}{k_{z_2}}\left(\frac{\beta_2}{W}\right)^2+\left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right]\theta_2(x,y,z) \tag{e637}$$

- The partial solution forms for each single x-axis or y-axis or z-axis profile are expressed as:

$$\frac{\partial^2 f_j(X)}{\partial X^2}+{\alpha_j}^2\,f_j(X)=0 \;\rightarrow\; f_j(X)=X_{1_j}\,sin(\alpha_j\,X)+X_{2_j}\,cos(\alpha_j\,X) \quad \forall j \tag{e638}$$

$$\frac{\partial^2 g_j(Y)}{\partial Y^2}+{\beta_j}^2\,g_j(Y)=0 \;\rightarrow\; g_j(Y)=Y_{1_j}\,sin(\beta_j\,Y)+Y_{2_j}\,cos(\beta_j\,Y) \quad \forall j \tag{e639}$$

$$\frac{\partial^2 w_j(Z)}{\partial Z^2}-{\gamma_j}^2\,w_j(Z)=0 \;\rightarrow\; h_j(Z)=Z_{1_j}\,e^{\gamma_j\,(Z-1)}+Z_{2_j}\,e^{-\gamma_j\,(z+1)} \quad j\neq 2 \tag{e640}$$

$$\frac{\partial^2 w_2(Z)}{\partial Z^2}+{\gamma_2}^2\,w_2(Z)=0 \;\rightarrow\; h_2(Z)=Z_{1_2}\,sin(\gamma_2\,Z)+Z_{2_2}\,cos(\gamma_2\,Z) \tag{e641}$$

P24.2. Definition of the parameters of each partial solution forms:

- The missing parameters are going to be solved using the following set of boundary conditions.

$$\left.\frac{\partial f_j(X)}{\partial X}\right|_{X=0,1}=0 \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial g_j(Y)}{\partial Y}\right|_{Y=0,1}=0 \tag{e642}$$

$$\left.\frac{\partial h_1(Z)}{\partial Z}\right|_{Z=0}=Bi_B\,w_1(0) \tag{e643}$$

$$\left.\frac{\partial h_3(Z)}{\partial Z}\right|_{Z=0}=Bi_U\,w_3(1) \tag{e644}$$

$$h_j(\xi_j)=h_{j+1}(\xi_j) \quad \text{for } j=1,2 \tag{e645}$$

$$-k_{z_j}\left.\frac{\partial h_j(Z)}{\partial Z}\right|_{Z=\xi_j}=-k_{z_{j+1}}\left.\frac{\partial h_{j+1}(Z)}{\partial Z}\right|_{Z=\xi_j} \quad \text{for } j=1,2 \tag{e646}$$

- Applying the boundary condition (e642) permits to obtain the x-axis and y-axis functions:

$$(\text{e642}) \rightarrow \quad \alpha_{j_m}=\alpha_m=m\,\pi \quad and \quad \beta_{j_n}=\beta_n=n\,\pi \quad \forall\, m,n\in\mathbb{N} \tag{e647}$$

$$\gamma_{j_{m,n}}=H\,r_{j_{m,n}}=H\sqrt{\frac{k_{x_j}}{k_{z_j}}\left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^2+\frac{k_{y_j}}{k_{z_j}}\left(\frac{n\,\pi}{W}\right)^2} \tag{e648}$$

The deduced solution forms to resolve are resumed to:

$$f_{j_m}(X)=X_{2_j}\,cos(\alpha_m\,X)=A^*_{j_m}\,fx_{j_m}(X) \tag{e649}$$

$$g_{j_n}(Y)=Y_{2_j}\,cos(\beta_n\,Y)=B^*_{j_n}\,fy_{j_n}(Y) \tag{e650}$$

- The two external z-axis are deduced from (e640) using (e643) and (e644), such as:

The index (m), (n) or (m,n) are now considered implicit to simplify the writing, such as $\gamma_1 = \gamma_{1_{m,n}}$.

$$(\text{e643}) \rightarrow \quad \gamma_1 Z_{1_1} e^{-\gamma_1} - \gamma_1 Z_{2_1} e^{-\gamma_1} = Bi_B \left[Z_{1_1} e^{-\gamma_1} + Z_{2_1} e^{-\gamma_1}\right]$$

$$Z_{1_1} = Z_{2_1} \lambda_1 \quad \text{where } \lambda_1 = \lambda_{1_{m,n}} = \left(\gamma_{1_{m,n}} + Bi_B\right)/\left(\gamma_{1_{m,n}} - Bi_B\right) \tag{e651}$$

$$h_1(Z) = Z_{2_1} e^{\gamma_1 (Z-1)} \left[\lambda_1 + e^{-2\gamma_1 Z}\right] = C_1^* \, fz_1(Z) \tag{e652}$$

$$(\text{e643}) \rightarrow \quad \gamma_3 Z_{1_3} - \gamma_3 Z_{2_3} e^{-2\gamma_3} = -Bi_U \left(Z_{1_3} + Z_{2_3} e^{-2\gamma_3}\right)$$

$$Z1_3 = Z_{2_3} \lambda_3 e^{-2\gamma_3} \quad where \ \lambda_3 = \lambda_{3_{m,n}} = \left(\gamma_{3_{m,n}} - Bi_U\right)/\left(\gamma_{3_{m,n}} + Bi_U\right) \tag{e653}$$

$$h_3(Z) = Z_{2_3} e^{\gamma_3 (Z-3)} \left[\lambda_3 + e^{2\gamma_3 (1-Z)}\right] = C_3^* \, fz_3(Z) \tag{e654}$$

- The z-axis profile for the mid layer are derived from (e641), (e645) and (e646).
  The relationship between the layer 2 and the layer 1 is given by:

$$(\text{e645}) \rightarrow \quad Z_{1_2} \, sin(\gamma_2 \xi_1) + Z_{2_2} \, cos(\gamma_2 \xi_1) = Z_{2_1} e^{\gamma_1 (\xi_1 - 1)} \left[\lambda_1 + e^{-2\gamma_1 \xi_1}\right]$$

$$(\text{e646}) \rightarrow \ k_{z_2} \gamma_2 \left[Z_{1_2} \, cos(\gamma_2 \xi_1) - Z_{2_2} \, sin(\gamma_2 \xi_1)\right] = Z_{2_1} k_{z_1} \gamma_1 e^{\gamma_1 (\xi_1 - 1)} \left(\lambda_1 - e^{-2\gamma_1 \xi_1}\right)$$

$$k_{z_2} \gamma_2 \frac{Z_{1_2} \, cos(\gamma_2 \xi_1) - Z_{2_2} \, sin(\gamma_2 \xi_1)}{Z_{1_2} \, sin(\gamma_2 \xi_1) + Z_{2_2} \, cos(\gamma_2 \xi_1)} = k_{z_1} r_1 \frac{\lambda_1 - e^{-2\gamma_1 \xi_1}}{\lambda_1 + e^{-2\gamma_1 \xi_1}}$$

$$k_{z_2} \gamma_2 \frac{\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right) - tan(\gamma_2 \xi_1)}{\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right) tan(\gamma_2 \xi_1) + 1} = k_{z_1} \gamma_1 \frac{\lambda_1 - e^{-2\gamma_1 \xi_1}}{\lambda_1 + e^{-2\gamma_1 \xi_1}} \tag{e655}$$

$$\underline{\chi} = \underline{\chi}_{m,n} = \frac{k_{z_1} \gamma_{1_{m,n}}}{k_{z_2}} \frac{\lambda_{1_{m,n}} - e^{-2\gamma_{1_{m,n}} \xi_1}}{\lambda_{1_{m,n}} + e^{-2\gamma_{1_{m,n}} \xi_1}} \tag{e656}$$

Then the relationship between the layer 2 and the layer 3 is given by:

$$(\text{e645}) \rightarrow \quad Z_{1_2} \, sin(\gamma_2 \xi_2) + Z_{2_2} \, cos(\gamma_2 \xi_2) = Z_{2_3} e^{\gamma_3 (\xi_2 - 3)} \left[\lambda_3 + e^{2\gamma_3 (1-\xi_2)}\right]$$

$$(\text{e646}) \rightarrow \ k_{z_2} \gamma_2 \left[Z_{1_2} \, cos(\gamma_2 \xi_2) - Z_{2_2} \, sin(\gamma_2 \xi_2)\right] = Z_{2_3} k_{z_3} \gamma_3 e^{\gamma_3 (\xi_2 - 3)} \left(\lambda_3 - e^{2\gamma_3 (1-\xi_2)}\right)$$

$$k_{z_2} \gamma_2 \frac{\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right) - tan(\gamma_2 \xi_2)}{\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right) tan(\gamma_2 \xi_2) + 1} = k_{z_3} \gamma_3 \frac{\lambda_3 - e^{2\gamma_3 (1-\xi_2)}}{\lambda_3 + e^{2\gamma_3 (1-\xi_2)}} \tag{e657}$$

$$\overline{\chi} = \overline{\chi}_{m,n} = -\frac{k_{z_3} \gamma_{3_{m,n}}}{k_{z_2}} \frac{\lambda_{3_{m,n}} - e^{2\gamma_{3_{m,n}} (1-\xi_2)}}{\lambda_{3_{m,n}} + e^{2\gamma_{3_{m,n}} (1-\xi_2)}} \tag{e658}$$

Combining both layers relationships of allows finding the function of the missing parameters.

$$\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right) = \frac{\underline{\chi} + \gamma_2 \, tan(\gamma_2 \xi_1)}{\gamma_2 - \underline{\chi} \, tan(\gamma_2 \xi_1)} = \frac{\gamma_2 \, tan(\gamma_2 \xi_2) - \overline{\chi}}{\gamma_2 + \overline{\chi} \, tan(\gamma_2 \xi_2)} \tag{e659}$$

$$\gamma_2 \left[\overline{\chi} + \underline{\chi}\right] + \left[{\gamma_2}^2 - \underline{\chi}\,\overline{\chi}\right] \frac{tan(\gamma_2\,\xi_2) - tan(\gamma_2\,\xi_1)}{1 + tan(\gamma_2\,\xi_1)\;tan(\gamma_2\,\xi_2)} = 0 \tag{e660}$$

$$\gamma_2 \left[\overline{\chi} + \underline{\chi}\right] - \left[{\gamma_2}^2 - \underline{\chi}\,\overline{\chi}\right] tan(\gamma_2\,[\xi_2 - \xi_1]) = 0 \tag{e661}$$

$$\left[(\gamma_2\,[\xi_2 - \xi_1])^2 - \underline{\chi}\,\overline{\chi}\,[\xi_2 - \xi_1]^2\right] tan(\gamma_2\,[\xi_2 - \xi_1]) = \gamma_2\,[\xi_2 - \xi_1] \left[\left(\overline{\chi} + \underline{\chi}\right)\,[\xi_2 - \xi_1]\right]$$

The derived solution has a form of a known transcendental equation (e662). So, a root-finding method has to be performed (K3.4), such as:

$$\left[{\zeta_p}^2 - \eta\right] tan(\zeta_p) = \mu\,\zeta_p \quad \rightarrow \quad \gamma_{2_{m,n,p}} = \zeta_p/[\xi_2 - \xi_1] = \zeta_p\,H/\iota_2 \tag{e662}$$

$$\text{With } \eta = \eta_{m,n} = \underline{\chi}_{m,n}\,\overline{\chi}_{m,n}\,[\,\iota_2/H\,]^2 \text{ and } \mu = \mu_{m,n} = \left(\overline{\chi}_{m,n} + \underline{\chi}_{m,n}\right)\,\iota_2/H$$

Finally, the z-axis profile of the mid-layer can be deduced:

$$(\text{e641}) \;\rightarrow\; h_2(Z) = Z_{2_2}\left[\left(Z_{1_2}/Z_{2_2}\right)\,sin(\gamma_2\,Z) + cos(\gamma_2\,Z))\right] \tag{e663}$$

$$\text{Using (e659)} \rightarrow\; h_2(Z) = Z_{2_2}\left[\frac{\underline{\chi} + \gamma_2\;tan(\gamma_2\,\xi_1)}{\gamma_2 - \underline{\chi}\;tan(\gamma_2\,\xi_1)}\,sin(\gamma_2\,Z) + cos(\gamma_2\,Z))\right] \tag{e664}$$

$$\text{Or using (e660)} \;\rightarrow\; h_2(Z) = Z_{2_2}\left[\frac{\gamma_2\;tan(\gamma_2\,\xi_2) - \overline{\chi}}{\gamma_2 + \overline{\chi}\;tan(\gamma_2\,\xi_2)}\,sin(\gamma_2\,Z) + cos(\gamma_2\,Z))\right] \tag{e665}$$

These expressions involve trigonometric functions, which can be simplified as:

$$h_2(Z) = Z_{2_2}\left[\frac{\underline{\chi}\;sin(\gamma_2\,[Z - \xi_1]) + \gamma_2\,cos(\gamma_2\,[Z - \xi_1])}{\gamma_2\,cos(\gamma_2\,\xi_1) - \underline{\chi}\;sin(\gamma_2\,\xi_1)}\right] = C_2^*\;fz_2(Z) \tag{e666}$$

$$h_2(Z) = Z_{2_2}\left[\frac{\gamma_2\,cos(\gamma_2\,[Z - \xi_2]) + \overline{\chi}\;sin(\gamma_2\,[Z - \xi_2])}{cos(\gamma_2\,\xi_2)\;\gamma_2 + \overline{\chi}\;sin(\gamma_2\,\xi_2)}\right] = C_2^*\;gz_2(Z) \tag{e667}$$

- Finally, the solution for each layer $\theta_j(X,Y,Z)$ must be derived from:

$$\theta_j(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} f_{j_m}(X)\;g_{j_n}(Y)\;h_{j_{m,n,p}}(Z) \tag{e668}$$

$$\theta_j(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} G^*_{j_{m,n,p}}\;fx_{j_m}(X)\;fy_{j_n}(Y)\;fz_{j_{m,n,p}}(Z) \tag{e669}$$

$$\text{Where } G^*_{j_{m,n,p}} = A^*_{j_m}\,B^*_{j_n}\,C^*_{2_{m,n,p}}$$

P24.3. Determination of function parameters using orthogonal functions method

The determination of the global parameter functions is based on the volume heat flux equation (e637).

$$\ddot{q} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} G_2^*\,k_{z_2}\left[\frac{k_{x_2}}{k_{z_2}}\left(\frac{\alpha_2}{L}\right)^2 + \frac{k_{y_2}}{k_{z_2}}\left(\frac{\beta_2}{W}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right] fx_2(X)\;fy_2(Y)\;fy_2(Z) \tag{e670}$$

$$\ddot{q} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} G_2^* \, k_{z_2} \left[(r_2)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right] fx_2(X)\ fy_2(Y)\ fy_2(Z) \tag{e671}$$

- Determination of the $G_{2_{m,n,p}}$

  According with the method of orthogonal functions, a set of integrations needs to be achieved.

  Where $A_i^* = A_i/L, or\ W\ or\ H$.

$$\begin{aligned}&\int_{X_C^*-L_S^*/2}^{X_C^*+L_S^*/2}\int_{X_C^*-W_S^*/2}^{Y_C^*+W_S^*/2}\int_{Z_C^*-H_S^*/2}^{Z_C^*+H_S^*/2} \ddot{q}\ fx_2(X)\ fy_2(Y)\ fy_2(Z)\, dX\, dY\, dZ \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_{\xi_1}^{\xi_2} G_2^* \, k_{z_2}\left[(r_2)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right]\left(fx_2(X)\right)^2\left(fy_2(Y)\right)^2\left(fy_2(Z)\right)^2 dX\, dY\, dZ\end{aligned} \tag{e672}$$

$$G_2^* = \frac{\ddot{q}}{k_{z_2}}\frac{1}{\left[(r_2)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right]}\frac{\int_{X_C^*-L_S^*/2}^{X_C^*+L_S^*/2} fx_2(X)\ dX}{\int_0^1 (fx_2(X))^2\, dX}\frac{\int_{Y_C^*-W_S^*/2}^{Y_C^*+W_S^*/2} fy_2(Y)\ dY}{\int_0^1 (fy_2(Y))^2\, dY}\frac{\int_{Z_C^*-H_S^*/2}^{Z_C^*+H_S^*/2} fz_2(Z)\ dZ}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} (fz_2(Z))^2\ dZ} \tag{e673}$$

$$G_2^* = \frac{\ddot{q}}{k_{z_2}\left[(r_2)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{H}\right)^2\right]}(Nx_2/Dx_2)\ (Ny_2/Dy_2)(Nz_2/Dz_2) \tag{e674}$$

- Definition of the x-axis and y-axis geometrical parameters

  The ratio Nx_2/Dx_2 and Ny_2/Dy_2 can be defined as A_{j_m} and B_{j_n} functions.

$$Nx_2/Dx_2 = \int_{X_C^*-L_S^*/2}^{X_C^*+L_S^*/2} cos(\alpha_2\, X)\ dX \Big/ \int_0^1 (cos(\alpha_2\, X))^2\, dX \tag{e675}$$

$$\forall\ \alpha_{j_m} = m\,\pi\ \rightarrow\ A_{2_m}^* = Nx_{2_m}/Dx_{2_m} = 2\ L_S^*\ cos\left(\alpha_{2_m}\ X_C^*\right)\ sinc\left(\alpha_{2_m}\ L_S^*/2\right) \tag{e676}$$

$$A_{2_m} = 2\ (L_S/L)\ cos\left(\frac{m\,\pi}{L}\ X_C\right)\ sinc\left(\frac{m\,\pi}{L}\ \frac{L_S}{2}\right) \tag{e677}$$

$$Ny_2/Dy_2 = \int_{Y_C^*-W_S^*/2}^{Y_C^*+W_S^*/2} cos(\beta_2\ \mathrm{Y})\ dY \Big/ \int_0^1 (cos(\beta_2\ \mathrm{Y}))^2\, dY \tag{e678}$$

$$\forall\ \beta_{j_n} = n\,\pi\ \rightarrow B_{2_n}^*\ = Ny_{2_n}/Dy_{2_n} = 2\ W_S^*\ cos\left(\beta_{2_n}\ Y_C^*\right)\ sinc\left(\beta_{2_n}\ W_S^*/2\right) \tag{e679}$$

$$B_{2_n} = 2\ (W_S/W)\ cos\left(\frac{\mathrm{n}\,\pi}{W}\ X_C\right)\ sinc\left(\frac{\mathrm{n}\,\pi}{W}\ \frac{W_S}{2}\right) \tag{e680}$$

- Definition of the z-axis geometrical parameters

$$C_{2_{m,n,p}}^* = Nz_2/Dz_2 = \int_{X_C^*-H_S^*/2}^{Z_C^*+H_S^*/2} fz_2(Z)\ dZ \Big/ \int_{\xi_1}^{\xi_2} (fz_2(Z))^2\ dZ \tag{e681}$$

$$Nz_2 = \frac{2\ \sin(\gamma_2\ H_S^*/2)\ \left[\left[\underline{\chi}\ \sin\left(\gamma_2\ (Z_C^* - \xi_1)\right)\right] + \gamma_2\left[\cos\left(\gamma_2\ (Z_C^* - \xi_1)\right)\right]\right]}{\gamma_2\left[\gamma_2\ cos(\gamma_2\ \xi_1) - \underline{\chi}\ sin(\gamma_2\ \xi_1)\right]} \tag{e682}$$

$$Dz_2 = \frac{\left(\gamma_2{}^2 - \underline{\chi}^2\right)\ sin(2\ \gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1]) + 2\ \gamma_2\ \left(\gamma_2{}^2 + \underline{\chi}^2\right)\ (\xi_2 - \xi_1) + 4\ \gamma_2\ \underline{\chi}\ \sin^2(\gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1])}{4\ \gamma_2\ \left[\gamma_2\ cos(\gamma_2\ \xi_1) - \underline{\chi}\ sin(\gamma_2\ \xi_1)\right]^2} \tag{e683}$$

$$\frac{Nz_2}{Dz_2} = \frac{8\ \sin\left(\gamma_2\ \frac{H_S^*}{2}\right)\ \left[\underline{\chi}\ \sin\left(\gamma_2\ (Z_C^* - \xi_1)\right) + \gamma_2\ \cos\left(\gamma_2\ (Z_C^* - \xi_1)\right)\right]\ \left[cos(\gamma_2\ \xi_1) - \underline{\chi}\ sin(\gamma_2\ \xi_1)\right]}{\left({\gamma_2}^2 - \underline{\chi}^2\right)\ sin(2\ \gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1]) + 2\ \gamma_2\ \left({\gamma_2}^2 + \underline{\chi}^2\right)\ (\xi_2 - \xi_1) + 4\ \gamma_2\ \underline{\chi}\ \sin^2(\gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1])} \quad \text{(e684)}$$

The comparison of the equations (e666) and (e684) shows that there is a common term, which can be eliminated $(cos(\gamma_2\ \xi_1) - \underline{\chi}\ sin(\gamma_2\ \xi_1))$.

The revised relationships are rewritten such as:

$$fz_2(Z) = \underline{\chi}\ sin(\gamma_2\ [Z - \xi_1]) + \gamma_2\ cos(\gamma_2\ [Z - \xi_1]) \quad \text{(e685)}$$

$$C_2^* = \frac{4\ \gamma_2\ H_S^*\ \mathrm{sinc}(\gamma_2\ H_S^*/2)\ fz_2(Z_C^*)}{\left({\gamma_2}^2 - \underline{\chi}^2\right)\ sin(2\ \gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1]) + 2\ \gamma_2\ \left({\gamma_2}^2 + \underline{\chi}^2\right)\ (\xi_2 - \xi_1) + 4\ \gamma_2\ \underline{\chi}\ \sin^2(\gamma_2\ [\xi_2 - \xi_1])} \quad \text{(e686)}$$

$$C_2^* = \frac{2\ H_S^*\ \mathrm{sinc}(\gamma_2\ H_S^*/2)\ fz_2(Z_C^*)}{(\xi_2 - \xi_1)\left[\left({\gamma_2}^2 - \underline{\chi}^2\right)\ sinc(2\ \zeta) + {\gamma_2}^2 + \underline{\chi}^2\right] + 2\ \underline{\chi}\ \zeta\ \mathrm{sinc}^2(\zeta)}$$

The final form of the temperature excess is given by the following expression:

$$\theta_2(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\ddot{q}\ A_{2_n}^*\ B_{2_n}^*\ C_{2_{m,n,p}}^*}{k_{z_2}\left[\left(r_{2_{m,n}}\right)^2 + \left(\gamma_{2_{m,n,p}}/H\right)^2\right]}\ fx_{2_m}(X)\ fy_{2_n}(Y)\ fz_{2_{m,n,p}}(Z) \quad \text{(e687)}$$

$$\theta_2(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} D_{2_{m,n,p}}^*\ fx_{2_m}(X)\ fy_{2_n}(Y)\ fz_{2_{m,n,p}}(Z) \quad \text{(e688)}$$

P24.1. Definition of the final forms of the solutions

Both remaining z-axis profiles are deduced from the mid-layer profile and the boundary condition (e627).

- Definition of the z-axis profile of the first layer ($j = 1$):

$$\theta_1(X,Y,Z)|_{Z=\xi_1} = \theta_2(X,Y,Z)|_{Z=\xi_1} \quad \text{(e689)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} G_{1_{m,n}}^*\ fx_{1_m}(X)\ fy_{1_n}(Y)\ fz_{1_{m,n}}(\xi_1) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} D_{2_{m,n,p}}^*\ fx_{2_m}(X)\ fy_{2_n}(Y)\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_1) \quad \text{(e690)}$$

$$fx_{j_m}(X)\ fy_{j_n}(Y) = fx_{j+1_m}(X)\ fy_{j+1_n}(Y) \quad \forall j = 1{,}2 \quad \text{(e691)}$$

$$G_{1_{m,n}}^* = \left[\sum_{p=0}^{\infty} D_{2_{m,n,p}}^*\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_1)\right] \Big/ \left[fz_{1_{m,n}}(\xi_1)\right] \quad \text{(e692)}$$

$$\theta_1(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} \frac{D_{2_{m,n,p}}^*\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_1)}{fz_{1_{m,n}}(\xi_1)}\ fx_{1_m}(X)\ fy_{1_n}(Y)\ fz_{1_{m,n}}(Z) \quad \text{(e693)}$$

- Definition of the z-axis profile of the latest layer ($j = 3$):

$$\theta_2(X,Y,Z)|_{Z=\xi_2} = \theta_3(X,Y,Z)|_{Z=\xi_2} \quad \text{(e694)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} D_{2_{m,n,p}}^*\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} G_{3_{m,n}}^*\ fz_{3_{m,n}}(\xi_2) \quad \text{(e695)}$$

$$G^*_{3_{m,n}} = \left[\sum_{p=0}^{\infty} D^*_{2_{m,n,p}}\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_2)\right] \Big/ \left[fz_{3_{m,n}}(\xi_2)\right] \tag{e696}$$

$$\theta_2(X,Y,Z) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} \frac{D^*_{2_{m,n,p}}\ fz_{2_{m,n,p}}(\xi_2)}{fz_{3_{m,n}}(\xi_2)}\ fx_{3_m}(X)\ fy_{3_n}(Y)\ fz_{3_{m,n}}(Z) \tag{e697}$$