UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*
Par

Maha AAFARANI

Résonances réelles et propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint

Thèse présentée et soutenue à l'UNIVERSITÉ DE NANTES, le 11 Décembre 2020
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs :

M. Jérémy FAUPIN, Professeur des universités, Université de Lorraine
M. Shu NAKAMURA, Professeur des universités, Université de Gakushuin

Jury :

Président : **M. PhilippeBRIET**, Professeur des universités, Université de Toulon
M. Jean-Marc BOUCLET, Professeur des universités, Université Paul Sabatier
M. Mouez DIMASSI, Professeur des universités, Université de Bordeaux
M. Nicolas RAYMOND, Professeur des universités, Université d'Angers
Directeur de thèse : **M. Xue-Ping WANG**, Professeur des universités, Université de Nantes

" C’est ce que nous pensons déjà connaitre qui nous empêche souvent d’apprendre."

Claude Bernard

À mes parents · · ·

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier toutes les personnes grâce à qui j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je souhaite tout d'abord remercier sincèrement mon directeur de thèse, Xue Ping Wang, pour toute son aide, son soutien et ses conseils au cours de ces années de thèse. Je le remercie pour sa disponibilité permanente, sa patience et son appui scientifique et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Ensuite, j'adresse tous mes remerciements à Jérémy Faupin et Shu Nakamura, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Merci pour le temps que vous m'avez attribué malgré votre emploi du temps chargé durant cette période si particulière et si difficile, merci d'avoir bien voulu lire attentivement mon manuscrit et rédiger mes rapports de pré-soutenance.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance aux membres de mon jury de thèse, tout d'abord à Philippe Briet pour l'avoir présidé, ainsi qu'à Jean-Marc Bouclet, Mouez Dimassi et Nicolas Raymond pour avoir accepté d'examiner mon travail. Je voudrais particulièrement remercier Mouez Dimassi qui a aussi participé avec Samuel Tapie à mon comité de suivi de thèse, merci pour votre temps, vos conseils et remarques pertinents qui m'ont aidée à améliorer la rédaction de mon travail de thèse.

Je remercie chaleureusement tous les membres du laboratoire Jean Leray pour leur sympathie et leur amitié. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler dans un environnement scientifique agréable. Merci à toutes les personnes qui ont participe à la vie du laboratoire surtout à celles qui ont fait assez d'effort pour nous accompagner durant le confinement et organiser le travail au laboratoire lors de la réouverture progressive. Je tiens à remercier particulièrement les membres du secrétariat Brigitte, Stéphanie, Annick, Alexandra et Béatrice, les informaticiens Éric et Saïd et les bibliothécaires Anh et Claude pour leur accueil gentil, leur disponibilité et leur aide conséquente sur les questions et démarches administratives. Merci à tous les membres de l'équipe d'analyse pour l'ambiance conviviale et studieuse aux séminaires et merci de m'avoir donné l'occasion de présenter mon travail de thèse. Je remercie en particulier Bernard Helffer pour sa gentillesse, ses conseils avisés et ses remarques pertinentes qui ont amélioré mes exposés oraux. Merci également à tous les permanents avec lesquels j'ai eu l'occasion d'enseigner, je les remercie pour leurs conseils pédagogiques et scientifiques. Un merci spécial à Salim pour sa gentillesse

et de m'avoir introduit l'AMC.

Mes années de thèse au laboratoire ne sauraient se limiter à l'activité de recherche. Les séminaires de doctorants ont été pour moi une source de richesse culturelle tant que scientifique dans une ambiance aimable. Je remercie leurs organisateurs successifs, Mathieu, Fabien, Antoine et Arthur. Je ne peux pas exprimer la joie que je sentis en arrivant chaque matin au labo. Je n'oublierai jamais les pauses café, les galettes, les déjeuner au Resto U ou dans la salle commune qui ont constitué pour moi une source d'intégration et de moments de partage dans une ambiance amicale. Je remercie mes co-bureaux, Thomas G. et Anh pour l'environnement aimable et sérieux au bureau et pour les divers discussions dans la journée, surtout les explications de Thomas qui ont pu toujours répondre à nos multiples questions. Merci Anh de m'avoir sauvée tant de fois lorsque j'ai oublié mes clés au bureau ! Merci également aux nouveaux Khaled et Silvère et bon courage pour vos projets de thèse. Je remercie chaleureusement Germain, d'être un collègue sympa au Master 2, et un formidable ami durant toutes les années de thèse. Je le remercie ainsi que Fabien pour leur relecture de l'intro du présent manuscrit. Merci à celles et ceux qui sont partis.es avec qui j'ai eu la chance de partager de bons moments durant une ou deux années de thèse, je pense à Solène, Caroline, Hélène, Clair, Maissa, Mathilde, Thomas W., Caroline Vernier. Je remercie également Côme, Mathieu, Mohamed, Fabien, Antoine, Arthur, Adrian et Alexandre pour leur bonne humeur et pour toutes les discussions amusantes, soit autour les TDs, soit sur la découverte des cuisines libanaises et française. Je remercie aussi le nouveau Adrien pour les pauses gâteaux qu'on a eu l'occasion de faire à la rentrée, merci à Mael, Samuel et Trung. Je remercie par ailleurs Nhi, c'était un grand plaisir de te croiser au CIRM. Merci pour ta gentillesse et ton encouragement.

J'adresse maintenant mes chaleureux remerciements à Hala, tu étais collègue au labo durant deux années, voisine à Olympe de Gouges pour trois ans et très chère amie pour toujours. Je te remercie pour tes conseils avisés et ton aide dans les démarches administratives qui m'ont permis de découvrir mes devoirs et mes droits. Merci d'avoir organisé plusieurs voyages agréables, à Saint-Sébastien, Rome, Monaco, Nice, Cannes, pays de la Loire, ... ces moments sont inoubliables ! Je remercie ensuite Zeinab, ma co-bureau durant toutes les années de thèse, ma voisine et ma sincère amie. Merci pour les bons moments partagés durant tous les voyages que je viens de citer, ainsi que les autres voyages ensemble à Rennes, Dijon et Obernai à l'occasion des conférences organisées par la communauté d'analyse des EDPs. Merci pour les longues pauses-café tous les week-end et tous les jours de confinement. Je remercie encore Hala et Zeinab d'avoir constitué pour moi une formidable famille à Nantes. La liste est longue ! Je tiens à remercier mes amis Libanais avec qui j'ai partagé de bons moments à Nantes. Merci à Kassem d'être mon parrain, merci à Fakhrielddine pour ta bonne humeur, bon courage à vous deux pour la troisième année de thèse. Je remercie également Fatima, Zeina, Ali, Marwa, Rayan et Mahdi. Merci à Mayssaa de m'avoir aidée dans les premiers pas pour venir étudier en France, je te souhaite une bonne chance.

Mes pensées vont à ma magnifique famille au Liban qui m'a toujours encouragée, soutenue et écoutée durant toutes les années de thèse même si elle a été très loin de ce que je faisais. Merci du fond du cœur à mon cher père Abed Al Hassan, ma chère mère Raya, mon admirable frère Ahmad et sa femme Hiam et mes six jolies sœurs Zeinab, Hanan, Ahlam, Fatima, Hana et la petite Zahraa. Merci à vos maris ! Vous êtes avec vos filles et fils une source d'espoir pour moi. Merci d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir offert de TONNES d'AMOUR ! Mon père, je pensais à toi, même si j'ai pas pu t'accompagner aux premières séances de traitement.

Mes derniers mots sont pour celui qui m'a soutenue, m'a supportée et m'a écoutée dans les bons et les pires moments. Le partage avec lui d'un objectif commun de finir la thèse m'a toujours aidée à résoudre les problèmes et dépasser les difficultés. Merci à Ahmad, mon fiancé, sans qui tout cela m'aurait pas la même saveur.

Table des matières

1

Introduction générale

1.1 Problématique et motivation Physique

L'interaction d'un neutron avec un noyau occupe le centre d'intérêt dans de nombreux domaines tels que la physique nucléaire fondamentale, l'astrophysique nucléaire et de nombreuses applications, comme les réacteurs nucléaires. Dans toutes ces applications, la connaissance de la probabilité d'occurrence des réactions induites par neutrons, exprimée en termes de la section efficace, s'avère indispensable, souvent avec précision. La détermination de ces données de base se fait à l'aide d'expériences et de modèles théoriques de physique nucléaire, parmi lesquels le modèle optique nucléaire. Ce modèle fait intervenir l'équation de Schrödinger avec un potentiel à valeurs complexes sur laquelle porte le travail de cette thèse.

1.1.1 Interactions neutron-noyau

Les réactions nucléaires peuvent se produire par différents mécanismes. En principe, un projectile, par exemple un neutron qui se rapproche d'un noyau cible, a une certaine probabilité d'interagir avec le champs nucléaire moyen. Cette probabilité dépend essentiellement de l'énergie cinétique du projectile. E. Weisskopf [75] décrit les différents mécanismes de réactions possibles entre un neutron et un noyau que l'on montre sur la figure suivante :

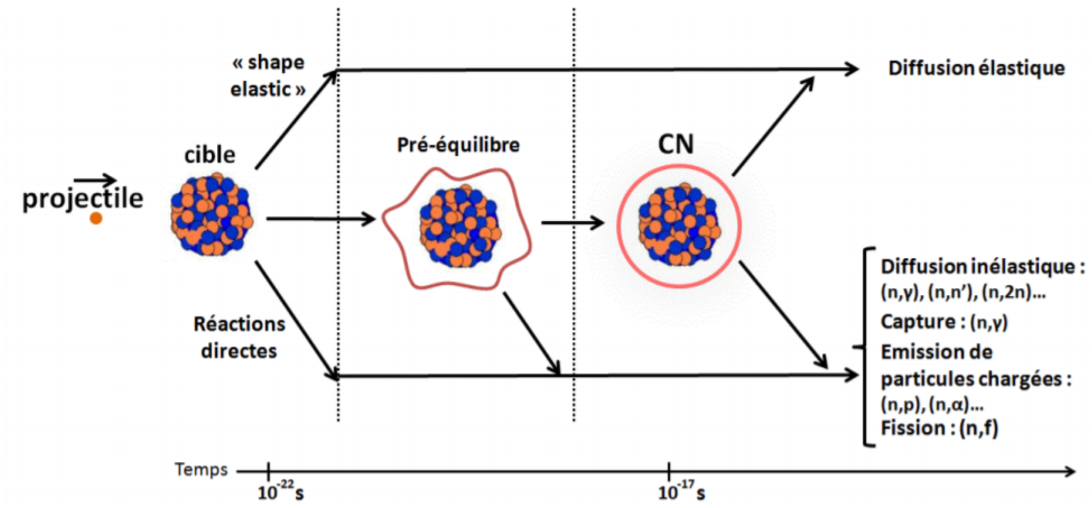

FIGURE 1.1: Représentation de différents mécanismes de réaction. Source : Figure dans [13].

Le premier processus représente la réaction de diffusion élastique résonante « shape elastic » correspondant à la déviation de la trajectoire du neutron par le potentiel nucléaire sans aucune partage de l'énergie avec les nucléons du noyau cible. Le second est la réaction directe durant laquelle le neutron interagit directement avec un ou plusieurs nucléons du noyau cible d'une manière extrêmement rapide (de l'ordre de 10^{-22}s). Le dernier processus consiste en la formation d'un noyau composé « compound nucleus (CN) ». Ce phénomène est le plus complexe. Le neutron est capturé par le noyau cible à cause de l'interaction forte et partage son énergie, énergie cinétique et énergie de liaison, avec les nucléons du noyau cible pour arriver à l'état d'équilibre correspondant à la formation du noyau composé. Cependant, le noyau peut passer par un état intermédiaire appelé pré-équilibre durant lequel l'émission de particules peut avoir lieu avant la formation d'un noyau composé. À l'issue de ce processus, le noyau composé libère une partie de son énergie à travers l'émission de particules et/ou de rayonnements, conservant ou non la nature du noyau cible.

Un outil théorique indispensable de calcul de données servant à l'analyse et à l'évaluation des données de réaction neutron-noyau est le modèle optique nucléaire « nuclear optical model » introduit par Feshbach, Porter et Weisskopf [20]. C'est un outil de calcul de la probabilité de formation d'un noyau composé après absorption d'un neutron.

1.1.2 Modèle optique nucléaire

L'idée conceptuelle du modèle optique nucléaire est de modéliser l'interaction entre une particule incidente, un neutron, et un noyau cible séparés par une distance r à l'aide d' un potentiel moyen $V(r)$ à valeurs complexes. Ce potentiel est de la forme suivante

$$V(r) = U(r) + iW(r)$$

dont la partie réelle $U(r)$ caractérise la réflexion de la particule incidente , et la partie imaginaire $W(r)$ représente l'absorption de cette particule si $W < 0$ ou sa transmission si $W > 0$.

Il existe plusieurs approches pour déterminer le potentiel optique. La première qui a été utilisée se fait par ajustement de paramètres de données expérimentales, ce qui nécessite la connaissance de la réaction en étude. On renvoie à [8, 13] pour une présentation détaillée.

Dans [8], le potentiel optique est décrit, d'une manière plus réaliste, par :

$$V(r) = f(r)U + ig(r)W$$

où U et W sont les profondeurs des parties réelles et imaginaires respectivement. Les facteurs de forme $f(r)$ et $g(r)$ dépendent de la distance r entre le projectile et le noyau cible. L'interaction nucléon-nucléon est décrite par le potentiel nucléaire $Uf(r)$ uniforme à l'intérieur du noyau et décroissante près de la surface ayant le taux de variation suivant

$$f(r) = \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

où R est le rayon nucléaire et a est un paramètre caractérisant la diffusivité de la surface nucléaire. D'autre part, le potentiel d'absorption est représenté par $Wg(r)$. Pour une énergie incidente faible (<10 MeV.A), l'absorption peut être représentée par le facteur de forme surfacique $g(r)$ donné par

$$g(r) = 4a\frac{df(r)}{dr}.$$

De plus, un potentiel d'interaction spin-orbite V_{so} pourrait être ajouté. Ce dernier potentiel décrivant le couplage entre le spin du projectile et le moment angulaire transféré s'écrit

$$V_{so} = -bR_0^2\frac{1}{r}\frac{d\,v(r)}{dr}\begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y \\ L_x + iL_y & -L_z \end{pmatrix},$$

où $R_0 = 1\,\text{fm}$, b est une constante sans dimension, $v(r)$ est le potentiel électrique du noyau et L_x, L_y,L_z sont les composantes de l'opérateur de moment cinétique orbital exprimées en coordonnées sphériques (r, θ, φ) à l'aide des relations suivantes

$$\begin{aligned}
L_x &= i\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\varphi}\Big), \\
L_y &= i\Big(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\varphi}\Big), \\
L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

Finalement, un potentiel de Coulomb V_c peut avoir lieu lorsque le projectile est chargé. Par conséquent, le potentiel optique s'écrit

$$V(r) = f(r)U + ig(r)W + V_{so} + V_c.$$

1.1.3 Théorie de la diffusion pour le modèle optique

Dans la théorie de la mécanique quantique non-relativiste, l'évolution en temps de la fonction d'onde $u(t)$ décrivant l'état d'un système physique est régie par l'équation de Schrödinger qui s'écrit dans les unités $\hbar = 2m = 1$

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Hu(t,x) = \Big(-\Delta + V(x)\Big)u(t,x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.1}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et $V(x)$ est un potentiel électrique.

Considérons l'exemple du système formé par un neutron orienté vers un noyau cible avec une certaine vitesse tel qu'il est susceptible d'être absorbé par ce dernier (voir Figure 1.1). L'opérateur de Schrödinger H associé à l'équation (1.1.1) est de la forme $H = -\Delta + U(x) - iW(x)$, où $U(x)$ et $W(x)$ sont deux potentiels à valeurs réelles et $W \geq 0$. De plus, U et W sont supposés décroître rapidement à l'infini. Dans cet opérateur, le premier terme $-\Delta$ désigne l'opérateur de l'énergie cinétique de la particule incidente, alors que le second $U(x) - iW(x)$ correspond au potentiel effectif représentant l'action totale de la cible, dont l'ensemble de ses constituants, sur la particule. À savoir, H est un opérateur dissipatif maximal, de domaine $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Sobolev standard des fonctions dont les dérivées, au sens de distribution, jusqu'à l'ordre 2 sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $-iH$ est le générateur d'un semi-groupe de contraction $(e^{-itH})_{t\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ (cf. [41, Chapitre IX]). Ce dernier décrit la dynamique de la particule incidente : si le neutron est placé initialement dans un état normalisé $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, son état à l'instant $t \geq 0$ est décrit par $u(t) := e^{-itH}u_0$. De plus, la fonction d'onde $u(t)$ contient implicitement toutes les informations liées à l'interaction qui a lieu. La probabilité de la diffusion élastique (shape elastic) de la particule incidente est donnée par

$$p_{se} := \lim_{t\to+\infty} \|e^{-itH}u_0\|^2.$$

De même, la probabilité d'absorption de la particule par la cible est exprimée par la quantité suivante

$$p_{abs} := 1 - \lim_{t\to+\infty} \|e^{-itH}u_0\|^2.$$

Or le potentiel est complexe, la détermination de l'asymptotique de la fonction $u(t)$ en temps grand est trop compliquée. Bien souvent, il vaut mieux comparer la solution $u(t)$ de (1.1.1) à celle du système libre, où l'opérateur H est remplacé par un opérateur plus simple, le Laplacien libre $H_0 = -\Delta$. C'est l'idée principale de la théorie de la diffusion. La particule est dite asymptotiquement libre quand $t \to -\infty$ s'il existe un état v_0^- tel que

$$\lim_{t\to-\infty} \|e^{-itH}u_0 - e^{itH_0}v_0^-\| = 0,$$

ce qui est équivaut à

$$u_0 = s - \lim_{t\to-\infty}(e^{-itH})^* e^{itH_0} v_0^-,$$

où $s - \lim$ désigne la limite forte. Donc, il convient de définir l'opérateur suivant

$$W_- := s - \lim_{t\to-\infty} e^{itH^*} e^{-itH_0}.$$

L'asymptotique de la particule quand $t \to +\infty$ peut être étudiée de la même manière en introduisant l'opérateur

$$W_+ := s - \lim_{t\to+\infty} e^{itH^*} e^{-itH_0}.$$

En fait, on s'attend à ce que pour tout état u_0 il existe un état entrant u_- et un autre sortant u_+ tels que

$$u_0 = W_- u_- \text{ et } u_0 = W_+ u_+.$$

D'où l'idée, pour relier l'état libre entrant avec l'état libre sortant, d'introduire l'opérateur de diffusion

$$S(H, H_0) = W_+^* W_- : \ u_- \mapsto u_+.$$

Ainsi, la théorie de la diffusion pour le modèle optique, ou plus généralement pour tout paire d'opérateurs (H, H_0), est concernée par les deux problèmes suivants :

- L'existence de l'opérateur de diffusion $S(H, H_0)$.
- L'inversibilité de l'opérateur de diffusion S, ou encore la complétude asymptotique. Pour faire face à ce problème, il convient d'étudier l'opérateur S dans une représentation où H_0 est diagonalisable. Pour le modèle optique, une telle représentation est donnée par

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_0 : & L^2(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & L^2(]0,+\infty[, \mathbb{S}^2) \\ & f & \mapsto & \mathcal{F}_0 f(\lambda)(\omega) = \lambda^{1/4}\hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega), \end{array}$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f et $\mathbb{S}^2$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$. Dans cette représentation, l'action de l'opérateur S se transforme en une multiplication par une fonction définie presque partout sur $]0, +\infty[$ à valeurs opérateurs

$$S(\lambda) = \mathcal{F}_0 S(H, H_0) \mathcal{F}_0^*, \tag{1.1.2}$$

appelée la « matrice de diffusion ». Cette fonction est exprimée à l'aide des valeurs au bord de la résolvante $(H - z)^{-1}$ qui peuvent être définies sur des espaces L^2 à poids. En physique, la matrice de diffusion a une grande importance, elle contient toute l'information sur le mécanisme de diffusion du système d'interaction nucléaire, telle que l'amplitude de diffusion et la section efficace différentielle. Ainsi, le problème de complétude se ramène à la question de l'inversibilité de la matrice $S(\lambda)$. Cette dernière signifie qu'à un niveau d'énergie $\lambda > 0$ donné, chaque état de diffusion sortant correspond à un unique état entrant et vice versa. On renvoie à [11, 19, 63] pour plus de détails sur la théorie de la diffusion pour le modèle optique.

Lorsque l'opérateur H est autoadjoint, la réponse aux deux problèmes est souvent positive selon beaucoup de résultats réalisés avec des hypothèses variées. On trouve l'historique de ces résultats dans le livre de Reed-Simon [59] et celui de Yafaev [76], et les références associées. Par contre, la situation est plus compliquée pour la théorie de la diffusion dissipative, notamment en ce qui concerne le deuxième problème (voir [10] pour les propriétés générales de la diffusion pour des opérateurs dissipatifs). Faupin et Fröhlich [18] ont montré la complétude asymptotique sous l'hypothèse d'absence de singularités spectrales pour un modèle abstrait d'opérateur de Schrödinger dissipatif de la forme $H = -\Delta + U - iC^*C$. Wang et Zhu [74] l'ont montré aussi pour $H = -\Delta + U - iW$ sous l'hypothèse que U et W soient de normes suffisamment petites.

Autrement, en ce qui concerne la matrice de diffusion, il y a une différence remarquable entre les résultats des théories de la diffusion pour les opérateurs autoadjoints et dissipatifs. Dans le premier cas, la matrice $S(\lambda)$ est unitaire alors que dans le deuxième, $S(\lambda)$ n'est pas nécessairement inversible. L'un des résultats de Faupin et Nicoleau [19] montre que la matrice de diffusion $S(\lambda)$ pour le modèle optique est inversible si et seulement si λ n'est pas une résonance réelle. La présence de ces résonances réelles est cruciale, ces sont les seuls points du spectre continu en lesquels les valeurs propres peuvent s'accumuler, on reviendra plus en précision sur leur définition. Dans cette thèse, on s'intéresse à un autre problème dans le cadre de la théorie de diffusion dissipative. On étudie le comportement asymptotique en temps long de la solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel complexe. En particulier, on observe la contribution des résonances réelles dans l'asymptotique des solutions.

1.2 Objectifs principaux de la thèse

Dans cette thèse, on étudie le comportement asymptotique en temps long de la solutions du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= (-\Delta + V(x))u(t,x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

avec un potentiel V à valeurs complexes. L'étude de cette équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste, où un potentiel à valeurs complexes intervient dans la description du système physique étudié, a connu un regain d'intérêt depuis des dizaines d'années. De nombreux travaux en physique sont dédiées à ce sujet, on cite par exemple [9, 21, 30, 45]. En physique, les potentiels complexes apparaissent dans l'étude de la diffraction, l'étude des supraconducteurs ou encore dans la détermination de la masse du boson de Higgs. Ces potentiels interviennent aussi dans la description de phénomènes d'absorption ou de diffusion comme le modèle optique décrit à la sous-section 1.1.2.

Dans la première partie de la thèse, on s'intéresse à l'équation de Schrödinger en dimension $n = 3$ avec un potentiel V à valeurs complexes ayant une décroissance rapide à l'infini, c'est-à dire qu'il vérifie la condition de décroissance

$$|V(x)| \leq C_v(1 + |x|)^{-\rho}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2.2}$$

pour certain $\rho > 2$ (cette condition peut varier selon le résultat à obtenir). Dans cette partie, aucune hypothèse sur la partie imaginaire de V ne sera exigée.

La solution du problème de Cauchy (1.2.1) est décrite par

$$u(t) = e^{-itH} u_0,$$

telle que H est l'opérateur de Schrödinger associé

$$H = -\Delta + V, \tag{1.2.3}$$

où $-\Delta$ est l'opérateur Laplacien de domaine $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$, l'espace de Sobolev standard des fonctions dont les dérivées, au sens de distribution, jusqu'à l'ordre 2 sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, V est l'opérateur borné de multiplication dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ par la fonction mesurable à valeurs complexes $V(x)$ vérifiant la condition (1.2.2). En vue de ces hypothèses sur le potentiel V, l'opérateur H est bien un opérateur non-autoadjoint de même domaine que celui de $-\Delta$, c'est-à dire $\mathcal{D}(H) = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, puisque

$$\lim_{|x| \to +\infty} |V(x)| = 0,$$

on déduit par le théorème de Weyl que le spectre essentiel $\sigma_e(H)$ de H coïncide avec celui du $-\Delta$, c'est-à dire $\sigma_e(H) = [0, +\infty[$. Ainsi, le spectre de H contenu dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ est constitué d'un ensemble dénombrable de valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies. Plus précisément, la multiplicité algébrique d'une valeur propre isolée λ de H est égale au rang du projecteur de Riesz associé défini par la formule

$$\Pi_\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - H)^{-1} \, dz, \tag{1.2.4}$$

où γ est un chemin fermé simple inclus dans l'ensemble résolvant de H ne contenant dans son intérieur aucun élément du spectre de H autre que λ. On note cependant que, sous les conditions considérées, l'opérateur H n'admet pas de valeurs propres strictement positives, on renvoie pour ce résultat à [35] (on notera dans la suite le spectre de H par $\sigma(H)$). La résolvante de H, $R(z) := (H - z)^{-1}$, est ainsi définie pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ comme opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{D}(H)$.

Il s'avère que l'étude de l'asymptotique en temps long de la solution $u(t)$ dépend d'une manière cruciale des propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger H. Plus précisément, de l'analyse spectrale de la résolvante $R(z) := (H - z)^{-1}$ près du spectre continu de H, c'est-à dire $\mathbb{R}_+$. En effet, les valeurs aux bords de la résolvante sont définies grâce au principe d'absorption limite par

$$\lim_{\epsilon\to 0}(H-\lambda\mp i\epsilon)^{-1}=(H-\lambda\mp i0)^{-1},\qquad \lambda>0 \tag{1.2.5}$$

lorsque les limites ci-dessus existent dans l'espace des opérateurs bornés de l'espace à poids $L^{2,s}:=L^2(\langle x\rangle^s dx)$, où $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$, dans $L^{2,-s}$ pour certain $s>1/2$ (voir [3, 5, 34] dans le cas d'un potentiel à valeurs réelles et [61] pour un potentiel à valeurs complexes). Les poids $\langle x\rangle^s$, $s\in\mathbb{R}$, utilisés ici ont pour rôle d'absorber l'explosion de la norme de la résolvante à proximité du spectre continu. En grande énergie, il est facile de montrer, par un argument de perturbation, que les limites ci-dessus existent et sont uniformément bornées de $L^{2,s}$ dans $L^{2,-s}$ pour tout $s>1/2$. Cependant, en énergie basse (près de 0) la résolvante peut avoir des singularités de type z^{-1} ou $z^{-\frac{1}{2}}$ lorsque 0 est une valeur propre de H ou une résonance, respectivement. On appelle 0 une résonance de H lorsque l'équation $H\psi=0$ admet une solution non triviale ψ appartenant à $L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)\setminus L^2(\mathbb{R}^3)$ pour tout $s>1$. Une telle fonction est appelée un état résonant. En énergie intermédiaire, i.e. pour λ dans un intervalle bornée de $]0,+\infty[$, si le potentiel V décroit à l'infini comme $\langle x\rangle^{-1-\beta}$ avec $\beta>0$, alors les valeurs aux bords $(H-\lambda\mp i0)$ sont définies à l'exception de l'ensemble de mesure de Lebesgue nulle des points λ tels que l'équation

$$Hu=\lambda u$$

admet une solution non triviale $\varphi\in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$, $s>1/2$, vérifiant l'une des conditions de radiation de Sommerfeld

$$\varphi(x)=\frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|}(a_\pm(\omega)+o(1)),\quad |x|\to\infty, \tag{1.2.6}$$

pour un certain $a_\pm\in L^2(\mathbb{S}^2)$, $a_\pm\neq 0$, où $\mathbb{S}^2$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (cf. [61, 62]). Ses valeurs réelles sont appelées des points singuliers dans [61] et exceptionnels dans [62]. Dans le présent travail, nous appelons un tel point $\lambda>0$ une résonance positive sortante (resp., entrante) de H si φ vérifie (1.2.6) avec un signe $+$ (resp. un signe $-$) (voir Définition 4.1.4 pour la définition exacte des résonances positives). Il est connu que les résonances positives sont absentes pour l'opérateur de Schrödinger autoadjoint [3, 24, 34, 35, 38, 43] (voir aussi [46] pour un potentiel des δ-interactions entre N particules) et que la résonance 0 est responsable de certains phénomènes physiques remarquables, tels que l'effet Efimov pour un système à trois corps [66, 67, 71] (voir aussi le revue physique [51]). En revanche, les résonances réelles (c'est-à-dire la résonance 0 et les résonances positives) sont les seuls points du spectre continu de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint en lesquels les valeurs propres peuvent s'accumuler. Ainsi la résolvante peut exploser en norme dans les régions proches des résonances réelles, ce qui constitue une difficulté importante dans l'étude de problèmes d'évolution associés aux opérateurs non-autoadjoints. À notre conaissance, les résonances positives sont souvent exclues dans les travaux sur le cas non-autoadjoint (voir [25]).

L'objectif dans la première partie de cette thèse est d'obtenir le développement asymptotique en temps long ($t \to +\infty$) de la solution du problème (1.2.1) en présence d'une valeur propre et/ou d'une résonance au seuil 0, ainsi que de résonances positives, en supposant que V satisfait à la condition de décroissance (1.2.2) pour un certain $\rho > 2$. Nous précisons ici que nous n'utilisons ni condition sur le signe de la partie imaginaire de V, ni hypothèse d'analycité. Dans ce but, nous nous intéressons aux développements asymptotiques de la résolvante près du seuil 0 et des résonances positives de H. En particulier, nous étudions l'énergie 0 dans toutes les situations possibles : 0 est une valeur propre et n'est pas une résonance, 0 est une résonance et n'est pas une valeur propre, 0 est à la fois une valeur propre et une résonance. Nous calculons également la contribution des résonances positives sortantes explicitement en termes des états résonants (les résonances positives entrantes n'apparaissent pas lorsqu'on regarde l'asymptotique quand $t \to +\infty$).

En effet, dans le cas autoadjoint, le principal obstacle à l'analyse des propriétés spectrales de la résolvante est la présence d'une valeur propre et /ou d'une résonance au seuil 0. Il existe cependant une différence essentielle entre le cas d'une valeur propre 0 de l'opérateur de Schrödinger autoadjoint et de celui non-autoadjoint : dans le premier cas les multiplicités géométrique et algébrique sont égales alors qu'elles ne sont pas nécessairement égales dans le second cas. On note que la multiplicité géométrique de la valeur propre 0 est égale à la dimension de l'espace propre Ker$H$ alors que sa multiplicité algébrique est égale à la dimension de l'espace propre généralisé $\{\psi : H^n\psi = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}\}$, où en générale ce dernier peut avoir une dimension infinie. On se contente d'étudier dans cette thèse le cas d'une multiplicité géométrique quelconque, ce qui impose la présence éventuelle de plusieurs blocs de Jordan.

Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'équation de Schrödinger (1.2.1) associée à une perturbation à décroissance lente (c'est-à dire vérifiant la condition (1.2.2) pour un certain $0 < \rho < 2$) d'un opérateur modèle non-autoadjoint $H_0 = -\Delta + V_0(x), V_0(x) = V_1(x) - iV_2(x), V_1, V_2$ à valeurs réelles, vérifiant pour certains $c > 0$ et $0 < \mu < 1$ une condition de coercivité à poids :

$$|\langle H_0 u, u\rangle| \geq c(\|\nabla u\|^2 + \|\langle x\rangle^{-\mu} u\|^2. \tag{1.2.7}$$

X. P. Wang dans [68] a étudié l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint $H = -\Delta + V$ considéré comme une perturbation par un potentiel à support compact $W = V - V_0$ d'un opérateur modèle $H_0 = -\Delta + V_0$ satisfaisant la condition de coercivité ci-dessus. Il s'est intéressé aux propriétés spectrales de H en énergie basse, en particulier l'étude a été dédiée à la valeur propre au seuil 0. Le potentiel V_0 est supposé être par ailleurs dilatable analytiquement, c'est-à dire $\{V(xe^\theta)(H_0 - i)^{-1}\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ s'étend en une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, analytique par rapport à θ dans un voisinage complexe de 0. De plus, V_0 s'étend holomorphiquement dans une région de la forme

$$\{x \in \mathbb{C}^n,\ |x| > c^{-1},\ |\operatorname{Im} x| < c|\operatorname{Re} x|\}$$

pour un certain $c > 0$. En utilisant la technique de distorsion analytique, Wang a montré que H peut admettre au plus un nombre fini de résonances positives sortantes qui coïncident avec les résonances quantiques de H situées sur l'axe réel positif. Ces résonances quantiques sont définies comme étant les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante au demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z \leq 0\}$. En particulier, le théorème 2.4 dans [68] donne deux résultats principaux dans le cas d'une valeur propre 0 de H géométriquement simple (c'est-à dire $\dim \operatorname{Ker} H = 1$). Des estimations sous-exponentielles du semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ sont obtenues. Également, des estimations du semi-groupe de Schrödinger $(e^{-itH})_{t\geq 0}$ sont établies pour une classe de potentiels V_0 dilatables analytiquement et vérifiant la condition de viriel globale : il existe $c_2 > 0$ telle que pour certains $\alpha > 0$ et $R \in [0, +\infty]$:

$$\operatorname{Re}(x \cdot \nabla V_0(x)) \leq -c_2 \frac{x^2}{\langle x\rangle^{\alpha+2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ |x| > R, \tag{1.2.8}$$

$$\operatorname{Im} V_0(x) \geq c_2 \langle x\rangle^{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R, \tag{1.2.9}$$

Notre but dans la deuxième partie de la thèse est d'étendre les résultats du Théorème 2.4 dans [68] à une classe des potentiels plus générale. Pour la solution de l'équation de la chaleur, on suppose que W est borné et à décroissance lente à l'infini alors que dans [68] W est supposé être borné et à support compact. Pour l'équation de Schrödinger, on remplace la condition de viriel globale par une condition de viriel à l'infini. En plus, nous traitons le cas de valeur propre 0 de H de multiplicité géométrique quelconque alors que dans [68] seul le cas de multiplicité géométrique 1 est abordé. Nous appliquons la méthode introduite dans la première partie de la thèse pour calculer explicitement les termes principaux des développements asymptotiques des solutions.

1.3 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est composé de trois chapitres :

- **Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, on présente les principaux résultats obtenus dans ce travail de thèse, ainsi que les méthodes et les outils utilisés pour mener à ces résultats.
- **Chapitre 3 :** Ce chapitre est dédié aux résultats obtenus dans la première partie sur l'étude du comportement en temps long des solutions de l'équation de Schrödinger avec un potentiel à décroissance rapide. Les résultats exposés dans ce chapitre font l'objet de l'article [1].
- **Chapitre 4 :** Ce chapitre est consacré aux résultats de la deuxième partie sur des potentiels à décroissance lente. On généralise les résultats sur l'estimation de Gevrey de la résolvante et les estimations sous-exponentielles des semi-groupes

de la chaleur et de Schrödinger obtenus par X.P. Wang dans [68]. On reproduit dans ce chapitre l'article [2] en collaboration avec X.P. Wang.

2

Résultats principaux

Dans ce chapitre, nous présentons en détails les problèmes étudiés, ainsi que les principaux résultats obtenus dans ce travail de thèse. Dans les deux sections suivantes, nous dressons un panorama des résultats connus dans ce domaine de recherche et donnons un résumé des résultats et des discussions exposés aux chapitres 3 et 4.

2.1 Asymptotique en temps long de la solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel à décroissance rapide (Chapitre 3)

Dans cette section on présentera les résultats obtenus au Chapitre 3. Ce chapitre est dédié à l'étude de l'asymptotique en temps long de la solution de l'équation de Schrödinger (1.2.1) avec un potentiel à valeurs complexes ayant une décroissance rapide à l'infini, i.e. V satisfait pour un certain $\rho > 2$ la condition

$$V(x) \leq C_v \langle x \rangle^{-\rho}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.1.1}$$

Avant d'énoncer le résultat principal, on donne un aperçu des résultats généraux dans le cas autoadjoint.

2.1.1 Aperçu des résultats connus dans le cas autoadjoint

Soit $V(x)$ une fonction à valeurs réelles, mesurable et vérifiant la condition de décroissance (2.1.1) sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'opérateur de Schrödinger $H = -\Delta + V(x)$

autoadjoint sur $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^n)$. Alors, la famille $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortement continu. On rappelle que $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire fortement continu si

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ est unitaire et $U(s+t) = U(s)U(t)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s - \lim\limits_{s\to 0} \Big(U(t+s) - U(t)\Big) = 0$.

Le comportement asymptotique en temps long de e^{-itH} lorsque H est autoadjoint a été largement étudié depuis les années 70 avec diverses hypothèses [3, 38, 39, 57, 76], ainsi de nombreux résultats ont abouti à une compréhension de plus en plus précise des propriétés spectrales de l'opérateur H. Voir aussi [15, 16, 17, 26, 27, 28, 29, 79] pour des estimations dispersives (estimations entre les espaces L^1 et L^∞) et [49, 50] pour une large classe d'opérateurs elliptiques. Jensen et Kato dans [38] ont étudié l'opérateur de Schrödinger en dimension 3 avec un potentiel à valeurs réelles satisfaisant la condition (1.2.2) pour un certain $\rho > 2$. Leurs résultats semblent être les premiers dans cette direction. Plus précisément, ils ont montré que si $\rho > 5$ et $s > 5/2$, alors le développement asymptotique de e^{-itH} quand $t \to \pm\infty$ s'écrit

$$e^{-itH} - \sum_{j=1}^{k} e^{-it\lambda_j}\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_0 = t^{-1/2}C_{-1} + t^{-3/2}C_{-2} + o(t^{-3/2}), \tag{2.1.2}$$

dans l'espace des opérateurs bornés de l'espace à poids $L^{2,s}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$, où les λ_j sont les valeurs propres négatives de H et les $\mathcal{P}_j$ sont les projecteurs spectraux associés. Ce qui est crucial dans cette étude est l'existence d'une valeur propre et/ou d'une résonance 0. À l'échelle temporelle, la valeur propre 0 contribue à l'apparition du terme $\mathcal{P}_0$, la projection spectrale sur l'espace propre associé à la valeur propre 0, alors que la résonance 0 se manifeste dans (2.1.2) par l'apparition de l'opérateur de rang 1, $C_{-1} = \langle \cdot, \psi\rangle\psi$, ainsi qu'un taux de décroissance $t^{-1/2}$ au lieu de $t^{-3/2}$ en l'absence de résonance 0. Le développement (2.1.2) est basé sur le développement de la résolvante près de 0 ainsi que sur des estimations en grande énergie de la résolvante. Dans [38], une méthode perturbative est utilisée pour calculer les termes principaux dans (2.1.2). Vu la condition de décroissance rapide du potentiel V, l'opérateur $H = -\Delta + V$ est considéré comme une petite perturbation de $-\Delta$, ainsi le calcul repose essentiellement sur l'équation de la résolvante

$$R(z) = (Id + R_0(z)V)^{-1}R_0(z), \tag{2.1.3}$$

ainsi que sur le développement de la résolvante libre près de 0 suivant : pour tout entier ℓ on a :

$$R_0(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (\sqrt{z})^j G_j + o(|z|^\ell), \qquad \mathrm{Im}\sqrt{z} > 0,\ z \to 0, \tag{2.1.4}$$

dans $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{-1,s}(\mathbb{R}^3), \mathbb{H}^{1,-s'}(\mathbb{R}^3))$ [1] pour $s, s' > \ell + 1/2$, où $\mathbb{H}^{\pm 1,s}(\mathbb{R}^3)$, $s \in \mathbb{R}$, désignent les espaces de Sobolev à poids. De plus, $G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{H}^{-1,s}, \mathbb{H}^{1,-s'})$ pour $s, s' > j + 1/2$, $j = 0, \cdots, \ell$ et $s + s' > 2$ si $j = 0$. En particulier, $G_0 = (-\Delta)^{-1}$ est l'inverse formel de $-\Delta$.

1. $\mathcal{B}(X, Y) = \{T : X \to Y, \text{linéaire borné}\}$, X et Y deux espaces de Banach.

Par ailleurs, la méthode utilisée exige de conditions plus fortes sur ρ et s pour un ordre du développement de plus en plus élevé. Plus récemment, Komech et Kopylova [43] ont étendu la méthode dans [38] à l'opérateur de Schrödinger $H = (-i\nabla - A(x))^2 + V(x)$ avec un champ magnétique $A(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et un potentiel V à décroissance rapide à l'infini. Ils ont obtenu le même taux de décroissance $O(t^{-3/2})$ pour $s > 5/2$ sous l'hypothèse que 0 soit un point régulier, c'est-à-dire qu'il n'est pas une valeur propre ni une résonance.

En dimension $n = 4$, zéro peut être aussi une valeur propre et/ou une résonance. En revanche, le taux de décroissance en temps est différent, ce qui est prouvé par Jensen dans [37]. Dans ce dernier, un taux de décroissance logarithmique $O\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ est démontré en présence d'une résonance 0, alors qu'un taux de décroissance polynomial $O(t^{-1})$ est obtenu lorsque 0 est un point régulier. Jensen complète cette étude dans [36] en dimensions supérieures ou égales à 5. En particulier, 0 ne peut pas être une résonance dans ces dimensions, c'est-à-dire que si une fonction ψ dans $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ pour un certain réel s est solution de $-\Delta\psi + V\psi = 0$ alors ψ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que ψ est une fonction propre de H. Ce dernier résultat est lié à l'asymptotique du noyau de Green de la résolvante libre $(-\Delta - z)^{-1}(x, y) = O(|x - y|^{-(n-2)})$ en dimension n supérieure ou égale à 5. En dimensions $n = 1$ et $n = 2$, la situation est plus compliquée. Dans ces cas, 0 n'est pas un point régulier pour l'opérateur Laplacien $-\Delta$ puisque la fonction constante est un état résonant. Ainsi, la résolvante libre admet des singularités en 0 du type $z^{-1/2}$ en dimension 1 et $\ln z$ en dimension $n = 2$. Pour une perturbation avec un potentiel à décroissance rapide en dimension $n = 1$, 0 peut être une résonance mais n'est pas une valeur propre. Par contre, en dimension $n = 2$, 0 peut être une valeur propre et/ou une résonance. Dans [48], les dévéloppements asymptotiques en temps long de e^{-itH} entre les espaces L^2 à poids $\langle x\rangle^s$, $s \in \mathbb{R}$, sont obtenus en dimensions $n = 1$ et $n = 2$ avec un potentiel à décroissance rapide. En particulier, si 0 est un point régulier dans le spectre, un taux de décroissance $|t|^{-3/2}$ est démontrée en dimension $n = 1$ alors qu'un taux de décroissance $|t|^{-1}(\log|t|)^{-2}$ est obtenu en dimension $n = 2$. On cite aussi [29] pour des estimations dispersives en dimension $n = 1$ et [17] en dimension $n = 2$.

L'avantage dans le cas autoadjoint est que l'opérateur de Schödinger dispose d'un calcul fonctionnel, un outil essentiel pour déterminer l'asymptotique du groupe $(e^{-itH})_{t\in\mathbb{R}}$. En effet, la famille e^{-itH} définie par le calcul fonctionnel est donnée par la formule de représentation suivante

$$e^{-itH} - \sum_j e^{-it\lambda_j}\mathcal{P}_j = \int_0^{+\infty} e^{-it\lambda}\frac{d}{d\lambda}E(\lambda)\,d\lambda, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1.5}$$

où les $\mathcal{P}_j$ désignent les projecteurs spectraux sur les espaces propres associés aux valeurs propres discrètes λ_j et $\frac{d}{d\lambda}E(\lambda)$ est la résolution spectrale de H définie pour tout $\lambda > 0$ par

$$\frac{d}{d\lambda}E(\lambda) := \frac{1}{2i\pi}\Big[(H - \lambda - i0)^{-1} - (H - \lambda + i0)^{-1}\Big].$$

Dans cette dernière formule $(H-\lambda-i0)^{-1}$ et $(H-\lambda+i0)^{-1}$ désignent les valeurs au bord de la résolvante (voir (1.2.5)) définies dans $\mathcal{B}(L^{2,s},L^{2,-s})$, $s>1/2$, sous la condition (2.1.1) pour un certain $\rho>1$ (cf. [38, Lemma 9.1]).

Également, l'étude de l'asymptotique de la solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel à valeurs réelles et à décroissance lente à l'infini (c'est-à-dire qu'il vérifie la condition (2.1.1) pour un certain $0<\rho<2$) est abordée par plusieurs auteurs. Pour ce genre de potentiel, le problème dépend aussi de l'analyse spectrale près de l'énergie 0, mais d'une façon qualitativement différente. Les résultats sont liés essentiellement au signe du potentiel. Lorsque le potentiel est négatif, la résonance 0 existe en générale alors que 0 apparaît en quelque sorte régulier dans le cas d'un potentiel positif. Dans [78] pour un potentiel central symétrique en dimension 1, Yafaev obtient une décroissance locale $O(t^{-1})$ si $V<0$ et $\exp(-\alpha_0 t^{(2-\rho)/(2+\rho)}), \alpha_0>0$, si $V>0$ (voir aussi [77]). D'autre part, pour un potentiel positif sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $c\langle x\rangle^{-\rho}\leq V(x)\leq C\langle x\rangle^{-\rho}$ (et d'autres conditions sur les dérivées de $V(x)$), Nakamura [52] montre l'absence de résonance 0 et obtient un taux de décroissance polynomial $O(\langle t\rangle^{-\gamma})$. La démonstration dans ce dernier article est basée sur une estimation uniforme de la résolvante près de 0 obtenue par la méthode des commutateurs de Mourre pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique. Voir aussi [22] pour un potentiel négatif à décroissance lente sur $\mathbb{R}^n$, où 0 n'est pas une valeur propre ni une résonance.

2.1.2 Le cas non-autoadjoint : contribution et résultats principaux

Lorsque le potentiel est à valeurs complexes, particulièrement avec une partie imaginaire négative, l'opérateur de Schrödinger $H=-\Delta+V$ est dissipatif (c'est-à-dire pour tout $u\in\mathcal{D}(H)$ on a Im $\langle Au,u\rangle\leq 0$). Si on suppose de plus que Im V satisfait la condition de décroissance (2.1.1) pour un certain $\rho>0$, alors il est connu que $-iH$ est le générateur d'un semi-groupe de contraction $(e^{-itH})_{t\geq 0}$. Un semi-groupe de contraction fortement continu est une famille $(U(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\|U(t)\|\leq 1, \qquad t\geq 0$$

et qui vérifie les deux conditions (i) et (ii) dans le paragraphe précédent uniquement pour tout $t\geq 0$. Dans ce cas, le spectre discret de H est localisé dans le demi-plan complexe inférieur. Les valeurs propres dans ce dernier peuvent s'accumuler en tout point du demi axe réel $[0,+\infty[$. Dans [70], il est démontré que si $n\geq 3$ et (1.2.2) est satisfaite pour $\rho>2$, alors 0 n'est pas un point d'accumulation de valeurs propres de H. De plus, il est démontré qu'il existe $c_0>0$ telle que pour tout λ dans l'intervalle compact $[-c_0,c_0]$ la limite

$$(H-\lambda-i0)^{-1}=\lim_{\epsilon\to 0}(H-\lambda-i\epsilon)^{-1} \tag{2.1.6}$$

existe dans $\mathcal{B}(L^{2,s},L^{2,-s})$ pour tout $s>1$, ce qui signifie que 0 est un point régulier de H. Un autre résultat important dans le cas dissipatif est l'existence des valeurs au bord de la résolvante à travers le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{ Im } z > 0\}$. Ce résultat est dû à l'absence des valeurs propres discrètes dans le demi-plan supérieur. On renvoie à [60] pour la méthode des commutateurs de Mourre pour les opérateurs dissipatifs. Par contre, ceci ne reste pas valide pour le demi-plan inférieur. En effet, pour tout $\lambda > 0$ on peut construire un potentiel à support compact $V = V_1 - iV_2$ avec $V_2 > 0$ tel que l'équation $(-\Delta + V - \lambda)\psi = 0$ admet une solution non triviale ψ_- satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld entrante (1.2.6) (cf. [72, Remarque 5.4]). Ceci fournit un exemple d'une résonance entrante définie dans la section 1.2.

Le taux de décroissance du semi-groupe dissipatif avec des potentiels à décroissance rapide est étudié, par exemple, dans [48, 57, 72, 80]. Dans ce cas, le comportement asymptotique en temps grand du semi-groupe e^{-itH} dépend de l'analyse spectrale de la résolvante près de 0. En effet, les résonances positives sortantes sont absentes dans ce cas et les résonances entrantes qui peuvent avoir lieu n'affectent pas le taux de décroissance en temps (voir [72]). Dans [72], un taux de décroissance polynomial $O(t^{-n/2})$ du semi-groupe e^{-itH} dans $\mathcal{B}(L^{2,s}, L^{2,-s})$ est obtenu pour un potentiel ayant une décroissance rapide ($\rho > n$) en dimension $n \geq 3$. Notons que ce résultat est basé sur (2.1.6) qui est satisfaite dans ce cas sous les hypothèses considérées, aussi le principe d'absorption limite par le demi-plan supérieur pour H et des estimations en grande énergie de la résolvante. On cite aussi [80] dans le cas d'une partie imaginaire assez petite. Dans ce dernier, le développement asymptotique du semi-groupe dissipatif est obtenu dans $\mathcal{B}(L^{2,s}, L^{2,-s})$ dans deux situations différentes : lorsque 0 est un point régulier de la partie autoadjointe $H_1 := -\Delta + V_1$ en dimension 3 et si 0 est une résonance mais n'est pas une valeur propre de H_1 en dimension 4.

Par ailleurs, des estimations dipersives dans [25] sont établies en présence d'une valeur propre 0 de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint avec un potentiel qui décroit rapidement à l'infini ($V(x) = O(|x|^{-2-\epsilon})$ quand $|x| \to +\infty$). Dans ce dernier, les résonances réelles sont supposées être absentes. De plus, une hypothèse est faite sur les dimensions des espaces propres généralisés $\ker(H^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, associés à la valeur propre 0. À notre connaissance, les résonances positives sont rarement considérées par les auteurs.

On se propose dans ce travail de calculer un développement asymptotique de e^{-itH} analogue à (2.1.2) en dimension 3 dans le cas d'un potentiel à valeurs complexes vérifiant la condition (1.2.2) pour $\rho > 2$. En particulier, on montre que les résonances positives contribuent à un terme oscillant dans le développement. Dans ce but, on calcule, sous certaines hypothèses, les développements de la résolvante $R(z)$ près de 0 dans toutes les situations possibles citées ci-avant. On calcule aussi explicitement les termes principaux des développements asymptotiques près des résonances positives. Également, on obtient des estimations en grande énergie de la résolvante et ses dérivées.

Afin de donner un énoncé précis du théorème principal, on introduira d'abord les hypothèses essentielles ainsi que les outils utilisés pour aboutir au résultat principal.

Développement asymptotique de $R(z)$ près du seuil 0 en dimension 3

L'idée de départ dans l'étude de l'énergie au seuil 0 est basée sur l'équation de Lippmann-Schwinger. On pose

$$K_0 = G_0 V, \tag{2.1.7}$$

où $G_0 = (-\Delta)^{-1} : \mathbb{H}^{-1,s}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{H}^{1,-s'}(\mathbb{R}^3)$, $s, s' > 1/2$ et $s + s' > 2$ (voir (2.1.4)). Pour $1/2 < s < \rho - 1/2$, K_0 est un opérateur compact sur $L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$. On observe que $\psi \in \mathbb{H}^{-1,s}(\mathbb{R}^3), 1/2 < s < \rho - 1/2$, est solution de $(-\Delta + V)\psi = 0$ si et seulement si $K_0\psi = -\psi$. De plus, une fonction ψ dans $\mathrm{Ker}_{\mathbb{H}^{-1,s}}(Id + K_0)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)\psi(x)\, dx = 0,$$

ce qui explique le fait que la résonance 0, si elle existe, est géométriquement simple comme dans le cas autoadjoint [38], c'est-à-dire

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}_{L^{2,-s}}(Id + K_0)/\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0)\Big) = 1, \qquad \forall s > 1/2.$$

En outre, lorsque 0 est une valeur propre de H les deux noyaux $\mathrm{Ker}H$ et $\mathrm{Ker}(Id + K_0)$ coïncident dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Pour étudier la valeur propre 0 de H on utilise l'approche de Wang développée dans [68] pour une perturbation à support compact d'un opérateur de Schrödinger dissipatif avec un potentiel à décroissance lente.

En effet, le fait que l'opérateur H soit non-autoadjoint révèle des complexités. Premièrement, le projecteur de Riesz naturel associé à la valeur propre 0 plongée dans le spectre essentiel n'est pas défini, car on ne peut trouver aucun chemin pour donner un sens à l'intégrale en (3.2.3). Par contre, le projecteur de Riesz associé à la valeur propre -1 de l'opérateur compact K_0 dans L^2 est bien défini et de rang fini.

Deuxièmement, on rappelle que dans notre cas les multiplicités géométrique et algébrique de -1 ne sont pas nécessairement égales, ce qui explique l'apparition non seulement d'une famille de vecteurs propres, mais plutôt des chaînes de Jordan associées à la valeur propre -1. Une chaîne de Jordan de longueur κ associée à la valeur propre λ de la matrice A est une famille de vecteurs propres généralisés de la forme $\{(A + \lambda)^{\kappa-1}u_\kappa, \cdots, (A + \lambda)u_\kappa, u_\kappa\}$ pour un certain $u_k \in L^2$ tel que $(A + \lambda)^k u_k = 0$ et $(A + \lambda)^{\kappa-1}u_\kappa \neq 0$. Bien entendu, dans le cas autoadjoint il n'y pas ces circonstances. Dans ce travail, nous nous intéressons au cas d'une valeur propre 0 de multiplicité géométrique quelconque $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit Π_1 le projecteur de Riesz associé à la valeur propre -1 de l'opérateur compact K_0 défini en (2.1.7). Le cœur de notre méthode pour traiter ce problème est de décomposer l'espace propre généralisé, $E = \mathrm{Image}\,\Pi_{-1}$, associé à la valeur propre -1 de K_0 en k sous-espaces invariants par K_0, $E_1, \cdots, E_k$, mutuellement orthogonaux par rapport à une certaine forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, tels que chaque sous-espace est engendré par une chaine de Jordan, i.e. $E_j = \mathrm{Vect}\{(Id + K_0)^{m_j - r}u^{(j)}, 1 \leq r \leq m_j\}$, pour certains $u^{(j)}$ tel que $(Id + K_0)^{m_j}u^{(j)} = 0$ et $m_j \in \mathbb{N}^*$. Ce qui caractérise cette décomposition est que -1 est une valeur propre géométriquement simple de la restriction de $Id + K_0$ à chaque sous-espace invariant E_j.

Ensuite, pour calculer l'asymptotique de la résolvante, on utilise l'équation de la résolvante (2.1.3). En utilisant la représentation du projecteur de Riesz Π_{-1} dans la base ainsi construite, on construit un problème de Grushin pour calculer l'inverse de $Id + R_0(z)V$ dans $L^{2,-s}$, pour s dans un intervalle approprié. En effet, la méthode de Grushin permet de réduire le calcul de $(Id + R_0(z)V)^{-1}$ à une fonction à valeurs matricielles (pour une présentation détaillée et explicite de la méthode de Grushin on renvoie à l'article [65]). Cependant, on tombe sur une matrice de structure de Jordan non triviale. Pour calculer l'inverse de cette matrice, on applique une méthode inspirée de l'idée de Lidskii [44] des années 60 pour étudier de petites perturbations des matrices de structure de Jordan quelconque. On présentera à la sous-section 3.3.3 la technique en détails pour calculer les termes principaux du développement asymptotique de la résolvante près de l'énergie 0. Notamment, on fait une hypothèse sur les fonctions propres associées à la valeur propre 0. D'ailleurs, dans le cas d'une résonance 0, aucune hypothèse sur les états résonnants ne sera exigée. Voici notre hypothèse :

Hypothèse (H1) : Si zéro est une valeur propre de H et n'est pas une résonance, on suppose qu'il existe une base $\{\psi_1, \cdots, \psi_k\}$ de Ker$H$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\det\Big(\langle \psi_j, J\psi_i\rangle\Big)_{1\leq i,j\leq k} \neq 0, \tag{2.1.8}$$

où $J : f(x) \mapsto \overline{f(x)}$ est la conjugaison complexe.

Le plus délicat est le cas dans lequel 0 est à la fois une valeur propre et une résonance. On suppose de plus dans ce cas qu'il existe un seul bloc de Jordan correspondant à l'état résonant, tandis que les autres correspondent aux fonctions propres associées à la valeur propre 0. Plus précisément, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H2) : Si zéro est à la fois une résonance de H et une valeur propre de multiplicité géométrique $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que :

1. Il existe $1 \leq i_0 \leq k+1$ tel que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(Id + K_0)|_{E_{i_0}} &= \mathrm{Ker}_{L^{2,-s}}(Id + K_0)/\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0) \qquad \text{et} \\ \mathrm{Ker}(Id + K_0)|_{E_i} &\subset \mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0),\ \forall 1 \leq i \leq k+1, i \neq i_0. \end{aligned}$$

2. Il existe une base $\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}$ de $\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0)$ vérifiant la condition (2.1.8).

Sous l'hypothèse $(H1)$ (ou $(H2)$), nous montrons que la présence de la valeur propre 0 contribue à la singularité z^{-1} de la résolvante, ce qui coincide avec les résultats dans [38] dans le cas autoadjoint. Nous montrons aussi que le terme principal du développement asymptotique de $R(z)$ près de 0 est toujours une projection spectrale sur l'espace propre associé à la valeur propre 0, même en l'absence d'une projection spectrale naturelle dans le cas non-autoadjoint (voir Théorème 3.2.2).

Développements asymptotiques de $R(z)$ près des résonances positives sortantes

Les résonances positives sont des valeurs propres généralisées plongées dans le spectre continu que nous avons définies à la section 1.2. Elles sont considérées dans différents contextes [18, 19, 61, 62] dédiés à l'étude des opérateurs non-autoadjoints. On sait que l'ensemble des résonances positives pour les opérateurs considérés ici est de mesure de Lebesgue nulle. Ce résultat est montré dans [61] en utilisant la théorie de Fredholm. À notre connaissance, la détermination de la singularité de la résolvante près d'une résonance positive reste un trou dans la compréhension des propriétés spectrales des opérateurs non-autoadjoint. Ici, on supposera qu'il existe un nombre fini des résonances positives sortantes et on fera certaines hypothèses sur les états résonants sous lesquelles on démontrera que les résonances positives sont des pôles simples de la résolvante.

Pour obtenir le développement de $R(z)$ près d'une résonance positive sortante λ_0 on utilise l'équation de la résolvante $R(z) = (Id + R_0(z)V)^{-1}R_0(z)$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$. Dans cette équation, $R_0(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, se prolonge analytiquement à $\overline{\mathbb{C}}_\pm \setminus \{0\}$. Ceci s'obtient grâce au prolongement analytique du noyau de Green de la résolvante libre en dimension 3

$$R_0(z, x, y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^3,\ \text{Im}\, z > 0.$$

En particulier,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} R_0(\lambda_0 \pm i\epsilon) := R_0(\lambda_0 \pm i0) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}^{-1,s}, \mathbb{H}^{1,-s}), \qquad \forall s > 1/2,$$

par le principe d'absorption limite (cf. [3]). De plus, pour $1/2 < s < \rho - 1/2$, $R_0(\lambda_0 \pm i0)V$ sont des opérateurs compacts sur $L^{2,-s}$. Ainsi, il est clair que c'est $(Id + R_0(z)V)^{-1}$ qui contient toutes les singularités.

Supposons $\rho > 1$, alors en utilsant le Théorème de Fredholm [58], les résonances positives sont définies de la manière suivante :

Définition 2.1.1 (Résonances positives). *On appelle $\lambda_0 > 0$ une résonance positive sortante (resp. entrante) si -1 est une valeur propre de l'opérateur compact $R_0(\lambda_0 + i0)V$ (resp. $R_0(\lambda_0 - i0)V$) sur $L^{2,-s}$, $s > 1/2$.*

En particulier, Ker$(Id + R_0(\lambda_0 + i0)V)$ coïncide avec l'espace des fonctions dans $\mathbb{H}^{-1,s}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant simultanément $H\varphi = \lambda_0\varphi$ et la condition de radiation (1.2.6) avec un signe $+$.

Pour étudier l'inversibilité de $(Id + R_0(z)V) : L^{2,-s}(\mathbb{R}^3) \to L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$, on introduit le déterminant

$$d(z) = \det\Big(\Pi_1^+(Id + R_0(z)V)\Pi_1^+\Big), \tag{2.1.9}$$

où Π_1^+ dénote le projecteur de Riesz associé à la valeur propre -1 de $R_0(\lambda_0 + i0)V$ (voir (3.2.3)). Les résonances positives sortantes de H sont ainsi les zéros positifs de la fonction $d(z)$ qui est analytique dans $\mathbb{C}_+$ et continue dans $\overline{\mathbb{C}}_+$. En particulier, la multiplicité de chaque résonance positive est égale à sa multiplicité comme étant un zéro de $d(z)$. On note que si on suppose de plus que le potentiel V vérifie une condition d'analycité, alors on pourrait montrer que les zéros de $d(z)$ sont de multiplicités finies (cf. [68, Remarque 5.2]). Autrement dit, si λ_0 est un tel point alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_N \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$d(z) = a_N(z-\lambda_0)^N + a_{N+1}(z-\lambda_0)^{N+1} + \cdots, \tag{2.1.10}$$

pour $|z-\lambda_0|$ très petit avec $\operatorname{Im} z > 0$. Dans le cas général, on ne peut pas savoir si le développement (2.1.10) existe. Au chapitre 2, on établit les développements de la résolvante près des résonances positives dans deux contextes différents. Dans l'un, on suppose que le développement (2.1.10) existe pour un certain entier $k_j \in \mathbb{N}^*$ (voir Théorème 3.4.1). Dans l'autre, on fait une hypothèse sur les états résonants sortants. Avant de l'énoncer, on introduit la forme bilinéaire symétrique suivante associée à $\lambda > 0$:

$$\forall u, v \in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3) : \qquad B_\lambda(u,w) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}V(x)u(x)V(y)w(y)\,dx\,dy. \tag{2.1.11}$$

Hypothèse (H3) : Pour toute résonance positive λ_0 de H on suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\{\psi_1, \cdots, \psi_{N_0}\}$ une base dans $L^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$ de Ker $(Id + R_0(\lambda_0 + i0))$ telle que

$$\det\left(B_{\lambda_0}(\psi_r, \psi_l)\right)_{1\le l,r\le N_0} \neq 0. \tag{2.1.12}$$

Grâce à la cette hypothèse, on obtient le développement (2.1.10) près de λ_0 avec $N = N_0$. On montre également que toute résonance positive de H est un pôle simple de la résolvante et on calcule exactement le terme résidu en utilisant l'approche présentée au paragraphe précédent dans le cas d'une valeur propre au seuil. Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.1.2. *Soit λ_0 une résonance positive sortante de H. Supposons $(H3)$ vraie. Si $\rho > 2\ell + 3$, $\ell \in \mathbb{N}$, alors pour $s > \ell + 3/2$ et $z \in \Omega_\delta^+ = \{z \in \mathbb{C}_+ : \ |z-\lambda_0| < \delta\}$, on a*

$$R(z) = \frac{R_{-1}(\lambda_0)}{z-\lambda_0} + \sum_{j=0}^{\ell}(z-\lambda_0)^j R_j(\lambda_0) + \widetilde{R}_\ell(z-\lambda_0), \tag{2.1.13}$$

dans $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{-1,s}, \mathbb{H}^{1,-s})$, où

$$R_{-1}(\lambda_0) = \sum_{j=1}^{N_0}\langle\cdot, J\psi_j^{(\lambda_0)}\rangle\psi_j^{(\lambda_0)} \text{ avec } \frac{1}{i8\pi\sqrt{\lambda_0}}B_{\lambda_0}(\psi_i^{(\lambda_0)}, \psi_j^{(\lambda_0)}) = \delta_{ij},$$

où $\{\psi_1^{(\lambda_0)}, \cdots, \psi_{N_0}^{(\lambda_0)}\}$ *est une base de Ker*$(Id + R_0(\lambda_0 + i0)V)$ *et* B_{λ_0} *est la forme bilinéaire définie dans (4.3.1). Le reste* $\widetilde{R}_\ell(z - \lambda_0)$ *est analytique dans* Ω_δ^+ *et pour* $\lambda > 0$ *avec* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *la limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{R}_\ell(\lambda - \lambda_0 + i\epsilon) = \widetilde{R}_\ell(\lambda - \lambda_0 + i0) \tag{2.1.14}$$

existe dans $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{-1,s}, \mathbb{H}^{1,-s})$ *et satisfait*

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{R}_\ell(\lambda - \lambda_0 + i0)\|_{\mathbb{H}^{-1,s}\to\mathbb{H}^{1,-s}} = o(|\lambda - \lambda_0|^{\ell - r}),\ r = 0, 1, \cdots, \ell.$$

Résultat principal : développements asymptotiques de e^{-itH}

Pour calculer le développement asymptotique de e^{-itH}, quand $t \to +\infty$, on suppose de plus qu'il existe un nombre fini de résonances positives sortantes de H. Avant d'énoncer le résultat, principal il vaut mieux noter que si $\rho > 3$ et on suppose que $(H1)$ (si zéro est une valeur propre et n'est pas une résonance) et $(H3)$ soient vraies, alors H admet au plus un nombre fini des valeurs propres discrètes localisées dans $\overline{\mathbb{C}}_+$. Ce résultat découle immédiatement des résultats précédents et du fait que 0 et les résonances positives sortantes sont les seuls points du spectre essentiel $[0, +\infty[$ de H en lesquels les valeurs propres discrètes de H localisées dans $\overline{\mathbb{C}}_+$ peuvent s'accumuler.

Voici le théorème principal que l'on va montrer dans Chapitre 2.

Théorème 2.1.3. *Supposons que* H *admet un nombre fini des résonances positives sortantes* $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ *et* $(H3)$ *vraie.*

(a) *On suppose que* 0 *est une résonance de* H *et n'est pas une valeur propre. Si* $\rho > 5$, *alors pour* $s > 5/2$ *et quand* $t \to +\infty$ *on a*

$$e^{-itH} - \sum_{j=1}^{p} e^{-itH}\Pi_{z_j} + \sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_i} R_{-1}(\lambda_j) = (i\pi)^{-1/2}\langle\cdot, \phi\rangle\phi\, t^{-\frac{1}{2}} + o(t^{-1/2}), \tag{2.1.15}$$

dans $\mathcal{B}(L^{2,s}(\mathbb{R}^3), L^{2,-s}(\mathbb{R}^3))$*, où* $\phi \in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3) \setminus L^2(\mathbb{R}^3)$ *est un état résonant vérifiant la condition de normalisation*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)\phi(x)\, dx = 1, \tag{2.1.16}$$

et $R_{-1}(\lambda_j)$ *est donné au Théorème 2.1.2.*

(b) Supposons $\rho > 7$. *On suppose que* 0 *est une valeur propre de* H *et n'est pas une résonance et que l'hypothèse* $(H1)$ *est satisfaite. Alors, pour* $s > 7/2$ *(2.1.15) existe avec le membre à droite remplacé par*

$$\mathcal{P}_0^{(2)} - i(i\pi)^{-1/2}R_{-1}^{(2)}t^{-\frac{1}{2}} - (4i\pi)^{-1/2}R_1^{(2)}t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-3/2}),$$

où

$$\mathcal{P}_0^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \langle \cdot, J\mathcal{Z}_j \rangle \mathcal{Z}_j \text{ avec } \langle \mathcal{Z}_i^{(2)}, J\mathcal{Z}_j^{(2)} \rangle = \delta_{ij},\ \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

tels que $\{\mathcal{Z}_1^{(2)}, \cdots, \mathcal{Z}_k^{(2)}\}$ *est une base de Ker*$(Id + K_0) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ *et* $R_{-1}^{(2)}, R_1^{(2)}$ *sont donnés dans Théorème 3.2.2.*

(c) *On suppose que 0 est à la fois une résonance de* H *et une valeur propre de multiplicité géométrique* $k \in \mathbb{N}^*$ *et que* $(H2)$ *est vraie. Si* $\rho > 7$*, alors pour* $s > 7/2$*, (3.2.26) reste vraie avec le membre à droite remplacé par*

$$\mathcal{P}_0^{(3)} + (i\pi)^{-1/2}\Big(\langle \cdot, J\phi\rangle\phi - iS_{-1}^{(3)}\Big)t^{-\frac{1}{2}} - (4i\pi)^{-1/2}R_1^{(3)}t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-3/2}),$$

où $\mathcal{P}_0^{(3)}$ *est une projection sur Ker*$_{L^2}(Id + K_0)$ *de la même forme que* $\mathcal{P}_0^{(2)}$ *ci-dessus et* ϕ *est un état résonant satisfaisant (2.1.16). Voir Théorème 3.2.3 pour* $S_{-1}^{(3)}$ *et* $R_1^{(3)}$ *.*

Dans les développements ci-dessus les Π_{z_j} *désignent les projecteurs de Riesz associés aux valeurs propres isolées* z_j *localisées dans* $\overline{\mathbb{C}}_+$*.*

Dans (2.1.15), la restriction de H à l'image de Π_{z_j} admet une seule valeur propre z_j. Par conséquence, $e^{-itH}\Pi_{z_j}$ se comporte comme e^{-itz_j}. Ce dernier est un terme oscillant si $\operatorname{Im} z_j = 0$ et à croissance exponentielle si $\operatorname{Im} z_j > 0$. Concernant le cas où 0 est à la fois une valeur propre et une résonance de H, on note que l'on peut obtenir le développement avec un taux de décroissance $o(t^{-3/2})$ sous la même condition sur ρ imposée dans (b).

Pour démontrer le théorème précédent, on cherche une formule de représentation du semi-groupe e^{-itH} en terme de la résolvante. En raison de la présence des singularités spectrales de H, la limite $\lim_{\epsilon \to 0} R(\lambda + i\epsilon)$ ne peut pas être définie uniformément pour tout $\lambda \geq 0$. Ainsi, l'opérateur non-autoadjoint H est pourvu d'un outil indispensable, le calcul fonctionnel, pour définir le semi-groupe e^{-itH} à l'aide de la formule (2.1.5). Dans ces circonstances, on montre qu'il existe une courbe $\Gamma^\nu(\eta)$ qui n'intersecte l'axe réel en aucun point des singularités spectrales (c'est-à-dire le point 0 et les résonances positives sortantes) et au-dessus de laquelle il existe un nombre fini des valeurs propres discrètes de H.

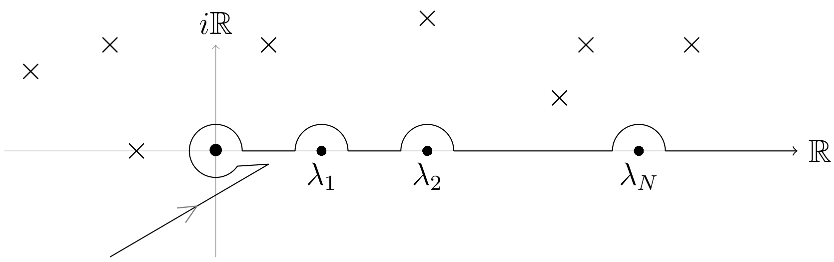

FIGURE 2.1: La courbe $\Gamma^\nu(\eta)$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ sont les résonances positives sortantes de H et les croix sont les valeurs propres discrètes de H dans $\overline{\mathbb{C}}_+$.

L'asymptotique de e^{-itH} quand $t \to +\infty$ obtenue dans le théorème précédent est ainsi basée sur la formule de représentation suivante :

Proposition 2.1.4. *Soit $\rho > 3$ et $s > 5/2$. On suppose que H admet un nombre fini de résonances positives sortantes $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ et que $(H3)$ est vraie. Si zéro est une valeur propre de H on suppose de plus que $(H1)$ (ou $(H2)$) est satisfaite. Alors, pour $f, g \in L^{2,s}$, on a*

$$\langle e^{-itH} f, g\rangle = \sum_{j=1}^{p} \langle e^{-itH}\Pi_{z_j} f, g\rangle + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^\nu(\eta)} e^{-itz}\langle (H-z)^{-1} f, g\rangle\, dz, \quad \forall t > 0.$$

Par comparaison avec les résultats dans le cas autoadjoint [38], on remarque que le développement avec un taux de décroissance $t^{-1/2}$ au Théorème 2.1.3(a) est obtenu dans [38, Théorème 10.5] sous une hypothèse plus faible $\rho > 3$ et pour $s > 3/2$. En effet, on utilise ici la condition plus forte $\rho > 5$ du fait qu'il existe des résonances positives sortantes. Plus précisément, on utilise la régularité C^1 du reste $\widetilde{R}_1(\lambda - \lambda_j + i0)$ en (3.2.25) sur l'intervalle $]\lambda_j - \delta, \lambda_j + \delta[$ pour toute résonance λ_j.

2.2 Estimations de Gevrey de la résolvante et décroissance en temps sous-exponentielle pour les semi-groupes de la chaleur et de Schrödinger. II (Chapitre 4)

On s'intéressera dans le Chapitre 4 aux opérateurs de Schrödinger non-autoadjoints qui sont des perturbations par des potentiels à décroissance lente d'un opérateur modèle satisfaisant une condition de coercivité à poids. On présentera dans cette section les résultats exposés dans le chapitre 4 qui font l'objet de l'article [2] en collaboration avec Xue Ping Wang.

On considère dans ce chapitre l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\Delta + V(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

comme étant une perturbation d'un opérateur modèle $H_0 = -\Delta + V_0(x)$, où $V(x)$ et $V_0(x)$ sont deux fonctions mesurables à valeurs complexes. On suppose que $V_0(x)$ et $W(x) = V(x) - V_0(x)$ satisfont pour certains $C > 0, 0 < \mu < 1$ et $\epsilon > 0$:

$$|V_0(x)| \le C\langle x\rangle^{-2\mu}, \quad |W(x)| \le C\langle x\rangle^{-2\mu-\epsilon}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.1}$$

En introduisant une fonction de troncature à l'infini $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x) = 0$ si $|x| \le 1$ et $\chi(x) = 1$ si $|x| \ge 2$, on se ramène à étudier l'opérateur H comme une perturbation par un potentiel à support compact

$$H \quad = h_0 + W_c(x), \qquad h_0 = -\Delta + v_0(x), \tag{2.2.2}$$

où

$$v_0(x) = V_0(x) + \chi(\frac{x}{R})W(x), \quad W_c = (1 - \chi(\frac{x}{R_1}))W(x)$$

pour $R > 0$ grand. On supposera toujours que h_0 satisfait la condition de coercivité à poids (1.2.7). Cela revient à travailler avec la même classe des perturbations considérées dans [68]. Vu la condition (1.2.7), l'opérateur modèle h_0 n'admet pas une singularité spectrale (valeur propre ou une résonance) au seuil 0. De plus, on peut montrer que son inverse G_0 est bien défini dans $\mathcal{B}(L^{2,s}, L^{2,s-2\mu})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec μ la constante donnée dans (1.2.7) (cf. [68, Lemma 3.3]). Par conséquent, G_0W_c est un opérateur compact sur $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Du coup, comme à la section 2.1, on observe que l'équation $(h_0 + W_c)\psi = 0$ admet une solution non triviale dans $\mathbb{H}^{1,-s}$ si et seulement si -1 est une valeur propre de l'opérateur compact G_0W_c sur L^2, sauf que cette fois-ci une telle solution est toujours dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Asymptotique de la solution de l'équation de la chaleur avec une valeur propre au seuil zéro

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement asymptotique en temps long des solutions $\psi(t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t) + H\psi(t) = 0, \qquad t > 0,$$

où $H = -\Delta + V_0 + W$. On suppose que V_0 vérifie les conditions suivantes :

$$V_0 \text{ est } -\Delta\text{-compact vérifiant (1.2.7) et (2.2.1) pour un certain } \mu \in]0, 1[. \tag{2.2.3}$$

De plus

$$-\Delta + V_1 \ge -\alpha\Delta \tag{2.2.4}$$

pour certaines constantes α. En supposant que $W = V - V_0$ est bornée et à support compact ainsi que V_0 vérifie les conditions ci-dessus, Wang établit dans [68] le développement asymptotique en temps long du semi-groupe de la chaleur e^{-tH} avec des estimations sous-exponentielles sur le reste dans le cas où 0 est une valeur propre géométriquement simple de $H = -\Delta + V$. Son résultat est essentiellement basé sur le développement de la résolvante près du seuil 0 avec des estimations de Gevrey sur le reste de type

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} R_1^{(N)}(z)\| + \|R_1^{(N)}(z) e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\| \le C_a c_a^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{2.2.5}$$

pour tous $a > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et certaines constantes $C_a, c_a > 0$ et pour z dans un domaine de la forme

$$\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < \delta, \text{ Re } z < \delta |\text{ Im } z|^{\frac{1}{\mu'}}\} \cup \{0\}, \qquad 0 < \mu' < 1, \delta > 0.$$

Pour calculer la singularité de la résolvante près de 0 ainsi que les estimations de Gevrey ci-dessus, Wang utilise l'équation de la résolvante

$$(H - z)^{-1} = (Id + (-\Delta + V_0 - z)^{-1} W)^{-1} (-\Delta + V_0 - z)^{-1}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H),$$

en faisant une hypothèse sur le déterminant formel

$$W(z) = \det(Id + (-\Delta + V_0 - z)^{-1} W).$$

Plus spécifiquement, il suppose qu'il existe certaine constante $w_m \neq 0$ telle que

$$W(z) = w_k z^m + O(|z|^m), \qquad z \to 0, \text{ Re } z < 0. \tag{2.2.6}$$

On se propose dans [2] d'appliquer la méthode introduite à la Section 2.1 pour calculer le terme principal du développement de la résolvante près de 0, dans le cas d'une valeur propre 0 de multiplicité géométrique quelconque, en remplaçant l'hypothèse (2.2.6) par l'hypothèse $(H1)$ de la Section 2.1. Plus précisément, on montre le résultat suivant

Théorème 2.2.1. *Supposons que 0 est une valeur propre de H de multiplicité géométrique $k \in \mathbb{N}^*$ et que l'hypothèse $(H1)$ est satisfaite. On suppose que V_0 satisfait les conditions (2.2.3)-(2.2.4) et que W vérifie (2.2.1). Alors, pour tout $a > 0$ il existe certaines constantes $C_a, c_a > 0$ telles que*

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} \left(e^{-tH} - \sum_{\lambda \in \sigma_d(H),\ Re\ \lambda \le 0} e^{-tH} \Pi_\lambda - \Pi_0 \right) \| \le C_a e^{-c_a t^{\beta'}} \quad t > 0, \tag{2.2.7}$$

où $\beta' = \frac{1-\mu}{1+\kappa\mu}$ pour un certain entier $\kappa \ge 1$ donné dans Lemme 4.3.2 et Π_0 est une projection spectrale donnée par

$$\Pi_0 f = \sum_{j=0}^{k} \langle f, J\Psi_j \rangle \Psi_j, \qquad \forall f \in L^2, \tag{2.2.8}$$

tel que

$$\langle \Psi_i, J\Psi_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{2.2.9}$$

où $\{\Psi_1, \cdots, \Psi_k\} \subset L^2$ est une base de fonctions propres associées à la valeur propre 0 de H. $\sigma_d(H)$ désigne l'ensemble des valeurs propres discrètes de H.

Dans [68], X.P. Wang a étudié le cas d'une valeur propre 0 géométriquement simple. Sous l'hypothèse (2.2.6) sur $W(z)$, il obtient l'estimation (4.2.1) avec Π_0 remplacé par un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$ avec des coefficients de rangs finis non précis (cf. [68, Théorème 2.4 (a)]). Cependant, le Théorème 2.2.1 couvre le cas de multiplicité géométrique quelconque. Aussi, l'hypothèse utilisée permet d'obtenir explicitement une projection spectrale sur l'espace propre associé à la valeur propre 0 de H. Le coût du calcul de cette projection est l'utilisation d'une base de vecteurs propres associés à la valeur propre 0 vérifiant la condition (2.1.8) qui, en général, n'est pas évidente à démontrer (dans le cas autoadjoint cette condition est toujours satisfaite). D'autre part, ce théorème étend le résultat dans la partie (a) du Théorème 2.4 dans [68] aux perturbations à décroissance lente à l'infini, i.e. vérifiant la condition (2.2.1), d'un opérateur vérifiant la condition de coercivité à poids (1.2.7).

Dans le cas autoadjoint, on retrouve le résultat du Théorème 2.1.2 dans [68, Théorème 2.3] où $\kappa = 1$ et Π_0 est la projection orthogonale naturelle sur l'espace propre associée à la valeur propre 0. On note également que dans le cas de l'opérateur modèle $H_0 = -\Delta + V_0$ avec V_0 vérifiant (2.2.3)-(2.2.4), le semi-groupe e^{-tH_0} vérifie l'estimation suivante :

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}e^{-tH_0}\| + \|e^{-tH_0}e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\| \leq C_a e^{-c_a t^{\beta}}, \qquad t > 0,$$

avec $\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ (cf. [68, Théorème 4.4]). Ces estimations sont obtenues grâce à des estimations de Gevrey pour la résolvante de H_0. Ce taux de décroissance est d'ailleurs obtenu dans [52] pour les énergies locales dans le cas autoadjoint en utilisant une approche semi-classique et une condition de viriel (1.2.8) sur le potentiel V_0.

2.2.2 Décroissance des énergies locales de l'équation de Schrödinger avec une valeur propre au seuil zéro

Dans le cadre de l'étude du semi-groupe de Schrödinger $(e^{-itH})_{t\geq 0}$, on cherche à calculer le prolongement méromorphe de la résolvante à travers le demi-axe réel $[0, +\infty[$ dans un secteur $\{z \in \mathbb{C},\ \arg z > -\epsilon\}$ pour un certain $\epsilon > 0$. Il arrive que ce prolongement méromorphe admette des pôles qui soient les résonances quantiques de l'opérateur H.

Afin de définir le prolongement méromorphe de la résolvante, on va définir une classe $\mathcal{A}$ de potentiels V_0 vérifiant une condition d'analycité introduite dans [68].

Définition 2.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ la classe des potentiels à valeurs complexes $V_0(x) = V_1(x) - iV_2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tels que $H_1 = -\Delta + V_1$ satisfait (1.2.7) pour certaine constante $\mu \in]0, 1[$. On suppose de plus que V_1 et V_2 sont dilatables analytiquement et s'étendent holomorphiquement dans une région complexe de la forme*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{C}^n; |x| > c^{-1}, |\,\mathit{Im}\, x| < c\,|\,\mathit{Re}\, x|\} \tag{2.2.10}$$

pour certaine $c > 0$ *et satisfont pour certaines* $c_1, c_2 > 0$ *et* $R \in [0, +\infty]$

$$\begin{aligned} |V_j(x)| &\leq c_1 \langle \textit{Re}\ x \rangle^{-2\mu}, \qquad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, && (2.2.11)\\ V_2(x) &\geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, && (2.2.12)\\ x \cdot \nabla V_1(x) &\leq -c_2 \frac{x^2}{\langle x \rangle^{2\mu+2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq R \ \textit{et} && (2.2.13)\\ V_2(x) &\geq c_2 \langle x \rangle^{-2\mu}, \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| < R. && (2.2.14) \end{aligned}$$

Résonances quantiques

Il existe plusieurs approches pour définir les résonances quantiques. Une première approche dûe à Aguilar-Combes [4], Baslev-Combes [7] et Simon [64] consiste à utiliser la technique des dilatations analytiques. En principe, cette technique sert à conjuguer l'opérateur de Schrödinger H par une famille à paramètre θ de difféomorphismes sur $\mathbb{R}^n$, qui admettent des extensions lisses à un voisinage de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ lorsque θ devient complexe. Les résonances quantiques sont ainsi définies comme étant les pôles dans la région $\{z \in \mathbb{C}, -2\,\mathrm{Im}\,\theta < \arg z \leq 0\}$ du prolongement méromorphe de la résolvante de l'opérateur conjugué $H(\theta)$. Cependant, cette technique nécessite une hypothèse forte sur l'analycité du potentiel.

Dans ce travail, on utilise l'approche de Hunziker [33] qui définit les résonances quantiques à l'aide des distorsions analytiques en dehors d'un ensemble compact. L'avantage de cette dernière approche réside dans le fait que seule l'analycité dans un voisinage de l'infini est nécessaire. On renvoie les lecteurs au livre [32] (chapitres 16-17) pour une description des deux approches ci-dessus et à l'article de Helffer-Martinez [31] pour une comparaison entre différentes approches.

Pour V_0 appartenant à $\mathcal{A}$ et W bornée et à support compact, en utilisant la technique des distorsions analytiques en dehors d'un ensemble compact, il est démontré dans [68] que les résonances quantiques de $H = -\Delta + V_0 + W$ dans $\mathbb{C}_+$ sont des valeurs propres discrètes de H, alors que celles situées dans $[0, +\infty[$ sont des résonances positives sortantes de H (voir Théorème 5.1 dans [68]). On note que les conditions (2.2.13) et (2.2.14) vues comme une condition de viriel globale sont utlisées dans [68] pour montrer l'absence des résonances quantiques au voisinage de 0.

Résonances positives sortantes

Dans cette partie, nous définissons les résonances positives d'une manière adaptée au cas des potentiels à décroissance lente. Rappelons que nous travaillons dans le cas présent avec une perturbation $H = h_0 + W_c(x)$ (voir (2.2.2)) d'un opérateur modèle $h_0 = -\Delta + v_0(x)$. En supposant que $\mathrm{Im}\, v_0 \leq 0$ et $(x \cdot \nabla_x)^j v_0$, $j = 0, 1, 2$, sont $-\Delta$-compact, le principe d'absorption limite pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif h_0

donne que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}(-\Delta+v_0-\lambda-i\epsilon)^{-1}=(-\Delta+v_0-\lambda-i0)^{-1}:=r_0(\lambda+i0),\qquad \forall\lambda>0,\ (2.2.15)$$

existe dans $\mathcal{B}(L^{2,s},L^{2,-s})$ pour tout $s>1/2$ (cf. [60]).

Les résonances positives sortantes de H sont ainsi définies comme suit [68] :

Définition 2.2.3. *Un réel positif $\lambda>0$ est appelé une résonance positive sortante de H si -1 est une valeur propre de l'opérateur compact $r_0(\lambda+i0)W_c$ dans $L^{2,-s}$ pour $s>1/2$.*

Développement asymptotique de e^{-itH} avec estimations sous-exponentielles en temps

Pour établir le développement asymptotique en temps long du semi-groupe de Schrödinger, on cherche le développement de la résolvante tronquée $\chi(H-z)^{-1}\chi$ prolongée à travers le demi-axe $[0,+\infty[$ dans un domaine de la forme

$$\Omega(\delta,\theta)=\{z\in\mathbb{C}^*;|z|<\delta,-\delta\,\mathrm{Im}\,\theta<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\delta\},$$

pour $\mathrm{Im}\,\theta>0$ et $\delta>0$ petit. Ainsi, les estimations sous-exponentielles en temps sur le reste s'obtiennent grâce à des estimations de Gevrey de la résolvante tronquée dans $\Omega(\delta,\theta)$. L'approche dans [68] consiste à recourir aux distorsions analytiques en dehors du support compact de W pour l'opérateur $H=-\Delta+V_0+W$ avec un potentiel V_0 appartenant à la classe $\mathcal{A}$.

En supposant que la valeur propre 0 est géométriquement simple et que la condition (2.2.6) est satisfaite, Wang obtient le résultat suivant (cf. [68, Théorème 2.4 (b)]) :

$$\|\chi\Big(e^{-itH}-\sum_{\lambda\in\sigma_d(H)\cap\overline{\mathbb{C}}_+}e^{-itH}\Pi_\lambda-\Pi_0(t)-\sum_{\mu\in\sigma_r^+(H)}e^{-it\mu}\mathcal{P}_\nu(t)\Big)\chi\|_{L^2\to L^2}=O(e^{-ct^\beta}).\tag{2.2.16}$$

pour tout $t\geq 0$, où $\beta=\frac{1-\mu}{1+\mu}$, $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et où $\sigma_d(H)$ dénote le spectre discret de H et $r_+(H)$ désigne l'ensemble des résonances positives sortantes de H. Π_λ est le projecteur de Riesz associé à la valeur propre λ de H, $\Pi_0(t)$ et $\mathcal{P}_\nu(t)$ sont des opérateurs de rang fini, polynomiaux en t, associés à la valeur propre au seuil 0 et à la résonance positive sortante ν, respectivement.

Notre objectif dans cette partie est de montrer le résultat ci-dessus en remplaçant la condition de viriel globale par une condition de viriel à l'infini et dans le cas d'une valeur propre 0 de multiplicité géométrique quelconque. Pour cela on considère une classe plus générale de potentiels

Definition 2.2.1. *Soit $\mathcal{A}_1$ la classe de potentiels V_0 vérifiant (2.2.3) et (2.2.4). De plus, Im $V_0 \leq 0$ et il existe un certain potentiel $\widetilde{V}_0 \in \mathcal{A}$ tel que*

$$V_0(x) = \widetilde{V}_0(x), \quad |x| > R_1, \tag{2.2.17}$$

pour un certain $R_1 > 0$.

Notre idée est de développer la méthode du chapitre 3 pour étudier, dans un contexte analytique dépendant de θ (θ est le paramètre de déformation analytique), la valeur propre 0 de H de multiplicité géométrique quelconque en remplaçant la condition (2.2.6) dans [68] par (2.1.8). Nous cherchons également à calculer explicitement les termes principaux des développements de la résolvante tronquée près des résonances positives sortantes de H en appliquant l'approche introduite dans Chapitre 3. Nous utilisons pour cela une hypothèse sur les états résonants analogue à $(H3)$.

Hypothèse $(A2)$ **:** Pour tout $\lambda \in r_+(H)$, on suppose qu'il existe $\{\psi_1^+, \cdots, \psi_{k(\lambda)}^+\} \subset L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$, une base de Ker$(I + r_0(\lambda + i0)W_c)$ telle que

$$\det\Big(\langle r_1(\lambda + i0)W_c\psi_i^+, JW_c\psi_j^+\rangle\Big)_{1\leq i,j\leq k(\lambda)} \neq 0, \tag{2.2.18}$$

où $r_1(\lambda + i0) = \frac{d}{d\lambda} r_0(\lambda + i0)$ dans $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ avec $s > 3/2$.

Voici le résultat principal de cette partie :

Théorème 2.2.4. *Soit $V_0 \in \mathcal{A}_1$ et $W = V - V_0$ holomorphe dans une région Ω de la forme (4.1.6) telle que $|W(x)| \leq C\langle x\rangle^{-2\mu-\epsilon}$, $\forall x \in \Omega$, pour certaines constantes $C > 0$ et $\epsilon \in]0, 1[$. De plus, on suppose qu'il existe $R_2 > 0$ telle que Im $W(x) \leq 0$ pour $|x| > R_2$. Supposons que 0 est une valeur propre de $H = -\Delta + V$ de multiplicité géométrique $k \in \mathbb{N}^*$ et que $(H1)$ et $(A2)$ sont satisfaites.*
Alors, l'ensemble des résonances positives sortantes $r_+(H)$ de H est fini. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|\chi\left(e^{-itH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H)\cap\overline{\mathbb{C}}_+} e^{-itH}\Pi_\lambda - \Pi_0 - \sum_{\nu\in r_+(H)} e^{-it\nu}\Pi_0^+(\nu)\right)\chi\| \leq C_\chi e^{-c\,t^\beta} \quad t > 0, \tag{2.2.19}$$

où Π_0 est le projecteur dans (4.1.14) et $\Pi_0^+(\nu)$ est un opérateur de rang $k(\nu)$ donnée par

$$\Pi_0^+(\nu)f = \sum_{j=0}^{k(\nu)} \langle f, J\Phi_j^+(\nu)\rangle\Phi_j^+(\nu) \qquad ,\forall f \in L^{2,s}, \tag{2.2.20}$$

où $\{\Phi_1^+(\nu), \cdots, \Phi_{k(\nu)}^+(\nu)\} \subset L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$, est une famille libre des états résonnants (Voir Théorème 4.1.2).

Évidemment, si zéro et/ou les résonances positives sortantes n'existent pas on obtient le même développement (4.1.13) sans que les termes correspondants apparaissent.

Dans le cas autoadjoint où V_0 appartient à $\mathcal{A}$, le même taux de décroissance sous-exponentielle est obtenu dans [68, Théorème 2.3]. Cependant, la situation s'avère être moins compliquée du fait de l'absence des résonances positives sortantes et de l'existence d'une projection orthogonale naturelle sur l'espace propre associé à la valeur propre 0. Le taux de décroissance sous-exponentielle $e^{-ct^{\beta}}$, $c > 0$, des énergies locales est également démontré dans [77, 78] pour l'opérateur $H = -\Delta + V(x)$ en dimension 1 avec un potentiel V analytiquement dilatable vérifiant

$$c\langle x\rangle^{-\rho} \leq V(x) \leq C\langle x\rangle^{-\rho},$$

pour certaines constantes $c, C > 0$ et $0 < \rho < 1$.

3

Large time behavior of Solutions to Schrödinger equation with complex-valued potential

3.1 Introduction

In this work, we are interested in the large-time behavior of the solution $u(t) = e^{-itH}u_0$ as $t \to +\infty$ of the time-dependent Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) &= Hu(t,x) \quad, x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

where $H = -\Delta + V$ is a perturbation of $-\Delta$ by a complex-valued potential supposed to satisfy for $\rho > 2$ the decay condition

$$|V(x)| \le C_v \langle x \rangle^{-\rho}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1.2}$$

where $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

This equation is a fundamental dynamical equation for the wave-function $u(t,x)$ describing the motion of particles in non relativistic quantum mechanics. In nuclear physics, the nuclear optical model [20] is an interesting model in which a Schrödinger operator with a complex-valued potential arises. Theoretically, the optical potential with a negative imaginary part was introduced to describe the scattering and absorption of neutrons by nuclei.

It turns out that the behavior of non-selfadjoint Schrödinger operators may differ from selfadjoint ones (see [62, 12]). Previously, Jensen and Kato [38] have studied the three dimensional selfadjoint operator $H = -\Delta + V$ with rapidly decreasing real potential V (V satisfies the decay condition (3.1.2)). In particular, it has been shown that the decay in time of the solution in the selfadjoint case is strongly linked to the analysis at low energy of the resolvent depending on the presence of the zero eigenvalue or/and zero resonance. In [38] the low energy asymptotics of the resolvent was obtained. Also local decay in time of the solution to the time-dependent Schrödinger equation is found. In an extension work [43] of the latter, a similar result has been obtained for a Schrödinger operator with a magnetic potential under the assumption that zero is a regular point i.e. it is not an eigenvalue nor a resonance in the sense of [38, 53]. For studies of non-selfadjoint Schrödinger operators, we refer for example to [68] on Gevrey estimates of the resolvent for slowly decreasing potentials and sub-exponential time-decay of solutions, to [72, 80] for time-decay of solutions to dissipative Schrödinger equation and to [27, 25] for dispersive estimates.

Our goal is to extend the results of [38] to non-selfadjoint Schrödinger operators with a rapidly decreasing complex-valued potential V. We are interested in the spectral analysis of the operator H and the large time behavior of e^{-itH} for some model operator having real resonances. Here, we mean by the latter a real value $\lambda_0 \geq 0$ for which the equation $-\Delta u + Vu - \lambda_0 u = 0$ has a non trivial solution $\psi \in L^{2,-s}(\mathbb{R}^3) \setminus L^2(\mathbb{R}^3)$, $\forall s > 1/2$. In particular, for $\lambda_0 > 0$ it can be seen that this solution satisfies the Sommerfeld radiation condition

$$\psi(x) = \frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda_0}|x|}}{|x|} w(\frac{x}{|x|}) + o(\frac{1}{|x|}), \quad \text{as } |x| \to +\infty, \tag{3.1.3}$$

where $w \in L^2(\mathbb{S}^2)$, $w \neq 0$, with $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ (see [62, Section 2]).

It is well known that selfadjoint Schrödinger operators can have zero resonance only but no positive resonances (see [3, 34, 43]). In [38] positive resonances are absent and intermediate energies do not contribute to the large time behavior of e^{-itH}. However, these real values are the main difficulties to study the spectral properties of non-selfadjoint operators near the essential spectrum. Wang in [68] has included the presence of positive resonances for a compactly supported perturbation of the Schrödinger operator with a slowly decreasing potential satisfying a condition of analyticity, but usually these real values are assumed to be absent (see [25]). See [72] for an example of a positive resonance of a dissipative operator in dimension three and [55] in dimension one.

Real resonances are responsible for most remarkable physical phenomena and many problems arising from analysis of spectral properties for non-selfadjoint operators. Indeed, the zero resonance is responsible for the Efimov effect for N-body quantum systems (see [6, 66, 67, 71] and see also the physical review [51]). In addition, the presence of positive resonances affects essentially the asymptotic completeness of wave operators (cf.

[18]). Moreover, real resonances are points in the continuous spectrum to which complex eigenvalues may accumulate (see, e.g., [61, Theorem 1.3-1.4], also [62, Thorem 3.3-3.5]) and the resolvent norm can explode near these points (see [61]).

In order to obtain the large-time behavior of e^{-itH}, we establish the expansions of $R(z)$ at threshold zero and positive resonances in the sense of bounded operators between two suitable weighted Sobolev spaces (see Section 3.2). The novelties in our results are the following. We establish the asymptotic expansions of $R(z)$ near positive resonances (Theorem 3.2.4) which are assumed to be singularities of finite order with a specific hypothesis $(H3)$ on the behavior of solutions defined by (3.1.3) (see [18, 62] for more hypotheses concerning positive resonances). In addition, in Theorem 3.2.1-3.2.3 we obtain the asymptotic expansions of the resolvent at low energies for non-selfadjoint operators. In particular, explicit calculation of lower order coefficients has been performed. The difficulty is that the algebraic and geometric eigenspaces need not coincide, i.e not only eigenvectors but also Jordan chains may occur. Our main approach extends the method of Lidskii [44] to study the giant matrices representation that we find, where there exist many Jordan blocks corresponding to the eigenvectors associated with zero eigenvalue. Under our hypotheses $(H1)$ and $(H2)$ we get same singularities (negative powers of $z^{1/2}$) that have appeared in [38] due to the presence of an eigenvalue or a resonance at zero. More recent results can be found in [25, 68].

We expect the obtained results may be usful for the study of the asymptotic behavior in time of wave functions that would depend on the nature of the threshold energy and the characteristic of positive resonances. Morover, the asymptotic expansions of the resolvent, as well as of the semigroup e^{-itH} as $t \to +\infty$, associated with a non-selfadjoint Schrödinger operator have many applications in the scattering theory (see for example [18, 19]).

This paper is organized as follows. In Section 3.2, we introduce our hypotheses and we state the main results. In Section 3.3 we study the asymptotic expansions of the resolvent at zero energy. We prove Theorem 3.2.1 when zero is a resonance, then we prove Theorem 3.2.2 in the case of zero eigenvalue of arbitrary geometric multiplicity, and Theorem 3.2.3 in the more complicated case when zero is both an eigenvalue and a resonance of H. Section 3.4 is devoted to the study of outgoing positive resonances, we establish the proof of Theorem 3.2.4 by assuming that the set of positive resonances is finite and their associated eigenvectors satisfy an appropriate assumption. Moreover, we obtain another result (Theorem 3.4.1) in more general situation. Finally, in Section 3.5 we establish a representation formula for the semigroup e^{-itH} as $t \to +\infty$ which allows us to prove Theorem 3.2.5.

Notation Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$ be two Banach spaces. We denote $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X}')$ the set of linear bounded operators from $\mathcal{X}$ to $\mathcal{X}'$. For simplicity, $\mathcal{B}(\mathcal{X})=\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$. For all $m,m',s,s'\in\mathbb{R}$, we denote by $\mathbb{H}^{m,s}$ the weighted Sobolev space on $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{H}^{m,s}=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3):\ \|u\|_{m,s}=\|\langle x\rangle^s(1-\Delta)^{m/2}u\|_{L^2}<\infty\},$$

such that for $m<0$, $\mathbb{H}^{m,s}$ is defined as the dual of $\mathbb{H}^{-m,-s}$ with dual product identified with the scalar product of L^2 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. The index s is omitted for standard Sobolev spaces, i.e. $\mathbb{H}^m$ denotes $\mathbb{H}^{m,0}$. In particular $\mathbb{H}^0=L^2$ with the associated norm $\|\cdot\|_0$. Let $\mathbb{B}(m,s,m',s')=\mathcal{B}\left(\mathbb{H}^{m,s},\mathbb{H}^{m',s'}\right)$. For linear operator T, we denote by $\operatorname{Ran}T$ the range of T. We also define the following subsets: $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$, $\mathbb{R}_-=]-\infty,0]$, $\mathbb{C}_\pm=\{z\in\mathbb{C},\ \pm\Im(z)>0\}$ and $\overline{\mathbb{C}}_\pm=\{z\in\mathbb{C},\ \pm\Im(z)\geq 0\}$.

3.2 Assumptions and formulation of the main results

3.2.1 The operator

We consider the Schrödinger operator $H=-\Delta+V$ in $\mathbb{R}^3$, where Δ denotes the Laplacian and V is a complex-valued potential which will be assumed to satisfy the following decay condition

$$|V(x)|\leq C_v\langle x\rangle^{-\rho},\quad \forall x\in\mathbb{R}^3, \tag{3.2.1}$$

where $\rho>2$ throughout the paper and will depend on the results to obtain. Under the previous assumptions, H is a closed non-selfadjoint operator on L^2 with domain the standard Sobolev space $\mathbb{H}^2$. Moreover, the condition (4.1.1) implies that the operator V of multiplication by $V(x)$ is relatively compact with respect to $-\Delta$. It follows that the essential spectrum of H, denoted by $\sigma_e(H)$, coincides with that of the non perturbed operator $-\Delta$ (cf. [42, Theorem IV.5.35]), so $\sigma_e(H)$ fills the positive real axis $[0,+\infty[$. Namely, the essential spectrum of H is defined as

$$\sigma_e(H):=\mathbb{C}\setminus\varrho_e(H)\quad\text{with}$$

$\varrho_e(H):=\{z\in\mathbb{C},\operatorname{Ran}(H-zId)\text{ is closed},\dim\operatorname{Ker}(H-zId)<\infty\text{ or codim}\operatorname{Ran}(H-zId)<\infty\}$ (see [42, Section IV. 5. 6]). Note that in view of the condition (4.1.1), the operator H has no non-zero positive eigenvalues (cf. [40]). Hence, the spectrum of H, denoted by $\sigma(H)$, is the disjoint union of $\sigma_e(H)$ and a countable set denoted by $\sigma_d(H)$, with

$$\sigma_d(H):=\{z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[,\ \exists\, 0\neq u\in D(H), Hu=zu\} \tag{3.2.2}$$

consisting of discrete eigenvalues with finite algebraic multiplicities. For $z\in\sigma_d(H)$, the associated Riesz projection of H is defined by

$$\Pi_z=-\frac{1}{2i\pi}\int_{|w-z|=\epsilon}(H-wId)^{-1}dw, \tag{3.2.3}$$

for $\epsilon > 0$ small enough.

It should be noted that in this work it is sufficient to assume the existence of some constants $\rho > 2$ and $C_v, R > 0$ such that the assumption (4.1.1) on the potential V is replaced by the following:

$$\begin{cases} |V(x)| \le C_v \langle x \rangle^{-\rho}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \text{ with } |x| > R, \\ \\ V \text{ is } -\Delta - \text{compact}. \end{cases}$$

Resolvent Denote $R_0(z) = (-\Delta - zId)^{-1}$ for $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ and $R(z) = (H - zId)^{-1}$ for $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$. In order to obtain the asymptotic expansion of $R(z)$, we use the following relation between the resolvents

$$R(z) = (Id + R_0(z)V)^{-1} R_0(z), \; \forall z \notin \sigma(H), \tag{3.2.4}$$

and we need to recall some well-known facts about $R_0(z)$.

For $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $R_0(z)$ is a convolution operator from L^2 to itself with integral kernel

$$R_0(z)(x,y) = \frac{e^{+i\sqrt{z}|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad \Im\sqrt{z} > 0.$$

Here the branch of $\sqrt{z}$ is holomorphic in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ such that $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \sqrt{\lambda \pm i\epsilon} = \pm\sqrt{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Moreover, the boundary values of the free resolvent on $\mathbb{R}_+$ are defined by the following strong limits

$$R_0^{\pm}(\lambda) := s - \lim_{\epsilon\to 0} R_0(\lambda \pm i\epsilon), \textit{ for } \lambda > 0, \tag{3.2.5}$$

which exist in the uniform operator topology of $\mathbb{B}(0,s,0,-s')$, for $s, s' > 1/2$ (see [3, Theorem 4.1]). Furthermore, for $\ell \in \mathbb{N}$ and $s, s' > \ell + 1/2$ (with $s + s' > 2$ if $\ell = 0$)

$$R_0(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (i\sqrt{z})^j G_j + o(|z|^{\ell/2}), \tag{3.2.6}$$

in the norm sense of $\mathbb{B}(-1,s,1,-s')$, where G_j is an integral operator with integral kernel $G_j(x,y) = |x-y|^{j-1}/4\pi j!,\ j = 0, 1, \cdots, \ell$, such that

$$G_0 \in \mathbb{B}(-1,s,1,-s'), \quad s, s' > 1/2, \quad s + s' > 2, \tag{3.2.7}$$

$$G_j \in \mathbb{B}(-1,s,1,-s'), \quad s, s' > j + 1/2, \quad j = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.2.8}$$

In particular

$$G_0 := s - \lim_{z\to 0, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} R_0(z) \tag{3.2.9}$$

is formally inverse to $-\Delta$. See [38, Section 2.]. In order to use analyticity arguments, we will often work with the square root variable $\eta = \sqrt{z}$ with $\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$.

Let $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \ni z \mapsto K(z) := R_0(z)V : L^2 \longrightarrow L^2$ be an analytic operator valued function. As mentioned before, we see that $K(z)$ is a compact operator for all $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, and that $\{Id + K(z), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+\}$ is a holomorphic family of Fredholm operators ([14], Annexe C.2). By (3.2.5) and (3.2.9), if $\rho > 2$ (this condition is needed in (3.2.9)), then $\{Id + K(z), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+\}$ can be continuously extended to a family of operators in $\mathcal{B}(L^{2,-s})$ for $1/2 < s < \rho - 1/2$ in the two closed half-planes $\bar{\mathbb{C}}_\pm$. Therefore, applying analytic Fredholm theory with respect to z, it follows that $(Id + R_0(z)V)^{-1}$ is a meromorphic operator valued function in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ with values in $\mathcal{B}(L^{2,-s})$, whose poles are discrete eigenvalues of H in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Moreover, for $\lambda > 0$, the limits

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (Id + R_0(\lambda \pm i\epsilon)V)^{-1} = (Id + R_0^\pm(\lambda)V)^{-1},$$

exist in $\mathbb{B}(0, -s, 0, -s)$, for $1/2 < s < \rho - 1/2$, if and only if $Id + R_0^\pm(\lambda)V$ is one to one. In other terms, the above limits do not exist if there exists a non-trivial solution $\psi \in \mathbb{H}^{1,-s}$, $\forall s > 1/2$, to $R_0(\lambda \pm i0)V\psi = -\psi$. Also, it can be easily proved that $\psi \in \mathbb{H}^{1,-s}$, $\forall s > 1/2$, is a non-trivial solution to $R_0(\lambda \pm i0)V\psi = -\psi$ if and only if ψ is a solution, in the sense of distributions, to $(-\Delta + V)\psi = \lambda\psi$ satisfying one of the radiation conditions (3.1.3). Similarly, by (3.2.9) we have that

$$\lim_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, z \to 0} (Id + R_0(z)V)^{-1} = (Id + G_0 V)^{-1},$$

exists in $\mathbb{B}(0, -s, 0, -s)$, for $1/2 < s < \rho - 1/2$ (we need here the condition $\rho > 2$), if and only if $Id + G_0 V$ is one to one. Moreover, we note that under the condition $\rho > 1$ in (3.1.2), we can show that at high energy ($\lambda \to +\infty$) the limits $(Id + R_0(\lambda \pm i0)V)^{-1}$ exist and are uniformly bounded in $\mathcal{B}(L^{2,-s})$, $\forall s > 1/2$, using the known result $\|R_0(\lambda \pm i0)\| = O(\sqrt{\lambda})$ in the norm sense of $\mathbb{B}(0, s, 0, -s')$, $\forall s, s' > 1/2$ (see also Proposition 3.5.2). Then it can be seen that zero and the positive resonances are the only points in the essential spectrum $[0, +\infty[$ to which the complex eigenvalues of H may accumulate (see [61, Theorem 1.3-1.4], also [62, Thorem 3.3-3.5]). In the following we shall use the notations $K^+(\lambda) := R_0^+(\lambda)V$ for $\lambda > 0$ and $K_0 := G_0 V$.

Definition 3.2.1. *Let $\lambda_0 > 0$. λ_0 is called an* ***outgoing positive resonance*** *of H if $-1 \in \sigma(K^+(\lambda_0))$ and it is called an* ***incoming positive resonance*** *if $-1 \in \sigma(K^-(\lambda_0))$. Moreover, zero is said to be a* ***resonance*** *of H if $Ker_{L^{2,-s}}(Id + K_0)/Ker_{L^2}(Id + K_0) \neq \{0\}$, $\forall s > 1/2$. Let $\sigma_r^+(H)$ denotes the set of all outgoing positive resonances.*

This work is mainly concerned with the singularities of the resolvent at zero and outgoing positive resonances. At threshold zero, the non-selfadjoint operator H may have an embedded eigenvalue or/and a resonance if the decay condition (3.1.2) holds. For real potential V, it is known that if $\psi \in H^{1,-s}$, $\forall s > 1/2$, such that $\psi \in \text{Ker}(Id + G_0V)$, then

$$\psi \in L^2 \text{ if and only if } \int_{\mathbb{R}^3} V(y)\psi(y)dy = 0 \tag{3.2.10}$$

(cf. [38, Lemma 3.3]). Moreover, in this case the resonance at zero is at most simple, i.e. dim $\text{Ker}_{\mathbb{H}^{1,-s}} H/\text{Ker}_{L^2} H \leq 1$, $\forall s > 1/2$ (cf. [38, Theorem 3.6]). The argument used in [38] still applies in our case, and we may show that the resonance zero is at most geometrically simple (see Proposition 3.3.4). Furthermore, zero is an eigenvalue of H if and only if -1 is an eigenvalue of the compact operator K_0 on $L^{2,-s}$ and the associated eigenfunctions belong to the orthogonal space of 1 defined by $\{\psi \in L^{2,-s}; \langle \psi, \overline{V1}\rangle = 0\}$. If this occurs, then their associated eigenspaces coincide. In particular, they have the same geometric multiplicity, i.e. dim $\text{Ker}_{L^2}(H) =$ dim $\text{Ker}_{L^2}(Id + K_0)$. Let $\Pi_1 : L^{2,-s} \to L^{2,-s}$ (resp., $\Pi_1^\lambda : L^{2,-s} \to L^{2,-s}$) be the well defined Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of the compact operator K_0 (resp., $K^+(\lambda)$) (see (3.2.3)). Notice that the Riesz projection corresponding to the embedded eigenvalue 0 of H cannot be defined. We denote $m :=$ rank Π_1 the algebraic multiplicity of -1 as eigenvalue of K_0.

Our study covers all the situations of zero energy. We will use the following terminology introduced in [53]: If zero is a resonance and not an embedded eigenvalue of H zero is said to be a singularity for H of the **first kind**. If zero is an embedded eigenvalue and not a resonance of H zero is said to be a singularity for H of the **second kind**. Finally, if zero is both an embedded eigenvalue and a resonance of H zero is said to be a singularity for H of the **third kind**. In the last two cases, we look at the eigenvalue -1 of K_0 of arbitrary geometric multiplicity $k \in \mathbb{N}^*$. Since algebraic and geometric eigenspaces need not be equal, generalized eigenvectors occur in Ran Π_1. We decompose Ran Π_1 to k invariant subspaces of K_0, $E_1, \cdots, E_k$. The subspaces E_i, $1 \leq i \leq k$, are spanned by Jordan chains of length m_i, i.e

$$E_i = \text{Span}\{u_r^{(i)} = (Id + K_0)^{m_i - r} u_{m_i}^{(i)},\ 1 \leq r \leq m_i\}$$

for some vectors $u_{m_i}^{(i)} \in \text{Ker}(Id + K_0)^{m_i} \setminus \text{Ker}(Id + K_0)^{m_i - 1}$, such that dim $\text{Ker}(Id + K_0)|_{E_i} = 1$. This decomposition yields the Jordan canonical form of the matrix $\Pi_1(Id + K_0)\Pi_1$ given in (4.3.3). See Lemma 3.3.1.

3.2.2 Hypotheses

Our first two hypotheses are about zero energy:
Hypothesis (H1): If zero is a singularity for H of the second kind with geometric multiplicity $k \in \mathbb{N}^*$, then one assumes that there exists a basis $\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}$ of $\text{Ker}_{L^2}(Id + K_0)$ such that

$$\det(\langle \phi_j, J\phi_i\rangle)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0, \tag{3.2.11}$$

where $J : w \mapsto \overline{w}$ is the complex conjugation.

Hypothesis (H2): If zero is both an eigenvalue with geometric multiplicity $k \in \mathbb{N}^*$ and a resonance of H, then one assumes that:

1. There exists $1 \leq i_0 \leq k+1$ such that
$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ker}(Id + K_0)|_{E_{i_0}} & = & \mathrm{Ker}_{L^{2,-s}}(Id+K_0)/\mathrm{Ker}_{L^2}(Id+K_0) & \text{and} \\ \mathrm{Ker}(Id+K_0)|_{E_i} & \subset & \mathrm{Ker}_{L^2}(Id+K_0),\ \forall 1 \leq i \leq k+1, i \neq i_0. & \end{array}$$

2. There exists a basis $\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}$ of $\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0)$ verifying the condition (3.2.11).

Before stating our hypothesis on positive resonances we define for $\lambda > 0$ the symmetric bilinear form $B_\lambda(\cdot,\cdot)$ on $\mathbb{H}^{-1,s} \times \mathbb{H}^{-1,s}$ by

$$B_\lambda(u,w) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|} u(x)V(x)w(y)V(y)\, dx\, dy. \tag{3.2.12}$$

Hypothesis (H3): Let $\lambda_0 \in \sigma_r^+(H)$. One assumes that there exist $N_0 \in \mathbb{N}^*$ and a basis $\{\psi_1, \cdots, \psi_{N_0}\}$ in $L^{2,-s}$ of Ker $(Id + K^+(\lambda_0))$ such that

$$\det\left(B_{\lambda_0}(\psi_r, \psi_l)\right)_{1\leq l,r\leq N_0} \neq 0. \tag{3.2.13}$$

In Section 3.3.3 (resp. Section 3.4) we find some numerical function $d(z)$ such that $(Id + K(z))$ is invertible if and only if $d(z) \neq 0$ and if the hypothesis $(H1)$ (resp., $(H3)$) holds, then -1 is an eigenvalue of K_0 on L^2 (resp. $K^+(\lambda_0)$ on $L^{2,-s}$) with geometric multiplicity k if and only if 0 (resp. λ_0) is a zero of $d(z)$ with multiplicity k. In [68] $(H1)$ was used in the case where -1 is a semi-simple eigenvalue of K_0 (i.e. geometric and algebraic multiplicities are equal) to expand the function $d(z)$ in power of $z^{1/2}$ near 0. However, we use in the present work $(H1)$ and $(H3)$ to compute, in addition, exactly the leading terms of resolvent expansions near 0 and positive resonances (see proofs of Theorems 3.2.2 and 3.2.4). In particular, under conditions (3.2.13) and (4.1.1) for $\rho > N+1$ with $N \in \mathbb{N}^*$, we can expand the function $d(z)$ as follows

$$d(z) = \omega_{N_0}(z-\lambda_0)^{N_0} + \omega_{N_0+1}(z-\lambda_0)^{N_0+1} + \cdots + O(|z-\lambda_0|^{N_0+N}) \tag{3.2.14}$$

for $z \in \mathbb{C}_+, |z-\lambda_0| < \delta$, with some $\omega_{N_0} \neq 0$, where N_0 is given in $(H3)$. Note that the expansion (3.2.14) can hold under the analyticity condition on the potential V. See [68, Remark 6.1].

In [72, Remark 5.4], we find an example of a resonance state ψ associated with an outgoing resonance λ_0 for a perturbation of $-\Delta$ by a compactly supported complex-valued potential V, where it can be checked that ψ satisfies

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} e^{i\sqrt{\lambda_0}|x-y|} V(y)\psi(y)V(x)\psi(x)\, dxdy \neq 0.$$

However, in the general case it is not clear if the condition (3.2.13) can be satisfied. In section 3.4 we will study the resolvent expansion near λ_0 with the more general condition (3.2.14). See also [68, Example 5.5] for an example of a non-selfadjoint Schrödinger operator having a geometrically simple eigenvalue at zero with an associated eigenfunction satisfying the hypothesis $(H1)$.

3.2.3 Main results

As first result, we establish asymptotic expansions for $R(z)$ near zero and positive resonances. For $\delta > 0$ small, we denote

$$\Omega_\delta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ : \ |z| < \delta\}. \tag{3.2.15}$$

Theorem 3.2.1. *Suppose that zero is a singularity for H of the **first kind**.*
Assume $\rho > 2\ell + 3$, $\ell \in \mathbb{N}$. Let $s > \ell + 3/2$ and $z \in \Omega_\delta$. Then the expansion of $R(z)$ in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ has the following form:

$$R(z) = \sum_{j=-1}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(1)} + \widetilde{R}_\ell^{(1)}(z), \tag{3.2.16}$$

where

$$R_{-1}^{(1)} : L^{2,s} \to L^{2,-s}, \ u \mapsto i\langle u, J\phi\rangle\phi,$$

with ϕ is a resonance state normalized by

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\phi(x)\, dx = 1. \tag{3.2.17}$$

Furthermore, the remainder term $\widetilde{R}_\ell^{(2)}(z)$ is a $\mathcal{C}^\ell$ operator-valued function of z from Ω_δ to $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ and for $0 < \lambda < \delta$ the limits

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{R}_\ell^{(1)}(\lambda \pm i\epsilon) := \widetilde{R}_\ell^{(1)}(\lambda \pm i0) \tag{3.2.18}$$

exist in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ and satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{R}_\ell^{(1)}(\lambda \pm i0)\|_{\mathbb{B}(-1,s,1,-s)} = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2} - r}), \ \forall \lambda \in]0, \delta[, \ r = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.2.19}$$

If $\rho > 2$ and $s > 1/2$, we can obtain $R(z) = z^{-1/2} R_{-1}^{(1)} + o(|z|^{-1/2})$.

In Theorem 3.2.1, we have not used any implicit assumption on zero resonance. In particular, we do not know if zero resonance is algebraically simple.

Theorem 3.2.2. *Suppose that $zero$ is a singularity for H of the **second kind** and that $(H1)$ holds. Let $k \in \mathbb{N}^*$ be the geometric multiplicity of the eigenvalue zero. If $\rho > 2\ell + 5$, $\ell \in \mathbb{N}$, then for $s > \ell + 5/2$ and $z \in \Omega_\delta$ with $\delta > 0$ small, we have*

$$R(z) = \sum_{j=-2}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(2)} + \widetilde{R}_\ell^{(2)}(z), \tag{3.2.20}$$

as operators in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$. Here $R_{-2}^{(2)} = -\mathcal{P}_0^{(2)}, R_{-1}^{(2)} : L^2 \to Ker(Id + K_0)$,

$$\mathcal{P}_0^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \langle \cdot, J\mathcal{Z}_j^{(2)} \rangle \mathcal{Z}_j^{(2)} \text{ with } \langle \mathcal{Z}_i^{(2)}, J\mathcal{Z}_j^{(2)} \rangle = \delta_{ij}, \ \forall 1 \le i, j \le k,$$

where $\{\mathcal{Z}_1^{(2)}, \cdots, \mathcal{Z}_k^{(2)}\}$ is a basis of $Ker(Id + K_0)$. Moreover, the remainder term $\widetilde{R}_\ell^{(2)}(z)$ is a $\mathcal{C}^\ell$ operator-valued function of z from Ω_δ to $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ and for $0 < \lambda < \delta$ the limits $\widetilde{R}_\ell^{(2)}(\lambda \pm i0)$ (see (3.2.18)) exist in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ and satisfy

$$\| \frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{R}_\ell^{(2)}(\lambda \pm i0) \|_{\mathbb{B}(-1,s,1,-s)} = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2} - r}), \ \forall \lambda \in]0, \delta[, \ r = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.2.21}$$

If $\rho > 4$ and $s > 3/2$ we can obtain $R(z) = z^{-1} R_{-2}^{(2)} + z^{-1/2} R_{-1}^{(2)} + o(|z|^{-1/2})$ and if $\rho > 3$ and $s > 1/2$, $R(z) = z^{-1} R_{-2}^{(2)} + o(|z|^{-1})$.

Note that although there is no natural spectral projection associated with the embedded eigenvalue 0 of H, our result shows that the leading term is still given by spectral projection $\mathcal{P}_0^{(2)}$.

Theorem 3.2.3. *Suppose that $zero$ is a singularity for H of the **third kind** and $(H2)$ holds. If $\rho > 2\ell + 5, \ell \in \mathbb{N}$, then for $s > \ell + 5/2$ and $z \in \Omega_\delta$, we have*

$$R(z) = \sum_{j=-2}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(3)} + \widetilde{R}_\ell^{(3)}(z), \tag{3.2.22}$$

in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$. Here $R_{-2}^{(3)} = -\mathcal{P}_0^{(3)}, R_{-1}^{(3)} = i\langle \cdot, J\phi \rangle \phi + S_{-1}^{(3)}$,

$$\mathcal{P}_0^{(3)}, S_{-1}^{(3)} : L^2 \to Ker_{L^2}(Id + K_0),$$

$$\mathcal{P}_0^{(3)} = \sum_{j=2}^{k} \langle \cdot, J\mathcal{Z}_j^{(3)} \rangle \mathcal{Z}_j^{(3)} \text{ with } \langle \mathcal{Z}_i^{(3)}, J\mathcal{Z}_j^{(3)} \rangle = \delta_{ij}, \ \forall 2 \le i, j \le k,$$

where $\{\mathcal{Z}_2^{(3)}, \cdots, \mathcal{Z}_k^{(3)}\}$ is a basis of $Ker_{L^2}(Id + K_0)$ and ϕ is a resonance state satisfying (3.2.17). In addition, the remainder term $\widetilde{R}_\ell^{(3)}(z)$ has the same properties as $\widetilde{R}_\ell^{(2)}(z)$ in Theorem 3.2.2.

The following theorem gives the resolvent expansion near an isolated outgoing positive resonance λ_0 for z in a set Ω_δ^+ given by

$$\Omega_\delta^+ := \{z \in \mathbb{C}_+ : \ |z-\lambda_0| < \delta\}. \tag{3.2.23}$$

Theorem 3.2.4. *Let $\lambda_0 \in \sigma_r^+(H)$ be an isolated point of $\sigma_r^+(H)$. Suppose that $(H3)$ holds. Assume $\rho > 2\ell+3, \ell \in \mathbb{N}$. Then, for $s > \ell + 3/2$ and $z \in \Omega_\delta^+$, we have*

$$R(z) = \sum_{j=-1}^{\ell} (z-\lambda_0)^j R_j(\lambda_0) + \widetilde{R}_\ell(z-\lambda_0), \tag{3.2.24}$$

in $\mathbb{B}(-1,s,1,-s)$, where

$$R_{-1}(\lambda_0) = \sum_{j=1}^{N_0} \langle \cdot, J\psi_j^{(\lambda_0)}\rangle \psi_j^{(\lambda_0)} \text{ with } \frac{1}{i8\pi\sqrt{\lambda_0}} B_{\lambda_0}(\psi_i^{(\lambda_0)}, \psi_j^{(\lambda_0)}) = \delta_{ij},$$

such that $\{\psi_1^{(\lambda_0)}, \cdots, \psi_{N_0}^{(\lambda_0)}\}$ is a basis of Ker$(Id + R_0^+(\lambda_0)V)$, and B_{λ_0} is the bilinear form defined in (3.2.12). The remainder term $\widetilde{R}_\ell(z-\lambda_0)$ is analytic in Ω_δ^+ and for $\lambda > 0$ with $|\lambda-\lambda_0| < \delta$ the limit

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \widetilde{R}_\ell(\lambda-\lambda_0+i\epsilon) = \widetilde{R}_\ell(\lambda-\lambda_0+i0)$$

exists in the norm of $\mathbb{B}(-1,s,1,-s)$ and satisfies

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{R}_{\ell-2}(\lambda-\lambda_0+i0)\|_{\mathbb{B}(-1,s,1,-s)} = o(|\lambda-\lambda_0|^{\ell-r}), \ r = 0,1,\cdots,\ell. \tag{3.2.25}$$

If $\rho > 2$ and $s > 1/2$, we can obtain $R(z) = \dfrac{R_{-1}(\lambda_0)}{z-\lambda_0} + o(|z-\lambda_0|^{-1})$.

See [73, Theorem 5] where a simple version of the hypothesis $(H3)$ has been used to calculate the resolvent expansion near a positive resonance for some dissipative Schrödinger operator. Using the preceding results, we show that under the assumption $\rho > 2$, H has at most a finite number of discrete eigenvalues located in the closed upper half-plane. However, if zero is an eigenvalue of H we need the stronger assumption $\rho > 3$. See Proposition 3.5.1.

We obtain asymptotic expansions in time of the strongly continuous Schrödinger semigroup $(e^{-itH})_{t\geq 0}$, as $t \to +\infty$, if zero is a resonance or an eigenvalue of H taking into account the presence of outgoing positive resonances. Our main result is the following:

Theorem 3.2.5. *Let $\sigma_r^+(H) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ for some $N \in \mathbb{N}^*$. Assume that $(H3)$ holds.*

(a) *Suppose that zero is a singularity for H of the* ***first kind****. If $\rho > 5$ then for $s > 5/2$ we have*

$$e^{-itH} - \sum_{j=1}^{p} e^{-itH}\Pi_{z_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_j} R_{-1}(\lambda_j) = \tag{3.2.26}$$
$$(i\pi)^{-1/2}\langle \cdot, \phi\rangle \phi\, t^{-\frac{1}{2}} + o(t^{-1/2}), \qquad t \to +\infty,$$

in $\mathbb{B}(0, s, 0, -s)$, where ϕ (resp. $\mathcal{P}(\lambda_j)$) is given by Theorem 3.2.1 (resp. Theorem 3.2.4).

(b) Assume $\rho > 7$. Suppose that zero is a singularity for H of the ***second kind*** *and that $(H1)$ holds. Then, for $s > 7/2$ the expansion at the right hand side of (3.2.26) has to be replaced by*

$$\mathcal{P}_0^{(2)} - i(i\pi)^{-1/2} R_{-1}^{(2)} t^{-\frac{1}{2}} - (4i\pi)^{-1/2} R_1^{(2)} t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-3/2}), \tag{3.2.27}$$

where $\mathcal{P}_0^{(2)}$ and $R_s^{(2)}$ for $s = -1, 1$ are given by Theorem 3.2.2.
If $\rho > 5$ and $s > 5/2$, then (3.2.26) holds with the right hand side replaced by

$$\mathcal{P}_0^{(2)} - i(i\pi)^{-1/2} R_{-1}^{(2)} t^{-\frac{1}{2}} + o(t^{-1/2}).$$

(c) *Suppose that zero is a singularity for H of the* ***third kind*** *and that $(H2)$ holds. If $\rho > 7$, then for $s > 7/2$, (3.2.26) holds with the expansion at the right hand side replaced by*

$$\mathcal{P}_0^{(3)} + (i\pi)^{-1/2}\Big(\langle \cdot, J\phi\rangle\phi - iS_{-1}^{(3)}\Big) t^{-\frac{1}{2}} - (4i\pi)^{-1/2} R_1^{(3)} t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-3/2}),$$

where $\mathcal{P}_0^{(3)}$, $S_{-1}^{(3)}$ and $R_1^{(3)}$ are given by Theorem 3.2.3.

In the above expansions Π_{z_j} denote the Riesz projections associated with the discrete eigenvalues z_j located in the closed upper half-plane.

The above expansions are deduced by representing e^{-itH} as a sum of some residue terms and a Dunford integral of $R(z)$ on some curve $\Gamma^{\nu}(\eta)$ given in Figure 1. in Section 3.5.

Remarque 3.2.1. *1. With regard to the case zero is a regular point for H, i.e it is not an eigenvalue nor a resonance of H, we can obtain the same result as [38, Theorem 6.1] for $H = -\Delta + V$ with real V. If $\rho > 3$ and $s > 3/2$, then for $z \in \Omega_\delta$ with $\delta > 0$ small, we have*

$$R(z) = R_0^{(0)} + z^{1/2} R_1^{(0)} + o(|z|^{1/2}), \tag{3.2.28}$$

in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$, where

$$R_0^{(0)} = (Id + G_0 V)^{-1},$$
$$R_1^{(0)} = i(Id + G_0 V)^{-1} G_1 (I - V(Id + G_0 V)^{-1} G_0).$$

Here, G_0, G_1 are given in (3.2.6) and Ω_δ is defined in (3.2.15). The proof of [38, Theorem 6.1] can be done here because it is based on the expansion of $(I + R_0(z)V)^{-1}$ in a Neumann series which works also for non-real V. However, in presence of positive resonances of H a stronger assumption on ρ is needed to obtain the expansion in time of e^{-itH} with remainder $o(t^{-3/2})$ even if zero is a regular point for H. We obtain the following result:
Suppose that zero is a regular point for H. Let $\sigma_r^+(H) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ for some $N \in \mathbb{N}^*$ and let us assume that $(H3)$ holds. If $\rho > 7$ and $s > 7/2$, then we have

$$e^{-itH} - \sum_{j=1}^{p} e^{-itH}\Pi_{z_j} + \sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_i} R_{-1}(\lambda_j) = -(4i\pi)^{-1/2} R_1^{(0)} t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-3/2}), \quad t \to +\infty,$$

in $\mathbb{B}(0, s, 0, -s)$. (See (3.2.26)).

2. In the present work we don't use any assumption on the imaginary part of the potential. We must note that in the case of a dissipative potential, 0 is a regular point of H under the condition (1.2) with $\rho > 2$ (see [68, Theorem 3.1]). Moreover, outgoing positive resonances are absent and incoming resonances which may exist do not affect the time-behavior of solutions (see [72, Remark 5.4]). Accordingly, results of Theorem 2.6 for potentials having a negative imaginary part may be different. More precisely, $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_j} R_{-1}(\lambda_j)$ has to be disappeared and if $\rho > 3$, then e^{-itH} has a decay-rate $t^{-3/2}$, as $t \to +\infty$, in $\mathbb{B}(0, s, 0, -s)$ for $s > 5/2$ (cf. [72]).

3.3 Resolvent expansions at low energies

Consider $H_0 = -\Delta$ and the perturbed non-selfadjoint operator $H = -\Delta + V$. In the following, we always assume that V satisfies (4.1.1), where a stronger assumption on ρ is needed for a high-order asymptotic expansion in $z^{1/2}$ of the resolvent. In this section we will use some tools developed in [68, Section 5.4].

Riesz projection Set $E = \text{Ran}\,\Pi_1$, where Π_1 is the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of K_0 on $L^{2,-s}$ for $1/2 < s < \rho - 1/2$ (see Section 3.2.1).
Let $J : f \to \overline{f}$ be the operation of complex conjugation. Then we have $V^* = JVJ$, $H^* = JHJ$ and the following relations

$$\begin{aligned} JVK_0 &= K_0^* JVJ \text{ on } L^{2,-s} \text{ and} && (3.3.1)\\ (Id + G_0V)JG_0 &= JG_0(Id + (G_0V)^*) \text{ on } L^{2,s}. && (3.3.2)\end{aligned}$$

It follows that

$$JV\Pi_1 = \Pi_1^* JV \text{ on } L^{2,-s}.$$

It can also be shown that $JV : \text{Ker}(Id + K_0) \to \text{Ker}(Id + K_0^*)$ is bijective. Indeed, clearly $JV(\text{Ker}(Id + K_0)) \subset \text{Ker}(Id + K_0^*)$. In addition for $v \in \text{Ker}(Id + K_0^*)$, i.e. $v = -JVJG_0v$, taking $u = -JG_0v$, we have by (3.3.2) that $u \in \text{Ker}(Id + K_0)$ and $v = JVu$. This shows that $JV : \text{Ker}(Id + K_0) \to \text{Ker}(Id + K_0^*)$ is surjective. Furthermore, if $u \in \text{Ker}(Id + K_0)$ such that $JVu = 0$, then $u = -G_0Vu = 0$. This yields that JV is injective on $\text{Ker}(Id + K_0)$.

On the other hand, since $Id + K_0$ is nulpotent on $\text{Ran}\,\Pi_1$ and $\dim \text{Ker}(Id + K_0) = k$, there exist elements $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k \in \text{Ran}\,\Pi_1$ and non-negative integers $m_1, m_2, \cdots, m_k$ such that

$$b := \cup_{j=1}^{k}\{\varphi_r^{(i)} := (Id + K_0)^{m_i - r}(\varphi_i), 1 \leq r \leq m_i\}$$

is a basis of $\text{Ran}\,\Pi_1$ and $(Id + K_0)^{m_j}(\varphi_j) = 0$ for all $1 \leq j \leq k$. In particular, $\{\varphi_1^{(1)}, \cdots, \varphi_1^{(k)}\}$ is a basis of $\text{Ker}(Id + K_0)$.

By injectivity of JV on $\text{Ker}(Id + K_0)$ it follows that $\{JV\varphi_1^{(1)}, \cdots, JV\varphi_1^{(k)}\}$ is free. Then using this fact we can chech that $JV(b)$ is free. Since $\text{rank}\,\Pi_1 = \text{rank}\,\Pi_1^*$, we deduce that $JV(b)$ is a basis of $\text{Ran}\,\Pi_1$ and $JV : \text{Ran}\,\Pi_1 \to \text{Ran}\,\Pi_1^*$ is bijective. Using the bijectivity of JV, the same argument used in [68, Lemma 5.13] shows that the bilinear form $\Theta(\cdot,\cdot)$ defined on E by

$$\Theta(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u(x)v(x)dx = \langle u, v^* \rangle \tag{3.3.3}$$

is non-degenerate on $E \times E$, where we denoted

$$u^* = JVu. \tag{3.3.4}$$

Using the above non-degenerate bilinear form, we obtain the following decomposition lemma:

Lemme 3.3.1. *Assume that -1 is an eigenvalue of K_0 of geometric multiplicity $k \geq 1$ and algebraic multiplicity m. Then there exist k invariant subspaces of K_0 denoted by $E_1, \cdots, E_k$ such that*

1. *$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, where $\forall i \neq j$: $E_i \perp_\Theta E_j$.*
2. *$\forall 1 \leq i \leq k$, there exists a basis $\mathcal{U}_i := \{u_1^{(i)}, \cdots, u_{m_i}^{(i)}\}$ of E_i such that*

$$\begin{gathered} u_r^{(i)} := (Id + K_0)^{m_i - r}u_{m_i}^{(i)},\ \forall 1 \leq r \leq m_i, \\ u_{m_i}^{(i)} \in \mathit{Ker}(Id + K_0)^{m_i} \text{ and } \Theta(u_1^{(i)}, u_{m_i}^{(i)}) = c_i \neq 0. \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

3. *$\forall 1 \leq j \leq k$, there exists a basis $\mathcal{W}_j := \{w_1^{(j)}, \cdots, w_{m_j}^{(j)}\}$ of E_j such that*

$$w_r^{(j)} \in \mathit{Ker}(Id + K_0)^{m_j + 1 - r} \text{ and } \Theta(u_\ell^{(i)}, w_r^{(j)}) = \delta_{ij}\delta_{\ell r}. \tag{3.3.6}$$

4. *dim Ker*$(Id + K_0)|_{E_j} = 1, \forall j = 1, \cdots, k$.

Moreover, the matrix of $\Pi_1(Id + K_0)\Pi_1$ *in the basis* $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$ *of* E *is a* $m \times m$ *block diagonal matrix of the following form*

$$J_m = diag(J_{m_1}, J_{m_2}, \cdots, J_{m_k}), \tag{3.3.7}$$

where

$$J_{m_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_j \times m_j}$$

is a Jordan block. We have also denoted m_j = *dim* E_j *for* $j = 1, \cdots, k$*, such that* $m = m_1 + \cdots + m_k$.

The following statement is an immediate consequence of the previous lemma.

Corollaire 3.3.2. *The Riesz projection* Π_1 *has the following representation:*

$$\Pi_1 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_j} \langle \cdot, (w_r^{(j)})^* \rangle u_r^{(j)}.$$

See [68, Corollary 5.16] for the proof of the corollary in the case $k = 1$. We now prove Lemma 3.3.1.

Proof. We proceed by induction on $k = \dim \mathrm{Ker}(Id + K_0)$. Initially, for $k = 1$, we refer to [68, Section 5.4] for the case of geometrically simple eigenvalue -1 of K_0. For $k = 2$, we shall show the parts (1) and (2) as follows. First, note that K_0 is Θ-symmetric which implies that, if F is a stable subspace of $Id + K_0$ its Θ-orthogonal $F^{\perp_\Theta}$ is stable and if in addition $\Theta|_{F \times F}$ is non degenerate then $E = F \oplus F^{\perp_\Theta}$ and $\Theta|_{F^{\perp_\Theta} \times F^{\perp_\Theta}}$ is non degenerate. Second, if $E(u_\mu) = \mathrm{Span}\{u_k = (Id + K_0)^{\mu - k} u_\mu, 1 \leq k \leq \mu\}$, with $u_\mu \in \mathrm{Ker}(Id + K_0)^\mu$ and $\Theta(u_\mu, u_1) = c \neq 0$, then $u_\mu \notin \mathrm{Ker}(Id + K_0)^{\mu-1}$, $\{u_1, \cdots, u_\mu\}$ is a basis of $E(u_\mu)$, $\Theta|_{E(u_\mu) \times E(u_\mu)}$ is non degenerate, $E = E(u_\mu) \oplus E(u_\mu)^{\perp_\Theta}$ and $\Theta|_{E(u_\mu)^{\perp_\Theta} \times E(u_\mu)^{\perp_\Theta}}$ is non degenerate. In addition, $\{u_1, \cdots, u_\mu\}$ has Θ-dual basis $\{w_1, \cdots, w_\mu\}$ with $w_\mu = c^{-1} u_1$ which can be constructed as in [68, Lemma 5.15] since $\Theta|_{E(u_\mu) \times E(u_\mu)}$ is non degenerate. Therefore it suffices to find one u_{m_1} such that the second statement holds and to find in addition one u_{m_2} such that $E(u_{m_1})^{\perp_\Theta} = E(u_{m_2})$.

(i) Let m_1, $1 \leq m_1 \leq m$, be the smallest integer such that E =Ker$(Id + K_0)^{m_1}$. If $m_1 = 1$, E =Ker$(Id + K_0)$. By non degeneracy of Θ, we can easily find $u_1, v_1 \in E$ such that $\Theta(u_1, u_1) \neq 0, \Theta(v_1, v_1) \neq 0$ and $\Theta(u_1, v_1) = 0$. This solves the problem for $m_1 = 1$. If $m_1 > 1$, set $Q = (Id + K_0)^{m_1 - 1}$ which is Θ-symmetric. The bilinear form $B(u, v) = \Theta(Qu, v)$ is symmetric on E and not identically zero. Otherwise $\Theta(w,v)=0$ for all $v\in E$ and $w\in$ Ran Q and because Θ is non degenerate it follows that $E=(\text{Ran } Q)^{\perp_\Theta}=\text{Ker } Q$ (it can be seen that Ker $Q\subset(\text{Ran } Q)^{\perp_\Theta}$ and the equality comes from the non degeneracy of Θ). This contradicts the definition of μ. By polarization identity a symmetric bilinear form B on E is the null bilinear form if and only if $B(u,u)=0$ for all $u\in E$. Hence there exists $u_{m_1}\in E$ such that $\Theta((Id+K_0)^{m_1-1}u_{m_1},u_{m_1})\neq 0$.

(ii) Consider the restrictions of $(Id+K_0)$ and Θ to $E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}$. Let $m_2=m-m_1$. Since dim $\text{Ker}((Id+K_0)|_{E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}})=1$, then m_2 is the smallest integer such that $E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}=\text{Ker}((Id+K_0)|_{E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}})^{m_2}$, so following (i) one finds u_{m_2}.

Assume now that (1) and (2) are true for $k=\ell-1$, $\ell\in\mathbb{N}$, $\ell\geq 2$. For $k=\ell$, $E=E(u_{m_1})\oplus E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}$ with dim $\text{Ker}(Id+K_0)|_{E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}}=\ell-1$ by (i). Applying the inductive hypothesis on $E(u_{m_1})^{\perp_\Theta}$ we prove (1) and (2) for $k=\ell\in\mathbb{N}^*$.

Finally, for the statement about the basis $\mathcal{W}$ once the basis $\mathcal{U}=\bigcup_{j=1}^k\mathcal{U}_j$ is constructed, $\mathcal{W}_j$, $j=1,\cdots,k$, are given by [68, Lemma 5.15]. We have established (1)-(3) and (4) follows directly. □

Remarque 3.3.3. *By construction of E_j in the previous lemma, we have*

$$\Theta(u_1^{(j)},u_{m_j}^{(j)})=c_j\neq 0,\forall 1\leq j\leq k,$$

and $\Theta|_{E_j\times E_j}$ is non degenerate. Then, applying Lemma 5.15 in [68] to construct the basis $\{w_1^{(j)},\cdots,w_{m_j}^{(j)}\}$ of $\{u_1^{(j)},\cdots,u_{m_j}^{(j)}\}$, we take $w_{m_j}^{(j)}=c_j^{-1}u_1^{(j)}$, $\forall 1\leq j\leq k$.

In order to establish the asymptotic expansion of the resolvent $R(z)$, we use the resolvent equation given in (3.2.4). We must establish the asymptotic expansion of $(I+R_0(z)V)^{-1}$. Our approach is to use the so called Grushin's method. To avoid repetition we will introduce a Grushin problem in the more general case when dim $\text{Ker}_{L^{2,-s}}(Id+K_0)=k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Set $\mathcal{M}(z)=Id+K(z)$. Given the decomposition of E in Lemma 3.3.1, we can identify E_j with $\mathbb{C}^{m_j}$ and $\mathbb{C}^m$ with $\mathbb{C}^{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}^{m_k}$ to construct the following Grushin problem.

3.3.1 Grushin problem for the inverse of $(I+R_0(z)V)$

We consider

$$\mathcal{P}(z):=\begin{pmatrix}\mathcal{M}(z) & S\\ T & 0\end{pmatrix},\tag{3.3.8}$$

$$S:\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}}\mathbb{C}^{m_j}\longmapsto \text{Ran }\Pi_1;\ \zeta=\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}}(\zeta_1^{(j)},\cdots,\zeta_{m_j}^{(j)})\mapsto S\zeta:=\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^{m_j}\zeta_i^{(j)}u_i^{(j)},$$

$$T:\text{Ran }\Pi_1\longmapsto\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}}\mathbb{C}^{m_j};\ v\mapsto Tv:=\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}}(\langle v,(w_1^{(j)})^*\rangle,\cdots,\langle v,(w_{m_j}^{(j)})^*\rangle).$$

The operators S and T verify $TS = I_m$ and $ST = \Pi_1$ (see Corollary 3.3.2), where S and T are chosen so that the problem $\mathcal{P}(z)$ is invertible. Since $Id + K_0$ is injective on Ran Π_1', where $\Pi_1' = Id - \Pi_1$, by the alternative Fredholm theorem $\Pi_1'(Id + K_0)\Pi_1'$ is invertible on Ran Π_1'. Then, using an argument of perturbation for $\delta > 0$ small enough $\Pi_1'\mathcal{M}(z)\Pi_1'$ is also invertible on Ran Π_1' for all z in Ω_δ, with inverse

$$E(z) = (\Pi_1'\mathcal{M}(z)\Pi_1')^{-1}\Pi_1'.$$

In view of (3.2.6), for $\rho > 2\ell+1$, $\ell+1/2 < s < \rho-\ell-1/2$, $\ell = 1, 2\cdots$ and $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, the expansion of $E(z)$ in $\mathbb{B}(1, -s, 1, -s)$ can be written as follows:

$$E(z) = \sum_{j=0}^{\ell} z^{j/2} E_j + E_\ell(z), \tag{3.3.9}$$

where $E_0 = (\Pi_1'(Id + K_0)\Pi_1')^{-1}\Pi_1'$, $E_1 = iE_0 G_1 V \Pi_1' E_0$ and other terms E_j, $j = 2, \cdots, \ell$ can be computed directly. By the same argument used in [38, Remark 6.7], we can show that the remainder term $E_\ell(z)$ satisfies

$$\|\frac{d^r}{dz^r} E_\ell(z)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})} = o(|z|^{\frac{\ell}{2}-r}),\ \forall z \in \Omega_\delta,\ r = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.3.10}$$

In addition, for $0 < \lambda < \delta$, it follows from (3.2.5) that the limits

$$\lim_{\epsilon\to 0} E_\ell(\lambda \pm i\epsilon) = E_\ell(\lambda \pm i0) \tag{3.3.11}$$

exist as operators in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$. By taking $\epsilon \to 0^+$ in (3.3.10) with $z = \lambda \pm i\epsilon$ we show that the above limits satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r} E_\ell(\lambda \pm i0)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})} = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2}-r}),\ \forall\, 0 < \lambda < \delta,\ r = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.3.12}$$

Then the Grushin problem is invertible with inverse

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}(z) & S \\ T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E(z) & E_+(z) \\ E_-(z) & E_{-+}(z) \end{pmatrix} :\ \mathbb{H}^{1,-s} \times \mathbb{C}^m \longmapsto \mathbb{H}^{1,-s} \times \mathbb{C}^m, \tag{3.3.13}$$

where

$$\begin{aligned} E_+(z) &= S - E(z)\mathcal{M}(z)S \\ E_-(z) &= T - T\mathcal{M}(z)E(z) \\ E_{-+}(z) &= -T\mathcal{M}(z)S + T\mathcal{M}(z)E(z)\mathcal{M}(z)S \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Therefore, $\mathcal{M}(z)$ is invertible if and only if $E_{-+}(z)$ is invertible, with

$$\mathcal{M}(z)^{-1} = E(z) - E_+(z)E_{-+}(z)^{-1}E_-(z) \quad \text{on} \quad \mathbb{H}^{1,-s}. \tag{3.3.15}$$

In what follows we discuss in details all the kinds of zero singularity defined at Section 3.2.1. It should be noted that the characterization (3.2.10) of resonant states is still valid in the case of a non-real potential. Moreover, we can mimic the proof of Lemma 3.3 in [38] to obtain

Proposition 3.3.4. *Let $\psi \in \mathbb{H}^{1,-s}, \forall s > 1/2$, such that $\psi \in$ Ker$(Id + K_0)$. Then $\psi \in L^2$ if and only if*

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(y)\psi(y)\,dy = 0.$$

As consequence of the above proposition, we have

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}_{\mathbb{H}^{1,-s}}(Id + K_0)/\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0)\Big) \le 1.$$

3.3.2 Zero singularity of the first kind

In this section, zero will be only a resonance and not an eigenvalue of H in which case -1 is a geometrically simple eigenvalue of the compact operator K_0 on $L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$. The same construction made in Lemma 3.3.1 for a single subspace E_i can be done for $E = \mathrm{Ran}\,\Pi_1$ at the present case. By this lemma we find $\mathcal{U} := \{u_1, \cdots, u_m\} \subset L^{2,-s}$ a basis of E such that $\Theta(u_1, u_m) = c \neq 0$ and $\mathcal{W} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ its Θ-dual basis. In particular, $u_1 \in \mathrm{Ker}_{L^{2,-s}}(Id + K_0)$ is a resonance state.

Let $\delta > 0$ small, we denote

$$\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+,\ |z| < \delta\}. \tag{3.3.16}$$

To calculate the singularity of $(I + K(z))^{-1}$ due to zero resonance, we must establish an asymptotic expansion of $E_{-+}(z)^{-1}$ by using the above Grushin problem with $\dim \mathrm{Ker}_{L^2,-s}(Id + K_0) = k = 1$.

First, let $\rho > \ell + 1$ with $\ell \in \mathbb{N}^*$. For $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$, introducing the expansions in $z^{1/2}$ of $R_0(z)$ and $E(z)$ at order ℓ given in (3.2.6) and (3.3.9) respectively, we obtain

$$E_{-+}(z) = N + \sqrt{z}A + \sum_{j=2}^{\ell} z^{j/2} E_{-+,j} + \widetilde{E}_{-+,\ell}(z), \tag{3.3.17}$$

where by Lemma 3.3.1 we observe that $N = -J_m$ and using $w_m = c^{-1}\,u_1$ we have

$$A := -i\Big(\langle G_1 V u_r, JV w_\ell\rangle\Big)_{1\le \ell, r\le m},$$
$$E_{-+,2} = \Big(\langle (G_2 V - G_1 V E_0 G_1 V) u_r, JV w_\ell\rangle\Big)_{1\le \ell, r\le m}.$$

In particular, the $(m, 1)$-th entry of the matrix A is non zero and is given by

$$a_{m1} = (ic)^{-1}\langle G_1 V u_1, JV u_1\rangle = (i4\pi\, c)^{-1}\langle u_1, JV1\rangle^2. \tag{3.3.18}$$

Moreover, the remainder $\widetilde{E}_{-+,\ell}(z)$ is a $\mathcal{C}^\ell$ matrix-valued function of z in Ω_δ satisfying

$$\|\frac{d^r}{dz^r}\widetilde{E}_{-+,\ell}(z)\| = o(|z|^{\frac{\ell}{2}-r}),\ r=0,1,\cdots,\ell,$$

for $z \in \Omega_\delta$. In addition, for $0<\lambda<\delta$ the limits

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i\epsilon) = \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i0) \tag{3.3.19}$$

exist and satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i0)\| = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2}-r}),\ r=0,1,\cdots,\ell. \tag{3.3.20}$$

Also, $E_{-+,j}, j=3,\cdots,\ell$ can be obtained explicitly but they become even more complicated. The condition $\rho>\ell+1$ is necessary to obtain the expansion of $E_{-+}(z)$ up to order $z^{\ell/2}$. Let us check this for some terms appearing in the computation of $E_{-+,\ell}$. We must obtain the terms $\langle G_\ell V u_r, JVw_l\rangle$ and $\langle G_\ell V E_0(Id+G_0V)u_r, JVw_l\rangle$. Consider $G_\ell V u_r$. We have $u_r \in \mathbb{H}^{1,-\frac{1}{2}-\epsilon}$, $0<\epsilon<1/2$, so $Vu_r \in \mathbb{H}^{-1,\rho-\frac{1}{2}-\epsilon}$ and $G_\ell V u_r \in \mathbb{H}^{1,-\ell-\frac{1}{2}-\epsilon}$ because $\rho-1/2>\ell+1/2$, where G_ℓ is given in (3.2.8)). Thus $\langle G_\ell V u_r, JVw_l\rangle$ makes sense since $Vw_l \in \mathbb{H}^{-1,\rho-\frac{1}{2}-\epsilon} \subset \mathbb{H}^{-1,\ell+\frac{1}{2}+\epsilon}$. Consider now $G_\ell V E_0(Id+G_0V)u_r$. $(Id+G_0V)u_r \in \mathbb{H}^{1,-\frac{1}{2}-\epsilon}$, so $E_0(Id+G_0V)u_r \in \mathbb{H}^{1,-\frac{1}{2}-\epsilon}$ (see (3.3.9)). Then $VE_0(Id+G_0V)u_r \in \mathbb{H}^{-1,\rho-\frac{1}{2}-\epsilon}$. To apply G_ℓ we must have $\rho-1/2>\ell+1/2$, and it maps to $\mathbb{H}^{1,-\ell-\frac{1}{2}-\epsilon}$. Thus, $\langle G_\ell V E_0(Id+G_0V)u_r, JVw_l\rangle$ makes sense for the same argument as before. For the properties of the remainder term $\widetilde{E}_{-+,\ell}(z)$, see the argument used for $E_\ell(z)$ in (3.3.9).

Set $e_{-+,1}(z) = N+\sqrt{z}A$. Then for $\rho>2$ and $z\in\Omega_\delta$, $\delta>0$, $E_{-+}(z) = e_{-+,1}(z) + o(|z|^{1/2})$. This yields to

$$\det\, E_{-+}(z) = \det\, e_{-+,1}(z) + o(\sqrt{z}) = \sqrt{z}\, a_{m1} + o(|z|^{1/2}) \tag{3.3.21}$$

where a_{m1} is the non-zero constant given in (3.3.18).

Proof of Theorem 3.2.1. It follows from the previous paragraph that $E_{-+,1}(z)$ is invertible for $z\in\Omega_\delta, \delta>0$ small, and we can easily check that

$$\begin{aligned} e_{-+,1}(z)^{-1} &= \frac{{}^tCom\, e_{-+,1}(z)}{\det\, e_{-+,1}(z)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}}\widetilde{F}^{(1)}_{-1} + \widetilde{F}^{(1)}_0 + \widetilde{e}_{-+,1}(z), \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

where

$$\widetilde{F}^{(1)}_{-1} = \frac{1}{a_{m1}}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}, \quad \widetilde{F}^{(1)}_0 = \frac{1}{a_{m1}}\begin{pmatrix} a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} & -\sum_{j=2}^m a_{jj+1} \\ a_{m1} & 0 & \cdots & 0 & a_{11} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m1} & a_{m-11} \end{pmatrix}_{m\times m},$$

and $\widetilde{e}_{-+,1}(z)$ is analytic in $z \in \Omega_\delta$ and continuous at $z = 0$.
Then, for $\rho > \ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq 2$ and $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, $E_{-+}(z)^{-1}$ exists, with

$$\begin{aligned} E_{-+}(z)^{-1} &= \Big[I + e_{-+,1}(z)^{-1}\Big(\sum_{j=2}^{\ell} z^{j/2}E_{-+,j} + \widetilde{E}_{-+,\ell}(z)\Big)\Big]^{-1} e_{-+,1}(z)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}}\widetilde{F}^{(1)}_{-1} + \sum_{j=0}^{\ell-2} z^{j/2}F^{(2)}_j + \widetilde{F}_{-+,\ell-2}(z) \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

where $\widetilde{F}^{(1)}_{-1}$ is the above matrix, $F^{(2)}_j$, $j = 1, \cdots, \ell-2$, can be computed explicitly. Moreover, for $0 < \lambda < \delta$ the limits of the remainder term $\widetilde{F}_{-+,\ell-2}(\lambda \pm i0)$ exist and satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{F}_{-+,\ell-2}(\lambda \pm i0)\| = o(|\lambda|^{\frac{l}{2}-1-r}),\ \lambda \in]0,\delta[, \quad r = 0, 1, \cdots, \ell-2. \tag{3.3.24}$$

Next, using the formula (3.3.15) we can verify that if $\ell - 1/2 < s < \rho - \ell + 1/2$, $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq 2$

$$(Id + R_0(z)V)^{-1} = \sum_{j=-1}^{\ell-2} z^{j/2}B^{(2)}_j + \widetilde{B}^{(2)}_{\ell-2}(z), \tag{3.3.25}$$

in $\mathbb{B}(1,-s,1,-s)$ where

$$B^{(2)}_{-1} = -S\widetilde{F}^{(1)}_{-1}T = -\frac{1}{c\,a_{m1}}\langle\cdot, JVu_1\rangle u_1$$

and the remainder $\widetilde{B}^{(2)}_{\ell-2}(z)$ is a $\mathcal{C}^\ell$-function from Ω_δ to $\mathbb{B}(1,-s,1,-s)$ such that for $0 < \lambda < \delta$ the limits $\widetilde{B}^{(2)}_{\ell-2}(\lambda \pm i0)$ exist and satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{B}^{(2)}_{\ell-2}(\lambda \pm i0)\|_{\mathbb{B}(1,-s,1,-s)} = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2}-1-r}),\ \lambda \in]0,\delta[, \quad r = 0, 1, \cdots, \ell-2. \tag{3.3.26}$$

In particular, if $\rho > 2$, then for $1/2 < s < \rho - 1/2$ and $z \in \Omega_\delta$ we can obtain

$$(Id + R_0(z)V)^{-1} = z^{-1/2}B^{(2)}_j + o(|z|^{-1/2}), \tag{3.3.27}$$

in $\mathbb{B}(1,-s,1,-s)$.

To make the above computation we introduce (3.3.23) in (3.3.15) together with the expansion (3.3.9) of $E(z)$ up to order $\ell-1$. We obtain the expansion of $E_+(z)E_{-+}(z)^{-1}E_-(z)$ up to order $\ell-2$ with remainder $o(|z|^{\frac{\ell-2}{2}})$ which requires the assumption $\ell - 1/2 < s < \rho - \ell + 1/2$. In addition, estimates (3.3.26) can be checked from (3.3.12) and (3.3.24).

Consequently, for $\rho > 2\ell + 3$ and $s > \ell + 3/2$, $\ell \in \mathbb{N}$, using the equation (3.2.4), (3.2.6) and (3.3.25), the expansion of $R(z)$ in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$, can be written as follows:

$$R(z) = \sum_{j=-1}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(2)} + \widetilde{R}_\ell^{(2)}(z),$$

where

$$\begin{aligned} R_{-1}^{(2)} &= -\frac{1}{c\, a_{m1}} \langle \cdot, JG_0 V u_1 \rangle u_1 \\ &= \frac{1}{c\, a_{m1}} \langle \cdot, J u_1 \rangle u_1 \\ &= i \frac{4\pi}{\langle u_1, JV1\rangle^2} \langle \cdot, J u_1 \rangle u_1. \end{aligned}$$

Finally, let

$$\phi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\langle u_1, JV1\rangle} u_1.$$

Then ϕ is a resonance state of H satisfying (3.2.17) and $R_{-1}^{(2)} = i\langle \cdot, J\phi\rangle\phi$. Moreover, the estimate (3.2.19) follows from (3.3.26). $\square$

3.3.3 Zero singularity of the second kind

In this case we assume that -1 is an eigenvalue of the operator K_0 on $L^{2,-s}$, $1/2 < s < \rho - 1/2$, with geometric multiplicity $k \geq 1$. Indeed the case $k = 1$ could be treated using the similar method used in [68] to study the situation of geometrically simple zero eigenvalue for a compactly supported perturbation of the non-selfadjoint Schrödinger operator $H_0 = -\Delta + V_0(x)$ with a slowly decreasing potential V_0. In the latter case, the matrix of $\Pi_1(Id + K_0)\Pi_1$ on $\operatorname{Ran}\Pi_1$ consists of one Jordan block. Therefore, the usual tools can be used to compute the singularity of the resolvent at threshold zero. This work is concerned with the more interesting case $k \geq 2$. Assume from now that $k \geq 2$. Let $\mathcal{U} = \cup_{j=1}^k \{u_1^{(j)}, \cdots, u_{m_j}^{(j)}\}$ and $\mathcal{W} = \cup_{j=1}^k \{w_1^{(j)}, \cdots, w_{m_j}^{(j)}\}$ be the basis constructed in Lemma 3.3.1. In particular $\{u_1^{(1)}, \cdots, u_1^{(k)}\}$ is a basis of $\operatorname{Ker}_{L^2}(Id + K_0)$.

In order to prove Theorem 3.2.2, we use the Grushin method introduced in Section 3.3.1 for arbitrary Jordan structure. We begin by computing the asymptotic expansion of the matrix $E_{-+}(z)$. To study this matrix we need to decompose it conformally with the block decomposition of the matrix J_m in (4.3.3). More precisely, using formula (3.3.14) and basis $\mathcal{U}_j$ and $\mathcal{W}_i$, we have

$$\begin{aligned} &E_{-+}(z) = \left(E_{-+}^{(ij)}(z)\right)_{1\leq i,j\leq k} \text{ with} \\ &E_{-+}^{(ij)}(z) = (\langle E_{-+}(z) u_r^{(j)}, JV w_l^{(i)}\rangle)_{1\leq l\leq m_i, 1\leq r\leq m_j}, \end{aligned}$$

where $E_{-+}^{(ij)}(z)$ denotes the $m_i \times m_j$ block entry of $E_{-+}(z)$ located in the same row as J_{m_i} and in the same column as J_{m_j}.

Thus, if $\rho > \ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq 3$, using (3.2.6), (3.3.9) and (3.3.14) we obtain the following expansion of $E_{-+}(z)$ for $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small:

$$E_{-+}(z) = e_{-+,2}(z) + \sum_{j=3}^{\ell} z^{j/2} E_{-+,j} + \widetilde{E}_{-+,\ell}(z), \tag{3.3.28}$$

where $e_{-+,2}^{(ij)}(z) = N^{(ij)} + z^{1/2} A^{(ij)} + z B^{(ij)}$, such that for all $1 \leq l \leq m_i$ and $1 \leq r \leq m_j$ we have

$$\begin{aligned} N_{lr}^{(ij)} &= -\langle (Id + G_0 V) u_r^{(j)}, JV w_l^{(i)} \rangle, \\ A_{lr}^{(ij)} &= -i \langle G_1 V u_r^{(j)}, JV w_l^{(i)} \rangle, \\ B_{lr}^{(ij)} &= \langle (G_2 V - G_1 V E_0 G_1 V) u_r^{(j)}, JV w_l^{(i)} \rangle, \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

also $E_{-+,n}^{(ij)}, n = 3, \cdots, \ell$, can be computed explicitly. Moreover, the remainder term $\widetilde{E}_{-+,\ell}(z)$ is a $\mathcal{C}^\ell$ matrix-valued function of z in Ω_δ and for $0 < \lambda < \delta$ the limits

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i\epsilon) = \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i0) \tag{3.3.30}$$

exist and satisfy

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda \pm i0)\| = o(|\lambda|^{\frac{\ell}{2} - r}),\ r = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{3.3.31}$$

We can further simplify the previous expression of the matrix $E_{-+,2}(z)$ as follows: $\forall 1 \leq j \leq k$, $u_1^{(j)} \in \ker(Id + K_0)$ implies that $N_{l1}^{(ij)} = 0, \forall 1 \leq l \leq m_i$, while for all $2 \leq r \leq m_j$, $N_{lr}^{(ij)} = -\langle u_{r-1}^{(j)}, JV w_l^{(i)} \rangle = -\delta_{lr-1}\delta_{ij}$ by (3.3.6). Moreover, since $w_{m_i}^{(i)} = c_i u_1^{(i)} \in L^2$ for some $c_i \neq 0$ (see Remark 3.3.3) then $G_1 V u_1^{(j)} = 0 = G_1 V w_{m_i}^{(i)}$, $\forall 1 \leq i, j \leq k$, by (3.2.10). This implies that $A_{l1}^{(ij)} = 0 = A_{m_i r}^{(ij)}, \forall 1 \leq l \leq m_i, 1 \leq r \leq m_j$.

Summing up, we obtain $e_{-+,2}(z) = N + z^{1/2} A + z B$, with

$$N^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\delta_{ij} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m_j \times m_j}, \tag{3.3.32}$$

$$A^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & \widetilde{A}^{(ij)} & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ B^{(ij)} = \begin{pmatrix} & & \widetilde{B}^{(ij)} & \\ & & & \\ \beta_{ij} & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ \forall 1 \leq i, j \leq k, \tag{3.3.33}$$

where by (3.3.41) and using the expansion $R_0(z) = G_0 + i\sqrt{z}\,G_1 - z\,G_2 + o(|z|)$ in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s')$ with $s, s' > 5/2$, we have

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \lim_{z\in\Omega_\delta, z\to 0} \frac{1}{z}\langle (Id + G_0V + i\sqrt{z}G_1V - Id - R_0(z)V)u_1^{(j)}, JVw_{m_i}^{(i)}\rangle \\ &= -\lim_{z\in\Omega_\delta, z\to 0} \frac{1}{z}\Big[\langle (Id + G_0V)u_1^{(j)}, JVw_{m_i}^{(i)}\rangle + z\langle G_0Vu_1^{(j)}, JR_0(z)Vw_{m_i}^{(i)}\rangle\Big] \\ &= -c_i^{-1}\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle, \quad \forall 1\le i,j\le k. \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Here we have used the resolvent equation $R_0(z) = G_0 + zR_0(z)G_0$ in addition to the fact that $(Id + G_0V)u_1^{(j)} = 0$ and $G_1Vu_1^{(j)} = 0$ since $u_1^{(j)} \in L^2$.

Unfortunately, we have found in (3.3.28) a block matrix $E_{-+}(z)$ of arbitrary block structure, where the usual methods of algebra are no longer practical to calculate its determinant and to explicitly develop its inverse matrix. To treat this matrix, we propose a method based on that of Lidskii developed in his original paper [44], and used latter in [47] for the problem of eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure.

Remarque 3.3.5. *Set*

$$\Phi_k = \Big(\beta_{ij}\Big)_{1\le i,j\le k} \qquad \textit{and} \qquad L_k = \Big(\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle\Big)_{1\le i,j\le k}, \tag{3.3.35}$$

where β_{ij} are the coefficients in (3.3.33). Then, it is seen from (3.3.34) and Remark 3.3.3 that

$$\Phi_k = -C_kL_k \text{ with } C_k = \mathit{diag}(c_1^{-1}, \cdots, c_k^{-1}). \tag{3.3.36}$$

Lemme 3.3.6. *Assume that $zero$ is a singularity of the second kind of H and that $(H1)$ holds. If $\rho > 3$, we have*

$$\mathit{det}\, E_{-+}(z) = \sigma z^k + O(|z|^{k+\epsilon}),\ \forall z \in \Omega_\delta,$$

for some $0 < \epsilon < 1/2$, where $\sigma = \sigma' \times \mathit{det}(\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle)_{1\le i,j\le k}$ with $\sigma' \in \mathbb{C}^*$ and $k = \mathit{dim}\ \mathit{Ker}(Id + K_0)$.

Proof. We begin by writing the expansion of the matrix $E_{-+}(z)$ in (3.3.28) as follows:

$$E_{-+}(\eta) = e_{-+,2}(\eta) + O(|\eta|^{2(1+\epsilon)}), \tag{3.3.37}$$

for some $0 < \epsilon < 1/2$. Let $Z(\eta) = \det e_{-+,2}(\eta)$. Then, we reduce the computation to that of $Z(\eta)$ close to $\eta = 0$. To do it we introduce the following diagonal matrix $L(\eta)$ partitioned conformally with the block structure of the matrix $E_{-+}(\eta)$:

$$L(\eta) = \mathrm{diag}\Big(L_1(\eta), \cdots, L_k(\eta)\Big),\ L_i(\eta) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, \eta^{-2}),\ 1 \le i \le k, \tag{3.3.38}$$

for $\eta \in \{z \in \mathbb{C}_+ : |z| < \delta\}$. We now define

$$\widetilde{e}_{-+,2}(\eta) = L(\eta) e_{-+,2}(\eta) \qquad \text{and} \qquad \widetilde{Z}(\eta) = \det \widetilde{e}_{-+,2}(\eta). \tag{3.3.39}$$

Then, by regularity of the matrix $L(\eta)$ for $\eta \neq 0$, we see that $\widetilde{Z}(\eta) = 0$ if and only if $Z(\eta) = 0$. Also, we can show that $\widetilde{Z}(\eta)$ is polynomial in η. Indeed, in view of (3.3.32), (3.3.33) and (4.3.19) it is easy to check that

$$\widetilde{e}_{-+,2}(\eta) = L(\eta)(N + \eta A + \eta^2 B) = N + \widetilde{A}(\eta) + \widetilde{B}(\eta), \tag{3.3.40}$$

where $\widetilde{A}(\eta) = \eta A$ and $\widetilde{B}(\eta)$ is defined as follows

$$\widetilde{B}^{(ij)}(\eta) = \begin{pmatrix} & & \eta^2 \widetilde{B}^{(ij)} & \\ & & & \\ \beta_{ij} & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \qquad \forall 1 \leq i, j \leq k. \tag{3.3.41}$$

This shows that there are no negative powers of η in $\widetilde{e}_{-+,2}(\eta)$. In particular, at $\eta = 0$ we have

$$\widetilde{e}^{(ij)}_{-+,2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & -\delta_{ij} \\ \beta_{ij} & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ \forall 1 \leq i, j \leq k. \tag{3.3.42}$$

Let us then calculate $\widetilde{Z}(0)$ which is the determinant of the above matrix. By expanding the determinant along the rows of $\widetilde{e}_{-+,2}(0)$ that are containing only -1, we obtain the following:

$$\widetilde{Z}(0) = \det \ (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, \tag{3.3.43}$$

(see proof of Theorem 2.1 in [47] for a specific example with 12×12 matrix that illustrates the strategy). Hence, there exist $\epsilon, \eta > 0$ small such that for $\eta \in \{z \in \mathbb{C}_+ : |z| < \delta\}$

$$\widetilde{Z}(\eta) = \widetilde{Z}(0) + O(|\eta|^{2\epsilon}) = \det \Phi_k + O(|\eta|^{2\epsilon}) \tag{3.3.44}$$

where $\Phi_k = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$. Then, it follows from (3.3.39) and (3.3.44) with $\det L(\eta) = \eta^{-2k}$ that

$$Z(\eta) = (\det L(\eta))^{-1} \widetilde{Z}(\eta) = \eta^{2k} \det \Phi_k + O(|\eta|^{2(k+\epsilon)}). \tag{3.3.45}$$

Finally, (3.3.37) with the previous equation implies that for $\eta \in \{\eta \in \mathbb{C}_+, \ |\eta| < \delta\}$

$$\det E_{-+}(\eta) = \eta^{2k} \det \Phi_k + O(|\eta|^{2(k+\epsilon)}),$$

where $\det(\Phi_k) = \sigma' \times \det(\langle u_1^j, J u_1^i \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$ with some $\sigma' \neq 0$ by Remark 3.3.5. $\square$

Now, we are able to prove Theorem 3.2.2.

Proof of Theorem 3.2.2. Firstly, it follows from Lemma 3.3.6 that $E_{-+}(z)^{-1}$ exists under the hypothesis $(H1)$. Then, we will show that for $\rho > \ell+1$, $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq 4$, and $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, the expansion of $E_{-+}(z)^{-1}$ has the following form :

$$E_{-+}(z)^{-1} = \sum_{j=-2}^{\ell-4} z^{j/2} F_j^{(2)} + \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(z), \tag{3.3.46}$$

where $F_{-2}^{(2)}$ is a matrix of rank k, whose blocks are of the form

$$(F_{-2}^{(2)})^{(ij)} = \frac{1}{\det \Phi_k} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \gamma_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ \forall 1 \leq i,j \leq k, \tag{3.3.47}$$

for some γ_{ij} that will be determined during this proof and the matrix $F_{-1}^{(2)} = -F_{-2}^{(2)} E_{-+,3} F_{-2}^{(2)}$ has rank at most k. Moreover, for $0 < \lambda < \delta$, the limits

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(\lambda \pm i\epsilon) = \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(\lambda \pm i0) \tag{3.3.48}$$

exist and satisfy

$$\| \frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(\lambda \pm i0) \| = o\left(|\lambda|^{\frac{\ell}{2}-2-r} \right), \ r = 0,1,\cdots,\ell-4. \tag{3.3.49}$$

In order to prove (3.3.46) we consider the same notations that we have just used in the previous proof. For $\Im \eta > 0$ and $|\eta| < \delta$ with $\delta > 0$ small, $\widetilde{E}_{-+,2}(\eta)$ can be developed in powers of η as follows:

$$\widetilde{e}_{-+,2}(\eta) = \widetilde{e}_{-+,2}(0) + \eta A + \eta^2 B_1 + o(|\eta|^2), \tag{3.3.50}$$

where $B_1 = B - \widetilde{B}(0)$ and the matrices A, B and $\widetilde{B}(0)$ are given in (3.3.33) and (3.3.41). In addition, $\widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1}$ exists by (3.3.43) under the hypothesis $(H1)$ with

$$\widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1} = \frac{{}^t Com\, \widetilde{e}_{-+,2}(0)}{\det \Phi_k} = F_{-2}^{(2)} + \mathcal{E}^{(2)}, \tag{3.3.51}$$

where $F_{-2}^{(2)}$ is the above matrix and $\mathcal{E}^{(2)}$ is a block matrix, with block entries of the form

$$(\mathcal{E}^{(2)})^{(ij)} = \frac{1}{\det \Phi_k} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ \widetilde{\alpha}_2^{(ij)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{\alpha}_{n_i}^{(ij)} & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j} \quad \forall 1 \leq i,j \leq k, \tag{3.3.52}$$

where $\widetilde{\alpha}_r^{(ij)} \in \mathbb{C}$ are minors of order $m-1$ of the matrix $\widetilde{e}_{-+,2}(0)$. In particular $\widetilde{\alpha}_r^{(ij)} = 0$ if $i \neq j$. Here, we have applied the same process used in the previous proof to calculate the minors of order $m-1$ of the matrix $\widetilde{e}_{-+,2}(0)$. For the rest of this proof we need to give more precision on the coefficients γ_{ij} of the above matrix $F_{-2}^{(2)}$. Let $|[M]_i^j|$:=det $[M]_i^j$ denote the minors of a matrix M, where $[M]_i^j$ are the resulting matrices when the i-th row and the j-th column of M are deleted. Then

$$\gamma_{ij} =(-1)^{\mu_{ij}}|[\widetilde{e}_{-+,2}(0)]_{m_1+\cdots+m_j}^{1+m_1+\cdots+m_{i-1}}|,\ \mu_{ij} = 1+\sum_{l=1}^{i-1} m_l + \sum_{r=1}^{j} m_r \tag{3.3.53}$$

for $1 \leq i,j \leq k$. Then, for $\eta \in \{\eta \in \mathbb{C}_+; |\eta| < \delta\}$ with δ small enough $\widetilde{e}_{-+,2}(\eta)$ in (3.3.50) is invertible, as well as $e_{-+,2}(\eta)$ with $e_{-+,2}(\eta)^{-1} = \widetilde{e}_{-+,2}(\eta)^{-1}L(\eta)$. More precisely, $\forall \eta \in \mathbb{C}_+,\ |\eta| < \delta$, using (3.3.39) we obtain

$$\begin{aligned} e_{-+,2}(\eta)^{-1} &= \Big[\widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1} - \eta\,\mathcal{E}^{(2)} A \mathcal{E}^{(2)} - \eta^2\,\mathcal{E}^{(2)} B_1 \widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1} + o(|\eta|^2)\Big] L(\eta) \\ &= \frac{F_{-2}^{(2)}}{\eta^2} + F_0^{(2)} + O(\eta). \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

Here $F_0^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(2)} B_1 F_{-2}^{(2)}$, where we can check that

$\eta\,\mathcal{E}^{(2)} A \mathcal{E}^{(2)} L(\eta) = \eta\,\mathcal{E}^{(2)} A \mathcal{E}^{(2)}$ and $\eta^2 \mathcal{E}^{(2)} B_1 \widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1} L(\eta) = \mathcal{E}^{(2)} B_1 F_{-2}^{(2)} + \eta^2\,\mathcal{E}^{(2)} B_1 \mathcal{E}^{(2)}$.

Let $\widetilde{E}_{-+}(\eta) = E_{-+}(\eta) - e_{-+,2}(\eta)$. For $\eta \in \{\eta \in \mathbb{C}_+,\ |\eta| < \delta\}$, we see that $\|e_{-+,2}(\eta)^{-1}\widetilde{E}_{-+}(\eta)\| = O(|\eta|)$. Consequently, we deduce from (3.3.28) and (3.3.54) that $E_{-+}(\eta)^{-1}$ exists for $\Im\eta > 0$ and $|\eta| < \delta$, $\delta > 0$ small enough, with

$$E_{-+}(\eta)^{-1} = \frac{F_{-2}^{(2)}}{\eta^2} - \frac{F_{-2}^{(2)} E_{-+,3} F_{-2}^{(2)}}{\eta} - F_0^{(2)} - F_{-2}^{(2)} E_{-+,4} F_{-2}^{(2)} + \sum_{j=1}^{\ell-4} \eta^j F_j^{(2)} + \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(\eta), \tag{3.3.55}$$

where the estimates (3.3.49) follow from (3.3.31). See the proof of (3.3.30) for (3.3.48).

To complete the proof of (3.3.46) it remains to prove that $F_{-2}^{(2)}$ has rank k. We shall show that

$$\Gamma_k := (\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq k} = (\det\ \Phi_k)\Phi_k^{-1}. \tag{3.3.56}$$

Indeed, by (3.3.53) we can check that

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} (-1)^{\mu_{ij}}(-1)^{m_i-1+\cdots+m_j-1}|[\Phi_k]_j^i| & \text{if} \quad i<j, \\ (-1)^{\mu_{ij}}(-1)^{m_i-1}|[\Phi_k]_i^i| & \text{if} \quad i=j, \\ (-1)^{\mu_{ij}}|[\Phi_k]_j^i| & \text{if} \quad i=j+1, \\ (-1)^{\mu_{ij}}(-1)^{m_{j+1}-1+\cdots+m_{i-1}-1}|[\Phi_k]_j^i| & \text{if} \quad i>j+1, \end{cases} \tag{3.3.57}$$

where $|[\Phi_k]_j^i|$ is the (j,i)-th minor of the invertible matrix Φ_k defined in (3.3.35). Substituting the values of μ_{ij} given in (3.3.53) yields

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}|[\Phi_k]_j^i|,$$

which is the (j,i)-th cofactor of the matrix Φ_k for all $1 \le i, j \le k$.

Secondly, if $\ell - 3/2 < s < \rho - \ell + 3/2$, we obtain the expansion of $(I + R_0(\eta^2)V)^{-1}$ up to order $\ell - 4$ with remainder $o(|\eta|^{\ell-4})$ in $\mathcal{B}(L^{2,-s})$ by using the formula (3.3.15), the expansion (3.3.9) up to order $\ell - 2$ and the expansion of $E_{-+}^{-1}(\eta)$ in (3.3.55).

In particular, if $\rho > 3$, then for $1/2 < s < \rho - 1/2$ and $z \in \Omega_\delta$ we have in $\mathbb{B}(1, -s, 1, -s)$ the expansion

$$(Id + R_0(z)V)^{-1} = -\frac{SF_{-2}^{(2)}T}{z} + o(|z|^{-1}). \tag{3.3.58}$$

Finally, assume $\rho > 2\ell + 5$ and let $s > \ell + 5/2$. Using the identity $R(z) = (Id + R_0(z)V)^{-1}R_0(z)$, the expansion in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ of the resolvent has the following form:

$$R(z) = \sum_{j=-2}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(2)} + R_\ell^{(2)}(z), \tag{3.3.59}$$

where $R_{-1}^{(2)} = -SF_{-1}^{(2)}TG_0$, $R_0^{(2)} = E_0G_0 + SF_{-2}^{(2)}TG_2 - SF_0^{(2)}TG_0$, such that S, T and $F_s^{(2)}$, $s = -2, -1, 0$ are given in (3.3.8) and (3.3.46), respectively. Also for $f \in \mathbb{H}^{-1,s}$

$$\begin{aligned} R_{-2}^{(2)} f &= -SF_{-2}^{(2)}TG_0 f \\ &= \frac{-1}{\det \Phi_k} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} \langle f, JG_0Vw_{m_j}^{(j)}\rangle u_1^{(i)} \\ &= \frac{1}{\det \Phi_k} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_j^{-1}\gamma_{ij} \langle f, Ju_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle f, Jv_i\rangle u_1^{(i)}, \end{aligned} \tag{3.3.60}$$

with $v_i = \dfrac{1}{\det \phi_k} \sum_{j=1}^{k} c_j^{-1}\gamma_{ij}u_1^{(j)}$, for all $1 \le i \le k$.

Set

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_k = (\gamma_{ij})_{1 \le i,j \le k}.$$

Then, we have

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\det \Phi_k} \Gamma_k C_k \mathcal{U}. \tag{3.3.61}$$

Thus, using (3.3.56) we obtain

$$\mathcal{V} = \Phi_k^{-1} C_k \mathcal{U} = -(C_k L_k)^{-1} C_k \mathcal{U} = -L_k^{-1}\mathcal{U} = -\,{}^tQQ\mathcal{U}, \tag{3.3.62}$$

where $C_k = \mathrm{diag}(c_1^{-1}, \cdots, c_k^{-1})$, $L_k = (\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle)_{1\le i,j\le k}$ is an invertible complex symmetric matrix with (3.3.36) and $Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le k}$ is the upper triangular matrix obtained by the Cholesky decomposition of the matrix L_k^{-1} (cf. [56, Proposition 25]). Thus by returning to (3.3.60), we get

$$R_{-2}^{(2)} f = -\sum_{i,j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{k} q_{\ell i} q_{\ell j}\langle f, Ju_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} = -\mathcal{P}_0^{(2)} f$$

where

$$\mathcal{P}_0^{(2)} = \sum_{\ell=1}^{k}\langle\cdot, J\mathcal{Z}_\ell^{(2)}\rangle \mathcal{Z}_\ell^{(2)} \text{ with } \mathcal{Z}_\ell^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} q_{\ell i} u_1^{(i)}.$$

In particular, the operator $\mathcal{P}_0^{(2)}$ is a projection of rank k since for all $1 \le i, j \le k$ we have

$$\langle \mathcal{Z}_i^{(2)}, J\mathcal{Z}_j^{(2)}\rangle = \sum_{\ell,m}^{k} q_{i\ell} q_{jm}\langle u_1^{(\ell)}, Ju_1^{(m)}\rangle = \sum_{l=1}^{k} q_{i\ell}(QL_k)_{j\ell} = (QL_k\,{}^tQ)_{ji} = \delta_{ij}.$$

Moreover, other terms $R_j^{(2)}$, $j = 1, \cdots, \ell - 4$, can be obtained explicitly. Finally, the estimate (3.2.21) can be seen from (3.3.12) and (3.3.49), also (3.2.18) follows from (3.2.5), (3.3.11) and (3.3.48). □

3.3.4 Zero singularity of the third kind

In this section we discuss the case when zero is both an embedded eigenvalue and a resonance of H. We assume that the eigenvalue zero has geometric multiplicity $k-1$, $k \in \mathbb{N}$ with $k \ge 2$. In this case, we have $\dim \ker_{L^{2,-s}}(Id + K_0) = k$ and $\dim \ker_{L^{2,-s}}(Id + K_0)/\ker_{L^2}(Id + K_0) = 1$. Set $m = \mathrm{rank}\,\Pi_1$. Let $\mathcal{V}_i = \{v_1^{(i)}, \cdots, v_{m_i}^{(i)}\}$ be a basis of E_i and $\mathcal{X}_i = \{\chi_1^{(i)}, \cdots, \chi_{m_i}^{(i)}\}$ be its Θ-dual basis (see Lemma 3.3.1). Under the hypothesis $(H2)$ one can consider that $\mathrm{Ker}_{L^{2,-s}}(Id + K_0)/\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0) = \mathrm{Span}\{v_1^{(1)}\}$ and $\mathrm{Ker}_{L^2}(Id + K_0) = \mathrm{Span}\{v_1^{(2)}, \cdots, v_1^{(k)}\}$. This means that the matrix of $\Pi_1(Id + K_0)\Pi_1$ in the basis $\mathcal{X}$ is a $k \times k$ block diagonal matrix with Jordan block on the diagonal such that only the first Jordan block corresponds to the resonant state and the other blocks correspond to the eigenvectors that are the solutions in L^2 of $(Id + K_0)g = 0$.

Since -1 is an eigenvalue of the operator K_0 of geometric multiplicity $k \ge 1$, the same computations made to develop $E_{-+}(z)^{-1}$ in Section 3.3.3 can be done here with a slight difference. Indeed, (3.3.28) holds with some difference in the block entries of the matrix A as follows:

$$A_{m_i 1}^{(ij)} = -i\langle G_1 V v_1^{(j)}, JV\chi_{m_i}^{(i)}\rangle = (i4\pi c_i)^{-1}\langle v_1^{(i)}, JV1\rangle\langle v_1^{(j)}, JV1\rangle$$

do vanish for all i, j except that for $i = j = 1$ (see (3.2.10)), so we have

$$A^{(11)} = \begin{pmatrix} * & & & \\ \vdots & & \widetilde{A}^{(11)} & \\ * & & & \\ a & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_1 \times m_1}, \quad a = (i4\pi c_1)^{-1} \langle v_1^{(1)}, JV1 \rangle^2 \neq 0, \tag{3.3.63}$$

$A^{(i1)}$, $i = 2 \cdots, k$, (resp., $A^{(1j)}$, $j = 2, \cdots, k$) are sub-matrices with last row zero (resp., first column), and

$$A^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A}^{(ij)} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \quad \forall 2 \leq i, j \leq k.$$

We now check the invertibility of $E_{-+}(z)$ by following the same steps as before. We define

$$\Phi_{k-1} = (b_{ij})_{2 \leq i,j \leq k}.$$

Here $b_{ij} := -c_i \langle v_1^{(j)}, v_1^{(i)} \rangle$, $2 \leq i, j \leq k$, are computed in the same way as coefficients β_{ij} given in (3.3.34)). Let

$$L_{k-1} = (\langle v_1^{(j)}, Jv_1^{(i)} \rangle)_{2 \leq i,j \leq k}.$$

Then, we have

$$\Phi_{k-1} = -C_{k-1} L_{k-1} \text{ with } \quad C_{k-1} = \text{diag}(c_2^{-1}, \cdots, c_k^{-1}). \tag{3.3.64}$$

Lemme 3.3.7. *Assume $\rho > 3$. Suppose that $zero$ is a singularity of the third kind of H such that the eigenvalue zero has geometric multiplicity $k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ with $k \geq 2$. We assume in addition that $(H2)$ holds. Then*

$$\det\, E_{-+}(z) = \sigma_k \, z^{k-1/2} + o(|z|^{k-1/2}), \tag{3.3.65}$$

for $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, where $\sigma_k = a \times \det\, \Phi_{k-1} \neq 0$ with a is the constant given in (3.3.63).

Proof. We proceed in the same way as in the proof of Lemma 3.3.6. To avoid repetition we omit details. First, we define

$$e_{-+,2}(\eta) = N + \eta A + \eta^2 B, \; Z(\eta) = \det\, e_{-+,2}(\eta), \tag{3.3.66}$$

for $\Im\eta > 0$ and $|\eta| < \delta$. Now, we introduce the matrix

$$\widetilde{L}(\eta) = \text{diag}(\widetilde{L}_1(\eta), \cdots, \widetilde{L}_k(\eta))$$

with

$$\widetilde{L}_1(\eta) = \text{diag}(1, \cdots, 1, \eta^{-1}) \text{ and } \widetilde{L}_i(\eta) = \text{diag}(1, \cdots, 1, \eta^{-2}),\ i = 2, \cdots, k.$$

We denote

$$\widetilde{e}_{-+,2}(\eta) = \widetilde{L}(\eta)\, e_{-+,2}(\eta) = N + \widetilde{A}(\eta) + \widetilde{B}(\eta) \text{ and } \widetilde{Z}(\eta) = \det\, \widetilde{e}_{-+,2}(\eta). \tag{3.3.67}$$

Then, we can easily verify that

$$\text{(i)}\ \ \widetilde{A}^{(ij)}(\eta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a\,\delta_{ij} & * & \cdots & * \end{pmatrix} + O(|\eta|) & if \quad i = 1, 1 \le j \le k, \\ \\ \qquad O(|\eta|) & if \quad 2 \le i \le k, 1 \le j \le k. \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \ \widetilde{B}^{(ij)}(\eta)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{ij} & * & \cdots & * \end{pmatrix} + O(|\eta|^2) & if \quad 2 \le i \le k,\ 1 \le j \le k, \\ \\ \qquad O(|\eta|) & if \quad i = 1, 1 \le j \le k. \end{cases}$$

Let us calculate $\widetilde{Z}(0)$. According to (i) and (ii), the block entries $\widetilde{e}^{(ij)}_{-+,2}(0)$, $1 \le i, j \le k$, of the block matrix $\widetilde{e}_{-+,2}(0)$ have the following forms

$$\widetilde{e}^{(1j)}_{-+,2}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & -\delta_{1j} \\ a\delta_{1j} & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m_1 \times m_j}, \ 1 \le j \le k, \tag{3.3.68}$$

$$\widetilde{e}^{(ij)}_{-+,2}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & -\delta_{ij} \\ b_{ij} & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ 2 \le i \le k, 1 \le j \le k \tag{3.3.69}$$

This yields

$$\widetilde{Z}(0) = det \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} = a \times \det(b_{ij})_{2 \le i,j \le k} = a \times \det \Phi_{k-1}.$$

Thus $\widetilde{Z}(0) \neq 0$ since $a \neq 0$ and in view of (3.3.64) $\det\Phi_{k-1}$ does not vanish if the condition (2) of (H2) is satisfied. Finally, using $\det L(\eta) = \eta^{-2k+1}$, we obtain

$$\det\, E_{-+}(\eta) = \det\, e_{-+,2}(\eta) + o(|\eta|^{2k-1}) = (a \times \det\, \Phi_{k-1})\, \eta^{2k-1} + o(|\eta|^{2k-1}).$$

□

Lemme 3.3.8. *Let $\rho > \ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq 4$. Assume that the hypotheses in the previous lemma hold. Then*

$$E_{-+}(z)^{-1} = \sum_{j=-2}^{\ell-4} z^{j/2} F_j^{(3)} + \widetilde{F}_{-+,\ell-4}(z), \tag{3.3.70}$$

for $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, where $F_{-2}^{(3)}$ is a matrix of rank $k-1$ with

$$(F_{-2}^{(3)})^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 1 \leq i, j \leq k, \tag{3.3.71}$$

such that $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq k$, and $F_{-1}^{(3)}$ is a matrix of rank at most k, where

$$(F_{-1}^{(3)})^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k, \tag{3.3.72}$$

such that $\mu_{11} = \alpha_{11} = a^{-1}$ and $\mu_{1j} = 0$ for $j = 2, \cdots, k$. Moreover, the remainder term $\widetilde{F}_{-+,\ell-4}(z)$ satisfies (3.3.48) and the estimates (3.3.49).

Proof. We have showed in the proof of Lemma 3.3.7 that $\det \widetilde{e}_{-+,2}(0)$ is non zero if $(H2)$ is satisfied. Then, $\widetilde{e}_{-+,2}(0)$ is invertible with inverse

$$\widetilde{e}_{-+,2}(0)^{-1} = \frac{{}^t Com\, \widetilde{e}_{-+,2}(0)}{\det\, \widetilde{e}_{-+,2}(0)} = \widetilde{F}_{-2}^{(3)} + \mathcal{E}^{(3)}, \tag{3.3.73}$$

where

$$(\widetilde{F}_{-2}^{(3)})^{(ij)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & , \quad i = j = 1 \text{ or } 2 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & , \quad i = 1, 2 \leq j \leq k. \end{cases}$$

In particular $\alpha_{11} = a^{-1}$. The matrix $\mathcal{E}^{(3)}$ has the same form as $\mathcal{E}^{(2)}$ in (3.3.51).

On the other hand, for $\Im\eta > 0, |\eta| < \delta$ with $\delta > 0$ small, the matrix $\widetilde{e}_{-+,2}(\eta)$ can be developed as follows:

$$\widetilde{e}_{-+,2}(\eta) = \widetilde{e}_{-+,2}(0) + \eta\, \widetilde{e}^{(1)}_{-+,2}(0) + O(|\eta|^2), \tag{3.3.74}$$

where the $m_i \times m_j$ block entries of $\widetilde{e}^{(1)}_{-+,2}(0)$ have the following form:

$$(\widetilde{e}^{(1)}_{-+,2}(0))^{(ij)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} * & & & \\ \vdots & & \widetilde{A}^{(1j)} & \\ * & & & \\ b_{1j} & * & \cdots & * \end{pmatrix}, & i = 1,\, 1 \le j \le k, \\ \\ \begin{pmatrix} * & & & \\ \vdots & & \widetilde{A}^{(ij)} & \\ * & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & 2 \le i \le k, 1 \le j \le k. \end{cases} \tag{3.3.75}$$

Then, it follows from (3.3.28), (3.3.67), (3.3.73) and the regularity of $L(\eta)$ that for $\Im\eta > 0$ and $|\eta| < \delta$, $\delta > 0$ small enough, $e_{-+,2}(\eta)^{-1}$ exists with

$$e_{-+,2}(\eta)^{-1} = \frac{F^{(3)}_{-2}}{\eta^2} + \frac{F^{(3)}_{-1}}{\eta} + O(1), \tag{3.3.76}$$

where $(F^{(3)}_{-2})^{(ij)} = (\widetilde{F}^{(3)}_{-2})^{(ij)}$ if $2 \le i, j \le k$ and $(\widetilde{F}^{(3)}_{-2})^{(ij)} = 0$ elsewhere. Also, $F^{(3)}_{-1} = \widetilde{F}^{(3)}_{-2} - F^{(3)}_{-2} - \widetilde{F}^{(3)}_{-2}\widetilde{e}^{(1)}_{-+,2}(0)\widetilde{F}^{(3)}_{-2}$.

The rest of the proof follows directly from (3.3.28) and (3.3.76). Moreover, the same argument used to prove that the matrix $F^{(2)}_{-2}$ in (3.3.46) is of rank k can be applied to the matrix $F^{(3)}_{-2}$ to show that it has rank $k-1$, unless in the present case we show that $(\alpha_{ij})_{2\le i,j\le k}$ is a $(k-1)\times(k-1)$ invertible matrix. Indeed, we can check that

$$\alpha_{ij} = (\det \Phi_{k-1})^{-1}\,(-1)^{i+j} \times |(\Phi_{k-1})^{i-1}_{j-1}|,\ \forall 2 \le i, j \le k,$$

which denotes the $(i-1, j-1)$-th entry of the invertible matrix Φ_{k-1} given in (see (3.3.64)). Thus

$$(\alpha_{ij})_{2\le i,j\le k} = \Phi^{-1}_{k-1}. \tag{3.3.77}$$

□

We end this section by proving Theorem 3.2.3.

Proof of Theorem 3.2.3. Since the proof of Theorem 3.2.2 can be done here, we will omit details. Using the asymptotic expansion of $E_{-+}(z)^{-1}$ established in the previous lemma, for $\rho > 2\ell + 5, s > \ell + 5/2$ and $z \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$ small, the expansion of $R(z)$ in $\mathbb{B}(-1, s, 1, -s)$ is written

$$R(z) = -\frac{\mathcal{P}_0^{(3)}}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\Big\{i\langle\cdot, J\psi\rangle\psi + \sum_{i=2}^{k}\langle\cdot, JY_i^{(3)}\rangle v_1^{(i)}\Big\}$$
$$+ \sum_{j=0}^{\ell} z^{j/2} R_j^{(3)} + \widetilde{R}_\ell^{(3)}(z),$$

where, by the help of the matrices defined in (3.3.64) and (3.3.77), we have

$$\mathcal{P}_0^{(3)} = \sum_{i=2}^{k}\langle\cdot, J\mathcal{Z}_i^{(3)}\rangle\mathcal{Z}_i^{(3)},$$
$$\mathcal{Z}_i^{(3)} = \sum_{j=2}^{k} q_{ij} v_1^{(j)}, \text{ with } \langle\mathcal{Z}_i^{(3)}, J\mathcal{Z}_j^{(3)}\rangle = \delta_{ij},\ \forall 2 \le i, j \le k,$$

with $Q_{k-1} := (q_{ij})_{2\le i,j\le k}$ is such that $L_{k-1}^{-1} = {}^tQ_{k-1}Q_{k-1}$. In addition

$$\psi = (-ic_1^{-1}\mu_{11})^{1/2} v_1^{(1)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\langle v_1^{(1)}, JV1\rangle} v_1^{(1)}, \text{ and}$$
$$Y_i^{(3)} = -\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}G_0V\chi_{m_j}^{(j)} - \sum_{j=2}^{k} i\alpha_{ij}G_1V\chi_{m_j}^{(j)} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{-1}\mu_{ij}v_1^{(j)},\ i = 1, \cdots, k,$$

where α_{ij} and μ_{ij} are respectively entries of the matrices $F_{-2}^{(3)}$ and $F_{-1}^{(3)}$ given in (3.3.71) and (3.3.72). Here we used $G_1V\chi_{m_j}^{(j)} = 0$ for $j = 2, \cdots, k$ (see Remark 3.3.3 and (3.2.10)) and $G_0Vv_1^{(j)} = -v_1^{(j)}$, $\forall 1 \le j \le k$. Set $S_{-1}^{(3)} = \sum_{i=2}^{k}\langle\cdot, JY_i^{(3)}\rangle v_1^{(i)}$. Thus the resolvent expansion in (3.2.22) is proved. Moreover, we refer to the proof of Theorem 3.2.2 for the properties of the remainder term $\widetilde{R}_\ell^{(3)}(z)$. □

3.4 Resolvent expansions near positive resonances

In this section, we prove Theorem 3.2.4. First, we use hypothesis $(H3)$ to establish the asymptotic expansion of the resolvent $R(z) = (H - zId)^{-1}$ near a fixed outgoing positive resonance. Note that the study of incoming positive resonance can be done in a similar way.

Let $\lambda_0 \in \sigma_r^+(H)$ be isolated, for $\delta > 0$ we denote

$$\Omega_\delta^+ := \{z \in \mathbb{C}_+ :\ |z - \lambda_0| < \delta\} \text{ and } \overline{\Omega}_\delta^+ := \{z \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |z - \lambda_0| < \delta\}.$$

Let us begin with the known results on the behavior of the resolvent $R_0(z)$ near the real half-axis $]0, +\infty[$. Taking the analytic continuation of the integral kernel $R_0(z)(x, y)$ to

$\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$, the expansion of $R_0(z)$ at order r, for every $r \in \mathbb{N}$ and for $z \in \Omega_\delta^+$ with $\delta > 0$, is written

$$R_0(z) = \sum_{j=0}^{r} (z-\lambda_0)^j G_j^+ + o(|z-\lambda_0|^r), \tag{3.4.1}$$

where

$$G_0^+ : \mathbb{H}^{-1,s} \longrightarrow \mathbb{H}^{1,-s'}; \quad s, s' > 1/2, \tag{3.4.2}$$

$$G_j^+ : \mathbb{H}^{-1,s} \longrightarrow \mathbb{H}^{1,-s'}; \quad s, s' > j + 1/2, \ j = 1, \cdots, r, \tag{3.4.3}$$

are integral operators with corresponding kernels

$$r_j^+(x,y,\lambda_0) := \lim_{z \to \lambda_0, z \in \mathbb{C}_+} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \frac{e^{+i\sqrt{z}|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \ j = 0, 1, \cdots, r.$$

For simplicity, we will use in the following the variable $\xi = z - \lambda_0$. We denote by $R_0(\lambda + i0)$ the boundary value of $R_0(z)$.

Let λ_0 be an outgoing positive resonance of the operator $H = -\Delta + V$. Note that the two subspaces Ker$(Id + K^+(\lambda_0))$ and $\mathrm{Ker}^+_{\mathbb{H}^{1,-s}}(H - \lambda_0) := \{\psi \in \mathbb{H}^{1,-s}, \ H\psi = \lambda_0\psi; \ \psi$ satisfies the radiation condition (3.1.3) with sign + $\}$ coincide in $\mathbb{H}^{1,-s}$, $1/2 < s < \rho - 1/2$ (see Section 3.2.1). Denote dim Ker$(Id + K^+(\lambda_0)) = N_0$. Let $\Pi_1^{\lambda_0}$ be the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of the operator $K^+(\lambda_0)$

$$\Pi_1^{\lambda_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w+1|=\epsilon} (w - K^+(\lambda_0))^{-1} dw, \ \epsilon > 0,$$

we also denote $E_{\lambda_0}^+ = \mathrm{Ran}\, \Pi_1^{\lambda_0}$ and $m = \mathrm{rank}\, \Pi_1^{\lambda_0}$.

The same strategy used in Section 3.3 to prove Theorems 3.2.2 and 3.2.3 will be followed in this section. First, note that the decomposition made in Lemma 3.3.1 works for $E_{\lambda_0}^+$ in the present case, where we denoted by E_j^+ the invariant subspaces of $K^+(\lambda_0)$ given in (1). Let $\mathcal{U}_j(\lambda_0) = \{u_1^{(\lambda_0,j)}, \cdots, u_{m_j}^{(\lambda_0,j)}\}$ denotes the basis of E_j^+ given in Lemma 3.3.1(2.) and $\mathcal{W}_j(\lambda_0) = \{w_1^{(\lambda_0,j)}, \cdots, w_{m_j}^{(\lambda_0,j)}\}$ its dual with respect to the non degenerate bilinear form Θ. In particular, Ker$(Id + K^+(\lambda_0))$ is the subspace of $L^{2,-s}$ generalized by $\{u_1^{(\lambda_0,1)}, \cdots, u_1^{(\lambda_0,N_0)}\}$. Then, we will study the Grushin problem that we have constructed in Section 3.3.3 for the operator $Id + K(z)$.

For the proof of the theorem we start by the following lemma, where we refer to Section 3.3.3 for details.

Lemme 3.4.1. *For $\rho > \ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$ and $z \in \Omega_\delta^+, \delta > 0$ small, we have the following expansion of $E_{-+}(z)$:*

$$E_{-+}(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (z-\lambda_0)^j E_{-+,j}(\lambda_0) + \widetilde{E}_{-+,\ell}(z-\lambda_0). \tag{3.4.4}$$

where $E_{-+,0}(\lambda_0)$ has the same form as the block matrix N defined in (3.3.32) and

$$E^{(ij)}_{-+,1}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} & & \widetilde{A}^{(ij)}(\lambda_0) & \\ & & & \\ a_{ij}(\lambda_0) & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \ \forall 1 \leq i,j \leq N_0, \tag{3.4.5}$$

where

$$\begin{aligned} a_{ij}(\lambda_0) &= -\langle G_1^+ V u_1^{(\lambda_0,j)}, JVw_{m_i}^{(\lambda_0,i)}\rangle \\ &= \frac{1}{i8\pi\sqrt{\lambda_0}c_i(\lambda_0)} \int_{\mathbb{R}^6} e^{+i\sqrt{\lambda_0}|x-y|} V(x) u_1^{(\lambda_0,i)}(x) V(y) u_1^{(\lambda_0,j)}(y)\, dxdy, \end{aligned}$$

such that $c_i(\lambda_0) \neq 0$ by Remark 3.3.3 and G_1^+ is the integral operator defined in (3.4.3). Moreover $\widetilde{E}_{-+,\ell}(z-\lambda_0)$ is analytic in Ω_δ^+ and for $\lambda > 0$ with $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ the limit $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda - \lambda_0 + i\epsilon)$ exists and satisfies

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{E}_{-+,\ell}(\lambda - \lambda_0 + i0)\| = o(|\lambda-\lambda_0|^{\ell - r}), \qquad r = 0, 1, \cdots, \ell.$$

The expansion (4.4.8) can be obtained directly by introducing in (3.3.14) the expansion (3.4.1) of $R_0(z)$ in $\mathbb{B}(0,s,0,-s)$ (see Section 3.3.3 for more details).

Before proving Theorem 3.2.4, we establish the expansion of $E_{-+}(z)^{-1}$. Assume that the hypothesis $(H3)$ holds. We introduce the block diagonal matrix

$$\mathcal{L}(\xi) = \text{diag}(\mathcal{L}_1(\xi), \cdots, \mathcal{L}_{N_0}(\xi)), \ \mathcal{L}_i(\xi) = \text{diag}(1, \cdots, 1, \xi^{-1}), \ \forall 1 \leq i \leq N_0, \tag{3.4.6}$$

for $\xi \in \{\xi \in \mathbb{C}_+, |\xi| < \delta\}$. If $\rho > 2$, then by proceeding in the same way as in the proof of Lemma 3.3.6 we obtain

$$\det\left(E_{-+,0}(\lambda_0) + \xi E_{-+,1}(\lambda_0)\right) = \xi^{N_0} \det\left(a_{ij}(\lambda_0)\right)_{1 \leq i,j \leq N_0} + O(|\xi|^{N_0+1}), \tag{3.4.7}$$

where $a_{ij}(\lambda_0)$, $1 \leq i,j \leq N_0$, are given above and $N_0 = \dim\ker(Id + K^+(\lambda_0))$. It follows that, if the condition (3.2.13) is satisfied, then (4.4.8) together with (3.4.7) gives

Proposition 3.4.2. *If $\rho > \ell + 2$, $\ell \in \mathbb{N}$, we have*

$$\det\ E_{-+}(z) = \sum_{j=0}^{\ell} a_j(\lambda_0)(z-\lambda_0)^{N_0+j} + o(|z-\lambda_0|^{N_0+\ell}),$$

for $z \in \Omega_\delta^+$, where $a_0(\lambda_0) = \det\left(a_{ij}(\lambda_0)\right)_{1 \leq i,j \leq N_0} \neq 0$.

Since $e_{-+,1}(\xi,\lambda_0) := E_{-+,0}(\lambda_0) + \xi E_{-+,1}(\lambda_0)$ has the same form as $e_{-+,2}(\xi)$ defined in the proof of Theorem 3.2.2, then the same computation can be done here. We obtain

$$e_{-+,1}(\xi,\lambda_0)^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{Com}\, e_{-+,1}(\xi,\lambda_0)}{\det\, e_{-+,1}(\xi,\lambda_0)} = \frac{1}{\xi}F_{-1}(\lambda_0) + F_0(\lambda_0) + \widetilde{e}_{-+,1}(\xi,\lambda_0), \tag{3.4.8}$$

where $F_{-1}(\lambda_0)$ is a $N_0 \times N_0$ block matrix of rank N_0 with block entries

$$F_{-1}^{(ij)}(\lambda_0) = \frac{1}{a_0(\lambda_0)} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{ij}(\lambda_0) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j} \tag{3.4.9}$$

such that $b_{ij}(\lambda_0)$ are the (j,i)-th cofactors of the invertible matrix $(a_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le N_0}$ (see Remark 3.3.57). Moreover, the remainder $\widetilde{e}_{-+,1}(\xi,\lambda_0)$ is a polynomial of ξ with degree at most $m-2$.

On the other hand, by (4.4.8), for $\rho > \ell+1, \ell \ge 2$, and $z \in \Omega_\delta^+$, we have

$$E_{-+}(\xi+\lambda_0) = e_{-+,1}(\xi,\lambda_0) \times \left[I + (e_{-+,1}(\xi,\lambda_0))^{-1} \left(\sum_{j=2}^{\ell} \xi^j E_{-+,j}(\lambda_0) + \widetilde{E}_{-+,\ell}(\xi) \right) \right].$$

Then, by (3.4.8), for $\xi \in \mathbb{C}_+$ and $|\xi| < \delta$ with $\delta > 0$ small enough, $E_{-+}(\xi+\lambda_0)^{-1}$ exists, with

$$E_{-+}(\xi+\lambda_0)^{-1} = \frac{1}{\xi}F_{-1}(\lambda_0) + \sum_{j=0}^{\ell-2} \xi^j \widetilde{F}_j(\lambda_0) + \widetilde{F}_{-+,\ell-2}(\xi), \tag{3.4.10}$$

where $\widetilde{F}_0(\lambda_0) = F_0(\lambda_0) - F_{-1}(\lambda_0)E_{-+,2}(\lambda_0)F_{-1}(\lambda_0)$, the other terms $\widetilde{F}_j(\lambda_0)$, $j = 1,\cdots,\ell-2$, can be also directly found and the remainder $\widetilde{F}_{-+,\ell-2}(\xi)$ is analytic in $\{\xi \in \mathbb{C}_+ : |\xi| < \delta\}$ and for $\lambda > 0$ with $|\lambda-\lambda_0| < \delta$:

$$\left\| \frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{F}_{-+,\ell-2}(\lambda-\lambda_0+i0) \right\| = o(|\lambda-\lambda_0|^{\ell-2-r}),\ r = 0,1,\cdots,\ell-2.$$

Remarque 3.4.3. *1. The coefficients $a_{ij}(\lambda_0)$, $1 \le i,j \le N_0$, defined in Lemma 3.4.1 can be expressed in the following matrix:*

$$(a_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le N_0} = \frac{1}{i8\pi\sqrt{\lambda_0}} C_{N_0}\mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0), \tag{3.4.11}$$

where

$$\mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0) = \Big(B_{\lambda_0}(u_1^{(\lambda_0,j)}, u_1^{(\lambda_0,i)}) \Big)_{1\le i,j\le N_0},\ C_{N_0} = diag\Big(\frac{1}{c_1(\lambda_0)},\cdots,\frac{1}{c_{N_0}(\lambda_0)}\Big),$$

and the bilinear form B_{λ_0} is defined in (3.2.12).

2. The entries $b_{ij}(\lambda_0)$ of the matrix $F_{-1}(\lambda_0)$ in (3.4.9) can be expressed as follows

$$(b_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le N_0} = i8\pi\sqrt{\lambda_0}\, a_0(\lambda_0)\mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0)^{-1}C_{N_0}^{-1}. \tag{3.4.12}$$

Proof of Theorem 3.2.4. Applying Grushin problem (3.3.13) to $\mathcal{M}(z) := Id + R_0(z)V$, it follows from (3.4.10) that $\mathcal{M}(z)$ is invertible for $z \in \Omega_\delta^+$, with

$$\mathcal{M}(z)^{-1} = E(z) - (I - E(z)\mathcal{M}(z))SE_{-+}(z)^{-1}T(I - \mathcal{M}(z)E(z)).$$

Moreover, for $\ell - 1/2 < s < \rho - \ell + 1/2$ with $\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$, we have the following expansion in $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})$

$$(Id + R_0(z)V)^{-1} = \frac{D_{-1}(\lambda_0)}{z - \lambda_0} + \sum_{j=0}^{\ell-2}(z - \lambda_0)^j D_j(\lambda_0) + \widetilde{D}(z - \lambda_0), \tag{3.4.13}$$

where $D_{-1}(\lambda_0) = -SF_{-1}(\lambda_0)T$ such that $F_{-1}(\lambda_0)$ is the matrix of rank N_0 given in (3.4.8) and for $g \in \mathbb{H}^{1,-s}$ we have

$$SF_{-1}(\lambda_0)Tg = \frac{1}{a_0(\lambda_0)} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(\lambda_0)\langle g, JVw_{m_j}^{(\lambda_0,j)}\rangle u_1^{(\lambda_0,j)}, \tag{3.4.14}$$

also $D_0(\lambda_0) = -S\widetilde{F}_0(\lambda_0)T + E(0)$ with

$$E(0) = \Big((I - \Pi_1^{\lambda_0})(Id + G_0^+V)(I - \Pi_1^{\lambda_0})\Big)^{-1}(I - \Pi_1^{\lambda_0}).$$

The remainder $\widetilde{D}(z - \lambda_0)$ is analytic in Ω_δ^+ and continuous up to $\mathbb{R}_+$ verifying the following estimates:

$$\|\frac{d^r}{dz^r}\widetilde{D}(z - \lambda_0)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})} = o(|z - \lambda_0|^{\ell-2-r}),\ \forall z \in \Omega_\delta^+, r = 0, \cdots, \ell - 2. \tag{3.4.15}$$

Moreover, for $\lambda \in \overline{\Omega}_\delta^+ \cap \mathbb{R}_+$, the limit

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \widetilde{D}(\lambda - \lambda_0 + i\epsilon) = \widetilde{D}(\lambda - \lambda_0 + i0)$$

exists as operator in $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})$ and still satisfy the estimates in (3.4.15).

We note that if $\rho > 2$, then for $1/2 < s < \rho - 1/2$ and $z \in \Omega_\delta^+$, we have in $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})$ the expansion

$$(Id + R_0(z)V)^{-1} = -\frac{1}{z - \lambda_0}SF_{-1}(\lambda_0)T + o\Big(|z - \lambda_0|^{-1}\Big). \tag{3.4.16}$$

Finally, if $\rho > 2\ell+3$ and $s > \ell+3/2$ with $\ell \in \mathbb{N}$, using $R(z) = (Id+R_0(z)V)^{-1}R_0(z)$ and expansions (3.2.6), (3.4.13) together with (3.4.12) and (3.4.14) , it follows that for $f \in \mathbb{H}^{-1,s}$

$$R(z)f = \frac{R_{-1}(\lambda_0)f}{z - \lambda_0} + \sum_{j=0}^{\ell} R_j(\lambda_0)f + \widetilde{R}_\ell(z - \lambda_0)f$$

in $\mathbb{H}^{1,-s}$, where

$$\begin{aligned} R_{-1}(\lambda_0)f &= -\frac{1}{a_0(\lambda_0)}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}\frac{b_{ij}(\lambda_0)}{c_j(\lambda_0)}\langle f, JG_0^+Vu_1^{(\lambda_0,j)}\rangle u_1^{(\lambda_0,i)} \\ &= \frac{1}{a_0(\lambda_0)}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}\frac{b_{ij}(\lambda_0)}{c_j(\lambda_0)}\langle f, Ju_1^{(\lambda_0,j)}\rangle u_1^{(\lambda_0,i)} \\ &= i8\pi\sqrt{\lambda_0}\sum_{i=1}^{N_0}\langle f, J\phi_i(\lambda_0)\rangle\, u_1^{(\lambda_0,i)}, \end{aligned}$$

such that by Remark 3.4.3 and a simple computation we have

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_0) \\ \vdots \\ \phi_{N_0}(\lambda_0) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0)^{-1}\begin{pmatrix} u_1^{(\lambda_0,1)} \\ \vdots \\ u_1^{(\lambda_0,N_0)} \end{pmatrix},$$

where $\mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0)^{-1}$ is given in (3.4.12). Thus, to simplify the above sum we decompose

$$\mathcal{A}_{N_0}(\lambda_0)^{-1} = {}^tQ(\lambda_0)Q(\lambda_0)$$

(see (3.3.62)). Hence, $R_{-1}(\lambda_0)$ can be written in the following form

$$R_{-1}(\lambda_0)f = \sum_{i=1}^{N_0}\langle f, J\psi_i(\lambda_0)\rangle\psi_i(\lambda_0),$$

where

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_0) \\ \vdots \\ \psi_{N_0}(\lambda_0) \end{pmatrix} = (i8\pi\sqrt{\lambda_0})^{1/2}Q(\lambda_0)\begin{pmatrix} u_1^{(\lambda_0,1)} \\ \vdots \\ u_1^{(\lambda_0,N_0)} \end{pmatrix}$$

with

$$\frac{1}{i8\pi\sqrt{\lambda_0}}B_{\lambda_0}(\psi_i(\lambda_0),\psi_j(\lambda_0)) = \delta_{ij},$$

$B_{\lambda_0}(\cdot,\cdot)$ is the bilinear form defined in (3.2.12). In addition,

$$R_0(\lambda_0)f = -\sum_{i=1}^{N_0}\langle f, JG_1^+V\psi_i(\lambda_0)\rangle u_1^{(\lambda_0,i)} + D_0(\lambda_0)G_0f.$$

Moreover, it derives from (3.2.5) and (3.4.15) that $\widetilde{R}_\ell(z-\lambda_0)f$ extends continuously to $\overline{\Omega}_\delta^+$ with estimates (3.2.25). $\square$

General situation We end this section with a more general result if hypothesis $(H3)$ does not hold.

Theorem 3.4.1. *Let λ_0 be an outgoing positive resonance of H. Suppose that there exists an integer $\mu_0 > 0$ and a small $\delta > 0$ such that*

$$d(z) := \det\, E_{-+}(z) = (z-\lambda_0)^{\mu_0} g(z), \quad \forall z \in \Omega_\delta^+, \tag{3.4.17}$$

where g is an analytic function on $\overline{\Omega}_\delta^+$ such that $g(\lambda_0) \neq 0$. Assume $\rho > 2\ell+1$, $s > \ell+1/2$ with $\ell = \mu_0 - N_0 + q, q \in \mathbb{N}^*$. Then, we have

$$R(z) = \frac{\mathcal{R}(\lambda_0)}{(z-\lambda_0)^{\mu_0 - N_0 + 1}} + \sum_{j=-\mu_0+N_0}^{q-1} (z-\lambda_0)^j R_j(\lambda_0) + \widetilde{R}_q(z-\lambda_0) \tag{3.4.18}$$

in $\mathbb{B}(-1,s,1,-s)$, where N_0 is the geometric multiplicity of -1 as eigenvalue of $K^+(\lambda_0)$ and

$$\mathcal{R}(\lambda_0) : L^{2,s} \to \mathit{Ker}(Id + K^+(\lambda_0)) \subset L^{2,-s}.$$

Moreover, the remainder term $\widetilde{R}_q(z-\lambda_0)$ is analytic in Ω_δ^+ and satisfies the estimates

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{R}_q(\lambda - \lambda_0 + i0)\|_{\mathbb{B}(-1,s,1,-s)} = o(|\lambda-\lambda_0|^{q-1-r}), \tag{3.4.19}$$

for $\lambda > 0$ with $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ and $r = 0, 1, \cdots, q-1$.
If $\rho > 3$ and $s > 3/2$, then we can obtain

$$R(z) = \frac{\mathcal{R}(\lambda_0)}{(z-\lambda_0)^{\mu_0-N_0+1}} + O(|z-\lambda_0|^{-\mu_0+N_0}), \quad \forall z \in \Omega_\delta^+. \tag{3.4.20}$$

Proof. Under the condition $(3.4.17)$ there exists $\delta > 0$ such that for $z \in \Omega_\delta^+$ the $m \times m$ matrix $E_{-+}(z)$ is invertible and

$$E_{-+}(z)^{-1} = \frac{M(z)}{d(z)}$$

where the entries of the matrix $M(z) := (a_{ij}(z))_{1\le i,j\le m}$ are polynomials of the entries of $E_{-+}(z)$ which are analytic in $z \in \Omega_\delta^+$. Moreover, taking the expansion (4.4.8) up to order ℓ, $\ell \geq \mu_0 - N_0 + 1$, we obtain

$$\begin{aligned} E_{-+}(z)^{-1} &= \frac{1}{d(z)}\left[\sum_{j=0}^{\ell}(z-\lambda_0)^{j+N_0-1}B_j(\lambda_0)\right] + \frac{1}{d(z)}\mathcal{E}_{-+,\ell}(z-\lambda_0) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell}(z-\lambda_0)^{j-(\mu_0-N_0+1)}\widetilde{B}_j(\lambda_0) + \widetilde{\mathcal{E}}_{-+,\ell}(z-\lambda_0) \end{aligned}$$

where N_0 =dim Ker $(Id + K^+(\lambda_0))$,

$$(\widetilde{B}_0(\lambda_0))_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta_i^j(\lambda_0) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le i, j \le N_0,$$

such that $\beta_i^j(\lambda_0)$ are polynomials of the entries of $A(\lambda_0)$ and the remainder term $\widetilde{\mathcal{E}}_{-+,\ell}(z-\lambda_0)$ is analytic in $z \in \Omega_\delta^+$ and satisfying

$$\|\frac{d^r}{d\lambda^r}\widetilde{\mathcal{E}}_{-+,\ell}(\lambda - \lambda_0 + i0)\| = o(|\lambda - \lambda_0|^{q'-r}), \tag{3.4.21}$$

for $\lambda > 0$ with $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $r = 0, 1, \cdots, q'$ and $q' = \ell - (\mu_0 - N_0 + 1)$.

In the rest of the proof we can proceed in the same way as in the previous proof. We obtain the leading term

$$\mathcal{R}(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{N_0} \langle \cdot, \widetilde{\psi}_1(\lambda_0)\rangle u_1^{(\lambda_0,i)} \text{ on } \mathbb{H}^{-1,s},$$

where

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1(\lambda_0) \\ \vdots \\ \widetilde{\psi}_{N_0}(\lambda_0) \end{pmatrix} = \mathcal{B}_{N_0}(\lambda_0) \begin{pmatrix} u_1^{(\lambda_0,1)} \\ \vdots \\ u_1^{(\lambda_0,N_0)} \end{pmatrix} \text{ with } \mathcal{B}_{N_0}(\lambda_0) = (\beta_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le N_0} C_{N_0}.$$

(See (3.4.11)). Moreover, the estimate (3.4.19) can be derived from (3.4.21). □

3.5 Large-time expansion of the semigroup $(e^{-itH})_{t\ge 0}$

In this section, we look at the asymptotic expansion in time, as $t \to +\infty$, of solutions to the Schrödinger equation (3.1.1). We use the preceding results for the resolvent behavior on a contour surrounding the positive resonances in the upper half-plane, encircling the origin and down to the lower half-plane.

Since V satisfies the condition (3.1.2) for $\rho > 2$, we can check that for arbitrary small $\epsilon > 0$, there exists $R_\epsilon > 0$ large enough such that the numerical range of H denoted by $\mathcal{N}(H)$ is included in an angular sector

$$\mathcal{N}(H) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z \ge -R_\epsilon, \ |\arg(z + R_\epsilon)| \le \frac{\epsilon}{2}\}. \tag{3.5.1}$$

We recall that $\sigma_d(H)$ denotes the set of discrete eigenvalues of finite algebraic multiplicities (see Section 3.2.1). Denote $\sigma_d^+(H) = \sigma_d(H) \cap \overline{\mathbb{C}}^+$, whose accumulation points can exist only in $\sigma_r^+(H)\cup\{0\}$ (see [61, Theorem 1.3-1.4] and [62, Theorem 3.3-3.5]).

We deduce from our previous main results that H has a finite number of discrete eigenvalues in the closed upper half-plane.

Proposition 3.5.1. *Assume that $\rho > 2$. Suppose that $\sigma_r^+(H)$ is finite and the hypothesis $(H3)$ holds. If zero is an eigenvalue of H we assume in addition that $\rho > 3$ and $(H1)$ or $(H2)$ holds. Then*

$$\sigma_d^+(H) \text{ is finite.}$$

Proof. Since the eigenvalues located in the closed upper half-plane can only accumulate at points of $\{0\}\cup\sigma_r^+(H)$, then to show that there is at most a finite number of these eigenvalues it suffices to prove that zero and the outgoing positive resonances of H are not accumulation points of $\sigma_d^+(H)$ even though zero is an eigenvalue or/and a resonance. Indeed, assuming $\rho > 2$, for any $\lambda_j\in\sigma_r^+(H)$, we have in $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})$, $1/2 < s < \rho - 1/2$, the expansion (3.4.16) of $(Id + R_0(z)V)^{-1}$ which showed that the latter is uniformly bounded in the norm sense of $\mathcal{B}(\mathbb{H}^{1,-s})$ on every compact set in $\Omega_\delta^+\subset\mathbb{C}_+$ of the variable z. This shows that $Id+R_0(z)V$ is injective in $\mathbb{H}^{1,-s}$ for all $z\in\Omega_\delta^+$. Since $R_0(z)(H-z) = Id+R_0(z)V$, it follows that $H-z$ is injective on $\mathbb{H}^{1,-s}$ for all $z\in\Omega_\delta^+$, so $H-z$ is injective on $\mathbb{H}^2$ for all $z\in\Omega_\delta^+$, then H has no eigenvalue in $\Omega_\delta^+\subset\mathbb{C}_+$. Also, if zero is a resonance of H, then using (3.28) the same argument works. In addition, if zero is an eigenvalue of H and we assume that $(H1)$ holds and $\rho > 3$, then using (3.59) and the above argument, we show that $\sigma_d(H)\cap\Omega_\delta = \emptyset$ for some $\delta > 0$ small enough, where Ω_δ is given in (3.2.15). We can check also that zero is not an accumulation point of $\sigma_d(H)\cap\overline{\mathbb{C}}_+$ if it is both an eigenvalue and a resonance of H under the hypothesis $(H2)$. □

In addition, we examine the limiting absorption principle for the non-selfadjoint Schrödinger operator H on each subinterval of $\mathbb{R}_+$ which does not contain any outgoing positive resonance. We also establish high energy estimates of the derivatives of the resolvent.

In what follows, we denote by $\mathcal{C}^j(\Omega, F)$ the set of all functions $f : \Omega\subset E \longrightarrow F$ that are of class $\mathcal{C}^j$ on Ω, where E and F denote normed vector spaces. And for $a > 0$, we define the open set Λ_a and its closure $\bar{\Lambda}_a$ by

$$\Lambda_a = \bigcap_{\omega\in\Sigma^+(H)}\{z\in\mathbb{C}_+, |z-\omega| > a\},\ \bar{\Lambda}_a = \bigcap_{\omega\in\Sigma^+(H)}\{z\in\bar{\mathbb{C}}_+, |z-\omega|\geq a\},$$

where $\Sigma^+(H) := \sigma_r^+(H)\cup\sigma_d^+(H)\cup\{0\}$.

The following proposition gives the high energy resolvent estimate as $|z|\to+\infty$, when $R(z)$ is extended through the upper half-plane to $\bar{\Lambda}_a$ for $a > 0$. It can be proved in the same way as in [38, Theorem 9.2] (see also [61, Theorem 1.5]).

Proposition 3.5.2. *Assume that $\sigma_r^+(H)$ is finite and $(H3)$ holds. Let $\ell \in \mathbb{N}$. If $\rho > \ell + 1$, then for $s > \ell + \frac{1}{2}$ and $f, g \in L^{2,s}$:*

$$\Lambda_a \ni z \mapsto \langle R(z)f, g\rangle \text{ can be continuously extended to a function in } \mathcal{C}^\ell\left(\bar{\Lambda}_a; \mathbb{C}\right).$$

Moreover, the boundary values $\langle R(\lambda + i0)f, g\rangle$ satisfy the following estimates:

$$|\langle \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} R(\lambda + i0)f, g\rangle| \leq \frac{C_a}{|\lambda|^{\frac{\ell+1}{2}}}\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}, \ \lambda \in \bar{\Lambda}_a \cap \mathbb{R}_+, \ \lambda \to +\infty, \tag{3.5.2}$$

for some constant $C_a > 0$.

The existence of the above limit is a direct consequence of the two main theorems 3.2.3 and 3.2.4 and the following known results: for $1/2 < s < \rho - 1/2$ and $f \in L^{2,-s}$, $h \in L^{2,s}$, the functions $z \mapsto \langle (Id + R_0(z)V)^{-1}f, h\rangle$ and $z \mapsto \langle R_0(z)Vf, h\rangle$ can be continuously extended to uniformly bounded functions on $\bar{\Lambda}_a$ (see [38, Lemma 9.1]). In addition to the following estimates in [38, Theorem 8.1]

$$|\frac{d^r}{d\lambda^r}\langle R_0(\lambda \pm i0)f, g\rangle| \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{r+1}{2}}}\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}, \ r \in \mathbb{N}, \text{ as } \lambda \to +\infty.$$

Before proving Theorem 3.5.1, we must establish a representation formula for the Schrödinger semigroup e^{-itH}, as $t \to +\infty$, generated by the non-selfadjoint operator H. Our representation formula is based on the Dunford-Taylor integral (cf. [42, Section IX.1.6]), which is valid for a m-sectorial operator, i.e an operator whose numerical range is a subset of a sector $\{|\arg z| \leq \theta < \frac{\pi}{2}\}$. More precisely, we shall find a curve $\Gamma^\nu(\eta)$ such that $\Gamma^\nu(\eta) \cap \left(\sigma_d^+(H) \cup \sigma_r^+(H) \cup \{0\}\right) = \emptyset$ and

$$\Gamma^\nu(\eta) := \Gamma_-^\nu(\eta) \cup \sigma_-^\nu(\eta) \cup \Gamma_0(\eta) \cup \Gamma_1(\eta) \cup \Gamma_+,$$

where

$$\begin{aligned}
\Gamma_-^\nu(\eta) &= \{z = \nu_\eta - \lambda e^{i\nu}, \ \lambda \geq 0\}, \ \nu_\eta = \nu - i\eta \sin\eta, \\
\sigma_-^\nu(\eta) &= \{z = \lambda - i\eta\sin\eta, \ \eta\cos\eta \leq \lambda \leq \nu\}, \\
\Gamma_0(\eta) &= \{z = \eta e^{i(2\pi-\theta)}, \ \eta < \theta < 2\pi\}, \\
\Gamma_1(\eta) &= \cup_{j=1}^N \left(\sigma_j(\eta) \cup \gamma_j(\eta)\right), \ \sigma_1(\eta) = \{z = \lambda + i0, \ \eta \leq \lambda \leq \lambda_1 - \eta\}, \\
\sigma_j(\eta) &= \{z = \lambda + i0, \ \lambda_{j-1} + \eta \leq \lambda \leq \lambda_j - \eta\}, \ j = 2, \cdots, N, \\
\gamma_j(\eta) &= \{z = (\lambda_j + \eta e^{i(\pi-\theta)}), \ 0 < \theta < \pi\}, \ j = 1, \cdots, k, \\
\Gamma_+ &= \{z = \lambda + i0, \ \lambda \geq \lambda_N + \eta\},
\end{aligned}$$

for some $\eta > 0$ and $\nu \in]0, \frac{\pi}{2}[$ chosen so that there are no eigenvalues of H between $\sigma_-^\nu(\eta) \cup \Gamma_0(\eta) \cup \Gamma_1(\eta)$ and the real axis, nor between $\Gamma_-^\nu(\eta)$ and the negative real axis. See Figure 3.1.

We now state the intermediate theorem

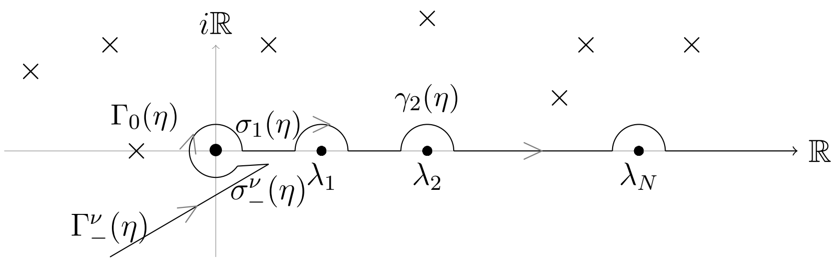

Figure 3.1: The curve $\Gamma^\nu(\eta)$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ are the outgoing positive resonances of H.

Theorem 3.5.1. *Let $\rho > 3$ and $s > 5/2$. Assume that $\sigma_r^+(H) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ for some $N \in \mathbb{N}^*$ and hypothesis $(H3)$ holds. If zero is an eigenvalue of H we assume in addition that $(H1)$ or $(H2)$ holds. Then, for f and $g \in L^{2,s}$, we have the following representation formula:*

$$\begin{aligned}\langle e^{-itH} f, g\rangle = &\sum_{z_j \in \sigma_d^+(H)} \langle e^{-itH}\Pi_{z_j} f, g\rangle \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^\nu(\eta)} e^{-itz}\langle (H-z)^{-1} f, g\rangle\, dz, \quad \forall t > 0,\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

where $\sigma_d^+(H)$ is the finite set of discrete eigenvalues of H located in the closed upper half-plane with associated Riesz projections $\{\Pi_{z_j}\}_j$ and $\Gamma^\nu(\eta)$ is the above curve (see Figure 1.).

Proof. We proceed in 3 steps:

<u>First step</u>: Let $\epsilon > 0$ small enough and $R_\epsilon > 0$ be given in (3.5.1). Set $P_\epsilon = i(e^{-i\epsilon}H - i\epsilon R_\epsilon)$. Let $\theta_\epsilon = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\epsilon - \sin\epsilon}{\cos\epsilon}\right) \in]0, \pi/2[$. Then according to (3.5.1) we have

$$N(P_\epsilon) \subseteq \{i(e^{-i\epsilon}z - i\epsilon R_\epsilon),\ \mathrm{Re}\ z \geq -R_\epsilon, |\arg(z + R_\epsilon)| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \subset \bar{S}_{\frac{\pi}{2}-\theta_\epsilon},$$

where $S_{\frac{\pi}{2}-\theta_\epsilon}$ denotes the open sector with angle $\frac{\pi}{2} - \theta_\epsilon \in]0, \pi/2[$. Moreover, for $\lambda_\epsilon := e^{i(\pi/2+\epsilon)}(\lambda + R_\epsilon) \in \mathbb{C}\backslash N(H)$ with $\lambda > 0$ large, it can be seen that $(P_\epsilon + \lambda) = ie^{-i\epsilon}(H - \lambda_\epsilon)$ is a bijection of $\mathbb{H}^2$ into L^2. This shows that P_ϵ is m-sectorial with semi-angle $\frac{\pi}{2} - \theta_\epsilon$. Hence, $-P_\epsilon$ is the unique generator of the semigroup $(e^{-tP_\epsilon})_{t\geq 0}$, which is bounded by $\|e^{-tP_\epsilon}\| \leq 1$ (cf. [42, Theoreme IX.1.24]).

Therefore, there exists a closed curve Γ, oriented in the anticlockwise sense, included in the resolvent set of $-P_\epsilon$ and enclosing the numerical range of $-P_\epsilon$ in its interior, where $\Gamma = \{\lambda e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta_\epsilon-\delta)}, \lambda \geq 0\} \cup \{\lambda e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta_\epsilon-\delta)}, \lambda \geq 0\}$ for some $0 < \delta < \theta_\epsilon$, such that the semigroup integral representation is written:

$$e^{-tP_\epsilon}u = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{tz}(P_\epsilon + z)^{-1}u dz,\ \forall u \in L^2,\ \ \forall t > 0, \tag{3.5.4}$$

and we have the following estimate

$$\|e^{-ite^{-i\epsilon}H}u\|_0 \leq e^{t\epsilon R_\epsilon}\|u\|_0,\ t \geq 0. \tag{3.5.5}$$

Denote by $\Pi_{z_j} : L^2 \to L^2$ the Riesz Projection (3.2.3) associated with eigenvalue $z_j \in \sigma_d^+(H)$. $\sigma_d^+(H)$ is a finite set by Proposition 3.5.1 and $H_j := H\Pi_{z_j}$ defines a bounded operator on the finite dimensional subspace Ran Π_{z_j}, with $\sigma(H_j) = \{z_j\}$ (see [42, p. 178-179]). Let $H_\epsilon = e^{-i\epsilon}H$ and $z_\epsilon = e^{-i\epsilon}z$. By analytic deformation in $\rho(H)$ of the curve Γ, we can find a set of curves $\cup_{j=1}^p \Sigma_j$ around the eigenvalues $z_1, \cdots, z_p \in \sigma_d^+(H)$ located above a curve $\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)$ (defined below) oriented in the anti-clockwise sense such that

$$\begin{aligned} U_\epsilon(t)u &:= e^{-itH_\epsilon}u \\ &= -\frac{1}{2i\pi}\sum_{z_j\in\sigma_d^+(H)}\int_{\Sigma_j} e^{-itz_\epsilon}(H_j - z)^{-1}udz \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-itz_\epsilon}(H-z)^{-1}udz \\ &= \sum_{z_j\in\sigma_d^+(H)} e^{-itH_\epsilon}\Pi_{z_j}u + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-itz_\epsilon}(H-z)^{-1}u\,dz, \quad \forall t > 0, \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

where $\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)$ is a closed curve oriented from $-\infty$ to $+\infty$ and $\Gamma^\nu(\eta,\epsilon) = \Gamma_-^\nu(\eta) \cup \Gamma_0(\eta,\epsilon) \cup \Gamma_1(\eta,\epsilon) \cup \Gamma_+(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_-^\nu(\eta) &= \{z = \nu_\eta - \lambda e^{i\nu},\ \lambda \geq 0\},\ \nu_\eta = \nu - i\eta\sin\eta, \\ \sigma_-^\nu(\eta) &= \{z = \lambda - i\eta\sin\eta,\ \eta\cos\eta \leq \lambda \leq \nu\} \\ \Gamma_0(\eta,\epsilon) &= \{z = \eta e^{i(2\pi-\theta)},\ \eta < \theta < 2\pi - \epsilon_\eta\},\ \epsilon_\eta = \arcsin(\epsilon/\eta), \\ \Gamma_1(\eta,\epsilon) &= \cup_{j=1}^N (\sigma_j(\eta,\epsilon) \cup \gamma_j(\eta,\epsilon)), \\ \sigma_1(\eta,\epsilon) &= \{z = \lambda + i\epsilon,\ \eta\cos\epsilon_\eta \leq \lambda \leq \lambda_1 - \eta\}, \\ \sigma_j(\eta,\epsilon) &= \{z = \lambda + i\epsilon,\ \lambda_{j-1} + \eta \leq \lambda \leq \lambda_j - \eta\}, j = 2,\cdots,N, \\ \gamma_j(\eta,\epsilon) &= \{z = \lambda_j + i\epsilon + \eta e^{i(\pi-\theta)},\ 0 < \theta < \pi\},\ j = 1,\cdots,N, \\ \Gamma_+(\epsilon) &= \{z = \lambda + i\epsilon,\ \lambda \geq \lambda_N + \eta\}, \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

for some fixed $0 < \nu < \frac{\pi}{2}$ and $\eta, \epsilon > 0$ small chosen so that $\Gamma^\nu(\eta,\epsilon) \cap \sigma(H) = \emptyset$ and there is no eigenvalues of H between $\sigma_-^\nu(\eta) \cup \Gamma_0(\eta,\epsilon) \cup \Gamma_1(\eta,\epsilon) \cup \Gamma_+(\epsilon)$ and the positive real axis, nor between $\Gamma_-^\nu(\eta)$ and the negative real axis. See Figure 3.2.

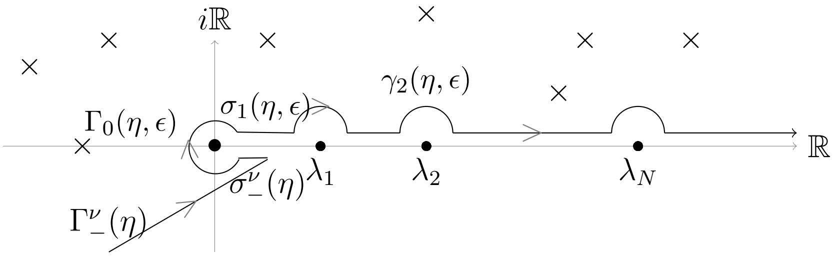

Figure 3.2: The curve $\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)$.

Second step: Let $f, g \in L^{2,s}$. We define

$$\langle U(t)f,g\rangle := \sum_{z_j\in\sigma_d^+(H)} \langle e^{-itH}\Pi_{z_j}f,g\rangle + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^\nu(\eta)} e^{-itz}\langle (H-z)^{-1}f,g\rangle dz, \tag{3.5.8}$$

where $\Gamma^\nu(\eta)$ is the curve given in Figure 3.1.
In this step we will show that

$$\langle U(t)f,g\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\langle U_\epsilon(t)f,g\rangle, \quad \forall f,g\in L^{2,s}, \quad \forall t>0. \tag{3.5.9}$$

We have to prove the convergence, as $\epsilon\to 0^+$, of the integral in (3.5.6) for all $t>0$. Let $t>0$. We decompose the integral into two parts:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon}z}\langle R(z)f,g\rangle dz &= \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)\cap\{|\text{ Re } z|<2R_1\}} e^{-ite^{-i\epsilon}z}\langle R(z)f,g\rangle\varphi(\text{ Re } z)dz \\ &+ \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)\cap\{|\text{ Re } z|>R_1\}} e^{-ite^{-i\epsilon}z}\langle R(z)f,g\rangle(1-\varphi(\text{ Re } z))dz \\ &= I_\epsilon(t)+II_\epsilon(t),\end{aligned}$$

where we have introduced the cutoff function $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ such that $\varphi(\lambda)=1$ if $|\lambda|\leq R_1$ and $\varphi(\lambda)=0$ if $|\lambda|\geq 2R_1$ for some $R_1>\lambda_N$ with $\lambda_N:=\max\sigma_r^+(H)$.

Denote $g_\epsilon(z,t)=e^{-ite^{-i\epsilon}z}\langle (H-z)^{-1}f,g\rangle$. If zero is an eigenvalue of H, then if $\rho>3$ and $s>3/2$, in view of Theorem 3.2.2, for each $\eta,\nu>0$ and $t>0$ the integrand function $g_\epsilon(z,t)\varphi(\text{ Re } z)\mathbf{1}_{\Gamma_0(\eta,\epsilon)}$ converges almost everywhere $z\in\{z\in\mathbb{C};|\text{ Re } z|<2R_1\}$ as $\epsilon\to 0$ to the limit function $e^{-itz}\langle (H-z)^{-1}f,g\rangle\varphi(\text{ Re } z)\mathbf{1}_{\Gamma_0(\eta)}$, where we denoted by $\mathbf{1}_E$ the indicator function of a subset $E\subset\mathbb{C}$. In addition, we can check that the integrand is uniformly bounded in ϵ for $|\text{ Re } z|<R_1$. Thus, by Lebesgue's dominate convergence theorem

$$\int_{\Gamma_0(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon}z}\langle R(z)f,g\rangle\varphi(\text{ Re } z)\,dz \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{\Gamma_0(\eta)} e^{-itz}\langle R(z)f,g\rangle\varphi(\text{ Re } z)\,dz,$$

for every $\eta>0$ small and $t>0$. Also, the convergence on each $\gamma_j(\eta)$ surrounding the singularity λ_j located on the positive real axis can be shown in the same way as above using Theorem 3.2.4 where a weaker assumption is required, so that $\rho > 2$. Moreover, according to Proposition 3.5.2, the functions $g_\epsilon(\lambda + i\epsilon, t)\mathbf{1}_{\sigma_j(\epsilon,\eta)}$, $j = 1\cdots, N$, are uniformly bounded in ϵ for $\lambda > 0$ and converge almost everywhere λ as $\epsilon \to 0$ to $e^{-it\lambda}\langle (H-\lambda-i0)^{-1}f, g\rangle \mathbf{1}_{\sigma_j(\eta)}$ for $f, g \in L^{2,s}$, $s > 1/2$. Thanks to these results

$$I_\epsilon(t) \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{\Gamma^\nu(\eta)} e^{-itz}\langle R(z)f, g\rangle \varphi(\text{ Re } z)dz \qquad . \tag{3.5.10}$$

On the other hand, we have

$$II_\epsilon(t) = \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)\cap\{|\text{ Re } z|>R_1\}} = \int_{\Gamma^\nu_-(\eta)\cap\{|\text{ Re } z|>R_1\}} + \int_{\Gamma_+(\epsilon)\cap\{|\text{ Re } z|>R_1\}}. \tag{3.5.11}$$

For $t > 0$ and $z \in \Gamma^\nu_-(\eta) \cap \{|\text{ Re } z| > R_1\}$, $g_\epsilon(z,t)$ is uniformly bounded in $\epsilon \in]0, \frac{\nu}{2}[$ with

$$\begin{aligned}|e^{-it\nu_\eta e^{-i\epsilon}} & e^{it\lambda e^{i(\nu-\epsilon)}}\langle (H-(\nu_\eta - \lambda e^{i\nu}))^{-1}f, g\rangle| \\ &\le C_{\eta,R_1}\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}e^{-t\lambda\sin(\frac{\nu}{2})}\lambda^{-1},\end{aligned}$$

for $\lambda > 0$ large and $\eta, \nu > 0$, where the function at the right-hand side is integrable on $[\dfrac{2\eta + R_1}{\cos\nu}, +\infty[$ for $\eta, \nu > 0$ small and $t > 0$. Then we deduce by Lebesgue's dominated convergence theorem that

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma^\nu_-(\eta)} g_\epsilon(z,t)(1-\varphi(\text{ Re } z))\,dz = \int_{\Gamma^\nu_-(\eta)} e^{-itz}\langle (H-z)^{-1}f, g\rangle(1-\varphi(\text{ Re } z))\,dz. \tag{3.5.12}$$

Let us now check the convergence of the second integral at the right-hand side of (3.5.11). By Proposition 3.5.2, if $\rho > 3$ and $s > 5/2$, then $\lambda \mapsto g_\epsilon(\lambda+i\epsilon, t)$ belongs to $\mathcal{C}^2([R_1, +\infty[, \mathbb{C})$ with the following estimate

$$\left|\frac{d^2}{d\lambda^2}\langle (H-(\lambda+i\epsilon))^{-1}f, g\rangle\right| \le \frac{C_{R_1}}{\lambda^{3/2}}\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s},\ \forall \lambda > R_1,$$

uniformly in $\epsilon > 0$. Then, integrating twice by parts we obtain

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{+\infty} & (-ite^{-i\epsilon})^{-2}e^{-it\lambda e^{-i\epsilon}}\frac{d^2}{d\lambda^2}\Big[\langle (H-(\lambda+i\epsilon))^{-1}f, g\rangle(1-\varphi(\lambda))\Big]d\lambda \\ &+ O(t^{-2}|e^{-i(tR_1e^{-i\epsilon}+\epsilon)}|)\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s} \\ &:= \int_{R_1}^{+\infty} f_\epsilon(t,\lambda)d\lambda + O(t^{-2}|e^{-i(tR_1e^{-i\epsilon}+\epsilon)}|)\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s},\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

for every $t > 0$. Since for $\rho > 3$, $s > 5/2$ and $t > 0$, $f_\epsilon(t,\lambda)$ is uniformly bounded in small $\epsilon > 0$ as

$$|f_\epsilon(t,\lambda)| \le \frac{C_{R_1}}{t^2}\frac{1}{\lambda^{3/2}}\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}, \qquad \forall \lambda > R_1,$$

it follows by Lebesgue's dominated convergence theorem that $\int_{R_1}^{+\infty} f_\epsilon(t,\lambda)d\lambda$ converges as $\epsilon \to 0$ for all $t > 0$. We also observe that the second term at the right-hand side of (3.5.13) is uniformly bounded in $\epsilon > 0$ by $O(t^{-2})\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}$. This shows that the second integral at the right-hand side of (3.5.11) is uniformly convergent in $\epsilon > 0$ for all $t > 0$. Consequently

$$II_\epsilon(t) \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{\Gamma^\nu(\eta)} e^{-itz}\langle R(z)f,g\rangle(1-\varphi(\text{ Re } z)\,dz,$$

which together with (3.5.10) must establish (3.5.9).

Finally, we will show at the third step that for all f and $g \in L^{2,s}$ we have the following convergence

$$\langle e^{-itH_\epsilon}f - e^{-itH}f, g\rangle \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t > 0.$$

Third step: Let ϕ be a test function in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. We write

$$\begin{aligned} e^{-itH_\epsilon}\phi - e^{-itH}\phi &= \int_0^t \frac{d}{dr}\left(e^{-irH_\epsilon}e^{-i(t-r)H}\phi\right)dr \\ &= (-i)(e^{-i\epsilon}-1)\int_0^t e^{-irH_\epsilon}He^{-i(t-r)H}\phi\,dr. \end{aligned}$$

Now let $t > 0$ be fixed. By (3.5.5) and the previous equality, we see that

$$\|e^{-itH_\epsilon}\phi - e^{-itH}\phi\|_0 \leq Ce^{tR\epsilon}|e^{-i\epsilon}-1|\int_0^t \|e^{-i(t-r)H}H\phi\|_0\,dr \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

i.e. $e^{-itH_\epsilon}\phi$ converges in L^2 norm to $e^{-itH}\phi$ as $\epsilon \to 0$ for all $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. This by uniqueness of the weak limit in (3.5.9) gives

$$\langle e^{-itH}\phi,\psi\rangle = \langle U(t)\phi,\psi\rangle, \quad \forall\phi,\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \forall t > 0.$$

Finally, by density of $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ in $L^{2,s}(\mathbb{R}^3)$, we conclude that

$$\langle U(t)f,g\rangle = \langle e^{-itH}f,g\rangle, \quad \forall f,g \in L^{2,s}, \quad \forall t > 0,$$

which establishes the desired representation formula. $\square$

Next we quote a lemma for some generalized integrals given in [23, Section II.2].

Lemme 3.5.3. *1. The limit of the function $\lambda \mapsto (\lambda + i\mu)^{-1}$ as $\mu \to 0^+$, is the generalized function $(\lambda + i0)^{-1}$ defined in the following sense:*
For every test function $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$

$$\left((x+i0)^{-1},\phi(x)\right) = \int_{|x|\leq 1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{\phi(x)}{x}\,dx - i\pi\phi(0).$$

Moreover, for $t > 0$ we have the following generalized integral

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-it\lambda}}{\lambda + i0}\,d\lambda = -i\pi.$$

2. *For* $t > 0$ *and* $j = -1, 0, 1, \cdots$ *we have*

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{j/2} e^{-it\lambda}\, d\lambda = \Gamma(\frac{j}{2}+1)(-it)^{-\frac{j}{2}-1},$$

where $\Gamma(\frac{j}{2}+1) = \int_0^{+\infty} t^{j/2} e^{-t}\, dt.$

Now we are able to prove Theorem 3.2.5. We will use the following formula derived from Theorem 3.5.1:

$$\begin{aligned}\langle e^{-itH} f, g\rangle = &\sum_{j=1}^{p} \langle e^{-itH} \Pi_{z_j} f, g\rangle \\ &+ \lim_{\eta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon} z} \langle R(z) f, g\rangle dz, \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

where the curve $\Gamma^\nu(\eta, \epsilon)$ is given in (3.5.7). See Figure 3.2.

Proof of Theorem 3.2.5. Let $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ be a cutoff function such that $\chi(\lambda) = 1$ for $|\lambda| \le \nu/2$ and $\chi(\lambda) = 0$ for $|\lambda| \ge \nu$. For $j = 0, 1, \cdots, N$, define $\chi_j(\lambda) = \chi(\lambda - \lambda_j)$, where $\lambda_0 = 0$ and $\lambda_j \in \sigma_r^+(H), \forall j = 1, \cdots, N$. Set

$$g_\epsilon(z,t) = e^{-ite^{-i\epsilon} z} \langle R(z) f, g\rangle.$$

First, we prove the part (b) of the theorem. We start by decomposing the integral in (3.5.14) by introducing the cutoff functions χ_j, $j = 0, \cdots, N$, as follows:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} g_\epsilon(z,t)\, dz &= \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} g_\epsilon(z,t) \chi_j(\text{ Re } z)\, dz + \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} g_\epsilon(z,t) \widetilde{\chi}(\text{ Re } z)\, dz \\ &:= \sum_{j=0}^{N} I^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j) + J^{\epsilon,\eta}(t). \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

where $\widetilde{\chi} = 1 - \sum_{j=0}^{N} \chi_i$.
Then, to evaluate the integrals $I^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j)$, $j = 0, \cdots, N$, we introduce the resolvent expansions near zero energy and positive resonances which are obtained in Theorems 3.2.2 and 3.2.4 respectively. We have

$$\begin{aligned} I^{\epsilon,\eta}(t, 0) = &\sum_{s=-2}^{1} \langle R_s^{(2)} f, g\rangle \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} z^{s/2}\, e^{-ite^{-i\epsilon} z} \chi_0(\text{ Re } z)\, dz \\ &+ \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon} z} \langle \widetilde{R}_1^{(2)}(z) f, g\rangle \chi_0(\text{ Re } z)\, dz \\ &+ \int_{\Gamma^\nu_-(\eta)\cap\{|\text{ Re } z|\le\nu\}} e^{-ite^{-i\epsilon} z} \langle R(z) f, g\rangle \chi_0(\text{ Re } z)\, dz \\ := &\, I_0^{\epsilon,\eta}(t) + J_0^{\epsilon,\eta}(t) + J_1^{\epsilon,\eta}(t), \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

We shall show that $I_0^{\epsilon,\eta}(t)$ converges uniformly for every bounded interval of the variable t as $\epsilon \to 0^+$ and $\eta \to 0^+$, respectively. Let K be a fixed bounded interval of $]0,+\infty[$. Let $t \in K$. For $\epsilon, \eta \in]0, \frac{\nu}{2}[$, we have

$$\begin{aligned}
I_0^{\epsilon,\eta}(t) = \langle R_{-2}^{(2)} f, g\rangle \Big[\int_{\omega_0} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon} z}}{z} dz - \int_{\nu+i\epsilon}^{\nu - i\eta\sin\eta} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon} z}}{z} dz \\
+ \int_{\nu/2+i\epsilon}^{\nu+i\epsilon} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon} z}}{z} (\chi(\operatorname{Re} z) - 1) dz - \int_{\nu/2 - i\eta\sin\eta}^{\nu - i\eta\sin\eta} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon} z}}{z} (\chi(\operatorname{Re} z) - 1) dz \Big] \\
+ \langle R_{-1}^{(2)} f, g\rangle \Big[\int_{\eta\cos\epsilon_\eta}^{+\infty} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon}(\lambda + i\epsilon)}}{\sqrt{\lambda + i\epsilon}} \chi(\lambda) d\lambda - \int_{\eta\cos\eta}^{+\infty} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon}(\lambda - i\eta\sin\eta)}}{\sqrt{\lambda - i\eta\sin\eta}} \chi(\lambda) d\lambda \Big] \\
+ I_1^{\epsilon,\eta}(t),
\end{aligned}$$

where $\omega_0 := [\nu - i\eta\sin\eta, \eta\cos\eta - i\eta\sin\eta] \cup \Gamma_0(\eta,\epsilon) \cup [\eta\cos\epsilon_\eta + i\epsilon, \nu + i\epsilon] \cup [\nu + i\epsilon, \nu - i\eta\sin\eta]$ is a closed curve enclosing zero traveled in the clockwise sense. It follows that $I_0^{\epsilon,\eta}(t) - I_1^{\epsilon,\eta}(t)$ converges as $\epsilon \to 0^+$ and $\eta \to 0^+$, respectively, on the interval K, to

$$\begin{aligned}
-2i\pi \langle R_{-2}^{(2)} f, g\rangle + 2\langle R_{-1}^{(2)} f, g\rangle \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda + \int_{\nu/2}^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda}}{\sqrt{\lambda}} (\chi(\lambda) - 1) d\lambda \right] \\
= -2i\pi \langle R_{-2}^{(2)} f, g\rangle + 2(-i\pi)^{1/2} \langle R_{-1}^{(2)} f, g\rangle t^{-1/2} + O(t^{-2}),
\end{aligned}$$

where the decay rate $t^{-1/2}$ comes from the first integral (see Lemma 3.5.3) and $O(t^{-2})$ derives from the second integral by integrating by part twice. In addition, the integral $I_1^{\epsilon,\eta}(t)$ can be easily estimated using Lemma 3.5.3 as follows

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0^+} \lim_{\epsilon\to 0^+} I_1^{\epsilon,\eta}(t) = 2\langle R_1^{(2)} f, g\rangle \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} e^{-it\lambda} \chi(\lambda)\, d\lambda \\
= -(i\pi)^{1/2} \langle R_1^{(2)} f, g\rangle t^{-3/2} + O(t^{-2}), \qquad \forall t \in K. \qquad (3.5.17)
\end{aligned}$$

Now, let us estimate $J_0^{\epsilon,\eta}(t)$. By Theorem 3.2.2, if $\rho > 7$, $z \mapsto \widetilde{R}_1^{(2)}(z)$ can be continuously extended to $\mathcal{C}^2(\{|z| < \delta, \pm\Im z \geq 0\}, \mathbb{B}(-1,s,1,-s))$ for $s > 7/2$, such that

$$\left\| \frac{d^r}{d\lambda^r} \widetilde{R}_1^{(2)}(\lambda \pm i0) \right\|_{\mathbb{B}(-1,s,1,-s)} = o(\lambda^{\frac{1}{2}-r}),\ 0 < \lambda < \delta,\ r = 0,1,2.$$

Then, it follows from Lemma 10.2 in [38] that

$$\lim_{\eta\to 0} \lim_{\epsilon\to 0} J_0^{\epsilon,\eta}(t) = o(t^{-\frac{3}{2}}) \|f\|_{0,s} \|g\|_{0,s} \quad \text{as } t \to +\infty. \qquad (3.5.18)$$

Parameterizing $\Gamma_-^\nu(\eta)$ by $z = \nu_\eta - \lambda(1 + i\tan\nu)$ with $\lambda \in]0, 2\nu[$, we can show that the integral $J_1^{\epsilon,\eta}(t)$ converges on every bounded interval of $]0,+\infty[$ of the variable t as $\epsilon, \eta \to 0$. Moreover, there exists $c_\nu, C_\nu > 0$ such that

$$\begin{aligned}
|\lim_{\eta\to 0} \lim_{\epsilon\to 0} J_1^{\epsilon,\eta}(t)| \leq c_\nu \int_0^{2\nu} e^{-t\lambda\tan\nu} |\langle R(\nu - \lambda - i\lambda\tan\nu) f, g\rangle|\, \chi_0(\nu - \lambda)\, d\lambda \\
\leq C_\nu \|f\|_{0,s} \|g\|_{0,s} \int_0^{2\nu} e^{-t\lambda tan\nu} \chi_0(\nu - \lambda)\, d\lambda \qquad (3.5.19) \\
= O(t^{-2}) \|f\|_{0,s} \|g\|_{0,s}, \qquad \text{as } t \to +\infty,
\end{aligned}$$

where we have used the fact that $\lambda \mapsto R(\nu - \lambda e^{i\nu}) \in \mathbb{B}(0, s, 0, -s)$ is continuous on $[0, 2\nu]$ and utilized integration by parts to estimate the integral in (3.5.19) taking into account that $\chi_0(\pm\nu) = \chi_0'(\pm\nu) = 0$.
Next, for $j = 1, \cdots, N$, if $\rho > 2\ell + 3$ and $s > \ell + 3/2$, $\ell \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} I^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j) &= \sum_{s=-1}^{\ell} \langle R_s(\lambda_j) f, g\rangle \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} (z - \lambda_j)^s e^{-ite^{-i\epsilon}z} \chi_j(\text{ Re } z)\, dz \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma^\nu(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon}z} \langle \widetilde{R}_\ell(z - \lambda_j) f, g\rangle \chi_j(\text{ Re } z)\, dz \\ &:= \sum_{s=-1}^{\ell} I_s^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j) + J^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j). \end{aligned}$$

We can show that $I_{-1}^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j)$ converges as $\epsilon \to 0^+$ for $t \in K$ to the integral

$$I_{-1}^{\eta}(t, \lambda_j) = \langle R_{-1}(\lambda_j) f, g\rangle e^{-it\lambda_j} \int_{L_\eta} \frac{e^{-it\xi}}{\xi} \chi(\text{ Re } \xi)\, d\xi,\ \xi = z - \lambda_j,$$

along the contour $L_\eta =]-\infty, -\eta] \cup \{\xi = \eta e^{i(\pi-\theta)},\ 0 < \theta < \pi\} \cup [\eta, +\infty[$ traveled from $-\infty$ to $+\infty$. Then, the integral $I_{-1}^{\eta}(t, \lambda_j)$ converges as $\eta \to 0$ for $t \in K$ to

$$\begin{aligned} I_{-1}(t, \lambda_j) :=& \langle R_{-1}(\lambda_j) f, g\rangle e^{-it\lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda}}{\lambda + i0} \chi(\lambda) d\lambda \\ =& -i\pi \langle R_{-1}(\lambda_j) f, g\rangle e^{-it\lambda_j} + O(t^{-2}). \end{aligned}$$

Moreover, for $r = 0, 1, \cdots, \ell$ and $t \in K$ we have

$$I_r^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j) \underset{\eta\to 0^+, \epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \langle R_r(\lambda_j) f, g\rangle e^{-it\lambda_j} \int_{+\infty}^{-\infty} \lambda^r e^{-it\lambda} \chi(\lambda) d\lambda,$$

where the function at the right-hand side is a regular function of t having a rapidly decaying at infinity as being the r-th derivative of the Fourier transform of the cutoff function χ.
Regarding the integral $J^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j)$, we have by Theorem 3.2.4 that the remainder term $\widetilde{R}_\ell(z - \lambda_j)$ can be continuously extended to

$$\widetilde{R}_\ell(\lambda - \lambda_j + i0) \in \mathcal{C}^\ell\left(\{\lambda > 0,\ |\lambda - \lambda_j| < \delta\}, \mathbb{B}(-1, s, 1, -s)\right). \tag{3.5.20}$$

Then, similarly to the above integrals $I_r^{\eta,\epsilon}(t, \lambda_j)$, we observe that $J^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j)$ converges as $\epsilon, \eta \to 0$ uniformly for every bounded interval $K \subset]0, +\infty[$ of the variable t to the Fourier transform of the compactly supported function $\lambda \mapsto \widetilde{R}_\ell(\lambda - \lambda_j + i0)\chi_j(\lambda)$. With (3.5.20), this yields

$$\lim_{\eta\to 0} \lim_{\epsilon\to 0} J^{\epsilon,\eta}(t, \lambda_j) = o(t^{-\ell}) \|f\|_{0,s} \|g\|_{0,s},\ t \to +\infty. \tag{3.5.21}$$

See [38, Lemma 10.1].
Finally, we have to estimate the integral $J^{\epsilon,\eta}(t)$ in (3.5.15) as $t \to +\infty$. We decompose $J^{\epsilon,\eta}(t)$ as follows:

$$\begin{aligned} J^{\epsilon,\eta}(t) &= \int_{\Gamma^{\nu}_{-}(\eta)\cup\sigma^{\nu}_{-}(\eta)} g_\epsilon(z,t)\widetilde{\chi}(\text{ Re } z)\,dz + \int_{\Gamma_1(\eta,\epsilon)\cup\Gamma_+(\epsilon)} g_\epsilon(z,t)\widetilde{\chi}(\text{ Re } z)\,dz \\ &:= J^{\epsilon,\eta}_{-}(t) + J^{\epsilon,\eta}_{+}(t). \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

Using the parameterization of $\Gamma^{\nu}_{-}(\eta)\cap \operatorname{supp}\widetilde{\chi}(\text{ Re } z)$: $z = (\nu-\lambda) - i(\eta\sin\eta + \lambda\tan\nu)$ with $\lambda \in [0, \frac{\nu}{2}] \cup [\frac{3\nu}{2}, +\infty[$, together with $\sigma^{\nu}_{-}(\eta)\cap \operatorname{supp}\widetilde{\chi}(\text{ Re } z)$: $z = \lambda - i\eta\sin\eta$ with $\lambda \in [\frac{\nu}{2}, \nu]$, and integrating by parts twice ($\rho > 3$ and $s > 5/2$ are required here), we have

$$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+} J^{\epsilon,\eta}_{-}(t) = O(t^{-2})\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}, \text{ as } t \to +\infty.$$

Furthermore, applying the same argument as in (3.5.13) with $1-\varphi(\text{ Re } z)$ replaced by $\widetilde{\chi}(\text{ Re } z)$ yields

$$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+} J^{\epsilon}_{+}(t) = O(t^{-2})\|f\|_{0,s}\|g\|_{0,s}, \text{ as } t \to +\infty.$$

Note that in this theorem the stronger condition $\rho > 7$ and $s > 7/2$ is required to obtain $o(t^{-2})$ in (3.5.21) which holds for $\ell = 2$, and to get $o(t^{-3/2})$ in (3.5.18). But this condition can be relaxed to $\rho > 4$ to obtain (3.2.20) with remainder estimate $o(|z|^{-1/2})$ and then to get the remainder $o(t^{-1/2})$ in (3.5.18).

Now, we return to the proof of the part (a) of Theorem 3.2.5. We have only to compute the integral $I^{\epsilon,\eta}_0(t)$ which does not have the same behavior as in the previous proof. Indeed, when zero is a resonance and not an eigenvalue, $I^{\epsilon,\eta}_0(t)$ has to be replaced by

$$\widetilde{I}^{\epsilon,\eta}_0(t) = \sum_{j=-1}^{1}\langle R^{(1)}_j f, g\rangle \int_{\Gamma_0(\eta,\epsilon)} e^{-ite^{-i\epsilon}z} z^{j/2}\,dz \tag{3.5.23}$$

$$+ \langle R^{(1)}_{-1} f, g\rangle \Big[\int_{\eta\cos\epsilon_\eta}^{+\infty} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon}(\lambda+i\epsilon)}}{\sqrt{\lambda+i\epsilon}}\chi(\lambda)d\lambda - \int_{\eta\cos\eta}^{+\infty} \frac{e^{-ite^{-i\epsilon}(\lambda-i\eta\sin\eta)}}{\sqrt{\lambda-i\eta\sin\eta}}\chi(\lambda)d\lambda\Big] + \widetilde{I}^{\epsilon,\eta}_1(t), \tag{3.5.24}$$

where $R^{(1)}_{-1}$ is the rank one operator defined in Theorem 3.2.1. It is easy to show that the integral in (3.5.23) vanishes as $\eta \to 0$. However, the integrals in (3.5.24) tend as $\epsilon,\eta \to 0^+$ uniformly on every bounded interval of $]0,+\infty[$ of the variable t to

$$2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda + 2\int_{\nu/2}^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda}}{\sqrt{\lambda}}(\chi(\lambda)-1)\,d\lambda = 2(-i\pi)^{1/2}t^{-\frac{1}{2}} + O(t^{-2}).$$

See (3.5.17) for the estimate of $\widetilde{I}^{\epsilon,\eta}_1(t)$. Note that the time-decay $o(t^{-1/2})$ at (3.2.26) follows from the estimate of $J^{\epsilon,\eta}_0(t)$ in (3.5.18) which requires that $\rho > 3$ and $s > 3/2$. But, in the presence of positive resonances our assumption $\rho > 5$ and $s > 5/2$ is needed to obtain $o(t^{-1})$ in (3.5.21) (see Theorem 3.2.4).

Finally, the part (c) of Theorem 3.2.5 can be proved using the same calculation as above with the resolvent expansion in Theorem 3.2.3. ■

We end the paper by the following remark:

Remarque 3.5.4. *If we replace the hypothesis $(H3)$ by (3.4.17), then using the expansion (3.4.18) of $R(z)$ near $\lambda_j \in \sigma_r^+(H)$, the oscillating term $\sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_j} R_{-1}(\lambda_j)$ in (3.2.26) has to be replaced by*

$$\sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_j} R_j(t, \lambda_j),$$

where $R_j(t, \lambda_j)$ is a polynomial of t of degree at most $\mu_j - N_j$ with values in $\mathbb{B}(0, s, 0, -s)$ and with the leading term $-\frac{(-it)^{\mu_j - N_j}}{(\mu_j - N_j)!}\mathcal{R}(\lambda_j)$. See Theorem 3.2.4. Indeed, for $\ell = 0, 1, \cdots, \mu_j - N_j$, $(\lambda + i0)^{-\ell-1}$ is defined as the ℓ-th derivative of the generalized function $\frac{(-1)^\ell}{\ell!}(\lambda + i0)^{-1}$. Then, using integration by parts we have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-it\lambda}}{(\lambda + i0)^{\ell+1}} \chi(\lambda)\, d\lambda = &\ \frac{(-it)^\ell}{\ell!} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-it\lambda}}{\lambda + i0} \chi(\lambda) d\lambda \\
&+ \sum_{j=1}^{\ell} \frac{(-1)^\ell}{j!(\ell - j)!} (it)^{\ell-j} \int_{\frac{\nu}{2}<|\lambda|<\nu} \frac{e^{-it\lambda}}{\lambda + i0} \frac{d^j \chi}{d\lambda^j}(\lambda) d\lambda \\
= &\ a_\ell t^\ell + a_{\ell-1} t^{\ell-1} + \cdots + a_1 t + a_0,
\end{aligned}$$

with $a_\ell = (-i)^{\ell+1} \frac{\pi}{\ell!}$.

Acknowledgment

I would like to express my gratitude to my supervisor Xue Ping Wang for helpful discussions and his useful comments on this research work.

4

Gevrey estimates of the resolvent and sub-exponential time-decay for the heat and Schrödinger semigroups. II

4.1 Introduction

In [68], X.P. Wang proved the Gevrey estimates of the resolvent for a class of non selfadjoint second order elliptic operators satisfying a weighted coercive condition and applied them to establish large time expansions of the heat and Schrödinger semigroups with sub-exponential time-decay estimates on the remainder. For the Schrödinger semigroup, a global virial condition on the model potential has been used to ensure the absence of quantum resonances near threshold zero. In the present work we want to extend the results of [68] to larger classes of potentials in which only a virial condition outside some compact is needed for the Schrödinger case. We also consider threshold eigenvalue with arbitrary geometric multiplicity instead of geometrically simple one, which requires an analysis of more general Jordan structure analogous to that carried out in [1] for quickly decreasing potentials.

Consider the non-selfadjoint Schrödinger operator

$$H = -\Delta + V(x) \tag{4.1.1}$$

which is regarded as perturbation of a model operator $H_0 = -\Delta + V_0(x)$ where $V(x)$ and $V_0(x)$ are complex-valued measurable functions on $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Assume that V and V_0 are $-\Delta$-compact satisfying for some constants $\mu \in]0, 1[$ and $\rho > 2\mu$:

$$|V_0(x)| \leq C\langle x\rangle^{-2\mu}, \quad |W(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\rho}, \tag{4.1.2}$$

for x outside some compact of $\mathbb{R}^n$. Here $W(x) = V(x) - V_0(x)$. An important condition for sub-exponential time-decay for the associated heat and Schödinger semigroups is the following weighted coercive condition on the model operator H_0: there exist $\mu \in]0,1[$ and $c_0 > 0$ such that

$$|\langle H_0 u, u\rangle| \geq c_0(\|\nabla u\|^2 + \|\langle x\rangle^{-\mu} u\|^2), \quad \forall\, u \in H^2. \tag{4.1.3}$$

Throughout this work, conditions (4.1.2) and (4.1.3) are always assumed to be satisfied. Set $V_0(x) = V_1(x) - iV_2(x)$ with $V_1(x)$ and $V_2(x)$ real and denote

$$H_1 = -\Delta + V_1(x), \quad H = H_0 + W(x). \tag{4.1.4}$$

Under the condition 4.1.3, Gevrey estimates of the resolvent $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ are proved at threshold zero in appropriately weighted spaces ([68]). In order to apply them to the semigroups e^{-tH} and e^{-itH}, $t \geq 0$, we need additional conditions on the potentials. Recall the two classes of potentials introduced in [68] for the heat and Schrödinger semigroups, respectively.

Definition 4.1.1. *Let $\mathcal{V}$ be the class of complex-valued potentials $V_0(x) = V_1(x) - iV_2(x)$ satisfying (4.1.2), (4.1.3) and the condition*

$$H_1 \geq -\alpha\Delta \tag{4.1.5}$$

for some constant $\alpha > 0$. Here $H_1 = -\Delta + V_1(x)$ is the selfadjoint part of H_0.

Definition 4.1.2. *Let $\mathcal{A}$ denote the class of complex-valued potentials $V_0(x)$ such that (4.1.2) and (4.1.3) are satisfied for some constant $\mu \in]0,1[$. Assume in addition that V_1 and V_2 are dilation analytic and extend holomorphically into a complex region of the form*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{C}^n; |x| > c^{-1}, |\, \mathit{Im}\, x| < c\,|\, \mathit{Re}\, x|\} \tag{4.1.6}$$

for some $c > 0$ and satisfy for some constants $c_1, c_2 > 0$ and $R \in [0, +\infty]$

$$|V_j(x)| \leq c_1\langle\, \mathit{Re}\, x\rangle^{-2\mu}, x \in \Omega, \quad j = 1, 2, \tag{4.1.7}$$

$$V_2(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1.8}$$

$$x \cdot \nabla V_1(x) \leq -c_2 \frac{x^2}{\langle x\rangle^{2\mu+2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x| \geq R, \text{ and} \tag{4.1.9}$$

$$V_2(x) \geq c_2\langle x\rangle^{-2\mu}, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x| < R. \tag{4.1.10}$$

If Condition (4.1.10) is satisfied with $R = 0$, we assume in addition

$$0 < \mu < \tfrac{3}{4}, \text{ if } n = 2 \text{ and } 0 < \mu < 1, \text{ if } n \geq 3. \tag{4.1.11}$$

The conditions (4.1.9) and (4.1.10) can be regarded as a (damped) global virial condition and is used to prove the absence of quantum resonances near threshold zero in [68], where sub-exponential time-decay estimates are obtained for compactly supported perturbations of model potentials in $\mathcal{V}$ (for the heat semigroup) or in $\mathcal{A}$ (for the Schrödinger semigroup) and for geometrically simple zero eigenvalue of H. Note that for $n = 3$, the repulsive Coulomb potential $V_0(x) = \frac{c_0}{|x|}$, $c_0 > 0$, belongs to $\mathcal{A}$.

In this paper, we consider more general potentials and need the following condition to compute the singularity of the resolvent $R(z) = (H - z)^{-1}$ at $z = 0$.

Assumption $(A1)$ Let zero be an eigenvalue of H of geometric multiplicity k. Assume that there exists a basis $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}$ of the eigenspace of H with eigenvalue zero verifying

$$\det\left(\langle\varphi_j, J\varphi_i\rangle\right)_{1\le i,j\le k} \neq 0. \tag{4.1.12}$$

The following result on the heat semigroup e^{-tH} will be proven by combining the ideas from [1] and [68].

Theorem 4.1.1. *Let $V_0 \in \mathcal{V}$ and $W = V - V_0$ satisfy the condition (4.1.2) with $\rho > 2\kappa\mu$, where κ is the integer given by Proposition 4.2.1. Assume that zero is an eigenvalue of H with geometric multiplicity k and assumption $(A1)$ holds. Then for any $a > 0$ there exist some constants $c_a, C_a > 0$ such that*

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\left(e^{-tH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H),\, Re\ \lambda\le 0} e^{-tH}\Pi_\lambda - \Pi_0\right)\| \le C_a e^{-c_a t^{\beta'}} \quad t > 0, \tag{4.1.13}$$

where $\beta' = \frac{1-\mu}{1+\kappa\mu}$ and Π_0 is the spectral projection defined by

$$\Pi_0 f = \sum_{j=0}^{k}\langle f, J\Psi_j\rangle\Psi_j, \qquad \forall\, f \in L^2, \tag{4.1.14}$$

where $\{\Psi_1, \cdots, \Psi_k\} \subset L^2$ is a basis of the eigenspace of H associated with the eigenvalue zero satisfying the relations

$$\langle\Psi_i, J\Psi_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{4.1.15}$$

with $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$ and $\delta_{ij} = 0$, otherwise.

Theorem 4.1.1 is proven in [68] for W compactly supported and $k = 1$. The main step of the proof of Theorem 4.1.1 is the asymptotic expansion of the resolvent $R(z) = (H - z)^{-1}$ at threshold zero with Gevrey estimates on the remainder (Theorem 4.3.4). To prove this result, we decompose H as $H = h_0 + W_c$ with $h_0 = -\Delta + v_0$ verifying (4.1.3) and W_c of compact support and use the equation $R(z) = (1 + K(z))^{-1}r_0(z)$ for $z \notin \sigma(H)$, where $r_0(z) = (h_0 - z)^{-1}$ and $K(z) = r_0(z)W_c$. The condition (A1) is used to ensure the existence of an asymptotic expansion for $(1 + K(z))^{-1}$ at $z = 0$. In fact when 0 is an eigenvalue of geometric multiplicity k of H, -1 is an eigenvalue of $K(0)$ with the same geometric multiplicity k and with finite algebraic multiplicity $m = \dim E$, where $E = \{u \in L^2; \exists j, (1 + K)^j u = 0\}$. Since $\dim\ker(1 + K(0)) = k$, there exists a Jordan basis $\mathcal{B}$ of E such that the matrix of $1 + K(0)$ restricted onto E is of the Jordan form:

$$A = \mathrm{Diag}(J_{m_1}, \cdots, J_{m_k})$$

where J_{m_l} is the Jordan bloc of order m_l associated with the eigenvalue 0 and $m_1 + \cdots m_k = m$. By Grushin method, the existence of an asymptotic expansion for $1 + K(z)$ is reduced to that of an $m \times m$ matric $E_{-+}(z)$ of the form

$$E_{-+}(z) = -A + zB + O(z^2).$$

Set

$$\begin{aligned} I &= \{1, \cdots, m\} \setminus \{m_1, m_1 + m_2, \cdots, m_1 + m_2 + \cdots + m_k\}, \\ J &= \{1, \cdots, m\} \setminus \{1, m_1 + 1, \cdots, m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + 1\}. \end{aligned}$$

If A is denoted by $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, then $a_{ij} = 1$ if $i \in I$ and $j \in J$ with $j = i + 1$ and $a_{ij} = 0$, otherwise. Then one can check that

$$\det E_{-+}(z) = z^k D_k + O(z^{k+1}) \tag{4.1.16}$$

for z near 0, where D_k is, up to a sign, equal to the minor of order k obtained from B by deleting all i-th lines and j-th columns with $i \in I$ and $j \in J$. One can prove by choosing appropriate bases of E that $D_k \neq 0$ if and only if the assumption (A1) is satisfied (cf. Lemma 4.3.2). See also [1] for non selfadjoint Schrödinger operators with quickly decreasing potentials and [68] in the case $k = 1$. Therefore the assumption (A1) is in some sense a necessary condition for $R(z)$ to admit an asymptotic expansion at $z = 0$ with the leading term of the order $\frac{1}{z}$. If one has for some $l \in \mathbb{N}$ $\det E_{-+}(z) = z^{k+l} D_{k+l} + O(z^{k+l+1})$ with $D_{k+l} \neq 0$, then one can show that $R(z)$ admits an asymptotic expansion at $z = 0$ with the leading term of the order $\frac{1}{z^{l+1}}$. But we do not have any example for which this condition is satisfied with $l \geq 1$.

The second main result of this work is about large-time expansion of the Schrödinger semigroup with sub-exponential time-decay estimates on the remainder. For this purpose, we introduce the following class of model potentials.

Definition 4.1.3. *Let $\mathcal{A}_1$ denote the subclass of potentials $V_0 \in \mathcal{V}$ satisfying that Im $V_0 \leq 0$ and there exists some potential $\widetilde{V}_0 \in \mathcal{A}$ with*

$$V_0(x) = \widetilde{V}_0(x), \quad |x| > R_1, \tag{4.1.17}$$

for some $R_1 > 0$.

For $V_0 \in \mathcal{A}_1$, denote $H_0 = -\Delta + V_0(x)$ and $\widetilde{H}_0 = -\Delta + \widetilde{V}_0(x)$ where $\widetilde{V}_0 \in \mathcal{A}$ coincides with $V_0(x)$ outside some compact. We use the technique of analytic distortion from quantum resonances to study e^{-itH} and need the following analyticity condition on $W(x) = V(x) - V_0(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} W \text{ is holomorphic in a complex region } \Omega \text{ of the form (4.1.6) for some } R_2 > 0 \text{ and} \\ \qquad\qquad |W(x)| \le C\langle \text{ Re } x\rangle^{-2\mu-\epsilon}, \ \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{4.1.18}$$

for some constants $C > 0$ and $\epsilon > 0$. In addition, one assumes that there exists $R_3 > 0$ such that

$$\text{Im } W(x) \le 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x| > R_3. \tag{4.1.19}$$

Since Im $W(x)$ is allowed to change sign in some bounded region, H may have outgoing positive resonances which are relevant to the asymptotic expansion of e^{-itH} as $t \to +\infty$.

If V is of short-range: $V(x) = O(\langle x\rangle^{-1-\epsilon})$ for some $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ is called real resonance of $H = -\Delta + V(x)$ if the equation $Hu = \lambda u$ admits a non-trivial solution $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ satisfying one of Sommerfeld radiation conditions:

$$u(x) = \frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}(a_\pm(\omega) + o(1)), \quad |x| \to \infty, \tag{4.1.20}$$

for some $a_\pm \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}), a_\pm \neq 0$. λ is called an outgoing (resp., incoming) positive resonance of H if u verifies (4.1.20) with sign $+$ (resp. with sign $-$). In this paper, we use the same definition of real resonances as in [68] because potential $V(x)$ has a complex long-range tail.

Let $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\chi_1(x) = 0$ for $|x| \le 1$ and $\chi_1(x) = 1$ for $|x| > 2$. For $R > 0$ sufficiently large : $R > 2\max\{R_1, R_2, R_3\}$, set $\chi_R(x) = \chi_1(\frac{x}{R})$ and

$$h_0 = -\Delta + v_0(x), \quad v_0 = V_0 + \chi_R W, \quad V_c = (1-\chi_R)V, \quad W_c = (1-\chi_R)W. \tag{4.1.21}$$

h_0 is a dissipative operator: Ran $h_0 \le 0$ and the boundary value of the resolvent $r_0(\lambda + i0) = \lim_{\epsilon\to 0^+}(h_0 - (\lambda + i\epsilon))^{-1}$ exists in $\mathcal{B}(-1, s; 1, -s)$ for any $s > \frac{1}{2}$ and is continuous in $\lambda > 0$ ([60]). The resolvent equation $R(z) = (1 + r_0(z)W_c)^{-1}r_0(z)$ motivates the following definition

Definition 4.1.4. *Let $\lambda > 0$ and $G_0^+(\lambda) = r_0(\lambda + i0)$. $\lambda > 0$ is called outgoing positive resonance of $H = -\Delta + V(x)$ if -1 is an eigenvalue of the compact operator $G_0^+(\lambda)W_c$ in $L^{2,-s}$ for $s > \frac{1}{2}$. Denote $r_+(H)$ the set of outgoing positive resonances of H. For $\lambda \in r_+(H)$, denote $m(\lambda)$ the algebraic multiplicity of eigenvalue -1 of $G_0^+(\lambda)W_c$ and $k(\lambda)$ its geometric multiplicity.*

The above definition is independent of the cut-off χ_R used. In fact if h_0 and $\widetilde{h}_0$ are two operators constructed as above with two different cut-offs χ_R and $\widetilde{\chi}_{\widetilde{R}}$ with R and $\widetilde{R}$ sufficiently large and $H = \widetilde{h}_0 + \widetilde{W}_c$, one deduces from the formula

$$1 + r_0(z)W_c = \left(1 + r_0(z)(\chi_R - \widetilde{\chi}_{\widetilde{R}})W\right)\left(1 + \widetilde{r}_0(z)\widetilde{W}_c\right)$$

and the similar one with χ_R and $\widetilde{\chi}_{\widetilde{R}}$ interchanged that -1 is an eigenvalue of $G_0^+(\lambda)W_c$ if and only if it is an eigenvalue of $\widetilde{G}_0^+(\lambda)\widetilde{W}_c$. If V_0 and V are short-range potentials, one can check that $\lambda > 0$ is an outgoing resonance if and only if the equation $(H - \lambda)u = 0$ admits a solution satisfying the outgoing Sommerfeld radiation condition (4.1.20).

For $\lambda \in r_+(H)$, we define the symmetric bilinear form B_λ^+ associated with λ

$$B_\lambda^+(\varphi, \psi) = \langle G_1^+(\lambda)W_c\psi, JW_c\varphi\rangle \ \text{ for all } \ \varphi, \psi \in L^{2,-s}(\mathbb{R}^n), \tag{4.1.22}$$

where $G_1^+(\lambda) = \lim_{z\to\lambda,\ \mathrm{Im}\ z>0} \frac{d}{dz} r_0(z)$ in the norm sense of $\mathcal{B}(-1, s, 1, -s)$, $s > 3/2$, and $J : f(x) \mapsto \overline{f(x)}$ is the complex conjugation.

Assumption $(A2)$**:** For all $\lambda \in r_+(H)$, one assumes that there exists $\{\psi_1^+, \cdots, \psi_{k(\lambda)}^+\} \subset L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$, a basis of Ker$(I + G_0^+(\lambda)W_c)$ such that

$$\det\left(B_\lambda^+(\psi_i^+, \psi_j^+)\right)_{1\le i,j\le k(\lambda)} \neq 0. \tag{4.1.23}$$

The condition (4.1.23) is similar to that used in [1, 73] for quickly decreasing potentials.

Theorem 4.1.2. *Let $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and $W(x) = V(x) - V_0(x)$ satisfy (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19). Suppose that the conditions $(A1)$ and $(A2)$ hold for zero eigenvalue and positive outgoing resonances, respectively. Then the set of outgoing resonances $r_+(H)$ of H is at most finite and there exists $c > 0$ such that for any $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, one has*

$$\|\chi\left(e^{-itH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H)\cap\overline{\mathbb{C}}_+} e^{-itH}\Pi_\lambda - \Pi_0 - \sum_{\nu\in r_+(H)} e^{-it\nu}\Pi_0^+(\nu)\right)\chi\| \le C_\chi e^{-c\,t^\beta} \quad t > 0. \tag{4.1.24}$$

Here $\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu}$, Π_λ denotes the Riesz projection associated with the discrete eigenvalue λ of H, Π_0 is the projector given in (4.1.14) and $\Pi_0^+(\nu)$ is an operator of rank $k(\nu)$ given by

$$\Pi_0^+(\nu)f = \sum_{j=0}^{k(\nu)}\langle f, J\Phi_j^+(\nu)\rangle\Phi_j^+(\nu) \qquad \textit{for all } \ f \in L^{2,s}, s > 1/2, \tag{4.1.25}$$

with

$$B_\nu^+(\Phi_i^+(\nu), \Phi_j^+(\nu)) = \delta_{ij}, \tag{4.1.26}$$

where B_ν^+ is the bilinear form defined in (4.1.22) and $\{\Phi_1^+(\nu), \cdots, \Phi_{k(\nu)}^+(\nu)\} \subset L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$, is a basis of the eigenspace associated with the eigenvalue -1 of $r_0(\lambda + i0)W_c$.

Of course, if zero eigenvalue and/or positive outgoing resonances are absent, the asymptotic expansion (4.1.24) still holds with the associated terms disappeared.

Remark 4.1.5. *1. Theorem 4.1.2 can be compared with [68, Theorem 2.4 (b)], where the perturbation $W = V - V_0$ is compactly-supported with $V_0 \in \mathcal{A}$ (satisfying a global virial condition), the zero eigenvalue is supposed to be geometrically simple, the condition $(A2)$ is not assumed and the contribution from positive outgoing resonances has not been explicitly calculated. Here V_0 satisfies only a virial condition outside some compact, the geometrical multiplicity of zero eigenvalue is arbitrary and the contribution of positive outgoing resonances is explicitly calculated in terms of an orthonormal basis relatively to $B_\nu^+(\cdot,\cdot)$.*

2. The proofs of Theorem 4.1.2 and [68, Theorem 2.4 (b)] are both based on the resolvent expansions near the threshold eigenvalue and outgoing resonances. But the methods to establish the resolvent expansions are different. To study the asymptotic expansion of $(1 + R_0(z)W)^{-1}$ in a sector below the positive half-axis, in [68] we constructed an approximate Grushin problem with θ-independent bases (where θ is the complex parameter used in analytic deformation of operators), while in this work we study θ-dependent Grushin problems by constructing Jordan bases depending holomorphically on θ.

Example 4.1.6. *Let $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ such that there exist some constants $\mu \in]0,1[$ and $R > 0$ such that $\varphi(x) = \langle x\rangle^{1-\mu}$ for $|x| > R$. The associated Witten Laplacian acting on functions is given by*

$$-\Delta_\varphi = -\Delta + V(x) \quad \text{with } V(x) = (\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)(x) - \Delta\varphi(x).$$

Take $V_0(x) = \chi(\frac{x}{R}) + (1-\chi(\frac{x}{R}))\frac{(1-\mu)^2}{\langle x\rangle^{2\mu}}$ where χ is a cut-off with $0 \le \chi \le 1$ and $\chi(x) = 1$ if $|x| \le 2$; 0 if $|x| \ge 3$. Then $V(x)$ can be decomposed as $V(x) = V_0(x) + W(x)$ with $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and W satisfying the conditions of Theorem 4.1.2. But $V(x)$ can not be decomposed as $V(x) = \widetilde{V}_0(x) + \widetilde{W}(x)$ with $\widetilde{V}_0 \in \mathcal{A}$ (which in particular requires $\widetilde{V}_0(x)$ to be dilation analytic) and $\widetilde{W}$ compactly supported. Therefore Theorem 4.1.2 can be applied to $e^{it\Delta_\varphi}$, while [68, Theorem 2.4 (b)] cannot.

The remaining part of this work is organized as follows. In Section 2, we recall from [68] the Gevrey estimates for the resolvent of the model operator needed in this paper. The asymptotic expansion of the resolvent $R(z)$ (or the cut-off resolvent $\chi R(z)\chi$ with $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) near $z = 0$ is calculated in Section 3. In Section 4, we study resolvent expansion near positive resonances. Finally Theorems 4.1.1 and 4.1.2 are proved in Section 5.

Notation. We denote $H^{r,s}$, $r \ge 0, s \in \mathbb{R}$ the weighted Sobolev space of order r with the weight $\langle x\rangle^s$ on $\mathbb{R}^n$: $H^{r,s} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|u\|_{r,s} = \|\langle x\rangle^s(1-\Delta)^{\frac{r}{2}}u\|_{L^2} < \infty\}$. For $r < 0$, $H^{r,s}$ is defined as the dual space of $H^{-r,-s}$ with dual product identified with the scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ of $L^2(\mathbb{R}^n)$. Set $H^{0,s} = L^{2,s}$. $\mathcal{B}(r, s; r', s')$ stands for the space of continuous linear operators from $H^{r,s}$ to $H^{r',s'}$. If $(r,s)=(r',s')$, we denote $\mathcal{B}(r,s)=\mathcal{B}(r,s;r',s')$. Unless otherwise mentioned explicitly, $\|\cdot\|$ denotes norm in $L^2(\mathbb{R}^n)$ or in $\mathcal{B}(L^2)$ when no confusion is possible. $\mathbb{C}_\pm$ denote respectively the upper and the lower open half-plane and $\overline{\mathbb{C}}_\pm$ their closure. Set $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. For $\theta_1<\theta_2$ and $r>0$, $S(\theta_1,\theta_2)$ denotes the sector

$$S(\theta_1,\theta_2)=\{z\in\mathbb{C}^*;\theta_1<\arg z<\theta_2\}$$

and $\Omega(r,\theta_1,\theta_2)$ is a part of $S(\theta_1,\theta_2)$ near zero :

$$\Omega(r,\theta_1,\theta_2)=\{z\in S(\theta_1,\theta_2);|z|<r\}.$$

In this work, the scalar product denoted as $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is assumed to be linear with respect to the left variable.

4.2 Gevrey estimates for the resolvent of the model operators

For $V_0\in\mathcal{V}$ and $W=V-V_0$ verifying (4.1.2), set $v_0(x)=V_0(x)+\chi_1(\frac{x}{R})W(x)$ where $\chi_1\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is a cut-off function with $\chi_1(x)=0$ for $|x|\le 1$ and $\chi_1(x)=1$ for $|x|\ge 2$. Since $\rho>2\mu$, for $R>1$ large enough, v_0 satisfies condition (4.1.3) and the results on Gevrey estimates of the resolvent of [68] can be applied to $h_0=-\Delta+v_0(x)$. Let $r_0(z)=(h_0-z)^{-1}$. Define operator $G_0:\mathrm{Ran}\ h_0\to L^2$ by

$$G_0f=\lim_{\mathrm{Re}\ z<0,z\to 0}r_0(z)f,\quad f\in\mathrm{Ran}\ h_0.$$

G_0 is an unbounded closed operator with $D(G_0)=\mathrm{Ran}\ h_0$. It is proven that $G_0:L^{2,s}\to L^{2,s-2\mu}$ is continuous (cf. [68, Lemma 3.3]). The following result is consequence of [68, Theorem 2.1].

Theorem 4.2.1. *Let $V_0\in\mathcal{V}$. Then for any $a>0$, there exist some constants $C_a,c_a>0$ such that*

$$\|\langle x\rangle^{-\tau}e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}G_0^N\langle x\rangle^\tau\|+\|\langle x\rangle^\tau G_0^N e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\langle x\rangle^{-\tau}\|\le C_ac_a^{N+\tau}(N+\tau)^{\frac{\tau}{1-\mu}+\gamma N}\quad(4.2.1)$$

for all $N\in\mathbb{N}^*$ and $\tau\ge 0$. Here $\gamma=\frac{2\mu}{1-\mu}$.

Theorem 4.2.1 is Gevrey estimates for the resolvent $r_0(z)$ at $z=0$. To obtain sub-exponential time-decay estimates for the heat semi-group, we need Gevrey estimates of the resolvent in some region of the right half-plane. Recall first the following result on $R_0(z)=(H_0-z)^{-1}$ ([68, Proposition 4.1]).

Proposition 4.2.1. *Let $V_0\in\mathcal{V}$ for some $\mu\in]0,1[$. Then*

1. *There exist $\mu' \in]0,1]$ and $C_0 > 0$ such that the numerical range $N(H_0)$ of H_0 is contained in a region of the form $\{z;\ \mathit{Re}\ z \geq 0, |\ \mathit{Im}\ z| \leq C_0(\ \mathit{Re}\ z)^{\mu'}\}$. Consequently, for $\delta > 0$ small enough there exists some constant M_0 such that*

$$\|R_0(z)\| \leq \frac{M_0}{|z|^{\frac{1}{\mu'}}} \tag{4.2.2}$$

for $z \in O(\delta)$ where

$$O(\delta) = \{z \in \mathbb{C}^*; |z| < \delta,\ \mathit{Re}\ z < \delta|\ \mathit{Im}\ z|^{\frac{1}{\mu'}}\}. \tag{4.2.3}$$

2. *If κ is the smallest integer such that $\kappa \geq \frac{1}{\mu'}$, one has*

$$\|\langle x\rangle^{-2\kappa\mu} R_0(z)\| \leq C \tag{4.2.4}$$

uniformly in $z \in O(\delta)$.

Note that in [68], the constant μ' used to describe the numerical range of H_0 is obtained from the generalized Hardy inequality. If one knows $\mu' = 1$ (for example if H_0 is selfadjoint), then κ can be taken to be 1 in the above proposition.

Proposition 4.2.2. *Let $V_0 \in \mathcal{V}$ for some $\mu \in]0,1[$ and κ be given by Proposition 4.2.1. Assume the condition (4.1.2) is satisfied for some $\rho > 2\kappa\mu$. Let h_0 be defined as above with $R > 1$ appropriately large. Then one has*

(a) *h_0 has no eigenvalues in $O(\delta)$ and*

$$\|\langle x\rangle^{-2\kappa\mu} r_0(z)\| \leq C \tag{4.2.5}$$

uniformly in $z \in O(\delta)$. In addition,

$$\lim_{z\in O(\delta), z\to 0} r_0(z) = G_0 \tag{4.2.6}$$

as bounded operators from $L^{2,s}$ to $L^{2,s-r}$ for all $s \in \mathbb{R}$ and $r > 2\kappa\mu$.

(b) *One has the following Gevrey estimates of the resolvent $r_0(z)$: for any $a > 0$, there exist $c, C > 0$ such that*

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} r_0(z)\| \leq C c^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \quad \forall N \geq 1, \tag{4.2.7}$$

uniformly in $z \in O_0(\delta) \equiv O(\delta) \cup \{0\}$, where $\gamma = \frac{2\mu}{1-\mu}$.

Proof. (a). One has

$$r_0(z) = R_0(z) - r_0(z)\chi_R W R_0(z). \tag{4.2.8}$$

Since $\rho > 2\kappa\mu$, it follows from (4.2.4) that if $R > 1$ is appropriately large,

$$\|\chi_R W R_0(z)\| \leq C R^{-(\rho-2\kappa\mu)} \|\langle x\rangle^{-2\kappa\mu} R_0(z)\| < 1$$

uniformly in $z \in O(\delta)$. This proves $1 + \chi_R W R_0(z)$ is invertible with uniformly bounded inverse. Therefore h_0 has no eigenvalues in $O(\delta)$ and

$$r_0(z) = R_0(z)(1 + \chi_R W R_0(z))^{-1}, \quad z \in O(\delta),$$

which together with (4.2.4) gives the uniform estimate (4.2.5). (4.2.6) is deduced from (4.2.5) and the resolvent equation

$$r_0(z) - G_0 = z G_0 r_0(z), \tag{4.2.9}$$

using the compactness of $r_0(z) - G_0$ as operators from $L^{2,s}$ to $L^{2,s-r}$ for $r > 2\kappa\mu$.

(b) is derived from (a), Theorem 4.2.1 and the formula

$$r_0(z) = \sum_{j=0}^{q-1} z^j G_0^{j+1} + z^q G_0^q r_0(z), \quad z \in O(\delta) \tag{4.2.10}$$

with $q = \kappa$. See [68, Corollary 4.2] for details when $r_0(z)$ is replaced by $R_0(z)$. ■

4.3 Resolvent expansion at threshold zero

In this section, we look at the case where H has an embedded eigenvalue zero with arbitrary geometric multiplicity. To obtain the asymptotic expansion of $R(z)$ with Gevrey estimates on the remainder, we use the resolvent equation $R(z) = (I + r_0(z)W_c)^{-1} r_0(z)$ for $z \notin \sigma(H)$.

4.3.1 Asymptotic expansion of $R(z)$

In this subsection, we assume $V_0 \in \mathcal{V}$. Set $K_0(z) = r_0(z)W_c : L^2 \to L^2$. The compact operator-valued function $z \mapsto K_0(z)$ is meromorphic on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ with poles at discrete eigenvalues of h_0. The condition (4.1.3) is satisfied for h_0 and zero is not an eigenvalue of h_0. According to Proposition 4.2.2, if $V_0 \in \mathcal{V}$ and W satisfies (4.1.2) for some $\rho > 2\kappa\mu$, then G_0 is continuous as operator from $L^{2,s}$ to $L^{2,s-r}$ for all $s \in \mathbb{R}$ and $r > 2\kappa\mu$. In addition, $K_0 := K_0(0) = G_0 W_c$ is a compact operator on L^2. One can check that zero is an embedded eigenvalue of H if and only if -1 is a discrete eigenvalue of K_0 and their eigenspaces coincide in L^2. Although the Riesz projection for the eigenvalue zero of H can not be defined, that for eigenvalue -1 of K_0 is well defined and is given by

$$\Pi_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z+1|=\epsilon_0} (z - K_0)^{-1}\, dz,$$

for some $\epsilon_0 > 0$ small enough such that -1 is the only eigenvalue of K_0 inside the cercle $\{z; |z+1| = \epsilon_0\}$.

Let E = Ran Π_1, m = rank Π_1 and k = dim Ker$(I + K_0)$. E is a subspace of L^2. Consider the non degenerate bilinear form B on $E \times E$:

$$\forall u, v \in E, \qquad B(u, v) = \langle u, v^* \rangle, \tag{4.3.1}$$

where $v^* := JW_c v$. Note that the relations $h_0^* = Jh_0 J$ and $H^* = JHJ$ imply that $JW_c K_0 = K_0^* JW_c$ and $JW_c\Pi_1 = \Pi_1^* JW_c$. The mapping $S: \ \phi \to \phi^* = JW_c\phi$ sends Ran Π_1 to Ran Π_1^* and $\ker(1+K)$ to $\ker(1+K^*)$. It is injective on $\ker(1+K)$, because if $\phi \in \ker(1+K)$ with $\phi \neq 0$ and $\phi^* = 0$, then $W_c\phi = 0$ and hence $h_0\phi = 0$. This is impossible because 0 is not an eigenvalue of h_0. We infer that if $\mathcal{B}$ is a Jordan basis of Ran Π_1, then $\mathcal{B}^* = S(\mathcal{B})$ is free in Ran Π_1^*, hence S is injective from Ran Π_1 into Ran Π_1^*. Since rank Π_1 = rank Π_1^*, S is bijective from Ran Π_1 onto Ran Π_1^*. The argument of Lemma 5.13 in [68] based on the bijectivity of S shows that the bilinear form $B(\cdot,\cdot)$ defined above is non-degenerate on $E \times E$.

In order to study the case where the eigenvalue -1 of K_0 has arbitrary geometric multiplicity $k \in \mathbb{N}^*$, we decompose E into k invariant subspaces of K_0, such that B restricted to each one is non-degenerate. More precisely, we have

Lemma 4.3.1. *Assume that -1 is an eigenvalue of K_0 of geometric multiplicity $k \in \mathbb{N}^*$ and algebraic multiplicity m. Then there exist k invariant subspaces of K_0, denoted by $E_1, \cdots, E_k$, such that*

1. *$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, where $\forall i \neq j$: $E_i \perp E_j$ with respect to the bilinear form B.*
2. *$\forall 1 \leq i \leq k$, there exists a basis $\mathcal{U}_i := \{u_r^{(i)} = (I+K_0)^{m_i - r} u_{m_i}^{(i)}, 1 \leq r \leq m_i\} \subset L^2$ of E_i such that*

$$(I + K_0)^{m_i} u_{m_i}^{(i)} = 0 \text{ and } B(u_1^{(i)}, u_{m_i}^{(i)}) = c_i \neq 0. \tag{4.3.2}$$

3. *$\forall 1 \leq j \leq k$, there exists a dual basis $\mathcal{W}_j := \{w_1^{(j)}, \cdots, w_{m_j}^{(j)}\} \subset L^2$ of E_j such that*

$$w_r^{(j)} \in Ker(I + K_0)_{|E_j}^{m_j+1-r}, \ B(u_l^{(i)}, w_r^{(j)}) = \delta_{lr}\delta_{ij}.$$

4. *dim ker$(1 + K_0)_{|E_j} = 1$, $\forall j = 1, \cdots, k$.*

Moreover, the matrix of $\Pi_1(I + K_0)\Pi_1$ in the basis $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^k \mathcal{U}_i$ of E is a $k \times k$ block diagonal matrix given by

$$J = diag(J_{m_1}, J_{m_2}, \cdots, J_{m_k}), \tag{4.3.3}$$

where

$$J_{m_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_j \times m_j} \tag{4.3.4}$$

is a Jordan block. We have also denoted $m_j = \dim E_j$ *for* $j = 1, \cdots, k$*, such that* $m = m_1 + \cdots + m_k$*.*

For the proof of the above lemma, we refer to that of Lemma 3.1 in [1] in the case where 0 is an eigenvalue of $-\Delta + V(x)$ with a quickly decreasing complex-valued potential $V(x)$. The proof is algebraic in nature and is still valid in the present case.

As consequence of Lemma 4.3.1, one has the following

Corollaire 4.3.1. *Let a basis* $\mathcal{B} \equiv \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$ *of* E *and its* B*-dual basis* $\mathcal{B}^* \equiv \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{W}_i$ *be constructed as in Lemma 4.3.1. Then the Riesz projection* Π_1 *can be represented as*

$$\Pi_1 f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} B(f, w_j^{(i)}) u_j^{(i)}, \qquad \forall f \in L^2. \tag{4.3.5}$$

Grushin problem for $I + K_0(z)$

Denote $\Pi_1' = I - \Pi_1$. Since $I + K_0$ is injective on Ran Π_1', it is invertible on Ran Π_1' and by an argument of perturbation $\Pi_1'(I + K_0(z))\Pi_1'$ is invertible on Ran Π_1' for $z \in O(\delta)$, $\delta > 0$ small, with the inverse denoted by

$$E(z) = \left(\Pi_1'(I + K_0(z))\Pi_1'\right)^{-1} \Pi_1' \in \mathcal{B}(L^2). \tag{4.3.6}$$

According to Proposition 4.2.2, $K_0(z)$ is continuous and uniformly bounded in $z \in O(\delta)$. Since W_c is of compact support, (4.2.7) leads to the following Gevrey estimates on $K_0(z)$: there exist some constants $C, c > 0$ such that

$$\|K_0(z)^{(N)}\| \le C c^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \quad N \in \mathbb{N}^*,$$

for $z \in O_0(\delta)$. Here $\|\cdot\|$ is the norm of bounded operators in L^2 and $K_0(z)^{(N)}$ denotes the N-th derivative of $K_0(z)$. By operations in Gevrey classes, one deduces that there exist constants C' and $c_1 > 0$ such that $E(z)$ satisfies the following Gevrey estimates:

$$\|E(z)^{(N)}\| \le C' c_1^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{4.3.7}$$

for all $N \in \mathbb{N}^*$ and $z \in O_0(\delta)$. In addition, for all $q \in \mathbb{N}$, one has

$$E(z) = \sum_{j=0}^{q} z^j E_j + z^q \epsilon_q(z), \qquad z \in O(\delta), \tag{4.3.8}$$

in $\mathcal{B}(L^2)$, where $E_0 = \left(\Pi_1'(I + K_0)\Pi_1'\right)^{-1} \Pi_1'$ and other terms $E_j, j = 1, \cdots, q$, can be computed explicitly. Moreover, the remainder $\epsilon_q(z)$ satisfies the following Gevrey estimates: there exist $C_q, c_q > 0$ such that

$$\|\epsilon_q(z)^{(N)}\| \le C_q c_q^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{4.3.9}$$

for all $N \in \mathbb{N}^*$ and $z \in O_0(\delta)$.

Define $S : \mathbb{C}^m \to \text{Ran}\,\Pi_1$ and $T : L^2 \to \mathbb{C}^m$ by

$$Sc = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_j} c_j^{(i)} u_j^{(i)}, \qquad \forall\, c = \bigoplus_{i=1}^{k} \left(c_1^{(i)}, \cdots, c_{m_i}^{(i)}\right) \in \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{m_i},$$

$$Tu = \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\langle u, (w_1^{(i)})^* \rangle, \cdots, \langle u, (w_{m_i}^{(i)})^* \rangle\right), \qquad \forall\, u \in L^2.$$

Then one has $TS = I_m$ and $ST = \Pi_1$. Set $W(z) = 1 + K_0(z)$ and

$$E_+(z) = S - E(z)W(z)S, \tag{4.3.10}$$

$$E_-(z) = T - TW(z)E(z), \tag{4.3.11}$$

$$E_{-+}(z) = -TW(z)S + TW(z)E(z)W(z)S. \tag{4.3.12}$$

Since $E(z)$ and $W(z)$ satisfy Gevrey estimates of the form (4.3.9) on $O_0(\delta)$, $E_\pm(z)$ and $E_{-+}(z)$ satisfy similar estimates on $O_0(\delta)$. In addition, $E_{-+}(z)$ is invertible if and only if $(I + K_0(z))$ is it and one has the formula

$$(I + r_0(z)W_c)^{-1} = E(z) - E_+(z)E_{-+}(z)^{-1}E_-(z) \text{ on } L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.3.13}$$

In order to study the singularity of $(I + r_0(z)W_c)^{-1}$ we calculate the expansion of $\det E_{-+}(z)$ in power of z, as well as that of $E_{-+}(z)^{-1}$ by using the method developed in [1].

Lemma 4.3.2. *Let $V_0 \in \mathcal{V}$ and W satisfy condition (4.1.2) for some $\rho > 2\kappa\mu$ with $\kappa \ge 1$ given by Proposition 4.2.1. Assume that -1 is an eigenvalue of $K_0 = G_0 W_c$ of geometric multiplicity $k \ge 1$. Assume in addition that $(A1)$ holds. Then, for all $q \in \mathbb{N}^*$, one has*

$$\det E_{-+}(z) = \sum_{j=0}^{q} \sigma_j z^{k+j} + o(|z|^{k+q}), \tag{4.3.14}$$

for $z \in O(\delta)$ with $\delta > 0$ small, where $\sigma_0 = \sigma' \times \det\left(\langle \varphi_j, J\varphi_i \rangle\right)_{1 \le i,j \le k} \ne 0$. Moreover, $\det E_{-+}(z)$ satisfies Gevrey estimates of order $1 + \kappa\gamma$.

Proof. Using Lemma 4.3.1, we partition the matrix $E_{-+}(z)$ as follows:

$$\begin{aligned} E_{-+}(z) &= \left(E_{-+}^{(ij)}(z)\right)_{1\le i,j\le k} \text{ with} \\ E_{-+}^{(ij)}(z) &= -\left(\left\langle\left(I-(I+r_0(z)W_c)E(z)\right)(I+r_0(z)W_c)u_r^{(j)}, JW_c w_\ell^{(i)}\right\rangle\right)_{\ell,r}, \end{aligned}$$

is a $m_i \times m_j$ block. Introducing the expansion (4.2.10) for $q \in \mathbb{N}^*$ into the previous formula, we obtain

$$E_{-+}(z) = \sum_{\ell=0}^{q-1} z^\ell E_{-+,\ell} + z^q \epsilon_{-+,q}(z), \tag{4.3.15}$$

where

$$\begin{aligned} E_{-+,0}^{(ij)} &= -\left(\left\langle (I+G_0W_c)u_r^{(j)}, JW_c w_\ell^{(i)}\right\rangle\right)_{\ell,r}, \\ E_{-+,1}^{(ij)} &= -\left(\left\langle G_0W_c u_r^{(j)}, JG_0W_c w_\ell^{(i)}\right\rangle\right)_{\ell,r}, \\ E_{-+,2}^{(ij)} &= -\left(\left\langle (I-G_0W_cE(0))G_0^2W_c u_r^{(j)}, JG_0W_c w_\ell^{(i)}\right\rangle\right)_{\ell,r} \text{ with} \\ E(0) &= \left(\Pi_1'(I+G_0W_c)\Pi_1'\right)^{-1}\Pi_1'. \end{aligned}$$

Also other terms $E_{-+,\ell}, \ell = 3, \cdots, q-1$ can be calculated explicitly. In addition, it can be seen from (4.3.9) that the remainder $\epsilon_{-+,q}(z)$ satisfies the following Gevrey estimates: $\exists\, c, C > 0$ such that

$$\left\| \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \epsilon_{-+,q}(z) \right\| \le C c^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{4.3.16}$$

for all $N \ge 1$ and $z \in O_0(\delta)$, where the above norm is the matrix norm.

We can simplify the form of the above matrices as follows: Since $u_1^{(j)} \in \mathrm{Ker}(I + G_0W_c)$, $(I+G_0W_c)u_r^{(j)} = u_{r-1}^{(j)}$, $r = 2, \cdots, m_j$, $1 \le j \le k$, and $w_{m_i}^{(i)} = c_i^{-1}u_1^{(i)}$ (c_i, $1 \le i \le k$, are given in (4.3.2)), then for all $1 \le i, j \le k$ we have

$$E_{-+,0}^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\delta_{ij} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_i\times m_j} \quad \text{and} \tag{4.3.17}$$

$$E_{-+,1}^{(ij)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ a_{ij} & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_i\times m_j} \quad \text{with } a_{ij} = -c_i^{-1}\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle. \tag{4.3.18}$$

Thus, to obtain (4.3.14) we shall calculate det$(E_{-+,0}+zE_{-+,1})$ by following the method used in [1] which is based on Lidskii's idea ([44]).

First, for $z \neq 0$ we introduce the $k \times k$ block diagonal matrix $L(z)$ partitioned conformally with the block structure of $E_{-+}(z)$, given by

$$L(z) = \text{diag}(L_1(z), \cdots, L_k(z)), \tag{4.3.19}$$

where

$$L_i(z) = \text{diag}(1, \cdots, 1, z^{-1}), \ \forall 1 \leq i \leq k.$$

Let $q \geq 2$. Set $E_{0,1}(z) = E_{-+,0} + zE_{-+,1}$. Multiplying $E_{0,1}(z)$ on the left by $L(z)$, we obtain

$$\widetilde{E}_{0,1}(z) := L(z)E_{0,1}(z) = \widetilde{E}_0 + z\,\widetilde{E}_1, \tag{4.3.20}$$

where the block entries of the obtained matrices $\widetilde{E}_0$ and $\widetilde{E}_1$ have the following forms:

$$\widetilde{E}_0^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\delta_{ij} \\ a_{ij} & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \qquad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

$$\widetilde{E}_1^{(ij)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \qquad \forall 1 \leq i, j \leq k. \tag{4.3.21}$$

The above terms a_{ij} are given in (4.3.18).

Next, we calculate det $\widetilde{E}_{0,1}(z)$ where it is clear from (4.3.20) that it is a polynomial of z. We have

$$\det \widetilde{E}_{0,1}(z) = \det \widetilde{E}_0 + O(|z|), \qquad \forall z \in O(\delta). \tag{4.3.22}$$

Then, let us calculate det $\widetilde{E}_0(0)$. By expanding the determinant of $\widetilde{E}_{0,1}(0)$ along the rows of $\widetilde{E}_{0,1}(0)$ that are containing only -1, we obtain

$$\det \widetilde{E}_0 = \det\,(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} = \sigma'' \times \det\left(\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0, \tag{4.3.23}$$

where $\sigma'' = (-1)^k c_1^{-1} \cdots c_k^{-1}$ by (4.3.18). (See also the proof of Theorem 2.1 in [47] for a specific example with 12×12 matrix that illustrates the method to calculate the determinant).

Finally, for $z \in O(\delta)$ with $\delta > 0$ small, it follows from (4.3.20), (4.3.22) and (4.3.23) that

$$\begin{aligned}\det E_{0,1}(z) &= (\det L(z))^{-1}\left(\det \widetilde{E}_0 + O(|z|)\right)\\ &= z^k \det\, (a_{ij})_{1\le i,j\le k} + O(|z|^{k+1}).\end{aligned}$$

Thus (4.3.14) can be deduced from (4.3.15) and the previous equation. Moreover, Gevrey estimates of order $1+\kappa\gamma$ for det $E_{-+}(z)$ on $O_0(\delta)$ can be derived from that of $E_{-+}(z)$. ■

In the previous lemma we have given an sufficient condition for the invertibility of $E_{-+}(z)$ for $z \in O(\delta)$. Now we give the asymptotic expansion of its inverse.

Lemma 4.3.3. *Suppose that assumptions in Lemma 4.3.2 are satisfied. Then*

$$E_{-+}(z)^{-1} = \frac{\mathcal{F}_{-1}}{z} + \mathcal{F}(z) \tag{4.3.24}$$

for $z \in O(\delta)$, $\delta > 0$ small, where $\mathcal{F}_{-1}$ is a matrix of order m and of rank k, whose block entries are of the form

$$\mathcal{F}_{-1}^{(ij)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall 1 \le i,j \le k, \tag{4.3.25}$$

with

$$(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le k} = A_k^{-1}, \tag{4.3.26}$$

and the remainder $\mathcal{F}(z)$ is continuous up to $z = 0$ and satisfies Gevrey estimates of the form (4.3.16) on $O_0(\delta)$.

Proof. To obtain the expansion of $E_{-+}(z)^{-1}$ we compute the inverse of the leading term $E_{0,1}(z) = E_{-+,0} + zE_{-+,1}$ in (4.3.12). By regularity of the matrix $L(z)$ for $z \neq 0$ given in (4.3.19), we observe that $E_{0,1}(z)$ is invertible if and only if $\widetilde{E}_{0,1}(z)$ in (4.3.20) is invertible. Thus our problem is reduced to calculate $\widetilde{E}_{0,1}(z)^{-1}$ if it does exist. Indeed, if the condition (4.1.12) holds, then by (4.3.23) the matrix $\widetilde{E}_0$ is invertible with

$$\widetilde{E}_0^{-1} = \frac{{}^t Com \widetilde{E}_0}{\det \widetilde{E}_0}.$$

By using the same technique to calculate det $\widetilde{E}_0$, we can calculate the minors of the matrix $\widetilde{E}_0$. We obtain

$$\widetilde{E}_0^{-1} = \mathcal{F}_{-1} + \widetilde{\mathcal{F}}_0,$$

where $\mathcal{F}_{-1}$ is given in (4.3.25) and the block entries of $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ are of the form

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0^{(ij)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k.$$

Moreover, to prove (4.3.26) we check by using the definition of coefficients $\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq k$, that

$$(\det A_k)\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |[A_k]_j^i|,$$

where we denoted by $|[A_k]_j^i|$ the (j, i)-th minor of the matrix A_k. Thus, for $z \in O(\delta), \delta > 0$ small enough, $\widetilde{E}_{0,1}(z)$ is invertible, with

$$\widetilde{E}_{0,1}(z)^{-1} = \mathcal{F}_{-1} + \widetilde{\mathcal{F}}_0 - z\widetilde{E}_0^{-1}\widetilde{E}_1\widetilde{E}_0^{-1} + \widetilde{\mathcal{F}}(z), \tag{4.3.27}$$

where the remainder $\widetilde{\mathcal{F}}(z)$ is analytic in $z \in O(\delta)$ and continuous for $z \in O_0(\delta)$. By regularity of the matrix $L(z)$ for $z \neq 0$, it follows from (4.3.20) that

$$E_{0,1}(z)^{-1} = \widetilde{E}_{0,1}(z)^{-1} L(z).$$

In addition, we can easily check that

$$\mathcal{F}_{-1} L(z) = \frac{\mathcal{F}_{-1}}{z} \text{ and } \widetilde{\mathcal{F}}_0 L(z) = \widetilde{\mathcal{F}}_0.$$

This yields

$$E_{0,1}(z)^{-1} = \frac{\mathcal{F}_{-1}}{z} + \widetilde{\mathcal{F}}_0(I - \widetilde{E}_1\mathcal{F}_{-1}) + \mathcal{F}_1(z),$$

for $z \in O(\delta)$, where $\mathcal{F}_1(z)$ is analytic in $z \in O(\delta)$ and continuous for $z \in O_0(\delta)$.

Finally, for $z \in O(\delta)$, the expansion (4.3.24) of $E_{-+}(z)^{-1}$ follows directly from (4.3.15) and the above expansion of $E_{0,1}(z)^{-1}$. In addition, Gevrey estimates of the remainder $\mathcal{F}(z)$ are derived from (4.3.16). ■

We can now prove the asymptotic expansion of the resolvent $R(z)$ at threshold zero.

Theorem 4.3.4. *Let $\kappa \in \mathbb{N}^*$ be given by Proposition 4.2.1. Assume that zero is an eigenvalue of H of geometric multiplicity k, $k \in \mathbb{N}^*$, and that assumption $(A1)$ holds. Suppose that $V_0 \in \mathcal{V}$ and $W = V - V_0$ satisfies condition (4.1.2) for some $\rho > 2\kappa\mu$. Then, for $z \in O(\delta)$ and $\delta > 0$ small enough*

$$R(z) = -\frac{\Pi_0}{z} + R_1(z), \tag{4.3.28}$$

where Π_0 *is a spectral projection given by*

$$\Pi_0 f = \sum_{i=1}^{k} \langle f, J\Psi_i\rangle \Psi_i, \qquad \forall f \in L^2, \tag{4.3.29}$$

with $\{\Psi_1, \cdots, \Psi_k\}$ *is a basis of the eigenspace of* H *associated with eigenvalue 0 such that*

$$\langle \Psi_i, J\Psi_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall 1 \le i, j \le k.$$

The remainder $R_1(z)$ *satisfies the estimate:* $\exists C, \delta > 0$ *such that*

$$\|\langle x\rangle^{-2\kappa\mu} R_1(z)\| + \|R_1(z)\langle x\rangle^{-2\kappa\mu}\| \le C \tag{4.3.30}$$

for $z \in O(\delta)$. *In particular,*

$$\sigma_d(H) \cap O(\delta) = \emptyset. \tag{4.3.31}$$

In addition $R_1(z)$ *is continuous up to* $z = 0$ *and for any* $a > 0$, *there exist* $C_a, c_a > 0$ *such that*

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} R_1^{(N)}(z)\| + \|R_1^{(N)}(z) e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\| \le C_a c_a^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{4.3.32}$$

for any $N \in \mathbb{N}^*$ *and* $z \in O(\delta) \cup \{0\}$.

Proof. Since condition (4.1.12) holds, $E_{-+}(z)$ is invertible by Lemma 4.3.2. It follows from formulae (4.3.13) and (4.3.24) that $(I + r_0(z)W_c)^{-1}$ exists for $z \in O(\delta)$, $\delta > 0$ small, with

$$\begin{aligned}(I + r_0(z)W_c)^{-1} g &= -\frac{S\mathcal{F}_{-1}Tg}{z} + B_0(z)g \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij}\langle g, JW_c w_{m_j}^{(j)}\rangle u_1^{(i)} + B_0(z)g \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} c_j^{-1}\langle g, JW_c u_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} + B_0(z)g, \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

for $g \in L^2$, where $B_0(z)$ is uniformly bounded for $z \in O(\delta)$ as operator in $\mathcal{B}(L^2)$ and there $C_0, c_0 > 0$ such that

$$\|B_0^{(N)}(z)\| \le C_0 c_0^N N^{(1+\kappa\gamma)N}, \tag{4.3.34}$$

for all $N \in \mathbb{N}^*$ and $z \in O_0(\delta)$.

Set

$$A_k := (a_{ij})_{1\le i,j\le k}, \qquad Q_k := (\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle)_{1\le i,j\le k}, \tag{4.3.35}$$

where a_{ij} are given in (4.3.18). We have

$$A_k = -C_k \times Q_k, \qquad C_k = \mathrm{diag}(c_1^{-1}, \cdots, c_k^{-1}). \tag{4.3.36}$$

For $f \in L^{2,2\kappa\mu}$, putting $g = r_0(z)f$ in the first term in the right hand side of (4.3.33), we obtain

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} c_j^{-1} \langle r_0(z)f, JW_c u_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} &= \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} c_j^{-1} \left[\langle f, JG_0 W_c u_1^{(j)}\rangle + z\langle r_0(z)f, JG_0 W_c u_1^{(j)}\rangle\right] u_1^{(i)} \\ &= -\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} c_j^{-1} \langle f, Ju_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} + B_1(z)f \\ &= -\sum_{i}^{k} \langle f, Jv_i\rangle u_1^{(i)} + B_1(z)f,\end{aligned}$$

where by the identity (4.3.26), one has

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = A_k^{-1} \cdot C_k \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(k)} \end{pmatrix} = -Q_k^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(k)} \end{pmatrix}.$$

In addition, the remainder $B_1(z)$ has the same regularity properties as $B_0(z)$ in (4.3.33). Finally, let

$$Q_k^{-1} = {}^t P_k P_k$$

be the Cholesky decomposition of the complex symmetric matrix Q_k^{-1}, where $P_k = (p_{ij})_{1\le i,j\le k}$ is an upper triangular matrix (cf. [56, Proposition 25]). Then,

$$\begin{aligned} R(z)f &= (I + r_0(z)W_c)^{-1} r_0(z)f \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{k} p_{\ell i}\, p_{\ell j} \langle f, Ju_1^{(j)}\rangle u_1^{(i)} + R_1(z)f. \end{aligned}$$

This establishes (4.3.29) with $\Psi_i = \sum_{\ell=1}^{k} p_{i\ell} u_1^{(\ell)}$, $\forall 1 \le i \le k$. In addition, one checks that

$$\langle \Psi_j, J\Psi_i\rangle = \sum_{\ell,r=1}^{k} p_{jr} p_{i\ell} \langle u_1^{(r)}, Ju_1^{(\ell)}\rangle = \sum_{r=1}^{k} p_{jr} (P_k Q_k)_{ir} = (P_k Q_k^t P_k)_{ij} = \delta_{ij}.$$

The estimate (4.3.30) follows from uniformly boundedness of $r_0(z)$ in $B(0, s, 0, s-2\kappa\mu)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ (see (4.2.5)) and the resolvent equation $R(z) = (I + r_0(z)W_c)^{-1} r_0(z)$. Moreover, (4.3.32) can be obtained from (4.2.7) and (4.3.34). See also [68, Proposition 5.12]. ■

4.3.2 Expansion of the cut-off resolvent

In this subsection we suppose $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and W satisfies conditions (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19). We want to use technics from quantum resonances to establish an asymptotic expansion for the cut-off resolvent $\chi R(z)\chi$ valid in a sector below the positive real axis. As before, denote $h_0 = -\Delta + v_0(x)$, $v_0 = V_0 + \chi_R W$ and $W_c = (1-\chi_R)W$ where $\chi_R(x) = \chi_1(\frac{x}{R})$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is a cut-off function with $\chi_1(x) = 0$ if $|x| \leq 1$ and $\chi_1(x) = 1$ if $|x| \geq 2$, where R is chosen such that $R > 2\max\{R_1, R_2, R_3\}$, where R_1, R_2 and R_3 are given in (4.1.17), (4.1.18) and (4.1.19), respectively. Remark that v_0 is still distorsion analytic outside some compact and $\operatorname{Im} v_0 \leq 0$, but v_0 may no longer belong to $\mathcal{A}_1$.

In order to obtain the asymptotic expansion at low energy of the cut-off resolvent $\chi R(z)\chi$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, we use analytic distortion of H outside the support of χ. Let $R_0 > 2R$ such that $\operatorname{supp}\chi \subset B(0, R_0)$. Let $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ with $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(r) = 0$ if $r \leq 1$ and $\rho(r) = 1$ if $r \geq 2$. Set

$$F_\theta(x) = x\left(1 + \theta\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3.37}$$

When $\theta \in \mathbb{R}$ with $|\theta|$ sufficiently small, $x \mapsto F_\theta(x)$ is a global diffeomorphism on $\mathbb{R}^n$. Set

$$U_\theta f(x) = |DF_\theta(x)|^{\frac{1}{2}} f(F_\theta(x)), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

where $DF_\theta(x)$ is the Jacobi matrix and $|DF_\theta(x)|$ is the Jacobian of the change of variables: $x \mapsto F_\theta(x)$. One has

$$|DF_\theta(x)| = \begin{cases} 1, & |x| < R_0, \\ (1+\theta)^n, & |x| > 2R_0. \end{cases} \tag{4.3.38}$$

U_θ is unitary in $L^2(\mathbb{R}^n)$ for θ real with $|\theta|$ sufficiently small. Define the distorted operator $H(\theta)$ by

$$H(\theta) = U_\theta H U_\theta^{-1}, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.3.39}$$

One can calculate that

$$H(\theta) = h_0(\theta) + W_c(x), \tag{4.3.40}$$

where, for $\theta \in \mathbb{R}$,

$$h_0(\theta) = U_\theta h_0 U_\theta^{-1} = -\Delta_\theta + v_0(x,\theta) \tag{4.3.41}$$

with

$$\Delta_\theta = {}^t\nabla_\theta \cdot \nabla_\theta \ \text{ and } v_0(x,\theta) = v_0(F_\theta(x)),$$

such that

$$\nabla_\theta = ({}^tDF_\theta)^{-1} \cdot \nabla - \frac{1}{|DF_\theta|^2}({}^tDF_\theta)^{-1} \cdot (\nabla|DF_\theta|). \tag{4.3.42}$$

In particular, $\nabla_\theta f = (1+\theta)^{-1}\nabla f$ if f is supported outside the ball $B(0, 2R_0)$.

For $z_0 \in \mathbb{C}$ and $\epsilon > 0$ small, let

$$D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \epsilon\}, \tag{4.3.43}$$

be small complex neighborhood of z_0 and $D_+(z_0, \epsilon) = D(z_0, \epsilon) \cap \mathbb{C}_+$. If $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and W satisfies (4.1.18), then for $R_0 > 2R$ with $R > \max\{R_1, R_2\}$, $H(\theta)$ and $h_0(\theta)$ can be extended to holomorphic families of type A for $\theta \in D_+(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ small. We observe that the distorted operator $h_0(\theta)$ is a perturbation of $H_0(\theta) = -\Delta_\theta + V_0(x, \theta)$ by $(\chi_R W)(x, \theta)$ which is relatively $H_0(\theta)$-compact by condition (4.1.18). From this we deduce that the essential spectrum of $h_0(\theta)$ coincides with that of $H_0(\theta)$ given by

$$\sigma_{ess}(H_0(\theta)) = \{\frac{r}{(1+\theta)^2} : r \geq 0\} \tag{4.3.44}$$

(see [68, Section 4.2]). Set $r_0(z, \theta) = (h_0(\theta) - z)^{-1}$. For $\theta \in \mathbb{R}$, $r_0(z, \theta)$ is holomorphic in $z \in \mathbb{C}_+$ and meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. For $\Im\theta > 0$, it follows from (4.3.44) that the resolvent $r_0(z, \theta)$ defined for $z \in \mathbb{C}$ and $\text{Im } z >> 1$ can be meromorphically extended across the positive real axis $\mathbb{R}_+$ into the sector $\{z;\ \arg z > -\text{Im } \theta\}$.

The aim of this subsection is to establish an expansion for the cut-off resolvent $\chi R(z)\chi$ for z in some complex domain defined for $\text{Im } \theta > 0$ and $\delta > 0$ small by

$$\Omega(\delta, \theta) = \{z \in \mathbb{C}^*; |z| < \delta, -\delta \text{ Im } \theta < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \delta\}. \tag{4.3.45}$$

Let us begin by analyzing properties of the distorted model operator $h_0(\theta)$. Let $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and W satisfy (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19). Since h_0 satisfies condition (4.1.3), for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small the operator $h_0(\theta)$ still satisfies (4.1.3) with some constant $c_0 > 0$ independent of $R_0 > 0$ and θ. Therefore, Lemma 3.1 in [68] can be applied to $h_0(\theta)$, so we can define $G_0(\theta)$ by

$$G_0(\theta) = s - \lim_{\text{Re } z < 0, z \to 0} r_0(z, \theta) \tag{4.3.46}$$

as operators from $L^{2,s}$ to $L^{2,s-2\mu}$ for all $s \in \mathbb{R}$. Moreover, an argument of perturbation shows that Theorem 3.4 in [68] holds for $G_0(\theta)$ uniformly in θ when $|\theta|$ is small.

The following proposition gives a uniform estimate on $r_0(z, \theta)$ for z in the sector

$$S(-c_0\theta, \gamma_0) := \{z \in \mathbb{C}^*; -c_0 \text{ Im } \theta < \arg z < \gamma_0\} \tag{4.3.47}$$

for some $c_0 > 0$, $\gamma_0 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ and $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small. We want to show that the resolvent estimate given in [68, Proposition 4.7] still holds if the global virial condition is replaced by a virial condition at the infinity.

Proposition 4.3.2. *Let $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and W satisfy conditions (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19). Then there exist some constants $c_0 > 0$ and $\gamma_0 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ such that for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ sufficiently small and Im $\theta > 0$, one has*

$$\sigma(h_0(\theta)) \cap S(-c_0\theta, \gamma_0) = \emptyset \tag{4.3.48}$$

and there exists $C > 0$ such that

$$\|\langle x\rangle^{-2\mu} r_0(z,\theta)\| \le \frac{C}{\langle z\rangle}, \qquad \forall z \in S(-c_0\theta, \gamma_0). \tag{4.3.49}$$

Proof. First, we prove that

$$\|\langle x\rangle^{-2\mu}(H_0(\theta) - z)^{-1}\| \le \frac{C}{\langle z\rangle}, \quad z \in S(-c_0\theta, \gamma_0). \tag{4.3.50}$$

Let $R_0 > 2R$ where supp $W_c \subset B(0, 2R)$ and R is chosen such that $R > \max\{R_1, R_2, R_3\}$, where $R_j, j = 1, 2, 3$, are given in (4.1.17)-(4.1.19). Let $\widetilde{H}_0 = -\Delta + \widetilde{V}_0(x)$. Set $H_0(\theta) = U(\theta)^{-1}H_0U(\theta)$ and $\widetilde{H}_0(\theta) = U(\theta)^{-1}\widetilde{H}_0U(\theta)$ for $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta|$ small, where the distortion is made outside the ball $B(0, R_0)$. Then $H_0(\theta)$ and $\widetilde{H}_0(\theta)$ can be extended holomorphically in $\theta \in D_+(0, \delta)$ with $\delta > 0$ small and their domains are constant. Fix $\theta \in \mathbb{C}_+$, $|\theta|$ small. Denote $\widetilde{R}_0(z, \theta) = (\widetilde{H}_0(\theta) - z)^{-1}$ for $z \notin \sigma(\widetilde{H}_0(\theta))$. By Proposition 4.7 in [68], there exists $c_0, C > 0$ and $\gamma_0 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ such that

$$\|\langle x\rangle^{-2\mu}\widetilde{R}_0(z, \theta)\| \le \frac{C}{\langle z\rangle}, \quad z \in S(-c_0\theta, \gamma_0). \tag{4.3.51}$$

Using an argument of perturbation, the estimate (4.3.50) for $|z|$ large follows from $(4.3.51)$. To prove (4.3.50) for $|z|$ bounded we use the same argument as in the proof of [68, Proposition 4.7]. We compare $R_0(z, \theta)$ with $\widetilde{R}_0(z, \theta)$ for $|x|$ large and with $R_0(0, \theta)$ for $|z|$ small.

Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $\chi(x) = 1$ if $|x| \le 2R_0$. Take $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $\tilde{\chi}\chi = \chi$. On the support of $1 - \chi$, $H_0(\theta) = \widetilde{H}_0(\theta)$. For $z \in S(-c_0\theta, \gamma_0)$ and $|z|$ small, one has

$$\begin{aligned} R_0(z,\theta) &= R_0(0,\theta) + zR_0(0,\theta)R_0(z,\theta) \\ &= R_0(0,\theta) + zR_0(0,\theta)(\tilde{\chi} + (1-\tilde{\chi}))R_0(z,\theta) \\ &= R_0(0,\theta) + zR_0(0,\theta)\tilde{\chi}R_0(z,\theta) \\ &\quad +zR_0(0,\theta)(1-\tilde{\chi})\widetilde{R}_0(z,\theta)(1-\chi) \\ &\quad +zR_0(0,\theta)(1-\tilde{\chi})\widetilde{R}_0(z,\theta)[\Delta_\theta, \chi]R_0(z,\theta). \end{aligned} \tag{4.3.52}$$

Then, it follows from formula (4.3.52) that for $z \in S(-c_0\theta, \gamma_0)$ and $|z|$ small

$$\begin{aligned} (I + \mathcal{K}(z,\theta))\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(z,\theta)\langle x\rangle^{-2\mu} &= \langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)\langle x\rangle^{-2\mu} \\ &\quad +z\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)(1-\tilde{\chi})\widetilde{R}_0(z,\theta)(1-\chi)\langle x\rangle^{-2\mu} \end{aligned} \tag{4.3.53}$$

where

$$\mathcal{K}(z,\theta) = -z\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)\widetilde{\chi}\langle x\rangle^{2\mu} - z\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)(1-\widetilde{\chi})\widetilde{R}_0(z,\theta)[\Delta_\theta,\chi]\langle x\rangle^{2\mu} \tag{4.3.54}$$

One has that $\|\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)\|$ is uniformly bounded in θ for $\operatorname{Im}\theta > 0$ and $|\theta|$ small. In addition, one can check that $\|\widetilde{R}_0(z,\theta)[\Delta_\theta,\chi]\langle x\rangle^{2\mu}\|$ is uniformly bounded for $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $|z| \le 1$ (see proof of Proposition 4.7 in [68]). This yields

$$\|\mathcal{K}(z,\theta)\| = O(|z|)$$

for $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ uniformly in θ. Thus, for $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $|z|$ small enough, $I+\mathcal{K}(z,\theta)$ is invertible in L^2 and there exists $C_2 > 0$ such that

$$\|(I+\mathcal{K}(z,\theta))^{-1}\| \le C_2,$$

uniformly in z. In addition one observes from (4.3.51) that

$$\|\langle x\rangle^{-2\mu}\widetilde{R}_0(z,\theta)\| \le C,$$

uniformly in $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $\theta \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Im}\theta > 0$ and $|\theta|$ small. Consequently, for $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $|z|$ small enough

$$\|\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(z,\theta)\langle x\rangle^{-2\mu}\| \le C_2\|\langle x\rangle^{-2\mu}R_0(0,\theta)\|\Big(1+C_3|z|\Big) \le C_4, \tag{4.3.55}$$

for some constants $C_3, C_4 > 0$ independent of z and θ. Finally, (4.3.50) can be derived from (4.3.51), (4.3.55) and the equation

$$R_0(z,\theta) = \widetilde{R}_0(z,\theta) + R_0(z,\theta)(\widetilde{V}_0(\theta) - V_0(\theta))\widetilde{R}_0(z,\theta),$$

where $\widetilde{V}_0(\theta) - V_0(\theta)$ is compactly supported and relatively bounded with respect to $-\Delta$.

Next, one derives (4.3.49) from (4.3.50) by using an argument of perturbation. Indeed, for $|x|$ large enough, $(\chi_R W)(F_\theta(x)) = W((1+\theta)x)$ which tends to 0 as $|x| \to +\infty$ by condition (4.1.18). Then, using (4.3.50) we can choose $R > 0$ large enough so that

$$\|(\chi_R W)(\theta)R_0(z,\theta)\| \le \frac{C_1 C_w}{\langle R\rangle^\epsilon} < 1$$

uniformly in θ for $\theta \in D_+(0,\theta_0)$ and $z \in S(-c_0\theta,\gamma_0)$. This yields $(I+\chi_R W(\theta)R_0(z,\theta))^{-1}$ exists for z in $S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $\theta \in D_+(0,\theta_0)$ with

$$\|(I+\chi_R W(\theta)R_0(z,\theta))^{-1}\| \le C_2 \tag{4.3.56}$$

uniformly in z and θ. Hence, (4.3.49) derives from the resolvent equation

$$r_0(z,\theta) = R_0(z,\theta)(I+\chi_R W(\theta)R_0(z,\theta))^{-1} \tag{4.3.57}$$

and uniform estimates (4.3.50) and (4.3.56). It follows from (4.3.50) that $\sigma_d(H_0(\theta)) \cap S(-c_0\theta, \gamma_0) = \emptyset$, so does $r_0(z)$ using the resolvent equation (4.3.57) and (4.3.56). (4.3.48) is proved. (4.3.49) follows from (4.3.50) and (4.3.57). ■

As consequence of the above proposition, we obtain the following Gevrey estimates (see [68, Corollary 4.8]):

Corollaire 4.3.3. *For any $a > 0$ there exist some constants $c, C > 0$ such that*

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}} r_0(z,\theta)^N\| \le C c^N N^{\gamma N}, \qquad N \in \mathbb{N}^*, \tag{4.3.58}$$

for all $z \in \Omega_0(\delta,\theta) \equiv \Omega(\delta,\theta) \cup \{0\}$, where $\Omega(\delta,\theta)$ is given in (4.3.45).

Set $K_0(\theta) = G_0(\theta)W_c$, for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small, where the distortion is made outside the ball $B(0,R_0)$ for $R_0 > 0$ large enough chosen as in the proof of Proposition 4.3.2. $K_0(\theta)$ is a family of compact operator on $L^2(\mathbb{R}^n)$ for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small.

Lemma 4.3.5. *Assume that assumptions in Proposition 4.3.2 hold.*
Then the mapping $\theta \mapsto K_0(\theta) \in \mathcal{B}(L^2)$ is holomorphic in operator norm for $\theta \in D_+(0,\delta)$ with $\delta > 0$ small and continuous for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$. Here $\overline{D_+(0,\delta)} = D(0,\delta) \cap \overline{\mathbb{C}}_+$ (see (4.3.43)).

Proof. We shall show the derivability of $\theta \mapsto K_0(\theta)$ in operator norm of $\mathcal{B}(L^2)$ for $\theta \in D_+(0,\delta)$. For this we prove that

$$\frac{K_0(\theta+h) - K_0(\theta)}{h}$$

has a limit in operator norm as $|h| \to 0$. Notice that

$$\frac{dF_\theta}{d\theta}(x) = \rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(see (4.3.37)) and $\chi_1(\frac{x}{R})\rho(\frac{|x|}{R_0}) = \rho(\frac{|x|}{R_0})$ if $R_0 > 2R$. Let $\theta \in D_+(0,\delta)$ and $h \in \mathbb{C}^*$ with $|h|$ small. We have

$$\begin{aligned} K_0(\theta+h) - K_0(\theta) &= \Big(G_0(\theta+h) - G_0(\theta)\Big)W_c(x) \\ &= G_0(\theta+h)\Big(g_0(\theta) - g_0(\theta+h)\Big)G_0(\theta)W_c(x), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} g_0(\theta) - g_0(\theta+h) &= (h + o(|h|))\Big[(-\Delta_\theta + \Delta_{\theta+h}) + v_0(F_\theta(x)) - v_0(F_{\theta+h}(x))\Big] \\ &= (h+o(|h|))\Big[{}^t(A_\theta(x)\nabla)\cdot\nabla + b_\theta(x,\nabla) - \rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla V_0(F_\theta(x)) \\ &\quad - \rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla W(F_\theta(x))\Big], \end{aligned}$$

with $A_\theta(x)$ and $b_\theta(x,\nabla)$ are independent of h and it can be calculated explicitly from (4.3.42), where $b_\theta(x,\nabla)$ is a first order differential operator. Using (4.3.38), we can check that

$$G_0(\theta)^t(A_\theta(x)\nabla)\cdot\nabla \text{ and } G_0(\theta)b_\theta(x,\nabla)$$

are uniformly bounded in $\mathcal{B}(L^{2,\mu},L^2)$ for $\theta\in\overline{D_+(0,\delta)}$ with $\delta>0$ small enough, since $G_0(\theta)$ is uniformly bounded in θ as operator from $L^{2,2\mu}$ to L^2 (see 4.3.46). In addition, $V_0(x)=\widetilde{V}_0(x)$ for $|x|>R_0$, $\widetilde{V}_0\in\mathcal{A}$, and W satisfying condition (4.1.18) can be extended holomorphically into the region

$$\{y=F_\theta(x),\, x\in\mathbb{R}^n, |x|>R_0, \theta\in D_+(0,\delta)\}\subset\mathbb{C}^n.$$

It follows that

$$G_0(\theta+h)x\cdot\Big(\nabla V_0(F_\theta(x))+\nabla W(F_\theta(x))\Big)\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big):\ L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n),$$

is uniformly bounded with respect to θ and h for $|\theta|$ and $|h|$ small. Indeed,

$$G_0(\theta+h)\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla V_0(F_\theta(x))=G_0(\theta+h)(-\Delta+1)\frac{d}{d\theta}\left[(-\Delta+1)^{-1}V_0(F_\theta(x))\right],$$

and the same argument done for $\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla W(F_\theta(x))$. Consequently

$$\left|\left\langle\Big(K_0(\theta+h)-K_0(\theta)-h\mathcal{K}^{(1)}(\theta)\Big)u,v\right\rangle\right|=o(h)\|u\|\|v\| \tag{4.3.59}$$

uniformly for $u,v\in L^2$ and $|\theta|,|h|$ small, where

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{(1)}(\theta) &= G_0(\theta)\Big[{}^t(A_\theta(x)\nabla)\cdot\nabla+b_\theta(x,\nabla)-\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla V_0(F_\theta(x))\\ &\quad -\rho\Big(\frac{|x|}{R_0}\Big)x\cdot\nabla W(F_\theta(x))\Big]G_0(\theta)W_c(x).\end{aligned}$$

Thus, (4.3.59) shows that $\theta\mapsto K_0(\theta)$ is derivable in operator norm for $\theta\in D_+(0,\delta)$. Moreover, the same arguments used to prove (4.3.59) show that $\|\mathcal{K}^{(1)}(\theta)\|$ is uniformly bounded in $\theta\in\overline{D_+(0,\delta)}$. This proves the continuity of $K_0(\theta)$ in $\theta\in\overline{D_+(0,\delta)}$. ■

Consider the resolvent equation $R(z,\theta)=(Id+r_0(z,\theta)W_c)^{-1}r_0(z,\theta)$ for $z\in S(-c_0\theta,\gamma_0)$ and $\theta\in\mathbb{C}_+$ with $|\theta|$ small. It is not difficult to check that -1 is a discrete eigenvalue of $K_0(\theta)$ if and only if 0 is an embedded eigenvalue of $H(\theta)$ and they have the same geometric multiplicity.

Analyticity of the Riesz projection

In order to express the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of $K_0(\theta)$ in term of the resolvent of $K_0(\theta)$ for $\theta \in D_+(0,\delta_0)$, we show that there exists some $\epsilon_0 > 0$ small such that the disk $D(-1,\epsilon_0)$ does contain no eigenvalue of $K_0(\theta)$ other than -1.

Let $\epsilon_1 > 0$ be such that $\gamma_1 \equiv \{|z+1| = \epsilon_1\} \subset \rho(K_0(0))$ and $Int\gamma_1 \cap \sigma(K_0(0)) = \{-1\}$. For $z \in \gamma_1$ and $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$:

$$(z - K_0(\theta))(z - K_0(0))^{-1} = I + (K_0(0) - K_0(\theta))\,(z - K_0(0))^{-1}.$$

Since the mapping $\theta \mapsto K_0(\theta) \in \mathcal{B}(L^2)$ is continuous in operator norm for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$, $\delta > 0$ small, then there exists $\delta_1 > 0$ such that for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta_1)}$

$$\|K_0(\theta) - K_0(0)\| < \frac{1}{\sup_{z\in\gamma_1} \|(z - K_0(0))^{-1}\|}.$$

It follows that $(z - K_0(\theta))^{-1}$ exists for $z \in \gamma_1$ and $\theta \in \overline{D_+(0,\delta_1)}$. Hence, the operator

$$\Pi_1(\theta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} (z - K_0(\theta))^{-1}\, dz \tag{4.3.60}$$

is well defined and is a projection. In particular $\Pi_1(0) = \Pi_1$, the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of $K_0(0) = G_0 W_c$.

Lemma 4.3.6. *1). The mapping $\theta \mapsto \Pi_1(\theta) \in \mathcal{B}(L^2)$ is holomorphic in operator norm for $\theta \in D_+(0,\delta)$ with some $\delta > 0$ and*

$$\lim_{\theta\in \overline{D_+(0,\delta)},\theta\to 0} \|\Pi_1(\theta) - \Pi_1\| = 0. \tag{4.3.61}$$

2). For $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$, -1 is an eigenvalue of $K_0(\theta)$ with the same algebraic multiplicity as $K_0(0)$ and $\Pi_1(\theta)$ is the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of $K_0(\theta)$.

Proof. 1) follows from Lemma 4.3.5. To show 2), remark first that since $\Pi_1(\theta)$ is a projection, the norm-continuity of the mapping $\theta \mapsto \Pi_1(\theta)$ implies that rank $\Pi_1(\theta) =$ rank $\Pi_1 = m$ (cf. [42, Lemma I-4.10]) where m is the algebraic multiplicity of the eigenvalue -1 of G_0W_c. It remains to show that for $\epsilon_1 > 0$ sufficiently small, -1 is the only eigenvalue of $K_0(\theta)$ inside the disc $D(-1,\epsilon_1)$ for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$ with $\delta > 0$ small enough. Indeed, it suffices to restrict ourselves to the holomorphic family of finite rank operators $K_0(\theta)\Pi_1(\theta)$. For $\theta \in \mathbb{R}$ and $|\theta| < \delta$ with $\delta > 0$ small, $K_0(\theta)\Pi_1(\theta)$ is unitary equivalent to $K_0(0)\Pi_1$. So there exists $\epsilon_1 > 0$ such that $K_0(\theta)\Pi_1(\theta)$ has no eigenvalues in $D(-1,\epsilon_1)$ other than -1. By the theorem on finite dimensional analytic perturbation of eigenvalues ([42, Theorem 1.8 in Ch.2]), the eigenvalues of $K_0(\theta)\Pi_1(\theta)$ are branches of analytic functions in $\theta \in D_+(0,\delta)$ with at worst algebraic singularity. Since theses functions are equal to -1 when θ is real, we deduce that -1 is the only eigenvalue of $K_0(\theta)P(\theta)$ in $D(-1,\epsilon_1)$ for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$ if δ is small enough. This proves that $\Pi_1(\theta)$ defined by (4.3.60) is the Riesz projection of $K_0(\theta)$ associated with eigenvalue -1. ■

Denote $E(\theta) = \text{Ran } \Pi_1(\theta)$ and $E = \text{Ran } \Pi_1$. We construct a basis of $E(\theta)$ as follows. Let $\mathcal{U}$ and $\mathcal{W}$ (respectively, $\mathcal{U}_i$) be bases of E (respectively, E_i) given by Lemma 4.3.1. Set

$$\mathcal{U}(\theta) \equiv \Pi_1(\theta)\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{k}\{\Pi_1(\theta)u_\ell^{(i)}, 1 \le \ell \le m_i,\, u_\ell^{(i)} \in \mathcal{U}_i\}.$$

For $1 \le i \le k$, the m_i functions $\Pi_1(\theta)u_\ell^{(i)} \in E(\theta)$ are linearly independent for $\text{Im}\,\theta > 0$ with $|\theta|$ small since $\theta \mapsto \Pi_1(\theta)$ is holomorphic for $\theta \in D_+(0,\delta)$ and norm continuous at $\theta = 0$. This shows that the above family $\mathcal{U}(\theta)$ is a basis of $E(\theta)$ with the same properties as in Lemma 4.3.1 (2). Similarly, we observe that $\mathcal{W}(\theta) \equiv \Pi_1(\theta)\mathcal{W}$ is the dual basis of $E(\theta)$ with respect to the bilinear form B defined in (4.3.1).

Lemma 4.3.7. *Assume that $V_0 \in \mathcal{A}$ and W satisfies conditions (4.1.18) and (4.1.19). Then we have*

$$\Pi_1(\theta)f = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m_j}\langle f, JW_c w_i^{(j)}(\theta)\rangle u_i^{(j)}(\theta), \qquad \forall f \in L^2, \tag{4.3.62}$$

for $\theta \in D(0,\delta_0)$ with $\delta_0 > 0$ small.

Proof. For $\theta \in \mathbb{R}$ and $|\theta| < \theta_0$, the equality holds by the unitary equivalence. See Corollary 4.3.1. Since the both sides of (4.3.62) are continuous in θ in the closed half-disc $\overline{D_+(0,\delta_0)}$ and holomorphic in its interior, the equality still holds true for $\theta \in D(0,\delta_0)$. ■

Theorem 4.3.8. *Let $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and $W = V - V_0$ satisfy (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19). Assume that zero is an embedded eigenvalue of $H = -\Delta + V(x)$ of geometric multiplicity k and assumption $(A1)$ holds. Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $\Omega(\delta,\theta)$ be defined in (4.3.45) for some $\theta \in \mathbb{C}$ with $\text{Im}\,\theta > 0$. Then*

$$\chi R(z)\chi = -\frac{\chi\Pi_0\chi}{z} + R_2(z) \tag{4.3.63}$$

for $z \in \Omega(\delta,\theta)$, where Π_0 is the same projector as in Theorem 4.3.4 and the remainder $R_2(z)$ is continuous up to $z = 0$ and satisfies Gevrey estimates: $\exists C_\chi, C > 0$ such that

$$\|R_2(z)^{(N)}\| \le C_\chi C^N N^{(1+\gamma)N} \tag{4.3.64}$$

for $z \in \Omega(\delta,\theta) \cup \{0\}$ and for all $N \in \mathbb{N}^*$.

Proof. Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Let $h_0 = -\Delta + v_0(x)$ with $v_0 = V_0 + \chi_R W$ constructed as before with $R > 1$ large enough so that $\chi\chi_R = 0$. Then $\chi W_c = W_c$ (see (4.1.21)). Let U_θ be the analytic distorsion made outside the ball $B(0, R_0)$ with R_0 sufficiently large, one has for $\theta \in \mathbb{R}$ with $|\theta| < \delta_0$

$$\chi R(z)\chi = \chi R(z,\theta)\chi = \chi(I + r_0(z,\theta)W_c)^{-1} r_0(z,\theta)\chi. \tag{4.3.65}$$

The above equality initially valid for $\theta \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{C}_+$ with $\operatorname{Im} z > 0$ sufficiently large allows to extend $\chi R(z)\chi$ meromorphically into a sector below positive real axis when $\operatorname{Im}\theta > 0$ and appropriately small. Fix $\theta \in \mathbb{C}_+$ with $|\theta|$ small. In order to inverse the holomorphic family $W(z,\theta) \equiv I + r_0(z,\theta)W_c$ for z in $\Omega(\delta,\theta)$ with $\delta > 0$ small, we shall construct θ-dependent Grushin problem similar to the θ-independent one considered in the proof of Theorem 4.3.4. For this purpose we use holomorphic families of vectors $\mathcal{U}(\theta)$ and $\mathcal{W}(\theta)$ constructed above.

Let $\Pi_1'(\theta) = I - \Pi_1(\theta)$. $I + G_0(\theta)W_c$ is injective on Ran $\Pi_1'(\theta)$. Since the operator $I + G_0(\theta)W_c$ is compact, the Fredholm theorem implies that $\Pi_1'(\theta)(I + G_0(\theta)W_c)\Pi_1'(\theta)$ is invertible on Ran $\Pi_1'(\theta)$. So is $\Pi_1'(\theta)(I + r_0(z,\theta)W_c)\Pi_1'(\theta)$ for $z \in \Omega(\delta,\theta)$ when $\delta > 0$ is small. The inverse

$$E(z,\theta) := (\Pi_1'(\theta)(1 + r_0(z,\theta)W_c)\Pi_1'(\theta))^{-1}\Pi_1'(\theta) \tag{4.3.66}$$

is uniformly bounded in $z \in \Omega(\delta,\theta)$ (see Proposition 4.3.2) and satisfies by Corollary 4.3.3 Gevrey estimates of the form (4.3.64) on $\Omega_0(\delta,\theta)$.

Define $S(\theta) : \mathbb{C}^m \to L^2$ and $T(\theta) : L^2 \to \mathbb{C}^m$ by

$$S(\theta)c = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} c_j^{(i)} u_j^{(i)}(\theta), \qquad c = \oplus_{i=1}^k (c_1^{(i)}, \cdots, c_{m_i}^{(i)}) \in \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{m_i},$$
$$T(\theta)u = \oplus_{i=1}^k \left(B(u, w_1^{(i)}(\theta)), \cdots, B(u, w_{m_i}^{(i)}(\theta))\right), \qquad u \in L^2.$$

Then one has $S(\theta)T(\theta) = \Pi_1(\theta)$ in view of Lemma 4.3.7 and $T(\theta)S(\theta) = I_m$. Indeed, for $\theta \in]-\delta,\delta[$, $T(\theta)S(\theta) = I_m$ since $\Pi_1(\theta)$ and Π_1 are unitary equivalent. Thus the equality still holds true for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$ with $\delta > 0$ small since $\theta \mapsto \Pi_1(\theta)$ is holomorphic in $D_+(0,\delta)$ and norm-continuous for $\theta \in \overline{D_+(0,\delta)}$ by Lemma 4.3.6. One can follow the same way as in the proof of Theorem 4.3.4 by using the following asymptotic expansion at threshold zero: for all $N \in \mathbb{N}^*$

$$r_0(z,\theta) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j G_0(\theta)^{j+1} + z^N G_0(\theta)^N r_0(z,\theta), \qquad z \in \Omega(\delta,\theta),$$

in $\mathcal{B}(0,s,0,s-2N\mu), \forall s \in \mathbb{R}$. For $z \in \Omega(\delta,\theta)$ with $\delta > 0$ small and $L \in \mathbb{N}$, we obtain

$$\det E_{-+}(z,\theta) = \sigma_0(\theta)z^k + \sigma_1(\theta)z^{k+1} + \cdots + \sigma_{L-1}(\theta)z^{k+L-1} + O(|z|^{k+L}), \tag{4.3.67}$$

where

$\sigma_0(\theta) = \mu(\theta)\times\det\Big(\langle u_1^{(j)}(\theta), Ju_1^{(i)}(\theta)\rangle\Big)_{1\le i,j\le k}$ with $\quad \mu(\theta) = (-1)^k c_1(\theta)^{-1}\cdots c_k(\theta)^{-1}$.

Indeed, if condition (4.1.12) holds, then $\det\Big(\langle u_1^{(j)}, Ju_1^{(i)}\rangle\Big)_{1\le i,j\le k} \neq 0$. Thus, for $\mathrm{Im}\,\theta \ge 0$ and $|\theta|$ small enough

$$\det\Big(\langle u_1^{(j)}(\theta), Ju_1^{(i)}(\theta)\rangle\Big)_{1\le i,j\le k} \neq 0,$$

since $\theta \mapsto \Pi_1(\theta)$ is continuous at $\theta = 0$. In the same way one can see that

$$c_i(\theta) := B(u_1^{(i)}(\theta), u_{m_i}^{(i)}(\theta)) \neq 0,\ 1 \le i \le k,$$

for $\mathrm{Im}\,\theta \ge 0$ and $|\theta|$ small. From (4.3.65), one can deduce that

$$\begin{aligned} R(z,\theta)f &= -\frac{1}{z}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{k} p_{\ell i}(\theta)\, p_{\ell j}(\theta)\langle f, Ju_1^{(j)}(\theta)\rangle u_1^{(i)}(\theta) + R_2(z,\theta)f \\ &:= -\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k}\langle f, J\Psi_i(\theta)\rangle\Psi_i(\theta) + R_2(z,\theta)f \end{aligned}$$

for $z \in \Omega(\delta,\theta)$, where $\Psi_i(\theta) = \sum_{\ell=1}^{k} p_{\ell i}(\theta)u_1^{(i)}(\theta)$ and $P_k(\theta) = (p_{ij}(\theta))_{1\le i,j\le k}$ is such that ${}^tP_k(\theta)P_k(\theta) = Q_k(\theta)^{-1}$ with

$$Q_k(\theta) = (\langle u_1^{(j)}(\theta), Ju_1^{(i)}(\theta)\rangle)_{1\le i,j\le k}$$

is a holomorphic family of invertible matrices for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small enough, by the above argument. Moreover, the remainder $R_2(z,\theta)$ is continuous up to $z = 0$ and satisfies uniform Gevrey estimates as in (4.3.58). The detail of calculation is similar to the proof of Theorem 4.3.4 and is not repeated here. This shows that

$$\chi R(z)\chi = -\frac{\mathcal{P}_0}{z} + R_2(z), \qquad \forall z \in \Omega(\delta,\theta), \tag{4.3.68}$$

where

$$\mathcal{P}_0 = \sum_{i=1}^{k}\langle\cdot, J\chi\Psi_i(\theta)\rangle\chi\Psi_i(\theta),$$

and the remainder $R_2(z)$ is continuous up to $z = 0$ and satisfies the estimates (4.3.64). See also the proof of Theorem 5.20 in [68] for Gevrey estimates of the remainder $R_2(z)$.

Finally, we affirm that $\mathcal{P}_0$ is independent of θ and is equal to $\chi\Pi_0\chi$. In fact, since $V_0 \in \mathcal{V}$, we can apply Theorem 4.3.4 to $R(z)$ for $\mathrm{Re}\,z < 0$ without utilizing analytic deformation. It follows that

$$\chi R(z)\chi = -\frac{\chi\Pi_0\chi}{z} + \chi R_1(z)\chi. \tag{4.3.69}$$

Thus the comparison between (4.3.68) and (4.3.69) yields $\mathcal{P}_0 = \chi\Pi_0\chi$ and $R_2(z) = \chi R_1(z)\chi$ for $\mathrm{Re}\,z < 0$ and $|z|$ small. ■

4.4 Resolvent expansion near positive resonances

In this section we compute the expansions of $R(z)$ and $\chi R(z)\chi$ near outgoing positive resonances of H by the method similar to that used in [1] for quickly decreasing potentials. When there is no analyticity condition on the potential, the expansion of $R(z)$ is calculated for z in a half-disk in $\mathbb{C}_+$ around an outgoing positive resonance, while if the potential is analytic, we use the analytic distortion method to calculate the expansion of $\chi R(z)\chi$ for z in a pointed disk in $\mathbb{C}$ centered at an outgoing positive resonance.

4.4.1 The case of non-analytic potentials

Consider the non-selfadjoint Schrödinger operator $H = -\Delta + V$ which is a compactly supported perturbation of the model operator $h_0 = -\Delta + v_0$, where $V - v_0 = W_c$.

Assumption *(A3). 1. Assume that Im $v_0 \le 0$ and that v_0 satisfies for some $C > 0$ and $\rho_1 > 0$*

$$|v_0(x)| \le C\langle x\rangle^{-\rho_1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ and } |x| > R \tag{4.4.1}$$

for some $R > 0$;

2. $(x \cdot \nabla_x)^j v_0$ is $-\Delta-$compact for all integers $j \in \mathbb{N}$;

3. W_c is of compact support and is $-\Delta$-compact.

Let $r_+(H)$ be the set of outgoing positive resonances of H defined by Definition 4.1.4. One has $r_+(h_0) = \emptyset$ because h_0 is dissipative, and the boundary value of the resolvent

$$r_0(\lambda + i0) = \lim_{z \to \lambda,\ \text{Im } z > 0} (h_0 - z)^{-1}$$

exists in $\mathcal{B}(-1, s, 1, -s)$, $\forall s > 1/2$, for all $\lambda > 0$. Moreover, for $\ell \in \mathbb{N}^*$ and $s > \ell + 1/2$ the above limit $r_0(\lambda + i0)$ defines a function of class C^ℓ on $]0, +\infty[$ with values in $\mathcal{B}(-1, s, 1, -s)$ (cf. [60]), where

$$\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j} r_0(\lambda + i0) = \lim_{z \to \lambda,\ \text{Im } z > 0} r_0(z)^{j+1}, \qquad j = 1, 2, \cdots, \ell. \tag{4.4.2}$$

For simplicity, we denote for $\lambda > 0$

$$G_j^+(\lambda) \ = \ \frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j} r_0(\lambda + i0), \qquad j = 0, 1, \cdots, \ell. \tag{4.4.3}$$

By Definition 4.1.4, $\lambda_0 \in r_+(H)$ if and only if -1 is an eigenvalue of the compact operator $K_0^+(\lambda_0) := G_0^+(\lambda_0)W_c$ in $L^{2,-s}$ for all $s > 1/2$. We denote by Π_1^+ the Riesz projection associated with the eigenvalue -1 of $K_0^+(\lambda_0)$ given by

$$\Pi_1^+ = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+1|=\epsilon_0}(z - K_0^+(\lambda_0))^{-1}\,dz : L^{2,-s} \to L^{2,-s}$$

for some $\epsilon_0 > 0$ small. Set $E^+(\lambda_0) = \text{Ran}\,\Pi_1^+(\lambda_0)$. Denote $m(\lambda_0) = \dim E^+(\lambda_0)$ and $k_0 = \dim \text{Ker}(I + K_0^+(\lambda_0))$. Notice that Lemma 4.3.1 is still true for $E^+(\lambda_0) \subset L^{2,-s}$ in the present case. In particular, we have the following basis of $E^+(\lambda_0)$:

$$\mathcal{U}^+ = \bigcup_{i=1}^{k_0}\mathcal{U}_i^+ \text{ with } \mathcal{U}_i^+ = \{\varphi_1^{(i)}, \cdots, \varphi_{m_i(\lambda_0)}^{(i)}\},\ i = 1, \cdots, k_0,$$

and its dual basis with respect to the bilinear form $B(\cdot,\cdot)$ in (4.3.1) well defined on $E^+(\lambda_0) \times E^+(\lambda_0)$:

$$\mathcal{W}^+ = \bigcup_{i=1}^{k_0}\mathcal{W}_i^+ \text{ with } \mathcal{W}_i^+ = \{\psi_1^{(i)}, \cdots, \psi_{m_i(\lambda_0)}^{(i)}\},\ i = 1, \cdots, k_0.$$

In order to compute the asymptotic expansion of $R(z)$ for z in a small domain of the form

$$\Omega^+(\delta) = \{z \in \mathbb{C}_+, |z - \lambda_0| < \delta\} \tag{4.4.4}$$

for $\delta > 0$ small, we use the formula

$$R(z) = (1 + r_0(z)W_c)^{-1}r_0(z) \tag{4.4.5}$$

and construct for $1 + r_0(z)W_c$ a Grushin problem similarly as in Section 4.3 (with $z \in \Omega^+(\delta)$ and $\mathcal{U}$ and $\mathcal{W}$ replaced by $\mathcal{U}^+$ and $\mathcal{W}^+$, respectively). Let

$$(1 + r_0(z)W_c)^{-1} = E(z) - E_+(z)E_{-+}(z)^{-1}E_-(z) \tag{4.4.6}$$

be the resulting representation formula. Recall that

$$r_0(z) = \sum_{j=0}^{\ell}(z - \lambda_0)^j G_j^+(\lambda_0) + r_\ell^+(z, \lambda_0), \qquad z \in \Omega^+(\delta), \tag{4.4.7}$$

which is valid in $\mathcal{B}(0, s, 0, -s)$ for $s > \ell + 1/2$ and $\ell \in \mathbb{N}$, where the remainder $r_\ell^+(z, \lambda_0)$ is holomorphic in $\Omega^+(\delta)$ and continuous up to $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$. In addition, the limit

$$r_\ell^+(\lambda + i0, \lambda_0) = \lim_{z\to\lambda, z\in\Omega^+(\delta)} r_\ell^+(z, \lambda_0)$$

defines a function of λ of class C^ℓ on $(]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[)$. Thus for $\ell \in \mathbb{N}$ and $z \in \Omega^+(\delta)$, the expansion of $E_{-+}(z)$ in (4.3.15) has the following form:

$$E_{-+}(z) = \sum_{j=0}^{\ell}(z - \lambda_0)^j E_j^+(\lambda_0) + E_{-+,\ell}(z, \lambda_0), \tag{4.4.8}$$

where

$$(E_0^+(\lambda_0))^{(ij)} = - \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_{ij} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_i(\lambda_0)\times m_j(\lambda_0)} \quad \text{and} \tag{4.4.9}$$

$$(E_1^+(\lambda_0))^{(ij)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ a_{ij}(\lambda_0) & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m_i(\lambda_0)\times m_j(\lambda_0)}, \quad \forall 1 \leq i,j \leq k_0 \tag{4.4.10}$$

with

$$a_{ij}(\lambda_0) = -c_i(\lambda_0)^{-1}\langle G_1^+(\lambda_0)W_c\varphi_1^{(j)}, JW_c\varphi_1^{(i)}\rangle,\ \forall 1 \leq i,j \leq k_0. \tag{4.4.11}$$

In addition, the remainder $E_{-+,\ell}(z,\lambda_0)$ is analytic in $z \in \Omega^+(\delta)$ as matrix-valued function and for $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$ the limit $E_{-+,\ell}(\lambda + i0, \lambda_0)$ defines a function of class C^ℓ on $]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$.

Lemma 4.4.1. *Let the assumptions $(A2)$ and $(A3)$ be satisfied and $\lambda_0 \in r_+(H)$. Then for any $N \in \mathbb{N}$*

$$det\, E_{-+}(z) = \sigma_{k_0}(\lambda_0)(z-\lambda_0)^{k_0} + \cdots + \sigma_{k_0+N}(\lambda_0)(z-\lambda_0)^{k_0+N} + o(|z-\lambda_0|^{k_0+N}), \tag{4.4.12}$$

for $z \in \Omega^+(\delta)$, where $\sigma_{k_0}(\lambda_0) = det\,(a_{ij}(\lambda_0))_{1\leq i,j\leq k_0} \neq 0$.

The proof of Lemma 4.3.2 can be repeated here to prove Lemma 4.4.1, using the expansion (4.4.8). Lemma 4.4.1 implies in particular the following

Corollaire 4.4.1. *Under the conditions of Lemma 4.4.1, λ_0 is an isolated point in $r_+(H)$.*

Proof. Lemma 4.4.1 shows that there exists some $\delta > 0$ such that $E_{-+}(z)^{-1}$ exists for z such that $0 < |z - \lambda_0| < \delta$ and $\mathrm{Im}\, z \geq 0$. From (4.4.6), it follows that for $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, 0[\cup]0, \lambda_0 + \delta[$, $1 + r_0(\lambda + i0)W_c$ is invertible as operator in $L^{2,-s}$, $s > \frac{1}{2}$. Therefore λ is not an outgoing positive resonance of H. This proves $r_+(H)\cap]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[= \{\lambda_0\}$. ■

Theorem 4.4.2. *Suppose that Assumptions (A2) and (A3) are satisfied. Let $\ell \in \mathbb{N}$, $s > \ell + 3/2$ and $\lambda_0 \in r_+(H)$. Then the resolvent expansion has the following form*

$$R(z) = -\frac{\Pi_0^+(\lambda_0)}{z - \lambda_0} + R_1^+(z, \lambda_0) \tag{4.4.13}$$

in $\mathcal{B}(-1,s,1,-s)$ for $z \in \Omega^+(\delta)$. Here

$$\Pi_0^+(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{k_0} \langle \cdot, J\Psi_i^+\rangle \Psi_i^+ \qquad \textit{with} \tag{4.4.14}$$

$$B^+_{\lambda_0}(\Psi_i^+, \Psi_j^+) = \delta_{ij}, \qquad \forall 1 \le i,j \le k_0, \tag{4.4.15}$$

where $\{\Psi_1^+, \cdots, \Psi_{k_0}^+\}$ is a basis of Ker$(I + K_0^+(\lambda_0))$ in $L^{2,-s}$ and $B^+_{\lambda_0}$ is the bilinear form defined in (4.1.22). Moreover, the remainder term $R_1^+(z,\lambda_0)$ is analytic in $\Omega^+(\delta)$ and for $\lambda > 0$ with $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, the limit

$$R_1^+(\lambda + i0, \lambda_0) = \lim_{z\in\Omega^+(\delta), z\to\lambda} R_1^+(z,\lambda_0) \tag{4.4.16}$$

exists in $\mathcal{B}(-1,s,1,-s)$ and defines a function of λ of class C^ℓ on $(]\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta[)$ with values in $\mathcal{B}(-1,s,1,-s)$.

Remark 4.4.1. *(a) In the above theorem, the outgoing resonance λ_0 is shown to be a simple pole of the the resolvent under Assumption $(A2)$ and the leading term of the resolvent expansion near λ_0 is computed explicitly.*

(b) The result of Theorem 4.4.2 was obtained in [1, Theorem 2.5] for rapidly decreasing potential V under the condition that $V(x) = O(\langle x\rangle^{-\rho}), \forall x \in \mathbb{R}^3$, for some $\rho > 2\ell+3$.

Proof. Under the condition (4.1.23), the matrix

$$\left(B^+_{\lambda_0}(\varphi_1^{(i)}, \varphi_1^{(j)})\right)_{1\le i,j\le k_0} \tag{4.4.17}$$

is invertible. Then by Lemma 4.4.1, the matrix $E_{-+}(z)$ is invertible for $z \in \Omega^+(\delta)$. Thus, the same Grushin problem constructed in the proof of Theorem 4.3.4 for $I + G_0(z)W_c$ is invertible for $z \in \Omega^+(\delta)$. For $\ell \in \mathbb{N}$, $s > \ell + 1/2$ and $z \in \Omega^+(\delta)$, introducing the expansion (4.4.7) in (4.3.6) yields the following expansion of $E(z)$

$$E(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (z-\lambda_0)^j E_j(\lambda_0) + \epsilon_\ell(z), \tag{4.4.18}$$

in the norm sense of $\mathcal{B}(L^{2,-s})$, where the terms E_j, $j = 0, \cdots, \ell$, can be obtained explicitly. By (4.4.16), the remainder term $\epsilon_\ell(z)$ is analytic in $\Omega^+(\delta)$ and for $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ the limit $\epsilon_\ell(\lambda + i0)$ belongs to $C^\ell(]\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta[, \mathcal{B}(L^{2,-s}))$.
Following the same method used to calculate the expansion (4.3.24), we obtain

$$E_{-+}(z)^{-1} = \frac{\mathcal{F}_{-1}(\lambda_0)}{z-\lambda_0} + \mathcal{F}(z,\lambda_0), \qquad \forall z \in \Omega^+(\delta), \tag{4.4.19}$$

where $\mathcal{F}_{-1}(\lambda_0)$ is $k_0 \times k_0$ block matrix, with block entries $\mathcal{F}_{-1}^{(ij)}(\lambda_0)$ are of the same form as $\mathcal{F}_{-1}^{(ij)}$ in (4.3.25) with entries $\gamma_{ij}(\lambda_0)$ instead of α_{ij}, $1 \le i,j \le k_0$, such that

$$(\gamma_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le k_0} = \Big((a_{ij}(\lambda_0))_{1\le i,j\le k_0}\Big)^{-1},$$

where $a_{ij}(\lambda_0)$ are given in (4.4.11). Moreover, the remainder term $\mathcal{F}(z, \lambda_0)$ is continuous up to $]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$ and the limit $\mathcal{F}(\lambda + i0, \lambda_0)$ defines a C^∞ matrix-valued function on $]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$.

Since the techniques of the rest of the proof are close to those used in the proof of Theorem 4.3.4, we omit details. We only note that in the present case the matrix in (4.4.17) will play the role of Q_k in (4.3.35) which yields the leading term in (4.4.13).

Note that because of the singularity $(z - \lambda_0)^{-1}$ in (4.4.19), the expansion (4.4.18) of $E(z)$ up to order $\ell + 1$ is required, so $s > \ell + 3/2$. Moreover, for the remainder $R_1^+(z, \lambda_0)$, the regularity $C^\ell\Big(]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[, B(-1, s, 1, -s)\Big)$ of $R_1^+(\lambda + i0, \lambda_0)$ derives from the regularity properties of the remainders of $E(z)$ and $E_{-+}(z)^{-1}$ in (4.4.18) and (4.4.19), respectively, and from formulae (4.4.5) and (4.4.6). ■

4.4.2 The case of analytic potentials

In this subsection, we assume that all conditions of Theorem 4.1.2 are satisfied. In particular, we can decompose H as $H = h_0 + W_c$ as in Subsection 3.2 with $h_0 = -\Delta + v_0(x)$ and $v_0 = V_0 + \chi_R W$. Let

$$H(\theta) = U_\theta H U_\theta^{-1} = h_0(\theta) + W_c(x), \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

where

$$h_0(\theta) = U_\theta h_0 U_\theta^{-1} = -\Delta_\theta + v_0(x, \theta),$$

be the distorted operator defined in Section 3. Here the distortion is made outside a sufficiently large ball. Then $h_0(\theta)$ and $H(\theta)$ define holomporphic families of type A for θ in a complex neighborhood of zero. For $\Im\theta > 0$ and $|\theta| < \theta_0$ with $\theta_0 > 0$ small, it has been shown in [68, Theorem 5.1] that $\sigma_d(H(\theta))$ (the discrete spectrum of $H(\theta)$) verifies

$$\sigma_d(H(\theta)) \cap \mathbb{R}_+ = r_+(H), \tag{4.4.20}$$
$$\sigma_d(H(\theta)) \cap \mathbb{C}_+ = \sigma_d(H) \cap \mathbb{C}_+. \tag{4.4.21}$$

In particular, H has at most a countable set of outgoing positive resonances with zero as the only possible accumulation point. Theorem 4.3.8 says that zero is not an accumulation point of $\sigma_d(H(\theta))$, so the set $r_+(H)$ is finite under the condition of Theorem 4.1.2.

We observe that $r_0(z, \theta) = (h_0(\theta) - z)^{-1}$ defined initially for $\text{Im}\, z > 0$ and $\theta \in \mathbb{R}$ can be holomorphically extended in θ for $\theta \in \mathbb{C}$ with $|\theta|$ small. Then, for $\theta \in D_+(0, \theta_0)$ with $\theta_0 > 0$ small, $r_0(z, \theta)$ is holomorphic in $z \in \{\, \text{Im}\, z > -c\, \text{Im}\, \theta\, \text{Re}\, z\}$. In particular, for $\Im\theta > 0$ and $\lambda_0 > 0$ we have that $r_0^+(\lambda_0, \theta) := (h_0(\theta) - \lambda_0 - i0)^{-1}$ is a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}^n)$. In addition, for any $L \in \mathbb{N}$, the expansion of $r_0^+(\lambda_0, \theta)$ in $\mathcal{B}(L^2)$ is written

$$r_0(z,\theta) = \sum_{j=0}^{L}(z-\lambda_0)^j G_0^{+,j}(\lambda_0,\theta) + r_1^+(z,\lambda_0,\theta), \qquad \forall z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta), \tag{4.4.22}$$

where $G_0^{+,j}(\lambda_0,\theta), j = 0, 1, \cdots, L$, are bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ defined as in (4.4.3) with $r_0(z)$ replaced by $r_0(z,\theta)$ and $\Omega_{\lambda_0}(\delta)$ is given by

$$\Omega_{\lambda_0}(\delta) = \Omega(\delta) \cup \{\lambda_0\} \text{ with } \Omega(\delta) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z-\lambda_0| < \delta\}, \tag{4.4.23}$$

for some $0 < \delta < \lambda_0 \operatorname{Im}\theta$. Moreover, the remainder $r_1^+(z,\lambda_0,\theta)$ is holomorphic in $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$.

Set $K_0^+(\theta) = r_0^+(\lambda_0,\theta)W_c$. The same proof as that of Lemma 4.3.5 shows that $K_0^+(\theta)$ is a holomorphic family of compact operators on $L^{2,-s}(\mathbb{R}^n)$, $\forall s > 1/2$, for $\theta \in D_+(0,\epsilon)$ with $\epsilon > 0$ small, and norm-continuous for $\theta \in \overline{D_+(0,\epsilon)}$. We recall that by definition of outgoing positive resonances, $\lambda \in r_+(H)$ if -1 is a discrete eigenvalue of the compact operator $K_0^+ = K_0^+(0)$ on $L^{2,-s}$, $\forall s > 1/2$. Thus Lemma 4.3.6 can be applied here to $\langle x\rangle^{-s}\Pi_1^+(\theta)\langle x\rangle^s$, $\forall s > 1/2$, where $\Pi_1^+(\theta)$ is defined similarly to $\Pi_1(\theta)$ with $K_0(\theta)$ replaced by $K_0^+(\theta)$, because $\theta \mapsto K_0^+(\theta) \in \mathcal{B}(L^{2,-s})$ is norm-continuous for $\theta \in \overline{D_+(0,\epsilon)}$. We obtain that the family $\Pi_1^+(\theta) \in \mathcal{B}(L^{2,-s})$ of Riesz projections associated with the eigenvalue -1 of $K_0^+(\theta)$ is holomorphic in $\theta \in D_+(0,\epsilon)$ and $\forall s > 1/2$

$$\lim_{\theta\to 0,\, \theta \in \overline{D_+(0,\epsilon)}} \|\langle x\rangle^{-s}(\Pi_1^+(\theta) - \Pi_1^+(0))\langle x\rangle^s\| = 0.$$

Theorem 4.4.3. *Assume that $V_0 \in \mathcal{A}_1$ and that conditions (4.1.2), (4.1.18) and (4.1.19) are satisfied. Let $\lambda_0 \in r_+(H)$ verifying the assumption (A2) and $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Then for $z \in \Omega(\delta)$, $0 < \delta < \lambda_0$ Im θ with $\theta \in D_+(0,\epsilon)$ and $\epsilon > 0$ small, one has*

$$\chi R(z)\chi = -\frac{\chi\Pi_0^+(\lambda_0)\chi}{z-\lambda_0} + R_2^+(z,\lambda_0) \tag{4.4.24}$$

in $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$, where $\Pi_0^+(\lambda_0)$ is given in Theorem 4.4.2 and the remainder $R_2^+(z,\lambda_0)$ is analytic in $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$.

Theorem 4.4.3 can be proven by combining the methods used in the proofs of Theorem 4.3.8 and Theorem 4.4.2 and by using formulae (4.3.65) for $z \in \Omega(\delta,\theta)$ and (4.4.22) for $z \in \Omega_{\lambda_0}(\delta)$ and by studying the Grushin problem constructed with bases $\Pi_1^+(\theta)\mathcal{U}^+$ and $\Pi_1^+(\theta)\mathcal{W}^+$. The details are omitted here.

4.5 Proofs of the main theorems

In this section we prove the main theorems. In theorems 4.1.1 and 4.1.2 when zero is an eigenvalue of H we are interested in the contribution of the eigenvalue zero to the leading term of the asymptotic expansion in time for the heat semigroup e^{-tH} and Shrödinger semigroup e^{-itH}. With the Gevrey estimates on the remainders in resolvent expansions, the sub-exponential time-decay estimates in (4.1.13) and (4.1.24) can be proved in the same way as in [68, Section 5], therefore the details are omitted here.

Proof of Theorem 4.1.1. The same proof as that of Theorem 2.4 in [68] can be done here. The large-time expansion of e^{-tH} follows directly from Theorem 4.3.4 and the formula

$$e^{-tH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H),\ \mathrm{Re}\ \lambda\le 0} e^{-tH}\Pi_\lambda \quad = \quad \frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\Gamma(\epsilon)} e^{-tz}R(z)dz + O(e^{-ct}) \quad (4.5.1)$$

where $c > 0$ and

$$\Gamma(\epsilon) \quad = \quad \{z; |z| \ge \epsilon,\ \mathrm{Re}\ z \ge 0, |\ \mathrm{Im}\ z| = C(\ \mathrm{Re}\ z)^{\mu'}\} \cup \{z; |z| = \epsilon, |\arg z| \ge \omega_0\}$$

for some appropriate constants $C, \mu' > 0$. Here ω_0 is the argument of the point z_0 with $|z_0| = \epsilon$, $\mathrm{Re}\ z_0 > 0$ and $\mathrm{Im}\ z_0 = C(\ \mathrm{Re}\ z_0)^{\mu'}$. According to Theorem 4.3.4, if the assumption $(A1)$ holds, then H has no discrete eigenvalues in some domain $O(\delta)$ given in (4.2.3) for $\delta > 0$ small. Since discrete eigenvalues located on the left of the curve $\Gamma(0) = \{z;\ \mathrm{Re}\ z \ge 0, |\ \mathrm{Im}\ z| = C(\ \mathrm{Re}\ z)^{\mu'}\}$ can accumulate only at zero, it follows that H has at most a finite number of eigenvalues there. These discrete eigenvalues contribute to e^{-tH} the term $\sum_{\lambda\in\sigma_d(H),\ \mathrm{Re}\ \lambda\le 0} e^{-tH}\Pi_\lambda + O(e^{-ct})$. By Theorem 4.3.4, one can evaluate

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\left(\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\Gamma(\epsilon)} e^{-tz}R(z)dz - \Pi_0\right)\| \le Ce^{-ct^{\beta'}}$$

with $C, c > 0$ and $\beta' = \frac{1-\mu}{1+\kappa\mu}$. Theorem 4.1.1 is proved. ∎

The large-time expansion for the Shrödinger semigroup e^{-itH} can be derived from Theorem 4.3.8 and Theorem 4.4.3 by taking into account the contribution from discrete eigenvalues in the upper-half plane and outgoing positive resonances.

Proof of Theorem 4.1.2. For $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, we use analytic distorsion outside some sufficiently large ball (including the support of χ). Let $R(z,\theta) = (H(\theta) - z)^{-1}$. The formula

$$\chi R(z)\chi = \chi R(z,\theta)\chi$$

with $\mathrm{Im}\,\theta > 0$ gives a meromorphic extension of the cut-off resolvent into a sector below the positive half-axis. As seen before, the outgoing positive resonances are discrete eigenvalues of the distorted operator $H(\theta)$ in $]0, +\infty[$ and their number is finite. Under the conditions of Theorem 4.1.2, outgoing positive resonances are simple poles of the cut-off resolvent $\chi R(z)\chi$ according to Theorem 4.4.3.

Let $\Gamma_\eta(\epsilon)$ be the contour defined by

$$\Gamma_\eta(\epsilon) = \{z = re^{-i\eta}, r \geq \epsilon\} \cup \{z = -re^{i\eta}, r \geq \epsilon\} \cup \{z; |z| = \epsilon, -\eta \leq \arg z \leq \pi + \eta\}$$

for some $\eta > 0$, where $\eta > 0$ is chosen such that $\chi R(z)\chi$ has no poles with negative imaginary part between $\Gamma_\eta(\epsilon)$ and the real axis. Since $\chi R(z)\chi$ has only a finite number of poles located above $\Gamma_\eta(\epsilon)$ which are discrete eigenvalues of H in $\overline{\mathbb{C}_+}$ and the outgoing positive resonances, we obtain from Theorem 4.4.3 the formula

$$\chi\Big(e^{-itH} - \sum_{\lambda\in\sigma_d(H)\cap\overline{\mathbb{C}}_+} e^{-itH}\Pi_\lambda - \sum_{\nu\in r_+(H)} e^{-it\nu}\Pi_0^+(\nu)\Big)\chi$$
$$= \frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\Gamma_\eta(\epsilon)} e^{-itz}\chi R(z)\chi dz + O(e^{-ct}).$$

Since $\operatorname{Im} z < 0$ for $z \in \Gamma_\eta(0)$ and $z \neq 0$, one can derive from Theorem 4.3.8 that

$$\|e^{-a\langle x\rangle^{1-\mu}}\left(\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\Gamma_\eta(\epsilon)} e^{-tz}\chi R(z)\chi dz - \chi\Pi_0\chi\right)\| \leq Ce^{-ct^\beta}$$

with $C, c > 0$ and $\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Theorem 4.1.2 is proved. ■

Perspectives

I- Étude de la matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif

Les résultats obtenus dans Chapitre 3 semblent être utiles pour l'étude de la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif. Comme nous avons déjà mentionné au paragraphe 1.1.3, Faupin et Nicoleau [19], en étudiant la théorie de la diffusion pour des modèles de la forme $H = -\Delta + V - iCC^*$ avec un potentiel V symétrique relativement $-\Delta$-compact et un opérateur C relativement lisse (au sens de Kato) par rapport à $-\Delta + V$, montrent que l'absence des résonances réelles pour H est une condition nécessaire et suffisante pour la propriété de la complétude asymptotique. Ainsi, il s'avère que ce problème est équivalent à l'inversibilité des matrices de diffusion $S(\lambda)$ pour le couple $(H, -\Delta)$ définies, sous certaines hypothèses que l'on cite pas ici, par

$$S(\lambda) = \Big(I - 2\pi\Gamma_+(\lambda)C^*(I + iC(H - \lambda - i0)C^*)C\Gamma_+(\lambda)^*\Big)S_V(\lambda), \qquad \forall\lambda > 0,$$

où $\Gamma_+(\lambda)$ et $S_V(\lambda)$ sont des opérateurs unitaires pour presque partout $\lambda > 0$. D'une manière équivalente, il s'agit, par le Lemme 4.1 dans [19], d'étudier l'existence de la limite suivante:

$$\lim_{\epsilon\to 0} C(H - \lambda + i\epsilon)^{-1}C^* = C(H - \lambda + i0)^{-1}C^*$$

dans $\mathcal{B}(L^2)$. En particulier, si on suppose que $C(x) = O(\langle x\rangle^{-\beta})$ à l'infini avec $\beta > 1/2$, cela revient à étudier la limite $\langle x\rangle^{-s}(H - \lambda + i0)^{-1}\langle x\rangle^{-s}$ pour certain $s > 1/2$. Du coup, en se basant sur les développements de la résolvante près des résonances positives que l'on a obtenus, il serait intéressant de calculer la singularité de l'inverse de la matrice de diffusion lorsque l'énergie s'approche d'une résonance positive.

II- Estimation en énergie basse pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif avec un potentiel à décroissance lente

Dans Chapitre 4, en utilisant la technique de distorsion analytique, on a montré une estimation uniforme en z dans un voisinage de 0 de la résolvante déformée de l'opérateur modèle dissipatif avec un potentiel vérifiant les conditions de la classe $\mathcal{A}$ dans un voisinage de l'infini (voir Proposition 4.3.2). Cependant, il serait intéressant de montrer une estimation de la forme

$$\sup_{\lambda\in]0,1]} \|\langle x\rangle^{-s}(-\Delta+V-\lambda-i0)^{-k}\langle x\rangle^{-s}\| \leq C<\infty, \tag{4.5.2}$$

pour $s > k(\mu/4+1/2)$, $k \in \mathbb{N}$, sans utiliser une condition d'analycité sur le potentiel. Cette estimation est établie par Nakamura dans [52] pour un potentiel positif à décroissance lente sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour certains $\delta, \epsilon, C_0, R > 0$ et $0 < \mu < 2$

$$\delta\langle x\rangle^{-\mu} \leq V(x) \leq C_0\langle x\rangle^{-\mu},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.5.3}$$

et la condition de viriel

$$x\cdot\frac{\partial V}{\partial x}(x) \leq -\epsilon|x|^{-\mu} \qquad \text{pour} \qquad |x|>R. \tag{4.5.4}$$

L'approche de Nakamura consiste à effectuer un changement d'échelle ramenant à l'opérateur de Schrödinger semi-classique puis d'utiliser la méthode des commutateurs positifs de Mourre. Aussi, le calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints a été utilisé comme outil essentiel dans la démonstration.

Considérons le potentiel $V(x) = V_1(x) - iV_2(x)$ dont la partie réelle V_1 satisfait (4.5.3) et (4.5.4) et la partie imaginaire V_2 vérifie $V_2 > 0$, V_2 et $x\cdot\nabla V_2$ sont relativement H_1-bornés, où $H_1 = -\Delta + V_1$. Supposons que $H = -\Delta + V$ satisfait la condition de coercivité (4.1.3). Alors, en combinant la méthode de Nakamura de changement d'échelle et la méthode des commutateurs de Mourre pour des opérateurs dissipatifs élaborée par Royer [60], nous obtenons le résultat suivant: Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ à support dans un voisinage de 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > \max\Big(k-\frac{1}{2}, k(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{4})\Big)$. Alors

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|\langle x\rangle^{-\delta}\chi(\lambda^{-1}H_1)(H-\lambda-i0)^{-k}\chi(\lambda^{-1}H_1)\langle x\rangle^{-\delta}\|C<\infty$$

Cependant, on se demande si sous ces hypothèses, on pourrait obtenir une telle estimation de la résolvante sans aucune troncature en énergie.

III- Analyse spectrale au seuil pour l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck

Dans ce travail de thèse, on s'est intéressé au comportement en temps long de la solution de l'équation de Schrödinger qui dépend d'une manière cruciale des propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint, plus spécifiquement de l'existence d'une valeur propre au seuil, c'est-à-dire au bas du spectre essentiel, ou de résonances réelles. Un autre problème au quel on pourrait s'intéresser est l'asymptotique en temps grand de la solution de l'équation de Kramers-Fokker-Planck qui s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u(t;x,v) + Pu(t;x,v) & = & 0, & x,v \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1, t>0, \\ u(0;x,v) & = & u_0(x,v) & \end{array}\right. \tag{4.5.5}$$

où P est l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck non-autoadjoint donné par

$$P = -\Delta_v + \frac{1}{2}|v|^2 - \frac{n}{2} + v\cdot\nabla_x + \nabla_x V(x)\cdot\nabla_v$$

où le potentiel $V(x)$ est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Comme pour l'équation de Schrödinger, l'asymptotique en temps grand de la solution dépend de de l'analyse spectrale au seuil de l'opérateur P. La notion de résonance au seuil pour l'opérateur P est introduite dans [69] pour des potentiels de courte portée, plus précisément vérifiant pour $\rho > 1$

$$|V(x)| + \langle x\rangle |\nabla_x V(x)| \leq C_v \langle x\rangle^{-\rho}. \tag{4.5.6}$$

Un réel positif k est appelé une résonance au seuil de P s'il existe une fonction u satisfaisant l'équation

$$Pu = ku$$

sur $\mathbb{R}^{2n}_{x,v}$ tel que $u \in L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, \langle x\rangle^{-2s}dxdv)\backslash L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, dxdv)$ pour tout $s > 1$. Si le potentiel $V(x)$ décroit rapidement à l'infini, c'est-à-dire il satisfait la condition ci-dessus pour certain $\rho > 1$, alors 0 peut être une résonance au seuil de P et l'état résonant correspondant est:

$$\mathbf{m}(x,v) := (2\pi)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))},$$

alors que 0 ne peut pas une valeur propre de P. En effet, $\langle x\rangle^{-s} m \in L^2(\mathbb{R}^{2n}_{x,v})$ pour tout $s > 1$ si $n = 1, 2$. Pour ce dernier cas, Novak et Wang [54] ont montré que si $\rho > 4$ alors la solution de l'équation (4.5.5) avec état initial u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, \langle x\rangle^{2s}dxdv)$, $s > 5/2$, admet le comportement asymptotique suivant

$$e^{-tP}u_0 = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\langle u_0, \mathbf{m}\rangle \mathbf{m} + O(t^{-\frac{1}{2}-\epsilon}), \qquad t \to +\infty.$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, \langle x\rangle^{-2s}dxdv)$. D'autre part, la situation est différente en dimension $n \geq 3$. En effet, $\langle x\rangle^{-s} m \notin L^2(\mathbb{R}^{2n}_{x,v})$ pour $1 < s < \frac{n}{2}$ si $n \geq 3$, i.e. 0 n'est pas une résonance au seuil de P en dimension $n \geq 3$. Dans [69] en supposant $\rho > 2$ dans (4.5.6), il est démontré qu'il existe un certain $\epsilon > 0$ tel que

$$e^{-tP} = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}}\langle \cdot, \mathbf{m}\rangle \mathbf{m} + O(t^{-\frac{3}{2}-\epsilon}), \qquad t \to +\infty$$

comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, \langle x\rangle^{2s}dxdv)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{x,v}, \langle x\rangle^{-2s}dxdv)$, $s > 3/2$.

Pour un potentiel à croissance lente, c'est-à-dire vérifie à l'infini $V(x) \sim C\langle x\rangle^{\beta}$ pour certain $C > 0$ et $0 < \beta < 1$ et $|\nabla_x V(x)| \to 0$, il est connu que 0 est une valeur propre de P plongée dans son spectre essentiel $[0, +\infty[$. Il serait intéressant de regarder le comportement en temps long de la solution de (4.5.5) lorsque V vérifie (4.5.6) avec $-1 < \rho \leq 1$ motivé par la question de X.P. Wang dans [74]: Peut-on montrer que si $V(x) = c\langle x\rangle^{\mu}$ pour $|x|$ grande et certains $c > 0$ et $0 < \mu < 1$, alors on a

$$e^{-tP} = \langle \cdot, \mathbf{m}\rangle \mathbf{m} + O\Big(e^{-at^{\frac{\mu}{2-\mu}}}\Big)$$

où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-V(x)}\, dx = 1$ et $a > 0$?

Bibliography

[1] M. Aafarani, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equation with complex-valued potential*, 2019, arXiv: `1910.03681`.

[2] M. Aafarani and X. P. Wang, *Gevrey estimates of the resolvent and sub-exponential time-decay for the heat and Schrödinger semigroups. II*, 2020, preprint.

[3] S. Agmon, « Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory », in: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* Ser. 4, 2.*2* (1975), pp. 151–218.

[4] J. Aguilar and J.-M. Combes, « A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians », in: *Communications in Mathematical Physics* 22.*4* (1971), pp. 269–279.

[5] P. Alsholm and G. Schmidt, « Spectral and scattering theory for Schrödinger operators », in: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 40.*4* (1971), pp. 281–311.

[6] R. Amado and F. Greenwood, « There is no Efimov effect for four or more particles », in: *Physical Review D* 7.*8* (1973), p. 2517.

[7] E. Balslev and J.-M. Combes, « Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions », in: *Communications in Mathematical Physics* 22.*4* (1971), pp. 280–294.

[8] G. Boutoux, « Neutron-induced cross sections via the surrogate method », Thèse, Université Bordeaux 1, 2011.

[9] G. E. Brown, « Unified theory of nuclear models and forces », in: (1971).

[10] E. Davies, « Non-unitary scattering and capture. I. Hilbert space theory », in: *Communications in Mathematical Physics* 71.*3* (1980), pp. 277–288.

[11] E. Davies, « Two-channel Hamiltonians and the optical model of nuclear scattering », in: *Annales de l'IHP Physique théorique*, vol. 29, 4, 1978, pp. 395–413.

[12] E. Davies, « Non-self-adjoint differential operators », in: *Bulletin of the London Mathematical Society* 34.*5* (2002), pp. 513–532.

[13] Q. Ducasse, « Study of the surrogate method through the simultaneous measurement of the gamma-decay and fission-decay probabilities for the actinides 236U, 238U, 237Np and 238Np », Thèse, Université de Bordeaux, 2015.

[14] S. Dyatlov and M. Zworski, *Mathematical theory of scattering resonances*, vol. 200, American Mathematical Soc., 2019.

[15] B. Erdogan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three: I*, 2004.

[16] M. B. Erdoğan, M. Goldberg, and W. R. Green, « Dispersive estimates for four dimensional Schrödinger and wave equations with obstructions at zero energy », in: *Communications in Partial Differential Equations* 39.*10* (2014), pp. 1936–1964.

[17] M. B. Erdoğan and W. R. Green, « A weighted dispersive estimate for Schrödinger operators in dimension two », in: *Communications in Mathematical Physics* 319.*3* (2013), pp. 791–811.

[18] J. Faupin and J. Fröhlich, « Asymptotic completeness in dissipative scattering theory », in: *Advances in Mathematics* 340 (2018), pp. 300–362.

[19] J. Faupin and F. Nicoleau, « Scattering matrices for dissipative quantum systems », in: *Journal of Functional Analysis* 277.*9* (2019), pp. 3062–3097.

[20] H Feshbach, C. Porter, and V. Weisskopf, « Model for nuclear reactions with neutrons », in: *Physical review* 96.*2* (1954), p. 448.

[21] H. Feshbach, « Unified theory of nuclear reactions », in: *Annals of Physics* 5.*4* (1958), pp. 357–390.

[22] S. Fournais and E. Skibsted, « Zero energy asymptotics of the resolvent for a class of slowly decaying potentials », in: *Mathematische Zeitschrift* 248.*3* (2004), pp. 593–633.

[23] I. Gel′fand and G. Shilov, *Generalized functions. Vol. 1, Properties and operations*, Academic Press, 1969.

[24] V Georgiev and N. Visciglia, « About resonances for schrödinger operators with short range singular perturbation », in: *Differential Geometry, Complex Analysis and* (2007), p. 74.

[25] M. Goldberg, « A dispersive bound for three-dimensional Schrödinger operators with zero energy eigenvalues », in: *Communications in Partial Differential Equations* 35.*9* (2010), pp. 1610–1634.

[26] M. Goldberg, « Dispersive bounds for the three-dimensional Schrodinger equation with almost critical potentials », in: *Geometric And Functional Analysis GAFA* 16.*3* (2006), pp. 517–536.

[27] M. Goldberg, « Dispersive estimates for the three-dimensional Schrödinge equation with rough potentials », in: *American journal of mathematics* 128.*3* (2006), pp. 731–750.

[28] M. Goldberg and W. R. Green, « Dispersive Estimates for higher dimensional Schrödinger Operators with threshold eigenvalues I: The odd dimensional case », in: *Journal of Functional Analysis* 269.*3* (2015), pp. 633–682.

[29] M. Goldberg and W. Schlag, « Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three », in: *Communications in mathematical physics* 251.*1* (2004), pp. 157–178.

[30] W. Hauser and H. Feshbach, « The inelastic scattering of neutrons », in: *Physical review* 87.*2* (1952), p. 366.

[31] B. Helffer and A. Martinez, « Comparaison entre les diverses notions de résonances », in: *Helvetica Physica Acta* 60.*8* (1987), pp. 992–1003.

[32] P. D. Hislop and I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory: With applications to Schrödinger operators*, vol. 113, Springer Science & Business Media, 2012.

[33] W. Hunziker, « Distortion analyticity and molecular resonance curves », in: *Annales de l'IHP Physique théorique*, vol. 45, 4, 1986, pp. 339–358.

[34] T. Ikebe, Y. Saito, et al., « Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operator », in: *J. Math. Kyoto Univ* 12.*3* (1972), pp. 513–542.

[35] A. D. Ionescu and D. Jerison, « On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials », in: *Geometric and Functional Analysis* 13.*5* (2003), pp. 1029–1081.

[36] A. Jensen, « Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions results in $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 5$ », in: *Duke Mathematical Journal* 47.*1* (1980), pp. 57–80.

[37] A. Jensen, « Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Results in L2 (R4) », in: *Journal of mathematical analysis and applications* 101.*2* (1984), pp. 397–422.

[38] A. Jensen and T. Kato, « Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions », in: *Duke Math. J.* 46.*3* (Sept. 1979), pp. 583–611.

[39] J.-L. Journé, A. Soffer, and C. D. Sogge, « Decay estimates for Schrödinger operators », in: *Communications on Pure and Applied mathematics* 44.*5* (1991), pp. 573–604.

[40] T. Kato, « Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient », in: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 12.*3* (1959), pp. 403–425.

[41] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, vol. 132, Springer Science & Business Media, 2013.

[42] T. Kato, « Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators », in: *Contributions to Functional Analysis*, Springer, 1966, pp. 258–279.

[43] A. Komech and E. Kopylova, « Dispersive decay for the magnetic Schrödinger equation », in: *Journal of Functional Analysis* 264.*3* (2013), pp. 735–751.

[44] V. B. Lidskii, « Perturbation theory of non-conjugate operators », in: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 6.*1* (1966), pp. 73–85.

[45] R. Mezhoud, « Etude des états liés d'un potentiel complexe: application aux atomes hadroniques », PhD thesis, 2008.

[46] A. Michelangeli and R. Scandone, *On real resonances for three-dimensional Schrödinger operators with point interactions*, 2020, arXiv: 2002.07787.

[47] J. Moro, J. V. Burke, and M. L. Overton, « On the Lidskii–Vishik–Lyusternik Perturbation Theory for Eigenvalues of Matrices with Arbitrary Jordan Structure », in: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 18.*4* (1997), pp. 793–817.

[48] M. Murata, « Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations », in: *Journal of Functional Analysis* 49.*1* (1982), pp. 10–56.

[49] M. Murata, « Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators », in: *Japanese journal of mathematics. New series* 6.*1* (1980), pp. 77–127.

[50] M. Murata et al., « Scattering solutions decay at least logarithmically », in: *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 54.*2* (1978), pp. 42–45.

[51] P. Naidon and S. Endo, « Efimov physics: a review », in: *Reports on Progress in Physics* 80.*5* (2017), p. 056001.

[52] S. Nakamura, « Low energy asymptotics for Schrödinger operators with slowly decreasing potentials », in: *Communications in mathematical physics* 161.*1* (1994), pp. 63–76.

[53] R. G. Newton, « Noncentral potentials: The generalized Levinson theorem and the structure of the spectrum », in: *Journal of Mathematical Physics* 18.*7* (1977), pp. 1348–1357.

[54] R. Novak and X. P. Wang, « On the Kramers-Fokker-Planck equation with decreasing potentials in dimension one », in: *arXiv preprint arXiv:1712.01660* (2017).

[55] B. Pavlov, « The nonself-adjoint Schroedinger operator. II », in: *Spectral Theory and Problems in Diffraction*, Springer, 1968, pp. 111–134.

[56] C. Rakotonirina, « Matrices de commutation tensorielle: de l'équation de Dirac vers une application en physique des particules », in: *arXiv preprint arXiv:1405.7668* (2014).

[57] J. Rauch, « Local decay of scattering solutions to Schrödinger's equation », in: *Comm. Math. Phys.* 61.*2* (1978), pp. 149–168.

[58] M. Reed, *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*, Elsevier, 2012.

[59] M. Reed and B. Simon, « Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory », in: (1979).

[60] J. Royer, « Limiting absorption principle for the dissipative Helmholtz equation », in: *Communications in Partial Differential Equations* 35.*8* (2010), pp. 1458–1489.

[61] Y. Saito, « The principle of limiting absorption for the nonselfadjoint Schrödinger operator in R^N $(N \neq 2)$ », in: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 9.*2* (1974), pp. 397–428.

[62] J. Schwartz, « Some non-selfadjoint operators », in: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13.*4* (1960), pp. 609–639.

[63] B. Simon, « Phase space analysis of simple scattering systems: extensions of some work of Enss », in: *Duke Mathematical Journal* 46.*1* (1979), pp. 119–168.

[64] B. Simon, « Resonances in n-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory », in: *Annals of Mathematics* (1973), pp. 247–274.

[65] J. Sjöstrand and M. Zworski, « Elementary linear algebra for advanced spectral problems », in: *Annales de l'Institut Fourier* 57.*7* (2007), pp. 2095–2141.

[66] H. Tamura, « The Efimov effect of three-body Schrödinger operators », in: *Journal of functional analysis* 95.*2* (1991), pp. 433–459.

[67] H. Tamura, « The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: asymptotics for the number of negative eigenvalues », in: *Nagoya Mathematical Journal* 130 (1993), pp. 55–83.

[68] X. P. Wang, « Gevrey estimates of the resolvent and sub-exponential time-decay for the heat and Schrödinger semigroups », in: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 135 (2020), pp. 284–338.

[69] X. P. Wang, « Large-time asymptotics of solutions to the Kramers-Fokker-Planck equation with a short-range potential », in: *Communications in Mathematical Physics* 336.*3* (2015), pp. 1435–1471.

[70] X. P. Wang, « Number of eigenvalues for dissipative Schrödinger operators under perturbation », in: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 96.*5* (2011), pp. 409–422.

[71] X. P. Wang, « On the existence of the N-body Efimov effect », in: *Journal of Functional Analysis* 209.*1* (2004), pp. 137–161.

[72] X. P. Wang, « Time-decay of semigroups generated by dissipative Schrödinger operators », in: *Journal of Differential Equations* 253.*12* (2012), pp. 3523–3542.

[73] X.-P. Wang, « Time-decay of solutions to dissipative Schödinger equations », in: *PDE's, dispersion, scattering theory and control theory, Séminaires et Congrès*, vol. 30, SMF, 2017, pp. 141–153.

[74] X. P. Wang and L. Zhu, « On the wave operator for dissipative potentials with small imaginary part », in: *Asymptotic Analysis* 86.*1* (2014), pp. 49–57.

[75] V. F. Weisskopf, « Nuclear Physics », in: *Rev. Mod. Phys.* 29 (2 1957), pp. 174–181.

[76] D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory: analytic theory*, 158, American Mathematical Soc., 2010.

[77] D. R. Yafaev, « Spectral properties of the Schrödinger operator with a potential having a slow falloff », in: *Functional Analysis and Its Applications* 16.*4* (1982), pp. 280–286.

[78] D. Yafaev, « The low energy scattering for slowly decreasing potentials », in: *Communications in Mathematical Physics* 85.*2* (1982), pp. 177–196.

[79] K Yajima, « Dispersive estimates for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalue », in: *Communications in mathematical physics* 259.*2* (2005), pp. 475–509.

[80] L. Zhu, « Comportement en grand temps des solutions de l'équation de Schrödinger dissipative », PhD thesis, Nantes, 2014.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

Titre : Résonances réelles et propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint

Mot clés : Asymptotique en temps grand des solutions, opérateur de Schrödinger non-autoadjoint, résonances positives, valeur propre au seuil, estimations de Gevrey

Resumé : Dans cette thèse, on étudie le comportement en temps grand des solutions de l'équation de Schrödinger avec potentiels à valeurs complexes. Dans la première partie, on s'intéresse aux potentiels à décroissance rapide. On établit les développements de la résolvante au seuil et près des résonances positives. On obtient, sous différentes conditions, les développements en temps grand des solutions en supposant l'existence de résonances positives et d'une résonance et / ou une valeur propre au seuil zéro. Dans la deuxième partie, on s'intéresse aux potentiels à décroissance lente. On établit des estimations de Gevrey de la résolvante aussi que les développements en temps grand des semi-groupes de Schrödinger et de la chaleur avec des estimations sous-exponentielles en temps sur le reste. Ces derniers résultats généralisent les résultats de X. P. Wang au cas où le potentiel vérifie une condition de Viriel au voisinage de l'infini. Ainsi, nos résultats dans les deux parties couvrent le cas d'une valeur propre zéro de multiplicité géométrique quelconque.

Title : Real resonances and spectrale properties of non-selfadjoint Schrödinger operator

Keywords : Large time behavior of solutions, non-selfadjoint Schrödinger operator, positive resonances, threshold eigenvalue, Gevrey estimates

Abstract : In this thesis, we study the large-time behavior of solutions to Schrödinger equation with complex-valued potentials. In the first part, we are interested in rapidly decreasing potentials. We establish the resolvent expansions at threshold and near positive resonances. We obtain the expansions in time of solutions under different conditions, including the existence of positive resonances and zero resonance or / and zero eigenvalue. In the second part, we are interested in slowly decreasing potentials. We establish Gevrey estimates for the resolvent and the large-time expansions for Schrödinger and heat semi-groups with sub-exponential time-decay estimates on the remainder. These results generalize the results of X. P. Wang to potentials satisfying a viriel condition at infinity. Our results in the two parts cover the case of zero eigenvalue of arbitrary geometric multiplicity.