N°d'ordre NNT : 2020LYSET014

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

École Doctorale N° 162
MEGA
Mécanique – Energétique – Génie Civil - Acoustique

Spécialité : Génie Civil

Soutenue publiquement le 06/11/2020, par :

DINH Hai Nam

Comportement dynamique de bâtiments : Réduction de modèles et impact de l'ajout d'amortisseurs linéaires visqueux

---

Devant le jury composé de :

Patrice CARTRAUD, Professeur, Ecole Centrale de Nantes	Président du jury
Hélène DUMONTET, Professeur, Université UPMC	Rapporteur
Guy BONNET, Professeur, Université Gustave Eiffel	Rapporteur
Angelo LUONGO, Professeur, University of L'Aquila	Examinateur
André PLUMIER, Professeur, University of Liège	Examinateur
Claude BOUTIN, Chercheur, HDR, ENTPE	Directeur de thèse
Stéphane HANS, Chercheur, ENTPE	Co-directeur de thèse

Année 2020

Résumé

Ce travail de thèse a pour cadre général l'étude du comportement dynamique des bâtiments modernes de moyenne à grande hauteur à structure verticale répétitive. Les développements théoriques sont basés sur la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets. Deux objectifs ont été poursuivis : le premier vise à la mise en place d'une méthode pratique d'estimation du comportement dynamique de bâtiments réels à l'aide de modèles de poutres généralisées issus d'une étude par homogénéisation, le second objectif a consisté à intégrer dans ces modèles l'effet de l'ajout d'amortisseurs visqueux. Les applications de ce travail concernent la compréhension du fonctionnement dynamique des bâtiments pour la conception parasismique des structures neuves ou l'évaluation et le rétrofit des structures existantes, mais également la conception des systèmes dissipateurs pour l'amélioration de leur résistance.

La première partie de ce travail s'est d'abord attachée à exposer le cadre théorique permettant la construction de deux modèles de poutre générique qui sont généralisées par homogénéisation périodique discrète, puis à en décrire leur fonctionnement. En effet, ces deux modèles génériques reposent sur l'interaction de trois mécanismes (le cisaillement, la flexion globale et la flexion interne) associés à des paramètres de rigidité dépendant uniquement de la géométrie et des constituants d'un étage. En fonction du contraste entre les trois mécanismes, ces modèles peuvent dégénérer en des modèles plus simples comme la poutre de Timoshenko ou la poutre 'Sandwich', ou encore comme la poutre de flexion pur ou de cisaillement pure. Enfin, une méthodologie est présentée pour transposer ces développements théoriques à l'étude de bâtiments réels et une application pratique est exposée.

La seconde partie reprend l'étude théorique par homogénéisation de bâtiments idéalisés en considérant l'ajout de systèmes amortisseurs visqueux linéaires. Les structures considérées sont des poutres 1D discrètes constituées par l'empilement de portiques simples avec des amortisseurs disposés sur les deux diagonales. L'étude exhaustive permet de déterminer que cet ajout ne modifie que le paramètre de cisaillement des modèles de poutres génériques. Une étude d'impact, fonction du niveau d'amortissement des systèmes adjoints, permet de (1) comprendre comment et si le comportement d'ensemble est modifié et (2) d'estimer l'apport effectif de ces systèmes sur l'amortissement global en lien avec le fonctionnement effectif de la structure. En particulier, il est montré qu'un fonctionnement de flexion globale (initial ou modifié) rend inopérant ces systèmes dans la configuration diagonale.

Les approches développées dans cette thèse permettent d'apporter un cadre

explicatif sur le comportement dynamique des bâtiments réels et sur l'effet de systèmes amortisseurs visqueux linéaires sur celui-ci, mais aussi des méthodes de calcul complémentaires aux techniques actuelles comme le calcul Eléments Finis. Dans le cas de bâtiments de grande hauteur, elles pourraient s'avérer très utiles, car contrairement à ce dernier, leur marge d'erreur se réduit avec la taille croissante du système étudié.

Mots-clés : bâtiment, dynamique, poutre générique, homogénéisation périodique, amortisseur visqueux linéaire.

Abstract

The general objective of this thesis work is the study of the dynamic behaviour of modern medium to high-rise buildings with repetitive vertical structures. The theoretical developments are based on the homogenization method of discrete periodic media. Two objectives have been pursued : the first aims at the implementation of a practical method for estimating the dynamic behaviour of real buildings using generalized beam models resulting from a homogenization study, the second objective consisted in integrating in these models the effect of the addition of viscous dampers. The applications of this work concern the understanding of the dynamic functioning of buildings for the seismic design of new structures or the evaluation and retrofit of existing structures, but also the design of dissipative systems for the improvement of their resistance.

The first part focused firstly on presenting the theoretical framework allowing the construction of two generic beam models that are generalized by discrete periodic homogenization, and then on describing their operation. Indeed, these two generic models are based on the interaction of three mechanisms (shear, global bending and internal bending) associated with stiffness parameters depending only on the geometry and constituents of a stage. Depending on the contrast between the three mechanisms, these models may degenerate into simpler models such as the Timoshenko beam or the 'Sandwich' beam, or as the pure bending or pure shear beam. Finally, a methodology is presented to transpose these theoretical developments to the study of real buildings, and a practical application is exposed.

The second part resumes the theoretical study by homogenization of idealized buildings by considering the addition of linear viscous damping systems. The structures considered are discrete 1D beams constituted by the stacking of simple gantries with dampers arranged on the two diagonals. The exhaustive study allows to determine that this addition only modifies the shear parameter of the generic beam models. An impact study, depending on the level of damping of the added systems, allows (1) to understand how and if the overall behaviour is modified and (2) to estimate the effective contribution of these systems on the overall damping in relation to the effective operation of the structure. In particular, it is shown that a global bending operation (initial or modified) makes these systems inoperative in the diagonal configuration.

The approaches developed in this thesis provide not only an explanatory framework on the dynamic behaviour of real buildings and on the effect of linear viscous damping systems on it, but also calculation methods complementary to

current techniques such as the Finite Element Calculation. In the case of high-rise buildings, they could prove very useful, because unlike the latter, their margin of error decreases with the increasing size of the system under study

Keywords : building, dynamics, generic beam models, periodic homogenization, linear viscous damper.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Méthode d'homogénéisation en dynamique des structures **5**
1.1 Introduction des méthodes d'étude du comportement dynamique du bâtiment 6
1.2 Homogénéisation des milieux périodiques discrets 8
1.3 Remarques sur la méthode HMPD 23

2 Modèle de poutre Générique et son extension **25**
2.1 Modèle de poutre Générique 26
2.2 Généralisation du modèle Générique avec la prise en compte du cisaillement local des murs 39
2.3 Conclusion sur les modèles Génériques 48

3 Modélisation de bâtiment **51**
3.1 Modèles et paramètres 52
3.2 Modélisation de bâtiments 57
3.3 Retour sur le bâtiment de référence 75
3.4 Conclusion sur la méthodologie d'étude par les modèles Génériques 83

4 Système d'amortisseurs visqueux linéaires **85**
4.1 Systèmes de dissipation d'énergie 86
4.2 Conception de système de dissipation d'énergie 91
4.3 Structure renforcée par le système des amortisseurs visqueux linéaires 93
4.4 Estimation du taux d'amortissement 96
4.5 Conclusion sur système d'amortisseurs visqueux linéaires 98

5 Étude par homogénéisation d'une structure équipée d'amortisseurs visqueux linéaires **101**
5.1 Adaptation de la méthode HMPD pour une structure équipée d'amortisseurs visqueux linéaires 102
5.2 Poutre de cisaillement 111
5.3 Modèle de poutre de Timoshenko 119
5.4 Modèle de poutre générique 121
5.5 Première conclusion sur l'étude HMPD des modèles équipés par les amortisseurs visqueux linéaires 124

6 Impact de l'ajout d'amortisseurs linéaires sur le comportement de bâtiment 127
6.1 Etude du modèle de poutre Générique avec amortisseurs visqueux linéaires 128
6.2 Impact des amortisseurs sur le comportement dynamique 133
6.3 Exemple numérique 139
6.4 Conclusion 146

Conclusion générale 148

Annexe 152

A Modèle cisaillement équipé d'amortisseur "transversal" 153
A.1 Mise en œuvre de HMPD équipé les amortisseurs "transversals" - Structure en cisaillement 153
A.2 Premier cas : l'amortissement à l'ordre $O(\varepsilon^5)$ 155
A.3 Deuxième cas : l'amortissement à l'ordre $O(\varepsilon^4)$ 161
A.4 Troisième cas : l'amortissement à l'ordre $O(\epsilon^{7/2})$ 162
A.5 Conclusion 163

B Modèles équipés d'amortisseur diagonal 165
B.1 Étude adimensionnelle de la poutre de Timoshenko à régime amorti 165
B.2 Timoshenko sur amortie 166
B.3 Modèle de poutre cisaillement - flexion couplée 167

Bibliographie 169

Table des figures

1.1 Exemples de structures 9
1.2 Notations des variables cinématiques des nœuds au niveau n 10
1.3 Variable cinématique et efforts de la poutre 10
1.4 Efforts sur une section de poutre 11
1.5 Equilibre des forces nodaux dans la direction x 13
1.6 Equilibre des forces nodaux dans la direction y 13
1.7 Equilibre des moments 14
1.8 Variables cinématiques transversales macroscopiques 15
1.9 Variables cinématiques longitudinales macroscopiques 15
1.10 Processus de HMPD 21

2.1 Mécanismes de la dynamique transverse 27
2.2 Association des mécanismes ([Chesnais, 2010]) 29
2.3 Les différents modèles possibles pour les vibrations transversales . . 30
2.4 Domaines d'application des différents modèles continus 31
2.5 Evolution de la première déformée modale en fonction du nombre de cellules (10, 100 ou 1000) pour les structure constituées de portiques F1 (à gauche) et F2 (à droite) ([Hans and Boutin, 2008]) 33
2.6 Evolution des quatre premières fréquences propres en fonction du nombre de cellules. A gauche : comparaison du modèle générique avec le calcul par éléments finis, à droite : pourcentage d'erreur ([Hans and Boutin, 2008]) 34
2.7 Comparaison du modèle générique avec les modèles plus simples. A gauche : évolution de la 1ere et de la 4e fréquence propre en fonction du nombre de cellules, à droite : évolution des ratios de fréquences f_i/f_1 ([Hans and Boutin, 2008]) 35
2.8 La structure de doubles portiques ([Chesnais, 2010]) 36
2.9 Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(1)$ 43
2.10 Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(\varepsilon)$ (figure du haut) et $\chi = O(\varepsilon^3)$ (figure du bas) 45
2.11 Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(\varepsilon^{-1})$ (figure du haut) et $\chi = O(\varepsilon^{-3})$ (figure du bas) 46

3.1 Différence entre les deux mécanismes de cisaillement 54
3.2 Conditions aux limites d'une cellule pour estimer la rigidité du cisaillement de la cellule 55

3.3 Trois mécanismes de la cellule dans la structure 55
3.4 Plan d'un étage courant 58
3.5 Calcul de la rigidité K 65
3.6 Calcul de la rigidité $\mathcal{K}_m$ 66
3.7 Écarts relatifs des fréquences du modèle Générique par rapport aux calculs éléments finis 67
3.8 Écarts relatifs des fréquences du modèle Générique Modifié (ajouté $\mathcal{K}_m$) par rapport aux calculs éléments finis 68
3.9 Distribution des ratios de fréquences propres de la poutre de Timoshenko en fonction du paramètre C ([Boutin et al., 2005]) 70
3.10 Représentation analogique du fonctionnement des poutres de Timoshenko et Sandwich 71
3.11 Représentation analogique du fonctionnement de deux modèles de poutre Génériques. 71
3.12 Ratios de fréquence f_2/f_1 du calcul éléments finis, pour les deux directions longitudinales et transverses 72
3.13 Domaine de validité des modèles selon le modèle Générique 73
3.14 Comparaison des ratios f_2/f_1 des calculs EF avec ceux des modèles génériques et de modèles de Timoshenko. 75
3.15 Panneaux de façade 77
3.16 Etude de variation de module d'Young (GPa) des éléments dans la direction longitudinale (x) - *Valeur en rouge : fréquences propres du modèle générique ; Valeur en bleu : ratio de fréquence ; valeur en noir : la différence des valeurs par rapport aux valeurs expérimentales* 78
3.17 Etude de variation de module d'Young (GPa) des éléments dans la direction transversale (y) - *Valeur en rouge : fréquences propres du modèle générique ; Valeur en bleu : ratio de fréquence ; valeur en noir : la différence des valeurs par rapport aux valeurs expérimentales* 78
3.18 Changement du comportement du bâtiment en ajoutant les panneaux de façade dans la direction longitudinale 79
3.19 Ratio de fréquence f_2/f_1 et f_3/f_1 en fonction des paramètres adimensionnels C et γ 80
3.20 Estimation des paramètres adimensionnels du bâtiment 81

4.1 Amortisseur à friction ([Pall and Marsh, 1982]) 88
4.2 Amortisseur à friction de Sumitomo ([Aiken and Kelly, 1990]) . . . 88
4.3 Système des tendeurs en acier ([Tyler, 1985]) 89
4.4 Amortisseur viscoélastique et l'installation ([Aiken and Kelly, 1990]) 89
4.5 Amortisseur de fluide visqueux ([Constantinou and Symans, 1992]) . 90
4.6 Installation des amortisseurs visqueux linéaires ([Hwang et al., 2008]) - a) diagonal brace - b) K brace - c) upper toggle brace - d) lower toggle brace 91
4.7 Relation relative de force-déplacement dans (a) l'amortisseur à friction, (b) le tendeur en acier, (c) l'amortisseur viscoélastique et (d) l'amortisseur visqueux 92
4.8 Energie en temps réel de la structure d'un étage sous le séisme Taft 100% ([Constantinou and Symans, 1992]) 93

4.9 Modèle d'un étage ([Constantinou and Symans, 1992]) 94
4.10 Modèle de trois étages ([Constantinou and Symans, 1992]) 95
4.11 Comparaison du fonction de transfert analytique et expérimentale du modèle de trois étages sans amortisseur et celui équipé 6 amortisseurs ([Constantinou and Symans, 1992]) 96

5.1 Modèle de structure avec l'amortisseur "transversal" 103
5.2 Modèle de structure avec des amortisseurs diagonaux 105
5.3 Déformation des amortisseurs 106
5.4 Les diffŕents régimes d'amortissement 109
5.5 Modèle de structure avec des amortisseurs diagonaux 110

6.1 Association des mécanismes du modèle Générique amorti 133
6.2 Phénomènologie du niveau d'amortissement 134
6.3 Les différents mécanismes de la structure 135
6.4 Impact des amortisseurs sur le comportement 136
6.5 Modification de la poutre de Timoshenko en une poutre en flexion globale par ajout d'amortisseurs 137
6.6 Impact de l'amortisseur à la fréquence propre et taux d'amortissement du bâtiment 138
6.7 Annulation du mouvement et l'amortissement 141
6.8 Comportement représentatif de trois structures dans la domaine de validité 142
6.9 Différence de taux d'amortissement globale estimé par différentes études par rapport l'estimation par éléments finis de la structure "Jaune" 144
6.10 Différence de taux d'amortissement globale estimé par différentes études par rapport l'estimation par éléments finis de la structure "Verte" 145

A.1 Modèle de structure avec l'amortisseur "transversal" 153

B.1 Cartographie 166

Liste des tableaux

1.1 Equilibre local d'une section de poutre 11

3.1 Valeurs des caractéristiques macroscopiques d'un niveau 60
3.2 Fréquences propres dans la direction longitudinale (x) selon le calcul EF (référence) et les deux modèles Génériques, et écarts relatifs . . 61
3.3 Fréquences propres dans la direction longitudinale (x) *(continu)* . . 62
3.4 Fréquences propres dans la direction transversale (y) selon le calcul EF (référence) et les deux modèles Génériques, et écarts relatifs . . 63
3.5 Fréquence propre dans la direction transversale (y) *(continu)* 64
3.6 Valeurs des paramètres d'échelle pour les trois premiers modes en fonction du nombre de cellules et pour les conditions aux limites encastrées-libre 69
3.7 Valeurs des paramètres d'échelle pour les trois premiers modes en fonction du nombre de cellules et pour les conditions aux limites encastrées-libre 73
3.8 Valeurs des exposants des paramètres en fonction du nombre de niveaux pour la direction longitudinale (x) 73
3.9 Valeurs des exposants des paramètres en fonction du nombre de niveaux pour la direction transversale (y) 74
3.10 Fréquences propres mesurées expérimentalement in situ 76
3.11 Valeurs des paramètres macroscopiques 79
3.12 Fréquence propre de la poutre générique et modèle éléments finis . . 82

4.1 Propriété du modèle d'un étage 94
4.2 Propriété du modèle de trois étages 95
4.3 Propriété du modèle de trois étages *(continue)* 96
4.4 Modification de composant vertical et horizontal de l'amortisseur selon l'installation ([Hwang et al., 2008], cf. figure (4.6)) 98

6.1 Paramètres du modèle d'étude 141
6.2 Périodes et fréquences propres des modèles éléments finis 142
6.3 Récapitulatif des études de la structure "Jaune" 142
6.4 Récapitulatif des études de la structure "Jaune" (continu) 143
6.5 Récapitulatif des études de la structure "Verte" 143
6.6 Récapitulatif des études de la structure "Verte" (continu) 143
6.7 Récapitulatif des études de la structure "Rouge" 143
6.8 Récapitulatif des études de la structure "Rouge" (continu) 144

Introduction générale

L'étude du comportement dynamique est une étape indispensable dans le calcul de résistance du bâtiment vis-à-vis de l'action sismique et du vent. La technique la plus directe est la simulation numérique par éléments finis. La structure réelle est modélisée partiellement ou complètement, puis grâce à la puissance du matériel et du logiciel, elle conduit aux résultats qui intéressent le concepteur ou le contrôleur. Cette méthode est en théorie applicable à tout type de structure avec des géométrie complexes. Cependant, elle constitue une "boite noire" qui masque la compréhension du fonctionnement du modèle. De plus, la précision des résultats dépend fortement de la qualité de la modélisation et du maillage du modèle. Une structure étendue et complexe exige une simulation très précise, un maillage suffisamment fin et un temps de calcul donc très important, notamment en dynamique. Cet inconvénient est particulièrement pénalisant dans la phase de conception où plusieurs études de faisabilité doivent être menées. Pour optimiser le travail, l'ingénieur-structure doit avoir une bonne compréhension du fonctionnement structural. Pour cela, il peut s'appuyer sur des modèles simplifiés. À condition d'être représentatifs du comportement du bâtiment, ces modèles lui permettent de prévoir le comportement de la structure sans faire appel à des modèles numériques sophistiquées et peuvent donner des solutions structurelles fiables. Le modèle simplifié aide aussi à contrôler le résultat de la simulation numérique qui peut parfois poser question.

Parmi les modèles simplifiés disponibles, nous nous intéressons aux modèles continus qui se présentent comme des poutres 1D caractérisés par leurs lois de comportement et les équations d'équilibre. Ces modèles continus ont d'abord été développés pour représenter les différents éléments qui constituent les bâtiments en particulier. [Skattum, 1971] et [Basu et al., 1979] avaient déjà établi le comportement des murs voiles couplés. Dans ces études, les murs voiles couplés sont constitués de deux gros murs reliés par des poutres horizontales. Lors de la modélisation, les poutres horizontales sont supposées infiniment rigides dans leur plan et sont remplacées par un milieu continu équivalent. Ce dernier transmet les efforts aux murs voiles. Le comportement global est équivalent à une poutre constituée d'un matériau léger emprisonné entre deux faces plus fines et plus rigides ([Skattum, 1971]). Dans la littérature, [Potzta and Kollar, 2003] appelle ce modèle "poutre sandwich".

Pour les structures constituées de murs voiles et de portiques, le travail effectué par [Heidebrecht and Smith, 1973] propose d'associer en parallèle une poutre de flexion d'Euler-Bernoulli et une poutre de cisaillement. Ces travaux ont ensuite été

repris par ([Basu and Nagpal, 1980] ; [Basu et al., 1984]) qui ont amélioré le calcul de la rigidité en cisaillement des portiques.
[Smith et al., 1981] ont montré que le modèle général développé pour les murs voiles couplés peut également s'appliquer aux autres types de contreventement : murs voiles, portiques et portiques contreventés. Le point commun de tous ces éléments est que leur comportement dépend de trois paramètres : la rigidité du cisaillement, la rigidité de la flexion globale et de la flexion couplée. La différence consiste dans l'estimation de ces trois paramètres et de leur ordre de grandeur. Puis, [Smith et al., 1984] ont étendu cette méthodologie aux bâtiments. Les rigidités ont d'abord été estimées pour chacun des systèmes de contreventement et leurs somme donne celles de l'ensemble du bâtiment. Cette démarche ressemble à celle de [Potzta and Kollar, 2003]. Ces auteurs commencent par modéliser chaque système de contreventement par une "poutre sandwich" en utilisant les formules de la littérature pour le calcul des rigidités. Puis ces poutres sont assemblées pour construire la "poutre sandwich" globale du bâtiment. Dans cette approche, les rigidités sont obtenues par une approche énergétique. La résolution approchée de ce modèle se trouve dans [Tarján and Kollár, 2004].

Parmi les méthodes pour lesquelles le modèle est prédéfini à l'avance, citons ici [D'Annibale et al., 2019] et [Angelo Luongo, 2020]. L'intérêt de l'approche proposée réside dans la détermination des paramètres du modèle, point important comme on le verra par la suite. Dans ces travaux, l'angle adopté est local et basé sur la cellule. Une modélisation par approche énergétique est réalisée en considérant plusieurs cinématiques adaptées au fonctionnement visé (Flexion ou Cisaillement) avec des conditions périodiques. Appliqué à des exemples de portiques, les auteurs obtiennent les expressions analytiques de ces paramètres.

Tous ces modèles considèrent que les planchers sont infiniment rigides dans leur plan et infiniment souples hors plan. Mais, cette hypothèse de diaphragme rigide n'est pas toujours valable. Pour les bâtiments contreventés par deux murs voiles situés aux extrémités, [Jain, 1984] a proposé un modèle analytique qui tient compte de la déformation des planchers dans leur plan. [Li, 2000] a construit un modèle de plaque qui se déforme en flexion dans la direction verticale et en cisaillement dans la direction horizontale pour représenter les bâtiments étroits.

De façon indépendante, [Hans and Boutin, 2008] ont modélisé le comportement d'une famille de bâtiments idéalisés constitués de structure multi-portique. Le modèle de base est un empilement vertical de portiques simples. Chaque étage se compose de deux murs identiques et d'un plancher, dont on fait varier les caractéristiques matérielles ou géométriques. Sans hypothèse *a priori* sur le fonctionnement des planchers, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) appliquée à cette famille de structures permet de retrouver tous les modèles existants. Parmi eux, le modèle Générique est le plus complexe. Il contient notamment trois mécanismes : flexion ensemble des murs ce qui est appelé la flexion globale ; le cisaillement de l'étage et la flexion couplée de chaque mur (flexion interne). [Chesnais et al., 2012] a appliqué la méthode HMPD à la structure double portique et a montré qu'il est possible de généraliser ce modèle

Générique aux structures plus complexes tels que les bâtiments réels. Le transfert du modèle théorique aux structures réelles nécessite d'abord d'estimer les paramètres du modèle. La résolution analytique du modèle permet de déterminer la fréquence propre de la structure et de prévoir le comportement dominant.

Les travaux de [Hans and Boutin, 2008] et [Chesnais et al., 2012] constitue le point de départ de ce travail de thèse. Le mémoire est composé de deux parties indépendantes : la première partie est en continuité directe de la thèse de C. Chesnais et a pour objectif la mise en œuvre pratique de l a méthodologie d'ingénieur d'éveloppée par C. Chesnais pour l'étude du fonctionnement dynamique de bâtiment ; la seconde partie s'intéresse, à l'aide de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets, à l'effet de l'ajout de systèmes amortisseurs sur le fonctionnement dynamique d'ensemble d'un bâtiment.

La première partie est divisée en trois chapitres :

Le chapitre 1 détaille les étapes de mise en œuvre de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD), puis présente un cas de structure multiportique conduisant au modèle dit 'Générique' utilisé pour décrire le comportement dynamique de bâtiments périodiques en élévation.

Le chapitre 2 présente les deux modèles généraux 1D de poutres généralisées issus de l'étude d'une famille de structures périodiques multiportiques. Ces modèles sont issus des travaux précédents, le premier modèle dit 'le modèle Générique' de [Hans and Boutin, 2008] et le second, dit 'Générique Modifié' du travail de Master de [Jigorel, 2009]. On présente dans ce chapitre les caractéristiques de ces modèles, leur fonctionnement, leur champ d'application, les modèles 'simplifiés' qui en dérivent (comme la poutre de Timoshenko, de cisaillement ou la poutre Sandwich) et les domaines de validité associés. Pour le second modèle, on développe spécifiquement dans cette thèse les modèles dérivant de celui-ci en fonction de 3 paramètres structuraux et on présente leur domaine de validité associé. L'intérêt de ces modèles pour l'étude du comportement dynamique de bâtiments est ainsi mis en évidence, car ceux-ci offrent un cadre de compréhension du fonctionnement et de son évolution en fonction de quelques paramètres-clé, intégrant la structure interne et le nombre d'étage.

Le chapitre 3 est consacré à la mise au point de la méthodologie permettant d'utiliser ces modèles sur un bâtiment réel. Il s'agit en fait de déterminer les paramètres des modèles à partir du plan de structure. On montre que trois de ces paramètres (rigidités de flexion interne et global et rigidité de cisaillement des murs) peuvent se déduire d'un simple calcul 'à la main' à partir du plan d'étage. La difficulté réside alors dans le calcul d'un seul paramètre, la rigidité d'étage, qui nécessite l'utilisation d'un modèle EF. Cependant, cette modélisation n'est effectuée que sur un seul niveau, et toujours en statique, ce qui reste très abordable. La méthodologie proposée est appliquée sur un bâtiment HLM de 7 étages. Puisque les paramètres déterminés ne dépendent pas directement du nombre de niveaux, on compare les résultats des deux modèles à ceux obtenus par un calcul

EF en dynamique effectué sur une série de bâtiments fictifs comptant entre 5 et 35 étages (le maximum réalisable sur un PC conventionnel). On montre ainsi la facilité de mise en œuvre de cette approche par rapport à une méthode classique, la bonne précision des résultats, qui en plus s'améliore avec le nombre croissant de niveaux.

La seconde partie, traitant de l'effet de l'ajout de systèmes amortisseurs sur le fonctionnement dynamique d'un bâtiment, est totalement originale et compte également trois chapitres :

Le chapitre 4 est une étude bibliographique sur les systèmes amortisseurs ou dissipateurs, les effets observés sur les fonctionnements des structures et les méthodes de dimensionnement en vigueur.

Le chapitre 5 est une étude théorique visant à déterminer les modèles de comportement de structures équipées de systèmes amortisseurs linéaires. Elle s'appuie sur la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets appliquée à une famille de structures multi-portiques dont on peut faire varier les paramètres structuraux pour générer différents types de comportement. Les amortisseurs sont disposés sur les diagonales des portiques et différents niveaux d'amortissements visqueux sont considérés. Cette partie conduit au modèle de poutre Générique intégrant la contribution d'amortisseurs visqueux linéaires.

Le chapitre 6 étudie l'effet de l'ajout des amortisseurs linéaires sur le comportement dynamique global et sur le niveau d'amortissement effectif de la structure. Comme on dispose des équations de comportement analytique, il est possible de mener une approche adimensionnelle et de prévoir en fonction de la puissance des amortisseurs les comportements modifiés. Sur l'amortissement global, il est mis en évidence qu'il existe un optimum pour la puissance des amortisseurs au-delà duquel il serait même contre-productif d'augmenter leur raideur. Pour des comportements proche d'une poutre de flexion globale, on montre que la configuration diagonale des amortisseurs est inefficace et n'apporte aucun amortissement à la structure. Ces résultats sont confirmés sur des exemples de structures, sur lesquelles on montre également l'intérêt de cette approche par rapport à la méthode éléments finis et à des approche de la littérature.

Chapitre 1

Méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets

Contents

1.1 Introduction des méthodes d'étude du comportement dynamique du bâtiment 6

1.2 Homogénéisation des milieux périodiques discrets . . . 8

1.2.1 Structures étudiées et notations 8

1.2.2 Discrétisation de l'équilibre dynamique 10

1.2.3 Cinématique macroscopique 14

1.2.4 Phase de changement d'échelle 16

1.2.5 Normalisation 19

1.2.6 Résolution 20

1.2.7 Un exemple : le cas "générique" 21

1.3 Remarques sur la méthode HMPD 23

1.1 Introduction des méthodes d'étude du comportement dynamique du bâtiment

Les bâtiments, par leur structure interne, s'apparentent à des milieux "creux", comme peuvent l'être des mousses - assemblages de plaques ou coques - ou des structures à barres. En celà, ils diffèrent des milieux continus (ou pleins), ce qui se traduit par des comportements plus riches. En effet, contrairement à un milieu continu classique qui possède une rigidité de même ordre en compression ou en cisaillement, ce type de structure présente souvent un fort contraste de rigidité entre compression et cisaillement du fait même de leur conception. Les bâtiments étaient conçus pour assurer les descentes de charges, la rigidité verticale (en compression) se révèle bien plus grande que la rigidité horizontale (contreventement). Elles possèdent en outre des degrés de liberté internes plus nombreux, comme nous pourrons le constater plus loin. Les milieux classiques (dits de Cauchy) de la mécanique des milieux continus (en 3D ou 2D) ou les poutres de Bernoulli (en 1D) sont donc souvent insuffisantes pour modéliser ce type de structures.

Bien que complexe, la structure interne de nombreux bâtiments présente une périodicité verticale, consistant en la répétition d'un même étage dans la direction verticale. Les méthodes que l'on présente ci-dessous exploitent toutes cette caractéristique, et la famille de milieux étudiés est nommée "milieux périodiques discrets".

De nombreuses études ont et sont encore menées sur cette famille, car elle présente de nombreux atouts (économie de matière, grande résistance, ...), elle est pésente dans de nombreux domaines trouve partout (même dans le vivant) et les connaissances évoluant, de nouvelles applications se développent, en mécanique (vibratoire), en acoustique, etc ... Cette présente revue s'appuie sur celle réalisée par Céline Chesnais dans sa thèse [Chesnais, 2010].

Dans une première école, le milieu continu est supposé *a priori*. Les paramètres du modèle peuvent alors être déterminés à l'aide de matrices-transfert [Lee, 1998], ou [Stephen, 1999] avec la méthode présentée dans [Stephen and Wang, 1996] ou à l'aide de tests numériques sur la cellule de base (par exemple [Sun and Juang, 1986] ; [Sun and Liebbe, 1990] ; [Anthoine, 1995] ; [Buannic et al., 2003], ...). Mais l'école la plus répandue consiste à utiliser une équivalence énergétique (par exemple l'étude de ([Bažant and Christensen, 1972] ; [Noor and Nemeth, 1980] ; [Noor, 1988] puis [McCallen and Romstad, 1988], [McCallen and Romstad, 1990] ; [Pradel, 1998] ; [Burgardt and Cartraud, 1999] ; [Kumar and McDowell, 2004]) pour les structures réticulées et ([Forest, 2006] ; [Michel et al., 1999] ; [Laudarin, 2008]) pour les milieux continus). Le milieu choisi peut être un milieu classique ou non, et pour les structures unidimensionnelles, une poutre de Timoshenko avec éventuellement des couplages entre traction-compression, flexion et cisaillement ([Sun and Juang, 1986] ; [Anthoine, 1995] ; [Lee, 1998] ; [Burgardt and Cartraud, 1999] ; [Michel et al., 1999] ; [Stephen, 1999] ; [Laudarin, 2008]). Les structures réticulées avec des noeuds rigides sont modélisées par un milieu de Cosserat ([Bažant and Christensen, 1972] ;

[Noor and Nemeth, 1980] ; [Pradel, 1998] et [Kumar and McDowell, 2004]). Dans cette modélisation, les deux variables indépendantes (la translation et la rotation de section) pilotent de concert le mouvement ([Cosserat and Cosserat, 1909] ; [Eringen, 1966]).

Une fois le milieu continu équivalent construit, le comportement global de la structure (par exemple les fréquences propres et les déformées modales) peut être obtenu avec relativement peu de calculs. Par contre, selon la méthode utilisée, le comportement local des éléments, peut être perdu. Des revues bibliographiques sur le sujet ont été réalisées par [Noor, 1988], [Abrate, 1988], [Verna, 1991], [Tollenaere, 1994].

Dans une seconde école, aucune hypothèse *a priori* du milieu équivalent n'est posée. Cette voie a été initiée par Renton et consiste à partir des équations d'équilibre des noeuds d'une cellule de base. Ces équations dépendent non seulement des déplacements des noeuds de la cellule étudiée mais également de ceux des noeuds des cellules adjacentes. Le comportement de la structure est donc décrit par des équations aux différences finies. La résolution du problème est faite directement ([Renton, 1984]) ou par la transformation en équations différentielles grâce à des développements en séries de Taylor ([Renton, 1970] ; [Kerr and Zarembski, 1981]) ou dans l'espace de Fourier avant d'être développées. Les premiers ordres des développements donne les équations d'équilibre du milieu continu équivalent. Par contre, les ordres supérieurs des développements ne sont pas exploitables en raison du fait que les développements portent uniquement sur les opérateurs (les équations d'équilibre) mais pas sur les champs.

La troisième école, dérivée de la seconde, introduit en plus du développement des opérateurs, celui des solutions, et correspond de fait à une méthode d'homogénéisation. Cette méthode est basée sur la coexistence de deux échelles de grandeur spatiale : l'échelle "micro" qui est définie par une taille caractéristique de la cellule dite ℓ_c et l'échelle "macro" qui correspond à une dimension caractéristique du phénomène étudié L. Pour un problème de dynamique, L est liée à la longueur d'onde. Lorsque le comportement de la structure est homogénéisable, le ratio d'échelle $\varepsilon = \ell_c/L$ est un petit paramètre ($\varepsilon << 1$). Cette fois-ci, toutes les relations d'équilibre entre les nœuds et les cellules sont développées en utilisant ce ratio d'échelle, et les inconnues sont écrites sous la forme d'un développement asymptotique ([Bensoussan et al., 1978] ; [Sánchez-Palencia, 1980]). Ainsi, les différents ordres de grandeur sont bien pris en compte et il est possible d'étudier et d'utiliser les termes correctifs d'ordres supérieurs. Dans le cas des structures réticulées, le comportement des éléments a d'abord été décrit à l'aide de la mécanique des milieux continus et un deuxième petit paramètre intervient alors : l'épaisseur des barres 'δ' ([Bakhvalov and Panasenko, 1989], [Cioranescu and Paulin, 2012]. Ces études ont montré que les solutions sont convergentes lorsque ε et δ tendent vers 0. Par contre, la méthode étant difficile à mettre en œuvre, les auteurs n'ont pu étudier les équations qu'à l'ordre dominant. Et pour les structures qui nous intéressent, la rigidité en cisaillement étant très faible au regard de la rigidité en compression des éléments, cet effet n'apparaît pas à l'ordre dominant. Dans ce cas, la méthode fournit une information incomplète ([Cioranescu and Paulin, 2012] ;

[Chiheb et al., 1998]).

Pour surmonter cette difficulté, Caillerie ([Caillerie et al., 1989]) a proposé de modéliser le comportement des éléments à l'aide de la théorie des poutres de la résistance des matériaux. c'est la base de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (appelée méthode HMPD par la suite) qui est employée dans ce travail de thèse. Les détails de cette méthode seront présentées dans les paragraphes suivants. Elle a donc été mise au point par Caillerie et Verna en statique [Caillerie et al., 1989] ; [Verna, 1991] ; [Tollenaere and Caillerie, 1998]), [Tollenaere, 1994] en dynamique et Caillerie et Moreau pour les grands déplacements ([Moreau, 1996] ; [Moreau and Caillerie, 1998]). L'application de la méthode au cas des bâtiments multi-étagés est effectuée par [Hans, 2002], [Boutin and Hans, 2003], [Hans and Boutin, 2008], puis à l'étude de la propagation d'onde 2D dans des milieux réticulés plan et de la mise en évidence et l'étude de modes de giration dans des poutres réticulées ([Chesnais, 2010], [Chesnais et al., 2012]). Enfin, cette approche a été étendue au régime des hautes fréquences, où la résonance des éléments joue un rôle déterminant. [Rallu, 2014] a montré que la méthode HMPD est capable de décrire les modes supérieurs de la structure. Ce phénomène s'appelle la modulation. Le travail présenté dans cette thèse est la poursuite des travaux antérieurs de C. Boutin, S. Hans, C. Chesnais et A. Rallu. Ses résultats concernant le comportement dynamique de la structure représentant le bâtiment seront présentés dans les paragraphes suivantes.

Il est important de souligner que la méthode HMPD permet de construire le modèle continu équivalent sans hypothèse *a priori*. Le comportement global de la structure est caractérisé à partir des paramètres géométriques et de rigidité de la cellule de base. En plus, la méthode est entièrement analytique, elle permet d'identifier les mécanismes clés et leur rôle dans le modèle de comportement d'ensemble. En fonction de l'ordre de grandeur, les équations d'équilibre sont interprétables et utilisables. Enfin, une fois le modèle équivalent construit, il est toujours possible de revenir à l'échelle locale pour connaître le comportement de chaque élément.

Dans la section suivante, nous présentons la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets selon la mise en œuvre est faite par [Hans and Boutin, 2008]. La présentation est strictement appliquée pour étudier le comportement quasi statique du bâtiment. L'objectif est de montrer les différentes étapes de la méthode d'homogénéisation d'une structure réticulée, et son application dans le cas d'un bâtiment idéalisé pour en déterminer le comportement dynamique. Puis, la procédure est reprise dans la deuxième partie pour modéliser et étudier le comportement dynamique d'un bâtiment équipé d'amortisseurs visqueux régulièrement répartis dans la structure.

1.2 Homogénéisation des milieux périodiques discrets

1.2.1 Structures étudiées et notations

Dans cette section, nous présentons la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) appliquée sur une famille de structures portiques

périodiques. Ces structures 1D résultent de l'empilement continue de N portiques simples et identiques dans une direction. Cette disposition respecte la condition de périodicité nécessaire à l'application de la méthode HMPD. Chaque portique se compose de deux murs identiques et d'un plancher. L'indice 'm' sera utilisé pour se référer aux murs et 'p' aux planchers. La longueur des murs ℓ_m définit la taille caractéristique d'une cellule, et la hauteur de la structure est $H = N\,\ell_m$. Nous considérons également que le comportement des éléments est modélisable comme des poutres d'Euler-Bernoulli dans le plan (x, y), ceci étant vrai tant que leur épaisseur demeure plus petite que leur longueur d'onde de flexion ($a \ll \ell \ll \lambda_f$; λ_f est la longueur d'onde de la flexion).

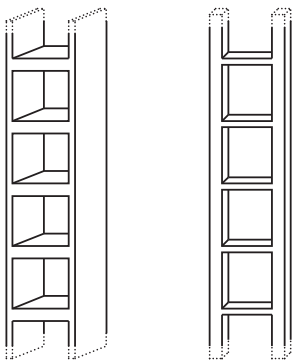


FIGURE 1.1 – Exemples de structures

Les caractéristiques mécaniques et géométriques des éléments du portique sont rappelées ci-dessous :

a	: épaisseur	ℓ	: longueur
h	: profondeur selon l'axe z	ρ	: masse volumique
$A = a\,h$	: section	E	: module d'élasticité
$I = \dfrac{a^3 h}{12}$	: inertie	ν	: coefficient de Poisson

Dans la suite, on adopte le cadre des petites déformations, et les matériaux constitutifs sont supposés élastiques, linéaire et isotrope. Le module d'élasticité E correspond au module d'Young E_{Young} si les éléments de base sont des poutres ($h \ll \ell$). Par contre, si ce sont des plaques ($h \gtrsim \ell$), une correction doit être faite pour décrire l'état de déformation plane des éléments et le module corrigé est $E = E_{Young}/(1 - \nu^2)$.

Dans notre structure, les éléments sont connectés aux nœuds supposés infiniment rigides et sans masse. Les mouvements des extrémités des poutres connectées à un même nœud sont identiques et seront utilisés comme variables cinématiques de la structure globale. La structure étudiée et les notations des variables cinématiques sont présentées dans la figure 1.2.

Chaque niveau compte deux nœuds, indicés '^{inf}' pour les nœuds inférieurs et '^{sup}' pour les nœuds supérieurs. Le niveau n dans la structure est repérée par l'abscisse $x = n\,\ell_m$ dans notre modèle. Dans le plan (x, y), ses trois variables

cinématiques sont :

v_{n_i} : déplacement transversal du nœud n_i
u_{n_i} : déplacement longitudinal du nœud n_i
θ_{n_i} : rotation du noeud n_i

De plus, on se place en régime harmonique, et toutes les variables peuvent alors être exprimées sous la forme : $X(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$, où $\omega = 2\pi f$: est la pulsation et t le temps. Comme l'ensemble des équations sont linéaires, on travaille directement avec le terme $X(x)$ en omettant systématiquement le terme temporel $e^{i\omega t}$.

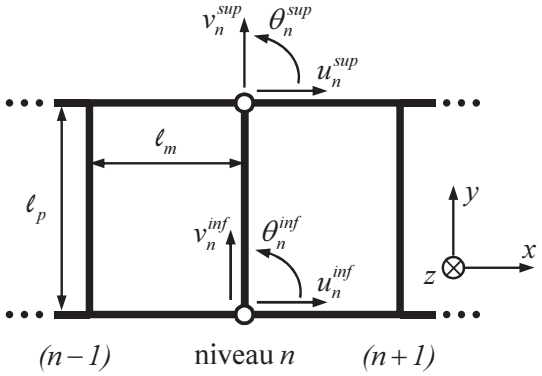


FIGURE 1.2 – Notations des variables cinématiques des nœuds au niveau n

1.2.2 Discrétisation de l'équilibre dynamique

La première phase de la méthode HMPD consiste à discrétiser l'équilibre dynamique de la structure. Dans cette étape, l'équilibre du système continu sera condensé aux nœuds. Pour ce faire, l'équilibre dynamique des éléments est résolu avec comme les conditions aux limites, les déplacements et les rotations des nœuds. Puis, en prenant en compte la géométrie du système, l'équilibre des forces et des moments appliqués par les éléments sur chaque nœud conduit au système discrétisé de l'équilibre dynamique de la structure.

1.2.2.1 Intégration du comportement dynamique local des éléments

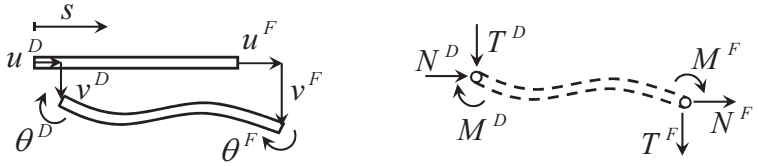


FIGURE 1.3 – Variable cinématique et efforts de la poutre

Le comportement de nos éléments de base (les murs et le plancher) est assimilé à celui d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Sur sa longueur ℓ, on note le repère local, les déplacements et les efforts comme l'indique dans la figure 1.3. L'extrémité d'origine

($s = 0$) est notée D et celle de fin ($s = \ell$) notée F. Les variables cinématiques $v(s)$, $u(s)$ et $\theta(s)$ sont respectivement le déplacement transversal, longitudinal et la rotation de la section. Les efforts sont notés N, M et T pour l'effort normal, le moment fléchissant et l'effort tranchant. Par convention, on suppose que les efforts s'exercent de la partie gauche sur la partie droite de l'élément comme précisé dans la figure 1.4. En régime harmonique et sans action extérieure, les comportements dynamiques de la poutre en compression et en flexion sont résumés dans le tableau 1.1.

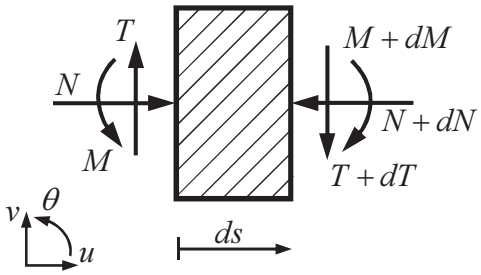


FIGURE 1.4 – Efforts sur une section de poutre

TABLE 1.1 – Equilibre local d'une section de poutre

	Vibrations longitudinale	Vibrations transversale
Equilibre local	$\frac{dN}{ds}(s) = \rho A\omega^2 u(s)$	$\frac{dT}{ds}(s) = \rho A\omega^2 v(s)$ $\frac{dM}{ds} = -T(s)$
Loi de comportement	$N(s) = -EA\frac{du}{ds}(s)$	$M(s) = -EI\frac{d^2v}{ds^2}(s)$
Nombre d'onde	$\chi = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$	$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}} = \frac{2\pi}{\lambda_f}$
Equation dynamique	$\frac{d^2u}{ds^2}(s) = -\chi^2 u(s)$	$\frac{d^4v}{ds^4}(s) = \beta^4 v(s)$

Les coefficients χ et β sont respectivement les nombres d'onde de compression et de flexion. λ_c et λ_f désignent respectivement la longueur d'onde de compression et de flexion dans l'élément pour la pulsation ω, liées par une simple relation faisant intervenir l'épaisseur a de l'élément :

$$\lambda_f^2 = 2\pi\lambda_c\sqrt{\frac{I}{A}} = 2\pi\lambda_c\frac{a}{\sqrt{12}}$$

D'autre part, la description de la poutre d'Euler-Bernoulli n'est valable que tant que la poutre est suffisamment *élancée*, c'est-à-dire en régime dynamique, tant que la longueur d'onde de flexion λ_f reste bien plus grande que l'épaisseur de l'élément. Dans ce cas, la longueur d'onde de flexion sera toujours beaucoup plus courte que celle de compression, en effet :

$$\frac{a}{\lambda_f} \ll 1 \implies \frac{\lambda_f}{\lambda_c} = O\left(\frac{a}{\lambda_f}\right) \ll 1$$

La résolution des équations d'onde de compression et de flexion donne les déplacements transverses et longitudinaux sous la forme trigonométrique suivante :

$$u(s) = A\,\cos(\chi s) + B\,\sin(\chi s)$$
$$v(s) = C\,\cosh(\beta s) + D\,\sinh(\beta s) + E\,\cos(\beta s) + F\,\sin(\beta s)$$

où les coefficient A, B, C, D, E et F sont déterminés par les conditions aux limites qui sont les déplacements et les rotations des nœuds : v^D, v^F, u^D, u^F, θ^D et θ^F. On peut ensuite accéder aux efforts nodaux :

$$\begin{cases} N^D = \dfrac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)}\left(u^D\cos(\chi\ell) - u^F\right) \\ \\ N^F = \dfrac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)}\left(u^D - u^F\cos(\chi\ell)\right) \end{cases} \tag{1.1a}$$

$$\begin{cases} T^D = \dfrac{EI\beta^3}{1-\cos(\beta\ell)\cosh(\beta\ell)}\Big(u^D\left(\cosh(\beta\ell)\sin(\beta\ell) + \cos(\beta\ell)\sinh(\beta\ell)\right) \\ \quad -u^F\left(\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)\right) + \dfrac{\theta^D}{\beta}\sin(\beta\ell)\sinh(\beta\ell) - \dfrac{\theta^F}{\beta}\left(\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)\right)\Big) \\ T^F = \dfrac{EI\beta^3}{1-\cos(\beta\ell)\cosh(\beta\ell)}\Big(-u^F\left(\cosh(\beta\ell)\sin(\beta\ell) + \cos(\beta\ell)\sinh(\beta\ell)\right) \\ \quad +u^D\left(\sin(\beta\ell) + \sinh(\beta\ell)\right) + \dfrac{\theta^F}{\beta}\sin(\beta\ell)\sinh(\beta\ell) - \dfrac{\theta^D}{\beta}\left(\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)\right)\Big) \end{cases} \tag{1.1b}$$

$$\begin{cases} M^D = \dfrac{EI\beta^2}{\left(1-\cos(\beta\ell)\cosh(\beta\ell)\right)}\Big(u^D\sin(\beta\ell)\sinh(\beta\ell) + u^F\left(\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)\right) \\ \quad +\dfrac{\theta^D}{\beta}\left(\cosh(\beta\ell)\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)\cos(\beta\ell)\right) - \dfrac{\theta^F}{\beta}\left(\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)\right)\Big) \\ M^F = \dfrac{EI\beta^2}{\left(1-\cos(\beta\ell)\cosh(\beta\ell)\right)}\Big(u^F\sin(\beta\ell)\sinh(\beta\ell) + u^D\left(\cos(\beta\ell) - \cosh(\beta\ell)\right) \\ \quad -\dfrac{\theta^F}{\beta}\left(\cosh(\beta\ell)\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)\cos(\beta\ell)\right) + \dfrac{\theta^D}{\beta}\left(\sin(\beta\ell) - \sinh(\beta\ell)\right)\Big) \end{cases} \tag{1.1c}$$

1.2.2.2 Equilibre des nœuds

L'étape suivante consiste à établir les équations d'équilibre des nœuds. Comme ils sont sans masse et en l'absence de force nodale extérieure, la somme des efforts appliqués au nœud par les éléments s'annulent. Les efforts appliqués au nœud n font intervenir les variables cinématiques du niveau n et des niveaux adjacents $(n-1)$ et $(n+1)$. D'autre part, il faut faire attention au repère local des éléments pour

le signe des efforts. A chaque nœud connecte deux murs et un plancher donc pour chaque équation d'équilibre, il y aura trois efforts dans chaque direction considérée. Les efforts appliqués et les équations d'équilibre sont précisés ci-dessous :

Equilibre en force dans la direction x :

$$\begin{cases} N_m^F\big(u_{(n-1)}^{sup}, u_n^{sup}\big) - N_m^D\big(u_n^{sup}, u_{(n+1)}^{sup}\big) - T_p^F(-u_n^{inf}, -u_n^{sup}, \theta_n^{inf}, \theta_n^{sup}) = 0 & (n^{sup}x) \\ N_m^F\big(u_{(n-1)}^{inf}, u_n^{inf}\big) - N_m^D\big(u_n^{inf}, u_{(n+1)}^{inf}\big) + T_p^D(-u_n^{inf}, -u_n^{sup}, \theta_n^{inf}, \theta_n^{sup}) = 0 & (n^{inf}x) \end{cases}$$

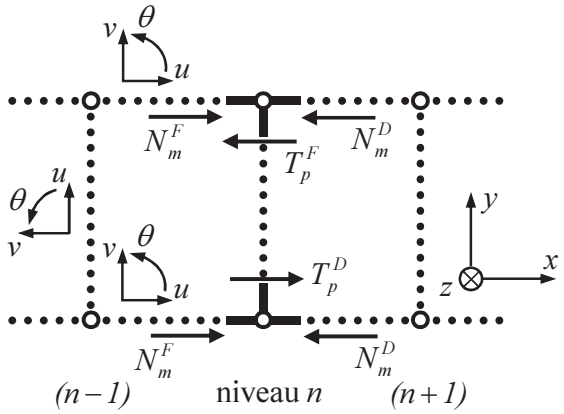


FIGURE 1.5 – Equilibre des forces nodaux dans la direction x

Equilibre en force dans la direction y :

$$\begin{cases} T_m^F\big(v_{(n-1)}^{sup}, v_n^{sup}, \theta_{(n-1)}^{sup}, \theta_n^{sup}\big) - T_m^D\big(v_n^{sup}, v_{(n+1)}^{sup}, \theta_n^{sup}, \theta_{(n+1)}^{sup}\big) \\ \qquad\qquad + N_p^F(v_n^{inf}, v_n^{sup}) = 0 & (n^{sup}y) \\ T_m^F\big(v_{(n-1)}^{inf}, v_n^{inf}, \theta_{(n-1)}^{inf}, \theta_n^{inf}\big) - T_m^D\big(v_n^{inf}, v_{(n+1)}^{inf}, \theta_n^{inf}, \theta_{(n+1)}^{inf}\big) \\ \qquad\qquad - N_p^D(v_n^{inf}, v_n^{sup}) = 0 & (n^{inf}y) \end{cases}$$

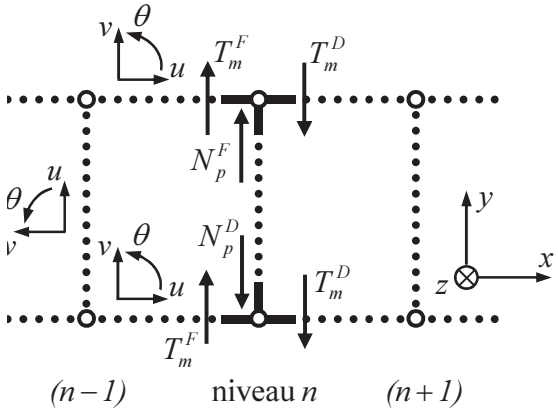


FIGURE 1.6 – Equilibre des forces nodaux dans la direction y

Equilibre en moment :

$$\begin{cases} M_m^F\big(v_{(n-1)}^{sup}, v_n^{sup}, \theta_{(n-1)}^{sup}, \theta_n^{sup}\big) - M_m^D\big(v_n^{sup}, v_{(n+1)}^{sup}, \theta_n^{sup}, \theta_{(n+1)}^{sup}\big) \\ \qquad\qquad + M_p^F(-u_n^{inf}, -u_n^{sup}, \theta_n^{inf}, \theta_n^{sup}) = 0 \qquad (n^{sup}m) \\ M_m^F\big(v_{(n-1)}^{inf}, v_n^{inf}, \theta_{(n-1)}^{inf}, \theta_n^{inf}\big) - M_m^D\big(v_n^{inf}, v_{(n+1)}^{inf}, \theta_n^{inf}, \theta_{(n+1)}^{inf}\big) \\ \qquad\qquad - M_p^D(-u_n^{inf}, -u_n^{sup}, \theta_n^{inf}, \theta_n^{sup}) = 0 \qquad (n^{inf}m) \end{cases}$$

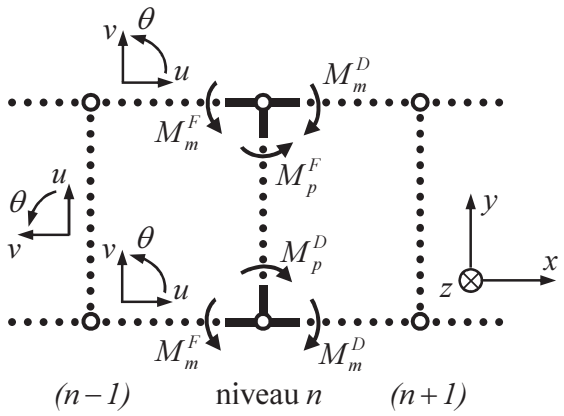


FIGURE 1.7 – Equilibre des moments

Ces équations sont les formulations exactes discrétisées de l'équilibre dynamique du système global.

1.2.3 Cinématique macroscopique

Cette étape est une étape intermédiaire avant de commencer la phase d'homogénéisation du système discret. A chaque niveau n correspond six variables cinématiques des deux nœuds du niveau : v_n^{inf}, v_n^{sup}, u_n^{inf}, u_n^{sup}, θ_n^{inf}, θ_n^{sup}. Pour décrire le comportement global comme une poutre continue, il est plus commode de s'appuyer sur la théorie des poutres et les mouvements et les déformations d'une 'section'. On définit ainsi trois variables associées au mouvement de corps rigides du niveau n : (V_n, α_n et U_n) et trois variables associées à sa déformation (θ_n, Δ_n et Φ_n).

L'interprétation physique de ces variables macroscopiques transversales et longitudinales sont présentées sur la figure 1.8 et 1.9.
Les variables cinématiques **transversales** :

$$V_n = \frac{v_n^{inf} + v_n^{sup}}{2} \quad : \text{déplacement transversal moyen (selon } y)$$
$$\alpha_n = \frac{u_n^{inf} - u_n^{sup}}{l_p} \quad : \text{rotation du niveau } n$$
$$\theta_n = \frac{\theta_n^{inf} + \theta_n^{sup}}{2} \quad : \text{rotation moyenne des nœuds}$$

Les variables cinématiques **longitudinales** :

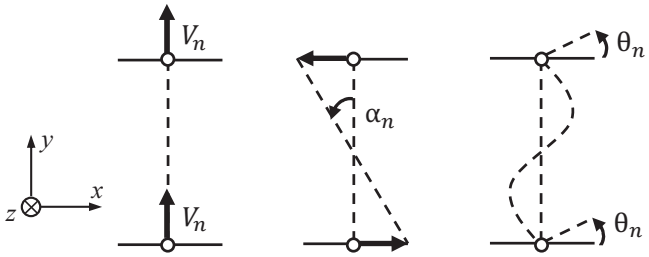


FIGURE 1.8 – Variables cinématiques transversales macroscopiques

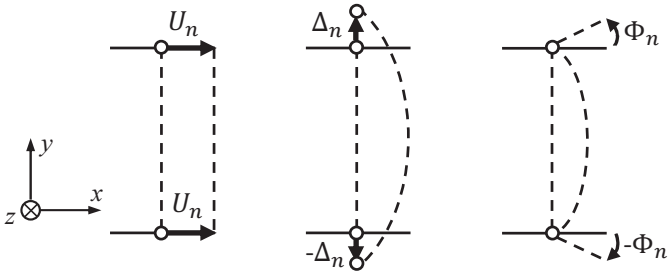


FIGURE 1.9 – Variables cinématiques longitudinales macroscopiques

$$U_n = \frac{u_n^{inf} + u_n^{sup}}{2} \quad : \text{déplacement longitudinal moyen (selon } x\text{)}$$

$$\Delta_n = v_n^{sup} - v_n^{inf} \quad : \text{dilatation transversale}$$

$$\Phi_n = \theta_n^{sup} - \theta_n^{inf} \quad : \text{rotation différentielle des nœuds}$$

D'autre part, la structure est symétrique, et il est possible de découpler les équations dynamiques décrivant respectivement les mouvements transversaux et longitudinaux en effectuant les mêmes manipulations sur les équations d'équilibre des nœuds, c'est-à-dire :

Cinématiques **transversales** :

$$\begin{aligned}(T_t^n) &= (n^{sup}y) + (n^{inf}y) && : \text{somme des forces transversales}\\ (M^n) &= (n^{inf}x) - (n^{sup}x) && : \text{différence des forces longitudinales}\\ (\mathcal{M}_t^n) &= (n^{sup}m) + (n^{inf}m) && : \text{somme des moments aux nœuds}\end{aligned}$$

Cinématiques **longitudinales** :

$$\begin{aligned}(T_d^n) &= (n^{inf}y) - (n^{sup}y) && : \text{différence des forces transversales}\\ (N_t^n) &= (n^{sup}x) + (n^{inf}x) && : \text{somme des forces longitudinales}\\ (\mathcal{M}_d^n) &= (n^{inf}m) + (n^{sup}m) && : \text{différence des moments aux nœuds}\end{aligned}$$

On peut trouver une analogie de ces équations avec celles de la poutre continue d'Euler-Bernoulli de la RDM : la somme des forces longitudinales (N_t^n) est l'équivalent de l'équilibre des efforts normaux, la somme des forces transversales (T_t^n) est celle des efforts tranchants et $(\mathcal{M}_t^n)$ est l'équation d'équilibre des moments. Et comme les variables sont découplées donc ces trois équations sont pilotées par les variables associées aux mouvements de corps rigides U_n, V_n et α_n. Les autres équations et les autres variables n'ont pas d'équivalent dans le modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli, elles correspondent aux efforts internes et aux déformations internes de la cellule.

1.2.4 Phase de changement d'échelle

Cette dernière phase repose sur la coexistence de deux échelles : une échelle microscopique définie à partir de la dimension ℓ_c de la cellule élémentaire représentative de la structure locale et une échelle macroscopique définie par une longueur caractéristique L fonction du phénomène étudié. Le choix de la cellule élémentaire représentative est fortement lié à la gamme fréquentielle d'étude : - à basse fréquence, impliquant implicitement un régime de fonctionnement quasi-statique des éléments locaux, ce choix peut se réduire à la cellule de base (car tout autre choix conduira à la même description), - à plus haute fréquence, impliquant un régime de fonctionnement dynamique de la cellule élémentaire représentative, celle-ci peut compter une ou plusieurs cellules de base, et on pourra en trouver des exemples de développements dans Chesnais avec les milieux à résonance interne et Rallu avec les phénomènes de modulation.

Dans le cadre de cette étude qui vise comme objet d'application le comportement dynamique des bâtiments, on se limitera à la situation basse fréquence, avec une cellule de base comme réference locale. On définit alors le ratio d'échelle ε par le ratio entre la taille locale $\ell_c = \ell_m$ de l'étage et la dimension caractéristique L du mode étudié, inconnue mais supposée grande par rapport à ℓ_m. On pose ainsi :

$$\varepsilon = \frac{\ell_m}{L} \ll 1$$

Ce ratio est ensuite systématiquement utilisé dans la suite : - pour définir l'ordre de grandeur de la fréquence (précisant de fait la gamme de fréquence étudiée), - pour définir les ordres de grandeur des contrastes entre les différents paramètres (géométriques et matériels) des éléments (ce qui permet de fixer la physique, c'est-à-dire le modèle de comportement dynamique, mais attention, pas la structure proprement dite ...) - pour développer les variables cinématiques sous forme asymptotique, c'est-à-dire comme la somme de différents ordres de grandeur, avec une composante principale représentative du comportement macroscopique (ou comportement homogénéisé) et des ordres supérieurs appelés correcteurs et témoignant de l'existence de la microstructure.

Dernier élément d'importance, l'objectif d'obtention d'un comportement macroscopique, conduit à rechercher une description continue à partir d'équations d'équilibre définies en des points discrets de l'espace. On suppose donc l'existence de fonctions continues dont les valeurs aux noeuds de la structure coïncident avec les mouvements des nœuds.

L'ensemble de ces points est détaillé dans les paragraphes qui suivent.

1.2.4.1 Gamme fréquentielle

L'hypothèse de travail adoptée dans cette étude est celle d'un régime de fonctionnement quasi-statique des éléments locaux de la structure, correspondant au cas *basse fréquence* analysée précisément dans [Hans, 2002], [Hans and Boutin, 2008]. Ce régime correspond, pour les modes de compression et de flexion des éléments, à de grandes longueurs d'onde en comparaison de la dimension des éléments, ce qui s'écrit :

$$\ell \ll \lambda_f \ll \lambda_c \quad \Longrightarrow \quad \chi\ell \ll \beta\ell \ll 1$$

Cette hypothèse de quasi-staticité locale implique, si on considère les modes de flexion des éléments, une condition sur la gamme de pulsation :

$$\beta\ell \ll 1 \Longrightarrow \quad \{\omega\} \ll \left(\frac{a}{\ell}\right) \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$\left(\frac{a}{\ell}\right)$ correspond à l'élancement d'un élément, supposé faible pour une poutre de Bernoulli. Si la pulsation vérifie cette condition, la quasi-staticité en compression est automatiquement acquise.

La recherche de cette pulsation (inconnue) se fait sous forme d'un développement asymptotique, ce qui est classique en homogénéisation :

$$\omega = \varepsilon^{e_f} \left(\omega_0 + \varepsilon\, \omega_1 + \varepsilon^2\, \omega_2 + \dots\right)$$

Par convention, on choisit comme pulsation de réfence la pulsation fondamentale des murs en compression considérés sur la hauteur de la structure, c'est-à-dire :

$$\omega_{ref} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Ce choix arbitraire et n'influe pas sur le résultat. En effet, la procédure repose sur les équations d'équilibre dynamique. Lors de la recherche d'une description dynamique du comportement macroscopique, on cherche à équi-librer les termes élastiques et les termes inertiels (dynamiques), ce qui conduit à une unique solution possible compatible avec les hypothèses de fonctionnement choisies.

Pour finir, les fréquences physiquement observables sont indiquées par un "~", c'est-à-dire :

$$\omega = \widetilde{\omega}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \widetilde{\omega}_2 + \dots$$

$$\text{avec} \quad \widetilde{\omega_j} = \varepsilon^{e_f+j}\omega_j$$

1.2.4.2 Développement des efforts nodaux

Comme cela a été évoqué dans le paragraphe précedent, l'hypothèse d'un régime de fonctionnement quasi-statique des éléments locaux de la structure implique de

grandes longueurs d'onde en comparaison de la dimension des éléments, ce qui s'écrit :

$$\ell \ll \lambda_f \ll \lambda_c \quad \Longrightarrow \quad \chi\ell \ll \beta\ell \ll 1$$

Dans ces conditions, toutes les expressions des efforts nodaux dans les équations (1.1) faisant intervenir des fonctions trigonométriques peuvent être développés en fonction des puissances de $\beta\ell$ et $\chi\ell$, ce qui donne :

$$\begin{cases} N^D = \dfrac{EA}{\ell}\left(\left(u^D - u^F\right) - \dfrac{(\chi\ell)^2}{6}\left(2\,u^D + u^F\right) - \dfrac{(\chi\ell)^4}{360}\left(8\,u^D + 7\,u^F\right)\right) + O\left((\chi\ell)^6\right) \\ N^F = \dfrac{EA}{\ell}\left(\left(u^D - u^F\right) + \dfrac{(\chi\ell)^2}{6}\left(u^D + 2\,u^F\right) + \dfrac{(\chi\ell)^4}{360}\left(7\,u^D + 8\,u^F\right)\right) + O\left((\chi\ell)^6\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T^D = \dfrac{12\,EI}{\ell^3}\left(\left(v^D - v^F\right) + \dfrac{\ell}{2}\left(\theta^D + \theta^F\right) - \dfrac{(\beta\ell)^4}{840}\left(26\,v^D + 9\,v^F\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{(\beta\ell)^4}{5040}\ell\left(22\,\theta^D - 13\,\theta^F\right)\right) + O\left((\beta\ell)^8\right) \\ T^F = \dfrac{12\,EI}{\ell^3}\left(\left(v^D - v^F\right) + \dfrac{\ell}{2}\left(\theta^D + \theta^F\right) + \dfrac{(\beta\ell)^4}{840}\left(9\,v^D + 26\,v^F\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(\beta\ell)^4}{5040}\ell\left(13\,\theta^D - 22\,\theta^F\right)\right) + O\left((\beta\ell)^8\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M^D = \dfrac{6\,EI}{\ell^2}\left(\left(v^D - v^F\right) + \dfrac{\ell}{3}\left(2\theta^D + \theta^F\right) - \dfrac{(\beta\ell)^4}{2520}\left(22\,v^D + 13\,v^F\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{(\beta\ell)^4}{2520}\,\ell\left(4\,\theta^D - 3\,\theta^F\right)\right) + O\left((\beta\ell)^8\right) \\ M^F = -\dfrac{6\,EI}{\ell^2}\left(\left(v^D - v^F\right) + \dfrac{\ell}{3}\left(\theta^D + 2\,\theta^F\right) + \dfrac{(\beta\ell)^4}{2520}\left(13\,v^D + 22\,v^F\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(\beta\ell)^4}{2520}\,\ell\left(3\,\theta^D - 4\,\theta^F\right)\right) + O\left((\beta\ell)^8\right) \end{cases}$$

Les premiers termes correspondent aux efforts élastiques et les termes suivant aux effets inertielles.

1.2.4.3 Variables cinématiques

L'hypothèse de séparation d'echelle étant admise ($\varepsilon \ll 1$), on recherche une description homogénéisée continue du comportement. On suppose ainsi que les

variables cinématiques du niveau n de la structure discrète sont les valeurs particulières prises par des fonctions continues indéfiniment dérivables qui ne dépendent que de la variable spatiale x le long de l'axe longitudinal de la structure et de ε :

$$\begin{array}{l|l} V_n = V(\varepsilon, x_n = n\ell_m) & U_n = U(\varepsilon, x_n = n\ell_m) \\ \alpha_n = \alpha(\varepsilon, x_n = n\ell_m) & \Delta_n = \Delta(\varepsilon, x_n = n\ell_m) \\ \theta_n = \theta(\varepsilon, x_n = n\ell_m) & \Phi_n = \Phi(\varepsilon, x_n = n\ell_m) \end{array}$$

Ces variables sont supposées converger quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et peuvent s'écrire sous forme de développement asymptotique pour faire apparaître les différents ordres :

$$X(\varepsilon, x) = \overset{0}{X}(x) + \varepsilon \overset{1}{X}(x) + \varepsilon^2 \overset{2}{X}(x) + \varepsilon^3 \overset{3}{X}(x) + \dots$$

où X désigne une de six variables cinématiques. Chaque terme $\overset{j}{X}$ est la fonction continue indéfiniment dérivable relative à l'ordre j et est du même ordre de grandeur que X. Le comportement physique observable correspond au premier ordre 0 en ε, les ordres supérieurs représentent les termes correctifs liés à la micro-structure (à la nature non continue de la structure). Comme pour la fréquence, les quantités physiquement observables seront notées avec un '$\sim$', tel que :

$$\overset{j}{\widetilde{X}}(x) = \varepsilon^j \overset{j}{X}(x)$$

Les équations d'équilibre discrètes (1.2.2.2) font intervenir les variables cinématiques du niveau n, mais aussi celles des niveaux adjacents $n-1$ et $n+1$. La distance entre deux niveaux consécutifs $\ell_m = \varepsilon L$ est considérée comme un petit incrément de la coordonnée continue x. Dans ce cas, il est possible de procéder à des développements en séries de Taylor pour exprimer les variables cinématiques du niveau inférieur et supérieur par ceux du niveau n. Cette étape introduit les dérivées macroscopiques par rapport à la variable d'espace x.

$$\begin{cases} X_{n-1} = X(\varepsilon, x_n - \ell_m) \\ \qquad = \overset{0}{X}(x_n) + \varepsilon\Big(\overset{1}{X}(x_n) - L\,\overset{0}{X}{}'(x_n)\Big) + \varepsilon^2\Big(\overset{2}{X}(x_n) - L\,\overset{1}{X}{}'(x_n) + \dfrac{L^2}{2}\overset{0}{X}{}''(x_n)\Big) + \dots \\ \\ X_{n+1} = X(\varepsilon, x_n + \ell_m) \\ \qquad = \overset{0}{X}(x_n) + \varepsilon\Big(\overset{1}{X}(x_n) + L\,\overset{0}{X}{}'(x_n)\Big) \\ \qquad\quad + \varepsilon^2\Big(\overset{2}{X}(x_n) + L\,\overset{1}{X}{}'(x_n) + \dfrac{L^2}{2}\overset{0}{X}{}''(x_n)\Big) + \dots \end{cases}$$

1.2.5 Normalisation

Cette dernière étape vise à quantifier les contrastes de propriétés mécaniques et géométriques des différents éléments à l'aide du ratio d'échelle ε. Ce faisant, on quantifie l'importance relative des mécanismes locaux de la cellule (rigidité en compression, en flexion ou en cisaillement) et par conséquent, le choix de ces ordres va générer un type bien précis de comportement de poutre continue équivalente.

Et en modifiant ces ordres, donc en modifiant la physique locale, les différents modèles de poutre pourront être obtenus.

Les contrastes géométriques et mécaniques des murs et des planchers, à savoir les épaisseurs, les longueurs, les largeurs, les modules et les masses volumiques, sont écrits mathématiquement sous la forme :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\varepsilon^{e_m}) \qquad \frac{a_p}{\ell_p} = O(\varepsilon^{e_p}) \qquad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(\varepsilon^{e_l}) \qquad \frac{h_p}{h_m} = O(\varepsilon^{e_h})$$

$$\frac{E_p}{E_m} = O(\varepsilon^{e_E}) \qquad \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(\varepsilon^{e_\rho})$$

Dans les calculs, on utilise des grandeurs adimensionnelles $\{\sigma_m, \sigma_p, \sigma_l, \sigma_h, \sigma_E, \text{et } \sigma_\rho\}$ d'ordre $O(1)$ pour exprimer ces relations :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = \sigma_m\, \varepsilon^{e_m} \qquad \frac{a_p}{\ell_p} = \sigma_p\, \varepsilon^{e_p} \qquad \frac{\ell_p}{\ell_m} = \sigma_l\, \varepsilon^{e_l} \qquad \frac{h_p}{h_m} = \sigma_h\, \varepsilon^{e_h}$$

$$\frac{E_p}{E_m} = \sigma_E\, \varepsilon^{e_E} \qquad \frac{\rho_p}{\rho_m} = \sigma_\rho\, \varepsilon^{e_\rho}$$

Dans les précédentes études ainsi que dans cette thèse, les propriétés des matériaux ainsi que les longueurs des différents ont été choisis du même ordre. Pour générer différents comportements, on agit sur les élancements des élements :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = \sigma_m\, \varepsilon^{e_m} \qquad \frac{a_p}{\ell_p} = \sigma_p\, \varepsilon^{e_p}$$

Bien entendu, toutes ces estimations en fonction du ratio d'échelle ε sont relatives car, à cette étape, la taille macroscopique du phénomène L est inconnue.

1.2.6 Résolution

L'ensemble des développements précédant est ensuite injecté dans les équations d'équilibre discrètes de la structure, relatives à la cinématique transversale $((T_t^n), (M^n), (\mathcal{M}_t^n))$ ou longitudinale $((T_d^n), (N_t^n), (\mathcal{M}_d^n)))$. Les termes de ces deux systèmes de trois équations différentielles sont regroupés par ordre croissant en puissance de ε, comme illustré ci-dessous :

$$E(X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \omega) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \overset{i}{E}(\overset{0}{X}(x), ..., \overset{0}{X}{}'(x), ..., \overset{0}{\omega}, ...) = 0$$

Enfin, par passage à la limite ($\varepsilon \longrightarrow 0$), on procède à la séparation des différents ordres :

$$\forall i \quad \overset{i}{E}(\overset{0}{X}(x), ..., \overset{0}{X}{}'(x), ..., \overset{0}{\omega}, ...) = 0$$

La résolution est effectuée par ordre croissant, le premier ordre conduisant à la description macroscopique du comportement dynamique, les ordres suivants

donnant accès aux correcteurs. En pratique, on se limitera au premier ordre dans la suite du document.

On peut résumer la résolution du problème d'homogénéisation de la structure périodique comme dans le schéma ci-dessous. Cette méthode permet de passer d'un système d'équation discrètes décrivant l'équilibre des niveaux de la structure à un système d'équations diffé-rentielles par ordre décrivant l'équilibre de poutre continue équivalente.

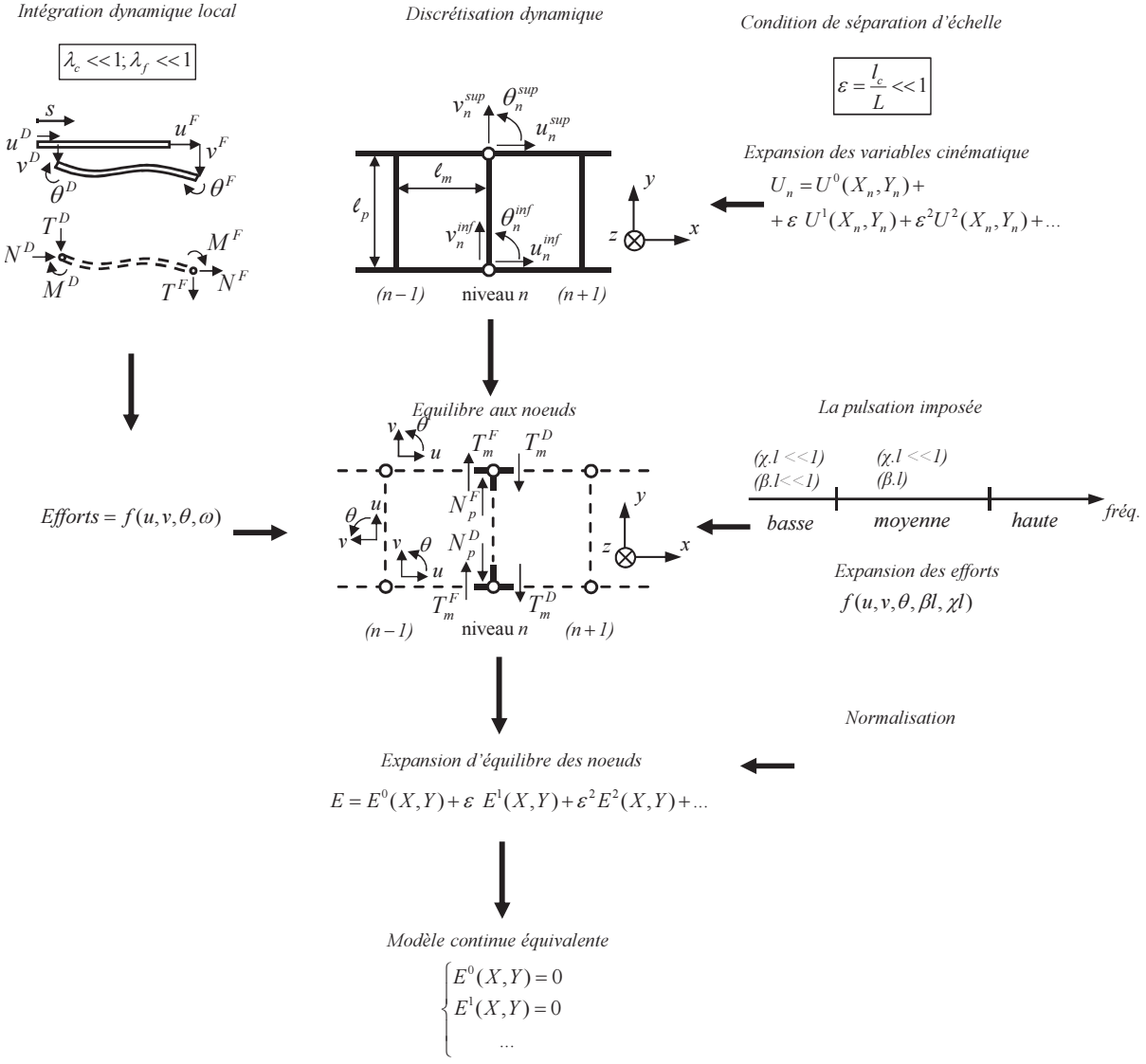


FIGURE 1.10 – Processus de HMPD

1.2.7 Un exemple : le cas "générique"

Pour illustrer les résultats issus de cette méthode, une application sur un exemple particulier est présentée dans ce paragraphe. Les épaisseurs choisies sont respectivement pour les murs et les planchers :

$$a_m = O(\varepsilon^0 \ell_m) \quad \text{et} \quad a_p = O(\varepsilon^{2/3} \ell_m)$$

Ce choix n'est pas anodin, car il permet de mettre en évidence, pour la famille de structures multi-portiques, le modèle de comportement le plus complexe.

Pour que les équations d'équilibre soient plus lisibles, des paramètres macroscopiques sont introduits. Leurs définitions sont données ci-dessous :

$\Lambda_m = 2\rho_m A_m$: contribution des deux murs à la masse linéique macroscopique (en kg/m)

$\Lambda_p = \rho_p A_p \dfrac{\ell_p}{\ell_m}$: contribution du plancher à la masse linéique macroscopique (en kg/m)

$\Lambda = \Lambda_m + \Lambda_p$: masse linéique totale macroscopique (en kg/m)

$K_m = \dfrac{24 E_m I_m}{\ell_m^2}$: Rigidité de cisaillement macroscopique liée à la flexion locale des murs (en N)

$K_p = \dfrac{12 E_p I_p}{\ell_m \ell_p}$: Rigidité de cisaillement macroscopique liée à la flexion locale du plancher (en N)

$K = \dfrac{K_m K_p}{K_m + K_p}$: Rigidité de cisaillement macroscopique (en N)

$I = \dfrac{A_m \ell_p^2}{2}$: Inertie de section macroscopique (en m^4)

On ne s'intéresse qu'au comportement dynamique dans la direction transversale de la structure. L'application de la procédure HMPD décrite conduit donc à des systèmes d'équations d'équilibre organisés en fonction des puissances de ε et qu'on résout par ordre croissant.

Le premier ordre des équations d'équilibre fourni par la méthode HMPD nous donnent :

$$\begin{cases} K_m \left(\overset{0}{\tilde{V}}{}'' (x) - \overset{0}{\tilde{\theta}}{}' (x) \right) = 0 & (T_t - 0) \\ K_p \left(\overset{0}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{0}{\tilde{\theta}}(x) \right) - E_m I \overset{0}{\tilde{\alpha}}{}'' (x) = 0 & (M - 0) \\ K_m \left(\overset{0}{\tilde{V}}{}' (x) - \overset{0}{\tilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 0) \end{cases}$$

On peut remarquer l'absence de terme dynamique dans ce premier système : il n'apparaît qu'à l'ordre suivant. On verra plus loin que les équations l'imposent. La première équation traduit l'équilibre des efforts horizontaux, la seconde celui des moments sur la section et la dernierère celui des moments sur les nœuds. On constate que ce premier système n'est pas suffisant pour déterminer les équations du comportement dynamique macroscopique. Il est alors nécessaire (ce qui n'est pas toujours le cas) de s'intéresser à une partie des équations d'équilibre de l'ordre suivant :

$$\begin{cases} K_m\left(\overset{2}{\tilde{V}}''(x)-\overset{2}{\tilde{\theta}}'(x)\right)+2E_mI_m\left(\overset{0}{\tilde{V}}^{(4)}(x)-2\overset{0}{\tilde{\theta}}^{(3)}(x)\right) \\ \qquad\qquad +\Lambda_m\tilde{\omega}_1^2\overset{0}{\tilde{V}}(x)=0 \end{cases} \qquad (T_t-2)$$

$$\begin{cases} K_m\left(\overset{2}{\tilde{V}}'(x)-\overset{2}{\tilde{\theta}}(x)\right)+2E_mI_m\left(2\overset{0}{\tilde{V}}^{(3)}(x)-2\overset{0}{\tilde{\theta}}''(x)\right) \\ \qquad\qquad +K_p\left(\overset{0}{\tilde{\alpha}}(x)-\overset{0}{\tilde{\theta}}(x)\right)=0 \end{cases} \qquad (\mathcal{M}_t-2)$$

En combinant ces équations, il est possible de les réorganiser, ce qui permettra plus loin une interprétation plus simple sur la base de la théorie des poutres classiques :

$$\begin{cases} 2E_mI_m\overset{0}{\tilde{V}}^{(4)}(x)-K_p\left(\overset{0}{\tilde{V}}''(x)-\overset{0}{\tilde{\alpha}}'(x)\right)-\Lambda_m\tilde{\omega}_1^2\overset{0}{\tilde{V}}(x)=0 & (T) \\ K_p\left(\overset{0}{\tilde{V}}'(x)-\overset{0}{\tilde{\alpha}}(x)\right)+E_mI\overset{0}{\tilde{\alpha}}''(x)=0 & (M) \end{cases}$$

avec une relation cinématique interne : $\overset{0}{\tilde{\theta}}(x)=\overset{0}{\tilde{V}}'(x)$

Enfin, en exprimant la rotation de section $\overset{0}{\tilde{\alpha}}$ en fonction du déplacement transversal $\overset{0}{\tilde{V}}$, c'est-à-dire :

$$\overset{0}{\tilde{\alpha}}(x)=\overset{0}{\tilde{V}}'(x)+\frac{E_mI}{K_p}\left(\frac{\Lambda_m\tilde{\omega}_1^2}{K_p}\overset{0}{\tilde{V}}'(x)+\overset{0}{\tilde{V}}^{(3)}(x)-\frac{2E_mI_m}{K_p}\overset{0}{\tilde{V}}^{(5)}(x)\right)$$

on obtient l'équation différentielle :

$\frac{E_mI\ 2E_mI_m}{K_p}\overset{0}{\tilde{V}}^{(6)}(x)-(E_mI+2E_mI_m)\overset{0}{\tilde{V}}^{(4)}(x)-\frac{E_mI\ \Lambda_m\tilde{\omega}_1^2}{K_p}\overset{0}{\tilde{V}}''(x)+\Lambda_m\tilde{\omega}_1^2\overset{0}{\tilde{V}}(x)=0$

L'analyse de ce comportement sera l'objet du chapitre suivant. Mais on peut souligner que cet exemple met en évidence un comportement dynamique plus complexe que celui des modèles de poutres classiques comme la poutre de Euler-Bernoulli, de Timoshenko (équation dynamique de degré 4) ou les poutres de cisaillement (de degré 2). Comme souligné en debut de chapitre, les structures 'creuses' présentent des degrés de complexité plus grands que les milieux 'pleins'.

1.3 Remarques sur la méthode HMPD

Dans ce chapitre, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) a été présentée en détail. Cette présentation est particulièrement destinée à la structure réticulée dans une direction. Cette famille de structure

modélise les bâtiments idéalisés et les modèles équivalants représente donc les comportements du bâtiment. L'avantage de cette méthode est que :

1. C'est une méthode rigoureuse qui permet de déduire le comportement global de la structure à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques de la cellule de base. Aucune hypothèse *a priori* n'est nécessaire si ce n'est la condition de séparation d'échelles (ε petit) pour pouvoir remplacer la structure par un milieu continu équivalent.
2. La méthode est entièrement analytique, ce qui permet une compréhension fine des mécanismes et du rôle des différents paramètres.
3. Les équations d'équilibre aux différents ordres sont obtenues relativement facilement.
4. Une fois que le comportement global de la structure est connu, il est toujours possible de revenir à l'échelle locale pour connaitre les efforts dans les éléments.

Dans la suite de cette thèse, nous nous sommes basé sur la connaissance de la méthode HMPD pour compléter une méthodologie d'ingénieur afin d'étudier le comportement dynamique transversal du bâtiment réel. Ce travail consiste à améliorer l'estimation de rigidité des mécanismes des modèles de poutre Génériques établis par [Hans and Boutin, 2008] et [Chesnais, 2010]. Ces modèles Génériques seront présentés en détail dans le chapitre 2.

À partir de la compréhension de chaque mécanisme, nous avons considéré une cellule de base qui peut bien respecter la condition périodique par la simulation numérique. Ce résultat est ensuite utilisé pour analyser le comportement dynamique d'un bâtiment réel sur son modèle éléments finis et ses mesures in-situ dans le chapitre 3.

Ensuite, la procédure de HMPD présentée dans ce chapitre est reprise avec les adaptations à la structure équipée les amortisseurs visqueux linéaires. Ce travail a pour but de fournir une compréhension sur le travail des amortisseurs dans l'ensemble du bâtiment et son impact ainsi que son efficacité à chaque type du comportement. Ces nouveaux modèles HMPD seront présentés dans le chapitre 5 et les exploitations des modèles seront présentées dans le chapitre 6.

Chapitre 2

Modèle de poutre Générique et son extension

Contents

2.1 Modèle de poutre Générique 26
2.1.1 Présentation du modèle de poutre Générique 26
2.1.2 Domaine de validité 29
2.1.3 Validation du modèle Générique et implications 32
2.1.4 Modèle Générique et structures plus complexes 36
2.2 Généralisation du modèle Générique avec la prise en compte du cisaillement local des murs 39
2.2.1 Construction du modèle 39
2.2.2 Etude du modèle Générique Modifié 42
2.3 Conclusion sur les modèles Génériques 48

L'objet de ce chapitre est la présentation de deux modèles visant à décrire le comportement dynamique horizontal des bâtiments modernes classiques dont la structure est essentiellement constituée par la répétition d'un même étage.

Le premier modèle, appelé Modèle Générique, provient de l'étude des structures les plus simples, dont la cellule est constituée d'un portique comprenant deux murs et un plancher. Ces derniers sont modélisés comme des poutres d'Euler-Bernoulli (description valide pour les colonnes et poteaux, mais aussi pour les voiles dans leur direction hors plan). On présente en premier lieu ce modèle, ainsi que ses spécificités et sa validité pour une structure plus complexe. Puis dans un second temps, une extension de ce modèle est developpée pour traiter le cas des éléments peu élancés ou des parties de structure se comportant comme tel.

2.1 Modèle de poutre Générique

Ce premier modèle a été obtenu après une étude exhaustive des descriptions dynamiques de la famille des structures périodiques multi-portiques (figure 2.8). Il condense l'ensemble des comportements observés, obtenus à l'aide de la méthode HMPD présentée dans le chapitre 1, lorsque l'on modifie les contrastes de rigidité entre les éléments (murs d'un côté et plancher de l'autre). En effet, en modifiant l'ordre de grandeur des épaisseurs de ces éléments, [Hans and Boutin, 2008] a mis en évidence une série de modèles 1D continus équivalents de la structure étudiée. Ces modèles peuvent être des modèles de poutre classique comme la poutre de flexion pure d'Euler-Bernoulli ou celle de Timoshenko, mais ils peuvent être moins classique comme la poutre de cisaillement ou la poutre "sandwich", ou encore le modèle présenté à la fin du chapitre 1 avec une équation dynamique de degré 6, qui constitue pour cette famille la situation la plus complexe possible.

2.1.1 Présentation du modèle de poutre Générique

La construction du modèle Générique repose sur l'analyse des équations d'équilibre de premier ordre des différents "individus" de la famille de bâtiments idéalisés. Cette analyse a permis d'identifier des termes récurrents qu'on interprétera plus loin en terme physique. On reconstruit ainsi des équations d'équilibre plus générales incluant l'ensemble des termes identifiés séparément dans chaque situation.

Ce modèle décrivant le comportement de poutre 1D généralisée, fait intervenir deux variables indépendantes (même trois, on le verra plus loin) : V le déplacement horizontal de la section et α la rotation de section. Les équations d'équilibre à l'échelle macroscopique sont décrites ci-dessous :

$$\begin{cases} \Lambda\omega^2 V(x) = K\left(\alpha'(x) - V''(x)\right) + \mathcal{EI}\ V^{(4)}(x) & (\Sigma T) \\ K\left(\alpha(x) - V'(x)\right) - \mathbb{EI}\,\alpha''(x) = 0 & (\Sigma M) \end{cases} \tag{2.1}$$

La première équation (ΣT) correspond à l'équilibre des efforts horizontaux et la seconde (ΣM) à l'équilibre des moments.

À ces équations d'équilibre externe, il convient d'ajouter une dernière équation d'équilibre interne où apparaît la variable cinématique θ, correspondant à la rotation des nœuds. Cette variable n'a pas d'équivalent dans la théorie des poutres.

$$K_m(\theta(x) - V'(x)) + K_p(\theta(x) - \alpha(x)) = 0$$

En se basant sur la théorie des poutres, il est possible, par analogie, de construire les efforts macroscopiques suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Effort tranchant} & T(x) = -K\ (V'(x) - \alpha(x)) \\ \text{Moment global} & \mathbb{M}(x) = -\mathbb{EI}\ \alpha'(x) \\ \text{Moment interne} & \mathcal{M}(x) = -\mathcal{EI}\ V''(x) \end{array} \tag{2.2}$$

1. L'effort tranchant de la cellule $T(x)$ est proportionnel à la rigidité de cisaillement K de la cellule. Cette rigidité est l'association en parallèle de la rigidité de flexion locale des murs et de celle du plancher (dans une cellule) : $K = \left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_p}\right)^{-1}$.
2. Le deuxième effort est le moment fléchissant global de la poutre équivalente $\mathbb{M}(x)$. Il est lié à la flexion de l'ensemble de la structure. Celui est le produit de la rigidité de flexion globale et la dérivé de la rotation de la section plane $\alpha(x)$. La rigidité de la flexion globale est égale à l'inertie globale de la section de la poutre. A l'échelle locale, les deux murs travaillent en traction-compression et ils sont en opposition de phase : $\mathbb{EI} = E_m A_m \frac{\ell_p^2}{2}$.
3. Le troisième effort relie au moment fléchissant de chaque élément de mur ($\mathcal{M}(x)$) et sa rigidité est la somme de rigidité de flexion des murs qui seront décrite par : $\mathcal{EI} = 2E_m I_m$ dans la description du modèle de portique simple.

Ces trois efforts sont liés à trois mécanismes indépendants pouvant s'exprimer dans le comportement global de ce type de structure. On les représente séparément sur la figure 2.1.

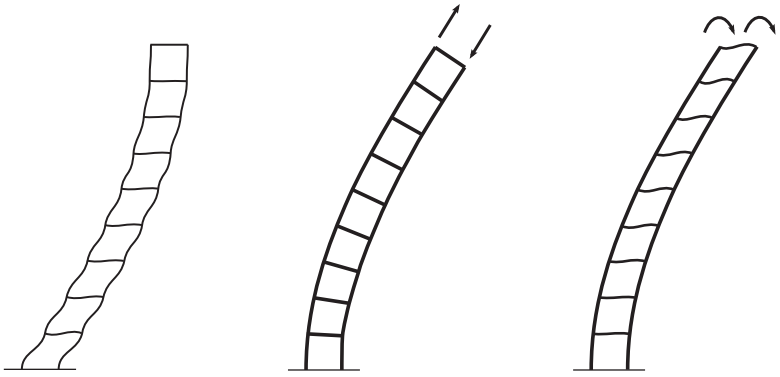


FIGURE 2.1 – Mécanismes de la dynamique transverse

En utilisant ces efforts, les équations d'équilibre (2.1) peuvent ainsi s'écrire :

$$\begin{cases} \Lambda\omega^2 V(x) = T'(x) - \mathcal{M}''(x) = \mathcal{T}'(x) & (\Sigma T) \\ T(x) + \mathbb{M}'(x) = 0 & (\Sigma M) \end{cases} \tag{2.3}$$

La différence entre l'équation d'équilibre (2.3) - (ΣT) par rapport à l'équilibre habituelle dans une poutre de flexion classique est que l'effort tranchant *total* $\mathcal{T}$ prend en compte l'effort tranchant dû au cisaillement de la cellule et aux effets dûs au moment interne : $\mathcal{T}(x) = T(x) - \mathcal{M}'(x)$.

Les équations d'équilibre (2.3) et les lois de comportement (2.2) sont suffisantes pour définir complètement l'équilibre de la structure macroscopique et pour écrire l'équation dynamique de la poutre généralisée de degré six :

$$\frac{\mathcal{EI}\,\mathbb{EI}}{K} V^{(6)} - (\mathcal{EI} + \mathbb{EI})\, V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}\,\Lambda\omega^2}{K} V'' + \Lambda\omega^2 V = 0 \tag{2.4}$$

La cohérence de ce modèle de poutre peut être vérifiée en écrivant son équilibre énergétique. Pour cela, la première équation d'équilibre (2.3) est multipliée par $\frac{1}{2}V$ et intégrée par parties sur toute la hauteur de la structure H :

$$\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^H \mathcal{T}' V\, dx = \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H - \int_0^H (T - \mathcal{M}')\, V'\, dx\right)$$

En travaillant sur la dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^H (T - \mathcal{M}')\, V'\, dx &= \int_0^H T\,(V' - \alpha)\; dx - \int_0^H \mathbb{M}'\alpha\, dx - \int_0^H \mathcal{M}' V'\, dx \\ &= \int_0^H \left(T\,(V' - \alpha) + \mathbb{M}\alpha' + \mathcal{M}V''\right)\, dx - \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H - \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H \end{aligned}$$

En revenant dans la première équation et en utilisant les lois de comportement (2.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\, dx = \\ &\quad \int_0^H \frac{1}{2}\left(\frac{T^2}{K} + \frac{\mathbb{M}^2}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{EI}}\right)\, dx + \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H + \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H + \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H\right) \end{aligned}$$

Cette équation indique que l'énergie cinétique est équilibrée par l'énergie élastique relatif à chaque mécanisme et le travail des conditions aux limites (qui sont ainsi clairement définies à l'échelle macroscopique). Notons que l'effort tranchant qui contribue à l'énergie élastique est T alors que c'est l'effort tranchant total $\mathcal{T}$ qui travaille aux extrémités. Les six conditions aux limites nécessaires à la résolution du modèle de poutre générique soient exprimées en fonction des efforts $\mathcal{T}$, $\mathbb{M}$ et $\mathcal{M}$, et en fonction des variables cinématique V, α et V' (soit bien finalement trois variables ...).

Le fait que l'effort tranchant total $\mathcal{T}$ soit la somme des efforts tranchants générés par le cisaillement de la cellule T et par la flexion interne $-\mathcal{M}'$ confirme l'association en parallèle de ces deux mécanismes. De plus, dans une poutre de Timoshenko, le cisaillement et la flexion globale sont associés en série. On en déduit

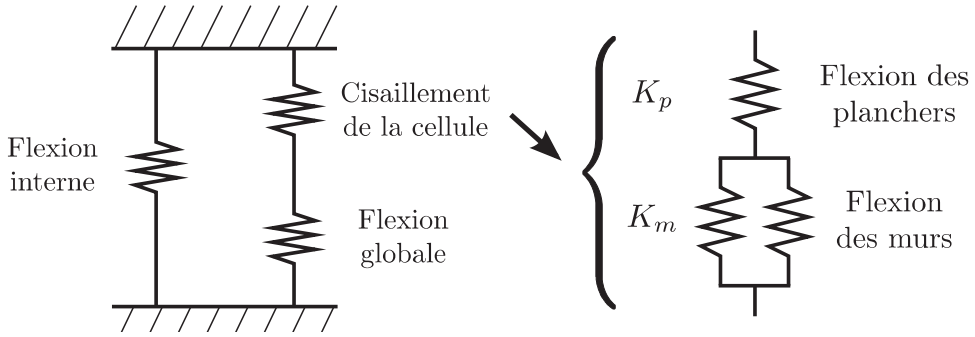


FIGURE 2.2 – Association des mécanismes ([Chesnais, 2010])

(Thèse Céline Chesnais) une représentation schématique de l'association de ces mécanismes :

L'intérêt du schéma 2.2 est de fournir rapidement l'évolution du comportement de la structure lorsque des contrastes entre ces mécanismes sont modifiés. Cependant il n'apporte pas d'information quantitative. En particulier, il ne peut pas être utilisé pour calculer la rigidité totale de la poutre équivalente.

2.1.2 Domaine de validité

Dans le modèle générique les trois mécanismes sont de même ordre de grandeur. Ce modèle peut donc dégénérer en des modèles plus simples en fonction de l'ordre de grandeur et des contrastes entre chaque mécanisme. Ainsi, lorsque la flexion interne est négligeable, nous retrouvons les modèles habituels de poutre d'Euler-Bernoulli ou de poutre de Timoshenko. Le modèle de poutre de cisaillement est l'équivalent continu du modèle brochette couramment utilisé en génie parasismique. Les modèles avec flexion interne sont plus originaux. Lorsque c'est le seul mécanisme prépondérant, les vibrations de la structure sont décrites par une équation différentielle semblable à celle de la poutre d'Euler-Bernoulli.

Remarquons que la résolution du modèle générique nécessite des calculs plus lourds. Le modèle le mieux approprié est celui qui décrit correctement le comportement de la structure avec le minimum de calculs. Donc l'un des intérêts du modèle générique est qu'il permet de déterminer les critères de validité correspondant à chaque modèle simple.

Pour cela, l'équation du mouvement (2.4) est reformulée sous la forme adimensionnelle avec le changement de variable $\hat{x} = x/L$:

$$C\gamma\hat{V}^{(6)} - (1+\gamma)\,\hat{V}^{(4)} - \Omega^2\hat{V}'' + \frac{\Omega^2}{C}\hat{V} = 0 \tag{2.5}$$

$$\text{où} \qquad C = \frac{\mathbb{EI}}{KL^2} \qquad\qquad \gamma = \frac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}} \qquad\qquad \Omega^2 = \frac{\Lambda\omega^2 L^2}{K}$$

Dans ces calculs, L désigne la taille caractéristique de la vibration de la structure. [Boutin and Auriault, 1990] montre que $L = O(V)/O(\partial_x V)$. L'application de ce résultat à une structure encastrée à la base et libre en tête (typiquement un bâtiment) donne comme taille caractéristique de la vibration du $k^{ième}$ mode

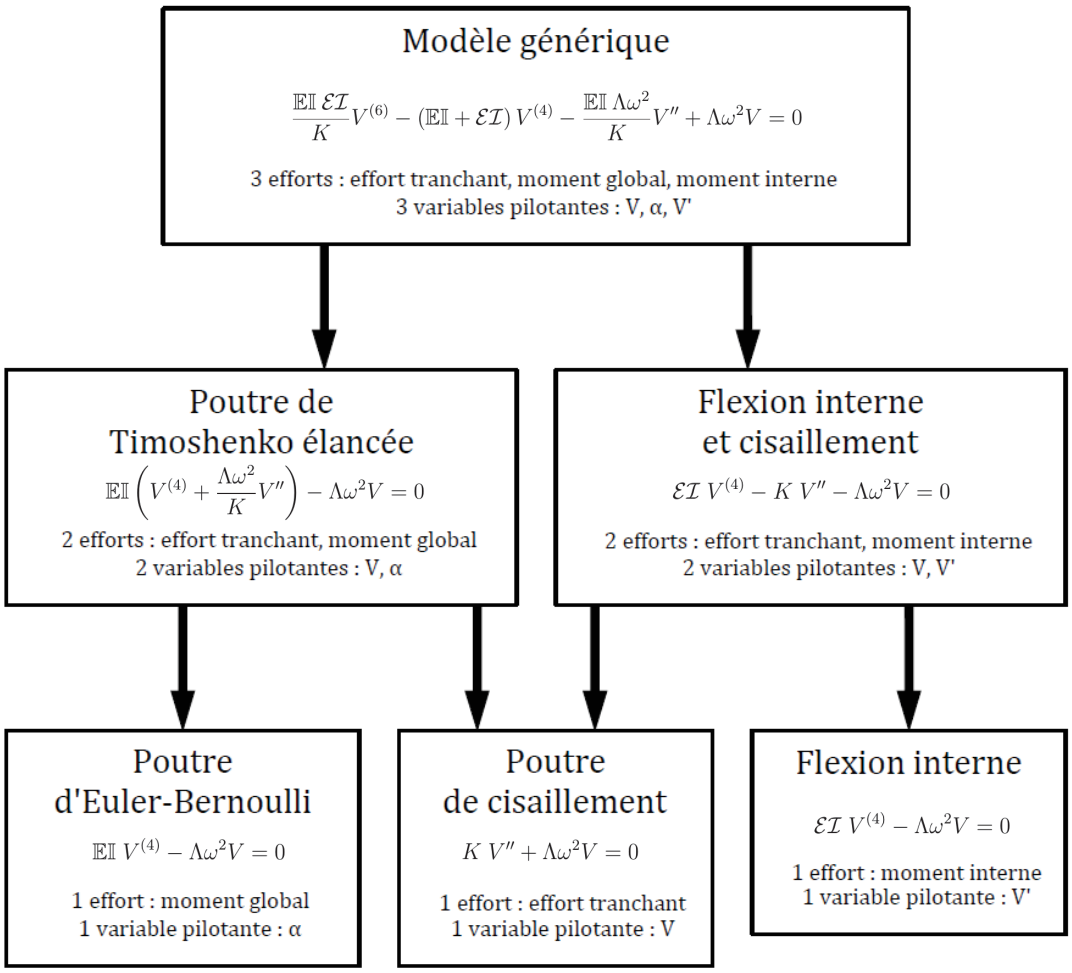


FIGURE 2.3 – Les différents modèles possibles pour les vibrations transversales

$L_k \approx \frac{2H}{\pi(2k-1)}$ ([Chesnais, 2010]), où H est la hauteur de la structure. Cette formule est une bonne approximation et ne dépend que du mode considéré et pas du modèle.

Le paramètre C mesure l'importance de la flexion globale par rapport au cisaillement de la cellule et γ compare la flexion interne avec la flexion globale qui sont en parallèle. Par construction, la nouvelle fonction $\hat{V}$ de la nouvelle variable $\hat{x}$ est du même ordre de grandeur que ses dérivées successives. Par l'équation (2.5), le modèle générique est dégénéré uniquement par des ordres de grandeur de C et γ. Ces deux paramètres mesures l'importance relative de trois mécanismes de la cellule. Ils peuvent être utilisés comme critères pour identifier le comportement de la structure. Par exemple, si $C = O(1)$ et $\gamma = O(\varepsilon)$, les termes contenant $C\gamma$ et γ disparaissent, le modèle correspondant est la poutre de Timoshenko élancée, et le comportement est décrit par l'équation :

$$V^{(4)} + \Omega^2\,V'' - \frac{\Omega^2}{C}V = 0$$

Une étude systématique permet de déterminer les domaines de validité des différents modèles simple en fonction de deux paramètres adimensionnelles et du

ratio d'échelle ε. Un cadre présenté les domaines de validité sont présentées dans la figure (2.4) par [Hans and Boutin, 2008].

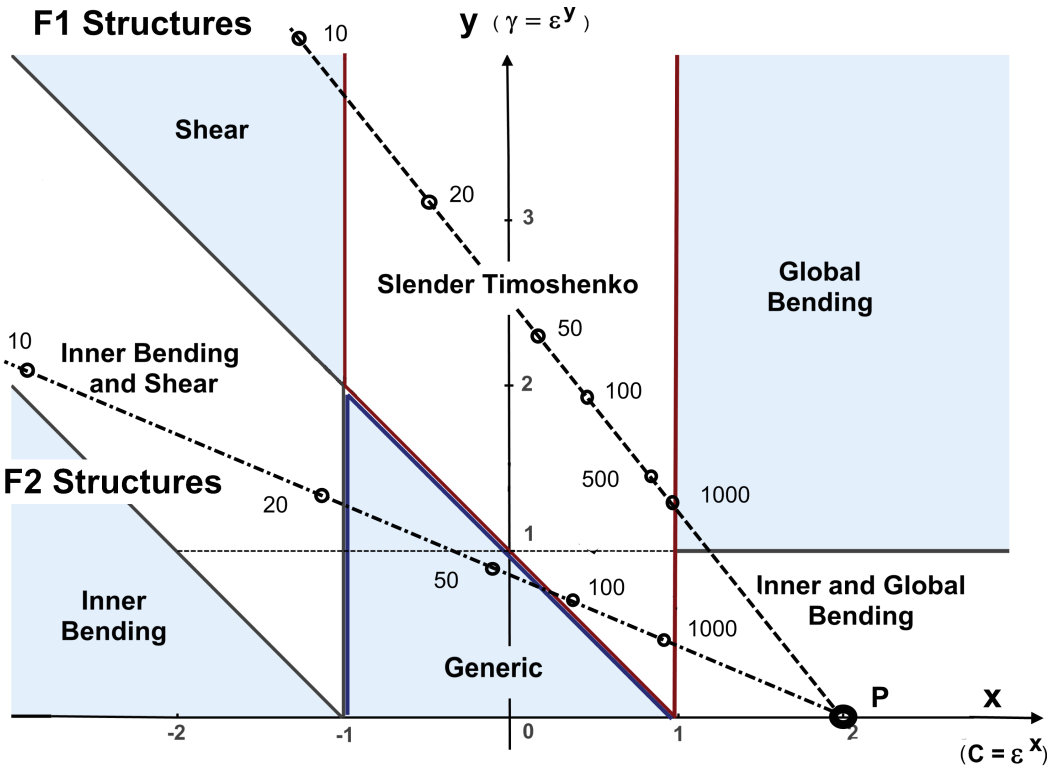


FIGURE 2.4 – Domaines d'application des différents modèles continus

Les coordonnées spatiales x et y sont définies par l'ordre de grandeur de C et γ en fonction de ε :

$$C = \varepsilon^x \qquad \text{et} \qquad \gamma = \varepsilon^y$$

Rappelons que ε est la séparation d'échelle de la vibration, pour une structure de N cellules (donc $H = N\,\ell_m$) encastrée à la base et libre en tête, la taille caractéristique du $k^{ième}$ mode L_k et le ratio d'échelle réel associés ε_k sont :

$$L_k \approx \frac{2H}{\pi(2k-1)} \qquad \varepsilon_k = \frac{l_m}{L_k} \approx \frac{\pi(2k-1)}{2N}$$

Notons que la taille caractéristique diminue et le ratio d'échelle réel augmente avec le numéro du mode. Par conséquent, pour une structure, plus le mode considéré est élevé, plus la précision du modèle homogénéisé diminue. Le cas limite où $\varepsilon_k \approx 1$ est atteint pour $k \approx N/3$. Pour les modes supérieurs, la condition de séparation d'échelle n'est plus vérifiée et le comportement de la structure ne peut plus être homogénéisé.

Une autre conséquence est que les différents modes d'une structure ne sont pas décrits par le même modèle (ou en d'autres termes, l'équilibre des différents mécanismes évolue en fonction du mode). Ce phénomène est quantifié par l'ordre

de grandeur de C et γ qui changent lorsque ε_k varie. Pour prédire l'évolution du comportement de la structure, on introduit le paramètre B :

$$B = \frac{\mathbb{EI}}{K\, l_m^2} = \frac{\mathbb{EI}}{K\, L^2} \left(\frac{L}{l_m}\right)^2 = C\, \varepsilon_r^{-2} = \varepsilon_r^{x-2}$$

B et γ sont deux paramètres intrinsèque de la cellule. Ces deux valeurs et le ratio d'échelle réel ε_r permettent de déterminer les valeurs de x et y qui permettent de positionner la structure sur la figure (2.4).

$$(x-2)\ln(\varepsilon_r) = \ln(B) \qquad\qquad y\ln(\varepsilon_r) = \ln(\gamma)$$

Éliminant ε_r, on trouve l'équation de droite :

$$(x-2)\ln(\gamma) - y\ln(B) = 0 \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) exprime une droite qui est piloté par deux paramètres intrinsèques de la cellule γ et B. Cette droite passe nécessairement par le point P de coordonnées $(x = 2,\ y = 0)$.

— Pour une structure avec un nombre d'étage donné, cette droite est fixée. La position présentée le comportement de la structure au mode $r^{ième}$ est déterminé par le ratio d'échelle réel ε_r de la vibration. Lorsque le numéro du mode augmente, ε_r augmente, ce point représentatif se déplace sur la droite en s'éloignant du point P.

— Inversement, pour un mode donné, si le nombre de cellules augmente, alors ε_r diminue et le point associé à la structure se rapproche de P. Et par conséquent, le modèle représentant son comportement change selon son nombre de cellules. Ce comportement s'apparente aux effets de l'élancement bien connus dans les poutres pleines.

2.1.3 Validation du modèle Générique et implications

Afin d'évaluer la précision des modèles homogénéisés et la pertinence des critères d'identification, [Hans and Boutin, 2008] a effectué des simulation numériques sur deux types de portiques :

— le portique $F1$ dont les murs et les planchers sont identiques et font $10\,cm$ d'épaisseur,
— le portique $F2$ dont les murs sont plus épais que les planchers : $a_m = 1\,m$ et $a_p = 15\,cm$.

Dans les deux cas, les murs et les planchers font $3m$ de longueur et le module d'élasticité du matériau vaut $E = 200GPa$ (Acier). La diversité des comportements a été introduite en faisant varier le nombre de cellules entre 5 et 1 000. Toutes les structures sont encastrées à la base et libres en tête.

Pour chaque structure, les quatre premières fréquences propres ont été déterminées de trois manières différentes. Premièrement, elles sont calculées avec le logiciel RDM6. Dans celui-ci, les murs et les planchers sont modélisés par les éléments

de poutre, et le calcul nous donne directement les fréquences et les déformées des modes de vibration des structures. En parallèle, les modes propres sont déterminés par le modèle de poutre générique et par le modèle de poutre approché déterminé par le domaine de validité. Pour ce faire, les rigidités associées aux trois mécanismes ont été estimées à partir des formules analytiques fournies par la méthode HMPD. Au premier temps, les modes propres sont calculeés directement par la résolution de l'équation différentielle de degré six. Dans un second temps, ces rigidités servent à déterminer les paramètres C et γ, avec le calcul du ratio d'échelle du premier mode $\varepsilon = \pi/(2N)$, on trouvera le fonctionnement de la structure correspondant au modèle plus simple. Et puis, les fréquences propres sont calculées simplement comme usuel.

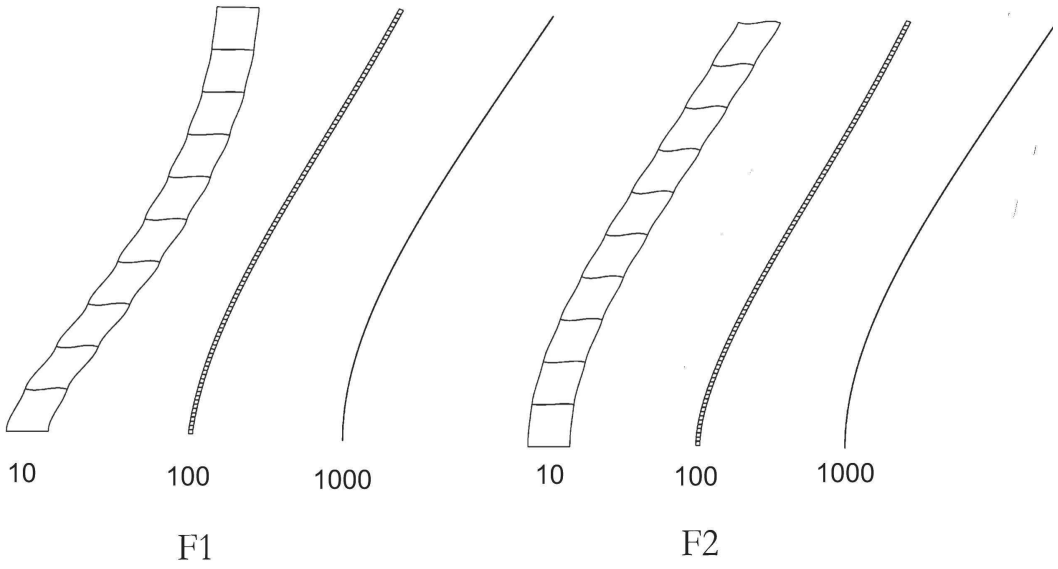


FIGURE 2.5 – Evolution de la première déformée modale en fonction du nombre de cellules (10, 100 ou 1000) pour les structure constituées de portiques F1 (à gauche) et F2 (à droite) ([Hans and Boutin, 2008])

Comme la ligne droite présentant l'évolution du comportement de la structure en fonction de nombres d'étage ne dépend que des paramètres intrinsèques, on trouve les lignes correspondantes aux structures $F1$ et $F2$ sur la figure 2.4. Les structures constituées par des portiques $F1$ sont toujours correctement modélisées par des poutres de Timoshenko élancées. Mais les modèles plus simple sont parfois suffisants : la poutre de cisaillement pour un petit nombre de cellules et la poutre d'Euler-Bernoulli pour un grand nombre de cellules. Les comportements des structures faites avec des portiques $F2$ sont plus diversifiés. Ces structures commencent par être des poutres avec flexion interne et cisaillement puis des poutres génériques et enfin des poutres de Timoshenko élancées. Cette évolution du fonctionnement des structures est illustrée par l'évolution des déformées modale figure 2.5.

Pour vérifier la précision des modèles homogénéisés, la poutre générique a d'abord été comparée avec les calculs par éléments finis. La figure 2.6 présente les quatre premières fréquences propres obtenues par les deux méthodes. L'erreur relative maximum est de l'ordre de 10%. Compte tenu de la grande variété des

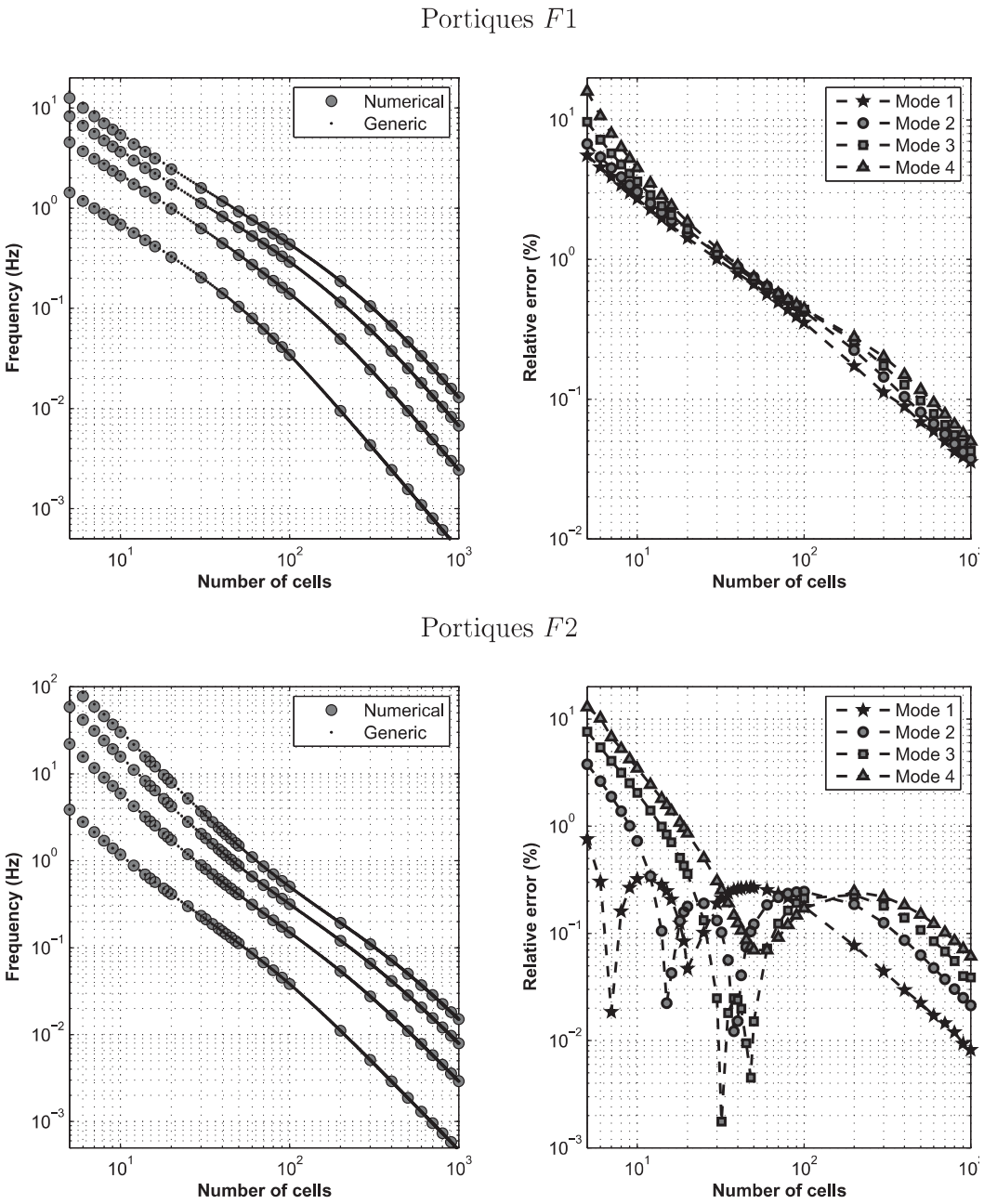


FIGURE 2.6 – Evolution des quatre premières fréquences propres en fonction du nombre de cellules. A gauche : comparaison du modèle générique avec le calcul par éléments finis, à droite : pourcentage d'erreur ([Hans and Boutin, 2008])

cas testés, la poutre générique peut être considérée comme une modélisation fiable du comportement de ces structures. Par la suite, elle est utilisée comme référence pour évaluer la précision des autres modèles.

La figure 2.7 compare les fréquences propres calculées avec les modèles simplifiés et avec la poutre générique. Pour ne pas surcharger la figure, seules les fréquences du premier et du quatrième mode ont été représentées. Il apparaît que les modèles

simplifiés donnent de bons résultats dans leur domaine de validité. C'est un point intéressant car ces modèles nécessitent beaucoup moins de calculs que la poutre générique. Néanmoins, il existe des situations où seul le modèle complet est satisfaisant. La figure 2.7 illustre également l'évolution continue du comportement de la structure et permet de valider les critères d'identification proposés.

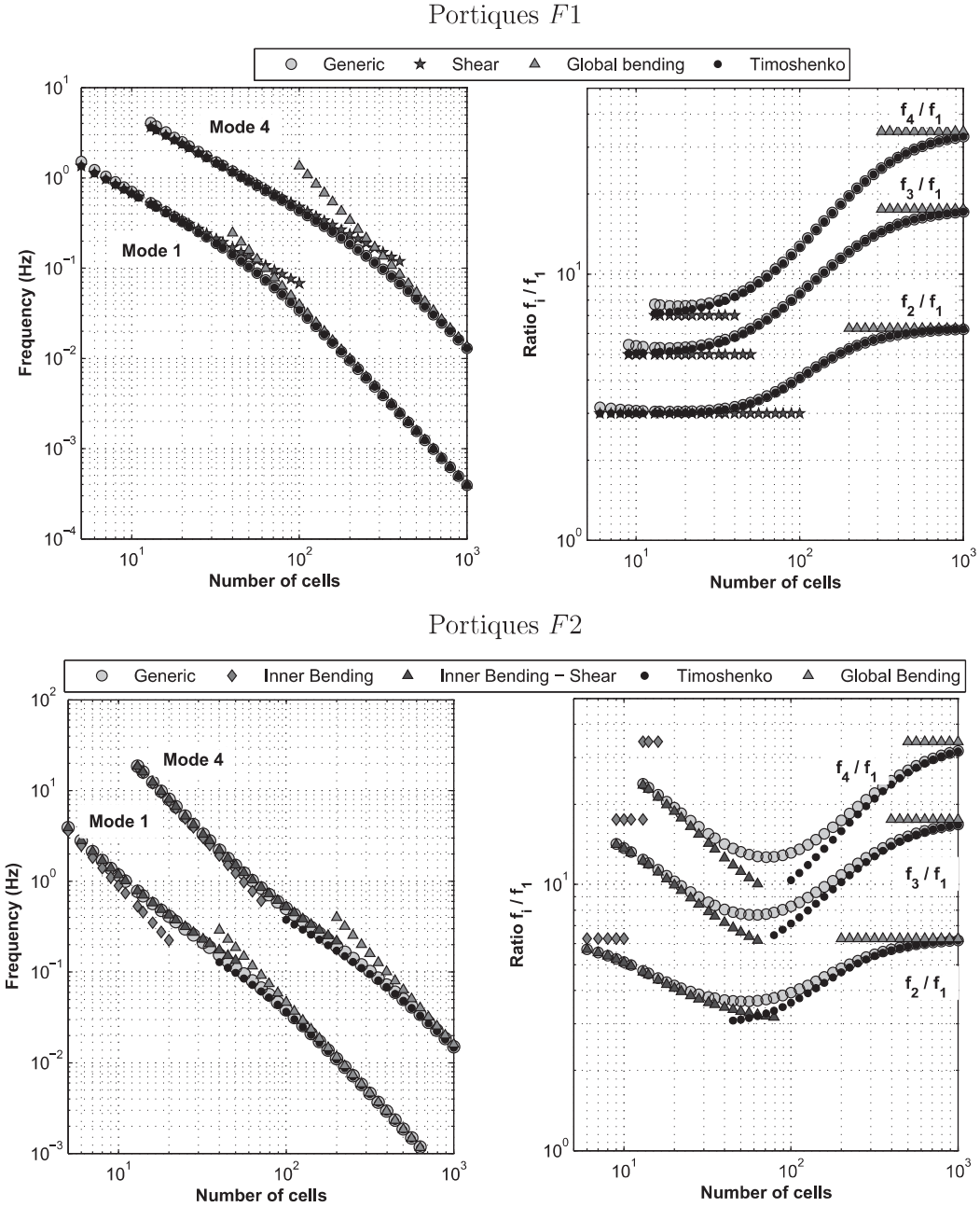


FIGURE 2.7 – Comparaison du modèle générique avec les modèles plus simples. A gauche : évolution de la 1ere et de la 4e fréquence propre en fonction du nombre de cellules, à droite : évolution des ratios de fréquences f_i/f_1 ([Hans and Boutin, 2008])

Enfin, les ratios des fréquences propres f_i/f_1 ont été représentés car ils présentent un double intérêt. D'une part, ces paramètres sont facilement accessibles par

l'expérimentation (c'est-à-dire par des mesures in situ sur des bâtiments réels) et d'autre part, ils reflètent bien le comportement des structures. Pour une poutre de cisaillement, ils suivent la suite des nombres impairs (1 ; 3 ; 5 ; 7 ;...) et pour une poutre d'Euler-Bernoulli la suite (1 ; 6,25 ; 17 ;36 ; 34,03 ;...). Pour les autres modèles qui associent la flexion et le cisaillement, les ratios de fréquences ont des valeurs intermédiaires.

Cette approche est particulièrement efficace pour étudier de la structure de nombre d'étage très grand grâce à tous les calculs sont analytiques. L'étude sur la structure fictive de type de portique avec le nombre d'étage irréaliste de 1000 étages est effectué par [Hans, 2002] et [Boutin et al., 2010] montre l'intérêt de cette méthode. Avec une même structure élémentaire (une cellule de l'étage), le comportement dynamique de la structure globale change en fonction du nombre d'étage. Pour la structure $F1$ de 5 à environ 15 étages, le comportement est similaire à celui d'une poutre de cisaillement. Ce comportement évolue quand le nombre d'étage augmente, de la poutre de Timoshenko (entre 15 et 1000 étages !) à la poutre de flexion pure pour un nombre d'étage plus élevé (! !).

2.1.4 Modèle Générique et structures plus complexes

Le modèle Générique (représenté par l'équation (2.4)) provient de l'étude de structures idéalisées d'empilement de portiques simples. [Chesnais, 2010] montre qu'il est possible de généraliser ce modèle à des structures plus complexes (quoique du même type) : l'empilement de doubles portiques figure (2.8). Ces portiques comprenant trois murs et deux planchers identiques. Les deux murs extérieurs sont les mêmes, par contre, ils peuvent être différents du mur intérieur, la structure étudiée restant symétrique.

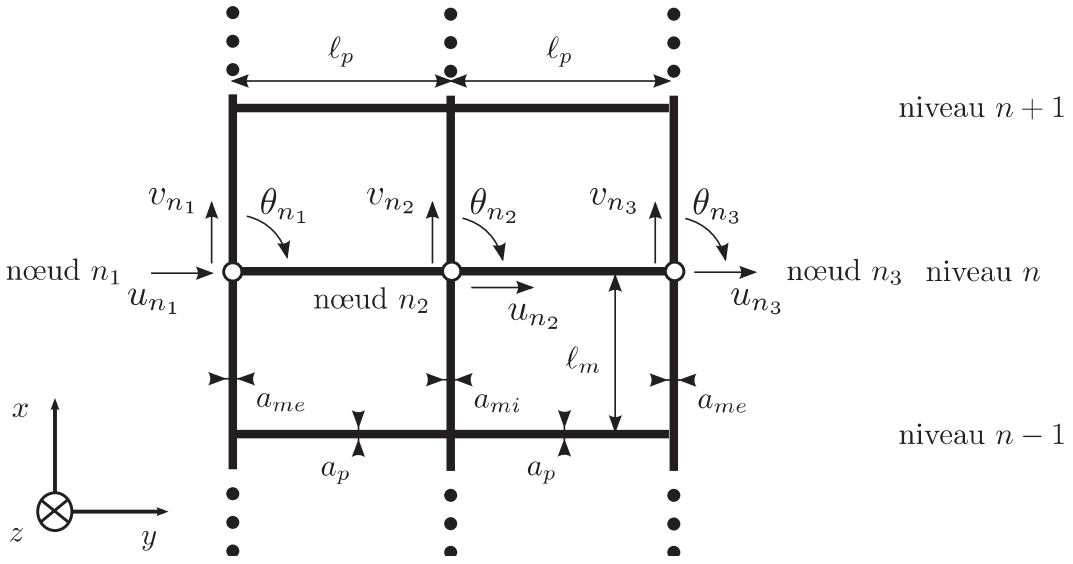


FIGURE 2.8 – La structure de doubles portiques ([Chesnais, 2010])

En appliquant la méthode de HMPD à cette nouvelle structure, [Chesnais, 2010]

a montré que le comportement des structures constituées de doubles portiques est décrit par *les mêmes modèles* que celui des structures constituées de portiques simples. Ainsi, l'ajout d'un mur intérieur ne génère pas de nouveaux mécanismes. Les modifications se situent au niveau des paramètres macroscopiques qu'il faut adapter à la géométrie étudiée.

La rigidité de la flexion globale $\mathbb{EI}$ correspond à la traction-compression en opposition de phase des deux murs extérieurs. L'inertie macroscopique $\mathbb{I}$ est égale à l'inertie d'une poutre formée par les trois murs sans les planchers. Mais, comme le mur intérieur se trouve au milieu de la structure et que les inerties propres des éléments sont négligées au premier ordre, sa contribution est nulle. Donc la rigidité de flexion macroscopique de la structure est donnée sous la forme :

$$\mathbb{EI} = 2E_{me}A_{me}\ell_p^2$$

La rigidité de la flexion interne $\mathcal{EI}$ dans le cas général est la somme des rigidités des murs en flexion : $2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}$. Selon les ordres de grandeur des épaisseurs des murs, la flexion interne peut être due soit à la flexion des trois murs, soit uniquement à la flexion des deux murs extérieurs, soit uniquement à la flexion du mur intérieur.

Le dernier mécanisme est le cisaillement de la cellule. Sa rigidité obtenue grâce à la méthode HMPD s'exprime en fonction des rigidités des éléments en flexion locale :

$$K = \frac{K_p\left(K_p\left(K_{me} + K_{mi}\right) + 6K_{me}K_{mi}\right)}{K_p^2 + 2K_p\left(K_{me} + K_{mi}\right) + 3K_{me}K_{mi}} \tag{2.7}$$

Cette formule, obtenue par C. Chesnais, est différente de celles qui existent dans la littérature. L'hypothèse la plus répandue pour calculer la rigidité d'un portique consiste à associer en parallèle d'une part tous les murs et d'autre part tous les planchers, puis à mettre les deux rigidités obtenues en série ([Smith et al., 1981], [Bouvard et al., 1985], [Zalka, 2001], [Potzta and Kollar, 2003]). Une estimation de cette rigidité a été proposée par [Basu and Nagpal, 1980] et rappelée dans [Basu et al., 1984]. En modifiant le contraste des rigidités des murs extérieurs, intérieur et des planchers, nous trouvons que les résultats de ces deux méthodes coïncident avec la méthode HMPD pour les mêmes gammes de rigidité des éléments : soit lorsque les planchers sont très souples, soit lorsqu'ils sont très rigides, soit lorsque la rigidité de mur intérieur est égale à celle de mur extérieur : $K_{mi} = K_{me}$. En tout état de cause, le calcul de la rigidité en cisaillement d'une structure portique est un problème compliqué et la méthode HMPD est un outil efficace pour y parvenir.

Le comportement de la poutre générique à l'échelle macroscopique est obtenu dans le modèle où les trois mécanismes apparaissent àu même ordre de grandeur. La poutre continue est décrite par des équations semblables à celles de la section 2.1 :

Lois de comportement :

$$\begin{array}{ll} \text{Effort tranchant} & T = -K\,(V' - \alpha) \\ \text{Moment global} & \mathbb{M} = -E_{me} I\ \alpha' \\ \text{Moment interne} & \mathcal{M} = -(2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi})V'' \end{array} \tag{2.8a}$$

Équation d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = (T - \mathcal{M}')' = \Lambda\omega^2 V \qquad \mathbb{M}' = -T \tag{2.8b}$$

La combinaison de toutes ces équations permet de décrire les vibrations transversales de la poutre à l'aide d'une équation différentielle de degré six :

$$\begin{aligned} \frac{E_{me}I\,(2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi})}{K} V^{(6)} - (E_{me}I + 2\ E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi})\, V^{(4)} \\ - \frac{E_{me}I\,\Lambda\omega^2}{K} V'' + \Lambda\omega^2 V = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La résolution du nouveau modèle nécessite six conditions aux limites qui peuvent être exprimées soit en fonction des efforts $\mathcal{T}$, $\mathbb{M}$ et $\mathcal{M}$, et en fonction des variables cinématique V, α et V' comme le modèle initial. Par contre, l'apparition d'un mur supplémentaire par rapport à la structure de portique simple fait apparaître de nouvelles variables, cachées dans la description macroscopique. Pour revenir à l'échelle locale, on a besoin de toutes les équations d'équilibre interne de la cellule contre une seule pour les structures constituées de portiques simples. Le problème devient alors très complexe.

Bilan de l'exercice et proposition :

Cet exemple a cependant montré que le modèle Générique, obtenu sur une famille particulière de 'bâtiments', trouve un champ d'application en dehors de celle-ci. L'étape naturelle que l'on propose (et que C. Chesnais avait entamé dans sa thèse) est de faire l'hypothèse que ce modèle peut être utilisé pour décrire le comportement dynamique de tout bâtiment moderne constitué de la répétition d'un nombre suffisant (disons au moins trois) d'étage (plus ou moins) identiques.

Dans ces conditions, la caractérisation du comportement dynamique d'une structure revient à déterminer les paramètres macroscopiques qui interviennent dans ce modèle. Il s'agit de la masse linéique Λ et des rigidités des trois mécanismes notés : $\mathbb{EI}$ pour la flexion globale, $\mathcal{EI}$ pour la flexion interne et K pour le cisaillement de la cellule.
L'équation dynamique de la poutre générique, découlant des lois de comportement et d'équilibre, sera alors :

$$\frac{\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}}{K} V^{(6)} - (\mathbb{EI} + \mathcal{EI})\, V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}\,\Lambda\omega^2}{K} V'' + \Lambda\omega^2 V = 0 \tag{2.10}$$

Le premier paramètre est la masse linéique Λ, c'est-à-dire simplement la masse d'un étage divisée par sa hauteur. De même, la rigidité de la flexion interne $\mathcal{EI}$

est la somme des rigidités en flexion des murs (considérés donc sans l'action des planchers). Si chaque mur est repéré par un indice j, l'expression de $\mathcal{EI}$ est :

$$\mathcal{EI} = \sum_{murs} E_j I_j \tag{2.11}$$

Pour la rigidité de la flexion globale $\mathbb{EI}$, les études par homogénéisation montre que les planchers servent uniquement à maintenir l'écartement des murs et que leurs propriétés mécaniques n'interviennent pas. La rigidité de la flexion globale est calculée de la même façon que dans les poutres hétérogènes avec d_j est la distance du mur j au centre de rigidité de la section de poutre constituée par l'ensemble des murs. Ce centre de rigidité est déterminé en même temps que $\mathbb{EI}$, par minimisation de celui-ci :

$$\mathbb{EI} = Min\left(\sum_{murs} E_j A_j d_j^2\right) \tag{2.12}$$

Cette formule néglige l'inertie propre des murs qui est prise en compte dans $\mathcal{EI}$. Elle prend en compte par contre la possibilité que les murs soient réalisés dans des matériaux différents, donc de différents modules d'élasticité (E_j).

Le point délicat est le calcul de la rigidité du cisaillement K. Les formules analytiques obtenues plus haut sur deux structures étudiées sont différentes de celles données dans la littérature. De plus, il est difficile de tirer une règle générale de ces expressions. L'estimation de cette rigidité est le dernier point à résoudre pour l'applicabilité du modèle générique à la pratique d'étude du comportement dynamique de bâtiment. Pour faire cela, il est possible d'emprunter la simulation numérique d'une cellule et appliquer les conditions correctes aux limites. [Chesnais, 2010] a utilisé cette approche pour compléter son modèle sorti de HMPD et appliqué sur un bâtiment de R+15. C'est aussi le point de départ de notre travail. Nous revenons à cette estimation dans le chapitre suivant.

2.2 Généralisation du modèle Générique avec la prise en compte du cisaillement local des murs

2.2.1 Construction du modèle

Au début de la méthode HMPD, la structure étudiée se compose de cellules-portiques dont les éléments sont des poutres ou des plaques. L'épaisseur de ces éléments dans le plan d'étude est faible devant leur longueur. La flexion pure domine le comportement de ces éléments, et le cisaillement est négligeable, ils sont donc modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Cependant, les bâtiments réels contiennent souvent des murs voiles travaillant en cisaillement. Pour prendre en compte cet effet, la méthode HMPD a été appliquée sur la même famille de structures portiques, mais avec cette fois des éléments modélisés par des poutres de Timoshenko. Ce travail a été initié dans le Master de Jigorel puis developpé dans la thèse de C. Chesnais.

L'effort tranchant et le moment fléchissant au extrémités des éléments sont ré-écrites pour prendre en compte l'effet du cisaillement des éléments. Ils sont ré-intégrés dans la procédure de HMPD et le nouveau modèle macroscopique est construit sur la structure de portique simple. Ce changement conduit à une modification du modèle générique avec les nouvelles lois de comportement et nouveaux efforts suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Effort tranchant dans les murs :} & \mathcal{T} = -\mathcal{K}_m\,(V' - \theta) \\ \text{Effort tranchant dans les planchers :} & T = -\mathcal{K}_p\,(\alpha - \theta) \\ \text{Moment global :} & \mathbb{M} = -\mathbb{EI}\,\alpha' \\ \text{Moment interne :} & \mathcal{M} = -\mathcal{EI}\,\theta' \end{array} \tag{2.13}$$

avec $\mathbb{EI} = E_m I$ et $\mathcal{EI} = 2E_m I_m$. Les rigidités $\mathcal{K}_m$ et $\mathcal{K}_p$ sont les contributions des éléments à la rigidité en cisaillement. Dans celle-ci, il faut maintenant tenir compte du fait qu'ils peuvent travailler en flexion locale bi-encastrée et en cisaillement (A' est la section réduite d'effort tranchant). On obtient ainsi :

$$\frac{1}{\mathcal{K}_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_m^2}{12E_m I_m} + \frac{1}{G_m A'_m}\right) \qquad \frac{1}{\mathcal{K}_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p}\left(\frac{\ell_p^2}{12E_p I_p} + \frac{1}{G_p A'_p}\right)$$

Les équations d'équilibre de la nouvelle poutre sont les mêmes que celles du modèle de poutre générique dans la section 2.1.

$$\mathcal{T}' = \Lambda\omega^2 V \qquad \mathbb{M}' = -T \qquad \mathcal{T} = T - \mathcal{M}' \tag{2.14}$$

Le deuxième point commun est que l'effort tranchant T, généré par le cisaillement de la cellule, est l'effort tranchant dans les planchers alors que l'effort tranchant dans les murs correspond à l'effort tranchant total $\mathcal{T}$. Par contre, l'effort tranchant total a maintenant sa propre loi de comportement et le moment interne est proportionnel à θ' au lieu de V''. Ces deux différences sont du même type que celles qui existent entre la poutre d'Euler-Bernoulli et la poutre de Timoshenko.

L'équation dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_p} V^{(6)} - \left(\mathbb{EI} + \mathcal{EI} - \frac{\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}\,\Lambda\omega^2\right) V^{(4)} \\ &\qquad - \left(\frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m} + \mathbb{EI}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_m} + \frac{1}{\mathcal{K}_p}\right)\right)\Lambda\omega^2\, V'' + \Lambda\omega^2 V = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

La cohérence de ce modèle de poutre peut être vérifiée en écrivant son équilibre énergétique. Pour cela, la première équation de (2.14) est multipliée par $\frac{1}{2}V$ et intégrée par parties sur toute la hauteur de la structure H :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^H \mathcal{T}' V\,dx &= \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H - \int_0^H \mathcal{T}V'\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H - \int_0^H \mathcal{T}(V' - \theta)\,dx - \int_0^H \mathcal{T}\theta\,dx\right) \end{aligned}$$

En utilisant la troisième équation de (2.14) et en intégrant encore par partie, la dernière intégrale devient :

$$-\int_0^H \mathcal{T}\theta\, dx = -\int_0^H (T - \mathcal{M}')\theta\, dx$$
$$= \int_0^H T(\alpha - \theta)\, dx - \int_0^H T\alpha\, dx + \Big[\mathcal{M}\theta\Big]_0^H - \int_0^H \mathcal{M}\theta'\, dx$$

De la même façon, la deuxième intégrale est transformée :

$$-\int_0^H T\alpha\, dx = \int_0^H \mathbb{M}'\alpha\, dx = \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H - \int_0^H \mathbb{M}\alpha'\, dx$$

Toutes ces expressions sont ensuite réinjectées dans la première équation :

$$\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\, dx =$$
$$\int_0^H \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{K}_m} + \frac{T^2}{\mathcal{K}_p} + \frac{\mathbb{M}^2}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{EI}}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H + \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H + \Big[\mathcal{M}\theta\Big]_0^H\right)$$

Cette équation traduit l'équilibre entre l'énergie cinétique, l'énergie élastique et le travail des conditions aux limites. Les quatre efforts macroscopiques contribuent à l'énergie élastique mais il n'y en a que trois qui travaillent aux extrémités. Les six conditions aux limites nécessaires à la résolution de l'équation (2.15) doivent donc être exprimées soit en fonction des efforts $\mathcal{T}$, $\mathbb{M}$ et $\mathcal{M}$, soit en fonction des variables V, α et θ.

Ce nouveau modèle se traduit par l'apparition de nouvelles variables indépendantes. La résolution de cette équation devient plus délicate. Cependant, l'objectif initial est de mettre au point une méthode simplifiée permettant d'obtenir le comportement global d'un bâtiment avec relativement peu de calculs. C'est pourquoi le nouveau modèle générique construit pour les structures constituées de portiques simples sera utilisé pour représenter les bâtiments. Cela revient à supposer que tous les murs voiles se déforment à peu près de la même façon. Cela doit être une situation assez usuelle, du fait des contraintes d'ingénierie qui limitent la diversité des éléments pour plus d'efficacité dans la réalisation.

La généralisation du modèle continu construit pour les structures constituées de portiques simples à d'autres types de structures nécessite d'être capable de calculer les valeurs des paramètres Λ, $\mathbb{EI}$, $\mathcal{EI}$, $\mathcal{K}_m$ et $\mathcal{K}_p$. Le calcul des trois premières paramètres sont identiques aux calculs de poutre générique. Il reste l'estimation de $\mathcal{K}_m$ et $\mathcal{K}_p$. En supposant que tous les murs se déforment sensiblement de la même façon, la rigidité de cisaillement peut raisonnablement être estimée comme la somme des rigidités des éléments indépendants.

$$\mathcal{K}_m = \sum_{murs} \mathcal{K}_j \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{\mathcal{K}_j} = \frac{\ell_m^2}{12E_jI_j} + \frac{1}{G_jA'_j}$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à déterminer la rigidité du plancher $\mathcal{K}_p$. Le modèle de poutre générique modifié peut fournir la formule analytique de cette rigidité $\mathcal{K}_p = 2\,K_p$. Cependant dans les bâtiments, les planchers ont une géométrie complexe et il semble délicat d'employer une formule analytique.

C. Chesnais propose pour la rigidité d'un étage la relation obtenue par la méthode HMPD sur les structures portiques, et d'en extraire ainsi la rigidité du plancher (celle des murs étant connus) :

$$K = \frac{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\mathcal{K}_p} = \frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m} \tag{2.16}$$

Finalement, l'équation (2.15) qui décrit les vibrations transversales de ce type de poutre est ré-écrite afin de faire apparaître les paramètres directement accessibles :

$$\begin{aligned} &\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m}\right) V^{(6)} \\ &\quad - \left(\mathbb{EI} + \mathcal{EI} - \frac{\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m}\right)\Lambda\omega^2\right) V^{(4)} \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{\mathbb{EI}}{K} + \frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m}\right)\Lambda\omega^2 V'' + \Lambda\omega^2 V = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2.2 Etude du modèle Générique Modifié

2.2.2.1 Cartographie des comportements liés au modèle Générique Modifié

De la même manière que pour le modèle Générique, il est possible de construire et de représenter l'évolution du modèle Générique Modifié à l'aide de paramètres adimensionnels. On construit ainsi une cartographie des comportements en fonction de ces paramètres, ce qui permet de mettre en évidence les termes dominants dans l'équation globale. Ceci aboutit à des comportements dégénérés du modèle principal (qui bien sûr reste toujours valable).

En partant de l'équation (2.15) et en introduisant les paramètres adimensionnels suivant :

$$C = \frac{\mathbb{EI}}{KL^2} \qquad \gamma = \frac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}} \qquad \chi = \frac{\mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m} \tag{2.18}$$

C pèse le contraste entre la rigidité de flexion globale et celle de cisaillement de cellule, γ le contraste entre la rigidité de flexion interne et globale et χ le contraste enttre la rigidité de cisaillement des planchers et celle des murs.

En opérant le changement de variable $X = \dfrac{x}{L}$, il vient :

$$\frac{C\gamma}{1+\chi} V^{(6)} - \Big(1 + \gamma - \frac{C\gamma\chi\Omega^2}{(1+\chi)^2}\Big) V^{(4)} - \Big(1 + \frac{\gamma\chi}{1+\chi}\Big)\Omega^2\, V'' + \frac{\Omega^2}{C} V = 0 \tag{2.19}$$

avec $\Omega^2 = \dfrac{\Lambda\omega^2 L^2}{K}$ la fréquence adimensionnelle.

Le principe consiste ensuite à comparer l'ordre de grandeur des termes, divisés en deux catégories : d'une part les termes élastiques, d'autre part les termes inertiels (associés à la fréquence adimensionnelle Ω). La définition des ordres de grandeur requiert l'utilisation du petit paramètre ε. On introduit ainsi les puissances associées aux paramètres adimensionnels :

$$C = \varepsilon^{\underline{C}} \qquad \gamma = \varepsilon^{\underline{\gamma}} \qquad \chi = \varepsilon^{\underline{\chi}} \tag{2.20}$$

La cartographie des comportements 'dégénérés' est plus complexe qu'auparavant, puisque nous avons maintenant trois paramètres au lieu de deux. On a donc représenté des 'coupes' en fixant à chaque fois l'ordre de grandeur du paramètre χ.

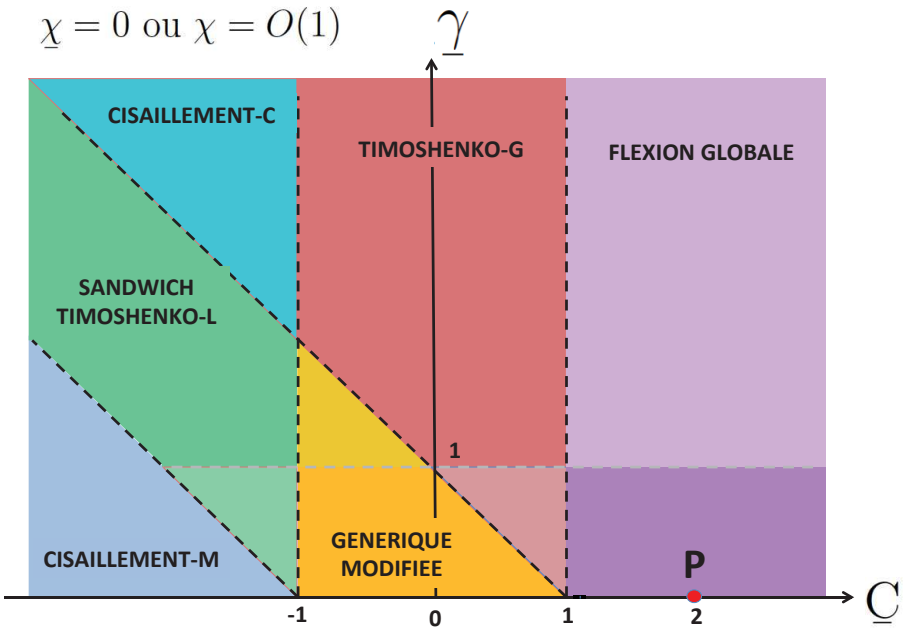


FIGURE 2.9 – Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(1)$

Commençons par le cas $\chi = O(1)$ représenté la figure (2.9) : on y retrouve approximativement la même configuration que pour le modèle Générique, avec deux différences notables :

- le modèle Sandwich est remplacé par un modèle Sanwich-Timoshenko-L,
- le modèle de Flexion Interne à gauche est remplacé par un modèle de Cisaillement-M n'impliquant que la rigidité des murs $\mathcal{K}_m$.

On ré-écrit ci-dessous les différents modèles relatifs à la figure (2.9) (sans re-écrire le modèle Générique Modifié) :

— Flexion Globale : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} = \Lambda\omega^2 V$
— Timoshenko-G : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}+\mathcal{EI}}{K}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-C (pour cellule) : $KV'' + \Lambda\omega^2 V = 0$
— Sandwich-Timoshenko-L : $\frac{\mathcal{EI}}{1+\chi}V^{(4)} - KV'' + \frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m+\mathcal{K}_p}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-M : $\mathcal{K}_m V'' + \Lambda\omega^2 V = 0$

On explore ensuite les cas où $\chi = O(\varepsilon^{\underline{\chi}})$, $\underline{\chi} > 0$, représentés pour deux valeurs de $\underline{\chi}$ sur la figure (2.10). Cette situation correspond grosso modo à des structures avec des planchers souples, ce qui implique $\mathcal{K}_p \ll \mathcal{K}_m$ et $K \approx \mathcal{K}_p$. Par rapport à la situation précécente, on observe un glissement vers la gauche du graphe de la zone ceinturée par le triangle rouge. Ce glissement est d'autant plus important que l'ordre de χ est grand. On retrouve alors pour les grandes valeurs la cartographie du modèle Générique (cf. figure (2.4)).

De même, on précise ci-dessous les différents modèles relatifs aux graphes de la figure (2.10) (sans ré-écrire les modèles Générique et Générique Modifié) :

— Flexion Globale : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} = \Lambda\omega^2 V$
— Timoshenko-G : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}+\mathcal{EI}}{K}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-C : $KV'' + \Lambda\omega^2 V = 0$
— Sandwich : $\mathcal{EI}V^{(4)} - KV'' = \Lambda\omega^2 V$
— Sandwich-Timoshenko-LM : $\mathcal{EI}V^{(4)} - KV'' + \frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Timoshenko-LM : $\mathcal{EI}V^{(4)} + \frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_m}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-M : $\mathcal{K}_m V'' + \Lambda\omega^2 V = 0$

Enfin, la figure (2.11) représentent deux cas où $\chi = O(\varepsilon^{\underline{\chi}})$, $\underline{\chi} < 0$. Cela correspond à une rigidité de plancher plus importante que celle des murs ce qui implique $\mathcal{K}_m \ll \mathcal{K}_p$ et $K \approx \mathcal{K}_m$. De même que précédemment, on observe une zone triangulaire dérivant vers la gauche du graphe avec l'augmentation du contraste de rigidité. À la limite ne demeurent que trois modèles : (1) le Cisaillement des murs, (2) Timoshenko et (3) la Flexion Globale. Cette situation correspond à une structure avec planchers indéformables, ne laissant que deux mécanismes perdurer, le cisaillement des murs et la flexion d'ensemble.

De même, on précise ci-dessous les différents modèles relatifs aux graphes de la figure (2.11) (sans re-écrire le modèle Génerique Modifié) :

— Flexion Globale : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} = \Lambda\omega^2 V$
— Timoshenko-G : $(\mathbb{EI} + \mathcal{EI})V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}+\mathcal{EI}}{K}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-C : $KV'' + \Lambda\omega^2 V = 0$
— Sandwich-Timoshenko-L : $\frac{\mathcal{EI}}{\chi}V^{(4)} - KV'' + \frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_p}\Lambda\omega^2 V'' = \Lambda\omega^2 V$
— Cisaillement-M : $\mathcal{K}_m V'' + \Lambda\omega^2 V = 0$

Dans chaque situation décrite, on peut observer la logique de transition entre les modèles, avec l'apparition ou la disparition d'un ou plusieurs termes reliés à un mécanisme.

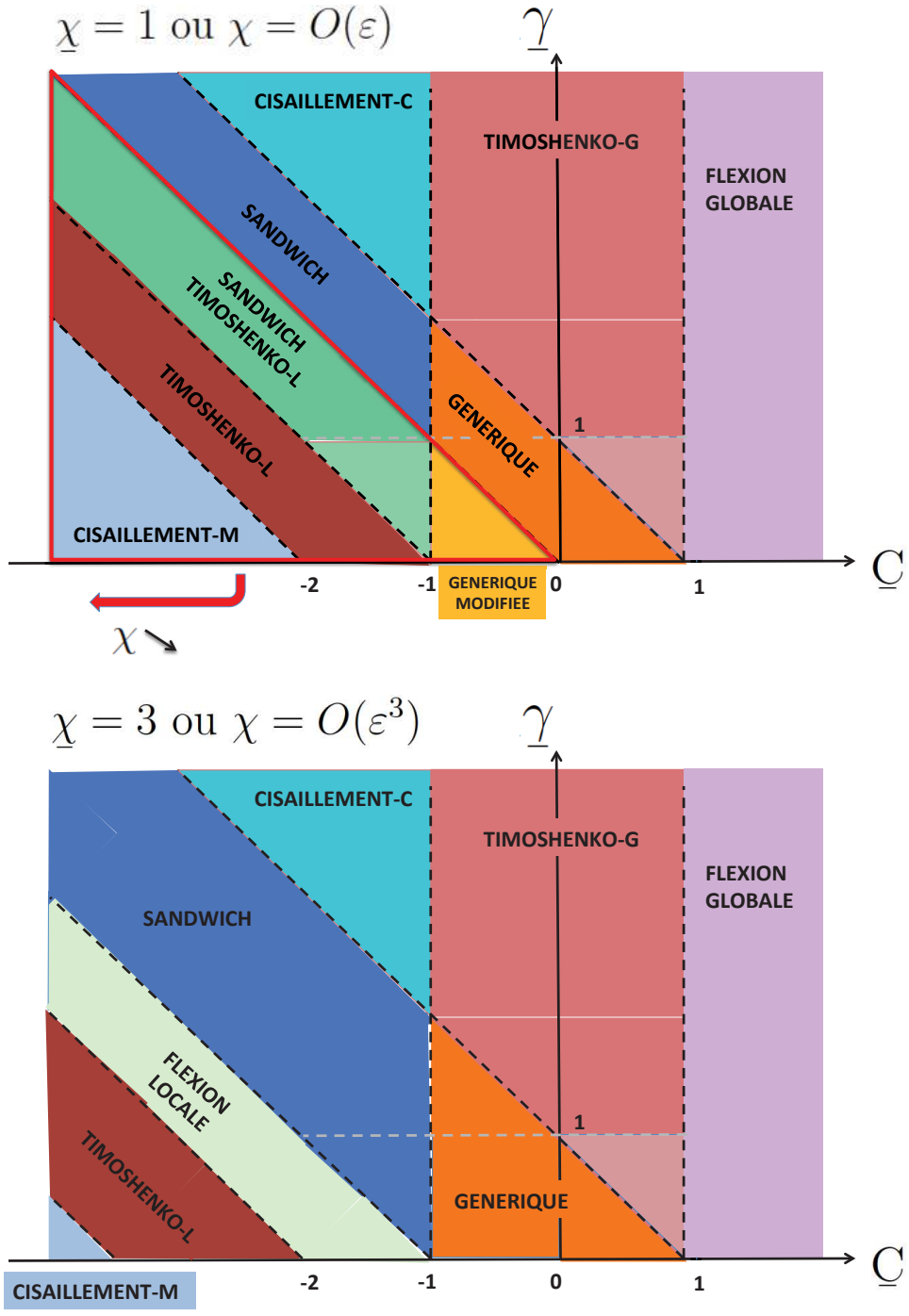


FIGURE 2.10 – Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(\varepsilon)$ (figure du haut) et $\chi = O(\varepsilon^3)$ (figure du bas)

2.2.2.2 Comportement effectif d'une structure donnée

Revenons maintenant au comportement d'une structure bien définie. Le cadre que l'on vient de construire repose sur trois paramètres physiques calculables à partir des différentes rigidités d'un étage, à savoir :

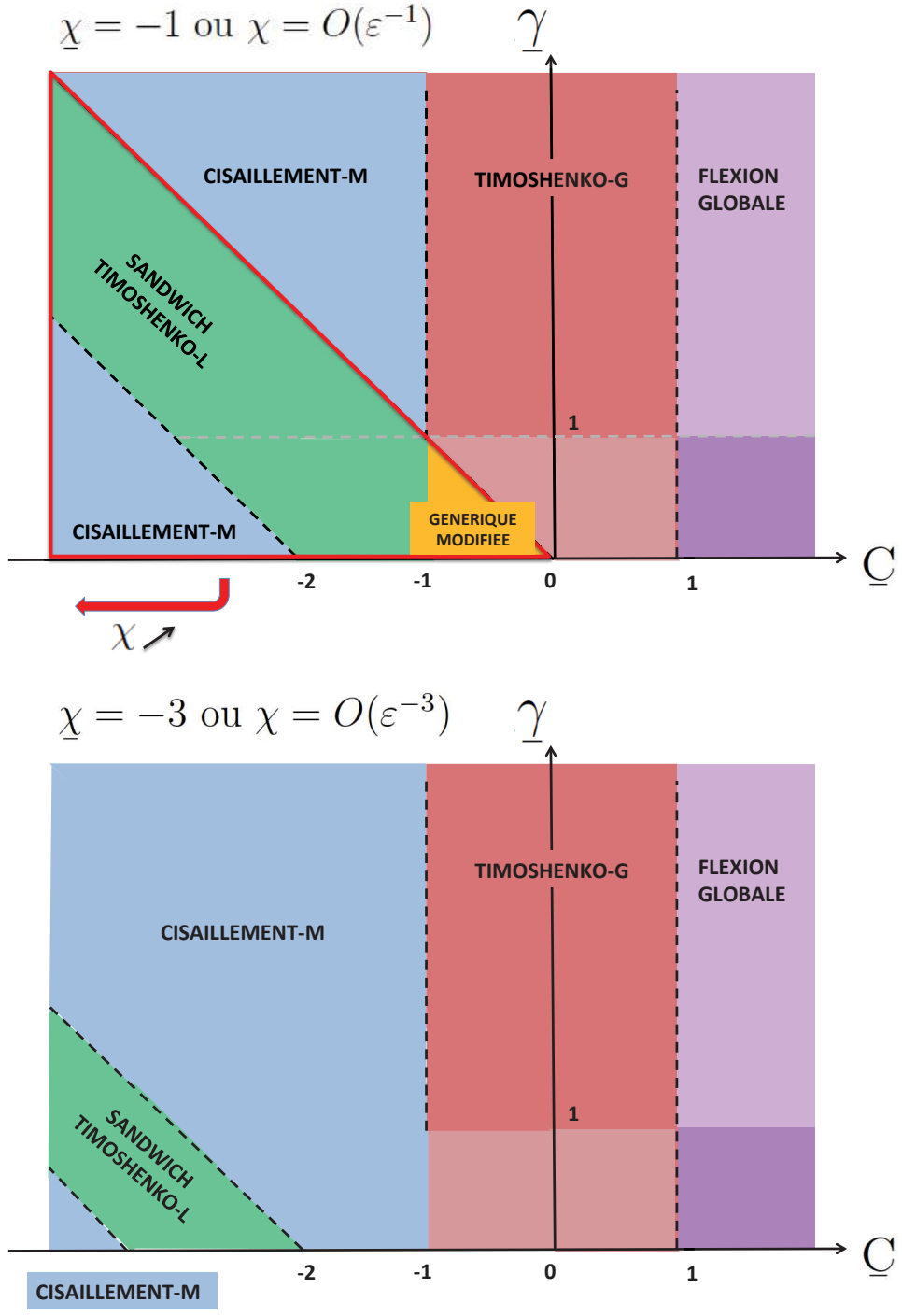


FIGURE 2.11 – Modèle Générique Modifié : Cartographie des comportements pour $\chi = O(\varepsilon^{-1})$ (figure du haut) et $\chi = O(\varepsilon^{-3})$ (figure du bas)

$$c = \frac{\mathbb{EI}}{K\ell^2} \qquad \gamma = \frac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}} \qquad \chi = \frac{\mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m} \tag{2.21}$$

On introduit ici le paramètre c plutôt que C car ce dernier dépend de la lon-

gueur L, dont on va parler ci-dessous.

C'est l'évaluation de l'ordre de ces paramètres par rapport au paramètre d'échelle ε qui conduit à la détermination du modèle le plus pertinent dérivant du modèle générique modifié. Or ce paramètre ε n'est pas indépendant de la structure étudiée, il dépend en fait de plusieurs facteurs, en fait les mêmes que L, à savoir :

1. du nombre de niveau n dans la structure,
2. des conditions aux limites de celle-ci,
3. du mode considéré.

La résolution des équations dynamiques des modèles Générique ou Générique Modifié conduisent, dans la situation encastrée à la base - libre en tête, aux évaluations suivantes pour les longueurs caractéristiques du mode fondamental et des $k^{\text{ième}}$ modes :

$$L_1 = \frac{2H}{\pi} \qquad \text{et} \qquad L_k = \frac{L_1}{2k-1} \tag{2.22}$$

ce qui donne pour les ratios d'échelle :

$$\varepsilon_1 \;=\; \frac{\pi}{2n} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_k \;=\; (2k-1)\varepsilon_1 \tag{2.23}$$

Ces évaluations ont une implication pratique importante, déjà évoquées précédemment dans ce document, qui est que le comportement dynamique, pour des caractéristiques d'étage fixées (géométrie et matériaux), va évoluer en fonction du nombre de niveaux effectifs n mais aussi en fonction du mode considéré. Le ratio d'échelle diminue avec l'augmentation du nombre de niveau, mais pour un nombre fixe de niveau, augmente avec le rang du mode.

Partant maintenant des estimations en ordre de ε des trois paramètres adimensionnelles :

$$\begin{cases} C = c\,\varepsilon^2 = \varepsilon^{\underline{C}} & \Longrightarrow \quad \underline{C}\log(\varepsilon) = 2\log(\varepsilon) + \log(c) \\ \chi = \dfrac{\mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m} = \varepsilon^{\underline{\chi}} & \Longrightarrow \quad \underline{\chi}\log(\varepsilon) = \log(\chi) \\ \gamma = \dfrac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}} = \varepsilon^{\underline{\gamma}} & \Longrightarrow \quad \underline{\gamma}\log(\varepsilon) = \log(\gamma) \end{cases} \tag{2.24}$$

On a alors :

$$\log(\varepsilon) = \frac{\log(c)}{\underline{C}-2} = \frac{\log(\chi)}{\underline{\chi}} = \frac{\log(\gamma)}{\underline{\gamma}} \tag{2.25}$$

Les relations entre les ordres $\underline{C}$, $\underline{\chi}$ et $\underline{\gamma}$ des paramètres C, χ et γ correspondent donc à l'équation d'une droite, dont les caractéristiques ne dépendent que de la géométrie et des matériaux de l'étage :

$$\begin{cases} \underline{C} = 2 + \dfrac{\log(c)}{\log(\chi)}\,\underline{\chi} \\ \underline{\gamma} = \dfrac{\log(\gamma)}{\log(\chi)}\,\underline{\chi} \end{cases} \tag{2.26}$$

Cela signifie que les modèles de comportement des structures ayant la même cellule mais un nombre de niveau différent se positionnent sur une même droite dans les axes $\{\underline{C}, \underline{\gamma}, \underline{\chi}\}$. Lorsque le nombre de niveau n augmente, les valeurs des ordres changent, et on n'a en cas limite :

$$n \to \infty \Longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2n} \to 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \underline{C} \to 2 \\ \underline{\gamma} \to 0 \\ \underline{\chi} \to 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Cela implique que toutes les droites pointent vers un même point, qu'on a appelé 'P' sur la figure 2.9 et qu'avec l'augmentation du nombre de cellules, les coordonnées des modèles se rapprochent de ce point. En d'autres termes, et de manière intuitive, toutes les structures suffisamment élancées se comportent comme des poutres de Euler-Bernoulli.

De même, pour une structure donnée, les modèles associés changent en fonction du mode considéré. En effet, la longueur caractéristique L_k diminue pour les modes supérieurs et le ratio d'échelle associé ε_k augmente. Le déplacement sur la droite des comportements se fait en s'éloignant du point 'P'.

$$L_k = \frac{2H}{(2k-1)\pi} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 \ = \ (2k-1)\frac{\pi}{2n} \tag{2.28}$$

2.3 Conclusion sur les modèles Génériques

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux modèles Génériques qui sont les résultats de l'étude du comportement dynamique transversal de la structure portique non-contreventée. Le premier modèle Générique est développé sur les portiques des éléments de grand élancement. Dans ce modèle, les 'murs' et les 'planchers' sont modélisés par les poutres d'Euler Bernoulli. Le comportement du modèle Générique est décrit par une équation différentielle de degré six. Les lois de comportement et les équations d'équilibre sont définis par trois efforts internes correspondant à trois mécanismes : la flexion globale, la flexion interne et le cisaillement de la cellule qui est l'association de la flexion locale des 'murs' et des 'planchers'. En fonction des contrastes géométriques et mécaniques des éléments, le modèle Générique peut générer aux modèles plus simples (modèle de Timoshenko, d'Euler Bernoulli, ...).

Le deuxième modèle est nommé le modèle de poutre Générique Modifié. Ce modèle inclut les éléments de murs de grande dimension dont l'effet de cisaillement local devient important. Ce dernier complété le modèle Générique par la prise en compte d'un quatrième paramètre mécanique : le cisaillement des murs.

Ces deux modèles Génériques sont établis à partir des modèles de structure portique. L'objectif est néanmoins de décrire le comportement dynamique des structures réelles périodiques en élévation. L'avantage de ces modèles est d'être

entièrement défini à partir de quelques paramètres, et une fois ces paramètres connus, il serait possible de déterminer le comportement dominant de chaque bâtiment étudié. De plus, la compréhension approfondie du fonctionnement de chaque mécanisme, permet de modifier la structure afin d'obtenir un comportement optimisé.

Pour le faire, il faut transférer les modèles Génériques aux bâtiments réels. Cet étape consiste à estimer des paramètres du modèle théorique. Ce travail sera présenté dans le chapitre 3 avec l'application de cette méthodologie à un bâtiment exemple.

Chapitre 3

Modélisation de bâtiment

Contents

3.1 Modèles et paramètres 52
3.1.1 Applicabilité des modèles proposés 52
3.1.2 Méthodologie pour l'estimation des paramètres 52
3.1.3 Généralisation 56
3.2 Modélisation de bâtiments 57
3.2.1 Bâtiments modélisés 57
3.2.2 Méthodes d'étude adoptées 58
3.2.3 Résultats et commentaires : 67
3.3 Retour sur le bâtiment de référence 75
3.4 Conclusion sur la méthodologie d'étude par les modèles Génériques 83

3.1 Modèles et paramètres

3.1.1 Applicabilité des modèles proposés

Dans le second chapitre, nous avons présenté deux modèles contruits pour analyser l'ensemble des comportements dynamiques transverses d'une famille de bâtiments périodiques idéalisés. Même si les bâtiments réels périodiques en élévation ont généralement une structure interne plus complexe, ces modèles sont une piste intéressante pour analyser leur comportement dynamique. En effet, les trois mécanismes de cisaillement de la cellule, de flexion interne et de flexion globale sont évoqués dans la littérature et à la base de certains modèles déjà utilisés comme les poutres de cisaillement, de flexion et même les "poutres sandwich". De nombreux auteurs, parmi lesquels on peut citer [Smith et al., 1981], [Smith et al., 1984], [Potzta and Kollar, 2003], [Tarján and Kollár, 2004] a montré l'intérêt de l'utilisation de tels modèles de poutres continues en proposant leurs propres méthodes de passage d'un bâtiment à des poutres continues. L'avantage de l'approche proposée ici est que les deux modèles fournissent un cadre global d'interprétation des différents comportements, et de leur évolution en fonction du nombre de niveau et de l'ordre du mode considéré. Et surtout, ces modèles reposent sur l'estimation de 'seulement' trois paramètres associés à la structure d'un étage. C'est là un point essentiel que l'on aborde dans la suite.

La généralisation montre que la masse linéique et les deux rigidités en flexion (globale $\mathbb{EI}$ et locale $\mathcal{EI}$) sont calculées par les formules HMPD à partir de la géométrie du bâtiment (formule 2.11 et 2.12). La rigidité en cisaillement des murs $\mathcal{K}_m$ peut être estimée soit par un calcul analytique direct, soit par calcul par éléments finis sur un étage. Le point délicat reste le calcul de la rigidité en cisaillement de la cellule K.

3.1.2 Méthodologie pour l'estimation des paramètres

Les résultats analytiques de l'approche par HMPD ne donnent pas de règle générale pour le calcul de cette rigidité en cisaillement de la cellule. Il en est de même dans les différentes études qu'on peut trouver sur ce sujet ([Smith et al., 1981], [Smith et al., 1984], [Bouvard et al., 1985], [Zalka, 2001] et [Potzta and Kollar, 2003]), l'étude sur double portique par ([Bouvard et al., 1985], [Basu and Nagpal, 1980] et [Basu et al., 1984]). Si de plus, on prend en compte la répartition des murs dans les deux directions en plan d'un bâtiment réel, l'estimation de cette rigidité devient très compliquée.

Revenant aux études HMPD, pour les modèles sans résonance interne, les paramètres macroscopiques ne dépendent que des propriétés statiques de la cellule de base. Il est donc possible en théorie d'obtenir cette rigidité en réalisant un calcul statique sur une cellule. La méthode classique consiste à appliquer une déformation macroscopique connue sur un modèle numérique de la cellule et à calculer les efforts résultants. En effet, cette technique a été déjà utilisé pour déterminer les

propriétés macroscopiques des milieux périodiques continus (on peut noter ici le travail de[Anthoine, 1995], [Burgardt and Cartraud, 1999], [Michel et al., 1999], [Buannic et al., 2003], [Laudarin, 2008]). Dans la pratique, la difficulté réside dans le fait que la cellule se trouve à l'intérieur d'une structure comprenant un grand nombre de cellules et qu'elle travaille avec l'ensemble de la structure. Donc il faut trouver et mettre en œuvre des conditions aux limites telles que la cellule se comporte comme elle le fait dans la structure. Les méthodes d'homogénéisation montrent qu'il s'agit de conditions périodiques. Reste à spécifier la manière de les appliquer pour en déduire la rigidité de cellule que l'on recherche.

Pour trouver une méthode réalisable de calcul de cette rigidité de cisaillement de la cellule (noté K), on prend comme point de départ les équations d'équilibre et la loi de comportement de la poutre générique ci-dessous :

Lois de comportement :

$$\begin{array}{ll} \text{effort tranchant} & T = -K\,(V' - \alpha) \\ \text{moment global} & \mathbb{M} = -\mathbb{EI}\;\alpha' \\ \text{moment interne} & \mathcal{M} = -\mathcal{EI}\;V'' \end{array} \tag{3.1a}$$

Équations d'équilibre local :

$$\mathcal{T}' = \Lambda\omega^2 V \tag{3.1b}$$

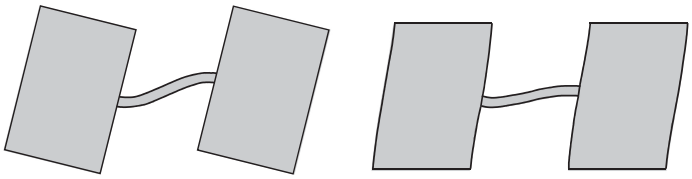
$$\mathbb{M}' = -T \tag{3.1c}$$

$$\mathcal{T} = T - \mathcal{M}' \tag{3.1d}$$

Pour rappel, le mouvement est piloté par les trois variables V, α', et V' reliées aux trois efforts macroscopiques : (i) T - effort tranchant de la cellule ; (ii) $\mathbb{M}$ - moment fléchissant global qui relie à la traction-compression des murs générée par la rotation de la section (figure 1.8) et (iii) le moment interne $\mathcal{M}$ engendré par la flexion couplée des murs. L'équation (3.1d) montre que l'effort tranchant total $\mathcal{T}$ prend en compte l'effort tranchant de la cellule T et un "effort tranchant" dû au différentiel de flexion couplée des murs. Ce qui nous intéresse étant la rigidité de cisaillement K liée à l'effort tranchant T, la méthode d'estimation doit être capable d'isoler les différents mécanismes tout en respectant la périodicité et le comportement de la cellule dans la structure réelle.

Pour faire cela, nous nous intéressons premièrement au modèle de cellule de base où les planchers se situent au milieu de la hauteur des murs. C'est-à-dire que la cellule de base est définie entre la mi-hauteur de l'étage inférieur à la mi-hauteur de l'étage supérieur de la structure. Cette configuration nous permet de respecter parfaitement la périodicité de la cellule et de la méthode HMPD. De plus, si le modèle est en plan (2 directions) avec la géométrie symétrique horizontalement, sous les conditions de charge et de fixation symétrique, la cellule se comportera parfaitement symétriquement même si nous n'utilisons pas les conditions périodiques. Cependant, ce n'est pas le cas dans le modèle 3D de bâtiment réel. Cette idée est utilisée dans l'étude de [Chesnais et al., 2012] pour calculer la rigidité en cisaillement des multi-portiques, dans son étude, les éléments sont

les barres et les planchers sont posés au milieu des barres de murs. Par contre, dans la modélisation de bâtiment, elle a utilisé le modèle d'un étage courant. Dans notre étude, nous employons le modèle de l'étage avec les planchers au milieu du niveau ce qui permet mieux d'imposer la condition de périodicité de la cellule et d'approcher le résultat.



(a) Cisaillement de la cellule *(b) Cisaillement des murs*

FIGURE 3.1 – Différence entre les deux mécanismes de cisaillement

Ensuite, nous imposons localement l'état où :

$$V' \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 0$$

et les conditions périodiques :

$$\Rightarrow \mathcal{M}' = 0$$

donc :

$$\mathcal{T} = T = K\ V'$$

On isole ainsi K et l'effort tranchant total $\mathcal{T}$ est égal à l'effort tranchant de la cellule T qui est déterminé par la somme des efforts tranchants de l'ensemble des murs de l'étage ($\sum T_m$). En supposant le découplage des cinématiques longitudinales et transverses, les variables associées à la cinématique longitudinale peuvent être choisies de façon arbitraire. Par conséquent, comme K est proportionnelle à la somme des efforts tranchants dans les murs, il suffit donc de calculer la déformation d'une seule cellule. Pour cela, il faut lui imposer la déformation macroscopique, c'est-à-dire un déplacement transversal différentiel ΔV et $\alpha = U = 0$, ainsi que les conditions périodiques au niveau des interfaces avec les autres cellules pour les variables microscopiques. La rigidité K se déduit alors grâce à la formule :

$$\sum T_m = -K\frac{\Delta V}{\ell_m} \tag{3.2}$$

En pratique, en 2D, nous bloquons le déplacement du centre de gravité d'un mur dans les deux directions (pour s'assurer de la convergence des calculs) et des autres murs dans la seule direction verticale. Le blocage des centres de gravité respecte toujours la symétrique du modèle et donc la périodicité de la cellule. De plus, la liaison des murs est toujours assurée par le plancher. Les conditions aux limites sont expliquées sur la figure 3.2.

Pour illustrer les couplages, on présente dans la figure 3.3 un calcul modal Eléments Finis sur une structure complète. Même s'il existe des effets parasites, nous pouvons démontrer les trois mécanismes du modèle Générique : la flexion globale (la compression-traction à opposition des murs qui est montrée par l'inclinaison des planchers) ; la flexion interne (la flexion locale des murs) et le cisaillement

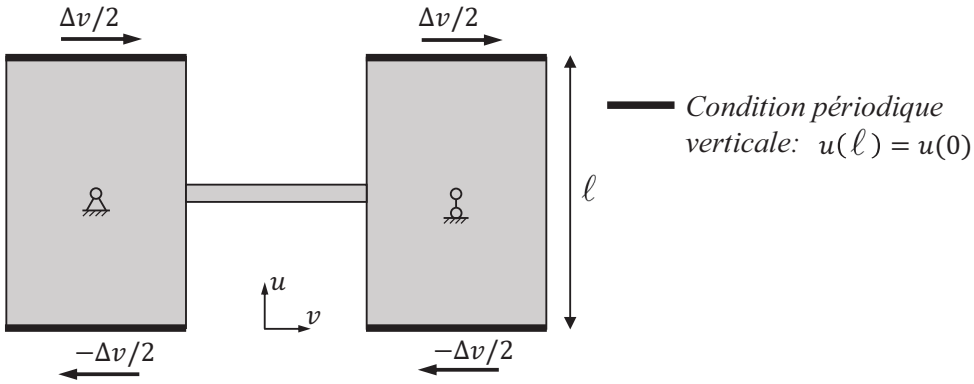


FIGURE 3.2 – Conditions aux limites d'une cellule pour estimer la rigidité du cisaillement de la cellule

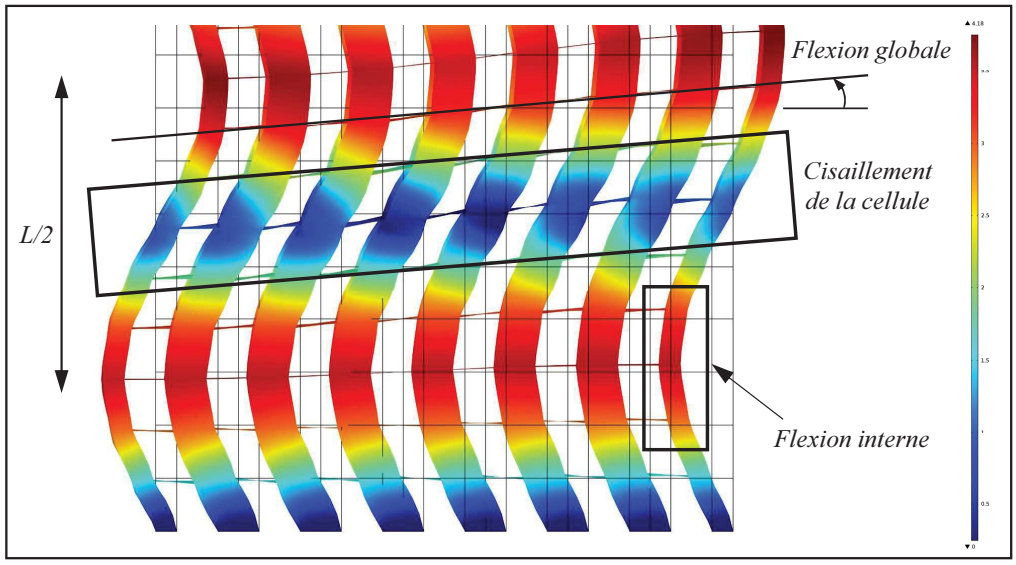


FIGURE 3.3 – Trois mécanismes de la cellule dans la structure

de la cellule. Ce cisaillement de la cellule est un état particulier du cisaillement de la cellule, il permet de confirmer les conditions aux limites estimant la rigidité du cisaillement de la cellule présentées ci-dessus :

La couleur explique le déplacement total de chaque élément. On s'intéresse maintenant à la partie en cisaillement : premièrement, on constate que les murs "tournent" autour du nœud central des murs et planchers comme si celui-ci était bloqué. Puis, en raison de leur dimension importante, les murs sont très faiblement déformées. En corrigeant par la flexion globale, la rotation de l'étage qui est définie par le déplacement longitudinal différentiel entre les nœuds de l'étage est négligeable ($\alpha = 0$). Puis, le déplacement transversal local de l'étage défini par la somme des déplacements transversaux des nœuds est systématiquement linéaire. Cela explique que la dérivée du déplacement est constante ($V' = 0$).

Revenons au modèle de poutre générique décrit par l'équation du mouve-

ment (2.10), nous sommes maintenant capables de calculer tous les paramètres du modèle : la masse linéique Λ, la rigidité de flexion globale $\mathbb{EI}$ et interne $\mathcal{EI}$ (à partir de la géométrie de l'étage et des propriétés des matériaux constitutifs) et la rigidité du cisaillement K par la méthode éléments finis.

Avant d'exploiter la méthodologie précisée, nous nous intéressons au modèle de poutre générique modifiée prenant en compte le faible élancement possible des éléments verticaux (murs-voiles). Dans ce modèle (cf. les équations (2.15)), il est nécessaire de distinguer la rigidité de cisaillement des murs $\mathcal{K}_m$ de celle des planchers $\mathcal{K}_p$. Comme nous l'avons expliqué à la fin du chapitre 2, on estime facilement la première ($\mathcal{K}_m$) par modèle éléments finis en enlevant le plancher et en imposant des conditions aux limites encastrées. Les murs seront encastrés à la base et à l'autre extrémité, nous imposons un déplacement transversal ΔV et puis nous calculons la rigidité due au cisaillement des murs en faisant la somme des efforts tranchant des murs à l'aide de la relation (supposée valide) :

$$K = \frac{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\mathcal{K}_p} = \frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m} \tag{3.3}$$

3.1.3 Généralisation

L'étude de généralisation montre que les modèles de poutre générique décrites par les équations (2.10) et (2.17) peuvent être utilisés pour des structures plus complexes. Le travail qui reste à mener est l'adaptation du calcul des paramètres aux structures réelles. Les paramètres sont calculables par la théorie à partir de la géométrie et du matériau d'un seul étage sauf la rigidité au cisaillement de la cellule. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons d'utiliser un calcul statique par éléments finis. En appliquant les conditions aux limites au modèle, nous pouvons calculer la rigidité au cisaillement de l'étage en prenant en compte la géométrie spatiale des contreventements. La différence de notre étude avec celle de C. Chesnais est le centrage de la cellule sur le plancher. Cette modification permet de mieux respecter la périodicité de la méthode. Puis, en utilisant le même modèle d'étage, nous allons calculer la rigidité de cisaillement des murs qui est le paramètre additionnel du modèle générique modifié.

Dans la partie qui suit nous allons utiliser les deux modèles génériques pour étudier un bâtiment réel de type HLM. Notre objectif est de vérifier la procédure d'application du modèle sur cette étude de cas, puis d'étudier la contribution des éléments non-structuraux - ici des panneaux de façade préfabriqué - sur la raideur globale du bâtiment. Notre procédure consiste à estimer, pour chaque direction horizontale, les paramètres du modèle générique : la masse linéique (identique dans les deux directions), la rigidité de flexion globale $\mathbb{EI}$ et de la flexion interne $\mathcal{EI}$ calculés par les formules analytiques.

$$\mathcal{EI} = \sum_{murs} E_j I_j \qquad \mathbb{EI} = \mathcal{M}in\left(\sum_{murs} E_j A_j d_j^2\right)$$

Les rigidités en cisaillement de la cellule et des murs seront calculées par EF sur un modèle d'étage centré sur un plancher. Les conditions statiques aux limites appliquées aux modèles permet de déterminer ces deux derniers paramètres. celles-ci sont rappelées ci-dessous :

(i) Pour calculer la rigidité en cisaillement de la cellule K :

- le centre de gravité d'un mur est bloqué en translation dans toutes les directions, les centres de gravité des autres murs étant bloqués en translation verticale uniquement,
- les déplacements opposés $\Delta V/2$ et $-\Delta V/2$ sont imposés aux deux extrémités des murs.
- les conditions périodiques sont appliquées sur ces deux extrémités des murs.

Puis, la rigidité est déduite par la somme des efforts tranchants des murs :

$$\sum T_m = -K\frac{\Delta V}{\ell_m}$$

(ii) Pour calculer la rigidité en cisaillement des murs $\mathcal{K}_m$:

- les planchers sont enlevés du modèle d'étage,
- la base des murs est encastrée,
- le déplacement ΔV est appliqué à l'extrémité supérieure des murs,
- la condition périodique est appliqué aux deux extrémités.

Cette dernière méthode néglige le gauchissement des sections de voiles, et surestime donc la valeur réelle de cette rigidité.

Une fois tous les paramètres calculés, la résolution analytique des modèles génériques nous fournit les valeurs de fréquence propre du bâtiment. En parallèle, un modèle Eléments Finis du bâtiment entier est réalisé pour estimer directement les fréquences modales.

Les valeurs obtenues par les deux approches (calcul EF direct et modèles théoriques) peuvent ainsi être comparées. D'autre part, l'étude adimensionnelle (cf. le domaine de validité fig. 2.4 p. 31) peut être utilisée pour déterminer le modèle simplifié représentatif du bâtiment. Ce modèle peut aussi être identifié directement à partir des ratios de fréquences propres du calcul éléments finis.

3.2 Modélisation de bâtiments

3.2.1 Bâtiments modélisés

L'idée de cette partie est de tester l'efficacité des modèles génériques et de la procédure d'estimation des paramètres sur des bâtiments réalistes. Pour cela, nous avons choisi un bâtiment de référence et à partir de sa structure d'étage, considéré toute une série de bâtiments en faisant varier uniquement le nombre de niveaux. Ainsi, c'est toute une gamme de comportements différents qui deviennent accessibles pour cette étude : le fait de faire varier l'élancement modifie en effet les contrastes entre les différents mécanismes et leur prédominance ou non dans le comportement final.

Le bâtiment de référence de cette étude est un bâtiment HLM (désigné comme le “bâtiment C” dans la thèse de S. Hans [Hans, 2002]). Il a été l'objet d'une campagne expérimentale avant et pendant sa démolition. Il était situé à Vaulx-en-Velin (69120) et a été construit au milieu des années 1970. Il possèdait 8 niveaux (R+7) de dimensions en plan de 30 m de longueur par 14 m de largueur, et de 2,7m de hauteur d'étage. La géométrie est donc relativement simple, rectangulaire avec deux escaliers de secours extérieurs. D'un point de vue structurel, le bâtiment est essentiellement constitué de murs-voiles alignés dans la direction transversale et de planchers en béton armé, le tout coulé en place. Dans la direction longitudinale, il n'y a que deux voiles de la cage d'ascenseur. Cependant, dans cette direction, il y avait les panneaux de façade préfabriqués en béton armé assurant une bonne partie du contreventement longitudinal. Leur rigidité est abordée dans l'Eurocode 8 mais elle est souvent négligée dans le dimensionnement. Leur contribution à la rigidité du bâtiment sera examinée dans la section suivante en comparant avec les résultats de la mesure in-situ. Dans cette section, nous ne distinguons pas ces deux types d'éléments, un seul matériau est considéré et les connections sont supposées parfaitement rigides.

Nous nous appuyons donc sur le plan d'étage courant pour constituer la série de bâtiments de structure identique, avec un nombre détage croissant : de 5, 8, 10, 15, 20, 25, 30 et 35 niveaux. Le module d'Young du matériau est pris à 30 GPa, la masse volumique à 2 300 kg/m^3 et le coefficient de Poisson à $\nu = 0,22$.

3.2.2 Méthodes d'étude adoptées

L'étude est réalisée en double approche :
(i) l'approche théorique proposée avec les deux modèles génériques,
(ii) une modélisation numérique par Eléments Finis sur chaque bâtiment complet.

Les modèles des bâtiments sont supposés encastrés parfaitement au niveau du rez-de-chaussée et libre en tête.

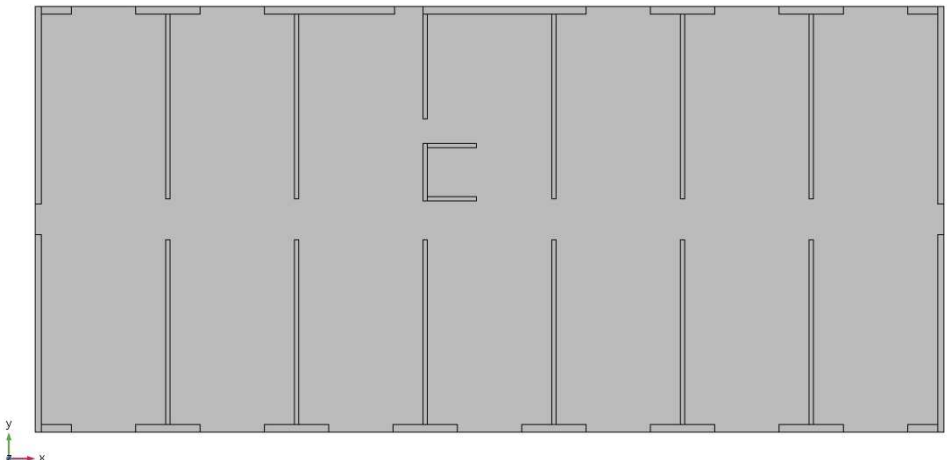


FIGURE 3.4 – Plan d'un étage courant

Nous nous intéressons aux différences entre les valeurs propres des fréquences et les ratios des fréquences des modèles continus par rapport au modèle éléments finis. Ces fréquences propres peuvent être obtenues par les différences logiciels

de simulation et de calcul dynamique, dans notre étude, nous utilisons le logiciel COMSOL multiphysics. Ce logiciel est utilisé aussi pour faire le modèle d'un étage et calculer la rigidité en cisaillement K de la cellule et la rigidité $\mathcal{K}_m$ des murs. Les valeurs propres permettent d'exprimer la rigidité de la structure qui est induite par les valeurs des paramètres. Puis, les ratios des fréquences permettent de donner une vue relative entre des mécanismes qui identifient le modèle continu équivalent. Cette idée est étudiée par [Michel and Guéguen, 2018], dans son travail, il utilise le modèle de Timoshenko pour interpréter le comportement d'un bâtiment. Cependant, ce modèle tient en compte le cisaillement et la flexion globale sans la flexion interne. Dans notre étude, tous les mécanismes sont pris en compte pour déterminer la précision du modèle.

Le grande nombre de bâtiments-test est utilisé pour aller à la limite de la comparaison avec un logiciel de calcul EF sur un ordinateur classique. Les premiers modèles (avec peu de niveaux) sont étudiés avec une même taille de maillage des éléments, ce qui permet d'analyser jusqu'à 30 étages maximum. Un maillage plus grossier est utilisé pour le modèle de 35 étages pour pouvoir continuer les études. Au-delà de 35 étages, nos moyens de calcul n'avaient pas la capacité de traiter le nombre trop important d'éléments et de degré de liberté.

D'autre part, comme il faut au moins deux valeurs de fréquence propre dans une direction pour analyser son comportement dynamique, le modèle de 5 étages est considéré comme la limite basse pour valider la méthode car le nombre maximal des modes étudiés par la méthode d'homogénéisation est égale à $N/3$, N étant le nombre d'étage. Les fréquences propres calculées par éléments finis dans les tableaux 3.2 à 3.5 constituent les références pour évaluer la précision des modèles continus. La géométrie symétrique en plan du bâtiment permet d'éliminer l'effet d'excentricité du centre de masse et centre de rigidité et donc d'éviter les modes de torsion. Les déformés modales sont les modes dans les deux directions découplées. Enfin, dans la direction transversale (y), le bâtiment présente une rigidité importante à cause des grands murs-voiles. Les deux premiers modes de cette direction sont calculables, cependant à partir du troisième mode, les fréquences sont suffisamment élevées pour exciter des modes locaux de planchers et de murs. Afin de demeurer dans les limites des hypothèses de l'étude, seuls les deux premiers modes de cette direction sont présentés et étudiés.

Les paramètres macroscopiques des deux modèles génériques - modèle Générique (équation 2.10) et modèle Générique Modifié avec $\mathcal{K}_m$ (équation 2.17) - sont calculées par la procédure précisée dans la section 3.1. Ils sont calculés pour une seule cellule considérée de mi-hauteur du niveau inférieur à mi-hauteur du niveau supérieur (cellule centrée sur le plancher). La masse linéique Λ, la rigidité de la flexion globale $\mathbb{EI}$ et la flexion interne $\mathcal{EI}$ sont déterminées par calcul simple directement à partir des plans sur un tableau EXCEL. Pour la rigidité en cisaillement de la cellule K et des murs $\mathcal{K}_m$, il nous faut utiliser le modèle éléments finis d'une cellule avec les conditions aux limites correspondantes précisées dans la section précédentes. La déformation de la cellule sous les conditions aux limites sont présentés dans la figure 3.5 pour le calcul de rigidité en cisaillement de la cellule

Caractéristiques du béton			
$\rho = 2\ 300\ kg/m^3$		E = 30 000 MPa	$\nu = 0,22$
Rigidités		Direction longitudinale (x)	Direction transversale (y)
$\mathbb{EI}$	$(MN.m^2)$	64 943 816	17 620 170
$\mathcal{EI}$	$(MN.m^2)$	390 922	2 804 103
$\mathcal{K}_m$	(MN)	63 582	168 587
K	(MN)	1 283	8 446
$\mathcal{K}_p$	(MN)	1309	9312
Masse linéique (kg/m)		104 234	
c		6943	286
γ		0,006	0,159
χ		0,021	0,055

TABLE 3.1 – Valeurs des caractéristiques macroscopiques d'un niveau

et la figure 3.6 pour le calcul de rigidité en cisaillement des murs. Les paramètres macroscopiques de la structure dans les deux directions en plan sont résumées dans le tableau 3.1. Les fréquences propres des calculs éléments finis, des modèles génériques et des modèles génériques modifiés et les écarts relatifs par rapport aux calculs éléments finis sont dans les tableaux de 3.2 au 3.5.

5 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	5,060	*1*	6,571	*1*	+29,86	6,022	*1*	+19,00
2	19,173	*3,79*	38,000	*5,78*	+98,19	26,245	*4,36*	+36,88

8 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	2,554	*1*	2,894	*1*	+13,30	2,773	*1*	+8,54
2	10,233	*4,01*	15,279	*5,28*	+49,31	12,726	*4,59*	+24,36
3	21,080	*8,25*	41,387	*14,30*	+96,33	29,178	*10,52*	+38,42

10 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	1,879	*1*	2,020	*1*	+7,45	1,957	*1*	+4,12
2	7,480	*3,98*	10,027	*4,96*	+34,04	8,836	*4,52*	+18,12
3	15,810	*8,41*	26,711	*13,23*	+68,95	20,724	*10,59*	+31,08

15 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	1,074	*1*	1,103	*1*	+2,70	1,083	*1*	+0,79
2	4,128	*3,84*	4,814	*4,36*	+16,61	4,519	*4,17*	+9,46
3	8,916	*8,30*	12,209	*11,07*	+36,93	10,683	*9,86*	+19,81

TABLE 3.2 – Fréquences propres dans la direction longitudinale (x) selon le calcul EF (référence) et les deux modèles Génériques, et écarts relatifs

20 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,733	*1*	0,741	*1*	+1,10	0,731	*1*	-0,26
2	2,714	*3,70*	2,959	*3,99*	+9,06	2,846	*3,89*	+4,90
3	5,811	*7,92*	7,124	*9,61*	+22,59	6,560	*8,97*	+12,88

25 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,548	*1*	0,551	*1*	+0,57	0,546	*1*	-0,49
2	1,972	*3,60*	2,075	*3,76*	+5,25	2,020	*3,70*	+2,45
3	4,150	*7,57*	4,760	*8,63*	+14,71	4,498	*8,24*	+8,39

30 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,433	*1*	0,436	*1*	+0,50	0,432	*1*	-0,36
2	1,526	*3,52*	1,576	*3,62*	+3,23	1,544	*3,58*	+1,15
3	3,155	*7,28*	3,467	*7,96*	+9,89	3,325	*7,70*	+5,39

35 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,365	*1*	0,358	*1*	-1,87	0,356	*1*	-2,56
2	1,257	*3,45*	1,260	*3,52*	+0,21	1,240	*3,49*	-1,38
3	2,538	*6,96*	2,678	*7,48*	+5,52	2,593	*7,29*	+2,16

TABLE 3.3 – Fréquences propres dans la direction longitudinale (x) *(continu)*

5 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	12,851	*1*	17,422	*1*	+35,57	14,160	*1*	+10,19

8 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	6,505	*1*	7,542	*1*	+15,94	6,789	*1*	+4,36
2	24,334	*3,74*	40,693	*5,40*	+67,23	27,631	*4,07*	+13,55

10 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	4,784	*1*	5,179	*1*	+8,27	4,797	*1*	+0,27
2	18,570	*3,88*	26,598	*5,14*	+43,23	20,003	*4,17*	+7,72

15 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	2,612	*1*	2,689	*1*	+2,98	2,575	*1*	-1,40
2	10,426	*3,99*	12,564	*4,67*	+20,51	10,756	*4,18*	+3,17

TABLE 3.4 – Fréquences propres dans la direction transversale (y) selon le calcul EF (référence) et les deux modèles Génériques, et écarts relatifs

20 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	1,680	*1*	1,703	*1*	+1,35	1,655	*1*	-1,52
2	6,752	*4,02*	7,537	*4,43*	+11,62	6,822	*4,12*	+1,02

25 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	1,180	*1*	1,190	*1*	+0,90	1,166	*1*	-1,14
2	4,790	*4,06*	5,132	*4,31*	+7,15	4,780	*4,10*	-0,21

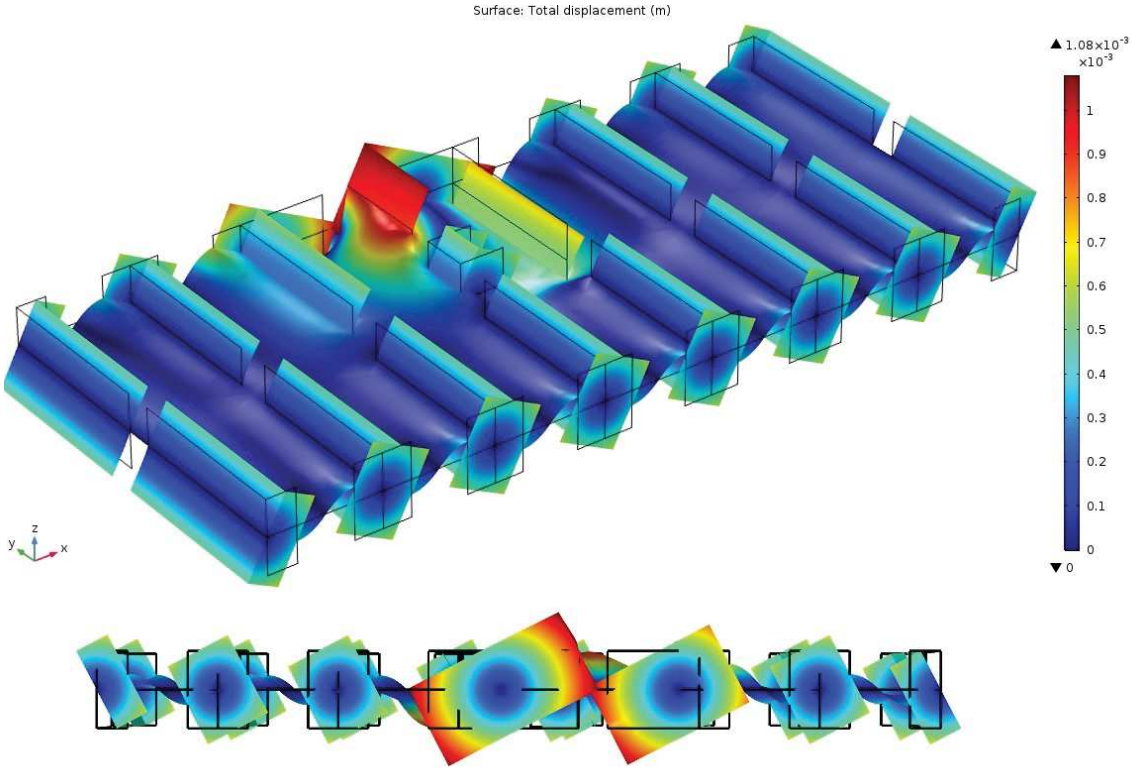
30 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,875	*1*	0,883	*1*	+0,89	0,870	*1*	-0,63
2	3,612	*4,13*	3,776	*4,28*	+4,54	3,577	*4,11*	-0,98

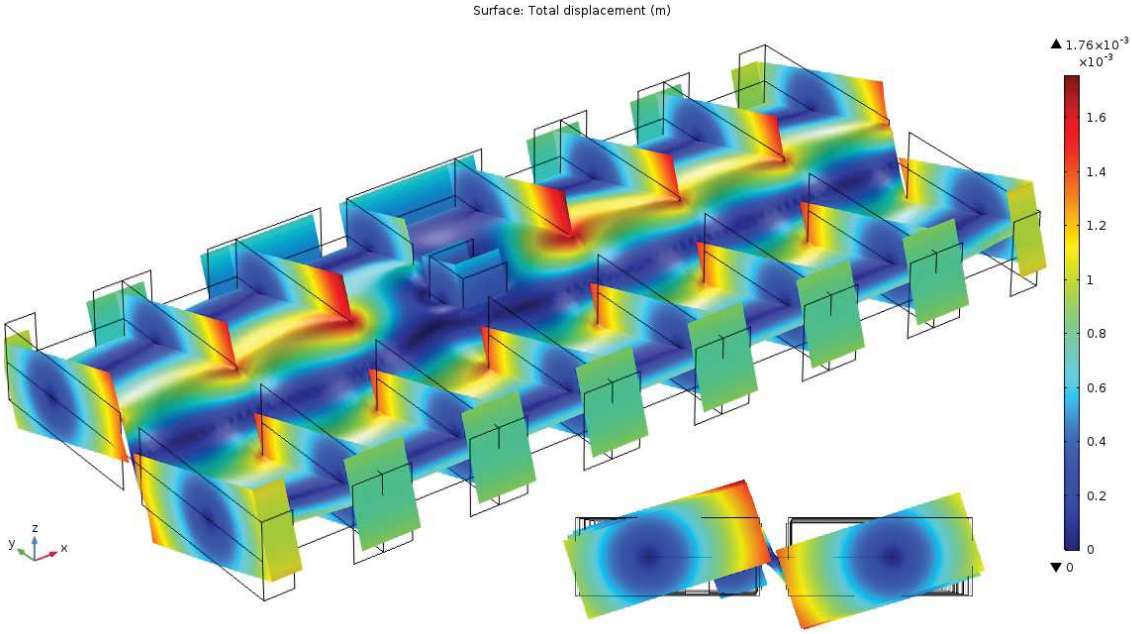
35 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique			Générique modifié $\mathcal{K}_m$		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	diff (%)
1	0,686	*1*	0,683	*1*	-0,52	0,675	*1*	-1,67
2	2,907	*4,23*	2,925	*4,28*	+0,65	2,801	*4,15*	-3,62

TABLE 3.5 – Fréquence propre dans la direction transversale (y) *(continu)*

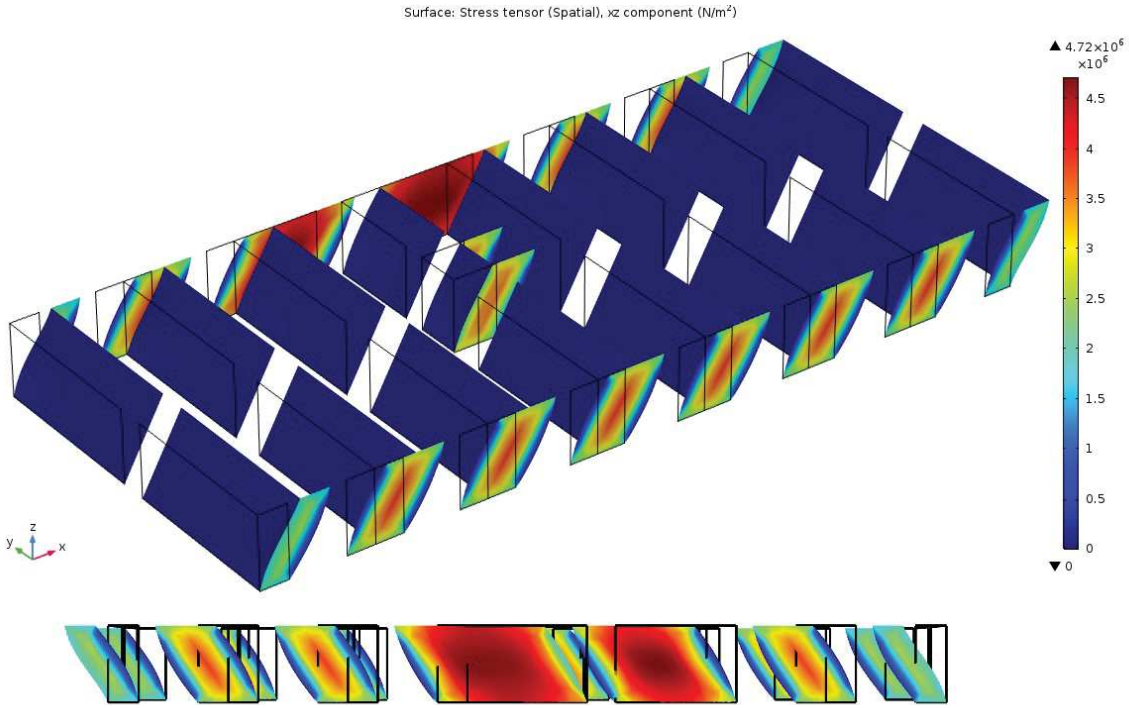


(a) dans la direction longitudinale (x)

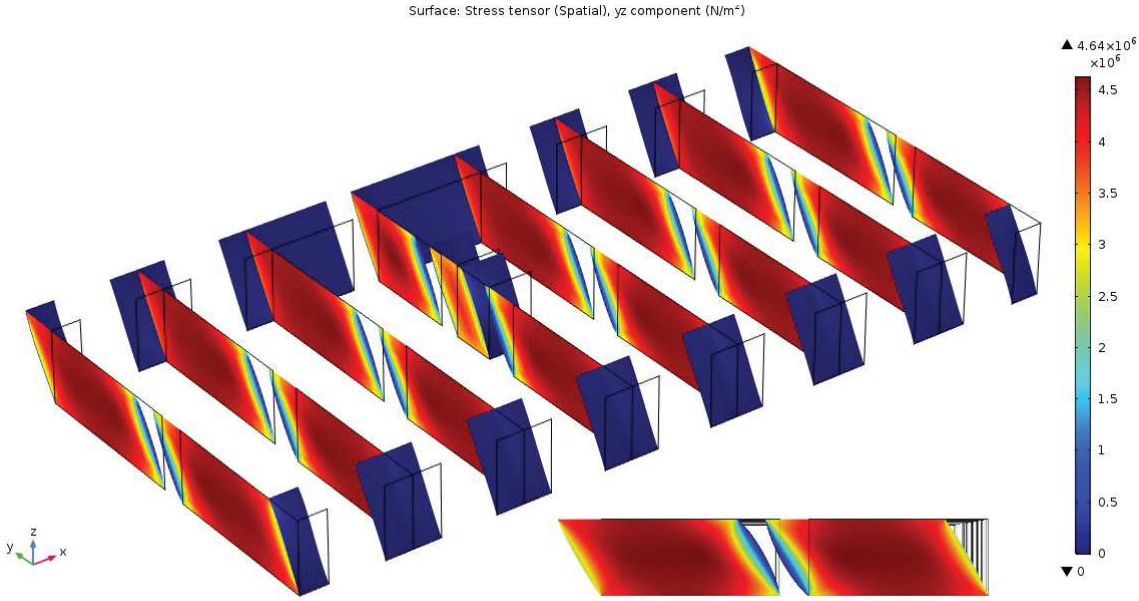


(b) dans la direction transversale (y)

FIGURE 3.5 – Calcul de la rigidité K



(a) dans la direction longitudinale (x)



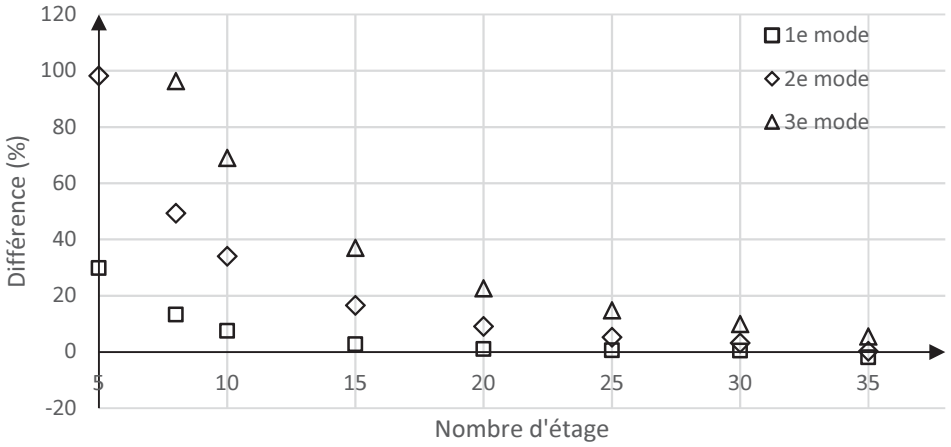
(b) dans la direction transversale (y)

FIGURE 3.6 – Calcul de la rigidité $\mathcal{K}_m$

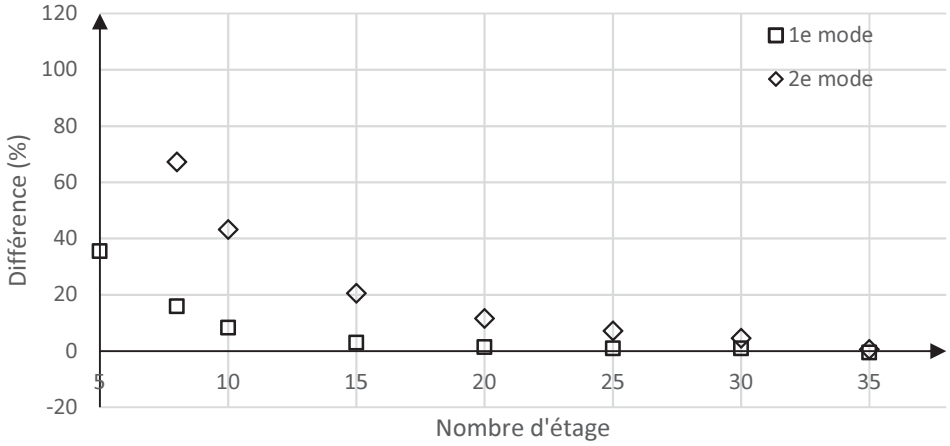
3.2.3 Résultats et commentaires :

Commentaires sur les fréquences

Le premier commentaire porte sur les valeurs des fréquences propres des deux modèles génériques par rapport aux fréquences propres des modèles éléments finis. Les figures 3.7 et 3.8 montrent que la précision des deux modèles augmente fortement avec le nombre croissant N de cellules, en lien avec la diminution du ratio d'échelle $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2N}$. Et comme attendu également, la précision diminue avec l'ordre croissant k du mode pour un nombre fixe de cellule. Ce phénomène est prévisible car la séparation d'échelle diminue (le ratio d'échelle augmentant : $\varepsilon_k = (2k-1)\varepsilon_1$) pour les modes supérieurs pour lesquels la longueur caractéristique L_k diminue fortement selon la relation : $L_k = \frac{L_1}{2k-1}$.



(a) dans la direction longitudinale (x)

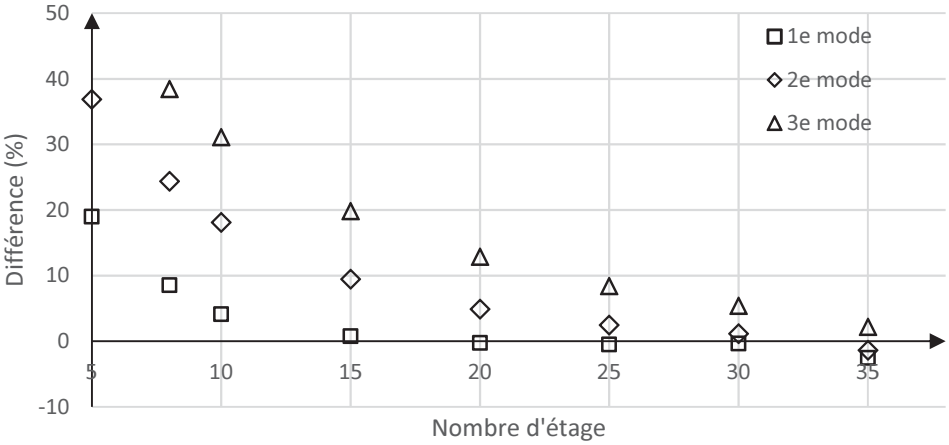


(b) dans la direction transversale (y)

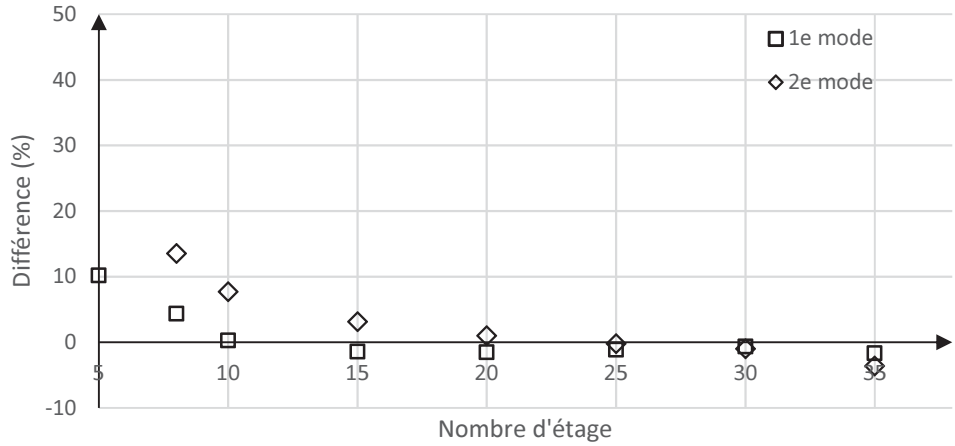
FIGURE 3.7 – Écarts relatifs des fréquences du modèle Générique par rapport aux calculs éléments finis

Les écarts relatifs des fréquences fondamentales données par le modèle de poutre Générique avec celles du calcul EF sont du même ordre de grandeur dans les

deux directions (environ 15% pour la structure de 8 niveaux, 8% pour 10 niveaux, 1% pour 20 niveaux ...) et ces différences deviennent très petites (inférieur de 1 %) pour les structures de plus de 20 niveaux. La précision des modèles homogénéisés est en théorie de l'ordre de ε (cf. tableau 3.7 p.73), et si l'on compare les écarts relatifs calculés sur le modèle Générique, on observe bien pour les premières structures (de 5 à 8 niveaux) un tel écart sur le fondamental comme sur les modes supérieurs. Puis avec le nombre croissant de niveaux, l'écart diminue plus vite que le ratio d'échelle correspondant, avec par exemple pour 20 niveaux, des écarts pour les deux premiers modes respectivement de l'ordre de 1 et 10% pour des ratios de 8 et 19%. On a donc une très bonne convergence des modèles.



(a) dans la direction longitudinale (x)



(b) dans la direction transversale (y)

FIGURE 3.8 – Écarts relatifs des fréquences du modèle Générique Modifié (ajouté $\mathcal{K}_m$) par rapport aux calculs éléments finis

Le modèle de poutre Générique Modifiée par la prise en compte du cisaillement des murs $\mathcal{K}_m$ permet d'augmenter notablement la précision du modèle continu. Par contre, l'effet de cette correction est différent entre les deux directions. La correction est plus efficace dans la direction transversale (y). Cela s'explique, car les murs sont très peu élancés dans cette direction par rapport à la direction longitudinale.

Nombre de niveaux	5	8	10	15	20	25	30	35
ε_1	0,31	0,20	0,16	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04
ε_2	0,94	0,59	0,47	0,31	0,24	0,19	0,16	0,13
ε_3	1,57	0,98	0,79	0,52	0,39	0,31	0,26	0,22

TABLE 3.6 – Valeurs des paramètres d'échelle pour les trois premiers modes en fonction du nombre de cellules et pour les conditions aux limites encastrées-libre

Dans celle-ci, seul un petit nombre d'éléments peu élancés sont présents, rendant l'effet correcteur moins important.

Du point de vue de la taille de la structure, la correction du modèle Générique Modifée est plus significative pour les structures de moins de 10 niveaux pour les fréquences fondamentales. Cela s'explique car le cisaillement des murs à l'échelle locale est plus important dans les structures de moyenne hauteur. Et il est moins important dans les structures de plus grande hauteur. Par contre, la correction est très importantes pour les modes supérieures. Ces phénomènes sont à relier à la longueur d'onde des modes. Plus ceux-ci se rapprochent de la taille d'un niveau, plus l'élancement des éléments sera faible, favorisant l'importance du cisaillement.

On constate pour les deux modèles une très bonne convergence avec le calcul EF pour un nombre de niveaux "suffisants", ce qui apporte un élément de validation de ces approches homogénéisés pour le calcul dynamique des bâtiments. D'un point de vue absolu, les fréquences calculées sont proches, même avec un faible nombre de niveaux et dans un contexte applicatif, les écarts observés ne sont pas nécessairement rédhibitoires.

Enfin, pour les structures avec plus de 30 niveaux, les résultats du modèle Générique sont suffisamment précis, ce qui signifie que les 3 mécanismes de base du modèle Générique sont suffisants pour décrire le comportement dynamique global (du moins pour les premiers modes).

Une dernière remarque porte sur le modèle de 35 niveaux qui n'est pas homogène par rapport aux autres structures. Les différences de la fréquence des structures diminuent avec l'augmentation du nombre d'étage des structures. Ces différences sont positives sauf celle de 35 niveaux. Cela provient sans doute de la taille du maillage du modèle éléments finis de cette structure de 35 niveaux par rapport aux autres structures. Les modèles de la structure de moins de 35 étages ont un maillage de même taille. Pour la structure la plus grande, en raison de la capacité limitée de calcul, la taille des éléments de maillage est agrandie. Ce changement modifié l'homogénéité des résultats. Même si ces différences sont toujours très faibles et négligeables, cela confirme l'impact du maillage sur les résultats de l'analyse par éléments finis. Cela montre également l'intérêt des modèles par rapport à un calcul purement numérique, le nombre de celllules ne constituant pas une limite : cela devient même un atout puisque la précision s'améliore en théorie avec celui-ci.

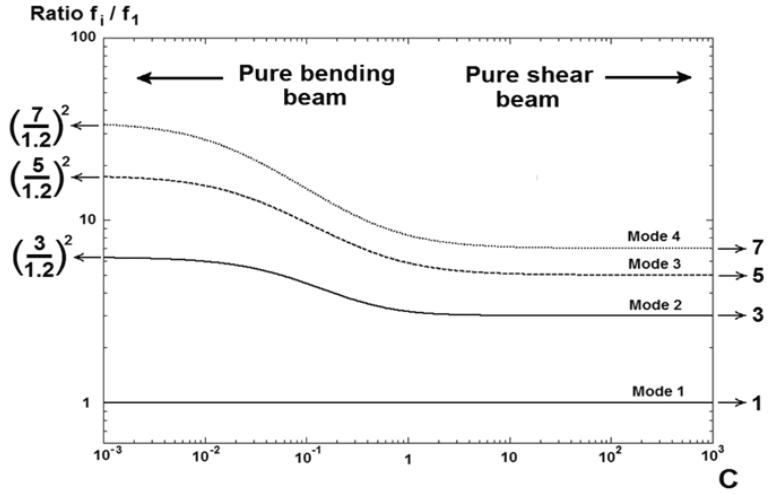


FIGURE 3.9 – Distribution des ratios de fréquences propres de la poutre de Timoshenko en fonction du paramètre C ([Boutin et al., 2005])

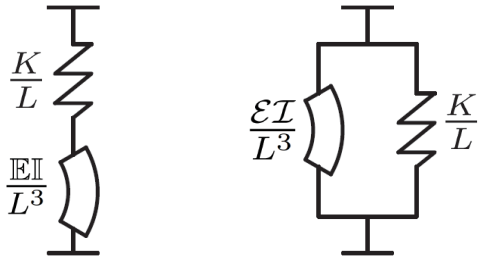
Commentaires sur les Ratios de fréquence

En second lieu, nous nous intéressons à la précision des ratios des fréquences des modèles génériques. Ces ratios sont les indices qui identifient l'importance relatives des différents mécanismes du comportement global. Dans le domaine élastique et en conditions encastrée-libre, ces ratios de la poutre de cisaillement suivent la suite des nombres impairs (1 ; 3 ; 5 ; ...) et ceux d'une poutre de flexion pure sont (1 ; 6,25 ; 17,36 ; ...) ; pour les autres modèles qui associent la flexion et le cisaillement comme la poutre de Timoshenko, les ratios des fréquences ont des valeurs intermédiaires. Pour la poutre de Timoshenko (incluant les 2 mécanismes de cisaillement et de flexion globale), la distribution des fréquences propres dépend de l'importance du cisaillement par rapport à la flexion globale, quantifié par le paramètre adimentionnel C. Pour rappel $C = \dfrac{\mathbb{EI}}{K\,L^2}$. Ce paramètre dépend de la longueur d'onde L et donc du nombre d'étage de la structure (et du mode considéré). En pratique, si le nombre de niveaux de la structure est faible, le modèle dégénère en une poutre de cisaillement, et si le nombre du niveaux est important, le cisaillement peut être négligé et le modèle dégénère en une poutre de flexion. Par conséquent, le ratio des fréquences augmente avec le nombre de niveau. Cette étude est développée par [Boutin et al., 2005], [Hans et al., 2005] et rappelée dans [Hans et al., 2007], [Michel et al., 2007] pour interpréter les mesures in-situ sur les bâtiments existants et estimer ses caractéristiques.

Pour les poutres Sandwich (incluant également 2 mécanismes de cisaillement et de flexion locale), les commentaires sur les ratios sont identiques, par contre, l'effet du nombre d'étages est inverse : un faible nombre de niveaux conduit à une poutre de flexion tandis qu'un nombre important de niveaux favorise le cisaillement.

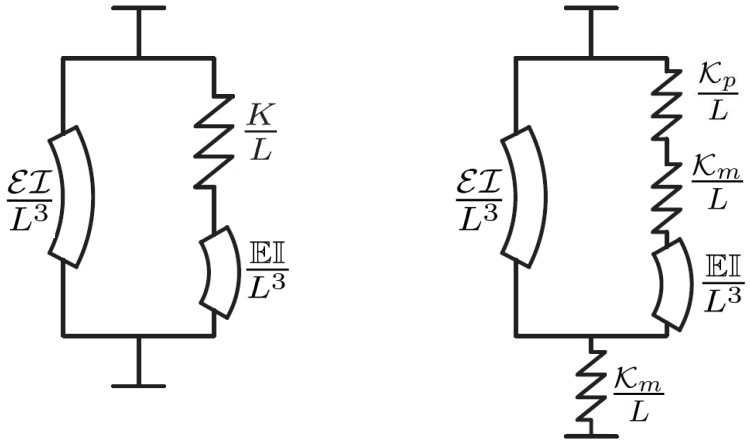
Pour expliquer ces deux types de comportement antagonistes, on peut schématiser les mécanismes sous forme analogique à l'aide de ressorts en série ou

parallèle, comme initialement suggéré par C. Boutin. Dans cette représentation (figure 3.10), les mécanismes sont représentés par des ressorts de rigidités K/L pour le cisaillement et de $\mathbb{EI}/L^3$ et $\mathcal{EI}/L^3$ respectivement pour la flexion globale et interne. La rigidité de cisaillement de la cellule K/L peut elle-même être représentée par deux ressorts en série de rigidités $\mathcal{K}_m/L$ et $\mathcal{K}_p/L$ relatives aux murs et planchers.



(a) Timoshenko (b) Sandwich

FIGURE 3.10 – Représentation analogique du fonctionnement des poutres de Timoshenko et Sandwich



(c) Générique (d) Générique Modifié

FIGURE 3.11 – Représentation analogique du fonctionnement de deux modèles de poutre Génériques.

Dans le cas Timoshenko, quand il existe un fort contraste, c'est le ressort le plus souple qui s'exprime, tandis que dans le cas Sandwich, c'est le plus rigide. Comme la longueur L intervient, deux types d'évolution peuvent survenir : (1) en fonction du nombre de niveaux et (2) en fonction du degré du mode.

— quand le nombre de niveau augmente, L augmente, favorisant la domination de la flexion dans le modèle Timoshenko et du cisaillement dans le modèle Sandwich,
— c'est l'inverse pour les modes : quand le degré du mode augmente, L diminue, favorisant la domination du cisaillement dans le modèle Timoshenko et de la flexion dans le modèle Sandwich.

Pour le modèle Générique, l'évolution de ces ratios dépend des contrastes entre les 3 mécanismes, quantifiés par les deux paramètres adimentionnels : $C = \mathbb{EI}/KL^2$ et $\gamma = \mathcal{EI}/\mathbb{EI}$. L'ensemble des comportements approchés est rappelé sur la figure 3.13.

Enfin, pour le modèle Générique Modifié, l'évolution des comportements approchés est plus complexe, car un troisième paramètre évaluant le contraste de rigidité entre les murs et les planchers est à prendre en compte. La représentation des domaines de validité est plus complexe, car en trois dimensions. On pourra se référer aux représentations pages 43, 45 et 46. Pour les deux modèles génériques, il est également possible de construire des modèles analogiques de ressorts, ce qu'on trouve dans la thèse de C. Chesnais et qu'on a reproduit en figure 3.11. On peut constater que le modèle Générique combine en parallèle les mécanismes de Timoshenko et de la poutre Sandwich, et que le modèle Générique Modifié adjoint en plus en série la rigidité de cisaillement des murs.

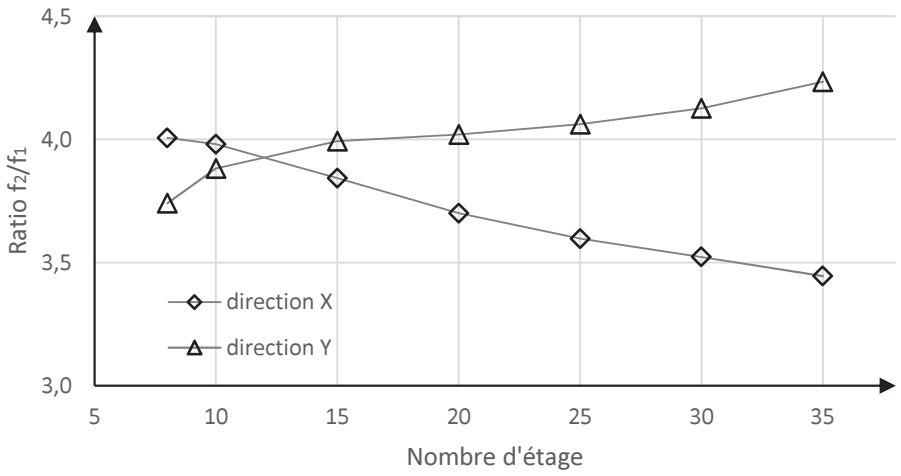


FIGURE 3.12 – Ratios de fréquence f_2/f_1 du calcul éléments finis, pour les deux directions longitudinales et transverses

En se basant sur les différents cadres évoqués, nous nous intéressons aux ratios de fréquence dans les deux directions des structures-tests afin de déterminer leur comportement représentatif et l'évolution de ces comportements en fonction du nombre d'étage. Si l'on regarde l'évolution des ratios dans les deux directions pour les calculs éléments finis en fonction du nombre de niveaux (figure 3.12), on peut observer que, dans la direction transversale (y), celle-ci semble conforme à celui d'une poutre de Timoshenko, le ratio augmentant avec le nombre d'étage. Initialement proche de 3,5 pour 8 niveaux, le ratio croît régulièrement jusqu'à 4,3, signant ainsi un effet croissant d'un mécanisme de flexion comme dans un modèle de Timoshenko. Par contre, dans la direction longitudinale (x), les ratios de fréquence diminuent quand le nombre d'étages augmente. Cette évolution s'interprète cette fois comme un effet croissant d'un mécanisme de cisaillement typique d'un modèle Sandwich.

On utilise maintenant le cadre de la carte de validité des modèles de poutres (figure 3.13) issue du modèle Générique. Les différentes positions des comportements pour les structures de 8 à 35 niveaux, évaluées à l'aide des paramètres C et γ (cf. Tableaux 3.8 et 3.9), démarre clairement pour les deux directions dans la zone 'Poutre Sandwich' puis termine pour 35 niveaux dans la zone 'Poutre Générique'. On devrait en théorie, si l'on suit le modèle Générique, avoir une diminution des ratios dans les deux cas. Or, si c'est bien le cas dans la direction longitudinale, ce ne l'est pas pour la direction transverse. Le modèle Générique peine donc à expliquer le comportement transverse, ce qui en soi n'est pas très surprenant, étant donnée la dimension importante des deux murs-voiles dans cette direction, impliquant un fort effet de cisaillement partiellement pris en compte par ce modèle.

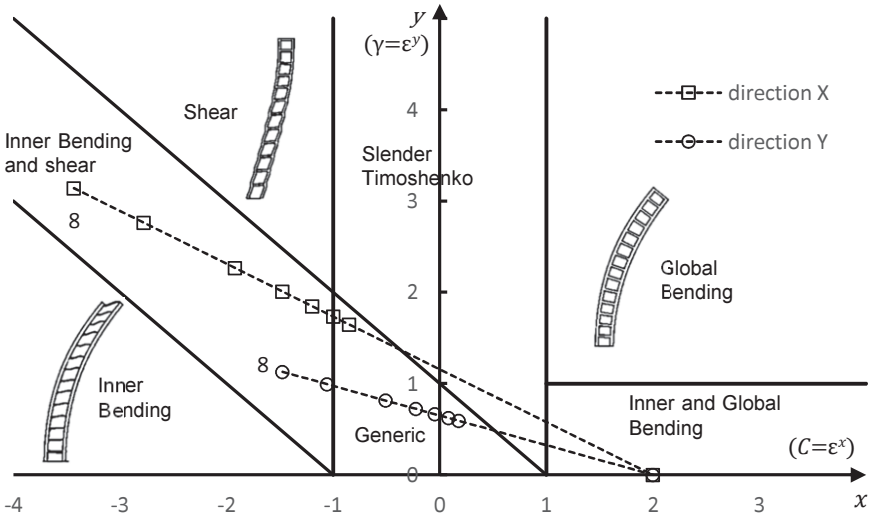


FIGURE 3.13 – Domaine de validité des modèles selon le modèle Générique

Nombre de niveaux	5	8	10	15	20	25	30	35
ε_1	0,31	0,20	0,16	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04
ε_2	0,94	0,59	0,47	0,31	0,24	0,19	0,16	0,13
ε_3	1,57	0,98	0,79	0,52	0,39	0,31	0,26	0,22

TABLE 3.7 – Valeurs des paramètres d'échelle pour les trois premiers modes en fonction du nombre de cellules et pour les conditions aux limites encastrées-libre

Nombre de niveaux	5	8	10	15	20	25	30	35
$\underline{C}$	-5,64	-3,43	-2,78	-1,92	-1,48	-1,20	-1,00	-0,85
$\underline{\gamma}$	4,42	3,14	2,76	2,27	2,01	1,85	1,73	1,65
$\underline{\chi}$	3,35	2,39	2,10	1,72	1,53	1,40	1,32	1,25

TABLE 3.8 – Valeurs des exposants des paramètres en fonction du nombre de niveaux pour la direction longitudinale (x)

Nombre de niveaux	5	8	10	15	20	25	30	35
$\underline{C}$	-2,89	-1,47	-1,06	-0,51	-0,22	-0,04	0,08	0,18
$\underline{\gamma}$	1,59	1,13	0,99	0,81	0,72	0,66	0,62	0,59
$\underline{\chi}$	2,54	1,81	1,59	1,30	1,16	1,06	1,00	0,95

TABLE 3.9 – Valeurs des exposants des paramètres en fonction du nombre de niveaux pour la direction transversale (y)

avec $\quad C = \varepsilon_1^{\underline{C}} \qquad \gamma = \varepsilon_1^{\underline{\gamma}} \qquad \chi = \varepsilon_1^{\underline{\chi}}$

On se tourne maintenant vers le cadre théorique issu du modèle Générique Modifié en se référant aux 'cartes' de la figure 2.10 p.45). Le positionnement sur ces 'cartes' est plus délicat, puisqu'il faut passer de l'une à l'autre (en en ajoutant une intermédiaire pour prendre en compte la valeur $\underline{\chi} = 2$). Pour la direction longitudinale, pas de changement apparent avec toujours une trajectoire essentiellement dans la zone 'Poutre Sandwich' pour finir dans la zone 'Générique' (pour 35 niveaux). Par contre, pour la direction transverse, un changement notable est à signaler car la zone située en bas à gauche est maintenant occupée par un modèle de poutre de Timoshenko-L (combinant le mécanisme de cisaillement des murs et de Flexion Locale - d'où le suffixe 'L'). Et il s'avère que les points relatifs aux structures 5 et 8 niveaux sont situés dans cette zone ... Cela permet d'expliquer qualitativement l'évolution des ratios de fréquence observé pour la direction transverse, similaire à celle d'une poutre de Timoshenko.

Pour finir sur l'évolution des comportements et la précision des différents modèles, on a représenté en figure 3.14 l'ensemble des ratios issus des calculs précédents en fonction du seul paramètre C. Les résultats relatifs à la direction longitudinale 'x' figurent à droite du graphe (en rouge pour les calculs EF, en noir pour le modèle Générique Modifié et en bleu pour le modèle Générique) et ceux relatifs à la direction transversale 'y' figurent au centre du graphe (mêmes couleurs sauf pour le modèle Générique en vert). Les lignes continues (verte et bleue) représentent l'ensemble des ratios possibles avec le modèle Générique. Comme l'axe des abscisses représente $C = \mathbb{EI}/KL^2$, quand le nombre de niveaux augmente, on se déplace de la droite vers la gauche.

Comme remarqué précédemment, pour la direction longitudinale, les deux modèles Génériques donnent le même type d'évolution, avec bien sûr une meilleure précision du modèle Generique Modifié pour les structures avec peu de niveaux. Pour la direction transverse, toujours quand le nombre de niveaux est faible, le modèle Générique donne clairement une évolution erronée, tandis que le modèle Generique Modifié donne les bonnes tendances, toujours avec une bien meilleure précision. Par contre, quand le nombre de niveaux devient 'suffisant', les écarts s'estompent rapidement.

En somme, le modèle Générique Modifié s'avère utile pour décrire le comportement de structures avec 'peu' de niveaux et contenant des éléments peu élancés

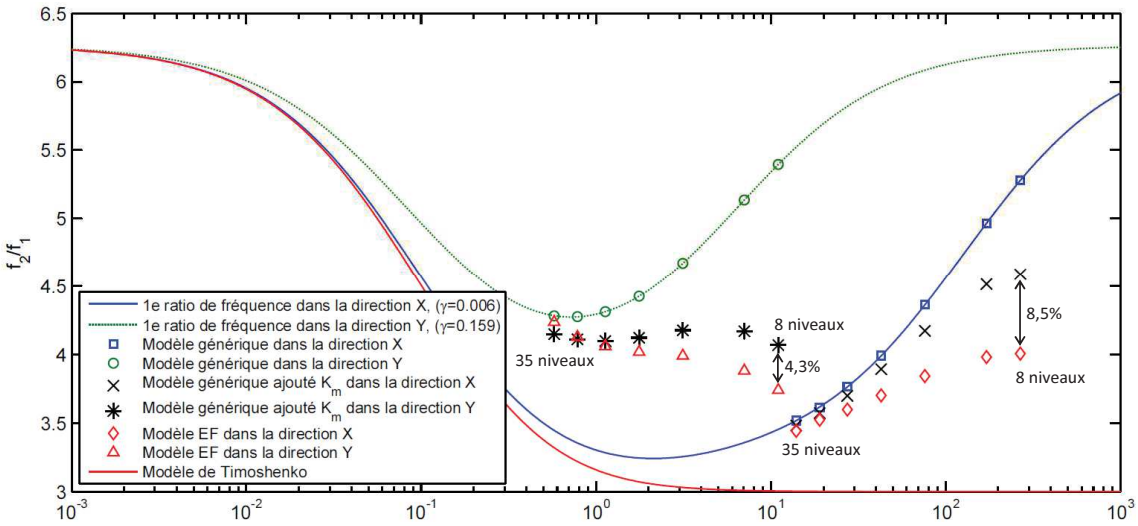


FIGURE 3.14 – Comparaison des ratios f_2/f_1 des calculs EF avec ceux des modèles génériques et de modèles de Timoshenko.

de type mur ou voiles. Le modèle Générique est à réserver aux situations avec de nombreux niveaux. L'avantage de ces modèles est par contre de fournir un cadre de compréhension du fonctionnement dynamiques de telles structures, ce qui ouvre des voies intéressantes en matière de design pour les structures neuves ou de retrofit pour l'existant.

Une dernière remarque porte sur le modèle de Timoshenko, qu'on voit parfois être utilisé abusivement pour interpréter des calculs ou des mesures in situ. On voit sur la figure la courbe continue en rouge relative à ce modèle pour la direction longitudinale. Et hormis pour un nombre très important de niveaux pour lequel elle rejoint (vers la gauche) le modèle Générique, il n'est pas possible de l'utiliser pour l'interprétation des résultats sur cette structure (le commentaire serait le même pour l'autre direction).

3.3 Retour sur le bâtiment de référence

Dans cette section, on revient sur le bâtiment C original étudié dans [Hans, 2002]. Il possède 8 niveaux (R+7) et tous les étages sont construits selon le même plan, sans transparence mécanique au rez-de-chaussée. Le bâtiment réel possède deux escaliers aux deux extrémités pour les accès de secours. Ces deux escaliers sont préfabriqués et leur contribution à la raideur globale du bâtiment est négligeable, et n'apporte pas de changement des fréquences propres du modèle éléments finis. Donc, dans cette étude, nous ne les avons pas pris en compte dans les calculs et le modèle. Et puis, dans la salle commune, il existe des petits murs transversaux qui sont réunis dans l'étude précédente pour optimiser le maillage du modèle éléments finis complet, dans cette étude, nous les séparons comme dans le bâtiment réel. Les fréquences propres mesurées expérimentalement dans les deux directions horizontales sont indiquées dans le tableau 3.10. Il s'agit des fréquences obtenues

à partir des enregistrements sous bruit de fond après extraction de l'interaction sol-structure. Ces valeurs seront utilisées comme la référence pour analyser le comportement global de la structure réelle en tenant en compte la contribution des différents éléments.

	Longitudinal		Transversal	
	$f_i(Hz)$	ratio	$f_i(Hz)$	ratio
Mode 1	4,45	*1*	4,57	*1*
Mode 2	14,1	*3,17*	23.2	*5,08*
Mode 3	23,6	*5,3*		

TABLE 3.10 – Fréquences propres mesurées expérimentalement in situ

Sur le plan du bâtiment, il existe deux types d'éléments : les murs voiles de grande dimension coulée en place et les panneaux de façade en béton préfabriqué. Ces panneaux de façade sont situés sur les deux façades dans la direction longitudinale. Lors de la construction, ils ont été posés après le bétonnage de la structure portante. La qualité de la fixation n'est pas connue et on ne connaît pas non plus le couplage de ces panneaux avec les murs voiles. Dans la pratique de dimensionnement, leur rigidité est souvent négligées. Dans le premier temps, on a modélisé le bâtiment sans les panneaux de façade par éléments finis. Les résultats montrent une bonne estimation de la fréquence et des ratios dans la direction transversale. Par contre, dans la direction longitudinale, les fréquences sont beaucoup plus faibles que celles mesurées expérimentalement. En modifiant les caractéristiques du matériau, même si elles sont irréalistes, les fréquences dans les deux directions du modèle éléments finis ne s'approchent jamais de celles de la mesure. Ce problème pose la question du fonctionnement du bâtiment réel qui diffèrent par rapport au modèle éléments finis en prenant en compte la distribution des éléments non-porteurs. En plus, la mesure in-situ du bâtiment dans deux directions montre que la première fréquence est de même ordre de grandeur (autours de 4,5 Hz). Cela montre que les raideurs dans les deux directions du bâtiment sont du même ordre. Cette raideur dans la direction longitudinale ne peut pas être due au comportement multi-portique des voiles minces et des planchers. Donc, il est possible de penser à la raideur des panneaux de façade qui rigidifie le bâtiment dans la direction longitudinale.

En plus, à l'occasion de la démolition de ce bâtiment, [Hans, 2002] a suivi le changement de sa fréquence propre après la démolition de trois panneaux pleins en béton préfabriqué au premier et deuxième niveau. Son étude montre que cette démolition est équivalent à la perte de 30% de la rigidité du bâtiment dans la direction longitudinale (sur la base d'un modèle brochette). Cela confirme la contribution des éléments préfabriqué en façade à la rigidité globale du bâtiment.

Pour aller plus loin, on utilise dans cette étude le modèle Générique décrit par l'équation 2.10 avec trois mécanismes : le cisaillement de la cellule, la flexion interne et la flexion globale.

Comme il manque des informations sur le degré de couplage entre les panneaux de façade et les murs, la modélisation de cette liaison est compliquée. Une méthode simple pour tenir compte du travail des éléments non-porteurs est de minorer son module d'élasticité. Donc dans les modèles étudiés suivant, on distingue le module d'élasticité des éléments porteurs et celui des éléments de façade. Le deuxième est toujours moins important que le premier et parfois poussé dans des valeurs extrêmes. Cette valeur ne vient pas de la physique du matériau mais, *elle vient du degré de couplage entre les éléments*.

Premièrement, nous considérons que le panneau de façade se compose des éléments verticaux et des éléments horizontaux, donc la partie verticale du panneau de façade est considéré comme des murs et il peut contribuer aux trois mécanismes de la cellule, et la partie horizontale en haut et en bas n'assure que la distance entre les murs vertical, son rôle est comme le plancher et il contribue à la rigidité des planchers.

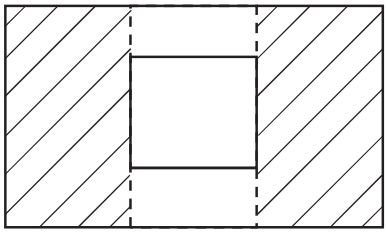


FIGURE 3.15 – Panneaux de façade

Pour étudier la contribution des éléments de façade dans le comportement du modèle par les trois mécanismes, nous effectuons une série de tests avec les différentes valeurs de module d'Young des éléments. Le module des éléments porteurs est pris entre 21 et 30 GPa et celui des éléments de façade est pris de 6 à 20 GPa. La rigidité de flexion interne et la flexion globale sont calculées par les formules analytiques à partir du plan de l'étage.

Pour calculer le cisaillement de l'étage, on applique la procédure proposé dans la section 3.1. Dans ce calcul, il faut regarder le fonctionnement des éléments pour déterminer les conditions aux limites du modèle. Premièrement, le mouvement est bien sûr piloté par les murs voiles coulés en place, les éléments de façade non-porteurs suivent ce mouvement. Et puis, la continuité des panneaux de façade entre les étages est faible, donc *le centre de gravité déterminé pour fixer la translation des murs sont déterminés par les murs porteurs et les conditions périodiques ne seront ajoutées qu'aux éléments porteurs*. Le déplacement ΔV et le résultant des efforts de cisaillement est appliqué et calculé sur tous les éléments.

Dans cette étude, nous nous intéressons aux valeurs de fréquence propre et le ratio de fréquence. La valeur de fréquence nous montre la raideur relative de bâtiment et le ratio nous indique le comportement du bâtiment et le modèle continu équivalent. Ces valeurs dans deux directions sont montrées dans les tableaux ci-

Direction longitudinale *(x)*								
		Murs porteurs						
Panneaux de façade		21		23		25		30	
	6	4,237	-4,79	4,249	-4,53	4,259	-4,29	4,282	-3,77
		13,530	-4,04	13,567	-3,78	13,602	-3,53	13,680	-2,98
		3,19	0,78	3,19	0,78	3,19	0,79	3,19	0,82
	7	4,555	2,35	4,568	2,65	4,579	2,91	4,604	3,47
		14,547	3,17	14,587	3,45	14,623	3,71	14,705	4,29
		3,19	0,80	3,19	0,78	3,19	0,78	3,19	0,79
	8	4,849	8,96	4,863	9,27	4,876	9,56	4,903	10,17
		15,490	9,86	15,532	10,16	15,571	10,43	15,656	11,03
		3,19	0,83	3,19	0,81	3,19	0,79	3,19	0,78
	10	5,380	20,90	5,397	21,28	5,412	21,62	5,444	22,34
		17,203	22,01	17,250	22,34	17,293	22,65	17,387	23,31
		3,20	0,91	3,20	0,87	3,20	0,84	3,19	0,80
	20	7,405	66,41	7,434	67,06	7,460	67,64	7,514	68,86
		23,803	68,81	23,874	69,32	23,939	69,78	24,077	70,76
		3,21	1,45	3,21	1,35	3,21	1,27	3,20	1,12

FIGURE 3.16 – Etude de variation de module d'Young (GPa) des éléments dans la direction longitudinale (x) - *Valeur en rouge : fréquences propres du modèle générique ; Valeur en bleu : ratio de fréquence ; valeur en noir : la différence des valeurs par rapport aux valeurs expérimentales*

Direction transversale *(y)*								
		Murs porteurs						
Panneaux de façade		21		23		25		30	
	6	4,440	-2,85	4,636	1,44	4,824	5,55	5,263	15,17
		23,139	-0,26	24,201	4,31	25,218	8,70	27,595	18,95
		5,21	2,66	5,22	2,83	5,23	2,98	5,24	3,28
	7	4,458	-2,45	4,654	1,84	4,842	5,94	5,281	15,55
		23,165	-0,15	24,227	4,43	25,243	8,81	27,620	19,05
		5,20	2,36	5,21	2,54	5,21	2,70	5,23	3,03
	8	4,475	-2,07	4,671	2,21	4,859	6,32	5,297	15,91
		23,189	-0,05	24,251	4,53	25,267	8,91	27,643	19,15
		5,18	2,07	5,19	2,27	5,20	2,44	5,22	2,79
	10	4,507	-1,38	4,703	2,91	4,890	7,01	5,329	16,60
		23,235	0,15	24,296	4,72	25,312	9,10	27,688	19,34
		5,16	1,55	5,17	1,77	5,18	1,96	5,20	2,35
	20	4,628	1,26	4,825	5,57	5,013	9,69	5,452	19,30
		23,410	0,91	24,472	5,48	25,489	9,87	27,865	20,11
		5,06	-0,35	5,07	-0,08	5,08	0,16	5,11	0,67

FIGURE 3.17 – Etude de variation de module d'Young (GPa) des éléments dans la direction transversale (y) - *Valeur en rouge : fréquences propres du modèle générique ; Valeur en bleu : ratio de fréquence ; valeur en noir : la différence des valeurs par rapport aux valeurs expérimentales*

dessus.

Premièrement, nous trouvons que l'ajout des panneaux de façade, même si leur raideur est faible (6 GPa), permet d'augmenter considérablement la valeur de la fréquence dans la direction longitudinale (x). Sa valeur est au moins de 4,2 Hz par rapport 2,6 Hz de la structure de 8 niveaux sans les bandeaux horizontaux de façade dans l'étude précédente (tableau 3.2). Cependant, la fréquence dans la direction transversale n'est pas modifié significativement. Puis ces valeurs varient

77 % dans la direction longitudinale et 23 % dans la direction transversale. Cela confirme que les panneaux de façade rigidifient le bâtiment dans la direction longitudinale et influence peu l'autre direction.

Deuxièmement, les résultats montrent une faible variation des ratios des modèles, elle est 0,6 % dans la direction longitudinale et 3 % dans l'autre direction. Cela montre que le comportement global du bâtiment est décidé par l'implantation des éléments dans le plan géométrie de l'étage.

Pour chercher les paramètres des matériaux, on se base sur la première fréquence propre et son premier ratio dans la direction longitudinale. Car dans cette direction, le renforcement des panneaux de façade à la rigidité du bâtiment est plus claire. Les paramètres optimisées des matériaux, les rigidités correspondantes sont résumées ci-dessous.

	Éléments porteurs	Éléments non-porteurs
Module d'Young (MPa)	23 000	7 000
Masse volumique (Kg/m^3)	2 300	1 900
Coefficient de Poisson	0,22	0,22

Rigidité	Direction longitudinale (x)	Direction transversale (y)
$\mathbb{EI}$ ($MN.m^2$)	40 034 488	7 398 988
$\mathcal{EI}$ ($MN.m^2$)	54 667	1 020 747
K (MN)	14 508	4 187
Masse linéique (t/m)	110	

TABLE 3.11 – Valeurs des paramètres macroscopiques

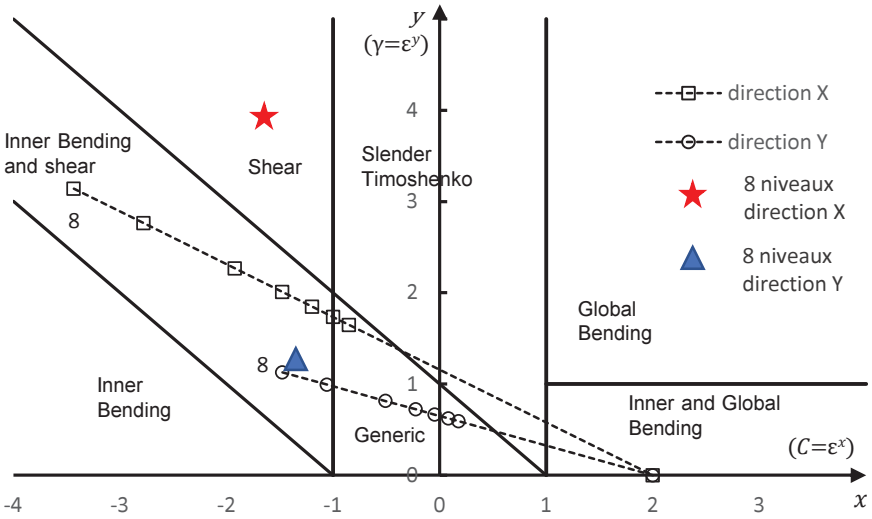


FIGURE 3.18 – Changement du comportement du bâtiment en ajoutant les panneaux de façade dans la direction longitudinale

$$C_x = 14{,}574 \qquad C_y = 9{,}333$$
$$\gamma_x = 0{,}0014 \qquad \gamma_y = 0{,}1380$$

Avec ces paramètres, nous pouvons déterminer les paramètres adimensionnels C et γ de chaque direction suivant et les positionner dans le cadre de validité du première étude (figure 3.13) dans la figure 3.18. Nous trouvons que le comportement de la structure est parfaitement changé par rapport à la structure de l'étude précédente. Le comportement du bâtiment est généré par le cisaillement et cela est confirmé par le ratio de fréquence proche de la valeur 3. Cependant, le comportement du bâtiment dans la direction transversale (y), le changement est négligeable. L'ajout des panneaux de façade dont l'inertie très faible hors son plan n'influence pas le comportement de l'ensemble des voiles de grande dimension.

En plus, comme un des objectifs initial de la mesure in-situ, nous voudrions estimer les paramètres du modèle générique à partir des fréquences propres du bâtiment, plutôt des ratios en réalité. Le modèle générique est déduit par deux paramètres adimensionnels C et γ, donc nous avons besoin au moins de deux ratios comme référence : f_2/f_1 et f_3/f_1. Nous traçons les courbes des valeurs de ratio en fonction de deux paramètres adimensionnels, puis nous les superposons pour chercher la valeur de C et γ du modèle qui donne ces deux valeurs de ratio (figure 3.19). Par contre, la courbe d'isovaleurs de ces deux ratios sont de la même forme (parallèle), donc leur intersection est très sensible à trouver.

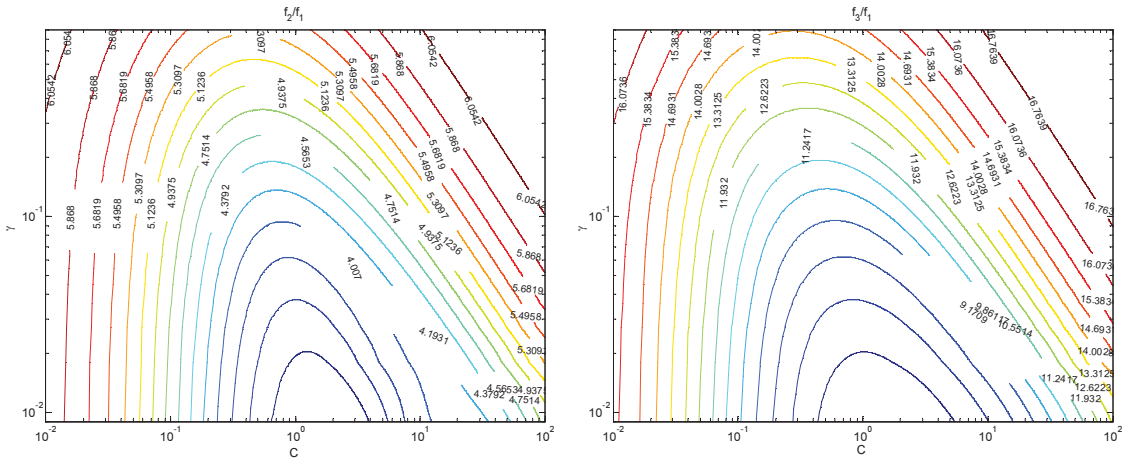


FIGURE 3.19 – Ratio de fréquence f_2/f_1 et f_3/f_1 en fonction des paramètres adimensionnels C et γ

Cependant, cette piste nous fournit un outil pour confirmer la valeur des paramètres estimés. Notre étude repose sur une estimation de la rigidité de cisaillement de la cellule par la modélisation éléments finis d'un étage. Avec les conditions aux limites proposées, il nous faut confirmer que la façon de faire est fiable par rapport à la mesure in-situ. Pour le faire, nous supposons que les rigidités en flexion interne et globale sont bien estimées par les formules de HMPD. Le paramètre γ du modèle générique est donc bien déterminé. Il est possible de tracer la ligne

de ratio en fonction d'unique paramètre C pour cette valeur de γ. Puis, la ligne de ratio mesuré expérimentalement nous donne directement l'intersection avec la courbe de ratio du modèle et par conséquence la valeur de C (figure 3.20).

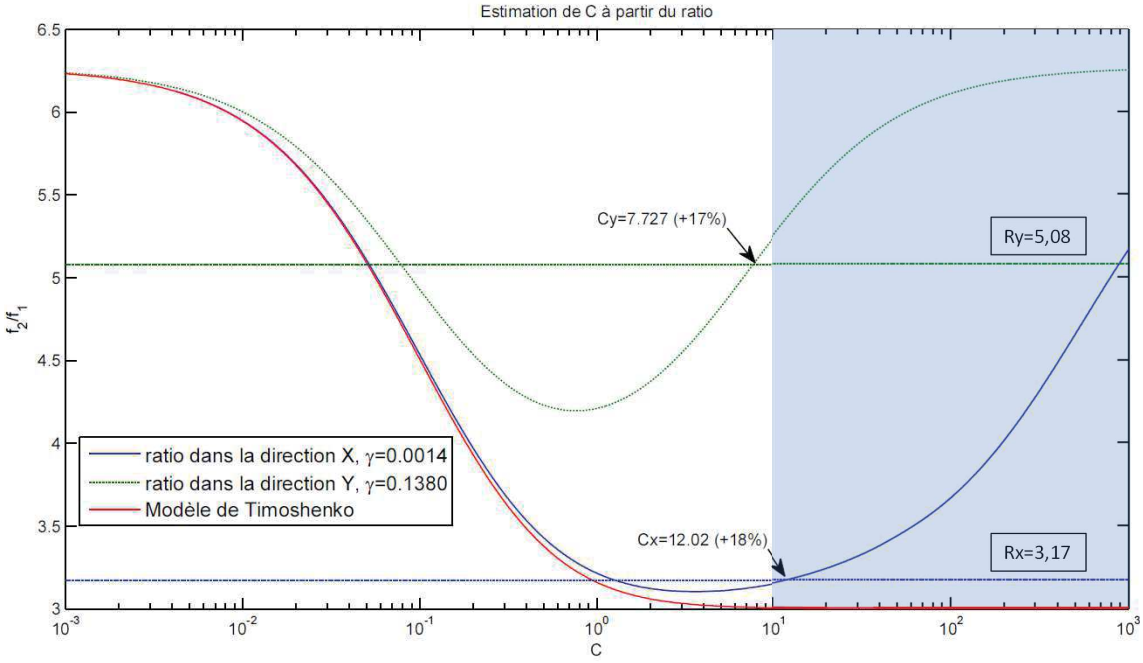


FIGURE 3.20 – Estimation des paramètres adimensionnels du bâtiment

Cette approche nous donne deux valeurs de C pour chaque direction, une valeur dans la partie descendante et une valeur dans la partie montante. La partie descendante se rapproche d'un modèle de Timoshenko, par contre, la partie montante trouve la valeur beaucoup plus loin que celle de modèle de Timoshenko. Il faut bien noter que le modèle de Timoshenko est le modèle prenant en compte le cisaillement et la flexion globale, il ne prend pas en compte la flexion interne. C'est la raison pour laquelle la courbe de Timoshenko est très proche de la courbe bleue de la direction longitudinale x . Dans cette direction, la flexion des murs est très faible et donc le schéma d'association des mécanismes (figure 2.2) montre que le modèle n'est généré que par deux autres mécanismes qui sont en séries. Avec l'ajout de la flexion interne, le modèle générique a bien corrigé le modèle de Timoshenko. Le modèle de Timoshenko représente bien le comportement si la flexion interne est faible, par contre, si la structure se compose de grands murs voiles, la flexion interne est plus importante. La prise en compte de la flexion interne est alors nécessaire pour trouver le comportement correcte de la structure.

Au point de vue de l'évolution de ratio, le ratio de fréquence du modèle de Timoshenko ne change pas et est égale à 3 pour la structure dont $C > 10$. Cependant, celui du modèle générique va re-augmenter jusqu'à 6,25. C'est le ratio où la flexion domine la structure. Le modèle générique a complété une grande partie du comportement de la structure et nous a donné une vision plus étendue du comportement possible de la structure. Cette partie est particulière importante pour

les structures de moyenne hauteur. Dans ces structures, la longueur d'onde est encore faible, et donc la fraction de $C : K\,L^2$ est encore plus faible que $\mathbb{EI}$ donc, raisonnablement la valeur C est encore grand. C'est la zone bleue de la figure 3.20 a complété au modèle de Timoshenko.

Revenons à l'objectif initial, qui est d'estimer la valeur de C. Pour chaque direction, nous trouvons deux valeurs de C correspondants, nous les nommons la valeur à gauche et à droite de la courbe. Premièrement, la valeur à droite dans deux directions à le même ordre de grandeur : $12,02$ dans la direction longitudinale x et $7,727$ dans la direction transversale y. Ces valeurs sont à $+18\%$ et $+17\%$ par rapport aux valeurs estimées par la méthode proposée. Rappelons que la mesure de ratio est effectuée sur le bâtiment de 8 niveaux, et l'erreur du modèle homogénéisé est de l'ordre de $\varepsilon = \pi/2\,N = 19,6\%$. Puis, nous confirmons que le modèle de Timoshenko est un cas particulier de modèle générique où la flexion interne n'est pas prise en compte. Donc, si nous cherchons la valeur de C du modèle de Timoshenko, nous allons trouver les deux valeurs à gauche de la courbe. Notons que ces deux valeurs ne dépendent pas la flexion interne et donc le paramètre γ n'intervient pas dans le modèle de Timoshenko. Ces deux valeurs dans la direction longitudinale et dans la direction transversale est de l'ordre 10^{-1} et 1, c'est à dire d'un facteur 10. Si nous utilisons ces deux valeurs pour calculer la valeur de fréquence propre, il nous donne des valeurs très différentes. Ces fréquences sont contradictoires avec la valeur $4,45Hz$ et $4,57Hz$ de la mesure expérimentale. Cela élimine les valeurs de C à gauche de la courbe dans ce cas là et confirmé les valeurs à droite avec une différence de l'ordre de 18 % par rapport à la valeur calculée par la méthode proposée.

Direction longitudinale (x)

	Modèle Générique			Éléments finis		
Mode	f_i (Hz)	ratio	diff (%)	f_i (Hz)	ratio	diff (%)
1	4,568	*1*	+2,64	4,1	*1*	-6,80
2	14,587	*3,19*	+3,45	12.3	*3,0*	-12,93
3	27,090	*5,93*	+14,79			

Direction transversale (y)

	Modèle Générique			Éléments finis		
Mode	f_i (Hz)	ratio	diff (%)	f_i (Hz)	ratio	diff (%)
1	4,654	*1*	+1,84	4,858	*1*	+6,30
2	24,227	*5,21*	+4,43			

TABLE 3.12 – Fréquence propre de la poutre générique et modèle éléments finis

Enfin, nous effectuons une modélisation éléments finis de la structure complète avec mêmes matériaux du modèle théorique. Notons que la précision de la méthode éléments finis est toujours influencée par la taille de maillage et la capacité du matériel. Dans ce cas, grâce aux petits murs dans la salle commune, la taille de maillage est raffinée et le temps de calcul est plus important. Cependant, le calcul par modèle Générique est toujours très efficace avec les paramètres déterminés.

3.4 Conclusion sur la méthodologie d'étude par les modèles Génériques

Dans ce chapitre, nous avons présenté la mise en application de deux modèles Génériques pour l'étude du comportement dynamique d'un bâtiment. Ces deux modèles Génériques ont été obtenus par homogénéisation de structure idéalisée. Le premier modèle Générique considère que tous les éléments des murs et de plancher sont les éléments élancés, dont le comportement n'est piloté que par de la flexion. Le modèle est décrit par l'équation différentielle de degré 6 (l'équation (2.10)) avec la combinaison de trois mécanismes : le cisaillement de la cellule (de rigidité K), la flexion globale ($\mathbb{EI}$) et la flexion interne ($\mathcal{EI}$). Le deuxième modèle générique (l'équation (2.17)) est la modification du premier modèle en considérant l'effet de cisaillement dans les murs épais de la structure. Nous l'appelons le modèle Générique Modifié (par le cisaillement des murs $\mathcal{K}_m$).

Notre étude consiste à estimer la rigidité de ces quatre mécanismes. Ces rigidités sont déterminées pour une cellule de base qui est, dans notre cas, un étage du bâtiment. Parmi ces mécanismes, les deux rigidités de flexion sont calculées par formules analytiques fournies par l'homogénéisation. Le point délicat est la rigidité de cisaillement. Les études précédentes ne donnent pas de procédure générale pour calculer cette rigidité. C'est également le cas de la méthode HMPD. Cependant, à partir des équations d'équilibre et des lois de comportement de la poutre Générique, nous sommes capable de définir un état d'effort-déformation de la cellule qui permet d'estimer la rigidité au cisaillement de la cellule. Utilisant cet état, nous l'appliquons sur le modèle éléments finis d'un étage de la structure réelle, le résultat du calcul nous fournit la rigidité au cisaillement de la cellule. C'est-à-dire que la cellule se compose des murs de mi-hauteur du niveau supérieur et celui du niveau inférieur, le plancher est donc au milieu de la cellule. Cette description permet de bien respecter la périodicité de la structure et la condition de la méthode d'homogénéisation. Profitant du modèle construit, nous déterminons la rigidité au cisaillement des murs en enlevant les planchers et donc les murs travaillent en cisaillement indépendamment.

Cette mise en œuvre a complété la méthodologie d'analyse du comportement dynamique de bâtiment par les modèles Génériques HMPD. Son avantage est de réduire considérablement le volume de calcul : le calcul n'est effectué sur une cellule de l'étage par rapport à la simulation éléments finis du bâtiment entier. En plus, l'équation analytique du mouvement permet de mettre en évidence le rôle de chaque mécanisme et de fournir une compréhension profonde pour expliquer le fonctionnement du bâtiment à l'échelle globale et locale.

Dans la première partie de ce chapitre, cette méthodologie est appliqué sur une série de modèle de bâtiment de 5 à 35 niveaux d'étages identiques. Seul le nombre de niveaux varie afin de montrer la précision des modèles HMPD par rapport aux modèle éléments finis. En plus, cette série d'étude permet de montrer l'évolution du comportement dynamique de bâtiment en fonction du nombre du niveaux lorsque

le plan de l'étage ne change pas. Cette évolution est bien prédite grâce au cadre du domaine de validité établi par les modèles HMPD.

Dans un second temps, on profite de la méthodologie pour interpréter le résultat de mesure in-situ. Le bâtiment étudié a un schéma structurel différent dans deux directions. La direction transversale se compose de murs voiles béton armé coulé en place de grande dimension. Dans l'autre direction, il n'y a que deux petits voiles de cage d'ascenseur avec les panneaux de façade préfabriqués. La mesure in-situ et le modèle HMPD montrent que malgré la nature, la liaison non-monolithe ainsi que la raideur négligée souvent dans le calcul, ces éléments de façade contribuent considérablement à la rigidité globale du bâtiment dans sa direction de travail.

Avec les différents mécanismes distingués et rassemblés dans un modèle unique, 3 mécanismes pour le modèle Générique et 4 mécanismes pour le modèle Générique Modifié, la méthode HMPD fournit deux modèles plus complets et efficaces pour étudier le comportement dynamique des bâtiments de moyenne à grande hauteur.

Chapitre 4

Système d'amortisseurs visqueux linéaires

Contents

4.1 Systèmes de dissipation d'énergie 86
4.2 Conception de système de dissipation d'énergie 91
4.3 Structure renforcée par le système des amortisseurs visqueux linéaires 93
4.4 Estimation du taux d'amortissement 96
4.5 Conclusion sur système d'amortisseurs visqueux linéaires 98

4.1 Systèmes de dissipation d'énergie

Dans le chapitre 3, nous avons démontré que le modèle d'homogénéisation est particulièrement efficace pour étudier le comportement dynamique des bâtiments de grande hauteur. L'avantage du modèle est, qu'une fois que les paramètres d'un étage sont estimés, en fonction de nombre d'étage de construction, nous sommes capables de déterminer le comportement et le modèle prédominant du bâtiment. Dans le cas d'une modification de la structure, il suffit de procéder à une nouvelle simulation pour re-estimer les paramètres d'un seul étage. Cela permet donc d'éviter réaliser d'une simulation complexe de la structure entière.

En développant cette approche, nous essayons de déterminer la solution la plus adaptée pour contrôler la réponse de la structure sous une action dynamique comme le vent et le séisme, particulièrement sous le séisme de moyenne à forte intensité. Pour cela, l'approche conventionnelle exige un renforcement de la résistance de la structure par une analyse de relation entre les efforts et la déformation. Cette approche engendre néanmoins des sections d'ouvrages structurels plus importantes, un impact sur le projet architectural ainsi que des coûts complémentaires.

Une approche différente consiste à jouer sur la capacité de dissipation d'énergie de la structure. La dissipation d'énergie joue un rôle important dans la vibration de la structure. Lorsqu'une action est appliquée à la structure, celle-ci vibre ; s'il n'y a pas de dissipation d'énergie, la structure vibre indéfiniment ce qui peut conduire à la dégradation du matériau puis à la défaillance de la structure. Dans la réalité, il existe toujours une capacité de dissipation d'énergie dans tous les matériaux. Elle permet d'absorber l'énergie du mouvement et d'estomper la vibration. De plus, la dissipation d'énergie permet également de limiter l'effet de résonance de la structure.

Une structure absorbe l'énergie de plusieurs façons. La première est la dissipation hystérique du matériau, cette dissipation, dépendant du type de matériau, est généralement faible. Sous le fort séisme, la déformation de la structure peut dépasser la limite élastique du matériau, il apparaît alors des rotules plastiques, ce qui entraîne une flexibilité ainsi qu'une dissipation d'énergie beaucoup plus importante. Par conséquent, une grande partie de l'énergie sismique est absorbée grâce aux endommagements localisés de la structure. Ce phénomène diminue l'incidence de l'action du séisme mais provoque néamoins une dégradation de la structure. Dans la conception, tous ces phénomènes sont pris en compte dans l'amortissement de la structure. Cette valeur varie de 2 à 5% pour chaque type de bâtiment.

En conception parasismique, dans le but d'augmenter la capacité de dissipation d'énergie et d'éviter la dégradation de la structure, les ingénieurs utilisent fréquemment des dispositifs rapportés complémentaires permettant de réduire l'action sismique et/ou d'absorber l'énergie de l'action. Il existe deux grandes familles de systèmes de dissipation d'énergie. La première est le système passif, il comprend des dispositifs qui permettent de dissiper l'énergie par leur caractéristiques propres. Leur fonctionnement ne nécessite aucune ressource d'énergie artificielle.

La deuxième est le système de dissipation d'énergie actif, ce système demande de l'énergie pour activer son effet ; il est constitué d'un système de capteur permettant de détecter l'action puis d'activer le système de dissipation d'énergie. Le travail de ce système est calculé en fonction des sources d'actions et des caractéristiques de la structure à protéger. Les contrôles actifs sont basés sur l'excitation de la force extérieure (exemple par un excitateur extérieur ou par le mouvement de la masse externe). [Soong and Spencer Jr Reviewer, 1992] a montré l'effet du système de contrôle actif est de modifier essentiellement la rigidité et le taux d'amortissement de la structure, en général, ce système actif est plus coûteux et demande plus d'entretien qu'un système passif. Une autre famille existe également, il s'agit des systèmes semi-actifs, combinant des systèmes actifs et passifs.

Dans les systèmes de dissipation passive, une autre technique consiste à isoler la base de la structure (ex. [Buckle and Mayes, 1990], [Mokha et al., 1991], [Constantinou et al., 1991]). Ce système donne une flexibilité à la structure lors de l'action sismique et donc une capacité d'absorption d'énergie. La flexibilité est généralement exprimée en fonction de la période du bâtiment qui est de l'ordre de 2 secondes. Cette gamme de période couvre presque tous les tremblements de terre. La dissipation d'énergie dans le système d'isolation du séisme est alors utile pour limiter la réponse du déplacement ainsi que pour éviter la résonance. Dans ce cas, la plastification de la structure ne se produit pas. Cependant, dans le cas où le séisme se compose d'une vague de longues périodes, il n'est pas possible de fournir une flexibilité suffisante pour la réflexion de l'énergie sismique. Dans ce cas, l'absorption de l'énergie de la structure continue à jouer un rôle important ([Constantinou et al., 1991]).

Une deuxième voie consiste à introduire des dispositifs de dissipation d'énergie passive imposés dans la structure. Ces dispositifs sont installés à un ou plusieurs niveaux afin de renforcer et/ou d'absorber d'énergie du mouvement de l'étage ou de la hauteur du bâtiment. Son principal avantage est une installation simple, il est également possible d'utiliser cette méthode pour améliorer le comportement dynamique des bâtiments existants. L'ensemble des études sur ce système démontre qu'ils sont capables de réduire significativement le déplacement différentiel entre-étage d'une structure équipée vis-à-vis d'une structure non-équipée.

L'amortisseur à friction proposé par [Pall and Marsh, 1982] fonctionne par le biais d'un glissement entre des barres ou des plaques (figure 4.1), ou entre des matériels dans le piston (amortisseur de Sumitomo, figure 4.2). Ces dispositifs sont dimensionnés et seront activés sous l'action engendrée par le déplacement de l'étage. Leur fonctionnement, dépendant de l'amplitude de l'excitation, est indépendante de la vitesse du mouvement de la structure ([Pall and Marsh, 1982] et [Aiken and Kelly, 1990]). Son effet principal consiste à réduire le déplacement entre-étage, cependant, ils ne peuvent pas réduire l'effort de cisaillement à la base du bâtiment.

Il existe également un système alternatif constitué de **tirant d'acier**. Celui proposé par [Tyler, 1985] est la réunion des barres rondes en acier dans un cadre

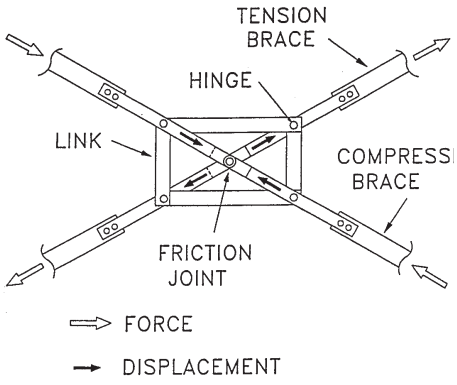
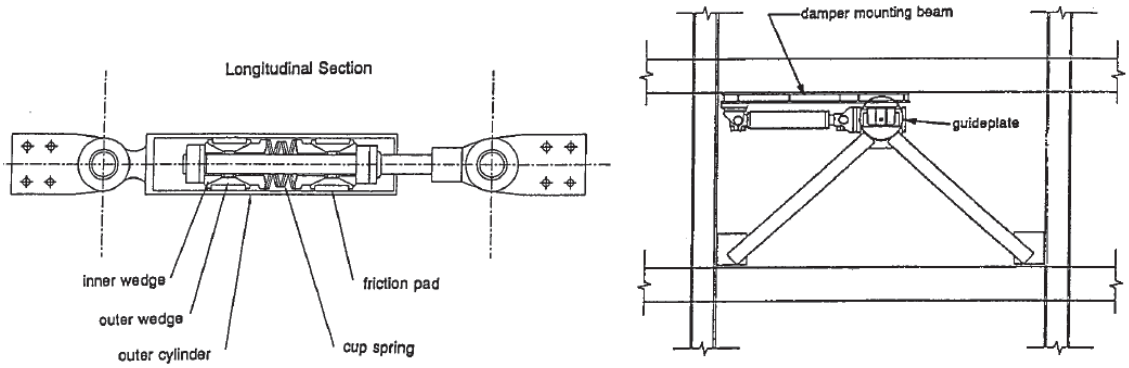


FIGURE 4.1 – Amortisseur à friction ([Pall and Marsh, 1982])



(a) Détail de l'amortisseur de Sumitomo

(b) Installation de l'amortisseur

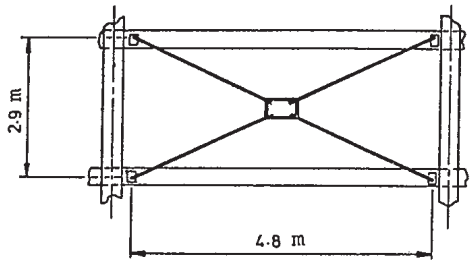
FIGURE 4.2 – Amortisseur à friction de Sumitomo ([Aiken and Kelly, 1990])

acier (figure 4.3). Ce cadre est conçu pour que les barres comprimées puissent se déconnecter du cadre lors d'une déformation trop importante de l'étage. Les barres tendue vont induire une déformation du cadre et l'énergie sera dissipée par cette déformation inélastique.

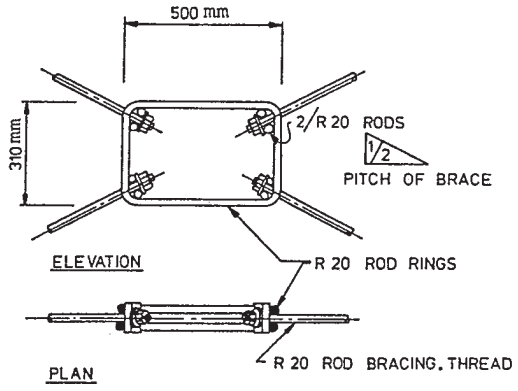
Un autre type de dispositif de dissipation d'énergie est constitué de couches visco-élastiques collées (polymères acryliques). Ces derniers, les **amortisseurs viscoélastiques**, ont été développés par 3M Company et utilisés afin de contrôler la vibration induite par le vent dans les tours par exemple : le World Trade Center de New York City (110 niveaux), le Columbia SeaFirst Building à Seattle (73 niveaux) et le Two Two Union Square Building à Seattle (60 niveaux).

L'application de ces amortisseurs viscoélastique, donc l'objectif principal est d'améliorer le comportement de la structure sous l'action du séisme, est étudié par [Lin et al., 1988], [Aiken and Kelly, 1990] et [Chang et al., 1991]. La figure 4.4 illustre un amortisseur viscoélastique et son installation dans une structure en acier.

Leur fonctionnement est dirigé par le comportement au cisaillement des couches viscoélastiques. Ces dernières dépendent fortement de la fréquence de mouvement

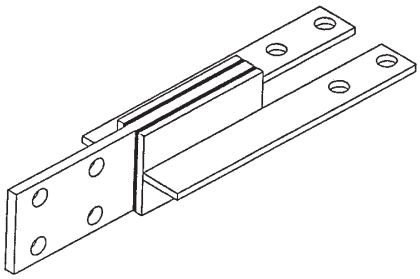


(a) Installation des tendeurs en acier

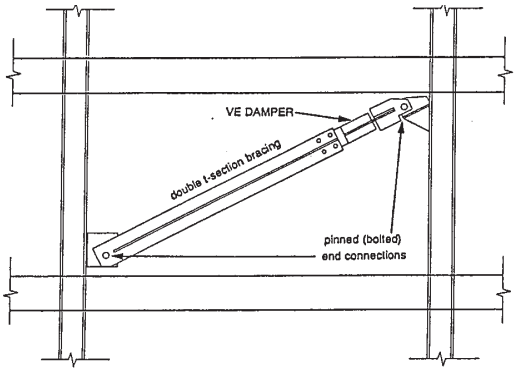


(b) Détail du cadre en acier

FIGURE 4.3 – Système des tendeurs en acier ([Tyler, 1985])



(a) Détail de l'amortisseur viscoélastique



(b) Disposition de l'amortisseur

FIGURE 4.4 – Amortisseur viscoélastique et l'installation ([Aiken and Kelly, 1990])

et de la température ambiante. [Chang et al., 1991] a montré que le module de stockage ainsi que le module de perte de rigidité du matériau viscoélastique diminuent lorsque la température augmente entre 70 °F (21 °C) et 90 °F (32 °C). Par conséquent la force de cisaillement entre les couches décroît. Ce changement est plus important pour une excitation à une fréquence plus grande. En considérant compte que les amortisseurs sont souvent installés en façade du bâtiment, cette sensibilité devient alors un facteur important à prendre en compte dans la conception para-sismique du bâtiment.

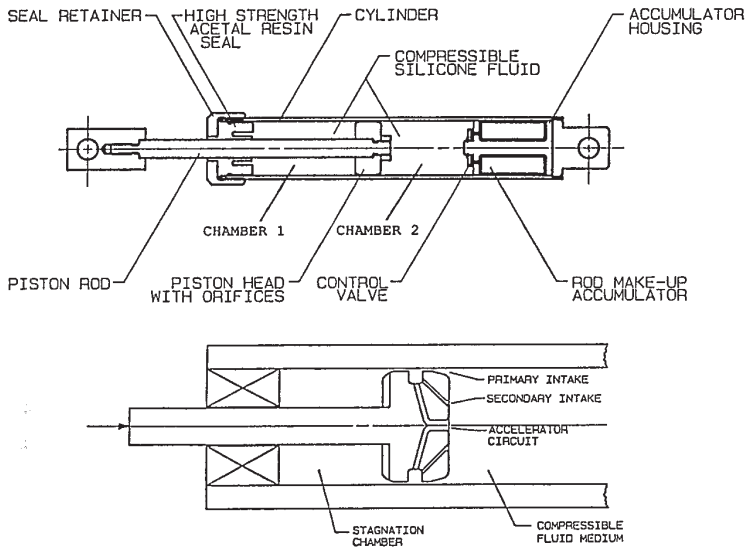


FIGURE 4.5 – Amortisseur de fluide visqueux ([Constantinou and Symans, 1992])

L'amortisseur de fluide visqueux est également un autre type d'amortisseur permettant de répondre à ces contraintes. Le schéma de l'amortisseur est présentée dans la figure 4.5 et l'installation dans la structure est présentée dans la figure 4.6.

Le fonctionnement de l'amortisseur de fluide visqueux est dicté par l'écoulement hydraulique du fluide visqueux au travers de l'orifice. La force est générée par la différence de pression entre les deux chambres du piston. De plus, le fluide est compressible, la réduction de volume de fluide produit donc une force de restauration contre la force imposée. La conception de l'orifice du piston peut fournir une force proportionnelle à la puissance α de la vitesse du mouvement du piston, où α est un coefficient prédéterminé entre 0,5 et 1,2. Une conception avec le coefficient α égal à 0,5 est couramment utilisée afin d'isoler les chocs de vitesse extrêmement élevé. Il est généralement utilisé dans les matériels militaires. Dans le domaine du génie parasismique, la conception de $\alpha = 1$ est la plus souvent utilisée. Il en résulte un comportement visqueux essentiellement linéaire.

Les essais par [Constantinou and Symans, 1992] n'a montré aucune rigidité mesurable du piston étudié à une fréquence inférieure de 4 Hz. Un tel dispositif n'entraînera donc qu'un amortissement visqueux supplémentaire aux modes fondamen-

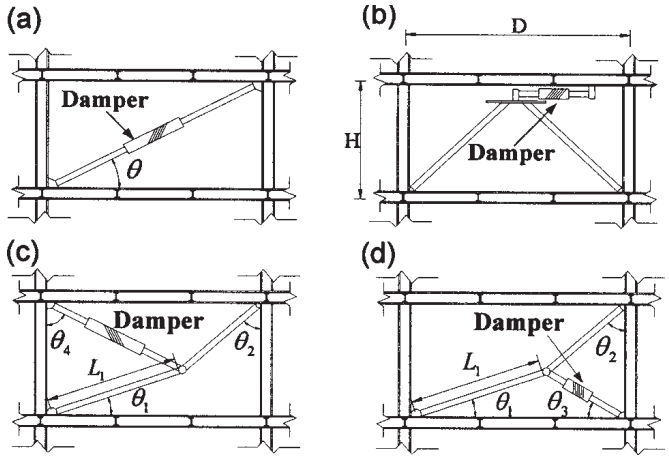


FIGURE 4.6 – Installation des amortisseurs visqueux linéaires ([Hwang et al., 2008]) - a) diagonal brace - b) K brace - c) upper toggle brace - d) lower toggle brace

taux dont la fréquence est inférieur à 4Hz et fournira une rigidité supplémentaire aux modes supérieurs.

Comme, l'écoulement de fluide dans le piston est isolé vis-à-vis à la température. De plus, les propriétés mécaniques des amortisseurs visqueux sont quasi indépendantes de l'amplitude du mouvement. Ces deux derniers avantages procurent une fiabilité dans le fonctionnement des amortisseurs visqueux.

4.2 Conception de système de dissipation d'énergie

L'ensemble des études a montré que l'installation des amortisseurs permet de réduire le déplacement entre-étage de la structure sous une sollicitation externe. Cette réduction va engendrer une réduction du moment fléchissant des éléments verticaux comme les murs et les poteaux. Cependant, ces éléments devront supporter une charge axiale supplémentaire induite par les dispositifs équipés. Dans la conception du système de dissipation d'énergie, et particulièrement pour les ouvrages existants, il faut alors intégrer ce changement afin de vérifier la capacité portante des éléments.

En fonction des caractéristiques de chaque type d'amortisseur, la force axiale et le moment introduit par le déplacement sont en phase ou hors phase. La figure 4.7 montre la relation entre la force et le déplacement des différents types d'amortisseur. Pour l'amortisseur à friction et les tirants en acier, la force maximale se produit au même moment avec le déplacement maximal. En conséquence, de quoi la force axiale supplémentaire au poteau est en phase avec le moment fléchissant. Idem pour l'amortisseur viscoélastique, une partie importante de la force axiale supplémentaire est alors en phase avec le moment fléchissant. Celui-ci va alors provoquer l'état le plus défavorable pour la structure. En revanche,

l'amortisseur de fluide visqueux produit une force axiale hors-phase du moment de flexion. Cela permet non seulement d'éviter l'effet défavorable de l'ajout des dispositifs mais aussi de diminuer l'effort de cisaillement à la base de la structure ([Constantinou and Symans, 1992]).

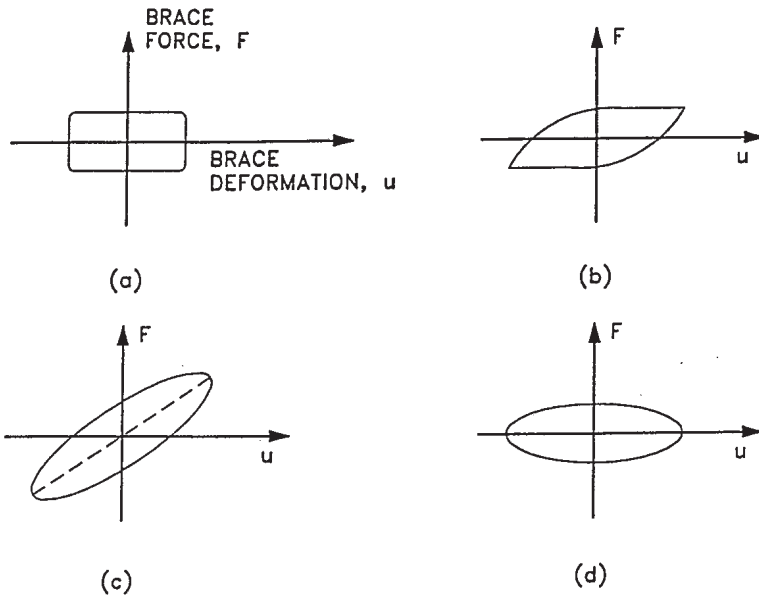


FIGURE 4.7 – Relation relative de force-déplacement dans (a) l'amortisseur à friction, (b) le tendeur en acier, (c) l'amortisseur viscoélastique et (d) l'amortisseur visqueux

De plus, vis-à-vis du système de contrôle actif, le système des amortisseurs de fluide visqueux possède des avantages supplémentaires, tels que :

- Faible coût : Le système des amortisseurs utilise le mouvement de la structure pour activer et produire les forces d'amortissement. Ce fonctionnement ne demande donc aucune autre ressource extérieur à la structure.

- Fiabilité : le travail fiable des amortisseurs de fluide visqueux dans les différentes conditions (à une large gamme de fréquence, de température et à longue durée) lui ont permis d'obtenir la confiance des ingénieurs dans le domaine de la conception parasismique. En particulier dans le domaine du génie militaire , où les performances restent inchangées après 20 ans d'utilisation.

- L'entretien du système n'exige pas trop d'invertissement, le travail de l'amortisseur est protégé par le mouvement de fluide visqueux présent dans le piston fermé. Les têtes rotatives des amortisseurs sont fixées à la structure et font partie intégrante de celle-ci.

En considérant ces différents avantages, l'amortisseur visqueux est un système utilisé fréquemment afin de contrôler la réponse sismique des bâtiments neufs et existants.

4.3 Structure renforcée par le système des amortisseurs visqueux linéaires

Le principal effet de l'ajout des amortisseurs est d'apporter un taux d'amortissement supplémentaire et donc une capacité de dissipation d'énergie supplémentaire à la structure. Lors de l'action externe, le mouvement de la structure est exprimé par l'équation (4.1) : m est la masse de la structure, k est la rigidité de la structure, c_u et le coefficient d'amortissement constant de la structure intrinsèque, η est le nombre d'amortisseur, p_d est la composition horizontal de la force d'un amortisseur, $\ddot{u}_g$ est l'accélération de la base ; $\ddot{u}$, $\dot{u}$ et u est l'accélération, la vitesse et le déplacement de la masse.

$$m\,\ddot{u} + c_u\dot{u} + k\,u + \eta\,p_d = -m\,\ddot{u}_g \tag{4.1}$$

L'équilibre d'énergie du système est calculé en multipliant l'équation par du et en faisant l'intégration de temps 0 à t. Nous obtenons donc :

$$E = E_k + E_s + E_h + E_d \tag{4.2}$$

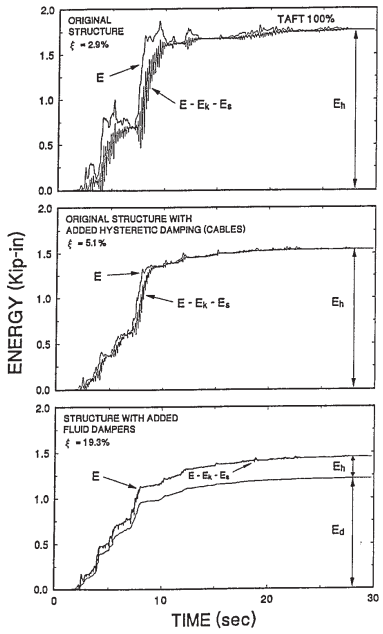


FIGURE 4.8 – Energie en temps réel de la structure d'un étage sous le séisme Taft 100% ([Constantinou and Symans, 1992])

L'énergie totale entrée est : $E = \int_0^t m\,(\ddot{u} + \ddot{u}_g)\,du_g$;

l'énergie cinétique : $E_k = \frac{1}{2} m\,(\dot{u} + \dot{u}_g)^2$;

l'énergie potentielle : $E_s = \frac{1}{2} k\,u^2$;

l'énergie dissipée par l'amortisseur : $E_d = \int_0^t \eta\,p_d\,du$;

et E_h est l'énergie dissipée par les autres mécanismes de la structure (la plastification du matériau, l'apparition de rotule plastique,...).

Avec une énergie entrée constante et en supposant que l'énergie cinétique et potentielle sont invariables, l'énergie dissipée par les amortisseurs permet de diminuer considérablement l'énergie dissipée par la plastification du matériaux et les autres mécanismes (E_h) (la figure 4.8). L'ouvrage sera alors protégé d'une ruine importante.

De plus, l'ajout des amortisseurs visqueux linéaires permet de diminuer la réponse de la structure sous l'action externe. Les tests de la maquette d'un étage (figure 4.9) sur la table vibrante effectués par [Constantinou and Symans, 1992] ont montré une diminution entre 30% et 70% du déplacement entre-étage et entre 40% et 70% de l'effort de cisaillement. Cette réduction de la maquette de trois étages (figure 4.10) est alors entre 30% et 50%. Ces réductions sont très significatives car, lors du mouvement, le déplacement différentiel va engendrer des efforts particuliers importants et va provoquer l'endommagement de la structure. De plus, la réduction de l'amplitude permet de diminuer le nombre de cycle de mouvement ainsi d'éviter la fatigue du matériau afin d'assurer la stabilité de l'ouvrage.

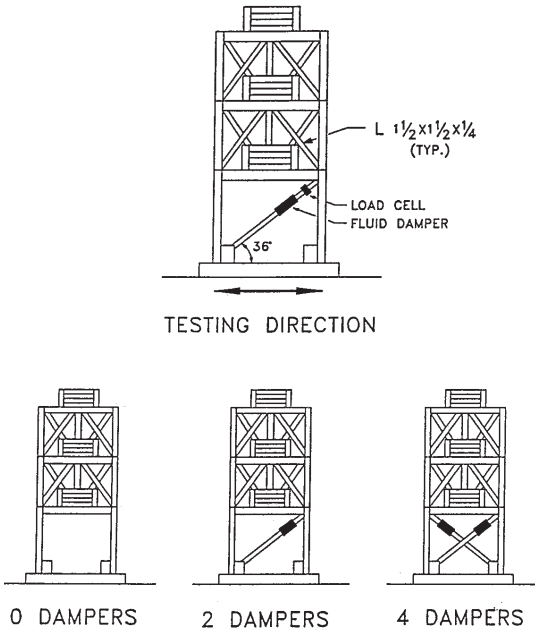


FIGURE 4.9 – Modèle d'un étage ([Constantinou and Symans, 1992])

Après le renforcement	Sans amort. sous bruit ambiant	Sans amort. sous simulation sismique	2 amort.	4 amort.
Fréquence (Hz)	3,13	2,99	3,27	3,35
Taux d'amort. (%)	2,0	2,9	19,3	37,4

TABLE 4.1 – Propriété du modèle d'un étage

Un autre effet important de l'ajout des amortisseurs visqueux est l'augmentation du taux d'amortissement global de la structure. Dans le calcul sismique conventionnel, cette augmentation permet de réduire le plateau du spectre de réponse sismique et donc de diminuer l'effort sismique appliqué à la structure. De plus, dans le rapport d'activité, [Constantinou and Symans, 1992] a montré que l'amortissement permet de "supprimer" les modes supérieurs de la structure. Dans cet état, le système de n de degré de liberté se comporte comme un système d'un degré de liberté (la figure 4.11).

Un phénomène intéressant démontré dans [Constantinou and Symans, 1992] est que l'augmentation du nombre d'amortisseur au premier étage du modèle d'un étage et de trois étages est plus efficace afin d'augmenter le taux d'amortissement total. Cette augmentation est 2 fois plus importante pour l'ajout de 4 amortisseurs contre 2 amortisseurs. Cela s'explique par le travail du plancher en diaphragme rigide qui a bien relié tous les amortisseurs du niveau et donc leur travail collectif pour absorber l'énergie du mouvement de l'étage. Par contre pour le modèle de 6 amortisseurs répartis sur 3 niveaux, nous n'obtenons pas le taux d'amortisseur de facteur 3. Cela vient du déplacement entre-étages des niveaux supérieurs qui est plus faible que celui du bas, l'effort des amortisseurs ainsi que l'énergie absorbée sont donc plus faibles.

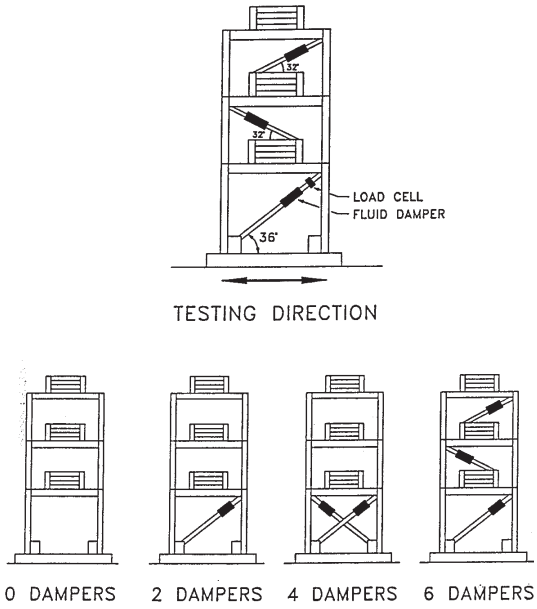


FIGURE 4.10 – Modèle de trois étages ([Constantinou and Symans, 1992])

	Sans amort.			2 amort.		
Mode	1	2	3	1	2	3
Fréq. (Hz)	2,00	6,60	12,20	2,03	6,88	12,34
Taux d'amort. (%)	1,74	0,76	0,34	9,90	14,72	5,02

TABLE 4.2 – Propriété du modèle de trois étages

	4 amort.			6 amort.		
Mode	1	2	3	1	2	3
Fréq. (Hz)	2,11	7,52	12,16	2,03	7,64	16,99
Taux d'amort. (%)	17,7	31,85	11,33	19,40	44,70	38,04

TABLE 4.3 – Propriété du modèle de trois étages *(continue)*

En parallèle, l'effet de l'ajout des amortisseurs sur la fréquence propre est faible (la modification de la rigidité généralement inférieure à 10%), cette modification des modes supérieurs est donc plus importante. Une des raisons possible est que ces fréquences étaient supérieures à 4 Hz, la fréquence en dessous de laquelle, les amortisseurs ne présentent aucune rigidité ([Constantinou and Symans, 1992]), au delà de cette valeur, les amortisseurs développent donc une rigidité significative et vont rigidifier la structure.

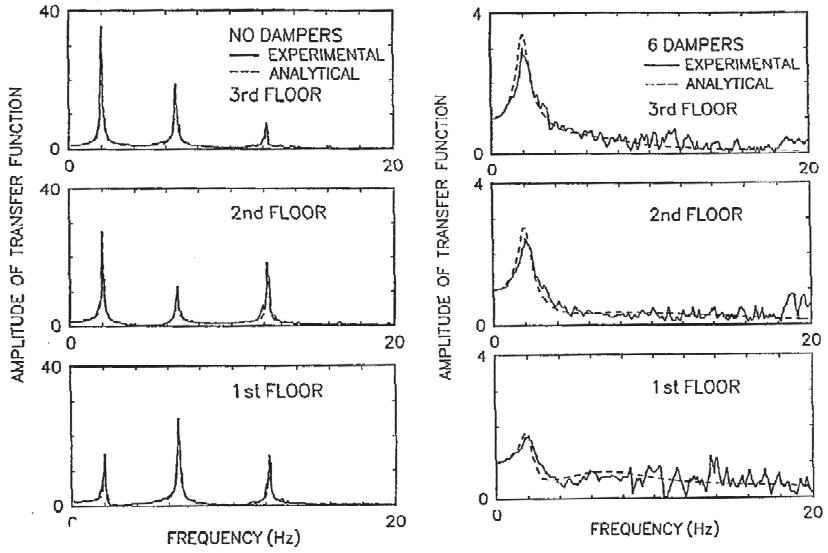


FIGURE 4.11 – Comparaison du fonction de transfert analytique et expérimentale du modèle de trois étages sans amortisseur et celui équipé 6 amortisseurs ([Constantinou and Symans, 1992])

4.4 Estimation du taux d'amortissement

Les études analytiques de [Novak and Hifnawy, 1983], [Constantinou, 1987] et [Veletsos and Ventura, 1986] ont founi la base d'estimation du taux d'amortissement du système équipé par des amortisseurs. Ces derniers sont utilisés pour établir le guide d'ingénieur dans le domaine parasismique américain (FEMA : [FEMA, 1997], [FEMA, 2000], [FEMA, 2001]). La méthode se développe sur l'hypothèse que la fréquence et la déformée modale de la structure amortie sont identiques à celles de la structure non amortie. Généralement, ces valeurs sont calculées

par l'analyse de la valeur propre de la structure.

Ensuite, le taux d'amortissement du mode est déterminé par l'étude énergétique provoquée lors de la vibration. Le taux d'amortissement du $k^{ième}$ mode de vibration peut être exprimé suivant la formule :

$$\xi_k = \xi_{str_k} + \frac{W_k}{4\pi\, L_k} \tag{4.3}$$

où, ξ_{str_k} est le coefficient d'amortissement inhérent de la structure intrinsèque, W_k est le travail effectué par l'amortisseur dans un cycle du mouvement et L_k est l'énergie potentielle maximale. W_k peut-être exprimé par :

$$W_k = \sum_j \int_0^{T_k} P_j d\left(u_j - u_{j-1}\right) \tag{4.4}$$

où, P_j est la composition horizontale de la force de l'amortisseur à $j^{ième}$ étage, et u_j est le déplacement modal du niveau j. Pour le cas des amortisseurs purement visqueux, on peut exprimer P_i par la formule suivante :

$$P_j = C_j \cos^2\theta_j \left(\phi_j - \phi_{j-1}\right)\, \omega_k \cos\left(\omega_k t\right) \tag{4.5}$$

où, C_j est le paramètre visqueux des amortisseurs à $j^{ième}$ étage, θ_j est l'angle d'inclinaison des amortisseurs à $j^{ième}$ étage, ϕ_j est le déplacement modal du niveau j à $k^{ième}$ mode de vibration, et ω_k est la fréquence de vibration du $k^{ième}$ mode. Combinaison l'équation (4.4) et (4.5), W_k s'exprime par :

$$W_k = \pi\omega_k \sum_j C_j \cos^2\theta_j \left(\phi_j - \phi_{j-1}\right)^2 \tag{4.6}$$

L'énergie potentielle maximale est alors égale à l'énergie cinétique maximale :

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_j m_j \phi_j^2 \omega_k^2 \tag{4.7}$$

En combinant l'équation (4.3), (4.6) et (4.7), le taux d'amortissement de la structure à $k^{ième}$ mode de vibration est déterminé par :

$$\xi_k = \xi_{str_k} + \frac{1}{2}\frac{\sum_j C_j \cos^2\theta_j \left(\phi_j - \phi_{j-1}\right)^2}{\omega_k \sum_j m_j \phi_j^2} \tag{4.8}$$

Une modification de cette approche est présentée par [Hwang et al., 2008]. Cette dernière prend en compte la déformation axiale de chaque amortisseur ainsi que la forme d'installation dans la structure. En fonction de chaque configuration, il suffit de s'adapter la formule 4.8 par les facteurs pré-établis pour chaque composant du déplacement (tableau 4.4).

Cette modification permet de prendre en compte le déplacement transversal et longitudinal de la structure. Cependant, elle se base toujours sur les modes propres de la structure non-amortie. Ensuite, il convient de déterminer le déplacement relatif de chaque nœud installé de l'amortisseur. Cela va augmenter considérablement

	Magnification factor	
Installation configuration	Horizontal direction f_h	Vertical direction f_v
Diagonal-brace damper	$cos\theta$	$sin\theta$
K-brace damper	1	H/D
Upper toggle-brace damper	$\frac{sin\theta_2\, cos(\theta_4 - \theta_1)}{cos(\theta_1 + \theta_2)} + sin\theta_4$	$\frac{cos\theta_2\, cos(\theta_4 - \theta_1)}{cos(\theta_1 + \theta_2)}$
Lower toggle-brace damper	$\frac{sin\theta_2\, sin(\theta_1 + \theta_3)}{cos(\theta_1 + \theta_2)}$	$\frac{cos\theta_2\, sin(\theta_1 + \theta_3)}{cos(\theta_1 + \theta_2)} - sin\theta_3$

TABLE 4.4 – Modification de composant vertical et horizontal de l'amortisseur selon l'installation ([Hwang et al., 2008], cf. figure (4.6))

le volume de calcul. De plus, cette étude modale par la modélisation éléments finis ne tient pas compte de la modification des propriétés et de la rigidité de la structure en présence des amortisseurs. Cet impact est particulièrement important pour les modes supérieurs lorsque la fréquence dépasse la seuil de 4Hz. Malgré tout, la formule 4.8 et l'étude de [Hwang et al., 2008] fournissent des estimations pratiques du taux d'amortissement de bâtiments de faible à moyenne hauteur.

4.5 Conclusion sur système d'amortisseurs visqueux linéaires

Les études antétieures a démontré que l'installation des amortisseurs visqueux linéaires dans le bâtiment permet d'améliorer la réponse du bâtiment sous des actions dynamiques telles que le vent ou le séisme. L'atout principal de cet effet est d'augmenter le taux d'amortissement global de la structure. Cela permet de dissiper une grande quantité d'énergie du mouvement. Par conséquent, le déplacement entre-étage, l'accélération ainsi que les efforts de cisaillement diminuent. Ces diminutions permettent d'éviter l'endommagement du matériau lorsque la déformation dépasse la limite élastique. De plus, dans les éléments sensibles à la résonance, l'augmentation de taux d'amortissement permet également de réduire l'amplitude du mouvement et donc de diminuer le nombre de cycle de vibration qui peuvent conduire à la rupture. Dans la conception sismique spectrale, l'augmentation du taux d'amortissement permet également de réduire le spectre de calcul sismique, de diminuer ainsi l'accélération subie ainsi que la force d'inertie due au séisme.

L'ajout des amortisseurs visqueux linéaires aux bâtiments modifie également les modes propres du système. Cette modification est particulièrement significative. D'une part, avec un taux d'amortissement important, les pics des modes supérieurs sont supprimés dans l'analyse par la fonction de transfert de la réponse. Ce dernier est particulièrement intéressant, car, en ajoutant les amortisseurs, la

structure de n degré de liberté se comporte comme le modèle d'un degré de liberté avec un seul mode. Cette analyse peut être valable pour les bâtiments de moyenne hauteur où le premier mode prend la majorité de la masse modale. Cependant, pour les bâtiments de grande hauteur, il existe plusieurs modes significatifs. Dans ce cas précis, il est nécessaire de considérer la contribution et le changement des modes supérieurs avec ses taux d'amortissement effectifs. D'autre part, la modification des fréquences propres n'est pas significative, mais la modification est plus importante pour les modes supérieurs.

L'étude analytique de [Constantinou and Symans, 1992] et [Hwang et al., 2008] présentent les formules qui permettent d'estimer le taux d'amortissement global de la structure avec des amortisseurs installés. Ces formules se basent sur la déformée modale de la structure non-amortie. Ces informations nécessitent une modélisation éléments finis ainsi qu'une analyse modale de la structure entière. De plus, ces dernières sont valables pour les premiers modes dont la fréquence est faible.

Chapitre 5

Étude HMPD d'une structure équipée d'amortisseurs visqueux linéaires

Contents

5.1 Adaptation de la méthode HMPD pour une structure équipée d'amortisseurs visqueux linéaires 102

5.1.1 Structure équipée d'amortisseurs "transverses" 103

5.1.2 Modèle avec l'amortisseur diagonal 105

5.2 Poutre de cisaillement 111

5.2.1 Poutre de cisaillement faiblement amortie 111

5.2.2 Poutre de cisaillement en régime amorti 115

5.2.3 Poutre de cisaillement en régime sur-amorti 116

5.2.4 Résumé de l'étude sur la structure en cisaillement . . . 117

5.3 Modèle de poutre de Timoshenko 119

5.4 Modèle de poutre générique 121

5.5 Première conclusion sur l'étude HMPD des modèles équipés par les amortisseurs visqueux linéaires 124

5.1 Adaptation de la méthode HMPD pour une structure équipée d'amortisseurs visqueux linéaires

Dans ce chapitre, nous avons adapté la procédure d'homogénéisation par la méthode HMPD à la structure équipée d 'amortisseurs visqueux linéaires. L'objectif est d'étudier les modifications induites sur une structure par des dispositifs d'amortisseurs visqueux linéaires du point de vue de l'augmentation du taux d'amortissement global et du changement de son comportement dynamique (avec la 'rigidification' de la structure et le changement de type du modèle continu équivalent). Ces modifications sont fonction du mode considéré et l'impact sur les modes supérieurs est également étudié et quantifié.

L'avantage de l' étude est de reposer sur une méthode analytique, ce qui permet d'étudier les effets en lien avec les différents ordres de grandeur des paramètres des amortisseurs et les contrastes avec les rigidités caractérisant la structure. Ainsi il est possible d'analyser finement les impacts des amortisseurs sur la dynamique globale de la structure. Une fois l'équation dynamique déterminée, sa résolution analytique ou numérique permet de calculer la réponse des différents modes de la structure. En résumé, cette procédure analytique permet de mettre en évidence le fonctionnement des amortisseurs et l'apport effectif d'amortissement selon chaque modèle de structure et chaque mode de vibration.

La structure étudiée est le multiportique obtenu par l'empilement de portiques simplement composés de deux murs et un plancher. Elle est identique à celle déjà utilisée par [Hans and Boutin, 2008] et présentée dans la figure 1.2. Les murs et le plancher sont pris de même longueur et de matériau identique. Pour obtenir les différents modèle de poutre continue équivalente, on joue sur les épaisseurs des éléments (murs et plancher). Ces paramètres sont consultables dans [Hans and Boutin, 2008] et [Chesnais, 2010]. Ces derniers permettent de construire les modèles dont les comportements sont connus à l'avance, ce qui facilite l'étude de l'effet de l'ajout des amortisseurs, qui est la modification du comportement en fonction de l'installation et l'ordre de grandeur des amortisseurs. Pour rappel, ces éléments (murs et plancher) sont encastrés aux nœuds. Par contre, les amortisseurs y sont articulés et ne provoquent qu'un effort orienté dans l'axe de l'amortisseur. Les amortisseurs utilisés sont des amortisseurs purement visqueux linéaires, et ne présente aucune rigidité élastique. La force visqueuse est due à l'allongement axial (positif ou négatif) du piston et est proportionnelle à la vitesse d'allongement. Sa loi de comportement est décrite ci-dessous.

$$\overrightarrow{F} = -\,\eta\,\overrightarrow{\dot{\Delta}}$$

η est le paramètre visqueux de l'amortisseur (unité Ns/m) et Δ est l'allongement axial de l'amortisseur. le paramètre visqueux (η) est un paramètre relié à la structure du piston de l'amortisseur, et à la viscosité du fluide qui s'écoule dans les chambres du piston. Dans cette étude, la question de l'obtention pratique des va-

leurs de le paramètre visqueux n'est pas abordée. Seuls leur ordre de grandeur et leur unité sont utilisées pour être comparées aux autres paramètres de la structure.

5.1.1 Structure équipée d'amortisseurs "transverses"

Pour initier ces études, nous avons dans un premier temps procédé à l'homogénéisation de structures modifiées par l'ajout d'amortisseurs orientés "dans la direction transversale" de celles-ci. Cette situation n'est a priori pas réaliste : un amortisseur relie de façon artificielle deux nœuds consécutifs (figure 5.1), de sorte que seule une force parallèle au plancher est générée (or on voit mal comment ne pas générer en réalité un moment en même temps).

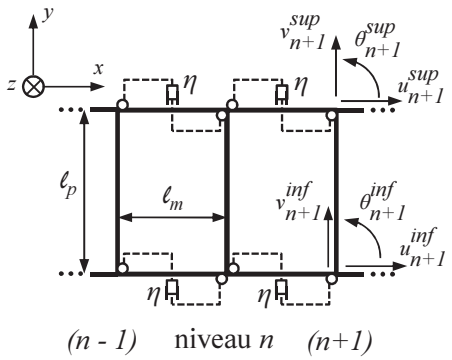


FIGURE 5.1 – Modèle de structure avec l'amortisseur "transversal"

La force visqueuse est reliée directement à la vitesse du déplacement différentiel entre ces deux nœuds. Et la force est appliqué au nœud dans la direction transversale de la structure. Cette configuration permet de simplifier l'adaptation de la procédure de HMPD par seulement une modification de l'équation d'équilibre des forces transversales avec l'ajout de la force visqueuse. Les équations d'équilibre des nœuds sont modifiées comme suit :

$$\widehat{n^{sup}y} = n^{sup}y + f(v_n^{sup}, v_{n-1}^{sup}) - f(v_{n+1}^{sup}, v_n^{sup})$$
$$\widehat{n^{inf}y} = n^{inf}y + f(v_n^{inf}, v_{n-1}^{inf}) - f(v_{n+1}^{inf}, v_n^{inf})$$

Rapellons que l'équation $n^{sup}y$ et $n^{inf}y$ est l'équation d'équilibre de la force transversale du nœud supérieur et inférieur. Les forces $f(v_i^j, v_{i-1}^j)$ sont des efforts dus aux amortisseurs reliant le nœud i et $(i\text{-}1)$ au nœud supérieur et inférieur . Et comme le cadre de travail choisi est l'espace des fréquences, les variables sont mises sous la forme : $V(x,t) = V(x)e^{\mathbf{i}\omega t}$, donc les efforts dus aux amortisseurs peuvent être exprimés :

$$f(v_i^j, v_{i-1}^j) = -\mathbf{i}\eta\omega\,(v_i^j - v_{i-1}^j)$$

Puis les études sont lancées avec les différents scénarios d'épaisseurs des murs et de plancher correspondant aux modèles continus équivalents de poutre de cisaillement, Timoshenko, Générique, ... L'ensemble des résultats montre l'introduction des forces visqueuses reliées à $\mathbf{i}\,\omega\eta$ dans les équations d'équilibre. Les différentes variables sont désormais dans le domaine complexe, notamment la pulsation ω. Par contre, les paramètres physiques du modèle, y compris le paramètre visqueux

η. Pour évaluer l'effet du niveau des amortisseurs sur les modèles, on considère différents ordres de grandeur de η, qu'on l'évalue en fonction de l'ordre de grandeur du paramètre d'échelle ε.

$$\widetilde{\eta} = \varepsilon^{e_\eta}\, \eta_r$$

η_r est une valeur référence d'ordre $O(1)$ du paramètre visqueux de l'amortisseur. L'ordre de grandeur ε^{e_η} sera modifié pour étudier le changement du comportement du modèle homogénéisé par rapport au modèle initial. Pour chaque niveau de ε^{e_η} choisi, nous cherchons la pulsation ω_j (qui peut être complexe) correspondant à l'équilibre entre efforts élastiques et inertiels.

$$\omega = \omega^{re} + \mathbf{i}\, \omega^{im}$$

ω^{re} correspond à la partie réelle - la pulsation en somme - et ω^{i} à la partie imaginaire - ou atténuation - et comme nous avons séparé ces deux parties donc ces termes sont réels. Dans l'estimation de la pulsation complexe, nous initialisons ces deux parties au même ordre (la résolution se chargeant de trancher l'ordre de départ réel) et son développement asymptotique est :

$$\omega = \varepsilon^{e_f} \left(\omega_0^{re} + \mathbf{i}\, \omega_0^{im}\right) + \varepsilon^{e_f+1} \left(\omega_1^{re} + \mathbf{i}\, \omega_1^{im}\right) + \varepsilon^{e_f+2} \left(\omega_2^{re} + \mathbf{i}\, \omega_2^{im}\right) + \dots$$

la grandeur physique observable de la fréquence complexe :

$$\widetilde{\omega}_j = \varepsilon^{e_f+j} \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\, \omega_j^{im}\right)$$

e_f est l'ordre de grandeur de la pulsation par rapport à la pulsation référence ω_0.

Cette modification ne gène pas les calculs d'homogénéisation, toutes les études avec la pulsation complexe étant identiques aux calculs avec la pulsation réelle. On peut conserver la pulsation complexe ou expliciter les deux parties, dans ce cas toutes les variables seront définies avec une partie réelle et une partie imaginaire comme la pulsation.

Premièrement, pour ce qui est du comportement dynamique local de la poutre, les coefficients de flexion et de compression de la poutre sont :

$$\begin{cases} \chi = \dfrac{2\pi}{\lambda_c} = \sqrt{\dfrac{\rho\omega^2}{E}} = \sqrt{\dfrac{\rho(\omega^{re} + \mathbf{i}\, \omega^{im})^2}{E}} = \chi^{re} + \mathbf{i}\, \chi^{im} \\ \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_f} = \sqrt[4]{\dfrac{\rho A\omega^2}{EI}} = \sqrt[4]{\dfrac{\rho A(\omega^{re} + \mathbf{i}\, \omega^{im})^2}{EI}} = \beta^{re} + \mathbf{i}\, \beta^{im} \end{cases}$$

les expression des efforts nodaux ne changent pas en considérant que les coefficients χ et β sont redéfinis ci-dessus. Et puis le processus d'homogénéisation continue normalement en posant $\omega = \omega^{re} + \mathbf{i}\, \omega^{im}$

Les études du changement de comportement de la poutre de cisaillement en fonction de l'ordre de grandeur de η sont le point de départ de ces nouveaux développement. Cela a permis de mettre en évidence des régimes d'amortissement du modèle en fonction de grandeur de la force visqueuse par rapport aux forces

élastiques et d'inertie. En plus, les résultats sont toujours valables pour la poutre de cisaillement même si les dispositifs d'amortisseurs sont irréalistes. Cette étude est détaillée dans l'annexe A.1 et elle sera rappellée pour le cas des amortisseurs diagonaux.

En effet, les amortisseurs transversaux "fictifs" ne permettent de prendre en compte que le déplacement transversal de la structure. C'est la raison pour laquelle les résultats de l'étude sur la structure de cisaillement est toujours valable. Par contre, pour les autres structures, comme la poutre de flexion, ... il est nécessaire de prendre en compte la déformation longitudinale de la structure (rotation de section). Pour faire cela, nous avons recommencé nos études avec des "amortisseurs diagonaux".

5.1.2 Modèle avec l'amortisseur diagonal

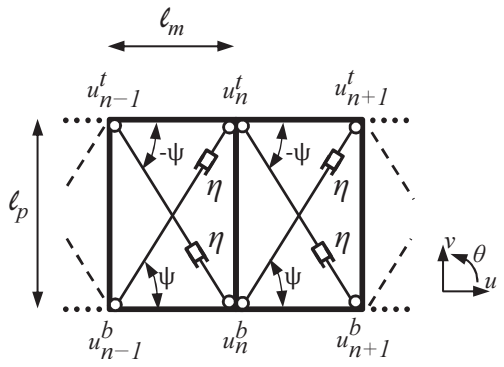


FIGURE 5.2 – Modèle de structure avec des amortisseurs diagonaux

Dans cette deuxième configuration (figure 5.2), les amortisseurs sont toujours articulés aux nœuds de la structure mais dans sur la diagonale des portiques. Les amortisseurs sont installés de façon symétrique pour respecter la périodicité de la structure et permettre le découplage direct des cinématiques longitudinales et transversales. Par contre, le découplage des variables ne nécessite pas la symétrie des amortisseurs. Il est possible de découpler les variables même si nous disposons un seul amortisseur diagonal à chaque étage. Pour ce type de modèle, il nous faut exploiter les équations d'équilibre des efforts longitudinaux pour éliminer les variables longitudinales dans les équations du mouvement. Le comportement final des structures est identique sauf le terme de la partie visqueux qui est multiplié par 2 en raison du nombre des amortisseurs installés. Dans ce mémoire, nous ne présentons que les études de la structure symétrique et les variables sont découplées directement dans les équations d'équilibre.

Les amortisseurs modélisés sont toujours de type visqueux linéaires avec le paramètre visqueux réelle η. Ils sont inclinés de ψ et $-\psi$ par rapport au murs du portique. Dans nos études, les murs et le plancher ont la même longueur, l'angle ψ vaut donc $\pi/4$. La première adaptation de la méthode HMPD consiste au calcul de

la force visqueuse due à l'amortisseur. Puis, il nous faut mesurer la grandeur de la force visqueux par rapport aux autre forces pour en déduire le modèle équivalent.

5.1.2.1 Variation de la longueur des amortisseurs

Le premier point délicat est la détermination de la variation de longueur des amortisseurs. L'hypothèse essentielle est que la structure se déforme dans la gamme des petites déformations. Cela est raisonnable avec l'objectif de limiter le dégât de la structure sous action externe et le comportement des éléments demeurent dans la gamme élastique.

Nous regardons au nœud supérieur du niveau n qui est relié par deux amortisseurs de deux étages adjacents. Ils sont nommés AB et BC dans la figure 5.3. Ses angles par rapport à l'axe longitudinale de la structure sont ψ et $-\psi$ (figure 5.2).

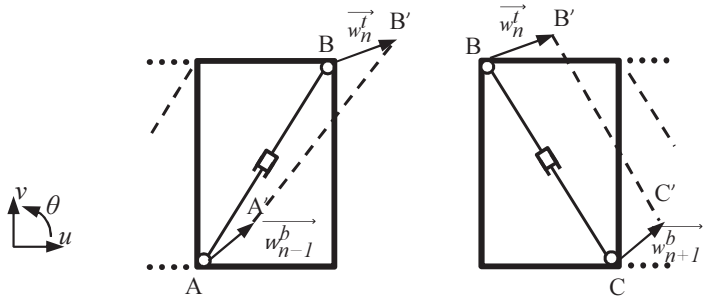


FIGURE 5.3 – Déformation des amortisseurs

La structure se déforme et les nouvelles positions des nœuds sont A', B' et C' qui sont définis par les vecteurs $\overrightarrow{w_k^i}$ du déplacement par rapport à la position initiale. Les composants du vecteur sont les déplacements et de la rotation du nœud. Comme les amortisseurs sont toujours fixés par des rotules au nœud, aucun moment n'est transmis donc la rotation des extrémités n'est pas prise en compte dans cette étude.

Par ailleurs, ces déplacements seront exprimés en fonction des variables macroscopiques du niveau, cf. la définition du changement des variables (section 1.2.3) :

$$\overrightarrow{w_k^t} = \begin{pmatrix} \overset{k}{U} - \frac{\ell_p}{2}\overset{k}{\alpha} \\ \overset{k}{V} + \overset{k}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{w_k^b} = \begin{pmatrix} \overset{k}{U} + \frac{\ell_p}{2}\overset{k}{\alpha} \\ \overset{k}{V} - \overset{k}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La déformation axiale de l'amortisseur AB et BC est déterminée par δ_{AB} et δ_{BC} :

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= ||\overrightarrow{A'B'}|| - ||\overrightarrow{AB}|| \\ \delta_{BC} &= ||\overrightarrow{B'C'}|| - ||\overrightarrow{BC}|| \end{aligned}$$

$\overrightarrow{A'B'}$ est déterminé par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{w_n^t} - \overrightarrow{w_{n-1}^b} \end{aligned}$$

donc :

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} \ell_m \\ \ell_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overset{n}{U} - \frac{\ell_p}{2}\overset{n}{\alpha} \\ \overset{n}{V} + \overset{n}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{n-1}{U} + \frac{\ell_p}{2}\overset{n-1}{\alpha} \\ \overset{n-1}{V} - \overset{n-1}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$||\overrightarrow{A'B'}|| = \sqrt{\left[\ell_m + \left(\overset{n}{U} - \overset{n-1}{U}\right) - \frac{\ell_p}{2}\left(\overset{n}{\alpha} - \overset{n-1}{\alpha}\right)\right]^2 + \left[\ell_p + \left(\overset{n}{V} - \overset{n-1}{V}\right) + \left(\overset{n}{\Delta} - \overset{n-1}{\Delta}\right)\right]^2}$$

Et puis, de manière classique en homogénéisation, les variables sont écrites sous forme de développement asymptotique si elles commencent à l'ordre 0 :

$$X(\varepsilon, x) = \overset{0}{X}(x) + \varepsilon\overset{1}{X}(x) + \varepsilon^2\overset{2}{X}(x) + \varepsilon^3\overset{3}{X}(x) + \dots$$

Puis, l'hypothèse de continuité du déplacement selon la hauteur nous permet de faire le développement en séries de Taylor pour exprimer les variables du niveau $n+1$ et $n-1$ en fonction de celles du niveau n :

$$\begin{cases} X_{n+1} = \overset{0}{X}(n\ell_m) + \varepsilon\Big(\overset{1}{X}(n\ell_m) + L\overset{0}{X}{}'(n\ell_m)\Big) \\ \qquad\qquad \varepsilon^2\Big(\overset{2}{X}(n\ell_m) + L\overset{1}{X}{}'(n\ell_m) + \frac{L^2}{2}\overset{0}{X}{}''(n\ell_m)\Big) + \dots \\ X_{n-1} = \overset{0}{X}(n\ell_m) + \varepsilon\Big(\overset{1}{X}(n\ell_m) - L\overset{0}{X}{}'(n\ell_m)\Big) \\ \qquad\qquad \varepsilon^2\Big(\overset{2}{X}(n\ell_m) - L\overset{1}{X}{}'(n\ell_m) + \frac{L^2}{2}\overset{0}{X}{}''(n\ell_m)\Big) + \dots \end{cases}$$

donc la longueur de l'amortisseur après la déformation au première ordre est :

$$||\overrightarrow{A'B'}|| = \sqrt{\left[\ell_m + \varepsilon L\overset{0}{U}{}'(x) - \ell_p\overset{0}{\alpha}(x)\right]^2 + \left[\ell_p + \varepsilon L\overset{0}{V}{}'(x) + 2\overset{0}{\Delta}(x)\right]^2}$$

et la variation de la longueur de l'amortisseur AB :

$$\delta_{AB} = \sqrt{\left[\ell_m + \varepsilon L\overset{0}{U}{}'(x) - \ell_p\overset{0}{\alpha}(x)\right]^2 + \left[\ell_p + \varepsilon L\overset{0}{V}{}'(x) + 2\overset{0}{\Delta}(x)\right]^2} - \sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}$$

Identiquement pour l'amortisseur BC :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'C'} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{BB'} \\ &= \begin{pmatrix} \ell_m \\ -\ell_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overset{n+1}{U} + \frac{\ell_p}{2}\overset{n+1}{\alpha} \\ \overset{n+1}{V} - \overset{n+1}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{n}{U} - \frac{\ell_p}{2}\overset{n}{\alpha} \\ \overset{n}{V} + \overset{n}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et :

$$\delta_{BC} = \sqrt{\left[\ell_m + \varepsilon L \overset{0}{U}{}'(x) + \ell_p \overset{0}{\alpha}(x)\right]^2 + \left[-\ell_p + \varepsilon L \overset{0}{V}{}'(x) - 2\overset{0}{\Delta}(x)\right]^2} - \sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}$$

La séparation d'échelle définit que la taille de la cellule ℓ_m et ℓ_p est plus petite que la taille de la longueur d'onde. Dans ce cas là, la longueur d'onde est la référence pour tous les paramètres géométriques du modèle. En supposant que la déformation de la structure est petite, c'est-à-dire que la variation de la longueur des amortisseurs est petite par rapport à la taille de la cellule, par conséquent, la différence de la longueur $\varepsilon L \overset{0}{U}{}'(x) + \ell_p \overset{0}{\alpha}(x)$ et $\varepsilon L \overset{0}{V}{}'(x) + 2\overset{0}{\Delta}(x)$ est plus petit que ℓ_m et ℓ_p. Pour cela, les variables $U(x)$, $\alpha(x)$, $V'(x)$ doivent commencer à partir de l'ordre ε et particulièrement $\Delta(x)$ à l'ordre ε^2.

La variation de la longueur des amortisseurs est alors, après développement :

$$\delta_{AB} = \frac{\ell_m \ell_p}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) + \frac{\ell_m^2 \overset{1}{\tilde{U}}{}'(x) + 2\ell_p \overset{2}{\tilde{\Delta}}(x)}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} + O(\varepsilon^3) \dots$$

$$\delta_{BC} = -\frac{\ell_m \ell_p}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) + \frac{\ell_m^2 \overset{1}{\tilde{U}}{}'(x) + 2\ell_p \overset{2}{\tilde{\Delta}}(x)}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} + O(\varepsilon^3) \dots$$

Dans notre étude, les murs et le plancher ont la même longueur et cette égalité sera introduite directement dans les équations d'équilibre, et dans celles-ci ne restent que la longueur des murs ℓ_m.

5.1.2.2 Modèle de poutre équivalent

À la fin de la procédure d'homogénéisation, nous cherchons le comportement de la poutre continue équivalente. Ce dernier est exprimé dans les équations d'équilibre des efforts internes. Dans l'étude de comportement représentatif de la structure du bâtiment, nous nous intéressons aux vibrations transversales qui sont exprimées dans les équations d'équilibres de l'effort transversal (T_t^n), (M^n) et $(\mathcal{M}_t^n)$. Rappellons que l'équation (T_t^n) est la somme de toutes les forces transversales qui s'exercent sur le niveau considéré. Elle joue le même rôle qu'une équation d'équilibre d'effort tranchant de la poutre continue. De même, l'équation (M^n) est la différence des efforts longitudinaux et elle exprime l'équilibre en moment à l'échelle de la structure. Enfin, l'équation $(\mathcal{M}_t^n)$ est la somme des moments aux nœuds. Cette équation n'existe pas en RDM classique, elle fournit des informations supplémentaires pour déduire les variables macroscopiques.

$$\begin{aligned}
(T_t^n) &= (n^{sup}y) + (n^{inf}y) && \text{: somme des forces transversales} \\
(M^n) &= (n^{inf}x) - (n^{sup}x) && \text{: différence des forces longitudinales} \\
(\mathcal{M}_t^n) &= (n^{sup}m) + (n^{inf}m) && \text{: somme des moments aux nœuds}
\end{aligned}$$

Le modèle dynamique de poutre équivalente est trouvé lorsque la force d'inertie équilibre la force élastique. Dans notre étude, l'ajout des amortisseurs introduit un effort visqueux et n'internvient que dans l'équation des forces (l'équation (T_t^n) et (M^n)). L'équation des moments aux nœuds n'est pas changée car les amortisseurs sont articulés aux nœuds et donc, ils ne provoque aucun effet.

Trois types de forces vont participer à léquilibre des efforts internes :
— La première force est la force élastique qui ne dépend que des paramètres du système comme la géométrie et la caractéristique des éléments. Donc pour une structure étudiée, cette force est fixée dans un ordre de grandeur défini et ne dépend pas du régime de vibration ou des amortisseurs.
— La deuxième force est la force d'inertie qui est proportionnelle à l'accélération du mouvement. Dans l'hypothèse de vibration harmonique, elle dépend au final du carrée de la fréquence de vibration.
— La troisième force de notre étude est la force dite "visqueuse" des amortisseurs. Cette force dépend de la vitesse de mouvement et donc directement de la fréquence de vibration.

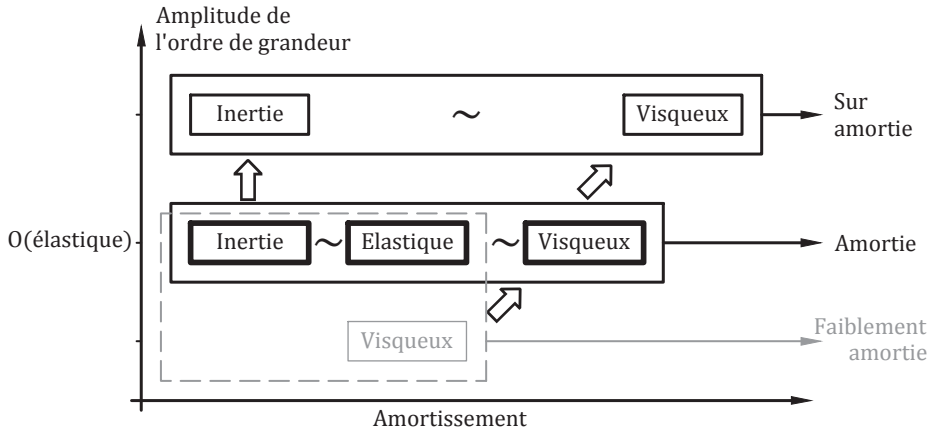


FIGURE 5.4 – Les diffŕents régimes d'amortissement

Dans chaque cas, l'objectif est de chercher les différents niveaux d'amortissement du système en fonction de l'ordre de grandeur du paramètre visqueux η des amortisseurs, par conséquence le changement du comportement de la structure initiale. Pour faire cela, nous commençons par différents ordres de grandeur de η, et puis, nous cherchons l'équilibre d'au moins deux forces entre les trois forces. (1) La première situation retrouvée est l'équilibre de la force d'inertie et la force élastique au premier ordre des équations d'équilibre. L'amortisseur n'entraîne pas d'impact important au comportement. Elle se trouve à l'ordre supérieur de l'équation et constitue un terme correcteur. Ce cas est nommé régime **faiblement amorti**. (2) L'augmentation de l'ordre de grandeur de η permet d'amener la force visqueuse au même ordre de grandeur que la force élastique et la force inertie sans changer le régime de vibration. Dans cette situation, les amortisseurs permettent d'augmenter significativement l'amortissement du système. Nous obtenons un régime **amorti**. (3) Un dernier état possible est celui où la force visqueuse qui dépend de

la fréquence de vibration et la force d'inertie qui dépend du carré de la fréquence, sont du même ordre et plus grands que la force élastique. Dans ce cas, l'effet des amortisseurs est très important, le paramètre visqueux est très grand par rapport à l'ordre de grandeur des paramètres élastiques du système. Le comportement intrinsèque de la structure a disparu, et nous avons une situation **sur-amortie**. Ces situations sont représentées sur la figure 5.4.

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier le changement du comportement dynamique de différents modèles en considérant différents ordres de grandeur du paramètre visqueux η. Sur le même schéma, les structures idéalisées se composent donc des deux murs et d'un plancher, qui définissent le comportement global en fonction de leurs caractéristiques géométriques (épaisseur). Les amortisseurs sont installés sur les diagonales des portiques comme présentés dans la figure 5.5.

Nous commençons par une structure se comportant comme une poutre de cisaillement (n'impliquant qu'un seul mécanisme : le cisaillement de cellule). L'étude précise et détaillée de chaque régime d'amortissement montre l'évolution du comportement selon l'ordre de grandeur de l'amortisseur imposé. Et puis, nous continuons avec la poutre de Timoshenko (qui tient compte d'un deuxième mécanisme : la flexion globale) pour étudier le changement du système en présence des amortisseurs. Dans ce cas, nous étudions le cas du régime amorti, où toutes les forces sont donc de même ordre de grandeur. Enfin, nous étudions le cas de la poutre Générique. Dans cette poutre, il existe simultanément trois mécanismes : cisaillement, flexion globale et flexion interne. Cette étude générale nous permet de mesurer l'ensemble l'ordre de grandeur de chaque mécanisme et déterminer le comportement de chaque cas de poutre quand un terme dégénère. Par rapport à l'étude avec amortisseurs "transverses", il nous faut d'intervenir simultanément sur l'équation d'équilibre de chaque nœud dans deux directions par l'injection de la force visqueuse des amortisseurs.

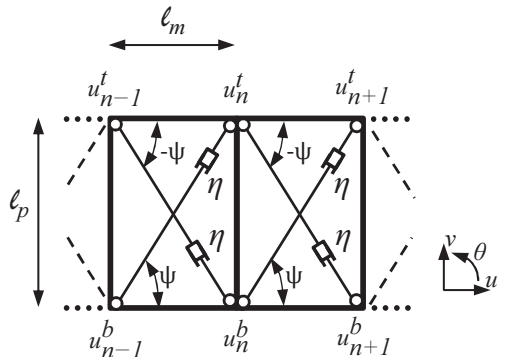


FIGURE 5.5 – Modèle de structure avec des amortisseurs diagonaux

5.2 Poutre de cisaillement

L'homogénéisation du modèle de l'empilement périodique de portiques simples est capable de modéliser le comportement dynamique continu équivalent. Le comportement final est piloté par les paramètres physiques du modèle. Dans l'étude de [Hans and Boutin, 2008], c'est le choix des épaisseur des éléments qui module le comportement visé. En fonction de ces épaisseurs, le modèle homogénéisé peut être décrit par la poutre de cisaillement, flexion, ... ou générique. La structure correspondant à la poutre de cisaillement a la géométrie :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\varepsilon^2); \qquad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\varepsilon^2); \qquad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1)$$

Correspondant aux trois régimes d'amortissement présentés précedemment, les viscosités de l'amortisseur sont pris successivement de l'ordre $O(\varepsilon^5)$ (faiblement amorti), $O(\varepsilon^4)$ (amorti) et $O(\varepsilon^7/2)$ (sur-amorti). Et les variables macroscopiques sont développées à partir de l'ordre $O(\varepsilon)$ sauf Δ qui commence à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ - pas par choix, simplement comme résultat de l'équilibre des différents ordres.

5.2.1 Poutre de cisaillement faiblement amortie

Dans ce régime, le paramètre visqueux η est pris à $O(\varepsilon^5)$ de l'ordre de référence η_r et le régime dynamique s'établit à la fréquence de l'ordre $O(\varepsilon^2)$ dans l'équation $(T_t - 0)$:

$$\widetilde{\eta}_5 = \varepsilon^5\, \eta_r \qquad \text{où} \qquad \eta_r = O(1)$$

et

$$\omega = \varepsilon^2 \left(\omega_0 + \varepsilon\, \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots\right) \qquad \text{où} \qquad \omega_j = \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\, \omega_j^{im}\right)$$

Le premier ordre des équations d'équilibre des forces transversales est :

$$\begin{cases} \Lambda\, \widetilde{\omega}_2^2\, \overset{1}{\widetilde{V}}(x) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}{}'(x) \right) = 0 & (T_t - 0) \\ -\mathcal{K}_p\, \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 0) \\ \mathbb{I}\!\mathbb{I}\, \overset{1}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) = 0 & (M - 0) \end{cases}$$

Les deux premiers ordres de l'équation d'équilibre de moment global $(M-0)$ et $(M-1)$ indiquent que $\overset{1}{\widetilde{\alpha}}{}''(x)$ et $\overset{2}{\widetilde{\alpha}}{}''(x)$ sont nuls, et donc que la rotation de l'étage est nulle au premier ordre, ce qui est cohérent pour un comportement de poutre de cisaillement. Cette rotation ne commence qu'à partir de l'ordre $O(\varepsilon^3)$ trouvé dans $(M-2)$:

$$\mathbb{I}\!\mathbb{I}\, \overset{3}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) + \mathcal{K}_p\, \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) = 0 \qquad (M-2)$$

Dans ces équations, il n'existe pas d'impact des amortisseurs. Ces équations montrent exactement le comportement de la poutre de cisaillement trouvées dans

[Hans and Boutin, 2008]. C'est à dire que le comportement dominant de la structure n'est pas influencé par la présence des amortisseurs au premier ordre. C'est la raison pour laquelle ce régime s'appelle le régime faiblement amorti.
En remplaçant $\overset{1}{\widetilde{\theta}}(x)$ de $(\mathcal{M}_t - 0)$ dans l'équation $(T_t - 0)$, nous obtenons l'équation du mouvement de la poutre qui est piloté par le premier ordre du déplacement transversal :

$$\Lambda\, \widetilde{\omega}_2^2\, \overset{1}{\widetilde{V}}(x) + K\, \overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 \qquad\qquad (eq - 0)$$

$\overset{3}{\widetilde{\alpha}}(x)$ et $\overset{1}{\widetilde{\theta}}(x)$ sont les deux variables cachées, et le comportement du modèle est piloté par le déplacement transversal $\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$.

L'équation $(eq - 0)$ fournie par HMPD conduit à introduire un effort tranchant $\overset{1}{\widetilde{T}}(x)$ qui est défini comme dans la théorie classique des poutres .

$$\overset{1}{\widetilde{T}}(x) = -K\, \overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) \qquad\qquad \Lambda\, \widetilde{\omega}_2^2\, \overset{1}{\widetilde{V}}(x) = \overset{1}{\widetilde{T}}{}'(x)$$

la structure étudiée est considérée comme une poutre encastrée à la base et libre à l'extrémité. Appliquant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \overset{1}{\widetilde{V}}(0) = 0 \\ \overset{1}{\widetilde{T}}(H) = 0 \end{cases}$$

nous cherchons les modes propres du système. Rappelons que :

$$\begin{cases} \overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) + \delta^2\, \overset{1}{\widetilde{V}}(x) = 0 \\ \delta^2 = \dfrac{\Lambda\, \widetilde{\omega}_2^2}{K} \end{cases}$$

Nous trouvons la solution du mouvement transversal est toujours réelle et à la forme sinusoïdale (annexe A.1) même si les variables sont complexes. Dans le cas encastré à la base et libre en tête, nous avons :

$$\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = A\, \sin \delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\, k - 1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

et le premier ordre de la pulsation est réelle :

$$\widetilde{\omega}_2^k = \widetilde{\omega}_2^{\mathbb{R}\, k} = \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}\, \delta_k \tag{5.1}$$

On regarde maintenant au deuxième ordre des équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \Lambda\,\widetilde{\omega}_2^2\overset{2}{\widetilde{V}}(x) + \mathcal{K}_m\left(\overset{2}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{2}{\widetilde{\theta}}{}'(x)\right) \\ \qquad\qquad + 2\Lambda\,\widetilde{\omega}_2\,\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + \mathbf{i}\,\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\,\ell_m\left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\widetilde{\alpha}}{}'(x)\right) = 0 & (T_t - 1) \\ -\mathcal{K}_p\overset{2}{\widetilde{\theta}}(x) + \mathcal{K}_m\left(\overset{2}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{2}{\widetilde{\theta}}(x)\right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 1) \end{cases}$$

Dans l'équation de la somme des forces transversales de l'étage $(T_t - 1)$ apparaît la force visqueuse introduite par les amortisseurs. Par contre, nous ne la trouvons pas dans l'équation de la somme des moments aux nœuds de l'étage en raison de l'articulation des amortisseurs aux nœuds. Comme les deux premiers ordres de la rotation sont nuls, donc, en substituant $\overset{2}{\widetilde{\theta}}(x)$ dans $(T_t - 1)$ nous trouvons l'équation dynamique de deuxième ordre :

$$\Lambda\,\widetilde{\omega}_2^2\,\overset{2}{\widetilde{V}}(x) + K\,\overset{2}{\widetilde{V}}{}''(x) = -2\Lambda\,\widetilde{\omega}_2\,\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}(x) - \mathbf{i}\,\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\,\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) \qquad (eq-1)$$

L'équation $(eq-1)$ exprime que la correction de la fréquence $\widetilde{\omega}_3$ et du déplacement $\overset{2}{\widetilde{V}}(x)$ est modifié par la force visqueuse due aux amortisseurs. Pour chercher la correction de fréquence qui nous intéresse, nous multiplions l'équation $(eq-0)$ par $\overset{2}{\widetilde{V}}(x)$ et l'équation $(eq-1)$ par $\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$, puis nous faisons l'intégrale sur la hauteur de la poutre :

$(eq-0)$:

$$\int_0^H \left(\Lambda\,\widetilde{\omega}_2^2\,\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\overset{2}{\widetilde{V}}(x) + K\,\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x)\,\overset{2}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$

$$\rightarrow \left[K\,\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)\,\overset{2}{\widetilde{V}}(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(\Lambda\,\widetilde{\omega}_2^2\,\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\,\overset{2}{\widetilde{V}}(x) - K\,\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)\,\overset{2}{\widetilde{V}}{}'(x)\right) dx = 0 \qquad (5.2)$$

$(eq-1)$:

$$\int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\,\overset{2}{\widetilde{V}}(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + K\,\overset{2}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}{}^2(x) + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$

$$\rightarrow \left[K \overset{2}{\widetilde{V}}'(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{2}{\widetilde{V}}(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x) - K\overset{2}{\widetilde{V}}'(x)\overset{1}{\widetilde{V}}'(x)\right) dx$$
$$+ \int_0^H \left(2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}^2(x) + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0 \tag{5.3}$$

Dans l'équation (5.2) et (5.3), il est possible d'appliquer les conditions aux limites de la poutre encastrée - libre aux différents ordres des variables, donc : $\overset{p}{\widetilde{V}}(0) = 0$ et $\overset{p}{\widetilde{V}}'(H) = 0$. Par conséquent :

$$\int_0^H \left(2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}^2(x) + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$
$$\rightarrow \mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\ell_m\left[\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\overset{1}{\widetilde{V}}'(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(-\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}'^2(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}^2(x)\right) dx = 0$$
$$\rightarrow \int_0^H \left(-\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}'^2(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{1}{\widetilde{V}}^2(x)\right) dx = 0 \tag{5.4}$$

On trouve la correction de la fréquence en ajoutant l'amortissement :

$$\widetilde{\omega}_3 = \frac{\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\ell_m}{2\Lambda}\frac{\int_0^H \overset{1}{\widetilde{V}}'^2(x)\,dx}{\int_0^H \overset{1}{\widetilde{V}}^2(x)\,dx} \tag{5.5}$$

Comme le déplacement $\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = \sin\delta_k x$, nous trouvons la valeur de $\widetilde{\omega}_3$:

$$\widetilde{\omega}_3^k = \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\,\ell_m}{2\,\Lambda}\delta_k^2 \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N} \tag{5.6}$$

Et comme toutes les paramètres sont réelles, donc, la correction de la pulsation est une valeur imaginaire pure. La fréquence trouvée au premier ordre dans l'équation (5.1) et celle trouvée au deuxième ordre dans l'équation (5.6) nous conduisent à la valeur de la fréquence propre avec la correction :

$$\widetilde{\omega}^k = \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}\,\delta_k + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\,\ell_m}{2\Lambda}\delta_k^2 + O(\varepsilon^4) \tag{5.7}$$

La fréquence est complexe, dans ce cas, la valeur au premier ordre est réelle et conforme à la poutre de cisaillement classique. Les amortisseurs de faible viscosité provoque un changement à l'ordre supérieur et sont liés à la partie imaginaire de la fréquence. La partie imaginaire explique l'amortissement du mouvement de la poutre selon le temps et donc la dissipation de l'énergie de la structure. Ce premier cas d'étude correspond bien à un régime faiblement amorti.

5.2.2 Poutre de cisaillement en régime amorti

Dans cette étude, le paramètre visqueux η de l'amortisseur est prise à l'ordre $O(\varepsilon^4)$ et la vibration est encore trouvée à l'ordre $O(\varepsilon^2)$.

$$\widetilde{\eta}_4 = \varepsilon^4 \, \eta_r$$

Avec cette ordre de grandeur du paramètre visqueux, la force visqueuse joue un rôle plus important dans l'équilibre de la structure. Elle apparaît au même ordre de grandeur que la force élastique et la force cinématique dans l'équation d'équilibre au premier ordre des forces transversales. Par contre, les premiers ordres de l'équation du moment global $(M-0)$ et $(M-1)$ ne changent pas. Cela explique que le modèle au premier ordre est toujours le cisaillement avec une rotation de la section toujours nulle. On note cependant dans l'équation de moment global $(M-2)$ l'émergence d'un terme visqueux. Pour l'équation d'équilibre des moments internes, aucun changement n'est observé.

$$\begin{cases} \Lambda\widetilde{\omega}_2^2 \overset{1}{\widetilde{V}}(x) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}{}'(x) \right) + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_4 \, \widetilde{\omega}_2 \ell_m \overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 & (T_t - 0) \\ -\mathcal{K}_p \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 0) \\ \mathbb{I}\mathbb{I} \, \overset{3}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) + \mathcal{K}_p \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) + \mathbf{i} \, \widetilde{\eta}_4 \, \widetilde{\omega}_2 \ell_m \overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) = 0 & (M-2) \end{cases}$$

$\overset{3}{\widetilde{\alpha}}(x)$ et $\overset{1}{\widetilde{\theta}}(x)$ sont toujours les deux variables cachées et l'équation du mouvement de la poutre équivalente avec la force visco-élastique s'écrit :

$$(K + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_4 \, \widetilde{\omega}_2 \ell_m) \overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) + \Lambda\widetilde{\omega}_2^2 \overset{1}{\widetilde{V}}(x) = 0 \qquad (eq - 0)$$

La force visco-élastique est définie par :

$$\overset{1}{\widetilde{T}}{}^*(x) = -K^* \overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) \qquad \text{dont} \quad K^* = K + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_4 \, \widetilde{\omega}_2 \ell_m$$

Nous poursuivons avec la recherche de la solution de l'équation $(eq - 0)$, qu'on écrit :

$$\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) + \delta^2 \overset{1}{\widetilde{V}}(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \delta^2 = \frac{\Lambda\widetilde{\omega}_2^2}{K + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_4 \, \widetilde{\omega}_2 \ell_m}$$

Bien que δ semble complexe, les conditions aux limites conduisent à la même équation en fréquence :

$$\cos(\delta \; H) = 0$$

et en définitive à une solution réelle (cf. Annexe A.1)

$$\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = A \sin \delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k - 1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

La fréquence propre est déterminé à partir de la relation :

$$\delta_k^2 = \frac{\Lambda \widetilde{\omega}_2^2}{K + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\, \widetilde{\omega}_2 \ell_m}$$
$$\rightarrow \widetilde{\omega}_2^2 - \frac{\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\, \ell_m}{\Lambda}\delta_k^2\, \widetilde{\omega}_2 - \frac{K}{\Lambda}\delta_k^2 = 0$$

En retenant la solution positive pour la partie rélle correspondant à la fréquence de vibration, on obtient :

$$\widetilde{\omega}_2 = \delta_k \sqrt{\frac{K}{\Lambda} - \left(\frac{\widetilde{\eta}_4\, \ell_m}{2\Lambda}\right)^2 \delta_k^2} + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_4\, \ell_m}{2\Lambda}\delta_k^2$$

5.2.3 Poutre de cisaillement en régime sur-amorti

Dans toutes les études, la partie élastique $\mathcal{K}_m(\overset{1}{\widetilde{V}}''(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}'(x))$ est fixé à un ordre qui ne dépend qu'aux caractéristiques de la structure. La partie cinématique $\Lambda\widetilde{\omega}_e^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$ dépend du carré de la fréquence et la partie visqueuse $\mathbf{i}\widetilde{\eta}_e\widetilde{\omega}_e\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x)$ dépend de la somme des ordres de η et de la pulsation. Dans cette dernière étude sur le comportement de cisaillement, il suffit que le paramètre visqueux η soit choisi d'un ordre de grandeur ($O(\varepsilon^{7/2})$) pour que la force visqueuse soit dominante et plus grande que la force élastique. L'ordre de la pulsation de vibration correspondante est alors à $O(\varepsilon^{3/2})$:

$$\widetilde{\eta}_{7/2} = \varepsilon^{7/2}\, \eta_r$$

et

$$\omega = \varepsilon^{3/2}\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right) \qquad \text{où} \qquad \omega_j = \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\,\omega_j^{im}\right)$$

Avec ces hypothèses, les équations d'équilibre des forces transversales (T_t) et des moments globaux (M) changent, en étant "remontés" à l'ordre précédant. Au premier ordre, nous trouvons directement l'équilibre de la force visqueuse et de la force d'inertie :

$$\begin{cases} \Lambda\widetilde{\omega}_{3/2}^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + \mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,\widetilde{\omega}_{3/2}\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x) = 0 & (T_t - 1) \\ \mathbb{II}\,\overset{2}{\widetilde{\alpha}}''(x) + \mathbf{i}\,\widetilde{\eta}_{7/2}\,\widetilde{\omega}_{3/2}\ell_m\,\overset{1}{\widetilde{V}}'(x) = 0 & (M - 1) \end{cases}$$

L'équation $(Tt - 1)$ conduit donc à :

$$\widetilde{\omega}_{3/2}\left(\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x) + \Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right) = 0 \qquad (T_t - 1)$$

$$\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,\ell_m\overset{1}{\widetilde{V}}''(x) + \Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = 0$$
$$\rightarrow \overset{1}{\widetilde{V}}''(x) + \delta^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \delta^2 = \frac{\Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}}{\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,\ell_m}$$

La résolution de cette équation est identique aux cas précédant avec les mêmes conditions aux limites, nous trouvons que le déplacement transversal $\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$ est réel et sous la forme sinusoïdale :

$$\overset{1}{\widetilde{V}}(x) = A \sin \delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{R}$$

Nous obtenons que le premier ordre de la pulsation est une valeur imaginaire pure :

$$\widetilde{\omega}_{3/2} = \mathbf{i}\,\widetilde{\omega}^{im}_{3/2} = \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_{7/2}\,\ell_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

ce qui correspond effectivement à un régime sur-amorti. On notera que, comme la déformée associée reste réelle, il n'y a pas de déphasage entre les différents points d'une telle structure avec un comportement de poutre de cisaillement. On verra que cette situation est unique et ne se transpose pas aux autres types de comportement. On en verra la raison plus loin.

5.2.4 Résumé de l'étude sur la structure en cisaillement

Trois cas d'études pour trois ordres de grandeurs du paramètre visqueux η nous donnent des résultats bien détaillés et intéressants. Il faut bien noter que la résolution analytique ci-dessus est effectué en prenant en compte les valeurs complexes des variables. Ce dernier est possible dans ce cas grâce à l'équation du mouvement à l'ordre deux. Pour les autres modèles, le mouvement est exprimé par des équations différentielles d'ordre supérieur, et il n'est pas envisageable d'en faire une résolution analytique simplement.

Le premier cas considère que le paramètre visqueux et donc l'effet des amortisseurs est plus faible que les autres mécanismes de la structure. La force visqueuse n'apparaît pas au premier ordre des équations d'équilibre. Le comportement de la structure en cisaillement ne change pas. Cependant, cette force existe aux ordres supérieurs. Elle fournit un effet correctif sur les variables macroscopiques du modèle. La résolution du problème en prenant en compte les ordres supérieurs donne que le mouvement de la poutre de cisaillement est toujours réel et sous la forme sinusoïdale. Par contre, la fréquence réelle est corrigée à l'ordre supérieur par un terme purement imaginaire.

Dans le deuxième cas, la force visqueuse est aussi importante que la force élastique et la force d'inertie. Elles apparaissent simultanément au premier ordre des équations d'équilibre. Le mouvement de la poutre équivalente dans ce cas a été changé. L'effort de cisaillement devient l'effort visco-élastique avec la rigidité K^* prenant en compte la viscosité des amortisseurs $\mathbf{i}\widetilde{\eta}\,\widetilde{\omega}\ell_m$. Cette rigidité "visqueuse" dépend de la fréquence de vibration, ce qui est cohérent avec les caractéristiques de l'amortisseur visqueux. La résolution du problème donne une fréquence analytique complexe. Par rapport au premier cas, la partie imaginaire de la fréquence est maintenant aussi importante que la partie réelle.

Le dernier cas est le cas (peut-être "irréaliste") où la viscosité est plus grande que l'élasticité de la structure. La fréquence propre de la poutre est imaginaire au premier ordre. Dans ce cas, le comportement initial de la structure sans amortisseur est perdu et nous pouvons imaginer que toute l'énergie externe injectée dans la structure sera absorbée par les amortisseurs.

En pesant l'ordre de grandeur de $\dfrac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{\sqrt{2K\Lambda}}$ on peut déterminer les trois régimes amortis par la solution de la fréquence :

$$\begin{aligned}
\text{Faiblement amorti} : O\left(\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{\sqrt{2K\Lambda}}\right) < O(1) : \quad \widetilde{\omega} =& \delta_k\sqrt{\frac{K}{\Lambda}} & +\mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{2\Lambda}\delta_k^2 \\
\text{Amorti} : O\left(\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{\sqrt{2K\Lambda}}\right) \approx O(1) : \quad \widetilde{\omega} =& \delta_k\sqrt{\frac{K}{\Lambda} - \left(\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{2\Lambda}\right)^2\delta_k^2} & +\mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{2\Lambda}\delta_k^2 \\
\text{Sur-amorti} : O\left(\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{\sqrt{2K\Lambda}}\right) > O(1) : \quad \widetilde{\omega} =& \qquad 0 & +\mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{\Lambda}\delta_k^2
\end{aligned}$$

Parmi les trois régimes identifiés, la deuxième étude qui accorde la même importance de la force visqueuse avec la force élastique et la force d'inertie devient l'étude représentative pour les deux autres études. La loi de comportement et l'équation d'équilibre sont ré-écrites ci-dessous avec l'ordre de grandeur des variables, et " $\widetilde{}$ " sont enlvevé.

Loi de comportement :

$$T^* = -K^*\,V' \tag{5.8}$$

La rigidité visco-élastique au cisaillement :

$$K^* = K + \mathbf{i}\,\eta\,\omega\,\ell_m \tag{5.9}$$

Équation d'équilibre :

$$T^{*\prime} = \Lambda\,\omega^2\,V \tag{5.10}$$

Premièrement, nous pouvons montrer que l'ajout de l'amortisseur visqueux à la structure en cisaillement n'entraîne pas l'apparition de nouveaux mécanismes. La déformée modale est toujours réelle sous la forme sinusoïdale. Cet ajout n'apporte que de la partie visqueuse à la rigidité au cisaillement et cela conduit à un effort de cisaillement visco-élastique. En terme d'énergie, cette partie visqueuse joue le rôle de la dissipation d'énergie du système et va permettre d'augmenter le taux d'amortissement global de la structure réelle.

Par rapport à l'étude de la structure en cisaillement avec l'amortisseur "transversal" exposée dans l'annexe A.1, la modification de l'installation des amortisseurs n'entraîne que le facteur de la partie visqueuse dans les variables d'effort et de rigidité du modèle. Cela est raisonnable, car dans la structure étudiée, le cisaillement est le mécanisme dominant et le mouvement longitudinal de la structure est négligeable par rapport au comportement transversal. Donc, même si l'installation d'amortisseur est capable d'impacter le comportement longitudinal, dans ce cas de figure, il n'est pas activé.

En plus, il nous faut bien noter que dans notre étude, il est nécessaire de prendre en compte la variation de longueur réelle des amortisseurs diagonaux, ce qui conduit à un ordre de démarrage des variables à partir de l'ordre $O(\varepsilon)$. Cette remarque est cohérente avec l'hypothèse de petites déformations de la structure, et les matériaux restent dans leur gamme de comportement élastique.

Avec l'hypothèse du mouvement harmonique représenté dans le domaine temporel par l'exponentiel de $\mathbf{i}\,\widetilde{\omega}t$, la partie imaginaire de la pulsation sera associée à la baisse d'amplitude du mouvement donc au taux d'amortissement effectif :

$$\xi_k = \frac{1}{\omega_0^k}\frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m}{2\Lambda}\delta_k^2 \qquad \text{où} \qquad \omega_0^k = \delta_k\sqrt{K/\Lambda} \tag{5.11}$$

soit, en prenant des conditions encastré-libre, c'est-à dire $\delta_k = (2k-1)\pi/2H$:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{\widetilde{\eta}\,\ell_m\delta_k}{2\sqrt{K\Lambda}} \\ \omega_k &= \omega_0^k\sqrt{1-\xi_k^2} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Les deux formules (5.11) et (5.12) de calcul du taux d'amortissement global et la fréquence propre de la poutre équivalente sont cohérentes avec celles d'un système masse-ressort (et amortisseur).

5.3 Modèle de poutre de Timoshenko

Nous poursuivons maintenant avec un comportement plus complexe, le modèle de poutre de Timoshenko. Un exemple de structure multi-portique simple présentant ce comportement a les paramètres suivant :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\varepsilon); \qquad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\ell_p\varepsilon); \qquad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1)$$

Pour la poutre de Timoshenko, nous présentons uniquement le régime amorti où les différents mécanismes sont du même ordre de grandeur. En faisant ensuite varier les grandeurs relatives entre les mécanismes, on pourra en déduire les autres régimes d'amortissement.

Les calculs préliminaires ont permis de déterminer que le paramètre visqueux η doit être d'ordre $O(\varepsilon^2)$ et la fréquence d'ordre $O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_2 &= \varepsilon^2\eta_0 \\ \tilde{\omega}_1 &= \varepsilon\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right) \end{aligned}$$

Le premier ordre des équations d'équilibre fourni par HMPD nous donnent :

$$\begin{cases} \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}{}'(x) \right) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1 \dfrac{\sqrt{2}\ell_m\ell_p}{\sqrt{\ell_m^2+\ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) \right) = 0 & (T_t - 0) \\ \mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) - \mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}''(x) - \mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1 \dfrac{\sqrt{2}\ell_p^2}{\sqrt{\ell_m^2+\ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) = 0 & (M - 0) \\ \mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) + \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 0) \end{cases}$$

Pour simplifier les expressions sans perdre en généralité, il est au final plus simple de prendre $\ell_p = \ell_m$, ce qui implique une inclinaison des amortisseurs à 45 degrés, et les équations $(M-0)$ et $(\mathcal{M}_t - 0)$ donnent :

$$\mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) = -\mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}''(x) - \mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1\ell_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right)$$

En remplaçant dans $(T_t - 0)$, on obtient :

$$\Lambda\tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) = \mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}^{(3)}(x) \tag{5.13}$$

De $(\mathcal{M}_t - 0)$, on déduit :

$$\overset{1}{\tilde{\theta}}(x) = \frac{K}{\mathcal{K}_m} \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) + \frac{K}{\mathcal{K}_p} \overset{1}{\tilde{V}}{}'(x)$$

Et en introduisant $\overset{1}{\tilde{\theta}}(x)$ dans l'équation $(T_t - 0)$, on a :

$$\overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) = \frac{\Lambda\tilde{\omega}_1^2}{(K + \mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1\ell_m)} \overset{1}{\tilde{V}}(x) + \overset{1}{\tilde{V}}{}''(x)$$

Nous obtenons donc l'équation dynamique :

$$\mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) + \mathbb{EI} \frac{\Lambda\tilde{\omega}_1^2}{(K + \mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1\ell_m)} \overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) = 0 \tag{5.14}$$

L'équation (5.14) montre que l'ajout de l'amortisseur diagonal dans le portique modifie encore la rigidité de cisaillement. Nous définissons les lois de comportement du modèle équivalent comme la poutre continue de Timoshenko classique en considérant l'effort de cisaillement visco-élastique avec la rigidité visco-élastique au cisaillement :

$$\begin{cases} \text{Effort tranchant :} & \overset{1}{\widetilde{T}}{}^*(x) = -K^* \left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\widetilde{\alpha}}(x) \right) \\ \text{Moment global :} & \overset{1}{\widetilde{\mathbb{M}}}(x) = -\mathbb{EI}\, \overset{1}{\widetilde{\alpha}}{}'(x) \end{cases}$$

et l'équation $(T_t - 0)$ et $(M - 0)$ permettent de définir les équations d'équilibre de la poutre équivalente :

$$\overset{1}{\widetilde{T}}^{*\,\prime}(x) = \Lambda\tilde{\omega}_1^2\overset{1}{\tilde{V}}(x) \qquad \overset{1}{\widetilde{\mathbb{M}}}^{\,\prime}(x) = \overset{1}{\widetilde{T}}^{*}(x)$$

Pour vérifier la cohérence du modèle et déterminer les conditions aux limites du nouveau modèle de poutre Timoshenko, nous multiplions la première l'équation d'équilibre par $\frac{1}{2}\overset{1}{\tilde{V}}(x)$ et intégrons par parties sur toute la hauteur de la structure H. Nous trouvons l'équilibre de l'énergie cinétique et le travail des mécanismes du modèle :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\tilde{\omega}_1^2\overset{1}{\tilde{V}}^{\,2}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{\overset{1}{\widetilde{T}}^{*\,2}(x)}{K^*} + \frac{\overset{1}{\widetilde{\mathbb{M}}}^{\,2}}{\mathbb{EI}}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(\left[\overset{1}{\widetilde{T}}^{*}(x)\overset{1}{\tilde{V}}(x)\right]_0^H + \left[\overset{1}{\widetilde{\mathbb{M}}}(x)\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x)\right]_0^H\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

Pour chercher la solution du mouvement de la poutre de Timoshenko "amortie", il nous faut quatre conditions aux limites exprimées soient en fonction des effort tranchant $\overset{1}{\widetilde{T}}^{*}(x)$ et $\overset{1}{\widetilde{\mathbb{M}}}(x)$, soit en fonction des variable macroscopique $\overset{1}{\tilde{V}}(x)$ et $\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x)$. Cependant, la résolution analytique de cette poutre en prenant en compte les variables complexes est plus difficile que le cas de la poutre de cisaillement. La première difficulté vient de l'équation de différentielle de degré 4, la solution de cette équation dans le domaine de vibration harmonique s'écrit sous la forme :

$$V(x) = A\,cos(\delta_1\,x) + B\,sin(\delta_1\,x) + C\,cosh(\delta_2\,x) + D\,sinh(\delta_2\,x)$$

Pour chercher la solution, il nous faut développer les quatres conditions aux limites en fonction de variable ci-dessus dans le domaine complexe. La résolution s'effectue à partir de la même approche que dans le domaine reélle, à ceci près que le processus est cette fois-ci itératif. En effet, les coefficients de l'équation dynamique (équation 5.14) faisant intervenir la pulsation (elle-même recherchée), il est nécessaire d'itérer jusqu'à la stabilisation des solutions, ce qui est soit rapide, soit source d'instabilité numérique. Nous rencontrons la même difficulté plus tard dans l'équation de degré six de la poutre Générique dans la section suivante. Sachant que la poutre Générique est représentative de tous les autres modèles, nous aborderons l'approche numérique sur celle-ci afin de résoudre les cas précis.

5.4 Modèle de poutre générique

On traite maintenant le cas plus général du modèle de poutre Genérique. Un exemple est obtenu à partir de la géométrie de structure multi-portique suivant :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(1); \qquad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\varepsilon^{2/3}); \qquad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1)$$

Nous cherchons le régime amorti où la force d'inertie, la force élastique ainsi que la force visqueuse sont du même ordre de grandeur, ce qui conduit à :

$$\tilde{\eta}_1 = \varepsilon^1 \eta_0$$
$$\tilde{\omega}_1 = \varepsilon \left(\omega_0 + \varepsilon\, \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots \right)$$

Le premier ordre des équations d'équilibre fourni par HMPD est :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}{}'(x) \right) = 0 & (T_t - 0) \\ \mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) - \mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}''(x) - \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \dfrac{\sqrt{2}\ell_p^2}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) = 0 & (M - 0) \\ \mathcal{K}_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 0) \end{cases}$$

$\overset{1}{\tilde{\theta}}(x) = \overset{1}{\tilde{V}}{}'(x)$, l'équation $(M-0)$ devient :

$$\mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) + \mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}''(x) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \ell_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) \right) = 0 \tag{5.16}$$

Le deuxième ordre des équations d'équilibre fourni par HMPD nous donnent :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_m \left(\overset{3}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{3}{\tilde{\theta}}{}'(x) \right) + \mathcal{EI} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) - 2\overset{1}{\tilde{\theta}}{}^{(3)}(x) \right) \\ \qquad + \Lambda_m \tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \dfrac{\sqrt{2}\ell_m \ell_p}{\sqrt{\ell_m^2 + \ell_p^2}} \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) \right) = 0 & (T_t - 2) \\ \mathcal{K}_m \left(\overset{3}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{3}{\tilde{\theta}}(x) \right) + \mathcal{EI} \left(2\overset{1}{\tilde{V}}{}^{(3)}(x) - 2\overset{1}{\tilde{\theta}}{}''(x) \right) \\ \qquad + \mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x) \right) = 0 & (\mathcal{M}_t - 2) \end{cases}$$

donc :

$$\mathcal{EI}\, \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) - \mathcal{K}_p \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) \right) - \Lambda_m \tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) - \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \ell_m \left(\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) \right) = 0 \tag{5.17}$$

L'équation (5.16) et (5.17) :

$$\mathbb{EI}\, \overset{1}{\tilde{\alpha}}{}^{(3)}(x) = \Lambda_m \tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}(x) - \mathcal{EI}\, \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) \tag{5.18}$$

D'autre part, l'équation (5.17) :

$$\overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) = -\frac{\mathcal{EI}}{\mathcal{K}_p + \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \ell_m} \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) + \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(2)}(x) + \frac{\Lambda_m \tilde{\omega}_1^2}{\mathcal{K}_p + \mathbf{i}\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 \ell_m} \overset{1}{\tilde{V}}(x)$$

En introduisant dans l'équation (5.18) on trouve l'équation de degré 6 :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{EI}.\mathbb{EI}}{\mathcal{K}_p+\mathbf{i}\widetilde{\eta}_1\widetilde{\omega}_1\ell_m}\overset{1}{\widetilde{V}}^{(6)}(x)-(\mathcal{EI}+\mathbb{EI})\overset{1}{\widetilde{V}}^{(4)}(x)\\ -\left(\frac{\mathbb{EI}}{\mathcal{K}_p+\mathbf{i}\widetilde{\eta}_1\widetilde{\omega}_1\ell_m}\Lambda_m\widetilde{\omega}_1^2\right)\overset{1}{\widetilde{V}}^{(2)}(x)+\Lambda_m\widetilde{\omega}_1^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x)=0\end{aligned} \tag{5.19}$$

Avec les longueurs identiques, l'épaisseur des murs sont beaucoup plus grande que celle du plancher, la masse linéique de la structure est dégénérée par la masse linéique des murs.

$$\Lambda\approx\Lambda_m;\qquad\text{avec}\qquad\Lambda_m=2\rho_mA_m\qquad\text{et}\qquad\Lambda=\Lambda_m+\Lambda_p$$

Et puis, la rigidité ("élastique") du cisaillement des murs est plus grande que celle du plancher. La rigidité élastique du cisaillement de la cellule est donc dégénérée par la rigidité du plancher.

$$K\approx\mathcal{K}_p;\quad\frac{1}{K}=\frac{1}{\mathcal{K}_p}+\frac{1}{\mathcal{K}_m};\quad\text{avec}\qquad\mathcal{K}_m=24\frac{E_mI_m}{\ell_m^2}\quad\text{et}\quad\mathcal{K}_p=12\frac{E_pI_p}{\ell_m\ell_p}$$

Encore une fois, l'impact de l'ajout des amortisseurs s'effectue sur la rigidité associée au cisaillement de la cellule. On définit la nouvelle rigidité visco-élastique au cisaillement :

$$K^*=K+\mathbf{i}\widetilde{\eta}_1\,\widetilde{\omega}_1\ell_m$$

Et puis, comme tous les mécanismes sont apparus au même ordre de grandeur, et dans le modèle homogénéisé, le comportement dominant de la poutre est présenté par le premier ordre des variables, nous enlevons le "$\widetilde{\ }$" et l'ordre de grandeur des variable dans la recherche de la poutre équivalente. L'équation (5.19) devient :

$$\frac{\mathcal{EI}.\mathbb{EI}}{K^*}V^{(6)}-(\mathcal{EI}+\mathbb{EI})\,V^{(4)}-\frac{\mathbb{EI}}{K^*}\Lambda\omega^2V^{(2)}+\Lambda\omega^2V=0 \tag{5.20}$$

L'équation (T_t-2) et $(M-0)$ définissent l'équilibre de la poutre générique avec les amortisseurs :
Loi de comportement :

$$\begin{cases}\text{Effort tranchant :}\quad T^*=-K^*\,(V'-\alpha)\\ \text{Moment global :}\qquad\mathbb{M}=-\mathbb{EI}\,\alpha'\\ \text{Moment interne :}\qquad\mathcal{M}=-\mathcal{EI}\,V''\end{cases}$$

Equation d'équilibre :

$$(T^*-\mathcal{M}')'=\mathcal{T}'=\Lambda\omega^2V;\qquad\mathbb{M}'=-T^*$$

Pour chercher les conditions aux limites de la poutre générique "amortie" nous multiplions la première l'équation d'équilibre par $\frac{1}{2}V$ et intégrer par parties sur toute la hauteur de la structure H :

$$\frac{1}{2}\int_0^H\Lambda\omega^2V^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^H\mathcal{T}'V\,dx=\frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H-\int_0^H(T^*-\mathcal{M}')\,V'\,dx\right)$$

regardant sur la dernière partie :

$$\begin{aligned}\int_0^H \left(T^* - \mathcal{M}'\right) V'\, dx = \int_0^H T^* \left(V' - \alpha\right)\, dx \quad &- \int_0^H \mathbb{M}'\alpha\, dx - \int_0^H \mathcal{M}'V'\, dx \\ = \int_0^H T^* \left(V' - \alpha\right)\, dx \quad &+ \int_0^H \mathbb{M}\, \alpha'\, dx + \int_0^H \mathcal{M}\, V''\, dx \\ &- \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H \qquad - \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H\end{aligned}$$

En réinjectant dans la première équation et en utilisant les lois de comportement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^H \left(T^* \left(V' - \alpha\right) + \mathbb{M}\alpha' + \mathcal{M}V''\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H + \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H + \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H\right) \\ \frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{T^{*2}}{K^*} + \frac{\mathbb{M}^2}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{EI}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H + \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H + \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H\right)\end{aligned} \tag{5.21}$$

Cette équation traduit l'équilibre des différentes énergies et le travail des conditions aux limites. Pour résoudre l'équation (5.21), il nous faut six conditions aux limites exprimées en fonction des effort $\mathcal{T}$, $\mathbb{M}$ et $\mathcal{M}$, soit en fonction des variables V, α et V'.

5.5 Première conclusion sur l'étude HMPD des modèles équipés par les amortisseurs visqueux linéaires

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'adaptation de la méthode HMPD à la structure de portique simple équipée par l'amortisseur visqueux linéaire diagonal. L'objectif est de chercher le modèle continu qui représente le comportement dynamique des bâtiments équipés d'amortisseur visqueux linéaire afin de contrôler la réponse dynamique du bâtiment et limiter les dégâts lors des actions dynamiques. La première étape consiste à estimer la force visqueuse due à l'amortisseur diagonal qui nous emmène à l'ordre de démarrage des variables macrscopiques qui est pris à partir de l'ordre $O(\varepsilon)$. Cela provient du respect de l'hypothèse de petite déformation des éléments.

L'ajout des amortisseurs articulés aux nœuds n'entraîne que la force dite "visqueuse" dans les équations d'équilibre des forces du modèle continue. En fonction de l'ordre de grandeur de la viscosité d'amortisseur, cette force peut être plus petite ou plus grande par rapport à la force élastique. Cet ordre de grandeur introduit à différents états d'équilibre correspondant à différents régimes d'amortie du modèle.

Pour mettre en évidence ces trois régimes, nous étudions précisément le cas de la structure en cisaillement. Cela nous permet de déterminer le régime faiblement amorti, amorti et sur amorti. Parmi eux, le cas amorti où les trois forces sont à même ordre de grandeur est le cas représentatif.

L'équation différentielle du mouvement de degré deux du modèle de poutre de cisaillement nous permet d'effectuer la résolution analytique en prenant en compte des variables complexes. Elle montre que l'ajout de l'amortissement ne modifie pas la déformé modale du modèle qui est toujours réelle et sous la forme sinusoïdale. Elle nous donne les formules analytiques qui sont capable d'estimer de façon directe les caractéristiques du mouvement (la fréquence propre et le taux d'amortissement). Ces derniers sont cohérents au système de masse-ressort avec l'amortisseur et peuvent être appliqués efficacement aux bâtiments de moyenne hauteur où le cisaillement domine.

Par rapport à l'approche énergétique proposé par FEMA ([FEMA, 1997] puis [FEMA, 2001]) ainsi que sa modification par [Hwang et al., 2008] (section 4.4), l'étude HMPD sur le modèle de cisaillement, puis de Timoshenko et Générique fournit des modèles complets. Dans ces modèles, l'impact de l'ajout des amortisseurs est identifié quantitativement. À partir de cette identification, on peut prédire la modification du comportement de la structure en fonction de l'ordre de grandeur de paramètre des amortisseurs. Dans le cas du modèle de cisaillement présenté dans ce chapitre et du modèle Générique présenté dans le chapitre suivant, les caractéristiques dynamiques (la fréquence propre et le taux d'amortissement) sont déterminées directement à partir des paramètres du modèle sans passer par la modélisation numérique du bâtiment entier.

Pour rappel, la procédure de calcul du taux d'amortissement par [FEMA] (équation (4.8)) consiste à déterminer la déformé modale de la structure, et le taux d'amortissement est estimé à partir de l'énergie dissipée par les amortisseurs lors d'un cycle de mouvement. Il se base sur le déplacement différentiel entre-étage ([FEMA273]) et entre les nœuds où nous allons équiper les amortisseurs ([Hwang et al., 2008]). Ces méthodes admettent comme hypothèse que l'ajout des amortisseurs n'entraîne pas de modification du comportement de la structure, et donc que les fréquences et les déformés modales de la structure ne changent pas. Cette méthode nécessite une modélisation de la structure entière qui peut quelquefois demander beaucoup de temps et de matériel. Et puis, ce dernier ne s'intéresse pas au comportement de la structure initiale et sa modification. On va revenir à ces deux étude dans l'exemple numérique au chapitre 6.

Comme le régime amorti est représentatif des modèles, nous avons présenté l'étude sur la structure de la poutre de Timoshenko et la poutre Générique dans ce régime. Les nouveaux modèles sont définis avec la partie visqueuse de la force de cisaillement et la rigidité au cisaillement visco-élastique. Les nouvelles lois de comportement et les équations d'équilibre du modèle sont établies sur les connaissances de la poutre classique. La résolution analytique devient donc plus compliqué (mais une résolution analytico-numérique est toujours possible). Sachant que le modèle

Générique est plus général, nous allons continuer à étudier ce modèle dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Impact de l'ajout d'amortisseurs linéaires sur le comportement de bâtiment

Contents

6.1 Etude du modèle de poutre Générique avec amortisseurs visqueux linéaires 128
6.1.1 Description du modèle 128
6.1.2 Calcul des modes complexes et propriétés modales . . . 129
6.1.3 Exemple d'une réponse sous séisme 132
6.2 Impact des amortisseurs sur le comportement dynamique 133
6.2.1 Approche phénoménologique 133
6.2.2 Approche adimensionnelle 135
6.3 Exemple numérique 139
6.4 Conclusion 146

6.1 Etude du modèle de poutre Générique avec amortisseurs visqueux linéaires

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la famille des structures 1D multiportiques avec amortisseurs diagonaux pour les cas de poutres de cisaillement, de Timoshenko et Générique. Les équations de ces modèles sont des équations différentielles de degré deux, quatre et six respectivement avec une rigidité de cisaillement de cellule complexe $K^* = K + \mathbf{i}\eta\,\omega\,\ell_m$. La résolution analytique de l'équation de degré deux est possible et conduit sans difficulté aux fréquences propres complexes et permet de calculer le taux d'amortissement global du modèle. Dans ce cas, les déformées modales restent réelles.

Pour les modèles avec équations d'ordre quatre et six, la résolution complète devient analytico-numérique, comme dans le cas sans amortisseur d'ailleurs. En sachant que le comportement des modèles est généré par les paramètres et les mécanismes, avec en particulier l'estimation de rigidité au cisaillement (cf. le chapitre 3), nous sommes capables de définir le comportement équivalent d'une structure précise. Comme le modèle Générique est le modèle le plus général, nous allons l'étudier afin de définir l'impact de l'ajout d'amortisseur diagonal au comportement du modèle initial. Pour mémoire, les lois de comportement, l'équation d'équilibre et l'équation du mouvement de la poutre Générique amortie sont rappelées ci-dessous.

6.1.1 Description du modèle

Le modèle Générique avec amortissement est décrit à l'aide de trois lois de comportement (trois mécanismes) et les équations d'équilibre locales ci dessous :

Lois de comportement :

$$\begin{cases} \text{Effort tranchant :} & T^* = -K^*\,(V' - \alpha) \\ \text{Moment global :} & \mathbb{M} = -\mathbb{E}\mathbb{I}\;\alpha' \\ \text{Moment interne :} & \mathcal{M} = -\mathcal{E}\mathcal{I}\;V'' \end{cases}$$

avec la rigidité visco-élastique :

$$K^* = K + \mathbf{i}\,\eta\,\omega\,\ell_m$$

Equations d'équilibre dynamique (dans le domaine harmonique) :

$$(T^* - \mathcal{M}')' = \mathcal{T}' = \Lambda\omega^2 V; \qquad \mathbb{M}' = -T^*$$

$\mathcal{T}$ représente l'effort tranchant total, somme de l'effort tranchant local intracellulaire T et du différentiel de moment interne $\mathcal{M}$.

Equation de comportement :

La combinaison des relations précédentes conduit à l'équation de comportement :

$$\frac{\mathbb{EI}\,\mathcal{EI}}{K^*}V^{(6)} - (\mathbb{EI} + \mathcal{EI})\,V^{(4)} - \frac{\mathbb{EI}}{K^*}\Lambda\omega^2 V^{(2)} + \Lambda\omega^2 V = 0 \tag{6.1}$$

Relation de type énergétique et travail des conditions aux limites

Enfin, il est possible d'exprimer la relation ci-dessous faisant apparaître le travail des conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega^2 V^2\,dx = &\frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{T^{*2}}{K^*} + \frac{\mathbb{M}^2}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{EI}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\Big[\mathcal{T}V\Big]_0^H + \Big[\mathbb{M}\alpha\Big]_0^H + \Big[\mathcal{M}V'\Big]_0^H\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

Cette relation est obtenue par l'intégration de la première équation d'équilibre multipliée par V et en utilisant les lois de comportement. Dans le cas non amorti ($\eta = 0$), cette relation traduit le bilan énergétique de la structure, avec à gauche, l'énergie cinétique globale, équilibrée à droite par l'énergie élastique et le travail des conditions aux limites.

6.1.2 Calcul des modes complexes et propriétés modales

Calcul des modes complexes

Le calcul des modes (ici complexes) s'effectue comme pour les modes réels. La solution générale de l'équation (6.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi^V(x) = &a_1\cos(\frac{\delta_1\,x}{L}) + b_1\sin(\frac{\delta_1\,x}{L}) + a_2\cosh(\frac{\delta_2\,x}{L}) \\ &+ b_2\sinh(\frac{\delta_2\,x}{L}) + a_3\cosh(\frac{\delta_3\;x}{L}) + b_3\sinh(\frac{\delta_3\;x}{L})\end{aligned} \tag{6.3}$$

avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\delta_2 = &\sqrt{\frac{1}{2}\left(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - \frac{4\Delta}{1 + C^*\delta_1^2}}\right)} \\ \delta_3 = &\sqrt{\frac{1}{2}\left(\Delta + \sqrt{\Delta^2 - \frac{4\Delta}{1 + C^*\delta_1^2}}\right)}\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\Delta = 1 + \frac{1+\gamma}{C^*\gamma\delta_1^2} \qquad C^* = \frac{\mathbb{EI}}{K^*L^2} \qquad \gamma = \frac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}} \qquad L = \frac{2H}{\pi}$$

La pulsation est liée aux différents paramètres par la relation :

$$\Omega^{*^2} = \frac{\Lambda\omega^2}{K^*} = \gamma(C^*\delta_1\delta_2\delta_3)^2 \tag{6.5}$$

La prise en compte des conditions aux limites encastré à la base - libre en tête s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \phi^V(0) = 0 & \mathcal{T}(H) = 0 \\ \phi^\alpha(0) = 0 & \mathbb{M}(H) = 0 \\ \phi^{V'}(0) = 0 & \mathcal{M}(H) = 0 \end{array} \tag{6.6}$$

La rotation de section ϕ^α est liée au déplacement ϕ^V par la relation :

$$\phi^\alpha(x) = (1 + C^*\Omega^2)\phi^{V'}(x) + C^*L^2\phi^{V^{(3)}}(x) - (C^*L^2)^2\gamma\ \phi^{V^{(5)}}(x) \tag{6.7}$$

ce qui conduit à l'équation des fréquences (annulation du déterminant du système) :

$$\begin{aligned} &- 2\delta_2^2\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_1^4 - \delta_3^4)\cos(\frac{\pi}{2}\delta_1) + 2\delta_1^2\delta_3^2(\delta_2^4 - \delta_1^4)(\delta_2^4 - \delta_3^4)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_2) \\ &+ 2\delta_1^2\delta_2^2(\delta_3^4 - \delta_1^4)(\delta_3^4 - \delta_2^4)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_3) \\ &+ (\delta_1^4(\delta_2^4 - \delta_3^4)^2 + \delta_2^4(\delta_3^4 - \delta_1^4)^2 + \delta_3^4(\delta_1^4 - \delta_2^4)^2)\cos(\frac{\pi}{2}\delta_1)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_2)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_3) \\ &- \delta_2\delta_3(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_1^4 - \delta_3^4)(\delta_2^2 + \delta_3^2)\cos(\frac{\pi}{2}\delta_1)\sinh(\frac{\pi}{2}\delta_2)\sinh(\frac{\pi}{2}\delta_3) \\ &+ \delta_1\delta_3(\delta_2^4 - \delta_1^4)(\delta_2^4 - \delta_3^4)(\delta_3^2 - \delta_1^2)\sin(\frac{\pi}{2}\delta_1)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_2)\sinh(\frac{\pi}{2}\delta_3) \\ &+ \delta_1\delta_2(\delta_3^4 - \delta_1^4)(\delta_3^2 - \delta_2^2)(\delta_2^2 - \delta_1^2)\sin(\frac{\pi}{2}\delta_1)\sinh(\frac{\pi}{2}\delta_2)\cosh(\frac{\pi}{2}\delta_3) = 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

La résolution est conduite de manière séquentielle car dans le cas amorti, la pulsation propre recherchée entre elle-même dans le calcul des paramètres de l'équation des fréquences (6.8) :

(1) Etape initiale : On initie le calcul sur la structure non amortie ($\eta_0 = 0$) en recherchant pour le mode k la racine de notée δ^k_{1-0} autour du nombre impair $2k-1$, et on calcule la pulsation propre correspondante ω_0^k,

(2) Puis on passe à la situation avec amortissement avec une recherche itérative des solutions. La technique étant identique pour tous les modes, on fera l'économie de l'indice k dans la suite :

- On incrémente le paramètre d'amortissement $\eta_n = \eta_{n-1} + d\eta$,
- On initialise les différents paramètres en utilisant les solutions obtenues pour le niveau d'amortissement précédant η_{n-1} :
  * la pulsation $\omega_n = \omega_{n-1}$,
  * le paramètre $\delta_{1/n} = \delta_{1/(n-1)}$,

- On lance la procédure de recherche jusqu'à convergence de la valeur de ω_n :
  * on calcule la rigidité de cisaillement visco-élastique $K^* = K + \mathbf{i}\,\eta_n\,\omega_n\,\ell_m$,
  * on calcule le paramètre C^* correspondant,

* on détermine la racine $\delta_{1/n}$ de l'équation des fréquences (6.8) ,
* on calcule la pulsation correspondante ω_n avec la relation (6.5),

La convergence (sauf cas pathologique) est très rapide (quelques itérations).

Propriétés modales

Le mode i de pulsation ω_i et de déformée $(\phi_i^{V^*},\ \phi_i^{\alpha^*})$, solution de l'équation (6.1), induit les efforts associés définis par :

$$\begin{cases} \text{Effort tranchant :} & T_i^* = -K_i^* \left(\phi_i^{V^*\prime} - \phi_i^{\alpha^*}\right) \\ \text{Moment global :} & \mathbb{M}_i = -\mathbb{EI}\ \phi_i^{\alpha^*\prime} \\ \text{Moment interne :} & \mathcal{M}_i = -\mathcal{EI}\ \phi_i^{V^*\prime\prime} \end{cases}$$

Considérant deux modes i et j, l'intégration de la quantité $\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega_i^2\phi_i^{V^*}\phi_j^{V^*}\,dx$ donne :

$$\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega_i^2\phi_i^{V^*}\phi_j^{V^*}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{T_i^*\,T_j^*}{K_j^*} + \frac{\mathbb{M}_i\mathbb{M}_j}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}_i\mathcal{M}_j}{\mathcal{EI}}\right) \tag{6.9}$$

et inversement :

$$\frac{1}{2}\int_0^H \Lambda\omega_j^2\phi_j^{V^*}\phi_i^{V^*}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{T_j^*\,T_i^*}{K_i^*} + \frac{\mathbb{M}_j\mathbb{M}_i}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}_j\mathcal{M}_i}{\mathcal{EI}}\right) \tag{6.10}$$

En combinant ces deux relations, il vient ainsi :

$$\frac{1}{2}(\omega_i^2 - \omega_j^2)\int_0^H \Lambda\phi_j^{V^*}\phi_i^{V^*}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{i}\eta\ell_m(\omega_i - \omega_j)\int_0^H \frac{T_j^*\,T_i^*}{K_i^*K_j^*} \tag{6.11}$$

soit, pour $i \neq j$:

$$\frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j)\int_0^H \Lambda\phi_j^{V^*}\phi_i^{V^*}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{i}\eta\ell_m\int_0^H \frac{T_j^*\,T_i^*}{K_i^*K_j^*} \tag{6.12}$$

En conclusion, on peut faire plusieurs observations à partir de ces relations :

1. **Dans le cas non amorti**, les modes sont réels (qu'on indicera avec '0' pour les distinguer des modes complexes) et on retrouve les propriétés classiques d'orthogonalité des modes, c'est-à-dire pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \int_0^H \Lambda\phi_{0,i}^V\phi_{0,j}^V\,dx &= 0 \\ \int_0^H \left(\frac{T_{0,i}\,T_{0,j}}{K} + \frac{\mathbb{M}_{0,i}\mathbb{M}_{0,j}}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}_{0,i}\mathcal{M}_{0,j}}{\mathcal{EI}}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Les modes sont découplés et chacun vérifie la relation :

$$\int_0^H \Lambda\omega_i^2\left(\phi^{V_{0,i}}\right)^2\,dx = \int_0^H \left(\frac{T_{0,i}^2}{K} + \frac{\mathbb{M}_{0,i}^2}{\mathbb{EI}} + \frac{\mathcal{M}_{0,i}^2}{\mathcal{EI}}\right) \tag{6.14}$$

2. **Dans le cas de la poutre de cisaillement**, on a pu voir que l'ajout des amortisseurs ne modifie pas les déformées modales, qui demeurent réelles et conservent ainsi leurs propriétés d'orthogonalité.
3. **Pour toutes les autres situations amorties**, on constate que les modes complexes ne sont plus orthogonaux. Cela induit un couplage entre les modes, avec transfert d'énergie.

6.1.3 Exemple d'une réponse sous séisme

On considère une structure avec amortisseur décrite par le modèle Générique précédant et soumise à une excitation sismique, définie par le déplacement du sol de fondation $D_{sol}(t)$. Les différentes relations s'écrivent, dans le domaine temporel :

Relations d'équilibre :

$$\begin{cases} -\Lambda\partial_{tt}(V(x,t)+D_{sol}(t)) = \partial_x\left(T^*(x,t)-\partial_x\mathcal{M}(x,t)\right) = \partial_x\mathcal{T}(x,t) \\ \partial_x\mathbb{M}(x,t) = -T^*(x,t) \end{cases}$$

Lois de comportement :

$$\begin{cases} T^*(x,t) = K\left(\alpha(x,t)-\partial_x V(x,t)\right)+\eta\ell_m\partial_t((\alpha(x,t)-\partial_x V(x,t))) \\ \mathbb{M}(x,t) = -\mathbb{EI}\ \partial_x\alpha(x,t) \\ \mathcal{M}(x,t) = -\mathcal{EI}\partial_{xx}V(x,t) \end{cases}$$

Comme la base des modes complexes n'est pas orthogonale, on utilise la base des modes du système non amorti, et on décompose les variables sur cette base :

$$V(x,t) = v_i(t)\ \phi^V_{0,i}(x) \qquad\qquad \alpha(x,t) = v_i(t)\ \phi^\alpha_{0,i}(x)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera pour les dérives partielles $\partial_t = \dot{(\ )}$ et $\partial_x = (\ )'$. On décompose également les efforts :

$$\begin{cases} T^*(x,t) = T_{0,i}(x)v_i(t)+\eta\ell_m\dfrac{T_{0,i}(x)}{K}\dot{v}_i(t) \\ \mathbb{M}(x,t) = \mathbb{M}_{0,i}(x)v_i(t) \\ \mathcal{M}(x,t) = \mathcal{M}_{0,i}(x)v_i(t) \end{cases}$$

Il est alors possible de découpler partiellement l'équation de comportement et on obtient pour un mode J fixé :

$$\ddot{v}_J(t)+\eta\ell_m\frac{\int_0^H\frac{T_{0,i}(x)T_{0,J}(x)}{K^2}dx}{\int_0^H\Lambda(\phi^V_{0,J})^2dx}\dot{v}_i(t)+\omega^2_{0,J}v_J(t) = -\frac{\int_0^H\Lambda\phi^V_{0,J}dx}{\int_0^H\Lambda(\phi^V_{0,J})^2dx}A_{sol}(t) \quad (6.15)$$

avec $i = 1, 2, ...\infty$

6.2 Impact des amortisseurs sur le comportement dynamique

On revient dans cette section sur les comportements dérivés du modèle Générique, en considérant cette fois l'ajout des amortisseurs. L'objectif est de comprendre si et comment ces comportements vont évoluer avec une adjonction de systèmes amortisseurs.

6.2.1 Approche phénoménologique

Afin de représenter la contribution des amortisseurs aux mécanismes de la structure, nous utilisons le schéma analogique 6.1 permettant de représenter les différents mécanismes sous forme de ressorts en série ou parallèle. Ce schéma va nous permettre d'interpréter quantitativement l'effet de l'ajout d'amortisseurs sur les différents mécanismes et de déduire les modèles de poutre équivalente.

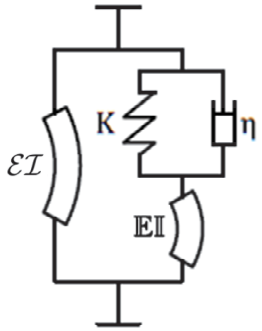


FIGURE 6.1 – Association des mécanismes du modèle Générique amorti

En utilisant ce schéma et en jouant sur l'ordre de grandeur des mécanismes nous déterminons le cadre phénomènologique du niveau d'amortissement. Ce cadre est capable de mettre en évidence les différents régimes d'amortissement pour chaque modèle de poutre. Nous nous intéressons donc aux limites de l'efficacité de l'ajout des amortisseurs aux structures étudiées. Tout d'abord, le régime de faible amortissement : dans ce cas, l'impact des amortisseurs est très faible, il existe deux situations où l'ajout des amortisseurs ne va pas modifier le comportement initial :

— le premier est le cas où les amortisseurs eux-mêmes sont faibles (η très faible) par rapport aux autres mécanismes.

— Le deuxième cas est le cas de la poutre en flexion globale.

Dans ce second cas, la flexion ($\mathbb{EI}$) est en série avec le cisaillement (K), et cette association favorise le mécanisme le plus souple (ici la Flexion). Comme les amortisseurs sont en parallèle avec le cisaillement, ajouter de l'amortissement (quel que soit son importance), va renforcer le cisaillement, et ne va au final rien changer dans l'équilibre : la flexion domine toujours et de plus, les amortisseurs ne sont pas activés. Bilan : le comportement n'est pas modifié (voire il est même renforcé) et l'amortissement global de la structure reste inchangé. Il en est de même pour le

cas de la poutre de Timoshenko "sur-amorti" (zone (2)). En effet, ce cas ne peut pas exister, car dès que le niveau des amortisseurs devient important, la Flexion domine et ne générant que peu d'amortissement au niveau global. Hormis ce cas pathologique, l'ajout des amortisseurs va apporter un supplément d'amortissement à la structure.

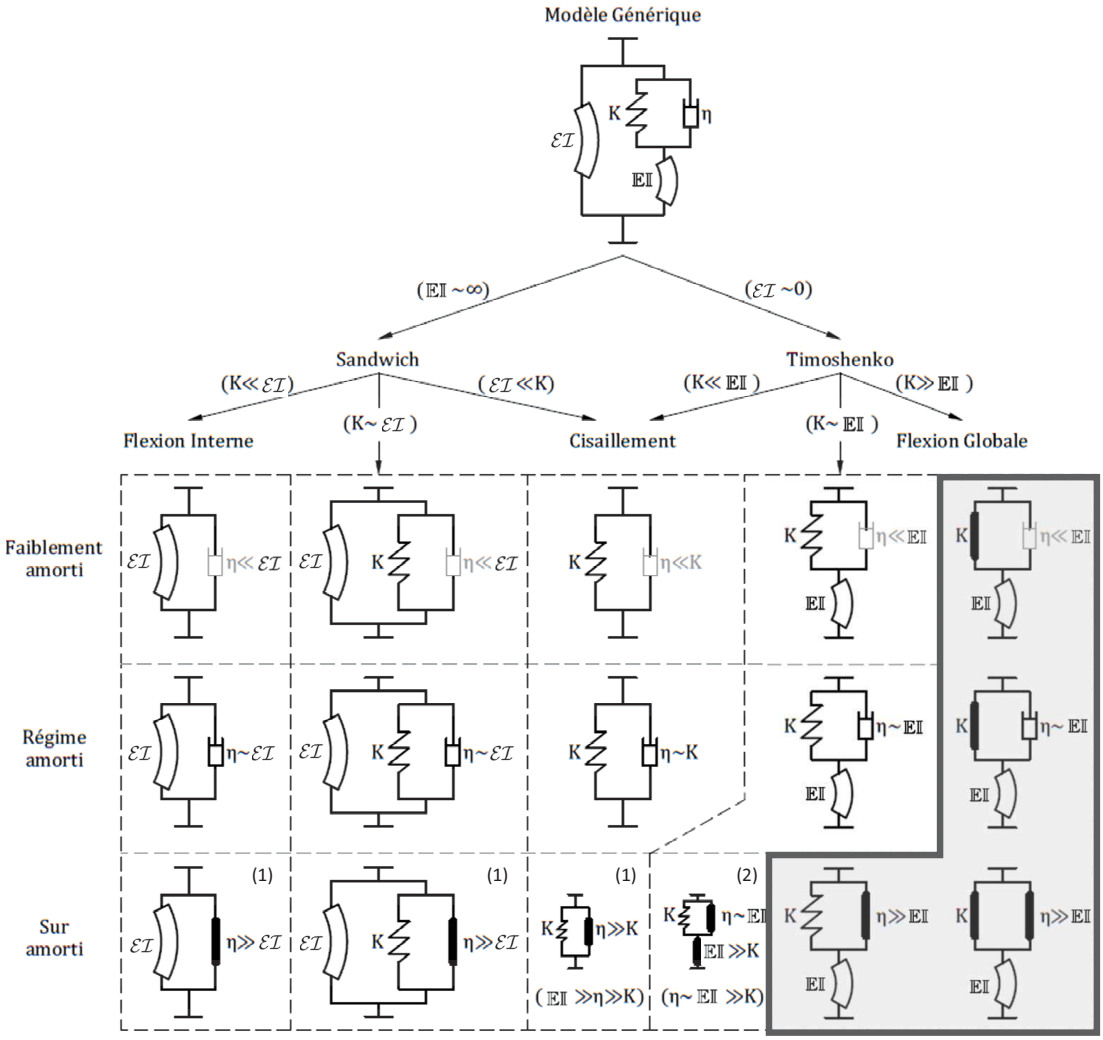


FIGURE 6.2 – Phénomènologie du niveau d'amortissement

On peut retenir au final trois points :

1. Utiliser des amortisseurs de faible intensité ne va pas modifier le comportement d'ensemble (ce qui paraît évident, du moins pour les premiers modes...),
2. Il existe toujours un niveau d'intensité qui peut modifier le comportement, comme cela est décrit sur la figure 6.3, et l'apport d'amortissement effectif à la structure dépendra du comportement final induit,
3. Enfin, il existe un modèle de comportement, la Flexion Globale, pour lequel l'ajout d'amortisseur (dans la configuration étudiée) , quelle qu'en soit l'intensité, ne va ni modifier le comportement (au contraire) et ni apporter un supplément d'amortissement à la structure.

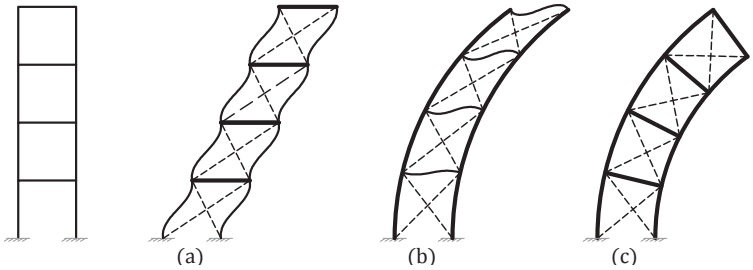


FIGURE 6.3 – Les différents mécanismes de la structure

6.2.2 Approche adimensionnelle

Dans cette section, nous avons utilisé une nouvelle fois l'approche adimensionnelle afin d'identifier l'impact de l'ajout des amortisseurs au fonctionnement des modèles. Sachant que le comportement des modèles est quantifié par les paramètres du modèle : cisaillement des cellules, flexion globale, flexion interne et la masse de la structure ; et que l'amortissement est un paramètre comparable avec la rigidité élastique au cisaillement. Nous introduisons un nouveau paramètre qui est le ratio entre la rigidité au cisaillement visqueuse élastique et celle élastique :

$$\mathcal{K} = \frac{K^*}{K} = 1 + \mathbf{i}\,\frac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K}$$

L'équation 6.1 est ré-écrit avec le changement de variable $X = x/L$:

$$C^*\,\gamma V^{(6)} - (1+\gamma)\,V^{(4)} - \Omega^{*2} V^{(2)} + \frac{\Omega^{*2}}{C^*} V = 0 \tag{6.16}$$

où

$$C^* = \frac{\mathcal{EI}}{K^*\ L^2} = \frac{C}{\mathcal{K}}; \qquad \gamma = \frac{\mathcal{EI}}{\mathbb{EI}}; \quad \Omega^{*2} = \frac{\Lambda\omega^2 L^2}{K^*}$$

Nous n'avons pas besoin de reprendre l'intégralité du raisonnement pour établir la nouvelle carte des comportements approchés. Il suffit ici de remarquer que le seul changement important concerne le paramètre C qui est remplacé dans la situation avec amortisseur par C^*. Dans la version sans amortisseur, les domaines de validité des modèles approchés de la poutre Générique sont représentés suivant deux axes représentant les puissances de C et γ :

$$C = \varepsilon^{\underline{C}}; \qquad \gamma = \varepsilon^{\underline{\gamma}}$$

Puisque C est le seul paramètre affecté, on va donc simplement avoir un glissement du modèle équivalent suivant cet axe. Posons 'a' défini comme l'ordre de grandeur en puissance de ε de $\dfrac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K} = O(\varepsilon^a)$. L'ordre du paramètre $\mathcal{K}$ va dépendre de l'importance de $\frac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K}$, donc de a :

1. $\frac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K} \lesssim 1$ ou $a \geqslant 0$: alors $\mathcal{K} = O(1)$ et $C^* = O(C)$: le comportement n'est pas modifié par les amortisseurs,
2. $\frac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K} \gg 1$ ou $a < 0$: alors $\mathcal{K} = O(\varepsilon^a)$ et $C^* = O(\varepsilon^{(\underline{C}-a)}$: le comportement se décale sur le graphe vers la droite de '$-a$' le long de l'axe des abscisses.

On peut visualiser ceci sur la figure 6.4.

L'ampleur du décalage va dépendre : (1) bien entendu de la grandeur du paramètre η des amortisseurs,(et plus précisemment du ratio η/K), (2) mais aussi de la valeur de la pulsation ω.

Or cette valeur dépend de plusieurs facteurs :

— de l'ordre du mode considéré,

— du comportement initial (grosso modo, structure souple, faible pulsation, structure rigide, grande pulsation).

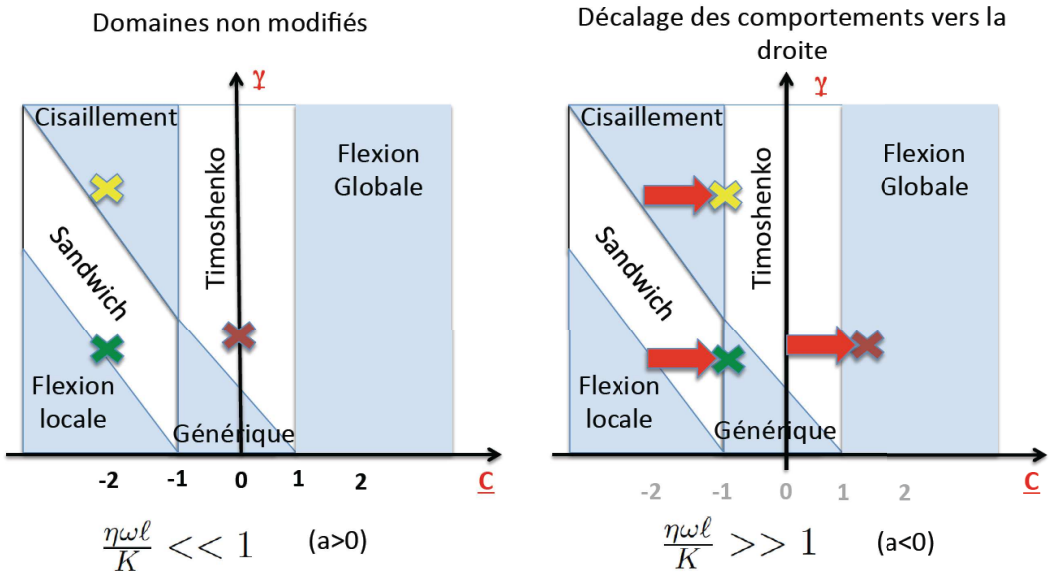


FIGURE 6.4 – Impact des amortisseurs sur le comportement

Sur la figure 6.4, la zone comprenant de la poutre de cisaillement, Sandwich, de Timoshenko et Générique est considérée comme la zone où les modèles sont compatibles avec l'ajout d'amortisseurs. En effet, l'ajout de l'amortisseur diagonal a modifié le modèle de poutre de flexion interne en équation différentielle de l'ordre de double carré à l'équation de degré quatre et il est alors considéré comme celui de la poutre sandwich. L'étude du modèle de la poutre sandwich est présentée dans l'annexe B.3. Dans le cas de la poutre de flexion interne, la rigidité K_p n'apparaît pas, seule la partie visqueuse de la rigidité au cisaillement $\mathbf{i}\,\eta\,\omega\,\ell_m$ existe à l'ordre deux de la dérivée du déplacement.

Nous revenons donc au décalage des modèles amortis. Le comportement de la structure est donc modifié pour des valeurs suffisantes de 'a', et ne concerne pas uniquement le taux d'amortissement et la fréquence de la structure mais également le comportement dominant. Par exemple, la structure, positionnée par la croix rouge, se situe dans le zonage de la poutre de Timoshenko. En ajoutant les amortisseurs, le modèle équivalent est alors incrémenté par l'amortissement (parallèle

au cisaillement). Pour un niveau d'amortisseur suffisant, il va se trouver alors dans le domaine de validité de la poutre en flexion globale. Dans ce domaine, les amortisseurs ne sont pas efficaces pour dissiper l'énergie de l'action. En revanche, ces dispositifs peuvent rigidifier considérablement la structure en modifiant son comportement.

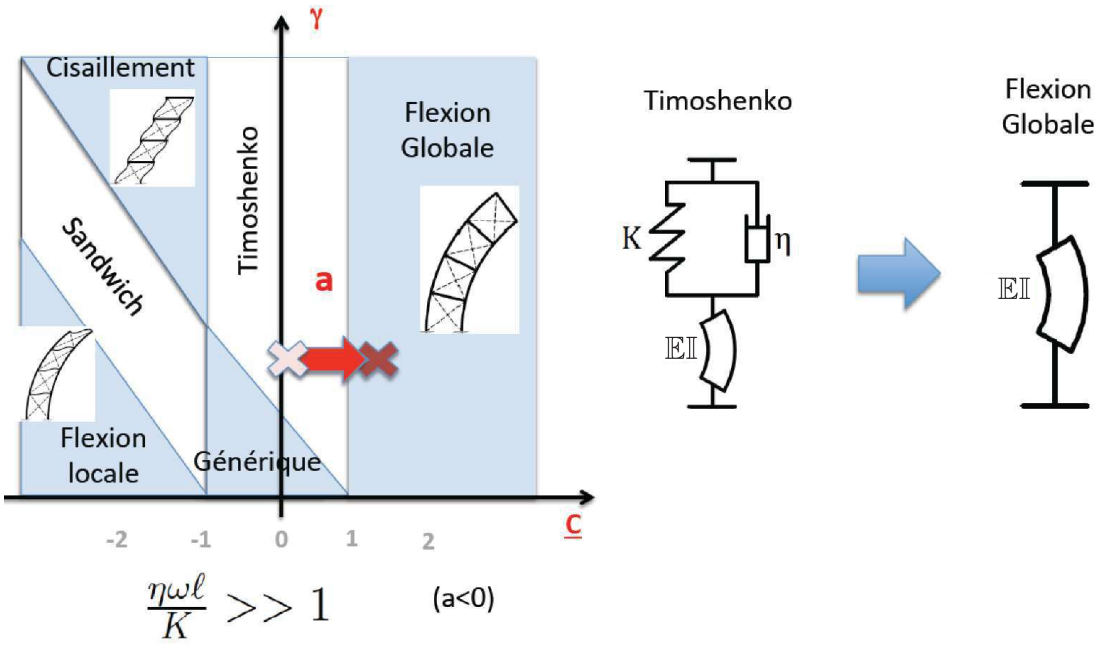


FIGURE 6.5 – Modification de la poutre de Timoshenko en une poutre en flexion globale par ajout d'amortisseurs

Afin de quantifier l'efficacité de l'amortisseur au comportement de chaque type de structure, nous avons résolu l'équation de degré six de la poutre Générique amortie de trois structures, marquées par les croix jaune, rouge et verte dans le cadre de domaine de validité (figure 6.6). Ces trois exemples correspondent à trois typologies de structure avec des mécanismes différents. Le "jaune" correspond plutôt à la poutre de Timoshenko, avec un cisaillement supérieur à la flexion globale. Le "rouge" correspond à la poutre de Timoshenko mais avec une flexion globale supérieure. Et le dernier, la croix "verte" est celui de la poutre avec le cisaillement et la flexion interne correspondant au modèle de la poutre "sandwich". La résolution numérique montre l'évolution de l'amortissement global du modèle et la fréquence propre du premier mode de la structure dans la partie droite de la figure 6.6.

Dans le cadre du domaine de validité, la structure "jaune" est proche du zonage de la poutre en cisaillement. Il est donc que le cisaillement est le mécanisme dominant du comportement. En revanche, en ajoutant les amortisseurs, la position de la croix va se déplacer vers la droite du cadre. Donc, le comportement de la structure va évaluer et en fonction de cette évaluation, la structure sera soit plus amortie, soit plus rigide.

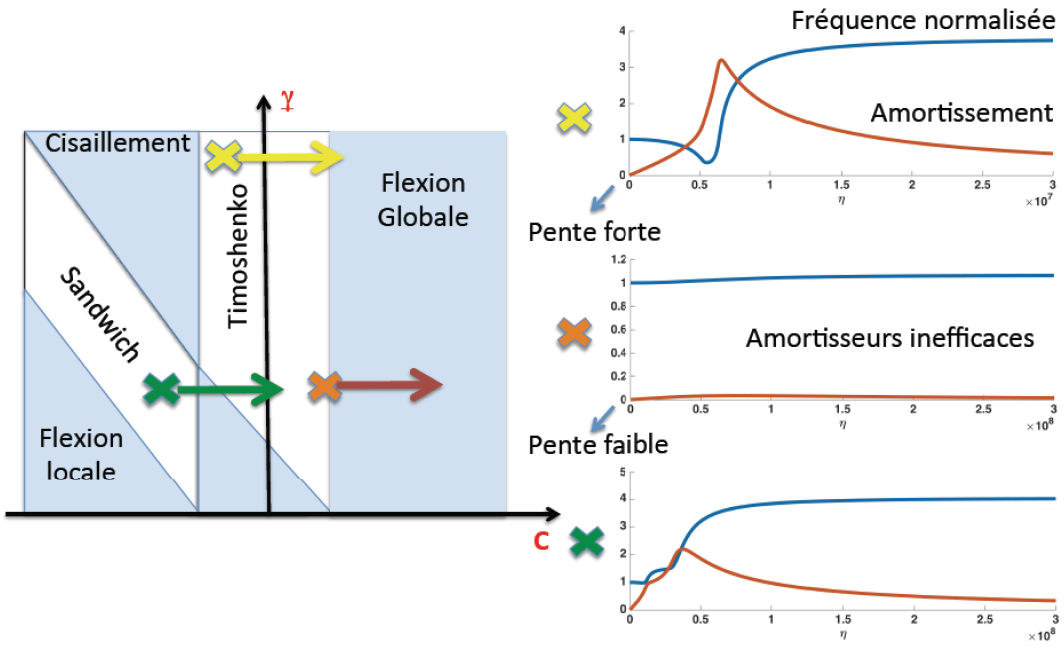


FIGURE 6.6 – Impact de l'amortisseur à la fréquence propre et taux d'amortissement du bâtiment

Cette modification est très évidente dans le cas des structures "jaune et "verte". L'évolution se passe en trois phases, en première phase, l'augmentation de la viscosité induit l'augmentation du taux d'amortissement global de la structure en parallèle de la diminution de la fréquence propre. Cet effet est particulièrement mis en évidence avec le modèle de la poutre en cisaillement avec l'amortisseur au régime amorti. Lorsque l'augmentation du taux d'amortissement progresse vers 100%, la fréquence propre est alors proche de 0. Sur le cadre du domaine de validité, la croix "jaune" est alors déplacée au milieu de la zone de la poutre de Timoshenko et donc proche de la flexion globale. En considérant à nouveau l'association des mécanismes du modèle amorti (figure 6.1) (l'amortissement est lié au cisaillement et en série avec la flexion globale), l'amortissement peut alors dominer le cisaillement et piloter le comportement si la flexion globale est supérieure. Lorsque la croix est au milieu de la zone de la poutre de Timoshenko, c'est alors dans la deuxième phase où il se produit le remplacement du cisaillement par la flexion globale avec les amortisseurs. C'est la raison pour laquelle, la courbe de la fréquence propre n'atteint pas la valeur 0 lorsque le taux d'amortissement est égal à 100%. Puis, la fréquence propre progresse avec l'augmentation du taux d'amortissement. Il faut alors noter que le taux d'amortissement est mesuré par le ratio de la partie imaginaire de la fréquence du modèle amorti par rapport la première fréquence réelle du modèle où la viscosité η est égale à 0. Puis à troisième phase, lorsque l'amortissement est cohérent à la flexion globale, c'est alors que l'effet des amortisseurs diminue, du fait que la flexion globale domine le comportement du modèle. Comme démontré auparavant avec la phénomènologie du niveau d'amortissement

associé à la déformation de la structure en flexion globale, l'effet des amortisseurs est très faible, et n'est pas significatif sur le comportement du modèle. C'est la raison pour laquelle, la courbe de fréquence est stable et le taux d'amortissement diminue et devient très inférieur à la fréquence.

L'inefficacité des amortisseurs sur le modèle de poutre en flexion globale est particulièrement mis en évidence avec la structure "rouge". Cette structure est positionnée initialement sur la zone de la flexion globale. L'ajout des amortisseurs n'introduit pas l'effet significatif sur la fréquence ainsi que sur le taux d'amortissement global.

La dernière étude est celle de la structure "verte". Comme pour la structure "jaune", trois phases sont mises en évidence. Cependant la phase deux est plus complexe car elle se trouve dans la zone de la poutre Générique avec les trois mécanismes comportant le cisaillement, la flexion globale et interne. De ce fait, la transmission entre les mécanismes est moins évident que dans le cas de la structure "jaune" avec ses deux mécanismes.

6.3 Exemple numérique

Afin de quantifier l'impact de l'ajout des amortisseurs à la structure, nous avons effectué trois études numériques de trois structures distinctes qui sont nommées Jaune, Verte et Rouge. Ces dernières sont l'empilement de 20 cellules de portiques simples qui se compose de deux murs de même épaisseur et un plancher. Ce nombre de cellule donne le ratio de séparation d'échelle $\varepsilon = N/2\pi = 0.0785$ qui est suffisamment faible pour assurer de la précision du modèle. Les épaisseurs des murs et du plancher seront définies pour chaque structure afin de pouvoir envisager le comportement initial. Nous reviendrons sur ce point pour chaque structure. Les amortisseurs visqueux linéaires sont équipés à chaque diagonale de chaque cellule sur toute leur hauteur. La configuration des structures représente exactement le modèle d'étude de la figure 5.5.

Le paramètre visqueux η des amortisseurs est pré-dimensionnée afin de permettre un taux d'amortissement global complémentaire à la structure de l'ordre de 5%, 10% et 15%. Cet amortissement est clairement distinct de celui intrinsèque au matériau. Il est apporté par le travail des amortisseurs équipés, lors du mouvement de la structure. Puis, avec ces valeurs de η, nous allons estimer une nouvelle fois les valeurs d'amortissement avec les différentes approches. La première approche est celle dites énergétique qui détermine le taux d'amortissement du système en mesurant l'énergie dissipée par les dispositifs lors du mouvement de la structure. Cette approche est abordée dans la section 4.4 par deux études de FEMA et [Hwang et al., 2008]. Pour mémoire, ces deux études nécessitent d'obtenir la déformée modale de la structure qui est le résultat de la simulation numérique de la structure entière. En considérant l'hypothèse que le comportement de la structure ne change pas de façon significative la période et la déformée modale ; le travail consiste alors à déterminer le déplacement horizontal relatif de chaque étage pour FEMA où les dispositifs sont installés ainsi que la variation de la lon-

gueur de chaque amortisseur pour [Hwang et al., 2008]. Il faut bien noter que ces deux analyses sont semi-analytique, les formules données nécessitent un traitement de l'analyse modale de la structure bien précis pour pouvoir exploiter les données de chaque nœud relié des amortisseurs. En particulier pour l'étude de [Hwang et al., 2008], malgré le fait que les formules sont adaptées pour chaque configuration, il faut être attentif à la convention de signe des déplacements de nœud. Pour ces deux études, nous profiterons de la modélisation éléments finis de la structure qui sera réalisée pour l'approche numérique afin de déterminer les données entrées des formules.

La deuxième approche concerne les résultats de la méthode HMPD, basée sur la structure de portique simple dans le chapitre 5. Cette approche se base sur les équations du mouvement du système en prenant en compte le comportement des amortisseurs dans les équations. La résolution du mouvement permet de mettre en évidence la fréquence complexe du mouvement y compris la partie réelle et la partie imaginaire. Ces derniers nous permettent d'estimer le taux d'amortissement du système. Nous utilisons donc deux modèles dans cette approche : le modèle de poutre en cisaillement dont la résolution est analytique (ce modèle se rapproche de l'étude de FEMA où seul le déplacement transversal de la structure est pris en compte) ; et le modèle de poutre Générique avec l'équation du mouvement de degré six. Ces deux modèles sont parfaitement analytiques, ils nécessitent donc de connaître les paramètres du modèle définis par la géométrie de la structure et les caractères des éléments. De plus, l'intérêt est que nous pouvons alors avoir la fréquence exacte du système en considérant la contribution des amortisseurs au comportement global.

La dernière étude est la simulation numérique, celle-ci possède un double objectif. Le premier est d'étudier la déformée modale, les périodes de la structure sans amortisseurs et donner les informations nécessaires pour l'étude de FEMA et [Hwang et al., 2008]. Le deuxième est de former une référence afin de montrer la précision des différentes méthodes. Pour cela, les amortisseurs visqueux linéaires (AVLs) sont installés sur la diagonale de chaque étage avec un paramètre visqueux η pré-défini. Ensuite le système est soumis à une impulsion instantanée afin de vibrer librement, le déplacement des nœuds est alors enregistré. Étant donné que la structure est fortement élancée, nous supposons que la vibration du premier mode est alors dominante, nous pouvons déterminer donc le taux d'amortissement du modèle à partir de l'annulation du déplacement enregistré. Nous remarquons que l'analyse est temporel et que le taux d'amortissement intrinsèque de la structure est mis à 0 afin d'affecter uniquement le taux d'amortissement rapporté par les amortisseurs. La modélisation est réalisée par le logiciel SAP2000 et les signaux sont traités par MATLAB.

Les structures sont supposées être en béton armé, le module d'élasticité est égal à 20 000 MPA, la masse volumique est de 2 300 kg/m^3 et le coefficient de Poisson égale à $\nu = 0.2$. La structure se compose de 20 niveaux et la longueur des murs et du plancher est égale à 3m. En modifiant l'épaisseur des murs et des planchers, nous pouvons alors modifier la rigidité des mécanismes et donc les paramètres du modèle afin d'avoir les différents comportements du modèle. Les paramètres

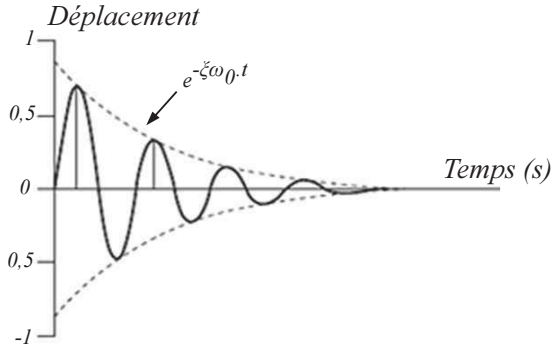


FIGURE 6.7 – Annulation du mouvement et l'amortissement

des structures sans amortisseurs sont résumés dans le tableau 6.1. Puis, afin de mettre en évidence la différence des mécanismes prépondérants du modèle, nous les présenterons sur la carte du domaine de validité des modèles. Cela nous permet de prédire dans un premier temps le comportement prépondérant de chaque structure et donc de quantifier de l'efficacité de l'ajout des amortisseurs pour la structure. Ces premières interprétations seront confirmées par les fréquences propres et ses ratios, fournis par le modèle éléments finis (tableau 6.2) ainsi que l'estimation du taux d'amortissement.

	Structure "Jaune" $e_m = e_p = 0,1m$	Structure "Verte" $e_m = 0,5m$; $e_p = 0,1m$	Structure "Rouge" $e_m = e_p = 0,5m$
$\mathbb{EI}\ (MN.m^2)$	9 000	45 000	45 000
$\mathcal{EI}\ (MN.m^2)$	$3,333$	$416,667$	$416,667$
$K\ (MN)$	$1,481$	$2,213$	$185,185$
$\Lambda\ (kg/m)$	690	2 530	3 450
Paramètres adim.	$C = 4,164$ $\gamma = 4.10^{-4}$	$C = 13,935$ $\gamma = 9.10^{-3}$	$C = 0,167$ $\gamma = 9.10^{-3}$

TABLE 6.1 – Paramètres du modèle d'étude

La première structure dite "Jaune" est formée par des murs et des planchers minces de même épaisseur (0.1m). Avec ces épaisseurs, le modèle se situe dans la zone de la poutre de Timoshenko à proximité de la poutre en cisaillement. Cela signifie que dans ce modèle, le mode cisaillement est prépondérant par rapport à celci de la flexion globale. Comme envisagé le ratio des fréquences propres est de 3.04 et 5.29 dans le tableau 6.2. Ce dernier est différent de ceci obtenu avec la structure "Rouge" (murs et les planchers de 0.5 m). Ces ratios sont supérieurs avec de valeurs $3; 5; 7; ...$ et donc éloigné du modèle de la poutre en cisaillement, son comportement est plus proche de la zone du modèle de la flexion globale (figure 6.8). La dernière structure "Verte" possède des murs plus épais que les planchers, son comportement se situe à l'intersection de plusieurs modèles et sera plus complexe à interpréter (figure 6.8).

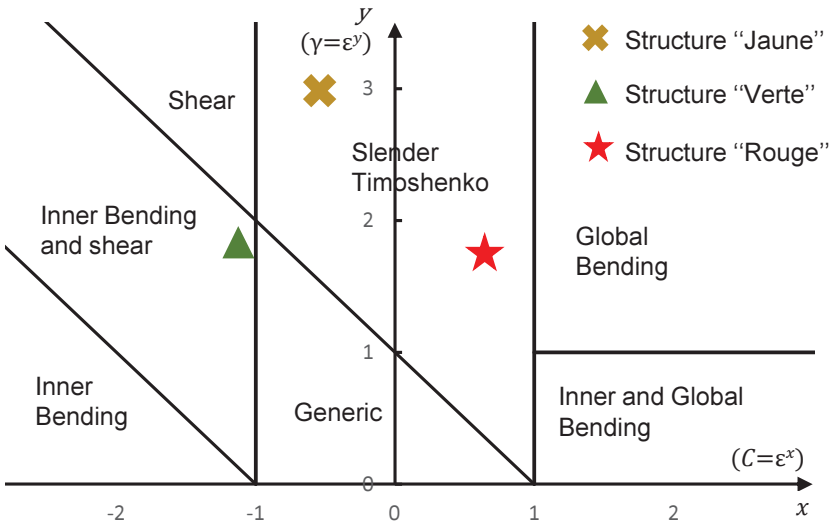


FIGURE 6.8 – Comportement représentatif de trois structures dans la domaine de validité

	Structure "Jaune"			Structure "Verte"			Structure "Rouge"		
Mode	1e	2e	3e	1e	2e	3e	1e	2e	3e
$T\ (s)$	5,41	1,78	1,02	6,33	1,72	0,77	2,08	0,51	0,24
$f\ (Hz)$	0,18	0,56	0,98	0,16	0,58	1,30	0,48	1,98	4,12
ratio		3,04	5,29		3,69	8,21		4,10	8,56

TABLE 6.2 – Périodes et fréquences propres des modèles éléments finis

Avec ces premiers résultats du modèle éléments finis sans AVLs, intégrant les déformées modales de chaque structure, nous pouvons alors déterminer la grandeur du paramètre visqueux η des amortisseurs afin d'obtenir des taux d'amortissement de 5%, 10% et 15%. Les 4 études de deux approches analytiques sont menées en parallèle chaque étude était basée sur une hypothèse différente, celles-ci s'adaptent aux différents types de structure, nous avons donc plusieurs valeurs de η. Afin de mettre en évidence la précision de chaque étude, nous avons défini la valeur de η puis calculé le taux d'amortissement correspondant à chaque cas selon les différents méthodes afin de pouvoir comparer avec la simulation éléments finis.

	Éléments finis			Modèle Générique		
η	$\omega_1 = 1,162$	[Hwang et al., 2008]		sans AVLs : $\omega_1 = 1,179$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	± (%)	$\omega\ (rad/s)$	ξ (%)	± (%)
50	**5,16**	**4,93**	*-4,3*	$1,178 + \mathbf{i}.0,061$	**5,20**	*+0,9*
100	**10,28**	**9,86**	*-4,1*	$1,175 + \mathbf{i}.0,123$	**10,44**	*+1,5*
150	**15,36**	**14,80**	*-3,6*	$1,171 + \mathbf{i}.0,186$	**15,75**	*+2,6*

TABLE 6.3 – Récapitulatif des études de la structure "Jaune"

Les résultats des études de la structure "Jaune" sont résumés dans le tableau

η	Éléments finis $\omega_1 = 1,162$	[FEMA]		Modèle cisaillement sans AVLs : $\omega_1 = 1,213$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	± (%)	ω (rad/s)	ξ (%)	± (%)
50	**5,16**	**6,26**	*+21,5*	$1,211 + \mathbf{i}.0,074$	**6,14**	*+19,1*
100	**10,28**	**12,52**	*+21,8*	$1,204 + \mathbf{i}.0,149$	**12,28**	*+19,5*
150	**15,36**	**18,79**	*+22,3*	$1,192 + \mathbf{i}.0,223$	**18,42**	*+20,0*

TABLE 6.4 – Récapitulatif des études de la structure "Jaune" (continu)

η	Éléments finis $\omega_1 = 0,993$	[Hwang et al., 2008]		Modèle Générique sans AVLs : $\omega_1 = 0,994$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	± (%)	ω (rad/s)	ξ (%)	± (%)
100	**4,65**	**4,34**	*-6,7*	$0,994 + \mathbf{i}.0,047$	**4,71**	*+1,2*
200	**9,25**	**8,68**	*-6,2*	$0,993 + \mathbf{i}.0,094$	**9,42**	*+1,8*
325	**15,21**	**14,10**	*-7,3*	$0,990 + \mathbf{i}.0,153$	**15,38**	*+1,1*

TABLE 6.5 – Récapitulatif des études de la structure "Verte"

η	Éléments finis $\omega_1 = 0,993$	[FEMA]		Modèle cisaillement sans AVLs : $\omega_1 = 0,774$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	± (%)	ω (rad/s)	ξ (%)	± (%)
100	**4,65**	**4,87**	*+4,7*	$0,773 + \mathbf{i}.0,041$	**5,25**	*+12,8*
200	**9,25**	**9,74**	*+5,3*	$0,770 + \mathbf{i}.0,081$	**10,50**	*+13,4*
325	**15,21**	**15,83**	*+4,1*	$0,763 + \mathbf{i}.0,132$	**17,06**	*+12,2*

TABLE 6.6 – Récapitulatif des études de la structure "Verte" (continu)

6.3 et 6.4 ; ceux de la structure "Verte" dans le tableau 6.5 et 6.6 et ceux de la structure "Rouge" dans le tableau 6.7 et 6.8. Nous précisons que le résultat de la structure "Rouge" n'est présenté que dans le cas de 5% de taux d'amortissement, cela provient principalement de fait que la convergence de la résolution de l'équation du mouvement du modèle Générique amortie n'est pas assurée au cours de calcul. Ce dernier est primordial pour les cas de grande viscosité. De plus, l'ordre de grandeur très important de la η (100 fois plus grand) vis à vis des autres cas permet de considérer la faible intérêt pour ce cas d'étude.

η	Éléments finis $\omega_1 = 3,024$	[Hwang et al., 2008]		Modèle Générique sans AVLs : $\omega_1 = 3,105$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	± (%)	ω (rad/s)	ξ (%)	± (%)
10 000	**6,43**	**6,06**	*-5,8*	$3,165 + \mathbf{i}.0,161$	**5,18**	*-19,4*

TABLE 6.7 – Récapitulatif des études de la structure "Rouge"

Le premier commentaire porte sur les valeurs du paramètre η des amortisseurs visqueux linéaires installés dans les structures. Afin d'avoir un taux d'amortisse-

	Éléments finis			Modèle cisaillement		
η	$\omega_1 = 3,024$	[FEMA]		sans AVLs : $\omega_1 = 6,065$		
(kNs/m)	ξ (%)	ξ (%)	$\pm$ (%)	$\omega\ (rad/s)$	ξ (%)	$\pm$ (%)
10 000	**6,43**	**139,18**	*+2064*	$5,283 + \mathbf{i}.2,980$	**49,13**	*+664*

TABLE 6.8 – Récapitulatif des études de la structure "Rouge" (continu)

ment de l'ordre de 5% à 15%, la valeur η de la structure "Verte" est deux fois plus grande que celle de la structure "Jaune" ; pour la structure "Rouge", cette valeur est cent fois plus importante. La première explication concerne le rapport des parties visqueuse et élastique de la rigidité au cisaillement $\frac{\eta\,\omega\,l_m}{K}$. Pour les structures "Jaune" et "Verte", avec un même ordre de grandeur de fréquence, ces ratios sont cohérents au ratio de la rigidité en cisaillement élastique K. Concernant la structure "Rouge", la rigidité élastique en cisaillement est beaucoup plus importante, il faut donc une viscosité beaucoup plus supérieure afin de pouvoir obtenir un même effet d'amortissement à la structure. De plus, cette valeur très élevée démontre la faible efficacité de l'ajout des amortisseurs à ce type de structure. Ce phénomène est bien prévu grâce à l'association des mécanismes sur la phénomènologie du niveau d'amortissement (la figure 6.2), ce qui explique l'inefficacité de l'ajout des amortisseurs diagonaux à la structure où la flexion globale domine le comportement dynamique. Une nouvelle fois, ce phénomène est mis en évidence sur la carte du domaine de validité des modèles. Dans cela, les structures "Jaune" et "Verte" se positionnent à proximité de la zone de cisaillement tandis que la structure "Rouge" est plus proche la zone de la flexion globale. L'impact de l'ajout des amortisseurs n'est pas donc significatif.

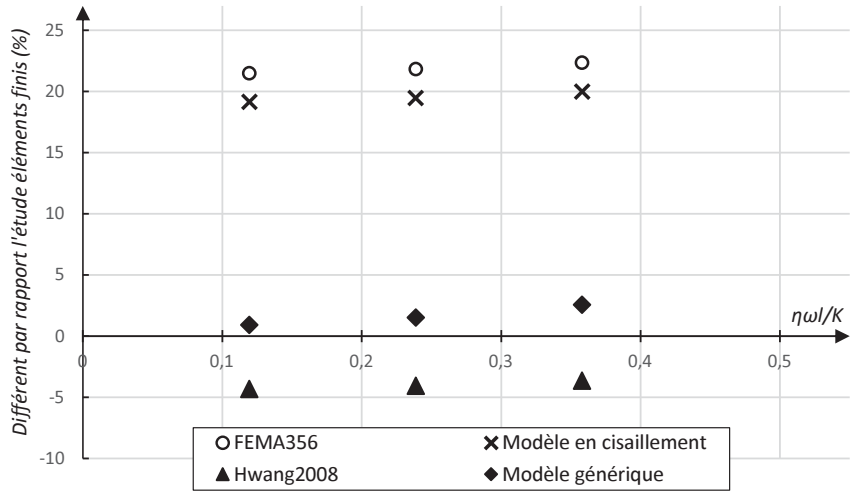


FIGURE 6.9 – Différence de taux d'amortissement globale estimé par différentes études par rapport l'estimation par éléments finis de la structure "Jaune"

Ensuite, nous nous intéressons à l'estimation du taux d'amortissement de chaque méthode avec sa précision par rapport au modèle éléments finis. Ces résultats sont présentés dans la figure 6.9, pour la structure "Jaune" et dans la figure 6.10

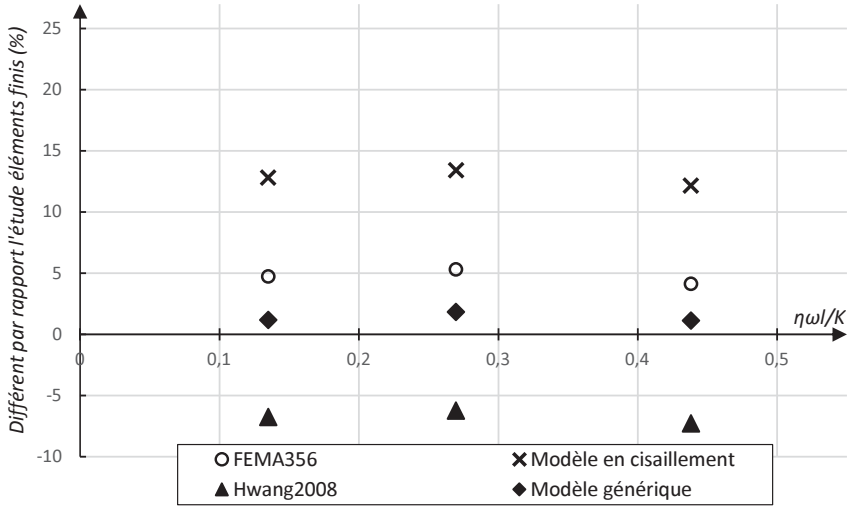


FIGURE 6.10 – Différence de taux d'amortissement globale estimé par différentes études par rapport l'estimation par éléments finis de la structure "Verte"

pour la structure "Verte". Nous observons donc une bonne estimation du modèle Générique amortie et [Hwang et al., 2008], dont la différence de la première étude est de moins de 5% et celle du deuxième de moins de 10%. Cette bonne estimation du modèle de poutre Générique provient de la prise en compte de trois mécanismes dans un modèle unique, contrairement à l'étude de modèle en cisaillement et FEMA. De plus, la résolution du problème permet de tenir compte de l'impact des amortisseurs au travail du modèle en fonction de la grandeur de la viscosité des amortisseurs Ce dernier permet de générer la modification du comportement de la structure et revient à re-modifier le taux d'amortissement de la structure. Cependant, [Hwang et al., 2008] et FEMA, utilisent directement la déformée modale de la structure sans les amortisseurs, en conséquence, ils ne peuvent pas prendre en compte les différents mécanismes de la structure et l'impact de l'ajout des amortisseurs à la modification du comportement (en particulier le mode propre).

Concernant le modèle FEMA et celui de la poutre en cisaillement, le taux d'amortissement est calculé en se basant sur le seul déplacement transversal donc, il est cohérent de considérer que ces deux études sont moins précises. Pour la structure "Jaune", nous observons une cohérence de ces deux méthode ; en revanche pour la structure "Verte", le modèle FEMA est plus précis que celui de le poutre en cisaillement. Ce dernier est explicité par l'épaisseur des éléments des deux structure qui défini le comportement du modèle. La structure "Jaune" dont les épaisseurs des murs et du plancher sont égales favorise le cisaillement de la cellule, alors que la flexion globale et la flexion interne sont moins dominantes. Contrairement à la structure "Verte" possédant des murs épais, le cisaillement diminue et les flexions deviennent alors plus importantes. Cela signifie que la déformation transversale de la structure "Jaune" est plus dominante que celle de la structure "Verte". De plus, la poutre en cisaillement est limitée par un seul mécanisme, c'est à dire que la structure n'a aucun déplacement longitudinal (cas non applicable pour la flexion). C'est la raison pour laquelle le modèle en cisaillement est moins adapté pour le

cas de la structure "Verte". En revanche, avantage du modèle en cisaillement est que son modèle est entièrement analytique, il permet donc d'estimer rapidement les paramètres du modèle et l'ordre de grandeur de la viscosité de l'amortissement recourir d'une modélisation complexe.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de l'ajout de l'amortisseur diagonal sur le modèle de la poutre Générique. Sachant que le modèle Générique est un modèle général, pouvant dégénérer en des modèles plus simples en fonction des contrastes entre ses différents paramètres. Même si l'installation des amortisseurs sur la diagonale des portiques permet de prendre en compte les déformations transversale et horizontale de la structure, le modèle Générique met en évidence l'association de l'amortissement avec uniquement le cisaillement de la cellule. Grâce à cette association, l'ajout des amortisseurs est efficace afin de modifier l'amortissement global dans le plupart des modèles sauf dans le cas de la poutre de flexion globale. Dans les modèles de poutre de Flexion Globale, la déformation de la cellule ressemble à la déformation de corps rigide, et dans ce cas, la déformation axiale des amortisseurs est donc toujours très faible. Ceci provient de la mise en œuvre des amortisseurs, indépendamment de l'ordre de grandeur de l'amortissement. Il est donc mis en évidence que l'installation de l'amortisseur diagonal n'est pas efficace pour le modèle de la poutre en flexion globale.

Concernant les autres modèles de poutre, l'étude de la phénoménologie du niveau d'amortissement met en évidence trois régimes d'amortissement : faiblement amorti, amorti et sur-amorti en fonction de l'ordre de grandeur de l'amortissement. Le cas "sur-amorti" est le cas auquel nous considérons que l'effort visqueux permet de dissiper toute l'énergie cinétique de l'action externe. Ce cas nécessite en revanche des amortisseurs très puissants et semble donc difficile à mettre en œuvre dans la réalité. Les deux autres régimes sont plus réalistes, avec un particulier le régime amorti qui est le plus intéressant. Dans ce régime, tous les mécanismes sont de même ordre de grandeur, le modèle amorti peut générer un régime faiblement amorti lorsque la viscosité des amortisseurs est faible et également un régime sur amorti dans la théorie. Cette dernière nous permet d'envisager de résoudre le problème du régime amorti en fonction du paramètre d'amortissement, la solution va nous permettre de définir le régime d'amortissement du système. En revanche, la résolution analytique du problème amorti est plus complexe, elle n'encourage pas à chercher une solution analytique pour le modèle de poutre Générique. Cependant, il est possible d'utiliser la solution analytique, afin de résoudre au cas par cas, en prenant en compte la complexité des paramètres, nous pouvons alors trouver la solution de fréquence complexe du problème précis. Cette piste nous permet de mettre en évidence l'efficacité de l'ajout des amortisseurs sur la fréquence et sur le taux d'amortissement global du système.

En revenant au modèle de la poutre Générique amortie, avec les paramètres adi-

mensionnelles de la poutre Générique "classique", et en mesurant l'ordre de grandeur du ratio entre la rigidité visqueuse et la rigidité élastique au cisaillement, nous pouvons alors définir la position du comportement du modèle amorti sur le cadre du domaine de validité. Concernant le paramètre a, défini par $\frac{\eta\,\omega\,\ell_m}{K} = O(\varepsilon^a)$, dans le cas où la partie visqueuse est inférieure à celle élastique, $a > 0$, le système se trouve dans le régime faiblement amorti et il n'y a donc pas de changement du comportement global. En revanche, si la partie visqueuse est proche de la rigidité au cisaillement de la cellule K, $a < 0$, le comportement se déplacé vers la droite d'une valeur égale à $-a$ à partir de la position de la structure non amortie. Ce phénomène signifie que l'ajout des amortisseurs permet non seulement d'influer (ou non) le taux d'amortissement du système mais aussi le comportement de la structure. La structure initiale peut alors par exemple être représentée par la poutre en cisaillement ou sandwich, mais avec l'ajout des amortisseurs, l'effet de la flexion globale peut être augmenté de façon à conduire à un modèle de poutre de Timoshenko ou Générique. Lorsque la rigidité visqueuse du cisaillement est supérieure à celle élastique, la modification du comportement est plus importante, le point représentatif est alors déplacé de manière plus importante vers la droite. Et lorsque la structure se retrouve dans la zone de poutre en flexion globale, l'augmentation du paramètre visqueux η de l'amortisseur n'induit alors plus aucun effet sur l'amortissement global.

La dernière section de ce chapitre consiste à l'étude de trois cas de structure. Elle nous permet de quantifier l'efficacité de l'ajout des amortisseurs et d'estimer le taux d'amortissement additionnel. Pour une structure dont la flexion globale est importante, l'ordre de grandeur élevé de η a confirmé l'inefficacité des amortisseurs. Pour les deux autres structures, le modèle de poutre Générique amortie donne une bonne estimation de la fréquence propre et du taux d'amortissement qui sont cohérent avec le modèle éléments finis et l'étude de [Hwang et al., 2008]. Cependant, le modèle de poutre en cisaillement est moins précis car il ne prend en compte que le déplacement transversal et le seul mécanisme en cisaillement de la structure. Ses résultats sont cohérent avec l'étude par FEMA et ses précisions sont bien loin que le résultat des éléments finis. Nous remarquons que le modèle de poutre Générique amorti est analytique, il regroupe ensemble tous les mécanismes dans un modèle. Sa résolution (cas par cas) permet donc de prendre en compte l'impact des amortisseurs et les autres mécanismes. De plus, sa résolution ne nécessite aucune modélisation numérique sophistiquée.

Conclusion générale

Cette thèse s'est intéressée à l'utilisation de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) pour la modélisation du comportement dynamique de bâtiments de moyenne à grande hauteur. Ces bâtiments ont la particularité de présenter une périodicité selon leur hauteur qui permet l'emploi de méthodes d'homogénéisation, comme la méthode HMPD. Celle-ci a éte appliquée à une famille de structures creuses périodiques dans une direction. À priori, la seule hypothèse de la méthode est le respect de la séparation d'échelle définie par le ratio de la taille caractéristique de la cellule sur la taille macroscopique du déplacement. Lorsque ce ratio est bien respecté, le modèle homogénéisé décrit de manière précise le comportement de la structure d'étude. De plus, le modèle du milieu continu équivalent est construit de façon rigoureuse et entièrement analytique à partir des propriétés de la cellule de base. Ce dernier permet donc de fournir une compréhension fine des phénomènes et d'identifier les paramètres qui déterminent le comportement de la structure.

La première partie de ce travail s'est portée sur la mise en œuvre d'une méthode d'ingénieur pour étudier le comportement dynamique du bâtiment.Une famille de modèle continu, décrivant les différentes types de fonctionnement du bâtiment, est définie en se basant sur une structure verticale périodique de portiques simples par [Hans and Boutin, 2008] et la généralisation de résultat est effectuée par la thesè [Chesnais, 2010]. Il met en évidence trois mécanismes existants dans le comportement du bâtiment : la flexion couplée des éléments de 'mur', la flexion globale qui correspond à la traction-compression en opposition de phase des murs et le cisaillement de la cellule. En fonction de l'importance relative des mécanismes, ils peuvent alors influencer fortement le comportement de la structure en représentant le modèle le plus simple. Quand ces trois mécanismes sont dans un ordre de grandeur équivalent, ils se regroupent dans un modèle (Générique ou Générique Modifié) dont l'équation du mouvement est une équation différentielle de degré 6. De fait, connaissant la rigidité des mécanismes, nous pouvons alors identifier le modèle le plus adapté par le comportement réel de la structure, tout en minimisant le nombre de calcul. Le point essentiel de cette méthode est l'estimation de ces paramètres appliquée au bâtiment. La génération du modèle et la nature de la flexion couplée ainsi que de la flexion globale permettent de calculer ces deux rigidités à partir du plan de l'étage courant par un calcul analytique. Le point singulier est la procédure d'estimation de la rigidité du cisaillement de l'étage. Nous proposons une modélisation par éléments finis d'un étage en imposant les conditions aux limites périodiques afin d'estimer ce dernier paramètre du modèle. Cette méthodologie peut être appliquée à tout type de bâtiment de structure périodique

en élévation. De plus, la précision du modèle construit augmente avec le nombre d'étage, ce qui offre un outil complémentaire aux techniques actuelles pour le dimensionnement des bâtiments de grande hauteur.

Les modèles HMPD sont construits dans une gamme basse de fréquence qui correspondent aux fréquences des séismes. L'utilisation du modèle équivalent HMPD du bâtiment permet d'éviter la modélisation éléments finis de la structure entière et permet de diminuer considérablement le temps des calculs par rapport à un modèle éléments finis. L'autre intérêt du modèle Générique est de donner un cadre interprétatif du comportement des bâtiments permettant d'en comprendre le fonctionnement. La connaissance de la valeur des rigidités des mécanismes définit le comportement dominant et fixe la valeur des fréquences propres, mais aussi des ratio des fréquences. En retour, la connaissance des ratios de fréquences (identifiée par calcul du dimensionnement ou par mesures in situ sur l'existant) est un élément d'information qui peut être exploité pour déterminer les paramètres du modèle et permettre de comprendre le fonctionnement effectif. Pour la mesure in situ, cela offre une piste d'exploitation qui sort du rôle de simple calage de fréquence des modèlisations EF. Enfin, le modèle Générique permet d'élargir le domaine de recherche du comportement à des modèles moins courant comme la poutre sandwich qui est souvent négligée en pratique afin de simplifier le modèle d'étude. En perspective, l'étude des bâtiments de grande hauteur, pour lesquels la structure interne s'apparente plus à une succession verticale de géometrie periodique par morceaux, devient possible. Dans ce cas, c'est une suite de modèles de poutre 1D connectées, qui pourraient être utilisées pour en étudier le fonctionnement.

Dans la deuxième partie, et toujours à l'aide de la méthode HMPD, nous nous sommes intéressés à la modification du comportement des bâtiments équipés de dispositifs anti-sismiques constitués d'amortisseurs visqueux linéaires. Dans notre étude, la structure périodique de portiques simples représente le bâtiment idéalisé et les amortisseurs visqueux linéaires sont installés sur les diagonales de tous les étages. Cette configuration ressemble peu à la réalité où les dispositifs sont équipés à certains endroits importants du bâtiment. Cependant, elle permet de décrire les modèles de poutre continue équivalente représentant le comportement à l'échelle macroscopique. Avec ces lois de comportement et ses équations d'équilibre, il nous permet de mettre en évidence l'impact des amortisseurs sur la réponse dynamique de la structure initiale et de comprendre les évolutions de comportement.

Premièrement, l'impact des amortisseurs au comportement de la structure est dirigé par l'ordre de grandeur du paramètre visqueux de l'amortisseur vis à vis des autres paramètres du modèle non amorti. Ce phénomène peut alors conduire le modèle au régime faiblement amorti où l'impact est très faible. L'efficacité de l'ajout d'amortisseur n'intervient que dans la correction de la fréquence par une partie imaginaire qui va définir l'amortissement global du modèle, dans ce cas, l'amortissement est très faible. Lorsque l'amortissement est très important, l'ordre de grandeur de la force visqueuse est supérieur à la force élastique. Elle sera donc équilibrée par la force d'inertie de la vibration. Nous considérons alors que c'est le régime sur amorti. Cet état de fait peut être également irréaliste, car il impose des

amortisseurs très puissants avec un ordre de grandeur de viscosité théoriquement très élevée. Le régime intermédiaire est alors celui amorti où la force visqueuse est équilibré simultanément par deux autres forces. Ce régime peut alors être considéré comme un état général de deux derniers régimes qui sont générés dans celui-ci en fonction du paramètre visqueux.

Nous nous sommes intéressé d'abord au modèle de cisaillement, la première raison est que le modèle de cisaillement est le modèle analytique le plus utilisé pour étudier le comportement dynamique de bâtiment. Il est cohérent pour plusieurs types de bâtiment de petite à moyenne hauteur. Deuxièmement, le comportement transversal de cette structure est dirigé par une seule variable qui est le déplacement transversal avec un effort interne unique. Cela permet de mettre en évidence l'importance des différents types d'effort dans le système. Cette première étude démontre que l'ajout des amortisseurs diagonal ne fait pas apparaître de nouveau effort, excepté concernant l'ajout de la 'rigidité visqueuse' à la rigidité au cisaillement. Par conséquent, il ne modifie pas les lois de comportement ainsi que l'équation d'équilibre du modèle équivalent. L'équation du mouvement est de degré deux. Avec les conditions aux limites, la résolution analytique permet de mettre en évidence l'impact des amortisseurs dans le modèle de cisaillement. Tout d'abord, l'ajout de l'amortisseur ne modifie pas la solution de la déformée modale de la structure. Cependant, la fréquence et le taux d'amortissement global sont déterminés analytiquement et correspondent donc au modèle dynamique de structure amorti connu. Lorsque l'amortissement est plus important, il est possible d'atteindre l'état sur-amorti correspond à $\xi > 1$. De plus, avec l'estimation des paramètres du modèle HMPD, il est possible d'estimer le taux d'amortissement de la structure réelle équipée d'amortisseurs par une formule analytique simple. Ce résultat permet donc d'estimer rapidement l'effet des amortisseurs en fonction de son ordre de grandeur sans recourir à la modélisation éléments finis ainsi qu'à l'étude de la déformée modale comme préconisée dans la littérature.

La recherche de l'impact des amortisseurs sur les autres mécanismes et modèles nous conduit au modèle de la poutre Générique à régime amorti. Ce dernier est le modèle général qui rassemble tous les différents mécanismes de la structure et les régimes amortis du modèle en fonction de ses paramètres. Il permet d'étudier l'association simultanée de l'amortissement avec les autres mécanismes. Grâce à celle-ci, la grandeur de l'amortissement est mesurée par rapport aux autres mécanismes et l'efficacité de l'ajout des amortisseurs est mise en évidence dans chaque modèle. Parmi eux, nous trouvons en particulier le modèle de flexion globale pour lequel des amortisseurs ne sont pas activés lors du mouvement de la structure. Ce mécanisme induit essentiellement pour chaque niveau un mouvement de corps rigide (en déplacement et rotation) ne générant que peu de déplacements différentiels nécessaires à l'activation des amortisseurs. Cette observation serait à confirmer pour des structures réelles d'extension plus large que celles traitées dans cette thèse.

Finalement, le modèle Générique à régime amorti est présenté sous forme des lois de comportement avec des équations d'équilibre incluant une rigidité 'visqueu-

se'. Son équation de comportement de degré six ne permet pas à une résolution analytique complète dans le domaine complexe. Cependant, il est toujours possible de trouver une solution pour chaque structure discrète. Il nous indique la valeur de fréquence propre et le taux d'amortissement global du système. Comme pour un modèle HMPD, un des avantages est que nous pouvons obtenir le résultat sans recourir à une modélisation éléments finis de la structure entière qui demande un temps de calcul important. De plus le ratio entre la rigidité visqueuse et élastique au cisaillement est un élément qui permet de comprendre l'évolution de chaque modèle équivalent. Cela permet de prédire le changement du comportement de mécanisme de la structure en fonction de la grandeur des amortisseurs, ce qui pourrait s'avérer utile dans les phases de conception de structures neuves ou pour le design de systèmes amortisseurs pour les bâtiments existants. Pour étendre et valider les résultats de cette étude, il serait intérressant de passer à des calculs sur des exemples de bâtiments périodiques réels, à l'instar de ce qui a été fait dans la première partie. Il serait également intérressant de voir comment ces résultats pourraient se transposer dans le cas d'amortisseurs non linéaires (visqueux ou frottants).

Annexe A

Modèle HMPD de la structure en cisaillement avec l'amortisseur "transversal"

A.1 Mise en œuvre de HMPD équipé les amortisseurs "transversals" - Structure en cisaillement

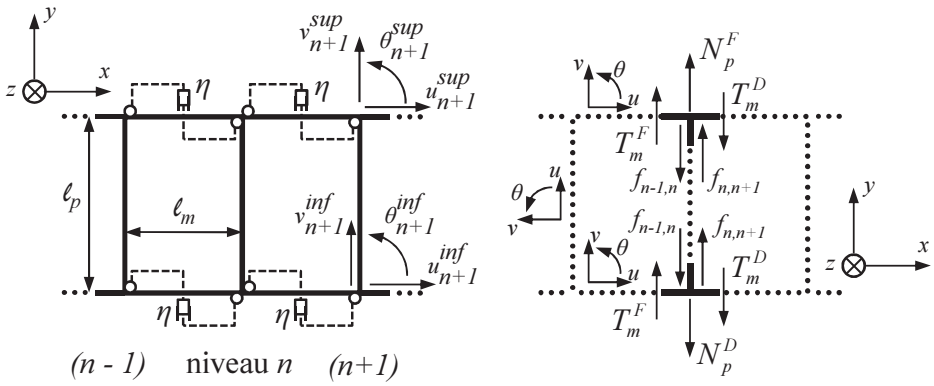


FIGURE A.1 – Modèle de structure avec l'amortisseur "transversal"

La structure étudiée présentée dans la figure A.1 se compose de la structure de portique simple avec les amortisseurs "fictifs". Ces amortisseurs relient entre les deux nœuds dans la direction longitudinale de deux niveaux consécutifs. De façon fictive, la force visqueuse est due au déplacement horizontal différentiel de ces deux nœuds. Grâce à la liaison articulé aux nœuds, ces dispositifs n'ajoutent que la force horizontalement à l'équilibre des nœuds.

La structure représentant le comportement équivalant d'une poutre de cisaillement a l'épaisseur des murs et du plancher de l'ordre de $O(\varepsilon^2)$ par rapport de la

longueur des murs :

$$\frac{a_m}{l_m} = O(\varepsilon^2); \qquad \frac{a_p}{l_m} = O(\varepsilon^2); \qquad \frac{l_p}{l_m} = O(1)$$

Nous allons chercher le comportement de cette structure en fonction de différent ordre de grandeur de l'amortisseur ajouté. Rappelons que les amortisseurs sont visqueux linéaires, ils ne présente aucune rigidité élastique et la force générée par la vitesse du déplacement différentiel entre deux extrémités de l'amortisseur.

$$\vec{F} = -\eta \vec{\dot{\Delta}}$$

et comme les dispositifs sont fixé aux nœuds de la structure par les rotules et donc l'ajout des amortisseurs n'entraîne que le changement de l'équation d'équilibre des forces dans la direction transversale (^{sup}y et (^{inf}y dans l'étape de discrétisation d'équilibre de HMPD. Ces équations devient :

$$\widehat{^{sup}y} = {}^{sup}y + f(v_n^{sup}, v_{n-1}^{sup}) - f(v_{n+1}^{sup}, v_n^{sup})$$
$$\widehat{^{inf}y} = {}^{inf}y + f(v_n^{inf}, v_{n-1}^{inf}) - f(v_{n+1}^{inf}, v_n^{inf})$$

Les forces $f(v_i^j, v_{i-1}^j)$ sont des efforts dus aux amortisseurs reliant le nœud i et (i-1) au nœud supérieur et inférieur . Et comme notre variable est mis sous la forme : $V(x,t) = V(x)e^{\mathbf{i}\omega t}$, donc les efforts dus aux amortisseurs peuvent être exprimés :

$$f(v_i^j, v_{i-1}^j) = -\mathbf{i}\eta\,\omega(v_i^j - v_{i-1}^j)$$

l'effort visqueux exprimé ce formule est dans le cas supposé que le déplacement du nœud i est supérieur que celui du nœud (i-1) et le signe négative exprime le sens contraire de la force par rapport au déplacement différent entre deux nœuds.

Par rapport aux études HMPD précédentes, dans notre étude, nous considérons que les paramètres mécaniques et géométriques du modèle sont les valeurs réels, les autres variables comme la force et la pulsation seront considérées sérieusement complexes. L'amortisseur visqueux linéaire est une partie physique de la structure représenté par la viscosité η, donc ce paramètre est réel et estimé aussi par l'ordre de grandeur du ratio d'échelle ε par rapport d'une valeur référentielle de l'amortissement η_r. La valeur physique observable de l'amortissement est :

$$\widetilde{\eta} = \varepsilon^{e_\eta}\,\eta_r$$

l'ordre de grandeur ε^{e_η} sera modifié pour étudier le changement du comportement du modèle homogénéisé par rapport au modèle initial. Selon chaque régime de ε^{e_η}, nous cherchons la pulsation ω_j qui peut être complexe pour trouvé l'équilibre des efforts du modèle.

$$\omega = \omega^{re} + \mathbf{i}\,\omega^{im}$$

ω^{re} et ω^{i} expriment la partie réelle et la partie imaginaire de la pulsation et comme on a séparé ces deux parties donc ces termes sont définis réels et inconnues. Dans

l'estimation de la pulsation, on suppose que ces deux parties sont de même l'ordre et son développement asymptotique est :

$$\omega = \varepsilon^{e_f}\left(\omega_0^{re} + \mathbf{i}\,\omega_0^{im}\right) + \varepsilon^{e_f+1}\left(\omega_1^{re} + \mathbf{i}\,\omega_1^{im}\right) + \varepsilon^{e_f+2}\left(\omega_2^{re} + \mathbf{i}\,\omega_2^{im}\right) + \dots$$

la grandeur physique observable de la fréquence :

$$\widetilde{\omega}_j = \varepsilon^{e_f+j}\left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\,\omega_j^{im}\right)$$

e_f est l'ordre de grandeur de la pulsation par rapport à la pulsation référentielle ω_0.

Dans les structures étudiées suivantes, on va chercher le changement du comportement de la poutre équivalente en présence des amortisseurs. Le comportement des structures étudiées sans amortisseur sont connus par les études précédentes. Les études sont effectuées par le changement de l'ordre de grandeur de l'amortisseur et le but de notre étude est de trouver la partie réelle et imaginaire de la pulsation, des variables cinématiques et le changement du comportement global de la structure.

Et pour que le mode de vibration de la structure puisse exister, dans les équations d'équilibre, il faut que la force d'inertie équilibre les forces viscoélastiques. Dans notre système, les forces viscoélastiques sont la force rappelle élastique due à la rigidité élastique de la structure et la force visqueuse du à l'amortissement. Donc *les forces inerties peuvent équilibrer ces deux forces en même temps ou une seule force soit élastique soit visqueuse*. Les trois cas précis sont étudiés avec la viscosité de l'amortisseur est de $O(\varepsilon^5)$, $O(\varepsilon^4)$ et $O(\varepsilon^{7/2})$, de façon de simulation d'amortissement croissant

A.2 Premier cas : l'amortissement à l'ordre $O(\varepsilon^5)$

Dans le premier cas, l'ordre de l'amortissement à $O(\varepsilon^5)$:

$$\widetilde{\eta}_5 = \varepsilon^5\,\eta_r$$

Pour les paramètres choisies, les modes de vibrations transversales correspondent à la pulsation d'ordre $O(\varepsilon^2\omega_r)$:

$$\omega = \varepsilon^2\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right) \qquad \text{où} \qquad \omega_j = \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\,\omega_j^{im}\right)$$

Le premier ordre des équations d'équilibre fourni par HMPD nous donnent :

$$\begin{cases} \Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + K_m\left(\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{0}{\widetilde{\theta}}{}'(x)\right) = 0 & (T_t - 0) \\ \overset{0}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) = 0 & (M - 0) \\ K_p\left(\overset{0}{\widetilde{\alpha}}(x) - \overset{0}{\widetilde{\theta}}(x)\right) + K_m\left(\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{0}{\widetilde{\theta}}(x)\right) = 0 & (M_t - 0) \end{cases}$$

En cherchant une solution de la rotation du niveau à la forme linéaire selon la longueur de la poutre, l'équation $(M-0)$ nous dit que $\overset{0}{\widetilde{\alpha}}(x)=0$. En conséquence, l'équation (M_t-0) donne :

$$\overset{0}{\widetilde{\theta}}(x)=\frac{K}{K_p}\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)$$

Remplaçant à l'équation (T_t-0) on obtient l'équation différentielle de l'ordre 2 du déplacement transversal $\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ de la poutre qui est classiquement connu comme l'équation du comportement dynamique de la poutre de cisaillement :

$$\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x)+K\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x)=0 \qquad (eq-0)$$

Modèle de poutre équivalente :

Le premier ordre de l'équation d'équilibre fourni par HMPD nous donne un comportement global de la poutre de cisaillement classique. L'effort de cisaillement au premier ordre de la poutre exprimé en fonction du déplacement :

$$\overset{0}{\widetilde{T}}(x)=-K\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x) \tag{A.1}$$

L'équation $(eq-0)$ et A.1 exprime l'équation d'équilibre et lois de comportement de la poutre de cisaillement classique. La résolution de cette poutre est classique dans le domaine des variables réelles. Cependant, nous cherchons la solution de cette poutre en considérant les variables soient complexes. Nous refaisons la solution du problème de la poutre encastré-libre avec les conditions aux limites ci-dessous. La résolution est toujours valable avec seulement deux équations $(eq-0)$ et A.1. Donc nous enlevons les de variable mesurable et l'ordre de grandeur des variables. L'équation d'équilibre et lois de comportement avec les conditions aux limites sont ré-écrites :

$$\Lambda\,\omega^2\,V(x)+K\,V''(x)=0 \qquad (eq'-0)$$

L'effort de cisaillement de la poutre :

$$T(x)=-K\,V'(x)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases}V(0)=0\\T(H)=0\rightarrow V'(H)=0\end{cases}$$

Le déplacement est écrit sous la forme exponentielle : $V(x)=e^{\lambda x}$. La forme exponentielle peut présenter le variable même s'il est complexe. Remplaçant à l'équation différentielle $(eq'-0)$ et en posant : $\delta^2=\dfrac{\Lambda\,\omega^2}{K}$, on a :

$$\delta^2+\lambda^2=0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda=\pm\mathbf{i}\,\delta$$

Donc on a la solution générale du déplacement transversal global de la poutre :

$$V(x) = A\, e^{\mathbf{i}\,\delta x} + B\, e^{-\mathbf{i}\,\delta x}$$

Appliquant la condition à la base :

$$V(0) = 0 \rightarrow A + B = 0$$

Le déplacement devient :

$$V(x) = A\left(e^{\mathbf{i}\,\delta x} - e^{-\mathbf{i}\,\delta x}\right) = \underline{A} \sin \delta x$$

D'autre part, on connaît que le déplacement soit complexe :

$$V(x) = V^{re}(x) + \mathbf{i}\, V^{im}(x)$$

Il est possible d'exprimer sous la forme :

$$V(x) = \underline{\underline{A}} \sin\left(\delta^{re} + \mathbf{i}\,\delta^{im}\right) x$$

Appliquant la condition à l'extrémité libre :

$$V'(H) = 0 \rightarrow \underline{\underline{A}}\left(\delta^{re} + \mathbf{i}\,\delta^{im}\right) \cos\left(\delta^{re} + \mathbf{i}\,\delta^{im}\right) H = 0$$

Dans l'interprétation au-dessus, tous les parties réelles et imaginaires : $V^{re}(x)$, $V^{im}(x)$, δ^{re} et δ^{im} sont définies réel. On cherche la solution dont au moins δ^{re} ou δ^{im} soit différent à 0 donc on peut déduire que :

$$\cos\left(\delta^{re} + \mathbf{i}\,\delta^{im}\right) H = \cos\left(\delta^{re} H\right) \cosh\left(\delta^{im} H\right) - \mathbf{i} \sin\left(\delta^{re} H\right) \sinh\left(\delta^{im} H\right) = 0$$

La solution obtenue si :

$$\begin{cases} \cos\left(\delta^{re} H\right) \cosh\left(\delta^{im} H\right) = 0 \\ \sin\left(\delta^{re} H\right) \sinh\left(\delta^{im} H\right) = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont satisfaits en même temps si :

$$\begin{cases} \cos\left(\delta^{re} H\right) = 0 \\ \sinh\left(\delta^{im} H\right) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \delta_k^{re} = (2\, k^{re} - 1)\dfrac{\pi}{2H} \\ \delta^{im} = 0 \end{cases}$$

Dans ces solutions, $k^{re} \in \mathbb{N}$. La valeur de δ_k^{re} dépend du mode de vibration tant que δ^{im} est nul pour tous les modes, par conséquence, la partie imaginaire du déplacement en fonction de l'espace n'existe jamais. Donc finalement on peut dire

que la solution du déplacement dans l'équation $(eq' - 0)$ est toujours réelle et sous la forme sinusoïdale. Pour la simplification de la présentation des études, on supprime tous les indices ^{re} et ^{im} dans la solution du *déplacement transversal* et il est réel :

$$V(x) = A \sin \delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

Retournant à la définition de δ on obtient la pulsation de la structure est réelle, il n'existe pas la partie imaginaire de la fréquence $\omega^{im\,k}$:

$$\omega^k = \omega^{re\,k} = \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}\,\delta_k$$

Retournons à l'équation d'équilibre et lois de comportement du modèle HMPD au premier ordre ; nous disons que le mouvement transversal de la poutre au premier ordre est sous la forme sinusoïdale et la fréquence est réelle même si problème est traité avec les variables complexes :

$$\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = A \sin \delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

Et la fréquence est :

$$\widetilde{\omega}_2^k = \widetilde{\omega}_2^{re\,k} = \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}\,\delta_k$$

Avec l'amortisseur de l'ordre $O(\varepsilon^5)$, il n'y a pas de changement au premier ordre des équations du modèle continue par rapport au modèle de poutre de cisaillement classique de [Hans and Boutin, 2008].

Nous continuons au **deuxième ordre** des équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + K_m\left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}{}'(x)\right) & \\ \qquad + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 & (T_t - 1) \\ \overset{1}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) = 0 & (M-1) \\ K_p\left(\overset{1}{\widetilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x)\right) + K_m\left(\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x) - \overset{1}{\widetilde{\theta}}(x)\right) = 0 & (M_t - 1) \end{cases}$$

On trouve que le terme d'amortissement ne se situe qu'au deuxième ordre de l'équation d'équilibre des forces transversales. Il est de même ordre de grandeur avec les termes corrigés de la force élastiques et la correction de la fréquence. Dans ce cas de l'amortissement faible, il joue le rôle de correction des variables macroscopiques et le comportement global de la structure.

Avec le même principe du premier ordre, on a :

$$\overset{1}{\widetilde{\alpha}}(x) = 0$$
$$\overset{1}{\widetilde{\theta}}(x) = \frac{K}{K_p}\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)$$

Remplaçant à l'équation $(T_t - 1)$ on a :

$$\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + K\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 \qquad (eq-1)$$

L'équation $(eq-1)$ exprime la correction de la fréquence $\widetilde{\omega}_1$ et du déplacement $\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$. En combinaison avec l'équation $(eq-0)$ on va trouver la correction de la fréquence qui est notre intéressant :

Multiplier l'équation $(eq-0)$ par $\overset{1}{\widetilde{V}}(x)$, l'équation $(eq-1)$ par $\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ et faire l'intégrale sur la longueur de la poutre on trouve :

$(eq-0)$:

$$\int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x) + K\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$
$$\rightarrow \left[K\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\overset{1}{\widetilde{V}}(x) - K\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)\right) dx = 0$$

$(eq-1)$:

$$\int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + K\overset{1}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$
$$\rightarrow \left[K\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{1}{\widetilde{V}}(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x) - K\overset{1}{\widetilde{V}}{}'(x)\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)\right) dx$$
$$+ \int_0^H \left(2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$

On obtient donc :

$$\int_0^H \left(2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x)\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\right) dx = 0$$
$$\rightarrow 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2 l_m\left[\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)\right]_0^H + \int_0^H \left(-2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\,\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}'^2(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3\overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x)\right) dx = 0$$

Comme les conditions aux limites, on a :

$$\begin{cases} \overset{0}{\widetilde{V}}(0) = 0 \\ \overset{0}{\widetilde{V}}{}'(H) = 0 \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$\int_0^H \left(-2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\, \widetilde{\omega}_2 l_m \overset{0}{\widetilde{V}}{}'^2(x) + 2\Lambda\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_3 \overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x) \right) dx = 0$$

On trouve la correction de la fréquence en ajoutant l'amortissement très faible :

$$\widetilde{\omega}_3 = \frac{\mathbf{i}\widetilde{\eta}_5\, l_m}{\Lambda} \frac{\int_0^H \overset{0}{\widetilde{V}}{}'^2(x)\, dx}{\int_0^H \overset{0}{\widetilde{V}}{}^2(x)\, dx} = \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

Comme le déplacement $\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ est déterminé ci-dessus, on peut trouver la valeur de $\widetilde{\omega}_3$:

$$\widetilde{\omega}_3^k = \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2 \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

On trouve que la correction de la pulsation est une valeur imaginaire donc la partie réelle de la correction $\widetilde{\omega}_3^{re\,k}$ soit nul.

En **résume**, avec les amortisseurs de l'ordre $O(\varepsilon^5)$, le comportement global de notre structure peut être décrit comme une poutre de cisaillement classique. Le variable pilotant la déformation de la structure est toujours le déplacement transversale $\overset{0}{\tilde{V}}(x)$ qui est parfaitement réel et décrit comme la poutre de cisaillement classique. Ce qui est changé est que la pulsation propre de la structure. Au premier ordre de la fréquence, elle est une valeur réelle et déterminée comme pour la poutre de cisaillement classique, la partie imaginaire du premier ordre de la fréquence est nul. Par contre, car la force visqueuse existe au deuxième ordre de l'équation d'équilibre, elle a ajouté à la correction des variables et du comportement macroscopique de la structure. La correction de la fréquence au deuxième ordre est imaginaire pure. Avec ces connaissances à différent ordre, on peut trouver la pulsation plus précise de notre système qui se compose d'une partie réelle au premier ordre et d'une partie imaginaire au deuxième ordre :

$$\widetilde{\omega}^k = \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}\,\delta_k + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2 + O(\varepsilon^2)$$

Comme la mouvement est décrit sous la forme d'exponentielle de la fréquence, donc la partie imaginaire $\mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_5\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2$ explique le décroisement du déplacement de la poutre selon le temps et donc l'amortissement global du modèle.

Le variable caché se trouve au troisième ordre de l'équation d'équilibre de moment global, et soit :

$$\overset{2}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) = -\frac{K_p}{E_m I}\overset{0}{\widetilde{\theta}}(x)$$

A.3 Deuxième cas : l'amortissement à l'ordre $O(\varepsilon^4)$

Dans le deuxième cas, l'ordre de l'amortissement à $O(\varepsilon^4)$, plus grand que celui du 1e cas :

$$\widetilde{\eta}_4 = \varepsilon^4\, \eta_r$$

Pour les paramètres choisies, les modes de vibrations transversales correspondent à la pulsation d'ordre $O(\varepsilon^2\omega_r)$:

$$\omega = \varepsilon^2 \left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right) \qquad \text{où} \qquad \omega_j = \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\,\omega_j^{im}\right)$$

Dans ce modèle, la force visqueuse joue un rôle plus important dans l'équilibre de la structure. Elle apparaît au premier ordre de l'équation d'équilibre des forces transversales obtenue par HMPD, elle est à même ordre de grandeur avec la force élastique et la force d'inertie. Dans ce cas, on trouve en même temps l'égalité de trois types de force. Les autres équations d'équilibre ne changent pas par rapport au premier cas, car l'amortissement influence seulement dans la direction transversale.

— Les variables cinématique démarrent à $(\overset{0}{\widetilde{V}},\ \overset{0}{\widetilde{\theta}},\ \overset{2}{\widetilde{\alpha}})$ et ses relations obtenues par HMPD :

$$\overset{2}{\widetilde{\alpha}}{}''(x) = -\frac{K_p}{E_m I}\,\overset{0}{\widetilde{\theta}}(x) \qquad (M-2)$$

$$\overset{0}{\widetilde{\theta}}(x) = \frac{K}{K_p}\,\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x) \qquad (M_t - 0)$$

— Le premier ordre de l'équation d'équilibre des forces transversales :

$$\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + K_m\left(\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) - \overset{0}{\widetilde{\theta}}{}'(x)\right) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\,\widetilde{\omega}_2 l_m \overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 \qquad (T_t - 0)$$

On trouve l'équation exprimant le déplacement transversal de **la poutre équivalente** :

$$\Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) + K\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\,\widetilde{\omega}_2 l_m \overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) = 0 \qquad (eq - 0)$$

La nouvelle poutre équivalente comporte presque comme la poutre de cisaillement, sauf l'effort de cisaillement se compose maintenant une partie élastique $-K\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)$ et une partie visqueuse $-2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\,\widetilde{\omega}_2 l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}'(x)$, elle devient :

$$\left(K + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\,\widetilde{\omega}_2 l_m\right)\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + \Lambda\widetilde{\omega}_2^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = 0$$

$$\rightarrow \overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + \delta^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \delta^2 = \frac{\Lambda\widetilde{\omega}_2^2}{K + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\,\widetilde{\omega}_2 l_m}$$

La résolution de cette équation est identique que le premier cas avec les même conditions aux limites, nous trouverons que le déplacement transversal $\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ est réel et sous la forme sinusoïdale :

$$\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = A\sin\delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

D'autre part :

$$\delta_k^2 = \frac{\Lambda \widetilde{\omega}_2^2}{K + 2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\, \widetilde{\omega}_2 l_m}$$
$$\rightarrow \widetilde{\omega}_2^2 - \frac{2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_4\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2\, \widetilde{\omega}_2 - \frac{K}{\Lambda}\delta_k^2 = 0$$

Nous avons donc :

$$\widetilde{\omega}_2 = \pm\delta_k \sqrt{\frac{K}{\Lambda} - \left(\frac{\widetilde{\eta}_4\, l_m}{\Lambda}\right)^2 \delta_k^2} + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}_4\, l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

Nous pouvons bien noter que tous les paramètres dans cette équation ci-dessus sont réelles et positives. Donc au premier ordre de la pulsation, nous avons trouvé directement que la pulsation est complexe, la partie réelle est la différence de la rigidité élastique et le carrée du produit de l'amortissement, par contre, il n'existe que l'amortissement dans la partie imaginaire de la pulsation. Il est raisonnable car seul l'amortissement provoque le retard du déplacement et faire la dissipation d'énergie du système. Et la dissipation d'énergie dépend fortement au mode de la vibration, c'est pourquoi il existe toujours en même temps le produit carrée de l'amortissement et δ_k.

Avec les amortisseurs plus puissants, la fréquence propre de la structure a été changée par rapport au système sans amortisseur. La différence vient de la viscosité de l'amortisseur imposé et particulièrement dépend au mode de vibration. Le changement du comportement de la structure sera expliqué plus précisement dans l'étude de la poutre générique avec les amortisseurs diagonaux. Dans ce premier temps, nous pouvons confirmer que l'ajout de l'amortisseur peut changer et rigidifer la structure initiale. En plus la partie réelle de la fréquence peut être éliminé si le terme dans la racine carrée est négative. C'est à dire que $\left(\frac{\widetilde{\eta}_4\, l_m}{\Lambda}\right)^2 \delta_k^2$ est plus grand que $\frac{K}{\Lambda}$. Dans ce cas là, la pulsation devient imaginaire pure, et il n'existe plus l'oscillant de la structure ou bien toute l'énergie est dissipée par les amortisseurs, et il n'y a aucun mouvement de la structure.

A.4 Troisième cas : l'amortissement à l'ordre $O(\epsilon^{7/2})$

Dans le troisième cas, l'ordre de l'amortissement à $O(\varepsilon^{7/2})$:

$$\widetilde{\eta}_{7/2} = \varepsilon^{7/2}\, \eta_r$$

Dans tous les cas, la partie élastique $K_m(\overset{0}{\widetilde{V}}''(x) - \overset{0}{\widetilde{\theta}}'(x))$ est fixé à un ordre qui dépend qu'aux caractéristiques de la structure. La partie cinématique $\Lambda\widetilde{\omega}^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ dépend au carrée de la fréquence et la partie d'amortissement $2\mathbf{i}\widetilde{\eta}\widetilde{\omega}l_m\overset{0}{\widetilde{V}}''(x)$ dépend à l'ordre de l'amortissement et à l'ordre de la pulsation. En jouant sur l'ordre de la

pulsation, on peut trouver les modes de vibrations transversales correspondent à la pulsation d'ordre $O(\varepsilon^{3/2}\omega_r)$ quand la force d'inertie équilibre à la force visqueuse :

$$\omega = \varepsilon^{3/2}\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right) \qquad \text{où} \qquad \omega_j = \left(\omega_j^{re} + \mathbf{i}\,\omega_j^{im}\right)$$

Dans ce gamme de fréquence, tous les équations d'équilibre des moments ne changent pas, sauf l'équation d'équilibre des forces transversales qui change. Au premier ordre, on trouve directement :

$$\widetilde{\omega}_{3/2}\left(2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + \Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}\overset{0}{\widetilde{V}}(x)\right) = 0 \qquad (T_t - 0)$$

Comme on s'intéresse au cas où $\widetilde{\omega}_{3/2} \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} &2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,l_m\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + \Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = 0 \\ \rightarrow\ &\overset{0}{\widetilde{V}}{}''(x) + \delta^2\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \delta^2 = \frac{\Lambda\,\widetilde{\omega}_{3/2}}{2\mathbf{i}\widetilde{\eta}_{7/2}\,l_m} \end{aligned}$$

La résolution de cette équation est identique que le premier cas avec les même conditions aux limites, on trouve le déplacement transversal $\overset{0}{\widetilde{V}}(x)$ est réel et sous la forme sinusoïdale :

$$\overset{0}{\widetilde{V}}(x) = A\sin\delta_k x \qquad \text{où} \qquad \delta_k = (2\,k-1)\frac{\pi}{2H} \in \mathbb{N}$$

On obtient donc le premier ordre de la pulsation est une valeur imaginaire pure, la valeur réelle est nul :

$$\widetilde{\omega}_{3/2} = \mathbf{i}\,\widetilde{\omega}_{3/2}^{im} = \mathbf{i}\frac{2\widetilde{\eta}_{7/2}\,l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

A.5 Conclusion

Dans les études ci-dessus, nous avons adapté la méthode HMPD sur une structure de double portique en prenant en compte la force visqueuse horizontale due au déplacement transversal des nœuds consécutifs de la structure. Cette adaptation est bien validée pour les structures dont le déplacement transversal est dominant et les autres variables cinématiques sont négligeables. Cela est parfaitement correspondant à la structure de cisaillement. Les trois cas sont étudiés selon l'ordre de grandeur de la viscosité de l'amortisseur visqueux linéaire. En cherchant l'état d'équilibre des forces, nous avons trouvé trois régimes d'amortie du système correspondant le régime de faible amortie, amortie et sur amortie.

$$\text{Régime faible amortie } O(\frac{\widetilde{\eta}}{\sqrt{K\Lambda}}) < O(\varepsilon_k^{-1}) : \quad \widetilde{\omega} = \delta_k\sqrt{\frac{K}{\Lambda}} + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

$$\text{Régime amortie } O(\frac{\widetilde{\eta}}{\sqrt{K\Lambda}}) = O(\varepsilon_k^{-1}) : \quad \widetilde{\omega} = \delta_k\sqrt{\frac{K}{\Lambda} - \left(\frac{\widetilde{\eta}\,l_m}{\Lambda}\right)^2\delta_k^2} + \mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

$$\text{Régime sur amortie } O(\frac{\widetilde{\eta}}{\sqrt{K\Lambda}}) > O(\varepsilon_k^{-1}) : \quad \widetilde{\omega} = 2\mathbf{i}\frac{\widetilde{\eta}\,l_m}{\Lambda}\delta_k^2$$

Dans nos études ci-dessus, nous avons considéré que la fréquence est complexe $\omega = \omega^{re} + \mathbf{i}\,\omega^{im}$, les variables cinématiques sont mises sous la forme $V(x,t) = V(x)e^{\mathbf{i}\omega t}$. la partie réelle de la fréquence va exprimer la pulsation harmonique sans amortie de la structure, et la partie imaginaire exprime l'amortissement de la pulsation. La résolution de l'équation différentielle de degré deux du mouvement avec les conditions aux limites de la poutre encastré-libre a montré que la déformé modale de la structure est toujours sous la forme sinusoïdale même si la pulsation est réelle, complexe ou imaginaire.

Dépendant à l'ordre de grandeur de l'amortisseur, la modification du comportement est plus ou moins important. Au régime faible amortie, le premier ordre de l'équation ne montre pas de changement du modèle par rapport au modèle initial, cependant, la modification vient de deuxième ordre. La force visqueuse ajoute la correction à la force de cisaillement et détermine la partie imaginaire de la fréquence. Il est bien noté que cette correction de la fréquence se trouve à l'ordre supérieur de la fréquence réelle.

Deuxième cas, l'ordre de grandeur de l'amortissement est plus grand, la force visqueuse intervient directement au premier ordre de l'équation d'équilibre. Et il provoque le changement de la fréquence réelle, c'est à dire la structure est rigidifiée. L'impact de cette modification est augmenter selon le mode de vibration et peut annuler l'oscillation lorsque $\left(\frac{\tilde{\eta}\, l_m}{\Lambda}\right)^2 \delta_k^2 > \frac{K}{\Lambda}$. La partie imaginaire de la fréquence s'est trouvée directement par la résolution du premier ordre de problème. C'est à dire que par rapport au régime faible amortie, l'amortissement de la structure est plus grande et comparable avec la pulsation réelle. Cet état est considéré comme l'état général de l'étude de modification de la structure par l'ajout des amortisseur. Il permet de générer au régime faible amortie et le régime sur amortie où l'amortissement est beaucoup plus grand que la rigidité élastique de la structure, l'oscillant de la structure disparaît et il ne reste que la partie imaginaire de la pulsation.

Annexe B

Cas d'étude complémentaire du modèle de structure ajouté des amortisseurs diagonals

B.1 Étude adimensionnelle de la poutre de Timoshenko à régime amorti

Adimensionnement d'équation, en prenant : $C = \frac{E_m I}{KL^2}$, $\Omega = \frac{\Lambda\omega^2 L^2}{K}$ et $\xi = \frac{\mathbf{i}\tilde{\eta}_2\tilde{\omega}_1 l_m}{K}$:

$$(1+\xi)\,V^{(4)} + \Omega V^{(2)} - \frac{\Omega}{C}(1+\xi)\,V = 0 \tag{B.1}$$

L'étude sur l'ordre de grandeur des mécanismes a mis en évidence le domaine de validation de chaque modèle simple. Premièrement, on ne trouve pas le cas de la poutre de flexion globale amortie. Ce phénomène montre que la façon de mettre des amortisseurs diagonales n'est pas efficace pour la structure de flexion. De quoi vient de ce phénomène ? Il faut regarder à la variation de la longueur des amortisseurs et le comportement de la poutre de flexion.

L'hypothèse de la poutre de flexion globale est que la rotation est la dérivée du déplacement transversal : $\tilde{\alpha}(x) = \tilde{V}'(x)$ ce qui explique la variation des amortisseurs et donc la force visqueuse à priori sont nulles. Ses corrections peuvent exister mais à l'ordre supérieur et alors cette partie est toujours très faible.

Une autre explication : regardant sur la variation de la longueur des amortisseurs, comme les variables sont découplées, on s'intéresse à la différence de $\tilde{V}'(x)$ et $\tilde{\alpha}(x)$ qui va déterminer cette variation. Dans le modèle de cisaillement, la rotation commence à l'ordre ε^3 et donc $\tilde{V}'(x) - \tilde{\alpha}(x)$ à priori à l'ordre ε. Par contre, pour le modèle de flexion, la rotation est plus important à l'ordre ε par conséquence, la différence de $\tilde{V}'(x)$ et $\tilde{\alpha}(x)$ commence toujours au moins de l'ordre 2, qui est toujours très petit par rapport aux autres parties comme élastique et cinématique.

Deuxièmement, l'étude adimensionnelle trouve le comportement à la zone (2) :

$$\mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1 l_m \overset{1}{\tilde{V}}^{(4)}(x) + \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}''(x) - \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \frac{\mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1 l_m}{E_m I} \overset{1}{\tilde{V}}(x) = 0$$

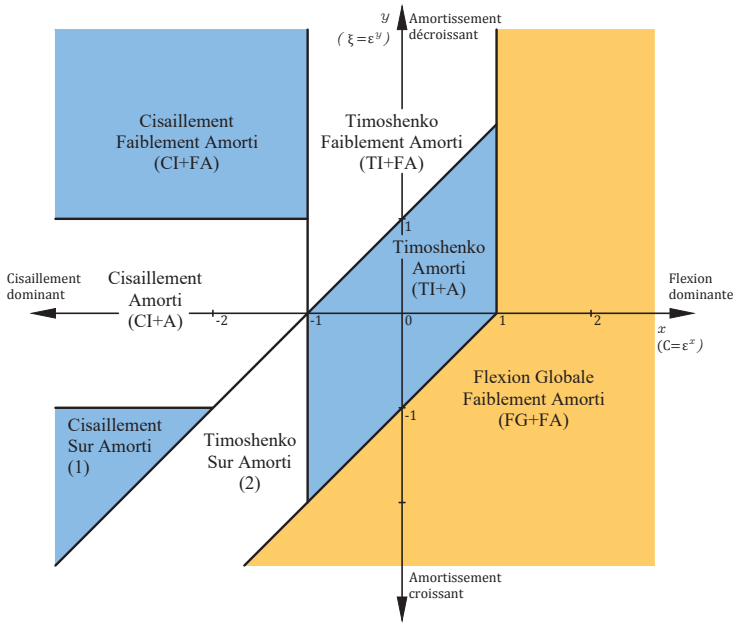


FIGURE B.1 – Cartographie

d'où vient ce comportement énorme ? on étudie ensuite un cas précis

B.2 Timoshenko sur amortie

La géométrie de la structure :

$$\frac{a_m}{l_m} = O(\varepsilon^{3/2}); \qquad \frac{a_p}{l_m} = O(\varepsilon^{3/2}); \qquad \frac{l_p}{l_m} = O(1)$$

L'amortissement et fréquence

$$\tilde{\eta}_{5/2} = \varepsilon^{5/2}\eta_0$$
$$\tilde{\omega}_1 = \varepsilon\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right)$$

La géométrie, l'amortisseur et la fréquence positionne le comportement au point dont x= -1 et y=

Le premier ordre des équations d'équilibre fourni par HMPD nous donnent :

$$\begin{cases} \Lambda\tilde{\omega}_1^2\overset{1}{\tilde{V}}(x) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1\dfrac{\sqrt{2}l_m l_p}{\sqrt{l_m^2+l_p^2}}\left(\overset{1}{\tilde{V}}''(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}'(x)\right) = 0 & (T_t - 0) \\ E_m I\overset{1}{\tilde{\alpha}}''(x) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1\dfrac{\sqrt{2}l_p^2}{\sqrt{l_m^2+l_p^2}}\left(\overset{1}{\tilde{V}}'(x) - \overset{1}{\tilde{\alpha}}(x)\right) = 0 & (M - 0) \\ K_p\left(\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x)\right) + K_m\left(\overset{1}{\tilde{V}}'(x) - \overset{1}{\tilde{\theta}}(x)\right) = 0 & (M_t - 0) \end{cases}$$

En prenant $l_m = l_p$, les équations $(T_t - 0)$ et $(M - 0)$ nous donnent :

$$\Lambda\tilde{\omega}_1^2\overset{1}{\tilde{V}}(x) = E_m I\overset{1}{\tilde{\alpha}}^{(3)}(x)$$

D'autre part $(T_t - 0)$:

$$\overset{1}{\tilde{\alpha}}{}'(x) = \frac{\Lambda\tilde{\omega}_1^2}{\mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1 l_m}\overset{1}{\tilde{V}}(x) + \overset{1}{\tilde{V}}{}''(x)$$

Remplacer à l'équation au-dessus :

$$\mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1 l_m \overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) + \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \Lambda\tilde{\omega}_1^2 \frac{\mathbf{i}\tilde{\eta}_{5/2}\tilde{\omega}_1 l_m}{E_m I}\overset{1}{\tilde{V}}(x) = 0$$

On trouve dans le comportement de cette poutre, c'est la combinaison de la flexion globale et l'effet visqueux des amortisseurs qui remplace le cisaillement. Donc la flexion globale existe toujours à l'ordre importante du comportement.

B.3 Modèle de poutre cisaillement - flexion couplée

Pour vérifier l'association parallèle de la flexion interne, le cisaillement et l'amortissement, on étudie le cas du modèle de poutre cisaillement-flexion couplée. Dont la géométrie :

$$\frac{a_m}{l_m} = O(\varepsilon^1); \qquad \frac{a_p}{l_m} = O(\varepsilon^{5/3}); \qquad \frac{l_p}{l_m} = O(1)$$

Pour le cas le plus général, où la force cinétique, élastique et visqueuse est à même importance, on a :

$$\tilde{\eta}_3 = \varepsilon^3\eta_0$$
$$\tilde{\omega}_2 = \varepsilon^2\left(\omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots\right)$$

Le premier ordre des équations montre que $\overset{1}{\tilde{\theta}}(x) = \overset{1}{\tilde{V}}{}'(x)$, $\overset{1}{\tilde{\alpha}}(x) = 0$.
A l'ordre suivant on trouve :

$$\begin{cases} K_m\left(\overset{3}{\tilde{V}}{}''(x) - \overset{3}{\tilde{\theta}}{}'(x)\right) + 2E_m I_m\left(\overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) - 2\overset{1}{\tilde{\theta}}{}^{(3)}(x)\right) & \\ \qquad + \Lambda_m\tilde{\omega}_2^2\overset{1}{\tilde{V}}(x) + \mathbf{i}\tilde{\eta}_3\tilde{\omega}_2\dfrac{\sqrt{2}l_m l_p}{\sqrt{l_m^2+l_p^2}}\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) = 0 & (T_t - 2) \\ -K_p\overset{1}{\tilde{\theta}}(x) - E_m I\overset{1}{\tilde{\alpha}}{}''(x) - \mathbf{i}\tilde{\eta}_3\tilde{\omega}_2\dfrac{\sqrt{2}l_p^2}{\sqrt{l_m^2+l_p^2}}\overset{1}{\tilde{V}}{}'(x) = 0 & (M - 2) \\ K_m\left(\overset{3}{\tilde{V}}{}'(x) - \overset{3}{\tilde{\theta}}(x)\right) + 2E_m I_m\left(2\overset{1}{\tilde{V}}{}^{(3)}(x) - 2\overset{1}{\tilde{\theta}}{}''(x)\right) & (M_t - 2) \\ \qquad - K_p\overset{1}{\tilde{\theta}}(x) = 0 & \end{cases}$$

$(T_t - 2)$ et $(M_t - 2)$:

$$2E_m I_m\overset{1}{\tilde{V}}{}^{(4)}(x) - (K_p + \mathbf{i}\tilde{\eta}_3\tilde{\omega}_2 l_m)\overset{1}{\tilde{V}}{}''(x) - \Lambda_m\tilde{\omega}_2^2\overset{1}{\tilde{V}}(x) = 0$$

Les trois mécanismes sont associés parallèlement

Bibliographie

[Abrate, 1988] Abrate, S. (1988). Continuum modeling of latticed structures. *In Vibration Inst., The Shock and Vibration Digest, Volume 20*, (10).

[Aiken and Kelly, 1990] Aiken, I. D. and Kelly, J. M. (1990). *Earthquake simulator testing and analytical studies of two energy-absorbing systems for multistory structures*. PhD thesis, University of California, Berkeley.

[Angelo Luongo, 2020] Angelo Luongo, Francesco D'Annibalea, M. F. (2020). Shear and flexural factors for homogenized beam models of planar frames. *Engineering Structures, Accepted for publication 2020*.

[Anthoine, 1995] Anthoine, A. (1995). Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2) :137–163.

[Bakhvalov and Panasenko, 1989] Bakhvalov, N. and Panasenko, G. (1989). Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media : Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. *Mathematics and its Applications Nauka*. Moscow (1984 in Russian).

[Basu and Nagpal, 1980] Basu, A. and Nagpal, A. (1980). Frame-wall systems with rigidly jointed link beams. *Journal of the Structural Division*, 106(5) :1175–1190.

[Basu et al., 1979] Basu, A. K., Guliani, A. K., Bajaj, R. S., and Nagpal, A. K. (1979). Dynamic characteristics of coupled shear walls. *Journal of the Structural Division*, 105(8) :1637–1652.

[Basu et al., 1984] Basu, A. K., Nagpal, A. K., and Kaul, S. (1984). Charts for seismic design of frame-wall systems. *Journal of Structural Engineering*, 110(1) :31–46.

[Bažant and Christensen, 1972] Bažant, Z. and Christensen, M. (1972). Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress. *International Journal of Solids and Structures*, 8(3) :327–346.

[Bensoussan et al., 1978] Bensoussan, A., Lions, J.-L., and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam.

[Boutin and Auriault, 1990] Boutin, C. and Auriault, J. (1990). Dynamic behaviour of porous media saturated by a viscoelastic fluid. application to bituminous concretes. *International journal of engineering science*, 28(11) :1157–1181.

[Boutin and Hans, 2003] Boutin, C. and Hans, S. (2003). Homogenisation of periodic discrete medium : Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30(4) :303 – 320.

[Boutin et al., 2010] Boutin, C., Hans, S., and Chesnais, C. (2010). Generalized beams and continua. Dynamics of reticulated structures. *Mechanics of Generalized Continua*, pages 1–10.

[Boutin et al., 2005] Boutin, C., Hans, S., Ibraim, E., and Roussillon, P. (2005). In situ experiments and seismic analysis of existing buildings. part ii : Seismic integrity threshold. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 34(12) :1531–1546.

[Bouvard et al., 1985] Bouvard, A., Chataigner, J., and Jalil, W. (1985). Analyse dynamique des structures-techniques de modélisation, redistribution des efforts. *Davidovici, V., éditeur : Génie parasismique*, pages 385–391.

[Buannic et al., 2003] Buannic, N., Cartraud, P., and Quesnel, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite structures*, 59(3) :299–312.

[Buckle and Mayes, 1990] Buckle, I. G. and Mayes, R. L. (1990). Seismic isolation : history, application, and performance—a world view. *Earthquake spectra*, 6(2) :161–201.

[Burgardt and Cartraud, 1999] Burgardt, B. and Cartraud, P. (1999). Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *Computers & structures*, 73(1) :267–279.

[Caillerie et al., 1989] Caillerie, D., Trompette, P., and Verna, P. (1989). Homogenisation of periodic trusses. In *IASS Symposium, 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures*, Madrid.

[Chang et al., 1991] Chang, K., Soong, T., Oh, S., and Lai, M. (1991). Seismic response of a 2/5 scale steel structure with added viscoelastic dampers.

[Chesnais, 2010] Chesnais, C. (2010). *Dynamique de milieux réticulés non contreventés. Application aux bâtiments.* PhD thesis, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.

[Chesnais et al., 2012] Chesnais, C., Boutin, C., and Hans, S. (2012). Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures : generalized Newtonian mechanics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(4) :2873–86.

[Chiheb et al., 1998] Chiheb, R., Cioranescu, D., El Janati, A., and Panasenko, G. (1998). Reinforced reticulated structures in elasticity. *COMPTES RENDUS DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE I-MATHEMATIQUE*, 326(7) :897–902.

[Cioranescu and Paulin, 2012] Cioranescu, D. and Paulin, J. S. J. (2012). *Homogenization of reticulated structures*, volume 136. Springer Science & Business Media.

[Constantinou, 1987] Constantinou, M. (1987). A simplified analysis procedure for base-isolated structures on flexible foundation. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 15(8) :963–983.

[Constantinou et al., 1991] Constantinou, M. C., Kartoum, A., Reinhorn, A., and Bradford, P. (1991). *Experimental and theoretical study of a sliding isolation system for bridges.* National Center for Earthquake Engineering Research Buffalo, NY.

[Constantinou and Symans, 1992] Constantinou, M. C. and Symans, M. (1992). *Experimental and analytical investigation of seismic response of structures with supplemental fluid viscous dampers*. National Center for earthquake engineering research Buffalo, NY.

[Cosserat and Cosserat, 1909] Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). Théorie des corps déformables.

[D'Annibale et al., 2019] D'Annibale, F., Ferretti, M., and Luongo, A. (2019). Shear-shear-torsional homogenous beam models for nonlinear periodic beam-like structures. *Engineering Structures*, 184 :115–133.

[Eringen, 1966] Eringen, A. C. (1966). Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, pages 909–923.

[FEMA, 2001] FEMA (2001). *NEHRP recommended provisions for seismic regulations for new buildings and other structures*. Building Seismic Safety Council.

[FEMA, 1997] FEMA, B. S. S. (1997). Nehrp guidelines for the seismic rehabilitation of buildings. *FEMA-273, Federal Emergency Management Agency, Washington, DC*.

[FEMA, 2000] FEMA, B. S. S. (2000). Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings. *Report FEMA-356, Washington, DC*.

[Forest, 2006] Forest, S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Presses des MINES.

[Hans, 2002] Hans, S. (2002). *Auscultation dynamique de bâtiments et modélisation par homogénéisation - Contribution à l'analyse de la vulnérabilité sismique*. PhD thesis, Thèse de doctorat, ENTPE-INSA de Lyon.

[Hans and Boutin, 2008] Hans, S. and Boutin, C. (2008). Dynamics of discrete framed structures : a unified homogenized description. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(November).

[Hans et al., 2007] Hans, S., Boutin, C., Chesnais, C., and Rival, F. (2007). A quel type de poutre peut-on assimiler un bâtiment ? ii–validation numérique et expérimentale.

[Hans et al., 2005] Hans, S., Boutin, C., Ibraim, E., and Roussillon, P. (2005). In situ experiments and seismic analysis of existing buildings. part i : Experimental investigations. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 34(12) :1513–1529.

[Heidebrecht and Smith, 1973] Heidebrecht, A. C. and Smith, B. S. (1973). Approximate analysis of tall wall-frame structures. *Journal of the Structural Division*, 99(2) :199–221.

[Hwang et al., 2008] Hwang, J.-S., Huang, Y.-N., Yi, S.-L., and Ho, S.-Y. (2008). Design formulations for supplemental viscous dampers to building structures. *Journal of structural engineering*, 134(1) :22–31.

[Jain, 1984] Jain, S. K. (1984). Continuum models for dynamics of buildings. *Journal of engineering mechanics*, 110(12) :1713–1730.

[Kerr and Zarembski, 1981] Kerr, A. D. and Zarembski, A. M. (1981). The response equations for a cross-tie track. *Acta Mechanica*, 40(3-4) :253–276.

[Kumar and McDowell, 2004] Kumar, R. S. and McDowell, D. L. (2004). Generalized continuum modeling of 2-d periodic cellular solids. *International Journal of solids and structures*, 41(26) :7399–7422.

[Laudarin, 2008] Laudarin, F. (2008). *Réduction de modèles, techniques d'homogénéisation et méthodes probabilistes : application à l'effet de l'interaction sol-structure sur la réponse dynamique des bâtiments*. PhD thesis, Université Paris-Est.

[Lee, 1998] Lee, U. (1998). Equivalent continuum representation of lattice beams : spectral element approach. *Engineering Structures*, 20(7) :587–592.

[Li, 2000] Li, Q. (2000). Free vibration of flexural-shear plates. *Computers & Structures*, 76(5) :663–674.

[Lin et al., 1988] Lin, R., Liang, Z., Soong, T., and Zhang, R. (1988). *An experimental study of seismic structural response with added viscoelastic dampers*. National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo.

[McCallen and Romstad, 1990] McCallen, D. and Romstad, K. (1990). A continuum model for lattice structures with geometric and material nonlinearities. *Computers & Structures*, 37(5) :795–822.

[McCallen and Romstad, 1988] McCallen, D. B. and Romstad, K. (1988). A continuum model for the nonlinear analysis of beam-like lattice structures. *Computers & structures*, 29(2) :177–197.

[Michel and Guéguen, 2018] Michel, C. and Guéguen, P. (2018). Interpretation of the velocity measured in buildings by seismic interferometry based on timoshenko beam theory under weak and moderate motion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 104 :131–142.

[Michel et al., 2007] Michel, C., Hans, S., Guéguen, P., and Boutin, C. (2007). In situ experiment and modelling of rc-structure using ambient vibration and timoshenko beam. *arXiv preprint arXiv :0709.4088*.

[Michel et al., 1999] Michel, J., Moulinec, H., and Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172(1-4) :109–143.

[Mokha et al., 1991] Mokha, A., Constantinou, M., Reinhorn, A., and Zayas, V. A. (1991). Experimental study of friction-pendulum isolation system. *Journal of Structural Engineering*, 117(4) :1201–1217.

[Moreau, 1996] Moreau, G. (1996). *Homogénéisation de Structures Discrètes en Élasticité et en Incrémental*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

[Moreau and Caillerie, 1998] Moreau, G. and Caillerie, D. (1998). Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. *Computers & structures*, 68(1-3) :181–189.

[Noor, 1988] Noor, A. K. (1988). Continuum modeling for repetitive lattice structures.

[Noor and Nemeth, 1980] Noor, A. K. and Nemeth, M. P. (1980). Micropolar beam models for lattice grids with rigid joints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 21(2) :249–263.

[Novak and Hifnawy, 1983] Novak, M. and Hifnawy, L. E. (1983). Effect of soil-structure interaction on damping of structures. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 11(5) :595–621.

[Pall and Marsh, 1982] Pall, A. S. and Marsh, C. (1982). Response of friction damped braced frames. *Journal of Structural Engineering*, 108(9) :1313–1323.

[Potzta and Kollar, 2003] Potzta, G. and Kollar, L. (2003). Analysis of building structures by replacement sandwich beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40(3) :535–553.

[Pradel, 1998] Pradel, F. (1998). *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses.* PhD thesis.

[Rallu, 2014] Rallu, A. (2014). *Low et medium frequencies dynamics of heterogeneous periodic media*. Theses, ENTPE.

[Renton, 1970] Renton, J. (1970). General properties of space grids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 12(9) :801–810.

[Renton, 1984] Renton, J. D. (1984). The beam-like behavior of space trusses. *AIAA journal*, 22(2) :273–280.

[Sánchez-Palencia, 1980] Sánchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. *Springer-Verlag*, 127.

[Skattum, 1971] Skattum, K. S. (1971). Dynamic analysis of coupled shear walls and sandwich beams.

[Smith et al., 1984] Smith, B. S., Kuster, M., and Hoenderkainp, J. C. D. (1984). Generalized method for estimating drift in high-rise structures. *Journal of Structural Engineering*, 110(7) :1549–1562.

[Smith et al., 1981] Smith, B. S., Kuster, M., and Hoenderkamp, J. (1981). A generalized approach to the deflection analysis of braced frame, rigid frame, and coupled wall structures. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 8(2) :230–240.

[Soong and Spencer Jr Reviewer, 1992] Soong, T. and Spencer Jr Reviewer, B. (1992). Active structural control : theory and practice. *Journal of Engineering Mechanics*, 118(6) :1282–1285.

[Stephen and Wang, 1996] Stephen, N. and Wang, P. (1996). On saint-venant's principle in pin-jointed frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 33(1) :79–97.

[Stephen, 1999] Stephen, N. G. (1999). On the vibration of one-dimensional periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 227(5) :1133–1142.

[Sun and Juang, 1986] Sun, C. and Juang, J. (1986). Modeling global structural damping in trusses using simple continuummodels. *AIAA journal*, 24(1) :144–150.

[Sun and Liebbe, 1990] Sun, C. and Liebbe, S. (1990). Global-local approach to solving vibration of large truss structures. *AIAA journal*, 28(2) :303–308.

[Tarján and Kollár, 2004] Tarján, G. and Kollár, L. P. (2004). Approximate analysis of building structures with identical stories subjected to earthquakes. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5) :1411–1433.

[Tollenaere, 1994] Tollenaere, H. (1994). *Modèles bidimensionnels de tissés : homogénéisation des treillis en vibrations libres*. PhD thesis, Grenoble INPG.

[Tollenaere and Caillerie, 1998] Tollenaere, H. and Caillerie, D. (1998). Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7) :699–705.

[Tyler, 1985] Tyler, R. (1985). Further notes on a steel energy-absorbing element for braced frameworks. *Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, 18(3) :270–279.

[Veletsos and Ventura, 1986] Veletsos, A. S. and Ventura, C. E. (1986). Modal analysis of non-classically damped linear systems. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 14(2) :217–243.

[Verna, 1991] Verna, P. (1991). *Modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis*. PhD thesis, Grenoble INPG.

[Zalka, 2001] Zalka, K. (2001). A simplified method for calculation of the natural frequencies of wall–frame buildings. *Engineering Structures*, 23(12) :1544 – 1555.