



Numéro d'ordre : 2020LYSEC21

Année 2020

**THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
**opérée au sein de l'Ecole centrale de Lyon**

ÉCOLE DOCTORALE N°162  
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

par

**Thomas Berthelon**

---

**REPONSE FORCEE DU FAN SOUS INGESTION DE VORTEX**

---

Soutenue publiquement le 30 septembre 2020, devant le jury d'examen :

|              |                                       |                       |
|--------------|---------------------------------------|-----------------------|
| S. KHELLADI  | Professeur, Arts et Métiers ParisTech | Rapporteur            |
| L. STAINIER  | Professeur, École Centrale de Nantes  | Rapporteur            |
| I. TRÉBINJAC | Professeur, École Centrale de Lyon    | Présidente            |
| R. DAON      | Ingénieur, Safran Aircraft Engines    | Examineur             |
| F. THOUVEREZ | Professeur, École Centrale de Lyon    | Directeur de thèse    |
| A. DUGAI     | Ingénieur de recherche, ONERA         | Co-Encadrant de thèse |



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier les membres du jury d'avoir évalué mes travaux et particulièrement Sofiane Khelladi et Laurent Stainier d'avoir accepté d'être rapporteurs. Merci aussi à Isabelle Trébinjac d'avoir présidé cette soutenance. Merci de l'avoir rendue possible en présente, malgré les conditions.

Je tiens à remercier Fabrice Thouverez qui a dirigé cette thèse. Merci d'avoir accepté un peu d'aérodynamique au sein de ton équipe et de t'être rendu disponible lors de mes passages à Centrale (n'étant pas souvent à Lyon, j'ai bénéficié d'un traitement de faveur qui a fait pâlir d'autres doctorants). Ces petits bols d'air dans la région Lyonnaise ont été très agréables notamment grâce aux nombreux personnages qui composent l'équipe du G8. Merci donc à Adrien, Bruno, Cécile, Corentin, Marine, Nicolas G, Nicolas Belly flap... et tout particulièrement Etienne Lemoine et Samuel Quaegebeur que j'ai sollicité bien plus que la limite du convenable l'autorisait.

Mes remerciements vont aussi aux nombreux encadrants industriels. Merci donc à Edouard de Jaeghere et Antoine Mazeau qui m'ont permis de découvrir le sujet à travers un stage et ont participé au lancement de la thèse. Merci à Jonathan Langridge d'avoir pris le relais efficacement avant de donner la main à Nicolas De Cacqueray qui après quelques coups de gueule dont il a le secret a laissé Tony Spriet reprendre le flambeau avec un grand intérêt. Merci aussi à Renaud Daon qui a conclu cet encadrement d'une très belle manière. J'en profite pour remercier les autres personnes que j'ai rencontré lors de mes passages à Safran et qui m'ont donné un coup de pouce quand j'en avais besoin : Alexandre, Béatrice, Carole, Cécile, Charles, Maxime, Thomas... Je garderai un bon souvenir du « plateau ael » : les coups majestueux de Thomas au minigolf n'ont eu d'égal que les cookies de Nicolas.

Je tiens à remercier chaleureusement Alain Dugeai pour son encadrement sans faille. Tes compétences sur les aspects aérodynamiques, mécaniques, numériques et théoriques ont été d'une grande aide tout au long de la thèse. Tes qualités humaines ont contribué à une ambiance de travail agréable et bienveillante. Merci enfin de m'avoir accordé ta confiance pour continuer au sein de MSAE. J'en profite pour remercier les personnes de l'ONERA qui m'ont donné un coup de main pendant la thèse : Benjamin Godard, Fabien Huvelin, Julien Marty, Simon Verley, Yann Mauffray... et particulièrement Antoine Plazcek qui m'en a donné un nombre incalculable. Un grand merci à Fabrizio avec qui j'ai partagé mon bureau dans la bonne humeur : la non-participation de l'Italie à la coupe de monde 2018 restera un événement marquant de cette thèse.

Merci aux copains de l'N6K (Flo, Maxime et Jérémy) : le projet « vol en formation » a probablement été un déclic pour moi. Merci aussi à mes amis du CPP et particulièrement à Val qui a assisté à la soutenance et représenté cette bande de potes bien trop longue pour être listée. Merci à Benjy et Ronan, amis de longue et très longue date pour leur soutien.

Je remercie aussi les colocos (Anaïs), Célia, Elise et Mathilde qui sont indissociables de mon aventure thèse, tout comme mes parties d'échecs avec Panda et les foots aux quatre coins de

Paris avec Rémi.

Je remercie toute ma famille, et ai une pensée particulière pour Papy Bernard qui est probablement à l'origine de mes études dans l'aéronautique qui se terminent par cette thèse. Merci Maman, Merci Papa. Merci Rémy, mon grand frère modèle et véritable source d'inspiration quotidienne. Suivre tes pas n'est pas chose facile mais cela m'assure d'aller dans la bonne direction.

Pour finir, merci à Marie. Notre histoire a commencé en même temps que la thèse, je suis content d'être arrivé à la fin de la thèse et de n'être toujours qu'au début de notre histoire...

# Résumé

Lors des phases de décollage d'un aéronef, l'écoulement généré par le moteur en amont de celui-ci peut interagir avec le sol et entraîner la formation d'un vortex. Ce vortex de sol est perçu par les aubages du fan (le premier étage du moteur) comme une source d'excitation aérodynamique entraînant leur vibration menant potentiellement à leur rupture mécanique. Cette problématique est très présente sur les nouvelles générations de turbomachines permettant une réduction des émissions atmosphériques. Le but de cette thèse est de comprendre les mécanismes aéroélastiques en jeu lors de la réponse forcée des aubages en présence d'un vortex de sol. Les travaux ont aussi pour objectif de proposer une stratégie numérique permettant de simuler l'ensemble des phénomènes physiques : l'écoulement aérodynamique autour du moteur, le chargement aérodynamique des aubages et la dynamique vibratoire non-linéaire de l'ensemble aube-disque. Cette stratégie numérique est développée et testée sur une configuration industrielle dans l'optique d'être utilisée dans les phases de conception au sein des bureaux d'études.

**Mots-clés** aéroélasticité, turbomachines, réponse forcée, vortex de sol, contact



# Abstract

During the takeoff phases, the flow generated by the engine can interact with the ground and lead to the formation of a vortex. This ground vortex is seen by the fan blades as a source of aerodynamic excitation causing their vibration which can lead to their mechanical failure. This problem is very present on the new generations of low emission turbomachines. The aim of this thesis is to understand the aeroelastic mechanisms involved during the blades forced response in case of ground vortex ingestion. The work also aims to propose a numerical strategy to simulate all physical phenomena : the aerodynamic flow around the engine, the aerodynamic loading of the blades and the non-linear vibrational dynamics of the blade-disc assembly. This numerical strategy is developed and tested on an industrial configuration with a view to being used in the design process.

**Keywords** aeroelasticity, turbomachines, forced response, ground vortex, contact



# Table des matières

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                          | <b>1</b>  |
| <b>I Problématique de réponse forcée du fan sous ingestion de vortex</b>     | <b>5</b>  |
| 1 Cadre général . . . . .                                                    | 7         |
| 1.1 Fonctionnement d'un turboréacteur . . . . .                              | 7         |
| 1.2 Phénomène aéroélastique du fan . . . . .                                 | 8         |
| 1.2.1 Aéroélasticité statique . . . . .                                      | 10        |
| 1.2.2 Flottement . . . . .                                                   | 10        |
| 2 Phénomène de réponse forcée . . . . .                                      | 11        |
| 2.1 Mise en équation de la réponse forcée d'une structure linéaire . . . . . | 11        |
| 2.2 Description du phénomène et enjeux de conception . . . . .               | 13        |
| 2.3 Méthodes de prédiction . . . . .                                         | 16        |
| 2.3.1 Méthode de couplage fort . . . . .                                     | 17        |
| 2.3.2 Méthode découplée . . . . .                                            | 18        |
| 2.3.3 Méthode de couplage faible . . . . .                                   | 19        |
| 2.4 Sources d'excitation . . . . .                                           | 20        |
| 2.4.1 Interaction avec les roues adjacentes . . . . .                        | 20        |
| 2.4.2 Distorsion d'ingestion de couche limite . . . . .                      | 20        |
| 2.4.3 Décollement de manche sous vent de travers . . . . .                   | 22        |
| 3 Le vortex de sol . . . . .                                                 | 23        |
| 3.1 Formation du vortex de sol . . . . .                                     | 24        |
| 3.1.1 Critère de formation du vortex de sol . . . . .                        | 24        |
| 3.1.2 Mécanismes de formation . . . . .                                      | 26        |
| 3.2 Comportement du vortex de sol . . . . .                                  | 29        |
| 3.2.1 Comportement du vortex en condition de vent de face . . . . .          | 29        |
| 3.2.2 Comportement du vortex en condition de vent de travers . . . . .       | 31        |
| 3.2.3 Comportement instationnaire . . . . .                                  | 31        |
| 3.3 Réponse forcée en présence du vortex de sol . . . . .                    | 32        |
| 4 Bilan et objectifs des travaux de thèses . . . . .                         | 33        |
| <b>II Modélisation et méthodes numériques</b>                                | <b>35</b> |
| 1 Modélisation de la structure . . . . .                                     | 37        |
| 1.1 Équation de la dynamique d'une roue aubagée . . . . .                    | 37        |
| 1.2 Méthode de réduction . . . . .                                           | 38        |
| 1.2.1 Démarche des méthodes de réduction . . . . .                           | 38        |
| 1.2.2 Réduction modale . . . . .                                             | 38        |
| 1.2.3 Méthode de Craig et Bampton . . . . .                                  | 39        |
| 1.3 Symétrie cyclique . . . . .                                              | 41        |

|                                                                                                    |                                                                                                               |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.3.1                                                                                              | Propriétés des structures à symétrie cyclique . . . . .                                                       | 41        |
| 1.3.2                                                                                              | Analyse modale sur secteur en symétrie cyclique . . . . .                                                     | 43        |
| 1.3.3                                                                                              | Base modale sur la structure complète . . . . .                                                               | 45        |
| 1.3.4                                                                                              | Équation de la dynamique en symétrie cyclique . . . . .                                                       | 49        |
| 1.3.5                                                                                              | Forces aérodynamiques généralisées dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu . . . . .        | 50        |
| 1.3.6                                                                                              | Intérêts et limites . . . . .                                                                                 | 52        |
| 1.4                                                                                                | Non-linéarité en pied d'aube . . . . .                                                                        | 53        |
| 1.4.1                                                                                              | Modélisation du contact . . . . .                                                                             | 53        |
| 1.4.2                                                                                              | Méthode de balance harmonique . . . . .                                                                       | 56        |
| 1.4.3                                                                                              | Alternating Frequency/Time . . . . .                                                                          | 58        |
| 1.4.4                                                                                              | La méthode DLFT . . . . .                                                                                     | 58        |
| 2                                                                                                  | Modélisation aérodynamique . . . . .                                                                          | 59        |
| 2.1                                                                                                | Équations de la mécanique des fluides . . . . .                                                               | 59        |
| 2.2                                                                                                | Modélisation RANS . . . . .                                                                                   | 60        |
| 2.3                                                                                                | Modèle de turbulence : k- $\omega$ Menter SST . . . . .                                                       | 61        |
| 2.4                                                                                                | Méthodes des volumes finis en formulation ALE . . . . .                                                       | 62        |
| 2.4.1                                                                                              | Discrétisation spatiale . . . . .                                                                             | 63        |
| 2.4.2                                                                                              | Intégration temporelle . . . . .                                                                              | 66        |
| 2.5                                                                                                | Déformation de maillage . . . . .                                                                             | 67        |
| 3                                                                                                  | Bilan . . . . .                                                                                               | 69        |
| <b>III Caractérisation aérodynamique de l'excitation générée par le vortex de sol</b>              |                                                                                                               | <b>71</b> |
| 1                                                                                                  | Modélisation du vortex de sol en condition de vent de travers . . . . .                                       | 73        |
| 1.1                                                                                                | Validation de l'approche numérique pour modéliser le vortex de sol sur une configuration académique . . . . . | 73        |
| 1.1.1                                                                                              | La configuration académique de Murphy . . . . .                                                               | 73        |
| 1.1.2                                                                                              | Approche numérique pour la configuration de Murphy . . . . .                                                  | 73        |
| 1.1.3                                                                                              | Évaluation de la représentativité de la méthode numérique . . . . .                                           | 76        |
| 1.1.4                                                                                              | Conclusions . . . . .                                                                                         | 82        |
| 1.2                                                                                                | Caractérisation de la distorsion sur la configuration industrielle . . . . .                                  | 83        |
| 1.2.1                                                                                              | Description de la configuration . . . . .                                                                     | 83        |
| 1.2.2                                                                                              | Approche numérique pour la configuration industrielle . . . . .                                               | 83        |
| 1.2.3                                                                                              | Résultats . . . . .                                                                                           | 84        |
| 1.2.4                                                                                              | Conclusions . . . . .                                                                                         | 88        |
| 2                                                                                                  | Chargement aérodynamique du fan lié au vortex de sol . . . . .                                                | 89        |
| 2.1                                                                                                | Modélisation aérodynamique du fan avec cartographie de distorsion . . . . .                                   | 89        |
| 2.1.1                                                                                              | Approche numérique . . . . .                                                                                  | 89        |
| 2.1.2                                                                                              | Description du calcul . . . . .                                                                               | 92        |
| 2.2                                                                                                | Étude du chargement aérodynamique du fan . . . . .                                                            | 94        |
| 2.2.1                                                                                              | Mécanisme d'excitation . . . . .                                                                              | 94        |
| 2.2.2                                                                                              | Considération harmonique . . . . .                                                                            | 95        |
| 3                                                                                                  | Bilan . . . . .                                                                                               | 97        |
| <b>IV Étude de la réponse forcée linéaire à la coïncidence du fan liée à l'ingestion de vortex</b> |                                                                                                               | <b>99</b> |
| 1                                                                                                  | Hypothèse de réduction . . . . .                                                                              | 101       |

|           |                                                                                                                            |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2         | Méthodologie de calcul de la réponse forcée basée sur une approche découplée . .                                           | 102        |
| 2.1       | Présentation . . . . .                                                                                                     | 102        |
| 2.2       | Hypothèses de l'approche découplée dans le cadre d'une structure à symétrie cyclique . . . . .                             | 102        |
| 2.3       | Stratégie d'extraction des termes aérodynamiques . . . . .                                                                 | 103        |
| 2.4       | Résolution de l'équation de la dynamique . . . . .                                                                         | 104        |
| 3         | Réponse forcée linéaire sur la coïncidence 2F/4EO . . . . .                                                                | 105        |
| 3.1       | Modèle aéroélastique . . . . .                                                                                             | 105        |
| 3.1.1     | Modèle structure . . . . .                                                                                                 | 105        |
| 3.1.2     | Modèle aérodynamique . . . . .                                                                                             | 107        |
| 3.2       | Estimation du niveau de réponse forcée . . . . .                                                                           | 107        |
| 3.2.1     | Approche découplée . . . . .                                                                                               | 107        |
| 3.2.2     | Approche couplée . . . . .                                                                                                 | 111        |
| 3.3       | Confrontation aux essais . . . . .                                                                                         | 115        |
| 4         | Étude de l'impact du couplage fan-vortex sur la réponse forcée . . . . .                                                   | 116        |
| 4.1       | Mise en place du calcul complet fan nacelle . . . . .                                                                      | 116        |
| 4.2       | Caractérisation de la distorsion du calcul fan nacelle . . . . .                                                           | 119        |
| 4.3       | Évaluation de l'impact de la présence de la nacelle sur la réponse forcée du fan . . . . .                                 | 120        |
| 5         | Bilan . . . . .                                                                                                            | 123        |
| <b>V</b>  | <b>Étude de l'impact de non-linéarités liées au contact aube-disque sur la réponse forcée</b>                              | <b>127</b> |
| 1         | Stratégie de calcul de la réponse non-linéaire dans un cadre aéroélastique . . . .                                         | 128        |
| 1.1       | Modélisation de la structure pour un problème non-linéaire . . . . .                                                       | 128        |
| 1.2       | Une approche découplée pour alimenter le calcul non-linéaire . . . . .                                                     | 129        |
| 2         | Estimation du niveau de réponse forcée non-linéaire sur la configuration industrielle                                      | 134        |
| 2.1       | Réduction . . . . .                                                                                                        | 134        |
| 2.2       | Excitation du mode 2F-4D . . . . .                                                                                         | 135        |
| 2.3       | Excitation sur plusieurs modes et plusieurs diamètres . . . . .                                                            | 139        |
| 3         | Bilan . . . . .                                                                                                            | 143        |
| <b>VI</b> | <b>Développement d'un modèle analytique pour prédire rapidement la réponse forcée en présence de vortex</b>                | <b>145</b> |
| 1         | Description d'un modèle analytique pour l'estimation des forces aérodynamiques généralisées basé sur la giration . . . . . | 146        |
| 1.1       | Estimation des efforts aérodynamiques au sein d'une cascade de profil. . .                                                 | 146        |
| 1.2       | Estimation des forces aérodynamiques généralisées. . . . .                                                                 | 149        |
| 2         | Évaluation du modèle sur la configuration industrielle . . . . .                                                           | 149        |
| 3         | Caractérisation de l'impact de l'instationnarité du vortex sur la réponse forcée .                                         | 152        |
| 3.1       | Cartographie instationnaire théorique . . . . .                                                                            | 154        |
| 3.2       | Démarche du calcul de réponse forcée . . . . .                                                                             | 154        |
| 3.3       | Résultats . . . . .                                                                                                        | 155        |
| 4         | Bilan . . . . .                                                                                                            | 156        |
|           | <b>Conclusion</b>                                                                                                          | <b>159</b> |

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Références</b>                                                                  | <b>163</b> |
| <b>Table des figures</b>                                                           | <b>170</b> |
| <b>Liste des tableaux</b>                                                          | <b>174</b> |
| <b>Annexes</b>                                                                     | <b>174</b> |
| <b>A Analyse modale en symétrie cyclique</b>                                       | <b>175</b> |
| 1 Description de l'équation du mouvement en variation libre sur un secteur . . . . | 175        |
| 2 Nombre à diamètre positif . . . . .                                              | 176        |
| 3 Nombre à diamètre négatif . . . . .                                              | 178        |
| <b>B Étude numérique instationnaire sur la configuration de Murphy</b>             | <b>181</b> |
| <b>C Hypothèse découplée en symétrie cyclique</b>                                  | <b>185</b> |
| 1 Base complexe . . . . .                                                          | 186        |
| 2 Base réelle . . . . .                                                            | 188        |
| <b>D Ondes tournantes</b>                                                          | <b>189</b> |

---

# Nomenclature

## Symboles

|               |                                        |
|---------------|----------------------------------------|
| $\beta$       | Amortissement modale généralisé        |
| $\Gamma$      | Circulation                            |
| $\gamma$      | Raideur modale généralisée             |
| $\mathcal{A}$ | Raideur aérodynamique généralisée      |
| $\mathcal{B}$ | Amortissement aérodynamique généralisé |
| $\mu$         | Masse modale généralisée               |
| $\Omega$      | Régime de rotation                     |
| $\omega$      | Pulsation                              |
| $\Phi$        | Base modale                            |
| $\Pi$         | Taux de compression                    |
| $\rho$        | Masse volumique                        |
| $\xi$         | Coefficient d'amortissement modal      |
| $A$           | Matrice de raideur aérodynamique       |
| $B$           | Matrice d'amortissement aérodynamique  |
| $C_f$         | Coefficient de frottement              |
| $D$           | Matrice d'amortissement structural     |
| $F$           | Effort extérieur                       |
| $f_{ag}$      | Force aérodynamique généralisée        |
| $K$           | Matrice de raideur                     |
| $M$           | Matrice de masse                       |
| $N$           | Nombre d'aubes                         |
| $q$           | Coordonnée généralisée                 |

$R$  Matrice de changement de base

### Indices et exposants

' Associé au mode  $\phi'$

" Associé au mode  $\phi''$

^ Composante harmonique

~ Base réduite

$d$  Associé aux forces d'amortissement

$f$  Associé aux forces d'excitation

$I$  Partie imaginaire

$R$  Partie réelle

$s$  Associé au secteur de référence

$BA$  Bord d'attaque

$a$  Aérodynamique

$I$  Associé aux noeuds internes

$k$  Indice du secteur

$n$  Nombre à diamètre

$\Sigma$  Associé aux noeuds de frontière

$dir$  Associé à l'onde directe

$meca$  Mécanique

$nl$  Non-linéaire

$retro$  Associé à l'onde rétrograde

$i$  Associé au mode  $i$

### Acronymes

$DC_{60}$  Distorion Coefficient 60

(U)RANS (Unsteady) Reynolds Averaged Navier-Stokes

1F Premier mode de flexion

1T Premier mode de torsion

2F Second mode de flexion

AFT Alternating Frequency Time

---

|      |                                         |
|------|-----------------------------------------|
| AUSM | Advection Upstream Splitting Method     |
| BLI  | Boundary Layer Ingestion                |
| CFD  | Computational Fluid Dynamics            |
| DLFT | Dynamic Lagrangian mixed Frequency-Time |
| EO   | Engine Order                            |
| IDC  | Indice de Distorsion Circonférentielle  |
| IHBM | Incremental Harmonic Balance Method     |
| LDV  | Laser Doppler velocimetry               |
| LES  | Large Eddy Simulation                   |
| OGV  | Outlet Guide Vanes                      |
| PIV  | Particle image velocimetry              |
| RNA  | Réduction du Nombre d'Aubes             |
| SST  | Shear Stress Transport                  |
| TSM  | Time Spectral Method                    |
| UHBR | Ultra High Bypass Ratio                 |
| ZDES | Zonal Detached Eddy Simulation)         |



# Introduction

## Contexte

Compte tenu des problématiques environnementales actuelles, la réduction des émissions de  $CO_2$  est un enjeu majeur dans le domaine de l'aviation civile. Les motoristes cherchent donc à concevoir des moteurs permettant un meilleur rendement propulsif des aéronefs. L'amélioration de ce rendement peut passer par l'augmentation du diamètre moteur qui dans une configuration classique d'installation sous aile entraîne une diminution de la garde au sol. Les dernières générations de moteurs sont donc très proches du sol. Lors des phases de décollage, l'écoulement généré par le moteur en amont de celui-ci peut interagir avec le sol et entraîner la formation d'un vortex de sol. Celui-ci est perçu par les aubages en rotation comme une source d'excitation aérodynamique entraînant leur vibration. La présence de ce vortex peut même entraîner la rupture mécanique des aubages. L'impact de ce vortex de sol sur les niveaux vibratoires des aubages de la turbomachine est un phénomène encore peu étudié aujourd'hui. Les mécanismes aéroélastiques en jeu ne sont pas encore clairement identifiés, en partie car la modélisation de ce phénomène est d'une complexité multiple. Tout d'abord, il est nécessaire de décrire finement l'écoulement en amont du moteur dans son environnement. Ensuite, il faut modéliser des écoulements au sein de la turbomachine qui sont transsoniques, tridimensionnels et fortement instationnaires. Et enfin, la qualité de prévision des niveaux observés est conditionnée par une modélisation fidèle du comportement dynamique d'un assemblage aube-disque en rotation dans lequel des phénomènes non-linéaires liés au contact des pièces peuvent apparaître. Compte tenu de la complexité de ce phénomène multi-physique, il est difficile de le modéliser dans les phases de conception. Les tendances actuelles rendent ce phénomène de plus en plus critique et il est aujourd'hui nécessaire d'avoir des outils permettant sa prise en compte très tôt dans les phases de conception afin de s'assurer de la tenue mécanique des aubages.

## Objectifs

Les travaux de thèses ont pour objectif d'améliorer la compréhension physique du phénomène de réponse forcée sous ingestion de vortex. Ils visent donc à mettre en avant les mécanismes aéroélastiques responsables de la vibration des aubages. Pour cela, les travaux ont été orientés afin de couvrir à la fois les aspects liés à l'aérodynamique et les aspects liés à la dynamique des structures. De plus, afin d'être en mesure de prendre en compte ce phénomène dans les phases de conception, les travaux de thèse ont aussi pour objectif de proposer des méthodes numériques relativement peu coûteuses applicables sur des configurations industrielles complexes permettant de retranscrire le plus fidèlement les mécanismes en jeu. D'un point de vue plus général, l'objectif de la thèse est d'améliorer la compréhension et la modélisation des phénomènes aéroélastiques au sein des turbomachines à travers l'étude du phénomène de réponse forcée sous ingestion de

vortex.

## Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé comme suit :

Le **premier chapitre** détaille la problématique adressée dans ces travaux de thèse. Dans un premier temps, le cadre général est introduit en décrivant le fonctionnement d'un turboréacteur ainsi qu'en décrivant les phénomènes aéroélastiques associés au fan. Ensuite, les spécificités de la réponse forcée sont détaillées. Finalement, le vortex de sol qui est la source d'excitation qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse est décrit.

Le **second chapitre** se concentre sur les modélisations et les méthodes numériques utilisées dans ces travaux de thèse afin de répondre à la problématique. Il constitue la base méthodologique sur laquelle s'appuient les chapitres suivants. Dans un premier temps, la modélisation de la structure est abordée à travers la description de méthodes de réduction, la modélisation en symétrie cyclique et la modélisation des phénomènes non-linéaires liés au contact. Dans un second temps, la modélisation du fluide est introduite à l'aide des équations moyennées de Navier-Stokes. La méthode des volumes finis est ensuite introduite dans une formulation permettant la prise en compte du mouvement de la géométrie.

La caractérisation aérodynamique de l'excitation liée à la présence d'un vortex de sol est abordée dans le **troisième chapitre**. Une première partie consiste à étudier la distorsion liée au vortex de sol à travers la modélisation numérique de celui-ci. Pour cela, l'approche numérique choisie est évaluée sur une configuration académique pour laquelle des résultats expérimentaux sont présents dans la littérature. Le vortex de sol est ensuite modélisé à l'aide de cette approche numérique dans le cas de la configuration industrielle d'intérêt. La seconde partie vise à comprendre les mécanismes d'excitation aérodynamique du fan entraînés par la présence du vortex de sol à travers des calculs instationnaires effectués sur la configuration industrielle.

L'objectif du **quatrième chapitre** est de modéliser la réponse forcée linéaire du fan entraînée par l'excitation décrite dans le chapitre précédent. Pour cela, une approche aéroélastique découplée basée sur une modélisation modale en symétrie cyclique de la structure est proposée. Les résultats issus de l'application de cette méthode sur la configuration industrielle sont confrontés aux résultats expérimentaux. La dernière partie s'intéresse à l'impact sur la réponse forcée du couplage aérodynamique entre le vortex et le fan.

Dans le **cinquième chapitre**, l'influence des non-linéarités mécaniques issues du contact est abordée. Dans un premier temps, la modélisation mécanique donnant accès à l'évaluation de la réponse forcée non-linéaire est détaillée. Ensuite, une stratégie découplée permettant d'alimenter le modèle mécanique avec les efforts et l'amortissement aérodynamiques calculés dans le chapitre précédent est proposée. Cette méthode est utilisée sur la configuration industrielle afin d'évaluer la dynamique non-linéaire dans le cas d'ingestion de vortex.

Et enfin, le **sixième chapitre** a pour objectif de présenter un modèle analytique permettant d'estimer à très faible coût les forces d'excitation générées par une ingestion de vortex. Le

---

détail du modèle est exposé dans la première partie. Ensuite, il est évalué sur la configuration industrielle. Et enfin, ce modèle est utilisé dans le but d'obtenir une première idée de l'impact d'une distorsion instationnaire sur les niveaux de réponse forcée.



# Chapitre I

## Problématique de réponse forcée du fan sous ingestion de vortex

L'objectif de ce chapitre est de présenter la problématique de réponse forcée d'une roue aubagée, et plus particulièrement celle d'un fan lorsqu'il est soumis à une ingestion de vortex. Dans un premier temps, le cadre général de l'étude est introduit en présentant le fonctionnement d'un turboréacteur et les différents phénomènes aéroélastiques que le fan peut rencontrer. La seconde partie traitera du phénomène de réponse forcée. Il sera d'abord introduit à l'aide d'une mise en équation dans un cadre linéaire. Les spécificités de la réponse forcée d'un fan et les enjeux de conception qui y sont associés sont ensuite discutés brièvement. Les différentes méthodes de prédiction de la réponse forcée couramment utilisées seront présentées avant de décrire rapidement les excitations aérodynamiques responsables de la vibration du fan. La dernière partie traitera de l'un de ces phénomènes : le vortex de sol. Après avoir décrit le phénomène aérodynamique à travers l'étude de critères de formation et les mécanismes qui y sont sous-jacents, son impact sur les niveaux vibratoires du fan sera abordé.

### Sommaire

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Cadre général</b>                                           | <b>7</b>  |
| 1.1      | Fonctionnement d'un turboréacteur                              | 7         |
| 1.2      | Phénomène aéroélastique du fan                                 | 8         |
| 1.2.1    | Aéroelasticité statique                                        | 10        |
| 1.2.2    | Flottement                                                     | 10        |
| <b>2</b> | <b>Phénomène de réponse forcée</b>                             | <b>11</b> |
| 2.1      | Mise en équation de la réponse forcée d'une structure linéaire | 11        |
| 2.2      | Description du phénomène et enjeux de conception               | 13        |
| 2.3      | Méthodes de prédiction                                         | 16        |
| 2.3.1    | Méthode de couplage fort                                       | 17        |
| 2.3.2    | Méthode découplée                                              | 18        |
| 2.3.3    | Méthode de couplage faible                                     | 19        |
| 2.4      | Sources d'excitation                                           | 20        |
| 2.4.1    | Interaction avec les roues adjacentes                          | 20        |
| 2.4.2    | Distorsion d'ingestion de couche limite                        | 20        |
| 2.4.3    | Décollement de manche sous vent de travers                     | 22        |
| <b>3</b> | <b>Le vortex de sol</b>                                        | <b>23</b> |

|       |                                                                  |           |
|-------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1   | Formation du vortex de sol . . . . .                             | 24        |
| 3.1.1 | Critère de formation du vortex de sol . . . . .                  | 24        |
| 3.1.2 | Mécanismes de formation . . . . .                                | 26        |
| 3.2   | Comportement du vortex de sol . . . . .                          | 29        |
| 3.2.1 | Comportement du vortex en condition de vent de face . . . . .    | 29        |
| 3.2.2 | Comportement du vortex en condition de vent de travers . . . . . | 31        |
| 3.2.3 | Comportement instationnaire . . . . .                            | 31        |
| 3.3   | Réponse forcée en présence du vortex de sol . . . . .            | 32        |
| 4     | <b>Bilan et objectifs des travaux de thèses . . . . .</b>        | <b>33</b> |

---

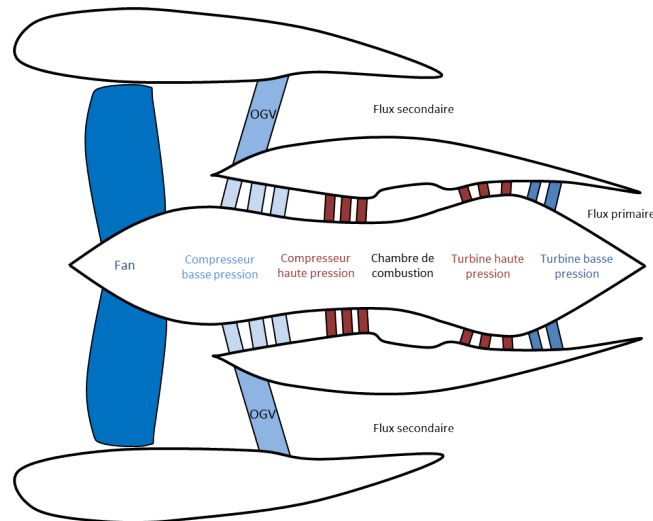


FIGURE I.1 – Schéma simplifié d'un turboréacteur double corps, double flux.

## 1 Cadre général

### 1.1 Fonctionnement d'un turboréacteur

La première réalisation de turboréacteur est attribuée par certains au roumain Henri Coanda<sup>1</sup> qui présenta sa machine au salon de l'aéronautique en 1910. Il aurait décollé involontairement, surpris par la puissance de son moteur, avant de retomber brutalement et de se brûler légèrement. Le français Maxime Guillaume est le premier à déposer un brevet concernant la "propulsion par réaction sur l'air" en 1921. Mais c'est en 1930 que l'anglais Frank Whittle et l'allemand Hans von Ohain conçoivent indépendamment des turboréacteurs qui donneront lieu à des réalisations pratiques, faisant d'eux les inventeurs reconnus des turboréacteurs. Aujourd'hui de nombreuses architectures existent mais elles possèdent toutes des composants communs et reposent sur le même principe de fonctionnement qu'avaient pensé Whittle et von Ohain. Le flux d'air passe d'abord par un compresseur. Il entre ensuite dans la chambre de combustion où il est mélangé au carburant avant d'être enflammé ce qui lui permet de gagner de l'énergie. Une partie de cette énergie est récupérée par la turbine qui sert à entraîner le compresseur. Finalement, le flux d'air est éjecté par la tuyère. La différence entre la quantité de mouvement entrante et la quantité de mouvement sortante produit une force de réaction qui sert de propulsion aux aéronefs.

Parmi les nombreuses architectures présentes aujourd'hui, celle qui semble s'imposer est l'architecture double corps, double flux illustrée figure I.1. On distingue dans cette configuration deux arbres moteurs (double corps) qui tournent à des vitesses différentes. Le rotor basse pression comporte le fan (auss appelé soufflante), le compresseur basse pression et la turbine basse pression. Le rotor haute pression est lui composé du compresseur haute pression et de la turbine haute pression. Une fois passé par le fan, le flux d'air est séparé en deux (double flux). Une partie passe dans le flux secondaire où l'écoulement est redressé par les OG (*Outlet Guide Vanes*). Cette composante du flux d'air assure la majeure partie de la propulsion en régime de croisière. L'autre partie passe par le flux primaire et participe à la combustion. Le rapport entre le débit du flux secondaire et le débit du flux primaire est appelé taux de dilution (*bypass*

1. Henri Coanda donna son nom à l'effet Coanda bien connu dans le milieu de la mécanique des fluides.

*ratio* en anglais). Les performances du moteur sont directement liées à ce taux de dilution : plus il est élevé, plus le rendement propulsif est élevé. Compte tenu des enjeux climatiques actuels, la réduction des émissions de  $CO_2$  est un enjeu majeur dans le domaine de l'aviation civile. Cette réduction peut notamment passer par l'augmentation du rendement propulsif des aéronefs. La tendance aujourd'hui est donc à l'augmentation du taux de dilution. On parle même de turboréacteurs à très fort taux de dilution (*UHBR : Ultra High Bypass Ratio*) pour les futures générations de turboréacteurs. Plus le taux de dilution est élevé, plus la contribution du fan à la poussée est élevée. Le fan devient donc un composant essentiel des configurations UHBR. L'augmentation du taux de dilution entraîne aussi l'augmentation du diamètre du moteur et par conséquent une augmentation de la masse et de la traînée de la nacelle. Les nacelles sont alors raccourcies ce qui donne lieu à des configurations de type nacelle courte (*short inlet* en anglais). Ces configurations sont caractérisées par une forte interaction entre le fan et l'environnement du moteur. Toujours afin d'augmenter le rendement propulsif, des configurations d'ingestion de couche limite (*BLI : Boundary Layer Ingestion*) sont aussi investiguées. Ces configurations consistent à placer le ou les moteurs sur le fuselage afin d'ingérer la couche limite de celui-ci. Le rendement propulsif global de l'avion est alors amélioré. Dans ces conditions, le fan est aussi en forte interaction avec l'environnement du moteur. Que ce soit dans une configuration UHBR ou BLI, le fan joue donc un rôle primordial dans le fonctionnement de la turbomachine. Les motoristes déploient donc beaucoup d'efforts dans la conception de ce composant. Ils jonglent entre performances aérodynamiques, tenues structurales, contraintes de masse et font face à des phénomènes aéroélastiques qui seront présentés dans la section suivante. Le fan, illustré figure I.2, assure l'opérabilité dans les phases de décollage, de croisière, d'approche et d'atterrissage. Il fonctionne donc sur une large plage que l'on visualise à travers un diagramme représentant l'évolution du taux de compression (défini comme le rapport entre la pression totale en aval du fan et la pression totale en amont) en fonction du débit pour différentes iso-vitesses de rotation de la machine. Ce diagramme, appelé champ fan, est illustré figure I.3. Sur cette figure, la ligne de fonctionnement correspond aux conditions de régime, taux de compression et débit parcourus par le compresseur en fonctionnement stabilisé. Elle est conçue pour maximiser le rendement isentropique pour chaque vitesse de rotation et pour rester à une marge raisonnable des phénomènes d'instabilités. Les courbes caractéristiques de vitesses constantes, appelées iso-vitesses, sont caractérisées par une pente négative. L'augmentation du taux de compression est donc associée à une diminution du débit. Lors de phases transitoires, le fan quitte sa ligne de fonctionnement et peut alors se rapprocher des limites opérationnelles de la machine. A faible débit, le fonctionnement du fan est contraint par le phénomène de pompage caractérisé par de fortes fluctuations de débit qui peuvent mener à une inversion du débit moteur. A fort débit, il est limité par le phénomène de blocage aérodynamique qui est associé au maximum de débit atteignable pour une vitesse de rotation.

## 1.2 Phénomène aéroélastique du fan

L'aéroélasticité traite de l'interaction statique ou dynamique entre les déformations d'une structure élastique et le comportement du fluide qui l'entoure. Le fan est soumis principalement à trois phénomènes aéroélastiques : l'aéroélasticité statique, le flottement et la réponse forcée. Les deux premiers sont décrits brièvement dans cette section et le troisième sera développé bien plus en détail dans la section suivante.



FIGURE I.2 – Illustration du fan du LEAP 1A [1].

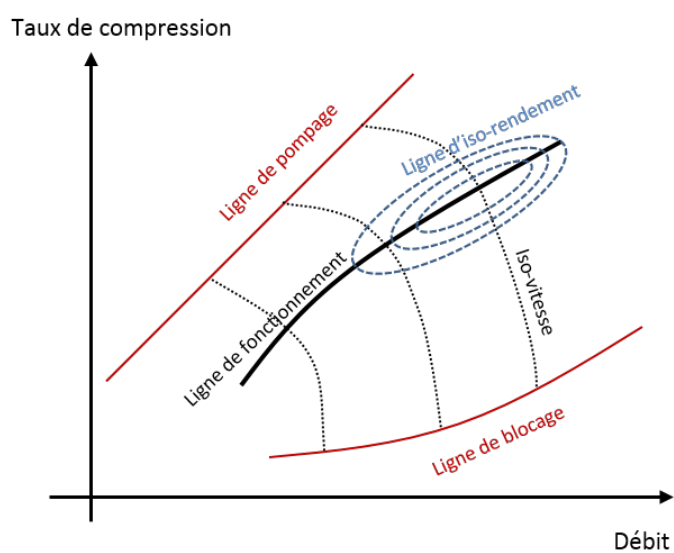


FIGURE I.3 – Champ fan : diagramme taux de compression en fonction du débit.

### 1.2.1 Aéroélasticité statique

La géométrie de l'aube dépend de son chargement statique qui est composé d'un effort centrifuge et d'un effort aérodynamique statique. L'effort centrifuge, directement relié au régime de rotation, tend à dévriller l'aube tout en l'allongeant. La géométrie qui en résulte est soumise à des efforts aérodynamiques qui dépendent du régime de rotation mais aussi de la forme de l'aube et donc de l'effort centrifuge. Il existe donc une interaction entre les efforts statiques aérodynamiques et les déformations statiques de l'aube. Il s'en suit que pour chaque régime de rotation, l'aube n'a pas la même géométrie. Le terme "à chaud" est employé pour la forme de l'aube en fonctionnement tandis que le terme "à froid" est employé pour la forme de l'aube au repos. D'un point de vue conception, il est donc primordial de prendre en compte l'interaction entre les efforts aérodynamiques stationnaires et les forces élastiques de la structure afin d'être en mesure de dessiner une aube à froid permettant d'obtenir les performances voulues à chaud. Cette interaction entre la structure et l'écoulement stationnaire qui l'entoure est qualifiée d'aéroélasticité statique.

### 1.2.2 Flottement

Le flottement est un phénomène d'instabilité issu d'un couplage entre le fluide et la structure. De légères fluctuations dans l'écoulement peuvent entraîner un léger déplacement de la structure. Ce déplacement entraîne une modification de l'écoulement, et par conséquent de nouveaux efforts aérodynamiques. Ces efforts entraînent à leur tour un déplacement de la structure et ainsi de suite. Il y a donc un échange d'énergie entre le fluide et la structure. Si cette énergie entretient le déplacement et que la structure est faiblement amortie, les amplitudes vibratoires augmentent très rapidement. Dans le meilleur des cas, des non-linéarités (mécaniques ou aérodynamiques) peuvent mener à une saturation des amplitudes vibratoires, cependant si elles sont trop élevées elles peuvent engendrer des problèmes de fatigue. Dans le pire des cas, les forts niveaux vibratoires entraînent la rupture mécanique.

Le phénomène de flottement dit classique intervient lorsque que deux fréquences propres de la structure se rejoignent sous l'effet d'une évolution du chargement aérodynamique [95]. Lorsque deux fréquences propres coïncident, un couplage entre les deux modes propres associés se crée et aboutit à une instabilité. En turbomachines, le flottement classique est très rare car les fréquences des modes propres sont relativement éloignées et changent peu sous la charge aérodynamique. Le flottement rencontré au sein des turbomachines résulte principalement de l'interaction entre les aubes et le fluide. Il est souvent caractérisé par le déphasage entre le mouvement d'aubes adjacentes qui modifie les conditions de transfert d'énergie entre les aubes via le fluide. Le flottement peut faire intervenir des mécanismes aérodynamiques complexes (interaction choc couche limite, couplage acoustique, écoulement tri-dimensionnel). Le flottement du fan dépend fortement de son point de fonctionnement. Plusieurs types de flottement sont alors cartographiés dans le champ fan comme l'illustre la figure I.4 où 5 types de flottement sont distingués :

- I - flottement de décrochage subsonique/transsonique
- II - flottement de blocage
- III - flottement supersonique à faible incidence
- IV - flottement supersonique à forte incidence
- V - flottement de décrochage supersonique

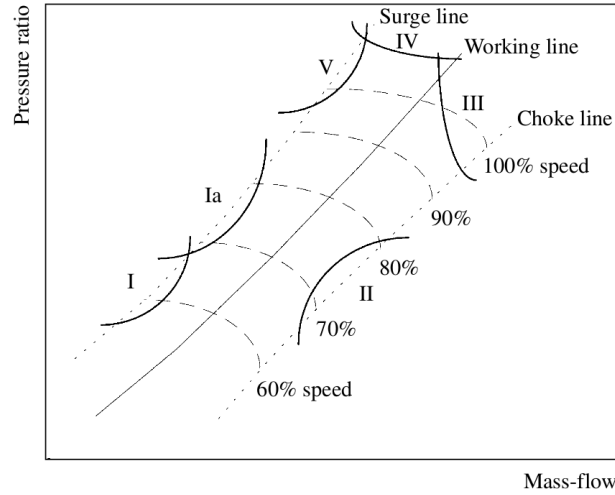


FIGURE I.4 – Position et nature des zones de flottement dans le champ fonctionnement d'un compresseur [56].

Ces mécanismes sont détaillés dans les travaux de Fransson [26].

## 2 Phénomène de réponse forcée

Avant de s'intéresser à la réponse forcée du fan et aux spécificités qui lui sont liées, cette section présente une mise en équation du phénomène de réponse forcée dans un cadre général de structures linéaires.

### 2.1 Mise en équation de la réponse forcée d'une structure linéaire

L'équation de la dynamique des structures linéaires modélisées par éléments finis s'écrit dans sa forme générale :

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (\text{I.1})$$

Les spécificités liés aux termes provenant de la rotation de la structure seront détaillées dans le chapitre suivant. La structure n'est pas considérée en rotation ici. Par souci de clarté on se restreint à une approche classique dans laquelle  $M$  représente la matrice de masse,  $D$  la matrice d'amortissement,  $K$  la matrice de raideur et  $F$  les efforts extérieurs. C'est une équation différentielle du second ordre avec second membre. Elle est résolue classiquement par la recherche de valeurs propres de l'équation sans amortissement et sans effort extérieur, traduit par l'équation I.2.

$$(K - \omega^2 M) \phi = 0 \quad (\text{I.2})$$

Les valeurs propres  $\omega$  représentent les pulsations propres du système et les vecteurs propres  $\phi$  représentent les modes propres de la structure. Le déplacement de la structure peut alors s'exprimer comme une combinaison linéaire des modes propres comme l'illustre l'équation matricielle I.3 où  $\Phi$  est la matrice des modes propres et  $q$  le vecteur des coordonnées généralisées, c'est à dire des coefficients associés à chaque mode.

$$x(t) = \Phi q(t) \quad (\text{I.3})$$

Par projection dans la base de modes propres  $\Phi$ , l'équation de la dynamique devient :

$$\mu \ddot{q}(t) + \beta \dot{q}(t) + \gamma q(t) = f_{ag}(t) \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{cases} \mu &= \Phi^T M \Phi \\ \beta &= \Phi^T D \Phi \\ \gamma &= \Phi^T K \Phi \\ f_{ag,i}(t) &= \Phi^T F(t) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Les matrices  $M$  et  $K$  étant symétriques et définies positives, les valeurs propres et les vecteurs propres sont réels. De plus les vecteurs propres sont orthogonaux et la matrice de masse généralisée  $\mu$  ainsi que la matrice de raideur généralisée  $\gamma$  sont diagonales. La matrice d'amortissement généralisée  $\beta$  est elle aussi diagonale sous l'hypothèse de Basile [38]. Le terme d'excitation, noté  $f_{ag}$  est appelé forces aérodynamiques généralisées. Il correspond à la projection des efforts sur les modes propres de la structure. En considérant que les efforts  $F$  sont indépendants du mouvement, l'équation de la dynamique conduit à  $n_{ddl}$  équations modales indépendantes où  $n_{ddl}$  représente le nombre de degrés de liberté du système. L'équation I.6 illustre cette équation modale pour le mode  $i$ .

$$\mu_i \ddot{q}_i(t) + \beta_i \dot{q}_i(t) + \gamma_i q_i(t) = f_{ag,i}(t) \quad (\text{I.6})$$

En introduisant la pulsation propre  $\omega_i$  et le coefficient d'amortissement modal  $\xi_i$  l'équation I.6 devient l'équation I.9.

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i} \quad (\text{I.7})$$

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{2\mu_i\omega_i} \quad (\text{I.8})$$

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{\mu_i} f_{ag,i}(t) \quad (\text{I.9})$$

Sous l'hypothèse que le mouvement et l'excitation sont harmoniques de pulsation  $\omega$ , il est possible de résoudre cette équation dans le domaine fréquentiel. En régime établi, un système dynamique répond sur la fréquence de sollicitation. Le mouvement oscille à la fréquence fixée par l'excitation. On introduit alors :

$$q_i(t) = \hat{q}_i e^{j\omega t} \quad (\text{I.10})$$

$$f_{ag}(t) = \hat{f}_{ag,i} e^{j\omega t} \quad (\text{I.11})$$

Les grandeurs  $\hat{q}_i$  et  $\hat{f}_{ag,i}$  sont complexes et détiennent donc les informations d'amplitude et de phase. En insérant les équations I.10 et I.11 dans l'équation modale de la dynamique I.9, il vient :

$$(-\omega^2 + j2\xi_i\omega_i\omega + \omega_i^2)\hat{q}_i = \frac{1}{\mu_i}\hat{f}_{ag,i} \quad (\text{I.12})$$

L'amplitude de la coordonnée généralisée s'exprime donc de la façon suivante :

$$|\hat{q}_i| = \frac{|\hat{f}_{ag,i}|/\mu_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)^2}} \quad (\text{I.13})$$

Le terme au numérateur est piloté par l'amplitude de l'excitation, tandis que le terme au dénominateur est une somme de deux contributions. La première contribution dépend de l'écart entre

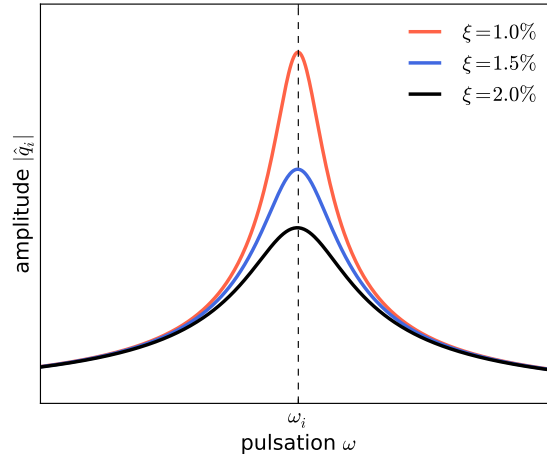
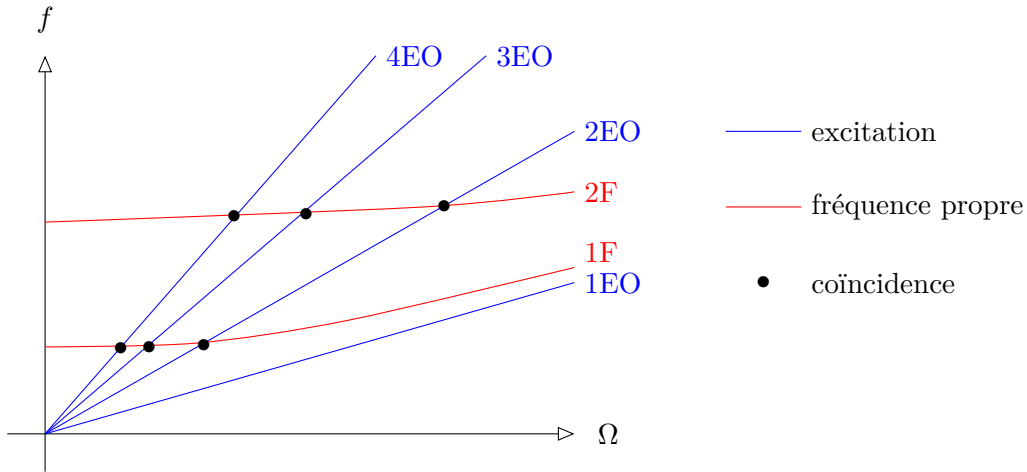


FIGURE I.5 – Illustration de l'impact de l'amortissement sur une courbe de réponse forcée.

FIGURE I.6 – Diagramme de Campbell ( $\Omega$  : vitesse de rotation,  $f$  : fréquence).

la fréquence propre du mode et la fréquence d'excitation  $(\omega_i^2 - \omega^2)^2$  tandis que la seconde dépend entre autre de l'amortissement modal  $\xi_i$ . Loin de la fréquence propre, le terme d'amortissement est négligeable et la réponse est alors dictée par la raideur en basse fréquence et par la masse en haute fréquence. Cependant, lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre du mode, la première contribution s'annule, c'est le phénomène de résonance. L'amplitude modale est alors directement liée à l'amortissement. Plus celui-ci est faible, plus l'amplitude sera élevée. La figure I.5 représente des courbes de réponse forcée pour différentes valeurs d'amortissement afin d'illustrer l'influence de l'amortissement sur l'amplitude. En plus de décrire précisément l'excitation, une connaissance fine de l'amortissement est alors nécessaire afin de déterminer le déplacement de la structure à la résonance.

## 2.2 Description du phénomène et enjeux de conception

Les singularités présentes dans le champ aérodynamique en amont ou en aval du fan entraînent des fluctuations d'effort sur les aubes. Ces fluctuations induisent une force d'excitation

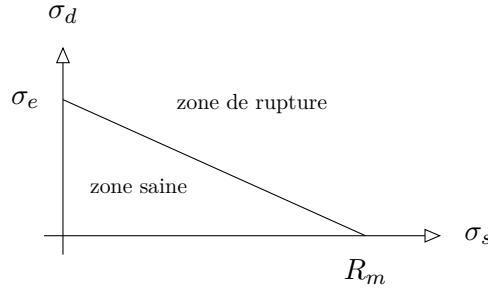


FIGURE I.7 – Diagramme de Haigh.

responsable de la vibration des aubes, c'est le phénomène de réponse forcée. En l'absence de rotation, cette force d'excitation n'existe pas. On parle donc de phénomène synchrone, c'est à dire qu'il dépend du régime de rotation. Les fréquences d'excitation sont donc des multiples de la vitesse de rotation, que l'on nomme ordre moteur et que l'on note EO (pour *Engine Order*). Lorsque la fréquence d'excitation se rapproche de la fréquence propre d'un des modes de la structure, les amplitudes vibratoires augmentent fortement ; c'est le phénomène de résonance. Le diagramme de Campbell accompagné du diagramme ZigZag (présenté dans le prochain chapitre et illustré figure II.5) permet de cibler les régimes menant aux coïncidences entre les fréquences propres de la structure et les fréquences d'excitation. Une illustration d'un diagramme de Campbell est présentée figure I.6. La coïncidence entre le mode 2F et l'ordre moteur 4, que l'on nomme 2F/4EO, est par exemple illustrée sur ce diagramme. Un élément important de la conception d'un fan est de s'assurer que les régimes clés (décollage, croisière, ralenti...) soient loin de ces croisements. Pour cela, il est possible de raidir ou assouplir la structure afin de modifier ses fréquences propres. Cependant, durant certaines phases de fonctionnement du moteur les coïncidences ne peuvent être évitées. Par exemple, durant la phase de décollage le régime doit passer du régime ralenti au régime de décollage. Il passe donc irrémédiablement par une de coïncidence. Il s'en suit que le second élément clé de la conception d'un fan vis à vis du phénomène de réponse forcée est de s'assurer que les vibrations rencontrées au passage d'une coïncidence restent acceptables. La notion d'acceptable se traduit par la tenue à la fatigue. En effet, même si les contraintes engendrées par la vibration sont inférieures à la limite élastique, elles peuvent sur un grand nombre de cycle mener à la rupture via une propagation de fissure microscopique. Afin d'éviter ce phénomène, il est nécessaire de s'assurer que la contrainte maximale dynamique atteinte lors d'une coïncidence reste inférieure à la contrainte maximale dynamique limite  $\sigma_d$ , définie comme la contrainte dynamique pour laquelle la pièce ne cédera pas malgré une répétition de cycle infinie. Elle dépend de la contrainte statique  $\sigma_s$  qui dans le cas d'une roue aubagée est importante au vue des efforts centrifuges et des efforts aérodynamiques stationnaires. Le diagramme de Haigh, représenté figure I.7 permet de représenter la contrainte maximale dynamique en fonction de la contrainte statique. La droite de Goodman, qui relie la contrainte dynamique maximale (à contrainte statique nulle)  $\sigma_e$  et la contrainte de rupture statique  $R_m$ , est souvent utilisée pour cibler rapidement l'ensemble des points de fonctionnement sains ne menant pas à la rupture.

Les roues aubagées, comme le fan, sont des structures à symétrie cyclique, c'est à dire qu'elles sont constituées d'un ensemble de  $N$  secteurs identiques qui se referment sur eux-mêmes (cf figure II.2). Les modes vibratoires de ces structures sont caractérisés par un déphasage entre le

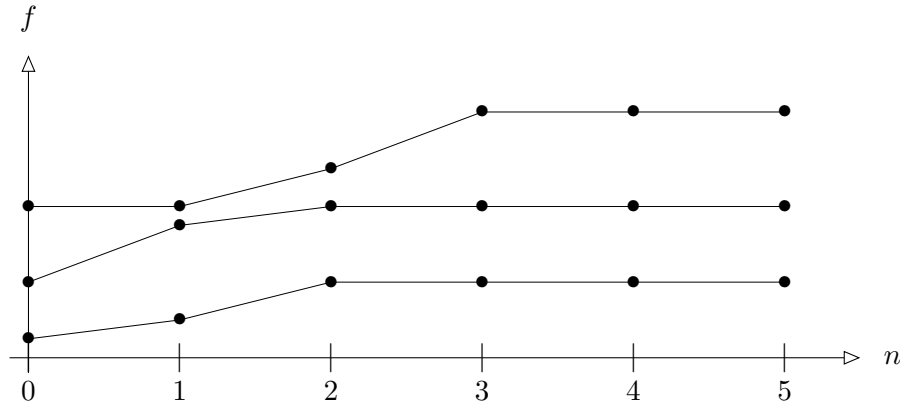


FIGURE I.8 – Diagramme fréquences propres vs nombre à diamètre ( $n$  : nombre à diamètre,  $f$  : fréquence).

mouvement des secteurs. Ce déphasage est décrit par le nombre à diamètre  $n$ , pouvant prendre les valeurs discrètes de 0 à  $N/2$  (en supposant  $N$  pair). Le déphasage entre deux secteurs adjacents est de  $n\alpha$  où  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ . Les modes appartiennent donc à des familles composées de plusieurs nombres à diamètres, par exemple on parle de la famille du premier mode de flexion : 1F-0D, 1F-1D, 1F-2D... où le 'D' correspond à 'diamètre' et donc au déphasage entre deux secteurs adjacents. Les modes de la même famille ont des fréquences et une forme modale différents selon le nombre à diamètre. Cette différence provient de la flexibilité du disque. Il est courant de représenter dans un diagramme l'évolution des fréquences des modes en fonction du nombre à diamètre afin de caractériser la dynamique d'une roue aubagée. La figure I.8 représente un exemple de ce diagramme. Il est possible de distinguer deux parties :

- les faibles diamètres où la fréquence évolue en fonction des diamètres. Cette zone correspond à des modes d'ensemble où le disque joue un rôle prépondérant.
- les grands nombres de diamètres où la fréquence ne dépend plus du nombre de diamètre. Cette zone correspond plus à des modes de vibration de l'aube.

Dans le cas d'un disque aubagé, une autre spécificité de la dynamique d'un fan réside dans l'interface entre les aubes et le disque. Le contact entre une aube et le disque est assuré par la force centrifuge qui vient coller le pied de l'aube à l'alvéole du disque. Le mouvement de l'aube en vibration entraîne des efforts tangentiels et normaux au niveau des zones de contact. Ces efforts sont très fortement non-linéaires et difficilement modélisables dans la mesure où une connaissance fine de la géométrie ainsi que des propriétés mécaniques des zones de contact sont nécessaires. Une illustration des effets non-linéaires liés au contact entre l'aube et le disque provenant de l'étude de Charleux [16] est présentée figure I.9. Cette figure compare l'amplitude de déplacement d'un noeud en tête d'aube obtenue par un calcul linéaire où tous les éléments de contact sont supposés dans l'état adhérent et l'amplitude du déplacement obtenue par un calcul non-linéaire. Deux phénomènes principaux sont observés. D'abord, l'introduction des non-linéarités entraîne une diminution des niveaux vibratoires. Cette diminution est due à la dissipation d'énergie que le frottement entraîne. Ensuite, le maximum de réponse non-linéaire est atteint pour une fréquence plus faible que celle qui donne le maximum de réponse linéaire. Lorsqu'une partie de la zone de contact est en glissement, la structure est plus souple ce qui explique cet abaissement

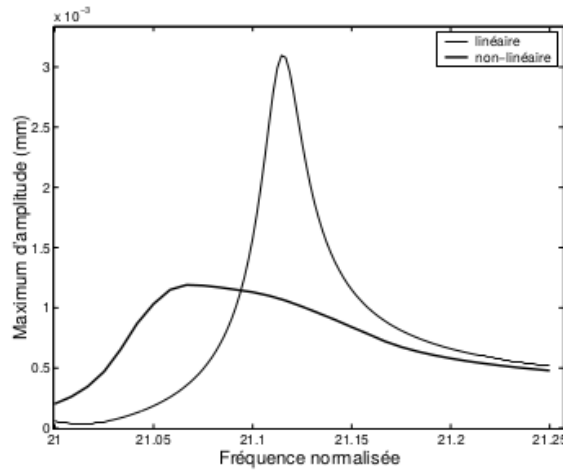


FIGURE I.9 – Illustration de l’impact des non-linéarités de type contact sur la réponse forcée d’un disque aubagé [16].

de fréquence.

Afin de prédire convenablement le phénomène de réponse forcée, il est nécessaire de prévoir finement l’excitation aérodynamique mais aussi de connaître précisément la réponse mécanique tout en s’assurant une bonne communication entre les modélisations aérodynamiques et mécaniques souvent de natures différentes. A cause de ces difficultés, les analyses de réponse forcée sont le plus souvent utilisées afin de classer différentes configurations plutôt que de prédire les véritables niveaux vibratoires [56]. Ceux-ci sont connus uniquement lors d’essais vibratoires réalisés en fin de conception. Si ces niveaux ne sont pas acceptables, il est alors nécessaire de réaliser des modifications pouvant se révéler très coûteuses dans la mesure où elles interviennent à la fin du cycle de conception. La prédiction de la réponse forcée est donc un enjeu majeur pour les constructeurs.

## 2.3 Méthodes de prédiction

De nombreuses méthodes de calcul de réponse forcée due à une excitation aérodynamique ont été développées depuis plusieurs dizaines d’années dans le domaine des turbomachines. L’article de Marshall et Imregun [56] repertorie de façon exhaustive les différentes méthodes présentes dans la littérature. La thèse de Payer [68] donne aussi une vision des méthodes couramment utilisées. L’approche la plus naturelle est l’approche monolithique qui consiste à modéliser le fluide et la structure à l’aide de la même méthode numérique. Ce type de méthode n’est pas encore assez robuste pour traiter des problématiques aéroléastiques au sein de turbomachines. Elles souffrent notamment d’un mauvais conditionnement qui provient d’un écart conséquent entre la rigidité de la structure et celle du fluide. De plus, les méthodes de modélisation de ces deux disciplines ont progressé indépendamment et requièrent des spécifications différentes. Il est donc intéressant d’utiliser la maturité des approches développées afin de résoudre le problème aéroléastique. De telles approches sont nommées approches partitionnées et sont donc caractérisées par la résolution séparée des équations du fluide et celles de la structure. L’information est cependant échangée entre les deux domaines. La façon dont l’échange d’information a lieu permet regrouper les différentes approches partitionnées. Il a été choisi de présenter ici trois

groupes de méthodes qui regroupent les différentes stratégies utilisées :

- méthode de couplage fort, caractérisée par des itérations entre le fluide et la structure à chaque instant de calcul.
- méthode découplée, dans laquelle les problèmes mécaniques et aérodynamiques sont traités indépendamment.
- méthode de couplage faible, pouvant être qualifiée de méthode intermédiaire entre la méthode de couplage fort et la méthode découplée.

### 2.3.1 Méthode de couplage fort

Dans le cas général, les efforts aérodynamiques dépendent du déplacement de la structure. En effet, une modification de la position de l'aube entraîne une modification du champ aérodynamique et par conséquent une modification des efforts aérodynamiques. L'équation de la dynamique de structure linéaire dans ce cadre est alors décrite par l'équation I.14.

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(x, \dot{x}, t) \quad (\text{I.14})$$

Cette équation peut être résolue à l'aide d'algorithmes d'intégration temporelle. L'idée est de résoudre dans une approche partitionnée, alternativement l'écoulement fluide et la dynamique de la structure pour un pas de temps physique. Le passage de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$  se fait classiquement en 4 étapes [24] :

1. Déplacement de la structure.
2. Avancée d'un pas de temps pour le système aérodynamique. Le résultat est un nouveau champ aérodynamique (pression et efforts d'origine visqueuse).
3. Conversion du nouveau champ de pression en force excitatrice pour le système mécanique.
4. Avancée d'un pas de temps pour le système mécanique. Cette étape nécessite la résolution directe de l'équation de la dynamique à l'aide d'un schéma temporel comme celui de Newmark [24].

Ce processus séquentiel d'itération, qualifié d'explicite, peut entraîner un déphasage temporel car il n'assure pas de manière exacte l'équilibre fluide-structure à chaque pas de temps. Afin d'éviter ce problème, il est possible de mettre en oeuvre des méthodes dites de point fixe, en itérant sur le même pas de temps physique. D'autres algorithmes de couplage peuvent être mis en place pour la méthode couplée [8, 14, 55]. On peut notamment citer les schémas implicites qui à l'aide d'un algorithme de Newton permettent de converger rapidement au sein d'une itération physique mais nécessitent l'évaluation du jacobien des opérateurs. La recherche de solution périodique via une intégration temporelle peut se révéler très fastidieuse à cause d'un long régime transitoire piloté par l'amortissement du système. Une telle méthode est très coûteuse, mais elle est en mesure de prendre en compte les phénomènes non-linéaires à la fois aérodynamiques et mécaniques (si les méthodes numériques utilisées pour les systèmes aérodynamiques et mécaniques le permettent).

Le couplage peut aussi être réalisé dans le domaine fréquentiel. Le principal avantage d'une approche fréquentielle est de chercher directement le régime périodique sans passer par le régime transitoire. Cadel [11] a utilisé une méthode couplée dans le domaine fréquentiel afin d'estimer la courbe de réponse forcée sur un cas académique de profil NACA comportant deux degrés de liberté.

### 2.3.2 Méthode découplée

La méthode découplée se base sur l'hypothèse de superposition qui consiste à séparer les forces aérodynamiques en forces d'excitation indépendantes du mouvement, noté  $F^f$ , et en effort lié au mouvement de l'aube, noté  $F^d$ , que l'on appelle ici forces d'amortissement par souci de concision. Les forces d'excitation et d'amortissement dépendent notamment de la vitesse de rotation et du point de fonctionnement. Ces deux termes sont alors obtenus par deux calculs indépendants pouvant être réalisés en parallèle.

$$F(x, \dot{x}) = F^d(x, \dot{x}) + F^f \quad (\text{I.15})$$

De plus, pour les problèmes d'aéroélasticité mettant en oeuvre de faibles amplitudes, les forces d'amortissement sont classiquement supposées linéaires par rapport au déplacement et à la vitesse de déplacement. L'effort aérodynamique s'écrit alors à l'aide de la matrice de raideur aérodynamique, notée  $A$ , et la matrice d'amortissement aérodynamique, noté  $B$ . On néglige ici pour des fluides légers les termes de masses ajoutées.

$$F(x, \dot{x}) = Ax + B\dot{x} + F^f \quad (\text{I.16})$$

En se plaçant dans la base modale  $\Phi$ , obtenue à la suite du problème aux valeurs propres exposé équation I.2, ainsi qu'en utilisant la relation  $x = \Phi q$ , le vecteur de forces aérodynamiques généralisées  $f_{ag}$ , défini équation I.5, devient sous les hypothèses de la méthode découplée :

$$f_{ag} = \Phi^T F = \mathcal{A}q + \mathcal{B}\dot{q} + f_{ag}^f \quad (\text{I.17})$$

où  $\mathcal{A} = \Phi^T A \Phi$  est la matrice de raideur aérodynamique généralisée,  $\mathcal{B} = \Phi^T B \Phi$  est la matrice d'amortissement aérodynamique généralisée et  $f_{ag}^f = \Phi^T F^f$  les forces aérodynamiques généralisées d'excitation. Il est important de préciser qu'il n'y a aucune raison pour que ces matrices soient diagonales. Néanmoins, si l'on considère que les fréquences entre les modes sont relativement éloignées, il est alors possible de considérer qu'à la coïncidence le mouvement est régi principalement par un seul mode. Dans ce cas, il est possible de réduire l'équation de la dynamique à un seul degré de liberté. L'équation modale de la dynamique présentée équation I.6 devient sous les hypothèses de la méthode découplée :

$$\mu_i \ddot{q}_i + \beta_i \dot{q}_i + \gamma_i q_i = \mathcal{A}_i q_i + \mathcal{B}_i \dot{q}_i + f_{ag,i}^f \quad (\text{I.18})$$

Cette équation peut alors se résoudre dans le domaine fréquentiel comme présenté dans la section précédente. En définissant :

$$q_i = \hat{q}_i e^{j\omega t} \quad (\text{I.19})$$

$$f_{ag,i}^f = \hat{f}_{ag,i}^f e^{j\omega t} \quad (\text{I.20})$$

et

$$\omega_{a,i}^2 = -\mathcal{A}_i / \mu_i \quad (\text{I.21})$$

$$\xi_{a,i} = -\frac{\mathcal{B}_i}{2\mu_i \omega_i} \quad (\text{I.22})$$

l'amplitude modale s'écrit alors :

$$|\hat{q}_i| = \frac{|\hat{f}_{ag,i}^f| / \mu_i}{\sqrt{(\omega_i^2 + \omega_{a,i}^2 - \omega^2)^2 + (2(\xi_i + \xi_{a,i})\omega_i \omega)^2}} \quad (\text{I.23})$$

On peut remarquer ici que la fréquence de résonance est affectée par les efforts aérodynamiques via le terme de raideur  $\omega_{a,i}$ . La méthode découplée se décompose donc en deux calculs aérodynamiques indépendants. Le premier consiste à évaluer les forces aérodynamiques d'excitation  $f_{ag}^f$ . Pour cela, un calcul en présence de l'excitation aérodynamique est effectué. L'aube est rigide dans ce calcul. Les efforts aérodynamiques sont alors projetés sur le mode d'intérêt afin d'obtenir les forces aérodynamiques généralisées d'excitation. Le second calcul est un calcul d'amortissement où aucune excitation n'est présente. Durant ce calcul un mouvement harmonique d'amplitude arbitraire, mais relativement faible (afin de rester dans le domaine linéaire), est imposé selon le mode étudié. Ce mouvement entraîne des fluctuations de pression qui sont projetées sur le mode d'intérêt. L'analyse du signal temporel permet d'extraire les coefficients  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_i$ . L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de traiter les problèmes mécaniques et aérodynamiques séparément tout en intégrant leur impact réciproque. Aucune itération entre le fluide et la structure n'est nécessaire ce qui rend cette méthode relativement peu coûteuse. C'est pourquoi elle est généralement préférée à la méthode couplée qui donne souvent des résultats similaires dans le cas de faibles non-linéarités [49, 61, 77]. Lorsque des essais sont disponibles, il est courant dans le milieu industriel d'extraire l'amortissement global (mécanique et aérodynamique) des courbes de réponse forcée. Dans ce cas, seul le calcul donnant accès aux forces d'excitation est effectué. L'amortissement total issu des essais ( $\xi_{tot} = \xi_i + \xi_a$ ) est ensuite introduit dans l'équation de la dynamique.

### 2.3.3 Méthode de couplage faible

Les méthodes de couplage faible sont des méthodes intermédiaires entre les méthodes de couplage fort et les méthodes découplées. Des itérations entre le fluide et la structure sont réalisées mais elles n'ont pas lieu à chaque itération de calcul. Le problème aérodynamique est traité en considérant la structure figée tandis que le problème structure est traité en considérant l'aérodynamique figée. Un processus itératif est alors effectué pour mettre à jour la structure dans le problème aérodynamique et l'aérodynamique dans le problème structure.

La méthode Twin développée par Mesbah et al. [59] peut notamment être qualifiée de couplage faible. Cette méthode permet de prendre en compte les non-linéarités aérodynamiques lorsque le principe de superposition est mis en défaut. L'équation modale de la dynamique pour un mouvement harmonique sans hypothèse sur les forces aérodynamiques généralisées est :

$$(-\omega^2 \mu_i + j\omega \beta_i + \gamma_i) \hat{q}_i = \hat{f}_{ag,i}(\hat{q}_i) \quad (\text{I.24})$$

La méthode permet de capturer les effets non-linéaires tout en évitant d'itérer entre le fluide et la mécanique à chaque itération physique comme cela est fait dans une méthode de couplage fort. Cette approche appelée méthode Twin a pour ambition d'effectuer les calculs d'excitation et d'amortissement dans un même calcul. Un mouvement harmonique est alors superposé à l'excitation. L'idée est ensuite de chercher l'amplitude et la phase du mouvement harmonique qui est solution de l'équation I.24. On définit alors le résidu  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R}(\hat{q}_i) = \hat{f}_{ag,i}(\hat{q}_i) - (-\omega^2 \mu_i + j\omega \beta_i + \gamma_i) \hat{q}_i = 0 \quad (\text{I.25})$$

La matrice Jacobienne  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \hat{q}_i}$  est ensuite approximée par différence finie afin d'effectuer une procédure itérative à l'aide d'un algorithme de Newton pour déterminer la valeur de  $\hat{q}_i$  qui annule le résidu  $\mathcal{R}$ . Chaque itération de l'algorithme de Newton nécessite donc l'évaluation

d'un calcul composé de l'excitation et d'un mouvement harmonique prescrit. Dans la mesure où aucune hypothèse n'est faite sur l'effort aérodynamique généralisé, cette méthode prend bien en compte les non-linéarités aérodynamiques liées au déplacement de l'aube et son interaction avec l'excitation. Mesbah et al. [60] emploient cette technique afin d'évaluer l'impact de la taille du jeu en tête d'aube sur la réponse forcée.

## 2.4 Sources d'excitation

Ce paragraphe a pour but de résumer les différentes sources d'excitation aérodynamique que le fan peut rencontrer. Le vortex de sol, qui est une de ces sources, sera traité plus en détail dans la section suivante.

### 2.4.1 Interaction avec les roues adjacentes

Les sources d'excitations aérodynamiques les plus étudiées dans le cadre de réponse forcée au sein d'une turbomachine sont les sources provenant de l'interaction entre deux roues adjacentes en mouvement relatif. Il est possible de classer ces sources en trois catégories. Pour chaque catégorie, une description générale est faite avant de se focaliser sur le fan :

- Interaction de sillage. Les sillages sont des zones de pertes en aval des aubes qui sont transportées par l'écoulement jusqu'à la roue suivante. Les roues étant en mouvement relatif, les sillages sont défilant et génèrent des efforts périodiques sur la roue aval. La figure I.10 illustre l'interaction de sillage sur un compresseur. Ces excitations sont d'ordre moteur élevé (*High Engine Order* en anglais) dans la mesure où l'harmonique d'excitation est directement liée au nombre d'aube des roues amonts. Cette source d'excitation est présente durant tout le fonctionnement du moteur. Le fan étant le premier étage du moteur, il n'est pas soumis à cette excitation. Cependant, les sillages des aubes du fan sont sources d'excitation des OGV.
- Interaction potentielle. Lorsque la distance inter-roue est faible, les effets potentiels induits par les aubes de la roue avale peuvent être perçus par la roue située à l'amont. Ces effets potentiels créent aussi une excitation d'ordre élevé comme dans le cas précédant. Le fan est susceptible de percevoir ce type d'excitation.
- Dissymétrie azimutale. La présence de bras structuraux dans le flux secondaire entraîne une dissymétrie de l'écoulement. Les géométries des aubes des OGV sont conçues afin de minimiser les pertes liés à ces bras structuraux. Leur géométrie évolue donc en fonction de leur position azimutale dans la roue. Il s'en suit qu'une distorsion apparaît et peut entraîner une excitation sur le fan via des effets potentiels. La nacelle peut elle aussi être asymétrique pour des raisons d'encombrement. Même si l'entrée d'air n'est pas à proprement parler une roue, sa dissymétrie entraîne aussi une distorsion azimutale de l'écoulement perçue comme source d'excitation par le fan en rotation.

### 2.4.2 Distorsion d'ingestion de couche limite

Les configurations de type BLI permettent d'améliorer le rendement propulsif global d'un avion. L'idée est de placer le système propulsif sur le fuselage de l'avion afin d'absorber la couche limite de celui-ci. Le concept est connu depuis les années 50 cependant de nombreuses zones d'ombres persistent sur le véritable gain associé à ces configurations [73]. L'évaluation du

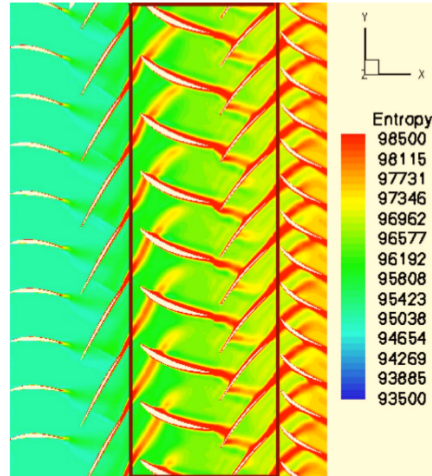


FIGURE I.10 – Excitation liée aux sillages de roues adjacentes au sein d’un compresseur illustrée par des contours d’entropie [88].

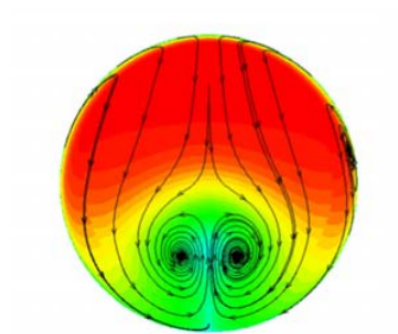


FIGURE I.11 – Exemple de distorsion en amont du fan générée dans une configuration BLI (contour de nombre de Mach) [52].

compromis poussée trainée est difficile dans cette configuration très intégrée. De plus, ces configurations entraînent une distorsion spécifique qui impacte principalement le fan et nécessitent un ajout de masse afin de rendre la structure plus robuste. La présence de la couche limite mène à une zone de faible vitesse générant des efforts instationnaires sur les aubes du fan. Il est aussi possible qu'une distorsion d'angle apparaisse en amont du fan comme l'illustre la figure I.11. Les premières études de réponse forcée dans le cadre d'une distorsion d'ingestion de couche limite ont été menées par Bakhle [4, 5]. Les auteurs montrent notamment que leur fan est capable d'endurer un cycle de vie complet du moteur.

### 2.4.3 Décollement de manche sous vent de travers

Le décollement de manche est un phénomène bien connu des motoristes. Il intervient dans les phases proches du sol en présence de vent de travers. Colin [18] a notamment étudié la modélisation de ce phénomène. Lorsque le débit du moteur varie, trois phénomènes physiques différents sont rencontrés :

- A faible débit, l'écoulement contourne le bord d'attaque de la nacelle ce qui entraîne un gradient de pression adverse, qui s'oppose à l'écoulement dans la couche limite. Si ce gradient de pression est suffisamment fort, il peut renverser l'écoulement et provoquer le décollement de la couche limite. Ce décollement implique une chute de pression totale sur une partie conséquente du plan fan.
- A débit modéré, l'écoulement recolle et est homogène au sein du plan fan. Ce recollement est possible car la position du point d'arrêt de la nacelle est modifiée par l'augmentation du débit.
- A fort débit, l'écoulement accélère au-delà du mach sonique, ce qui entraîne l'apparition d'une onde de choc. L'interaction de ce choc avec la couche limite mène à un décollement supersonique. Les niveaux de pertes de pression totale sont alors beaucoup plus élevés que ceux issus d'un décollement à faible régime. Le design de la nacelle est effectué pour que ce phénomène n'intervienne pas dans la plage de fonctionnement du moteur.

Les phénomènes de décollement de manche sont d'autant plus présents que les nacelles sont courtes. En effet, des nacelles de tailles réduites ont des rayons de courbures plus faibles ce qui entraîne des gradients de pression adverses plus élevés. Cela a pour conséquence de faire décoller la couche limite plus facilement. La figure I.12 illustre la distorsion en pression totale d'un décollement subsonique lié à la présence de vent de travers obtenu numériquement par Sadoudi [76]. Il montre notamment qu'il existe une forte interaction entre le fan et le décollement de manche. Le fan travaille davantage dans la zone décollée et apporte donc localement plus d'énergie au fluide ce qui permet de l'accélérer. Cette accélération peut potentiellement aider les couches limites de la nacelle à résister aux gradients de pression adverses. Le fan a donc tendance à faire recoller la manche. De plus, la forme du décollement est aussi fortement impactée par la présence du fan comme le montre la figure I.12. Il est donc primordial de modéliser le fan afin de capter les débits menant au décollement/recollement de manche.

Lors des phases de décollage ou d'atterrissage la nacelle peut se trouver sous forte incidence. Dans le cas de nacelle courte, cette forte incidence peut provoquer un décollement très similaire à celui décrit dans le cadre du vent de travers [13].

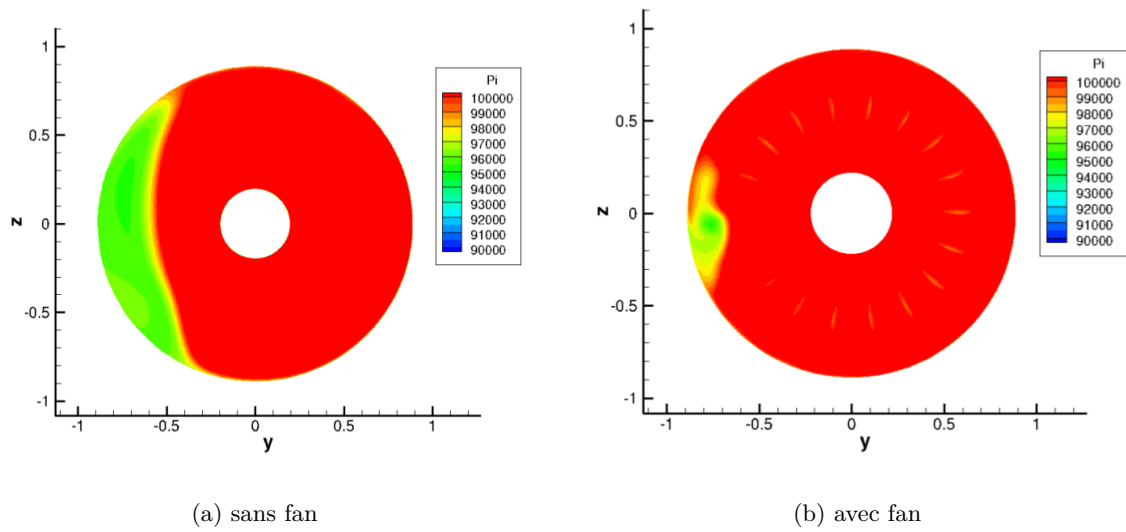


FIGURE I.12 – Illustration de la distorsion en pression totale pour 25kts de vent de travers [76].



FIGURE I.13 – Illustration d'un vortex de sol (©Peter Thomas 2005).

### 3 Le vortex de sol

Le vortex de sol, illustré figure I.13, est aussi une source d'excitation aérodynamique du fan. En effet, il entraîne une chute de pression totale ainsi qu'une distorsion d'angle. Il s'agit d'un phénomène étudié depuis les années 50, dont les premières études sont dues à Rodert et Garret [75]. Leur travail concerne l'ingestion de débris entraînée par le vortex de sol. De nombreuses études ont alors suivies. Les recherches de De Siervi et al. [20] ont notamment permis une meilleure compréhension physique du phénomène. Plus récemment, Murphy [62] a réalisé une étude expérimentale complète sur le vortex de sol. Sa thèse comporte l'une des premières études permettant d'obtenir des résultats quantitatifs sur le vortex de sol. Si ce phénomène a fait l'objet de nombreuses investigations, on notera que peu d'études traitant de son impact sur la réponse vibratoire des fans ont été réalisées. A notre connaissance, seulement deux articles abordent cette problématique [23, 31].

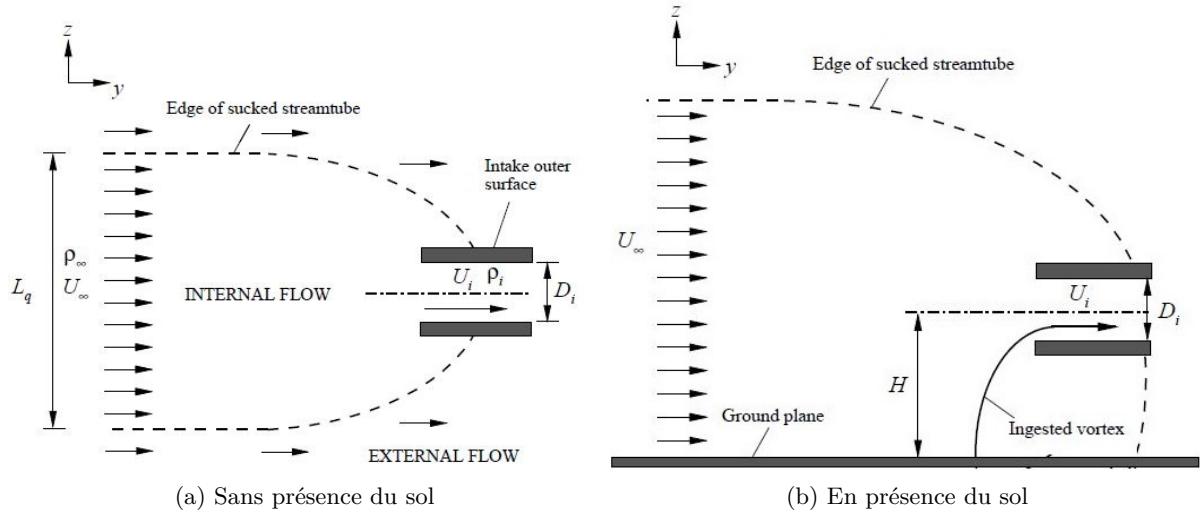


FIGURE I.14 – Illustration de tube de courant [62].

### 3.1 Formation du vortex de sol

#### 3.1.1 Critère de formation du vortex de sol

Les auteurs qui ont étudié les mécanismes de formation des vortex mettent en avant que la présence d'un point d'arrêt au sol est nécessaire à la création du vortex. La présence de ce point d'arrêt peut directement être reliée à la taille du tube de courant et à la garde au sol du moteur considéré. Les figures I.14a et I.14b illustrent respectivement un tube de courant sans et avec présence du sol. Si le tube de courant est assez grand pour intersecter le sol, un point d'arrêt apparaît. La taille du tube de courant peut être reliée au rapport entre la vitesse dans l'entrée d'air et la vitesse à l'infini amont. En effet, l'équation de la conservation de la masse entre l'infini amont et une coupe au sein de la nacelle, indicé par  $i$ , donne :

$$\rho_\infty S_\infty U_\infty = \rho_i S_i U_i \quad (\text{I.26})$$

$$\frac{S_\infty}{S_i} = \frac{\rho_i U_i}{\rho_\infty U_\infty} \quad (\text{I.27})$$

où  $S_\infty$  représente la surface du tube de courant,  $U$  la vitesse et  $\rho$  la masse volumique. Si on considère notre écoulement incompressible, on peut alors définir le rapport de vitesse  $U^*$  par :

$$U^* = \frac{U_i}{U_\infty} = \frac{S_\infty}{S_i} \quad (\text{I.28})$$

Dans les phases de décollage cette quantité  $U^*$  est généralement supérieure à 1. Lorsque l'avion est à l'arrêt, juste avant le décollage, et que le vent ambiant est nulle ce rapport tend vers l'infini. La taille du tube de courant est alors infinie. Afin de mettre en avant la présence d'un point d'arrêt, qui apparaît lorsque le tube de courant intersecte le sol, il est nécessaire de confronter ce rapport de vitesse  $U^*$  avec la distance entre la nacelle et le sol. Cette distance peut être caractérisée par  $H$ , la distance entre l'axe du moteur et le sol que l'on adimensionne par la diamètre  $D_i$ . Les deux paramètres sans dimension  $U^*$  et  $H/D_i$  sont donc les grandeurs qui permettront de caractériser la présence ou non du vortex.

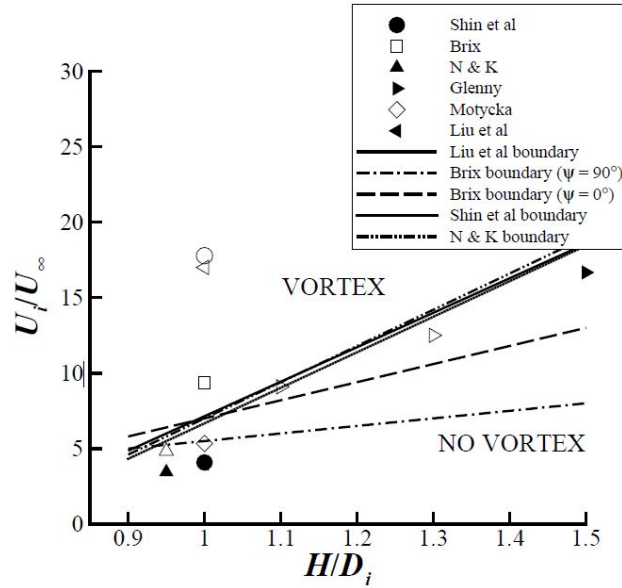


FIGURE I.15 – Relation entre rapport de vitesse et garde au sol adimensionnée faisant apparaître les limites de formation de vortex (symboles pleins représentent une donnée où aucun vortex est détecté, symboles vides représentent une donnée où un vortex est observé)[62].

La figure I.15 résume les différentes limites d'apparition et les différents expériences répertoriées par Murphy [62] dans un diagramme  $U^*$  en fonction de  $H/D_i$ . Les limites, bien que différentes d'une étude à une autre, suivent la même tendance. Plus le rapport  $H/D_i$  est élevé, plus l'apparition du vortex arrive pour un rapport de vitesse  $U^*$  élevé. Certains vortex semblent apparaître en dessous de la limite. Le rapport de vitesse est évalué à l'aide de  $U_\infty$ , cependant Murphy [62] explique qu'il est plus pertinent d'utiliser une moyenne de la vitesse infinie amont  $\overline{U_\infty}$  dans la mesure où cette valeur contient les pertes de vitesse liées à une éventuelle couche limite. D'après Murphy, cette correction permettrait d'améliorer la correspondance entre les points de mesure et les limites d'apparition du vortex.

L'augmentation du taux de dilution entraîne une augmentation du diamètre moteur. Les futures configurations du type UHBR seront donc caractérisées par de grands diamètres. De plus, dans une configuration classique d'installation motrice sous aile, l'augmentation du diamètre moteur entraîne une diminution de la garde au sol. La tendance est donc à la diminution du rapport  $H/D_i$ . Or les considérations géométriques exposées ci-dessus permettent de mettre en avant que plus le rapport  $H/D_i$  est faible, plus le rapport de vitesse critique est lui aussi faible et donc plus la plage de fonctionnement où le vortex apparaît est grande<sup>2</sup>. Les problématiques liées à l'ingestion de vortex seront donc présentes dans le développement des nouvelles configurations de turboréacteur.

La seconde condition à la formation de vortex est la présence de vorticité. Celle-ci peut être qualifiée d'ambiante lorsque qu'elle est indépendante de la présence du moteur (la présence

2. Notons tout de même qu'afin d'améliorer le rendement propulsif les nouvelles générations seront caractérisées par des vitesses plus faibles. Il s'en suit que les rapports de vitesses  $U^* = U_i/U_\infty$  en jeu seront aussi plus faibles. Cependant cette diminution est négligeable comparée à celle du rapport  $H/D_i$ .

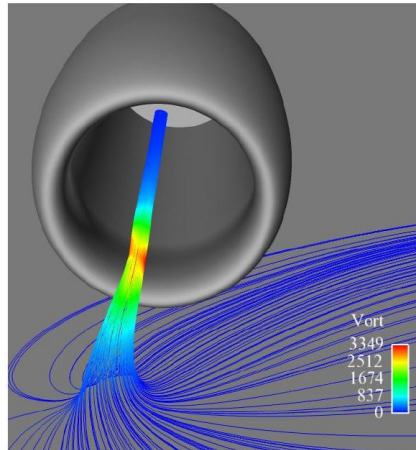


FIGURE I.16 – Résultat CFD d'un calcul en vent de travers avec condition de glissement sur l'entrée d'air et le sol [87].

d'une couche limite atmosphérique par exemple). De Seirvi [20] a montré à l'aide d'un montage expérimental comprenant deux entrées d'air dans un tunnel hydrodynamique qu'il est possible d'obtenir un vortex sans aucune vorticité ambiante. Dans ce cas, il existe tout de même une source de vorticité, provenant de l'entrée d'air. Ainsi la vorticité peut provenir de la nacelle (cf 3.1.2) ou encore d'une couche limite liée à l'aspiration créée par le moteur. De plus, l'étude numérique de Trapp et Girardi [87] montre que si aucune source de vorticité n'est présente, l'écoulement converge vers le point d'arrêt mais n'entre pas en rotation, comme l'illustre la figure I.16. Ces résultats ont été obtenus à l'aide de calculs RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) en appliquant des conditions de glissement sur l'entrée d'air et le sol.

Jermy et Hua [41] ont étudié l'influence du taux de turbulence sur la limite d'apparition du vortex de sol. Ils ont remarqué que plus le taux de turbulence est élevé, plus le vortex apparaît pour des valeurs de  $U^*$  faibles. Ils expliquent ce phénomène par un effet mémoire du vortex (phénomène d'hystérésis). Considérons que la vitesse se décompose en une grandeur moyenne  $U_\infty$  et une grandeur fluctuante  $u_\infty$ . Le vortex peut se former si de la valeur instantanée des fluctuations de vitesse entraîne  $\frac{U_i}{U_\infty + u_\infty} = U_{crit}^*$ . L'effet mémoire fait que malgré les variations de vitesse, qui font que  $\frac{U_i}{U_\infty + u_\infty} < U_{crit}^*$ , le vortex reste en place. Ce phénomène peut aussi expliquer la disparité des limites d'apparition présente sur la figure I.15.

### 3.1.2 Mécanismes de formation

Les mécanismes de formation de vortex en présence du sol ne sont encore aujourd'hui que très peu compris. L'étude qui apporte le plus de réponse sur la compréhension physique des mécanismes de formation du vortex est l'étude de De Seirvi dans laquelle il décrit deux mécanismes [20]. Le premier est l'intensification de la vorticité liée à l'étirement des filaments de vorticité. Il est à l'origine de l'apparition des vortex dans des conditions de vent de face. Le second mécanisme est lié à l'évolution de la circulation le long de l'entrée d'air. Le vortex créé au sol fait parti d'un système de vortex comprenant un vortex de contournement (*trailing vortex* en anglais) provenant d'un décollement qui apparaît sur la partie externe de l'entrée d'air. Ce second mécanisme est dominant dans des conditions de vent de travers. Ces deux mécanismes sont détaillées dans les paragraphes suivants.

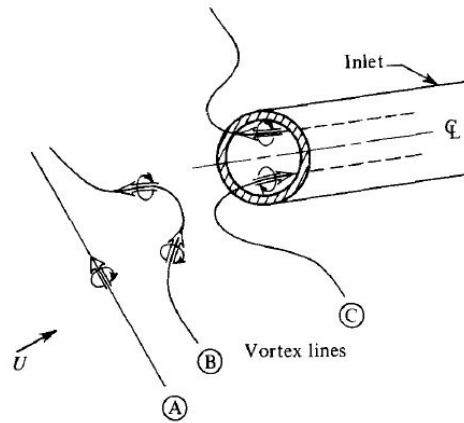


FIGURE I.17 – Etirement d'un filament de vorticité au cours du temps ( $t_A < t_B < t_C$ ) [20].

### Cas avec vent de face

En condition de vent de face, ou même sans vent ( $U^* = \infty$ ), le mécanisme qui est à l'origine de la formation du vortex de sol provient de l'intensification de la vorticité.   l'aide d'une étude théorique basée sur une approche d'écoulement secondaire De Siervi et al. [20] illustrent ce phénomène par l'étirement d'une ligne de vorticité. En effet, en considérant un écoulement incompressible, non visqueux et sans force volumique on peut montrer qu'un filament de vorticité est toujours composé des mêmes particules fluides. Si  $\delta l$  est la taille d'une ligne matériel infinitésimale qui co incide avec un filament de vorticité alors le rapport entre la taille de cette ligne matériel et la vorticité est constante au cours du temps :

$$\frac{\omega(t_1)}{\delta l(t_1)} = \frac{\omega(t_2)}{\delta l(t_2)} \quad (\text{I.29})$$

Il s'en suit que l'étirement du filament, c'est à dire une augmentation de  $\delta l$ , entraîne l'augmentation de la vorticité  $\omega$ . La figure I.17 illustre cet étirement et donc l'augmentation de vorticité dans le cas d'un moteur fonctionnant proche du sol.

Ce mécanisme qui est assimilé au vent de face est aussi présent lors des conditions de vent de travers. Ce phénomène ne fait que transporter de la vorticité, mais n'en crée pas. Il est donc nécessaire d'avoir une source de vorticité.

### Cas avec vent de travers

Lorsque le rapport de vitesse  $U^*$  est faible le tube de courant n'est pas en contact avec le sol. Il n'y a alors pas de point d'arrêt et aucun vortex de sol. En condition de vent de travers, De Siervi [20] a observé deux vortex contra-rotatifs sur la partie extérieure de l'entrée d'air comme l'illustre la figure I.18. Ces deux vortex, appelés vortex de contournement, ont une intensité comparable. Lorsque  $U^*$  augmente (moins de vent de travers ou plus de débit dans l'entrée d'air), le tube de courant intersecte le sol. Il s'en suit que vortex le plus bas disparaît et un vortex de sol se forme comme l'illustre la figure I.18. Il est important de noter que la présence du vortex de sol en condition de vent de travers s'accompagne forcément de la présence d'un vortex de contournement : les deux vortex sont liés. De Siervi explique la présence de ce vortex de

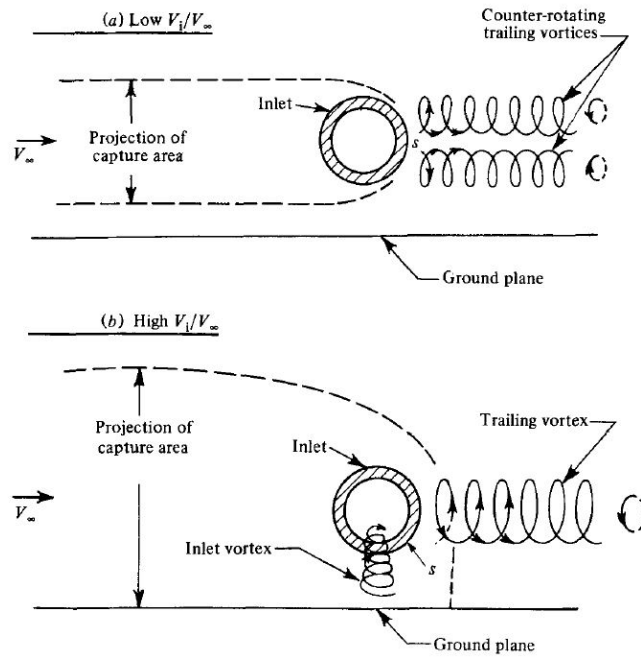


FIGURE I.18 – Différents tubes de courant en fonction du rapport de vitesse  $U^*$  en condition de vent de travers ( $90^\circ$ ) [20].

contournement en considérant l'évolution de la circulation le long de l'entrée d'air [20]. Il avance que la circulation en aval du plan d'entrée de la nacelle est un ordre de grandeur inférieur à la circulation présente juste en amont du plan d'entrée qui est dû à la présence du vortex de sol. Il en conclut que pour équilibrer ces circulations, la présence d'un vortex de contournement de circulation comparable au vortex de sol est nécessaire.

Afin de comprendre le mécanisme de formation de vortex en conditions de vent de travers Trapp [87] a effectué une étude numérique (calculs RANS) en appliquant différentes conditions limites sur l'entrée d'air et sur le sol. Les couches limites, caractérisées par la présence de vorticité, sont présentes uniquement lorsqu'une condition d'adhérence est utilisée. Avec des conditions de glissement sur l'ensemble des parois aucun vortex n'est alors observé (cf figure I.16). Ce résultat confirme que la présence de vorticité est nécessaire à la formation du vortex de sol. Lorsqu'une condition de glissement est appliquée au sol et une condition d'adhérence est appliquée à la paroi de l'entrée d'air un vortex est observé. Dans ce cas, le vortex est alimenté par la vorticité provenant de la nacelle. La circulation associée au vortex est même plus élevée que celle atteinte lorsque la condition d'adhérence est appliquée sur l'ensemble des parois. Cela traduit que l'intensité du vortex est davantage dominée par la vorticité provenant de la nacelle que par celle provenant du sol. Il semblerait même que le sol joue un rôle dissipatif étant donné que la circulation est plus faible lorsque la condition d'adhérence est appliquée au sol.

## 3.2 Comportement du vortex de sol

### 3.2.1 Comportement du vortex en condition de vent de face

Dans son étude expérimentale, Murphy [62] a étudié l'influence du rapport de vitesse  $U^*$  sur l'intensité du vortex dans des conditions de vent de face. Celle-ci peut être retranscrite par la circulation  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \oint_C u \cdot dl \quad (\text{I.30})$$

où  $dl$  représente un élément de longueur du contour fermé  $C$ . Le plus souvent, la circulation est adimensionnée par des grandeurs associées à la configuration étudiée :

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{D_i U_i} \quad (\text{I.31})$$

L'étude de Murphy a permis de mettre en avant un comportement auto-similaire du vortex de sol. La figure I.19 illustre l'évolution type de la circulation  $\Gamma^*$  en fonction de  $U^*$ . Un rapport de vitesse élevé entraîne un vortex de faible intensité. Plus le rapport de vitesse diminue, plus l'intensité du vortex augmente jusqu'à atteindre un maximum. L'intensité diminue alors jusqu'à ce que  $U^* = U_{crit}^*$ , valeur à laquelle le vortex disparaît. La variation de la circulation traduit une compétition entre deux mécanismes : la taille du tube de courant intersectant le sol et le niveau de vorticité ingéré. Pour un faible vent, le tube de courant a une taille conséquente mais la vorticité de la couche limite est faible. Lorsque  $U_\infty$  augmente, la vorticité dans la couche limite devient plus forte ce qui entraîne un vortex plus intense. Par contre, une augmentation de  $U_\infty$  entraîne une diminution de la taille du tube de courant qui intersecte le sol et donc un vortex plus faible. Le maximum traduit donc une configuration où le vent est assez fort pour posséder une forte vorticité dans la couche limite, tout en ayant une partie conséquente du tube de courant qui intersecte le sol. Ce comportement semble se répéter pour l'ensemble des cas étudiés par Murphy. En normalisant  $\Gamma^*$  par sa valeur maximale  $\Gamma_{max}^*$  et  $U^*$  par sa valeur donnant le maximum de circulation  $U_{max}^*$  Murphy fait ressortir un comportement autosimilaire, illustré figure I.19. En effet, les différentes configurations (différentes distances au sol et différentes tailles de couche limite atmosphérique) retranscrivent une évolution quasiment identique. Cette auto similarité est la base du modèle prédictif de circulation que Murphy a développé [62].

L'étude de Murphy a permis de compléter les cartographies d'apparition de vortex (cf I.16) en ajoutant une information relative à l'intensité du vortex ( $\Gamma^*$ ). Cette nouvelle cartographie, illustrée figure I.20 permet de mettre en évidence les zones où le vortex risque d'être le plus néfaste pour le moteur. Pour un rapport  $h/D_l$  (où  $h$  est la plus petite distance entre le sol et la nacelle et  $D_l$  le diamètre au point le plus avancé de la nacelle), on y retrouve l'information illustrée figure I.19, c'est à dire que le maximum d'intensité est atteint proche de la limite d'apparition du vortex. La région 3 illustrée sur ce graphique traduit la zone entre l'apparition du vortex et son maximum d'intensité. L'autre principale information apportée par cette cartographie est l'influence du rapport entre la garde au sol et le diamètre. Deux comportements sont observés. Le premier, décrivant la région 1, est traduit par une diminution de l'intensité du vortex lorsque le rapport  $h/D_l$  diminue. Le second, décrivant la région 2, est à l'inverse traduit par une augmentation de l'intensité lorsque le rapport  $h/D_l$  diminue. Il en résulte que les vortex les plus intenses se trouvent proche de la limite d'apparition et pour de faibles distances au sol.

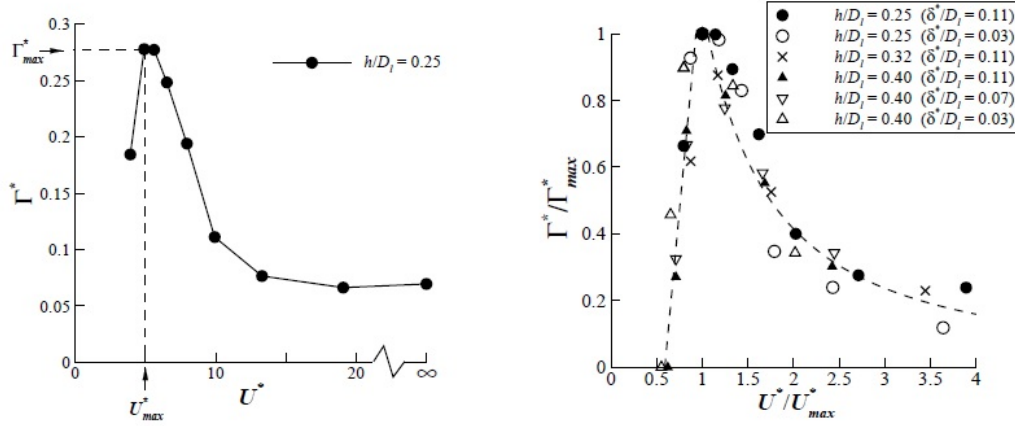


FIGURE I.19 – *A gauche* : Évolution de la circulation adimensionnée  $\Gamma^*$  en fonction du rapport de vitesse  $U^*$  dans un cas de vent de face. *A droite* : Illustration du comportement auto-similaire de l'intensité du vortex de sol [62].

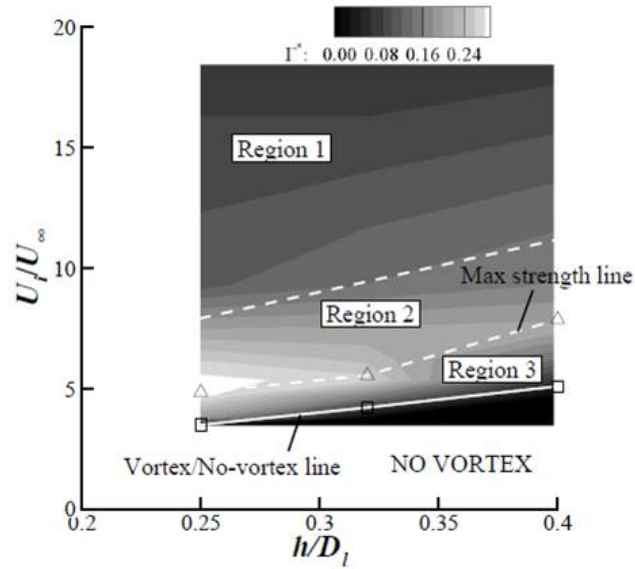


FIGURE I.20 – Cartographie d'apparition du vortex de sol et intensité du vortex [62].

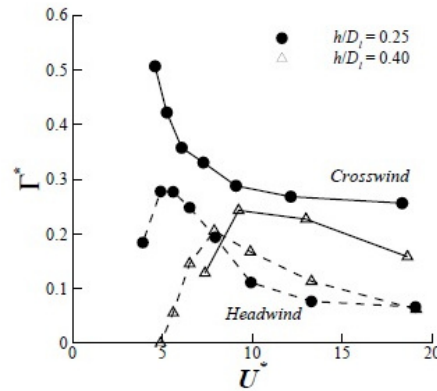


FIGURE I.21 – Évolution de la circulation adimensionnée  $\Gamma^*$  en fonction du rapport de vitesse  $U^*$  dans des cas de vent de face (pointillé) et vent de travers (trait plein) pour deux gardes au sol [62].

### 3.2.2 Comportement du vortex en condition de vent de travers

Le comportement du vortex en condition de vent de travers est similaire à celui en condition de vent de face. L'influence de  $U^*$  et de  $h/D_i$  sur  $\Gamma^*$  en vent de travers est proche de celle en vent de face comme l'illustre la figure de gauche I.21. En effet, l'intensité du vortex augmente lorsque le rapport des vitesses diminue jusqu'à l'atteinte d'un maximum, puis diminue fortement avant de disparaître (la diminution n'est pas illustrée pour le cas  $h/D_i = 0.25$  car les valeurs de  $U^*$  inférieure à 5 n'ont pas été étudiées). On note aussi qu'un rapport  $h/D_i$  faible entraîne un vortex intense (ce qui est similaire au comportement en condition de vent de face dans la *région 2*, cf figure I.20). La principale différence réside donc dans l'intensité du vortex. Celle-ci est largement supérieure dans les conditions de vent de travers que dans les conditions de vent de face. Ce résultat laisse entendre que c'est dans les conditions de vent de travers que le vortex a potentiellement le plus d'impact.

### 3.2.3 Comportement instationnaire

Secareanu [78] a effectué une caractérisation instationnaire du vortex de sol en condition de vent de face à l'aide de calculs numériques LES (Large Eddy Simulation) et de techniques expérimentales telles que la PIV (*Particle Image Velocimetry*) et LDV (*Laser Doppler velocimetry*). Une très bonne cohérence est obtenue entre numérique et expérimental concernant la description du champ moyen de vitesse, mais elle l'est beaucoup moins concernant les fluctuations de vitesse. Il est aussi mis en avant que la dynamique du vortex peut être caractérisée par les fluctuations de la vitesse axiale proche du sol donnant un nombre de Strouhal de  $St = f \cdot D_i / U_i = 0.06$ . Karlsen [42] caractérise les fréquences dominantes au sein d'un vortex à l'aide d'une étude numérique LES. Il met en évidence des nombres de Strouhal entre  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . Murphy observe aussi des fluctuations au sein du vortex, notamment la circulation et la position au sol du vortex, cependant aucune analyse temporelle n'est réalisée dans son étude.

Wang et Gursul [92] ont aussi étudié les caractéristiques instationnaires du vortex de sol en condition de vent de travers à l'aide de mesures PIV. Ils ont montré que le vortex avait un mouvement sinusoïdal similaire au mouvement des tourbillons marginaux présents en extrémité de voilure. La zone d'impact du vortex décrit une ellipse portée par l'axe du vent de travers ce qui

| Mode   | Computed                        |                                     | Measured                                        |                                 |
|--------|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------|
|        | 2-knot<br>HW, 45°<br>cross wind | 45-<br>knot HW,<br>no cross<br>wind | Ambient<br>Negligible<br>head and<br>cross wind | 45-knot<br>HW, no<br>cross wind |
| 1F/1EO | 1                               | 1                                   | 1.8                                             | 1                               |
| 2F/2EO | 6                               | 1                                   | 3.5                                             | 1                               |
| 1T/4EO | 2                               | 1                                   | 1.4                                             | 1                               |
| M5/7EO | 15                              | 1                                   | 2                                               | 1                               |

FIGURE I.22 – Comparaison calculs/essais de la réponse vibratoire en présence de vortex ("2-knot" and "Ambiant wind") et sans présence de vortex ("45 knots HW") [23].

est cohérent avec ce que Murphy a observé. De plus, la caractérisation temporelle de la position du vortex et de son intensité ont permis de mettre en avant une plage de fréquence similaire à celle observée par Karlsen [42].

### 3.3 Réponse forcée en présence du vortex de sol

A notre connaissance, seulement deux articles traitent de la réponse forcée liée à l'ingestion de vortex de sol. La première étude a été réalisée par Di Mare et al. [23] sur un fan d'une configuration typique de moteur à fort taux de dilution. Leur travaux consistent à reproduire numériquement les niveaux observés expérimentalement. Leur modèle numérique est basé sur une approche RANS et une modélisation linéaire de la structure. La figure I.22 illustre une comparaison calcul/essai des niveaux de réponse obtenus pour 4 modes : 1F, 2F, 1T et M5. Les niveaux sont normalisés par ceux observés sans vortex (pour un vent de face de 45kts). Les auteurs mettent en avant expérimentalement que la présence d'un vortex de sol entraîne une forte augmentation des niveaux vibratoires sur les différentes coïncidences étudiées (de 1,4 à 3,5). Le modèle numérique permet de retrouver l'augmentation du niveau de réponse forcée liée au vortex même si des écarts quantitatifs persistent. Un second résultat intéressant de l'étude de Di Mare et al réside dans leur étude de la distorsion. L'impact de la présence du vortex sur la distorsion de l'écoulement est illustré par la répartition radiale des transformées de Fourier de la pression totale et de l'angle de giration (plusieurs ordres moteurs sont analysés). Ils mettent en avant que ces analyses ne permettent pas directement d'estimer l'impact du vortex sur le niveau de réponse forcée. Aucune corrélation n'est possible entre distorsion et niveaux vibratoires. La forme des modes doit être prise en compte dans une optique d'estimation des réponses vibratoires à partir d'une cartographie de distorsion.

Green [31] a lui aussi étudié la réponse forcée en présence de vortex de sol. Son étude se concentre principalement sur des cas de vent de face. A l'aide d'une modélisation linéaire de la structure et de calculs RANS, Green montre que le vortex entraîne une chute de pression totale et une distorsion d'angle. Il met en avant que de fortes amplitudes vibratoires loin des coïncidences sont prédites par le calcul. Ces amplitudes sont pilotées par le premier ordre moteur qui donne de forts niveaux sur les trois premiers modes. Le modèle aérodynamique de Green comporte différentes nacelles (axisymétrique sans sol, nacelle non axisymétrique sans sol et nacelle non axisymétrique avec sol), le fan et les OGV non axisymétriques. La comparaison

entre différents calculs de réponse forcée sur plusieurs coïncidences lui permet d'isoler l'effet de chaque composant. Il met en évidence que le vortex est la principale source d'excitation. Malgré une forte variabilité dans le comportement du vortex, les prédictions numériques d'amplitudes vibratoires sont relativement en accord avec celles observées durant les essais expérimentaux disponibles.

Ces deux études mettent en avant le fort impact du vortex sur la réponse forcée du fan.

## 4 Bilan et objectifs des travaux de thèses

Ce chapitre a permis d'exposer la problématique de réponse forcée liée à l'ingestion de vortex. La complexité de ce phénomène réside dans une interaction fine entre une excitation aérodynamique particulière et une réponse dynamique de la structure pouvant faire intervenir des phénomènes non-linéaires complexes. Compte tenu des tendances actuelles qui visent à dessiner des moteurs avec des diamètres plus grands et des structures plus souples, cette problématique ne peut plus être ignorée dans les phases de conception. Les industriels se doivent donc d'être en mesure d'estimer les niveaux vibratoires rencontrés dans le cas d'une ingestion de vortex. Ils ont besoin d'outils fiables afin d'orienter leurs choix de conception sans attendre des essais finaux de certification pour valider leur géométrie. Un premier objectif de la thèse consiste donc à mettre au point des méthodes numériques permettant l'estimation de la réponse forcée sous ingestion de vortex. Un second objectif est d'utiliser les résultats obtenus via ces méthodes afin d'améliorer la compréhension physique des mécanismes aéroélastiques en jeu qui sont peu étudiés dans la littérature. Un effort particulier doit être mené pour traiter à la fois les aspects aérodynamiques, les aspects mécaniques et la communication entre ces deux mondes souvent abordés indépendamment. De plus, les méthodes mises en place se doivent d'être compatibles avec des configurations industrielles réelles permettant leur utilisation au sein des bureaux d'études. Finalement, à travers l'étude de la réponse forcée sous ingestion de vortex, les travaux de thèse ont aussi pour objectif d'améliorer de façon plus générale la modélisation de la réponse forcée afin d'aborder de futures problématiques telles que la réponse forcée sous ingestion de couche limite et sous vent de travers avec décollement de manche.

Le prochain chapitre s'applique à décrire les modélisations et les méthodes utilisées durant ces travaux de thèse.



## Chapitre II

# Modélisation et méthodes numériques

Ce chapitre présente les différents types de modélisation et les différentes méthodes numériques utilisées dans le cadre de cette thèse. Il n'a pas pour objectif de décrire exhaustivement les modélisations et les méthodes numériques pouvant répondre à la problématique. La première partie se concentre sur la modélisation de la structure dans le cadre d'un disque aubagé en rotation. Après avoir décrit l'équation de la dynamique, une présentation des méthodes de réduction utilisées dans le cadre de cette thèse est effectuée. La notion de symétrie cyclique est ensuite détaillée. Finalement les aspects de modélisation non-linéaire liés au contact aube-disque sont abordés. La seconde partie traite de la modélisation aérodynamique. Après avoir rappeler les équations de la mécanique des fluides, la modélisation RANS est décrite. L'approche de volume finis est ensuite présentée dans sa formulation ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*). Finalement, la déformation de maillage qui est un outil indispensable dans la modélisation aéroélastique est brièvement décrit.

### Sommaire

|          |                                                                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Modélisation de la structure . . . . .</b>                                                          | <b>37</b> |
| 1.1      | Équation de la dynamique d'une roue aubagée . . . . .                                                  | 37        |
| 1.2      | Méthode de réduction . . . . .                                                                         | 38        |
| 1.2.1    | Démarche des méthodes de réduction . . . . .                                                           | 38        |
| 1.2.2    | Réduction modale . . . . .                                                                             | 38        |
| 1.2.3    | Méthode de Craig et Bampton . . . . .                                                                  | 39        |
| 1.3      | Symétrie cyclique . . . . .                                                                            | 41        |
| 1.3.1    | Propriétés des structures à symétrie cyclique . . . . .                                                | 41        |
| 1.3.2    | Analyse modale sur secteur en symétrie cyclique . . . . .                                              | 43        |
| 1.3.3    | Base modale sur la structure complète . . . . .                                                        | 45        |
| 1.3.4    | Équation de la dynamique en symétrie cyclique . . . . .                                                | 49        |
| 1.3.5    | Forces aérodynamiques généralisées dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu . . . . . | 50        |
| 1.3.6    | Intérêts et limites . . . . .                                                                          | 52        |
| 1.4      | Non-linéarité en pied d'aube . . . . .                                                                 | 53        |
| 1.4.1    | Modélisation du contact . . . . .                                                                      | 53        |
| 1.4.2    | Méthode de balance harmonique . . . . .                                                                | 56        |

---

|          |       |                                                         |           |
|----------|-------|---------------------------------------------------------|-----------|
|          | 1.4.3 | Alternating Frequency/Time . . . . .                    | 58        |
|          | 1.4.4 | La méthode DLFT . . . . .                               | 58        |
| <b>2</b> |       | <b>Modélisation aérodynamique . . . . .</b>             | <b>59</b> |
|          | 2.1   | Équations de la mécanique des fluides . . . . .         | 59        |
|          | 2.2   | Modélisation RANS . . . . .                             | 60        |
|          | 2.3   | Modèle de turbulence : k-w Menter SST . . . . .         | 61        |
|          | 2.4   | Méthodes des volumes finis en formulation ALE . . . . . | 62        |
|          | 2.4.1 | Discrétisation spatiale . . . . .                       | 63        |
|          | 2.4.2 | Intégration temporelle . . . . .                        | 66        |
|          | 2.5   | Déformation de maillage . . . . .                       | 67        |
| <b>3</b> |       | <b>Bilan . . . . .</b>                                  | <b>69</b> |

---

# 1 Modélisation de la structure

## 1.1 Équation de la dynamique d'une roue aubagée

On se place ici dans le cadre d'une approximation par élément finis. Le comportement du matériau est supposé linéaire. On considère de plus qu'il possède un amortissement interne visqueux. La structure est en rotation à la vitesse  $\Omega$  constante. Sous ces hypothèses, il est possible d'écrire l'équation de la dynamique linéaire formulée dans le repère tournant de la façon suivante [16, 27] :

$$M\ddot{x} + (D + G)\dot{x} + (\mathcal{K} + N + K_g(x))x = F + F_\Omega \quad (\text{II.1})$$

Dans cette équation  $M$  est la matrice de masse,  $D$  est la matrice d'amortissement,  $G$  est la matrice gyroscopique qui dépend de la vitesse de rotation,  $\mathcal{K}$  est la matrice de raideur,  $N$  est la matrice d'assouplissement centrifuge qui dépend de la vitesse de rotation. Le vecteur  $F$  désigne les excitations extérieures, qui peuvent dépendre la vitesse de rotation, et  $F_\Omega$  désigne les excitations centrifuges qui dépendent aussi de la vitesse de rotation. Le vecteur  $x$  représente les déplacements de chaque degré de liberté. La matrice de raideur géométrique, noté  $K_g$ , correspond à une rigidification de la structure liée à sa déformation. Cette matrice dépend de la contrainte au sein de la structure et donc du vecteur déplacement  $x$ . Afin de déterminer la matrice  $K_g$ , les déplacements et les efforts sont séparés en une composante statique, indicée 0, et une composante instationnaire, indicée \*, comme l'illustre l'équation II.2.

$$\begin{cases} x &= x^0 + x^* \\ F &= F^0 + F^* \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

L'hypothèse est ensuite faite que la matrice  $K_g$  ne dépend que du déplacement statique dans la mesure où le déplacement instationnaire est relativement faible devant le déplacement stationnaire dans une configuration de roue aubagée. La détermination de cette matrice passe donc par la résolution de l'équation statique non-linéaire II.3.

$$(\mathcal{K} + N + K_g(x^0))x^0 = F^0 + F_\Omega \quad (\text{II.3})$$

La matrice de raideur géométrique peut alors être utilisée dans l'équation de la dynamique présentée équation II.1 obtenue en utilisant les relations II.2 et II.3.

$$M\ddot{x}^* + (D + G)\dot{x}^* + (\mathcal{K} + N + K_g(x_0))x^* = F^* \quad (\text{II.4})$$

Khader et Loewy [43] ont étudié l'impact des effets gyroscopiques sur la réponse forcée d'une roue aubagée montée sur un arbre flexible. Ils ont montré que les forces de Coriolis avait un effet non négligeable sur certains modes qui se couplent avec l'arbre. Charleux [16] a montré que les effets gyroscopiques avaient peu d'influence dans la mesure où la flexibilité de l'arbre n'était pas prise en compte. Dans le cadre de cette thèse, on se place sous cette hypothèse. Les matrices  $\mathcal{K}$ ,  $N$  et  $K_g$  sont regroupées dans la notation  $K$  et les indices \* sont supprimés afin de simplifier les notations. Finalement, l'équation de la dynamique linéaire pour une roue aubagée en rotation sera résumée dans cette étude par l'équation suivante :

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = F \quad (\text{II.5})$$

## 1.2 Méthode de réduction

La complexité des géométries utilisées au sein d'une turbomachine nécessite de les mailler très finement, ce qui engendre un très grand nombre de degrés de liberté. La résolution directe de l'équation de la dynamique sur le modèle éléments finis complet entraîne un coût de calcul prohibitif dans le cadre d'une conception. Il existe cependant des méthodes de réduction, parfois appelées méthodes de synthèse modale [7, 9] ou méthode de condensation [34], qui permettent de réduire la taille du problème considéré, et donc le temps de calcul, tout en gardant la meilleure précision possible. De nombreuses techniques ont été développées dans ce but depuis les années soixante [85].

### 1.2.1 Démarche des méthodes de réduction

L'idée des méthodes de réduction est donc de diminuer la taille du problème en projetant l'équation du mouvement sur une base réduite. Pour cela on utilise une matrice de passage  $P$  qui diffère selon les méthodes employées.

$$x = Pq \quad (\text{II.6})$$

L'équation II.7 représente l'équation de la dynamique projetée dans la base réduite.

$$M_r \ddot{q} + D_r \dot{q} + K_r q = F_r \quad (\text{II.7})$$

La matrice de masse réduite  $M_r$ , la matrice d'amortissement réduite  $D_r$ , la matrice de raideur réduite  $K_r$  et le vecteur d'effort réduit  $F_r$  sont détaillés équation II.8 et s'expriment donc à l'aide de la matrice de passage  $P$ .

$$\begin{cases} M_r = P^T M P \\ D_r = P^T D P \\ K_r = P^T K P \\ F_r = P^T F \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

### 1.2.2 Réduction modale

La synthèse modale est probablement la méthode de réduction la plus utilisée. Elle consiste à déterminer les modes propres de la structure à l'aide de la résolution du problème conservatif, c'est à dire sans amortissement  $D = 0$ , et homogène, c'est à dire sans effort extérieur  $F = 0$ . Elle passe donc par la résolution du problème aux valeurs propres exposé équation II.9.

$$(K - \omega^2 M) \phi = 0 \quad (\text{II.9})$$

Les valeurs propres  $\omega$  représentent les *pulsations propres* du système et les vecteurs propres  $\phi$  représentent les *modes propres* de la structure. La matrice de passage, que l'on notera ici  $\Phi$  est alors construite avec les vecteurs propres de la structure. Le déplacement  $x$  s'exprime alors à l'aide de la base modale  $\Phi$  et les coordonnées généralisées  $q$  :

$$x = \Phi q \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{cases} \mu &= \Phi^T M \Phi \\ \beta &= \Phi^T D \Phi \\ \gamma &= \Phi^T K \Phi \\ f_{ag,i} &= \Phi^T F \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

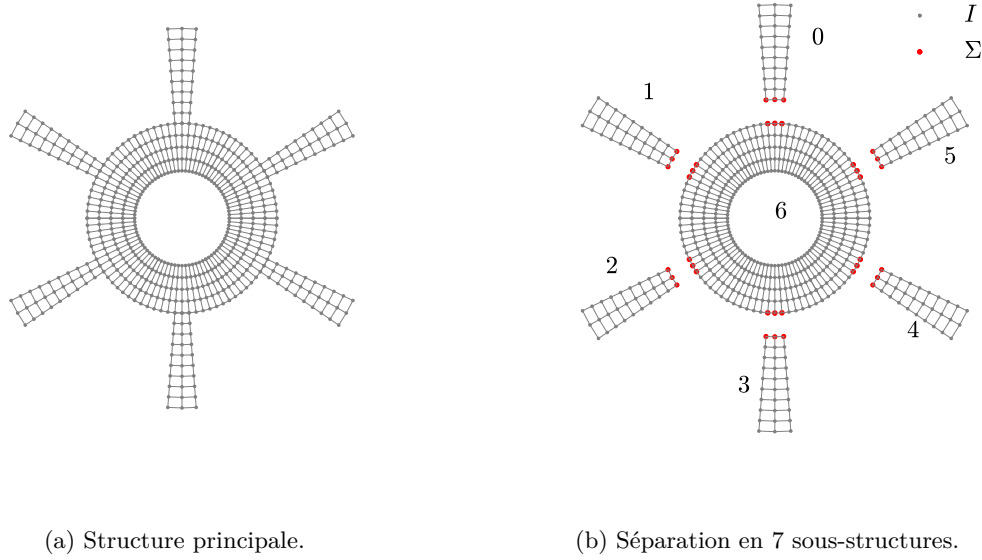


FIGURE II.1 – Illustration de la sous-structuration d'une disque aubagé.

Dans la base modale, la matrice de masse généralisée  $\mu$  et la matrice de raideur généralisée  $\gamma$  sont diagonales. La matrice d'amortissement généralisée  $\beta$  est elle aussi diagonale sous l'hypothèse de Basile [38]. En considérant que les efforts  $F$  sont indépendants du mouvement, l'équation de la dynamique revient à  $n_{ddl}$  équations modales indépendantes où  $n_{ddl}$  représente le nombre total de degrés de liberté. L'équation II.12 illustre cette équation modale pour le mode  $i$ .

$$\mu_i \ddot{q}_i + \beta_i \dot{q}_i + \gamma_i q_i = f_{ag,i} \quad (\text{II.12})$$

En introduisant la pulsation propre  $\omega_i$  et le coefficient d'amortissement modal  $\xi_i$  l'équation II.12 conduit à l'équation II.15.

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i} \quad (\text{II.13})$$

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{2\mu_i\omega_i} \quad (\text{II.14})$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{m_i} f_{ag,i} \quad (\text{II.15})$$

Toutes les équations modales étant découplées, la richesse de la base retenue correspond donc au nombre de modes retenus. Dans certaines conditions comme dans le cas d'une réponse à la résonance, il peut être suffisant de ne garder qu'un seul mode, ce qui revient à la résolution d'une unique équation scalaire du second ordre.

### 1.2.3 Méthode de Craig et Bampton

La méthode de Craig et Bampton [19] appartient aux méthodes de sous-structuration. L'idée de ces méthodes est de séparer le problème en plusieurs sous problèmes. La structure globale est alors séparée en  $N$  sous-structures. Pour chaque sous-structure, la matrice de masse  $m$ , la matrice de raideur  $k$  et le vecteur des déplacements sont réordonnés afin d'isoler les degrés

de liberté intérieurs (indiciels  $I$ ) et les degrés de liberté frontières (indiciels  $\Sigma$ ) qui se situent à l'interface des sous-structures. Dans le cadre d'un disque aubagé, il est commun de considérer le disque et les aubes comme différentes sous-structures comme c'est illustré sur la figure II.1. Les matrices associées à une sous-structure sont donc de la forme :

$$\begin{cases} k &= \begin{bmatrix} k_{\Sigma\Sigma} & k_{\Sigma I} \\ k_{I\Sigma} & k_{II} \end{bmatrix} \\ m &= \begin{bmatrix} m_{\Sigma\Sigma} & m_{\Sigma I} \\ m_{I\Sigma} & m_{II} \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_{\Sigma} \\ x_I \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

De nombreuses méthodes de réduction basées sur la sous-structuration sont étudiées depuis plusieurs dizaines d'années. Philippe [71] résume les méthodes les plus utilisées dans sa thèse. Ici on se concentre uniquement sur la méthode de Craig et Bampton [19]. Sa facilité de mise en oeuvre et sa stabilité numérique en font une méthode de référence très utilisée dans le milieu industriel. La première étape de la méthode consiste à calculer les modes propres de chaque sous-structure en considérant les degrés de libertés frontière fixes ( $x_{\Sigma} = 0$ ) et en conservant les autres conditions limites. Ces modes sont appelés les modes internes de la sous-structure et s'obtiennent en résolvant le problème aux valeurs propres associé à l'équation II.17. Seule une partie des modes est conservée afin de réduire la taille de la matrice. La matrice tronquée, composée des modes internes retenus, est notée  $\phi_{tr}$ .

$$m_{II}\ddot{x}_I + k_{II}x_I = 0 \quad (\text{II.17})$$

La seconde étape consiste à calculer les modes statiques, noté  $\phi_s$ , en résolvant un problème statique où seule la matrice de raideur intervient. Un déplacement unitaire est fixé successivement à chaque degré de liberté frontière tout en encastrant les autres degrés de liberté frontières. Le problème statique à résoudre qui en résulte est donné par l'équation II.18.

$$\begin{bmatrix} k_{\Sigma\Sigma} & k_{\Sigma I} \\ k_{I\Sigma} & k_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\Sigma} \\ \phi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\Sigma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$F_{\Sigma}$  représente les efforts résultant des déplacements unitaires imposés sur les degrés de liberté frontières et  $I_{\Sigma}$  la matrice identité de taille égale au nombre de degré de liberté frontière. La seconde ligne de ce système permet d'isoler les modes statiques afin de les exprimer en fonction des raideurs comme l'illustre l'équation II.19.

$$\phi_s = -k_{II}^{-1}k_{I\Sigma} \quad (\text{II.19})$$

Finalement, pour la sous-structure  $(i)$ , la matrice de passage notée  $p^{(i)}$  s'exprime via l'équation II.20.

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{\Sigma}^{(i)} \\ x_I^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_s^{(i)} & \phi_{tr}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\Sigma}^{(i)} \\ q_I^{(i)} \end{bmatrix} = p^{(i)}q^{(i)} \quad (\text{II.20})$$

Les coordonnées généralisées de la base réduite  $q^{(i)}$  sont alors composées des coordonnées généralisées associées aux modes internes retenus  $q_I^{(i)}$  ainsi que l'ensemble des degrés de liberté

frontière qui sont conservés dans la base physique  $x_\Sigma^{(i)}$ . L'équation II.21 illustre la matrice de passage globale  $P$  dans le cas de deux sous-structures indicés <sup>(1)</sup> et <sup>(2)</sup>.

$$x = \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ x_I^{(1)} \\ x_I^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \phi_s^{(1)} & \phi_s^{(2)} \\ 0 & \phi_{tr}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{tr}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ q_I^{(1)} \\ q_I^{(2)} \end{bmatrix} = Pq \quad (\text{II.21})$$

En appliquant les relations présentes équation II.8 il est alors possible d'explicitier les matrices  $M_r$  et  $K_r$ .

$$M_r = \begin{bmatrix} m_s & m_s^{(1)T} & m_s^{(2)T} \\ m_s^{(1)} & m_{tr}^{(1)} & 0 \\ m_s^{(2)} & 0 & m_{tr}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$$K_r = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_{tr}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{tr}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Les termes  $m_{tr}$  et  $k_{tr}$  sont diagonaux par construction. Le couplage entre les deux sous-structures intervient via la matrice de masse comme l'illustre les termes extra-diagonaux  $m_s$  de la matrice  $M_r$ . La taille de la base réduite dépend directement de la troncature des modes contraints effectuée sur chaque sous-structure, mais dépend aussi du nombre de degrés de liberté aux frontières. Une troncature importante de la base interne de chaque sous-structure permet d'obtenir de très bons résultats sur les premiers modes de la structure totale. Il peut être intéressant de sélectionner le nombre de modes conservés d'une sous-structure selon son rôle dans le comportement dynamique de la structure totale [54]. Par exemple, pour un disque aubagé il est commun de garder un nombre de modes internes pour les sous-structures associées aux aubes plus important que le nombre de mode associé au disque dans la mesure où les aubes sont plus souples. Cette méthode comporte aussi l'avantage de garder des degrés de liberté dans le domaine physique, ce qui peut se révéler très utile pour traiter des problèmes de contact dans la mesure où les lois de contact s'expriment facilement dans le domaine physique comme nous le verrons plus tard.

### 1.3 Symétrie cyclique

Les structures à symétrie cyclique sont définies par un secteur de base répété  $N$  fois par rotation angulaire, jusqu'à se refermer sur elles-mêmes. Elles sont donc composées de  $N$  secteurs  $S_k$  tous identiques au secteur de référence  $S_0$  à une rotation d'angle  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  près comme l'illustre la figure II.2. Ces structures possèdent des propriétés de symétries cycliques qui permettent de réduire la taille du problème de dynamique linéaire en exprimant le champ de déplacement sur les secteurs  $S_k$  uniquement en fonction du secteur de référence  $S_0$ .

#### 1.3.1 Propriétés des structures à symétrie cyclique

Toutes les grandeurs mécaniques considérées (déplacements, contraintes, efforts...) sont périodiques et peuvent donc être décomposées en série de Fourier complexe par rapport à la variable angulaire  $\theta$  à chaque instant comme l'illustre l'équation II.24 pour le champ de déplacement  $x$  exprimé dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ .

$$x(r, \theta, z, t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_h(r, z, t) e^{jh\theta} \quad (\text{II.24})$$

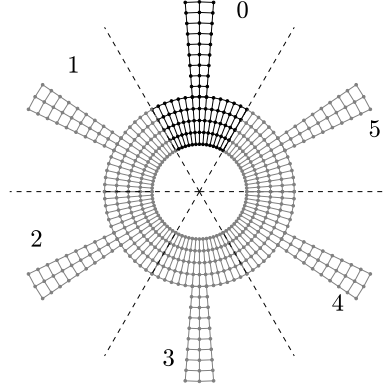


FIGURE II.2 – Illustration d'une structure à symétrie cyclique.

Les coefficients de Fourier  $x_h$  sont ici complexes. Il est possible de regrouper certains coefficients de Fourier en utilisant le changement de variable suivant :  $h = pN + n$  avec  $n = 0, \dots, N - 1$  [90]. Ce regroupement permet de faire apparaître une somme sur l'indice  $n$  que l'on nomme *nombre à diamètre* comme l'illustre l'équation II.25.

$$x(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{pN+n}(r, z, t) e^{j(pN+n)\theta} \quad (\text{II.25})$$

En introduisant  $x_n$ , le déplacement selon le nombre à diamètre  $n$ , via l'équation II.26, il est possible d'exprimer le déplacement réel comme une somme de  $N$  déplacements :

$$x_n(r, \theta, z, t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_{pN+n}(r, z, t) e^{j(pN+n)\theta} \quad (\text{II.26})$$

$$x(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(r, \theta, z, t) \quad (\text{II.27})$$

Le déplacement du nombre à diamètre  $n$  s'exprime donc comme une somme infinie faisant intervenir les coefficients complexes de la série de Fourier. Ce choix de regroupement des coefficients de Fourier est pertinent dans la mesure où les variables  $x_n$  respectent des propriétés particulièrement intéressantes. En effet, en utilisant la définition de  $x_n$  et en effectuant un changement de variable sur  $p$  il est possible de montrer les relations exprimées équation II.28.

$$x_{-n} = x_{N-n} = \overline{x_n} \quad (\text{II.28})$$

De plus, la composante complexe  $x_n$  vérifie la condition limite complexe dite de symétrie cyclique exposée équation II.29 qui relie le déplacement du secteur  $S_k$  défini par une position azimutale  $\theta + k\alpha$ , au secteur de référence  $S_0$  défini par la position azimutale  $\theta$ .

$$x_n(r, \theta + k\alpha, z, t) = x_n(r, \theta, z, t) e^{jkn\alpha} \quad (\text{II.29})$$

En utilisant la relation II.28 et en supposant  $N$  pair afin de simplifier le développement, l'équation II.27 devient l'équation II.30 qui exprime le déplacement sur le secteur  $S_k$  en fonction des coefficients réels  $x_0$  et  $x_{N/2}$  et des coefficients complexes  $x_n$  et  $x_{-n}$ . Par soucis de clarté, les grandeurs se situant entre  $\theta = k\alpha$  et  $\theta = (k+1)\alpha$  sont simplement désignées par leur dépendance avec  $S_k$ .

$$x(S_k) = x_0(S_k) + \sum_{n=1}^{N/2-1} [x_n(S_k) + x_{-n}(S_k)] + x_{N/2}(S_k) \quad (\text{II.30})$$

Le déplacement  $x$  étant réel, il est nécessaire de toujours considérer  $x_n$  et  $x_{-n}$  qui sont complexes conjugués afin de retrouver un déplacement réel. De plus, en utilisant la condition de symétrie cyclique (équation II.29), le déplacement du secteur  $S_k$  peut s'exprimer uniquement en fonction des déplacements sur le secteur de référence  $S_0$  pour les différents nombres à diamètre  $n$ . Afin de modéliser l'ensemble de la structure, il est alors possible de considérer un unique secteur, tout en considérant tous les nombres à diamètre.

$$x(S_k) = x_0(S_0) + \sum_{n=1}^{N/2-1} (x_n(S_0)e^{jkn\alpha} + x_{-n}(S_0)e^{-jkn\alpha}) + x_{N/2}(S_0) \cdot (-1)^k \quad (\text{II.31})$$

Cette équation traduit un changement de base permettant de passer des coordonnées physiques  $x$  aux coordonnées cycliques  $x_n$  via la matrice  $G$  définie par l'équation II.32.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\alpha} & e^{-j\alpha} & \dots & e^{j(N/2-1)\alpha} & e^{-j(N/2-1)\alpha} & -1 \\ 1 & e^{j2\alpha} & e^{-j2\alpha} & \dots & e^{j2(N/2-1)\alpha} & e^{-j2(N/2-1)\alpha} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\alpha} & e^{-j(N-1)\alpha} & \dots & e^{j(N-1)(N/2-1)\alpha} & e^{-j(N-1)(N/2-1)\alpha} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Le changement de base illustré équation II.33 ne nécessite aucune autre hypothèse que celle de la symétrie cyclique.

$$\begin{bmatrix} x(S_0) \\ \vdots \\ x(S_{N-1}) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x_0(S_0) \\ x_1(S_0) \\ x_{-1}(S_0) \\ \vdots \\ x_{N/2-1}(S_0) \\ x_{-N/2+1}(S_0) \\ x_{N/2}(S_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

### 1.3.2 Analyse modale sur secteur en symétrie cyclique

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence que l'ensemble des déplacements de la structure peut se déduire des déplacements du secteur de référence pour plusieurs nombres à diamètres. L'objectif ici est donc d'écrire l'équation du mouvement en vibration libre sur le secteur de référence ( $S_0$ ) pour un nombre à diamètre  $n$  en prenant en compte les conditions de symétrie cyclique. Cela permet d'identifier les modes propres de la structure pour chaque diamètre  $n$  considéré.

A l'aide d'une approche élément finis et après séparation des degrés de libertés droite, gauche et internes illustrés figure II.3, l'équation de la dynamique relative au secteur de référence peut

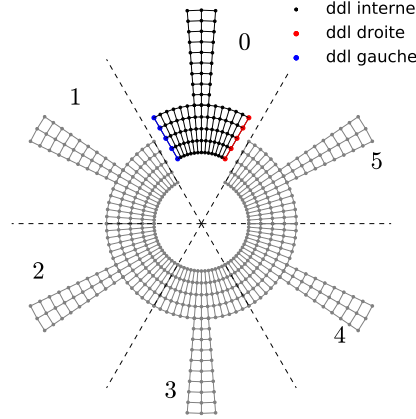


FIGURE II.3 – Séparation des degrés de liberté (ddl) du secteur de référence.

se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{dg} & M_{di} \\ M_{gd} & M_{gg} & M_{gi} \\ M_{id} & M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{n,d} \\ \ddot{x}_{n,g} \\ \ddot{x}_{n,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dg} & K_{di} \\ K_{gd} & K_{gg} & K_{gi} \\ K_{id} & K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n,d} \\ x_{n,g} \\ x_{n,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n,d} \\ F_{n,g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

où les indices  $d$ ,  $g$  et  $i$  représentent les éléments de la frontière droite, gauche et internes et où  $F_{n,d}$  est l'effort du secteur adjacent sur la frontière droite et  $F_{n,g}$  l'effort du secteur adjacent sur la frontière gauche. Ces efforts sont des efforts internes à la structure complète, en effet aucun effort extérieur n'est présent dans le problème en vibration libre. La relation II.29 permet de relier le déplacement aux frontières.

$$x_{n,d} = e^{jn\alpha} x_{n,g} \quad (\text{II.35})$$

De la même façon, les efforts internes peuvent se relier via la condition de symétrie cyclique, on peut donc écrire :

$$F_{n,d} = -e^{jn\alpha} F_{n,g} \quad (\text{II.36})$$

En injectant les deux dernières équations dans le système II.34, il vient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} M_{dd} + M_{gg} + M_{dg}e^{-jn\alpha} + M_{gd}e^{jn\alpha} & M_{di}e^{-jn\alpha} + M_{gi} \\ M_{id}e^{jn\alpha} + M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{n,g} \\ \ddot{x}_{n,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} + K_{gg} + K_{dg}e^{-jn\alpha} + K_{gd}e^{jn\alpha} & K_{di}e^{-jn\alpha} + K_{gi} \\ K_{id}e^{jn\alpha} + K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n,g} \\ x_{n,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Les relations de symétrie cyclique ont permis d'éliminer les efforts internes et les degrés de liberté de la frontière droite. Plus simplement, l'équation s'écrit :

$$M_n \ddot{x}_n + K_n x_n = 0 \quad (\text{II.38})$$

L'analyse modale consiste donc à chercher la base des modes propres  $\Phi_n$ . Les matrices  $M_0$ ,  $K_0$ ,  $M_{N/2}$  et  $K_{N/2} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(N_{S_0}, N_{S_0})$  où  $N_{S_0}$  est le nombre de degrés de liberté sur le secteur  $S_0$ <sup>1</sup>.

1. Ici seuls les degrés de libertés internes et gauche appartiennent à  $S_0$

Le système est donc réel pour ces valeurs de nombre à diamètre particulière ( $n = 0$  et  $n = N/2$ ) et peut donc être résolu directement. Pour  $n = 1, \dots, N/2 - 1$  et pour  $n = -N/2 + 1, \dots, -1$ , les  $M_n$  et  $K_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(N_{S_0}, N_{S_0})$ . Ces matrices sont hermitiennes<sup>2</sup>, ce qui implique qu'il est possible de remplacer ce système par son équivalent réel qui s'obtient en séparant partie réelle et partie imaginaire. Le problème devient donc de taille  $2 \times N_{S_0}$ . La résolution du problème double associé à cette séparation est détaillée en annexe A. Pour les nombres à diamètre positifs, il en résulte des modes complexes doubles, c'est à dire qui possèdent la même fréquence propre. Chaque mode  $\phi_n$  peut être décrit à l'aide d'une partie réelle  $\phi_n^R$ , d'une partie imaginaire  $\phi_n^I$  et d'une fréquence propre  $\omega_n$ . La base complexe  $\Phi_n$  est alors construite en rassemblant les différents modes  $\phi_n$ . Il est ensuite possible de définir la matrice de masse généralisée du secteur, noté  $\mu_n^s$ , et la matrice de raideur généralisée du secteur, noté  $\gamma_n^s$ . Ces grandeurs, exposées équation II.39, sont réelles (cf annexe A).

$$\begin{cases} \mu_n^s &= \Phi_n^H M_n \Phi_n \\ \gamma_n^s &= \Phi_n^H K_n \Phi_n \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Pour les nombres à diamètre négatifs, les relations décrites équation II.40 sont vérifiées (cf annexe A). Il est donc uniquement nécessaire d'effectuer l'analyse modale sur les diamètres positifs afin de pouvoir décrire l'ensemble du problème sur la structure complète.

$$\begin{cases} \Phi_{-n} &= \overline{\Phi_n} \\ \mu_{-n}^s &= \mu_n^s \\ \gamma_{-n}^s &= \gamma_n^s \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Finalement, le déplacement complexe du nombre à diamètre  $n$ , défini sur le secteur de référence  $S_0$ , peut s'exprimer à l'aide de la base de modes propres aussi définie sur le secteur de référence. Dans la mesure où seulement  $n_m$  modes sont retenus, la matrice  $\Phi_n$  est de taille  $N_{S_0} \times n_m$ .

$$x_n = \Phi_n q_n \quad (\text{II.41})$$

où  $q_n$  sont les coordonnées généralisées complexes et sachant que  $\Phi_{-n} = \overline{\Phi_n}$  (cf équation II.40) et que  $x_{-n} = x_n$  (cf équation II.28) il vient facilement :

$$q_{-n} = \overline{q_n} \quad (\text{II.42})$$

### 1.3.3 Base modale sur la structure complète

#### Base modale complexe sur la structure complète

L'analyse modale sur secteur nous a permis de disposer d'un ensemble de bases modales complexes conjuguées connues sur le secteur de référence  $S_0$  pour les nombres à diamètre  $n$  et  $-n$ . Le déplacement d'un secteur ( $S_k$ ) s'obtient donc à l'aide des équations II.31 et II.41 :

$$x(S_k) = \Phi_0(S_0)q_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} \left( \Phi_n(S_0)q_n e^{jkn\alpha} + \Phi_{-n}(S_0)q_{-n} e^{-jkn\alpha} \right) + \Phi_{N/2}(S_0)q_{N/2} \cdot (-1)^k \quad (\text{II.43})$$

Les modes propres de la structure complète se déduisent simplement des modes connus sur le secteur  $S_0$  au moyen de la condition de symétrie cyclique :

$$\Phi_n(S_k) = \Phi_n(S_0) e^{jkn\alpha} \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{II.44})$$

---

2. Elles vérifient  $M_n^H = M_n$  et  $K_n^H = K_n$ , où la notation  $(.)^H$  représente la transposé de la matrice complexe conjuguée, à savoir  $(.)^H = \overline{(\cdot)}^T$

En injectant dans le changement de base lié aux propriétés de la symétrie cyclique, défini équation II.33, la réduction liée à l'analyse modale sur secteur, définie équation II.41, il est possible de définir la base modale globale sur l'ensemble de la structure notée  $\Phi$ .

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_{-1} & \dots & \Phi_{N/2} \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j\alpha} & \Phi_{-1} e^{-j\alpha} & \dots & -\Phi_{N/2} \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j2\alpha} & \Phi_{-1} e^{-j2\alpha} & \dots & \Phi_{N/2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j(N-1)\alpha} & \Phi_{-1} e^{-j(N-1)\alpha} & \dots & \Phi_{N/2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

Chaque colonne correspond à un nombre à diamètre. Chaque ligne correspond à un secteur. Les termes de cette matrice sont complexes (hormis ceux appartenant à la première et à la dernière colonne).

### Base modale réelle sur la structure complète

Jusqu'à présent les développements ont été réalisés dans un formalisme complexe, ce qui peut parfois faciliter les étapes de calcul. Cependant, il est en pratique plus simple de travailler avec un formalisme réel. Ce paragraphe a donc pour but de définir une base réelle équivalente à la base complexe. La première étape consiste à regrouper les déplacements complexes conjugués  $x_n$  et  $x_{-n}$ . En développant les termes exponentiels de l'équation II.31 en partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$x(S_k) = x_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} [(x_n + x_{-n})\cos(kn\alpha) + j(x_n - x_{-n})\sin(kn\alpha)] + x_{N/2} \cdot (-1)^k \quad (\text{II.46})$$

On définit alors le déplacement dans la base réelle pour tout  $n = 1, \dots, N/2 - 1$  par :

$$\begin{cases} x'_n &= x_n + x_{-n} &= 2x_n^R \\ x''_n &= j(x_n - x_{-n}) &= -2x_n^I \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

ainsi que :

$$\begin{cases} x'_0 &= x_0 \\ x'_{N/2} &= x_{N/2} \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Le déplacement sur le secteur  $S_k$  s'exprime alors dans la base réelle :

$$x(S_k) = x'_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} [x'_n \cos(kn\alpha) + x''_n \sin(kn\alpha)] + x'_{N/2} \cdot (-1)^k \quad (\text{II.49})$$

Dans cette équation, toutes les composantes  $x'_n$  et  $x''_n$  sont réelles. En reprenant l'équation II.43 dans la base modale complexe et en séparant partie réelle et partie imaginaire de  $\Phi_n(S_0) = \Phi_n^R(S_0) + j\Phi_n^I(S_0)$ , il vient :

$$x(S_k) = \Phi'_0(S_k)q'_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} (\Phi'_n(S_k)q'_n + \Phi''_n(S_k)q''_n) + \Phi'_{N/2}(S_k)q'_{N/2} \quad (\text{II.50})$$

$$(\text{II.51})$$

avec pour  $n = 1, \dots, N/2 - 1$

$$\begin{cases} \Phi'_0(S_k) &= \Phi_0 & \text{et } q'_0 &= q_0 \\ \Phi'_n(S_k) &= \Phi_n^R \cos(kn\alpha) - \Phi_n^I \sin(kn\alpha) & \text{et } q'_n &= q_n + q_{-n} \\ \Phi''_n(S_k) &= \Phi_n^R \sin(kn\alpha) + \Phi_n^I \cos(kn\alpha) & \text{et } q''_n &= j(q_n - q_{-n}) \\ \Phi'_{N/2}(S_k) &= \Phi_{N/2}(-1)^k & \text{et } q'_{N/2} &= q_{N/2} \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Notons ici que  $\Phi'_n(S_k) = \Re(\Phi_n(S_k))$  et que  $\Phi''_n(S_k) = \Im(\Phi_n(S_k))$ , ce qui peut conduire à les nommer respectivement mode réel et mode imaginaire. Cependant, pour ne pas confondre avec les parties réelles et imaginaire définies sur le secteur de référence, on gardera la notation  $\Phi'_n$  et  $\Phi''_n$ . Plusieurs nombres à diamètre sont représentés figure II.4 pour le premier mode de flexion. On définit alors la base modale réelle sur l'ensemble de la structure notée  $\Phi'$  par :

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \Phi'_0(S_0) & \Phi'_1(S_0) & \Phi''_1(S_0) & \dots & \Phi'_{N/2-1}(S_0) & \Phi''_{N/2-1}(S_0) & \Phi'_{N/2}(S_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi'_0(S_{N-1}) & \Phi'_1(S_{N-1}) & \Phi''_1(S_{N-1}) & \dots & \Phi'_{N/2-1}(S_{N-1}) & \Phi''_{N/2-1}(S_{N-1}) & \Phi'_{N/2}(S_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Le déplacement réel de la structure complète est donc approché par la relation :

$$x(t) = \Phi' q'(t) \quad \text{avec} \quad q' = [q'_0, q'_1, q''_1, \dots, q'_{N/2-1}, q''_{N/2-1}, q'_{N/2}] \quad (\text{II.54})$$

### Changement de base

On peut alors construire la matrice de passage entre la base complexe et la base réelle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} q'_n \\ q''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ jI & -jI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ q_{-n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

On définit donc la matrice de passage  $R_n$  pour  $n = 1, \dots, N/2 - 1$  :

$$R_n = \begin{bmatrix} I & I \\ jI & -jI \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_n^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & -jI \\ I & jI \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

On remarque que :

$$R_n^{-1} = \frac{1}{2} R_n^H \quad (\text{II.57})$$

En considérant l'ensemble des nombres à diamètre, on peut passer de la base complexe définie par le vecteur de coordonnées généralisées  $q$ , à la base réelle définie par le vecteur de coordonnées généralisées  $q'$  en utilisant la matrice de passage  $R$  composée des sous matrices  $R_n$  associées au nombre à diamètre  $n$  :

$$R = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ & I & I & & & & 0 \\ & jI & -jI & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & I & I & \\ & 0 & & & jI & -jI & \\ & & & & & & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

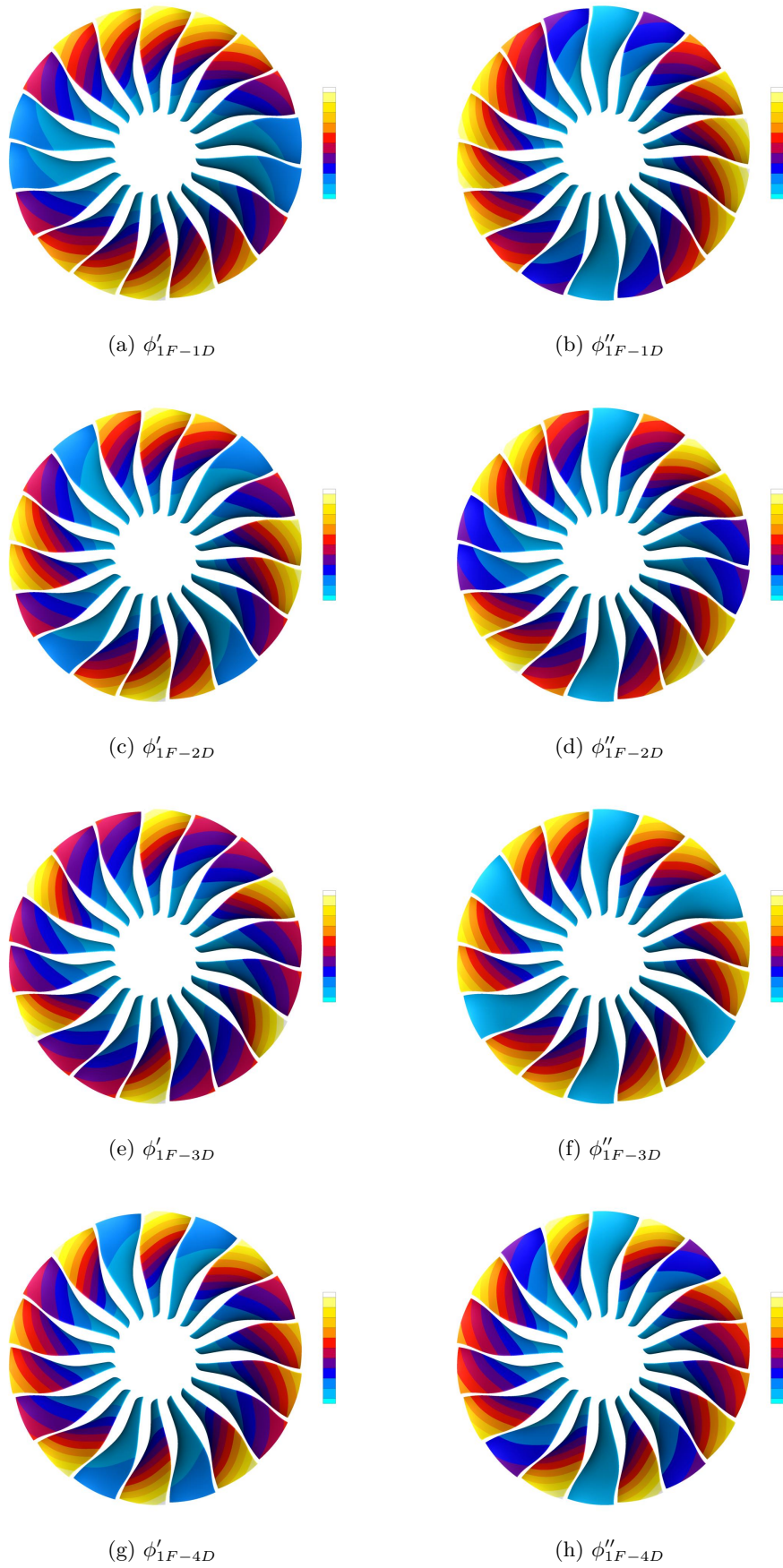


FIGURE II.4 – Norme de la déformée modale des aubes pour la famille du premier mode de flexion (4 diamètres sont représentés : 1, 2, 3 et 4).

On a alors :

$$q' = Rq \quad (\text{II.59})$$

De plus,

$$x = \Phi' q' = \Phi' (Rq) \quad \text{et} \quad x = \Phi q \quad (\text{II.60})$$

Ce qui implique :

$$\Phi = \Phi' R \quad (\text{II.61})$$

### 1.3.4 Équation de la dynamique en symétrie cyclique

Dans cette section, on cherche à exprimer l'équation de la dynamique linéaire de la structure complète (cf équation II.5) dans les bases complexes et réelles décrites précédemment. Les matrices d'une structure à symétrie cyclique peuvent s'écrire sous la forme de matrices circulantes [67] comme c'est illustré pour la matrice de masse équation II.62. Les blocs  $M_0$  correspondent à chaque secteur et les blocs  $M_1$  correspondent au connexion entre les secteurs. Chaque secteur communique uniquement avec ses deux secteurs adjacents c'est pourquoi seuls trois termes apparaissent sur chaque ligne.

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & 0 & \dots & 0 & M_1^T \\ M_1^T & M_0 & M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1^T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & M_1 \\ M_1 & 0 & \dots & 0 & M_1^T & M_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Les blocs  $M_0$  et  $M_1$  peuvent s'exprimer en fonction des degrés de liberté droite, gauche et interne du secteur :

$$M_0 = \begin{bmatrix} M_{gg} + M_{dd} & M_{gi} \\ M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} M_{gd} & 0 \\ M_{id} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

En utilisant l'expression de  $\Phi$  (équation II.45) et celle de la matrice de masse de la structure complète  $M$  (équation II.62), il est possible d'exprimer la matrice de masse réduite dans la base complexe de la structure complète  $\mu = \Phi^H M \Phi$ . Le calcul, fait intervenir une somme d'une suite géométrique qui permet de simplifier un grand nombre de termes. Le terme de la matrice  $\mu$  associée au diamètre  $n$  et  $m$  s'écrit alors :

$$\mu_{n,m} = N \delta_{n,m} \Phi_n^H(S_0) \left[ M_1 e^{jn\alpha} + M_0 + M_1^T e^{-jn\alpha} \right] \Phi_m(S_0) \quad (\text{II.64})$$

où  $\delta_{n,m} = 1$  si  $n = m$  et 0 sinon. On remarque ici qu'en explicitant les matrices  $M_0$  et  $M_1$  à l'aide de l'équation II.63, la matrice  $M_0 + M_1 e^{jn\alpha} + M_1^T e^{-jn\alpha}$  est identique à la matrice de masse définie équation II.37. Il donc possible de faire apparaître  $\mu_n^s$ , la matrice de masse généralisée sur un secteur comme définie dans l'équation II.39. Finalement, on obtient pour la structure complète la matrice de masse généralisée suivante :

$$\mu = N \cdot \text{diag}(\mu_0^s, \mu_1^s, \mu_1^s, \dots, \mu_{N/2-1}^s, \mu_{N/2-1}^s, \mu_{N/2}^s) \quad (\text{II.65})$$

Cette matrice est diagonale réelle de taille  $(N \times n_m, N \times n_m)$ , où l'on rappelle que  $n_m$  est le nombre de modes retenus lors de l'analyse modale d'un secteur. La démarche est identique pour la matrice de raideur et conduit à  $\gamma = \Phi^H K \Phi$  :

$$\gamma = N \cdot \text{diag}(\gamma_0^s, \gamma_1^s, \gamma_1^s, \dots, \gamma_{N/2-1}^s, \gamma_{N/2-1}^s, \gamma_{N/2}^s) \quad (\text{II.66})$$

De plus, on définit la matrice d'amortissement modale par  $\beta = \Phi^H D \Phi$  et les forces aérodynamiques généralisées par  $f_{ag} = \Phi^H F$ . L'équation de la dynamique dans la base complexe s'écrit alors :

$$\mu \ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma q = f_{ag} \quad (\text{II.67})$$

Si l'on considère que la matrice  $\beta$  est diagonale (hypothèse de Basile) et que les efforts aérodynamiques ne dépendent pas du mouvement de l'aube, alors cette équation matricielle peut se décomposer en  $N \times n_m$  équations scalaires indépendantes.

L'équation de dynamique peut aussi s'exprimer dans la base réelle  $\Phi'$  par :

$$\mu' \ddot{q}' + \beta' \dot{q}' + \gamma' q' = f'_{ag} \quad (\text{II.68})$$

La matrice de masse généralisée de la structure complète dans la base réelle  $\mu' = \Phi'^T M \Phi'$ , la matrice de raideur généralisée de la structure complète dans la base réelle  $\gamma' = \Phi'^T K \Phi'$ , la matrice d'amortissement modale dans la base réelle  $\beta' = \Phi'^T D \Phi'$  ainsi que les forces aérodynamiques généralisées  $f'_{ag} = \Phi'^T F$  peuvent s'obtenir en utilisant la relation II.61 qui fait intervenir la matrice de passage définie par l'équation II.58 :

$$\mu' = R^{-H} \mu R^{-1} \quad (\text{II.69})$$

$$\beta' = R^{-H} \beta R^{-1} \quad (\text{II.70})$$

$$\gamma' = R^{-H} \gamma R^{-1} \quad (\text{II.71})$$

$$f'_{ag} = R^{-H} f_{ag} \quad (\text{II.72})$$

Ce qui donne :

$$\mu' = \frac{N}{2} \text{diag}(2\mu_0^s, \mu_1^s, \mu_1^s, \mu_2^s, \mu_2^s, \dots, 2\mu_{N/2}^s) \quad (\text{II.73})$$

$$\gamma' = \frac{N}{2} \text{diag}(2\gamma_0^s, \gamma_1^s, \gamma_1^s, \gamma_2^s, \gamma_2^s, \dots, 2\gamma_{N/2}^s) \quad (\text{II.74})$$

### 1.3.5 Forces aérodynamiques généralisées dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu

On se place ici dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu. L'aube parcourt cette distorsion à une vitesse  $\omega t$ . Les efforts aérodynamiques rencontrés par l'aube de référence sont donc périodiques et peuvent donc être décomposées en série de Fourier complexe<sup>3</sup>

$$F(S_0) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F_h e^{jh\omega t} \quad (\text{II.75})$$

---

3. Remarquons que cela n'est plus valable si des instabilités aérodynamiques comme le décollement tournant apparaissent. Ces phénomènes sont asynchrones et ne dépendent donc pas de la vitesse de rotation du fan.

Si l'on considère que la numérotation des secteurs est dans le sens de la rotation, alors les efforts du secteur  $S_k$  sont déphasés de  $k\alpha = k\frac{2\pi}{N}$  où  $N$  est le nombre de secteur. Les efforts aérodynamiques du secteur  $S_k$  s'écrivent donc de la façon suivante :

$$F(S_k) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F_h e^{jh(\omega t - k\alpha)} \quad (\text{II.76})$$

Les forces aérodynamiques généralisées dans la base complexe s'obtiennent en projetant les efforts aérodynamiques sur la base  $\Phi$ . Le vecteur de force aérodynamique généralisée s'écrit alors :

$$f_{ag} = \Phi^H F = \begin{bmatrix} f_{ag,0} \\ \vdots \\ f_{ag,n} \\ f_{ag,-n} \\ \vdots \\ f_{ag,N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_0^H(S_k) F(S_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_n^H(S_k) F(S_k) \\ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_{-n}^H(S_k) F(S_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_{N/2}^H(S_k) F(S_k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

A l'aide de la relation II.44 qui relie le mode sur le secteur  $S_k$  au mode sur le secteur de référence  $S_0$  ainsi que de la définition de l'effort sur le secteur  $S_k$  équation II.76, le terme associé au diamètre  $n$  s'écrit :

$$f_{ag,n} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_n^H(S_0) e^{-jk n \alpha} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F_h e^{jh(\omega t - k\alpha)} \quad (\text{II.78})$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^H(S_0) F_h e^{jh\omega t} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha(n+h)} \quad (\text{II.79})$$

$$(\text{II.80})$$

La somme  $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha(n+h)}$  vaut  $N$  lorsque  $n+h = pN$  avec  $p$  un entier naturel. Sinon, c'est la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\alpha(n+h)} = \frac{1 - e^{jN\alpha(n+h)}}{1 - e^{j\alpha(n+h)}} \quad (\text{II.81})$$

Etant donnée que  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ , cette somme est nulle :

$$\frac{1 - e^{j2\pi(n+h)}}{1 - e^{j\alpha(n+h)}} = 0 \quad (\text{II.82})$$

Finalement, les seuls termes  $h$  restants sont ceux qui peuvent s'exprimer par  $h = pN - n$ . Le terme associé au diamètre  $n$  est alors :

$$f_{ag,n} = N \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^H(S_0) F_{pN-n} e^{j(pN-n)\omega t} \quad (\text{II.83})$$

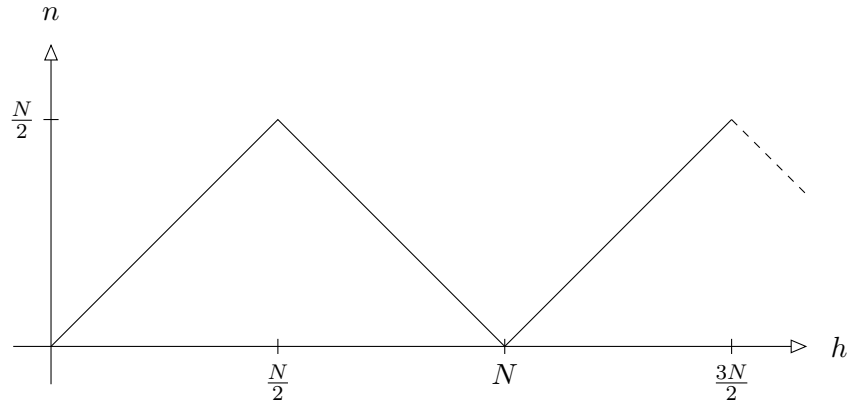


FIGURE II.5 – Diagramme ZigZag ( $n$  : nombre de diamètre,  $h$  : harmonique d'excitation).

De la même manière, le terme associé au diamètre  $-n$  devient :

$$f_{ag,-n} = N \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Phi_{-n}^H(S_0) F_{pN+n} e^{j(pN+n)\omega t} \quad (\text{II.84})$$

Les composantes associées à  $n$  et  $-n$  étant complexes conjuguées il est nécessaire de les considérer ensembles afin d'obtenir un déplacement réel. Finalement, dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu, le diamètre  $n$  ne peut être excité que par certaines composantes harmoniques respectant les relations  $h = pN + n$  ou  $h = pN - n$ . Il est courant de tracer la relation entre l'harmonique de l'excitation et les nombres à diamètre excités dans un diagramme ZigZag [94] illustré figure II.5.

### 1.3.6 Intérêts et limites

L'approche modale en symétrie cyclique comporte plusieurs intérêts. Tout d'abord, elle permet de réduire fortement le coût de calcul du comportement dynamique de la roue aubagée. L'analyse modale directe sur l'ensemble de la roue peut se révéler très chère compte tenu de la taille des maillages nécessaire à la bonne description des configurations industrielles. L'approche en symétrie cyclique nécessite d'effectuer plusieurs analyses modales (une par diamètre  $n$  allant de 0 à  $N/2$ ), cependant ces analyses modales sont beaucoup moins chères dans la mesure où elles s'effectuent sur le secteur de référence seulement et peuvent être réalisées en parallèle. Le second avantage de l'approche en symétrie cyclique est qu'elle permet de séparer les problèmes en fonction du nombre à diamètre. En effet, nous avons vu que les différents harmoniques d'une excitation périodique n'excitent qu'un unique diamètre.

En pratique, il existe toujours de petites variations géométriques (angle d'attaque, épaisseur, longueur de corde...) et/ou matériaux (module de Young, masse volumique, anisotropie...) dues aux processus de fabrication. Ce désaccordage peut engendrer des modes et une réponse forcée différents de ceux prévus dans le cas parfaitement accordé [71]. Un calcul de la structure complète est alors nécessaire. Les dissymétries peuvent entraîner une augmentation des niveaux vibratoires. L'importance de ces effets dépend principalement du taux de désaccordage qui peut être défini comme l'écart-type des fréquences propres des aubes. La figure II.6 représente l'évolution classique de l'amplification des réponses vibratoires en fonction du taux de désaccordage. Le désaccordage est difficilement contrôlable, cependant il peut être intentionnellement accentué

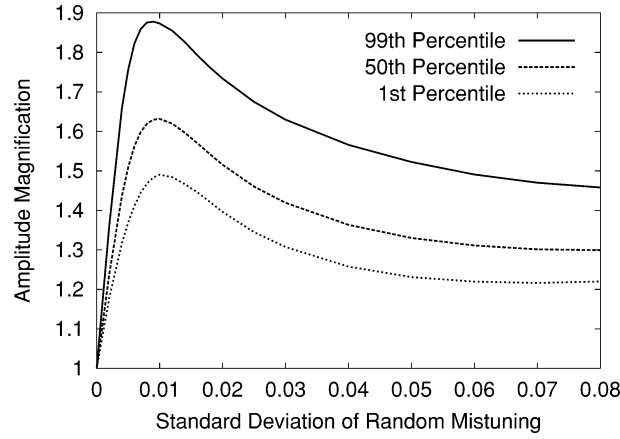


FIGURE II.6 – Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage [15].

afin de se retrouver volontairement dans la partie droite de la courbe figure II.6 afin de limiter son facteur d'amplification. On parle alors de désaccordage intentionnel [80].

Lorsque des non-linéarités apparaissent, la symétrie peut être brisée. Le problème complet doit alors être résolu. Cependant, il existe des non-linéarités possédant des propriétés symétriques comme le contact en pied d'aube, qui est identique d'un secteur à l'autre. La modélisation en symétrie cyclique est donc possible dans ces cas [16, 74] même si elle ne permet pas de retranscrire les phénomènes de localisation pouvant intervenir.

## 1.4 Non-linéarité en pied d'aube

### 1.4.1 Modélisation du contact

Le contact en pied d'aube est assuré par la force centrifuge qui vient coller le pied de l'aube à l'alvéole du disque. Les deux surfaces de contact sont appelées les portées de l'aube. La figure II.7 illustre cette configuration. Les excitations auxquelles est soumise l'aube provoquent des efforts tangentiels et normaux oscillants au niveau des zones de contact, entraînant des glissements alternés. Les non-linéarités associées au contact en pied d'aube se séparent en deux catégories : les non-linéarités de type contact, et celles de type frottement.

#### Loi de contact

Le chargement centrifuge de l'aube peut provoquer une ouverture de l'alvéole du disque qui peut entraîner une perte de contact. De plus, la vibration de l'aube peut aussi provoquer une perte intermittente de contact. Les éléments de contact doivent alors avoir des degrés de libertés normaux en déplacement. Une loi de contact décrit la relation entre les efforts normaux  $F_N$  et le déplacement relatif normal  $x_n$  des zones considérées. La figure II.8 illustre trois de ces lois. La loi de contact unilatéral stipule que l'effort normal apparaît dès lors qu'il y a contact. La condition de non-pénétration est assurée. Cette loi est donnée par :

$$x_N \leq 0, \quad F_N \geq 0, \quad x_N F_N = 0 \quad (\text{II.85})$$

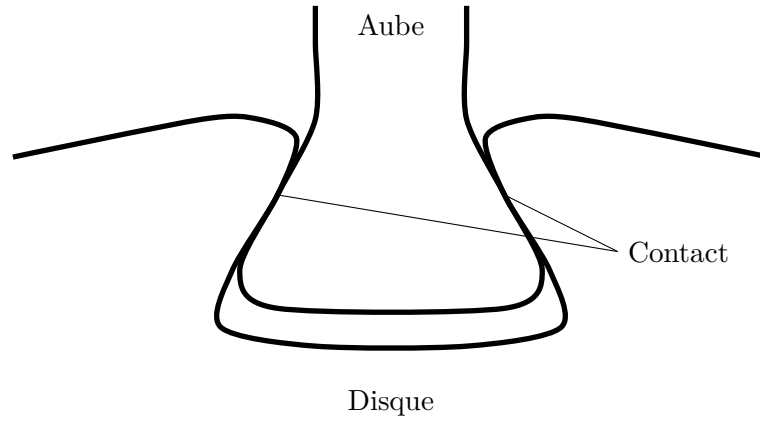


FIGURE II.7 – Schéma d'un pied d'aube.

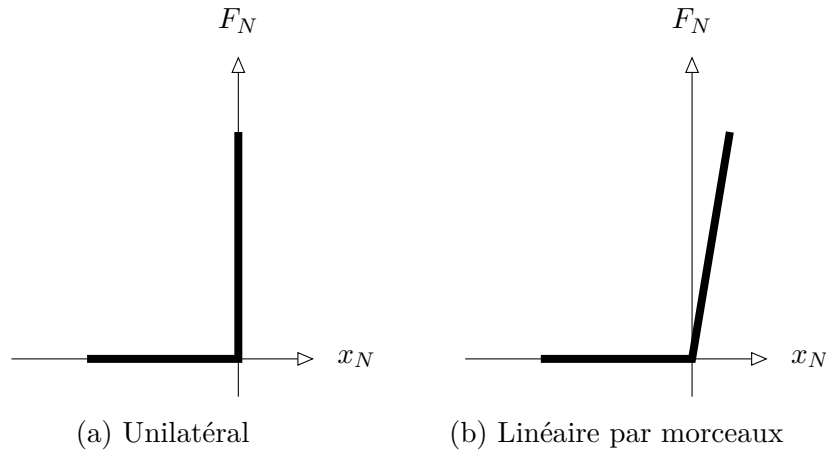


FIGURE II.8 – Lois de contact.

Elle est difficile à traiter car elle est particulièrement non régulière. Afin d'adoucir la loi de contact unilatérale, il est possible d'utiliser une loi linéaire par morceaux. La pente représente une raideur de contact normale. La condition de non pénétration n'est alors plus respectée. Cette loi a pour avantage d'établir une expression directe entre effort normal et déplacement relatif. Elle est par exemple utilisée dans [70].

### Loi de frottement

Le frottement en dynamique est un phénomène complexe qui fait intervenir de nombreux facteurs : rugosité des matériaux, usure, inertie, présence de lubrifiant, effets thermiques... [66]. En pratique, il est très difficile de prendre tous ces phénomènes en compte et le frottement est souvent modélisé par des lois plus simples. La loi de frottement la plus utilisée est la loi de Coulomb. Elle relie l'effort tangentiel  $F_T$  et la valeur de la vitesse tangentielle relative  $u_T$  en fonction de l'effort normal  $F_N$  et du coefficient de frottement  $C_f$  :

$$\begin{cases} u_T = 0 & \text{si } |F_T| < C_f |F_N| \\ F_T = -C_f |F_N| \frac{u_T}{|u_T|} & \text{si } |u_T| > 0 \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

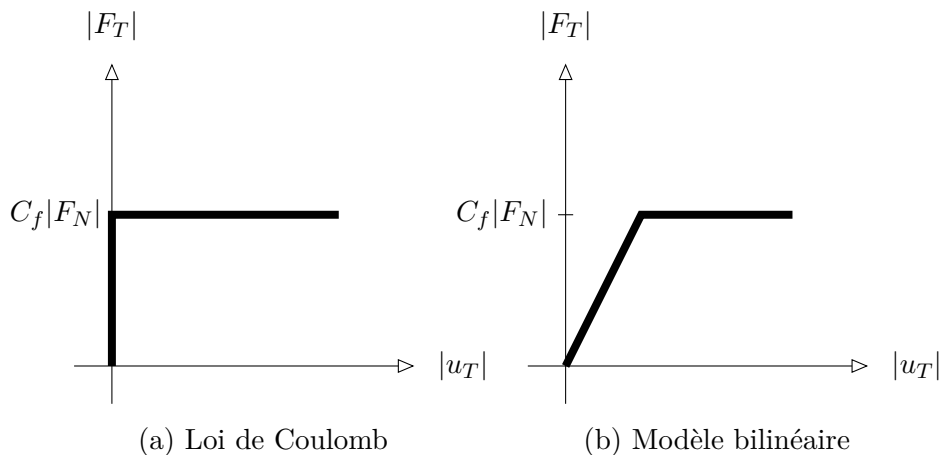


FIGURE II.9 – Lois de frottement.

Le déplacement est autorisé uniquement quand l'effort tangentiel atteint la valeur limite de Coulomb :  $C_f|F_N|$ . La relation entre vitesse et effort de la loi de Coulomb est illustrée figure II.9a. Elle est fortement non-régulière ce qui peut la rendre difficile à traiter. Dans un problème de frottement il est possible de différencier deux régimes de glissement. Le premier est le glissement total (appelé macro-glissement) pour lequel toute la zone de contact est en glissement. Le second est le micro-glissement dans lequel une partie du contact est adhérente et l'autre est glissante. Ce comportement n'est pas traduit par la loi de Coulomb globale mais peut être traduit si plusieurs éléments de contact sont régis par la loi de Coulomb (certains peuvent autoriser le déplacement alors que d'autres non). L'introduction d'une raideur tangentielle est possible afin d'autoriser un déplacement pour un élément de contact lorsque l'effort tangentiel est inférieur à l'effort limite de Coulomb. Ce modèle est appelé modèle bilinéaire et est illustré figure II.9b. Il est utilisé dans l'étude de Petrov [70]. Notons que l'introduction de la raideur tangentielle a permis de lever la singularité en 0. D'autres modèles existent : on peut notamment citer le modèle de Iwan [39] qui consiste à assembler différentes raideurs en série ou en parallèle ou encore le modèle de Bouc-Wen qui est régi par une équation différentielle [47].

Il est aussi courant de distinguer coefficient de frottement statique et coefficient de frottement dynamique dans un problème de frottement [66]. Cette différence est à l'origine du mouvement *stick-slip* qui est caractérisé par une alternance entre phases de blocage et de glissement. Afin de simplifier les études, ces deux coefficients sont généralement considérés égaux.

Le contact avec frottement introduit donc des inégalités (loi de contact unilatéral et loi de Coulomb). L'équation de la dynamique s'écrit alors comme un problème avec contraintes qu'il est possible de résoudre à l'aide de méthode d'optimisation en transformant les inégalités en égalités. Les méthodes les plus courantes sont les multiplicateurs de Lagrange, les méthodes de pénalité et les Lagrangiens augmentés. Charleux [16] décrit exhaustivement ces trois types de méthodes dans un contexte de contact avec frottement au sein du second chapitre de sa thèse.

## Équation de la dynamique non-linéaire

La présence de phénomène non-linéaire tel que le contact et le frottement entraîne l'apparition d'un terme d'effort non-linéaire  $F_{nl}$  dans l'équation de la dynamique. L'équation II.5 devient celle décrite équation II.87.

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx + F_{nl}(x, \dot{x}) = F \quad (\text{II.87})$$

L'approche classique de résolution d'un système d'équations différentielles dépendant du temps est l'intégration temporelle. Elle consiste à vérifier l'équation de la dynamique en plusieurs instants consécutifs [17, 35]. Ces méthodes relativement simples d'utilisation sont capables de traiter tout type de problèmes. Cependant, la recherche de solutions périodiques à l'aide d'un intégrateur temporel peut s'avérer prohibitif en termes de temps de calcul, notamment à cause du calcul d'une phase transitoire. Afin de s'affranchir de cette phase transitoire, il existe des méthodes de tir qui consistent à chercher les conditions initiales se situant sur la solution périodique. Demailly [22] détaille cette approche pour l'étude de la dynamique d'un rotor. Il existe cependant des méthodes fréquentielles plus rapides et qui s'affranchissent des limitations des méthodes temporelles, notamment en termes de stabilité. Nous nous concentrerons sur ces méthodes dans cette section.

### 1.4.2 Méthode de balance harmonique

La méthode de balance harmonique [72] consiste à chercher la solution comme une somme d'une série trigonométrique tronquée à l'ordre  $N_h$  :

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.88})$$

où  $N_h$  est le nombre d'harmoniques conservées dans la solution et où  $a_k$  et  $b_k$  désignent les coefficients de Fourier de la série. En injectant l'expression de  $x(t)$  dans l'équation II.87, on obtient le résidu  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \approx & \sum_{k=0}^{N_h} \left[ \left( K - (k\omega)^2 M \right) a_k + (k\omega D) b_k \right] \cos(k\omega t) \\ & + \sum_{k=0}^{N_h} \left[ \left( K - (k\omega)^2 M \right) b_k - (k\omega D) a_k \right] \sin(k\omega t) + F_{nl}(a_k, b_k) - F \end{aligned} \quad (\text{II.89})$$

Si l'on retient une infinité d'harmonique, alors le résidu  $\mathcal{R}$  sera nul. Cependant, il est impossible de traiter des sommes infinies d'un point de vue numérique. On se restreint donc ici aux  $N_h$  premiers harmoniques. Il est maintenant possible de supprimer la dépendance au temps du système en le projetant sur la base  $T$  des fonctions trigonométriques :

$$T = [1 \quad \dots \quad \cos(k\omega t) \quad \sin(k\omega t) \quad \dots \quad \cos(N_h\omega t) \quad \sin(N_h\omega t)]^T \quad (\text{II.90})$$

La projection est effectuée à l'aide du produit scalaire suivant :

$$(f, g) = \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{II.91})$$

Cette étape est communément appelée procédure de Galerkin [72]. Il en résulte un système algébrique non-linéaire :

$$H(x_h) = Zx_h + F_{nl,h}(x_h) - F_h = 0 \quad (\text{II.92})$$

où  $Z$  est la matrice de rigidité dynamique composée des matrices structurales du modèle,  $x_h$  le vecteur constitué des coefficients harmoniques,  $F_{nl,h}$  le vecteur des efforts non-linéaire et  $F_h$  le vecteur des efforts extérieurs projetés sur la base harmonique. Les nouvelles inconnues sont les coefficients harmoniques se trouvant dans le vecteur  $x_h$  :

$$x_h = [a_0^T \quad a_1^T \quad b_1^T \quad \dots \quad b_{N_h}^T]^T \quad (\text{II.93})$$

La taille de ce vecteur est  $(2N_h + 1)n$  avec  $n$  le nombre de degrés de liberté du système (il y a  $n$  coefficients dans chaque vecteur  $a_k$  ou  $b_k$ ). La matrice  $Z$  est diagonale par bloc et s'exprime de la façon suivante :

$$Z = \text{diag} \left( K, \begin{bmatrix} K - \omega^2 M & \omega D \\ -\omega D & K - \omega^2 M \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} K - (N_h \omega)^2 M & N_h \omega D \\ -N_h \omega D & K - (N_h \omega)^2 M \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.94})$$

Lorsque l'excitation extérieure  $F$  est synchrone le calcul des coefficients harmoniques de  $F_h$  est immédiat. Par contre, dans un problème de frottement, il n'existe pas d'expression analytique permettant de traiter les non-linéarités dans le domaine fréquentiel. Il est alors nécessaire de repasser dans le domaine temporel afin d'évaluer les coefficients de  $F_{nl,h}$  (cette étape est explicitée au paragraphe suivant). La force non-linéaire s'appliquant uniquement aux noeuds de contact, il est possible de diminuer la taille du problème à  $(2N_h + 1)n_{nl}$  [64], où  $n_{nl}$  représente le nombre de degré de liberté sur les éléments de contact. De plus, en formulant le problème à l'aide du déplacement relatif, la taille peut être divisée par 2. Et enfin, certains noeuds resteront en contact dans toutes les configurations étudiées, il est donc possible de condenser leur degré de liberté normal. Ces étapes sont explicitées dans [65] et [46]. La suite consiste à résoudre itérativement le système II.92. On parle alors de méthode de balance harmonique incrémentale (IHBM). Cette méthode fait appel à une méthode de Newton-Raphson. Le schéma itératif se traduit par :

$$x_h^{i+1} = x_h^i + \delta x_h \quad (\text{II.95})$$

La solution  $x_h^{i+1}$  à l'itération  $i + 1$  est la somme de la solution  $x_h^i$  à l'itération  $i$  et d'un terme correctif  $\delta x_h$ . En introduisant cette relation dans l'équation II.92, puis en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1, il est possible d'exprimer le terme correctif en fonction de la matrice jacobienne des termes non-linéaires  $J_{x_h} F_{nl,h}$ , de la matrice de rigidité dynamique  $Z$ , et de la position courante  $x_h^i$  [33] :

$$\delta x_h = -(Z + J_{x_h} F_{nl,h}(x_h^i))^{-1} H(x_h^i) \quad (\text{II.96})$$

La valeur initiale est cruciale pour la convergence du schéma itératif. Le processus s'arrête lorsque le critère de convergence est atteint. Celui-ci est défini sur la norme infinie du résidu de l'équation de la dynamique  $H(x_h)$ .

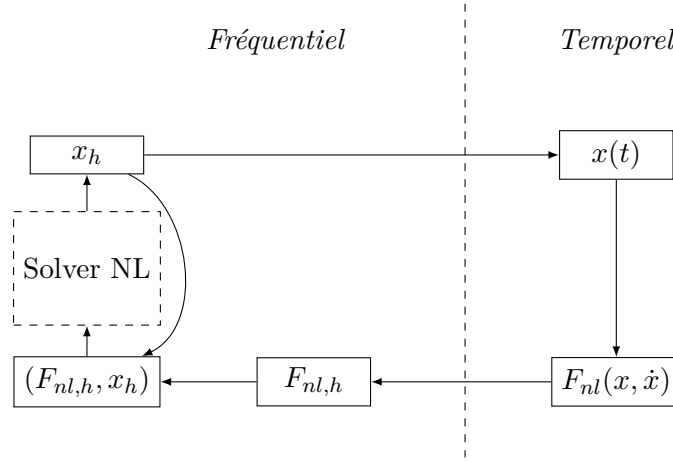


FIGURE II.10 – Principe de la méthode AFT.

### 1.4.3 Alternating Frequency/Time

La méthode de balance harmonique nécessite la connaissance des efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel. Dans le cas de contact en pied d'aube aucune expression analytique n'existe. Cependant les non-linéarités sont explicitement données dans le domaine temporel cf 1.4.1. L'idée de la méthode AFT (*Alternating Frequency/Time*) est de passer dans le domaine temporel afin d'évaluer les non-linéarités avant de revenir dans le domaine fréquentiel pour résoudre le schéma itératif comme l'illustre la figure II.10. Griffin [32] a formalisé cette méthode. La solution du problème étant supposée harmonique, il en sera de même pour la force non-linéaire  $F_{nl}$  :

$$F_{nl}(x, \dot{x}) \approx \sum_{k=0}^{N_h} (c_k \cos(k\omega t) + d_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.97})$$

Le vecteur harmonique des forces non-linéaire est alors fournis par :

$$F_{nl,h} = [c_0^T \quad c_1^T \quad d_1^T \quad \dots \quad d_{N_h}^T]^T \quad (\text{II.98})$$

En partant d'une estimation du vecteur des coefficients harmoniques  $x_h$ , il est possible d'estimer le déplacement  $x(t)$  sur une période dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier inverse. Les efforts non-linéaires sont évalués dans le domaine temporel sur cette même période. Et enfin, une transformée de Fourier est réalisée sur le signal temporel des efforts non-linéaires pour obtenir les coefficients Fourier non-linéaires. Le système non-linéaire II.92 peut alors être résolu itérativement à l'aide d'un solveur non-linéaire.

### 1.4.4 La méthode DLFT

La méthode Dynamic Lagrangian mixed Frequency-Time (DLFT) est une méthode fréquentielle qui fait intervenir une procédure AFT spécifique. Elle a été développée par Nacivet [65] en se basant sur l'approche de Laursen et Simo [45]. Cette méthode est inspirée des stratégies de problèmes contraints par multiplicateurs de Lagrange. Son principal avantage est qu'elle permet de s'affranchir de la régularisation des lois de contact unilatéral et des loi de contact. Le détail

des étapes de prédiction-corrections que la méthode fait intervenir est présenté dans la thèse de Charleux [16]. Ces travaux de recherches ont permis de valider cette approche et montré son efficacité en terme de coût de calcul.

### Synthèse sur la modélisation de la structure

En conclusion, nous disposons de différentes méthodes nous permettant de réduire fortement la taille de nos modèles éléments finis afin de modéliser la réponse forcée d'une roue aubagée. D'abord, la symétrie cyclique de notre structure nous permet d'étudier un unique secteur afin d'obtenir le comportement dynamique de l'ensemble de la structure. De plus, l'approche modale permet de réduire le comportement dynamique à quelques degrés de liberté. Et enfin, nous avons aussi détaillé la réduction de Craig et Bampton qui nous permet aussi de réduire la taille de nos modèles éléments finis tout en conservant des degrés de liberté dans le domaine physique. Cette caractéristique s'adapte parfaitement au problème non-linéaire de contact et de frottement qui peut apparaître entre l'aube et le disque dans la mesure où les lois de contact et de frottement s'expriment facilement dans le domaine physique. De plus, nous disposons d'une approche qui nous permet d'estimer rapidement la solution périodique d'un système non-linéaire comportant des non-linéarités de contacts. Ces techniques pourront être mises à profit dans le cas du problème de dynamique non-linéaire aubes/disque.

## 2 Modélisation aérodynamique

La simulation aérodynamique, effectué dans ces travaux de thèse, a été réalisée à l'aide du code de calcul elsA, détenu conjointement par l'Onera, Safran et Airbus. Ce code a été développé afin de traiter des écoulements compressibles turbulents tri-dimensionnels complexes. Il a été validé sur de nombreuses applications comprenant des écoulement internes et externes. Cette section a pour objectif de décrire les équations de base, les hypothèses de résolution et la méthode numérique choisies dans le cadre de ces recherches. Cette description est largement basée sur le manuel d'elsA qui reprend les développements que l'on trouve classiquement dans les ouvrages de modélisation numérique pour la mécanique des fluides comme par exemple dans celui de Hirsch [36].

### 2.1 Équations de la mécanique des fluides

Les équations qui régissent la mécanique des fluides sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes. La loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi de conservation de l'énergie sont exprimées dans cette formulation respectivement dans les équations II.99, II.100 et II.101.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (\text{II.99})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U + pI - \tau) = 0 \quad (\text{II.100})$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho EU + pU - \tau U + q) = 0 \quad (\text{II.101})$$

Dans ces équations,  $\rho$  représente la masse volumique,  $U$  le vecteur vitesse dans le repère absolu,  $E$  l'énergie totale,  $p$  la pression statique,  $\tau$  le tenseur de contraintes visqueuses,  $q$  le vecteur

de flux de chaleur lié à la conductivité thermique. Afin de fermer le problème, il est nécessaire d'introduire la loi de comportement d'un fluide newtonien présentée équation II.102, la loi de Fourier présentée équation II.103 et la loi des gaz parfait présentée équation II.104.

$$\tau = \mu \left[ -\frac{2}{3} \nabla \cdot (U) I + 2D \right] \quad (\text{II.102})$$

$$q = -K_T \nabla T \quad (\text{II.103})$$

$$\frac{p}{\rho} = r_{gas} T \quad (\text{II.104})$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide,  $D$  le tenseur du taux de déformation,  $K_T$  le coefficient de conductivité thermique du fluide,  $T$  la température et  $r_{gas}$  la constante universelle des gaz parfaits. Il est possible de résoudre directement ces équations, cependant il est nécessaire de modéliser toutes échelles de la turbulence. Pour des problèmes pratiques d'intérêt industriel, cela nécessite des maillages de très grandes tailles entraînant un coût de calcul prohibitif. Il est alors plus facile de résoudre ces équations sous leur forme moyennée : c'est la modélisation RANS.

## 2.2 Modélisation RANS

La modélisation RANS (pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) passe par une approche statistique qui vise à modéliser les basses échelles. Un champ  $r$  est décomposé en une partie moyenne  $\bar{r}$  et une partie fluctuante  $r'$  ou décomposé en une partie moyenne massique (moyenne de Favre)  $\bar{\bar{r}}$  et une partie fluctuante massique  $r''$  comme l'illustre l'équation II.105.

$$r = \bar{r} + r' = \bar{\bar{r}} + r'' \quad (\text{II.105})$$

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t) dt \quad (\text{II.106})$$

$$\bar{\bar{r}} = \frac{\bar{\rho r}}{\bar{r}} \quad (\text{II.107})$$

En utilisant cette décomposition puis après quelques simplifications, les lois de conservation II.99, II.100 et II.101 deviennent les équations RANS. Elles sont explicitées équations II.108, II.109 et II.110. Dans ces équations, les notations ont été simplifiées : les grandeurs  $\rho$ ,  $p$ ,  $\tau$  et  $q$  sont des valeurs moyennes définies par l'équation II.106 et les grandeurs  $U$  et  $E$  sont des valeurs moyennes massiques définies par l'équation II.107.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (\text{II.108})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U + pI - \tau - \tau_r) = 0 \quad (\text{II.109})$$

$$\frac{\partial \rho(E + k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(E + k)U + pU - (\tau + \tau_r)U + q + q_t) = 0 \quad (\text{II.110})$$

Il a été retenu dans ces équations trois termes de corrélations doubles résultant de l'opération de moyenne : le tenseur de Reynolds  $\tau_r = -\overline{\rho U'' \otimes U''}$ , l'énergie cinétique turbulente  $k = 1/2 \overline{\rho U''^2} / \bar{\rho}$  et le flux de chaleur de diffusion turbulente  $q_t = \overline{\rho U'' h''}$  où  $h$  représente l'enthalpie. Afin de fermer le problème, l'hypothèse de Boussinesq est employée dans le but de modéliser le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur de diffusion turbulente à l'aide de lois similaires à celles

définissant le tenseur de contrainte et le flux de chaleur. Ces lois sont exposées équations II.111 et II.112.

$$\tau_r = -\frac{2}{3}(\rho k + \mu_t \nabla \cdot U)I + 2\mu_t D \quad (\text{II.111})$$

$$q_t = -\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \nabla T \quad (\text{II.112})$$

Où  $\mu_t$  est la viscosité turbulente et  $Pr_t$  le nombre de Prandtl turbulent. A l'aide de l'hypothèse de Boussinesq la modélisation de la turbulence est réduite à la modélisation des trois termes  $k$ ,  $\mu_t$  et  $Pr_t$ . Il est ensuite possible d'appliquer le changement de variable exposé équation II.113 afin de retrouver le même formalisme que celui obtenu pour les équations de Navier-Stokes instantanées (équations II.99, II.100 et II.101).

$$\begin{cases} E^* &= E + k \\ p^* &= p + 2/3 \rho k \\ \tau^* &= \tau + \tau_r + \frac{2}{3} \rho k I = (1 + \frac{\mu_t}{\mu}) \tau \\ q_t^* &= q + q_t = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr_t}{Pr_t}\right) q \end{cases} \quad (\text{II.113})$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (\text{II.114})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U + p^* I - \tau^*) = 0 \quad (\text{II.115})$$

$$\frac{\partial \rho E^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E^* U + p^* U - \tau^* U + q^*) = 0 \quad (\text{II.116})$$

Dans des écoulements avec un niveau de turbulence faible, les termes  $E^*$  et  $p^*$  sont très proches de  $E$  et  $p$ . De plus, en supposant  $Pr_t$  constant, le seul terme à modéliser afin de fermer complètement le système est alors  $\mu_t$ . Cette étape est réalisée à l'aide de modèle de turbulence.

### 2.3 Modèle de turbulence : k- $\omega$ Menter SST

Il existe un grand nombre de modèles de turbulence. Au-delà des modèles algébriques (modèle de Michel, modèle de Baldwin-Lomax [6]), les modèles couramment utilisés mettent en oeuvre des équations de transport supplémentaires liés à la turbulence. Il est notamment possible de citer le modèle à une équation de Spalart [83] ou encore les modèles à deux équations  $k - \epsilon$  [44],  $k - l$  [82],  $k - kl$  [81]. Ce paragraphe se contente de décrire le modèle  $k - \omega$  de Menter [58] avec la correction SST (*Shear Stress Transport*) dans la mesure où c'est l'unique modèle utilisé dans ces travaux de thèse. Le modèle de  $k - \omega$  a premièrement été introduit par Wilcox [93]. La viscosité turbulente est définie par le rapport entre l'énergie cinétique turbulente  $k$  et le taux de dissipation  $\omega$  comme l'équation II.117 l'illustre.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (\text{II.117})$$

C'est un modèle à deux équations de transport : équation II.118 pour  $k$  et équation II.119 pour  $\omega$ . Ces équations font intervenir un terme de diffusion  $Diff$ , un terme de production  $P$  et un terme de dissipation  $Diss$  dont les définitions sont présentées équation II.120. Les grandeurs  $\sigma$ ,  $\beta_\omega$ ,  $\beta_k$  et  $\gamma$  sont des constantes de fermeture.

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k U) = Diff_k + P_k + Diss_k \quad (\text{II.118})$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega U) = Diff_\omega + P_\omega + Diss_\omega \quad (\text{II.119})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Diff_k = \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma}) \nabla k] \\ Diff_\omega = \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma}) \nabla \omega] \\ P_k = \tau : \nabla U \\ P_\omega = \frac{\gamma_\omega}{k} \tau : \nabla U \\ Diss_k = -\beta_k \rho k \omega \\ Diss_\omega = -\beta_\omega \rho \omega^2 + C_D \end{array} \right. \quad (II.120)$$

La constante  $C_D$  a été ajoutée par Menter [58] au modèle original de Wilcox afin de réduire la dépendance du modèle à la valeur de  $\omega$  imposée à l'infini. Cette constante fait intervenir une fonction  $F_1$  qui permet de se ramener au comportement du modèle de  $k - \epsilon$  de Launder-Sharma [44] dans les régions supérieures de la couche limite. L'expression de cette fonction est complexe et fait notamment intervenir la distance à la paroi. L'expression de  $C_D$  est détaillée équation II.121 et fait intervenir les constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\sigma_\omega$ .

$$C_D = 2 \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega + (1 - F_1) C_1 + F_1 C_2 \quad (II.121)$$

Dans le cas de couche limite en présence de gradient de pression adverse, le modèle a tendance à prédire trop tard l'apparition du décollement. Pour remédier à cela, Menter [58] introduit la correction *Shear Stress Transport* (SST). Elle consiste à limiter la valeur de la viscosité turbulente en faisant intervenir une fonction  $F_2$  qui dépend entre autres de la distance à la paroi.

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(\omega a_1, F_2 \Omega)} \quad (II.122)$$

Ici,  $a_1$  est une constante et  $\Omega$  le module de la vorticité.

## 2.4 Méthodes des volumes finis en formulation ALE

Dans un cadre aéroélastique, la géométrie peut se déformer au cours du temps. La formulation *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) est particulièrement bien adaptée pour prendre en compte le mouvement de la géométrie. Dans une approche de type volumes finis, le domaine d'étude est discr  t  s   en plusieurs volumes élémentaires que l'on appelle cellule. L'ensemble de ces cellules forme le maillage. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de conservations RANS II.114, II.115 et II.116 sur chaque cellule de volume  $V_c$  du maillage. L'  quation II.123 définit le vecteur des variables conservatives  $W$  et le vecteur des flux  $\mathcal{F}(W)$ .

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{bmatrix}, \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U \otimes U + pI - \tau \\ \rho EU + pU - \tau U + q \end{bmatrix} \quad (II.123)$$

A l'aide de ces vecteurs, les équations de conservations peuvent s'écrire sous la forme détaillée équation II.124.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) = 0 \quad (II.124)$$

L'intégration de l'équation II.124 sur le volume de la cellule  $V_c$  de surface  $\partial V_c$  et de normale extérieure  $n$  donne à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski l'équation II.125.

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) \right] dV = \int_{V_c} \frac{\partial W}{\partial t} dV + \int_{\partial V_c} \mathcal{F}(W) \cdot n dS = 0 \quad (II.125)$$

Le théorème de transport de Reynolds nous permet d'exprimer le premier terme de l'équation II.125 comme la somme de deux termes dont l'un fait intervenir la vitesse de déplacement du domaine  $\mathcal{s}$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} W dV = \int_{V_c} \frac{\partial W}{\partial t} dV + \int_{\partial V_c} W s \cdot n dS \quad (\text{II.126})$$

Après quelques opérations, l'équation II.125 devient l'équation II.127. Les flux qui y sont définis font intervenir la vitesse de déplacement. Ces flux sont détaillés équation II.128.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} W dV + \int_{\partial V_c} \mathcal{F}(W, s) \cdot n dS = 0 \quad (\text{II.127})$$

$$\mathcal{F}(W, s) = \begin{bmatrix} \rho(U - s) \\ \rho U \otimes (U - s) + pI - \tau \\ \rho E(U - s) + pU - \tau U + q \end{bmatrix} \quad (\text{II.128})$$

### 2.4.1 Discrétisation spatiale

La discrétisation en maillage structuré des équations de conservations peut s'écrire à l'aide de l'équation II.129 qui est valable pour chaque cellule du maillage indicé par sa position  $(i, j, k)$  et de volume  $V_{i,j,k}$ . En introduisant  $W_{i,j,k}$  la valeur moyenne des variables conservatives dans la cellule et  $R_{i,j,k}$  le résidu de la cellule composé de la somme des flux sur la surface de la cellule. L'équation II.127 devient alors l'équation II.129.

$$\frac{d}{dt} (V_{i,j,k} W_{i,j,k}) + R_{i,j,k} = 0 \quad (\text{II.129})$$

La figure II.11 illustre une cellule hexaédrique caractéristique des maillages structurés employé dans cette thèse (les flux entrants illustrés en bleu et les flux sortants en rouge). Le résidu  $R_{i,j,k}$  peut alors se décomposer comme la somme des flux sur chaque face de la cellule comme l'illustre l'équation II.130.

$$R_{i,j,k} = F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k} + F_{i,j+1/2,k} - F_{i,j-1/2,k} + F_{i,j,k+1/2} - F_{i,j,k-1/2} \quad (\text{II.130})$$

Afin d'estimer le flux convectif, un schéma spatial est requis. Dans cette section les deux schémas employés au cours des travaux de thèses sont présentés : le schéma de Jameson [40], le schéma AUSM+(P) [57]. Afin d'illustrer le fonctionnement de ces schémas, seule la direction  $i$  est considérée.

#### Schéma de Jameson

Le schéma de Jameson [40] est un schéma centré avec dissipation artificielle. Il s'écrit comme la somme d'une discrétisation centrée simple et d'un terme de dissipation numérique qui a pour but de le stabiliser. Le flux convectif  $F_{i+1/2}$  dans ce cas est illustré équation II.131

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(W_i) + \mathcal{F}(W_{i+1})) \cdot n_{i+1/2} - D_{i+1/2} \quad (\text{II.131})$$

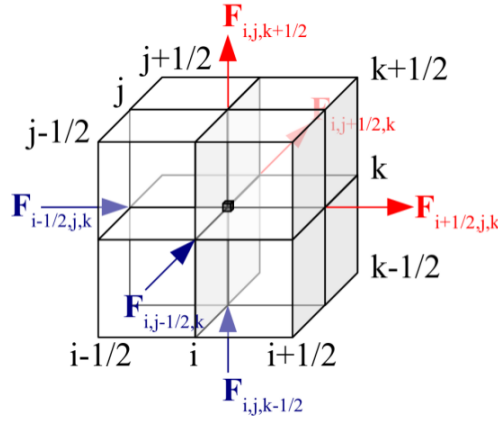


FIGURE II.11 – Illustration d'une cellule hexaédrique [29].

Le terme correctif  $D_{i+1/2}$  est le flux de dissipation artificielle nécessaire à la stabilité du schéma et à la capture de discontinuités (choc, sillage). Il est défini comme la somme de deux termes.

$$D_{i+1/2} = D_{i+1/2}^{(1)} + D_{i+1/2}^{(3)} \quad (\text{II.132})$$

Le premier terme  $D_{i+1/2}^{(1)}$  permet de capturer des discontinuités. Il est détaillé équation II.133.

$$D_{i+1/2}^{(1)} = \epsilon_{i+1/2}^{(2)} \rho_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i) \quad (\text{II.133})$$

dans laquelle  $\rho$  est défini comme le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux convectifs par rapport aux variables conservatives, c'est à dire  $\partial F / \partial W$ . Le coefficient  $\epsilon_{i+1/2}^{(2)}$ , défini équation II.135, fait intervenir le coefficient  $\chi^{(2)}$  et le capteur  $\nu$  permettant de contrôler la dissipation proche d'un choc ou d'un sillage.

$$\nu = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{|p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}|} \quad (\text{II.134})$$

$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = \chi^{(2)} \max(\nu_i, \nu_{i+1}) \quad (\text{II.135})$$

Le second terme  $D_{i+1/2}^{(3)}$  assure la stabilité du schéma centré. Il est détaillé équation II.136.

$$D_{i+1/2}^{(3)} = \epsilon_{i+1/2}^{(4)} (\rho_{i+3/2} (W_{i+2} - W_{i+1}) - 2\rho_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i) + \rho_{i-1/2} (W_i - W_{i-1})) \quad (\text{II.136})$$

Le coefficient  $\epsilon_{i+1/2}^{(4)}$  fait intervenir le coefficient  $\chi^{(4)}$  :

$$\epsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max(0, \chi^{(4)} - \epsilon_{i+1/2}^{(2)}) \quad (\text{II.137})$$

### Schéma AUSM+(P)

Les schémas du type Advection Upstream Splitting Method (AUSM) ont été introduits par Liu [53]. La formulation AUSM permet de distinguer deux phénomènes physiques : le transport convectif et les ondes acoustiques. Le flux convectif  $F_{i+1/2}$  à l'interface entre les cellules  $i$  et  $i+1$

s'écrit donc comme la somme d'un terme convectif et d'un terme de pression comme l'illustre l'équation II.138.

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{(c)} + P_{i+1/2} \quad (\text{II.138})$$

Le terme convectif s'écrit :

$$F_{i+1/2}^{(c)} = M_{i+1/2} \Phi_{i+1/2} \quad (\text{II.139})$$

Avec  $\Phi_{i+1/2}$  définit de la façon suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a U \\ \rho a (E + \frac{p}{\rho}) \end{bmatrix}, \quad \Phi_{i+1/2} = \begin{cases} \Phi_L & \text{si } M_{i+1/2} > 0 \\ \Phi_R & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.140})$$

Les grandeurs indicées par  $L$  sont les grandeurs à gauche de l'interface et les grandeurs indicées par  $R$  sont les grandeurs à droite de l'interface. Elles sont déterminées à l'aide d'une interpolation MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) d'ordre 3. La grandeur  $a$  représente la vitesse du son. La valeur de  $M_{i+1/2}$  est déterminée à l'aide de  $M_L$  et  $M_R$  qui sont les valeurs de Mach à gauche et à droite de l'interface.

Le terme de pression  $P_{i+1/2}$  s'écrit :

$$P_{i+1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_{i+1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.141})$$

où  $p_{i+1/2}$  est fonction des valeurs de  $p_L$  et  $p_R$ .

Ce modèle a été amélioré en introduisant une vitesse du son commune donnant lieu au schéma AUSM+ [51]. Cependant, ces schémas ne sont pas adaptés aux faibles nombres de Mach. Dans les zones subsoniques, la dissipation du schéma AUSM+ entraîne des problèmes de stabilité et de précision. Le schéma AUSM+(P) a alors été introduit par Liou afin de modifier la dissipation numérique dans les zones subsoniques [50]. Cependant les modifications apportées entraînent un coût élevé. Le schéma AUSM+(P) utilisé dans le cadre de cette thèse est une simplification du schéma AUSM+(P) effectuée par Mary [57]. Les avantages qu'offre le schéma l'AUSM+ pour capturer les chocs sont ignorées dans cette version simplifiée qui est décrite par l'équation II.142.

$$F_{i+1/2} = \frac{U_{i+1/2}}{2} (\Phi_L^+ + \Phi_R^+) - \frac{|U_{dis}|}{2} (\Phi_R^+ - \Phi_L^+) + \frac{p_L + p_R}{2} \quad (\text{II.142})$$

Afin de coupler la pression et la vitesse dans les zones de bas Mach, une stabilisation en pression est ajoutée à la vitesse à l'interface  $U_{i+1/2}$  à l'aide de la constante  $C_2$ .

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2} (u_L + u_R) - C_2 (p_R - p_L) \quad (\text{II.143})$$

D'autre part, le paramètre  $U_{dis}$  est défini par l'équation II.144.

$$U_{dis} = \Psi \max \left( \frac{1}{2} |u_L + u_R|, C_1 \right) \quad (\text{II.144})$$

$C_1$  est une constante et  $\Psi$  est un capteur utilisé pour minimiser la dissipation numérique. Lorsque qu'aucune oscillation parasite n'est détectée,  $\Psi$  est égal à 0. Si des oscillations sont détectées, alors  $\Psi$  est choisi égal à 1. Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  dépendent de données de référence choisies par l'utilisateur  $M_{ref}$ ,  $T_{ref}$  et  $p_{ref}$  ainsi qu'un coefficient de dissipation  $\alpha$ . Le vecteur  $\Phi^+$  est décrit équation II.145.

$$\Phi^+ = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho (E + \frac{p}{\rho}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.145})$$

### 2.4.2 Intégration temporelle

L'intégration temporelle peut se faire par des méthodes explicites (comme la méthode de Runge-Kutta) ou implicites [36]. Les méthodes explicites sont les plus simples à mettre en place et souvent bien adaptées aux simulations instationnaires. Cependant, leur stabilité est conditionnée par le choix d'un pas de temps qui respecte le critère CFL (pour Courant, Friedrichs et Lewy) [36]. Le nombre  $CFL$  relie la discrétisation temporelle à la discrétisation spatiale comme l'illustre l'équation suivante :

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{|U| + a} \quad (\text{II.146})$$

où  $\Delta x$  est la dimension caractéristique de la cellule et  $a$  la vitesse du son. La convergence d'un schéma et donc sa stabilité impose que le pas de temps ne peut pas être plus grand que le temps nécessaire au transport de l'information entre deux cellules voisines du maillage, ce qui implique que  $CFL < 1$ . Le choix du pas de temps est alors déterminé par la cellule la plus critique (souvent les plus petites). Le raffinement du maillage proche paroi pour capter les couches limites entraîne donc des pas de temps très petits ce qui impose un grand nombre d'itérations. C'est pourquoi on préfère les méthodes implicites, "inconditionnellement" stables [36]. Dans le cadre de cette thèse les simulations instationnaires ont été réalisées à l'aide d'une méthode implicite : la méthode Gear. En reprenant la formulation II.129 et en se dispensant de la notation des indices de cellule  $(i, j, k)$ , la discrétisation implicite entre les itérations  $k$  et  $k + 1$  d'un pas de temps  $\Delta t$  s'écrit :

$$\left( \frac{d}{dt}(VW) \right)^{k+1} + R(W^{k+1}) = 0 \quad (\text{II.147})$$

Dans le cadre d'équations non-linéaires, on ne peut pas directement calculer  $W^{k+1}$ . L'évaluation des résidus à l'instant  $k + 1$  fait intervenir l'inversion de l'opérateur implicite dépendant de la matrice jacobienne  $\frac{dR}{dW}$ . Cette inversion est trop coûteuse en termes de ressource et de stockage. L'idée est alors d'avoir recours à des méthodes itératives. Une approximation à l'ordre 2 de la dérivée temporelle de  $V^{k+1}W^{k+1}$  donne :

$$\left( \frac{d}{dt}(VW) \right)^{k+1} \approx \frac{3V^{k+1}W^{k+1} - 4V^k W^k + V^{k-1}W^{k-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.148})$$

On définit alors  $\mathcal{H}(W^{k+1})$  comme la fonction de  $W^{k+1}$  que l'on cherche à annuler :

$$\mathcal{H}(W^{k+1}) = \frac{3V^{k+1}W^{k+1} - 4V^k W^k + V^{k-1}W^{k-1}}{2\Delta t} + R(W^{k+1}) = 0 \quad (\text{II.149})$$

La méthode Gear est un processus itératif permettant de résoudre cette équation. Elle revient à formuler un problème de Newton de la façon suivante :

$$\left( \frac{d\mathcal{H}}{dW} \right)^{m,k} \Delta W^{m,k} = -\mathcal{H}(W^{m,k}) \quad (\text{II.150})$$

avec :

$$\Delta W^{m,k} = W^{m+1,k} - W^{m,k} \quad (\text{II.151})$$

$$W^{0,k} = W^k \quad (\text{II.152})$$

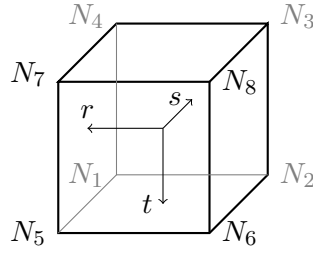


FIGURE II.12 – Illustration d'un élément finis hexaédrique.

Où l'indice  $m$  correspond à l'itération de la méthode Gear tandis que l'indice  $k$  correspond à l'itération physique. La méthode consiste donc à itérer sur la variable  $W^{m,k}$  jusqu'à converger vers  $W^{k+1}$ .

$$\left( \frac{3V^{k+1}}{2\Delta t} I + J^{m,k} \right) \Delta W^{m,k} = -\mathcal{H}(W^{m,k}) \quad (\text{II.153})$$

Où  $I$  est la matrice identité et  $J = \frac{dR}{dW}$ .

## 2.5 Déformation de maillage

La méthode pour déformer le maillage utilisée dans cette étude est la méthode d'analogie de mécanique continue disponible dans le logiciel elsA. Cette méthode est spécifique au mouvement de maillage structuré multidomaine. Elle est fondée sur l'utilisation d'éléments finis volumiques hexaédriques à huit noeuds permettant la discrétisation d'un milieu continu à comportement élastique tridimensionnel. L'objectif de ce paragraphe est de présenter l'idée de la méthode utilisée, mais le lecteur intéressé pourra se référer au manuel d'elsA. On introduit pour chaque élément hexaédrique la base  $N$  de fonction d'interpolation  $N_i$  et les coordonnées isoparamétriques  $(r, s, t)$  comme illustré figure II.12. La base  $N$  est donc définie de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\ N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \\ N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\ N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ N_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) \\ N_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \\ N_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \\ N_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \end{array} \right. \quad (\text{II.154})$$

Le calcul de la matrice de raideur élémentaire passe par l'intégration sur le volume élémentaire :

$$K_e = \int_e B^T C B dV \quad (\text{II.155})$$

où  $B$  est la matrice donnant la relation linéaire entre les composantes du champ de déplacement

et le champ de déformation et  $C$  est la matrice d'élasticité définie par :

$$C = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{pmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2v}{2} & & 0 \\ & sym & & & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2v}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.156})$$

où  $v$  le coefficient de poisson du matériau élastique, souvent choisi égale à 0.5, et  $E$  représente le module de Young. Celui-ci varie en fonction du volume de l'élément, de manière à assurer une raideur d'autant plus grande que les éléments sont de faible volume. Ceci assure que la raideur équivalente du maillage est forte au voisinage des parois dans les zones de fort raffinement de maillage. Plusieurs fonctions de dépendances de la raideur au volume sont envisageables (constant, inversement proportionnel au volume ou à une puissance du volume, etc...). Le calcul de cette intégrale est effectué à l'aide d'une méthode d'intégration à  $n_g$  point de Gauss. L'élément de raideur  $K_e$  associé à l'élément  $e$  s'obtient alors via :

$$K_e = V_e \sum_{l=1}^{n_g} k_l B_l^T C B_l \quad (\text{II.157})$$

où  $V_e$  est le volume de l'élément,  $k_l$  est le poids associé au point de Gauss  $G_l$  et  $B_l$  les matrices donnant en chaque point de Gauss la relation linéaire entre les composantes du champ de déplacement sur la base des fonctions d'interpolation  $N_i$ , que l'on nomme  $q_i$ , et le champ de déformation  $\epsilon$  :

$$\epsilon = [B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(8)}] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{bmatrix} \quad (\text{II.158})$$

Avec  $B^{(i)}$  qui s'exprime de la façon suivante :

$$B^{(i)} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y N_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z N_i \\ \partial_y N_i & \partial_x N_i & 0 \\ 0 & \partial_z N_i & \partial_y N_i \\ \partial_z N_i & 0 & \partial_x N_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.159})$$

Le produit  $B_l^T C B_l$ , du point de Gauss  $G_l$ , s'écrit donc comme une matrice  $24 \times 24$  composée de  $8 \times 8$  matrices  $3 \times 3$  :

$$B_l^T C B_l = \begin{bmatrix} B_l^{(1)T} \\ B_l^{(2)T} \\ \vdots \\ B_l^{(8)T} \end{bmatrix} C [B_l^{(1)}, B_l^{(1)}, ..., B_l^{(8)}] \quad (\text{II.160})$$

$$= B_l^{(i)T} C B_l^{(j)}, (i, j) \in [1, ..., 8] \times [1, ..., 8] \quad (\text{II.161})$$

Remarquons que les gradients en  $(x, y, z)$  des 8 fonctions  $N_i$  s'obtiennent par le calcul de la matrice Jacobienne de la transformation  $(x, y, z)$  en fonction de  $(r, s, t)$ . Finalement, la matrice

totale de raideur de l'élément considéré s'obtient en sommant les matrices pour chaque point de Gauss comme l'illustre l'équation II.157.

L'obtention du déplacement du maillage s'obtient en résolvant l'équilibre statique du système linéaire élastique que l'on écrit :

$$Kx = F \quad (\text{II.162})$$

Si l'on sépare l'ensemble des noeuds du maillage en une partie où le mouvement est imposé, que l'on indice  $\Sigma$ , et une partie où le déplacement est inconnu, que l'on indice  $I$  alors l'équation précédente peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} K_{I,I} & K_{I,\Sigma} \\ K_{\Sigma,I} & K_{\Sigma,\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ F_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{II.163})$$

La résultante des efforts sur les noeuds  $I$  est nulle, on a donc  $F_I = 0$ . Finalement, la première équation du système précédent donne :

$$K_{II}x_I = -K_{I\Sigma}x_\Sigma \quad (\text{II.164})$$

Les déplacements inconnus  $x_I$  sont donc liés par la matrice de raideur aux déplacements connus  $x_\Sigma$ . Cette équation est alors résolue à l'aide d'une méthode de gradient conjugué préconditionné (cf manuel elsA).

### Synthèse sur la modélisation aérodynamique

En conclusion, nous disposons d'une approche numérique permettant de modéliser les équations de la mécanique des fluides. Cette approche est basée sur une approche statistique permettant de modéliser les basses échelles des équations de Navier-Stokes. Ces équations sont discrétisées à l'aide d'une méthode des volumes finis. De plus, la formulation ALE permet de prendre en compte un mouvement de la géométrie, indispensable dans le cadre de la résolution de problème aéroélastique. Ce mouvement implique une déformation du maillage qui est traitée à l'aide d'une méthode d'analogie de mécanique continue.

## 3 Bilan

Les différents types de modélisation aérodynamiques et mécaniques utilisés dans les travaux de thèse ont été détaillés dans ce chapitre. Il constitue donc la base méthodologique sur laquelle les prochains chapitres s'appuieront. Les deux premiers chapitres ont permis d'introduire la problématique et de décrire les outils permettant de l'adresser tandis que les prochains présenteront les développements méthodologiques effectués durant la thèse ainsi que les résultats obtenus. Le chapitre qui suit s'intéresse à la caractérisation aérodynamique du vortex de sol ainsi qu'à son impact sur le chargement aérodynamique du fan.



## Chapitre III

# Caractérisation aérodynamique de l'excitation générée par le vortex de sol

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment le chargement du fan réagit à l'ingestion d'un vortex de sol en se basant sur une configuration industrielle représentative des turbomachines actuelles. Afin de simplifier le problème, la démarche consiste d'abord à modéliser la distorsion liée au vortex de sol sans modéliser le fan, puis à modéliser l'impact de cette distorsion sur le chargement aérodynamique du fan à l'aide d'une cartographie de distorsion. L'hypothèse de découplage entre le fan et la distorsion est alors avancée. Le chapitre se décompose donc en deux parties. La première consiste à modéliser le vortex de sol à l'aide d'une approche RANS, qui sera d'abord évaluée sur une configuration académique avant d'être utilisée sur la configuration industrielle d'intérêt. La seconde partie consiste à mettre en avant les mécanismes d'excitation liés à l'ingestion du vortex de sol à l'aide de calculs instationnaires U-RANS du fan. Tout au long du chapitre, les configurations avec et sans sol (c'est à dire avec et sans vortex de sol) seront considérées afin de mettre en avant les spécificités liées au vortex de sol.

### Sommaire

---

|          |                                                                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Modélisation du vortex de sol en condition de vent de travers . . . . .</b>                                | <b>73</b> |
| 1.1      | Validation de l'approche numérique pour modéliser le vortex de sol sur une configuration académique . . . . . | 73        |
| 1.1.1    | La configuration académique de Murphy . . . . .                                                               | 73        |
| 1.1.2    | Approche numérique pour la configuration de Murphy . . . . .                                                  | 73        |
| 1.1.3    | Évaluation de la représentativité de la méthode numérique . . . . .                                           | 76        |
| 1.1.4    | Conclusions . . . . .                                                                                         | 82        |
| 1.2      | Caractérisation de la distorsion sur la configuration industrielle . . . . .                                  | 83        |
| 1.2.1    | Description de la configuration . . . . .                                                                     | 83        |
| 1.2.2    | Approche numérique pour la configuration industrielle . . . . .                                               | 83        |
| 1.2.3    | Résultats . . . . .                                                                                           | 84        |
| 1.2.4    | Conclusions . . . . .                                                                                         | 88        |
| <b>2</b> | <b>Chargement aérodynamique du fan lié au vortex de sol . . . . .</b>                                         | <b>89</b> |
| 2.1      | Modélisation aérodynamique du fan avec cartographie de distorsion . . . . .                                   | 89        |
| 2.1.1    | Approche numérique . . . . .                                                                                  | 89        |

|          |              |                                                    |           |
|----------|--------------|----------------------------------------------------|-----------|
|          | 2.1.2        | Description du calcul . . . . .                    | 92        |
| 2.2      |              | Étude du chargement aérodynamique du fan . . . . . | 94        |
|          | 2.2.1        | Mécanisme d'excitation . . . . .                   | 94        |
|          | 2.2.2        | Considération harmonique . . . . .                 | 95        |
| <b>3</b> | <b>Bilan</b> | . . . . .                                          | <b>97</b> |

---

# 1 Modélisation du vortex de sol en condition de vent de travers

## 1.1 Validation de l'approche numérique pour modéliser le vortex de sol sur une configuration académique

### 1.1.1 La configuration académique de Murphy

Afin de valider une approche numérique pertinente pour la modélisation de la distorsion générée par un vortex de sol, il a été choisi de se baser sur les résultats expérimentaux obtenus par Murphy[62]. Murphy a étudié l'influence de nombreux paramètres sur le phénomène de vortex de sol : distance au sol, taille de couche limite atmosphérique, dérapage, intensité du vent de travers, débit au sein de la nacelle. L'exhaustivité des paramètres étudiés par Murphy ainsi que leur adéquation avec les dernières générations de turbofans font de cette étude expérimentale une étude de référence concernant la caractérisation aérodynamique du vortex de sol. L'étude de Murphy a été réalisée sur une maquette de nacelle axisymétrique d'échelle 1/30 au sein de la soufflerie basse vitesse de  $2.4\text{ m} \times 1.8\text{ m}$  de Cranfield. Ces essais sont représentés figure III.1a. Le diamètre intérieur de celle-ci mesure  $0.1\text{ m}$ . La lèvre de la nacelle est caractérisée par une ellipse de ratio 2. Une coupe de la nacelle est présente figure III.1b. La nacelle est équipée d'un total de 12 peignes de pression totale à une distance de  $0.7D_i$  du plan d'entrée. La rotation du système de peignes a permis d'obtenir 432 points de mesure. Un équipement de mesure PIV a aussi été installé afin d'obtenir des informations sur le champ de vitesse dans un plan parallèle au sol, situé à une distance de  $10\text{ mm}$ , soit  $0.083D_i$ . La figure III.1c illustre les deux plans où les mesures ont été effectuées. La nacelle n'est pas munie d'une soufflante, l'aspiration est générée par un réservoir à vide se situant à l'extérieur de la soufflerie.

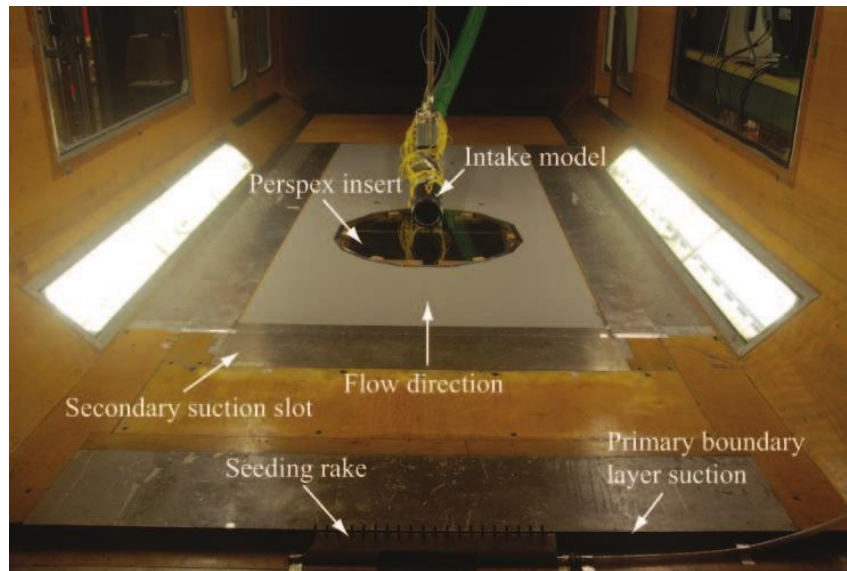
### 1.1.2 Approche numérique pour la configuration de Murphy

#### Méthode numérique

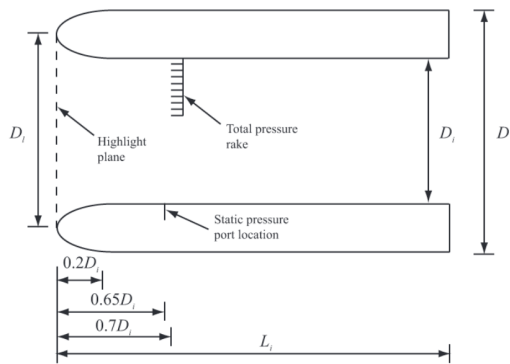
La méthode numérique que nous allons utiliser se base sur la résolution des équations RANS à l'aide du solveur elsA. L'obtention de ces équations ainsi que la méthode des volumes finis utilisée pour résoudre ces équations sont présentés dans la section II.2. Le modèle de turbulence utilisé est celui de  $k - \omega$  de Menter avec correction *SST* (cf II.2.3). Sa robustesse et sa capacité à prédire le décollement en font un modèle adapté au calcul d'entrée d'air sous vent de travers. De plus, différents auteurs ont montré que ce modèle était capable de capter convenablement le vortex de sol [12, 96]. L'intégration spatiale est assurée par un schéma AUSM+(P) car ce schéma est adapté aux faibles vitesses que l'on trouve dans un calcul d'entrée d'air soumis à un vent de travers. La formulation de ce schéma est présentée section II.2.4.

#### Domaine et Maillage

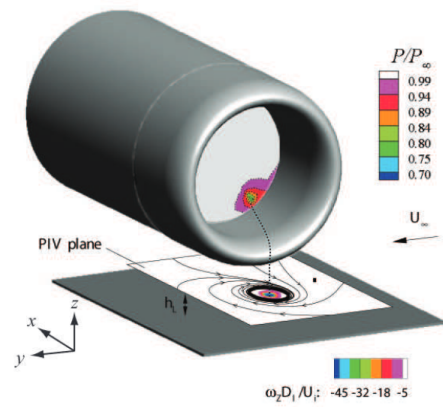
Le domaine du maillage est un rectangle de dimension de l'ordre de  $25D_i \times 25D_i \times 12.5D_i$ , dans les directions axiale, longitudinale et normale au sol. La taille du domaine est proche de la taille de la soufflerie. La simplicité de mise en oeuvre et la qualité des résultats utilisant des méthodes chimères en font une méthode pertinente pour le cas étudié ici. Colin [18] et Sadoudi [76] ont montré que cette approche permettait de modéliser un vortex de sol. Le maillage est donc composé de deux parties : "nacelle" et "fond". Le maillage de la nacelle a été obtenu en extrudant un maillage 2D du profil de la nacelle. La géométrie est axisymétrique cependant la répartition azimutale n'est pas uniforme afin de densifier la zone où le vortex a le plus de chance d'apparaître. La première maille se trouve à une distance de  $1\mu\text{m}$  de la paroi de la nacelle. Avec



(a) Illustration des essais au sein de soufflerie de Cranfield.



(b) Coupe de la nacelle



(c) Illustration des plans de mesure

FIGURE III.1 – Configuration de Murphy [62].

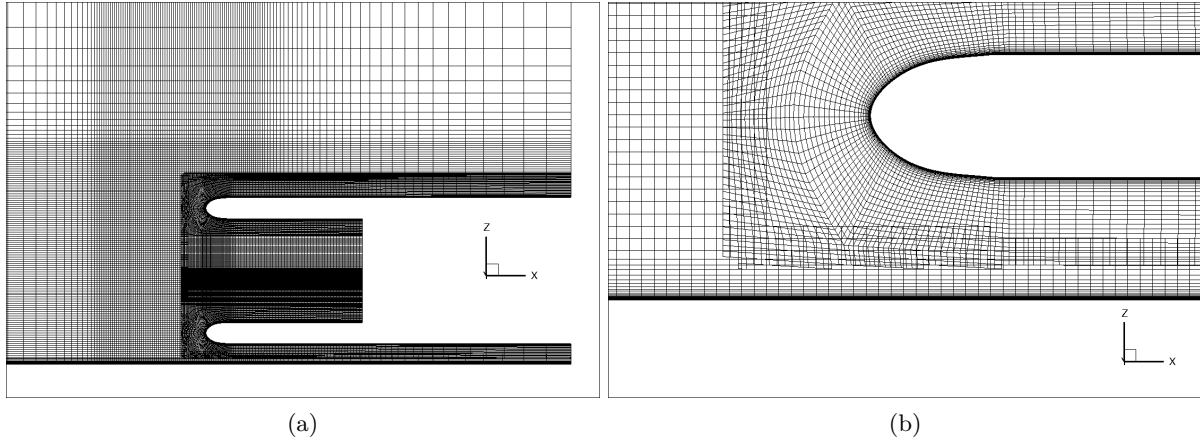


FIGURE III.2 – Coupe du maillage illustrant le recouvrement des maillages.

321 points en azimut, le maillage de la nacelle comporte 4.7 millions de cellules. Le maillage de fond comporte un maillage de couche limite au sol caractérisé par une taille de première maille de  $10\mu m$  et un facteur d'expansion de 1.23. Dans la zone où le vortex de sol est susceptible d'apparaître le maillage est cartésien avec un volume de cellule de  $2mm^3$ . Lorsqu'on s'éloigne de cette zone, le maillage est rapidement déaffiné avec des facteurs d'expansion proche de 1.2. Le maillage de fond comporte 3.9 millions de cellules. Finalement, le maillage complet comporte 8.6 millions de cellules. Le maillage de fond est masqué par le maillage de la nacelle et le maillage de la nacelle est masqué par le sol. la figure III.2a illustre les deux maillages proches de la nacelle et du sol. Le zoom proche du bord d'attaque inférieur de la nacelle, présenté figure III.2b, illustre la zone de recouvrement des deux maillages. Un intérêt particulier a été porté aux tailles de cellules dans les zones de recouvrement afin d'obtenir une interpolation la plus propre possible.

### Conditions limites et conditions initiales

Le domaine est représenté figure III.3. L'extrémité de la nacelle se termine sur un bord du domaine. Cette stratégie est souvent utilisée car elle permet de ne pas modéliser l'écoulement aval qui nécessiterait un domaine beaucoup plus grand. Dans le cas de Murphy, aucun écoulement aval n'est présent car la nacelle est directement reliée à un réservoir à vide à l'aide d'un tube passant par le plafond. Cette modélisation est utilisée dans les études de Zantopp [96], Carnevale [13] et Horvath [37] qui modélisent le vortex de sol de la configuration de Murphy. Les parois de la nacelle et le sol sont adhérents. Une condition d'injection est appliquée sur le bord du domaine contenant les informations de pression totale, température totale, Mach et direction du vent ainsi que des données sur la turbulence (surface 'inj' de la figure III.3). Le profil de pression totale est choisi afin d'obtenir une couche limite au niveau de la nacelle disposant des caractéristiques de la couche limite de Murphy. Pour cela, l'évolution de la couche limite entre le bord du domaine et l'axe de la nacelle est estimée via les formules de Blasius [3]. Une condition de pression statique est appliquée en sortie du domaine (surface 'out' de la figure III.3). Le différentiel entre la pression totale d'injection et la pression statique de sortie est choisi pour générer la vitesse du vent de travers voulu. En pratique la pression totale d'entrée est fixée à la pression atmosphérique  $P_{Ta} = 101325$  Pa et la pression statique de sortie dépend alors du vent modélisé. Des conditions de symétrie sont appliquées sur les autres faces du domaine. Et enfin, une condition de pression est appliquée au sein de la nacelle afin de retrouver le débit et donc le

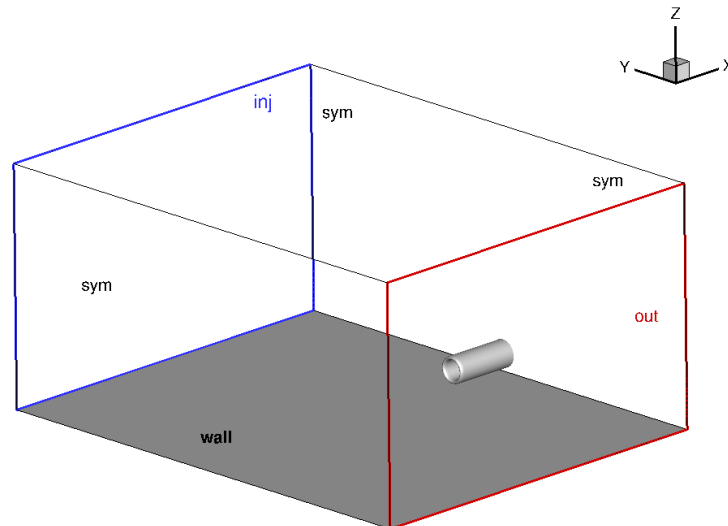


FIGURE III.3 – Domaine de calcul.

rapport de vitesse  $U^* = U_i/U_\infty$ . Il est important de noter qu'il est difficile de connaître à priori la valeur de cette pression car les grandeurs au sein de la nacelle dépendent de la topologie de l'écoulement et notamment de la présence de décollement sur les lèvres de la nacelle. Un champ uniforme égale au champ infini est utilisé pour initialiser les calculs.

### 1.1.3 Évaluation de la représentativité de la méthode numérique

Cette section a pour objectif d'exposer les résultats obtenus à l'aide de la méthodologie explicitée dans la section précédente afin de les confronter aux résultats obtenus dans l'étude expérimentale de Murphy [62]. Il a été choisi de se concentrer uniquement sur les cas de vent de travers ( $\beta = 90^\circ$ ) car ces cas présentent les vortex les plus intenses et donc potentiellement les plus critiques au vu du phénomène de réponse forcée. Les résultats les plus détaillés de Murphy correspondent à l'étude de l'impact du vent de travers pour un débit fixé. Dans cette étude, le débit est caractérisé par un Mach interne  $M_i$  de 0.55, l'épaisseur de déplacement de la couche limite  $\delta^*/D_l$  est de 0.11 et la garde au sol de  $h/D_l$  de 0.25 ( $h$  étant la distance entre le sol et le point le plus bas du plan d'entrée de la nacelle caractérisée par le diamètre  $D_l$ ). Les rapports de vitesse  $U^* = U_i/U_\infty$  évalués par Murphy sont compris entre 5 et 20, ce qui traduit un vent de travers entre 15 et 70 kts. Il est pertinent d'évaluer l'approche numérique dans ces conditions car elles sont représentatives des conditions dans lesquels les nouvelles générations de turbofans évoluent. Quatre rapports de vitesse ont été évalués numériquement : 5.3, 7.4, 10.1 et 16.6. Ces rapports de vitesses sont proches de ceux étudiés par Murphy, mais ne sont pas exactement les mêmes (respectivement 5.2, 7.3, 9.1 et 18.3). Les écarts proviennent de la vitesse interne à la nacelle. En effet, cette vitesse est pilotée par la condition limite de pression interne à la nacelle, cependant la relation entre la pression et la vitesse obtenue n'est pas évidente en présence de distorsion<sup>1</sup>. L'écart le plus prononcé concerne le rapport de vitesse le plus élevé (16.6 numériquement contre 18.3 expérimentalement), cependant les résultats expérimentaux de Murphy

1. Il est possible d'itérer sur la valeur de la pression totale afin d'obtenir le ratio exact, cependant cette démarche peut se révéler coûteuse en temps de calcul.

[63] montrent que dans cette zone, le rapport de vitesse a peu d'influence sur les caractéristiques du vortex. L'évaluation de la représentativité de la méthode numérique se basera donc sur l'ensemble de ces 4 rapports de vitesses.

### Outil de caractérisation quantitative de la distorsion

La caractérisation de la distorsion présente en amont du fan passe par l'expression d'indice de distorsion calculés au sein de la nacelle. Les deux indices traités ici sont le  $DC_{60}$  pour *Distortion Coefficient 60* et l'indice  $IDC$  pour *Indice de Distorsion Circonférentielle*. De plus, l'intensité du vortex peut être quantifiée à l'aide de sa circulation  $\Gamma$ .

Le  $DC_{60}$  est probablement l'indice de distorsion le plus utilisé dans la littérature. Il est défini par l'équation (III.1).

$$DC_{60} = \frac{\bar{P}_t - P_{t,60}}{P_{dyn}} \quad (\text{III.1})$$

où  $\bar{P}_t$  est la pression moyenne sur l'ensemble de la cartographie,  $P_{t,60}$  est la moyenne minimale de pression totale rencontrée dans un secteur de  $60^\circ$  et  $P_{dyn}$  la pression dynamique moyenne de la cartographie. Cet indice, se basant sur une différence de pression totale et sur une taille de secteur de  $60^\circ$ , est pertinent pour caractériser des distorsions liées à un décollement de manche en présence de vent de travers dans la mesure où l'étendue azimutale de ces distorsions est proche de  $60^\circ$ . Il l'est moins pour prendre en compte une distorsion d'angle ou une chute très localisée de pression, cependant il est encore aujourd'hui très présent dans la littérature pour étudier une distorsion induite par un vortex de sol et notamment dans l'étude de Murphy.

L'indice de distorsion circonférentielle, noté  $IDC$ , est lui aussi un indice basé sur la pression totale. Il est défini par :

$$IDC = \max_{r \in [0; r_{max}-1]} \left[ 1/2 \left( \frac{\bar{P}_{t,r} - P_{t,r,min}}{\bar{P}_t} + \frac{\bar{P}_{t,r+1} - P_{t,r+1,min}}{\bar{P}_t} \right) \right] \quad (\text{III.2})$$

Cette définition est à l'origine basée sur les peignes expérimentaux souvent peu nombreux. A l'issu d'un calcul numérique donnant accès à une résolution beaucoup plus élevée, l' $IDC$  peut être défini par :

$$IDC = \max_{r \in [0; r_{max}]} \left[ \frac{\bar{P}_{t,r} - P_{t,r,min}}{\bar{P}_t} \right] \quad (\text{III.3})$$

où  $\bar{P}_t$  la pression totale moyenne,  $\bar{P}_{t,r}$  la pression totale moyenne sur l'ensemble des points de l'anneau au rayon  $r$  et  $P_{t,r,min}$  la pression totale minimale sur un anneau de rayon  $r$ . Dans notre étude, c'est la deuxième définition qui sera utilisé.

Le vortex de sol est principalement caractérisé par sa circulation  $\Gamma$  qui retranscrit son intensité. Cette circulation peut notamment être calculée dans un plan proche du sol. L'hypothèse est ici faite que le champ de vitesse dans ce plan est uniquement du à la présence du vortex. Dans ce contexte, la circulation du vortex est définie par la relation suivante :

$$\Gamma = \oint_C u \cdot dl \quad (\text{III.4})$$

Où  $u$  représente le champ de vitesse,  $dl$  un élément de longueur et  $C$  un contour fermé. Il est possible, via le théorème de Stokes, d'exprimer la circulation en fonction de la vorticité portée par le vecteur perpendiculaire au plan considéré, ici  $\omega_z$  :

$$\Gamma = \iint_A \omega_z dA \quad (\text{III.5})$$

En condition de vent de travers, la topologie dominante est un unique vortex ayant toujours le même sens de rotation [62]. Il a donc été choisi de comptabiliser uniquement la vorticité positive dans notre cas. Le centre du vortex est assimilé à la position où la vorticité atteint son maximum. Une surface d'intégration circulaire est alors construite autour du maximum et la vorticité y est intégrée. La surface choisie est la même que celle que Murphy a utilisée lors de son étude [62]. Il est possible d'adimensionner la circulation par des grandeurs décrivant la configuration étudiée, comme l'illustre l'équation III.6.

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{D_l U_i} \quad (\text{III.6})$$

### Convergence

Afin de s'assurer de la convergence des calculs RANS, les indices caractérisant le vortex présentés dans le paragraphe 1.1.3 ont été extraits toutes les 1000 itérations à partir de l'itération 5000. L'évolution typique de ces indices et des résidus sur  $\rho$  en fonction des itérations du calcul est représentée figure III.4 pour deux rapports de vitesses  $U^*$ . Les différents indices atteignent un plateau et les résidus diminuent de plus de 2,5 ordres, cependant l'écoulement n'est pas totalement convergé car de légères oscillations sont encore présentes. Une explication réside dans le fait que le phénomène n'est pas totalement stationnaire. En effet, Murphy montre que le vortex se déplace légèrement au cours du temps. Des calculs instationnaires ont été effectués et sont présentés dans l'annexe B. Malgré des difficultés pour obtenir une convergence très propre l'approche RANS reste intéressante car les résultats U-RANS sont très proches des résultats RANS (cf annexe B). De plus, l'approche stationnaire est moins coûteuse et permet de simplifier le problème dans la mesure où la distorsion est ainsi considérée stationnaire.

### Topologie de l'écoulement

La présence du vortex de sol est directement liée à la taille du tube de courant ingéré au sein de la nacelle. Dès lors que le tube de courant intersecte le sol, un point d'arrêt apparaît au sol. Il est le point de départ du vortex qui est ingéré dans la nacelle. La figure III.5 illustre les lignes de courant formant ce vortex (ligne bleue). Le vortex de sol est accompagné d'un vortex de contournement résultant du sillage de la nacelle. Ce vortex de contournement peut être décomposé en deux parties. La première, illustrée par les lignes de courant rouges sur la figure III.5, correspond au coeur du vortex de contournement. Cette partie est ingérée au sein de la nacelle et peut être responsable d'une légère distorsion. La seconde, illustrée par les lignes de courant noires sur la figure III.5, correspond à la partie extérieure du vortex de contournement. Cette partie est entraînée à l'aval du moteur par le vent de travers et n'est pas ingérée au sein de la nacelle. Cette topologie a été observée numériquement par Zantopp [96] et Trapp [86].

### Cartographies de pression totale

La figure III.6 permet de comparer les cartographies de pression issues des calculs numériques

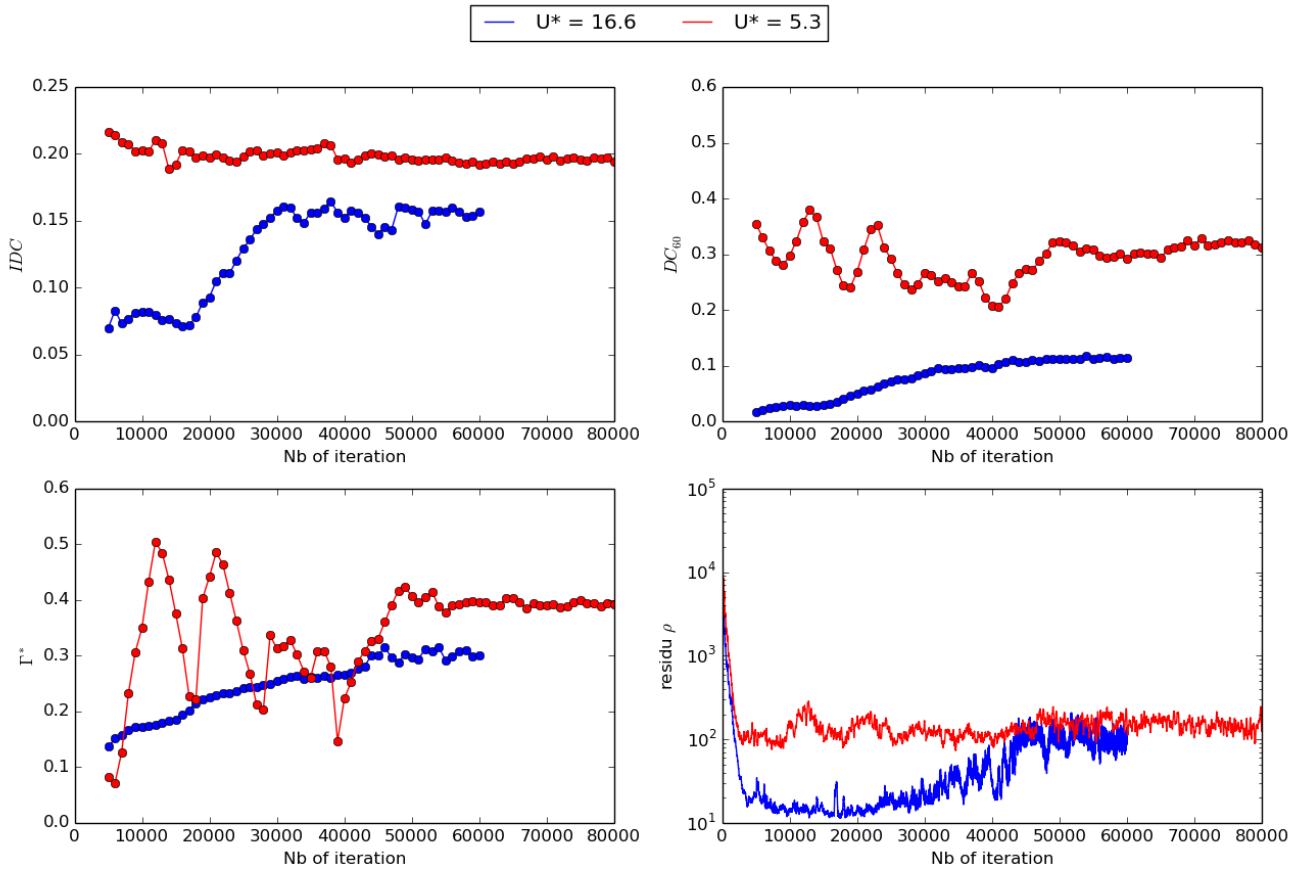


FIGURE III.4 – Convergence des indices caractérisant le vortex ( $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.12$ ,  $M_i = 0.55$ ).

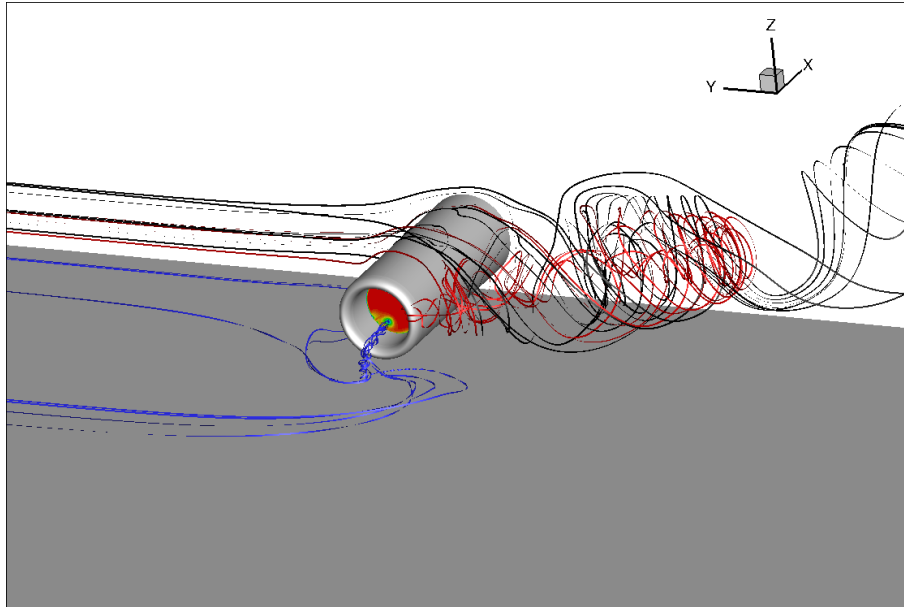


FIGURE III.5 – Topologie de l'écoulement ( $U^* = 16.6$ ,  $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.12$ ,  $M_i = 0.55$ ).

avec celles issues de l'étude expérimentale de Murphy. L'approche numérique permet de capturer le vortex pour l'ensemble des rapports de vitesse de vent de travers étudiés. La taille et la position de la zone de basse pression est aussi bien prédite par le calcul. Pour les  $U^*$  les plus élevés (figure III.6g et III.6h) le vortex est légèrement excentré du côté d'où provient le vent. Lorsque le vent de travers augmente (le rapport de vitesse  $U^*$  diminue) le vortex se recentre. Cette tendance est correctement prédite numériquement. La position azimutale peut jouer un rôle prépondérant dans l'étude de la réponse forcée des OGV qui sont fixes par rapport au vortex, mais impacte probablement peu la réponse forcée du fan. La position radiale est peu impactée par l'intensité du vent de travers. Les données expérimentales montrent une intensification de la chute de pression au sein du vortex lorsque le vent de travers augmente. Pour le rapport de vitesse le plus élevé  $U^* = 16.6$  l'intensité de la chute de pression est correctement captée. Mais pour les rapports de vitesse  $U^* = 10.1$ ,  $U^* = 7.4$  et  $U^* = 5.3$ , on observe une sous-estimation de la chute de pression. En effet, le rapport entre le minimum de pression totale au sein du vortex et la pression totale infinie observée expérimentalement est proche 0.7 (figures III.6a, III.6c et III.6e) alors que numériquement ce rapport est autour de 0.8 (figures III.6b, III.6d et III.6f). Cette sous-estimation est une limitation de la modélisation RANS observée notamment par Zantopp [96] et Lee [48]. Pour  $U^* = 5.3$ , une zone étendue de faible pression est observée proche de la paroi de la nacelle. Cette zone illustre un décollement de manche. La position, l'étendue et l'intensité de cette zone de basse pression sont convenablement prédites par l'étude numérique. Les cartographies numériques captent la chute de pression totale provenant de la couche limite de la partie intérieure de la nacelle. Cette zone répartie sur l'ensemble de la circonférence de la cartographie n'est pas captée expérimentalement, probablement car les capteurs de pression ne sont pas assez proches de la paroi. Une autre zone de faible pression totale peut être observée sur la partie supérieure des cartographies numériques, notamment pour les cartographies III.6h et III.6d. Cette distorsion de pression totale est due à l'ingestion d'une partie du vortex de contournement (illustré dans la figure III.5 par des lignes de courant rouges). Cette zone n'est pas observée expérimentalement.

### Circulation et indice de distorsion

La comparaison quantitative avec les données expérimentales se concentrent sur deux aspects : la distorsion obtenue dans un plan interne à la nacelle, caractérisée par l'indice  $DC_{60}$  (cf équation III.1), et la circulation  $\Gamma^*$  obtenue proche du sol (cf équation III.6).

La figure III.7a illustre l'évolution du  $DC_{60}$  en fonction du rapport  $U^*$ . Les résultats obtenus par l'approche numérique sont comparés aux résultats obtenus par Murphy [62]. Pour le rapport de  $U^* = 16.6$ , la valeur obtenue numériquement est très proche de celle obtenue expérimentalement, mais pour les rapports  $U^* = 10.1$  et  $U^* = 7.3$  le  $DC_{60}$  est largement sous-estimé (autour de 0.2 expérimentalement et de 0.1 numériquement). Ces observations sont en accord avec les premières remarques issues de la comparaison des cartographies de pression totale. En effet, une différence sur l'intensité de la chute de pression totale avait été mise en avant pour les rapports de vitesse  $U^* = 10.1$  et  $U^* = 7.3$ . Concernant le rapport de vitesse le plus faible ( $U^* = 5.3$ ), le  $DC_{60}$  est convenablement prédit par le calcul malgré la sous-estimation numérique de la chute de pression totale au sein du vortex. Cela provient de la présence de la zone de décollement au sein des cartographies. Le  $DC_{60}$  est directement impacté par cette zone car elle représente le secteur de  $60^\circ$  ayant la pression totale la plus faible. L'étendue et l'intensité de cette zone sont correctement prédites (cf figures III.6a et III.6b) ce qui explique la bonne adéquation entre calcul

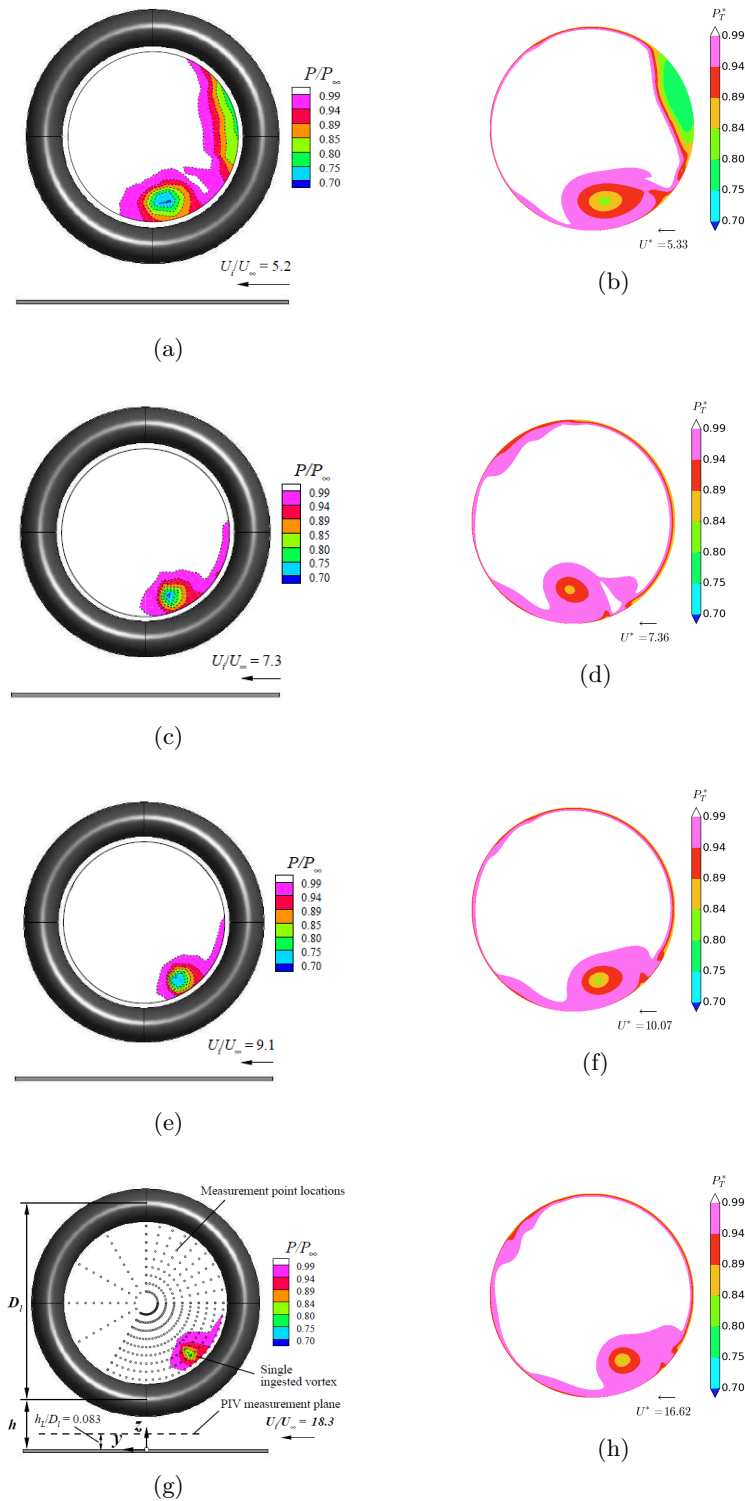


FIGURE III.6 – Comparaison des cartographies de pression totale : expérimentales (a), (c), (e), (g) et numériques (b), (d), (f) et (h) ( $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.11$ ).

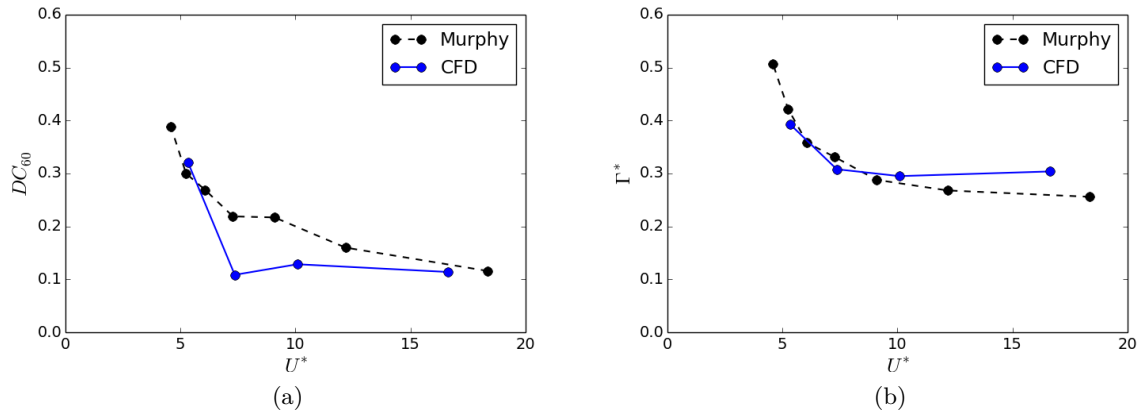


FIGURE III.7 – Comparaison de l'indice de distorsion  $DC_{60}$  (a) et de la circulation  $\Gamma^*$  (b) obtenus par l'approche RANS avec ceux issus de l'étude expérimentale de Murphy[62] ( $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.11$ ).

et essai pour ce point. Cela met aussi en avant que le  $DC_{60}$  n'est pas adapté pour caractériser un vortex de sol lorsqu'un décollement est présent.

L'évolution de la circulation obtenue par Murphy est illustrée figure B.2b. La circulation augmente lorsque le rapport de vitesse  $U^*$  diminue, c'est à dire lorsque l'intensité du vent de travers augmente pour une vitesse interne fixe. L'augmentation de la circulation est d'abord relativement faible entre  $U^* = 18.3$  et  $U^* = 7.3$ , puis celle-ci est beaucoup plus marquée de  $U^* = 7.3$  à  $U^* = 4.6$ . Cette évolution est convenablement prédite par le calcul. Il faut cependant noter une légère sur-estimation de la circulation pour le rapport de vitesse  $U^* = 16.6$ .

#### 1.1.4 Conclusions

Cette section avait pour but de confronter une approche numérique RANS aux résultats expérimentaux de Murphy. Cette confrontation a permis de mettre en avant plusieurs points sur la capacité de l'approche numérique à caractériser le vortex de sol.

- La convergence des calculs RANS n'est pas parfaite et malgré l'atteinte de plateau sur les indices de distorsion, de légères fluctuations persistent.
- La topologie de l'écoulement prédite numériquement est cohérente avec les observations expérimentales et les données présentes dans la littérature : en condition de vent de travers, un vortex de sol est ingéré au sein de la nacelle ainsi qu'une partie du vortex de contournement.
- La position du vortex au sein de la nacelle ainsi que l'impact de l'intensité du vent de travers sur cette position sont convenablement prédits par l'approche numérique.
- L'intensité de la chute de pression totale est sous-estimée par l'approche numérique, notamment pour les faibles  $U^*$ , c'est à dire les forts vents de travers. Il en résulte que l'indice de distorsion  $DC_{60}$  est aussi sous-estimé.
- La circulation  $\Gamma$  est correctement prédite par l'approche numérique pour les différents vents de travers étudiés.

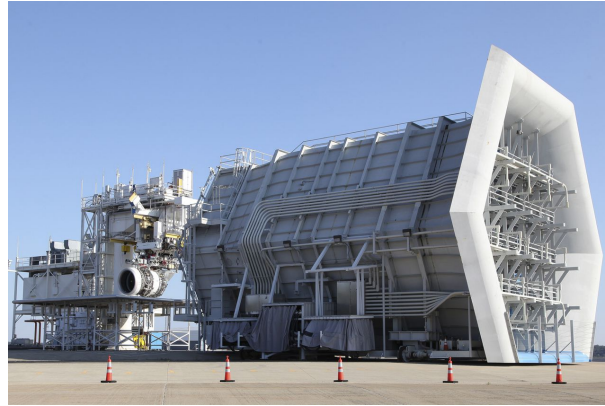


FIGURE III.8 – Essais de vent de travers avec faux sol dans la soufflerie GE à Peebles [2].

## 1.2 Caractérisation de la distorsion sur la configuration industrielle

L'objectif de cette section est d'utiliser l'approche numérique éprouvée sur la configuration académique de Murphy afin de caractériser la distorsion aérodynamique générée par le vortex de sol sur une configuration industrielle. Afin de mettre en avant les spécificités de la distorsion liée au vortex de sol, des calculs sans sol ont aussi été effectués.

### 1.2.1 Description de la configuration

La configuration industrielle étudiée dans ces travaux est un démonstrateur échelle 1 de nouvelles générations de turbofans. Une campagne d'essai complète a été réalisée sur ce démonstrateur comprenant des essais de performance, d'acoustique et d'opérabilité. La base de donnée qui en résulte permet la validation de simulations pour l'ensemble de ces disciplines. Dans le cadre de cette thèse, les essais d'intérêt concernent les mesures de réponse forcée sous vent de travers. Ces essais ont été réalisés dans une soufflerie ouverte à Peebles. Durant certains essais, un "faux sol" a été ajouté afin de capter l'interaction entre le moteur et le sol. La figure III.8 illustre ces essais avec la présence du faux sol au sein de la soufflerie *General Electric* de Peebles. Au cours des essais exploités dans ces travaux de recherches, aucune donnée sur la performance du fan n'a été mesurée. De plus, aucune caractérisation aérodynamique de la distorsion n'a été effectuée. Seules les aubes ont été instrumentées afin de suivre les niveaux de vibrations.

### 1.2.2 Approche numérique pour la configuration industrielle

La méthode numérique est très similaire avec celle utilisée sur la configuration de Murphy : calculs RANS avec un schéma spatial AUSM+(P) et le modèle de turbulence de  $k-\omega$  de Menter avec correction SST (cf II.2). La stratégie de maillage est légèrement différente dans la mesure où le maillage est constitué d'un seul tenant. L'approche chimère, utile pour mailler simplement la configuration axisymétrique de Murphy, n'est ici plus nécessaire dans la mesure où nous disposons d'un maillage. La taille du domaine représente un rectangle de hauteur et de largeur d'environ  $10D_t$  et de longueur (défini dans l'axe du vent de travers) d'environ  $20D_t$ . La taille du domaine a été légèrement réduite par rapport au cas de Murphy, notamment dans la zone en amont de la nacelle où l'écoulement est pratiquement uniforme. Pour cette configuration, le

rapport  $h/D_l$  est de 0.37<sup>2</sup>. Un maillage sans sol a aussi été généré afin de caractériser la distorsion naturelle de la nacelle sous vent de travers. Pour cela, la hauteur du domaine a été doublée et la condition d'adhérence présente au sol a été remplacée par une condition de symétrie. Le fan n'est pas présent dans ces calculs. Le débit est généré par une condition de pression au sein de la nacelle. La valeur de la pression est choisie pour donner un débit correspondant au régime de rotation menant à la coïncidence  $2F/4EO$  qui sera étudiée dans le prochain chapitre<sup>3</sup>. Les valeurs du vent de travers et de la vitesse au sein du moteur donnent un rapport de vitesse  $U^*$  proche de 13 ce qui donne lieu à l'apparition d'un vortex lorsque le sol est présent. Aucune couche limite n'est imposée au bord du domaine, elle se développe naturellement.

### 1.2.3 Résultats

#### Convergence en maillage

Une étude de convergence en maillage a été effectuée afin de s'assurer que les résultats soient indépendants de la discrétisation choisie. Cette étude a été réalisée sur la configuration avec sol. Le tableau III.1 représente le nombre de points en azimuth  $n_\theta$  et le nombre total de cellules  $n_{cells}$  des différents maillages évalués. L'évolution des indices  $IDC$ ,  $DC_{60}$  et  $\Gamma^*$  ainsi que les résidus sur  $\rho$  sont représentés au cours du calcul pour les différents maillages évalués sur la figure III.9. Les résidus chutent rapidement de plus de 4 ordres pour l'ensemble des maillages. Pour les maillages les plus denses (maillage 2, 3 et 4), les indices atteignent tous des plateaux au bout de 100 000 itérations. De plus, les courbes issues des maillages 3 et 4 se superposent. La convergence en maillage est alors atteinte à partir du maillage 3. Notons tout de même qu'un léger écart apparaît sur l' $IDC$ . Pour la suite, le maillage 3 sera conservé. Le maillage sans sol a été généré de façon à obtenir une discrétisation similaire au maillage 3.

| Maillage | $n_\theta$ | $n_{cells}$ |
|----------|------------|-------------|
| 1        | 240        | 11 M        |
| 2        | 480        | 26 M        |
| 3        | 536        | 31 M        |
| 4        | 600        | 41 M        |

TABLEAU III.1 – Caractéristiques des maillages évalués.

#### Topologie de l'écoulement

La figure III.10 illustre la topologie de l'écoulement dans les configurations avec et sans sol. En présence du sol, les lignes de courant de la figure III.10a représentent le vortex de sol ingéré au sein du moteur ainsi que la partie ingérée du vortex de contournement. La topologie est très proche de celle observée pour la configuration de Murphy (cf figure III.5). Concernant le cas sans sol, deux vortex de contournement contra-rotatifs sont présents. Une partie de ces vortex est ingérée comme l'illustrent les lignes de courant de la figure III.10b. Le vortex inférieur semble

2. Cette valeur ne correspond pas exactement au cahier des charges du moteur mais à la distance au "faux sol" durant les essais, qui est légèrement plus grande.

3. La relation entre débit et régime de rotation est donné par la ligne de fonctionnement sol qui est issue d'une approche 1D du fonctionnement global du moteur.

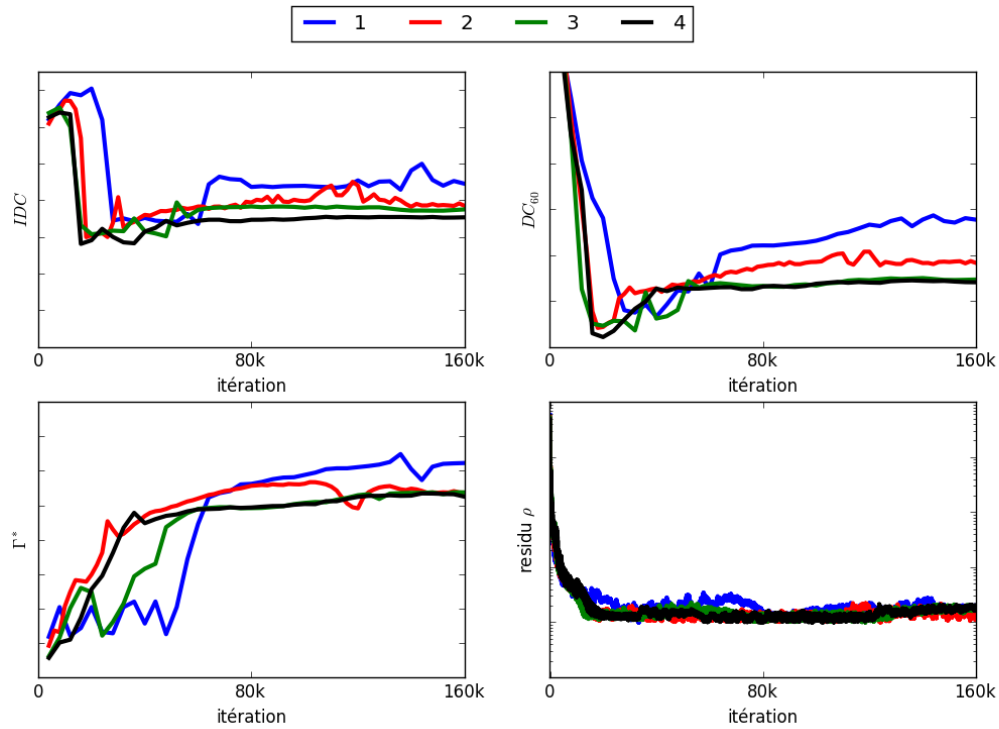


FIGURE III.9 – Convergence des indices  $IDC$ ,  $DC_{60}$ ,  $\Gamma^*$  et évolution des résidus sur  $\rho$  pour différents raffinements de maillages.

moins étendu que le vortex supérieur. Cette dissymétrie de l'écoulement provient de la non-axisymétrie de la nacelle. Ces topologies sont en accords avec celles présentes dans la littérature [48, 87, 96].

### Analyse de distorsion

Afin de caractériser la distorsion générée par la présence du vortex de sol, une coupe au sein du moteur est effectuée en amont de la position qu'aurait le fan s'il était présent. Les cartographies de pression totale adimensionnée par la pression totale infinie sont représentées figure III.11. Les variations d'efforts sur les aubes, responsables de la réponse forcée, vont être impactées par les variations de pression totale, c'est pourquoi il est intéressant d'analyser la

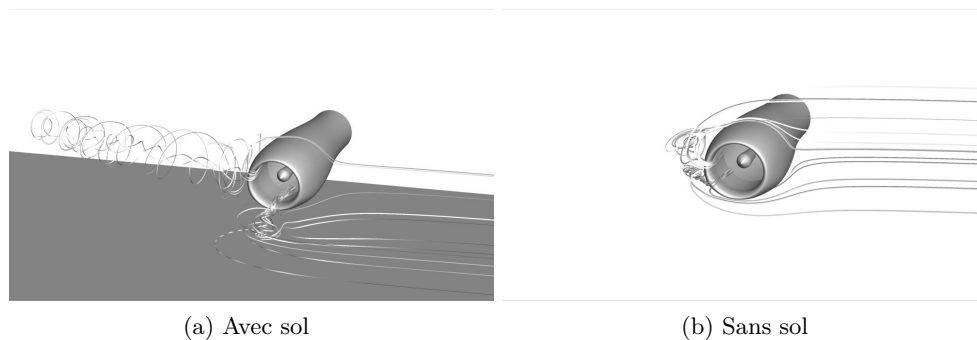


FIGURE III.10 – Topologie de l'écoulement.

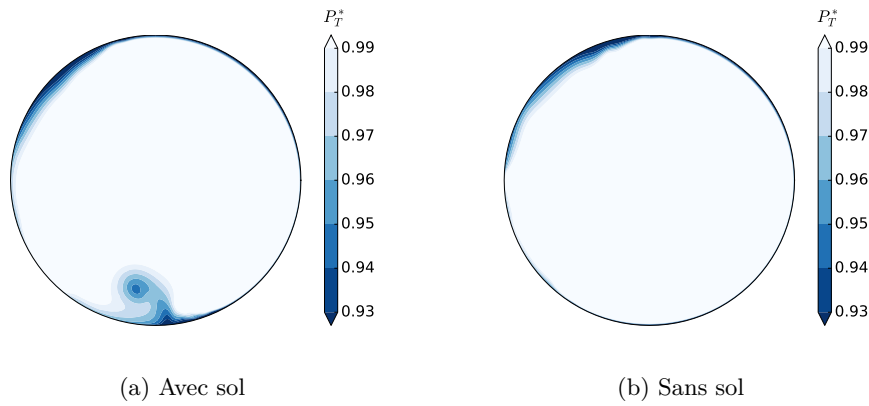


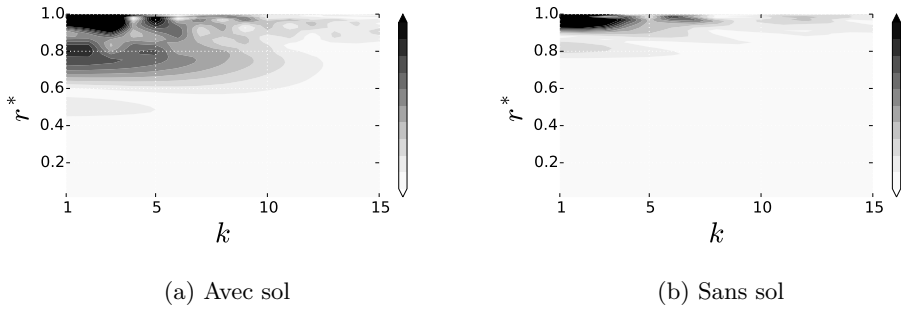
FIGURE III.11 – Cartographie de pression totale adimensionnée.

distorsion de pression totale. Le vortex, présent dans le cas avec sol (cf figure III.11a), entraîne une chute de pression totale localisée dans la partie inférieure de la cartographie. Le vortex est très légèrement décentré dans le sens du vent et se trouve proche du carter. La chute de pression totale est proche de 6% au coeur du vortex. Une seconde zone de distorsion de pression totale est présente dans la partie supérieure de la cartographie. Cette chute de pression totale est étendue azimuthalement (environ  $45^\circ$ ) mais reste confinée contre le carter. Cette zone est aussi observée dans le cas sans sol dont la cartographie est illustrée figure III.11b. Dans ce cas, sa position est légèrement différente. Cette zone correspond à la zone d'ingestion du vortex de contournement (le vortex supérieur dans le cas sans sol). Cette distorsion relève donc d'une distorsion naturelle de vent de travers.

Afin d'aborder le phénomène de réponse forcée, l'étude du contenu harmonique spatial de ces cartographies a été réalisée. Pour cela, on effectue pour chaque rayon l'analyse harmonique azimuthale de la pression totale. Les résultats pour les 15 premiers harmoniques sont illustrés dans la figure III.12 à l'aide de spectrogramme. L'axe des ordonnées correspond au rayon adimensionné de la cartographie  $r^*$  tandis que l'axe des abscisses correspond aux amplitudes des différentes harmoniques<sup>4</sup>. Dans le cas avec sol, illustré figure III.12a, la présence du vortex entraîne un contenu harmonique relativement élevé dans la mesure où des niveaux sont observés jusqu'à l'harmonique 10 pour des rayons entre  $r^* = 0.6$  et  $r^* = 0.9$ . Le maximum est atteint pour un rayon de  $r^* = 0.8$ , ce qui correspond au coeur du vortex. L'intensité des harmoniques de pression totale diminue lorsque les harmoniques augmentent dans cette région. Dans le cas sans sol (figure III.12b) aucun contenu harmonique n'est présent pour des rayons de  $r^* = 0$  à  $r^* = 0.8$ . Le contenu est cependant très riche pour les rayons les plus élevés où des niveaux sont relevés jusqu'à l'harmonique 15. Les niveaux sur les 5 premières harmoniques sont les plus élevées. Des niveaux similaires sont observés dans le cas avec sol pour ces rayons. L'allure est cependant légèrement différente, le contenu semble moins continu dans le cas avec vortex. En effet pour les rayons élevés, deux zones de distorsion sont présentes dans le cas avec sol, l'une provient du vortex de sol, l'autre provient de la zone d'ingestion du vortex de contournement. La présence de ces deux zones peut expliquer la différence d'allure du contenu harmonique.

En plus d'entraîner une chute de pression totale, le vortex est responsable d'une forte giration

4. En théorie ce graphique est discret mais afin de visualiser plus facilement les résultats les contours sont tracés de façon continu.

FIGURE III.12 – Spectrogramme de  $P_T$ .

de l'écoulement. Afin de quantifier cette distorsion, on introduit ici l'angle de giration  $\alpha$  défini à l'aide des vitesses axiale  $V_x$  et tangentielle  $V_t$  par <sup>5</sup> :

$$\alpha = \text{atan} \left( \frac{V_t}{V_x} \right) \quad (\text{III.7})$$

Cet angle représente la déviation du vecteur vitesse par rapport à sa composante axiale. Il est lié au changement d'angle d'attaque de l'aube. Plus la variation de cet angle est élevée, plus la variation d'efforts sera élevée. La figure III.13 représente la cartographie d'angle de giration des configurations avec et sans sol. Dans le cas avec sol, une poche d'angle positif et une poche d'angle négatif sont présentes proche du vortex. On retrouve donc les effets de rotation associés au vortex. Remarquons que les deux poches n'ont pas la même intensité. En effet, les angles positifs, situés proche du carter, atteignent des niveaux plus élevés que les angles négatifs. Cela peut s'expliquer par la présence du carter qui peut être vu comme une réduction de section qui entraîne une accélération du fluide dans cette zone et donc une augmentation de l'angle de giration. Au coeur du vortex, aucune vitesse tangentielle n'est présente et donc aucune distorsion d'angle n'est présente. Dans la partie supérieure de la cartographie, une autre zone de distorsion d'angle est aussi observée. Elle correspond à la zone d'ingestion du vortex de contournement, où une distorsion de pression totale avait aussi été observée. Cette zone est aussi présente dans la configuration sans sol illustrée figure III.13b. Contrairement à la cartographie de pression totale sans sol, une distorsion est présente sur l'ensemble de la cartographie d'angle de giration. Un angle positif est présent dans la partie supérieure gauche tandis qu'un angle négatif est présent sur la partie inférieure droite. Cette distorsion est assimilée à une distorsion naturelle liée au vent de travers et à l'asymétrie de la nacelle. Les angles observés dans ce cas sont plus faibles que ceux générés par la présence du vortex de sol. De plus, une étroite zone d'angles positifs est présente dans la zone où le vortex de contournement inférieure est ingéré (cf figure III.10b). Les angles de cette zone ont le signe inverse de la zone où le vortex de contournement supérieur est ingéré. Ces observations sont cohérentes avec le fait que les vortex de contournement soient contrarotatifs.

De la même façon que pour la pression totale, une analyse spatiale de l'angle de giration a été réalisée et est présentée pour les cas avec et sans sol sur la figure III.14. Le contenu est très différent de celui issu de l'analyse de la pression totale. Dans le cas avec sol, illustré figure III.14a, l'ensemble des rayons comportent des niveaux au moins sur les deux premières harmoniques. Les deux poches observées sur la cartographie d'angle de giration ont un contenu allant

5. Il est possible de définir un angle de giration par rapport à la vitesse méridienne qui comprend aussi la vitesse radiale  $V_r$ .

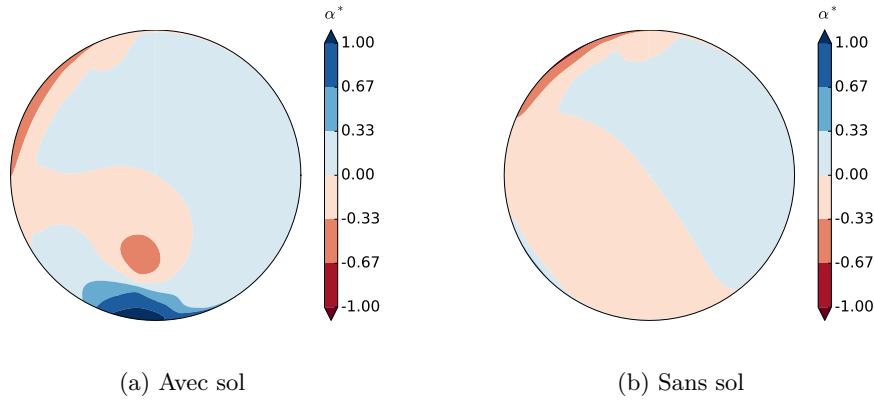


FIGURE III.13 – Cartographie d'angle de giration adimensionné  $\alpha^*$ .

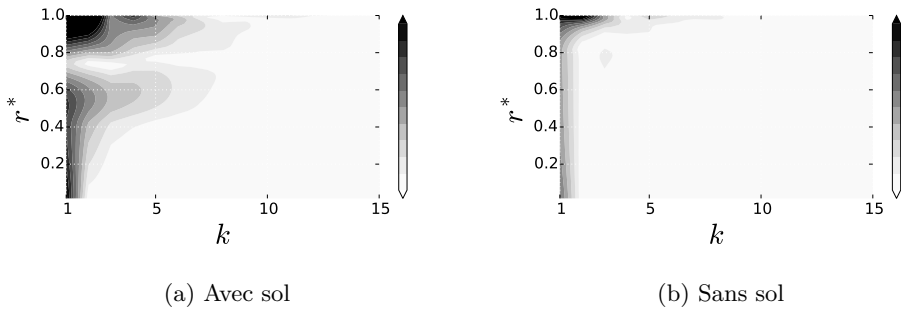


FIGURE III.14 – Spectrogramme de  $\alpha$ .

jusqu'à l'harmonique 6. Les niveaux diminuent lorsque les harmoniques augmentent. De très faibles niveaux sont observés au coeur du vortex ( $r^* \sim 0.8$ ) tandis que les niveaux sont plus élevés pour des rayons plus faibles (entre 0.4 et 0.7) et des rayons plus élevés (entre 0.8 et 1), notamment à partir de l'harmonique 2. Cette signature diffère de celle observée pour la pression totale dans le cas avec sol. Concernant le cas sans sol illustré figure III.13b, des niveaux sur le premier harmonique sont présents sur l'ensemble des rayons ce qui diffère aussi des observations effectuées sur la pression totale. L'ingestion des deux vortex de contournement entraîne des niveaux élevés pour les rayons proches du carter, notamment pour les trois premiers harmoniques.

#### 1.2.4 Conclusions

L'étude sur la configuration industrielle a permis de mettre en avant plusieurs points :

- L'approche numérique validée sur la configuration de Murphy a permis de modéliser l'écoulement autour de la configuration industrielle sous vent de travers avec et sans sol.
- La topologie des calculs avec et sans sol est cohérente avec les résultats obtenus sur la configuration de Murphy et ceux de la littérature.
- Dans la configuration sans sol, la topologie de l'écoulement est caractérisée par deux vortex de contournement contra-rotatifs. La distorsion de pression totale est uniquement présente dans la zone d'ingestion du vortex de contournement supérieur et reste confinée pour des

rayons très proches du carter. Les deux vortex de contournement produisent une légère distorsion d'angles, toujours confinée proche du carter. Contrairement à la pression totale, une variation de l'angle de giration est observée pour l'ensemble des rayons de la cartographie. Cette distorsion est produite par le vent de travers et l'asymétrie de la nacelle. Elle est visible uniquement sur le premier harmonique.

- Dans la configuration avec sol, la topologie de l'écoulement est caractérisée par la présence d'un vortex de sol et d'un vortex de contournement dont une partie est ingérée au sein du moteur. Le vortex de sol est responsable d'une chute de pression totale très localisée allant jusqu'à 6% au coeur du vortex. L'analyse spatiale de la pression totale montre que le vortex de sol entraîne un contenu fréquentiel relativement riche. Les niveaux diminuent cependant rapidement en fonction des harmoniques. Le vortex de sol entraîne aussi une distorsion d'angle. Le spectrogramme de l'angle de giration est très différent de celui de la pression totale : la giration impacte une plage plus élevée de rayon et le contenu fréquentiel est moins riche.

Cette section a permis de mettre en évidence les caractéristiques de la distorsion générée par le vortex de sol, la section suivante permettra de comprendre comment cette distorsion impacte le chargement aérodynamique du fan.

## 2 Chargement aérodynamique du fan lié au vortex de sol

Cette section a pour but d'analyser comment le vortex impacte le chargement du fan. Toujours afin de mettre en avant les spécificités du vortex, le chargement aérodynamique est aussi analysé dans la configuration sans sol.

### 2.1 Modélisation aérodynamique du fan avec cartographie de distorsion

#### 2.1.1 Approche numérique

##### Domaine et maillage

Un premier maillage d'un secteur du fan et de l'OGV a été généré avec le logiciel AutoGrid développé par NUMECA. Le maillage du fan est composé de  $2.5 \times 10^6$  cellules. Il comporte un jeu en tête d'aube et un bec séparant le flux primaire du flux secondaire. Afin d'illustrer ce maillage, une coupe en tête, une coupe en pied ainsi que le maillage surfacique de l'aube sont représentés figure III.15. L'OGV comporte  $1.2 \times 10^6$  ce qui donne un total pour le maillage d'un secteur du fan et d'un secteur OGV de  $3.7 \times 10^6$  cellules. Un second maillage comportant les 18 aubes du fan et un seul OGV a été généré en dupliquant l'aube du fan. Ce second maillage comporte  $45.9 \times 10^6$  cellules et est représenté figure III.16. Ce dernier maillage sera utilisé pour caractériser l'impact de la distorsion sur le chargement aérodynamique du fan.

##### Conditions limites

La figure III.16 représente le domaine de calcul et les conditions limites employées. La configuration de calcul est décrite en parcourant ces conditions limites dans le sens de l'écoulement :

- Condition d'injection subsonique : elle permet de représenter la distorsion en imposant la pression totale  $P_T$ , l'enthalpie totale  $h_T$ , le vecteur directeur  $n$  et les variables turbulentes.

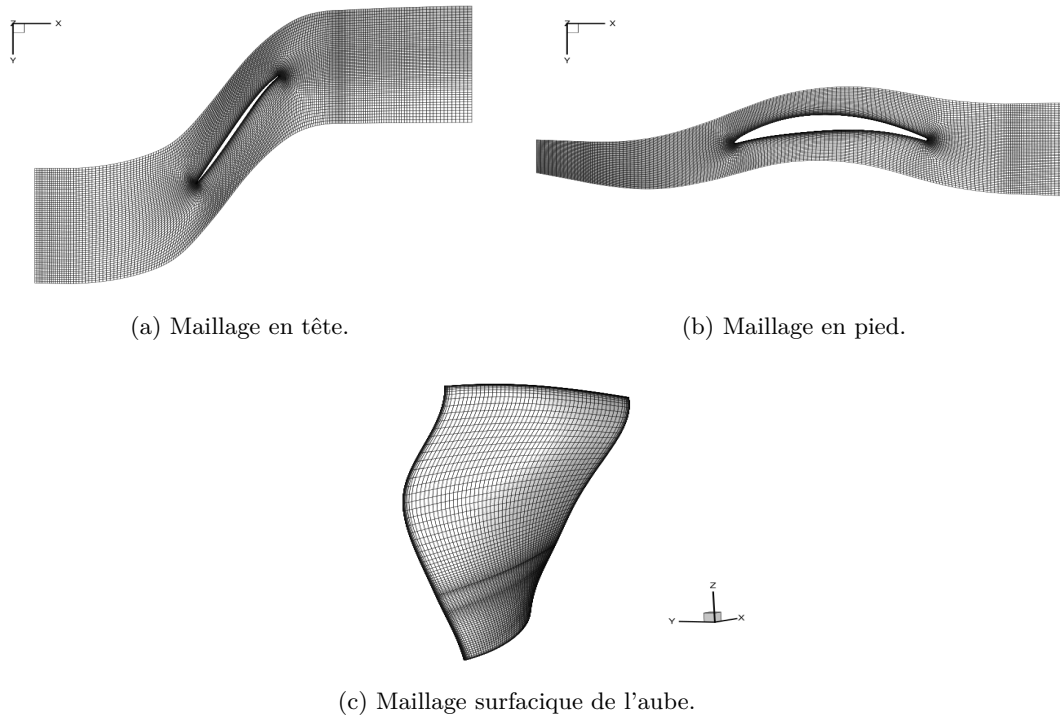


FIGURE III.15 – Maillage du fan.

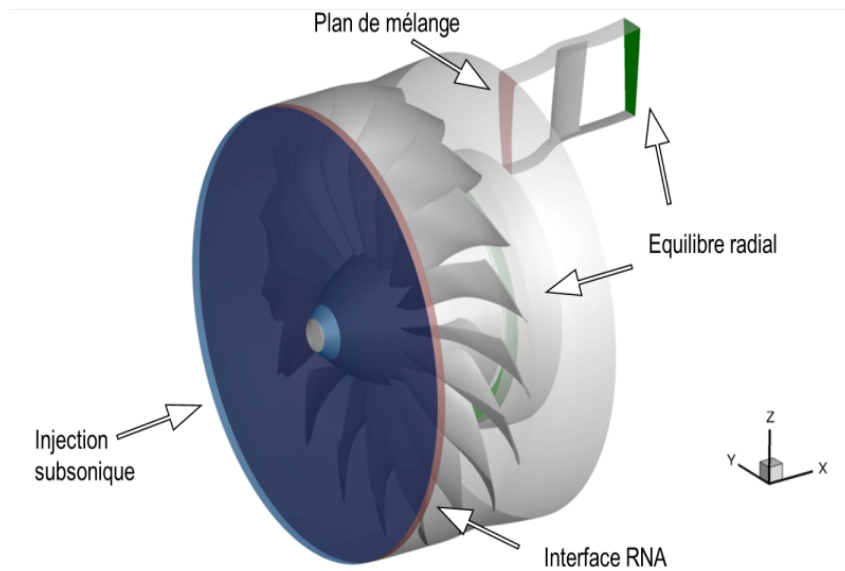


FIGURE III.16 – Domaine de calcul et conditions limites.

Ces grandeurs sont directement interpolées dans le champ aérodynamique issu des calculs d'entrée d'air présentés dans la section précédente (cf III.1.2).

- Interface RNA : à l'origine, la méthode RNA (pour Réduction du Nombre d'Aube) se base sur une hypothèse spatiotemporelle afin de réduire le coût de calcul instationnaire entre deux roues avec un nombre différent d'aubes [25]. Ici cette méthode est employée sans hypothèse spatiotemporelle pour faire transférer la distorsion provenant de la cartographie obtenue dans le repère fixe jusqu'au domaine fan qui est résolu dans le repère mobile. L'interface RNA sépare donc une zone tampon de 9 cellules comportant la condition limite d'injection (résolue dans le repère fixe) de la zone associée au fan (résolue dans le repère mobile) comme l'illustre la figure III.16. Une interpolation des champs aérodynamiques est effectuée à chaque itération en prenant en compte la position relative des deux zones (zones tampon et zone associée au fan). L'avantage de cette méthode sur des méthodes de type *sliding mesh* permettant aussi de faire communiquer deux zones en mouvant relatifs (disponibles dans elsA) est que l'interface RNA est gérée en coordonnée cylindrique ce qui est plus adapté aux configurations de turbomachines et entraîne de meilleures performances en temps de traitement. L'interface RNA est remplacée par un plan de mélange lors des calculs stationnaires d'initialisation.
- Plan de mélange : cette condition effectue une moyenne azimutale des grandeurs d'un côté de l'interface entre deux roues et crée des relations de compatibilité pour établir le champ de l'autre côté de l'interface. Elle permet de rendre un problème instationnaire, notamment caractérisé par les défilements des sillages, en un problème stationnaire. Le plan de mélange est ici utilisé afin de réduire le coût du calcul en ne modélisant qu'un seul OGV. En effet, à la sortie du plan de mélange l'écoulement est axisymétrique : tous les OGV travaillent de la même façon. Il est alors possible de n'en modéliser qu'un seul en introduisant des conditions de périodicité. L'effet moyen de l'OGV sur le fan est alors pris en compte, cependant aucune information d'hétérogénéités azimutales n'est transmise au fan. Les interactions instationnaires entre le fan et les OGV ne sont pas prises en compte.
- Équilibre radial : cette condition permet de vérifier l'équation dite de l'équilibre radial simplifiée  $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho U_\theta^2}{r}$ . Cette équation provient de la projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, exprimée dans le repère cylindrique  $(x, r, \theta)$ , selon la composante radiale. L'hypothèse est faite que la vitesse radiale est nulle ( $U_r = 0$ ) et que les termes visqueux peuvent être négligés. Cette équation n'est pas vérifiée dans le cas d'une condition classique de pression uniforme. La résolution de cette équation différentielle passe par la définition d'une valeur de pression que l'on nomme pression pivot, noté  $p_{piv}$ , localisée au rayon  $r_{piv}$ . Le débit, piloté par cette pression pivot, s'adapte donc à la giration de l'écoulement.

## Méthode numérique

La méthode numérique employée se base toujours sur la résolution des équations RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) à l'aide du solveur elsA (cf II.2). Le modèle de turbulence utilisé est le modèle  $k-\omega$  de Menter avec correction SST (cf II.2.3), qui a aussi été employé dans les calculs d'entrée d'air. Cela permet de conserver proprement la turbulence dans la cartographie de distorsion. Le schéma spatial adopté est le schéma de Jameson (cf II.2.4). Dans le cadre de calculs instationnaires, l'intégration temporelle s'effectue à l'aide du schéma de Gear avec 30 sous-itérations duales. Une convergence en pas de temps a été effectuée pour 720, 1440 et 3600

pas de temps par tour. Les écarts de débit moyens entre 720 et 3600 pas de temps sont de l'ordre de 0.1% et les écarts sur la composante harmonique des forces aérodynamiques généralisées (qui est la finalité du calcul dans un objectif de la réponse forcée, voir chapitre IV) sont de l'ordre de 2%. Le compromis entre la précision et le temps de calcul a été choisi à 720 pas de temps par tour.

### Limite de la modélisation

Deux principales limites sont à mentionner concernant la stratégie de calcul employée. La première provient de la condition limite d'injection pour modéliser le vortex. Celle-ci consiste en une forte restriction quant à l'interaction possible entre le fan et le vortex. De plus, afin d'obtenir un maillage fan axisymétrique facilitant la mise en donnée, la position axiale de la cartographie a été choisie au niveau où la nacelle est encore axisymétrique. Cette position est relativement proche du fan et il est possible que cela entraîne une interaction entre la condition limite et l'écoulement potentiel du fan. Cette interaction peut altérer les résultats. La solution afin d'éviter cette difficulté est d'effectuer un calcul complet comprenant la nacelle et le fan. Ce calcul sera abordé dans le chapitre IV. La seconde limite de la stratégie employée provient de la modélisation de l'OGV. En effet, la simplification entraînée par la présence du plan de mélange et la modélisation d'un unique OGV ne permet pas de prendre en compte l'interaction instationnaire entre le fan et les OGV. La distorsion avale due au défilement des OGV vue par le fan n'est pas modélisée. La charge aérodynamique liée à cette distorsion avale n'est donc pas intégrée dans nos calculs. Remarquons tout de même que Green [31] a montré que dans le cas d'une ingestion de vortex, cette composante est faible. La modélisation de l'ensemble des OGV entraînerait une forte augmentation du coût de calcul dans la mesure où le maillage comporterait beaucoup plus de cellules.

#### 2.1.2 Description du calcul

Un première étape a été de caractériser le champ taux de compression en fonction du débit du fan qui est représenté figure III.17. Plusieurs iso-vitesses y sont représentées, notamment l'iso-vitesse réalisée avec un régime de rotation  $\Omega_c$  qui correspond au régime cible de la coïncidence qui sera étudiée dans le chapitre suivant. Dans la mesure où aucune information sur la performance du moteur n'a été relevé lors des essais en vent travers qui nous intéressent dans cette thèse, il a été choisi de fixer la pression pivot à la valeur  $p_{piv}^A$  qui permet de se situer sur la ligne de fonctionnement du moteur. Cette ligne de fonctionnement est issue d'une étude thermodynamique 1D du fonctionnement global du moteur n'incluant aucune distorsion. Cette étape a été réalisée à l'aide de calculs stationnaires sur le maillage secteur sans distorsion (injection uniforme). Une fois cette pression pivot ciblée, un calcul stationnaire sur le maillage comportant les 18 aubes du fan a été effectué en présence de la cartographie (avec plan de mélange entre la zone amont de 9 cellules et le domaine fan) afin d'initialiser le calcul instationnaire qui nous intéresse.

Une évolution typique des débits en entrée et en sortie du domaine de calcul en fonction du nombre de tours de roue est illustrée figure III.18a et montre que les débits convergent après 4 tours de roues. Le nouveau point de fonctionnement issu du calcul instationnaire avec distorsion est représenté figure III.17. Le point de fonctionnement est fortement impacté par la présence de la cartographie. Une chute en débit ainsi qu'en taux de compression est observé. Une isosurface de  $\frac{\mu_t}{\mu}$  est représentée figure III.18b. Cette isosurface permet de montrer que la turbulence imposée

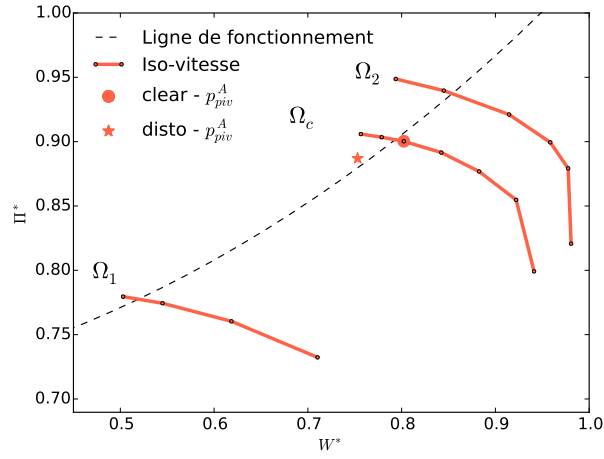
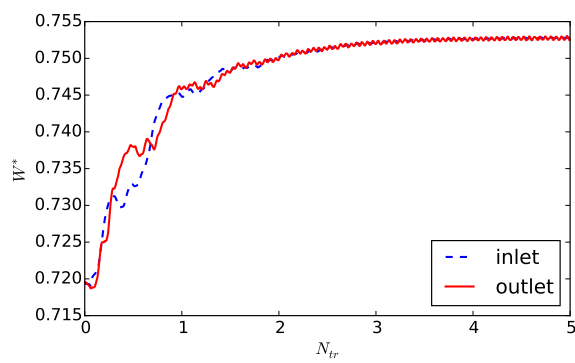
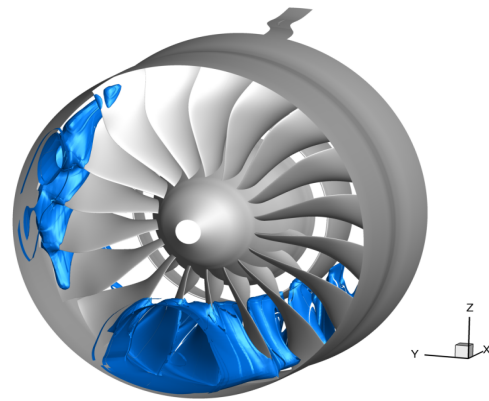
FIGURE III.17 – Diagramme taux de compression normalisé  $\Pi^*$  - Débit normalisé  $W^*$ .(a) Convergence du débit normalisé  $W^*$  en fonction du nombre de tour de roue  $N_{tr}$ (b) Isosurface de  $\frac{\mu t}{\mu}$ .

FIGURE III.18 – Illustration du calcul U-RANS avec cartographie.

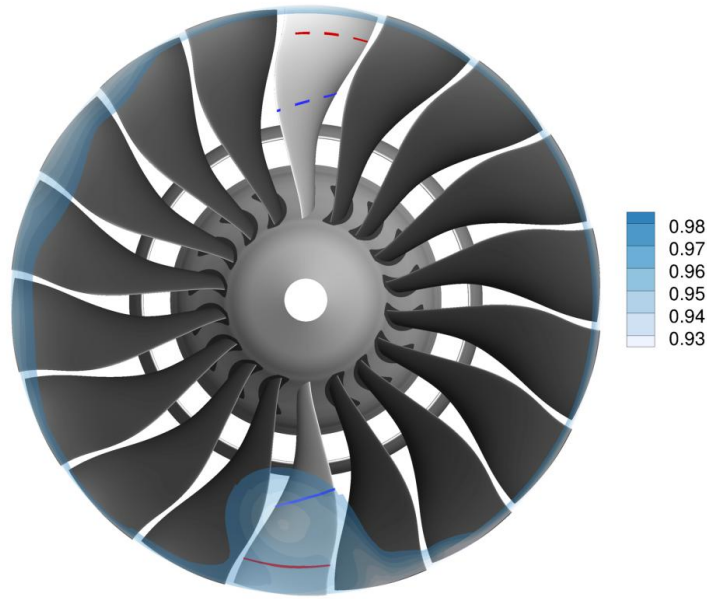


FIGURE III.19 – Illustration des coupes étudiées (cartographie de  $P_T^*$ ).

dans la cartographie est bien transmise au fan. C'est aussi un moyen de repérer les structures tourbillonnaires (vortex de sol et vortex de contournement) et leur interaction avec le fan. Afin de comprendre plus précisément l'interaction du vortex avec le fan, une analyse plus détaillée est présentée dans la section suivante.

## 2.2 Étude du chargement aérodynamique du fan

L'objectif de cette section est d'obtenir une meilleure compréhension de l'impact du vortex de sol sur le chargement aérodynamique du fan. Pour cela, la méthodologie détaillée dans la section précédente a été utilisée avec les cartographies issues des calculs avec sol et sans sol (voir figures III.13 et III.11).

### 2.2.1 Mécanisme d'excitation

Afin d'illustrer les mécanismes d'excitation liés à la présence du vortex de sol, il a été choisi de se concentrer sur deux positions azimutales repérées dans la figure III.19 par les aubes colorées en gris clair. La première se situe à  $\theta = \pi/2$ , relativement loin de la distorsion générée par le vortex. La seconde se situe à  $\theta = -\pi/2$  dans la zone de distorsion du vortex de sol illustrée ici par la chute de pression totale adimensionnée  $P_T^*$ . Ensuite, deux profils à hauteur de veines constante sont considérés :  $h^* = 50\%$ , représenté en bleu, et  $h^* = 85\%$ , représenté en rouge. Les répartitions de pression adimensionnée par une pression totale de référence  $p/P_{T_\infty}$  de ces profils sont décrites sur la figure III.20. La pression est une grandeur pertinente dans notre cas car les fluctuations de pression pilotent directement les fluctuations d'efforts sur l'aube qui seront responsables de la vibration. Les deux premières figures, III.20a et III.20b, décrivent ces répartitions de pression dans le cas sans sol. La répartition à  $\theta = \pi/2$ , représentée en pointillé, se superpose à celle évaluée à  $\theta = -\pi/2$ , représentée en trait plein, pour les deux hauteurs de veine considérées. Cela est cohérent avec les cartographies de distorsion obtenues sans sol dans

la mesure où les cartographies montraient très peu d'hétérogénéités dans ces zones (cf III.13b et III.11b). Les deux figures suivantes III.20c et III.20d traitent du cas avec sol. Concernant le profil situé à  $h^* = 50\%$ , des écarts apparaissent entre les deux positions azimutales. La dépression présente proche du bord d'attaque ( $0 < x/c < 0.2$ ) couvre une zone plus large lorsque le profil est dans le vortex. Cela traduit un profil qui travaille à une incidence plus élevée. Sur la partie aval du profil, les répartitions sur l'extrados et l'intrados au sein du vortex sont décalées par rapport à celles présentes loin du vortex : la pression y est plus faible. Concernant le profil situé à  $h^* = 85\%$ , la zone de dépression réduit fortement lorsque le profil est au sein du vortex ce qui traduit un profil qui travaille à une incidence plus faible. Le comportement proche du bord d'attaque observé à  $h^* = 85\%$  est donc opposé à celui observé à  $h^* = 50\%$ . Les fluctuations de pression présentent au bord d'attaque sont donc fortement reliées avec la distorsion d'angle de giration présentée figure III.13a : dans la zone inférieure de l'aube, la distorsion d'angle est négative ce qui correspond à une augmentation de l'angle d'attaque avec les conventions choisies tandis que pour la zone supérieure de l'aube, la distorsion d'angle est positive ce qui correspond à une diminution de l'angle d'attaque. Ces conclusions sont directement liées au sens de rotation du vortex et donc à l'orientation du vent de travers. Si le vent de travers provenait de l'autre côté, alors ces conclusions seraient inversées. Il en résulterait que les profils en tête, souvent les plus chargés, travailleraient en sur-incidence et pourraient alors probablement décrocher. Concernant le comportement sur la partie aval, il est le même pour les deux profils : la pression est décalée sur l'extrados et l'intrados vers des valeurs plus faibles. Ce décalage, qui n'était pas présent dans le cas sans sol, et donc probablement dû à la chute de pression totale. Afin de le vérifier, il a été choisi d'adimensionner la répartition de pression par une pression totale dépendant de la position azimutale  $\theta$  que l'on note  $P_{T\theta}$ . On choisit  $P_{T\theta=\pi/2} = P_{T\infty}$  et  $P_{T\theta=-\pi/2} = 0.945 \times P_{T\infty}$ . Le coefficient 0.945 est choisi car cette valeur est celle observée par les deux profils lorsqu'ils sont au sein du vortex (cf III.19). Les répartitions de pression avec ce nouvel adimensionnement, présentées figure III.20e et III.20f, se superposent dans la partie aval du profil. L'écart dans cette zone fait donc bien suite à la distorsion de pression totale générée par le vortex.

### 2.2.2 Considération harmonique

Il est important d'analyser le contenu harmonique du chargement afin de pouvoir estimer la réponse forcée du fan car celle-ci dépend directement des composantes harmoniques considérées (cf I.2.2). Une analyse harmonique des pressions sur une aube est donc effectuée sur un tour de roue. Les figures III.21 et III.22 représentent l'amplitude des fluctuations de pression sur l'extrados de l'aube pour les 4 premiers harmoniques. Dans le cas sans sol, les forts niveaux sont principalement confinés en tête d'aube sur la position du choc excepté pour le premier harmonique où l'ensemble du bord d'attaque présente un fort niveau. L'intensité décroît rapidement lorsque le nombre d'harmoniques augmente. Concernant le cas avec sol, les niveaux sont plus élevés pour l'ensemble des harmoniques. La répartition est similaire pour tous les harmoniques mais l'intensité décroît aussi rapidement. Les niveaux les plus élevés sont principalement au bord d'attaque, on notera deux zones particulières : partie supérieure, impactée par les angles de girations positifs et la partie inférieure, impactée par les angles de giration négatifs. Dans les deux cas (avec et sans sol) le contenu harmonique est très proche des spectrogrammes d'angle de giration présentés dans la section précédente (cf III.14).

Remarquons tout de même ici que les conclusions apportées sur l'impact du vortex de sol sur le chargement du fan sont directement liés à la configuration et au point de fonctionnement

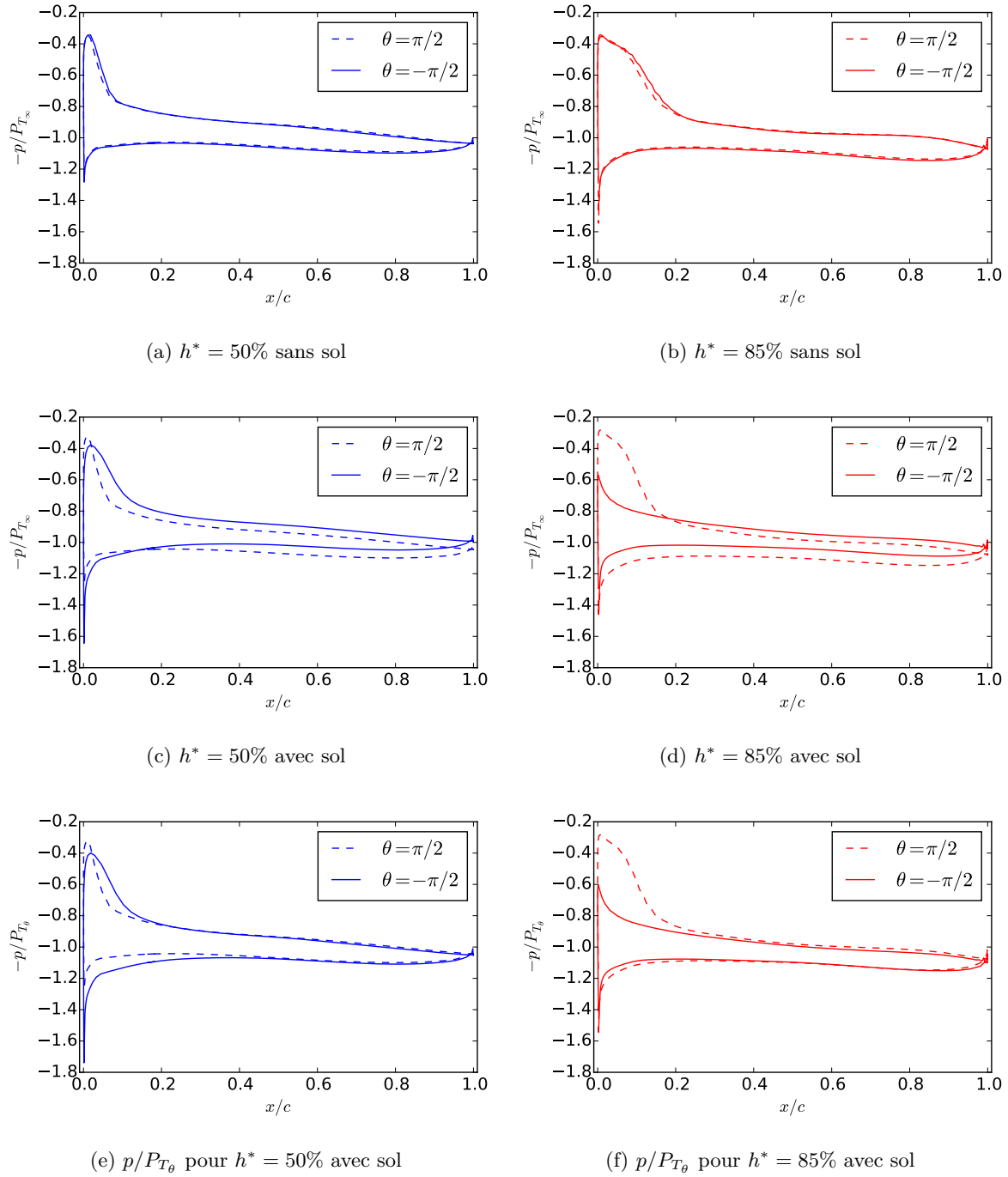


FIGURE III.20 – Comparaison des répartitions de pression à différentes hauteurs de veine ( $h^* = 85\%$  en rouge et  $h^* = 50\%$  en bleu) et pour différentes positions azimutales (*trait pointillé* pour  $\pi/2$  et *trait plein* pour  $-\pi/2$ ). Les figures (a) et (b) représentent  $p/P_{T_\infty}$  pour le cas sans sol, les figures (c) et (d) représentent  $p/P_{T_\infty}$  pour le cas avec sol. Les figures (e) et (f) représentent  $p/P_{T_\theta}$  pour le cas avec sol.

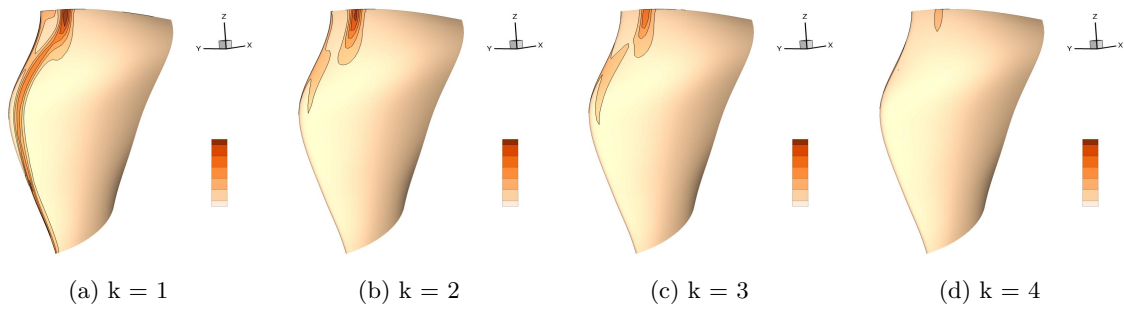


FIGURE III.21 – Amplitude des pressions sur l'extrados pour les 4 premiers harmoniques - Cas sans sol.

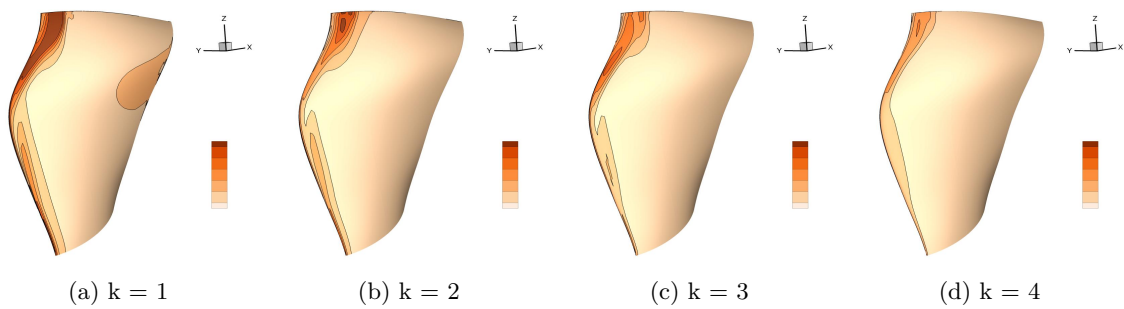


FIGURE III.22 – Amplitude des pressions sur l'extrados pour les 4 premières harmoniques - Cas avec sol.

étudiés. L'étude ne se prétend pas exhaustive sur ce point mais permet d'éclairer les mécanismes d'excitation responsables des forts niveaux vibratoires observés sur cette configuration.

### 3 Bilan

L'objectif de ce chapitre était de caractériser l'excitation aérodynamique générée par le vortex de sol. Afin de simplifier le problème, la démarche a consisté à d'abord modéliser la distorsion liée au vortex de sol sans modéliser le fan, puis à modéliser l'impact de cette distorsion sur le chargement aérodynamique du fan à l'aide d'une cartographie de distorsion. Les résultats reposent donc sur une hypothèse de découplage entre le fan et la distorsion. Concernant la modélisation de la distorsion liée au vortex de sol, une approche numérique RANS a été validée sur une nacelle académique avant d'être utilisée sur la nacelle industrielle. La comparaison entre des configurations avec et sans sol a permis de mettre en avant que le vortex de sol était responsable d'une chute de pression totale très localisée mais aussi qu'il était responsable de forts angles de giration impactant une zone radiale beaucoup plus large. Afin de comprendre comment le fan réagit à cette distorsion spécifique, des calculs U-RANS ont été effectués sur une configuration comportant toutes les aubes du fan, un unique OGV et où la distorsion est imposée à l'aide d'une cartographie. L'analyse des répartitions de pression a permis de mettre en évidence que la distorsion était responsable de fortes fluctuations de pression au niveau du bord d'attaque. Celles-ci sont principalement pilotées par la distorsion d'angle. Il est aussi important de relever que selon la position radiale considérée, le vortex entraîne soit une sur-incidence soit une sous-incidence des profils. Le chapitre suivant a pour objectif de modéliser la réponse linéaire

de la structure à l'excitation décrite dans ce chapitre.

## Chapitre IV

# Étude de la réponse forcée linéaire à la coïncidence du fan liée à l'ingestion de vortex

Ce quatrième chapitre a pour objectif d'étudier la réponse forcée linéaire du fan industriel sur la coïncidence  $2F/4EO$ . Une première section s'applique à détailler les hypothèses effectuées sur la modélisation de la structure. La seconde section consiste à détailler une approche découplée basée sur des calculs aéroélastiques en présence de distorsion. Cette méthode est présentée dans un cadre général de réponse forcée linéaire en symétrie cyclique avant d'être utilisée sur la configuration industrielle. Dans la troisième section, les distorsions prédites dans le chapitre précédant sont utilisées pour alimenter les calculs aéroélastiques à l'aide de cartographies. Les résultats issus de la méthode découplée sont ensuite comparés aux résultats d'une méthode couplée plus fidèle ainsi qu'à des résultats expérimentaux issus de la campagne d'essais de la configuration industrielle. Et enfin, la dernière section étudie l'impact de la prise en compte de la nacelle dans le calcul de réponse forcée.

### Sommaire

---

|          |                                                                                                |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Hypothèse de réduction . . . . .</b>                                                        | <b>101</b> |
| <b>2</b> | <b>Méthodologie de calcul de la réponse forcée basée sur une approche découplée . . . . .</b>  | <b>102</b> |
| 2.1      | Présentation . . . . .                                                                         | 102        |
| 2.2      | Hypothèses de l'approche découplée dans le cadre d'une structure à symétrie cyclique . . . . . | 102        |
| 2.3      | Stratégie d'extraction des termes aérodynamiques . . . . .                                     | 103        |
| 2.4      | Résolution de l'équation de la dynamique . . . . .                                             | 104        |
| <b>3</b> | <b>Réponse forcée linéaire sur la coïncidence <math>2F/4EO</math> . . . . .</b>                | <b>105</b> |
| 3.1      | Modèle aéroélastique . . . . .                                                                 | 105        |
| 3.1.1    | Modèle structure . . . . .                                                                     | 105        |
| 3.1.2    | Modèle aérodynamique . . . . .                                                                 | 107        |
| 3.2      | Estimation du niveau de réponse forcée . . . . .                                               | 107        |
| 3.2.1    | Approche découplée . . . . .                                                                   | 107        |
| 3.2.2    | Approche couplée . . . . .                                                                     | 111        |
| 3.3      | Confrontation aux essais . . . . .                                                             | 115        |

|          |                                                                                               |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Étude de l'impact du couplage fan-vortex sur la réponse forcée . . . . .</b>               | <b>116</b> |
| 4.1      | Mise en place du calcul complet fan nacelle . . . . .                                         | 116        |
| 4.2      | Caractérisation de la distorsion du calcul fan nacelle . . . . .                              | 119        |
| 4.3      | Évaluation de l'impact de la présence de la nacelle sur la réponse forcée du<br>fan . . . . . | 120        |
| <b>5</b> | <b>Bilan . . . . .</b>                                                                        | <b>123</b> |

---

## 1 Hypothèse de réduction

L'objectif de ce chapitre est de prédire le niveau vibratoire du fan liée à une excitation aérodynamique provenant de l'ingestion d'un vortex de sol. L'étude se concentre sur la prédiction du niveau vibratoire dans le cadre d'une coïncidence, c'est à dire lorsque qu'une fréquence d'excitation coïncide avec la fréquence propre d'un mode de la structure (cf section I.2.2). C'est dans ce cas que les niveaux vibratoires les plus critiques sont atteints. L'idée est donc de résoudre l'équation de la dynamique linéaire établie section II.1.1 et rappelée équation IV.1.

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = F(x, \dot{x}) \quad (\text{IV.1})$$

La taille de ce système dépend du nombre de degrés de liberté. Dans le cadre d'une configuration industrielle, ce nombre est trop grand pour résoudre le système directement. Afin de faciliter sa résolution, il est judicieux de se placer dans la base modale. Dans le cas où les efforts aérodynamiques ne dépendent pas du mouvement, le changement de base permet de découpler le système en autant d'équations modales indépendantes qu'il y a de degré de liberté. En effet les matrices de masse et de raideur sont diagonales dans la base modale, l'amortissement structural également, sous l'hypothèse de Basile. Cependant, les efforts aérodynamiques dépendent du déplacement de la structure et donc de la combinaison de l'ensemble des modes. Cela a pour conséquence que le terme d'effort vient coupler les modes. Cependant, les fréquences propres d'un disque aubagée à un diamètre donné sont relativement éloignées ce qui permet de considérer que le mouvement à la résonance est principalement piloté par le mode à la résonance. Le mouvement lié à ce mode va générer des forces aérodynamiques généralisées sur les autres modes à une fréquence qui sera donc loin de leurs fréquences propres. La réponse sera donc faible sur ces autres modes et n'impactera pas les forces aérodynamiques généralisées du mode étudié. Finalement, il est possible de découpler l'équation modale du mode à la résonance des autres modes.

De plus, dans le cadre d'une modélisation en symétrie cyclique, il existe un lien entre harmonique temporel d'une excitation fixe dans le repère absolu et mode à diamètre excité. Ce lien est représenté par le diagramme ZigZag (cf figure II.5) qui permet d'associer pour une harmonique d'excitation le diamètre qui va répondre.

Finalement, en supposant les fréquences propres assez éloignées et sous l'hypothèse de modélisation en symétrie cyclique, l'étude d'une coïncidence peut se restreindre à l'étude d'un unique mode double. Dans la base modale réelle de la structure complète (comprenant toutes les aubes) ce mode double est caractérisé par les modes  $\phi'$  et  $\phi''$  (cf II.1.3). L'équation dynamique linéaire projetée sur ces deux modes (cf équation II.68) s'écrit alors :

$$\frac{N}{2} \begin{bmatrix} \mu^s & 0 \\ 0 & \mu^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}' \\ \ddot{q}'' \end{bmatrix} + \frac{N}{2} \begin{bmatrix} \beta^s & 0 \\ 0 & \beta^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + \frac{N}{2} \begin{bmatrix} \gamma^s & 0 \\ 0 & \gamma^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag}(q', q'') \\ f''_{ag}(q', q'') \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

où les termes avec l'exposant  $s$  correspondent aux termes exprimés sur le secteur de référence et où  $N$  correspond au nombre d'aubes. De façon plus concise, l'équation précédente s'écrit :

$$\mu' \begin{bmatrix} \ddot{q}' \\ \ddot{q}'' \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + \gamma' \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Dans ce chapitre, on cherchera uniquement à résoudre cette équation.

## 2 Méthodologie de calcul de la réponse forcée basée sur une approche découplée en symétrie cyclique

### 2.1 Présentation

Cette section a pour objectif de présenter la méthodologie de calcul de réponse forcée développée dans le cadre de cette thèse afin de calculer la réponse vibratoire du fan liée à l'ingestion de vortex. Cette méthodologie appartient aux méthodes découplées (cf I.2.3). Généralement, les méthodes découplées se décomposent en deux calculs aérodynamiques indépendants. Le premier consiste à évaluer les forces aérodynamiques d'excitation. Pour cela, un calcul en présence de la distorsion est effectué en considérant l'aube rigide. Les efforts aérodynamiques, qui proviennent uniquement de la distorsion, sont alors projetées sur le mode d'intérêt afin d'obtenir les forces aérodynamiques généralisées d'excitation. Le second calcul est un calcul d'amortissement où la distorsion est supprimée. Durant ce calcul un mouvement harmonique d'amplitude arbitraire, mais relativement faible afin de rester dans le domaine linéaire, est imposé selon le mode étudié. Ce mouvement entraîne des fluctuations de pression qui sont projetées sur le mode d'intérêt. L'analyse du signal temporel permet alors d'extraire l'amortissement aérodynamique [61]. Une méthode découplée classique nécessite donc deux calculs avec deux mises en donnée différentes. Afin de simplifier la mise en donnée, l'approche choisie dans ces travaux de thèse consiste à effectuer deux calculs similaires dans lesquels la distorsion est présente en même temps qu'un mouvement harmonique est imposé. La différence entre les deux calculs dépend alors uniquement des caractéristiques des mouvements harmoniques (amplitude et/ou phase). La projection des efforts aérodynamiques sur le mode d'intérêt contient donc à la fois la partie liée à l'excitation et la partie liée à l'amortissement. La séparation de ces deux parties passe par l'hypothèse de linéarité. Une attention particulière a été portée à l'écriture des hypothèses découplées dans le cas d'une structure possédant des propriétés de symétrie cyclique.

### 2.2 Hypothèses de l'approche découplée dans le cadre d'une structure à symétrie cyclique

Les approches découplées se basent sur l'hypothèse de superposition qui consiste à séparer l'effort aérodynamique en effort d'excitation indépendant du mouvement, noté  $F^f$ , et en effort d'amortissement qui dépend uniquement du mouvement de l'aube, noté  $F^d$ .

$$F(x) = F^d(x, \dot{x}) + F^f \quad (\text{IV.4})$$

De plus, les forces d'amortissement sont supposées linéaires par rapport au déplacement et à la vitesse de déplacement. L'effort aérodynamique s'écrit alors à l'aide de la matrice de raideur aérodynamique, notée  $A$ , et la matrice d'amortissement aérodynamique, noté  $B$  :

$$F(x) = Ax + B\dot{x} + F^f \quad (\text{IV.5})$$

On se restreint ici à l'étude d'un unique mode double. Le déplacement  $x$  s'exprime alors :

$$x = \Phi q = \begin{bmatrix} \phi' & \phi'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Une fois projeté les modes réels  $\phi'$  et  $\phi''$ , le vecteur de forces aérodynamiques généralisées sous les hypothèses de la méthode découplée devient :

$$\begin{bmatrix} \phi'^T F \\ \phi''^T F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} = \mathcal{A}' \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} + \mathcal{B}' \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Cette définition fait intervenir les coordonnées généralisées  $q'$  et  $q''$  associées aux modes  $\phi'$  et  $\phi''$ , les forces aérodynamiques généralisées d'excitation  $f'_{ag} = \phi'^T F^f$  et  $f''_{ag} = \phi''^T F^f$  ainsi que la matrice de raideur aérodynamique généralisée  $\mathcal{A}'$  et la matrice d'amortissement aérodynamique généralisée  $\mathcal{B}'$  qui sont définies dans les équations suivantes :

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} \phi'^T \\ \phi''^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \phi' & \phi'' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

$$\mathcal{B}' = \begin{bmatrix} \phi'^T \\ \phi''^T \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \phi' & \phi'' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

A l'aide des propriétés de symétrie cyclique de la structure et de la forme de la base modale il est possible de montrer que les matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  sont de la forme suivante (cf annexe C) :

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^R & a^I \\ -a^I & a^R \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b^R & b^I \\ -b^I & b^R \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Le comportement aérodynamique peut alors se résumer aux termes de raideurs aérodynamique modale, d'amortissement aérodynamique modale et aux forces aérodynamique généralisée d'excitation. La section suivante propose une méthodologie permettant d'extraire ces grandeurs à l'aide de calculs aéroélastiques.

### 2.3 Stratégie d'extraction des termes aérodynamiques

L'idée de la stratégie proposée est d'effectuer deux calculs en présence de la même distorsion avec deux mouvements harmoniques différents de pulsation  $\omega$ . Le mouvement est dicté par l'amplitude et la phase des modes  $\phi'$  et  $\phi''$ . Le premier calcul, indicé par 1, est donc caractérisé par les deux coordonnées généralisées  $\hat{q}'_1$  et  $\hat{q}''_1$  contenant ces informations de phase et d'amplitude. Le second, indicé par 2, est lui caractérisé par les deux coordonnées généralisés  $\hat{q}'_2$  et  $\hat{q}''_2$ . Ces termes sont complexes car on considère un mouvement harmonique qu'il est facile de traiter en formalisme complexe, cependant la base modale choisie est bien la base modale réelle. Finalement, les coordonnées généralisées associées au mouvement pour les deux calculs se décomposent de la façon suivante :

$$q_1 = \begin{bmatrix} q'_1 \\ q''_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}'_1 e^{j\omega t} \\ \hat{q}''_1 e^{j\omega t} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} q'_2 \\ q''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}'_2 e^{j\omega t} \\ \hat{q}''_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Les forces aérodynamiques généralisées de ces deux calculs se décomposent donc comme la somme de termes qui dépendent du mouvement harmonique choisi et les termes associés aux

forces d'excitation indépendante du mouvement :

$$f_{ag,1} = \mathcal{A}' \begin{bmatrix} q'_1 \\ q''_1 \end{bmatrix} + \mathcal{B}' \begin{bmatrix} \dot{q}'_1 \\ \dot{q}''_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

$$f_{ag,2} = \mathcal{A}' \begin{bmatrix} q'_2 \\ q''_2 \end{bmatrix} + \mathcal{B}' \begin{bmatrix} \dot{q}'_2 \\ \dot{q}''_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

En appliquant la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  sur la différence des forces aérodynamiques généralisées il vient :

$$\mathcal{F}(f_{ag,1} - f_{ag,2}) = (\mathcal{A}' + j\omega\mathcal{B}')\mathcal{F}(q_1 - q_2) \quad (\text{IV.16})$$

Les termes d'excitation disparaissent car ils sont supposés identiques dans les deux calculs via l'hypothèse de superposition. On définit alors la différence des forces aérodynamiques généralisées par  $f_{ag,3} = f_{ag,1} - f_{ag,2}$  et la différence des coordonnées généralisées  $q_3 = q_1 - q_2$ . De plus en explicitant les termes des matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$ , l'équation précédente devient alors :

$$\begin{bmatrix} \hat{f}'_{ag,3} \\ \hat{f}''_{ag,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} a^R & a^I \\ -a^I & a^R \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} b^R & b^I \\ -b^I & b^R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{q}'_3 \\ \hat{q}''_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Ce système représente deux équations complexes où les seuls termes inconnus sont les scalaires  $a^R$ ,  $a^I$ ,  $b^R$  et  $b^I$ . En décomposant partie réelle et partie imaginaire, le système IV.17 devient :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Re(\hat{q}'_3) & -\Im(\hat{q}'_3) & \Re(\hat{q}''_3) & -\Im(\hat{q}''_3) \\ \Im(\hat{q}'_3) & \Re(\hat{q}'_3) & \Im(\hat{q}''_3) & \Re(\hat{q}''_3) \\ \Re(\hat{q}''_3) & -\Im(\hat{q}''_3) & -\Re(\hat{q}'_3) & \Im(\hat{q}'_3) \\ \Im(\hat{q}''_3) & \Re(\hat{q}''_3) & -\Im(\hat{q}'_3) & -\Re(\hat{q}'_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^R \\ \omega b^R \\ a^I \\ \omega b^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\hat{f}'_{ag,3}) \\ \Im(\hat{f}'_{ag,3}) \\ \Re(\hat{f}''_{ag,3}) \\ \Im(\hat{f}''_{ag,3}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

La résolution de ce système permet donc d'extraire les matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$ . Il est alors facile de remonter aux efforts d'excitation  $f'_{ag}$  et  $f''_{ag}$  en utilisant l'équation IV.14 ou l'équation IV.15.

## 2.4 Résolution de l'équation de la dynamique

En introduisant les termes aérodynamiques décrits dans l'équation IV.15 dans l'équation modale IV.3, l'équation de la dynamique linéaire dans une base réduite à un seul mode double donne à l'aide d'une approche découplée le système suivant :

$$\mu' \begin{bmatrix} \ddot{q}' \\ \ddot{q}'' \end{bmatrix} + (\beta' - \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + (\gamma' - \mathcal{A}') \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Les deux équations de ce système sont couplées par les matrices de raideur aérodynamique généralisée et d'amortissement aérodynamique généralisé. L'analyse modale sur le secteur de référence a permis d'évaluer la masse généralisée  $\mu'$  et la raideur généralisée  $\gamma'$  (cf section II.1.3). Les forces aérodynamiques généralisées d'excitation ainsi que les matrices de raideur aérodynamique généralisée et d'amortissement aérodynamique généralisé ont été obtenues à l'aide de deux calculs aéroélastiques. Afin de résoudre cette équation, on se place dans le domaine fréquentiel. Les efforts sont supposés harmoniques de pulsation  $\omega$ . En effet, on considère que le mode étudié est excité principalement par la fréquence proche de sa fréquence de résonance.

$$f'_{ag} = \begin{bmatrix} \hat{f}'_{ag} e^{j\omega t} \\ \hat{f}''_{ag} e^{j\omega t} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

Les coordonnées généralisées sont elles aussi harmoniques de même pulsation  $\omega$  :

$$q' = \begin{bmatrix} \hat{q}' e^{j\omega t} \\ \hat{q}'' e^{j\omega t} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

En utilisant les deux équations précédentes et en simplifiant les termes en  $e^{j\omega t}$ , il vient :

$$\left[ (\gamma' - \mathcal{A}') - \omega^2 \mu' + j\omega(\beta' - \mathcal{B}') \right] \begin{bmatrix} \hat{q}' \\ \hat{q}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{ag}^f \\ \hat{f}_{ag}^f \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

La résolution de cette équation passe donc par l'inversion de la matrice  $(\gamma' - \mathcal{A}') - \omega^2 \mu' + j\omega(\beta' - \mathcal{B}')$  qui est une matrice  $2 \times 2$ . Finalement, la méthode proposée permet de calculer la réponse modale à une excitation aérodynamique à l'aide d'une approche découplée nécessitant deux calculs aéroélastiques. Cette méthode va être mise en application dans la section suivante afin d'estimer le niveau vibratoire du fan de la configuration industrielle en condition de résonance.

### 3 Réponse forcée linéaire sur la coïncidence 2F/4EO

L'objectif de cette section est de prédire le niveau vibratoire généré par l'ingestion de vortex sur la configuration industrielle. On cherche ici à étudier la coïncidence 2F/4EO car un vortex était présent au régime correspondant à cette coïncidence. Après avoir présenté les modèles mécanique et aérodynamique, la méthode découplée présentée dans la section précédente est utilisée afin d'estimer le niveau vibratoire. Une approche couplée est aussi utilisée afin de valider l'approche découplée. Finalement, les résultats numériques sont confrontés aux résultats expérimentaux. Dans ce chapitre, les échelles des figures illustrant des niveaux de vibration et des forces aérodynamiques généralisées ont été supprimées pour des raisons de confidentialité.

#### 3.1 Modèle aéroélastique

##### 3.1.1 Modèle structure

La structure étudiée comporte des propriétés de symétrie cyclique. Il est alors possible de modéliser un unique secteur afin de caractériser son comportement dynamique (cf II.1.3). Le modèle éléments finis du secteur de référence  $S_0$  comportant une aube et un secteur de disque est représenté figure IV.1. Le secteur est discrétisé en 75 000 éléments hexaédriques et tétraédriques de degrés 2. Il comporte près de 800 000 degrés de liberté. Les calculs statique et dynamique sont réalisés à l'aide du logiciel éléments finis SAMCEF.

Un premier calcul non-linéaire statique est effectué afin de calculer la déformée statique liée aux efforts centrifuges et aux efforts aérodynamiques stationnaires. Le calcul est effectué en symétrie cyclique avec une hypothèse de diamètre 0 qui correspond bien au type de chargement appliqué. L'interface entre l'aube et le disque est gérée à l'aide de la loi de contact unilatérale (voir figure II.8) et de la loi de Coulomb faisant intervenir le coefficient de frottement  $C_f$  dont la valeur est choisie à 0.1 (voir figure II.9). En plus d'obtenir la déformée statique, le calcul permet d'établir la matrice de raideur géométrique (voir section II.1.1).

La structure est ici modélisée uniquement par le mode double 2F-4D (cf section IV.1) qui excité à la coïncidence 2F/4EO (cf diagramme ZigZag figure II.5). Des conditions limites de symétrie cyclique ont donc été utilisées sur les frontières du disque de type 4 diamètres. Les nœuds à l'interface entre le disque et l'aube sont collés lors de l'analyse modale. La partie réelle  $\phi^R(S_0)$  et la partie imaginaire  $\phi^I(S_0)$  du mode 2F à 4 diamètres sont représentées figure IV.2.

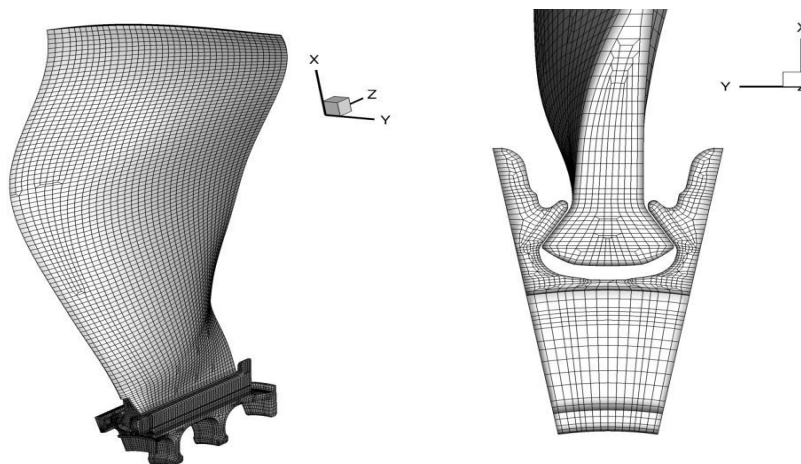


FIGURE IV.1 – Modèle éléments finis du secteur de référence aube disque du fan.

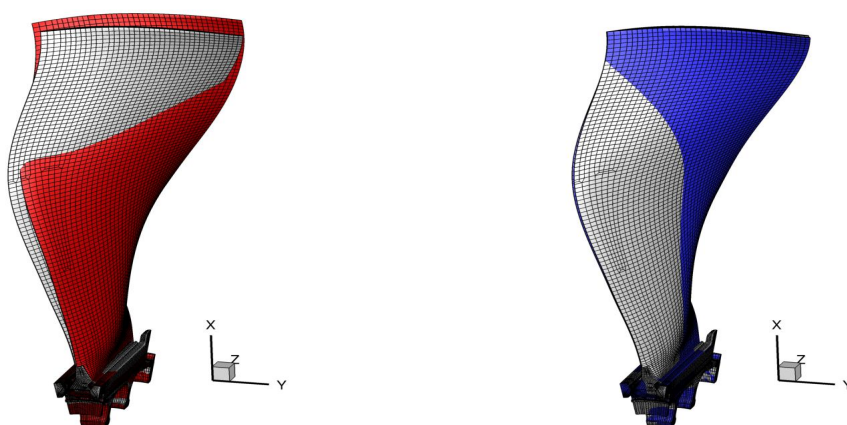
(a) Partie réelle :  $\phi^R$ (b) Partie imaginaire :  $\phi^I$ 

FIGURE IV.2 – Mode 2F à 4 diamètres

Les deux modes réels de la structure complète,  $\phi'$  et  $\phi''$ , associés au mode double peuvent être déterminés à l'aide de ces deux composantes et des relations de symétrie cyclique, présentées équation II.52 et rappelées ci-dessous :

$$\begin{cases} \phi'(S_k) &= \phi^R \cos(kn\alpha) - \phi^I \sin(kn\alpha) \\ \phi''(S_k) &= \phi^R \sin(kn\alpha) + \phi^I \cos(kn\alpha) \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Avec  $n = 4$  et  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ . L'analyse modale sur secteur a donc permis d'obtenir les modes  $\phi'$  et  $\phi''$  sur la structure complète.

### 3.1.2 Modèle aérodynamique

La modélisation aérodynamique est similaire à celle utilisée dans le chapitre concernant la caractérisation aérodynamique de l'excitation générée par le vortex de sol. Le maillage est constitué d'une zone d'injection où la cartographie de distorsion est imposée, des 18 aubes du fan et d'un seul OGV. Les détails de l'approche U-RANS utilisée sont présentés section III.2.1. La principale différence réside dans le fait que l'aube n'est plus considérée rigide dans ces calculs. L'aube est amenée à se déplacer selon les deux modes  $\phi'$  et  $\phi''$ . Ce mouvement issu de l'analyse modale définie sur le maillage éléments finis est alors projeté sur le maillage surfacique de l'aube. Le déplacement du maillage est réalisé à l'aide d'une méthode d'analogie de mécanique continu (cf II.2.5). Les grandeurs d'intérêt au sein de ces calculs aéroélastiques sont les forces aérodynamiques généralisées qui sont la projection des efforts aérodynamiques sur les modes. A chaque itération physique du calcul, les forces de pressions s'exerçant sur la surface de l'aube sont projetées sur les modes  $\phi'$  et  $\phi''$  :

$$f'_{ag} = - \int_{dS} p \phi' \cdot s dS \quad (\text{IV.24})$$

$$f''_{ag} = - \int_{dS} p \phi'' \cdot s dS \quad (\text{IV.25})$$

où  $p$  est la pression statique et  $s$  le vecteur normale unitaire à la surface  $dS$ .

## 3.2 Estimation du niveau de réponse forcée

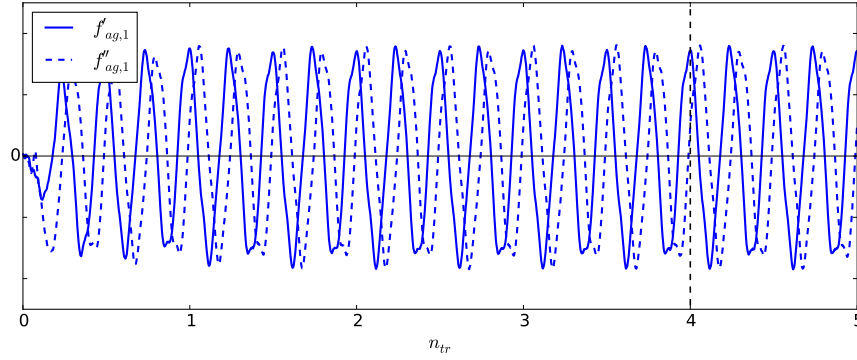
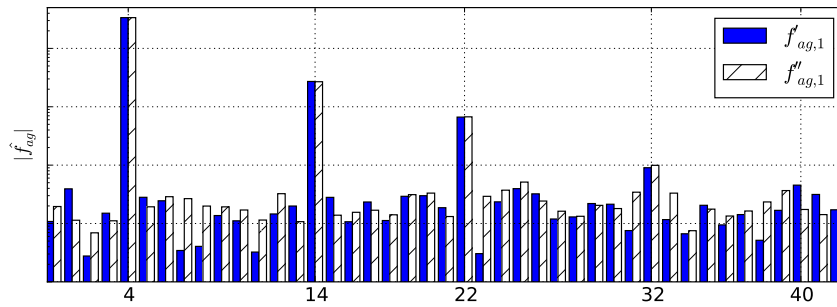
### 3.2.1 Approche découplée

La méthode découplée utilisée à été décrite en détail dans la section IV.2. Elle consiste à effectuer deux calculs similaires dans lesquels la distorsion est présente en même temps qu'un mouvement harmonique imposé. Elle est mise en pratique ici dans le cadre d'une ingestion de vortex. La cartographie de distorsion utilisée dans les calculs aéroélastiques présentés dans cette section est celle extraite du calcul nacelle en présence du sol (cf section III.1.2). Les mouvements choisis pour les deux calculs aéroélastiques, indicés par 1 et 2, sont présentés dans l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} q'_1 \\ q''_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

$$\begin{bmatrix} q'_2 \\ q''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}'_2 e^{j\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Remarquons ici que le premier calcul correspond à un calcul d'excitation classique dans la mesure où aucun mouvement n'est prescrit. Le second calcul diffère du calcul d'amortissement

FIGURE IV.3 – Évolution temporelle de  $f'_{ag,1}$  et  $f''_{ag,1}$ FIGURE IV.4 – Contenu fréquentiel de  $f'_{ag,1}$  et  $f''_{ag,1}$  sur le dernier tour de roue (échelle logarithmique).

classique car il comporte à la fois la distorsion et un mouvement harmonique imposé. La mise en donnée est donc la même pour ces deux calculs. La fréquence du mouvement harmonique est  $\omega = 4\Omega$  où  $\Omega$  représente la vitesse de rotation du fan. Les forces aérodynamiques généralisées des deux calculs,  $f_{ag,1}$  et  $f_{ag,2}$  peuvent donc se mettre sous la forme suivante :

$$f_{ag,1} = \begin{bmatrix} f'_{ag,1} \\ f''_{ag,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag} f' \\ f''_{ag} f' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

$$f_{ag,2} = \begin{bmatrix} f'_{ag,2} \\ f''_{ag,2} \end{bmatrix} = \mathcal{A}' \begin{bmatrix} q'_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{B}' \begin{bmatrix} \dot{q}'_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{ag} f' \\ f''_{ag} f' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Les forces aérodynamiques généralisées du premier calcul sont directement les forces aérodynamiques généralisées d'excitation car aucun mouvement n'est prescrit dans ce calcul. L'évolution temporelle de ces forces aérodynamiques généralisées sont représentées figure IV.3. Quelques tours de roue sont nécessaires à la convergence des signaux. Les amplitudes des composantes harmoniques du signal sur la dernière rotation sont représentées figure IV.4. Le contenu harmonique est directement en lien avec le diagramme ZigZag (cf figure II.5). En effet, les harmoniques qui ressortent sont les harmoniques  $n = 4$ ,  $N - n = 14$ ,  $N + n = 22$  et  $2N - n = 32$  (où  $N = 18$  est le nombre d'aube et  $n = 4$  le nombre à diamètre étudié). Le niveau décroît cependant très rapidement dès lors que les harmoniques augmentent. Les forces aérodynamiques généralisées sont donc principalement pilotées par l'harmonique 4. Les deux modes ont une amplitude similaire et sont déphasés de  $90^\circ$ .

Dans le second calcul un mouvement est imposé sur le mode  $\phi'$ . Les évolutions temporelles des forces aérodynamiques généralisées du second calcul,  $f'_{ag,2}$  et  $f''_{ag,2}$ , sont superposées à celles

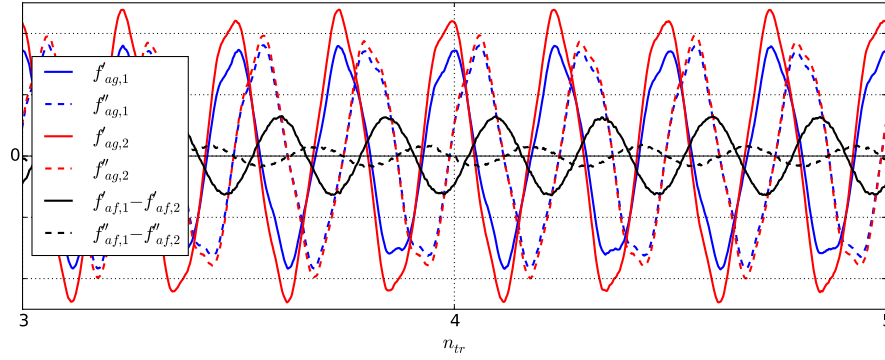


FIGURE IV.5 – Évolution temporelle des forces aérodynamiques généralisées des deux calculs ainsi que de la différence des deux.

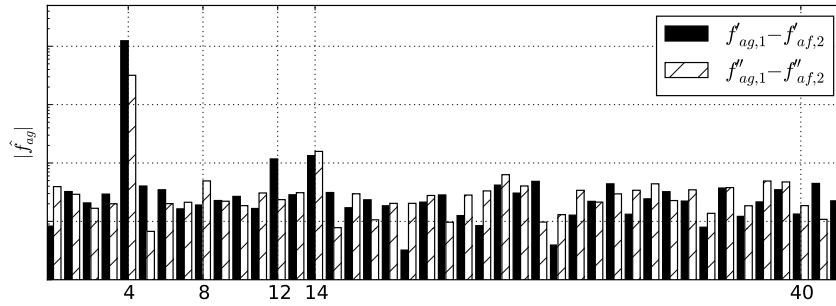


FIGURE IV.6 – Contenu fréquentiel de  $f'_{ag,1} - f'_{af,2}$  et  $f''_{ag,1} - f''_{af,2}$  sur le dernier tour de roue (échelle logarithmique).

issues du premier calcul figure IV.5. L'ajout d'un mouvement harmonique sur le mode  $\phi'$  entraîne une dissymétrie entre les forces aérodynamiques généralisées du mode  $\phi'$  et du mode  $\phi''$ . Les signaux correspondant à la différence des deux calculs sont aussi représentés sur la figure. Ces signaux correspondent aux forces aérodynamiques généralisées d'amortissement dans la mesure où les forces aérodynamiques d'excitation sont supprimées lors de la soustraction. Le mouvement imposé est uniquement selon le mode  $\phi'$  mais des niveaux apparaissent sur le mode  $\phi''$ . Il y a bien un couplage aérodynamique entre les modes  $\phi'$  et  $\phi''$  correspondant aux termes extra-diagonaux des matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$ . Le contenu fréquentiel de ces forces aérodynamiques généralisées est présenté figure IV.6. Les signaux sont quasiment harmoniques de pulsation  $4\Omega$ . De très faibles niveaux sont cependant présents sur l'harmonique 12, qui est un multiple de la fréquence du mouvement, et sur l'harmonique 14 qui provient du contenu fréquentiel de l'excitation. L'analyse harmonique de ces signaux permet d'extraire les termes des matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  comme cela a été détaillé dans la description de la méthode (cf IV.2).

Finalement, la résolution de l'équation de la dynamique (équation IV.19) dans le domaine fréquentiel nous permet d'obtenir l'amplitude  $|\hat{q}|$  et la phase  $\lambda$  des coordonnées généralisées des modes  $\phi'$  et  $\phi''$  comme l'illustre la figure IV.7. La résolution a été effectuée en négligeant la valeur de l'amortissement mécanique  $\beta$ . Ce choix a été fait car il est très difficile d'obtenir une estimation d'un amortissement mécanique de telles structures en rotation. Ce point sera discuté lors de la dernière partie de ce chapitre. Précisons que les termes mécaniques et aérody-

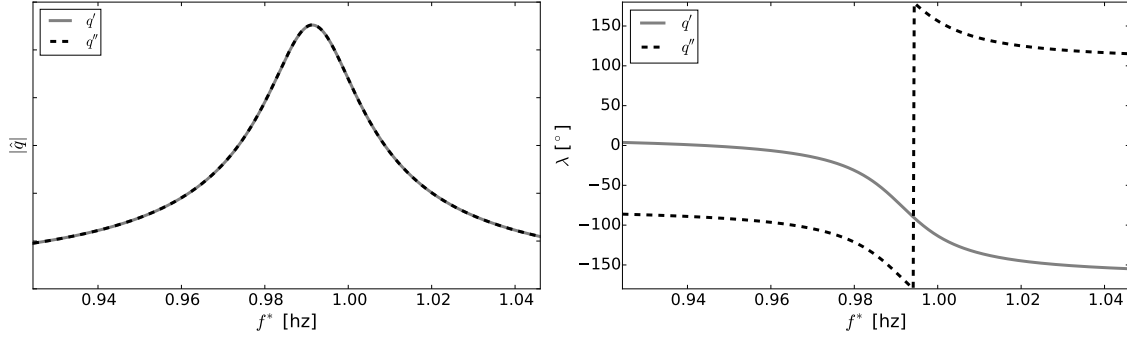


FIGURE IV.7 – Amplitude  $|\hat{q}|$  et phase  $\lambda$  des coordonnées généralisées

namiques de l'équation IV.19 ne sont valables que pour une seule vitesse de rotation, donc une seule fréquence. D'un point de vue mécanique, les fréquences modales évoluent en fonction du régime de rotation notamment par un effet de rigidification entraîné par les efforts centrifuges. D'un point de vue aérodynamique, l'excitation dépend elle aussi du régime de rotation, d'une part parce que l'écoulement autour des aubes est directement dicté par la vitesse de rotation et d'autre part parce que la distorsion est liée au débit et donc au régime de rotation. L'amortissement aérodynamique dépend aussi du point de fonctionnement du fan et donc du régime de rotation. Cependant, sur une faible plage de régimes de rotation (et donc de fréquences associées) il est raisonnable de penser que ces termes évoluent faiblement. C'est pourquoi il a été choisi de représenter les résultats sur une plage de fréquence adimensionnée par la fréquence propre du mode 2F à 4 diamètres  $f^* = f/f_{2F-4D}$  allant de 0.93 à 1.04. Gardons cependant à l'esprit que les calculs aéroélastiques présentés dans cette section ont été réalisés à une unique fréquence, à savoir  $f^* = 0.99$  qui est la fréquence où les niveaux maximum sont observés en essais. Les deux coordonnées généralisées  $q'$  et  $q''$  ont la même amplitude et sont déphasées de  $90^\circ$ . Cela correspond à une onde tournante dans le sens inverse de rotation compte tenu des conventions utilisées. On la nomme onde rétrograde. Dans ce cas, il est possible de définir le coefficient d'amortissement aérodynamique modale rétrograde, noté  $\xi_{a,retro}$ , ainsi que la raideur aérodynamique modale rétrograde, noté  $\gamma_{a,retro}$ , par (cf annexe D) :

$$\xi_{a,retro} = \frac{a^I/\omega - b^R}{2\mu\omega_i} \quad (IV.30)$$

$$\gamma_{a,retro} = a^R + \omega b^I \quad (IV.31)$$

où  $\omega_i$  correspond à la pulsation propre du mode  $i$  étudié. Le maximum est atteint pour une fréquence plus faible que la fréquence propre du mode. C'est l'effet du terme de raideur aérodynamique qui explique ce décalage en fréquence.

D'un point de vue coût de calculs, les deux calculs aéroélastiques ont été réalisés en même temps. Chaque calcul a nécessité environ 60 heures sur 256 processeurs pour réaliser les 5 tours de roue.

### Vérification des hypothèses de linéarités

Afin de vérifier les hypothèses de linéarité utilisées dans l'approche découplée, différentes amplitudes du mouvement harmonique prescrit ont été testées. Si le résultat ne dépend pas de

| cas                                         |   | A         |       | B          |       | C          |       | D     |       |
|---------------------------------------------|---|-----------|-------|------------|-------|------------|-------|-------|-------|
|                                             |   | $q'$      | $q''$ | $q'$       | $q''$ | $q'$       | $q''$ | $q'$  | $q''$ |
| Calcul                                      | 1 | 0         | 0     | 0          | 0     | $q_{ref}$  | 0     | 0     | 0     |
|                                             | 2 | $q_{ref}$ | 0     | $2q_{ref}$ | 0     | $2q_{ref}$ | 0     | $q_A$ | 0     |
| $\frac{\max( \hat{q} )}{\max( \hat{q}_A )}$ |   | 1.00      | 1.00  | 1.00       | 1.00  | 1.00       | 1.00  | 1.04  | 1.04  |

TABLEAU IV.1 – Tableau récapitulatif de différents cas d’application de la méthode découplée. Amplitude normalisée par l’amplitude atteinte dans le cas A.

l’amplitude choisi alors l’hypothèse de linéarité est vérifiée pour ces amplitudes. Pour chaque amplitude testée, seul le mode  $\phi'$  a été excité<sup>1</sup>. Dans un premier temps, 3 amplitudes ont été testées :  $0 \times \hat{q}_{ref}$ ,  $1 \times \hat{q}_{ref}$  et  $2 \times \hat{q}_{ref}$  où  $q_{ref}$  est une amplitude arbitraire relativement faible. Les deux premières sont les amplitudes utilisées dans les deux calculs présentés dans le paragraphe précédent. La stratégie d’extraction des termes aérodynamiques a été appliquée aux différentes combinaisons de deux calculs parmi ces trois calculs effectués et l’équation de la dynamique qui en résulte a été résolue dans le domaine fréquentiel. Le tableau IV.1 illustre les résultats obtenus pour ces différentes combinaisons (cas A, B et C). Le premier cas, noté A, est constitué du calcul sans amplitude et du calcul avec  $\hat{q}_{ref}$ . Le maximum de chaque coordonnée généralisée après résolution de l’équation de la dynamique,  $\max(|\hat{q}|)$ , est comparé au maximum atteint dans le cas A,  $\max(|\hat{q}_A|)$ . Dans le cas B, qui est constitué du calcul sans amplitude et du calcul avec une amplitude de  $2\hat{q}_{ref}$ , l’amplitude maximale atteinte est similaire à celle atteinte dans le cas A. Il en est de même pour le cas C qui est constitué du calcul avec une amplitude de  $\hat{q}_{ref}$  et du calcul avec une amplitude  $2\hat{q}_{ref}$ . Les résultats sont donc indépendants des amplitudes choisies pour les deux calculs aéroélastiques, l’hypothèse de linéarité est respectée pour ces amplitudes.

Cependant ces amplitudes ne retranscrivent pas l’amplitude prédite par la méthode. En effet, l’amplitude prédite est supérieure aux amplitudes évaluées :  $\max(|\hat{q}_A|) > 2\hat{q}_{ref}$ . Afin de vérifier si les hypothèses de linéarités sont toujours valables à l’amplitude prédite, un dernier calcul a été effectué avec un mouvement harmonique d’amplitude équivalente au maximum prédit par les calculs précédant à savoir  $\max(|\hat{q}_A|)$ . Le cas D du tableau IV.1 présente les résultats obtenus avec ce dernier calcul et le calcul sans amplitude. Le résultat de cette combinaison diffère de ceux obtenus précédemment. Les hypothèses de linéarités utilisées durant l’extraction des termes aérodynamiques ne sont donc plus respectées. Cela implique que les forces aérodynamiques généralisées ne sont plus linéaires par rapport à la vitesse et au déplacement. Il n’est donc pas possible de se fier à ce dernier cas. Afin de capturer les non-linéarités une méthode couplée sans aucune hypothèse sur les forces aérodynamiques généralisées doit être utilisée.

### 3.2.2 Approche couplée

#### Description du couplage

Dans cette section, l’objectif est de résoudre l’équation de la dynamique sans hypothèse sur les forces aérodynamiques généralisées contrairement à l’approche découplée décrite précédemment.

1. Les calculateurs utilisés ayant des limites de temps, il est nécessaire d’être capable d’effectuer des reprises de ces calculs aéroélastiques. Il est plus simple de gérer un mouvement selon un unique mode réel car cela permet d’effectuer la reprise lorsque la vitesse de déplacement du maillage est nulle. Cela facilite l’implémentation des reprises c’est pourquoi un seul mode est excité.

L'équation de la dynamique dans la base modale s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mu \ddot{q}(t) + \beta \dot{q}(t) + \gamma q(t) = f_{ag}(t, q, \dot{q}) \quad (\text{IV.32})$$

La résolution de ce système passe donc par l'intégration temporelle. Un schéma de Newmark est utilisé afin de résoudre cette équation. On définit la variable d'état  $Q$  :

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

L'équation de la dynamique peut alors se mettre sous la forme d'une équation d'ordre 1 en temps :

$$N\dot{Q} + MQ = F \quad (\text{IV.34})$$

avec :

$$N = \begin{bmatrix} \mu & \beta \\ 0 & I \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -I & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_{ag} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

En écrivant cette équation à l'aide d'une différence centrée à l'instant  $k + 1/2$ , il vient :

$$N \frac{Q^{(k+1)} - Q^{(k)}}{\Delta t} + M \frac{Q^{(k+1)} + Q^{(k)}}{2} = \frac{F^{(k+1)} + F^{(k)}}{2} \quad (\text{IV.36})$$

Finalement, il est possible d'isoler le terme  $Q^{k+1}$  :

$$Q^{(k+1)} = (2N + \Delta t M)^{-1} \left( (2N - \Delta t M) Q^{(k)} + \Delta t (F^{(k)} + F^{(k+1)}) \right) \quad (\text{IV.37})$$

Le déplacement et la vitesse de la structure à l'instant  $k + 1$  sont alors déterminés à l'aide de l'état de la structure à l'instant  $k$ , les efforts à l'instant  $k$  ainsi que les efforts à l'instant  $k + 1$ . De manière similaire, afin d'estimer le champ aérodynamique à l'instant  $k + 1$ , l'intégration en temps du fluide nécessite le champ aérodynamique  $W$  aux instants précédents (instants  $k$  et  $k - 1$ ), mais aussi les déplacements et les vitesses à l'instant  $k + 1$ . Un algorithme de couplage est alors nécessaire afin d'itérer entre le fluide et la structure pour estimer  $W^{(k+1)}$  et  $Q^{(k+1)}$  à l'aide de  $W^{(k)}$  et  $Q^{(k)}$ . L'algorithme disponible dans elsA est donné figure IV.8. La première étape consiste à estimer linéairement les valeurs de  $Q^{(k+1)}$ . La déformation du maillage aérodynamique est ensuite réalisée. L'intégration temporelle du fluide à l'aide du schéma Gear (cf section II.2.4) est alors possible. Les pressions sur l'aube sont ensuite projetées sur les modes de la structure ce qui permet d'évaluer les forces aérodynamiques généralisées à l'instant  $k + 1$ . Ces forces permettent d'intégrer l'équation de la dynamique à l'aide du schéma de Newmark. Le résultat de cette étape est un déplacement et une vitesse,  $Q^{(k+1)}$ . Il est alors possible de comparer ces valeurs à celles prédites précédemment. Si le résidu est inférieur à une valeur cible, alors l'équation est considérée équilibrée et il est possible de passer au pas de temps suivant. Sinon, une nouvelle itération interne est alors effectuée. Le maillage est à nouveau déformé avec les nouvelles valeurs estimées de  $Q^{(k+1)}$ . Les différents étapes de l'algorithme sont alors effectuées jusqu'à l'obtention d'une nouvelle estimation de  $Q^{(k+1)}$  et le processus recommence et ce jusqu'à convergence (voir figure IV.8). En pratique, pour chaque pas de temps physique, il est généralement suffisant d'effectuer la boucle interne 3 fois. L'équilibre du couplage fluide-structure à chaque pas de temps est alors assuré par l'observation d'une convergence des coordonnées et forces généralisées. Le fluide et la structure étant résolu simultanément pour chaque pas de temps, cette approche peut être qualifiée de couplage fort.

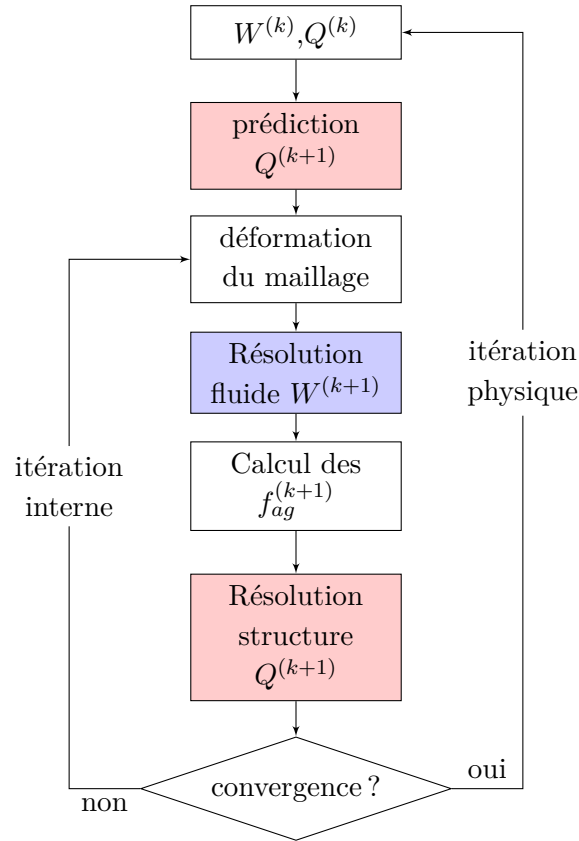


FIGURE IV.8 – Description de l'algorithme de couplage

### Comparaison entre la méthode couplée et la méthode découplée

L'algorithme de couplage décrit dans le paragraphe précédent est utilisé pour estimer les amplitudes vibratoires des modes  $\phi'$  et  $\phi''$  dans le cas d'ingestion de vortex. On rappelle que la structure est modélisée uniquement par le mode double 2F-4D qui est excité sur la coïncidence qui nous intéresse. Deux régimes ont été évalués à l'aide de cette approche couplée. Le premier correspond à une fréquence d'excitation adimensionnée par la fréquence propre du mode de  $f^* = 0.977$ . Le second régime évalué correspond à la fréquence  $f^* = 0.990$ . La figure IV.9a illustre l'évolution temporelle des coordonnées généralisées dans ce dernier cas. Un régime transitoire relativement long est observé. Ce transitoire dépend de l'amortissement du système. Le calcul a été réalisé sur 14 tours de roue. Le coût associé au calcul couplé est très important dans la mesure où plusieurs itérations sont effectuées pour le même pas de temps physique et qu'un nombre de tours conséquent doit être réalisé afin d'atteindre un régime périodique. Une illustration de l'évolution des coordonnées généralisées sur un tour de roue est présenté figure IV.9b. Les coordonnées  $q'$  et  $q''$  ont une amplitude similaire et sont déphasées de  $90^\circ$ . L'analyse harmonique du dernier tour permet d'extraire l'amplitude associée à la fréquence  $\omega = 4\Omega$  où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du fan. Cette amplitude peut être comparée à celle prédite à l'aide de la méthode découplée. Rappelons tout de même que la courbe du calcul couplé a été obtenue en se basant uniquement sur des calculs aéroélastiques réalisées à la fréquence  $f^* = 0.990$ . Une comparaison entre les résultats couplés et découplés est effectuée figure IV.10. Concernant le cas à  $f^* = 0.977$ , l'amplitude prédite par le calcul couplé se superpose à celle prédite par l'approche découplée. Cela est en accord les résultats précédents dans la mesure où les hypothèses de linéarité étaient

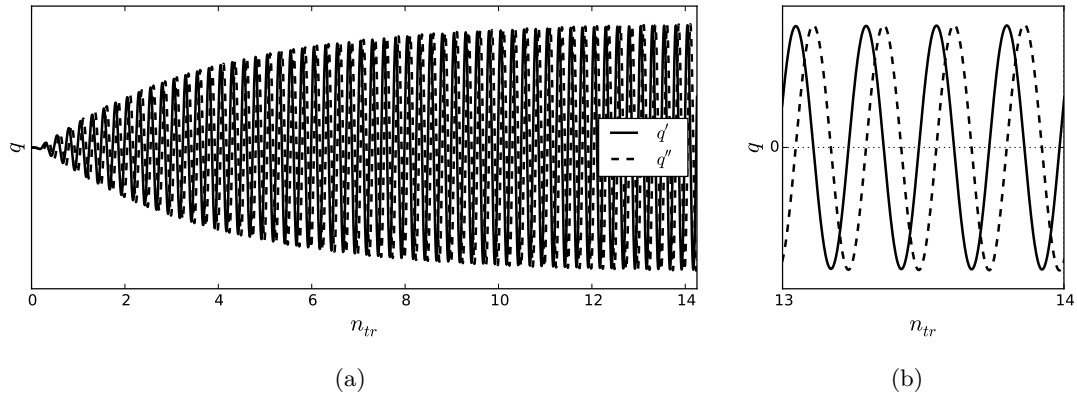


FIGURE IV.9 – Évolution temporelle des coordonnées généralisées lors d'un calcul couplé (a) et zoom sur le dernier tour de roue (b)

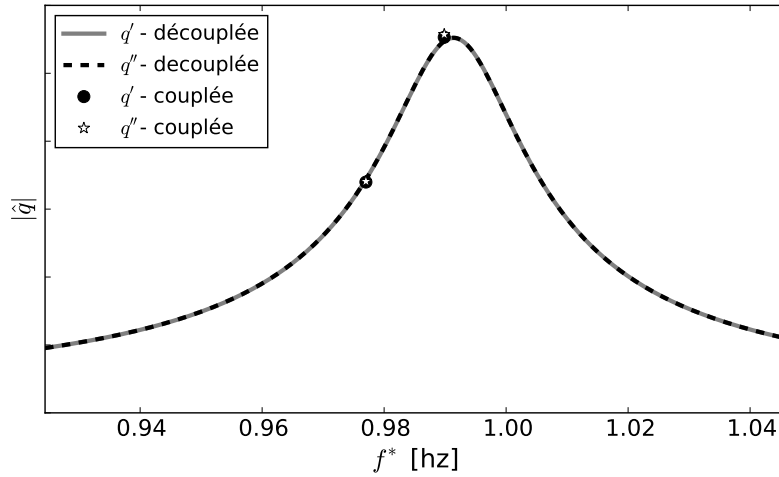


FIGURE IV.10 – Comparaison entre l'approche couplée et l'approche découplée dans le cas avec ingestion de vortex

vérifiées dans cette plage d'amplitudes. Notons tout de même que le calcul couplé et le calcul découplé n'ont pas été fait exactement au même régime ( $f^* = 0.977$  pour le calcul couplé et  $f^* = 0.990$  pour le calcul découplé). Concernant le deuxième calcul couplé, effectué à un régime correspondant à  $f^* = 0.990$ , un léger écart apparaît entre approche couplée et découplée. Dans ce cas d'ingestion de vortex, l'approche découplée est suffisante afin d'obtenir une estimation de la réponse forcée. Les non-linéarités aérodynamiques impliquent des niveaux légèrement plus élevés (autour de 1.5%). L'approche couplée nécessite un calcul où chaque itération physique coûte plus cher étant donné les itérations nécessaires entre le fluide et la structure. Les 14 tours de roue ont été réalisés en 210 heures sur 256 proc, ce qui implique que le temps de calcul est alors 3.5 fois plus élevé que celui associé à l'approche découplée. Remarquons que cette conclusion n'est valable que pour le cas étudié ici dans la mesure où le temps de restitution du calcul couplé est dicté par l'amortissement.

### 3.3 Confrontation aux essais

Les essais qui nous intéressent ont été effectués à Peebles dans la soufflerie ouverte de GE. Deux configurations ont été évaluées durant ces essais : une avec une structure permettant de modéliser un sol (cf figure III.8), et une sans cette structure. Pour le vent de travers de 20kt, un vortex est observé dans la configuration avec sol. Le déroulement des essais consiste à effectuer une montée en régime relativement lente passant du régime ralenti au régime maximum de la machine. Durant ces essais 4 aubes du fan ont été instrumentées à l'aide de jauges de contraintes. Plusieurs jauges se trouvent sur chaque aube afin d'extraire les niveaux sur les premiers modes. Les jauges utilisées ici sont celles principalement sensibles au premier et second mode de flexion. Les contraintes des jauges  $\sigma_J$  peuvent être converties en coordonnées généralisées en les adimensionnant par la contrainte observée dans la jauge pour un déplacement modale normé  $\sigma_J^*$  :

$$q = \frac{\sigma_J}{\sigma_J^*} \quad (\text{IV.38})$$

De plus, afin de n'avoir que la composante de la contrainte associée au mode 2F-4D, un analyse temporelle est réalisée afin d'extraire l'ordre moteur responsable de l'excitation du mode, à savoir l'ordre moteur 4 dans notre cas. Ce post-traitement des essais permet de filtrer les modes au sein de la réponse. C'est grâce à ce filtrage qu'il est possible de comparer les coordonnées généralisées issues des prédictions numériques obtenues sur un seul mode. Cette comparaison est représentée figure IV.11 pour le cas avec sol, et donc en présence d'un vortex, et le cas sans sol.

Les résultats des essais montrent que le vortex a une forte influence sur le niveau observé. En effet, les niveaux sont plus de 3 fois supérieurs dans le cas avec sol. Une plage de fréquence relativement large est représentée ici afin de mieux visualiser les résultats. Il est cependant important de garder en tête que l'approche numérique découplée a été réalisée à une unique fréquence. Dans un premier temps, l'amortissement mécanique est négligé  $\xi_{meca} = \frac{\beta^s}{2\mu^s\omega} = 0$ . Le maximum de réponse est surestimé dans les deux configurations avec et sans sol. Cependant le rapport entre les niveaux avec et sans sol est similaire à celui observé en essai. Une première piste pour expliquer cet écart provient du fait que l'amortissement mécanique est négligé. Afin d'évaluer la réponse en présence d'amortissement, une valeur de  $\xi_{meca} = 0.5\%$  a été ajoutée afin d'obtenir le maximum de réponse numérique dans le cas sans sol proche de celui observé en essai sans sol. Les niveaux prédits par l'approche découplée dans le cas avec sol est alors plus proche de ceux obtenus expérimentalement. On notera que les courbes expérimentales sont plus étalées que celles numériques ce qui laisse supposer que l'amortissement est plus élevé. L'écart entre les 4 aubes, notamment marqué dans le cas avec sol suggère qu'un désaccordage est aussi présent. La validité des hypothèses de symétrie cyclique utilisées dans la modélisation numérique est alors discutable. De plus, une hypothèse forte a été effectuée sur la modélisation linéaire de la structure. En effet, dans le cadre de forts niveaux vibratoires comme ceux observés ici, les non-linéarités provenant du contact entre l'aube et le disque peuvent affecter fortement les niveaux de réponse forcée. D'un point de vue excitation, la modélisation RANS choisie pour modéliser le vortex est aussi discutable. Malgré de bons résultats obtenus sur une configuration académique (cf section III.1.1), aucune information aérodynamique n'est disponible sur le vortex de sol observé expérimentalement sur la configuration industrielle. Notamment sur le caractère instationnaire de celui-ci, qui peut impacter la réponse forcée. Et enfin, la méthodologie avec cartographie utilisée ici ne permet pas de restituer le couplage entre le fan et le vortex. C'est ce dernier point qui est abordé dans la section suivante.

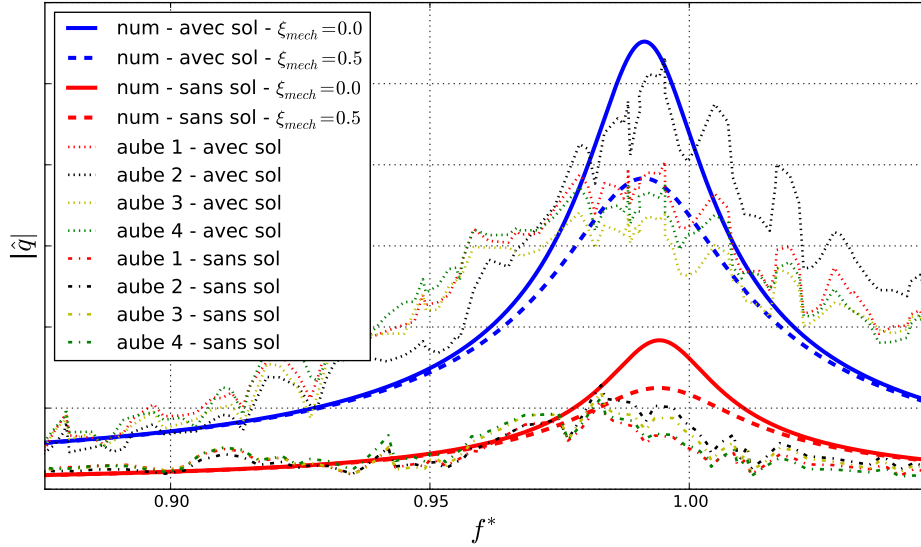


FIGURE IV.11 – Comparaison des estimations numériques (num) aux niveaux mesurés en essais sur les 4 aubes instrumentées pour les configurations avec et sans sol.

## 4 Étude de l'impact du couplage fan-vortex sur la réponse forcée

L'objectif de cette section est d'évaluer l'impact de la prise en compte de la nacelle dans l'estimation de la réponse forcée. Le calcul complet fan nacelle est en mesure de capturer un potentiel couplage entre le fan et le vortex que la méthode avec cartographie utilisée jusqu'à présent ne peut pas restituer. La mise en place d'un tel calcul n'est pas aisée dans la mesure où les maillages et les méthodes numériques utilisés jusqu'à présent sont différents dans les calculs effectués sur le fan et les calculs effectués sur la nacelle. Une première difficulté réside donc dans l'adaptation des maillages existants. Une seconde difficulté concerne le schéma spatial utilisé car il doit être adapté à la fois aux basses vitesses présentes dans l'écoulement autour de la nacelle mais aussi à l'écoulement compressible au sein du fan.

### 4.1 Mise en place du calcul complet fan nacelle

Afin d'être en mesure de réaliser un calcul intégrant à la fois le fan et la nacelle, il a été nécessaire d'adapter le maillage de la nacelle afin de le rendre compatible avec le maillage du fan. Pour cela, le maillage de la nacelle a été légèrement modifié afin qu'il partage un plan axial avec le maillage du fan. Les discrétisations radiales et azimutales diffèrent entre le maillage de la nacelle et le maillage du fan. Dans la direction radiale, le rapport entre le nombre de point du maillage fan et le nombre de point du maillage nacelle est de 0.8. Ce rapport est convenable dans la mesure où il est près de 1 mais la discrétisation est tout de même différente car une concentration élevée de points est présente dans la zone de jeu du maillage du fan. Dans la discrétisation azimutale, ce rapport est de 1.9 (il y a donc plus de cellule dans le domaine fan que dans le domaine nacelle dans cette direction). Le maillage complet comporte près de 75 millions de points.

Les calculs stationnaires de distorsion, présentés section III.1, ont été réalisés à l'aide du schéma AUSM+(P) (cf section II.2) car il est adapté aux basses vitesses présentes dans un

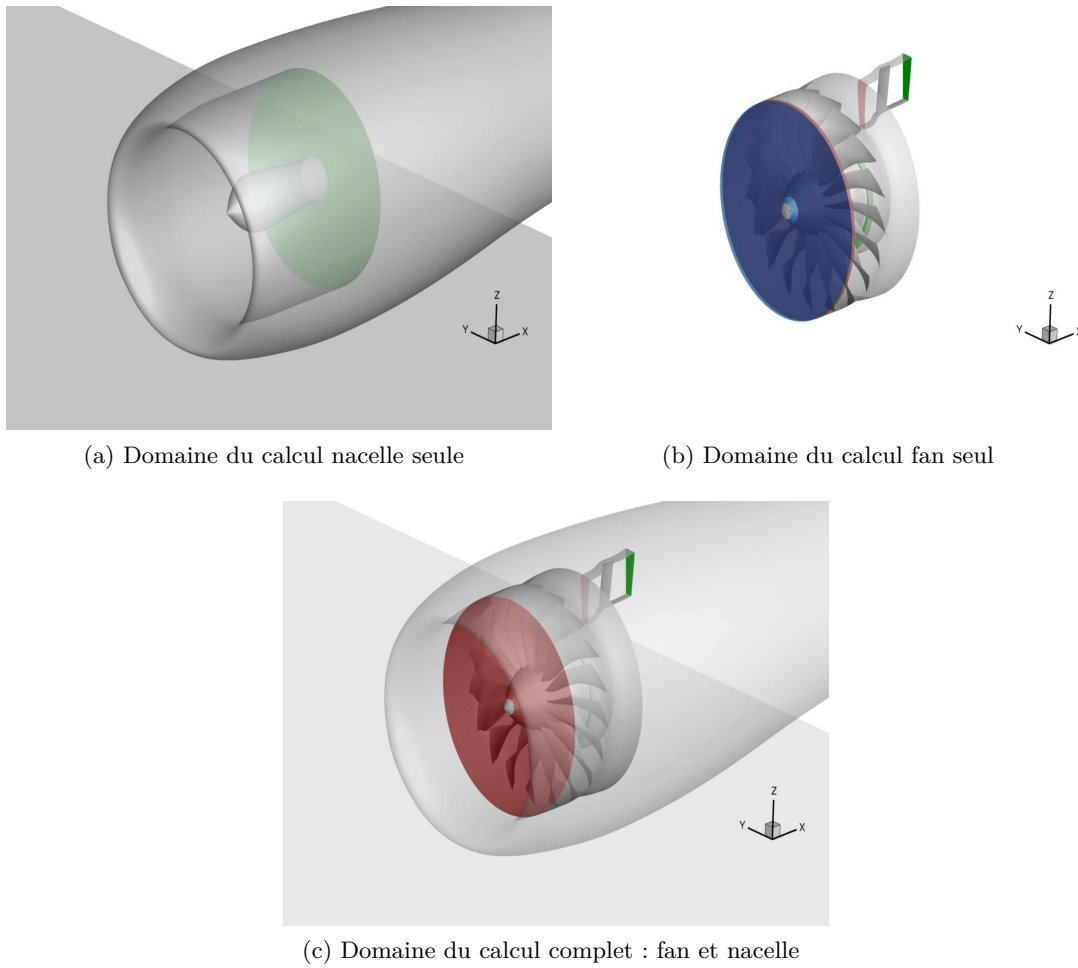
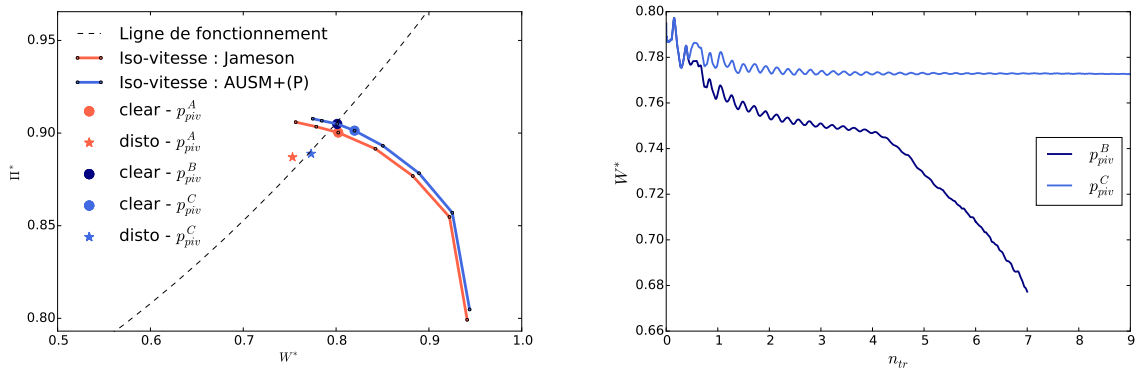


FIGURE IV.12 – Domaines de calcul, *bleu* : conditions d'injection, *rouge* : conditions rotor-stator et *vert* : conditions de sortie.

calcul de nacelle sous vent de travers. Les calculs effectués sur le fan, présentés section III.2, ont été réalisés à l'aide du schéma de Jameson (cf section II.2) qui est plus robuste. Afin de réaliser un calcul sur l'ensemble de la configuration, un unique schéma est requis. Le choix a été fait d'effectuer les calculs complets fan nacelle à l'aide du schéma AUSM+(P). La présence du fan dans le calcul nacelle rend le problème intrinsèquement instationnaire. L'approche Gear (cf section II.2.4) utilisée lors des calculs instationnaires réalisés sur le fan (cf section III.2.1) est utilisée pour les calculs fan nacelle. L'initialisation du calcul couplé a été effectuée à l'aide de deux calculs stationnaires indépendants. Le premier est un calcul sur la nacelle seule en utilisant une condition de limite de pression pour modéliser le fan comme l'illustre la figure IV.12a. Le second calcul concerne le fan seul où une condition d'injection uniforme a été utilisée comme condition limite amont, cf figure IV.12b. Le calcul complet est ensuite réalisé directement de façon instationnaire à l'aide d'un plan d'interface permettant de passer d'un domaine fixe (domaine nacelle) au domaine tournant (domaine fan). Une forte discontinuité au niveau de l'interface est présente en début de calcul compte tenu du fait que les deux calculs d'initialisation sont indépendants. Le domaine de calcul complet est représenté figure IV.12c. Les autres conditions limites sont identiques à celles utilisées dans les calculs de la nacelle et dans les calculs du fan. Le point de fonctionnement est notamment piloté par la pression pivot, notée  $p_{piv}$ , associée à la condition d'équilibre radial en aval de l'OGV.

La figure IV.13a illustre l'iso-vitesse d'intérêt réalisée avec les deux schémas spatiaux. Ces iso-vitesses ont été obtenues à l'aide de calculs stationnaires réalisés sur secteur sans distorsion. La comparaison des iso-vitesses permet d'évaluer l'influence du schéma sur le point de fonctionnement du fan. Un léger décalage est présent entre les deux iso-vitesses. Il est aussi important de remarquer que le schéma de Jameson est plus robuste car il permet d'atteindre des points plus loin de la ligne de fonctionnement pour lesquels le schéma AUSM+(P) ne permet pas de converger. Dans un premier temps, la pression pivot du calcul couplé a été choisie à  $p_{piv}^B$  afin d'être le plus proche possible de la ligne de fonctionnement lorsqu'il n'y a pas de distorsion, comme cela avait été fait dans le cadre de la méthodologie avec cartographie présentée section III.2. La figure IV.13b illustre l'évolution du débit au cours du calcul couplé instrumenté de la pression pivot  $p_{piv}^B$ . Après quelques tours de roue, le débit s'effondre brutalement. Afin d'obtenir un point numériquement stable, la pression pivot a été modifiée à la valeur  $p_{piv}^C$ . Ce point est relativement loin de la ligne de fonctionnement mais permet une stabilisation des débits au sein du calcul couplé. Les points illustrés par une étoile dans la figure IV.13a correspondent au point de fonctionnement des calculs instationnaires avec distorsion. Le cas avec cartographie et le schéma de Jameson, qui a été présenté section III.2, est représenté par une étoile rouge, tandis que l'étoile bleue correspond au calcul couplé. L'impact de la distorsion est similaire dans les deux cas, on note une chute de débit et une chute du taux de compression équivalente. Les deux calculs ne sont cependant pas sur le même point de fonctionnement et il est alors difficile de les comparer. Bien que le calcul couplé ne retranscrive pas le bon point de fonctionnement, l'étude a été poursuivie afin d'évaluer l'impact de la prise en compte de la nacelle sur l'estimation des niveaux de réponse forcée.

Concernant le coût de calcul, le calcul U-RANS fan nacelle effectué sur 9 tours de roues a été réalisé sur 564 processeurs en 90h.



(a) Diagramme taux de compression  $\Pi$  - Débit normalisé  $W^*$ . Influence du schéma spatial (en bleu AUSM+(P), en rouge Jameson) (b) Évolution du débit au cours de calculs complets

FIGURE IV.13 – Impact du schéma spatial sur la stabilité du calcul complet fan-nacelle.

## 4.2 Caractérisation de la distorsion du calcul fan nacelle

Dans un premier temps on cherche à regarder l'impact de la présence du fan sur la distorsion. Pour cela on regarde une coupe axiale au sein de la nacelle en amont du fan. La figure IV.14 permet de comparer la cartographie de vorticité issue du calcul stationnaire sans présence du fan et la cartographie issue du calcul instationnaire en présence du fan (extraite à l'issu du 8<sup>  me</sup> tour de roue). Les deux cartographies sont très similaires. En effet, la position et l'intensité du vortex sont pratiquement identiques. La figure IV.14c illustre la différence entre les deux cartographies précédentes. Une première différence notable est localisée sur la position du coeur du vortex de sol. Cela nous indique que le vortex n'est pas exactement à la même position mais qu'il s'est très légèrement déplacé. Le coeur du vortex est caractérisé par un maximum de vorticité, c'est pourquoi un faible déplacement entraine une différence conséquente de vorticité entre les deux positions. La seconde zone où des différences de vorticité apparaissent se trouve dans la zone d'ingestion du vortex de contournement. L'intensité et la position des zones de vorticité positives évoluent entre les deux configurations. Ces différences sont néanmoins très faibles. Cette analyse montre que le vortex de sol est très peu impacté par la présence du fan. Ce point diffère d'autres distorsions comme par exemple la distorsion de décollement de manche [76].

La démarche présentée dans le paragraphe précédent est ici utilisée pour comparer deux instants du calcul couplé. La première cartographie a été extraite après 5 tours de roue, lorsque que le débit se stabilise (cf IV.13b). La seconde a été extraite après 8 tours de roue. Ces deux cartographies sont illustrées figure IV.15. Les cartographies sont encore une fois très similaires comme le montre leur différence exposée figure IV.15c. Le vortex est donc stable au cours du calcul. Une sonde numérique a été placée au sein du vortex afin de capter le contenu fréquentiel en amont du fan. La position de la sonde est illustrée sur la figure IV.16a où le contenu fréquentiel de la pression statique sur les 5 derniers tours est représenté en échelle logarithmique. On note trois fréquences qui ressortent fortement. La fréquence la plus élevée est la fréquence de passage d'aube qui correspond à 18 fois la fréquence de rotation. L'harmonique supérieur équivalent à 36 fois la fréquence de rotation est aussi présente. Une fréquence asynchrone autour de 4.5 fois la fréquence de rotation a aussi un niveau important. La figure IV.16b illustre l'évolution de l'amplitude

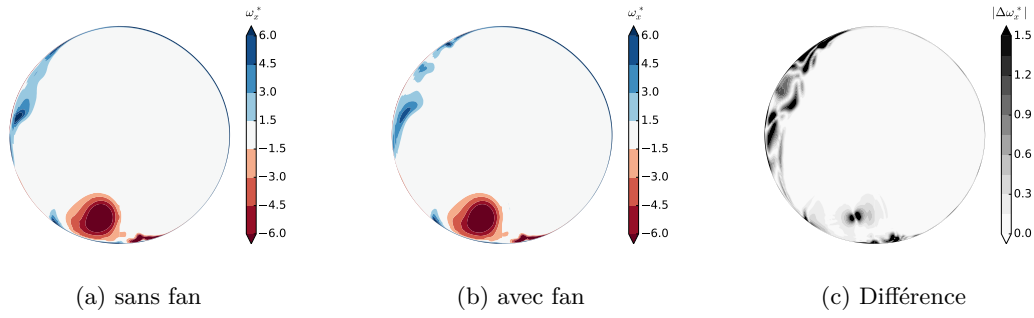


FIGURE IV.14 – Cartographie de vorticité illustrant l'impact du couplage entre le vortex de sol et le fan sur la distorsion.

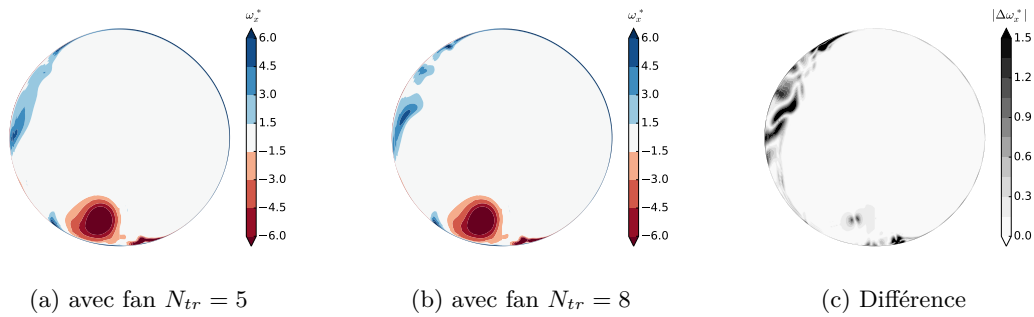
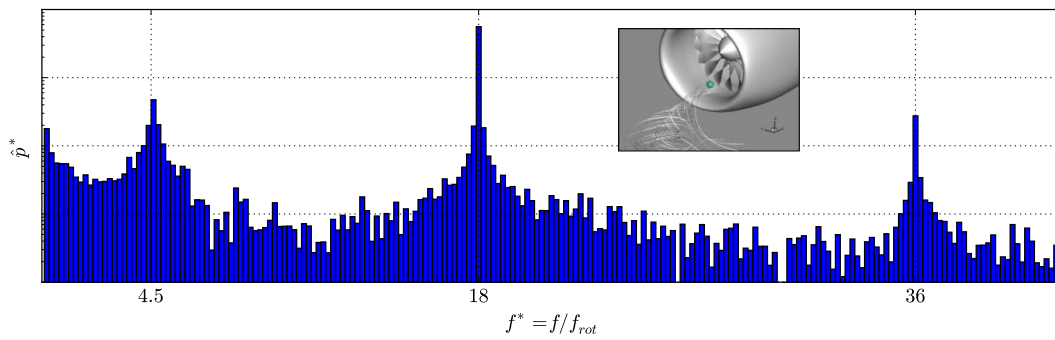


FIGURE IV.15 – Cartographie de vorticité caractérisant de l'instationnarité du vortex au cours du calcul couplé.

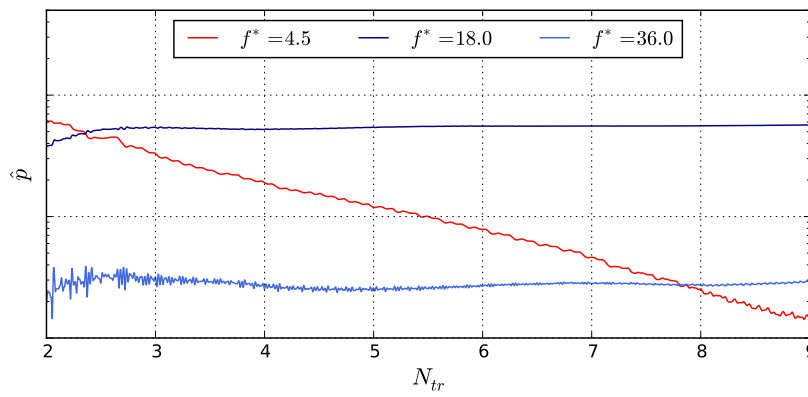
des trois fréquences observé au cours du calcul obtenu à l'aide d'une transformée de Fourier glissante contenant 2 tours de roue. L'amplitude associée à la fréquence asynchrone décroît de manière exponentielle au cours de calcul. Cette fréquence est aussi visible sur les fluctuations de débits illustrées figure IV.13b. C'est donc un phénomène transitoire qui tend à disparaître. Il est difficile de conclure sur le caractère instationnaire du vortex dans la mesure où le temps de calcul est probablement trop faible pour laisser apparaître les fréquences caractéristiques du vortex. En effet, les nombres de Strouhal présents dans la littérature sont de l'ordre de  $10^{-2}$  (notamment dans l'étude expérimentale de Wang [92]). La période temporelle associée à ce nombre de Strouhal serait pour notre configuration équivalente à une cinquantaine de tour de roue. Notons aussi que la modélisation RANS ne permet pas de capturer les fluctuations turbulentes des petites échelles. Une modélisation de type LES ou ZDES (*Zonal Detached Eddy Simulation*) permettrait d'obtenir une représentation plus fidèle du vortex de sol à travers une description plus fine de son spectre fréquentiel.

### 4.3 Évaluation de l'impact de la présence de la nacelle sur la réponse forcée du fan

Afin d'obtenir une comparaison propre entre un calcul complet fan nacelle et un calcul avec cartographie, la méthodologie avec cartographie a été réemployée avec les mêmes paramètres numériques que ceux qui ont permis d'effectuer le calcul complet fan nacelle. Pour cela la cartographie a été extraite du calcul stationnaire d'initialisation effectué sur le domaine de la nacelle (cf IV.12a) et mise comme condition limite en entrée du domaine fan (cf IV.12b). Le calcul



(a) Contenu harmonique de la sonde de pression sur les 5 derniers tour de roue (échelle logarithmique).



(b) Évolution du contenu harmonique au cours du calcul (échelle logarithmique).

FIGURE IV.16 – Analyse temporelle de la sonde de pression

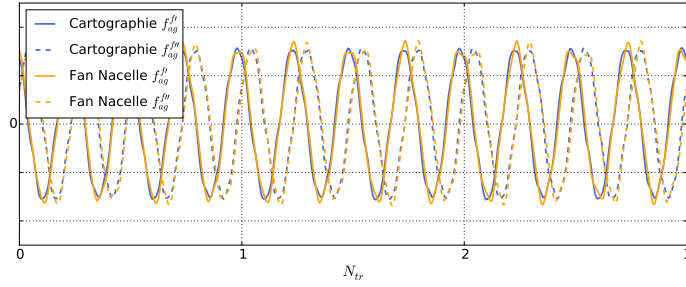
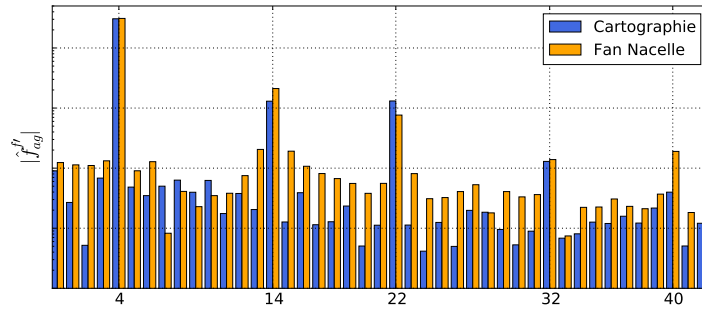
(a) Évolution temporelle de  $f_{ag}^{f'}$  et  $f_{ag}^{f''}$ (b) Contenu harmonique de  $f_{ag}^{f'}$  sur le dernier tour de roue (échelle logarithmique).

FIGURE IV.17 – Comparaison des forces aérodynamiques généralisées d'excitation

instationnaire avec la cartographie mène au point de fonctionnement suivant :  $W^* = 0.771$  et  $\Pi^* = 0.889$  qui est très proche du point de fonctionnement du calcul fan nacelle ( $W^* = 0.773$  et  $\Pi^* = 0.889$ ). Cela est en accord avec les remarques précédentes dans la mesure où la distorsion est très peu impactée par la présence du fan et donc l'impact de cette distorsion sur le point de fonctionnement est identique dans le cas fan nacelle et dans le cas avec cartographie. L'objectif de cette section est d'évaluer l'impact de la prise en compte de la nacelle sur la réponse forcée du fan. On se restreint à l'utilisation de la méthode découplée présentée dans la section IV.2. Pour rappel, cette méthode consiste à effectuer deux calculs aéroélastiques en présence de distorsion et en imposant un mouvement harmonique. La différence des deux calculs réside uniquement dans l'amplitude du mouvement harmonique. L'analyse des forces aérodynamiques généralisées issues des deux calculs permet d'extraire l'amortissement et la raideur aérodynamique ainsi que les forces aérodynamiques généralisées d'excitation. De façon identique à ce qui a été fait section IV.3, la structure est définie uniquement par le mode double 2F à 4 diamètres, caractérisé par les modes réels  $\phi'$  et  $\phi''$ . Dans les deux configurations étudiées, le premier calcul correspond à un calcul où aucun mouvement harmonique n'est imposé et le second calcul est caractérisé par une amplitude relativement faible selon le mode  $\phi'$ .

La comparaison des calculs sans mouvement permet d'apprécier les écarts entre les forces aérodynamiques d'excitation  $f_{ag}^{f'}$  et  $f_{ag}^{f''}$ . La figure IV.17 illustre l'évolution temporelle des forces aérodynamiques généralisées ainsi que leur contenu harmonique dans les deux configurations étudiées. L'approche avec cartographie donne des résultats quasiment identiques à ceux obtenus avec le calcul couplé. Cela est cohérent avec les observations précédentes concernant la distorsion. En effet, la distorsion étant similaire, il est normal que les forces aérodynamiques généralisées le soient aussi. On notera cependant un contenu légèrement plus riche dans le cas du calcul

couplé. L'écart relatif entre l'amplitude de l'harmonique 4 du calcul fan nacelle et l'amplitude de l'harmonique 4 du calcul avec cartographie est de 1.3%.

Les conclusions sont différentes concernant l'estimation de l'amortissement. En effet, l'analyse des signaux de forces aérodynamiques généralisées des deux calculs permet d'extraire l'amortissement aérodynamique de l'onde retrograde  $\xi_{a,retro}$ . La méthode avec cartographie sur-estime l'amortissement aérodynamique de 13.3% par rapport au cas fan nacelle. Afin de comprendre l'écart entre ces deux valeurs, on cherche à évaluer l'impact de la position de la condition limite d'injection dans le cas avec cartographie. Deux nouveaux calculs aéroélastiques avec cartographie sont donc réalisés sur un nouveau maillage où la condition limite d'injection a été éloignée du fan. Le plan d'interface reste lui au même endroit. La figure IV.18 illustre les deux positions des cartographies relatives au point le plus avancé du fan. Les écarts relatifs sur l'amortissement  $\xi_{a,retro}$  et sur les forces aérodynamiques généralisées d'excitation  $f_{ag}^f$  par rapport à la configuration fan nacelle sont aussi illustrés sur cette figure. Concernant les forces aérodynamiques généralisées d'excitation, les écarts relatifs restent en dessous de 2%. Le fait d'éloigner la cartographie permet de se rapprocher de l'estimation de l'amortissement aérodynamique du calcul fan nacelle. Néanmoins cette nouvelle position entraîne un écart de 8% par rapport à la valeur de l'amortissement aérodynamique du calcul fan nacelle. La position de la cartographie influence donc l'estimation de l'amortissement mais impacte peu l'estimation des forces aérodynamiques généralisées d'excitation. Zhao [97] a étudié l'impact des réflexions acoustiques sur la stabilité d'un compresseur. Il a notamment montré que la distance des conditions limites sans traitement spécifique pouvait influencer l'estimation de l'amortissement aérodynamique. Il existe néanmoins des conditions limites spécifiques qui permettent d'annuler la réflexion acoustique [28]. Vadahti [89] a montré que la géométrie de la nacelle influençait la stabilité du fan (donc l'amortissement aérodynamique) via un phénomène de réflexion acoustique. Bontemps [10] a aussi étudié ces mécanismes de réflexion acoustique.

Concernant les coûts de calcul, les deux calculs aéroélastiques indépendants ont été réalisés simultanément en 30 heures sur 564 processeurs pour effectué 3 tours de roues. Les calculs instationnaires ont donc nécessité environ 120 heures sur 564 processeurs (90h pour le calcul aérodynamique transitoire + 30h pour les calculs aéroélastiques) tandis que l'approche avec cartographie a nécessité 60 heures sur 256 processeurs.

Pour conclure, la mise en place du calcul complet fan nacelle a nécessité de modifier le point de fonctionnement du fan afin d'obtenir un calcul numériquement stable. Sur la plage de temps simulé, la position et l'intensité du vortex ne varient quasiment pas et sont très proches du calcul stationnaire. Aucun couplage entre le fan et le vortex n'a donc été mis en avant pour le point de fonctionnement étudié. L'estimation des forces aérodynamiques généralisées d'excitation sont donc similaires à celles prédites dans le cas avec cartographie. Néanmoins, la prise en compte de la nacelle a permis de mettre en avant l'influence de la position de la cartographie sur l'estimation de l'amortissement aérodynamique.

## 5 Bilan

La chapitre III a permis de décrire la distorsion aérodynamique générée par le vortex de sol. Cette distorsion est la source d'excitation qui entraîne des vibrations du fan. Ce chapitre avait pour objectif d'estimer la réponse linéaire de la structure entraînée par cette distorsion aérodynamique. Une modélisation de la structure en symétrie cyclique a été utilisée. Le comportement

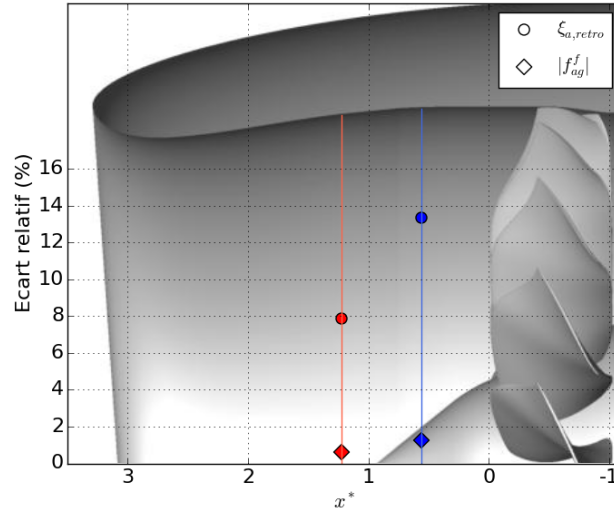


FIGURE IV.18 – Influence de la position de la cartographie sur l'écart relatif des grandeurs aéroélastiques par rapport au calcul couplé.

dynamique de la structure a été réduit uniquement à un mode double afin d'étudier la réponse à la coïncidence  $2F/4EO$ . Une méthode découplée basée sur deux calculs similaires dans lesquels la distorsion est présente en même temps qu'un mouvement harmonique est imposé a été proposée. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle nécessite qu'une seule mise en donnée permettant d'obtenir à la fois les termes d'excitation et les termes d'amortissement aérodynamiques classiquement obtenus par deux calculs avec deux mises en donnée différentes. L'utilisation de cette méthode découplée sur la configuration industrielle a permis d'obtenir une estimation de la réponse linéaire du fan entraînée par l'ingestion de vortex à l'aide d'une méthodologie de calcul utilisant des cartographies de distorsion. Une approche couplée, plus fidèle mais plus coûteuse a aussi été employée afin d'éviter les hypothèses de linéarités faites dans la méthode découplée. De légères différences entre approche couplée et approche découplée apparaissent au maximum de réponse, cependant les écarts restent faibles et ne justifient pas l'utilisation de méthodes couplées largement plus coûteuses. Les prédictions numériques ont alors été comparées aux résultats expérimentaux. L'impact du vortex de sol sur les niveaux de vibrations est relativement bien restitué par l'approche numérique proposée. Des écarts persistent cependant sur les amplitudes de vibration prédites mais qui restent du même ordre de grandeur par rapport à la littérature [23, 31]. Afin d'évaluer l'impact du couplage entre le vortex et le fan sur la réponse forcée, la méthode découplée a été utilisée sur une configuration complète fan nacelle. Malgré des difficultés à obtenir un calcul numériquement stable, la comparaison entre calcul avec cartographie et calcul complet fan nacelle montre que sur la plage de temps simulée la prise en compte de la nacelle impacte très faiblement la distorsion liée au vortex de sol. Les niveaux d'excitation sont donc relativement bien capturés par la méthode avec cartographie. La prise en compte de la nacelle a cependant permis de mettre en avant que la position de la cartographie avait un rôle non négligeable sur l'estimation de l'amortissement aérodynamique. Des écarts autour de l'ordre 10% ont été observés sur cette valeur.

De nombreuses hypothèses ont été effectuées afin d'obtenir la réponse vibratoire du fan liée à l'ingestion de vortex. Au vu des écarts obtenus avec les résultats issus des essais il est important de revenir sur certaines d'entre elles :

- Modélisation de l'excitation : l'approche RANS utilisée permet d'accéder à la distorsion moyenne générée par le vortex de sol. Cependant, aucune information aérodynamique sur le vortex de sol n'a été relevée lors des essais. Une zone d'ombre persiste donc sur la caractérisation aérodynamique du vortex et notamment sur son caractère instationnaire. Des approches plus fidèles comme la ZDES ou la LES pourront être envisagées pour obtenir une meilleure représentation du vortex de sol. De plus, le vortex de sol est caractérisé par un phénomène d'hystérésis. Il s'en suit que son intensité, sa position ou même sa présence pour un débit donné dépend du chemin par lequel on atteint ce débit. Les essais ayant été réalisés en effectuant une montée en régime, il aurait été envisageable de simuler cette montée en régime, et donc en débit, afin d'être plus fidèle. Ce point n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse.
- Amortissement mécanique inconnu : différentes valeurs de l'amortissement mécanique linéaire ont été évalués. Cette amortissement joue un rôle majeur sur les niveaux de réponse à la résonance. Cependant la valeur réelle de cet amortissement est malheureusement connue de façon très approximative.
- Modélisation en symétrie cyclique : l'analyse des jauges issues des essais a mis en avant une disparité entre les différentes aubes instrumentées. La question de désaccordage se pose alors compte tenu de ces informations qui remettent en question l'approche idéale de structure à symétrie cyclique.
- Modélisation linéaire de la structure : des phénomènes de contact et de frottement entre l'aube et le disque peuvent apparaître lors de grand déplacement de l'aube. Ces phénomènes sont fortement non-linéaires et peuvent entraîner une saturation des amplitudes atteintes par l'aube.

Le chapitre V traite de ce dernier point. Une stratégie à relativement faible coût est proposée pour modéliser les phénomènes non-linéaires dans un cadre aéroélastique. Cette stratégie est utilisée sur la configuration industrielle et les résultats non-linéaires seront comparés aux résultats linéaires obtenus dans ce chapitre.



## Chapitre V

# Étude de l'impact de non-linéarités liées au contact aube-disque sur la réponse forcée

Le chapitre précédent a permis d'estimer la réponse linéaire du fan liée à une ingestion de vortex. Nous cherchons ici à quantifier l'impact des non-linéarités provenant du contact entre l'aube et le disque. Dans un premier temps, nous présenterons la démarche numérique mise en place pour simuler le comportement dynamique non-linéaire de notre système. Celle-ci se base sur une réduction de Craig et Bampton ainsi que sur une résolution non-linéaire à l'aide de la méthode de la balance harmonique. Dans un second temps, une stratégie découplée est proposée afin de prendre en compte facilement le comportement aérodynamique dans le cadre d'une réponse forcée non-linéaire. Cette démarche sera appliquée dans le cadre de la réponse forcée sous vortex de la configuration industrielle.

### Sommaire

---

|          |                                                                                              |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Stratégie de calcul de la réponse non-linéaire dans un cadre aéroélastique</b>            | <b>128</b> |
| 1.1      | Modélisation de la structure pour un problème non-linéaire . . . . .                         | 128        |
| 1.2      | Une approche découplée pour alimenter le calcul non-linéaire . . . . .                       | 129        |
| <b>2</b> | <b>Estimation du niveau de réponse forcée non-linéaire sur la configuration industrielle</b> | <b>134</b> |
| 2.1      | Réduction . . . . .                                                                          | 134        |
| 2.2      | Excitation du mode 2F-4D . . . . .                                                           | 135        |
| 2.3      | Excitation sur plusieurs modes et plusieurs diamètres . . . . .                              | 139        |
| <b>3</b> | <b>Bilan</b> . . . . .                                                                       | <b>143</b> |

---

# 1 Stratégie de calcul de la réponse non-linéaire dans un cadre aéroélastique

## 1.1 Modélisation de la structure pour un problème non-linéaire

Afin d'être en mesure de traiter des configurations industrielles, il est nécessaire de réduire la taille de notre modèle. Sous l'hypothèse de symétrie cyclique, détaillée section II.1.3, il est possible de traiter un unique secteur afin de représenter la dynamique de l'ensemble de la roue. Si le comportement de la structure est linéaire alors il est envisageable de résoudre l'équation de la dynamique sur plusieurs nombres à diamètre de façon indépendante avant de recombinaison les solutions afin d'obtenir le déplacement total. Ce principe de superposition n'est plus valable si le comportement de la structure est non-linéaire. L'ensemble des nombres à diamètre doit être pris en compte dans la même résolution. Cependant si nous pouvons supposer que le chargement est tournant et que ensemble des secteurs sont identiques (aussi bien d'un point de vue linéaire que non-linéaire), il est alors possible de se ramener à un calcul sur un secteur unique ( $S_0$ ). La nature tournante du chargement implique la condition de propagation suivante :

$$x(S_k, t) = x(S_0, t - k\Delta t) \quad (\text{V.1})$$

où  $x(S_k, t)$  est le déplacement du secteur  $S_k$  et  $\Delta t$  est le déphasage temporel entre deux secteurs consécutifs. Petrov [69] avance que cette relation est vérifiée si les forces excitatrices de la structure respectent elles aussi une relation de propagation. Dans le cadre d'une distorsion fixe dans le repère absolu, chaque aube parcourt la distorsion avec un déphasage lié au régime de rotation  $\Omega$  :

$$F(S_k, t) = F(S_0, t - k \frac{2\pi}{N\Omega}) \quad (\text{V.2})$$

où  $N$  représente le nombre d'aube. La relation de propagation des efforts est alors respectée et il est possible de résoudre le problème non-linéaire sur un unique secteur de référence. Charleux [16] à étudié dans sa thèse la réponse forcée non-linéaire d'un disque aubagé parfaitement accordé sous ces hypothèses.

Afin de réduire encore plus le modèle, il est intéressant d'utiliser la méthode de Craig et Bampton présentée section II.1.2. En plus de diminuer fortement la taille du modèle, cette réduction a l'avantage de garder des degrés de liberté dans le domaine physique ce qui facilite le traitement des lois de contact et de frottement. Les deux sous-structures considérées sont donc l'aube et le disque. Les degrés de liberté physiques conservés se situent à l'interface entre l'aube et le disque. La réduction du disque doit être effectuée pour chaque nombre à diamètre considéré dans la mesure où les relations de symétrie cyclique sont appliquées aux noeuds du disque appartenant à la frontière du domaine. Ces noeuds ne sont pas conservés lors de la réduction. Ils sont considérés comme des noeuds internes. Les relations de symétrie cyclique impactent donc les modes internes et statiques du disque. Aucun noeud de l'aube ne se trouve sur une frontière du secteur. La réduction de l'aube ne dépend donc pas du nombre à diamètre considéré. Il s'en suit que les termes imaginaires des matrices de l'aube sont nuls car ces termes sont associés aux conditions limites imposées sur la frontière du secteur. Pour la sous-structure  $(i)$ , la réduction des degrés de liberté  $x^{(i)}$  passe par la matrice de passage de Craig et Bampton  $p^{(i)}$  comme l'illustre l'équation suivante :

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{\Sigma}^{(i)} \\ x_I^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_s^{(i)} & \phi_{tr}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\Sigma}^{(i)} \\ q_I^{(i)} \end{bmatrix} = p^{(i)} \tilde{q}^{(i)} \quad (\text{V.3})$$

où  $\phi_s^{(i)}$  sont les modes statiques,  $\phi_{tr}^{(i)}$  les modes internes tronqués et  $\tilde{q}^{(i)}$  le vecteur de coordonnées généralisées dans la base de Craig et Bampton composé des coordonnées généralisées des modes internes  $q_I^{(i)}$  et des degrés de liberté physiques  $x_\Sigma^{(i)}$ . L'équation de la dynamique associée à l'aube, indicée par (1), est couplée à celle associée au disque, indicé par (2), par les forces non-linéaires qui s'exerce à l'interface des deux sous-structures. Le système dynamique dans la base de réduction s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{M}^{(1)}\ddot{\tilde{q}}^{(1)} + \tilde{D}^{(1)}\dot{\tilde{q}}^{(1)} + \tilde{K}^{(1)}\tilde{q}^{(1)} + \tilde{F}_{nl}^{(1)}(\tilde{q}^{(1)}, \dot{\tilde{q}}^{(1)}, \tilde{q}^{(2)}, \dot{\tilde{q}}^{(2)}) = \tilde{F}^{(1)} \\ \tilde{M}^{(2)}\ddot{\tilde{q}}^{(2)} + \tilde{D}^{(2)}\dot{\tilde{q}}^{(2)} + \tilde{K}^{(2)}\tilde{q}^{(2)} + \tilde{F}_{nl}^{(2)}(\tilde{q}^{(1)}, \dot{\tilde{q}}^{(1)}, \tilde{q}^{(2)}, \dot{\tilde{q}}^{(2)}) = \tilde{F}^{(2)} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Avec :

$$\begin{cases} \tilde{M}^{(i)} &= p^{(i)T} M^{(i)} p^{(i)} \\ \tilde{D}^{(i)} &= p^{(i)T} D^{(i)} p^{(i)} \\ \tilde{K}^{(i)} &= p^{(i)T} K^{(i)} p^{(i)} \\ \tilde{F}_{nl}^{(i)} &= p^{(i)T} F_{nl}^{(i)} \\ \tilde{F}^{(i)} &= p^{(i)T} F^{(i)} \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Le système V.4 peut alors être résolu dans le domaine fréquentiel afin d'obtenir la solution périodique sans passer par le calcul d'un régime transitoire. Pour cela on utilise la méthode de balance harmonique qui conduit au système algébrique suivant (cf section II.1.4) :

$$H(x_h) = Zx_h + F_{nl,h}(x_h) - F_h = 0 \quad (\text{V.6})$$

où  $Z$  est la matrice de rigidité dynamique composée des matrices structurelles du modèle, à savoir les matrices de masse, d'amortissement, de raideur pour l'aube et pour le disque. Pour chaque harmonique, ces matrices sont associées au nombre à diamètre défini par le diagramme ZigZag. Cette matrice est diagonale par bloc. Le vecteur  $x_h$  est constitué des coefficients harmoniques,  $F_{nl,h}$  est le vecteur des efforts non-linéaires et  $F_h$  est le vecteur des efforts extérieurs. La taille du vecteur de  $x_h$  est  $(2N_h + 1) \times n_{ddl}$  où  $N_h$  est le nombre d'harmonique temporel retenu et  $n_{ddl}$  le nombre de degré de liberté après la réduction. La résolution de cette équation est effectuée à l'aide de la méthode DLFT [65] qui se base sur une procédure de type AFT [32]. Cette méthode a notamment était validée par Charleux [16] pour l'étude de non-linéarités de type frottement et contact sur une roue aubagée.

Cette section a permis de détailler l'approche numérique choisie pour modéliser la réponse forcée de la structure en prenant en compte les non-linéarités de contact et de frottement. La question qui se pose maintenant est de savoir comment prendre en compte les efforts aérodynamiques qui dépendent à la fois de la distorsion et du mouvement de l'aube.

## 1.2 Une approche découplée pour alimenter le calcul non-linéaire

Avant de détailler la méthode proposée dans ces travaux de thèse, une rapide description des approches possibles pour coupler le chargement aérodynamique avec le calcul en balance harmonique est présentée.

Les stratégies les plus fidèles sont les méthodes couplées (cf I.2.3). Elles font intervenir des itérations entre le système aérodynamique et le système mécanique. Il est par exemple envisageable d'effectuer un calcul aérodynamique temporel en imposant un mouvement périodique issu de la résolution fréquentielle mécanique. Une fois ce calcul aérodynamique convergé, les efforts

aérodynamiques peuvent être mis en entrée du calcul mécanique. Le nouveau mouvement qui en résulte est alors imposé dans le calcul aérodynamique. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que le système soit équilibré. De manière similaire, il est possible de traiter le système aérodynamique dans le domaine fréquentiel via les méthodes de type TSM (pour *Time Spectral Method*) [79]. Cadel [11] a effectué ce type de calcul sur une configuration simplifiée de profil NACA avec deux degrés de liberté. Même si ce type de couplage permet de capturer les effets non-linéarités aérodynamiques et mécaniques, il reste très lourd à mettre en place. De plus, l'utilisation de ces méthodes couplées sur des configurations industrielles restent délicate de mise en oeuvre.

Les approches découplées semblent donc plus raisonnables pour traiter des configurations industrielles. L'idée est de modéliser le comportement aérodynamique via l'hypothèse de superposition et de linéarité en introduisant la matrice de raideur aérodynamique  $A$ , la matrice d'amortissement aérodynamique  $B$  et les forces aérodynamiques d'excitation  $F^f$ . Seule l'aube est en contact avec le fluide, cette hypothèse n'a de sens que sur la structure de l'aube, indicé par (1). Dans la base réduite de Craig et Bampton, cette hypothèse s'écrit :

$$\tilde{F}^{(1)} = \tilde{A}^{(1)}\tilde{q}^{(1)} + \tilde{B}^{(1)}\dot{\tilde{q}}^{(1)} + \tilde{F}^f(1) \quad (\text{V.7})$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{A}^{(1)} &= p^{(1)T} A^{(1)} p^{(1)} \\ \tilde{B}^{(1)} &= p^{(1)T} B^{(1)} p^{(1)} \\ \tilde{F}^f(1) &= p^{(1)T} F^f(1) \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

Les termes  $\tilde{A}^{(1)}$  et  $\tilde{B}^{(1)}$  s'intègrent alors facilement dans la matrice de rigidité  $Z$  de l'équation V.6 où les composantes harmoniques des efforts d'excitation  $\tilde{F}_h^{f(1)}$  remplacent le terme  $\tilde{F}_h$ . L'équation peut alors être résolue à l'aide de la méthode DLFT présentée section II.1.4. La difficulté réside dans l'obtention des matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ . Une stratégie similaire à celle détaillée dans le chapitre précédent peut être envisagée pour obtenir les termes de ces matrices. Un calcul aéroélastique avec un mouvement forcé d'amplitude relativement faible doit être effectué pour chaque mode de la base réduite, c'est à dire les modes internes retenus ainsi que les modes statiques. Durant ce calcul, les efforts générés par le mouvement de l'aube doivent être projetés sur tous les autres modes. L'analyse des signaux permet alors d'extraire les termes des matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ . Il est donc nécessaire d'effectuer autant de calculs aérodynamiques avec mouvement harmonique imposé qu'il y a de degrés de liberté dans la base de Craig et Bampton. Rappelons que la taille de la base de Craig et Bampton dépend du nombre de modes internes retenus mais aussi du nombre de degrés de liberté physique que l'on souhaite garder. Afin de discrétiser convenablement la surface de contact entre le disque et l'aube, ce nombre peut être important. Cette approche nécessite donc d'effectuer de nombreux calculs aéroélastiques. Dans une optique d'industrialisation de calcul non-linéaire, une approche moins coûteuse est proposée.

Dans cette approche, on cherche à effectuer les calculs aérodynamiques dans une base plus adaptée. Dans le cadre de la réponse forcée à la coïncidence, la base la plus naturelle est la base modale du système assemblé, c'est à dire la base modale obtenue en collant l'aube au disque. C'est dans cette base que nous avons travaillé jusqu'à présent pour estimer la réponse forcée linéaire. L'idée de l'approche présentée ici est donc de transférer les informations aérodynamiques (excitation et amortissement) de la base modale du système assemblé, adaptée au calcul aérodynamique, vers la base réduite, adaptée à la résolution du problème non-linéaire. Le schéma V.1 résume les différentes bases définies et les opérateurs qui les relient. Il décrit un seul nombre à

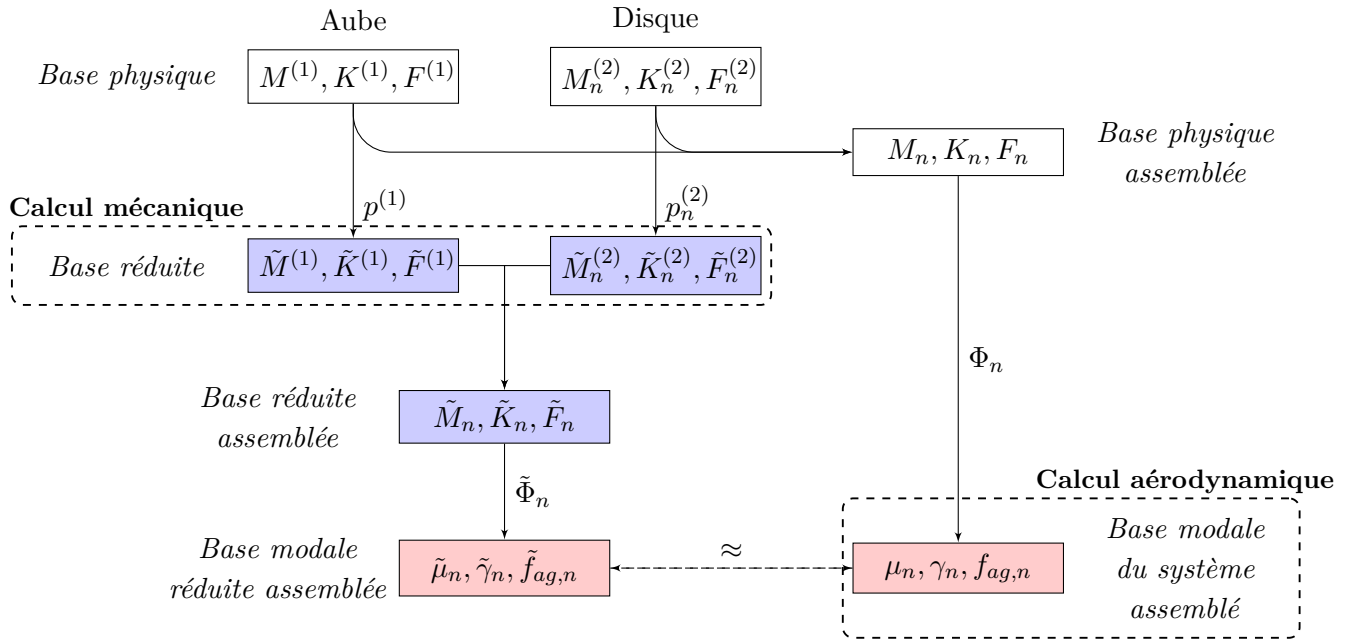


FIGURE V.1 – Illustration des différentes bases d'intérêt.

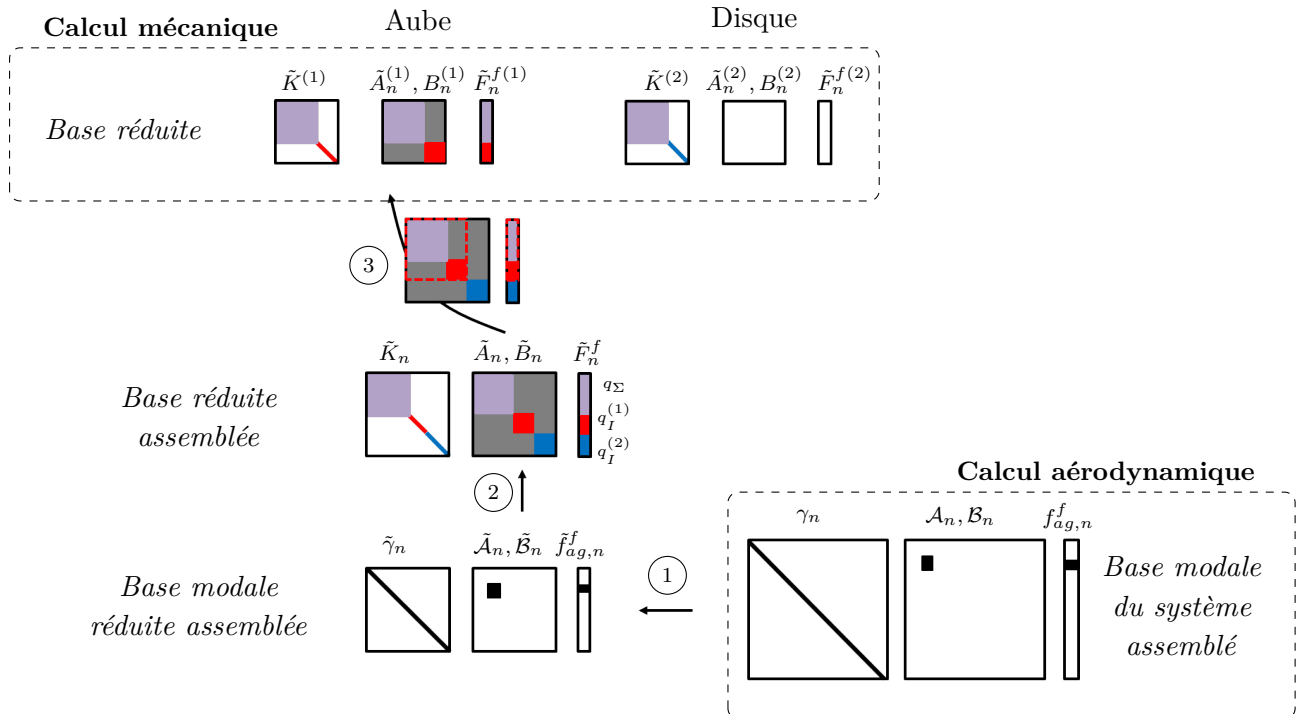


FIGURE V.2 – Illustration des étapes pour intégrer les termes aérodynamiques dans le calcul mécanique.

diamètre  $n$  dans le formalisme complexe afin d'alléger les notations, cependant il est tout à fait possible d'exprimer ces bases dans le formalisme réel. Dans la base physique, l'aube est repérée par l'exposant (1) tandis que le disque est repéré par l'exposant (2). Ces structures peuvent être assemblées afin de former une unique structure. Dans la base physique assemblée, la matrice de masse s'écrit  $M_n$  comme s'est illustré figure V.1. Une fois les matrices assemblées définies, il est possible de passer dans la base modale du système assemblé  $\Phi_n$  obtenue à l'aide d'une analyse modale basée sur les matrices  $M_n$  et  $K_n$ . Dans la base modale du système assemblé, la matrice de masse généralisée est définie par  $\mu_n$ . D'un autre côté, les matrices de l'aube et celles du disque peuvent être réduites à l'aide des matrices  $p^{(1)}$  et  $p_n^{(2)}$  issues de la réduction de Craig et Bampton. Dans la base réduite, les matrices de masse de l'aube et celle du disque sont notées respectivement  $\tilde{M}^{(1)}$  et  $\tilde{M}_n^{(2)}$ . Une fois dans la base réduite, ces matrices peuvent être assemblées en collant les noeuds aux interfaces qui ont été retenus lors de la réduction. Une analyse modale peut alors être effectuée à l'aide des matrices  $\tilde{M}_n$  et  $\tilde{K}_n$  de la base réduite assemblée. Finalement, les matrices de la base réduite assemblée peuvent être projetées dans la base modale réduite assemblée  $\tilde{\Phi}_n$ . Dans cette base modale réduite assemblée, la matrice de masse généralisée est notée  $\tilde{\mu}_n$ .

L'un des intérêts de la réduction de Craig et Bampton est que les fréquences et les déformées modales des premiers modes de la base modale réduite assemblée sont très proches des fréquences et des déformées modales de la base modale du système assemblé. La réduction permet donc de caractériser convenablement la dynamique de la structure totale tout en diminuant la taille des matrices en jeu. L'approche découplée proposée dans ces travaux de thèse se base sur la similarité des premiers modes de la base modale réduite assemblée et ceux de la base modale du système assemblé. L'idée est d'abord de déterminer les termes aérodynamiques dans la base modale complète à l'aide de calculs aéroélastiques identiques à ceux présentés dans le chapitre précédent (cf IV.2.3). Ces calculs permettent d'obtenir les termes des matrices  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{B}_n$  et les efforts  $f_{ag,n}^f$  associés au mode  $i$  à diamètre  $n$  de la structure complète assemblée,  $\phi_{i,n}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{i,n} &= \phi_{i,n}^H A \phi_{i,n} \\ \mathcal{B}_{i,n} &= \phi_{i,n}^H B \phi_{i,n} \\ f_{ag,i,n}^f &= \phi_{i,n}^H F f \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

La méthode proposée ici est composée de 3 étapes illustrées figure V.2. Dans cette illustration les matrices sont schématisées dans les différentes bases présentées précédemment. La forme des matrices de raideur, des matrices aérodynamiques ainsi que le vecteur d'effort sont représentés à l'aide de code couleur suivant : noir correspond aux termes modaux, blanc correspond aux termes nuls, rouge correspond aux termes associés aux noeuds internes de l'aube, bleu correspond aux termes associés aux noeuds internes du disque, violet correspond aux termes associés aux noeuds de l'interface aube-disque et gris correspond aux termes de couplage entre les noeuds internes et les noeuds de l'interface aube-disque.

La première étape de la méthodologie consiste à introduire les termes aérodynamiques calculés dans la base modale du système assemblé dans la base modale réduite assemblée. On utilise ici la similarité de ces deux bases en assimilant les termes associés au mode  $i$  à diamètre  $n$  de la base modale réduite assemblée  $\tilde{\phi}_{n,i}$  aux termes associés au mode  $i$  à diamètre  $n$  de la base

modale du système assemblé  $\phi_{n,i}$  :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_{ii,n} &= \tilde{\phi}_{i,n}^H \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\phi}_{i,n} &= \mathcal{A}_{ii,n} \\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii,n} &= \tilde{\phi}_{i,n}^H \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\phi}_{i,n} &= \mathcal{B}_{ii,n} \\ \tilde{f}_{ag,i,n}^f &= \tilde{\phi}_{i,n}^H \tilde{F}^f &= f_{ag,i,n}^f \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

Une attention particulière doit être portée à la définition des normes des modes. Il nécessaire que cette norme soit identique entre les deux bases modales. Cette étape peut être réalisée pour différents modes  $i$  ce qui permet de construire la matrice  $\tilde{\mathcal{A}}_n$ . La seconde étape consiste à exprimer les termes aérodynamiques dans la base réduite assemblée en utilisant la matrice inverse de  $\tilde{\Phi}_n$  :

$$\begin{cases} \tilde{A}_n &= \tilde{\Phi}_n^{-H} \tilde{\mathcal{A}}_n \tilde{\Phi}_n^{-1} \\ \tilde{B}_n &= \tilde{\Phi}_n^{-H} \tilde{\mathcal{B}}_n \tilde{\Phi}_n^{-1} \\ \tilde{F}_n^f &= \tilde{\Phi}_n^{-H} \tilde{f}_{ag,n}^f \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

Grâce à cette procédure, on obtient une image du comportement aérodynamique (amortissement et efforts) de certains modes de la structure assemblée dans la base de la structure réduite assemblée. Les efforts projetés sur ces modes vont se répartir sur les différents modes de la base réduite, à savoir : les modes internes de l'aube, les modes internes du disque ainsi que les modes statiques. Cette répartition est réalisée sur les matrices  $\tilde{\mathcal{A}}_n$  et  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  ainsi que le vecteur d'effort  $\tilde{F}_n^f$ . Plus le nombre de mode de la structure complète assemblée est élevé, plus la traduction du comportement aérodynamique (amortissement et effort) dans la base réduite assemblée sera fidèle.

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment passer dans la base réduite où l'aube et le disque sont séparées ? En effet, on cherche à effectuer un calcul non-linéaire où les noeuds entre l'aube et le disque sont reliés par des lois de contact et frottement. Les termes aérodynamiques ont jusqu'à présent été définis uniquement dans des bases dites assemblées où ces noeuds d'interface sont considérés collés. Afin contourner cette difficulté, nous avons choisi de retenir les contributions aérodynamiques uniquement sur les variables associées à l'aube. Les termes qui apparaissent sur le disque ne sont pas physiques car seul l'aube est en contact avec le flux d'air. On choisit donc de ne pas retenir ces termes. Les coordonnées généralisées dans la base réduite assemblée  $q$  peuvent s'ordonner de la façon suivante :

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ q_I^{(1)} \\ q_I^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.12})$$

Où  $q_I^{(1)}$  représente les degrés de liberté associés aux modes internes de l'aube,  $q_I^{(2)}$  représente les degrés de liberté associés aux modes internes du disque et  $x_\Sigma$  les degrés de liberté physique de l'interface entre l'aube et le disque. Pour extraire uniquement les termes liés à l'aube, on introduit la matrice  $E$  définie ci dessous :

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.13})$$

La troisième et dernière étape consiste donc à utiliser cette matrice afin d'extraire les termes associés à l'aube.

$$\begin{cases} \tilde{A}^{(1)} &= E^T \tilde{A}_n E \\ \tilde{B}^{(1)} &= E^T \tilde{B}_n E \\ \tilde{F}^{f(1)} &= E^T \tilde{F}_n^f \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

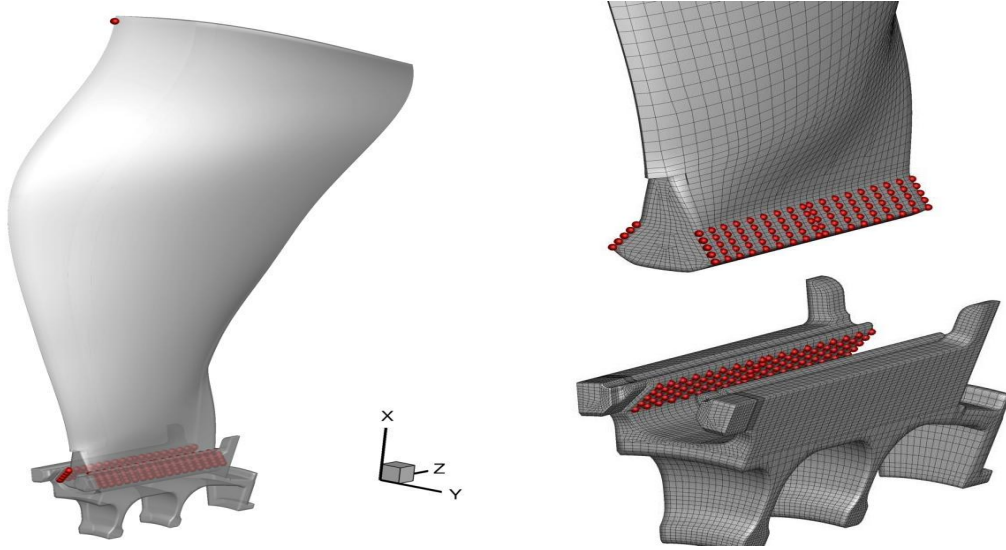


FIGURE V.3 – Réduction du modèle. Les noeuds en rouges correspondent aux noeuds conservés dans le domaine physique lors de la réduction.

Finalement, les termes aérodynamiques calculés dans la base modale du système assemblé ont été projetés sur l'aube définie en base réduite, ce qui va permettre le calcul mécanique non-linéaire en frottement. La méthode décrite ici est appliquée à la configuration industrielle dans la section suivante.

## 2 Estimation du niveau de réponse forcée non-linéaire sur la configuration industrielle

### 2.1 Réduction

La première étape des calculs non-linéaires consiste à effectuer la réduction du modèle éléments finis (cf IV.3.1). La figure V.3 illustre les noeuds conservés sur l'aube et sur le disque lors de la réduction de Craig et Bampton. Sur chaque portée de l'aube et du disque 90 noeuds sont conservés (5 rangées de 18 noeuds). De plus, un noeud d'observation est retenu en tête d'aube afin de restituer facilement les amplitudes observées. Concernant l'aube, les 20 premiers modes internes sont conservés. Concernant le disque, les 15 premiers modes internes du disque sont conservés. Ces modes sont des modes doubles compte tenu des conditions de symétrie cyclique appliquées aux frontières du secteur du disque modélisé. La réduction a été effectuée pour le diamètre 4. Afin de juger de la qualité de la réduction, il est intéressant de regarder les écarts entre les fréquences des modes de la structure assemblée,  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$  et les fréquences des modes de la structure réduite assemblée,  $\tilde{f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\mu}}}$ . L'erreur relative entre ces fréquences est illustrée sur le tableau V.1 pour les 5 premiers modes doubles. Cette erreur reste inférieure à 1% ce qui valide le fait que le nombre de noeuds et le nombre de modes retenus sont suffisants pour caractériser la dynamique de la structure soumise à des excitations basses fréquences.

| Mode                           | 1F   | 2F   | 1T   | M4   | M5   |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|
| $ \tilde{f} - f /f \times 100$ | 0.41 | 0.32 | 0.73 | 0.45 | 0.49 |

TABLEAU V.1 – Erreur relative (%) sur les fréquences des 5 premiers modes doubles assemblés suite à la réduction.

## 2.2 Excitation du mode 2F-4D

L'approche présentée dans la section précédente est utilisée ici afin d'alimenter le modèle réduit décrit ci-dessus. Afin d'évaluer les non-linéarités présentes à la coïncidence 2F/4EO on se restreint dans un premier temps à un problème purement harmonique de pulsation  $\omega = 4\Omega$  où  $\Omega$  représente la vitesse de rotation du fan. Pour cet harmonique, seul le diamètre  $n = 4$  est nécessaire pour modéliser la structure. La matrice réduite de raideur aérodynamique de l'aube  $\tilde{A}^{(1)}$ , la matrice réduite d'amortissement aérodynamique de l'aube  $\tilde{B}^{(1)}$  et le vecteur réduit d'efforts aérodynamiques d'excitation  $\tilde{F}^{f(1)}$  sont construits en considérant uniquement les termes aérodynamiques associés au mode 2F à 4 diamètres de la structure complète  $\phi_{2F-4D}$ . La matrice de raideur aérodynamique exprimée en formalisme réel dans la base modale réduite s'écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{A}}'_n = R_n^{-H} \tilde{\mathcal{A}}_n R_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & a^R & a^I & 0 & & \\ 0 & 0 & -a^I & a^R & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.15})$$

Les termes  $a^R$  et  $a^I$  proviennent des calculs aéroélastiques effectués dans le chapitre précédent (cf section IV.3.2). Ils sont associés au mode double 2F-4D c'est pourquoi ils apparaissent sur les lignes et colonnes 3 et 4 (les deux premières étant associées au mode 1F-4D). La démarche est identique pour la matrice d'amortissement aérodynamique exprimée en formalisme réel dans la base modale réduite :

$$\tilde{\mathcal{B}}'_n = R_n^{-H} \tilde{\mathcal{B}}_n R_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & b^R & b^I & 0 & & \\ 0 & 0 & -b^I & b^R & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.16})$$

Et enfin, les forces d'excitation, aussi issues des calculs aéroélastiques dans le chapitre précédent (cf section IV.3.2), sont introduites de manière similaire dans le vecteur d'efforts aérody-

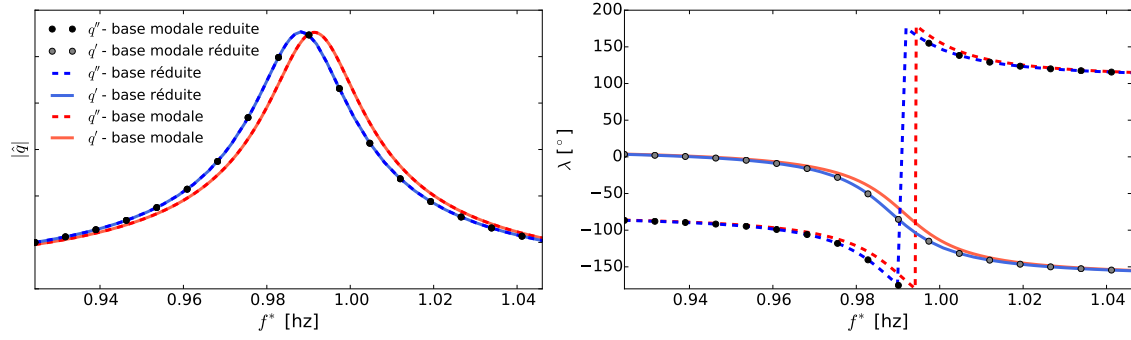


FIGURE V.4 – Amplitude  $|\dot{q}|$  et phase  $\lambda$  des coordonnées généralisées après résolution dans différentes bases.

namiques généralisés exprimé en formalisme réel dans la base modale réduite :

$$\tilde{f}_{ag,n}^f = R_n^{-H} \tilde{f}_{ag,n}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{f}_{ag}^f \\ \hat{f}_{ag}^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.17})$$

Les dernières étapes, de mise en place du modèle, suivent celles décrites dans le paragraphe précédent et illustrées figure V.2.

Dans un premier temps, on cherche à quantifier l'impact de nos hypothèses sur la résolution linéaire. La première hypothèse réside dans la réduction du modèle. La méthode se base sur la similarité entre la base modale assemblée et la base modale réduite assemblée. La figure V.4 illustre les coordonnées généralisées  $q'$  et  $q''$  associées au mode 2F-4D. Un décalage en fréquence apparaît entre les résultats issus de la résolution effectuée dans la base modale assemblée et ceux issus de la résolution dans la base modale réduite assemblée. L'interface entre l'aube et le disque est plus souple après la réduction car seulement un sous ensemble de noeud de l'interface a été conservé lors de la réduction. La liaison est donc plus rigide sur la structure totale. On retrouve ici l'erreur en fréquence liée à la réduction présentée tableau V.1. Afin de gagner en précision, il serait envisageable de conserver plus de noeuds à l'interface cependant cela aurait pour conséquence d'augmenter la taille des matrices réduites et donc le coût de calcul. La seconde hypothèse réside dans le fait de garder les termes aérodynamiques uniquement sur l'aube. La résolution linéaire dans la base réduite assemblée où les termes aérodynamiques sont appliqués uniquement sur l'aube est aussi représenté figure V.4. Cette résolution se superpose avec la résolution effectuée dans la base modale réduite assemblée, ce qui signifie que les termes associés au disque sont bien négligeables ici.

On cherche maintenant à évaluer la réponse non-linéaire à l'aide de la méthode DLFT. La solution non-linéaire est approximée ici par un seul harmonique. Les efforts non-linéaires sont évalués dans le domaine temporel lors de la procédure d'alternance temps-fréquence sur une période discrétisée en 12 pas de temps. Le coefficient de frottement est fixé à  $C_f = 0.1$ . L'amplitude

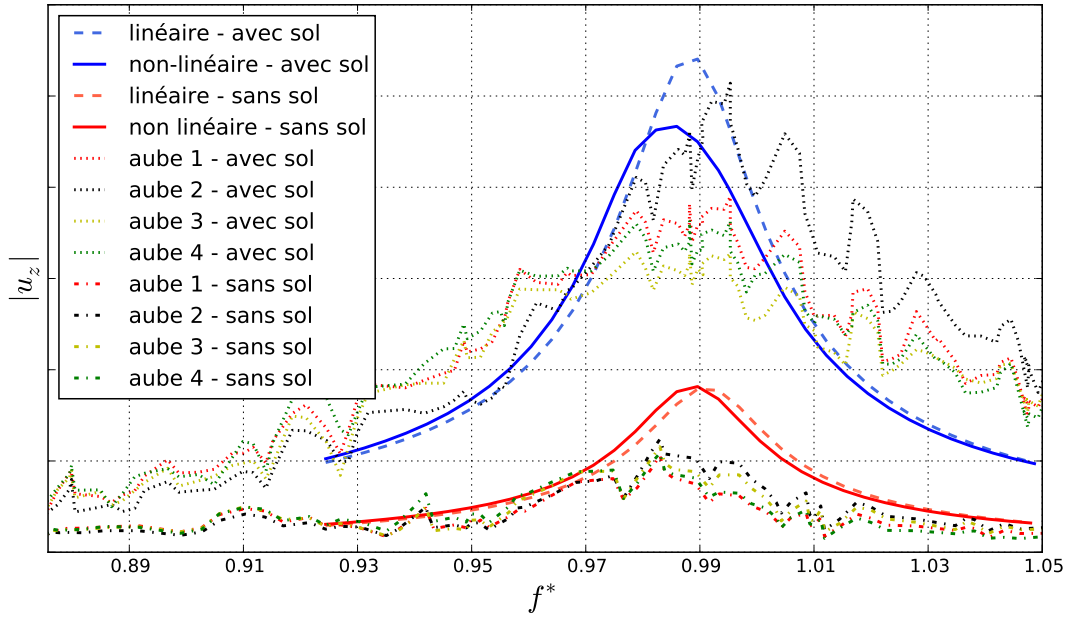


FIGURE V.5 – Réponse forcée à la coïncidence  $2F/4EO$  : calcul non-linéaire, calcul linéaire et essais.

du déplacement physique du noeud d'observation selon la direction axiale (direction  $z$ , cf schéma V.3) est représentée sur la figure V.5. La configuration avec sol y est représentée en bleu tandis la configuration sans sol apparaît en rouge. Les résultats issus des essais sont aussi présents. Le déplacement du noeud d'observation a été estimé à l'aide des coordonnées généralisées déterminées grâce aux jauges de contraintes présentes sur 4 aubes. Les coordonnées généralisées ont été converties en déplacement à l'aide de la déformée modale. Cette conversion est possible dans la mesure où les jauges dépouillées sont principalement sensibles au mode à la coïncidence et que les niveaux de réponse des autres modes sont relativement faibles. Les effets non-linéaires sont les plus marqués pour le cas avec sol. Le maximum de réponse atteint est plus faible dans le cas non-linéaire. Les niveaux sont alors plus proches des niveaux obtenus en essais. On note aussi un décalage en fréquence du maximum de réponse, ce qui est cohérent avec les effets non-linéaires observés dans la littérature (par exemple chez Charleux [16]). La figure V.6 représente l'état des noeuds des portées de l'aube pour une fréquence proche de celle où le maximum de niveau est atteint, à savoir  $f^* = 0.986$ . On remarque que certains noeuds sont décollés tout au long de la période. Ces décollements sont dus aux efforts statiques de précharge. Ils expliquent le décalage en fréquence entre la réponse linéaire et celle non-linéaire dans la mesure où les calculs linéaires sont réalisés en collant tous les noeuds de l'interface. Les calculs non-linéaires sont donc caractérisés par une interface plus souple c'est pourquoi ce décalage en fréquence est observé, même pour de faibles amplitudes où aucun glissement n'apparaît. La figure V.6 permet aussi de cibler les zones qui entrent en glissement au cours de la période. Le rapport  $t^*$  correspond au temps en glissement sur la période. S'il vaut 1 alors le noeud glisse tout au long de la période, s'il vaut 0 alors le noeud est collé tout au long de la période. Les zones qui entrent en glissement sont localisées à l'avant de la portée coté intrados, c'est donc dans cette zone que l'énergie est principalement dissipée.

La principale hypothèse de la méthode proposée pour effectuer un calcul non-linéaire dans un

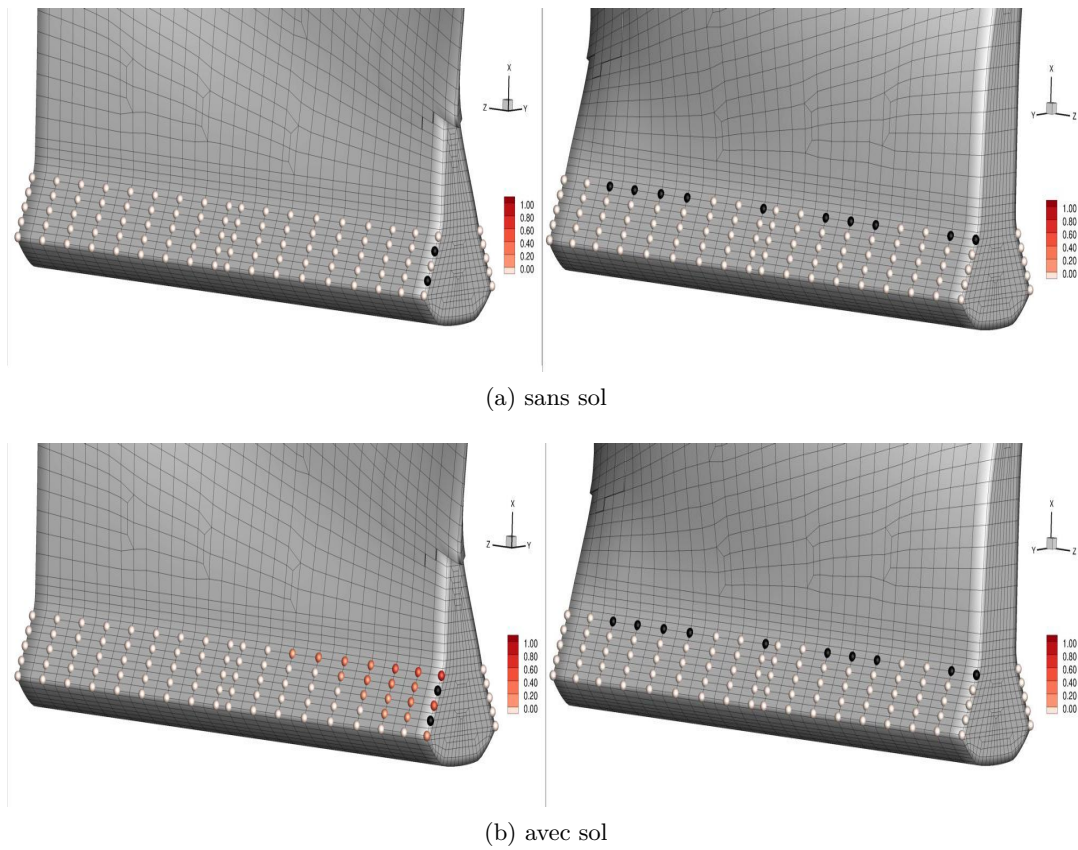


FIGURE V.6 – Etat du contact sur une période pour la fréquence  $f^* = 0.986$  : collé sur toute la période (●), décollé sur toute la période (●), glissant sur une partie de la période (●). A gauche : intrados, à droite : extrados.

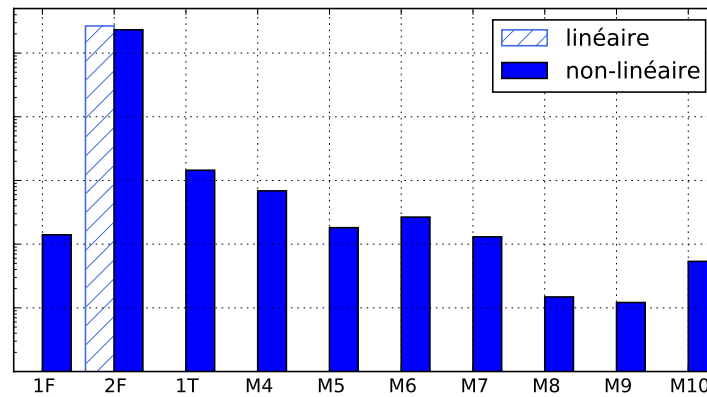


FIGURE V.7 – Contribution modale au déplacement du noeud d’observation selon  $z$  pour les 10 premiers modes pour  $f^* = 0.986$  (échelle logarithmique).

cadre aéroélastique réside dans le fait que le mouvement non-linéaire est proche du mouvement linéaire (en terme de mouvement, mais pas forcément d’amplitude). C’est à dire que malgré l’introduction du contact et du frottement en pied, le mouvement de l’aube reste proche du mouvement du mode à la coïncidence, dans notre cas le mode  $\phi_{2F-4D}$ . Afin de vérifier cette hypothèse, le mouvement est projeté dans la base modale réduite assemblée (cf figure V.1). Cette base est définie en considérant les noeuds d’interface collés. On assimile donc le déplacement de l’interface au déplacement de l’aube afin d’être en mesure d’effectuer la projection sur la base  $\tilde{\Phi}_n$ . La figure V.7 illustre les contributions modales du déplacement selon la direction  $y$  du noeud d’observation (cf figure V.3) pour une fréquence adimensionnée de  $f^* = 0.986$  correspondant à une fréquence où les effets non-linéaires sont les plus marqués<sup>1</sup>. Concernant le calcul linéaire, uniquement le mode 2F contribue au déplacement de la structure ce qui est tout à fait normal dans la mesure où les efforts ont été introduits uniquement sur ce mode. Chaque mode est indépendant sous l’hypothèse de linéarité. L’introduction des non-linéarités entraîne un contenu modale beaucoup plus riche. En effet, des contributions apparaissent sur les 10 premiers modes présentés ici. Cependant, ces contributions sont au moins deux ordres de grandeur plus faibles que la contribution du mode 2F qui est excité. Bien que des phénomènes non-linéaires apparaissent, le mouvement reste principalement piloté par le mode 2F. Il est donc acceptable dans ce cas de modéliser la réponse du fluide uniquement sur ce mode.

### 2.3 Excitation sur plusieurs modes et plusieurs diamètres

Dans la section précédente, seul le chargement aérodynamique du mode en coïncidence était considéré (le mode 2F-4D) et le calcul a été réalisé avec un seul harmonique. On cherche ici à enrichir notre calcul en considérant plusieurs modes et plusieurs harmoniques. L’étude aérodynamique des efforts de pressions liés au vortex a montré que de fortes amplitudes d’efforts étaient présentes pour les ordres moteurs 1, 2, 3 et 4 (cf section III.2.2). L’idée ici est donc de réaliser le calcul non-linéaire sur ces 4 harmoniques dans le cas avec sol où les phénomènes non-linéaires sont les plus marqués. Chaque harmonique de l’excitation est reliée à un nombre à diamètre via le diagramme ZigZag. Théoriquement, un mouvement sur un diamètre  $n$  peut être décomposé en plusieurs harmoniques temporels notamment en présence de non-linéarité.

1. Uniquement les contributions des modes réels sont représentées ici afin de faciliter la lecture de la figure.

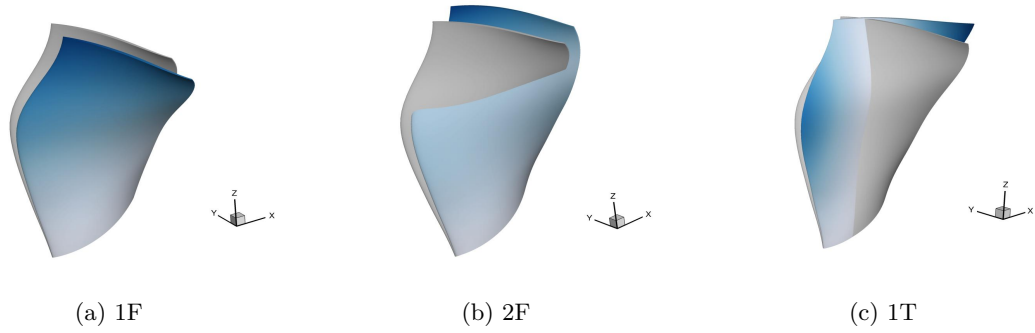


FIGURE V.8 – Déformées modales.

Cependant, il n'est pas envisageable de modéliser ces harmoniques sur un seul secteur car la relation de propagation V.1 n'est alors plus respectée. Un seul harmonique est donc associée à chaque nombre à diamètre. Dans la mesure où l'on considère de faibles harmoniques ( $n < \frac{N}{2}$ ), on se situe dans la première branche du diagramme ZigZag (cf figure II.5) ce qui permet de confondre nombre à diamètre et harmonique temporel.

La stratégie utilisée ici est la même que celle décrite précédemment mais cette fois-ci le vecteur d'effort  $f_{ag}^f$  est beaucoup plus riche. Pour chaque harmonique (et donc chaque nombre à diamètre), on considère la projection des efforts sur les 3 premiers modes de la structure complète : 1F, 2F et 1T. Compte tenu de la rigidité du disque, l'hypothèse est ici faite que le nombre à diamètre influence peu les matrices de raideur et de masse (les mêmes matrices de raideur et de masse modale sont utilisées pour tous les diamètres). Les déformées des modes utilisés sont représentées figure V.8. Les composantes harmoniques des forces aérodynamiques généralisées sont obtenues en projetant les efforts de pression de l'aube de référence ( $S_0$ ) sur les modes d'intérêt à l'aide de la transformée de Fourier suivante :

$$\hat{f}_{ag,i,n}^f = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_{dS} p(S_0) (\phi_{i,n}(S_0) \cdot s) dS e^{-jn\omega t} \quad (V.18)$$

où  $s$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface  $dS$ ,  $i$  correspond au mode (1F, 2F ou 1T),  $n$  correspond au nombre à diamètre et  $T$  la période de rotation.

Les matrices d'amortissement aérodynamique et de raideur aérodynamique ne sont pas modifiées par rapport au cas précédent. Seul l'amortissement aérodynamique sur le mode 2F-4D est modélisé. L'hypothèse est ici faite que la dynamique des autres modes est pilotée par la raideur et la masse et non par l'amortissement dans la mesure où les fréquences d'excitation associés aux autres modes (compte tenu du diagramme ZigZag) sont relativement loin leur fréquence propre (cf figure I.5). De plus, on néglige le couplage aérodynamique inter-modal.

Un premier calcul linéaire est effectué en considérant ces nouvelles forces aérodynamiques généralisées. Le calcul est donc composé de  $n_h = 4$  harmoniques. La figure V.9 illustre les contributions modales de l'amplitude du déplacement du noeud d'observation situé en tête d'aube. Deux fréquences sont illustrées : l'une relativement loin de la résonance, l'autre proche de la résonance. La première correspond donc à  $f^* = 4f_{rot}/f_{2F-4D} = 0.953$  où  $f_{rot}$  est la fréquence de rotation donc la fondamentale du calcul. Le mouvement du noeud en tête est dans ce cas dû au mode 2F à 4 diamètres mais aussi au mode 1F à 1 diamètre et au mode 1F à 2 diamètres. On remarque que les modes associés au diamètre 3 ne participent que très peu au mouvement

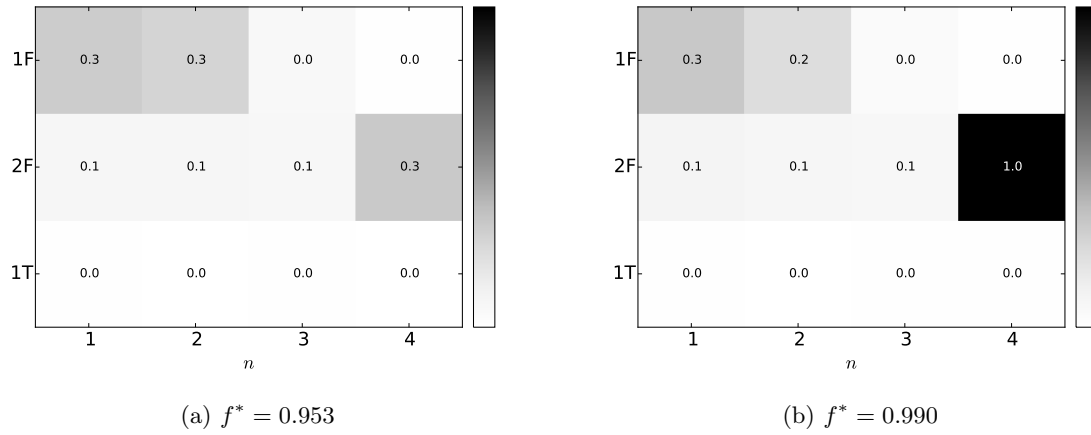


FIGURE V.9 – Contributions modales de la norme du déplacement du noeud d'observation adimensionnée par la norme du déplacement maximum atteint sur le mode 2F à 4 diamètres.

de l'aube. Et de plus, le mode 1T semble lui aussi ne pas avoir d'influence sur le mouvement du noeud en tête. Pour la seconde fréquence illustrée, correspondant à  $f^* = 4f_{rot}/f_{2F-4D} = 0.990$ , le mode 2F-4D devient le principal contributeur au mouvement du noeud d'observation. Ces cartographies d'amplitudes permettent d'avoir une idée des contributions modales. Remarquons aussi que ces conclusions dépendent du point d'observation.

La période temporelle est composée de  $4 \times 12 = 48$  pas de temps afin de retrouver la même précision que celle obtenue sur le calcul précédent avec  $n_h = 1$ . Les résultats sont illustrés figure V.10. Le maximum de la norme du déplacement du noeud d'observation est représenté pour le calcul "2F-4D", qui correspond au calcul où seule l'excitation du mode 2F-4D est prise en compte, et pour le calcul "complet", qui correspond au calcul où l'excitation liée à plusieurs nombres à diamètres et plusieurs modes est prise en compte. Dans le cas 2F-4D ce maximum est obtenu avec les amplitudes de l'unique harmonique considéré. Dans le cas complet, le signal temporel est reconstruit à l'aide des amplitudes et phases des différents harmoniques. Le maximum de la norme du déplacement atteint sur la période est ensuite extrait. L'enrichissement du vecteur d'efforts des forces aérodynamiques généralisées d'excitation augmente fortement les niveaux obtenus sur le noeud d'observation. Cependant, l'abaissement des niveaux entre le calcul linéaire et le calcul non-linéaire semble relativement proche en valeur absolue dans les deux cas étudiés ici. Afin de comparer plus précisément l'impact de la prise en compte des différents efforts sur les non-linéarités en pied, la figure V.11 illustre l'amplitude de la norme du déplacement sur l'harmonique 4, noté  $|\hat{x}_4|$ . La différence entre les courbes linéaires du calcul "2F-4D" et le calcul "complet" réside dans les composantes 1F et 1T de l'effort à 4 diamètres. Cet écart est très faible comme les contributions modales, exposées figure V.9, le laissait imaginer. Concernant les résultats non-linéaires, les niveaux sont très légèrement plus faibles dans le cas complet. Le comportement de la portée dans le cas complet est illustré figure V.12. Comparé à la figure V.6b, certains noeuds qui était toujours collé entrent en glissement dans le cas complet. Ces noeuds sont repérés par un cercle rouge. Le calcul 2F-4D comportant un unique harmonique a été réalisé en moins d'une heure tandis que le calcul complet a lui nécessité 8 heures. Il est donc plus judicieux de se restreindre au seul mode 2F-4D dans ce cas précis.

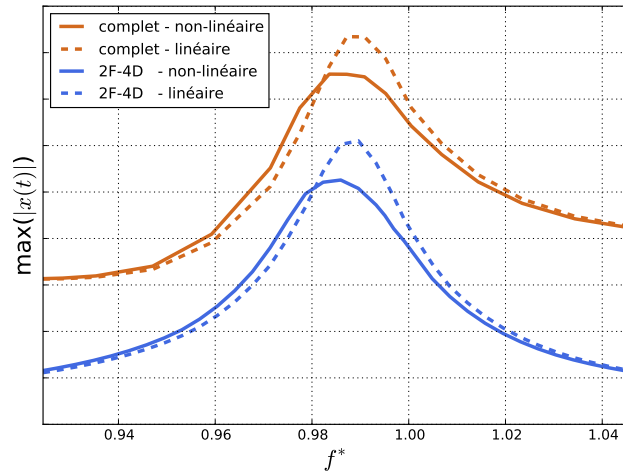


FIGURE V.10 – Maximum de la norme du déplacement du noeud d'observation pour différents chargements aérodynamiques.

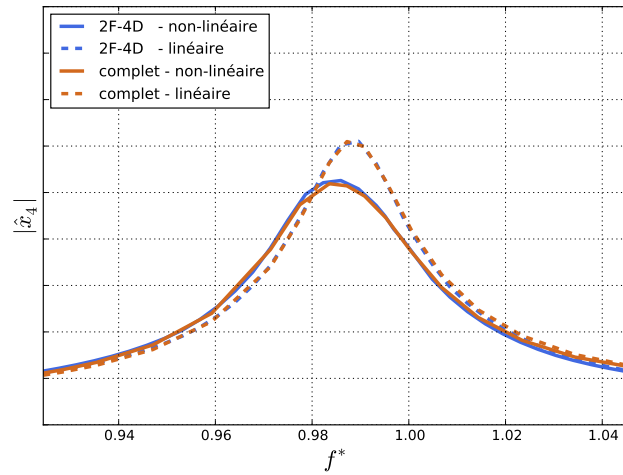


FIGURE V.11 – Amplitude de l'harmonique 4 du déplacement du noeud d'observation pour différents chargements aérodynamiques.

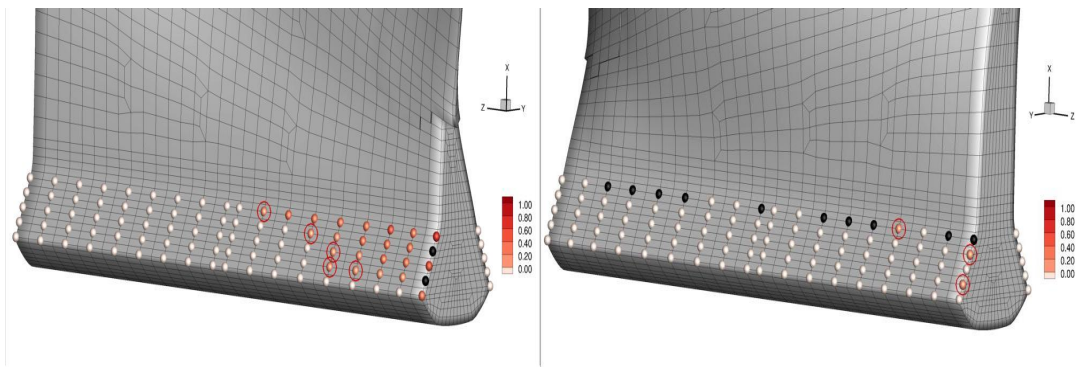


FIGURE V.12 – Etat du contact sur une période pour la fréquence  $f^* = 0.987$  : collé sur toute la période (○), décollé sur toute la période (●), glissant sur une partie de la période (●). À gauche : intrados, à droite : extrados. Les noeuds encadrés correspondent aux noeuds collés dans le cas 2F-4D (cf figure V.6b) et glissant dans le cas présent.

### 3 Bilan

Ce chapitre a permis d'évaluer l'impact des non-linéarités liées au contact entre l'aube et le disque sur la réponse forcée du fan dans le cas d'une ingestion de vortex. La structure a été réduite à un seul secteur grâce aux propriétés de symétrie cyclique et à la nature du chargement. De plus, la méthode de Craig et Bampton a été utilisée afin de réduire la taille du modèle tout en conservant les degrés de libertés physiques à l'interface entre l'aube et le disque. Une méthode découplée permettant de prendre en compte les termes aérodynamiques a été proposée. Cette méthode se base sur la similarité de la base modale réduite de Craig et Bampton et la base modale complète dans le cas collé. Le principal avantage réside dans le fait que cette méthode ne nécessite d'effectuer que très peu de calculs aéroélastiques. Cette méthode a été utilisée sur la configuration industrielle et a permis de mettre en avant des effets non-linéaires dans le cas d'ingestion de vortex. Plusieurs noeuds entrent en glissement dans la zone avant de l'intrados de l'aube. Ce glissement est responsable d'une diminution des amplitudes vibratoires et d'un léger décalage en fréquence du maximum de réponse. La prise en compte des non-linéarités améliore la prédiction numérique au regard des résultats expérimentaux. La présence de non-linéarités indique que le principe de superposition qui permettait d'isoler la résolution sur un seul mode n'est alors plus valide. C'est pourquoi un second calcul non-linéaire a été réalisé en considérant plusieurs modes et plusieurs nombres à diamètre. La richesse de l'excitation provenant du vortex de sol augmente fortement l'amplitude du déplacement de l'aube. Afin de prédire convenablement les niveaux de contraintes atteints lors d'une ingestion de vortex, il semble nécessaire de prendre en compte plusieurs modes et plusieurs nombre à diamètre. Sur la coïncidence étudiée, la prise en compte de plusieurs modes et plusieurs diamètres n'influence quasiment pas l'impact des non-linéarités qui reste relativement faible (diminution autour de 10% du maximum atteint).



## Chapitre VI

# Développement d'un modèle analytique pour prédire rapidement la réponse forcée en présence de vortex

Ce dernier chapitre a pour objectif de présenter un modèle analytique permettant d'estimer rapidement les forces d'excitations générées par une ingestion de vortex. L'idée est de disposer d'un outil basse fidélité facilement utilisable en phase de conception. Dans un premier temps, la stratégie de modélisation est présentée, puis le modèle est évalué sur la configuration industrielle. L'approximation ainsi mise en place est utilisée comme support pour illustrer les mécanismes aéroélastiques d'excitation liés à l'ingestion de vortex. Et finalement, elle est appliquée dans la dernière partie afin d'évaluer l'impact d'une potentielle instationnarité du vortex.

### Sommaire

---

|          |                                                                                                                                   |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Description d'un modèle analytique pour l'estimation des forces aérodynamiques généralisées basé sur la giration . . . . .</b> | <b>146</b> |
| 1.1      | Estimation des efforts aérodynamiques au sein d'une cascade de profil. . .                                                        | 146        |
| 1.2      | Estimation des forces aérodynamiques généralisées. . . . .                                                                        | 149        |
| <b>2</b> | <b>Évaluation du modèle sur la configuration industrielle . . . . .</b>                                                           | <b>149</b> |
| <b>3</b> | <b>Caractérisation de l'impact de l'instationnarité du vortex sur la réponse forcée . . . . .</b>                                 | <b>152</b> |
| 3.1      | Cartographie instationnaire théorique . . . . .                                                                                   | 154        |
| 3.2      | Démarche du calcul de réponse forcée . . . . .                                                                                    | 154        |
| 3.3      | Résultats . . . . .                                                                                                               | 155        |
| <b>4</b> | <b>Bilan . . . . .</b>                                                                                                            | <b>156</b> |

---

## 1 Description d'un modèle analytique pour l'estimation des forces aérodynamiques généralisées basé sur la giration

Les méthodes numériques d'estimation des niveaux vibratoires présentées dans ce document ont montré qu'elles étaient en mesure de retranscrire l'impact du vortex de sol observé en essai. Cependant, ces méthodes restent très lourdes à utiliser dans les phases de conception où de nombreuses itérations sont nécessaires. En effet, pour chaque itération de dessin d'aube il est nécessaire d'effectuer des calculs instationnaires coûteux nécessitant une description fine de la géométrie de l'aube. L'objectif de cette section est de proposer un outil permettant de classer différentes stratégies de conception et de mettre en avant les paramètres critiques vis à vis de la réponse forcée sous ingestion de vortex sans avoir recours à des calculs haute fidélité trop coûteux.

L'analyse du chargement aérodynamique entraîné par l'ingestion de vortex effectuée dans la section III.2 a montré que les fluctuations d'efforts étaient principalement pilotées par la distorsion d'angle. Il a aussi été montré que ces fluctuations étaient localisées au bord d'attaque. Le modèle analytique présenté ci-dessous se base sur ces observations. La démarche mise en place est d'estimer les forces aérodynamiques généralisées d'excitation en se basant sur une cartographie de distorsion et des paramètres géométriques de l'aube.

### 1.1 Estimation des efforts aérodynamiques au sein d'une cascade de profil.

La figure VI.1 illustre une cascade de profil pouvant être assimilée à une coupe à un rayon  $r$  donné. On se place donc dans le repère relatif où la vitesse relative  $u$  s'obtient à l'aide de la vitesse absolue  $v$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  :

$$u = (u_x, u_r, u_t) = (v_x, v_r, v_t - \Omega r). \quad (\text{VI.1})$$

L'écoulement est ici considéré bidimensionnel, incompressible, périodique et stationnaire. Afin de déterminer les efforts générés par le profil, on applique les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle autour du profil. Dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel, on considère un volume de contrôle de dimension radiale unitaire, les lois de conservation peuvent alors s'appliquer sur la surface illustrée en pointillée dans la figure VI.1. Dans la suite, les grandeurs relatives à l'amont du profil sont indicées par 1 tandis que les grandeurs relatives à l'aval sont indicées par 2. De plus, on introduit l'angle  $\beta$  par l'équation suivante :

$$\beta = \text{atan} \left( \frac{u_t}{u_x} \right) \quad (\text{VI.2})$$

ainsi que le pas inter-aube  $d$  par :

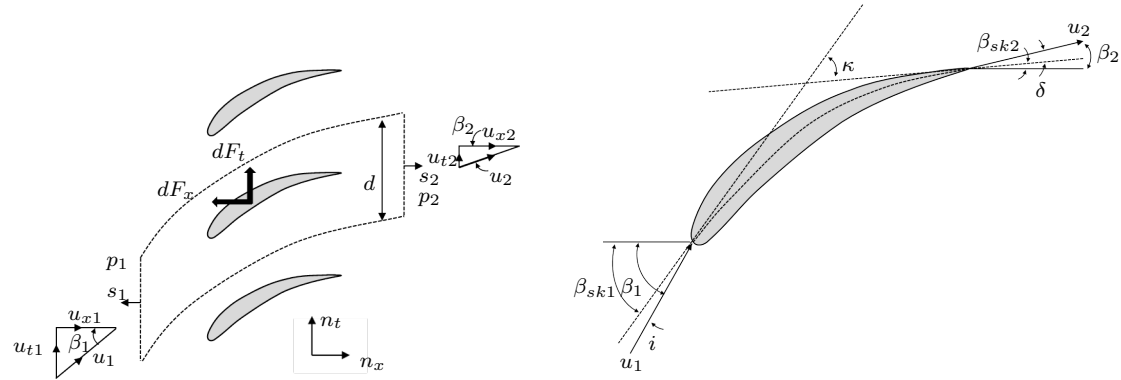
$$d = \frac{2\pi r}{N} \quad (\text{VI.3})$$

#### Conservation de la masse

La loi de conservation de la masse appliquée à la surface de contrôle  $S$  de contour  $\partial S$  conduit à :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho dS = 0 \quad (\text{VI.4})$$

L'application de l'opérateur dérivée permet d'exprimer le membre de gauche comme une somme de deux termes : la variation de masse volumique au sein de la surface ainsi que la masse



(a) Déviation de l'écoulement au sein d'une cascade de profil

(b) Détails des angles du profil

FIGURE VI.1 – Définition des angles et des vitesses.

volumique qui entre et sort de la surface : :

$$\iint_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \rho dS + \int_{\partial S} \rho(u \cdot s) dl = 0 \quad (\text{VI.5})$$

où  $u$  représente le vecteur de la vitesse relative au profil et  $s$  le vecteur normal à la courbe  $\partial S$  de la surface de contrôle. Sous l'hypothèse d'écoulement stationnaire, le premier terme s'annule. De plus, à l'aide d'argument de périodicité, le second terme se réduit uniquement aux composantes amont et aval du domaine, ce qui donne finalement :

$$\rho d(u_{x2} - u_{x1}) = 0 \quad (\text{VI.6})$$

L'équation de conservation de la masse dans un cadre incompressible conduit donc à la conservation de la vitesse axiale.

### Conservation de la quantité de mouvement

La loi de conservation de quantité de mouvement appliquée à la surface de contrôle  $S$  conduit à :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho u dS = \sum \frac{dF^{ext}}{dr} \quad (\text{VI.7})$$

Où  $\frac{dF^{ext}}{dr}$  représente les forces par unité de longueur radiales extérieures au domaine fluide considéré. Ces forces comportent les efforts du profil sur le fluide et les efforts de pression extérieurs au domaine. De la même façon que pour l'équation de la conservation de la masse, l'application de l'opérateur dérivée permet d'exprimer le membre de gauche comme la somme de deux termes :

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dS + \int_{\partial S} \rho u (u \cdot s) dl = \sum \frac{dF^{ext}}{dr} \quad (\text{VI.8})$$

Toujours à l'aide de l'hypothèse de stationnarité et de périodicité, l'équation vectorielle de quantité de mouvement projetée sur  $s_x$  et  $s_t$  devient :

$$\begin{cases} d\rho(u_{x2}u_{x2} - u_{x1}u_{x1}) = -\frac{dF_x}{dr} + (p_1 - p_2)d \\ d\rho(u_{x2}u_{t2} - u_{t1}u_{x1}) = -\frac{dF_t}{dr} \end{cases} \quad (\text{VI.9})$$

Où  $\frac{dF_x}{dr}$  et  $\frac{dF_t}{dr}$  sont les efforts du fluide sur le profil par unité de longueur radiale,  $p_1$  (respectivement  $p_2$ ) la pression à l'amont (respectivement l'aval) de la surface de contrôle comme illustré sur la figure VI.1. En utilisant la conservation de la vitesse axiale équation VI.6, ie  $u_{x1} = u_{x2}$ , il vient :

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dr} = d(p_1 - p_2) \\ \frac{dF_t}{dr} = \rho du_{x1}(u_{t1} - u_{t2}) \end{cases} \quad (\text{VI.10})$$

En faisant l'hypothèse qu'il n'y ait aucune perte de pression totale, il est possible de faire disparaître la pression à l'aide de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible. Les forces du fluide s'exerçant sur le profil sont alors données :

$$dF_{aero} = \begin{bmatrix} dF_x \\ dF_r \\ dF_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho d(u_2^2 - u_1^2)dr \\ 0 \\ \rho su_{x1}(u_{t1} - u_{t2})dr \end{bmatrix} \quad (\text{VI.11})$$

Les vitesses en amont sont définies par la distorsion mais les vitesses en aval ne sont à priori pas connues. Une première approche consiste à estimer  $\beta_2$  par  $\beta_{sq2}$ , l'angle tangent à la ligne de cambrure au niveau du bord de fuite illustré figure VI.1b. En pratique, la vitesse  $u_2$  n'est pas forcément alignée avec le bord de fuite, mais forme un angle  $\delta$  avec celui-ci. Wallis [91] préconise d'utiliser la relation suivante entre  $\delta$  et les paramètres géométriques du profil : le pas inter-aube  $d$ , la corde  $c$  et l'angle de cambrure  $\kappa$  dans le cadre de profil de compresseur axial sous faibles incidences ( $i$  entre  $-5$  et  $5$  degrés) :

$$\delta = 0.26\kappa\sqrt{\frac{d}{c}} \quad (\text{VI.12})$$

avec :

$$\kappa = \beta_{sq1} - \beta_{sq2} \quad (\text{VI.13})$$

Finalement,  $\beta_2$  s'obtient par :

$$\beta_2 = \beta_{sq2} + \delta \quad (\text{VI.14})$$

Et il est alors possible de remonter à la vitesse tangentielle  $u_{t2}$  avec la relation suivante :

$$u_{t2} = u_{x1}\tan(\beta_2) \quad (\text{VI.15})$$

En conclusion, la démarche explicitée dans cette section permet d'estimer les efforts par unité d'envergure générés par le fluide sur un profil. L'approche nécessite de connaître les vitesses en amont du profil ainsi que certains paramètres géométriques de celui-ci. Elle fait intervenir des hypothèses fortes rappelées ci-dessous :

- fluide parfait
- écoulement stationnaire
- écoulement incompressible
- écoulement périodique
- écoulement bidimensionnel

## 1.2 Estimation des forces aérodynamiques généralisées.

Afin d'estimer des forces aérodynamiques généralisées, il est nécessaire de projeter les efforts aérodynamiques sur les modes d'intérêt. La méthode décrite précédemment permet d'obtenir une répartition radiale d'effort. D'un point de vue aérodynamique, l'aube est donc réduite à une seule dimension. Une simplification des modes, par nature tridimensionnels, doit aussi être effectuée afin d'être capable de projeter les efforts sur les modes dans le but d'obtenir des forces aérodynamiques généralisées. L'analyse du chargement aérodynamique effectué dans la section III.2 a mis en avant que les fluctuations d'efforts étaient localisées au bord d'attaque, c'est pourquoi il a été choisi de réduire la déformée modale à sa valeur au bord d'attaque. Cette nouvelle déformée modale ne dépend plus que du rayon  $r$ , on la note  $\phi^{BA}$ . Il s'agit d'une hypothèse forte.

On considère maintenant une cartographie de distorsion définie dans le repère absolu par la masse volumique  $\rho(r, \theta)$  et le vecteur vitesse absolue  $v(r, \theta)$ . En connaissant la vitesse de rotation  $\Omega$ , le pas inter-aube  $d$  et les caractéristiques géométriques radiales de l'aube :  $c(r)$ ,  $\beta_{sq1}(r)$ ,  $\beta_{sq2}(r)$ , il est possible de déterminer les efforts en chaque point  $F_{aero}(r, \theta)$  de la cartographie.

Dans le cas où la cartographie est fixe dans le repère absolu, chaque aube parcourt la même distorsion avec un déphasage lié au régime de rotation. Une relation de propagation existe donc entre les différentes aubes. Le problème peut donc s'exprimer uniquement sur l'aube de référence. La position angulaire de l'aube de référence s'exprime par :  $\theta = \Omega t$ . Cela permet d'obtenir pour chaque rayon l'évolution temporelle des efforts aérodynamiques liés à la distorsion sur une aube. Ces efforts sont périodiques et peuvent donc être décomposés en série de Fourier pour chaque rayon.

$$dF_{aero}(r, \Omega t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} d\hat{F}_{aero,h} e^{jh\Omega t} \quad (\text{VI.16})$$

Si on se restreint aux faibles ordres moteurs qui prédominent dans le cas d'une ingestion de vortex ( $h < N/2$ ), on peut assimiler l'harmonique d'excitation  $h$  au nombre à diamètre excité  $n$  (première branche du diagramme ZigZag illustré figure II.5). Il s'en suit que la composante harmonique des forces aérodynamiques généralisées d'excitation associées au mode complexe  $i$  et au nombre à diamètre  $n$  définit sur une aube s'écrit pour chaque rayon :

$$d\hat{f}_{ag,i,n}^f(r) = \overline{\phi_{i,n}^{BA}}(r) \cdot d\hat{F}_{aero,n}(r) \quad (\text{VI.17})$$

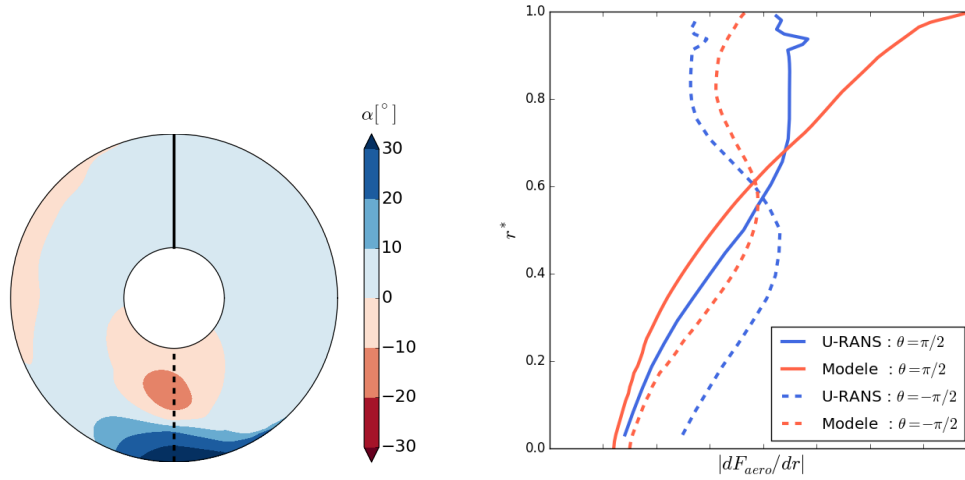
Finalement, l'intégration en rayon de cette grandeur permet d'obtenir les forces aérodynamiques généralisées d'excitation dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{f}_{ag,i,n}^f = \int_{r_{min}}^{r_{max}} d\hat{f}_{ag,i,n}^f(r) \quad (\text{VI.18})$$

Cette grandeur peut directement être mise en entrée d'un calcul de réponse forcée dans le domaine fréquentiel dans lequel une estimation de l'amortissement doit être introduite.

## 2 Évaluation du modèle sur la configuration industrielle

L'objectif de cette section est d'évaluer les prédictions du modèle simplifié présenté dans la section précédente. La référence ici est l'approche U-RANS utilisée précédemment avec cartographie (cf section chapitre III et chapitre IV). Les pressions sur l'aube de référence ont été



(a) Illustration de la cartographie de distorsion. (b) Répartition radiale d'effort aérodynamique

FIGURE VI.2 – Evaluation de l'estimation de la répartition radiale d'effort aérodynamique en deux positions azimutales.

extraîtes au cours du calcul sans mouvement et un traitement spécifique a été effectué afin d'évaluer la répartition d'effort le long de l'envergure. La figure VI.2 illustre une comparaison de la répartition d'effort aérodynamique entre l'estimation du modèle simplifié et les résultats U-RANS dans le cas d'une ingestion de vortex. Deux positions azimutales sont évaluées : la première se situe à  $\theta = \pi/2$ , relativement loin de la distorsion générée par le vortex et la seconde se situe à  $\theta = -\pi/2$  dans la zone de distorsion du vortex de sol. Ces deux positions sont repérées sur la cartographie utilisée pour le modèle simplifié sur la figure VI.2a où l'angle de giration est illustré. Pour les deux positions, le modèle sous-estime les efforts aérodynamiques pour les faibles rayons ( $r^* < 0.65$ ) et les surestime pour les rayons élevés ( $r^* > 0.65$ ). Les écarts sont conséquents en tête d'aube. Dans cette zone, les hypothèses d'incompressibilité et d'écoulement bidimensionnel sont fortement discutables. Malgré ces écarts, l'évolution entre les deux positions est relativement bien restituée. En effet, la distorsion associée au vortex induit une diminution de l'angle d'attaque en tête d'aube et par conséquent une diminution des forces aérodynamiques. Le comportement inverse est observé sur la partie inférieure de l'aube où la distorsion augmente l'angle d'attaque et par conséquent entraîne une augmentation des forces aérodynamiques.

On cherche maintenant à comparer les forces aérodynamiques généralisées d'excitation pour différents modes et différents harmoniques d'excitation (et donc différents nombres à diamètre). Pour chaque harmonique, on considère la projection des efforts sur les 3 premiers modes de la structure complète : 1F, 2F et 1T. Compte tenu de la rigidité du disque, les déformées modales sont supposées indépendantes du nombre à diamètre. Les déformées des modes utilisées sont représentées figure V.8. Les composantes harmoniques des forces aérodynamiques généralisées d'excitation sont obtenues en projetant les efforts de pression de l'aube de référence ( $S_0$ ) sur les modes d'intérêt à l'aide de la transformée de Fourier suivante :

$$\hat{f}_{ag,i,n}^f = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_{dS} P(S_0)(\phi_{i,n}(S_0) \cdot s) dS e^{-jn\omega t} \quad (\text{VI.19})$$

où  $s$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface  $dS$ ,  $i$  correspond au mode (1F, 2F ou

1T),  $n$  correspond au nombre à diamètre et  $T$  la période de rotation. La figure VI.3 représente la comparaison des amplitudes harmoniques des forces aérodynamiques généralisées d'excitation  $|\hat{f}_{ag,i,n}^f|$  entre les résultats U-RANS et ceux issus du modèle simplifié. Pour chacun des 3 modes évalués, les estimations dans les cas avec et sans sol (c'est à dire avec et sans vortex) sont représentées. Concernant le premier et le second mode de flexion (1F et 2F), les conclusions sont similaires. Premièrement, le modèle est capable de restituer l'impact du sol qui mène à des niveaux d'excitation plus élevés sur tous les nombres à diamètres étudiés. Ensuite, l'effet du nombre à diamètre est très bien capturé par le modèle. Par contre, il surestime les niveaux ce qui est probablement dû au fait que les efforts aérodynamiques sont surévalués en tête, dans la zone où les déplacements modaux sont les plus élevés. Concernant le mode de torsion (1T), les résultats U-RANS montrent que le vortex a peu d'impact sur les forces d'excitation. Le modèle ne permet pas de rendre compte de cette tendance, ce qui s'explique par la réduction de la déformée modale uniquement au déplacement du bord d'attaque.

Afin de comprendre plus précisément les différences entre les deux modélisations, les évolutions radiales des forces aérodynamiques généralisées  $d\hat{f}_{ag,i,n}^f/dr$  sont extraites des calculs U-RANS et comparées aux estimations du modèle. L'évolution radiale de l'amplitude et de la phase  $\lambda$  des forces aérodynamiques généralisées sont représentées figure VI.4 pour les trois modes à 4 diamètres. Concernant le mode 1F, les résultats du modèle sont cohérents avec ceux issus des calculs U-RANS pour les cas avec et sans sol. L'amplitude est cependant surestimée pour les rayons élevés ce qui est en accord avec les observations précédentes. Un changement de phase est observé le long de l'envergure. En effet, pour les faibles rayons la phase est proche de  $\pi/2$  tandis que pour les rayons élevés elle est proche de  $-\pi/2$ . Ce changement de phase, bien restitué par le modèle, provient du changement de signe de la distorsion d'angle et donc de l'effort aérodynamique. La force aérodynamique généralisée totale s'obtient en intégrant la valeur de  $d\hat{f}_{ag,i,n}^f/dr$  le long du rayon  $r$ . Le changement de phase implique que la partie inférieure compense la partie supérieure lors de l'intégration. Concernant le mode 2F en présence du sol, un double changement de phase est observé : le premier provient du changement de signe de l'effort aérodynamique et le second provient du changement de signe de la déformée modale. Il s'en suit que la partie inférieure et la partie supérieure ont la même phase (proche de  $\pi/2$  ici). La partie inférieure vient dans ce cas se cumuler à la partie supérieure lors de l'intégration de  $d\hat{f}_{ag,i,n}^f/dr$  le long du rayon  $r$ . L'excitation liée au vortex a donc une forme appropriée pour exciter un mode 2F si le centre du vortex est proche de la ligne nodale du mode, ce qui est observé dans le cas étudié. Le modèle est capable de capturer ce double changement de phase cependant il surestime toujours l'amplitude en tête d'aube. Concernant le mode 1T en présence du sol, il y a aussi un changement de phase provenant de l'excitation aérodynamique. Les résultats U-RANS montrent une évolution radiale de la phase plus complexe même si les parties inférieure et supérieure sont toujours en opposition de phase. Il s'en suit que la somme de ces deux parties donne un niveau plus faible que dans le cas sans sol (cf VI.3c). Le modèle surévalue toujours les niveaux en tête pour le mode 1T. Un déséquilibre entre la partie inférieure et la partie supérieure est alors observé ce qui explique les écarts entre le modèle et le cas U-RANS de référence sur la force aérodynamique généralisée totale associée à ce mode (cf VI.3c).

Compte tenu des fortes approximations effectuées dans le cadre du modèle simplifié, les résultats sur l'estimation des forces aérodynamiques généralisées sont remarquablement en accord avec les calculs haute fidélité U-RANS sur les modes de flexion. En plus de pouvoir aisément

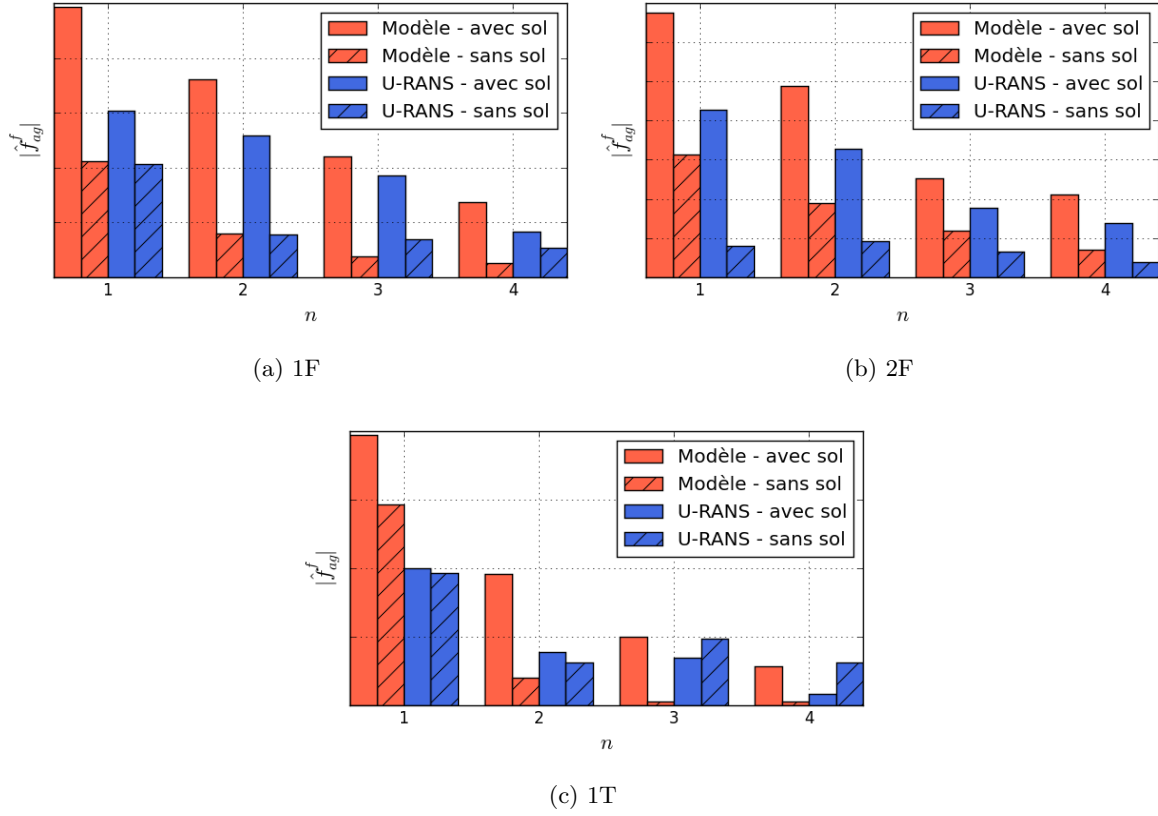
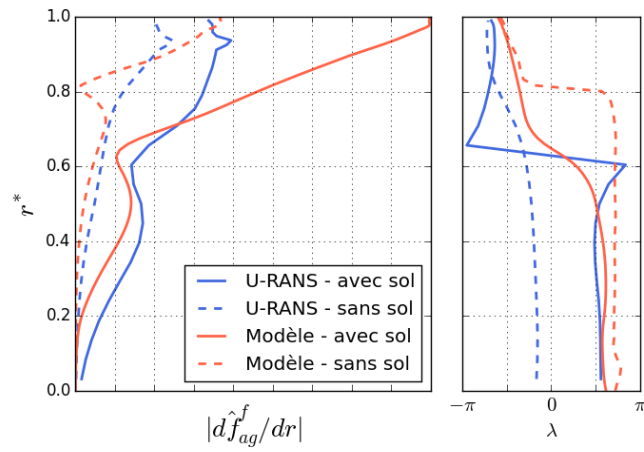


FIGURE VI.3 – Comparaison des forces aérodynamiques généralisées des modes 1F, 2F et 1T pour différents nombres à diamètre.

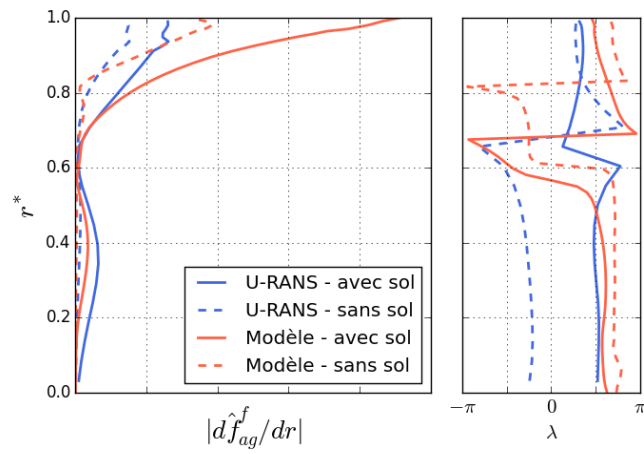
classer différentes stratégies de conception, le modèle permet aussi d'obtenir une meilleure compréhension des mécanismes d'excitation liés à l'ingestion de vortex. Un tel modèle peut donc se révéler utile dans les phases de conception. Par la suite, il est utilisé afin d'estimer l'impact d'un comportement instationnaire du vortex sur la réponse forcée.

### 3 Caractérisation de l'impact de l'instationnarité du vortex sur la réponse forcée

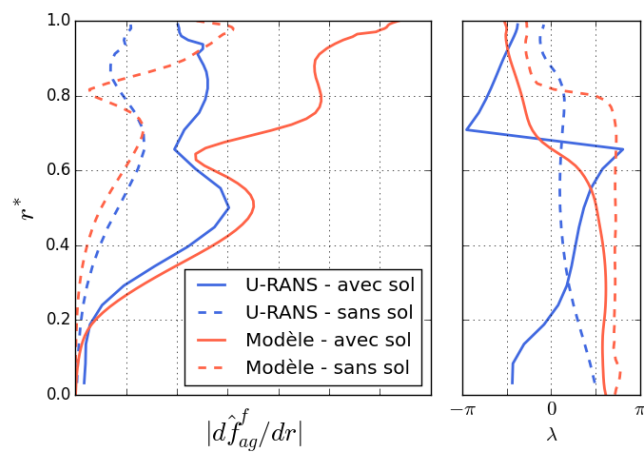
L'idée de cette section est d'utiliser le modèle analytique dans le cadre d'une distorsion instationnaire. Cela permet d'illustrer une application dans laquelle le modèle peut être utile tout en ayant une idée de l'impact sur la réponse forcée d'une éventuelle instationnarité du vortex, problématique qui n'a pas encore été traitée dans cette étude. Nous ne disposons pas d'information sur le caractère instationnaire du vortex dans notre cas d'application. D'une part, aucune information sur la distorsion n'a été relevée au cours des essais et d'autre part nos investigations numériques ne nous ont pas permis d'obtenir un vortex instationnaire (cf section IV.4). Il est possible que le temps de calcul soit trop faible pour faire apparaître les fluctuations basses fréquences ou que le vortex soit stationnaire dans notre cas. Il reste cependant intéressant d'évaluer l'impact d'une fluctuation de position et d'intensité du vortex. L'étude présentée ici est donc purement illustrative dans la mesure où l'instationnarité du vortex est choisie arbitrairement.



(a) 1F



(b) 2F



(c) 1T

FIGURE VI.4 – Comparaison des répartitions radiales des forces aérodynamiques généralisées  $\hat{df}_{ag}^f/dr$  associées au nombre à diamètre 4 pour différents modes.

Dans cette section, on cherche à résoudre l'équation de la dynamique associée à un mode double dans le cas d'une distorsion instationnaire. On s'intéresse uniquement au mode double 2F à 4 diamètres. Dans le cadre d'une hypothèse découplée, l'équation de la dynamique peut s'écrire dans la base réelle de la façon suivante (cf équation IV.19) :

$$\mu' \begin{bmatrix} \ddot{q}' \\ \ddot{q}'' \end{bmatrix} + (\beta' - \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + (\gamma' - \mathcal{A}') \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{ag} \\ f''_{ag} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.20})$$

### 3.1 Cartographie instationnaire théorique

Afin d'évaluer l'impact de l'instationnarité du vortex, une cartographie théorique de distorsion est générée. Pour cela, on utilise le modèle de Lamb-Oseen qui relie la répartition de vitesse tangentielle  $V_{\tilde{\theta}}$  dans le repère associé au centre du vortex  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$  en fonction de la distance  $\tilde{r}$  au centre du vortex, la taille du coeur du vortex  $\tilde{r}_c$  et la circulation du vortex  $\Gamma$  :

$$V_{\tilde{\theta}}(\tilde{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi\tilde{r}} \left(1 - e^{-\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_c}\right)^2}\right) \quad (\text{VI.21})$$

Compte tenu de la position du vortex  $(r_v, \theta_v)$ , il est possible de projeter la vitesse tangentielle  $V_{\tilde{\theta}}$  dans le repère de la cartographie afin de déterminer la composante radiale  $v_r$  et azimutale  $v_t$  de la vitesse absolue. De plus, en considérant une vitesse axiale  $v_x$  constante, il est alors possible de déterminer le vecteur vitesse absolue en chaque point de la cartographie  $v(r, \theta)$ . Et enfin, en connaissant la vitesse de rotation  $\Omega$ , le pas inter-aube  $d$  et les caractéristiques géométriques radiales de l'aube :  $c(r)$ ,  $\beta_{sq1}(r)$ ,  $\beta_{sq2}(r)$ , il est possible de déterminer les efforts en chaque point  $F_{aero}(r, \theta)$  de la cartographie (cf section VI.1.1).

L'évolution de la position et de l'intensité du vortex sont définies à l'aide de fluctuations autour de grandeurs de référence. Le choix de ces fluctuations est arbitraire, mais il permet de parcourir une zone similaire à celle observée dans la littérature (notamment dans l'étude de Wang et al [92]). Les fluctuations d'intensité sont choisies telles que  $\Gamma'/\Gamma^{ref} = 0.3$  ce qui semble proche de ce qu'observe Murphy (cf B.1). La pulsation  $\omega_v$  est choisie afin d'être proche des nombres de Strouhal observés dans la littérature [42, 92], ce qui donne dans notre cas  $\Omega/\omega_v \sim 50$ .

$$r_v(t) = r_v^{ref} + r' \sin(2\omega_v t) \quad (\text{VI.22})$$

$$\theta_v(t) = \theta_v^{ref} - \theta' \sin(\omega_v t) \quad (\text{VI.23})$$

$$\Gamma(t) = \Gamma^{ref} + \Gamma' \sin(\omega_v t) \quad (\text{VI.24})$$

La figure VI.5 illustre 3 instants de la distorsion théorique instationnaire qui sera évaluée dans la prochaine section. La trajectoire du centre du vortex est représentée par la ligne noire. Le vortex se déplace principalement dans la direction azimutale même si un léger déplacement radial est présent.

### 3.2 Démarche du calcul de réponse forcée

On dispose donc d'une cartographie qui dépend du temps. Le modèle simplifié permet d'obtenir une estimation de l'effort aérodynamique à chaque position azimutale et radiale de la cartographie qui est définie dans le cas instationnaire à chaque instant  $t$ . Compte tenu de la variation temporelle de la distorsion, il n'existe plus de lien entre les efforts perçus par une aube et les aubes suivantes. La relation de propagation entre les aubes, qui permet de restreindre

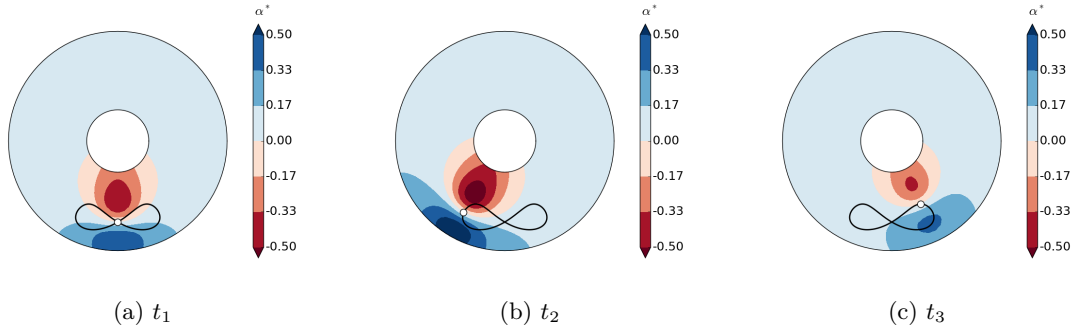


FIGURE VI.5 – Évolution temporelle de la cartographie de distorsion d'angle de giration adimensionné  $\alpha^*$  théorique.

l'étude à une seule aube, n'est alors plus valide. Le mode à diamètre doit donc être considéré sur la structure complète. On définit alors les modes dans la base réelle pour chaque secteur  $k$  par :

$$\begin{cases} \phi_k^{BA'} &= \phi^{BA,R} \cos(kn\alpha) - \phi^{BA,I} \sin(kn\alpha) \\ \phi_k^{BA''} &= \phi^{BA,R} \sin(kn\alpha) + \phi^{BA,I} \cos(kn\alpha) \end{cases} \quad (\text{VI.25})$$

où  $\phi^{BA,R}$  est la partie réelle du mode au bord d'attaque défini sur le secteur de référence et  $\phi^{BA,I}$  représente la partie imaginaire. Les efforts aérodynamiques sur chaque aube sont donc définis par leur position sur la cartographie de l'instant  $t$ . On définit alors la position de chaque aube  $k$  par :

$$\theta_k = \Omega t - k \frac{2\pi}{N} \quad (\text{VI.26})$$

Finalement, l'évolution des forces aérodynamiques généralisées s'obtient en sommant la projection des efforts aérodynamiques sur les modes pour chaque aube compte tenu de leur position azimutale à chaque instant :

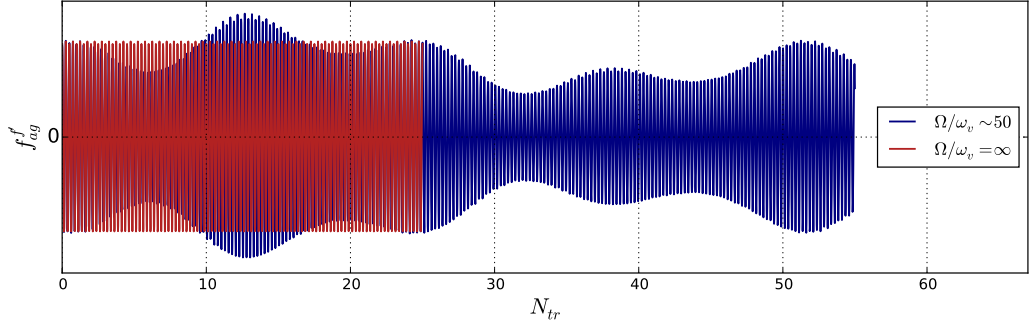
$$\begin{cases} f_{ag,n}'(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi_{k,n}^{BA'}(r) \cdot dF_{aero}(r, \theta_k, t) \\ f_{ag,n}''(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi_{k,n}^{BA''}(r) \cdot dF_{aero}(r, \theta_k, t) \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

L'équation VI.20 peut alors être résolue temporellement à l'aide du schéma de Newmark (notamment détaillé IV.3.2).

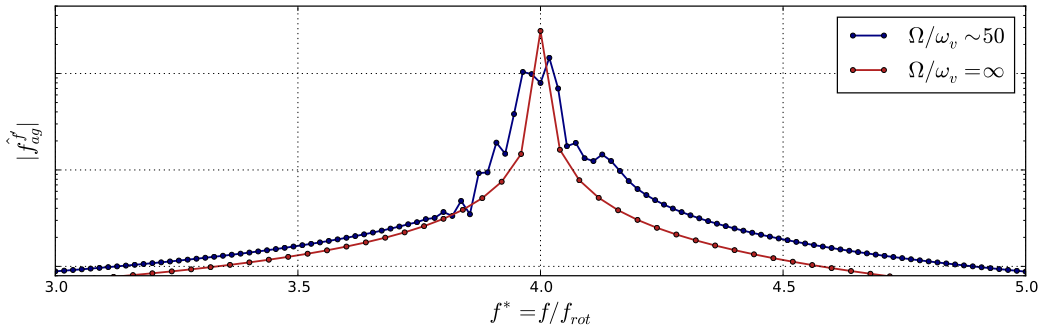
### 3.3 Résultats

Les forces aérodynamiques généralisées en présence de distorsion instationnaire ont été évaluées sur 55 tours de roue discrétisés en 72 pas de temps. Un calcul avec une distorsion fixe a aussi été réalisé, il est référencé par le rapport  $\Omega/\omega_v = \infty$ .

La figure VI.6a illustre l'évolution temporelle des forces aérodynamiques généralisées. Les analyses fréquentielles des signaux sont représentées figure VI.6b en fonction de la fréquence adimensionnée par la fréquence de rotation. Dans la cas de la distorsion stationnaire, l'amplitude qui ressort est celle associée à 4 fois la fréquence de rotation ce qui est cohérent dans la mesure où le diamètre étudié est le diamètre 4. L'introduction de l'instationnarité entraîne un contenu



(a) Evolution temporelle.



(b) Contenu fréquentiel (échelle logarithmique).

FIGURE VI.6 – Caractérisation des forces aérodynamiques généralisées  $f_{ag}^f$  pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ).

fréquentiel plus riche principalement ciblé autour de la fréquence égale à 4 fois la fréquence de rotation.

L'évolution de la coordonnée généralisée  $q'$ , issue de la résolution de l'équation de la dynamique, est illustrée figure VI.7. Dans le cas stationnaire, on retrouve un transitoire mécanique d'une quinzaine de tours avant de trouver une régime périodique stabilisé. Dans le cas instationnaire, le signal n'est pas périodique et les amplitudes varient fortement. Afin d'être en mesure d'évaluer le maximum d'amplitude atteint dans le cas instationnaire il serait nécessaire d'évaluer les coordonnées généralisées sur un temps beaucoup plus long. Néanmoins, plusieurs fréquences de rotation ont été évaluées sur 55 tours. Pour chaque fréquence, le maximum atteint entre le 15<sup>ème</sup> tour et le 55<sup>ème</sup> tour a été extrait dans le but de filtrer le transitoire mécanique des premiers tours. Cela a permis de tracer la courbe de réponse forcée illustrée figure VI.8. Dans la cas stationnaire, on retrouve une courbe de réponse forcée linéaire classique. L'introduction de l'instationnarité change l'allure de la courbe. Celle-ci est plus étalée ce qui est cohérent avec les observation effectuées sur le contenu harmonique des forces d'excitation. Cela implique que la fréquence propre du mode est excitée sur une plage de fréquence plus large que dans le cas stationnaire où la fréquence d'excitation est principalement harmonique.

## 4 Bilan

L'objectif de ce chapitre était de proposer un outil basse fidélité utilisable dans les phases de conception. Afin de disposer d'un outil rapide, de fortes hypothèses ont été effectuées à la fois

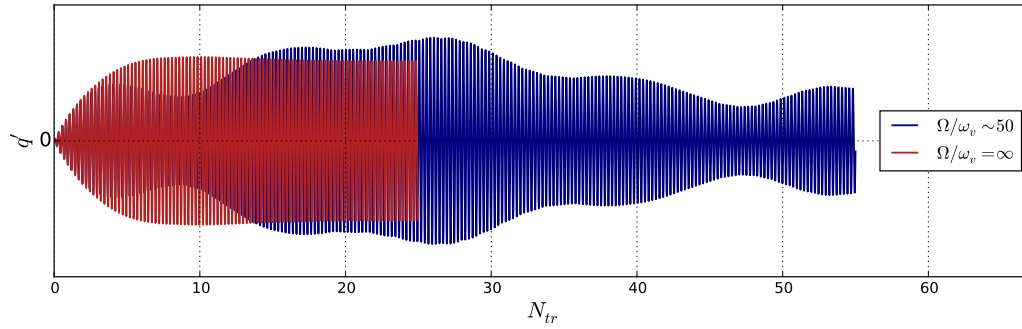


FIGURE VI.7 – Évolution temporelle de la coordonnée généralisée  $q'$  pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ).

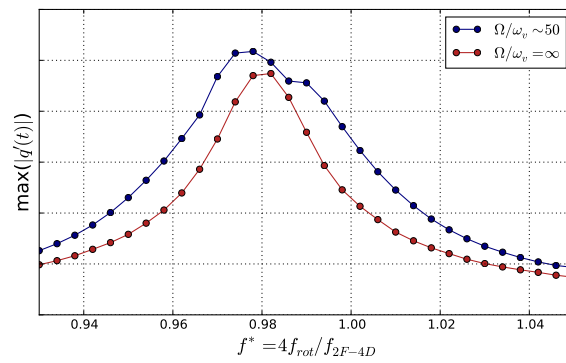


FIGURE VI.8 – Courbe de réponse forcée  $q'$  pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ).

sur l'estimation des efforts aérodynamiques et sur la définition des modes de la structure. Malgré ces nombreuses hypothèses, le modèle semble capable d'estimer convenablement les forces d'excitation tout en apportant une compréhension des mécanismes d'excitation liés à l'ingestion de vortex. Un tel modèle peut donc être utilisé en phase préliminaire afin de classer différentes stratégies de conception.

Le modèle développé a aussi permis d'estimer la réponse forcée dans un contexte de distorsion instationnaire. L'analyse d'une distorsion théorique arbitraire a permis de mettre en évidence une possible amplification des niveaux obtenus due à l'instationarité du vortex.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Les travaux de thèse ont eu pour objectif d'aborder la problématique de réponse forcée du fan entraînée par l'ingestion de vortex de sol.

Dans un premier temps, les travaux de thèse se sont concentrés sur la modélisation de la source d'excitation aérodynamique : le vortex de sol. Pour cela, une approche numérique basée sur les équations moyennées de Navier-Stokes a été évaluée sur une configuration académique de vortex de sol présente dans la littérature. L'approche a notamment permis de retranscrire convenablement la circulation du vortex ainsi que sa position. Les résultats numériques montrent tout de même une sous-estimation de la chute de pression observée expérimentalement sur cette configuration. Le vortex de sol a ensuite été modélisé sur la configuration industrielle d'intérêt. L'analyse de la distorsion générée par le vortex a permis de mettre en avant que le vortex de sol est responsable d'une distorsion d'angle impactant une large zone radiale. Afin de comprendre comment le fan réagit à cette distorsion, des calculs aérodynamiques instationnaires ont été menés en introduisant la distorsion à l'aide d'une condition limite en amont de celui-ci. Ces calculs ont permis de mettre en avant que la giration générée par le vortex entraîne de fortes fluctuations de pression au niveau du bord d'attaque des aubes.

Dans la suite, la réponse vibratoire du fan liée à cette excitation a été évaluée. Pour cela, une approche aéroélastique découplée basée sur une modélisation linéaire de la structure et sur une réponse aérodynamique linéaire à des perturbations de petite amplitude a été proposée. Des travaux de formalisation de l'écriture des équations de la dynamique pour la réponse forcée dans un contexte aéroélastique d'une structure à symétrie cyclique ont été réalisés. L'approche découplée proposée consiste à effectuer deux calculs similaires dans lesquels la distorsion est présente en même temps qu'un mouvement harmonique est imposé. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite que d'une seule mise en donnée permettant d'obtenir à la fois les termes d'excitation et les termes d'amortissement aérodynamiques classiquement obtenus par deux calculs avec deux mises en donnée différentes. L'application de cette méthode sur la configuration industrielle a permis d'estimer le niveau vibratoire observé sur le mode de la coïncidence étudiée. L'hypothèse de linéarité de l'aérodynamique devant des perturbations de petites amplitudes a été validée à l'aide d'un calcul fortement couplé. Les estimations numériques d'amplitude de vibration ont été confrontées aux résultats expérimentaux. L'impact du vortex est convenablement capté par l'approche numérique même si des écarts persistent sur les valeurs absolues des niveaux de vibration.

Compte tenu de ce premier bilan, certaines hypothèses ont été mises en cause. Dans un

premier temps, l'influence du couplage entre le fan et le vortex, qui avait été négligé par l'introduction de cartographie de distorsion, a été investigué. Pour cela, un calcul instationnaire du fan au sein de la nacelle en présence du sol a été effectué. Malgré des difficultés numériques pour obtenir une solution stable, l'impact de la prise en compte de la nacelle sur la réponse forcée a été évalué. Sur l'échelle de temps modélisé et sur le point de fonctionnement étudié, le vortex est pratiquement stationnaire. Sa position et son intensité sont très proches de celles obtenues dans le calcul stationnaire sans le fan. Il s'en suit que le couplage entre le vortex et le fan n'impacte que très faiblement les forces d'excitation ( $< 2\%$ ). Il a cependant été observé que la proximité entre le fan et la cartographie avait un impact de l'ordre de 10% sur l'estimation de l'amortissement aérodynamique.

Le comportement non-linéaire de la structure provenant du contact entre l'aube et le disque a ensuite été étudié. Une méthode de réduction a été employée afin de réduire la taille du modèle mécanique tout en gardant les degrés de liberté à l'interface entre l'aube et le disque dans le domaine physique. Cette réduction est adaptée à l'évaluation des termes non-linéaires car elle permet d'utiliser les lois de contact et de frottement. Une méthode découplée permettant de prendre en compte les termes aérodynamiques dans un calcul non-linéaire mécanique a été proposée. Cette méthode permet de transférer les termes aérodynamiques calculés dans la base modale vers la base réduite adaptée à la résolution non-linéaire. Le principal avantage réside dans le fait que cette méthode nécessite très peu de calculs aéroélastiques. De plus, le lien entre les calculs aérodynamiques et mécaniques réside uniquement dans la définition de la base modale. Cette méthode permet donc une grande flexibilité entre les calculs aérodynamiques et mécaniques ce qui peut se révéler très utile d'un point de vue industriel. Cette méthode a été utilisée sur la configuration industrielle et a permis de mettre en avant des effets non-linéaires dans le cas d'ingestion de vortex. Plusieurs noeuds entrent en glissement dans la zone avant de l'intrados de l'aube. Ce glissement est responsable d'une diminution des amplitudes vibratoires et d'un léger décalage en fréquence du maximum de réponse. La prise en compte des non-linéarités améliore la prédiction numérique au regard des résultats expérimentaux.

Et enfin, un modèle analytique permettant l'estimation des forces aérodynamiques généralisées d'excitation liées à l'ingestion de vortex a été développé. Malgré de fortes hypothèses sur la définition des modes de la structure et sur le comportement aérodynamique au sein du fan, le modèle est en mesure de retranscrire les principales caractéristiques des forces d'excitations. Il a permis de classer convenablement le contenu harmonique des excitations sur les modes de flexion. Il a aussi permis d'estimer la réponse forcée dans un contexte de distorsion instationnaire. L'analyse d'une distorsion théorique arbitraire a permis de mettre en évidence une possible amplification des niveaux obtenus due à l'instationarité du vortex. Un tel modèle a un intérêt majeur pour les bureaux d'études qui cherchent très tôt dans les phases de conception à évaluer les niveaux de vibration.

## Discussion et perspective

Les travaux de thèse ont donc permis de disposer de stratégies numériques permettant d'évaluer les niveaux vibratoires dans le cas d'ingestion de vortex de sol. Les méthodes mises en place permettent de modéliser l'ensemble du phénomène de réponse forcée, en partant de la caracté-

risation aérodynamique de l'excitation jusqu'à la dynamique non-linéaire en pied d'aube. Ces méthodes sont adaptées aux configurations industrielles et directement utilisables au sein du bureau d'études de Safran Aircraft Engines. Bien que développées dans le cas précis d'ingestion de vortex de sol, ces stratégies sont plus générales et permettront d'évaluer les niveaux vibratoires entraînés par d'autres types de distorsion. Il serait par exemple intéressant de les utiliser dans des cas de décollement de manche, de plus en plus présents dans les configurations de nacelles courtes, ou encore sur des configurations d'ingestion de couche limite qui font parties des configurations les plus prometteuses pour réduire les émissions de  $CO_2$ .

Les études menées dans le cadre de cette thèse ont permis une meilleure compréhension des mécanismes aéroélastiques en jeu dans le cas de l'ingestion de vortex. Il a notamment été pointé que la giration du vortex entraînait des sur-incidences et des sous-incidences le long de l'envergure des aubes. La forme de cette excitation est similaire à la forme du second mode de flexion, ce qui en fait un mode facilement excitable par le vortex. De plus, afin d'estimer précisément les niveaux de vibration il semble important de prendre en compte les effets non-linéaires entre l'aube et le disque. Il est cependant nécessaire de rester prudent quant à ces observations dans la mesure où uniquement une coïncidence a été étudiée. Une perspective à court terme serait donc d'évaluer différentes coïncidences, donc différents régimes, sur différents moteurs. Il a aussi été mis en avant que l'excitation liée au vortex était multi-harmonique et que la vibration de la structure correspondait à la superposition de plusieurs modes. Afin d'obtenir une estimation fidèle des contraintes rencontrées dans le cas d'ingestion de vortex, il semble donc nécessaire de prendre en compte ce caractère multi-harmonique.

Dans l'optique de monter en fidélité en capturant les effets non-linéaires mécaniques et aérodynamiques, des approches de couplage plus fort peuvent être envisagées. Le problème peut être adressé temporellement en introduisant des forces non-linéaires dans le modèle mécanique intégré en temps. Une autre façon de traiter le problème fortement couplé est de se placer dans le domaine fréquentiel en utilisant l'efficacité de la méthode d'équilibrage harmonique utilisée dans ces travaux pour traiter les non-linéarités mécaniques. L'approche la plus naturelle impliquerait de traiter aussi le problème aérodynamique dans le domaine fréquentiel, par exemple à l'aide de la méthode TSM (pour *Time Spectral Method*). Et enfin, il est aussi envisageable d'itérer entre méthode temporelle coté aérodynamique et méthode fréquentielle coté structure.

Une zone d'ombre persiste sur la description aérodynamique du vortex sur la configuration industrielle. En effet, aucune information relative au vortex n'a été mesurée lors des essais exploités dans ces travaux. Des approches plus fidèles comme la ZDES (pour *Zonal Detached Eddy Simulation*)[21] peuvent être envisagées pour obtenir une meilleure représentation du vortex de sol. En plus de capter plus fidèlement le caractère instationnaire du vortex, ces méthodes donneront une meilleure représentativité du champ moyen de distorsion.

Dans ces travaux, uniquement la réponse forcée du fan a été traitée, mais des niveaux de vibrations élevés sur certains redresseurs situés en aval du fan ont été relevés en présence du vortex de sol. Le problème est différent dans la mesure où les redresseurs ne sont pas en rotation. L'excitation aérodynamique provient alors de l'interaction entre les sillages des aubes du fan et le vortex. Une description fine de cette interaction semble nécessaire pour caractériser les niveaux vibratoires générés sur les redresseurs.

Une dernière piste consiste à améliorer le modèle analytique proposé dans ces travaux de thèse. Il est par exemple possible d'envisager de prendre en compte des effets de compressibilité. Le modèle peut aussi être adapté afin d'utiliser des méthodes dites de "*body forces*" [30, 84]. Ces méthodes permettent d'accéder à un champ volumique d'effort à l'aide de calculs stationnaires similaires à celui obtenu dans le modèle analytique. Une telle approche permettrait de capter les effets tridimensionnels de l'écoulement et de considérer la forme tridimensionnelle des modes.

# Références

- [1] [www.safran-aircraft-engines.com/services/single-aisle-commercial-jet-engines/cfm-services-ready-leap](http://www.safran-aircraft-engines.com/services/single-aisle-commercial-jet-engines/cfm-services-ready-leap), .
- [2] [www.theverge.com/2015/7/9/8908509/ge-peeble-jet-engine-test-facility](http://www.theverge.com/2015/7/9/8908509/ge-peeble-jet-engine-test-facility), .
- [3] John David Anderson Jr. *Fundamentals of aerodynamics*. Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- [4] Milind A Bakhle, TS Reddy, and Rula M Coroneos. Forced Response Analysis of a Fan with Boundary Layer Inlet Distortion. *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, page 3734, 2014.
- [5] Milind A Bakhle, Tondapu S Reddy, Rula Coroneos, James B Min, Andrew J Provenza, Kirsten P Duffy, George L Stefko, and Gregory Heinlein. Aeromechanics Analysis of a Distortion-Tolerant Fan with Boundary Layer Ingestion. *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting*, page 1891, 2018.
- [6] Barrett Baldwin and Harvard Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *16th aerospace sciences meeting*, page 257, 1978.
- [7] Alain Batailly. *Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2008.
- [8] Guillaume Benefice. *Développement d'une méthode de couplage partitionné fort en vue d'une application aux turbomachines*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2015.
- [9] Sébastien Besset. *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*. PhD thesis, Ecullly, Ecole centrale de Lyon, 2006.
- [10] Thomas Bontemps. Prediction of the acoustic influence of an intake on fan flutter : a comparison of numerical methods. *ETC2019-044*, Lausanne, Switzerland, 2019.
- [11] Aude Cadel, Ghislaine Ngo boum, Fabrice Thouverez, Alain Dugeai, and Marie-Océane Parent. Computing Fluid Structure Interaction Coupling Time Spectral Method (TSM) and Harmonic Balance Method (HBM). *ASME Turbo Expo 2017 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, volume 7B of *Structures and Dynamics*, Charlotte, United States, June 2017. doi:[10.1115/GT2017-64260](https://doi.org/10.1115/GT2017-64260).
- [12] Mauro Carnevale, Jeffrey S. Green, and Luca Di Mare. Numerical studies into intake flow for fan forcing assessment. *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and*

- Exposition*, volume Volume 1A : Aircraft Engine ; Fans and Blowers. American Society of Mechanical Engineers, 2014. doi:[10.1115/GT2014-25772](https://doi.org/10.1115/GT2014-25772).
- [13] Mauro Carnevale, Feng Wang, and Luca di Mare. Low Frequency Distortion in Civil Aero-engine Intake. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 139(4) :041203, 2017.
  - [14] Volker Carstens, Ralf Kemme, and Stefan Schmitt. Coupled simulation of flow-structure interaction in turbomachinery. *Aerospace Science and Technology*, 7(4) :298–306, June 2003. ISSN 12709638. doi:[10.1016/S1270-9638\(03\)00016-6](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(03)00016-6).
  - [15] Matthew P Castanier and Christophe Pierre. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22(2) :384–396, 2006.
  - [16] Damien Charleux. *Etude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, Ecole doctorale de mécanique de lyon, 2006.
  - [17] Jintai Chung and Jang Moo Lee. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(23) :3961–3976, 1994.
  - [18] Yann Colin. *Simulation numérique de la distorsion générée par une entrée d’air de moteur civil par vent de travers*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 2007.
  - [19] Roy Craig and Mervyn Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. 1968.
  - [20] F. De Siervi, H. C. Viguier, E. M. Greitzer, and C. S. Tan. Mechanisms of inlet-vortex formation. *Journal of Fluid Mechanics*, 124 :173–207, 1982. doi:[10.1017/S0022112082002456](https://doi.org/10.1017/S0022112082002456).
  - [21] Sébastien Deck. Recent improvements in the zonal detached eddy simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 26(6) :523–550, 2012.
  - [22] David Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel—Application à la dynamique rotor*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
  - [23] Luca di Mare, George Simpson, and Abdalnaser I. Sayma. Fan forced response due to ground vortex ingestion. *ASME Turbo Expo 2006 : Power for Land, Sea, and Air*, pages 1123–1132. American Society of Mechanical Engineers, 2006. doi:[10.1115/GT2006-90685](https://doi.org/10.1115/GT2006-90685).
  - [24] Hirofumi Doi. *Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows in Turbomachinery*. PhD thesis, Standford, 2002.
  - [25] A. Fourmaux. Assessment of a low storage technique for multi-stage turbomachinery navier-stokes computations. *ASME Winter Annual Meeting*, 1994.
  - [26] T Fransson. Aeroelasticity in axial flow turbomachines. Technical report, Von Karman Inst. for Fluid Dynamics, 1999.
  - [27] M. Géraudin and D. Rixen. *Théorie des vibrations - application à la dynamique des structures*. Masson edition, 1993.

- [28] Michael B Giles. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations. *AIAA journal*, 28(12) :2050–2058, 1990.
- [29] Benjamin Godard. *Étude et méthodologies de simulation de doublet entrée d’air - soufflante pour la conception de turbofan de nouvelle génération*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2018.
- [30] Benjamin Godard, Edouard De Jaeghere, and Nicolas Gourdain. Efficient Design Investigation of a Turbofan in Distorted Inlet Conditions. *ASME Turbo Expo 2019 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2019.
- [31] J. S. Green. Forced response of a large civil fan assembly. *ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*, pages 685–692. American Society of Mechanical Engineers, 2008. doi:[10.1115/GT2008-50319](https://doi.org/10.1115/GT2008-50319).
- [32] J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56 :149, 1989.
- [33] Marion Gruin. *Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d’un turboréacteur*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2012.
- [34] Robert J Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2) :380–380, 1965.
- [35] Hans M Hilber, Thomas JR Hughes, and Robert L Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, 1977.
- [36] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows : Volume 1 : Fundamentals of Numerical Discretization*. Chichester [etc.] : John Wiley & Sons, 2001.
- [37] Nathan Horvath. *Inlet vortex formation under crosswind conditions*. PhD thesis, Worcester Polytechnic Institute, 2013.
- [38] Jean-François Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. CEPADUES EDITIONS, 3ème édition edition, 1995.
- [39] Wilfred D Iwan. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. ASME, 1967.
- [40] Antony Jameson, Wolfgang Schmidt, and Eli Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes. *14th fluid and plasma dynamics conference*, page 1259, 1981.
- [41] M Jermy and W H Ho. Location of the vortex formation threshold at suction inlets near ground planes by computational fluid dynamics simulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 222(3) :393–402, May 2008. ISSN 0954-4100, 2041-3025. doi:[10.1243/09544100JAERO265](https://doi.org/10.1243/09544100JAERO265).
- [42] Arne Karlsson and Laszlo Fuchs. Time evolution of the vortex between an air inlet and the ground. *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 990, 2000.

- [43] N Khader and RG Loewy. Shaft flexibility effects on the forced response of a bladed-disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 139(3) :469–485, 1990.
- [44] Brian Edward Launder and BI Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in heat and mass transfer*, 1(2) :131–137, 1974.
- [45] TA Laursen and JC Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. *International Journal for numerical methods in engineering*, 36(20) :3451–3485, 1993.
- [46] Denis Laxalde. *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
- [47] Denis Laxalde, Fabrice Thouverez, and J-J Sinou. Dynamics of a linear oscillator connected to a small strongly non-linear hysteretic absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(8) :969–978, 2006.
- [48] Kuen-Bae Lee, Mark Wilson, and Mehdi Vahdati. Effects of Inlet Disturbances on Fan Stability. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(5) :051014, 2019.
- [49] HD Li and L He. Single-passage analysis of unsteady flows around vibrating blades of a transonic fan under inlet distortion. *Journal of Turbomachinery*, 124(2) :285–292, 2002. doi:[10.1115/1.1450567](https://doi.org/10.1115/1.1450567).
- [50] M-S Liou and JR Edwards. AUSM schemes and extensions for low Mach and multiphase flows. *Lecture series-van Kareman Institute for fluid dynamics*, 3 :A1–A101, 1999.
- [51] Meng-Sing Liou. A sequel to ausm : Ausm+. *Journal of computational Physics*, 129(2) : 364–382, 1996.
- [52] Meng-Sing Liou and Byung Joon Lee. Minimizing Inlet Distortion for Hybrid Wing Body Aircraft. *Journal of Turbomachinery*, 134(3), 2011. ISSN 0889-504X. doi:[10.1115/1.4003072](https://doi.org/10.1115/1.4003072).
- [53] Meng-Sing Liou and Christopher J Steffen Jr. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational physics*, 107(1) :23–39, 1993.
- [54] Jean-Pierre Lombard. *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1999.
- [55] E. Longatte, V. Verreman, and M. Souli. Time marching for simulation of fluid–structure interaction problems. *Journal of Fluids and Structures*, 25(1) :95–111, January 2009. ISSN 08899746. doi:[10.1016/j.jfluidstructs.2008.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2008.03.009).
- [56] J. G. Marshall and M. Imregun. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10(3) :237–267, 1996. doi:[10.1006/jfls.1996.0015](https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0015).
- [57] Ivan Mary and Pierre Sagaut. Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall. *AIAA Journal*, 40 :1139–1145, 2002. doi:[10.2514/3.15174](https://doi.org/10.2514/3.15174).

- [58] Florian R Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.
- [59] M. Mesbah, J.F. Thomas, F. Thirifay, A. Naert, and O. Vriendt. Forced Response Calculation Using TWIN Approach. *International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD 2013)*, (IFASD2013-S17B), 2013.
- [60] Majid Mesbah, Jean-François Thomas, François Thirifay, A. Naert, and S. Hiernaux. Investigation of Forced Response Sensitivity of Low Pressure Compressor With Respect to Variation in Tip Clearance Size. *Journal of Turbomachinery*, 137(9) :091011, 2015.
- [61] S. Moffatt and L. He. On decoupled and fully-coupled methods for blade forced response prediction. *Journal of Fluids and Structures*, 20(2) :217–234, February 2005. ISSN 08899746. doi:[10.1016/j.jfluidstructs.2004.10.012](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2004.10.012).
- [62] John Murphy. Intake ground vortex aerodynamics. 2008.
- [63] JP Murphy, DG MacManus, and CT Sheaf. Experimental investigation of intake ground vortices during takeoff. *AIAA journal*, 48(3) :688–701, 2010.
- [64] S Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L Jezequel. A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1) :201 – 219, July 2003. doi:[10.1016/S0022-460X\(02\)01447-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01447-5).
- [65] Samuel Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d’aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [66] J. T. Oden and J. A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 52(1-3) :527–634, 1985.
- [67] Brian J Olson, Steven W Shaw, Chengzhi Shi, Christophe Pierre, and Robert G Parker. Circulant matrices and their application to vibration analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) :040803, 2014.
- [68] Florent Payer. *Prédiction et analyse du phénomène de réponse forcée : application à un cas de compresseur haute pression*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2013.
- [69] EP Petrov. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126(1) :175–183, 2004.
- [70] EP Petrov and DJ Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *J. Turbomach.*, 125(2) :364–371, 2003.
- [71] Jonathan Philippe. *Prediction du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés*. PhD thesis, L’Ecole Centrale Lyon, 2016.
- [72] C. Pierre, A. A. Ferri, and E. H. Dowell. Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Applied Mechanics*, 52(4) :958–964, 1985. ISSN 0021-8936. doi:[10.1115/1.3169175](https://doi.org/10.1115/1.3169175).

- [73] A Plas, D Crichton, M Sargeant, T Hynes, E Greitzer, C Hall, and V Madani. Performance of a boundary layer ingesting (BLI) propulsion system. *45th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 450, 2007.
- [74] Olivier Poudou and Christophe Pierre. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping. *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, page 1411, 2003.
- [75] LA Rodert and FB Garrett. Ingestion of foreign objects into turbine engines by vortices. *NACA*, TN(3330), February 1955.
- [76] Yannis Sadoudi. *Numerical simulation of fan/nacelle interaction under crosswind conditions*. Theses, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'espace, March 2016.
- [77] Stefan Schmitt, Volker Carstens, and Dirk Nürnberger. Evaluation of the principle of aerodynamic superposition in forced response calculations. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*, page 133, 2006. doi:[10.1007/1-4020-4605-7\\_11](https://doi.org/10.1007/1-4020-4605-7_11).
- [78] Andrei Secareanu, Dragos Moroianu, Arne Karlsson, and Laszlo Fuchs. Experimental and numerical study of ground vortex interaction in an air-intake. *43rd AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 1206, 2005.
- [79] Frédéric Sicot. *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2009.
- [80] J.C. Slater, G. R. Minkiewicz, and A. J. Blair. Forced response of bladed disk assemblies - a survey. *The Shock and Vibration Digest*, 31 :3743, 1999.
- [81] Brian Smith. The k-kl turbulence model and wall layer model for compressible flows. *21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, page 1483, 1990.
- [82] Brian Smith. A near wall model for the k-l two equation turbulence model. *Fluid Dynamics Conference*, page 2386, 1994.
- [83] Philippe Spalart and Steven Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439, 1992.
- [84] William Thollet, Guillaume Dufour, Xavier Carbonneau, and Florian Blanc. Body-force modeling for aerodynamic analysis of air intake-fan interactions. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 26(7) :2048–2065, 2016.
- [85] D. M. Tran. A comparison of component mode synthesis methods for cyclic structures. *ASME International Mechanical Engineering Congress And Exposition*, 2000.
- [86] Luis Gustavo Trapp and Roberto Girardi. Inlet vortices in a nacelle operating near the ground. 2015.
- [87] Luis Gustavo Trapp and Roberto Da Motta Girardi. Crosswind Effects on Engine Inlets : The Inlet Vortex. *Journal of Aircraft*, 47(2) :577–590, March 2010. ISSN 0021-8669, 1533-3868. doi:[10.2514/1.45743](https://doi.org/10.2514/1.45743).

- [88] M Vahdati, AI Sayma, M Imregun, and G Simpson. Multibladerow forced response modeling in axial-flow core compressors. *Journal of Turbomachinery*, 129(2) :412–420, 2007.
- [89] Mehdi Vahdati, Nigel Smith, and Fanzhou Zhao. Influence of intake on fan blade flutter. *Journal of Turbomachinery*, 137(8) :081002, 2015.
- [90] R. Valid and R. Ohayon. Static and dynamic linear analysis of cyclically symmetric structures, 1984.
- [91] R Allan Wallis. *Axial Flow Fans : design and practice*. Academic Press, New York and London, 1961.
- [92] Z. Wang and I. Gursul. Unsteady characteristics of inlet vortices. *Experiments in Fluids*, 53(4) :1015–1032, October 2012. ISSN 0723-4864, 1432-1114. doi:[10.1007/s00348-012-1340-2](https://doi.org/10.1007/s00348-012-1340-2).
- [93] David Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26 :1299–1310, 1988. doi:[10.2514/3.10041](https://doi.org/10.2514/3.10041).
- [94] J Wildheim. Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3) :397–416, 1981.
- [95] Jan Robert Wright and Jonathan Edward Cooper. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, volume 20. John Wiley & Sons, 2008.
- [96] S. Zantopp, D. MacManus, and John Murphy. Computational and experimental study of intake ground vortices. *The Aeronautical Journal*, 114(1162) :796–784, December 2010. doi:[10.1017/S0001924000004255](https://doi.org/10.1017/S0001924000004255).
- [97] Fanzhou Zhao, Jens Nipkau, and Mehdi Vahdati. Influence of acoustic reflections on flutter stability of an embedded blade row. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A : Journal of Power and Energy*, 230(1) :29–43, 2016.

# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I.1  | Schéma simplifié d'un turboréacteur double corps, double flux. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 7  |
| I.2  | Illustration du fan du LEAP 1A [1]. . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 9  |
| I.3  | Champ fan : diagramme taux de compression en fonction du débit. . . . .                                                                                                                                                                                                   | 9  |
| I.4  | Position et nature des zones de flottement dans le champ fonctionnement d'un compresseur [56]. . . . .                                                                                                                                                                    | 11 |
| I.5  | Illustration de l'impact de l'amortissement sur une courbe de réponse forcée. . . .                                                                                                                                                                                       | 13 |
| I.6  | Diagramme de Campbell ( $\Omega$ : vitesse de rotation, $f$ : fréquence). . . . .                                                                                                                                                                                         | 13 |
| I.7  | Diagramme de Haigh. . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 14 |
| I.8  | Diagramme fréquences propres vs nombre à diamètre ( $n$ : nombre à diamètre, $f$ : fréquence). . . . .                                                                                                                                                                    | 15 |
| I.9  | Illustration de l'impact des non-linéarités de type contact sur la réponse forcée d'un disque aubagé [16]. . . . .                                                                                                                                                        | 16 |
| I.10 | Excitation liée aux sillages de roues adjacentes au sein d'un compresseur illustrée par des contours d'entropie [88]. . . . .                                                                                                                                             | 21 |
| I.11 | Exemple de distorsion en amont du fan générée dans une configuration BLI (contour de nombre de Mach) [52]. . . . .                                                                                                                                                        | 21 |
| I.12 | Illustration de la distorsion en pression totale pour 25kts de vent de travers [76]. .                                                                                                                                                                                    | 23 |
| I.13 | Illustration d'un vortex de sol (©Peter Thomas 2005). . . . .                                                                                                                                                                                                             | 23 |
| I.14 | Illustration de tube de courant [62]. . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 24 |
| I.15 | Relation entre rapport de vitesse et garde au sol adimensionnée faisant apparaître les limites de formation de vortex (symboles pleins représentent une donnée où aucun vortex est détecté, symboles vides représentent une donnée où un vortex est observé)[62]. . . . . | 25 |
| I.16 | Résultat CFD d'un calcul en vent de travers avec condition de glissement sur l'entrée d'air et le sol [87]. . . . .                                                                                                                                                       | 26 |
| I.17 | Etirement d'un filament de vorticité au cours du temps ( $t_A < t_B < t_C$ ) [20]. . . . .                                                                                                                                                                                | 27 |
| I.18 | Différents tubes de courant en fonction du rapport de vitesse $U^*$ en condition de vent de travers ( $90^\circ$ ) [20]. . . . .                                                                                                                                          | 28 |
| I.19 | <i>A gauche</i> :  volution de la circulation adimensionnée $\Gamma^*$ en fonction du rapport de vitesse $U^*$ dans un cas de vent de face. <i>A droite</i> : Illustration du comportement auto-similaire de l'intensité du vortex de sol [62]. . . . .                   | 30 |
| I.20 | Cartographie d'apparition du vortex de sol et intensité du vortex [62]. . . . .                                                                                                                                                                                           | 30 |
| I.21 |  volution de la circulation adimensionnée $\Gamma^*$ en fonction du rapport de vitesse $U^*$ dans des cas de vent de face (pointillé) et vent de travers (trait plein) pour deux gardes au sol [62]. . . . .                                                              | 31 |
| I.22 | Comparaison calculs/essais de la réponse vibratoire en présence de vortex ("2-knot" and "Ambiant wind") et sans présence de vortex ("45 knots HW") [23]. . . . .                                                                                                          | 32 |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| II.1   | Illustration de la sous-structuration d'une disque aubagé. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 39 |
| II.2   | Illustration d'une structure à symétrie cyclique. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 42 |
| II.3   | Séparation des degrés de liberté (ddl) du secteur de référence. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 44 |
| II.4   | Norme de la déformée modale des aubes pour la famille du premier mode de flexion (4 diamètres sont représentés : 1, 2, 3 et 4). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 48 |
| II.5   | Diagramme ZigZag ( $n$ : nombre de diamètre, $h$ : harmonique d'excitation). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 52 |
| II.6   | Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage [15]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 53 |
| II.7   | Schéma d'un pied d'aube. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 54 |
| II.8   | Lois de contact. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 54 |
| II.9   | Lois de frottement. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 55 |
| II.10  | Principe de la méthode AFT. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 58 |
| II.11  | Illustration d'une cellule hexaédrique [29]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 64 |
| II.12  | Illustration d'un élément finis hexaédrique. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 67 |
| III.1  | Configuration de Murphy [62]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 74 |
| III.2  | Coupe du maillage illustrant le recouvrement des maillages. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 75 |
| III.3  | Domaine de calcul. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 76 |
| III.4  | Convergence des indices caractérisant le vortex ( $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.12$ , $M_i = 0.55$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 79 |
| III.5  | Topologie de l'écoulement ( $U^* = 16.6$ , $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.12$ , $M_i = 0.55$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 79 |
| III.6  | Comparaison des cartographies de pression totale : expérimentales (a), (c), (e), (g) et numériques (b), (d), (f) et (h) ( $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.11$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 81 |
| III.7  | Comparaison de l'indice de distorsion $DC_{60}$ (a) et de la circulation $\Gamma^*$ (b) obtenus par l'approche RANS avec ceux issus de l'étude expérimentale de Murphy [62] ( $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.11$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 82 |
| III.8  | Essais de vent de travers avec faux sol dans la soufflerie GE à Peebles [2]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 83 |
| III.9  | Convergence des indices $IDC$ , $DC_{60}$ , $\Gamma^*$ et évolution des résidus sur $\rho$ pour différents raffinement de maillages. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 85 |
| III.10 | Topologie de l'écoulement. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 85 |
| III.11 | Cartographie de pression totale adimensionnée. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 86 |
| III.12 | Spectrogramme de $P_T$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 87 |
| III.13 | Cartographie d'angle de giration adimensionné $\alpha^*$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 88 |
| III.14 | Spectrogramme de $\alpha$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 88 |
| III.15 | Maillage du fan. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 90 |
| III.16 | Domaine de calcul et conditions limites. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 90 |
| III.17 | Diagramme taux de compression normalisé $\Pi^*$ - Débit normalisé $W^*$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 93 |
| III.18 | Illustration du calcul U-RANS avec cartographie. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 93 |
| III.19 | Illustration des coupes étudiées (cartographie de $P_T^*$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 94 |
| III.20 | Comparaison des répartitions de pression à différentes hauteurs de veine ( $h^* = 85\%$ en rouge et $h^* = 50\%$ en bleu) et pour différentes positions azimutales ( <i>trait pointillé</i> pour $\pi/2$ et <i>trait plein</i> pour $-\pi/2$ ). Les figures (a) et (b) représentent $p/P_{T_\infty}$ pour le cas sans sol, les figures (c) et (d) représentent $p/P_{T_\infty}$ pour le cas avec sol. Les figures (e) et (f) représentent $p/P_{T_\theta}$ pour le cas avec sol. . . . . | 96 |
| III.21 | Amplitude des pressions sur l'extrados pour les 4 premiers harmoniques - Cas sans sol. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 97 |

|        |                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| III.22 | Amplitude des pressions sur l'extrados pour les 4 premières harmoniques - Cas avec sol. . . . .                                                                                                                                  | 97  |
| IV.1   | Modèle éléments finis du secteur de référence aube disque du fan. . . . .                                                                                                                                                        | 106 |
| IV.2   | Mode 2F à 4 diamètres . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 106 |
| IV.3   | Évolution temporelle de $f'_{ag,1}$ et $f''_{ag,1}$ . . . . .                                                                                                                                                                    | 108 |
| IV.4   | Contenu fréquentiel de $f'_{ag,1}$ et $f''_{ag,1}$ sur le dernier tour de roue (échelle logarithmique). . . . .                                                                                                                  | 108 |
| IV.5   | Évolution temporelle des forces aérodynamiques généralisées des deux calculs ainsi que de la différence des deux. . . . .                                                                                                        | 109 |
| IV.6   | Contenu fréquentiel de $f'_{ag,1} - f'_{ag,2}$ et $f''_{ag,1} - f''_{ag,2}$ sur le dernier tour de roue (échelle logarithmique). . . . .                                                                                         | 109 |
| IV.7   | Amplitude $ \hat{q} $ et phase $\lambda$ des coordonnées généralisées . . . . .                                                                                                                                                  | 110 |
| IV.8   | Description de l'algorithme de couplage . . . . .                                                                                                                                                                                | 113 |
| IV.9   | Évolution temporelle des coordonnées généralisées lors d'un calcul couplé (a) et zoom sur le dernier tour de roue (b) . . . . .                                                                                                  | 114 |
| IV.10  | Comparaison entre l'approche couplée et l'approche découplée dans le cas avec ingestion de vortex . . . . .                                                                                                                      | 114 |
| IV.11  | Comparaison des estimations numériques (num) aux niveaux mesurés en essais sur les 4 aubes instrumentées pour les configurations avec et sans sol. . . . .                                                                       | 116 |
| IV.12  | Domaines de calcul, <i>bleu</i> : conditions d'injection, <i>rouge</i> : conditions rotor-stator et <i>vert</i> : conditions de sortie. . . . .                                                                                  | 117 |
| IV.13  | Impact du schéma spatial sur la stabilité du calcul complet fan-nacelle. . . . .                                                                                                                                                 | 119 |
| IV.14  | Cartographie de vorticité illustrant l'impact du couplage entre le vortex de sol et le fan sur la distorsion. . . . .                                                                                                            | 120 |
| IV.15  | Cartographie de vorticité caractérisant de l'instationnarité du vortex au cours du calcul couplé. . . . .                                                                                                                        | 120 |
| IV.16  | Analyse temporelle de la sonde de pression . . . . .                                                                                                                                                                             | 121 |
| IV.17  | Comparaison des forces aérodynamiques généralisées d'excitation . . . . .                                                                                                                                                        | 122 |
| IV.18  | Influence de la position de la cartographie sur l'écart relatif des grandeurs aéroélastiques par rapport au calcul couplé. . . . .                                                                                               | 124 |
| V.1    | Illustration des différentes bases d'intérêt. . . . .                                                                                                                                                                            | 131 |
| V.2    | Illustration des étapes pour intégrer les termes aérodynamiques dans le calcul mécanique. . . . .                                                                                                                                | 131 |
| V.3    | Réduction du modèle. Les noeuds en rouges correspondent aux noeuds conservés dans le domaine physique lors de la réduction. . . . .                                                                                              | 134 |
| V.4    | Amplitude $ \hat{q} $ et phase $\lambda$ des coordonnées généralisées après résolution dans différentes bases. . . . .                                                                                                           | 136 |
| V.5    | Réponse forcée à la co incidence 2F/4EO : calcul non-linéaire, calcul linéaire et essais. . . . .                                                                                                                                | 137 |
| V.6    | Etat du contact sur une période pour la fréquence $f^* = 0.986$ : collé sur toute la période ( ), décollé sur toute la période ( ), glissant sur une partie de la période ( ). A gauche : intrados, à droite : extrados. . . . . | 138 |
| V.7    | Contribution modale au déplacement du noeud d'observation selon $z$ pour les 10 premiers modes pour $f^* = 0.986$ ( chelle logarithmique). . . . .                                                                               | 139 |
| V.8    | Déformées modales. . . . .                                                                                                                                                                                                       | 140 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| V.9  | Contributions modales de la norme du déplacement du noeud d'observation adimensionné par la norme du déplacement maximum atteint sur le mode 2F à 4 diamètres. . . . .                                                                                                                                                                                   | 141 |
| V.10 | Maximum de la norme du déplacement du noeud d'observation pour différents chargements aérodynamiques. . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 142 |
| V.11 | Amplitude de l'harmonique 4 du déplacement du noeud d'observation pour différents chargements aérodynamiques. . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 142 |
| V.12 | Etat du contact sur une période pour la fréquence $f^* = 0.987$ : collé sur toute la période (○), décollé sur toute la période (●), glissant sur une partie de la période (◐). A gauche : intrados, à droite : extrados. Les noeuds encadrés correspondent aux noeuds collés dans le cas 2F-4D (cf figure V.6b) et glissant dans le cas présent. . . . . | 142 |
| VI.1 | Définition des angles et des vitesses. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 147 |
| VI.2 | Evaluation de l'estimation de la répartition radiale d'effort aérodynamique en deux positions azimutales. . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 150 |
| VI.3 | Comparaison des forces aérodynamiques généralisées des modes 1F, 2F et 1T pour différents nombres à diamètre. . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 152 |
| VI.4 | Comparaison des répartitions radiales des forces aérodynamiques généralisées $\hat{df}_{ag}^f/dr$ associées au nombre à diamètre 4 pour différents modes. . . . .                                                                                                                                                                                        | 153 |
| VI.5 | Évolution temporelle de la cartographie de distorsion d'angle de giration adimensionné $\alpha^*$ théorique. . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 155 |
| VI.6 | Caractérisation des forces aérodynamiques généralisées $f_{ag}^{f'}$ pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ). . . . .                                                                                                                                                                    | 156 |
| VI.7 | Évolution temporelle de la coordonnée généralisée $q'$ pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ). . . . .                                                                                                                                                                                  | 157 |
| VI.8 | Courbe de réponse forcée $q'$ pour un cas stationnaire ( $\Omega/\omega_v = \infty$ ) et instationnaire ( $\Omega/\omega_v \sim 50$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                           | 157 |
| B.1  | Typical variations in vortex circulation in crosswind configuration ( $h/D_l = 0.4$ , $U^* = 18.6$ ) [62]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                       | 181 |
| B.2  | Position du vortex dans le plan proche du sol pour différents rapports de vitesse $U^*$ ( $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.11$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                              | 183 |
| B.3  | Comparaison des approches stationnaire (RANS) et instationnaire (U-RANS) ( $h/D_l = 0.25$ , $\delta^*/D_l = 0.11$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 183 |

# Liste des tableaux

|       |                                                                                                                                                     |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| III.1 | Caractéristiques des maillages évalués. . . . .                                                                                                     | 84  |
| IV.1  | Tableau récapitulatif de différents cas d'application de la méthode découplée. Amplitude normalisée par l'amplitude atteinte dans le cas A. . . . . | 111 |
| V.1   | Erreur relative (%) sur les fréquences des 5 premiers modes doubles assemblés suite à la réduction. . . . .                                         | 135 |

## Annexe A

# Analyse modale en symétrie cyclique

Cette annexe a pour but de détailler l'analyse modale effectué sur un secteur en présence de conditions de symétrie cyclique. L'objectif ici est donc d'écrire l'équation du mouvement en variation libre sur le secteur de référence ( $S_0$ ) pour un nombre à diamètre  $n$  donné.

## 1 Description de l'équation du mouvement en variation libre sur un secteur

A l'aide d'une approche élément finis et après séparation des degrés de libertés droite, gauche et internes, l'équation de la dynamique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{dg} & M_{di} \\ M_{gd} & M_{gg} & M_{gi} \\ M_{id} & M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{n,d} \\ \ddot{x}_{n,g} \\ \ddot{x}_{n,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dg} & K_{di} \\ K_{gd} & K_{gg} & K_{gi} \\ K_{id} & K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n,d} \\ x_{n,g} \\ x_{n,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n,d} \\ F_{n,g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où les indices  $d$ ,  $g$  et  $i$  représentent les éléments de la frontière droite, gauche et internes et où  $F_{n,d}$  est l'effort du secteur adjacent sur la frontière droite et  $F_{n,g}$  l'effort du secteur adjacent sur la frontière gauche. Ces efforts sont des efforts internes à la structure complète, en effet aucun effort extérieur n'est présent dans le problème en variation libre. La relation (II.29) permet de relier le déplacement aux frontières :

$$x_{n,d} = e^{jn\alpha} x_{n,g} \quad (\text{A.2})$$

De la même façon, les efforts internes peuvent se relier via la condition de symétrie cyclique, on peut donc écrire :

$$F_{n,d} = -e^{jn\alpha} F_{n,g} \quad (\text{A.3})$$

En injectant les deux dernières équations dans le système (A.1), il vient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} M_{dd} + M_{gg} + M_{dg}e^{-jn\alpha} + M_{gd}e^{jn\alpha} & M_{di}e^{-jn\alpha} + M_{gi} \\ M_{id}e^{jn\alpha} + M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{n,g} \\ \ddot{x}_{n,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} + K_{gg} + K_{dg}e^{-jn\alpha} + K_{gd}e^{jn\alpha} & K_{di}e^{-jn\alpha} + K_{gi} \\ K_{id}e^{jn\alpha} + K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n,g} \\ x_{n,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Les relations de symétrie cyclique ont permis d'éliminer les efforts internes et les degrés de liberté de la frontière droite. Plus simplement, l'équation s'écrit :

$$M_n \ddot{x}_n + K_n x_n = 0 \quad (\text{A.5})$$

L'analyse modale consiste donc à chercher la base des modes propres  $\Phi_n$  associée aux matrices  $M_n$  et  $K_n$ . Le déplacement  $x_n$  s'exprimera à l'aide de coordonnées généralisées  $q_n$  associées aux modes  $\Phi_n$  :

$$x_n = \Phi_n q_n \quad (\text{A.6})$$

On a  $M_0, K_0, M_{N/2}$  et  $K_{N/2}$  appartiennent à  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(N_{S_0}, N_{S_0})$  où  $N_{S_0}$  est le nombre de degrés de liberté sur le secteur  $S_0$ <sup>1</sup>. Le système est donc réel pour ces valeurs de nombre à diamètre particulière ( $n = 0$  et  $n = N/2$ ) et peut donc être résolu directement. Il n'est pas détaillé ici. Pour les autres nombres à diamètre,  $M_n$  et  $K_n$  appartiennent à  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(N_{S_0}, N_{S_0})$ . Les matrices sont donc complexes, l'obtention de la base modale est moins immédiat.

## 2 Nombre à diamètre positif

On traite d'abord les valeurs positives de  $n$  :  $n = 1, \dots, N/2 - 1$ . Les matrices  $M_n$  et  $K_n$  sont hermitiennes (elles vérifient  $M_n^H = M_n$  et  $K_n^H = K_n$ , où la notation  $(.)^H$  représente la transposé de la matrice complexe conjuguée, à savoir  $(.)^H = \overline{(.)}^T$ ). Cela qui implique qu'il est possible de remplacer le système A.5 par son équivalent réel qui s'obtient en séparant partie réelle et partie imaginaire. On pose alors :

$$x_{n,g} = x_{n,g}^R + jx_{n,g}^I \quad (\text{A.7})$$

$$x_{n,i} = x_{n,i}^R + jx_{n,i}^I \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{bmatrix} x^R \\ x^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n,g}^R \\ x_{n,i}^R \\ x_{n,g}^I \\ x_{n,i}^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Le système devient alors un système double :

$$\begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}^R \\ \ddot{x}^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_n^R & -K_n^I \\ K_n^I & K_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^R \\ x^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Les matrices  $M_n^R, M_n^I, K_n^R$  et  $K_n^I$  sont des matrices réelles qui dépendent du nombre à diamètre  $n$ . On a :

$$M_n^R = \begin{bmatrix} M_{dd} + M_{gg} + (M_{dg} + M_{gd})\cos(n\alpha) & M_{di}\cos(n\alpha) + M_{gi} \\ M_{id}\cos(n\alpha) + M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$M_n^I = \begin{bmatrix} (M_{dg} - M_{gd})\sin(n\alpha) & M_{di}\sin(n\alpha) \\ -M_{id}\sin(n\alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

Idem pour les matrices de raideurs  $K_n^R$  et  $K_n^I$ . Les matrices  $M_n^R$  et  $K_n^R$  sont symétriques tandis que les  $M_n^I$  et  $K_n^I$  sont antisymétriques. Finalement, pour chaque nombre à diamètre  $n$ , on se

1. Ici seuls les degrés de libertés internes et gauche appartiennent à  $S_0$

ramène à un problème aux valeurs propres classique de matrices réelles et symétriques :

$$\left( \begin{bmatrix} K_n^R & -K_n^I \\ K_n^I & K_n^R \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \right) \phi_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Compte tenu des propriétés des matrices hermitiennes du système (A.5), on obtient des valeurs propres réelles par couple et les vecteurs propres associés sont orthogonaux. On a alors, pour  $n = 1, \dots, N/2$  et  $i = 1, \dots, n_m$  (où  $n_m$  est le nombre de modes retenus) le couple de valeurs propres et vecteurs propres suivant :

$$(\phi_{n,i}^{(1)}, \omega_{n,i}^{(1)}) \quad \text{et} \quad (\phi_{n,i}^{(2)}, \omega_{n,i}^{(2)}) \quad (\text{A.15})$$

avec

$$\omega_{n,i}^{(1)} = \omega_{n,i}^{(2)} \quad (\text{A.16})$$

Le vecteur  $\phi_{n,i}^{(1)}$  est donc de taille  $2 \times N_{S_0}$ . Les  $N_{S_0}$  premiers éléments représentent les parties réelles du mode complexe et les  $N_{S_0}$  derniers éléments représentent les parties imaginaires du mode complexe. Le second vecteur propre est défini à une constante complexe près non réelle pure. On choisit ici  $\phi_{n,i}^{(2)} = i\phi_{n,i}^{(1)}$ . Finalement :

$$\phi_{n,i}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_{n,i}^R \\ \phi_{n,i}^I \end{bmatrix} \quad \phi_{n,i}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\phi_{n,i}^I \\ \phi_{n,i}^R \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Pour ces deux modes, on obtient alors deux masses généralisées  $\mu_{n,i}^{(1)}$  et  $\mu_{n,i}^{(2)}$  définies par :

$$\mu_{n,i}^{(1)} = \phi_{n,i}^{(1)T} \begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \phi_{n,i}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_{n,i}^R \\ \phi_{n,i}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n,i}^R \\ \phi_{n,i}^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\mu_{n,i}^{(2)} = \phi_{n,i}^{(2)T} \begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \phi_{n,i}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\phi_{n,i}^I \\ \phi_{n,i}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n^R & -M_n^I \\ M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_{n,i}^I \\ \phi_{n,i}^R \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

On montre facilement que :

$$\mu_{n,i}^{(1)} = \mu_{n,i}^{(2)} = \phi_{n,i}^{RT} M_n^R \phi_{n,i}^R - \phi_{n,i}^{RT} M_n^I \phi_{n,i}^I + \phi_{n,i}^{IT} M_n^I \phi_{n,i}^R + \phi_{n,i}^{IT} M_n^R \phi_{n,i}^I \quad (\text{A.20})$$

La démarche est identique pour les raideurs généralisées  $\gamma_{n,i}^{(1)}$  et  $\gamma_{n,i}^{(2)}$  associées au mode  $i$ .

En considérant les  $n_m$  modes retenus, on définit les matrices de masses généralisées  $\mu_n^{(1)}$ ,  $\mu_n^{(2)}$  les matrices de raideurs généralisées  $\gamma_n^{(1)}$ ,  $\gamma_n^{(2)}$  ainsi que les matrices de modes  $\Phi_n^{(1)}$  et  $\Phi_n^{(2)}$  :

$$\Phi_n^{(1)} = \begin{bmatrix} \Phi_n^R \\ \Phi_n^I \end{bmatrix} \quad \Phi_n^{(2)} = \begin{bmatrix} -\Phi_n^I \\ \Phi_n^R \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Le déplacement pour un nombre à diamètre donné peut donc s'exprimer en fonction des modes  $\Phi_n^{(1)}$  et  $\Phi_n^{(2)}$  et des coordonnées généralisées associées  $q_n^{(1)}$  et  $q_n^{(2)}$ . En réécrivant les parties imaginaires et complexes, il vient :

$$x_n = \Phi_n^{(1)} q_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)} q_n^{(2)} \quad (\text{A.22})$$

$$= (\Phi_n^R + j\Phi_n^I)(q_n^{(1R)} + jq_n^{(1I)}) + (-\Phi_n^I + j\Phi_n^R)(q_n^{(2R)} + jq_n^{(2I)}) \quad (\text{A.23})$$

$$= (\Phi_n^R + j\Phi_n^I)(q_n^{(1R)} - q_n^{(2I)} + j(q_n^{(1I)} + q_n^{(2R)})) \quad (\text{A.24})$$

$$= (\Phi_n^R + j\Phi_n^I)(q_n^R + jq_n^I) \quad (\text{A.25})$$

$$= \Phi_n q_n \quad (\text{A.26})$$

Le déplacement associé au nombre  $n$  peut donc s'écrire à l'aide d'un unique nombre complexe  $q_n$ . On définit alors  $\mu_n^s$  la matrices de masses généralisées,  $\gamma_n^s$  la matrice de raideurs généralisées pour le nombre à diamètre  $n$  et les  $n_m$  modes retenus sur le secteur de référence :

$$\mu_n^s = \Phi_n^H M_n \Phi_n \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma_n^s = \Phi_n^H K_n \Phi_n \quad (\text{A.28})$$

$$f_{ag,n}^s = \Phi_n^H f_n \quad (\text{A.29})$$

Par construction,  $\mu_n^s$  est diagonale. De plus,  $M_n$  étant hermitienne, on a  $\mu_n^{sH} = \mu_n^s$ . Ces deux propriétés entraînent que  $\mu_n^s$  est une matrice diagonale réelle. Le raisonnement est identique pour  $\gamma_n$ .

En développant partie réelle et partie imaginaire de  $M_n$ ,  $K_n$  et  $\Phi_n$ , il vient facilement les relations suivantes :

$$\mu_n^s = \mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)} \quad (\text{A.30})$$

$$\gamma_n^s = \gamma_n^{(1)} = \gamma_n^{(2)} \quad (\text{A.31})$$

$$(\text{A.32})$$

Finalement, la résolution du problème double permet d'obtenir la matrice complexe  $\Phi_n$  ainsi que la matrice de masse généralisée associée au secteur de référence  $\mu_n^s$ , la matrice de raideur généralisée associée au secteur de référence  $\gamma_n^s$  et le vecteur pulsation propre  $\omega_n$

### 3 Nombre à diamètre négatif

Jusqu'ici seuls les nombres à diamètres positifs ont été traités. Pour les composantes  $-n$  il est facile de montrer les relations suivantes sur les matrices de masse et de raideurs :

$$M_{-n}^R = M_n^R, \quad K_{-n}^R = K_n^R \quad (\text{A.33})$$

$$M_{-n}^I = -M_n^I, \quad K_{-n}^I = -K_n^I \quad (\text{A.34})$$

Le problème aux valeurs propres associé est donc :

chercher les couples  $(\phi_{-n,i}, \omega_{-n,i})$  tels que :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{-n}^R & -K_{-n}^I \\ K_{-n}^I & K_{-n}^R \end{bmatrix} - \omega_{-n,i}^2 \begin{bmatrix} M_{-n}^R & -M_{-n}^I \\ M_{-n}^I & M_{-n}^R \end{bmatrix} \right) \phi_{-n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

En utilisant les relations sur les matrices, le problème s'écrit :

$$\left( \begin{bmatrix} K_n^R & K_n^I \\ -K_n^I & K_n^R \end{bmatrix} - \omega_{-n,i}^2 \begin{bmatrix} M_n^R & M_n^I \\ -M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \right) \phi_{-n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

En choisissant :

$$\omega_{-n,i} = \omega_{n,i} \quad (\text{A.37})$$

$$\phi_{-n}^{(1)} = \overline{\phi_n^{(1)}} \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ -\phi_n^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

On a :

$$\begin{bmatrix} K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R & K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I \\ -(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I) & K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ -\phi_n^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R & -(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I) \\ -(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I) & K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ \phi_n^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$= \begin{bmatrix} (K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R)\phi_n^R - (K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I)\phi_n^I \\ -(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I)\phi_n^R - (K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R)\phi_n^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

On remarque maintenant que pour les nombres à diamètres positifs, on a :

$$\begin{bmatrix} K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R & -(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I) \\ K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I & K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ \phi_n^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

En effet, le couple  $(\phi_{n,i}^1 = \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ \phi_n^I \end{bmatrix}, \omega_{n,i}^1)$  est solution du problème aux valeurs propres pour les diamètres positifs. On a alors les deux équations suivantes :

$$(K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R)\phi_n^R - (K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I)\phi_n^I = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$(K_n^I - \omega_{n,i}^2 M_n^I)\phi_n^R + (K_n^R - \omega_{n,i}^2 M_n^R)\phi_n^I = 0 \quad (\text{A.43})$$

En utilisant ces deux équations, on retrouve bien :

$$\left( \begin{bmatrix} K_n^R & K_n^I \\ -K_n^I & K_n^R \end{bmatrix} - \omega_{-n,i}^2 \begin{bmatrix} M_n^R & M_n^I \\ -M_n^I & M_n^R \end{bmatrix} \right) \phi_{-n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

et donc :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{-n}^R & -K_{-n}^I \\ K_{-n}^I & K_{-n}^R \end{bmatrix} - \omega_{-n,i}^2 \begin{bmatrix} M_{-n}^R & -M_{-n}^I \\ M_{-n}^I & M_{-n}^R \end{bmatrix} \right) \phi_{-n}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

ce qui implique que le couple  $(\phi_{-n,i}^{(1)}, \omega_{-n,i})$  avec

$$\omega_{-n,i} = \omega_{n,i} \quad (\text{A.46})$$

$$\phi_{-n}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_n^R \\ -\phi_n^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

est bien solution du problème. De plus, par définition du problème double :

$$\phi_{-n}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_{-n}^R \\ \phi_{-n}^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

En égalisant les deux dernières équations, on trouve :

$$\begin{cases} \phi_{-n}^R = \phi_n^R \\ \phi_{-n}^I = -\phi_n^I \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

Finalement, en regroupant les  $n_m$  modes et en utilisant les deux dernières équations, on a :

$$\Phi_{-n} = \overline{\Phi_n} \quad (\text{A.50})$$

On définit la matrice de masse généralisée pour le nombre à diamètre  $-n$  :

$$\mu_{-n}^s = \Phi_{-n}^H M_{-n} \Phi_{-n} \quad (\text{A.51})$$

De plus, on a :

$$\overline{M}_{-n} = M_n \quad (\text{A.52})$$

$$\overline{\Phi}_{-n} = \Phi_n \quad (\text{A.53})$$

Regardons  $\overline{\mu_{-n}^s}$  :

$$\overline{\mu_{-n}^s} = \overline{\Phi_{-n}^H M_{-n} \Phi_{-n}} \quad (\text{A.54})$$

$$= \overline{\overline{\Phi}_{-n}^T M_{-n} \Phi_{-n}} \quad (\text{A.55})$$

$$= \Phi_{-n}^T \overline{M}_{-n} \overline{\Phi}_{-n} \quad (\text{A.56})$$

$$= \Phi_n^H M_n \Phi_n \quad (\text{A.57})$$

$$= \mu_n^s \quad (\text{A.58})$$

$\mu_n$  étant réel, on obtient finalement :

$$\mu_{-n}^s = \mu_n^s \quad (\text{A.59})$$

et de la même façon :

$$\gamma_{-n}^s = \gamma_n^s \quad (\text{A.60})$$

Finalement, les termes associés aux diamètres négatifs peuvent se déduire de ceux issus de l'analyse modale effectuée sur les diamètres positifs.

## Annexe B

# Étude numérique instationnaire sur la configuration de Murphy

Cette annexe décrit l'étude numérique instationnaire menée sur la configuration de nacelle académique de Murphy. En effet, Murphy montre que dans une configuration de vent de travers le vortex n'est pas totalement stationnaire dans la mesure où sa position et son intensité fluctuent au cours de temps comme l'illustre la figure B.1 en décrivant l'évolution de la circulation  $\Gamma$  au cours du temps. L'objectif est d'abord de confronter les calculs U-RANS avec les informations instationnaires disponibles dans l'étude expérimentale avant de comparer les résultats des approches RANS et U-RANS.

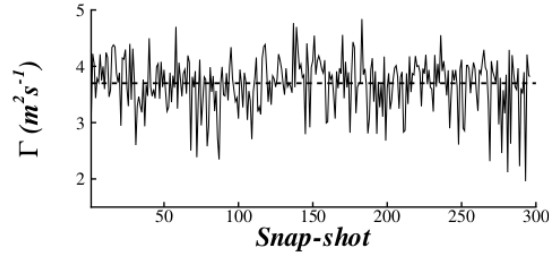


FIGURE B.1 – Typical variations in vortex circulation in crosswind configuration ( $h/D_l = 0.4$ ,  $U^* = 18.6$ ) [62].

## Paramètres numériques pour l'instationnaire

Les calculs instationnaires U-RANS ont été initialisés par les calculs RANS exposés section III.1.1. L'intégration temporelle a été réalisée avec le schéma de Gear avec 20 sous-itérations (cf II.2.4). Une première étude a permis de cibler le pas de temps physique pertinent pour cette étude. Il a d'abord été choisi à  $2.5 \times 10^{-4}$  s puis a été divisé par deux jusqu'à convergence des résultats, c'est à dire jusqu'à ce que l'évolution temporelle de l'écoulement, caractérisée par les indices de distorsion, ne soit plus impactée par la diminution du pas de temps. Il en résulte un pas de temps physique de  $1.5625 \times 10^{-5}$  s. Dans ces conditions, les résidus en densité des sous-itérations décroissent d'un ordre de grandeur. Les calculs ont été effectués sur 15000 itérations physiques, ce qui représente 0.23 s. Les indices ont été extraits toutes les 100 itérations physiques.

## Position du vortex

L'analyse instationnaire qu'effectue Murphy en configuration de vent de travers se concentre uniquement sur les fluctuations de position du vortex de sol en fonction du rapport de vitesse. Les résultats de Murphy sont représentés figure B.2a. La position moyenne du coeur du vortex  $y$  est représentée pour différents rapports de vitesse. Les barres représentent la déviation standard par rapport à la position moyenne et les ellipses donnent une idée de l'ensemble des positions atteintes par le coeur du vortex. Les résultats issus des calculs U-RANS sont représentés figure B.2b. Les différents points représentent les positions du coeur du vortex au cours du temps, repérées par le maximum de vorticité porté par le vecteur perpendiculaire au plan. La taille et la forme des zones répertoriant les positions du vortex sont en accord avec les observations de Murphy. Ces zones décrivent une ellipse où l'axe porté par la direction du vent est plus grand que celui porté par la direction perpendiculaire au vent. Le calcul prédit convenablement l'évolution de la taille de ces zones. La diminution de  $U^*$  de 16.6 à 7.37 entraîne l'augmentation de la taille de la zone impactée par le vortex. Ceci n'est plus vrai pour  $U^* = 5.3$ , où la taille de la zone est relativement faible. Murphy n'expose pas cette zone pour  $U^* = 5.2$  pourtant étudié. Un changement de topologie apparaît pour ce faible  $U^*$  car il est caractérisé par un décollement de manche. En plus de l'évolution de la taille de ces zones, le calcul prédit correctement leur déplacement en fonction du rapport  $U^*$ . En effet, la diminution de  $U^*$  entraîne un déplacement du vortex dans le sens du vent (proche de  $0.4D_l$  en passant de  $U^* = 18.3$      $U^* = 6.1$  pour l'étude de Murphy et en passant de  $U^* = 16.6$      $U^* = 5.3$  pour l'étude numérique) et un déplacement dans la direction perpendiculaire au vent (proche de  $0.2D_l$ ). Ce résultat est en accord avec les observations effectuées section 1.1.3 sur les cartographies de pression totale issues des calculs RANS. L'approche RANS permettait déjà de capter les bonnes tendances de l'évolution de la position du vortex dans le plan interne à la nacelle en fonction du rapport de vitesse  $U^*$ . Malgré une bonne prédiction de l'évolution des positions du vortex en fonction de l'évolution de  $U^*$ , un décalage sur les positions absolues est observé. Les positions issues des calculs sont décalées d'environ  $-0.2D_l$  selon  $y$  et d'environ  $-0.05D_l$  selon  $x$ .

## Circulation et indice de distorsion

Les résultats issus des calculs U-RANS sont représentés figure B.3 où ils sont comparés aux résultats RANS et ceux obtenus par Murphy (déjà présentés section III.1.1). Les indices ont été moyennés sur l'ensemble du calcul instationnaire. Les valeurs minimales et maximales sont représentées à l'aide des bars autour du point moyen, ce qui permet de quantifier les fluctuations des indices. Concernant le  $DC_{60}$  (figure B.3), les valeurs moyennes obtenues par l'approche U-RANS sont proches de celles obtenues par l'approche RANS. Un léger écart apparaît pour  $U^* = 10.1$  où le calcul instationnaire prédit un indice moyen plus faible. Lorsque le rapport de vitesse  $U^*$  diminue l'instationnarité du vortex augmente, sauf pour le cas à  $U^* = 5.3$  où l'indice varie peu au cours du calcul. Le  $DC_{60}$  moyen issu des calculs instationnaires est sous-estimé par rapport à celui obtenu dans l'étude de Murphy. Concernant la circulation  $\Gamma^*$ , les niveaux moyens instationnaires sont légèrement plus faibles que ceux obtenus avec l'approche RANS. Ils se rapprochent alors des valeurs de Murphy pour  $U^* = 16.6$  et  $U^* = 10.1$ , mais s'en éloignent pour  $U^* = 7.3$ . Il est intéressant de noter que la plage de variation de la circulation est très marquée pour le cas  $U^* = 7.3$ .

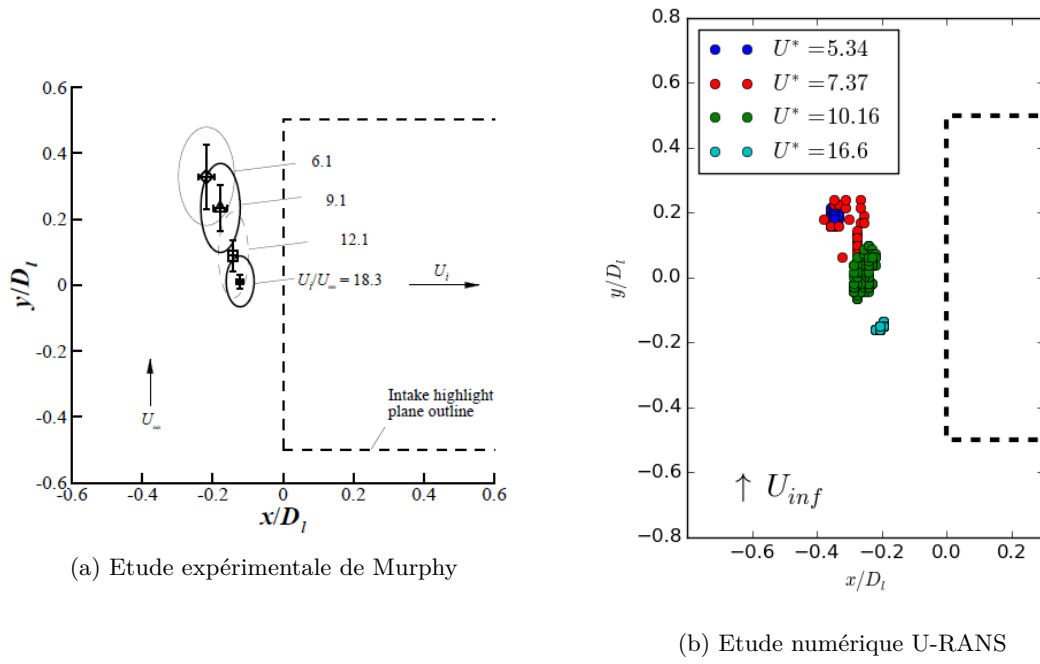


FIGURE B.2 – Position du vortex dans le plan proche du sol pour différents rapports de vitesse  $U^*$  ( $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.11$ ).

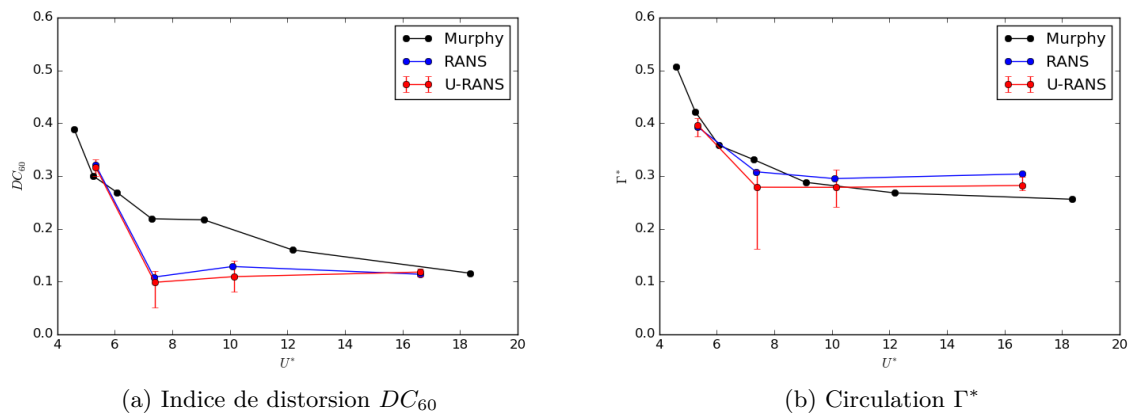


FIGURE B.3 – Comparaison des approches stationnaire (RANS) et instationnaire (U-RANS) ( $h/D_l = 0.25$ ,  $\delta^*/D_l = 0.11$ ).

## Conclusions

L'approche U-RANS permet de capter convenablement les fluctuations de la position du vortex de sol pour différent vent de travers. Les  $DC_{60}$  et les circulations  $\Gamma^*$  moyennés en temps de l'approche U-RANS sont fortement similaires à ceux obtenus par l'approche RANS pour les différents rapport de vitesse étudiés. L'approche stationnaire semble donc toujours pertinente malgré les difficultés pour obtenir une convergence parfaite, dans la mesure où elle réduit le temps de calcul et simplifie le problème en considérant une distorsion stationnaire.

## Annexe C

# Hypothèse découplée dans le cadre d'une structure en symétrie cyclique

L'objectif de cette annexe est de déterminer la forme des matrices aérodynamiques  $A$  et  $B$  issue de l'hypothèse de linéarité dans les bases modales complexe et réelle. On rappelle ici qu'une analyse modale sur un secteur de référence permet de construire une base modale complexe, notée  $\Phi$ , et une base de modale réelle, notée  $\Phi'$ , permettant de décrire les mouvements des  $N$  secteurs de la structure complète (cf [II.1.3](#)). La structure de la base complexe  $\Phi$  est rappelée ci-dessous :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0(S_0) & \Phi_1(S_0) & \Phi_{-1}(S_0) & \dots & \Phi_{N/2}(S_0) \\ \Phi_0(S_1) & \Phi_1(S_1) & \Phi_{-1}(S_1) & \dots & -\Phi_{N/2}(S_1) \\ \Phi_0(S_2) & \Phi_1(S_2) & \Phi_{-1}(S_2) & \dots & \Phi_{N/2}(S_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_0(S_{N-1}) & \Phi_1(S_{N-1}) & \Phi_{-1}(S_{N-1}) & \dots & \Phi_{N/2}(S_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$\Phi_n(S_k) = \Phi_n(S_0)e^{jkn\alpha} \quad (\text{C.2})$$

La base réelle  $\Phi'$  s'exprime elle de la façon suivante :

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \Phi'_0(S_0) & \Phi'_1(S_0) & \Phi''_1(S_0) & \dots & \Phi'_{N/2-1}(S_0) & \Phi''_{N/2-1}(S_0) & \Phi'_{N/2}(S_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi'_0(S_{N-1}) & \Phi'_1(S_{N-1}) & \Phi''_1(S_{N-1}) & \dots & \Phi'_{N/2-1}(S_{N-1}) & \Phi''_{N/2-1}(S_{N-1}) & \Phi'_{N/2}(S_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Les modes de chaque secteur s'expriment comme une combinaison des parties réelle et imaginaire des modes complexes  $\Phi_n = \Phi_n^R + j\Phi_n^I$  définies sur le secteur de référence.

$$\begin{cases} \Phi'_0(S_k) &= \Phi_0 & \text{et } q'_0 &= q_0 \\ \Phi'_n(S_k) &= \Phi_n^R \cos(kn\alpha) - \Phi_n^I \sin(kn\alpha) & \text{et } q'_n &= 2q_n^R \\ \Phi''_n(S_k) &= \Phi_n^R \sin(kn\alpha) + \Phi_n^I \cos(kn\alpha) & \text{et } q''_n &= -2q_n^I \\ \Phi'_{N/2}(S_k) &= \Phi_{N/2}(-1)^k & \text{et } q'_{N/2} &= q_{N/2} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Compte tenu de la symétrie cyclique de la structure, les matrices  $A$  et  $B$  qui définissent les forces aérodynamiques d'amortissement sont des matrices circulantes. En effet, l'interaction

entre deux secteurs est uniquement définie par la distance entre ces deux secteurs. Ces matrices sont donc de la forme exposée pour la matrice  $A$  équation C.5.

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{N-1} \\ A_{N-1} & A_0 & A_1 & & A_{N-2} \\ A_{N-2} & A_{N-1} & A_0 & & A_{N-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Par définition d'une matrice circulante, on a pour  $i, j$  et  $k$  appartenant à  $0, \dots, N-1$  :

$$A_{i,j} = A_{j-i} \quad (\text{C.6})$$

$$A_k = A_{k-N} \quad (\text{C.7})$$

## 1 Base complexe

La projection dans la base complexe  $\Phi$  donne la matrice  $\mathcal{A} = \Phi^H A \Phi$ . Le bloc d'indice  $n$  et  $m$  appartenant à  $1, \dots, N-1$  est défini par :

$$\mathcal{A}_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Phi_n^H(S_k) A_{k,l} \Phi_m(S_l) \quad (\text{C.8})$$

On définit ensuite le changement de variable  $f$  suivant :

$$l' = f_k(l) = l - k \bmod N \quad (\text{C.9})$$

La fonction inverse  $f^{-1}$  s'écrit alors :

$$l = f_k^{-1}(l') = l' + k \bmod N \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{A}_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l'=0}^{N-1} \Phi_n^H(S_k) A_{k,f_k^{-1}(l')} \Phi_m(S_{f_k^{-1}(l')}) \quad (\text{C.11})$$

On cherche maintenant à détailler le terme  $A_{k,f_k^{-1}(l')}$ . Il est nécessaire de différencier deux cas. Si  $l' + k < N$  on a alors :

$$f_k^{-1}(l') = l' + k \quad (\text{C.12})$$

et donc, à l'aide de l'équation C.6 :

$$A_{k,f_k^{-1}(l)} = A_{k,l'+k} = A_{l'} \quad (\text{C.13})$$

Le second cas est si  $l' + k \geq N$ , on a alors :

$$f_k^{-1}(l') = l' + k - N \quad (\text{C.14})$$

et donc, à l'aide de l'équation C.6 :

$$A_{k,f_k^{-1}(l')} = A_{k,l'+k-N} = A_{l'-N} \quad (\text{C.15})$$

puis à l'aide de l'équation C.7 :

$$A_{l'-N} = A_{l'} \quad (\text{C.16})$$

Finalement, on a dans les deux cas  $A_{l'-k,k} = A_{l'}$  qui est un terme qui ne dépend pas de  $k$ . De manière similaire on cherche à exprimer le terme  $\Phi_m(S_{f_k^{-1}(l')})$ . Par définition de la base (cf equation C.2) on a :

$$\Phi_m(S_{f_k^{-1}(l')}) = \Phi_m(S_0)e^{j\alpha m f_k^{-1}(l')} \quad (\text{C.17})$$

Encore une fois on différencie les deux cas. Si  $l' + k < N$  alors on a :

$$e^{j\alpha m f_k^{-1}(l')} = e^{j\alpha m l'} e^{j\alpha m k} \quad (\text{C.18})$$

Et si  $l' + k \geq N$  :

$$e^{j\alpha m f_k^{-1}(l')} = e^{j\alpha m l'} e^{j\alpha m k} e^{-j\alpha m N} \quad (\text{C.19})$$

or  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  d'où :

$$e^{-j\alpha m N} = e^{-jm2\pi} = 1 \quad (\text{C.20})$$

Finalement, dans les deux cas, on retrouve :

$$e^{j\alpha m f_k^{-1}(l')} = e^{j\alpha m l'} e^{j\alpha m k} \quad (\text{C.21})$$

En factorisant par les termes indépendants de  $k$  dans l'équation C.11, il vient :

$$\mathcal{A}_{n,m} = \sum_{l'=0}^{N-1} \Phi_n^H(S_0) A_{l'} \Phi_m(S_0) e^{j\alpha m l'} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha k(m-n)} \quad (\text{C.22})$$

Il s'en suit que le terme  $\mathcal{A}_{n,m}$  est non nul que si  $n = m$ . Dans les autres cas, la somme  $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha k(m-n)}$  est la somme d'une suite géométrie qui donne pour résultat 0.

La matrice  $\mathcal{A}$  est donc diagonale par bloc et prends la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \text{diag}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{-1}, \dots, \mathcal{A}_{N/2-1}, \mathcal{A}_{-N/2+1}, \mathcal{A}_{N/2}) \quad (\text{C.23})$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \mathcal{A}_{-1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{A}_{N/2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

Compte tenu des propriétés de  $\Phi_n$  il est facile de montrer que  $\mathcal{A}_{-n} = \overline{\mathcal{A}_n}$ . Le raisonnement est identique pour la matrice  $\mathcal{B} = \Phi^H B \Phi$

## 2 Base réelle

La matrice de raideur aérodynamique exprimée dans la base réelle  $\mathcal{A}' = \Phi'^T A \Phi'$  ainsi que la matrice d'amortissement aérodynamique exprimée dans la base réelle  $\mathcal{B}' = \Phi'^T B \Phi'$  peuvent d'obtenir à l'aide de la matrice de changement de base  $R$  détaillée équation II.61 permettant de passer de la base complexe à base la réelle.

$$\Phi = \Phi' R \quad (\text{C.25})$$

La matrice de raideur aérodynamique et la matrice d'amortissement aérodynamique s'obtiennent donc à l'aide des équations suivantes :

$$\mathcal{A}' = R^{-H} \mathcal{A} R^{-1} \quad (\text{C.26})$$

$$\mathcal{B}' = R^{-H} \mathcal{B} R^{-1} \quad (\text{C.27})$$

$$(\text{C.28})$$

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1^R & \mathcal{A}_1^I & & \vdots \\ 0 & -\mathcal{A}_1^I & \mathcal{A}_1^R & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{A}_{N/2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_1^R & \mathcal{B}_1^I & & \vdots \\ 0 & -\mathcal{B}_1^I & \mathcal{B}_1^R & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{B}_{N/2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

Dans le cadre d'une réduction modale à un unique mode double, les matrices  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  peuvent se réduire des matrices  $2 \times 2$  faisant les scalaires  $a^R$ ,  $a^I$ ,  $b^R$  et  $b^I$  :

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^R & a^I \\ -a^I & a^R \end{bmatrix} \quad (\text{C.31})$$

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b^R & b^I \\ -b^I & b^R \end{bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

## Annexe D

# Ondes tournantes

Cette annexe permet de faire le lien entre ondes tournantes exprimées dans la base réelle, plus facile à gérer numériquement, et ondes tournantes exprimées dans la base complexe, plus adaptée à ce type d'ondes. On se place dans le cadre d'un contexte de méthode découplée pour un unique mode double (cf [IV.2.2](#)). L'équation de la dynamique peut alors s'écrire comme suit dans le formalisme réel :

$$\mu' \begin{bmatrix} \ddot{q}' \\ \ddot{q}'' \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + \gamma' \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = \mathcal{A}' \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} + \mathcal{B}' \begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{q}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{ag}^{f'} \\ f_{ag}^{f''} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

ou encore dans la base complexe :

$$\mu \begin{bmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_{-n} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{q}_{-n} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} q_n \\ q_{-n} \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} q_n \\ q_{-n} \end{bmatrix} + \mathcal{B} \begin{bmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{q}_{-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{ag,n}^f \\ f_{ag,-n}^f \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Le passage d'une base à l'autre peut être effectué avec la matrice de passage  $R_n$  :

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

On a notamment la relation suivante pour les matrices de raideur et d'amortissement définies dans la base complexe  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  et les mêmes matrices définies dans la base réelle  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  :

$$\mathcal{A}_n = R_n^H \mathcal{A}' R_n = \frac{1}{2} R_n^H \begin{bmatrix} a^R & a^I \\ -a^I & a^R \end{bmatrix} R_n = \begin{bmatrix} a^R + ja^I & 0 \\ 0 & a^R - ja^I \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{B}_n = R_n^H \mathcal{B}' R_n = \frac{1}{2} R_n^H \begin{bmatrix} b^R & b^I \\ -b^I & b^R \end{bmatrix} R_n = \begin{bmatrix} b^R + jb^I & 0 \\ 0 & b^R - jb^I \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

On suppose ici que le mouvement est harmonique de pulsation  $\omega$ ,  $q_n$  étant complexe on a de façon générale :

$$q_n = \hat{q}_1 e^{j\omega t} + \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} \quad (\text{D.6})$$

$$q_{-n} = \overline{\hat{q}_1} = \hat{q}_1 e^{-j\omega t} + \overline{\hat{q}_{-1}} e^{j\omega t} \quad (\text{D.7})$$

$$(\text{D.8})$$

Le déplacement réel  $u$  pour le mode à diamètre considéré s'écrit alors :

$$u = q_n \phi_n + q_{-n} \phi_{-n} \quad (\text{D.9})$$

$$= (\hat{q}_1 e^{j\omega t} + \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t}) \phi_n + (\overline{\hat{q}_1} e^{-j\omega t} + \overline{\hat{q}_{-1}} e^{j\omega t}) \overline{\phi_n} \quad (\text{D.10})$$

Puis en réarrangeant les termes :

$$u = \hat{q}_1 e^{j\omega t} \phi_n + \overline{\hat{q}_1 e^{j\omega t} \phi_n} + \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} \phi_n + \overline{\hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} \phi_n} \quad (\text{D.11})$$

On reconnait ici un déplacement réel dit d'onde tournante directe associé à la coordonnée  $\hat{q}_1 e^{j\omega t}$ , noté  $u_{dir}$ , et un déplacement réel dit d'onde tournante rétrograde associé à la coordonnée  $\hat{q}_{-1} e^{-j\omega t}$ , noté  $u_{ind}$  :

$$u = u_{dir} + u_{ind} \quad (\text{D.12})$$

$$u_{dir} = \hat{q}_1 e^{j\omega t} \phi_n + \overline{\hat{q}_1 e^{j\omega t} \phi_n} \quad (\text{D.13})$$

$$u_{ind} = \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} \phi_n + \overline{\hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} \phi_n} \quad (\text{D.14})$$

Dans le formalisme réel, si on définit  $\hat{q}_1 = |\hat{q}_1| e^{j\lambda}$  avec  $\lambda$  la phase, l'onde directe devient :

$$\begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = R_n \begin{bmatrix} \hat{q}_1 e^{j\omega t} \\ \overline{\hat{q}_1 e^{j\omega t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2|\hat{q}_1| \cos(\omega t + \lambda) \\ -2|\hat{q}_1| \sin(\omega t + \lambda) \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

De la même façon pour une onde rétrograde  $\hat{q}_{-1} = |\hat{q}_{-1}| e^{j\lambda}$  :

$$\begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = R_n \begin{bmatrix} \hat{q}_{-1} e^{j\omega t} \\ \overline{\hat{q}_{-1} e^{j\omega t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2|\hat{q}_{-1}| \cos(\omega t - \lambda) \\ 2|\hat{q}_{-1}| \sin(\omega t - \lambda) \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$u_{dir} = 2|\hat{q}_1| \cos(\omega t + \lambda) \phi' - 2|\hat{q}_1| \sin(\omega t + \lambda) \phi'' \quad (\text{D.17})$$

$$u_{ind} = 2|\hat{q}_{-1}| \cos(\omega t - \lambda) \phi' + 2|\hat{q}_{-1}| \sin(\omega t - \lambda) \phi'' \quad (\text{D.18})$$

Dans le cas d'une onde directe, le mode  $\phi''$  est déphasée de  $-\pi/2$  par rapport au mode  $\phi'$  et dans le cas d'une onde rétrograde, le mode  $\phi''$  est déphasée de  $\pi/2$  par rapport au mode  $\phi'$ .

En reprenant l'expression de  $q_n$  pour un mouvement harmonique, équation (D.6), il vient :

$$\dot{q}_n = j\omega(\hat{q}_1 e^{j\omega t} - \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t}) \quad (\text{D.19})$$

$$\ddot{q}_n = -\omega^2(\hat{q}_1 e^{j\omega t} + \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t}) \quad (\text{D.20})$$

En injectant ces grandeurs dans le système D.2, on obtient deux équations complexes conjuguées :  
Le système s'écrit alors :

$$(\gamma - A_n - \omega^2 \mu + j\omega(\beta - B_n)) \hat{q}_1 e^{j\omega t} + (\gamma - A_n - \omega^2 \mu - j\omega(\beta - B_n)) \hat{q}_{-1} e^{-j\omega t} = f_{ag,n}^f \quad (\text{D.21})$$

$$(\gamma - \overline{A_n} - \omega^2 \mu - j\omega(\beta - \overline{B_n})) \overline{\hat{q}_1} e^{-j\omega t} + (\gamma - \overline{A_n} - \omega^2 \mu + j\omega(\beta - \overline{B_n})) \overline{\hat{q}_{-1}} e^{j\omega t} = \overline{f_{ag,n}^f} \quad (\text{D.22})$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient les deux équations suivantes :

$$(\gamma - A_n - \omega^2 \mu + j\omega(\beta - B_n)) \hat{q}_1 = \hat{f}_{ag,n}^f \quad (\text{D.23})$$

$$(\gamma - \overline{A_n} - \omega^2 \mu + j\omega(\beta - \overline{B_n})) \overline{\hat{q}_{-1}} = \overline{\hat{f}_{ag,n}^f} \quad (\text{D.24})$$

Le première équation nous permet de déterminer la coordonnée harmonique correspondant à l'onde directe. De plus, en séparant les parties réelles et imaginaires des termes aérodynamiques ( $\mathcal{A} = a^R + ja^I$  et  $\mathcal{B} = b^R + jb^I$ ), il est possible de faire apparaître le terme de raideur aérodynamique associé à l'onde directe, noté  $\gamma_{a,dir}$  ainsi que le terme d'amortissement aérodynamique associé à l'onde directe, noté  $\beta_{a,dir}$  :

$$(\gamma - \gamma_{a,dir} - \omega^2\mu + j\omega(\beta - \beta_{a,dir}))\hat{q}_1 = \hat{f}_{ag,n}^f \quad (D.25)$$

avec

$$\gamma_{a,dir} = a^R - \omega b^I \quad (D.26)$$

$$\beta_{a,dir} = b^R + a^I/\omega \quad (D.27)$$

La seconde équation nous permet de déterminer la coordonnée harmonique correspondant à l'onde rétrograde. De la même façon, il est possible de faire apparaître le terme de raideur aérodynamique associé à l'onde rétrograde, noté  $\gamma_{a,retro}$  ainsi que le terme d'amortissement aérodynamique associé à l'onde directe, noté  $\beta_{a,ind}$  :

$$(\gamma - \gamma_{a,retro} - \omega^2\mu + j\omega(\beta + \beta_{a,retro}))\hat{q}_1 = \hat{f}_{ag,n}^f \quad (D.28)$$

avec

$$\gamma_{a,retro} = a^R + \omega b^I \quad (D.29)$$

$$\beta_{a,retro} = -b^R + a^I/\omega \quad (D.30)$$

Il est plus courant de travailler avec des coefficients d'amortissement modaux. On définit alors le coefficient d'amortissement aérodynamique modale associé à l'onde directe  $\xi_{a,dir}$  et le coefficient d'amortissement aérodynamique modale associé à l'onde rétrograde,  $\xi_{a,retro}$  :

$$\xi_{a,dir} = -\frac{\beta_{a,dir}}{2\mu\omega_i} \quad (D.31)$$

$$\xi_{a,retro} = \frac{\beta_{a,retro}}{2\mu\omega_i} \quad (D.32)$$

où  $\omega_i$  représente la pulsation propre du mode.

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. L. STAINIER

Professeur - Ecole centrale de Nantes - Institut de Recherche GeM - Dépt. MMGC  
1 rue de la Noé - 44321 Nantes cedex 3

et de

M. S. KHELLADI

Professeur - ENSAM - LIFSE - 151 boulevard de l'hôpital - 75013 Paris

**Monsieur BERTHELON Thomas**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 15 septembre 2020

P/Le directeur de l'E.C.L.  
Le directeur des Etudes

