

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Sciences de la Terre et des Planètes Solides

Présentée et soutenue par :

Mme AURELIE LOUIS-NAPOLEON

le jeudi 10 décembre 2020

Titre :

Modélisation d'instabilités gravitaires au sein de la croûte partiellement fondue par une méthode de Volume-Of-Fluid

---

Ecole doctorale :

Sciences de l'Univers de l'Environnement et de l'Espace (SDU2E)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur(s) de Thèse :

M. THOMAS BONOMETTI

MME MURIEL GERBAULT

M. OLIVIER VANDERHAEGHE

Rapporteurs :

Mme ANNE DAVAILLE, UNIVERSITE DE PARIS

M. PHILIPPE YAMATO, UNIVERSITE RENNES 1

Membre(s) du jury :

M. DOMINIQUE LEGENDRE, TOULOUSE INP, Président

M. CEDRIC THIEULOT, UNIVERSITEIT UTRECHT PAYS-BAS, Membre

M. GUILLAUME DUCLAUX, UNIVERSITE COTE D'AZUR, Membre

Mme MURIEL GERBAULT, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

M. OLIVIER VANDERHAEGHE, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

M. ROLAND MARTIN, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Invité

M. THOMAS BONOMETTI, TOULOUSE INP, Membre

Résumé

Les instabilités gravitaires au sein des racines orogéniques partiellement fondues peuvent être à l'origine du développement de dômes de migmatites. Non seulement ces dômes peuvent concentrer des matériaux d'intérêt économique, mais une meilleure compréhension de leur formation présente un intérêt fort dans la connaissance de l'évolution et de la différenciation de la croûte terrestre. Bien que les forces horizontales peuvent être impliquées dans la formation de dômes, l'objectif de cette thèse consistait à regarder uniquement l'influence des forces verticales en étudiant la convection et le diapirisme.

Pour cela, nous avions le choix entre deux codes, basés sur la méthode numérique de Volume-Of-Fluid (VOF) : JADIM (code de l'IMFT) et OpenFOAM (open-source). Nous avons dans un premier temps montré que la méthode VOF est adaptée à la modélisation des instabilités gravitaires en comparant les résultats obtenus avec i) ceux de la littérature concernant les instabilités de Rayleigh-Taylor et de Rayleigh-Bénard, ii) ceux donnés par le code de géodynamique ASPECT. Nous avons trouvé que JADIM et OpenFOAM fournissent des résultats en bon accord avec ceux de la littérature et conservent mieux la masse qu'ASPECT. Nous avons choisi OpenFOAM pour la suite de ce travail car il est plus rapide que JADIM.

Ensuite, nous avons appliqué la méthode VOF au contexte de formation des dômes de migmatites, en considérant plus particulièrement le cas de l'île de Naxos (Grèce). Ces dômes se sont formés entre 24 et 16 millions d'années et présentent une structure imbriquée de sous-dômes de 2 km dans un dôme majeur de 10 km. Des datations sur zircon ont montré que les roches ont subi une alternance de température d'une période de 2 Ma. Ces dômes sont intéressants car ils se sont formés récemment dans l'histoire de la Terre dans une zone orogénique, ils sont donc mieux préservés que les dômes plus anciens.

Nous avons cherché à montrer que ces structures peuvent résulter d'épisodes convectif et diapirique. Nous avons d'abord considéré la croûte chaude comme un système constitué de trois couches horizontales. Ce système ne permet pas de former des dômes imbriqués par convection et diapirisme. En effet, les dômes formés au cours de la simulation sont détruits par la convection.

Nous avons donc complexifié le système. Nous avons pris en compte le chauffage interne, la fusion partielle, la dépendance des rhéologies sur la température et le taux de déformation, et avons ajouté des hétérogénéités compositionnelles (inclusions). Tous ces éléments ont fait l'objet de tests paramétriques et nous permettent finalement de proposer deux scénarios pour expliquer la formation des dômes de Naxos : le premier fait émerger des diapirs composés d'inclusions au dessus de cellules convectives locales, formées lors de la ségrégation des inclusions lourdes et légères, tandis que le second scénario permet aux inclusions de s'élever pendant la disparition de la cellule convective globale pour former des dômes lors du refroidissement du système. Toutefois, ces scénarios n'excluent pas le rôle de forces latérales extérieures à la fin de l'orogène pour expliquer l'exhumation des dômes.

Plus généralement, nous avons trouvé que les caractéristiques des dômes (taille et homogénéité) sont déterminées par leur mode de formation (présence d'inclusions, de convection ...). L'analyse dimensionnelle des systèmes avec fusion partielle nous a permis de distinguer plusieurs régimes convectifs et de déterminer les paramètres nécessaires à la sédimentation (vers le haut et vers la bas) des inclusions lors d'une convection crustale.

Abstract

Gravity instabilities within partially molten orogenic roots may form migmatite domes. Not only can these domes concentrate materials of economic interest, but they also bring a better understanding of the evolution and differentiation of Earth's crust. Although horizontal forces can be involved in the formation of domes, the objective of this thesis was to look only at the influence of vertical forces by studying convection and diapirism.

We had at our disposal two numerical codes based on Volume-Of-Fluid methods (VOF) : JADIM (IMFT code) and OpenFOAM (open-source). We first showed that the VOF method is suitable for the modeling of gravity instabilities. Therefore we compared the results obtained with JADIM and OpenFOAM with i) theoretical, experimental and numerical results from the literature of Rayleigh-Taylor and Rayleigh-Bénard instabilities and with ii) the results of the geodynamic code ASPECT . We found that JADIM and OpenFOAM provide results in good agreement with those in the literature and conserve mass better than ASPECT. We chose OpenFOAM for the rest of this work because it is faster than JADIM.

Then, we applied the VOF method to the context of the migmatite domes from Naxos island (Greece). These domes were formed between 24 and 16 Ma and feature nested structures of 2 km sub-domes in a 10 km major dome. Zircon dating has shown that the rocks have undergone a temperature alternation with a 2 Ma period. These domes are interesting because they are recent and thus better preserved than older domes. We have tried to show that they can result from a combination of convective and diapiric episodes. We first considered the hot orogenic crust as a system made of 3 horizontal layers with temperature dependent viscosity. We showed that both in 2D and 3D, we cannot reproduce nested domes : the simulated domes are destroyed by convection when it appears.

Therefore we made the system more complex. We took into account internal heating and partial melting which allow to achieve low viscosities. In addition, we added the strain-rate dependency of the rheology, as well as compositional heterogeneities (inclusions). All these factors were subjected to parametric tests, which finally allow us to propose two scenarios explaining the formation of the Naxos domes. The first scenario takes into account a nonlinear rheology and heavy and light inclusions, making it possible to generate local convection : convection and diapirism are then simultaneous, and diapirs emerge above the convective cells. The second scenario takes into account partial melting, but the progressive cooling of the system is the key mechanism that allows light inclusions to rise and form domes. However, both these scenarios do not exclude the role of external lateral forces at the end of the orogen on the remaining exhumation. More generally, we have found that the characteristics of the domes (size and homogeneity) are determined by their mode of formation (presence of inclusions, convection ...) The dimensional analysis of systems with partial melting allows us to distinguish several convective regimes and to determine the parameters necessary for the sedimentation (upwards and downwards) of inclusions during crustal convection.

Remerciements

Tout d'abord, je souhaiterais adresser un grand merci à mes deux directeurs de thèse : Thomas Bonometti et Muriel Gerbault pour leurs conseils, leur disponibilité, leur rigueur et pour m'avoir laissée la liberté dont j'avais besoin. Je remercie Thomas pour sa gentillesse et son humour et Muriel, pour m'avoir expliqué un grand nombre de concepts obscurs de géodynamique et pour son investissement.

Un grand merci également au reste de l'équipe encadrante : Olivier Vanderhaeghe et Roland Martin. Merci à Olivier pour le temps passé à m'enseigner la géologie et à ses efforts pour essayer de se comprendre. Merci à Roland pour ses commentaires et corrections sur tous les rendus que j'ai pu produire.

J'adresse tous mes remerciements à Anne Davaille et Philippe Yamato qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Guillaume Duclaux et Dominique Legendre qui ont été à la fois membres du comité de thèse et membres du jury. Merci aussi à Cédric Thieulot pour avoir été membre du jury, pour sa participation à la première publication et enfin pour toute son aide avec le code ASPECT.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Annaïg Pedrono pour toute son aide avec le code JADIM et pour m'avoir embarquée dans l'aventure des hackathons. Merci également aux autres membres de l'équipe des hackathons : Mickaël Duval, Nicolas Renon de CALMIP et Maxime Pigou et Pierre Elyakime de l'IMFT.

Je tiens à remercier Raphaël Maurin, Matthieu Mercier, Laurent Lacaze de l'IMFT et Stéphanie Duchêne, Oscar Laurent, Stéphanie Duchêne, Anastassia Borisova, Etienne Ruellan, Michel de Saint-Blanquat, Michel Grégoire (et peut-être d'autres que j'aurais oubliés ...) du GET pour avoir assister à mes dernières répétitions et fait des retours très pertinents.

J'adresse mes remerciements à Sylvie Senny et à Muriel Boutic-Sabater. Sylvie, je te remercie pour ta disponibilité et ton accompagnement. Muriel, merci pour l'impression des thèses et des cartes de fin de thèse. Merci également à Jean-Dominique Barron pour son accompagnement dans la création d'un ADMF (Atelier de Mécanique des Fluides), ce qui m'a permis d'effleurer les instabilités de manière expérimentale.

Je remercie les membres du groupe FEP et de l'ancien groupe HEGIE de l'IMFT ainsi que de l'équipe TIL du GET pour tous les échanges que nous avons pu avoir. Merci à l'école doctorale SDU2E et à l'INPT pour leur accompagnement administratif.

Un énorme merci aux docteurs depuis un moment : Karim Adib, Loïc Chagot, David Raus, Clément Toupoint, Marc Maher, Guillaume Quibeuf, aux fraîchement docteurs : Marie Poulain et Johan Pinaud et à ceux qui le seront bientôt : Guillaume Mialhe et Mateus Carvalho, pour avoir créé une très bonne ambiance au labo, répondu à toutes "mes questions du midi" et avoir dévoilé d'autres facettes de vous. Merci aux stagiaires qui ont croisé la route de l'IMFT quelques mois : Jules, Rémi, Maxime, Sylvain, Alicia et qui m'ont fait prendre l'air via des

parties de volley, de badminton, de pétanque, de molky ou encore des randonnées (sans oublier la soirée karaoké). Merci à tous les nouveaux doctorants, pour les discussions, les parties de Tarot, le Père Noël surprise ... Merci à l'association Acadoc qui permet de se faire rencontrer des doctorants de laboratoires divers et variés et de créer des liens entre les gens.

Un gros merci à tous ceux dont l'amitié a commencé à une autre époque : Djamaa, pour me faire part de ton univers axé biologie, Matthias, pour notre concours du meilleur repas (j'ai gagné, non ?), Elodie, pour la découverte de ce chouette pays qu'est l'Allemagne, Valentine, pour la recherche du meilleur restaurant toulousain et enfin, T'Choupi (Antoine) pour m'apprendre régulièrement des expressions de la langue française et pour toutes nos discussions et balades avec Charlotte dans les Pyrénées ou dans la forêt de Fontainebleau.

Merci à mes cousines, Cécile et Sarah, pour toutes nos vacances passées ensemble à la découverte de l'Espagne ou de l'Aveyron ou devant des jeux de société dans le Tarn. Merci à mon frère pour tout son soutien et surtout son soutien informatique. Merci à mes grands-parents du Tarn : chez vous, c'est comme si le temps était figé, comme si on pouvait quelques jours ou quelques heures, mettre sa vie en pause et déconnecter vraiment. Merci à mes grands-parents de l'Ariège, pour qui les études ont toujours été importantes et qui m'ont toujours félicitée pour les avoir réussies. Merci à mes parents, pour leur soutien depuis toujours et leur encouragement : Merci à ma mère pour son anti-conformisme et à mon père pour sa curiosité.

Enfin, Merci Sacha, mon Loulou, nous avons vécu cette aventure ensemble et ce n'était que pour le meilleur.

Table des matières

Remerciements **I**

Introduction **1**

1 Contexte général **3**
1.1 Processus géologiques 4
1.2 Instabilités gravitaires : des processus physiques 21
1.3 Méthodes de validation des scénarios 30
1.4 Objectifs de la thèse 35

2 Validation des méthodes VOF **37**
2.1 3D modeling of crustal polydiapirs with VOF methods 39
2.2 Portage d'un code VOF initialement sur CPU vers de l'hybride CPU-GPU . . . 88
2.3 Couplage systèmes multi-couches et thermique appliqué à Naxos 90

3 Modélisation de la formation de dômes **95**
3.1 Introduction 96
3.2 Implémentation numérique 98
3.3 Fusion partielle seule 104
3.4 Inclusions seules 123
3.5 Association de la fusion partielle et des inclusions 143
3.6 Discussion 157
3.7 Conclusion du chapitre 3 174

Conclusion générale et perspectives **177**

Bibliographie **181**

Annexes **I**

Introduction

La croûte terrestre continentale est un système dynamique : une fois formée, sa composition et sa structure évoluent au cours des temps géologiques et comprendre son évolution est un enjeu majeur de la géodynamique terrestre. Parmi les processus en jeu dans la différenciation crustale, on trouve les instabilités gravitaires qui peuvent être responsables de la formation des dômes de migmatites.

Nous étudions dans cette thèse la formation de tels dômes par instabilités gravitaires dans une croûte orogénique chaude. Nous montrons, grâce à des simulations numériques, comment l'instabilité de Rayleigh-Taylor (diapirisme) et l'instabilité de Rayleigh-Bénard (convection) interagissent pour former des dômes et permettent d'expliquer le développement des dômes imbriqués de l'île de Naxos, notamment. Ces dômes constituent une application intéressante puisqu'ils se sont formés récemment (24-16 Ma) dans une croûte orogénique chaude. Ces dômes sont constitués d'un dôme majeur de 10 km et de sous-dômes de 2 km. De plus, l'analyse des zircons trouvés sur Naxos, fait apparaître une période de 2 Ma qui pourrait être caractéristique d'une convection.

Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre deux laboratoires : l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) et le laboratoire Géosciences Environnement Toulouse (GET) par le biais du projet MECACRUST. Ce projet visait à utiliser des méthodes numériques de Volume-Of-Fluid (VOF) développées en mécanique des fluides pour capturer et suivre correctement les interfaces de divers types d'écoulements fluides. Par ailleurs, les codes classiquement utilisés en géodynamique ne sont pas toujours précis quant à la conservation de la masse et la résolution des interfaces des hétérogénéités du milieu.

Le premier objectif de cette thèse consistait à valider l'utilisation de l'outil numérique VOF, en deux et trois dimensions (2D et 3D), pour modéliser les instabilités gravitaires dans une croûte chaude. Nous avons testé deux codes issus de la communauté physicienne et basés sur la méthode VOF : JADIM et OpenFOAM. Le deuxième objectif consistait à comprendre l'origine de la formation des dômes de migmatites par instabilités gravitaires et l'importance de différents processus tels qu'une rhéologie non linéaire, le chauffage interne, la fusion partielle ou encore la prise en compte d'hétérogénéités compositionnelles. La fusion partielle est simulée grâce à l'utilisation d'un seuil de température correspondant à un taux de fusion partielle spécifique. Ce seuil permet de transiter, à partir de caractéristiques de densité et de viscosité de roches non fondues, vers des caractéristiques de roches partiellement fondues. Une application au développement des dômes de Naxos est réalisée.

Les résultats permettront d'éclairer les processus responsables de l'évolution et de la différenciation de la croûte terrestre mais aussi d'étendre le champ d'outils numériques disponibles à la communauté géophysicienne. Par exemple, la distinction entre différents régimes convectifs dans une croûte en fusion partielle ainsi que le comportement des hétérogénéités dans un croûte chaude seront établis. L'idée étant de montrer, selon les paramètres utilisés, comment former des dômes en présence d'une convection crustale. Nous montrerons l'importance de la prise en compte des hétérogénéités à la sous échelle dans la formation des dômes.

Le manuscrit se compose de 3 chapitres. Le premier chapitre situe le sujet dans des contextes i) géologique, en décrivant notamment le cas des dômes des Naxos, ii) physique, en décrivant les instabilités gravitaires, iii) numérique, en explicitant le choix de la méthode utilisée. Le second chapitre présente les codes utilisés ainsi que la validation de ces codes sur des cas de mécanique des fluides similaires à des processus observés en géodynamique. Une application basique au cas des dômes de Naxos est également développée. Dans le dernier chapitre, nous validons le scénario envisagé pour le développement des sous dômes de Naxos en conciliant les résultats numériques, provenant d'un système tenant compte de la fusion partielle et d'hétérogénéités compositionnelles, avec les données provenant du terrain. De plus, nous généralisons les résultats obtenus à la formation de dômes dans un contexte de convection crustale.

Chapitre 1

Contexte général

Sommaire

1.1 Processus géologiques 4
1.1.1 Évolution d'une chaîne de montagne 4
1.1.2 La formation des dômes de migmatites 7
1.1.3 Fusion partielle : genèse et caractéristiques 8
1.1.4 Cas d'application : les dômes de Naxos (Grèce) 15
1.2 Instabilités gravitaires : des processus physiques 21
1.2.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard 21
1.2.2 Instabilité de Rayleigh-Taylor 27
1.2.3 Comment différencier convection et diapirisme ? 30
1.3 Méthodes de validation des scénarios 30
1.3.1 Modélisation analogique 31
1.3.2 Modélisation numérique 33
1.4 Objectifs de la thèse 35

1.1 Processus géologiques

1.1.1 Évolution d'une chaîne de montagne

La Terre est constituée d'enveloppes de composition différentes (Preliminary Reference Earth Model, PREM Dziewonski et Anderson [1981]) : un noyau, un manteau et une croûte. La lithosphère continentale correspond à la partie supérieure de la Terre et est constituée de la croûte (30 à 70 km d'épaisseur) et d'une partie du manteau supérieur (manteau lithosphérique situé de 30 à 120 km). Croûte et manteau sont séparés par la discontinuité de Mohorovic (Moho) (figure 1.1) qui constitue la base de la croûte et qui marque une transition physico-chimique entre les roches granitiques ou basaltiques de la croûte et les péridotites du manteau. La densité de la croûte est plus faible que celle du manteau et se situe entre 2650 et 3100 $kg.m^{-3}$. La lithosphère surmonte l'asthénosphère qui correspond à une zone de faible viscosité dans le manteau. Le manteau supérieur est donc divisé en un manteau lithosphérique (plus rigide) et asthénosphérique (plus ductile). Il existe quatre sources de chaleur au sein de la Terre : la plus importante provient de la désintégration des éléments radioactifs, on trouve ensuite la chaleur liée à l'accrétion (constitution et accroissement) de la planète, puis celle due à la solidification de l'enveloppe externe du noyau, et enfin, celle liée à la compression gravitationnelle.

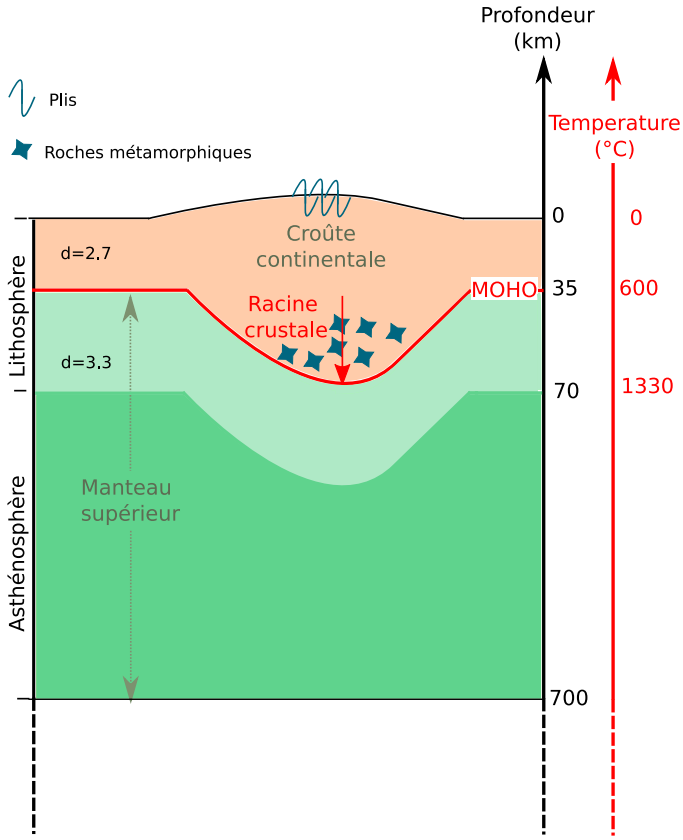


FIGURE 1.1 – Schéma de la structure interne supérieure de la Terre, la zone verte représente une partie du manteau supérieur, la zone orange matérialise la croûte (moins dense que le manteau). Le symbole "d" correspond à la valeur de la densité. Le Moho (discontinuité de Mohorovic) est défini comme une transition physico-chimique entre les roches du manteau et de la croûte. Les roches métamorphiques (✦) localisent la zone de fusion partielle.

La théorie de la tectonique des plaques, qui a été acceptée dans les années 70, indique que la lithosphère (croûte et manteau lithosphérique) est découpée en une dizaine de plaques rigides [Isacks et al., 1968; Le Pichon, 1968; Morgan, 1968] qui bougent les unes par rapport aux

autres et coulissent sur l'asthénosphère. Les mouvements des plaques résultent de la combinaison des mouvements induits par les cellules de convection du manteau et les contraintes exercées aux limites de ces plaques rigides entre elles [Forsyth et Uyeda, 1975]. La convection dans le manteau permet de transférer la chaleur du noyau de la Terre vers sa surface. Aujourd'hui, on cherche encore à interpréter les données de tomographie sismiques à travers les enveloppes terrestres et les caractéristiques spatiales et temporelles de cette convection [Coltice et al., 2018]. Les plaques se forment au niveau des rides océaniques et voient leur densité augmenter avec leur âge en s'en écartant, ce qui induit leur subduction dans l'asthénosphère [Forsyth et Uyeda, 1975].

Les plaques peuvent s'écarter, glisser ou entrer en collision les unes par rapport aux autres. La collision de deux plaques continentales aboutit à la formation d'une chaîne de montagne (orogène). Cette chaîne de montagne est autant un relief en surface qu'un "relief en profondeur". En effet, la chaîne de montagne répond au principe d'isostasie [Turcotte et Schubert, 1982]. Ce principe décrit l'équilibre gravitaire de sections verticales lithosphériques entre elles : au-dessus d'une certaine profondeur, appelée niveau de compensation, ces sections verticales doivent avoir le même poids quelque soit le relief. La pression P à une profondeur donnée h, est donc souvent considérée comme le poids de la colonne de roches au dessus et vaut donc $P = \rho g h$ avec ρ, la densité des roches et g, l'accélération de la gravité. Une chaîne de montagne en formation subit sur une colonne verticale donnée de l'ajout de matière crustale en surface et en profondeur, et puisque les roches de la croûte sont moins denses que celles du manteau, la masse totale de roches du manteau est diminuée tandis que celle de la croûte est augmentée. On forme ainsi la racine crustale de la chaîne de montagne. Par isostasie, on évalue que la racine crustale est environ 5 fois plus épaisse que le relief en surface.

Une chaîne de montagne a une évolution lente ($\sim 50 - 70\ Ma$ pour la chaîne Alpine par exemple), constituée de différentes étapes présentées de façon shématique sur la figure 1.2. D'abord, les plaques entrent en collision sous l'action de forces compressives (A), ce qui conduit à un épaississement de la croûte et à un réchauffement par augmentation des éléments radioactifs. La plaque lithosphérique, résistante peut se détacher (délamination) ou se retirer, ce qui conduit à une remontée d'asthénosphère chaude et donc à une augmentation de la température en base de croûte (B). Cette augmentation de la température peut conduire à la fusion partielle de la croûte et à la formation de migmatites. Les migmatites sont des roches moins denses et moins visqueuses que les roches dont elles sont issues et qui se déforment facilement.

En surface, le relief s'érode (C), la masse de roches crustales diminue, la croûte se désépaissit, ce qui peut entraîner l'exhumation de la racine crustale. Le géotherme s'ajuste en fonction de l'épaisseur de la croûte et de la température basale. Finalement, les migmatites s'affaissent sous le poids des roches situées en surface (la croûte flue) et le système s'effondre sur lui même (D) ce qui conduit à l'amincissement ou l'extension de la croûte. Ce scénario schématique est corroboré par plusieurs modèles numériques, comme par exemple par Sizova et al. [2019] qui évaluent la trajectoire pression-température des roches d'une racine crustale lorsqu'une plaque plongeante se détache (break-off) ou se retire (roll-back) (figure 1.3).

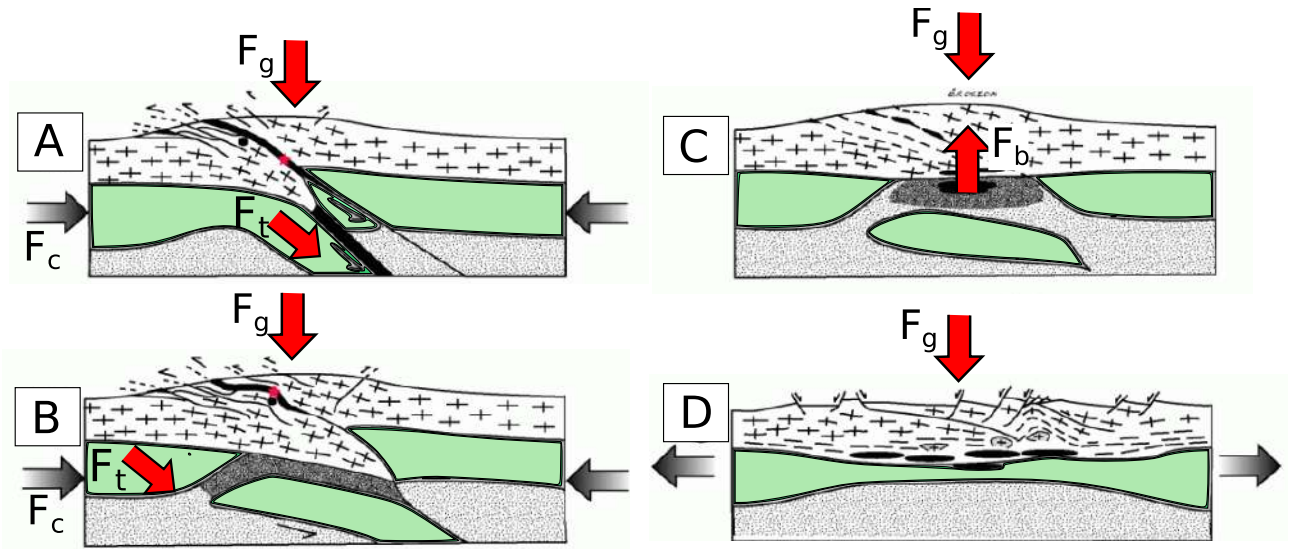


FIGURE 1.2 – Évolution d'une chaîne de montagne, modifié à partir de [NICOLLET, 2017; VANDERHAEGHE, 2012] avec F_c et F_t, forces tectoniques, F_b, forces de flottabilité et F_g, forces gravitaires.

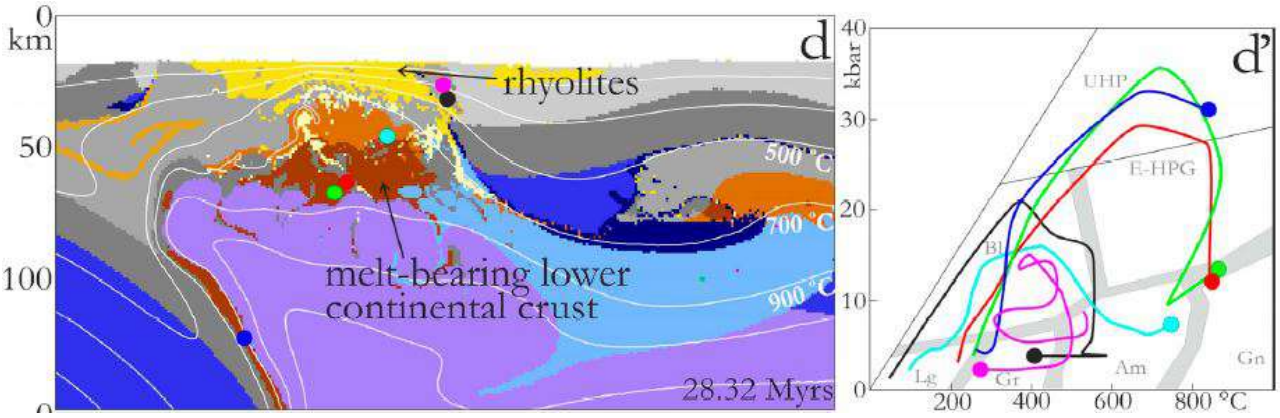


FIGURE 1.3 – Cliché (à gauche) de modélisation numérique réalisée par SIZOVA et al. [2019] d'une plaque plongeante qui se détache et le diagramme pression-température associé à certaines roches crustales (à droite). On observe une remontée du manteau asthénosphérique sous la croûte (en violet) et l'exhumation verticale d'une partie de la croûte (en gris et orange)

La déformation de la croûte continentale dans les zones de convergence lithosphérique est le résultat (voir Fig. 1.2) :

— des forces tectoniques appliquées aux bords (compression horizontale F_c et traction basale F_t)

— des forces de flottabilité dues à la génération de roches fondues moins denses (F_b)

— des forces gravitaires dérivées des variations latérales de l'épaisseur de la croûte (F_g)

L'évolution thermique de la croûte est contrôlée par (e.g. VANDERHAEGHE [2009]) :

— la production de chaleur due à la désintégration radioactive et à la déformation

— l'advection de chaleur associée au déplacement des plaques et des roches

— la conduction de la chaleur provenant du manteau

1.1.2 La formation des dômes de migmatites

La croûte continentale n'est pas un système inerte : une fois formée, sa composition et sa structure évoluent au cours des temps géologiques. Comprendre son évolution est un enjeu majeur de la géodynamique terrestre, notamment de la différentiation progressive des différentes couches qui la composent.

La différenciation de la croûte continentale correspond à l'ensemble des processus qui aboutissent à la redistribution des éléments chimiques (notamment ceux d'intérêt économique) et à la redistribution de chaleur (grâce au mouvement des éléments producteurs de chaleur). On peut y voir son origine lors de la collision de plaques tectoniques entre elles, qui permet l'enfouissement de roches en profondeur à haute température. Ces roches entrent alors en fusion partielle et deviennent moins denses et moins visqueuses. Ensuite, grâce à des processus encore débattus (résultats de forces tectoniques, gravitaires ou de flottabilité)[Brun et al., 1981; Whitney et al., 2004b; Yin, 2004], ces roches, appelées migmatites, sont exhumées et refroidissent [Thompson et Connolly, 1995] (ce processus sera détaillé dans la section suivante). On les trouve alors à la surface parfois sous forme de dômes. Ces dômes sont des marqueurs de l'histoire de la croûte profonde et comprendre leur formation équivaut à connaître les évènements thermiques et tectoniques ayant eu lieu par le passé dans la croûte. L'interprétation de ces dômes migmatitiques est donc essentielle à celle des processus de différentiation crustale.

Les processus expliquant la formation des dômes de migmatites sont divers, parmi lesquels :

— Les interférences de plis (figure 1.4A) : les roches sont soumises à des forces compressives et se déforment (forces tectoniques).

— Les instabilités gravitaires : diapirisme (instabilités de Rayleigh-Taylor) ou convection (instabilités de Rayleigh-Bénard) (figure 1.4B-C) (forces de flottabilité) [Gerya et al., 2008, 2000; Platt, 1993; Weinberg et Podladchikov, 1995]

— Compensation isostatique en régime d'extension ou compression (figure 1.4D-E) : la croûte s'étire et des roches peu visqueuses remontent (forces gravitaires)

Les dômes de migmatites sont souvent interprétés comme étant le résultat d'instabilités gravitaires [Whitney et al., 2004b] : convection ou diapirisme. Le développement de ces deux régimes est encore débattu pour le domaine crustal [Whitney et al., 2004b]. Dans le manteau, au contraire, ces régimes ont été bien étudiés sur une large gamme de paramètres depuis un siècle [Bercovici, 2010].

La convection a tendance à homogénéiser le système tandis que le diapirisme sépare le système en plusieurs couches. Ainsi, la détermination précise des paramètres conduisant au diapirisme ou à la convection dans un contexte crustal est important pour comprendre l'évolution dynamique et thermique des orogènes. Ces mécanismes seront décrits plus en détail dans ce chapitre. Ces processus sont sensibles à la fusion partielle qui a un fort effet sur la densité et la viscosité de la croûte. Cette fusion dépend de la quantité de chaleur présente et

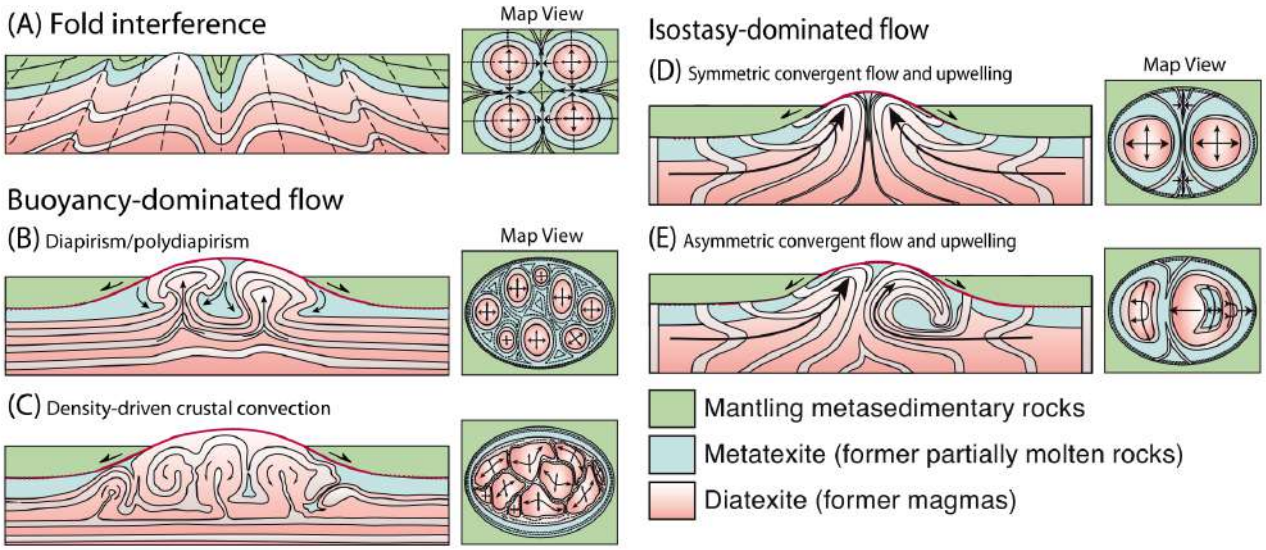


FIGURE 1.4 – Scénarios de la formation des dômes de gneiss, (A) plissement de la croûte par compression latérale ; (B) polydiapirisme (nota : ce terme est défini dans la section d)) ; (C) convection crustale ; (D) convergence symétrique ; (E) convergence asymétrique. [KRUCKENBERG et al., 2011]

donc des sources de chaleur potentielles au sein de la croûte.

1.1.3 Fusion partielle : genèse et caractéristiques

a) Gradient thermique et sources de chaleur au sein de la croûte

La figure 1.5 présente le diagramme pression-température de la croûte continentale. On distingue 3 zones : une zone solide (A), une zone de roches partiellement fondues (B) et une zone liquide (C). La croûte commence à fondre autour de 630^{o}C en profondeur (courbe du solidus) et devient presque entièrement fondue (car il subside toujours des cristaux solides) à partir de 1100^{o}C (courbe du liquidus). Les gneiss sont des roches métamorphiques ayant subi une forte pression et présentant une foliation des minéraux. Ce sont des témoins d'une déformation plastique de la roche. Les migmatites sont des roches métamorphiques présentant un taux significatif de fusion partielle. Parmi elles, on distingue les métatexites dont la rhéologie est proche d'une roche métamorphique non fondue et les diatexites dont la rhéologie est proche d'un roche métamorphique très fondue.

La croûte est réchauffée de manière conductive par un flux de chaleur provenant du manteau et par les éléments radioactifs qui se désintègrent à l'intérieur de celle-ci. La concentration d'éléments radioactifs est souvent décrite comme décroissante avec la profondeur dans la croûte, en moyenne de façon exponentielle [TURCOTTE et SCHUBERT, 1982]. Le géotherme de la croûte continentale s'écrit alors :

$$T(y) = T_0 + \frac{q_m y}{k} + \frac{\rho H_r h_r^2 (1 - e^{-y/h_r})}{k}, \tag{1.1}$$

avec y, la distance par rapport à la surface en valeur positive (en m), T_0, la température en

surface (en K), q_m, le flux de chaleur provenant du manteau (en $W.m^{-2}$), k, le coefficient de conductivité thermique (en $W.m^{-1}.K^{-1}$), H_r, le taux de production de chaleur radioactive (en $W.kg^{-1}$) et h_r, l'échelle de longueur de la désintégration des éléments (en m). Les valeurs standard pour la relation (1.1) sont données par [Turcotte et Schubert, 1982] :

— $17 \times 10^{-3} \leq q_m \leq 33 \times 10^{-3}\ W.m^{-2}$

— $0.32 \times 10^{-10} \leq H_r \leq 9.6 \times 10^{-10}\ W.kg^{-1}$

— $0 \leq h_r \leq 20\ km$

D'autres études argumentent de niveaux de production de chaleur radioactive par couches plutôt que par décroissance exponentielle [Perry et al., 2006], et c'est l'hypothèse que nous ferons dans ce travail.

Le géotherme 1 de la figure 1.5 correspond à une croûte standard, d'épaisseur 35 km, avec $T_0 = 273\ K$, $q_m = 17 \times 10^{-3}\ W.m^{-2}$, $k = 2.7\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $H_0 = 5 \times 10^{-10}\ W.kg^{-1}$, $h_r = 35\ km$ [Turcotte et Schubert, 1982]. On voit que dans cette configuration, à -35 km, la température n'atteint pas la température du solidus. Cela signifie qu'une croûte classique est une croûte solide dans le sens où elle ne fond pas. Toutefois, on voit qu'une remontée des isothermes (géothermes 2 et 3) suffirait à faire entrer la croûte en fusion partielle.

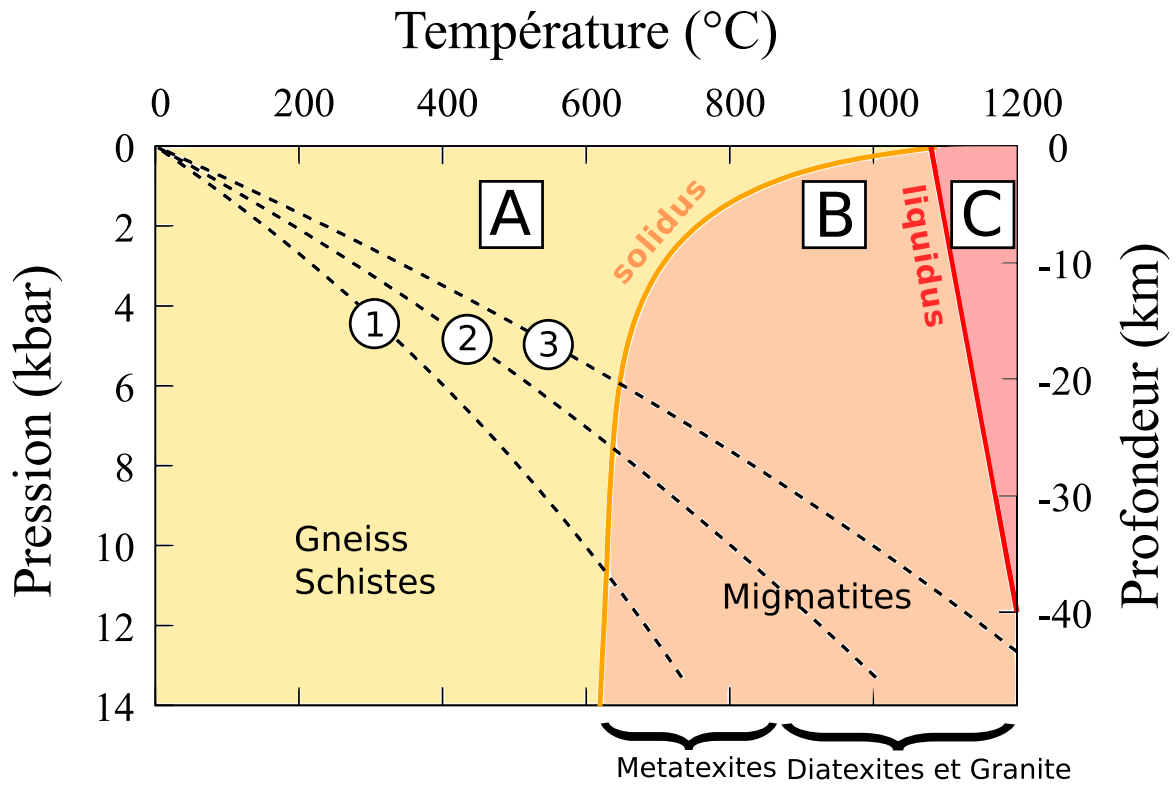


Figure 1.5 – Diagramme Pression-Température de la croûte terrestre. Les couleurs représentent les différentes zones de roches : A, solides ; B, partiellement fondues ; C, liquides. Type de géotherme : 1, standard ; 2 et 3, chaud [Hopkins et al., 2008].

Cette augmentation du géotherme peut être obtenue par différents moyens dans les zones orogéniques [Babeyko et al., 2002; Brown, 1995; Brun, 1981; England et Thompson, 1984; Thompson, 1999; Thompson et Connolly, 1995; Vigneresse et Clemens, 2000] :

L'échauffement dû à la déformation : La déformation cisaillante s'accompagne de production de chaleur [Fleitout et Froidevaux, 1980; Molnar et England, 1990; Whittington et al., 2009].

L'épaississement crustal : Une conséquence de l'épaississement de la croûte est l'augmentation de la production de chaleur par les éléments radioactifs du fait de leur concentration élevée dans la croûte et donc un chauffage interne plus important [Clark et al., 2011; England et Thompson, 1986a; Gerbault et al., 2018; Thompson et Connolly, 1995]. En particulier, Thompson et Connolly [1995] ont étudié l'évolution pression-température des migmatites dans un contexte post-épaississement (voir figure 1.6). Ils observent que toutes les roches situées en profondeur traversent la courbe du solidus. Les migmatites exhumées entre -10 et -20 km indiquent qu'elles se sont trouvées à des températures plus chaudes que celles présentées dans un géotherme classique de croûte orogénique chaude. Cela signifie qu'il y a eu un processus supplémentaire qui a fait remonter ces roches (tectonique, mouvements verticaux ...).

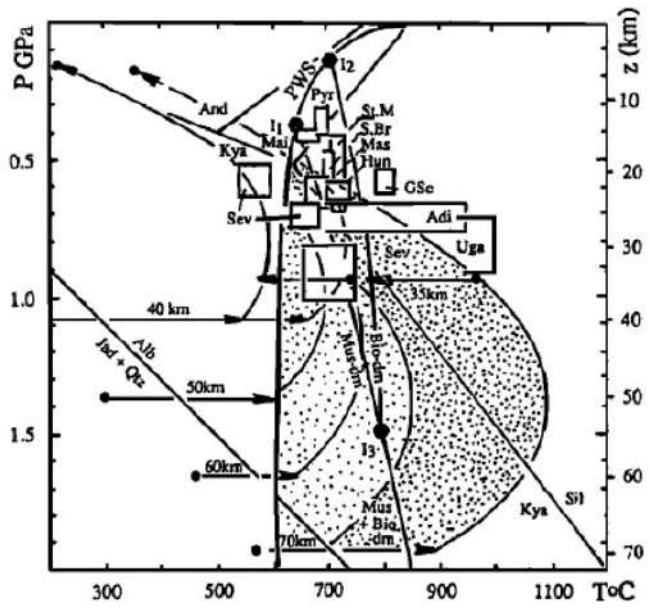


FIGURE 1.6 – Diagramme pression-température des migmatites [Thompson et Connolly, 1995] dans un contexte post-épaississement. L'équation de la chaleur 1D est résolue. Le géotherme initial correspond à un géotherme post-épaississement, la température augmente par relaxation thermique. L'épaississement se maintient pendant 20 Ma puis l'érosion se produit pendant 20 Ma jusqu'à ce que la croûte retrouve son épaisseur initiale.

Si l'épaisseur de la croûte est augmentée par chevauchement, une source de chaleur supplémentaire provient de la base de la croûte chevauchante (au sommet de la plaque chevauchée).

Intrusions et accrétion magmatiques : Du magma peut se former par fusion partielle du manteau au dessus de la plaque plongeante et remonter au travers du manteau pour atteindre finalement la croûte et s'arrêter à plus ou moins grande profondeur (soit à la base, soit plus haut). La température du magma se trouve entre 800 et 1200^o C environ [Babeyko et al., 2002; Cao et al., 2016; Gerya et Burg, 2007]. La majorité des modèles décrivant la convection dans la croûte invoque ce mode de chauffage à sa base [Babeyko et al., 2002; Bittner et Schmeling, 1995; Cao et al., 2016; Riel et al., 2016; Solano et al., 2012].

Un flux de chaleur plus important provenant du manteau : Une remontée d'asthénosphère soit en base de croûte soit en base d'un manteau supérieur aminci conduit à un flux de chaleur plus important en base de croûte. En effet, l'asthénosphère a une température de l'ordre de 1300^o C. Cette remontée d'asthénosphère peut être due soit à une délamination, c'est-à-dire à une partie de la plaque plongeante qui a coulé dans l'asthénosphère (car elle est plus froide et lourde), soit au retrait de la plaque plongeante (figure 1.2C) [Babeyko et al., 2002; Bittner et Schmeling, 1995; Faccenda et al., 2008; Schenker et al., 2012; Sizova et al., 2019; Vanderhaeghe, 2012].

Parmi ces différentes sources de chaleur, celles qui permettent à la croûte d'atteindre les conditions de fusion partielle et donc potentiellement de convecter à l'échelle du kilomètre ou de la dizaine de kilomètres sont les intrusions magmatiques, un flux de chaleur basal plus important ou encore l'épaississement crustal.

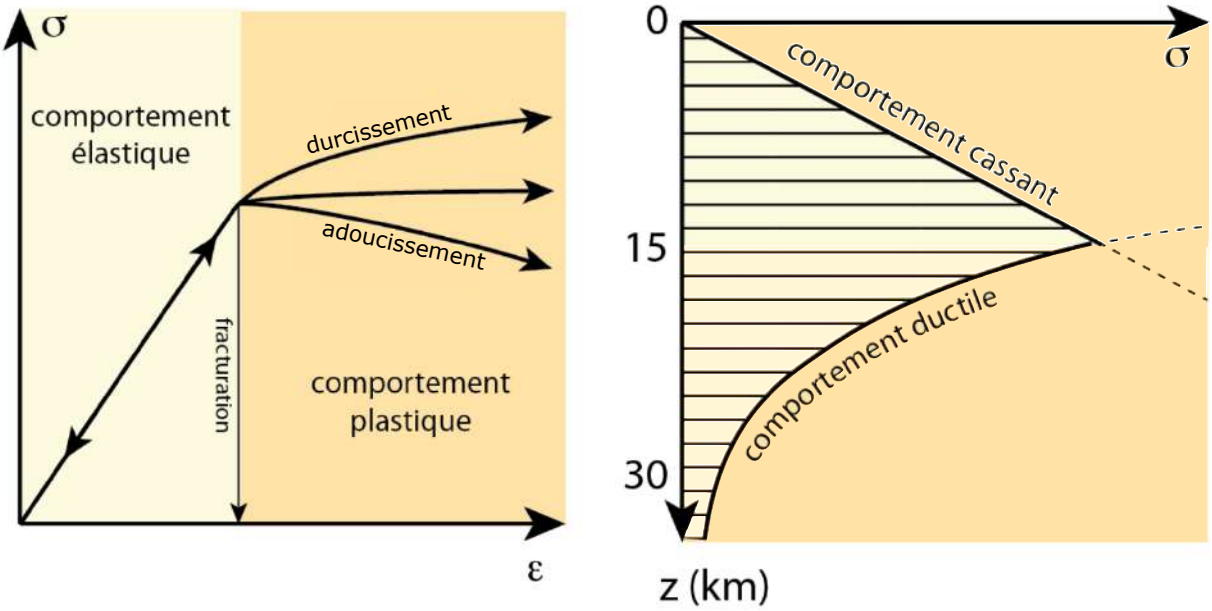
b) Rhéologie et densité des roches crustales en fusion partielle

Loi de comportement générique des roches de la croûte sans fusion partielle

Les roches crustales ont un comportement élastique (figure 1.7, zone jaune) dans une gamme de température (T), pression (P) et contrainte (σ) appliquées modérées ($P < 4$ $kbar$ et $T < 400^o$C). Le comportement élastique est réversible : une fois la contrainte retirée, la roche revient à son état initial. La déformation a lieu par distorsion du réseau cristallin. Cela permet notamment la propagation des ondes sismiques, qui sont de très petites déformations élastiques transmises de proche en proche.

A l'échelle du laboratoire, au dessus d'un certain seuil de contrainte, le comportement devient plastique (figure 1.7, zone orange). Ce comportement est irréversible, une partie de la déformation perdure même après le retrait de la contrainte. On distingue alors deux comportements : le comportement cassant et le comportement ductile [Byerlee, 1978; Hirth et Kohlstedt, 1995; Kirby, 1985; Kohlstedt et al., 1995; Ranalli, 1995]. Un comportement cassant signifie que la rupture survient rapidement après la déformation plastique. Au contraire, dans le comportement ductile, les roches subissent de grandes déformations plastiques avant la rupture. Ces deux types de comportement dépendent de la température, et donc de la profondeur. Dans la croûte supérieure, les roches se déforment par rupture cassante quand la contrainte dépasse un seuil [Byerlee, 1978]. Dans la croûte inférieure (figure 1.7b), les roches se déforment de manière ductile car la température y est suffisante pour y activer des déformations plastiques, soit par dislocation dans le réseau cristallin, soit par diffusion atomique entre les grains minéraux [Evans et Kohlstedt, 1995; Ranalli, 1995]. Les zones respectives de ces comportements diffèrent selon la nature de la roche.

On montre expérimentalement que le taux de déformation des roches augmente avec la température. On observe aussi que les roches se déforment environ 8 fois plus vite quand on double la contrainte appliquée : la relation taux de déformation ϵ - contrainte appliquée σ est donc non-linéaire. On peut définir une viscosité équivalente des roches dans le cas d'une



(a) contraintes σ vs déformation ϵ (b) profondeur z (température) vs contrainte σ

FIGURE 1.7 – Représentations schématiques du comportement des roches sous l'effet d'une contrainte. En jaune : comportement élastique. En orange : comportement plastique (modifié à partir de CALAIS [2020]).

Rock/mineral	A $MPa^{-n}s^{-1}$	n	Q $kJ.mol^{-1}$
Wet quartzite	10^{-4}	2.4	160
Wet granite	$2 \cdot 10^{-4}$	1.9	140
Wet olivine	$4.8 \cdot 10^{6}$	3.5	515

TABLEAU 1.1 – Exemples de valeurs typiques des paramètres de la loi rhéologique (1.2) pour différentes roches [BUROV et al., 2003].

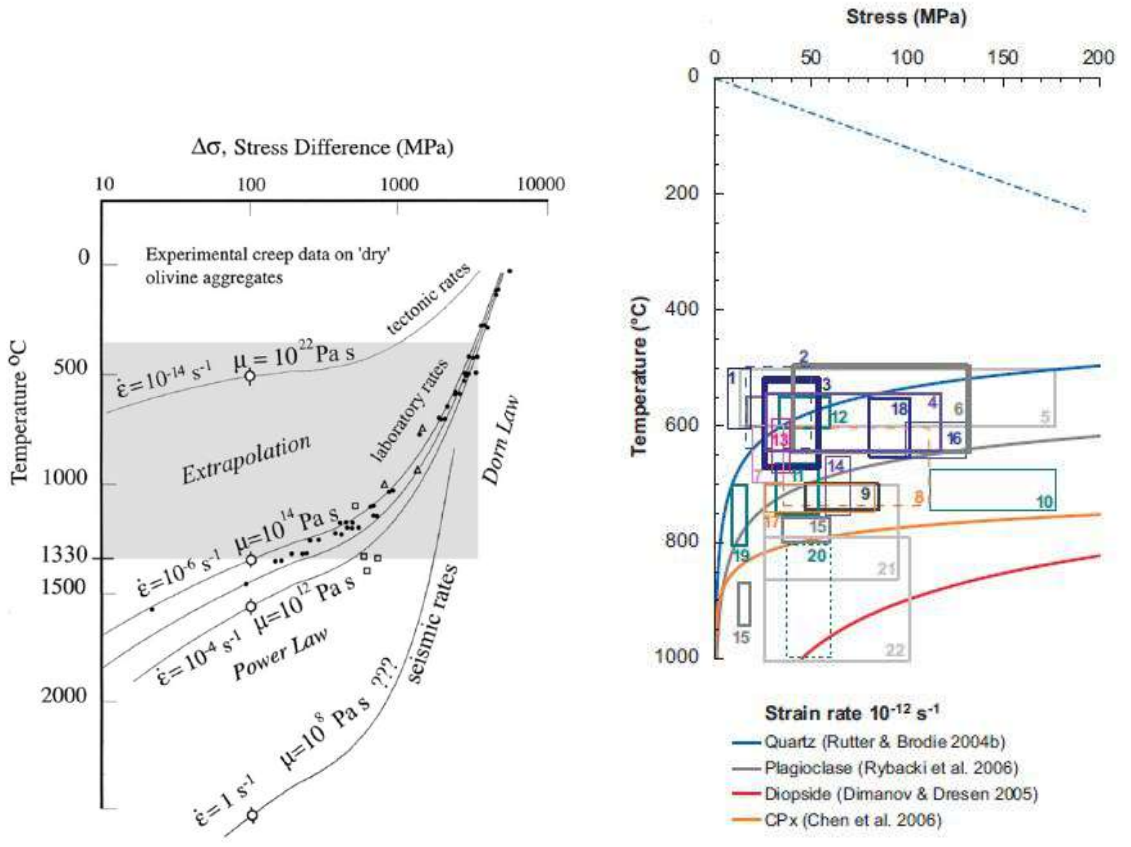
déformation ductile [CARTER et TSENN, 1987; KIRBY, 1985] :

$$\mu = \frac{\sigma}{2\epsilon} = \frac{1}{2} A^{-\frac{1}{n}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{n}-1} \cdot exp\left(\frac{Q}{nRT}\right) \tag{1.2}$$

où A est la constante du matériau en $Pa^{-n}.s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = \sqrt{\left(tr(\epsilon^2) - tr^2(\epsilon)/3\right)/2}$ est le second invariant du tenseur taux de déformation $\epsilon = (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)/2$ en s^{-1}, Q est l'énergie d'activation en $J.mol^{-1}$, n est le facteur exponentiel, R est la constante des gaz parfaits ($R = 8.314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$). Notons que A, Q et n dépendent du type de roche. Le tableau 1.1 présente quelques valeurs caractéristiques de roches de la croûte et du manteau. La viscosité des roches à hautes pression et température, dépend donc de la température, du taux de déformation et du type de roches.

La rhéologie des roches de la croûte et du manteau est étudiée expérimentalement : les matériaux sont soumis à de fortes pression et température et leur mode de déformation est étudié. L'un des minéraux les plus étudiés est l'olivine, qu'on trouve en quantité dans le manteau supérieur. Son diagramme expérimental résistance-température est présenté figure 1.8a. Le

diagramme des roches principales de la croûte est présenté 1.8b. Cependant, ces diagrammes ne sont pas forcement représentatifs du comportement réel des roches. En effet, la vitesse de déformation est plus grande en laboratoire ($\dot{\epsilon} \sim 10^{-4} - 10^{-6}\ s^{-1}$) qu'en réalité ($\dot{\epsilon} \sim 10^{-14} - 10^{-17}\ s^{-1}$) (e.g. papier de synthèse de Burov [2011]). Les échelles de temps sont donc extrapolées, car il est aussi difficile d'atteindre les conditions de pression et de température rencontrées sur Terre. De plus, les expériences sont souvent réalisées sur un minéral et pas sur une roche composée de différents minéraux. Enfin, lorsqu'elles concernent les roches, la taille de l'échantillon étant celle d'un sucre de cuisine, il est difficile de rendre compte de l'hétérogénéité du milieu. On ne peut donc qu'avoir une approximation de la viscosité de la croûte. La loi (1.2) représente la viscosité de la roche sans fusion partielle. Cette loi fonctionne la plupart du temps bien à grande échelle mais elle ne capte pas tous les comportements. Le comportement d'une roche est la somme des comportements élastique, plastique et ductile. Cependant, selon la pression et la température, l'un de ces comportements domine. Dans le cadre de ce travail, le comportement dominant est supposé être le comportement ductile, les roches seront donc considérées comme des fluides visqueux ayant une viscosité effective du type (1.2).



(a) (b)

Figure 1.8 – Exemple de données expérimentales sur des roches au comportement visqueux pour différents domaines de température-résistance : (a) olivine [Burov, 2011], (b) autres roches de la croûte [Bürgmann et Dresen, 2008].

Loi de comportement générique de la croûte en fusion partielle

Concernant la fusion partielle, les roches crustales sont un mélange de solide et de liquide, avec des minéraux qui ne se comportent ni ne fondent tous de la même manière, ce qui rend la détermination d'une rhéologie moyenne complexe.

La figure 1.9 présente l'évolution de la viscosité, de la résistance et de la densité des roches partiellement fondues dans la croûte, en fonction de la fraction de liquide dans le milieu, appelée fraction de melt (M). Les viscosités et densités à un taux de melt donné dépendent donc fortement de la composition de la croûte. La densité des roches à l'état solide se situent entre 2650 et 2780 $kg.m^{-3}$ et celles à l'état liquide entre 2400 et 2700 $kg.m^{-3}$. L'ordre de grandeur de la viscosité est de 10^{19} $Pa.s$ à 10^{5} $Pa.s$ pour les roches à l'état solide jusque liquide. Cette variabilité est énorme, mais en effet, les roches les plus mafiques (roches riches en fer et en magnésium ayant un faible taux de silice que l'on trouve par exemple dans le manteau) produisent des magmas volatiles, très peu visqueux et peu denses alors que les roches felsiques (roches ayant un fort taux de silice) de la croûte ont tendance à produire des magmas plus visqueux d'environ 10 ordres de grandeur.

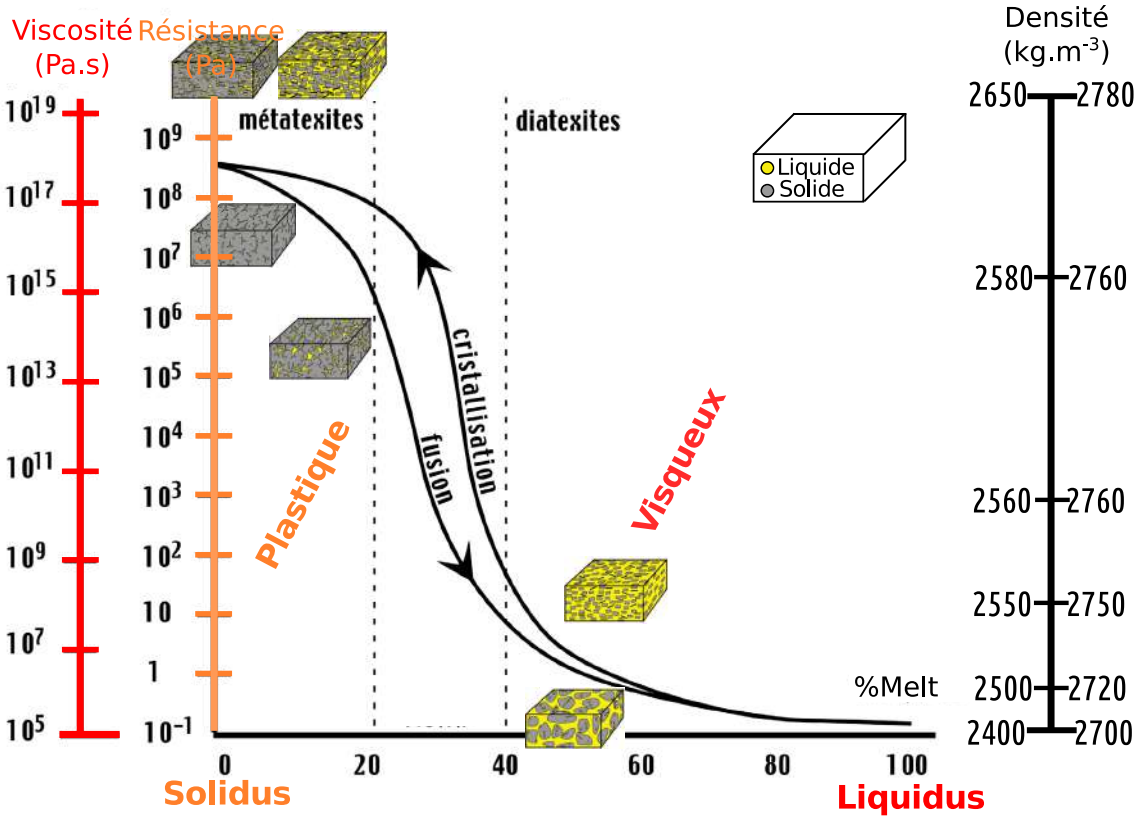


FIGURE 1.9 – Viscosité effective, résistance et densité des roches partiellement fondues en fonction de la fraction de melt (modifié à partir de BARRAUD [2001], d'après VANDERHAEGHE [2009]; VANDERHAEGHE et TEYSSIER [2001]). Le seuil de déconnexion du solide se situe entre 20 et 40 %. Il délimite l'endroit où la roche a un comportement plastique, celle-ci étant constituée par les roches solides (métatexites) avec un début de formation de liquide et l'endroit où elle a un comportement visqueux, constituée par le liquide avec des roches solides (diatexites) qui nagent dans le liquide.

La figure 1.9 montre que l'évolution de la viscosité n'est pas symétrique entre le cas où la température augmente (les roches entrent en fusion partielle) et le cas où la température diminue (cristallisation fractionnée). Ces parcours ne sont pas réversibles dans le sens où une roche ayant subi de la fusion partielle puis de la cristallisation fractionnée ne retourne pas dans son état d'avant fusion partielle. Le parcours de fusion partielle montre que les roches commencent à fondre à la température du solidus ($T_{sol} \sim 600^oC$) où du liquide commence à se former à l'intérieur de la matrice solide ($M > 0$).

Cette description de la fusion partielle est également formalisée par un certain nombre d'auteurs s'intéressant à la propagation d'ondes de porosité (les pores sont en fait des poches de melt), d'abord par McKenzie [1984], puis par Connolly et Podladchikov [1998, 2015]; Rabinowicz et al. [2001]; Stevenson [1986]. Ces travaux permettent d'évaluer des tailles et des temps caractéristiques de formation, de propagation et de ségrégation de ces poches de melt, dans le manteau pour les magmas mantelliques ($M < 1\%$), et dans la croûte pour les magmas plutôt felsiques ($M < 7\%$). L'échelle est généralement celle du grain, c'est-à-dire inférieure au millimètre. Des veines de liquide commencent à se former et le liquide ségrège par percolation. En augmentant la température, on atteint un second seuil lorsque $5 < M < 10\%$ [Arzi, 1978; Rosenberg et Handy, 2005; Vanderhaeghe, 2009; Vigneresse, 2006] qui représente le seuil de connexion du liquide. Plus on chauffe et plus les poches de liquide grossissent et finissent pas se connecter les unes aux autres. Les veines coalescent pour former un réseau de veines, c'est la migration du liquide. L'échelle est celle de plusieurs grains et donc de l'ordre du centimètre et du mètre. On atteint ensuite un troisième seuil entre $10 < M < 40\%$ qui représente le seuil de déconnexion du solide. Le liquide devient majoritaire, les parties solides se déconnectent et flottent dans le milieu. Ces parties solides peuvent couler si elles sont plus denses. Le comportement des roches devient de moins en moins visqueux et la majorité de la résistance est perdue.

Les liquides étant moins denses que la phase solide, ils migrent verticalement tandis que la fraction solide coule et s'accumule en base de croûte. Les poches de melt peuvent ensuite s'élever par flottabilité. Les différences de seuil de fraction de melt (M) dépendent fortement de la composition, ce qui induit une grande variabilité de l'échelle des processus de ségrégation. De plus, chaque changement de régime (seuils) a lieu à une échelle différente, de celle du grain (millimètre) à celle de la croûte (kilomètre et dizaine de kilomètres) rendant difficile la description quantitative de ces phénomènes.

1.1.4 Cas d'application : les dômes de Naxos (Grèce)

Les dômes de l'île de Naxos en Grèce (figure 1.10) font partie de l'orogène Alpine qui s'est développée lors de la convergence des plaques Africaine et Eurasienne. Ils constituent un cas d'application intéressant puisqu'ils ont été bien étudiés et sont relativement récents ($\sim$ 25 Ma) dans l'histoire de la Terre. Toutefois, le scénario de leur formation reste débattu.

a) Données de terrain

L'étude du terrain donne diverses informations. On peut en distinguer deux types principaux :

- Minéralogique : la nature des dômes nous donne les conditions thermodynamiques (pression, température) auxquelles ont été soumises les roches au cours de leur histoire géologique (par exemple leur degré de fusion partielle, les conditions de formation de certains minéraux (grenat, ...)). L'observation des roches à l'oeil nu donne déjà, par leur texture et couleur, une indication de leur nature. Une observation au microscope donnera des informations plus précises. Les roches, par la présence d'éléments radioactifs à l'intérieur fournissent une indication leur âge.
- Structurale : i) de grande échelle avec l'observation de déformations à l'échelle du terrain telles que les plis et les failles, ii) de petite échelle avec les déformations subies par les roches telles que les foliations, linéations qui permettent de déterminer l'orientation et l'intensité des déformations. Les foliations et linéations sont des déformations de haute pression et température qui indiquent un métamorphisme et surtout qui caractérisent le champ de déformation. Celui-ci permet de discuter des forces en présence, motrices de la déformation (les instabilités gravitaires sont un mode parmi d'autres) et, le cas échéant, de définir des dimensions caractéristiques des structures.

L'île de Naxos montre un dôme à coeur de migmatites (figure 1.10) enveloppé dans des schistes et marbres. La figure 1.11 montre une cartographie des roches constituant l'île de Naxos selon des coupes planes et verticales. Ces migmatites sont composées de diatexites et métatexites [Vanderhaeghe, 2009] qui forment le coeur du dôme (en rose clair figure 1.11).

Les roches révèlent aussi des indices de déformation. L'orientation des roches et leurs foliations et linéations (figure 1.11) indiquent la présence de sous-dômes d'une échelle kilométrique (en rose foncé figure 1.11) [Vanderhaeghe et Whitney, 2004]. Les roches montrent aussi un allongement N-S attribué à l'amincissement de la croûte lors de l'effondrement gravitaire.

b) Données géophysiques

Le terme "géophysique" englobe plusieurs méthodes : la modélisation des processus à l'oeuvre dans le système terrestre, et les méthodes d'imagerie du globe comme la propagation des ondes sismiques ou encore l'étude des champs de gravité, magnétique ou thermique.

La vitesse des ondes donne une idée de la viscosité et de la densité des roches de la Terre. C'est par exemple grâce à cela que l'on sait que la croûte est généralement dans un état solide et n'atteint pas les conditions de fusion partielle. La gravimétrie permet de connaître la répartition des masses à l'intérieur de la Terre et de vérifier qu'effectivement il existe bien un déficit de masse en profondeur sous une chaîne de montagne. La géothermie montre, entre autres, que les chaînes de montagne sont généralement plus chaudes que les plaines.

Les images de tomographie sismique dans le bassin Egéen mettent en évidence une plaque plongeante en retrait vers le sud [Jolivet et al., 2015; Wortel et Spakman, 2000]. De

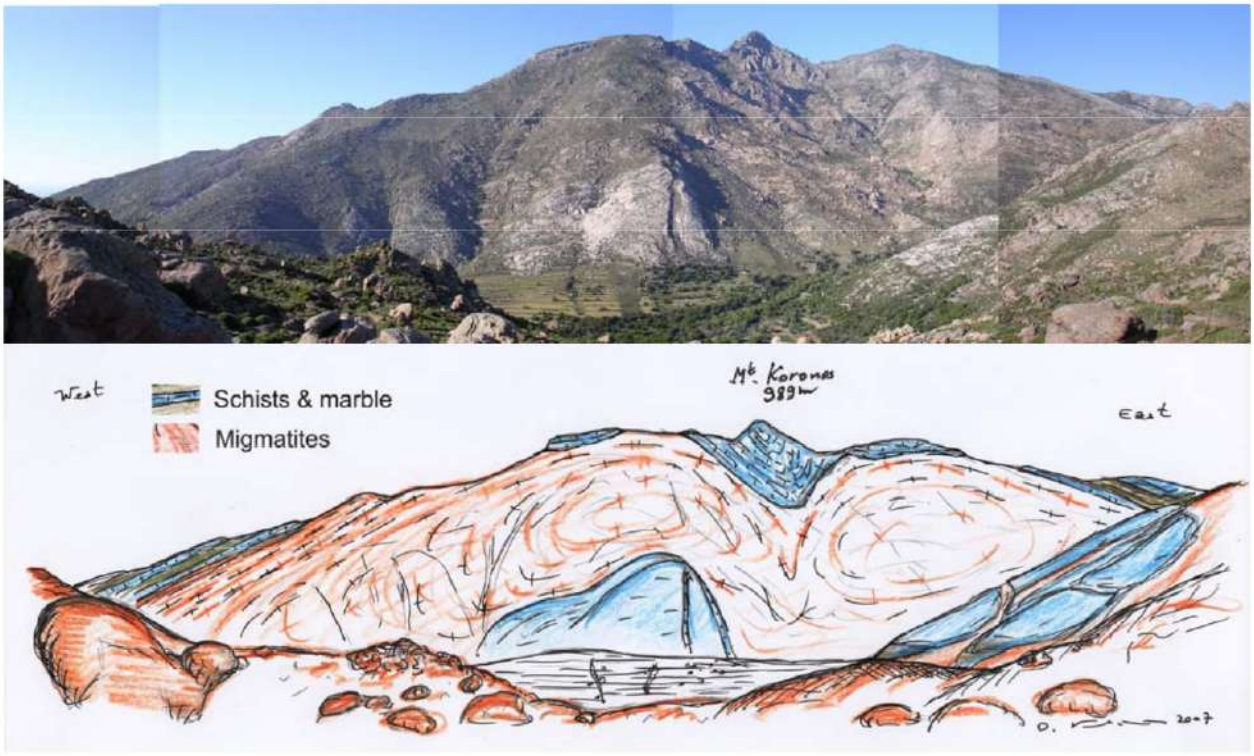


FIGURE 1.10 – Photo et schéma du dôme principal de Naxos [VANDERHAEGHE et al.]

plus, les reconstructions tectoniques montre que la croûte située dans cette zone a atteint une cinquantaine de kilomètres d'épaisseur et a été affectée par un effondrement gravitaire pour atteindre l'épaisseur actuelle de 20-25 km [JOLIVET et BRUN, 2010; TIREL et al., 2004; VANDERHAEGHE et TEYSSIER, 2001] .

c) Interprétation des données

Les dômes de Naxos font partie de l'orogène Alpine, la croûte a d'abord été épaissie jusqu'à $\sim$ 50 km puis a subi une relaxation thermique. Les migmatites attestent que la croûte a atteint une température suffisante pour se situer dans les conditions de fusion partielle. Les métatexites et diatexites indiquent une fusion partielle jusqu'à $\sim 900^o$ C. La plaque plongeante se serait retirée, permettant une remontée d'asthénosphère chaude et apportant une source de chaleur supplémentaire en base de croûte. L'analyse des roches montre des cycles de dissolution, précipitation sur des zircons (minéraux d'une dizaine de microns, marqueurs de l'écoulement) durant 8 Ma. L'analyse des données de terrain montre une structure en dômes imbriqués (polydiapirisme) constituée d'un gros dôme de 5×12 km avec, à l'intérieur, des sous-dômes de ~ 2 km. Ces dômes ne sont pas circulaires mais leur forme elliptique pourrait s'expliquer par un étirement nord-sud lors de leur remontée. Ces dômes se sont donc formés en profondeur (là où les roches qui les composent ont pu fondre), et ont ensuite été exhumés lors de l'effondrement de la chaîne. Enfin, la datation de veines déformées aux abords du dôme principal ont permis de contraindre l'arrivée de celui-ci en base de croûte supérieure entre 16 et 13 Ma.

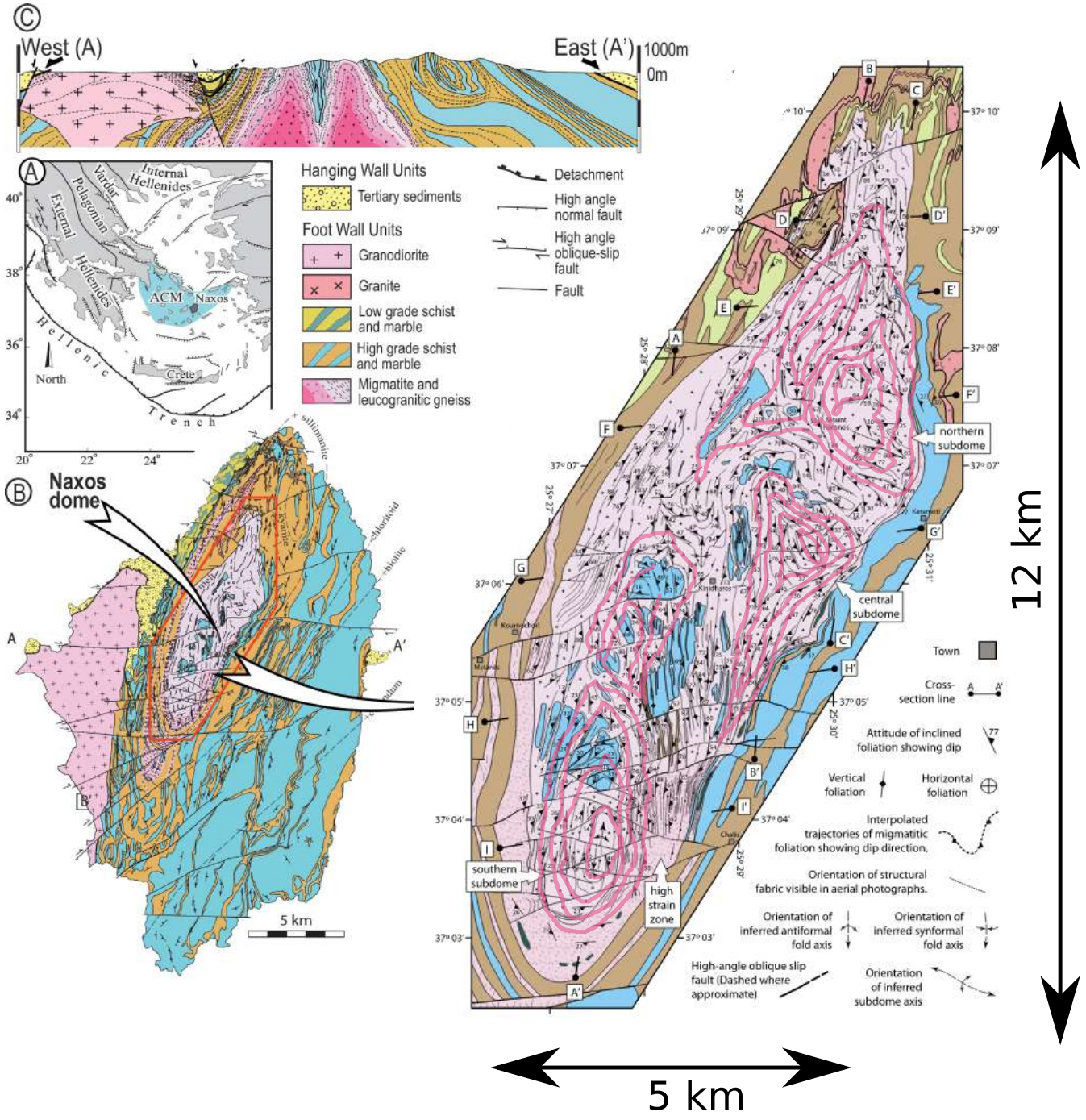


FIGURE 1.11 – Schémas des roches de Naxos, vues en coupe de face (C) et du dessus des dômes de Naxos (B,D) modifiés à partir de KRUCKENBERG et al. [2011]; VANDERHAEGHE et al. [2018]. La nature des roches, les linéations et foliations indiquent la présence de sous-dômes à l'intérieur d'un dôme principal.

Les données de terrain et de géophysique donnent des informations de différente nature qui permettent de déterminer les conditions de température et de pression subies par les roches ainsi que leur structure actuelle. Cela permet de donner une idée de leur histoire passée. Il s'agit maintenant d'interpréter correctement ces informations. Quelle est l'histoire des roches et des structures observées ? Il faut corroborer ces informations avec des processus ayant pu se produire dans la croûte profonde. C'est-à-dire que les scénarios envisagés doivent permettre de retrouver les données obtenues sur l'île de Naxos, autant dans leur structure (dôme et sous-dômes), que dans la nature des roches (métamorphisme, zircon ayant subi des alternances de température chaude et moins chaude). Un certain nombre d'auteurs ont proposé des scénarios pour expliquer la formation de ces dômes. Basé sur l'analyse des roches métamorphiques, Jansen et Schuiling [1976] sont les premiers à proposer que le dôme principal résulte d'un diapirisme. Gautier et Brun [1994] (et plus récemment Rey et al. [2011]) proposent plutôt que le dôme correspond à une remontée de roches peu visqueuses durant l'extension. D'autres auteurs suggèrent une origine tectonique de type interférence de plis [Avigad et al., 2001; Buick, 1991; Urai et al., 1990] (cf. figure 1.4).

La structure observée est plus complexe que ce que propose les auteurs ci-dessus [Kruckenberg et al., 2011; Vanderhaeghe et al., 2018], et ces scénarios ne permettent pas d'expliquer totalement la formation des dômes de Naxos. En effet, si la formation du dôme principal pourrait être liée à l'extension crustale (et l'effondrement de la chaîne) ou à du diapirisme de 16 à 13 Ma, la formation des sous-dômes est rarement expliquée. On ne sait pas si ces sous-dômes se sont formés en même temps que le dôme principal ou s'ils sont antérieurs ou postérieurs à celui-ci. De plus, les cycles de croissance/dissolution épisodiques, d'environ 2 Ma, de 24 à 16 Ma suggèrent une origine motrice déjà présente avant la formation des dômes. Il faut expliquer une alternance régulière de température entre 700 et 900 ^{o}C sur une épaisseur de 10 à 20 km dans la croûte inférieure.

Nous nous intéressons spécifiquement à l'hypothèse émise par Vanderhaeghe et al. [2018]. Ces auteurs interprètent l'alternance de température observée dans les zircons comme étant des cycles de convection d'une période de 1 à 2 Ma dans 20 km de croûte partiellement fondue de viscosité inférieure à 10^{18} $Pa.s$. Reconnaissons toutefois qu'une autre explication serait que les zircons auraient été immobiles et des pulses thermiques périodiques les auraient réchauffés sans qu'ils se déplacent eux-même au travers des isothermes. Cet épisode de convection de 8 Ma aurait été suivi d'un épisode diapirique d'une couche d'épaisseur de 5 à 10 km pendant 3 Ma. La température nécessaire à l'atteinte de la fusion partielle aurait été obtenue par :

— une augmentation de chauffage interne par augmentation de l'épaisseur de la croûte [Vanderhaeghe et Whitney, 2004]

— un réchauffement par le bas provenant d'un retrait de plaque et d'une remontée d'asthénosphère chaude (Moho à 900^{o} C) [Vanderhaeghe et Duchêne, 2010].

Notre travail se focalise sur la période qui démarre autour de 40 millions d'années (le

début et la durée du chauffage antérieurs étant inconnus) et qui s'achève avec la formation des sous-dômes. Durant cette période, les forces tectoniques sont également considérées négligeables devant les forces verticales car elles ont progressivement évolué de compressives à extensives, et leur vitesse est supposée faible.

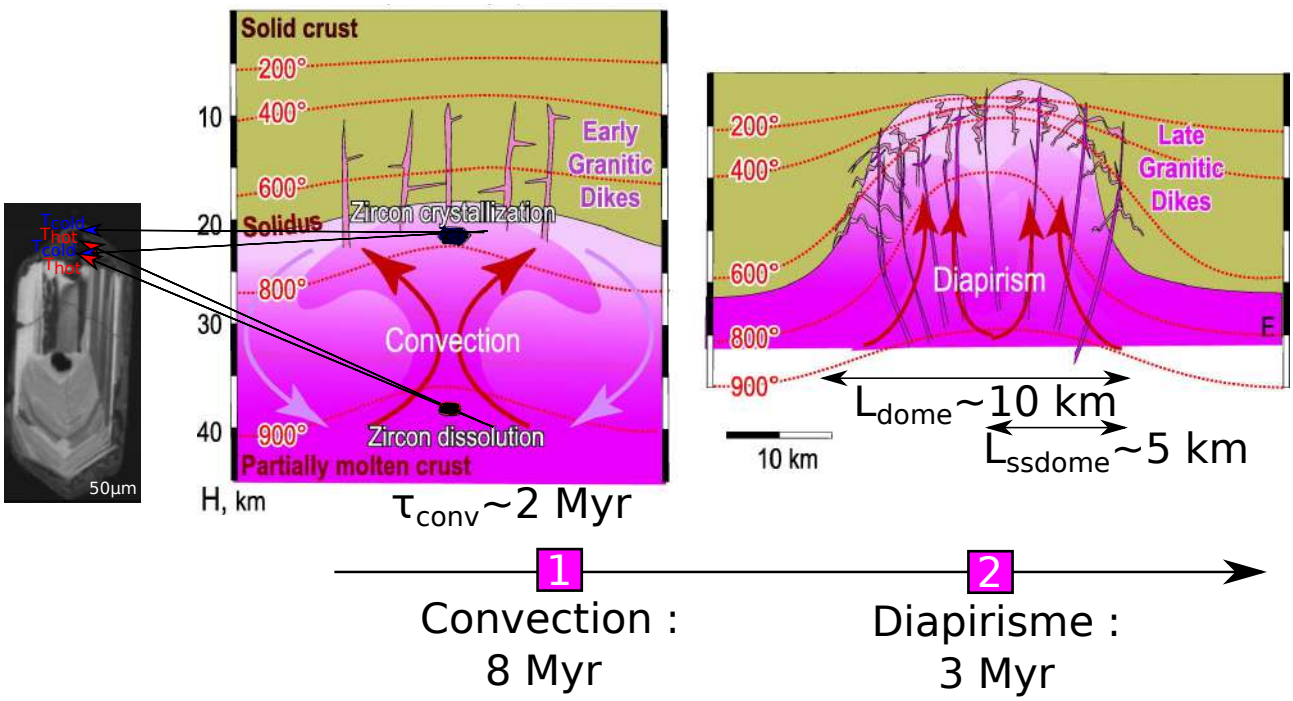


FIGURE 1.12 – Scénario de la formation des dômes de Naxos [VANDERHAEGHE et al., 2018]

Selon VANDERHAEGHE et al. [2018], l'évolution de la racine orogénique aurait donc eu une dynamique en deux étapes : de la convection pendant 8 Ma et du diapirisme pendant 3 Ma pendant l'effondrement de la croûte orogénique. C'est ce scénario, schématisé sur la figure 1.12 que nous allons tenter de valider ou d'invalider dans le cadre de cette thèse. Cette analyse permettra de plus d'explorer les conditions requises pour le développement d'instabilités gravitaires dans une racine crustale partiellement fondue.

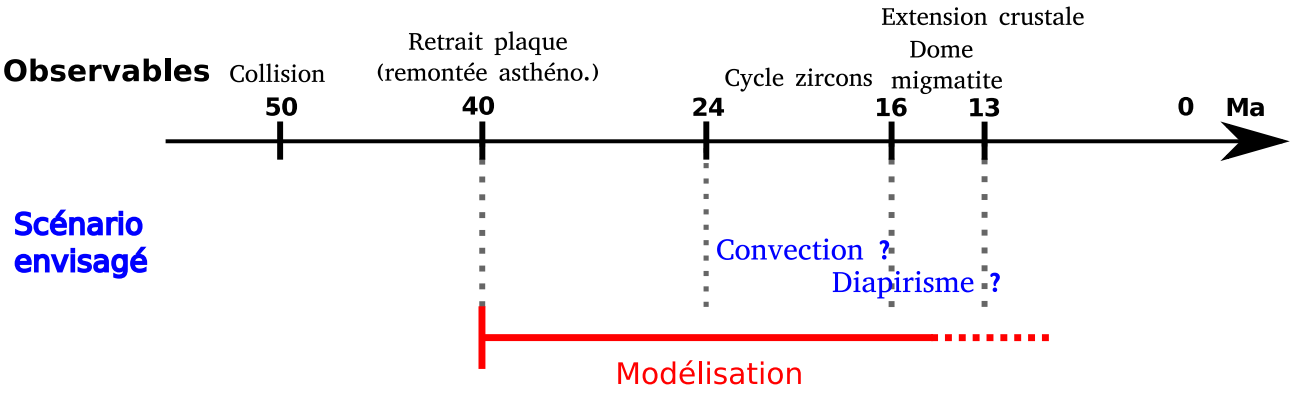


FIGURE 1.13 – Chronologie des évènements géodynamiques ayant eu lieu à Naxos, incluant les datations sur zircons à l'origine du scénario envisagé par VANDERHAEGHE et al. [2018], et temporalité de la modélisation traitée dans cette étude.

Les données géologiques et géophysiques ont permis d'élaborer le scénario ci-dessus. La

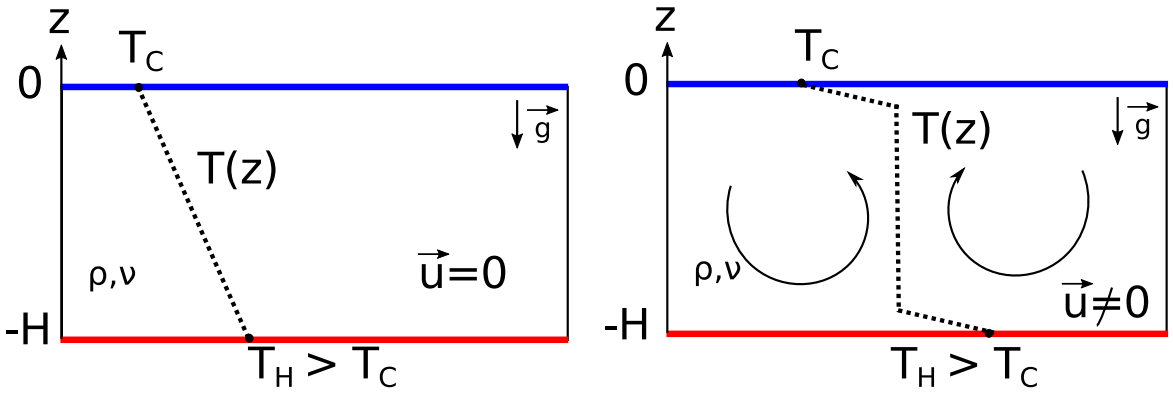
tâche ici consiste à vérifier que ce scénario est reproductible par les équations de la physique et donc s'il a effectivement pu se produire en réalité. Une chronologie des évènements et un scénario contextuel sont présentés figure 1.13. Pour répondre à cette question, il faut préalablement i) comprendre les processus physiques de diapirisme et de convection en jeu, et ii) choisir une méthode numérique adaptée capable de les reproduire. C'est l'objectif des sections suivantes.

1.2 Instabilités gravitaires : des processus physiques

Il y a deux types d'instabilités gravitaires : la convection (instabilité de Rayleigh-Bénard) et le diapirisme (instabilité de Rayleigh-Taylor). Elles sont rappelées et détaillées ici.

1.2.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard

L'instabilité de Rayleigh-Bénard, à l'origine de la convection thermique, est un phénomène physique ayant lieu généralement dans un système fluide chauffé par le bas et refroidi par le haut (figure 1.14). Le chauffage du fluide a pour effet qu'il devient localement moins dense et s'élève au travers d'un fluide plus dense (via la poussée d'Archimède).



(a) $Ra < Ra_c$ (b) $Ra > Ra_c$

FIGURE 1.14 – Schéma illustrant l'instabilité de Rayleigh-Bénard sur un système fluide chauffé par le bas et refroidi par le haut : (a) Lorsque le nombre de Rayleigh Ra est inférieur à une valeur critique Ra_c, le système ne convecte pas et la distribution verticale de température est linéaire. (b) Lorsque $Ra > Ra_c$, le système convecte et la température est relativement homogène sauf près des parois supérieure et inférieure.

La convection est pilotée par deux nombres adimensionnels. Le premier est le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu}, \tag{1.3}$$

avec α le coefficient d'expansion thermique (K^{-1}), g, l'accélération de la gravité ($m.s^{-2}$), ΔT, la différence de température entre le haut et le bas du système (K), H, la hauteur du système (m), κ, la diffusion thermique ($m^2.s^{-1}$) et ν la viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$). Ce nombre doit dépasser une valeur critique (Ra_c) pour que le système convecte. Ra_c dépend des conditions aux bords supérieur et inférieur ($Ra_c = 1707$ pour des limites rigides, $Ra_c = 657$ pour des limites

libres et $Ra_c = 1100$ pour des limites rigide-libre [Chandrasekhar, 2013]) dans un fluide newtonien. L'autre nombre adimensionnel important lorsque l'on étudie les systèmes convectifs est le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \tag{1.4}$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes visqueux dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible (exemple : métaux liquides) indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

A partir de $Pr > 100$ [Krishnamurti, 1970], l'écoulement ne dépend plus que de Ra de la façon suivante (figure 1.15a) :

- $Ra < 3.10^4$, écoulement 2D sous forme de rouleaux circulaires de la taille de la couche de convection
- $3.10^4 < Ra < 5.10^4$, écoulement 3D stationnaire
- $5.10^4 < Ra < 10^7$, écoulement 3D instationnaire
- $10^7 < Ra$, écoulement turbulent

La convection est liée à l'équation de Boussinesq qui indique que la densité d'un fluide diminue avec la température :

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_{ref})], \tag{1.5}$$

avec ρ, la masse volumique du fluide à la température T et ρ_0 celle du fluide à la température de référence T_{ref}.

a) Convection dans un fluide newtonien à viscosité dépendante de la température

Le diagramme présenté sur la figure 1.15 a été établi pour un fluide newtonien à viscosité constante. Pour un fluide dont la viscosité dépend de la température, il est intéressant de définir non pas un nombre de Rayleigh mais deux nombres Ra_{bas} et Ra_{haut} définis par (1.1) en prenant respectivement la viscosité la plus petite et la plus grande dans le système. Notons que le rapport $\gamma = Ra_{bas}/Ra_{haut}$ est le rapport de viscosité maximal dans le fluide. En utilisant ces deux nombres, il est alors possible d'établir une cartographie équivalente au cas d'un fluide newtonien à viscosité constante, mais pour un fluide à viscosité dépendante de la température (figure 1.16). Dans la figure 1.16, la viscosité est une fonction décroissante de la température [Androvandi et al., 2011].

La figure 1.16 montre la gamme des nombres Ra_{bas} et Ra_{haut} pour laquelle le système étudié va convecter ou non et les différents régimes observés (couvercle rigide, stationnaire, instationnaire, rouleaux, panaches thermiques ...). Par exemple on voit que même si $Ra_{chaud} > Ra_c$ mais que $Ra_{chaud} < 10^5$ et $Ra_{froid} < 10^2$ alors le système ne convecte pas. Le style de

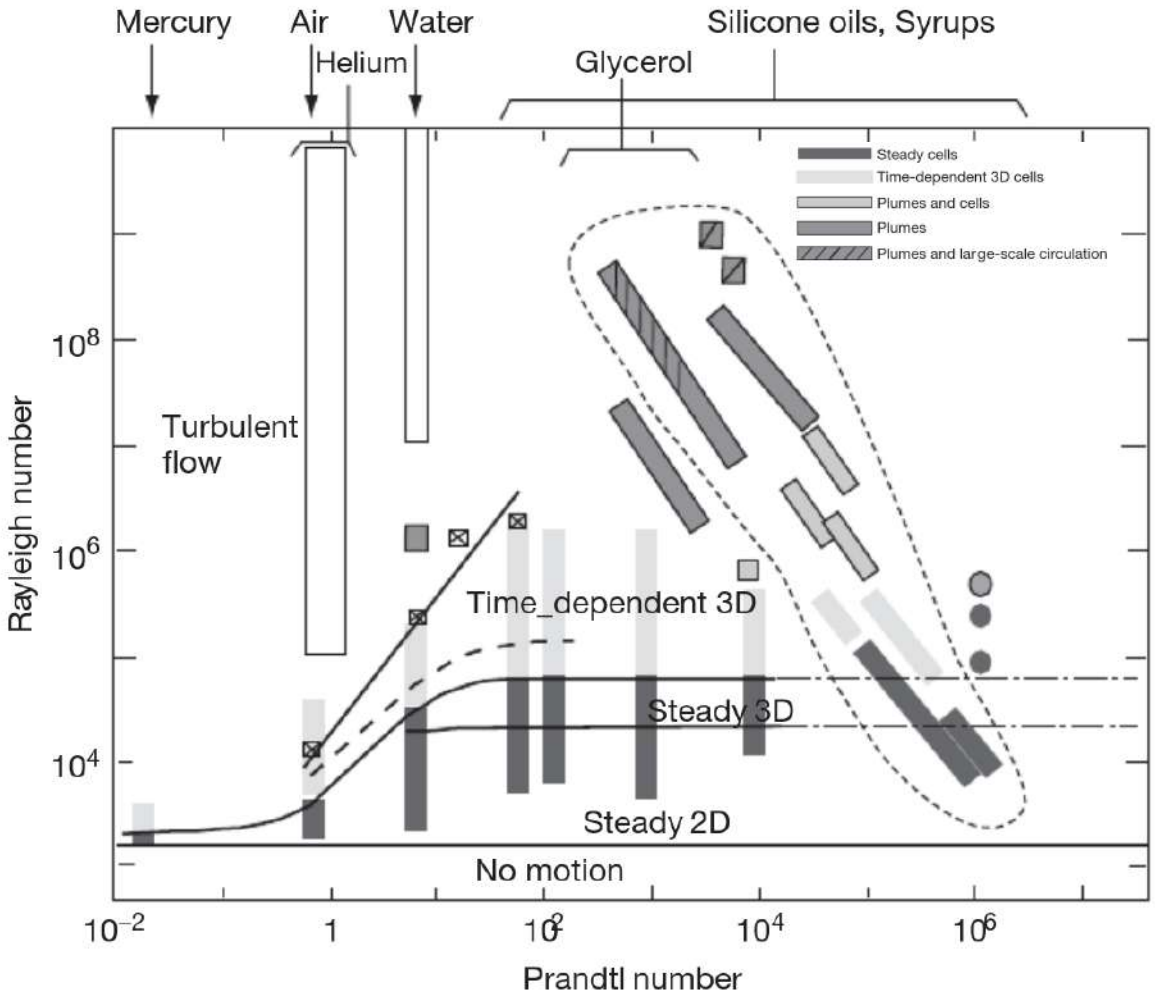
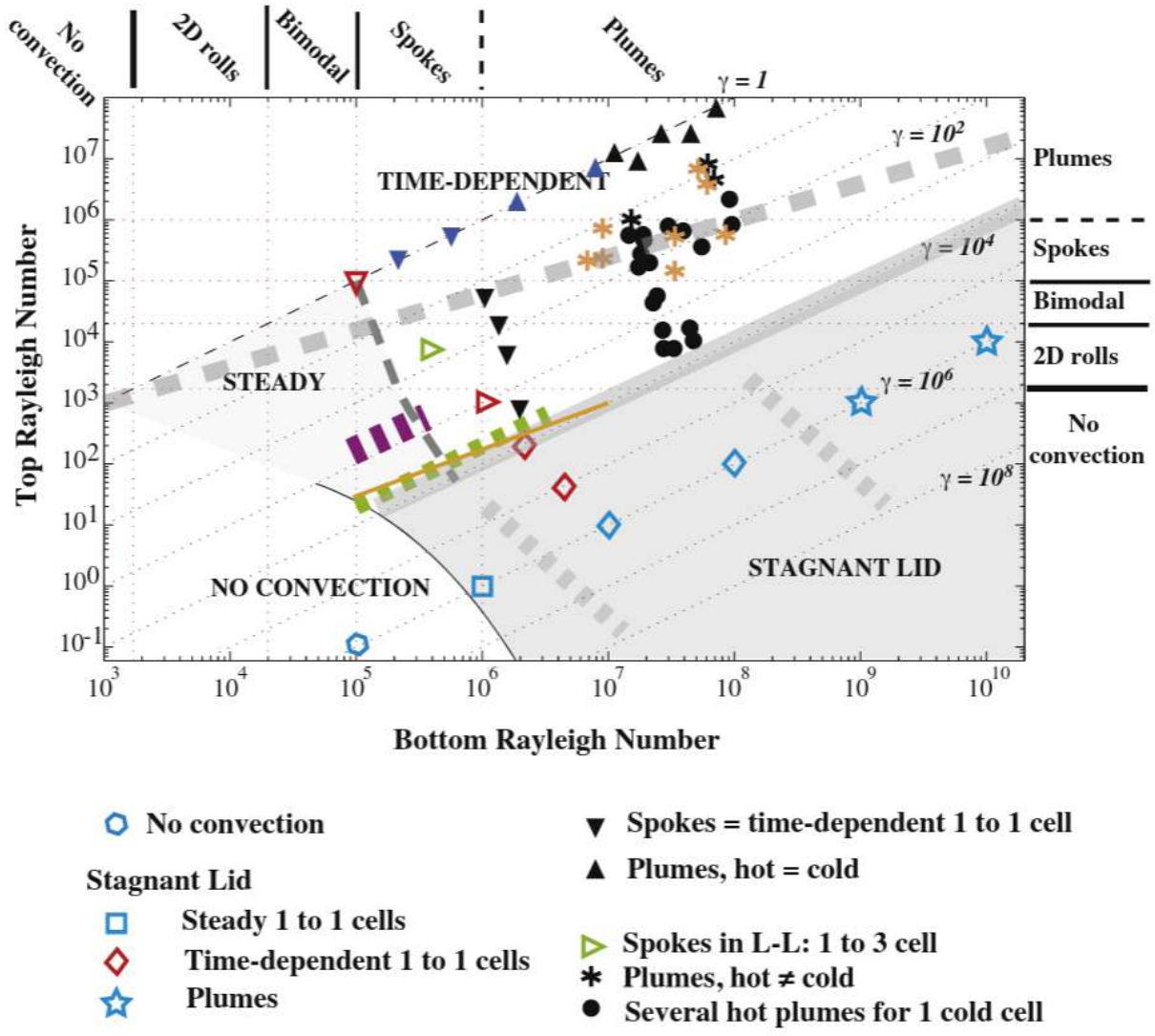


FIGURE 1.15 – Cartographie des régimes convectifs en fonction des nombres de Rayleigh et Prandtl (BERCOVICI [2010] d'après GUILLOU-FROTTIER et JAUPART [1995]; KRISHNAMURTI [1970]; MANGA et WEERARATNE [1999]; NATAF et al. [1984]; WHITEHEAD JR et PARSONS [1977]; XI et al. [2004]; ZHANG et al. [1997]).

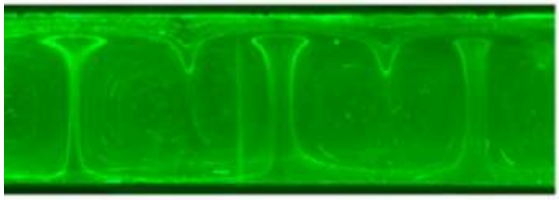
convection d'un fluide à viscosité variable change avec le ratio de viscosité γ entre la partie haute et basse du fluide. A faible ratio de viscosité ($\gamma \sim 1$), on est proche d'un système à viscosité constante et l'ensemble du fluide participe à la convection du système [RATCLIFF et al., 1997]. De façon similaire à un fluide newtonien [KRISHNAMURTI, 1970], on observe des rouleaux bidimensionnels lorsque $Ra < 20000$. Les panaches ascendants chauds et descendants froids ont des tailles similaires, et le système est stable dans le temps.

Lorsque le ratio de viscosité augmente ($2.10^4 < \gamma$), la partie haute et froide du fluide est trop visqueuse pour participer à la convection, il se forme alors un couvercle stagnant (stagnant lid). Le fluide dans la partie supérieure est trop visqueux et reste immobile tandis que de la convection apparaît en dessous [TROMPERT et HANSEN, 1998]. La forme de la convection sous le couvercle dépend du nombre de Rayleigh local et est similaire à celle observée dans le cas d'un fluide où $\gamma \sim 1$.

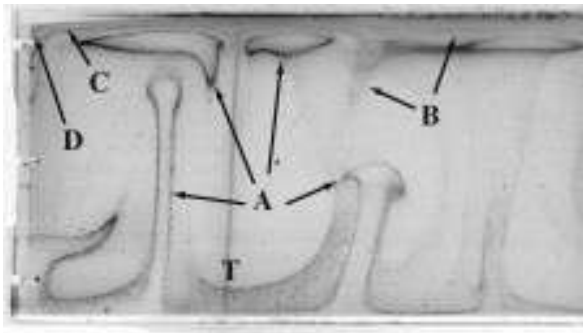
On observe différents types de convection [WHITE, 1988] selon le ratio de viscosité et le



(a)



(b) Spokes, (▼, $Ra_{haut} = 888$ - $Ra_{bas} = 2 \times 10^6$)



(c) Plumes (•, $Ra_{haut} = 1.4 \times 10^4$ - $Ra_{bas} = 4.4 \times 10^7$)

FIGURE 1.16 – a) Cartographie des régimes convectifs d'un fluide dont la viscosité décroît fortement avec la température (typiquement $\mu = exp(3 - T/10)$ avec T en °C). Les nombres de Rayleigh 'bas' et 'haut' sont définis avec respectivement la viscosité la plus faible et la plus forte, le rapport des deux viscosités étant γ [ANDROVANDI et al., 2011], b) Illustration du régime de type "spokes", c) Illustration du régime de type "plumes".

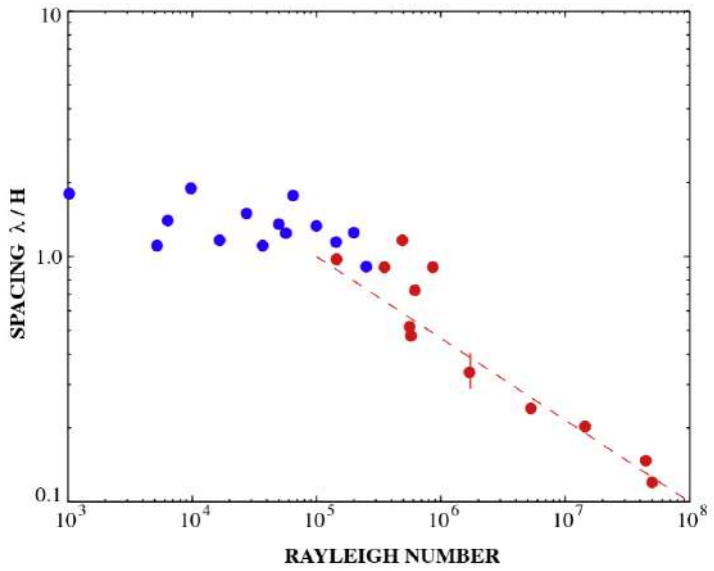


FIGURE 1.17 – Longueur d'onde entre les panaches en fonction du nombre de Rayleigh [ANDROVANDI et al., 2011].

nombre de Ra :

— $\gamma \sim 10$: Écoulement bimodal, les rouleaux commencent à se découper avec une longueur d'onde plus grande et marque la transition avec un régime tridimensionnel

— $50 < \gamma < 4000$ and $10^5 < Ra < 10^6$: Écoulement de type spoke, le régime bimodal se casse, l'écoulement devient instationnaire, les panaches ascendants chauds et descendants froids sont asymétriques (figure 1.16b). Chaque cellule froide contient un panache chaud. Les panaches ascendants forment un réseau proche de la paroi basse. Les cellules froides sont assez stables contrairement aux panaches chauds qui peuvent disparaître ou réapparaitre.

— $50 < \gamma$ and $Ra > 10^6$: Ecoulement de types plumes - panaches thermiques (figure 1.16c). Un ensemble de panaches chauds est entouré par des panaches descendants froids, ceux-ci sont plutôt stables contrairement aux chauds. Dans ce régime, l'espacement entre panaches n'est plus constant et de l'ordre de la hauteur de la convection, comme c'est le cas dans les autres régimes, mais celui-ci diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente (voir la figure 1.17).

b) Caractéristique de la convection

ANDROVANDI et al. [2011] montrent la relation entre l'espacement entre panaches (la longueur d'onde λ) et le nombre de Rayleigh. Ils trouvent que pour $Ra < 10^5$, $H < \lambda < 2H$, avec H, l'épaisseur de la couche convective. Pour un nombre de $Ra > 10^5$, $\lambda \sim HRa^{1/3}$. A faible nombre de Rayleigh, la longueur d'onde est proportionnelle à l'épaisseur convective. Plus le nombre Rayleigh est élevé et plus les panaches sont proches les uns des autres. SHIBANO et al. [2013] proposent, à partir de KRAICHNAN [1962], la relation suivante pour calculer les

vitesses moyennes dans une cellule convective à grand nombre de Prandtl : $v_{conv} \approx 2\frac{\kappa}{H}Ra^{1/3}$.

c) Convection avec chaleur interne

Les systèmes géologiques sont des systèmes comprenant de la chaleur interne. L'instabilité de Rayleigh-Bénard, même si elle a été surtout étudiée dans le cas d'un système refroidi par le haut et chauffé par le bas, peut se produire uniquement grâce à la chaleur interne. Dans ce cas, le nombre adimensionnel associé est le nombre de Rayleigh-Roberts [Roberts, 1967] :

$$Ra_H = \frac{\rho g \alpha H^5 H_r}{\kappa \nu k}, \tag{1.6}$$

avec H_r, la production de chaleur en $W.kg^{-1}$, k, la conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$. Les nombres de Rayleigh critiques sont différents : 2772 pour des conditions rigide-rigide et 868 pour des limites libres [Roberts, 1967].

d) La convection en géodynamique

La convection a été très étudié expérimentalement et numériquement dans le manteau au moyen d'une ou deux couches [Bercovici, 2010]. La convection dans la croûte Archéenne (il y a 3.9 milliards d'années), plus chaude (900^{o}C) que la croûte actuelle est étudiée depuis une quinzaine d'années [Collins et al., 1998]. En revanche, la convection dans la croûte récente reste débattue. Si quelques modèles montrent que de la convection a pu se produire lorsque la croûte entre en fusion partielle, elle n'a jamais été spécifiquement étudiée [Babeyko et al., 2002; Schenker et al., 2012].

Dans une croûte "classique" (d'épaisseur $\sim 30\ km$, avec une température à la base $T_{Moho} = 600^oC$, en dessous de la température du solidus des roches de la croûte continentale, densité $\rho \sim 2700\ kg.m^{-3}$, de viscosité $10^{18} Pa.s$), le nombre de Rayleigh est d'environ $Ra \sim 13 < Ra_c$. Cependant, la température, l'épaisseur et la viscosité sont des paramètres difficiles à estimer. En effet, la rhéologie des roches de la croûte est mal connue, et la température et l'épaisseur de la croûte dépendent de son histoire. De plus, ces paramètres sont inter-connectés : la rhéologie dépend de la température (plus la croûte est chaude, moins elle est visqueuse) et un changement d'épaisseur peut s'accompagner d'une augmentation de la température. Dans certains cas, il est possible que le nombre de Rayleigh de la croûte dépasse le nombre de Rayleigh critique. Les zones les plus favorables à cela sont les zones de chaînes de montagne (zones orogéniques) où la croûte a pu atteindre la fusion partielle (voir sous-section 1.1.3).

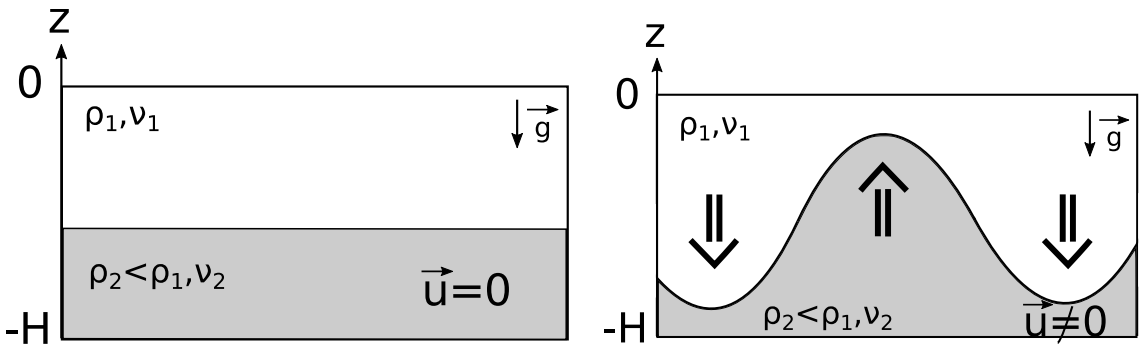
Si on considère Naxos, si la convection a lieu, les nombres de Rayleigh ne seront pas très élevés ($10^4 \leq Ra \leq 10^5$) et il se pourrait que le système convecte en rouleaux bi-dimensionnels avec une longueur d'onde comprise entre l'épaisseur et deux fois l'épaisseur de la couche convective.

1.2.2 Instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor correspond à l'écoulement généré dans un système où un fluide moins dense s'élève par effet de flottabilité au travers d'un fluide plus dense (figure 1.18). On peut distinguer l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans les fluides très visqueux et peu visqueux. Le passage de l'un à l'autre se fait grâce au nombre d'Archimède qui compare les forces de flottabilité aux forces visqueuses :

$$Ar = \frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_2)gH^3}{\mu_1^2}. \tag{1.7}$$

Notons que dans le cas où l'on considère l'approximation de Boussinesq (1.5) valide, on peut écrire $|\Delta\rho|/\rho = \alpha\Delta T$, ce qui permet de faire le lien entre nombre d'Archimède et nombre de Rayleigh, via la nombre de Prandtl : $Ar = Ra/Pr$. Si $Ar > 1$, l'écoulement est inertiel, lorsque $Ar \leq 1$, l'écoulement est visqueux. Dans les deux cas, la croissance de l'instabilité suit une loi exponentielle [Chandrasekhar, 2013] et la position de l'interface entre les deux fluides est : $y(t) = y_0 \cdot exp(Kt)$, avec y_0, la position initiale de l'interface et K, le taux de croissance. Ces deux régimes sont illustrés sur les figures 1.18 et 1.19 (simulations numériques réalisées avec le code OpenFOAM ; plus de détails concernant le modèle utilisé sont donnés dans le chapitre 2).



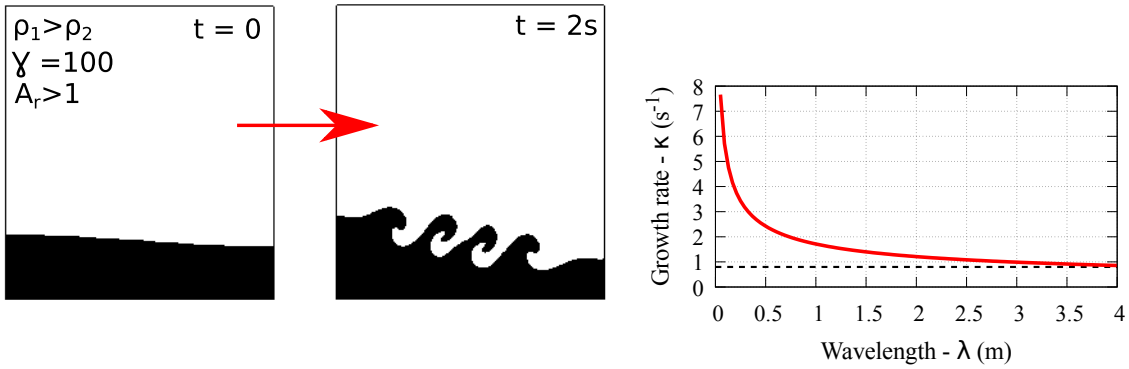
(a) t=0 (b) t > 0

Figure 1.18 – Schéma représentant l'instabilité de Rayleigh-Taylor

a) Cas inertiel, $Ar > 1$

Le cas inertiel est peut-être le plus connu, on le retrouve par exemple lors du versement du lait dans le café ou encore dans les supernovae [Cabot et Cook, 2006] où le régime est turbulent.

L'écoulement non-visqueux présente généralement une vitesse de déformation de l'instabilité importante et une forte déformation de l'interface survient rapidement. Son taux de croissance K tend rapidement vers une constante et est défini par : $K = \sqrt{(At \cdot g \cdot 2\pi)/\lambda}$, avec $At = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ le nombre d'Atwood où ρ_1 et ρ_2 sont les densités des fluides lourd et léger, et λ est la longueur d'onde de l'instabilité [Chandrasekhar, 2013].

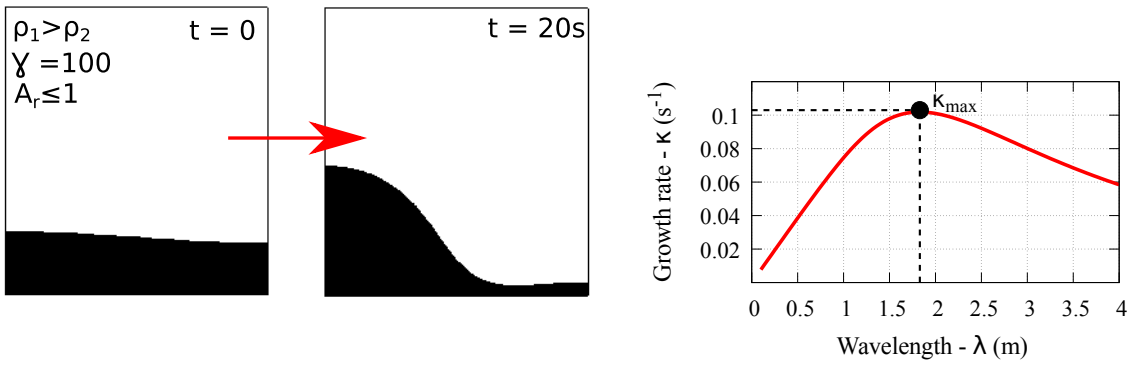


(a) Évolution de l'écoulement (b) Relation de dispersion

FIGURE 1.19 – Instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas $Ar > 1$. La couche de fluide en noir est moins dense que celle en blanc. L'instabilité est caractérisée par une forte déformation de l'interface et un taux de croissance tendant vers une constante aux grandes longueurs d'onde. Dans cette simulation, $Ar \approx 110$.

b) Cas visqueux, $Ar \leq 1$

Les nombres d'Archimède qui sont estimés en géodynamique terrestre (à l'échelle du million d'années) sont très petits : $Ar \sim 10^{-15}$. Dans ces écoulements visqueux, la vitesse de déformation de l'interface est lente au moins au début de l'instabilité.



(a) Évolution de l'écoulement (b) Relation de dispersion

FIGURE 1.20 – Instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas $Ar \leq 1$. La couche de fluide en noir est moins dense que celle en blanc. L'instabilité est caractérisée par un étirement de l'interface et un taux de croissance dominant défini pour une longueur d'onde spécifique. Dans cette simulation, $Ar \approx 0.9$.

L'instabilité croît avec un taux de croissance et une longueur d'onde dépendant de l'épaisseur, de la viscosité et de la densité des couches. Ceux-ci sont plus complexes à déterminer que dans le cas peu visqueux puisqu'ils nécessitent la résolution d'un système linéaire (Eq. (2.15)). Si les longueurs d'onde peuvent varier dans le temps, une seule finira par dominer (la longueur d'onde caractéristique) et elle correspondra au taux de croissance maximal (K_{max}) atteint par la déstabilisation (figure 1.20b). La longueur d'onde et la taille des instabilités sont proportionnelles à l'épaisseur de la couche dans laquelle elles grandissent [RAMBERG, 1981a]. La forme de

l'instabilité dépend du rapport de viscosité entre les deux fluides. Si le fluide le moins dense est plus visqueux, elle aura une forme de doigt. A l'inverse, elle aura plutôt une forme de champignon si le fluide le moins dense est moins visqueux [Whitehead, 1988].

c) L'instabilité de Rayleigh-Taylor en géodynamique crustale : le diapirisme

Le diapirisme est le terme utilisé pour désigner une instabilité de Rayleigh-Taylor en géodynamique. Pour avoir diapirisme, il doit y avoir une inversion de densité. L'origine de cette inversion de densité peut être thermique ou non [Brun, 1981]. Les diapirs de sel sont les premiers diapirs à être étudiés, car ils sont visibles en surface et peuvent concentrer des ressources minérales [Biot, 1966; Ramberg, 1968b]. L'idée d'un dôme qui remonte par flottabilité est ensuite exportée en tectonique et pourrait expliquer la formation de dômes de migmatites. Dans ce cas, l'origine de l'inversion de densité est thermique, la fusion partielle de roches conduit à la diminution de la densité et de la viscosité de celles-ci et donc à leur remontée au travers de roches plus denses et visqueuses.

D'autres causes d'inversion de densité peuvent être : un dépôt de sédiments sur une base plus légère, l'intrusion dans la croûte d'un magma moins dense provenant du manteau, ou encore à un chevauchement latéral de couches distinctes.

d) Polydiapirisme

Le diapirisme décrit généralement l'instabilité entre deux couches de densités différentes mais il arrive que plus de deux couches soient présentes dans un système. Le polydiapirisme correspond à un minimum de trois couches qui se déstabilisent et conduisent à l'observation de sous-dômes qui grandissent dans un dôme (on parle alors de dômes imbriqués) [Ramberg, 1981a; Weinberg et Schmeling, 1992]. Dans un système à trois couches, la déstabilisation de chaque interface peut être caractérisée par des taux de croissance et longueur d'onde différents, ce qui amène à une déstabilisation spatiale et temporelle différente pour chaque interface : en fonction des valeurs relatives des taux de croissances, le développement d'une instabilité gravitaire au niveau de chacune des interfaces peut-être synchrone ou asynchrone. Le polydiapirisme apparaît seulement dans certains cas : les simulations numériques de Weinberg et Schmeling [1992] (figures 2.4) montrent qu'il faut que la couche supérieure ait une hauteur bien plus grande que les couches du milieu et inférieure, que le fluide inférieur soit moins dense que le fluide supérieur et enfin que le ratio de viscosité entre la couche supérieure et les deux autres fluides soit supérieur à 100. Quelques cas de polydiapirisme ont été observés dans la nature [Bouchez et Diot, 1990; Collins, 1989; Stephansson, 1975; Talbot, 1971; Vanderhaeghe et al., 2018].

Un question reste ouverte au sujet du polydiapirisme : la structure s'est-elle formée en profondeur ou les gros (petits) dômes se forment en profondeur puis les petits (gros) se forment durant l'ascension ?

1.2.3 Comment différencier convection et diapirisme ?

Lorsque les roches de la croûte entrent en fusion partielle, elles deviennent plus légères que les roches environnantes. On a alors deux possibilités : soit les conditions sont favorables au développement de la convection et la formation du dôme correspond alors l'ascension d'un panache thermique associé à la convection, soit les conditions ne sont pas favorables au développement de la convection et la remontée de matière moins dense forme un dôme par diapirisme. Le diapirisme et la convection sont deux phénomènes pouvant expliquer les dômes de migmatites observés à la surface de la Terre.

Il est difficile de les distinguer à partir de l'analyse des structures des roches exposées en surface. La principale caractéristique qui permettrait de les différencier serait le nombre de Rayleigh en profondeur. Cependant, celui-ci est difficile à déterminer tant les inconnues sur la température et la viscosité des roches sont grandes.

Convection et diapirisme peuvent se développer dans un même système [Bittner et Schmeling, 1995; Rey et al., 2011]. Toutefois, si la convection se produit après, elle effacera les structures de dômes produites par diapirisme [Rey et al., 2011]. On peut se demander s'il existe un moyen d'obtenir du diapirisme après des cycles convectifs ou si le diapirisme peut se produire malgré la convection. Ces deux phénomènes sont difficiles à différencier puisqu'ils ont la même origine (la fusion partielle) et peuvent aboutir à la même structure finale (un dôme). De plus, le degré d'incertitude sur ce qui pourrait les différencier (nombre de Rayleigh, longueur d'onde, ...) est grand. Comprendre leur mécanisme de formation au sein de la croûte pourrait permettre de déterminer quels sont les paramètres nécessaires (température, viscosité) à l'obtention de chacun des deux phénomènes. La convection a tendance à homogénéiser le milieu tandis que le diapirisme a tendance à liter le système en formant des couches de matériau de nature différente. Ainsi, la distinction de ces deux processus apporte des connaissances sur les modes et les causes motrices de la différenciation crustale.

1.3 Méthodes de validation des scénarios

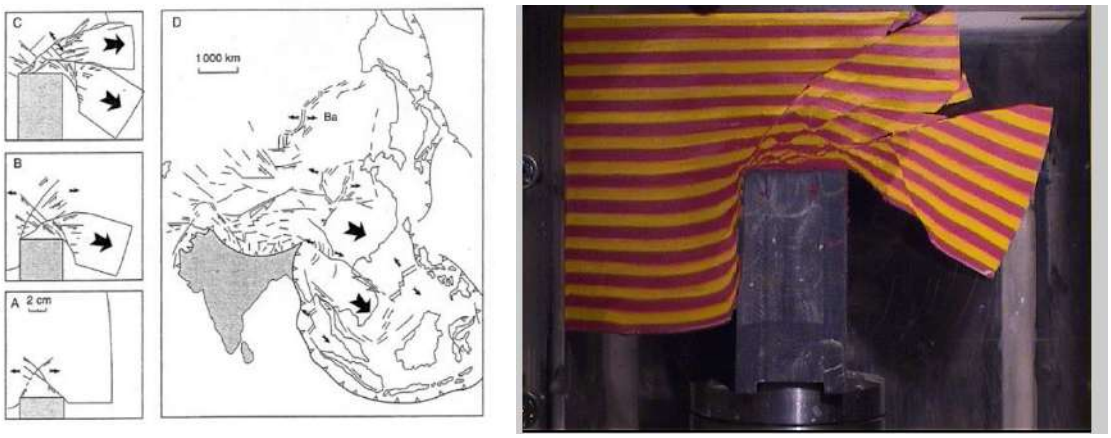
L'interprétation des données et les mesures de terrains donnent lieu à l'élaboration d'hypothèses permettant de les expliquer. Ces hypothèses peuvent être vérifiées grâce à des modèles numériques ou expérimentaux qui ont pour but de mieux comprendre et de quantifier l'évolution des processus géologiques dans le temps et l'espace [Graveleau et al., 2012]. En effet, l'étude de processus géodynamiques est difficile car : seul l'état actuel est observable dans la nature (l'histoire entière reste à déterminer), les processus ont généralement lieu sur des millions d'années et profondément dans la terre, ce qui rend impossible les observations directes [Schellart et Strak, 2016]. Dans les modèles, les paramètres physiques et les lois sont des versions simplifiées des objets naturels : il ne s'agit pas de reproduire une Terre miniature dans toute sa complexité mais plutôt d'identifier quels sont les paramètres clés qui doivent être intégrés dans le modèle.

Avec une approche numérique, les paramètres sont décrits mathématiquement par la résolution d'équations et les codes calculent l'évolution dynamique du modèle. Avec une approche expérimentale, la rhéologie et les mécanismes de déformation des systèmes naturels sont étudiés en utilisant des matériaux analogues (argile, sable, silicone, eau) et différentes techniques de visualisation. Ces deux techniques de modélisation sont complémentaires.

1.3.1 Modélisation analogique

La modélisation analogique est très utilisée en sciences de la Terre depuis plus de 200 ans (références dans les synthèses de Ranalli [2001]; Schellart et Strak [2016]).

La formation des chaînes de montagne fait par exemple l'objet de modèles analogiques [Graveleau et al., 2012]. Concernant la modélisation tectonique, on peut citer l'expérience de Tapponnier et al. [1982] qui explique les grandes structures de failles de la chaîne Himalayenne par la collision d'un poinçon rigide et d'un bloc moins rigide en plasticine.



(a) (b)

Figure 1.21 – Modèle de poinçonnement de l'Asie par le sous-continent indien [Boillot; Tapponnier et al., 1982] : a) Schéma de l'expérience, A-C : Déformation expérimentale en laboratoire provoquée par l'avancée progressive d'un poinçon rigide (en grisé). D : Le poinçon rigide de l'Inde (en grisé) déforme le continent asiatique et provoque l'échappement vers l'Est (flèches noires) des fragments continentaux ; b) Photographie de l'expérience : plasticine colorée = Asie ; poinçon métallique = Inde.

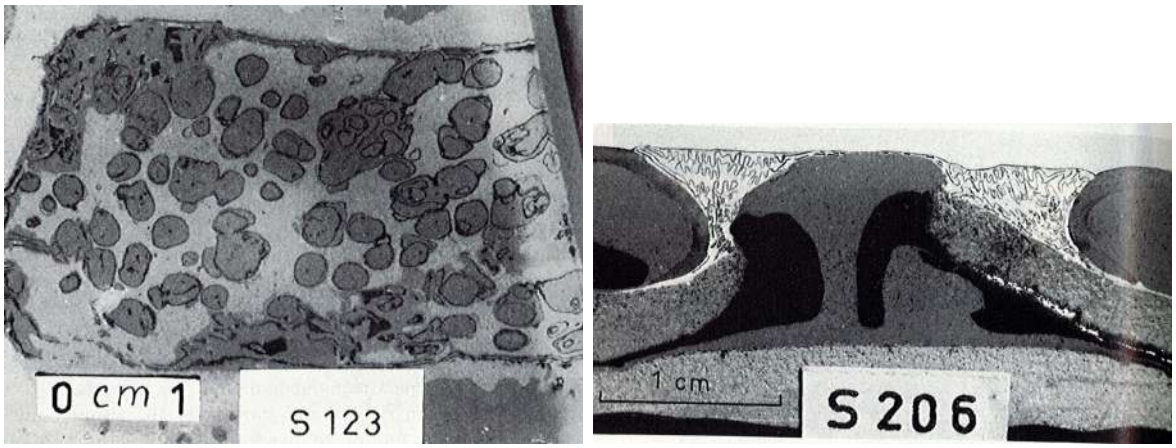
Pour la dynamique de formation des dômes, des expériences ont notamment été réalisées en vue d'étudier la remontée de matière liée à une extension lors de l'effondrement gravitaire d'une chaîne de montagne (figure 1.2D) [Bonini et al., 2001; Brun et al., 1994; Corti et al., 2003]. Ces expériences utilisent des couches superposées de sable et d'huile de silicone qui sont soumises à un étirement (figure 1.22a). La matière initialement située en profondeur, remonte (figure 1.22b), et forme un dôme tandis que la croûte supérieure s'est déformée en failles.

Le diapirisme a fait l'objet de nombreuses expériences analogiques (par exemple : Griffiths [1986]; Ramberg [1968b, 1981a]; Ribe [1983]; Whitehead et Luther [1975]) avec des sables ou des liquides. Le fluide le plus dense est d'abord mis dans la cuve. Le fluide le moins dense est ensuite ajouté et la cuve retournée : le diapir constitué de fluide léger re-



(a) (b)

FIGURE 1.22 – Expérience de BRUN et al. [1994] représentant une remontée de dôme grâce à une extension. (a) Schéma de l'expérience : sable = croûte supérieure cassante, silicone = croûte inférieure ductile, zone de faible viscosité au centre du système = zone de roches partiellement fondues. (b) Fin de l'expérience : zone noire centrale = roches partiellement fondues, orange = croûte inférieure ductile, bandes noires et grise = croûte supérieure cassante.



(a) Vue du dessus (b) Vue de face

FIGURE 1.23 – Expériences multi-couches de RAMBERG [1967].

monte. La figure 1.23 montre une expérience analogique de [RAMBERG, 1967] où apparaît du polydiapirisme. Ce type de système sera étudié numériquement dans le chapitre suivant.

La convection multi-couches en vue de modéliser le manteau a aussi fait l'objet d'expériences analogiques [DAVAILLE, 1999; DAVAILLE et LIMARE, 2015; LE BARS et DAVAILLE, 2004; LIMARE et al., 2015]. La figure 1.24 montre une illustration d'une expérience de convection dans un système à deux couches [LE BARS, 2003].

Les modèles analogiques permettent de comprendre certains processus sur des échelles de temps et d'espace convenables. Toutefois, les conditions réelles de température et de pression sont difficilement atteintes et la gamme de paramètres parcourue n'est pas très grande. De plus, il est difficile de quantifier précisément les grandeurs avec un modèle analogique et donc de le comparer avec les données de terrain. C'est pourquoi les modèles numériques sont privilégiés pour modéliser des processus plus complexes (prendre en compte notamment la fusion partielle), pour les valider et les comparer avec des données de terrain.

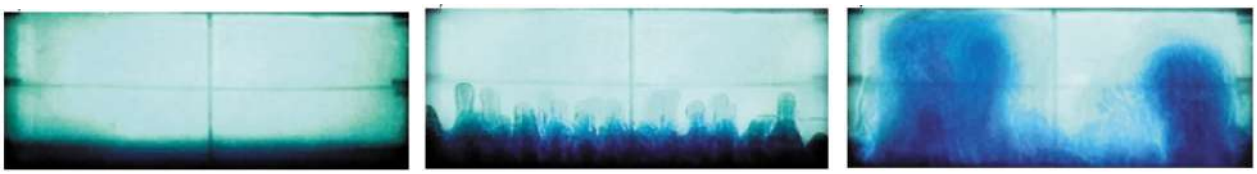
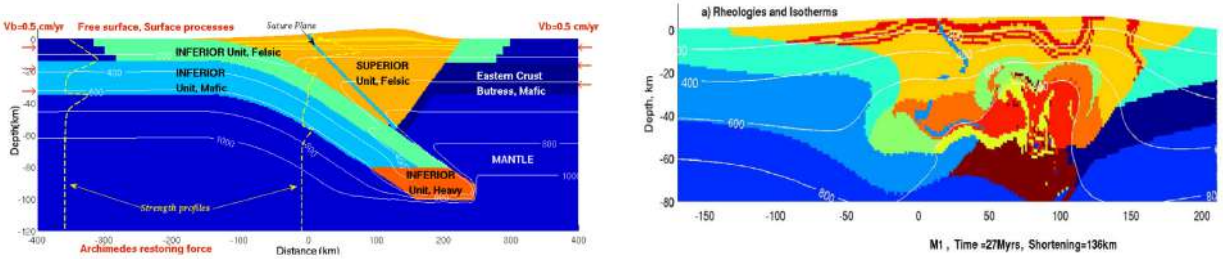


FIGURE 1.24 – Expérience de convection thermique dans un système à deux couches. Snapshots à $t = 0; 2; 4$ min d'une expérience de Rayleigh-Bénard réalisée par LE BARS [2003] avec des fluides fortement dépendant de la température. La convection démarre dans la couche inférieures bleue qui pénètre la couche supérieure au début par de petits panaches thermiques puis ceux-ci fusionnent et forment des gros panaches.

1.3.2 Modélisation numérique

Les causes de l'exhumation de roches crustales de haute température sont nombreuses. Certains modèles numériques de dynamiques orogéniques montrent l'existence de diapirisme [BITTNER et SCHMELING, 1995; GANNE et al., 2014; GERBAULT et al., 2018; SIZOVA et al., 2019] (figure 1.25), d'autres montrent l'existence de convection dans la croûte [BABEYKO et al., 2002]. Par ailleurs, l'extension tectonique est souvent invoquée pour expliquer l'exhumation du dôme principal de Naxos [HUET et al., 2011; LE POURHIET et al., 2012; REY et al., 2011; TIREL et al., 2008, 2004]. Parfois, plusieurs effets sont combinés pour expliquer l'exhumation du dôme de Naxos, comme par exemple SCHENKER et al. [2012] qui modélisent les effets de l'extension et de la convection (figure 1.26).

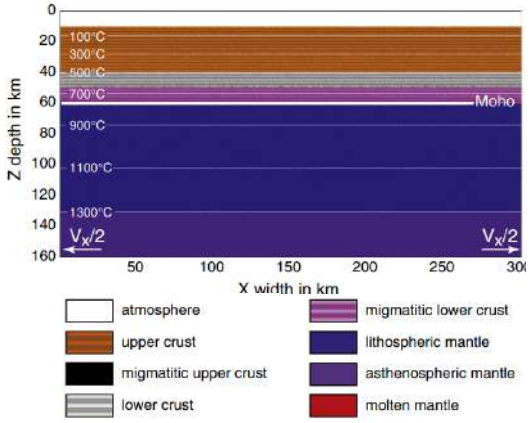
Les instabilités gravitaires dans la croûte n'ont pas forcement lieu en contexte orogénique. Par exemple, POLYANSKY et al. [2016] étudient la remontée de magma provenant du manteau sous forme de diapir. CAO et al. [2016] observe de la convection dans la croûte dans le cas d'une croûte chaude liée à l'intrusion d'un magma mantellique.



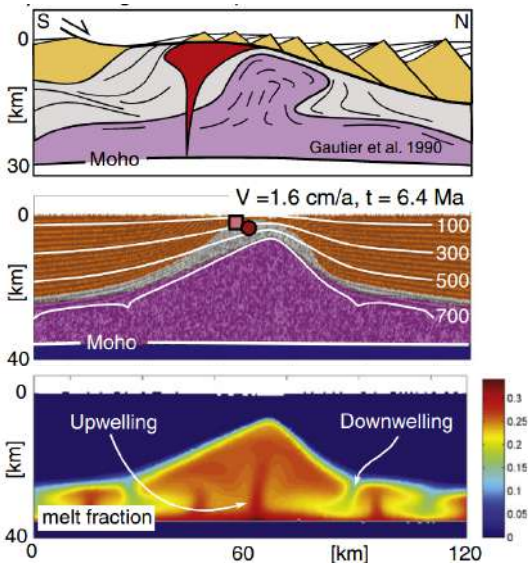
(a) Setup initial de la modélisation (b) Viscosité des différentes couches à $t = 27Ma$.

FIGURE 1.25 – Modélisation réalisée par GERBAULT et al. [2018] avec le code Parovoz basé sur une méthode explicite dite de relaxation dynamique sur grille "mobile" lagrangienne, appliquée à l'orogène Varisque dans un contexte de compression. Des dômes se forment par diapirisme après 27 Ma de convergence (en vert et jaune sur le snapshot b).

La modélisation des phénomènes géodynamiques peut s'avérer complexe. En effet, la viscosité varie fortement de 10^{15} Pa.s, pour un magma granitique, à 10^{23} Pa.s, pour les roches froides de la surface terrestre [CAO et al., 2016; GERYA et BURG, 2007]. Le matériel se déforme beaucoup, ce qui peut poser problème dans le suivi des interfaces voire dans la conservation de la masse (cf. [GERBAULT et al., 2018; SCHMELING et al., 2008]). De plus, les systèmes étu-



(a) Setup de la modélisation



(b) Vue schématique du dôme de Naxos, déformation des couches de la lithosphère, taux de fusion partielle

FIGURE 1.26 – Modélisation réalisée par SCHENKER et al. [2012] avec le code 2D I2ELVIS (basé sur des différences finies et une technique marker-in-cell), appliquée au dôme principal de Naxos. Celui-ci est le sommet d'une cellule de convection.

diés dans le cadre de cette thèse sont très hétérogènes, ce qui s'approxime par des systèmes à plusieurs fluides séparés par des interfaces. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques capables de gérer correctement les grandes déformations, le suivi d'interface, les fortes variations des propriétés des matériaux et les rhéologies non-linéaires.

Les méthodes numériques sont nombreuses. On distingue d'abord les méthodes à grille lagrangienne où le maillage s'adapte afin de coïncider avec l'interface mais cela nécessite de remailler fréquemment (on a donc une perte d'informations, eg. GERBAULT et al. [2018], Fig. 1.25). De plus, la mise à jour du maillage présente des limites lorsque le système comporte beaucoup d'hétérogénéités ou lorsque le système est 3D avec de fortes déformations.

Il existe également les méthodes sur grille fixe eulérienne qui utilisent différentes méthodes de suivi d'interface, et parmi elles, on en distingue trois principales : la méthode de Front-Tracking, la méthode Level-Set et la méthode Volume-Of-Fluid. En général, les modélisations en géodynamique se basent sur une grille fixe eulérienne et utilisent des marqueurs lagrangiens pour visualiser le mouvement (méthodes de Front-Tracking ou de Marker-In-Cell, Fig.1.3) [GERYA et YUEN, 2003a; MORESI et al., 2003]. Ces méthodes localisent l'interface grâce à des marqueurs transportés par le champ local de vitesse. Le transfert des grandeurs entre la grille et les marqueurs peut conduire à des résultats différents selon les méthodes utilisées [DEUBELBEISS et KAUS, 2008; SCHMELING et al., 2008]. Ces marqueurs peuvent s'accumuler dans certaines zones et nécessitent d'être redistribués. L'interface doit être reconstruite ce qui ajoute du temps de calcul et des erreurs d'interpolation. Ces méthodes ont des difficultés à gérer les ruptures et coalescences d'interface, d'autant plus pour les systèmes tridimensionnels.

Les deux autres principales méthodes de suivi d'interface sur grille fixe eulérienne transportent un champ scalaire dans tout le domaine (advecté par le champ global de vitesse) : la méthode Level-Set [OSHER et SETHIAN, 1988] et la méthode de Volume-Of-Fluid (VOF) [HIRT

et Nichols, 1981]. Pour la méthode Level-Set, le contour de l'interface est défini par une fonction, advectée par le champ de vitesse. Cependant, cette méthode ne conserve pas la masse car la pente de la fonction distance (ou fonction 'level-set' en anglais) change au cours de la simulation et doit être régulièrement réinitialisée, opération qui modifie légèrement la position de l'interface, mais l'interface est calculable avec précision.

Pour la méthode VOF, le système est décrit par une fraction volumique de phase advectée par la vitesse. La méthode VOF présente l'avantage de conserver la masse. La précision de la méthode VOF utilisée dépend de la façon dont est traitée numériquement l'interface. Celle-ci peut être 'reconstruite' à chaque pas de temps à partir de la connaissance de la fraction volumique de phase. Il existe différents algorithmes de reconstruction de l'interface. D'autres approches font le choix de ne pas reconstruire l'interface. Celle-ci est donc représentée par la région de transition rapide des fractions volumiques de phase. L'avantage est que les modélisations tridimensionnelles avec un grand nombre de fluides sont facilement accessibles. Le défaut majeur de cette méthode est la diffusion numérique possible de l'interface.

Les méthodes VOF et Level-Set ont été relativement peu utilisées en géosciences, on peut citer toutefois [Bourgouin et al., 2006; Puckett et al., 2018; Robey et Puckett, 2019; Samuel et Evonuk, 2010] à titre d'exemples. Puckett et al. [2018] comparent plusieurs techniques de suivi d'interface et concluent que la méthode VOF pourrait être la méthode la plus adaptée pour modéliser l'interface entre deux milieux de composition chimique différentes. Par ailleurs, ces méthodes (VOF et Level-Set) sont très utilisées pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides type bulles, gouttes ou spray [Bonhomme et al., 2012; Bonometti et Magnaudet, 2006, 2007; Scardovelli et Zaleski, 1999].

Les systèmes étudiés dans le cadre de cette thèse traitent de la différentiation crustale, ce qui implique la coalescence et la séparation des interfaces entre plusieurs fluides (lors de la fusion partielle par exemple). Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode numérique robuste, capable de suivre les interfaces sur des échelles intermédiaires de l'ordre d'une centaine de mètres. Nous allons donc travailler avec deux codes : JADIM (code de l'IMFT) et OpenFOAM (open-source) qui utilisent une méthode VOF sans reconstruction d'interface.

1.4 Objectifs de la thèse

La convection et le diapirisme sont des processus multi-fluides et tridimensionnels qui peuvent expliquer la formation de certains dômes de migmatites observés à la surface de la Terre. Nous étudierons dans le cadre de cette thèse ces processus par modélisation numérique avec une méthode VOF sans reconstruction d'interface. Les résultats obtenus seront comparés avec les structures et les données spatiales et temporelles obtenues sur les dômes de Naxos.

Dans le cadre de cette thèse, on cherche à répondre à des questions de différentes natures.

Questions d'ordre technique :

— La méthode VOF était-elle adaptée pour modéliser les instabilités gravitaires dans la croûte ?

— Quels sont les avantages et inconvénients de cette méthode par rapport à un code de géodynamique classique ?

Questions scientifiques :

— La convection et le diapirisme peuvent-ils expliquer la formation des dômes de Naxos ?

— Quels paramètres (température basale, viscosité) permettent de retrouver les échelles spatiales et temporelles définies pour les dômes de Naxos ?

— Le scénario convection puis diapirisme est-il valide ?

— Quels processus sont nécessaires à la réalisation d'un tel scénario (fusion partielle, ségrégation) ?

Nous décrivons dans le chapitre suivant la méthode VOF et les équations résolues. Nous validons également cette méthode sur des cas de Rayleigh-Taylor et de Rayleigh-Bénard bien connus dans la littérature.

Chapitre 2

Validation des méthodes VOF

Sommaire

2.1 3D modeling of crustal polydiapirs with VOF methods 39
2.1.1 Résumé en français 39
2.1.2 Summary 43
2.1.3 Introduction 43
2.1.4 Numerical methods 46
2.1.5 The Volume Of Fluid method 46
2.1.6 Multi-layer Rayleigh-Taylor (RT) instabilities 49
2.1.7 Multi-layer Rayleigh-Bénard (RB) instabilities 63
2.1.8 Synthesis of codes performances 69
2.1.9 Application to the development of metamorphic domes in Naxos . . . 72
2.1.10 Conclusions 78
2.1.11 Appendices 79
2.2 Portage d'un code VOF initialement sur CPU vers de l'hybride CPU-GPU 88
2.2.1 Contexte 88
2.2.2 Résultats 88
2.3 Couplage systèmes multi-couches et thermique appliqué à Naxos 90
2.3.1 Système bi-couche 90
2.3.2 Système tri-couche thermique 92
2.3.3 Conclusion du couplage systèmes multi-couches et thermique 92

Ce chapitre a pour objectif de présenter les codes à notre disposition (JADIM et OpenFOAM) puis de comparer leurs résultats avec ceux de la littérature ainsi que leur performance afin d'en choisir un qui sera utilisé dans le reste de cette thèse. Ces codes sont comparés à un code classique en géodynamique : ASPECT. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans la revue scientifique *Geophysical Journal International* [Louis-Napoléon et al., 2020]. Je résume d'abord la publication en français avant de la présenter telle qu'elle a été publiée.

Ensuite, j'ai eu l'opportunité de participer à deux hackathons et de collaborer avec des ingénieurs de calcul de l'IMFT et de CALMIP (mésocentre de calcul en Midi-Pyrénées). Je présente ici des résultats complémentaires concernant les performances de JADIM sur GPU obtenus lors de ces hackathons.

Enfin, des modèles supplémentaires sont décrits, qui couplent systèmes multi-fluides et thermiques pour être appliqués à la formation des dômes de Naxos.

2.1 3D modeling of crustal polydiapirs with VOF methods

2.1.1 Résumé en français

L'objectif de cette publication est de valider les codes JADIM et OpenFOAM et leur méthode numérique Volume-Of-Fluid (VOF) en comparant leurs résultats avec ceux de la littérature sur des cas d'instabilités gravitaires de diapirisme et de convection. Une application simple sur le cas de Naxos est ensuite réalisée.

Les méthodes numériques et les codes sont d'abord présentés. JADIM est un code développé à l'IMFT tandis qu'OpenFOAM est un code open-source. Ces deux codes sont basés sur les volumes finis et sur une méthode VOF sans reconstruction d'interface. ASPECT est un code de géodynamique basé sur les éléments finis. Plusieurs méthodes de résolution standard sont implémentées dans ASPECT, nous avons utilisé la méthode des compositions de phases.

Nous montrons alors que dans un système fluide, le système devient indépendant du nombre d'Archimède (ce nombre est défini par l'équation 1.7) si celui-ci est inférieur ou égal à un. Généralement, les nombres d'Archimède dans les systèmes géologiques sont très faibles car la viscosité des fluides est très élevée. Cela implique que le système étudié sera très lent. En vue d'obtenir des résultats plus rapidement, il est intéressant d'augmenter le nombre d'Archimède pour qu'il soit proche de un (généralement en diminuant les viscosités du système) : le système se mettra en mouvement plus rapidement mais la dynamique sera similaire à celle obtenue en gardant les paramètres initiaux.

Ensuite, nous testons les codes sur des benchmarks qui concernent des systèmes de Rayleigh-Taylor et Rayleigh-Bénard proches des processus d'instabilités gravitaires observées en géodynamique. JADIM et OpenFOAM sont testés sur tous les benchmarks avec différents paramètres tandis qu'ASPECT est testé sur un seul cas de chaque benchmark. D'abord, les codes sont testés sur des systèmes de Rayleigh-Taylor visqueux bi- [van Keken et al., 1997] et tri-couches [Weinberg et Schmeling, 1992]. Nous comparons les résultats obtenus qualitativement avec van Keken et al. [1997]; Weinberg et Schmeling [1992] et quantitativement avec l'analyse de stabilité linéaire de Ramberg [1981a] présentée dans l'annexe a) de ce chapitre.

Dans le benchmark de van Keken et al. [1997], un fluide léger s'élève dans un fluide lourd : 3 cas sont testés en faisant varier le ratio de viscosité ($\gamma = 1; 10; 100$) entre les deux fluides. Le taux de croissance est en accord avec la théorie pour tous les codes ($< 4\%$ de différence). Le cas $\gamma = 100$ montre la plus grande différence au niveau de l'écoulement entre les codes par rapport à $\gamma = 1$ ou 10 aux temps longs. Nous avons également comparé les vitesses moyennes données par les codes VOF et trouvé que celles-ci sont en bon accord avec celles de van Keken et al. [1997] pour les faibles ratios de viscosité et diffèrent jusque 18% pour $\gamma = 100$. Il existe différents types d'interpolation de la viscosité de l'interface entre les deux

fluides : arithmétique, harmonique, géométrique. Celle-ci n'était pas précisée dans le cas de van Keken et al. [1997], nous avons trouvé que la loi d'interpolation arithmétique donne des résultats plus proches de ceux publiés par van Keken et al. [1997] que la loi harmonique.

Dans le benchmark de Weinberg et Schmeling [1992], 3 fluides superposés avec des densités et viscosités différentes sont mis en écoulement. On s'intéresse aux cas où apparaît du polydiapirisme ce qui correspond aux cas où le ratio de viscosité entre les couches intermédiaires et supérieures est suffisamment grand (> 100) et où les couches inférieure et intermédiaire sont moins épaisses que la couche supérieure. Nous avons simulé trois cas avec des ratios de viscosité et densité différents. Nous avons comparé les résultats de JADIM, OpenFOAM et ASPECT avec les simulations de Weinberg et Schmeling [1992] et les taux de croissance et longueur d'onde obtenus avec la théorie de stabilité linéaire de Ramberg [1981a]. Les résultats sont globalement en bon accord avec la littérature et entre eux. Toutefois, il faut noter que si les résultats de JADIM, OpenFOAM et ASPECT donnent des résultats similaires au niveau de l'écoulement des fluides, ils diffèrent un peu des résultats donnés par Weinberg et Schmeling [1992] (longueur d'onde plus petite pour nos codes par exemple). JADIM et OpenFOAM donnent des résultats similaires au niveau de l'écoulement même à maillage grossier, ce qui n'est pas le cas d'ASPECT, qui sans une résolution suffisante, donne des taux de croissance qui dévient fortement de la théorie de stabilité linéaire. Selon le cas, l'écoulement peut-être très sensible à la perturbation initiale imposée à l'une ou aux deux interfaces ou à l'interpolation de viscosité aux interfaces, tandis que les taux de croissance ne sont pas sensibles à cela.

Nous avons ensuite développé les cas étudiés en 3 dimensions. Un agencement polygonal des diapirs se développe au début de l'instabilité. Si le début de l'écoulement fait apparaître des taux de croissance similaires avec ceux obtenus en 2D, ce n'est pas le cas aux temps longs où les effets 3D ont plus d'impact. Les allures de l'écoulement en 3D sont équivalents pour les trois codes.

Nous avons également testé les codes sur des systèmes de Rayleigh-Bénard mono- [Vatteville et al., 2009] et bi-couche Le Bars et Davaille [2004]. Là encore les résultats obtenus sont en bons accords avec ceux de la littérature.

Vatteville et al. [2009] comparent études numérique et expérimentale sur le développement d'un panache thermique dans un fluide. Nous avons comparé les formes du panache et les vitesses au centre du panache à différents temps ainsi que la vitesse maximale dans le panache au cours du temps. La forme du panache obtenue avec JADIM et OpenFOAM correspond bien à celle de l'expérience de Vatteville et al. [2009]. Les vitesses maximales données par JADIM et OpenFOAM, si elles sont similaires entre elles, sont légèrement supérieures à celles trouvées par Vatteville et al. [2009], ce qui peut être interprété par le fait que, comme l'indiquent Vatteville et al. [2009], les mesures expérimentales peuvent sous-estimer les vitesses.

Le Bars et Davaille [2004] étudient la convection dans un système bi-couche dont le fluide inférieur est initialement plus dense et plus visqueux que le supérieur. Avec la diminution de densité liée à l'élévation de température à la base, le fluide inférieur devient plus léger et peut fortement déformer l'interface et même conduire au mélange total du système. La viscosité

diminue exponentiellement avec la température. Le nombre de Rayleigh est aux alentours de 2×10^5 pour toutes les simulations, seule la densité du fluide inférieure varie selon les cas pour faire varier le nombre de flottabilité B. Si $B < 0.3$, l'interface est très déformée, le fluide inférieur envahit le fluide supérieur et la convection est globale sur tout le système. Inversement, si $B > 0.3$, l'interface est très peu déformée et chaque couche de fluide convecte séparément. Nous testons 4 cas avec $B = 0.2; 0.3; 0.6; 2$. Evaluer les résultats de ce système de manière quantitative est difficile, nous avons donc essentiellement comparé les résultats avec les clichés des expériences. Les codes présentent des disparités dans la forme des panaches (rectilignes pour JADIM et ASPECT, tandis que ceux d'OpenFOAM ont tendance à retomber), ce qui peut être expliqué par le fait que, pour JADIM, l'interface est plus épaisse en nombre de cellules et que pour ASPECT, le code a tendance à diffuser plus que JADIM et OpenFOAM. De plus, ASPECT a besoin d'une forte perturbation pour démarrer l'instabilité, ce qui n'est pas le cas de JADIM et OpenFOAM dont les instabilités démarrent même lorsque l'interface est non perturbée. Nous avons comparé les taux de croissance des panaches entre les codes. Le taux donné par ASPECT est très différent de celui donné par OpenFOAM et JADIM.

Les résultats, les temps de calcul et la conservation de la masse permettent de comparer les codes : JADIM et OpenFOAM conservent mieux la masse qu'ASPECT mais celui-ci est plus rapide. Par ailleurs, JADIM et OpenFOAM donnent des résultats acceptables même avec un maillage grossier et sont un peu plus précis qu'ASPECT. OpenFOAM donne de bons résultats et est plus rapide que JADIM, c'est pourquoi c'est le code que nous avons choisi pour réaliser une application simple de la formation des dômes de Naxos.

La formation des dômes de Naxos pourrait résulter d'un scénario convectif suivi d'un scénario diapirique [Vanderhaeghe et al., 2018] (figure 1.12). Nous avons modélisé ces deux scénarios séparément afin de voir si les échelles spatiales et temporelles estimées par [Vanderhaeghe et al., 2018] étaient retrouvées :

a) Pour le scénario convectif, nous avons choisi deux cas : l'un où la croûte fait 45 km d'épaisseur et la température en base de croûte atteint 1000°C (le chauffage provient alors d'un retrait de plaque), et un autre où la croûte a une épaisseur de 60km et une température basale de 900°C (le chauffage provient alors de l'épaississement de la croûte). Nous avons trouvé que la densité de la couche n'avait que peu d'impact sur la période et sur la taille des cycles convectifs. En revanche, une viscosité trop élevée ($\sim 10^{18}$ $Pa.s$) inhibe le développement de la convection. Finalement, les paramètres les plus réalistes qui donnent des échelles spatiales ($\sim 10 \times 20$ km pour la taille d'un cycle) et temporelles (~ 2 Ma pour une période) en bon accords avec celles estimées par Vanderhaeghe et al. [2018] sont une épaisseur de croûte de 45 km avec 1000^oC à la base, une viscosité de 10^{17} $Pa.s$ et une densité entre 2700 et 2800 $kg.m^{-3}$. Nous montrons que selon la position du zircon (coeur ou bord de la cellule convective), la différence de température subie et la distance parcourue peut-être très différente.

b) Pour le scénario diapirique, nous nous sommes basés sur un des cas de Weinberg et Schmeling [1992] et avons obtenu des dômes imbriqués de taille 2 km pour les petits dômes intérieurs jusque 10 km pour les plus grands dômes, ce qui correspond à la taille des dômes de

Naxos.

Les scénarios de convection et de diapirisme ont donc effectivement pu avoir lieu à Naxos. En revanche, la façon dont on passe de l'un à l'autre reste à expliquer. Une simulation plus complexe, tenant compte de la fusion partielle et du chauffage interne pourrait permettre d'expliquer la transition entre la convection et le diapirisme, c'est l'objectif du chapitre suivant.

Ma contribution à cette publication a constitué en la production et l'analyse des résultats numériques des 3 codes (JADIM, OpenFOAM et ASPECT) ainsi qu'à la rédaction. Les co-auteurs ont aidé en l'analyse et à la mise en forme des résultats, corrigé, remanié le texte et fournit des références. Concernant le développement des codes, j'ai implémenté un solveur VOF thermique sur OpenFOAM à partir du solveur VOF *interFoam* et du solveur thermique *BoussinesqPimpleFoam*. Les viscosités thermo dépendantes ont été ajoutées dans JADIM et OpenFOAM.

Les résultats majeurs de l'article sont :

— La méthode VOF est adaptée pour étudier la convection et le diapirisme dans un cadre géodynamique en 2D et en 3D,

— Les dynamiques 3D sont différentes des dynamiques 2D,

— La méthode VOF conserve mieux la masse que la méthode des compositions utilisée dans ASPECT, en revanche elle est plus lente,

— La convection et le diapirisme sont des processus ayant potentiellement eu lieu à Naxos, nous disposons d'une gamme de paramètres qui permettent de retrouver les échelles spatiales et temporelles des dômes de Naxos.

Geophysical Journal International

Geophys. J. Int. (2020) **222**, 474–506
Advance Access publication 2020 March 20
GJI Geodynamics and Tectonics

doi: 10.1093/gji/ggaa141

3-D numerical modelling of crustal polydiapirs with volume-of-fluid methods

Aurélie Louis-Napoléon [1,2] Muriel Gerbault,[2] Thomas Bonometti,[1] Cédric Thieulot [3] Roland Martin[2] and Olivier Vanderhaeghe[2]

[1] *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, IMFT, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, CNRS - Toulouse, France. E-mail: aurelie.louisnapoleon@imft.fr*
[2] *GET/UMR 5563, Université de Toulouse, CNRS, IRD, CNES, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse, France*
[3] *Mantle Dynamics & Theoretical Geophysics, Utrecht University (Utrecht), The Netherlands*

Accepted 2020 March 18. Received 2020 March 18; in original form 2019 December 30

2.1.2 Summary

Gravitational instabilities exert a crucial role on the Earth dynamics and in particular on its differentiation. The Earth's crust can be considered as a multilayered fluid with different densities and viscosities, which may become unstable in particular with variations in temperature. With the specific aim to quantify crustal scale polydiapiric instabilities, we test here two codes, JADIM and OpenFOAM, which use a Volume-Of-Fluid (VOF) method without interface reconstruction, and compare them with the geodynamics community code ASPECT, which uses a tracking algorithm based on compositional fields. The VOF method is well-known to preserve strongly deforming interfaces. Both JADIM and OpenFOAM are first tested against documented two and three-layer Rayleigh-Taylor instability configurations in two (2D) and three (3D) dimensions. 2D and 3D results show diapiric growth rates that fit the analytical theory and are found to be slightly more accurate than those obtained with ASPECT. We subsequently compare the results from VOF simulations with previously published Rayleigh-Bénard analogue and numerical experiments. We show that the VOF method is a robust method adapted to the study of diapirism and convection in the Earth's crust, although it is not computationally as fast as ASPECT. OpenFOAM is found to run faster than, and conserve mass as well as JADIM. Finally, we provide a preliminary application to the polydiapiric dynamics of the orogenic crust of Naxos Island (Greece) at about 16 My, and propose a two-stages scenario of convection and diapirism. The timing and dimensions of the modeled gravitational instabilities not only corroborate previous estimates of timing and dimensions associated to the dynamics of this hot crustal domain, but also bring preliminary insight on its rheological and tectonic contexts.

2.1.3 Introduction

Thermally and chemically driven gravitational instabilities are the main processes involved in the differentiation of the Earth [Christensen, 1984; Christensen et Yuen, 1985; Ko-

RENAGA, 2018; SCHUBERT et TURCOTTE, 1971]. In turn, the Earth's crust itself is subject to differentiation owing to magmatism, metamorphism and deformation [RUDNICK et FOUNTAIN, 1995; TAYLOR et MCLENNAN, 1985]. It has been proposed that partial melting of orogenic roots modifies their rheology and allows for the development of gravitational instabilities that play a key role in controlling crustal differentiation [BROWN, 1994; BURG et VANDERHAEGHE, 1993; CRUDEN et al., 1995; GERBAULT et al., 2018; GERYA et al., 2008; JULL et KELEMEN, 2001; PERCHUK et al., 1992; RAMBERG, 1980, 1981a; SAWYER, 1994; VANDERHAEGHE, 2009; VIGNERESSE, 2006; WEINBERG et PODLADCHIKOV, 1994].

Gneiss domes observed worldwide are interpreted as the result of gravitational instabilities developed within a hot partially molten crust [WHITNEY et al., 2004b]. Active convection of partially molten crust has also been proposed, involving several tens of cubic kilometers of weak and light material during generally more than 10 million years [RIEL et al., 2016; VANDERHAEGHE et al., 2018]. As an example case, the area of Naxos island (Greece) presents typical domes and subdomes which have been interpreted as possibly resulting from polydiapirism and convection [VANDERHAEGHE et al., 2018].

Whereas several studies have simulated gravitational instabilities of two or more crustal layers such as POLIAKOV et al. [1993] or WILCOCK et WHITEHEAD [1991], very few have, to our knowledge, precisely compared their results with theory. RAMBERG [1972] compared his theory with geophysical data, while BERNER et al. [1972] compared numerical and experimental models with Ramberg's theory RAMBERG [1981a], explaining their misfit by an insufficient number of elements and an "oversized" time step. Some studies have predicted semi-analytically the growth rate and wavelength for two layer systems : in an infinite half-space as WHITEHEAD [1988], KAUS [2004], BURG et al. [2004], SCHMALHOLZ et PODLADCHIKOV [1999], or in a finite space [SELIG, 1965; TURCOTTE et SCHUBERT, 1982]. However as a matter of fact, polydiapiric crustal structures do not appear to have been much studied independently from a context of tensile or compressional tectonic drive, since the analytical and experimental models of Rayleigh-Taylor instabilities carried out by RAMBERG [1981a] and the numerical models by WEINBERG et SCHMELING [1992]. Field observations of polydiapirism leave open the question of whether relatively small dome structures first form independently at depth and then merge or coalesce to form a single larger structure (dome) close to the surface, or whether this large dome already develops at depth and then progressively develops additional instabilities upon rising (progressive segregation and subdomes). Finding out the correct process would allow to identify from which depth and which environment do specific elements and compositions appear, separate or co-exist, constraining the evolution of distinct elementary compositions, some of which lead to the concentration of mineral resources [EGLINGER et al., 2016; MENANT et al., 2018; TOÉ et al., 2013].

On the other hand, convection in the Earth's mantle has been extensively studied both numerically and experimentally (BERCOVICI [2010] and references there in). In this well developed field, numerical codes can encounter issues with mass conservation and numerical diffusion at layers interfaces [DEUBELBEISS et KAUS, 2008; HEISTER et al., 2017; HILLEBRAND et al.,

2014; Pusok et al., 2017; Schmeling et al., 2008]. This is an even more critical issue when dealing with crustal scale instabilities, since crustal differentiation involves the recurrent separation, coalescence and segregation of layers of highly contrasted compositions that evolve during melting and deformation. These segregation and coalescence processes occur at different scales, and require a robust numerical tool in terms of tracking the evolution of chemical interfaces at the intermediate scale of a few hundred meters. This motivates the use of a Volume-Of-Fluid (VOF) method, dedicated to the conservation of chemical interfaces. Recently, Puckett et al. [2018] compared a VOF method (employing interface reconstruction) against other standard methods in models of mantle convection. They qualitatively studied two-layer Rayleigh-Taylor and Rayleigh-Bénard systems in 2D, and concluded that their VOF method may be the most appropriate method for modeling interfaces separating chemical compositions. In the present contribution, we present two existing codes namely JADIM and OpenFOAM built on VOF methods *without* interface reconstruction, and which were initially developed for other purposes (bubbles, drops, free-surface flows). JADIM is an in-house Fortran code developed at IMFT, and was proved to accurately describe two- and three-layer flows involving strongly deforming interfaces [Bonhomme et al., 2012; Bonometti et Magnaudet, 2006]. OpenFOAM in turn, is an open-source C++ code that offers a VOF solver for fluid mechanics [Jasak et al., 2007]. OpenFOAM has been used in the Geosciences community in the last years [Dietterich et al., 2017; Orgogozo et al., 2014] but with other solvers adapted to the modelling of water and lava flows. We here test both codes for the development of crustal scale convective instabilities in 2D and 3D.

We aim at checking the accuracy and performance of both JADIM and OpenFOAM codes when modeling Rayleigh-Taylor and Rayleigh-Bénard instabilities in two and three dimensions. We therefore compare the computed solutions with available analytical solutions as well as with those obtained with the open source mantle convection code ASPECT version 2.1.0 [Bangerth et al., 2019; Heister et al., 2017; Kronbichler et al., 2012]. We first check whether the VOF method without interface reconstruction is able to reproduce complex 2D and 3D Rayleigh-Taylor and Rayleigh-Bénard crustal scale systems. Based on the accuracy and performance of the results, one code is chosen to model gravitational instabilities in the specific context of Naxos Island (Greece). As such the present contribution stands as a preliminary study, that first validates the VOF method when used to model crustal flows, and second paves the way to a second contribution aiming at further exploring the influence of sub-scale crustal properties, then fully benefiting from the robustness of the VOF method.

This study is structured as follows. We first introduce the numerical methods (Section 2.1.4). The results for standard iso-thermal two- and three-layer systems (Rayleigh-Taylor instability) are then presented in Section 2.1.6, compared with reference models [van Keken et al., 1997; Weinberg et Schmeling, 1992] and linear stability theory. Three-dimensional simulations are then compared with the two-dimensional three-layer systems. In Section 2.1.7, Rayleigh-Bénard instabilities in one- and two-layer systems are simulated and compared with experimental results [Le Bars et Davaille, 2004; Vatteville et al., 2009]. In Section 2.1.8,

we discuss the codes performances and their suitability to model polydiapirism. Section 6 presents a preliminary application to Naxos, in which we illustrate the macroscopic thermo-mechanical setting with which the Naxos crust would have been able to develop its characteristic domes and sub-domes [Vanderhaeghe et al., 2018].

2.1.4 Numerical methods

2.1.5 The Volume Of Fluid method

The Volume-Of-Fluid (VOF) method is a fixed-grid approach based on the one-fluid model and considers that the various immiscible fluids (or 'phases') can be described as a single fluid whose local physical properties, namely density and viscosity, vary in space and time depending on the volume fraction C_i of each phase i [Hirt et Nichols, 1981; Youngs, 1982]. The volume fraction of each fluid intrinsically obeys $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$ where n is the number of phases. In the present study, we consider one-, two- and three-phase systems and $1 \leq n \leq 3$. Typically, $C_i = 1$ in grid cells filled only with fluid i, and $0 < C_i < 1$ in grid cells cross–cut by an interface. At this point need is to mention the two main classes of VOF methods : methods that try to reconstruct exactly the interface between fluids (e.g. Puckett et al. [2018]), which requires significant computational time, and methods that do not, such as in the present approaches with JADIM and OpenFOAM. With no interface reconstruction, the thickness of the interfacial region is defined by $0 < C_i < 1$, and typically occupies two to three grid cells. Dimensionless equations are presented in Appendix b). Without any thermal effect, the local density ρ and viscosity μ of the fluids follow the relations :

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} C_i \rho_i \quad ; \quad \mu = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\mu_i} \right)^{-1} . \tag{2.1}$$

Note that the first equation in (2.1) is exact while the second equation is an *ad-hoc* approximation (details given further below for the choice of μ's interpolation, and see Schmeling et al. [2008]). When thermal effects are taken into account (Section 4), the properties of the fluid are expressed as a function of both the volume fraction C_i and the temperature T, as specified below (Eqs. 2.6, 2.7).

The general set of solved governing equations are the transport of the volume fractions, mass, momentum and energy equations, expressed as :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C_i = -\nabla \cdot (\mathbf{U}_r C_r), \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{2.3}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \ \mathbf{U} = -\nabla P + \tilde{\rho} \mathbf{g} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)], \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \tag{2.5}$$

where $\mathbf{U}$, P, T are the velocity, pressure and temperature of the flow respectively, and $\mathbf{g}$ is the gravitational acceleration. It is worth noting that when used, the temperature-dependency of density is only applied to the gravitational term $\tilde{\rho}\mathbf{g}$ (Boussinesq approximation). In particular, we set

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{n} C_i \rho_i \mathcal{F}_i(T) \quad ; \quad \tilde{\mu} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\mu_i \mathcal{G}_i(T)} \right)^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{F}_i(T) = 1 - \alpha_i (T - T_i^{ref}), \tag{2.7}$$

where T_i^{ref} and α_i are the reference temperature and the thermal expansion coefficient of fluid i respectively, and $\mathcal{G}_i(T)$ is function of temperature. Since $\mathcal{G}_i(T)$ is model-specific, it will be defined below in each case.

In theory the r.h.s. of (2.2) should be zero, which is the case for JADIM and ASPECT. However, for OpenFOAM the term $-\nabla \cdot (\mathbf{U}_r C_r)$ is artificially added to (2.2) to reduce the effects of numerical smearing of the interface, where $C_r = C_1 \cdot (1 - C_1)$, and $\mathbf{U}_r$, designated by Berberović et al. [2009] as a "compression velocity", is evaluated at cell faces as a volume flux based on the maximum velocity magnitude in the interface region. This velocity is obtained from a face interpolation using the 'normalized variable diagram' of Jasak et al. [1999] (NVD approach), who proposed a high resolution differentiation scheme with a limiter (based on the ratio between volumetric flux gradients calculated at adjacent cell faces and cell centers). We refer the interested reader to Berberović et al. [2009] for further information.

Equations (2.2)-(2.5) are solved on a structured staggered grid (JADIM) or on a complex mixture of collocated/staggered grid (OpenFOAM) using a finite-volume technique and a projection method used to enforce incompressibility. Domain decomposition and MPI parallelization is performed to allow for high resolution simulations with a large number of grid cells.

a) Solvers characteristics

In JADIM, Eq. (2.2) is solved using a modified version of the Flux Corrected Transport technique of Zalesak [1979] while Eq. (2.4)-(2.5) are solved via a third order Runge-Kutta/Crank-Nicolson time-advancement scheme, the spatial gradients being approximated by a second-order central difference discretization. Pressure is computed by solving a Poisson pseudo-equation using the PETSC library. The linear system is solved by a Jacobi preconditioned conjugate gradient technique. The full numerical approach has been extensively described by Bonometti et Magnaudet [2007] and is not repeated here. JADIM is available only in the frame of a collaboration with IMFT.

In OpenFOAM (version 4.0 is used here), Eq. (2.2) is solved using a Multidimensional Universal Limiter with Explicit Solution (MULES, Deshpande et al. [2012]) while Eqs. (2.3)-

	JADIM	OpenFOAM	ASPECT
General method	VOF	VOF	Compositional fields
Grid	Eulerian	Eulerian	Eulerian
Time	3^d order Runge-Kutta/Crank-Nicolson	1^{st} order Euler implicit	BDF-2
Spatial gradient	2^d order central difference	upwind	Q_2 + EV stabilisation

TABLEAU 2.1 – Numerical characteristics of the codes used in this work.

(2.4) are solved by a Pressure Implicit Splitting Operator (PISO) algorithm [ISSA, 1986], in which the momentum equation is solved first, considering the pressure at the previous time step. The solution gives an approximation of the new velocity field, which is used to solve the pressure equation to provide a first estimate of the new pressure field. This loop is then repeated with this new pressure field in order to correct the new velocity field, until a predetermined tolerance is reached. Eq. (2.5) is solved by a first order Euler implicit time stepping algorithm. The OpenFOAM solvers named *InterFoam*, *Multiphase-InterFoam* (Rayleigh-Taylor instability) are used for Section 2.1.6, and are directly available in OpenFOAM. To solve the Rayleigh-Bénard cases of Section 2.1.7, we built our own solver which combines *InterFoam* and *BuoyantBoussinesq-PimpleFoam* (a two-fluid VOF solver of the energy Eq.2.5), available here : https://gitlab.com/AurelieLN/openfoam.git.

ASPECT (version 2.1.0 in optimized mode is used here, BANGERTH et al. [2019]; HEISTER et al. [2017]; KRONBICHLER et al. [2012]) is a versatile state-of-the-art Finite Element code which is based on the deal.II library [ARNDT et al., 2019]. It is currently one of the most used open-source codes developed by the geodynamics community studying mantle convection and/or lithospheric deformation. Taylor-Hood elements are used for the Stokes equations [DONEA et HUERTA, 2003], while second order elements are used for the temperature equation. The numerical methods implemented in ASPECT relevant to this study are presented in KRONBICHLER et al. [2012] and HEISTER et al. [2017]. Material tracking is based on compositional fields (one field per fluid) and their corresponding advection equations are solved with second-order elements too, stabilised with the Entropy Viscosity method [GUERMOND et al., 2011]. Although ASPECT allows the user a) to tune the parameters of the Entropy Viscosity method, b) to use the SUPG method [BROOKS et HUGHES, 1982] instead, c) to use a discontinuous Galerkin Finite Element method [HE et al., 2017] for the advection–diffusion equations and d) to use the Particle-in-Cell method [GASSMÖLLER et al., 2019, 2018], we felt that such explorations are outside the scope of this work and therefore resorted to using only default parameters. While a VOF method has been implemented in ASPECT [ROBEY et PUCKETT, 2019], we do not use it here, first because it was published subsequently to the main development of our study, and second because at the time of writing it is only available in 2D. Table 2.1 summarizes the main features of JADIM, OpenFOAM and ASPECT.

b) Inertia and Archimedes number

JADIM and OpenFOAM solve the Navier-Stokes equation on a Cartesian grid, and their formulation gives the possibility to take into account inertial processes (without extra cost in computational performance). In the considered Rayleigh-Taylor problems (van Keken et al. [1997] and Weinberg et Schmeling [1992]) inertia is negligible in Eq. 2.4, and its presence in the formulation does not affect the results. Indeed, Eqs. 128 and 131 of Chandrasekhar [2013] and Ramberg [1968a] showed that for a two-layer Rayleigh-Taylor system with a single kinematic viscosity ν, inertia can be neglected when the wavelength $\lambda \leqslant 2\pi \left(\frac{4\nu^2}{At\, g}\right)^{1/3}$, with $At = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$, and it is the case for the systems studied here.

Furthermore, since both JADIM and OpenFOAM are not fully implicit in the viscosity term, our numerical time steps are constrained to remain small. To circumvent unrealistic computational times, we decrease the viscosity artificially and show that this does not modify the characteristics of the modeled instabilities. To show this, we use the Archimedes number which compares buoyancy forces to viscous forces :

$$Ar = \frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_2)gH^3}{\mu_1^2} \tag{2.8}$$

We show in Appendix b) that a system with $Ar << 1$ and a system with $Ar = 1$ display equivalent behaviours. This behaviour can be assimilated to the independence of the corresponding drag coefficient on the Reynolds number in the Stokes flow regime [Duan et al., 2015].

2.1.6 Multi-layer Rayleigh-Taylor (RT) instabilities

We define a series of numerical experiments in 2D and 3D Cartesian geometries to test the accuracy and the efficiency of the VOF method. In this section, the density and viscosity of each phase are kept constant and independent of temperature. Thus only Eqs. (2.2)-(2.4) are solved with $\mathcal{F}(T) = \mathcal{G}(T) = 1$. We first show the standard van Keken et al. [1997] two-layer system and compare the results produced by JADIM, OpenFOAM and ASPECT. Then, we study a three-layer system using the setup defined by Weinberg et Schmeling [1992] for crustal scale polydiapirism. The original results are compared with those computed with JADIM, OpenFOAM and ASPECT. We display a comparison with linear stability theory in all cases and show the evolution of the mass error. Below, we first briefly describe the linear stability theory and then present results for two-layer and three-layer systems in 2D. The last subsection deals with 3D three-layer systems.

a) Linear stability theory (LST)

The linear stability theory of Ramberg [1981a] predicts the dispersion relation between the wavelength and the growth rate of interfaces for a system with two or more horizontal layers of fluid of arbitrary density and viscosity, in an unstable configuration. The position y_i of the interface that delimits each layer i takes the form :

$$y_i(t) = A_i e^{K_i q_i t}, \tag{2.9}$$

where A_i depends on the initial perturbation, $\sigma_i = K_i q_i$ is the growth rate and q_i is defined as

$$q_i = \frac{(\rho_i - \rho_{i+1}) g h_{i+1}}{2\mu_{i+1}}. \tag{2.10}$$

The parameter K_i is a cumbersome combination of the dimensionless parameters $\gamma = \mu_i/\mu_{i+1}$, h_i/H, ρ_i/ρ_{i+1} and $(\rho_i - \rho_{i+1})(\rho_{i+1} - \rho_{i+2})$, and its detailed formulation is found by solving the linear system of Ramberg [1981a] (see Eq. 2.15). Note that the theory presented in Ramberg [1981a] is valid when the interface height does not move more than 10% of the wavelength.

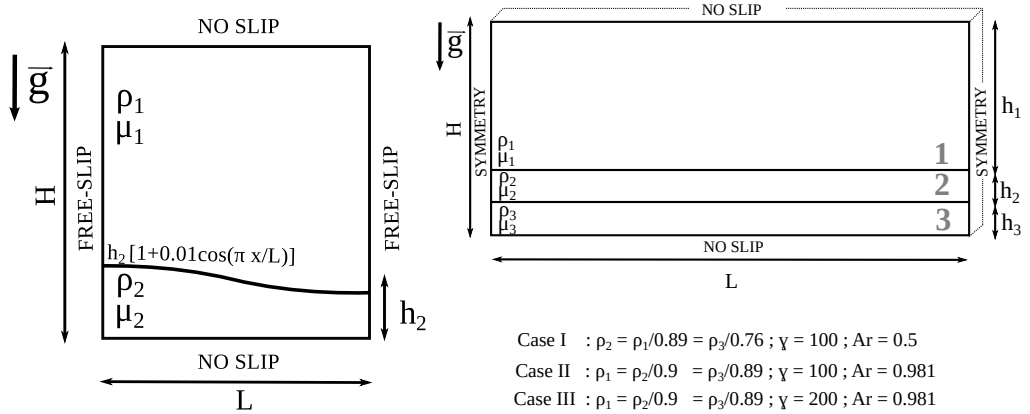
Time, length and velocity are scaled by $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}$ and $\mathcal{U}$ as follows, using layer 2 as reference

$$\mathcal{T} = q^{-1} = \frac{2\mu_2}{(\rho_1 - \rho_2) g h_2}; \quad \mathcal{L} = h_2; \quad \mathcal{U} = q h_2. \tag{2.11}$$

b) Two-layer Rayleigh-Taylor system

Numerical setup

We first start with the standard test case of a two-layer viscous Rayleigh-Taylor instability proposed by van Keken et al. [1997]. A fluid of density ρ_1 and viscosity μ_1 is located above a less dense fluid of density ρ_2, viscosity μ_2 and thickness h_2 in a rectangular box of length L and height H. The two fluids are separated by a sinusoidal interface of low amplitude (Fig. 2.1). No-slip boundary conditions are used along the horizontal walls, free-slip conditions are used along the vertical walls, and a zero normal gradient is imposed for the volume fraction. For our numerical models considering a two layer system, we set $Ar = 1$, $\rho_1/\rho_2 = 1.1$, $h_2/H = 0.2$, and vary $\gamma = \mu_1/\mu_2 = [1, 10, 10^2]$.



(a) van Keken et al. [1997] setup (b) Weinberg et Schmeling [1992] setup

Figure 2.1 – a) Initial geometry of the two-layer Rayleigh-Taylor system and boundary conditions used in the van Keken et al. [1997] test case : $h_2/H = 0.2$ and $L/H = 0.9142$. b) Initial geometry of the three-layer Rayleigh-Taylor system and boundary conditions used by Weinberg et Schmeling [1992] : $\gamma = \mu_1/\mu_2$ and $\mu_2 = \mu_3$, $h_2 = h_3$ (see text for the specific value of the height ratios and length to height ratios).

In van Keken et al. [1997] a comparison between various numerical approaches was made (e.g. finite-element vs. finite-difference methods using either tracers, markers or field functions for the interface motion). We choose as reference results, those obtained with the finite-element method and a marker chain named Pvk. The reference grid has a resolution of 91×100 elements along the

horizontal and vertical direction, respectively. The time evolution of several quantities is monitored, in particular :

— The dimensionless root mean square velocity : $V_{rms}/\mathcal{U} = \frac{1}{\mathcal{U}}\sqrt{\frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} \|\mathbf{U}\|^2 dS}$, where $\mathcal{A} = L \times H$ is the area of the computational domain.

— The dimensionless growth rate for each layer, cf. Eq. (2.10) : $K = \frac{\sigma}{q}$ (the slope of the V_{rms} curve at the beginning of the system destabilization),

— The relative velocity error : $\Delta V_{rms} = \frac{V_{rms} - V_{rms}^{ref}}{V_{rms}^{ref}}$, where V_{rms}^{ref} is a reference velocity defined later,

— The relative mass error of a phase M with respect to its initial mass M_0 : $\Delta M = \frac{M - M_0}{M_0}$. ΔM is the integral of one fluid within its own area versus the area it occupied at t = 0.

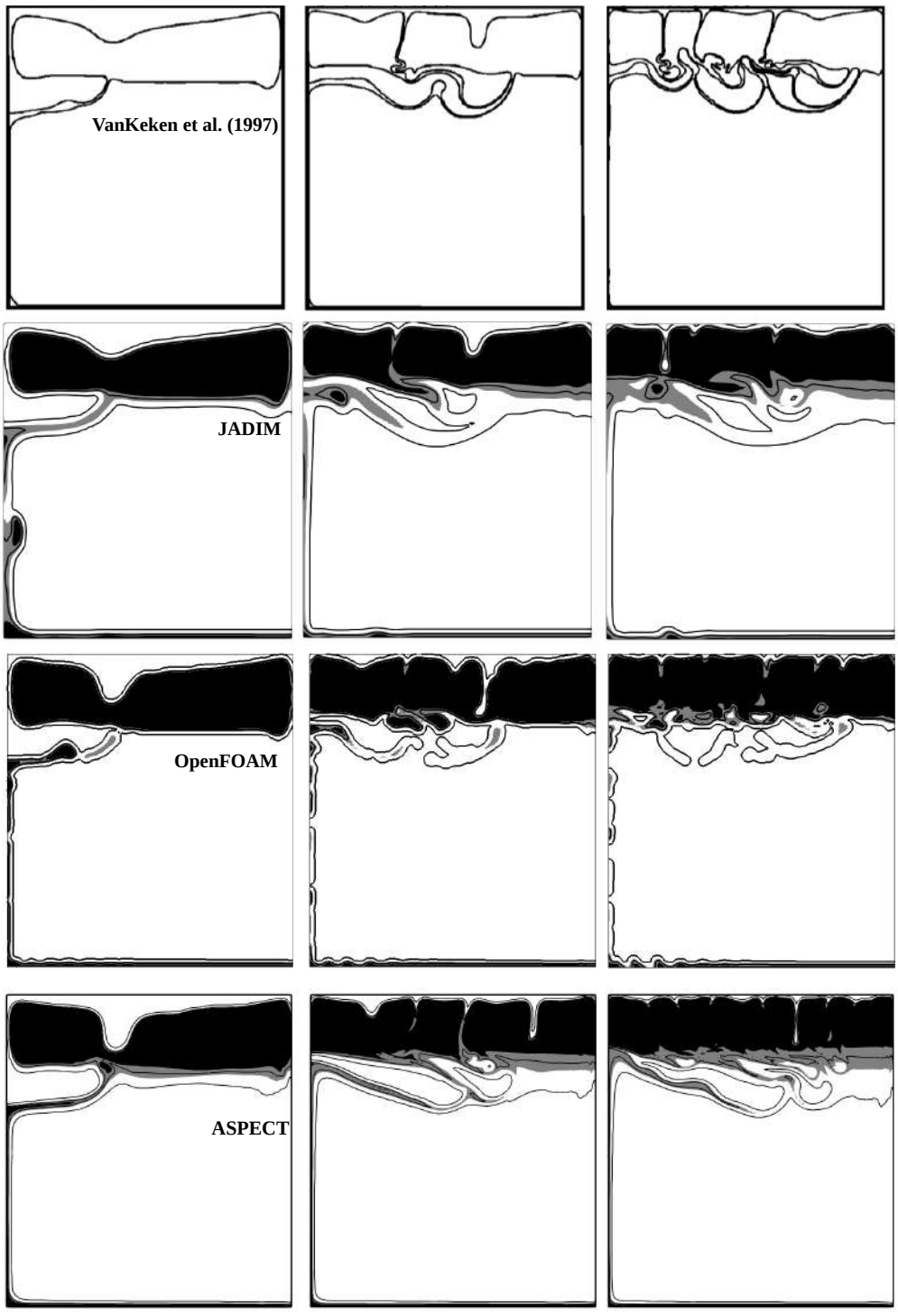
Averaging of the viscosity over an interface is known to potentially lead to different results [Bangerth et al., 2019; Schmeling et al., 2008]. Most common methods are the arithmetic averaging ($\mu = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i$), the geometric averaging ($\mu = \mu_1^{C_1} \mu_2^{C_2}$), and the harmonic averaging ($\mu = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\mu_i}\right)^{-1}$). In van Keken et al. [1997], the method for viscosity averaging over interfaces is not specified. However in a following publication [Tackley et King, 2003], this comparison is used and commented with an arithmetic averaging. Moreover, if we compare our results obtained using the arithmetic averaging (Fig. 2.1.16, 2.2) and those using the harmonic averaging (Fig. 2.1.17), we observe that the arithmetic averaging gives results closer to those of van Keken et al. [1997]. In fact, for a light viscous sphere rising in a more viscous fluid, the arithmetic averaging is found to be more appropriate than the harmonic averaging [Benkenida, 1999]. In the context of this benchmark the situation is alike, with a less viscous blob rising within a more viscous fluid.

Comparison of geometric patterns

We display in Fig. 2.2 snapshots of the time evolution of the two-phase system for three codes, JADIM, OpenFOAM and ASPECT for the viscosity ratio $\gamma = 100$ which displays the most drastic differences (other viscosity ratios are presented in appendix, Fig. 2.1.16). We superpose two types of visualization : isocontours of phase fractions of fluid 2 and colours. Black zones correspond to a phase fraction of fluid 2 between 0.66 and 1, grey zones to a phase fraction between 0.33 and 0.66, and white zones to a phase fraction between 0 and 0.33. The grey zones (where the interface diffuses) are broader for ASPECT than for the two VOF codes. It is only a visual and qualitative comparison.

When the light fluid (fluid 2, black layer) reaches the top right corner of the domain, a layer of heavy fluid remains attached to the top wall (fluid 1, white layer), and continues to drip slowly. The general location of this layer's interface is similar in all three codes to that of van Keken et al. [1997]. However, looking in detail at this layer, we see that all codes develop distinct interface shapes. For instance with OpenFOAM and ASPECT, the secondary central drip plunges faster already at $t/\tau = 50$ than with JADIM or van Keken et al. [1997].

For the test cases $\gamma = 1$ and $\gamma = 10$ in turn, the location of interfaces remains more similar for all three codes (see Appendix, Fig. 2.1.16). Note that the results obtained with OpenFOAM display small instabilities at the bottom of the model domain (Fig. 2.1.16b), similar to what Tackley et King [2003] had obtained with relatively high resolution and a great number of tracers. This is not

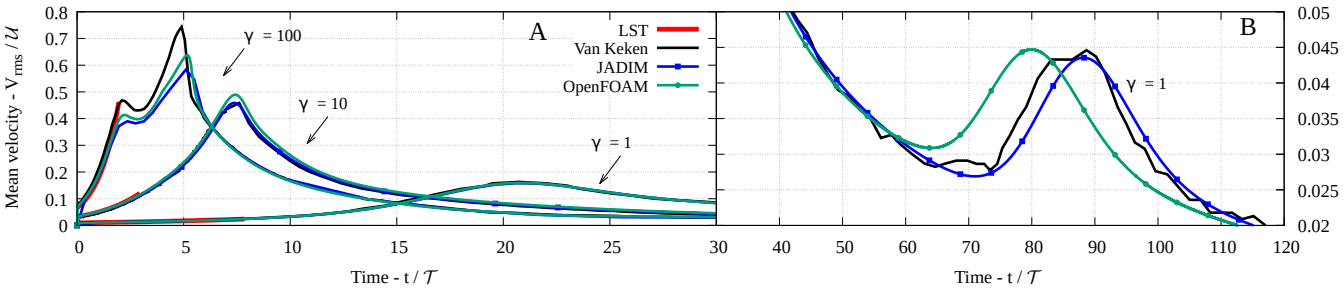


(a) $\gamma = 100$, Arithmetic μ

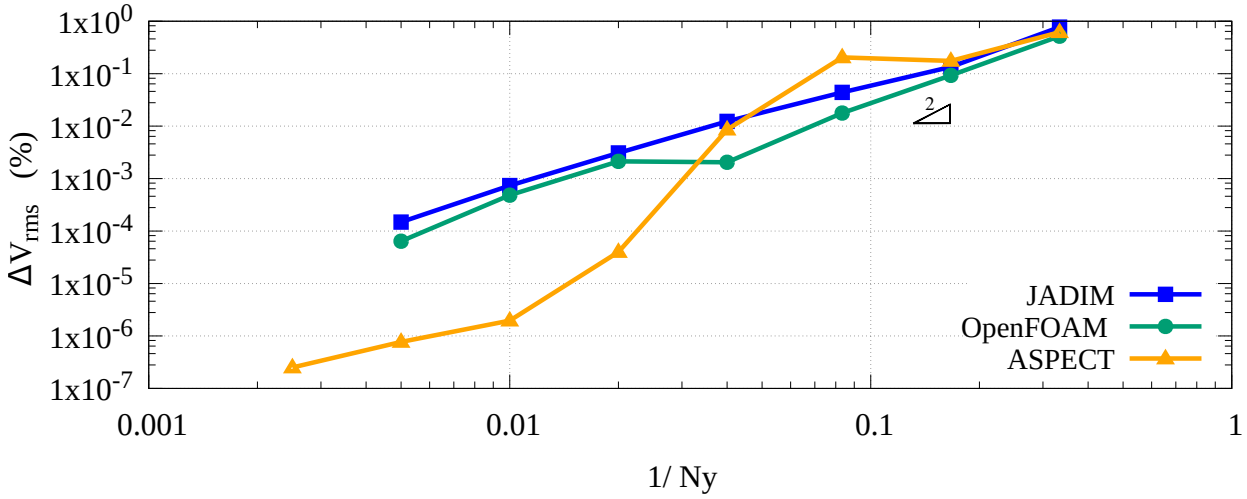
FIGURE 2.2 – Time evolution of the two-phase system for a viscosity ratio of $\gamma = 100$, arithmetic viscosity averaging, at $t/\mathcal{T} = 50, 100, 150$ (columns). The grid size is 91×100 for JADIM, OpenFOAM, and ASPECT. Iso-contours of the volume fraction of fluid 2 (initial bottom layer) are $C_2 = 0.05, 0.5, 0.95$ for JADIM,OpenFOAM and ASPECT. White zone : $0 < C_2 < 0.33$; grey zone : $0.33 < C_2 < 0.66$; black zone : $0.66 < C_2 < 1$.

the case for JADIM since the numerical thickness of the interface is slightly larger (two-three grid cells) than in OpenFOAM. At time $t/\tau = 150$, a bubble is rising with OpenFOAM, is forming with JADIM, but does not exist in VAN KEKEN et al. [1997].

In conclusion, it is delicate at this stage to determine which method should produce the most correct results, and we can only state that structures formed with ASPECT display more diffusion than JADIM or OpenFOAM, which will be corroborated by the following numerical sensitivity tests.



(a)



(b)

FIGURE 2.3 – (a-b) Comparison of the time evolution of the mean velocity in the Rayleigh-Taylor two-layer system by VAN KEKEN et al. [1997], with JADIM and OpenFOAM (arithmetic viscosity averaging and resolution 91×100). Velocity is scaled by $\mathcal{U}$ and time is scaled by $\mathcal{T}$ (Eqs. (2.11)), for various viscosity contrasts $\gamma = \mu_1/\mu_2$. A and B are zooms on the curves. (b) Effect of the spatial resolution on velocity V_{rms} (scaled by $\mathcal{U}$) at $t/\tau = 0.0981$ for JADIM, OpenFOAM and ASPECT ($\gamma = 1$). N_y is the number of cells along the $y-$axis. The general trend is a line of slope ≈ 2.

Numerical sensitivity of the results

We plot in Fig. 2.3a) the time evolution of the dimensionless root mean square velocity ($V_{rms}/\mathcal{U}$), for different viscosity ratios. For $\gamma = 1$, the first velocity peak (inset A in Fig. 2.3a) is always well described even at low resolution (22×25) for both JADIM and OpenFOAM. VAN KEKEN et al. [1997] had observed that the arrival of the second diapir somewhat depends on the numerical code, and in fact the second diapir produced by OpenFOAM rises slightly faster than that simulated by VAN KEKEN et al. [1997] and JADIM (by about $t/\tau = 10$), but it displays the same maximum value inset B in (Fig. 2.3a).

The largest discrepancy occurs for $\gamma = 100$ where the results of JADIM and OpenFOAM underestimate (by 18 and 14 % respectively) the ascent velocity predicted by van Keken et al. [1997] (Fig. 2.3a). For a comparison, we also plot in Fig. 2.3a the linear stability solution [Ramberg, 1981a, see Appendix a) for more details]. For all viscosity ratios, simulations growth rates differ by at most 4 % from the linear stability theory.

Fig. 2.3c presents the relative error of all codes with respect to their own reference value against N_y, the number of grid cell along the $y-$axis. The reference value of each code is the mean velocity V_{rms} obtained at $t/\tau = 0.0981$ with the finest grid. First, relative error decreases as the number of cells increases, showing grid convergence. Second, for a given resolution, the relative error is similar for codes JADIM and OpenFOAM (for example, for $1/N_y = 0.02$, $\Delta V_{rms} = 0.05$ %) and generally lower for ASPECT (for $1/Ny = 0.02$, $\Delta V_{rms} = 0.004$ %). Third, the slope of the curve is roughly 2, indicating that these approaches are second-order accurate in space.

The time evolution of the relative mass error ΔM (in %) for JADIM, OpenFOAM and ASPECT is presented in Fig. 2.1.23. For JADIM and OpenFOAM, ΔM oscillates but is always below 10^{-6} which is very small. ΔM for ASPECT is significantly larger compared to the VOF codes, with $\Delta M \approx 10^{-2}$.

These results show that the two VOF methods JADIM and OpenFOAM reproduce well the van Keken et al. [1997] test case. Tackley et King [2003] had previously explained differences in between models as resulting from the viscosity interpolation scheme with time stepping and with mesh resolution. We show here in addition, that VOF methods such as JADIM and OpenFOAM produce less interface diffusion and less mass error than ASPECT's composition method.

c) Three-layer Rayleigh-Taylor (RT) systems

We now consider Rayleigh-Taylor instabilities in three-layer systems, which have been previously studied by Ramberg [1981a] and Weinberg et Schmeling [1992]. The problem setup is similar to that of the previous section with the addition of a third fluid layer (see Fig. 2.1b). Weinberg et Schmeling [1992] studied various configurations of density and viscosity varying within these layers, assuming that each may represent a different composition or contain variable proportions of molten crustal material. They used a finite-difference method to solve the Stokes equations and tracked the interfaces using markers. In what follows, we study three of the configurations proposed by Weinberg et Schmeling [1992], and compare the results produced by JADIM, OpenFOAM, and for one case by ASPECT (case II), with the linear stability analysis of Ramberg [1981a] (briefly recalled in section a) for multilayers). We extrapolate these setups to three dimensions (3D) in the following section.

RT numerical setups : three cases

Following Weinberg et Schmeling [1992], three configurations are tested. In case I, only the bottom layer 3 is gravitationally unstable. In cases II and III, both the intermediate and bottom layers 2 and 3 are gravitationally unstable. Since we showed in Section b) and Appendix b) that the dynamics of a system remain similar when $Ar \leq 1$, our simulations have $Ar \sim 1$ while in Weinberg et Schmeling [1992] $Ar \sim 10^{-33}$. More specifically, our physical parameters are identical to those of Weinberg et Schmeling [1992] except for the viscosities which are scaled smaller. The length of the

computational domain is set to $L/H = 2.24$ for case I and $L/H = 2.4$ for cases II and III, so that it can include at least one dominant wavelength [Weinberg et Schmeling, 1992]. Both interfaces are perturbed by a random perturbation. In the present computations, our grid size is 224×100 for case I and 240×100 for cases II and III along the horizontal and vertical direction, respectively.

The general three-layer problem is described by five parameters, namely two Archimedes numbers based on properties of fluid 1 and 3, the viscosity ratio, the density ratio and the height ratio. We set $\mu_2 = \mu_3$ and $h_2 = h_3$ and density ratios close to one (they vary in each case), as in Weinberg et Schmeling [1992]. Therefore, the problem reduces to the dimensionless parameters defined in section b), namely, $Ar \approx 1$, $\gamma = \mu_1/\mu_2 = \mu_1/\mu_3 = [100, 200]$ and $h_2/H = h_3/H = 0.125$.

RT numerical results : comparison of geometrical patterns

Fig. 2.4 displays the time evolution of the three-layer Rayleigh-Taylor instability for cases I, II and III. Note that time is scaled by $\mathcal{T}$ (Eq. 2.11) and in order to make a relevant comparison, the origin of time $t = 0$ has been arbitrarily set as the time when one of the interfaces rises by a minimum height of $3 \times 10^{-5} H$ (temporal offset values are given for each 2D and 3D simulations in the figure captions). Indeed, we insert an initial perturbation at the interfaces [as in Weinberg et Schmeling, 1992] which may not be defined exactly in the same manner for each numerical code depending on how the interface is calculated. For JADIM and OpenFOAM, interfaces at heights h_2 and h_3 are defined with a random perturbation of 0.24 % the local volume fraction of the cell crossed by the interface (as in Weinberg et Schmeling [1992]). For ASPECT, both interfaces oscillate as $z \geq h_i + (rand() - 0.5) \times 2.4\ 10^{-10})$.. Thus, the moment of destabilization occurs at different times for each code.

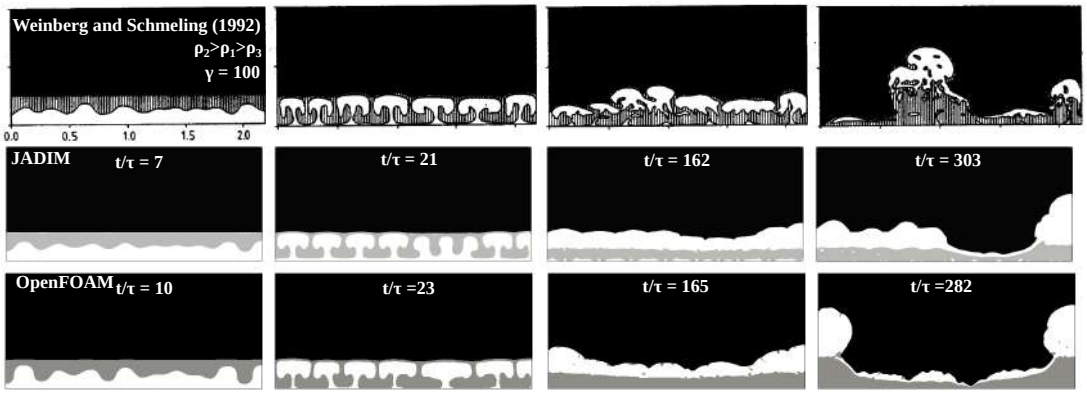
a) Case I : $\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$, $\gamma = 100$, $\rho_1 = 0.89\rho_2 = 1.18\rho_3$ $Ar = 0.5$

The interface separating fluid 2 and fluid 3, from now on denoted as 'interface 2-3', deforms and forms regularly spaced rising domes. These domes merge inside layer 2 to form bigger domes which then rise through layer 1. Weinberg et Schmeling [1992]'s simulation displays 7 diapirs against 8.5 for JADIM and 6.5 for OpenFOAM.

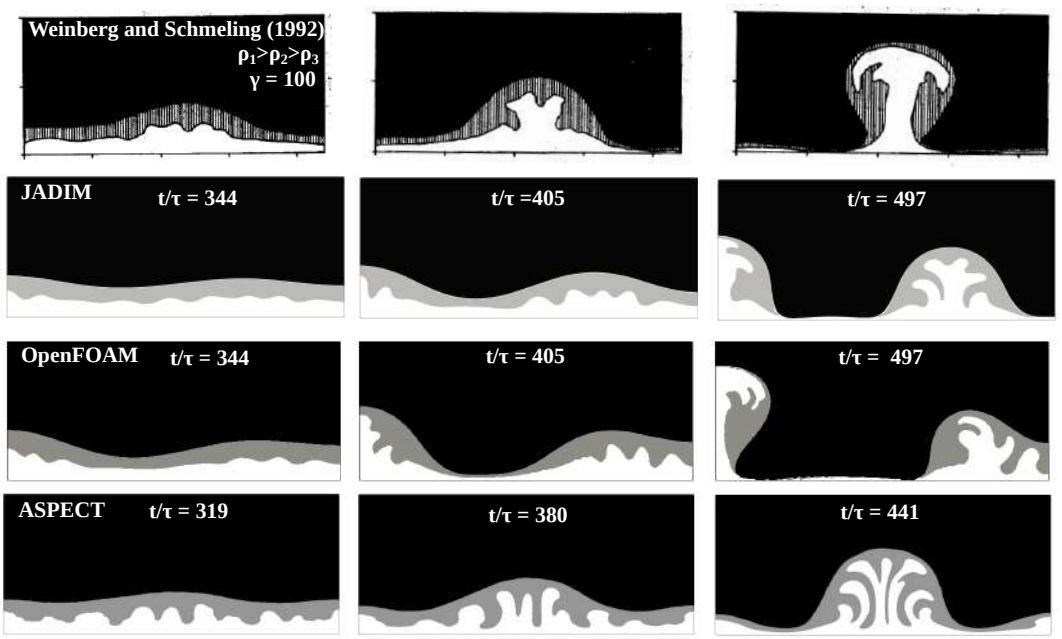
b) Case II : $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$, $\gamma = 100$, $\rho_1 = 1.11\rho_2 = 1.12\rho_3$, $Ar = 0.981$

A mushroom shaped diapir composed of fluid 3 surrounded by fluid 2 (intricated domes structure) rises through layer 1. Diapirs rising to the left for JADIM and OpenFOAM are very similar to the diapir of Weinberg et Schmeling [1992] although it rises at the center of the modeled domain. The diapirs rising to the right for JADIM and OpenFOAM present smaller wavelengths of the interface 2-3 than the diapir of Weinberg et Schmeling [1992]. Nevertheless, the overall shape of the diapirs simulated by JADIM and OpenFOAM is very similar.

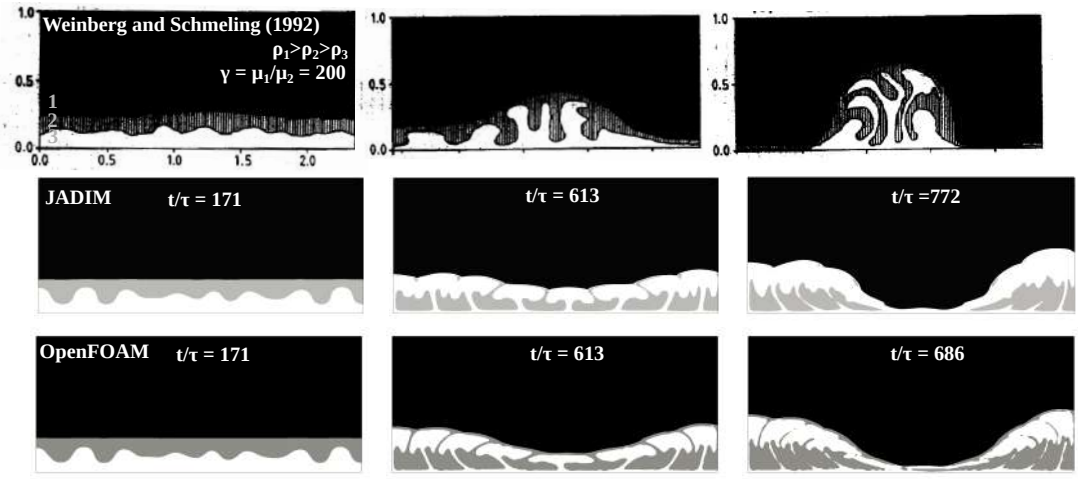
As for ASPECT, only one diapir forms at the center of the domain, as in Weinberg et Schmeling [1992], however the interface 2-3 develops more diapirs (around five at $t/\tau = 441$), which differs from Weinberg et Schmeling [1992] but is rather similar to those obtained with JADIM and OpenFOAM. In fact, the results of ASPECT are very sensitive to the random perturbation inserted at the interfaces and which depends directly on mesh resolution. ASPECT results resemble more those of Weinberg et Schmeling [1992] when the mesh is refined in the vertical direction (150 points with



(a) Case I



(b) Case II



(c) Case III

FIGURE 2.4 – Three-phase Rayleigh-Taylor system by WEINBERG et SCHMELING [1992]. Time evolution of the layers for the different codes : (a) Case I, the middle layer is the densest and $\gamma = 100$, (b) Case II, the top layer is the densest and $\gamma = 100$, and (c) Case III, the top layer is the densest and $\gamma = 200$. Time is scaled by $\mathcal{T}$ with origin $t/\mathcal{T} = 0$ set at the time when one of the interfaces raised by a distance of $3 \times 10^{-5} H$, Time offsets are, for case I : $\text{Off}^1_{JA} = 26$, $\text{Off}^1_{OP} = 24$, case II : $\text{Off}^2_{JA} = 300$, $\text{Off}^2_{OP} = 276$, and case III : $\text{Off}^3_{JA} = 564$, $\text{Off}^3_{OP} = 552$.

respect to 100, see Figure 2.1.202 c).

c) Case III : $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$, $\rho_1 = 1.1\rho_2 = 1.12\rho_3$, $\gamma = 200$, $Ar = 0.9$

The viscosity contrast between the uppermost and the intermediate layers is larger in this case. As a consequence the instability of interface 1-2 develops more slowly than in the previous cases, and the intermediate fluid sinks down rather than rise. Results obtained with JADIM and OpenFOAM are similar but the agreement with the visual aspect of Weinberg et Schmeling [1992] is not as good as for cases I and II. The intermediate fluid coalesces at the bottom of the rising diapir instead of being carried upwards as in Weinberg et Schmeling [1992]. However, the wavelength of interface 1-2 is similar. Using a more refined grid or an arithmetic interpolation for the viscosity at the interface did not improve the results and cannot explain the observed discrepancy. In fact, we obtain similar results when we use a viscosity ratio $\gamma = 100$ and set random perturbation only on the lower interface. Explanations for this discrepancy can be due either to i) erroneous setup details provided in Weinberg et Schmeling [1992] or ii) instabilities tending to develop faster in JADIM and OpenFOAM than in Weinberg et Schmeling [1992].

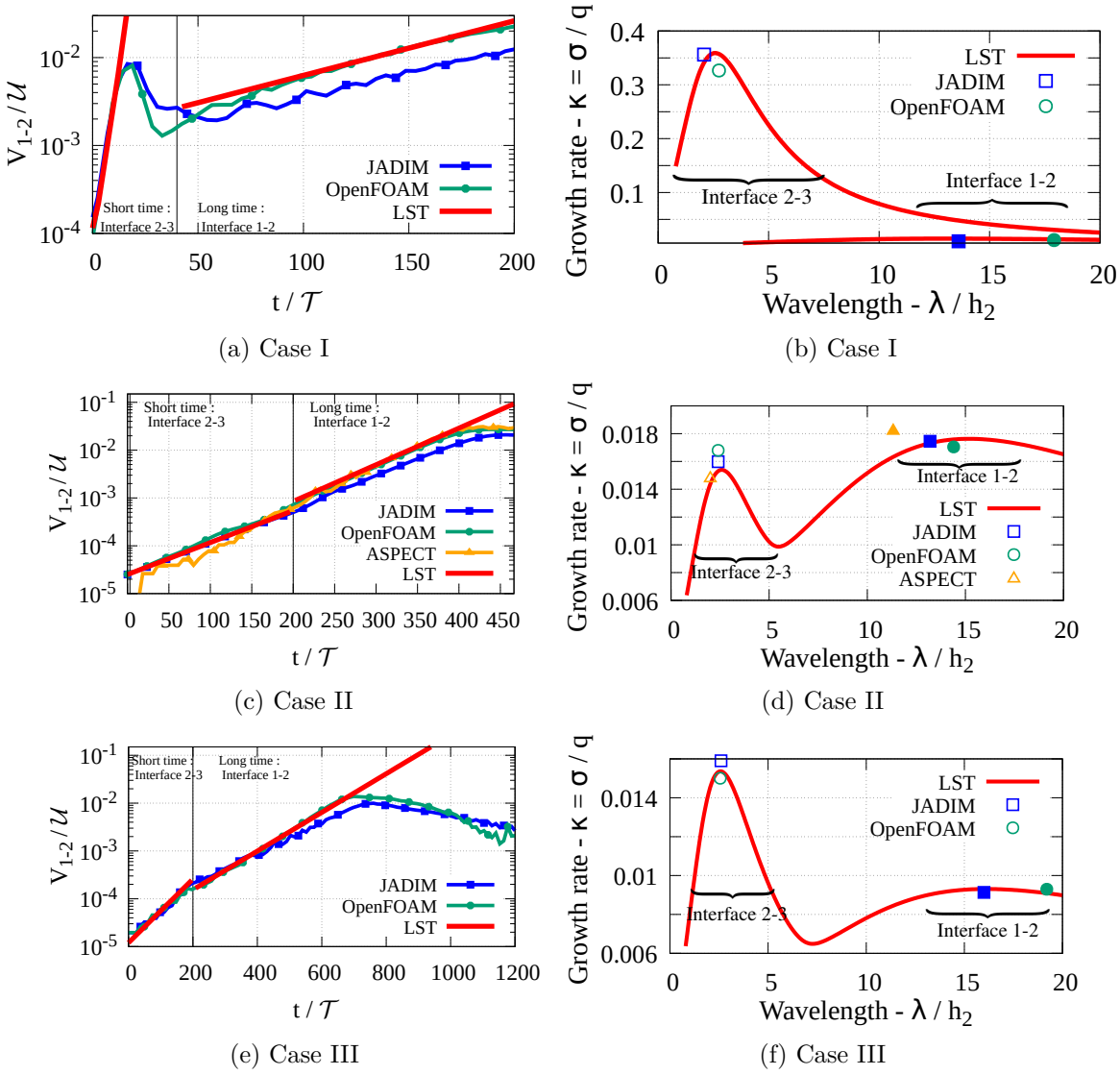
Comparison with RT linear stability theory

In the following, we focus on the initial development of the instabilities at interfaces 2-3 and 1-2. Their growth rates $\sigma_{23} = \log(V_{2-3}/\mathcal{U})/t$, $\sigma_{12} = \log(V_{1-2}/\mathcal{U})/t$ and their wavelengths λ_{23} and λ_{12} are compared with those given by the linear stability theory developed by Ramberg [1981a] (cf. section a) and Appendix 2.15) for three-layer systems. The dominant wavelengths λ_{23} and λ_{12} for each interface 2-3 and 1-2 both correspond to the maximum growth rate.

In the numerical models, the wavelength is measured as the distance separating the axes of symmetry of the diapirs. In case I for instance, one observes at time $t/\mathcal{T} \approx 10$ that the selected wavelength for JADIM is $\lambda/h_2 \approx 2.1$, while for OpenFOAM, one finds $\lambda/h_2 \approx 2.7$ (Fig. 2.4 a). The growth rate is obtained from picking at each time step the velocity of the maximum vertical location of each interface 1-2 and 2-3. The evolution of interface 1-2 is displayed in Fig. 2.5a, c, e for cases I, II and III, respectively. The evolution of interface 2-3 is similar to that of interface 1-2 and it is not shown.

The lin-log representation allows to straightforwardly observe any exponential growth (curve with a constant slope) and measure the growth rate. In case I for instance, one observes a first instability at $5 \lesssim t/\mathcal{T} \lesssim 20$ (Fig. 2.5a). A second exponential growth is seen for $50 \lesssim t/\mathcal{T} \lesssim 200$. This is the signature of the double overturn : the first slope describes when layer 2 grows through layer 3, the second slope when layer 2 grows through layer 1.

For case II, JADIM and OpenFOAM present very similar growth rates and wavelengths until $t/\tau = 100$. Then, ASPECT (orange curve) exhibits a higher growth rate than OpenFOAM (green curve) and JADIM (blue curve). For comparison, we plot in the left column of Fig. 2.5 the prediction of the linear stability theory (red and pink lines for interfaces 1-2 and 2-3, respectively). The slopes of the curves are important whereas the initial location at the origin is not. If we plot parallel lines to the red curves, all codes are in good agreement. However, we find that ASPECT presents some oscillations at $t/\tau < 150$, i.e. at the onset of the destabilization. Therefore, for this code, we consider the slope of interface 2-3 between time $70 < t/\tau < 200$, and the slope of interface 1-2 at $150 < t/\tau < 370$, to evaluate the growth rate displayed in Fig. 2.5 d.



(a) Case I

(b) Case I

(c) Case II

(d) Case II

(e) Case III

(f) Case III

FIGURE 2.5 – Three-phase Rayleigh-Taylor system by WEINBERG et SCHMELING [1992]. Left column : time evolution of the velocity of the maximum height of interface 1-2, simulated in Figs. 2.4 (harmonic viscosity averaging is used here). Right column : maximum growth rate obtained in the simulations as a function of the wavelength, for interfaces 1-2 and 2-3. (a-b) Case I, (c-d) Case II, (e-f) Case III. The red curves correspond to the linear stability theory [RAMBERG, 1981a].

In order to provide a more quantitative comparison, Fig. 2.5 b, d, f displays the dispersion relation (growth rate *vs.* wavelength) obtained from the linear stability theory of Ramberg [1981a] (red curves). For cases II and III, one curve displays the two main wavelengths corresponding to each interface 1-2 and 2-3. For case I, two curves are needed since only interface 2-3 deforms and the instabilities occur at two different times (one time for layer 3 to cross layer 2 and one time for layer 3 to cross layer 1). The growth rates and wavelengths in our simulations are also plotted (symbols). It is worth noting that measuring such growth rates from the simulation is somewhat difficult as its specific value depends on the time span chosen for computing the slope (see Fig. 2.5, left column) and we have chosen to use the maximum growth rate of each interface. In any case, this at least partly explains why the values obtained in the simulations can be slightly larger (or smaller) than the maximum growth rate predicted by the linear stability theory.

In summary, the agreement between the wavelength and growth rate obtained in the simulations using our VOF codes and those predicted by the linear stability analysis of Ramberg [1981a] is rather good since it is always within $15-20\%$. ASPECT does not produce such a good fit (see the growth rate of interface 1-2 in Fig. 2.5d, triangle). The discrepancies can be mainly explained by the difficulty to accurately measure the growth rate since it varies over time. Once again, even if the visual aspect of case III is different from that of Weinberg et Schmeling [1992] (Fig. 2.4c), the growth rate and wavelength given by JADIM and OpenFOAM remain close to the linear stability prediction.

For completeness, we compare our three-layer system results with alternative theories mentioned in the introduction [Burg et al., 2004; Ramberg, 1981a], and therefore separate our system into a top layer and a bottom layer. There are then two ways to proceed : either group the two lower layers together (top layer = layer 1 and bottom layer = layers 2 and 3) or, since the viscosity ratio between layers 1 and 2 is high, layer 1 is set to act as a wall, layer 2 is considered as the top layer and layer 3 as the bottom layer. Hence we compare the growth rate and the wavelength obtained with our codes (JADIM, OpenFOAM, ASPECT) for case II, with :

— Burg et al. [2004]'s predictions for a two-layer system (Eq. a), referred to as BKP),

— Ramberg [1981a]'s theory for a two and a three-layer system (Eq. 2.15, referred to as R).

Results are presented in Table 2.2 a,b for interfaces 1-2 and 2-3, respectively. Note that for interface 1-2, we consider layer 1 as the top layer, and layers 2 and 3 as the bottom layer ; for interface 2-3, we consider layer 2 as the top layer and layer 3 as the bottom layer. The wavelength of interface 2-3 for a three-layer system is correctly predicted by the two-layer system theory of Ramberg [1981a], but the growth rate and wavelength of interface 1-2 are very different. BKP's predictions of both the wavelength and growth rate are very different from the numerical results and do not seem appropriate to describe the present three-layer system. It turns out that the multi-layer theory of Ramberg [1981a] is the one found able to predict both the wavelength and the growth rate for a three-layer system. Indeed, results given by our codes and those from Ramberg [1981a]'s theory for a three-layer system are in good agreement for both interfaces.

Numerical sensitivity of the results - RT case II

Here we carry out various sensitivity tests for case II with JADIM, OpenFOAM and ASPECT. We visually compare structures as well as the evolution of velocity over time. We plot the mass error,

	JADIM		OpenFOAM		ASPECT		2 layers theory		3 layers theory
	2D	3D	2D	3D	2D	3D	BKP	R	R
λ_{12}/h_2	13.2	> 9	14.4	> 9	11.32	> 9	7.2	42.0	15.2
K_{12}	0.017	0.0165	0.017	0.015	0.018	0.02	0.98	13.7	0.017

(a) Interface 1-2

	JADIM		OpenFOAM		ASPECT		2 layers theory		3 layers theory
	2D	3D	2D	3D	2D	3D	BKP	R	R
λ_{23}/h_2	2.4	2.4	2.6	2.4	2.0	2.24	0.8	2.6	2.6
K_{23}	0.015	0.015	0.016	0.0158	0.0148	0.0164	0.1	0.153	0.0154

(b) Interface 2-3

TABLEAU 2.2 – Theoretical and modeled maximum growth rate K_{12} and corresponding wavelength λ_{12} of interface 1-2 (a) and 2-3 (b) Rayleigh-Taylor instabilities case II ; BKP : BURG et al. [2004] ; R : RAMBERG [1981a].

and assess the influence of i) the mesh resolution, ii) the initial perturbation of the interface and iii) the viscosity averaging at the interface (harmonic or arithmetic).

— *Mass Error* - The time evolution of the relative mass error $\Delta M^i = (M^i - M_0^i)/(M_0^i)$ with M^i the mass of phase i and M_0^i the initial mass of phase i, is presented in Fig. 2.1.23. Both JADIM and OpenFOAM display values lower than 10^{-7}.

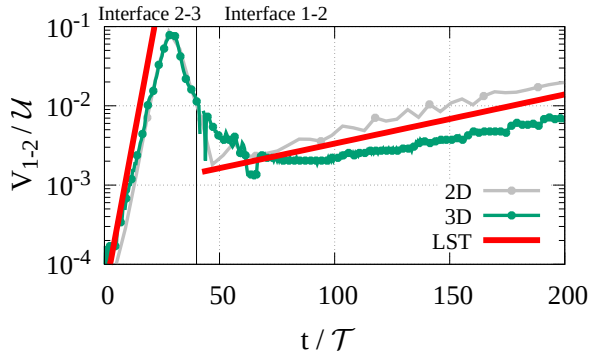
— *Mesh resolution* - Grid convergence is illustrated in Tab. 2.1.4 of Appendix d). Grid independent results are obtained with a relatively coarse grid for JADIM and OpenFOAM (90×37).

— *Initial Perturbation of the interfaces* - We plot and discuss with figures in Appendix d) the time evolution of the velocity of the maximum vertical location of interfaces 1-2 and 2-3, with or without perturbing the two interfaces with a random perturbation in JADIM. In summary, simulations with an initial perturbation are in better agreement with the theory (Fig. 2.5c-d). In contrast for cases I (Fig. 2.1.19 a) and III (Fig. 2.1.19 c)) the shape and dynamics of the interfaces is found to evolve rather independently from initial perturbations at the interfaces.

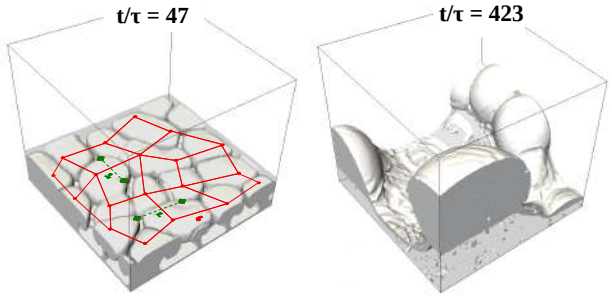
— *Influence of the type of viscosity averaging* - Fig. 2.1.21 of Appendix d) compares the time evolution of the velocity of the maximum vertical location of interface 1-2 for an arithmetic and a harmonic viscosity averaging at the interfaces. The evolution of interface shapes are roughly similar, yet, harmonic averaging favours a behavior controlled by the lowest viscosity at an interface, rendering it easier for layer 2 to invade layer 1 and the corresponding diapir becoming bigger, in comparison with results produced with a arithmetic viscosity averaging. However, we notice that arithmetic averaging provides results more similar to WEINBERG et SCHMELING [1992] at $t/\tau = 497$.

Comparison between two and three dimensional RT models

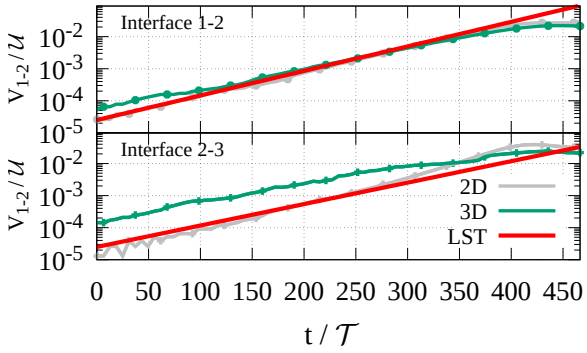
In this section, we perform three-dimensional (3D) simulations extending the 2D setup of WEINBERG et SCHMELING [1992] for cases I, II and III. The first objective is to show the capability of our VOF methods to tackle 3D Rayleigh-Taylor problems ; the second objective is to assess the sensitivity of the theoretical predictions to possible three-dimensional effects. The initial and boundary conditions



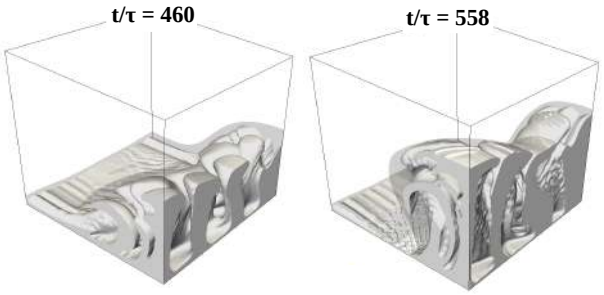
(a) OpenFOAM Case I



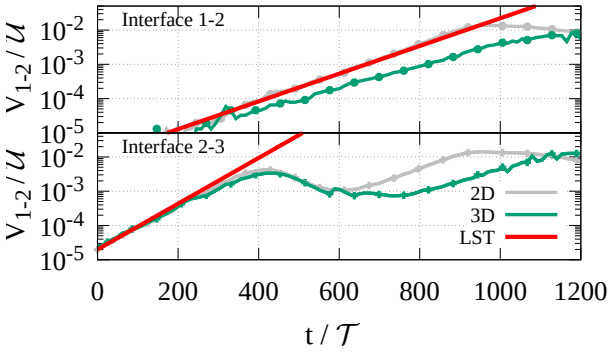
(b) Case I



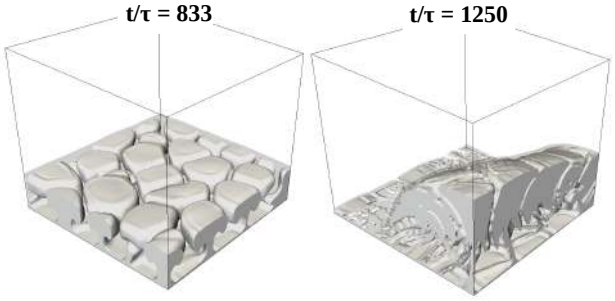
(c) Case II



(d) Case II

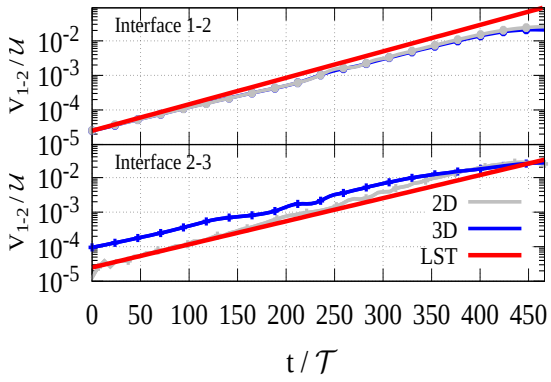


(e) Case III

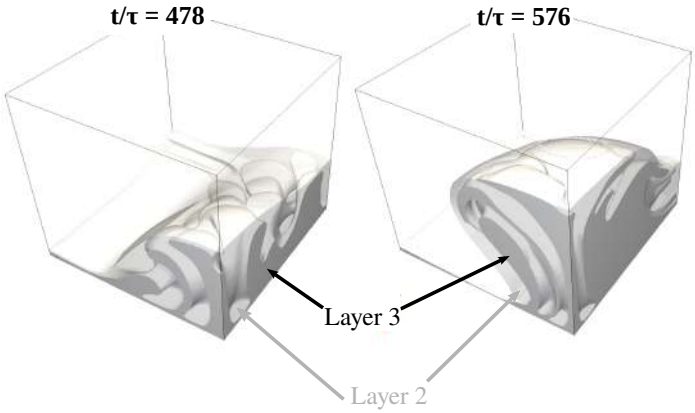


(f) Case III

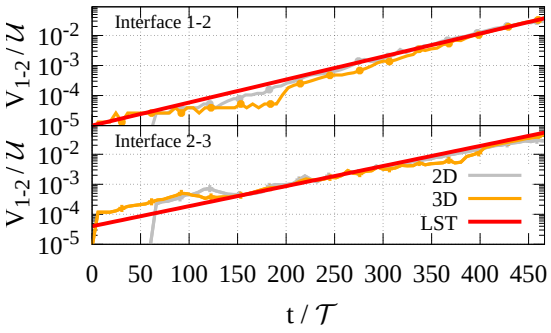
FIGURE 2.6 – Three-dimensional Rayleigh-Taylor simulations of cases (a) I, (c) II and (e) III corresponding to the 2D analogues presented in Fig. 2.5 (WEINBERG [1992]) using OpenFOAM with harmonic viscosity averaging. Here, the horizontal size of the domain is $1.12H$ and the grid size is $112 \times 112 \times 100$. Temporal offsets are chosen, in 3D, for case I : $\text{Off}^1_{OP} = 0$, case II : $\text{Off}^2_{OP} = 300$, case III : $\text{Off}^3_{OP} = 216$. The offsets in 2D are, for case I : $\text{Off}^1_{OP} = 5$, case II : $\text{Off}^2_{OP} = 276$, case III : $\text{Off}^3_{OP} = 300$.



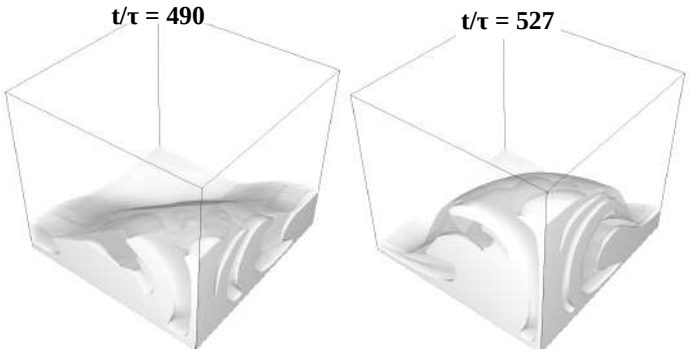
(a) JADIM Case II



(b) JADIM Case II



(c) ASPECT Case II



(d) ASPECT Case II

FIGURE 2.7 – Three-dimensional Rayleigh-Taylor simulations of case II corresponding to the 2D analogues presented in Fig. 2.5 (WEINBERG [1992]) using JADIM (a-b) and ASPECT (c-d) with harmonic viscosity averaging. Here, the horizontal size of the domain is $1.12H$ and the grid size is $112\times112\times100$. Temporal offsets are $\text{Off}^2_{JA} = 282$ in 3D and $\text{Off}^2_{JA} = 300$ in 2D.

are similar to the 2D cases. The size of the domain however, has been shortened along the horizontal directions and $L = 1.12H$ and is discretized using a resolution of $112 \times 112 \times 100$.

The temporal evolution of the 3D system of cases I, II and III are displayed for OpenFOAM in Fig. 2.6. Case II is displayed in Fig.2.7 for JADIM and ASPECT. In all cases, layer 3 starts to destabilize by forming small domes which later evolve as individual diapirs, as previously shown by BERNER et al. [1972]; BIOT [1966]; FERNANDEZ et KAUS [2015]; KAUS [2004]; TALBOT et al. [1991].

In case I (Fig. 2.6a), since layer 2 is denser than the other layers, layer 1 acts as a boundary and the little diapirs merge below interface 1-2 before rising through layer 1. In case II (Fig. 2.7b, d and 2.6d), the little diapirs grow without merging and layer 2 entrains the diapirs on a side of the box (as in 2D). Then, both layers 2 and 3 rise through layer 1. In case III (Fig. 2.6e), the dynamics is roughly similar to that of case II with a larger delay due to the larger viscosity ratio between layers 1 and 2 (200). The little diapirs merge and rise through layer 1 at the same time.

For case II, JADIM, OpenFOAM and ASPECT present similar patterns of deformation, and the general dynamics is quite similar in 2D and 3D. In addition, the wavelength of the patterns are of the same order of magnitude, as indicated in Tables 2.2 and 2.2. BIOT [1966] extended to 3D his 2D linear stability solutions for a multi-layer system. He showed that the distance between peaks and crests in 3D is almost that of the wavelength of the 2D solution (λ_{2D}) as observed here. The spacing

of diapirs both in 2D and 3D follows the predictions of the linear stability theory (if they grow from an initial interface perturbed with a random perturbation).

The time evolution of the interfaces velocities in 3D are compared with the 2D results in the left column of Figs. 2.7 and 2.6. Interestingly, this figure shows that the first instability grows at a similar rate in 2D and in 3D (slopes are similar). However, the 2D and 3D dynamics are not strictly identical : in 3D the rising velocity of the second instability may be different from the 2D one (when fluid 3 has already intruded fluid 2, cf. also second exponential in cases I and III), as shown by the offset between curves. The observed relative difference in velocity can be as large as 15%. Moreover, if JADIM and OpenFOAM yield continuous curves, this is not the case for ASPECT, where, at time $100 < t/\tau < 200$, curves are shifted respect to their continuation.

Fig. 2.6b displays the pattern of layer 3 inside layer 2 for case I (note that we do not consider the pattern of layer 3 into layer 1 since the wavelength of the corresponding instability is of the order of the box size) : a polygonal pattern is observed. Biot [1966] studied 3D patterns of a two-layer Rayleigh-Taylor instability and found that for triangular or hexagonal patterns, the theoretical distance h separating two neighbouring peaks in one horizontal direction relative to that in the orthogonal direction l follows the relation $h/l = 1.155$. Here, we measure the average distances $h^m/h_2 \approx 2.48$ and $l^m/h_2 \approx 2.16$, thus giving $h^m/l^m \approx 1.148$ which is close to the value of Biot [1966]. In addition, Biot [1966] states that the characteristic distance d between peaks is determined to be $d = 1.155\lambda_{2D}$. Here, by computing the mean distance between peaks, we recover that value.

As found in the previous section, JADIM and OpenFOAM produce equivalent results compared to ASPECT. Here again, the mass error (in %) for JADIM and OpenFOAM remains below 10^{-7} in 3D whereas it is only below 10^{-3} for ASPECT (Fig. 2.1.23).

2.1.7 Multi-layer Rayleigh-Bénard (RB) instabilities

In this section, we consider two configurations involving Rayleigh-Bénard instabilities : the case of a single layer of fluid heated at its base with a punctual source, to be compared to the work of Vatteville et al. [2009], and the case of an initially stable stratified two-layer system heated from below, to be compared to the work of Le Bars et Davaille [2004].

In order to solve such configurations with our VOFs methods, the full set of equations (2.2)-(2.5) is solved and both the density and viscosity are now prescribed temperature-dependent. In particular, the density follows a Boussinesq law $\tilde{\rho} = \rho_0 \cdot \mathcal{F}(T)$ with $\mathcal{F}(T) = 1 - \alpha(T - T_{ref})$ where T_{ref} is a reference temperature and α is the thermal expansion coefficient. The viscosity follows a law $\tilde{\mu} = \mu_0 \cdot \mathcal{G}(T)$, which will be detailed for each configurations.

a) One-layer Rayleigh-Bénard system

We aim here at reproducing the well-controlled laboratory and numerical experiments performed by Vatteville et al. [2009]. Initially, a fluid of density ρ_1,viscosity μ_1 and temperature T_{in} is placed in a cylindrical tank of radius L and height H (see Fig. 2.8a). A local heat source is placed in a small region (r_h) at the center of the cylinder's base, with a temperature that increases with time from T_{in} to T_H following the law $T(t)/T_R = 1.0 + 0.09(1 - \exp(-t/26.3))$ (T in Kelvin). This problem is controlled by two dimensionless parameters,e.g. the Prandtl number, a function of $\nu = \mu/\rho$ the

kinematic viscosity and D_{th} the heat diffusivity, and the Rayleigh number, where $\Delta T = T_H - T_{in}$:

$$Pr = \frac{\nu}{D_{th}}, \qquad Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{D_{th}\nu}. \tag{2.12}$$

The problem is assumed to be axisymmetric around a central vertical axis, therefore computations are performed using a two-dimensional grid of size 170×322 along the radial and vertical directions, respectively. Boundary conditions are given in Fig. 2.8a. The temperature-dependent viscosity $\tilde{\mu} = \mu_0 \cdot \mathcal{G}(T)$ is provided by Vatteville et al. [2009], who evaluated an empirical law $\mathcal{G}(T) = 1.9\exp(-7.11+1892.0/T)$, with T in Kelvin. With their choice of temperature range $[T_{in}, T_H]$, the largest viscosity contrast reaches $\mu_{max}/\mu_{min} \leq 2$.

In the experiment, and after some time during which heat diffuses in the thermal boundary layer around the heat source, a plume grows until it reaches a diameter of the order of that of the heat source, and rises. Fig. 2.8b displays the temporal evolution of the maximum velocity along the axis of symmetry, denoted 'conduit', in Vatteville et al. [2009]'s experiments and in the JADIM and OpenFOAM tests. Velocity isocontours are plotted over the whole model domain at a specific time (Fig. 2.8c), and then along the axis of symmetry at three different times (Fig. 2.8d).

The 'shape' of the plume (defined with the iso-values of velocity in Fig. 2.8c) obtained with both our codes compares well with that of Vatteville et al. [2009]'s experiment. The maximum velocity along the plume conduit as a function of time is presented in Fig. 2.8b. The figure shows, for JADIM and OpenFOAM, a maximum velocity higher than in the lab experiments but lower than in the numerical simulation of Vatteville et al. [2009]. At later times, good agreement is found for all numerical approaches. Their value however is larger than the one measured in the experiment (by about 6%). This discrepancy was attributed by Vatteville et al. [2009] to the laboratory measurements which made use of a local spatial averaging procedure which tends to moderately underpredict the velocity.

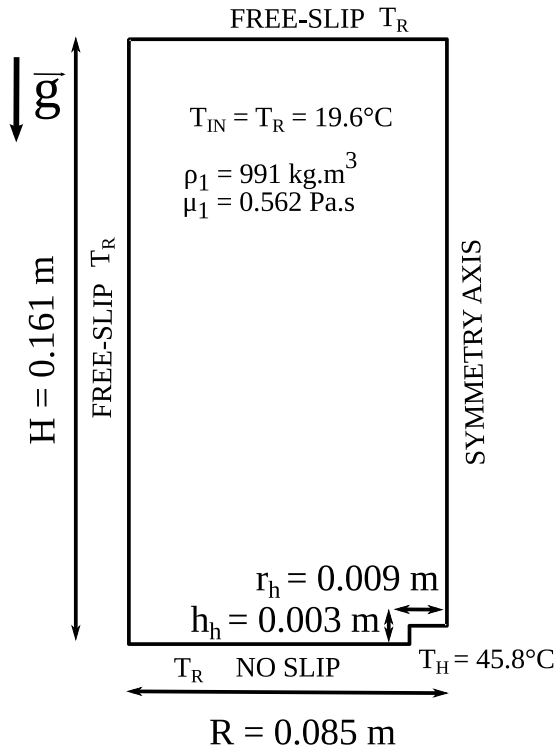
b) Two-layer Rayleigh-Bénard system

We consider now the more complex problem of a two-layer Rayleigh-Bénard configuration. In this section, we set up numerical cases comparable to the laboratory experiments of Le Bars et Davaille [2004]. Although this work was oriented to model the Earth's mantle, it may very well constitute a good basis to explore the conditions for crustal scale convection, as will be discussed later.

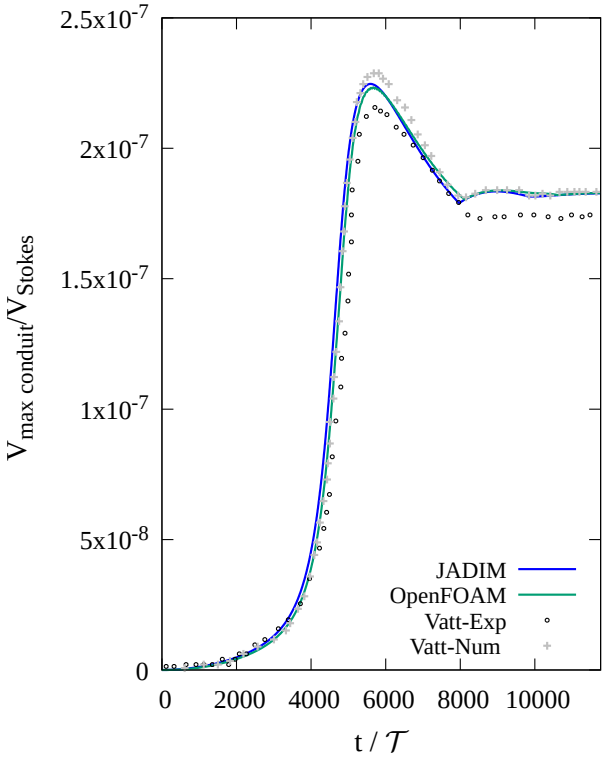
c) Case description

A square tank of horizontal width L and height H is filled with two fluid layers, the uppermost layer of density ρ_1, viscosity μ_1 and height h_1 being less dense and less viscous than the bottom layer of density ρ_2, viscosity μ_2 and height h_2 (Fig. 2.9a). The system is initially at a constant temperature T_{in}, and is simultaneously heated from below at temperature T_H and cooled from above at temperature T_c. Note that here the system is initially stable. Assuming that the thermal expansion coefficient α and the heat diffusivity D_{th} are the same in both fluids, the present problem is controlled by five dimensionless parameters, namely the Prandtl and the Rayleigh numbers (Eqs. 2.12), the thickness

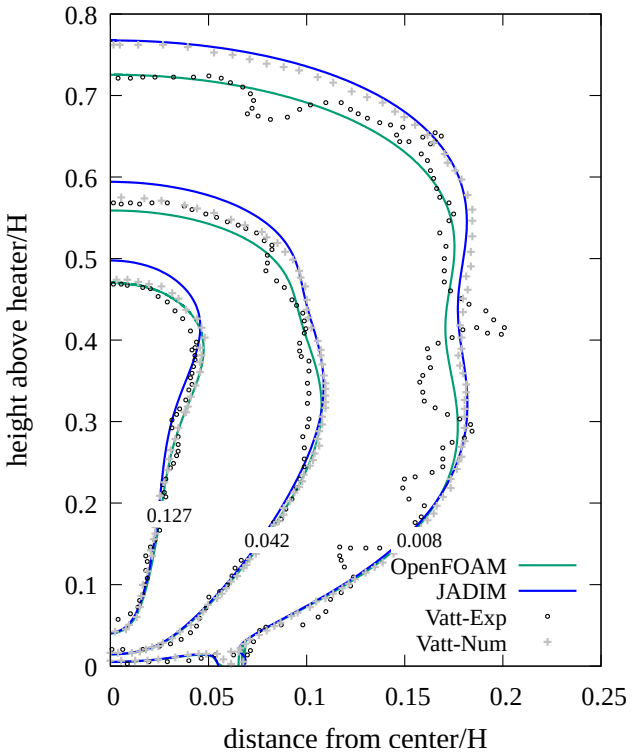
(a) Rayleigh-Bénard setup, VATTEVILLE et al. [2009]



(b) Maximum velocity at axis over time



(c) Velocity iso-contours at $t/\tau = 7353$



(d) Axial Velocity for different t/τ

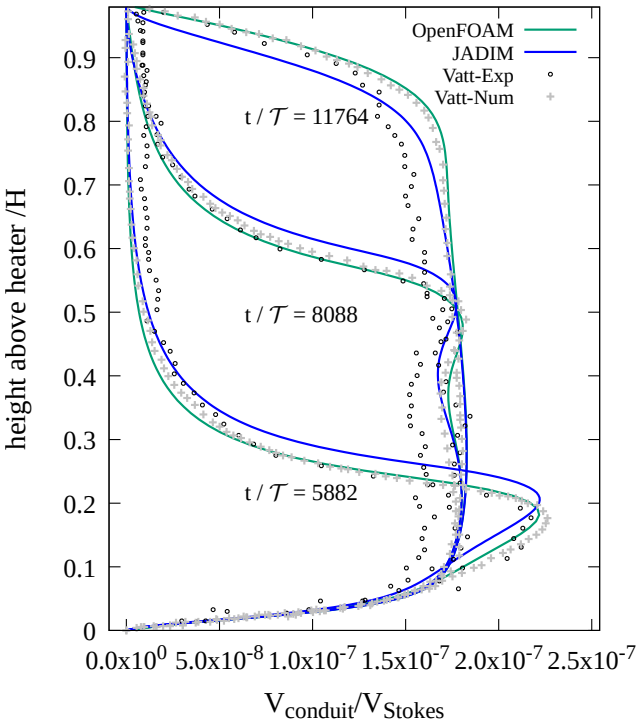


FIGURE 2.8 – Rayleigh-Bénard problem [VATTEVILLE et al., 2009] : comparisons of the velocity field between laboratory (Vatt-Exp) and numerical experiments (Vatt-num), OpenFOAM and JADIM. Velocity is scaled with $V_{Stokes} = \alpha g \Delta T H^2/\nu_{max}$, time is scaled with $\tau = \nu_{max}/(\alpha g \Delta T H)$, and distance is scaled with the domain height H. The grid size in JADIM and OpenFOAM is 170×322.

and viscosity ratios :

$$a = h_2/H, \quad \gamma = \mu_1/\mu_2, \tag{2.13}$$

and the buoyancy number :

$$B = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha \Delta T (\rho_1 + \rho_2)/2}, \tag{2.14}$$

where $\Delta T = T_H - T_C$. The parameter B expresses the ratio of the stabilizing density stratification to the destabilizing thermal density anomaly. Here, time is scaled by $\tau_T = \mu_2/(\alpha g \Delta T H)$ and the origin of time $t = 0$ has been set as the time when the interface height y reaches $y/h_2 = 1.08$. Le Bars et Davaille [2004] performed various experiments which enabled them to draw a phase-map of the various dynamics which may occur, depending on a, B and, to a lesser extent γ and Ra (Fig. 2.9b). In particular, one can see that B controls the ability of the interface to deform : if $B > 0.3$, the interface remains mostly flat, and convection occurs in both layers separately. If $B \leq 0.3$, the interface is fully destabilized and convection occurs in the whole domain. Their parameters vary between : $0.08 < a < 0.95$, $7 \cdot 10^{-4} < \gamma < 1$, $10^3 < Ra < 10^8$, $0.1 < B < 4$, $Pr > 100$. Below, we model four cases with fixed $a = 0.3$, $\gamma \approx 10^{-3}$, $Pr \approx 10^6$ and $Ra \approx 10^5$ and vary the buoyancy number in the range $0.2 \leq B \leq 2$.

Qualitative results

Three-dimensional simulations are performed with the geometry, initial and boundary conditions displayed in Fig. 2.9a and described above. The computational domain is discretized using a $90 \times 90 \times 44$ grid-size. Following Le Bars et Davaille [2004] we use an exponential temperature-dependent viscosity such that $\mu = \mu_o \cdot \exp(-0.038T)$.

We set four simulations corresponding to different locations in the (B, a) parameter space (see star symbols in Fig. 2.9b) : $B = 0.2$, 0.3, 0.6 and 2. Snapshots of the typical modeled structures are illustrated Fig. 2.9c. Our simulations produce deformation modes in agreement with those identified by Le Bars et Davaille [2004], in particular :

— Case I, $B = 0.2$ (equivalent to $\rho_2 < \rho_1$, Fig. 2.10a) : the density of the fluid from below decreases enough to invade the fluid from above as a diapir. At the end of the experiment, a whole single-layer convection mode develops.

— Case II, $B = 0.3$ (equivalent to $\rho_2 \sim \rho_1$, Fig. 2.10c) : the system stands at the transition between the interface remaining flat or deforming like a rising diapir. Here, the fluid from below intrudes the fluid from above, in a diapiric manner.

— Case III, $B = 0.6$ (equivalent to $\rho_2 > \rho_1$, Fig. 2.10b) : both layers remain stagnant but the interface progressively deforms as convective structures develop in each layers.

— Case IV, $B = 2$ (equivalent to $\rho_1 \ll \rho_2$, Fig. 2.10d) : convection appears separately in each layer and the interface remains flat.

Fig. 2.10 displays the 3D flow dynamics for each for the four tested B cases. JADIM and OpenFOAM behave similarly : both cases I (Fig. 2.10a) and II (Fig. 2.10b) with $B \leq 0.3$, show deformation modes with diapirism followed by whole-layer convection. While JADIM diapirs rise directly to the top (Fig. 2.9c), OpenFOAM displays diapirs that collapse on themselves before rising all the way to the top (see Fig. 2.10a, b, time-step 8200).

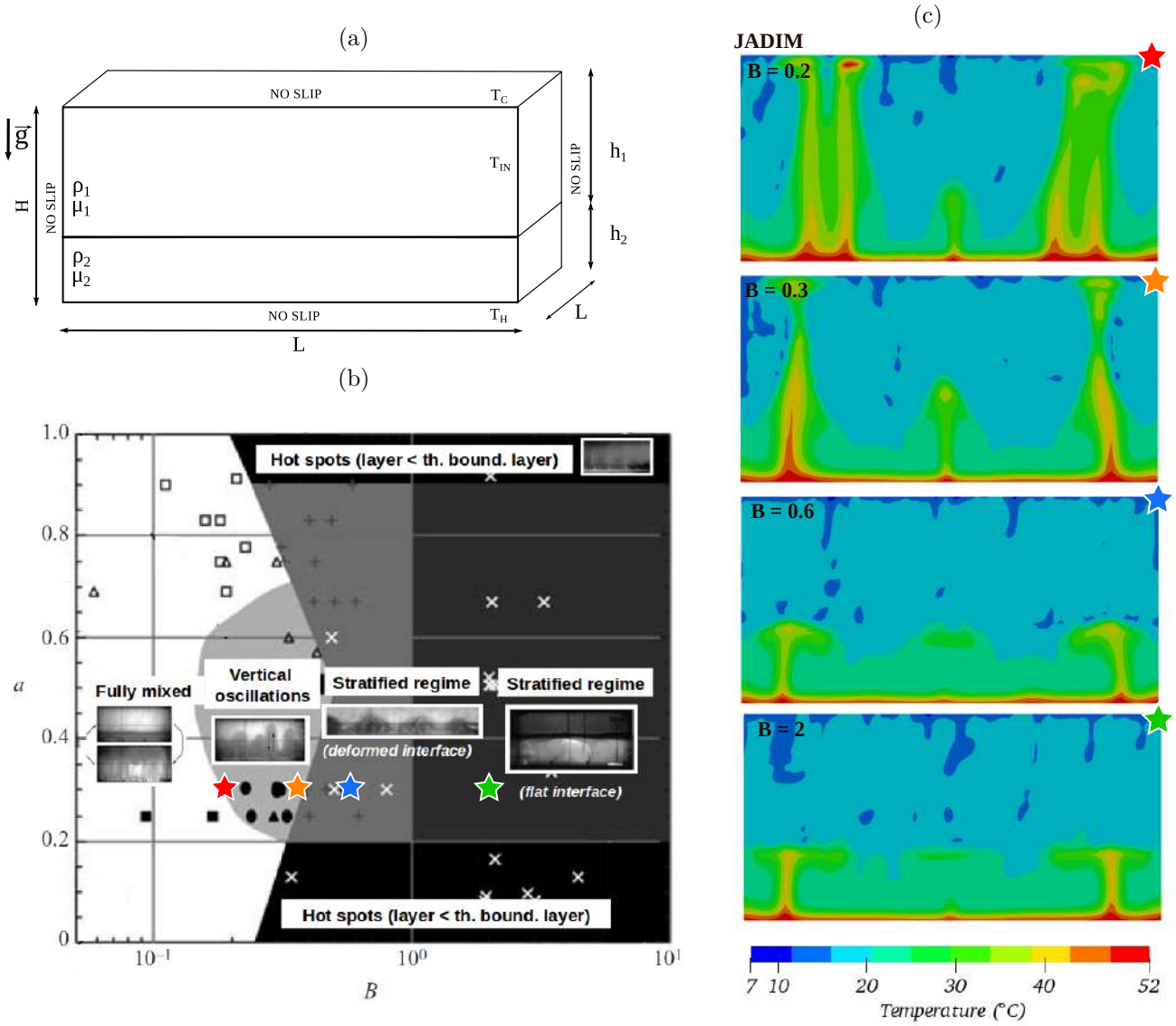


FIGURE 2.9 – The two-layer Rayleigh-Bénard problem by (LE BARS et DAVAILLE [2004]) : (a) Initial setup, geometry and boundary conditions ($L/H = 2.$ $\mu_0 = 0.5 - 5$ $Pa.s$ and $\mu = \mu_0 \cdot \mathcal{G}(T)$ with $\mathcal{G}(T) = 2.2 \cdot e^{-0.038T}$, T in Celsius). (b) Regime diagram of the convection regimes according to the lab experiments in the parameter space (B ; a), modified from LE BARS et DAVAILLE [2004]. The colored stars indicate the location of the 3D simulations performed in the present work. (c) Distribution of the instantaneous temperature field in a vertical plane at time $t/\mathcal{T} = 1800$ computed with JADIM ($\gamma = \mu_1/\mu_2 \approx 10^{-2}$, $Ra = 1.6 \times 10^5$, $Pr \approx 3.5 \times 10^6$). The grid size in JADIM and OpenFOAM is $90 \times 90 \times 44$.

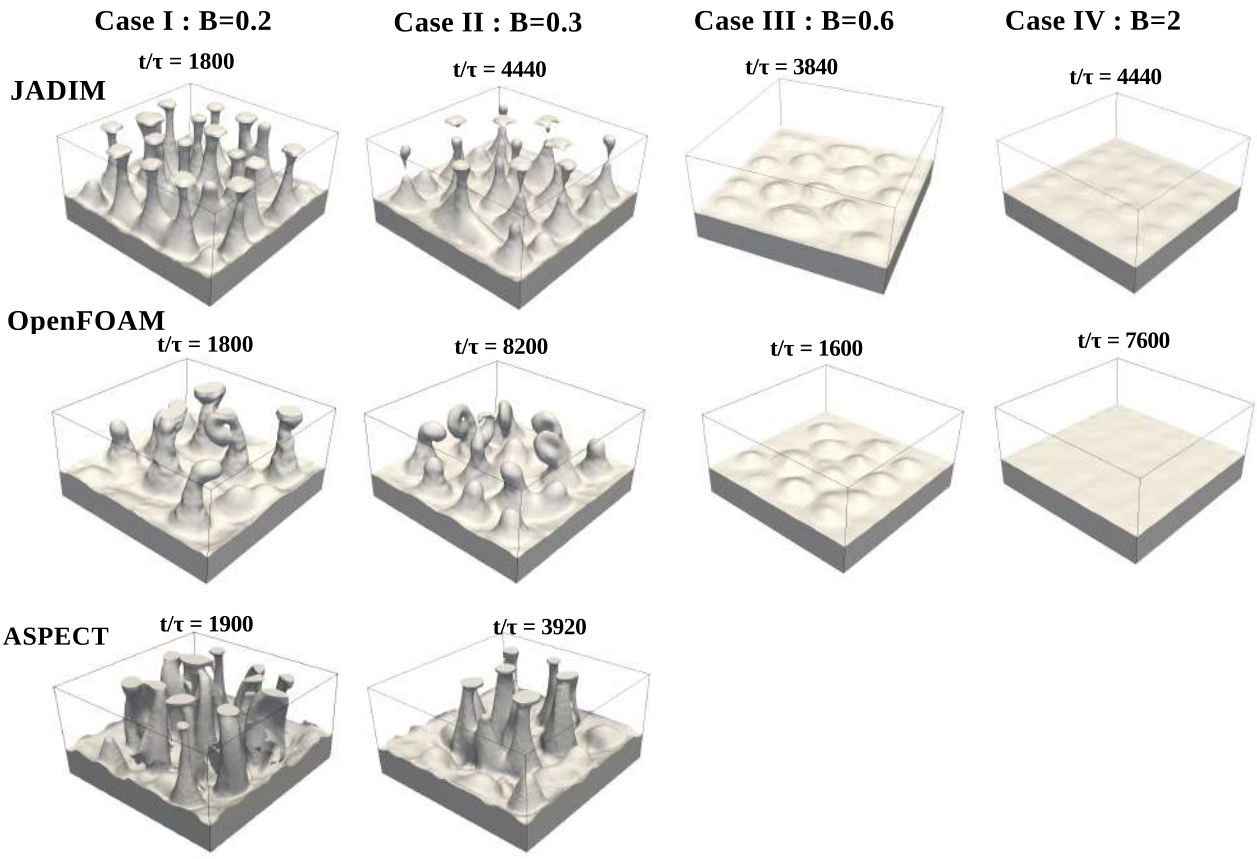


FIGURE 2.10 – Rayleigh-Bénard two-phase system (LE BARS et DAVAILLE [2004]) : Iso-contour $C = 0.5$ for various B : 0.2(a), 0.3(b), 0.6(c) and 2.0(d). Time is scaled by $\tau = \nu_2(T_H)/(\alpha g \Delta T H)$.

ASPECT is also tested for case II (Fig. 2.10b). Thermal plumes form and fall from the top, deforming the interface before diapirs can grow from layer 2. Then, as with JADIM, diapirs grow and reach directly the top of the box. A large random perturbation (2/3 of a cell size) has to be inserted in order to obtain a similar development of diapirs to JADIM or OpenFOAM. Otherwise (with a smaller random perturbation), a single diapir grows from the center of the box, later surrounded by five emerging diapirs. This different behavior of ASPECT is also discussed in comparison with analytical predictions in the next section.

Cases III and IV with $B > 0.3$ display an interface that only slightly deforms over time as expected from LE BARS et DAVAILLE [2004] (Figs 2.10c,d, and Fig. 2.9c)).

Comparison with analytical predictions

In cases I and II, deformation of the fluid interface is significant, as layer 2 progressively becomes less dense than layer 1. At this point, the system becomes similar to a Rayleigh-Taylor system. Thus, we may compare the modeled growth rate of the interface to linear stability analytical solutions (LST, see Section a)), wouldn't there be the difficulty rising from temperature-dependent densities and viscosities. Since we haven't found analytical solutions for exponentially temperature-dependent viscosity (closest predictions might be POPOV et al. [2014] for exponentially depth-dependent viscosity), we choose to first compare numerical growth rates in between codes, and then to identify the associated range of temperature with which the latter can be delimited by RAMBERG [1981a]'s analytical growth

rate.

We thus proceed for case II (B=0.3), and display in Fig. 2.11 the modeled and theoretical maximum heights of interface 1-2 with time. The evolution of this interface can be divided in two stages, before and after $t/\tau \simeq 2500$ (see Figure caption for the choice of time origin). Before that time, the system does not significantly destabilise, and the interface 1-2 remains relatively flat with JADIM an OpenFOAM. In contrast with ASPECT, this interface deforms more, and thermal plumes are seen to drip from the top before any instability actually manages to grow there. After that time, diapirs rise, first in JADIM (from $t/\tau \simeq 2250$), then in OpenFOAM(from $t/\tau \simeq 2500$), and finally in ASPECT (from $t/\tau \simeq 2800$). From then on the interface growth rates are close to each other by ~ 10 %, namely $K_{JA} = 0.10$ for JADIM, $K_{OP} = 0.12$ for OpenFOAM, and $K_{AS} = 0.16$ for ASPECT.

With ASPECT, we tried to diminish the amplitudes related to the initial destabilisation stage ($t/\tau \leq 2800$), by reducing the amplitude of the initial random perturbation : a single diapir is seen to form at the center of the model domain prior to others, and then the transition to the main growth rate is shifted by $t/\tau = 1000$ (compare orange curves in Fig. 2.11). Since on the other hand, mass error in ASPECT is found to be about 10^{-2} (Fig. 2.1.23c), we believe that diffusion may be causing this less 'stable' initial growth compared to the two other VOF codes. Further tuning of specific numerical settings in ASPECT might improve its behavior, yet we did not pursue this matter further as this was not the aim of our study.

Then we plot in Fig. 2.11 the LST growth rates that delimit the slopes of our modeled growth rates. Since this LST growth rate depends on ρ_1, μ_1, ρ_2, μ_2 (Eq. 2.10 and Appendix b)), which all vary with temperature, we need to choose an equivalent temperature for layer 1 and an equivalent temperature T_R for layer 2. For layer 1, we take $T_1 = 34\%(T_H - T_C)$ (which is its average temperature before destabilization) to deduce ρ_1 and μ_1. For layer 2, we seek the temperature T_R (which determines ρ_2, μ_2) with which we can trace the lower and upper bounding slopes of our modeled growth rates : we find $K_{T_R} = 0.09$ and $K_{T_R} = 0.18$, associated to reference temperatures $T_R = 93\% \cdot (T_H - T_1)$ and $T_R = 100\% \cdot (T_H - T_1)$, respectively. This allows us to conclude that the numerical codes reproduce the development of RB instabilities with a precision of 7% of the "equivalent stratified" theoretical growth rate. We cannot state more precisely which code best matches a true solution, but at least JADIM, OpenFOAM and ASPECT present an overall consistent evolution of their interface, providing confidence in their behavior.

Concerning the dominant wavelength λ, the linear stability theory of Ramberg [1981a] predicts that $\lambda/h_2 = 3$ for a Rayleigh-Taylor system. We obtain for OpenFOAM and ASPECT $\lambda/h_2 = 1.5$, and for JADIM $\lambda/h_2 = 1.2$. However, theoretical values for Rayleigh-Taylor instabilities do not correspond to those for a two-layer Rayleigh-Bénard system, as shown by Le Bars [2003]. In fact Le Bars [2003] determined experimentally that $\lambda/h_2 = 9.1 \times Ra^{-0.14}$ which in our case leads to $\lambda/h_2 = 1.7$. OpenFOAM and ASPECT provide a value that differs by 12% to this experimental law, while JADIM differs by 30%.

2.1.8 Synthesis of codes performances

We have produced numerical models with two Volume-Of-Fluid codes, JADIM and OpenFOAM, for two- and three-layer systems with and without thermal effects, and have shown a good agreement with the previous studies of van Keken et al. [1997], Weinberg et Schmeling [1992], Ramberg

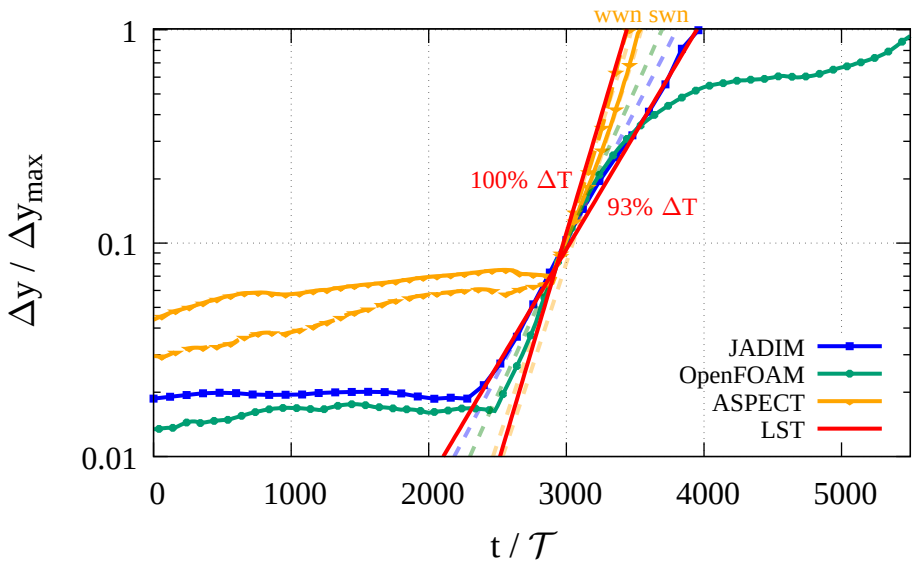


FIGURE 2.11 – Two-layer Rayleigh-Bénard system from LE BARS et DAVAILLE [2004], $B = 0.3$, case II. Temporal evolution of the highest position of the layers' interface for JADIM, OpenFOAM and ASPECT. $\Delta y/\Delta y_{max} = (y(t) - y_0)/(H - y_0)$, y_0 being the interface's initial height and H the box's total height. The origin of time $t/\tau = 0$ has been chosen so that the interface reaches $y/h_2 = 1.2$ at the same time for all codes. Dotted lines are the tangents to the modeled curves. Red lines referred as LST provide the theoretical growth rate slopes [RAMBERG, 1981b] for $T_R = 93\%\Delta T$ and $T_R = \Delta T$ with $\Delta T = T_H - T_1$. The two orange curves for ASPECT correspond to a weak random perturbation "wwn"(6% of the cell size) and a strong random perturbation "swn"(66% of the cell size), showing both high initial amplitudes prior to the onset of destabilization.

[1981a], VATTEVILLE et al. [2009] and LE BARS et DAVAILLE [2004]. The two codes present some differences in their implementation, in particular the treatment of the transport equation of volume fraction (Eq. 2.2). For instance, in JADIM, the 'numerical thickness' of the interface is larger than that in OpenFOAM (2-3 grid cells vs. 1 grid cell) and this may explain the slight differences observed in the numerical results between both codes (e.g. Figs. 2.2 and 2.10). If we compare the results obtained with both VOF methods and those obtained with a field method like ASPECT, the field method tends to be more diffusive (> 3 grid cells for the interface).

We report below the technical performances of JADIM, OpenFOAM and ASPECT : their weak and strong scalabilities as well as the computational time required for some of the experiments described above.

a) Scaling

Strong scaling

We assess the strong scalability of JADIM, OpenFOAM and ASPECT in the case of the simulation displayed in Fig. 2.10b, case II of the two-layer Rayleigh-Bénard problem of LE BARS et DAVAILLE [2004]. More precisely, we fix the size of the computational domain to $120 \times 120 \times 60$ grid points (i.e. about 864 000 grid points in total), and measure the computational time with respect to the number of processors, denoted N_p. Fig. 2.1.24a displays the computational time required to do ten iterations as a function of N_p. A perfect scaling would lead to a line log-log of slope $1/N_p$ (Fig. 2.1.24a, dotted

line). The computational time is scaled by the time required using 4 processors (two processors on two different nodes) since the available memory on one node ($\approx$ 192 Go) was not sufficient to support a run with ASPECT.

For $N_p \geq 8$, the speedup decreases for JADIM, OpenFOAM and ASPECT. This indicates that when the equivalent problem size per processor is about 50^3 or less, the time devoted to communication between processors is of the same order of magnitude or larger than that devoted to solve the equations. Using a larger domain size, involving 10^6 or 10^7 grid points, improves the performance presented in Fig. 2.1.24a. Furthermore, OpenFOAM and ASPECT speed up twice faster than JADIM at large N_p, and as $N_p \geq 32$ (i.e 30^3 grid points per processor), with an advantage for OpenFOAM.

Weak scaling

We assess the weak scalability of JADIM, OpenFOAM and ASPECT using again the case displayed in Fig. 2.10b (case II of the two-layer Rayleigh-Bénard problem of Le Bars et Davaille [2004]). We fix the grid size of the computational domain per processor to $30 \times 30 \times 30$, and vary the computational domain size with the number of processors. We measure the solution time with respect to the number of grid cells. Fig. 2.1.24b displays the computational time required to achieve ten iterations (scaled with the computational time on one processor). A perfect scaling would lead to a horizontal line. For both codes, the parallel efficiency decreases as we increase the number of processors due to communication between processors. For 108 000 grid cells (i.e. four times more cells than in the case of section 4), 50 % of the time is used for communication in JADIM, 20 % for OpenFOAM and 10 % for ASPECT. For 32 processors, the speedup loss is about 40 % for ASPECT and 90 % for JADIM.

b) Computational time in 3D

We compared computational times between codes for different test runs and found that OpenFOAM is in general faster than JADIM (see e.g. Fig. 2.1.24) and ASPECT. For instance, the 3D computations of Weinberg et Schmeling [1992]'s configuration presented in Figs. 2.7 and 2.6 took, for the same physical time and the same time step, on Intel(R) IVYBRIDGE 2.8 GHz processors :

— 6 days on 8 cores with OpenFOAM vs. 14 days on 27 cores with JADIM (case I)

— 8 days on 8 cores with OpenFOAM vs. 24 days on 27 cores with JADIM vs. 8 days on 18 cores with ASPECT (case II)

— 8 days on 8 cores with OpenFOAM vs. 18 days on 27 cores with JADIM (case III)

In this case, ASPECT needed 18 cores to achieve the same physical time as OpenFOAM. JADIM needed much more time and cores than OpenFOAM and ASPECT. Note that even if JADIM and OpenFOAM use the same numerical scheme to compute the viscous term, that of JADIM is not parallel, in contrast to OpenFOAM. In addition, we find that JADIM's preconditioner used to solve pressure (conjugate gradient with block Jacobi method) implies that with an increasing number of cores the number of iterations for convergence increases. This is not the case for OpenFOAM which uses a stabilised preconditioned bi-conjugate gradient with a Diagonal-Incomplete Cholesky preconditioner. These two points may explain the poor performances of JADIM.

Additionally, the 3D computations of Le Bars et Davaille [2004]'s case II (B=0.3, Fig. 2.10) took :

— 37 days on 4 cores with JADIM

— 13 hours on 4 cores with OpenFOAM

— 15 days on 32 cores with ASPECT

Computational times here are only informative since i) all processors were different, and ii) we realise that some numerical settings might have been better optimised. For instance we note that the time step of JADIM computations was set limited ten times smaller than that of OpenFOAM. Together with the result from Fig.I1 showing that JADIM is about 2 times less efficient than OpenFOAM, the different computational times obtained here in 3D are justified.

Furthermore in 3D here, OpenFOAM is found to run faster than ASPECT, despite we obtained a better parallel efficiency for ASPECT in the previous section. Together with the peculiar results of this ASPECT case (large initial instabilities preceding diapir rise, section 4.2.3), we conclude that some memory allocation and computational options of ASPECT aught to be further investigated.

c) Synthesis

In summary, ASPECT runs faster for 2D simulations than JADIM and OpenFOAM. But, JADIM and OpenFOAM better conserve mass than ASPECT.

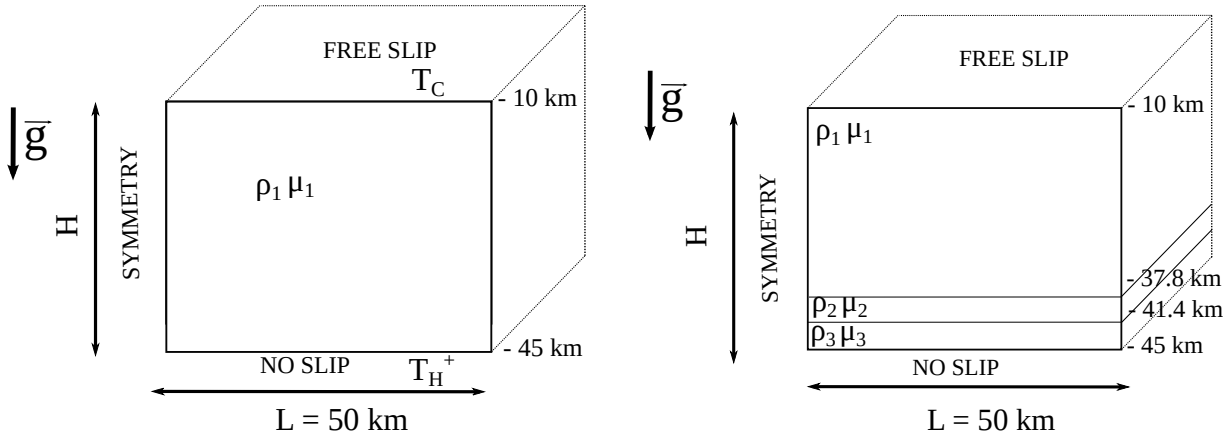
OpenFOAM seems the best adapted code to study crustal polydiapirism since i) it is faster than ASPECT and JADIM and ASPECT in 3D and, ii) it conserves mass better than ASPECT. In the following section, we thus use OpenFOAM to model Naxos's observations.

2.1.9 Application to the development of metamorphic domes in Naxos

Vanderhaeghe et al. [2018] interpreted the domes of Naxos Island, Greece, as the exhumation of imbricated or adjacent polydiapirs in a larger rising dome. According to Vanderhaeghe et al. [2018], these domes would have formed after crustal thickening dated at 55 My, and comprised a first episode of crustal scale convection from 24 to 16 My, followed by a second episode of polydiapirism from 16 to 13 My, possibly associated with thinning of the orogenic crust. An estimate of the characteristic size and growth rate of these diapiric instabilities was proposed by Vanderhaeghe et al. [2018] using the critical Rayleigh number threshold ; a "convectable" crustal thickness H between 10 and 30 km requires a viscosity range of $10^{16}-10^{18}$ Pa.s and a density contrast of $50-200$ kg.m^{-3}. Vanderhaeghe et al. [2018] estimated that the large dome covers an elliptic area of dimension $L_{Na} = 5 \times 12$ km, that the subdomes have a size $d_{Na} = 2-3$ km, and that the velocity of convection was $v_{Na} = 1-5$ cm.yr^{-1}. A revolution period of about 2 My of convective cycles was estimated based on zircon geochronology [Vanderhaeghe et al., 2018]. More precisely, two superimposed destabilisation processes may have been at play :

— A convection episode, analog to a destabilizing single layer Rayleigh-Bénard system with thermally dependent density and viscosity,

— A polydiapirism episode, analog to a case-II three-layer system defined by Weinberg et Schmeling [1992], Fig. 2.6c.



(a) Episode 1 : Convection setup (b) Episode 2 : Diapirism setup

FIGURE 2.12 – Naxos setups : a) convection and b) diapirism episodes.

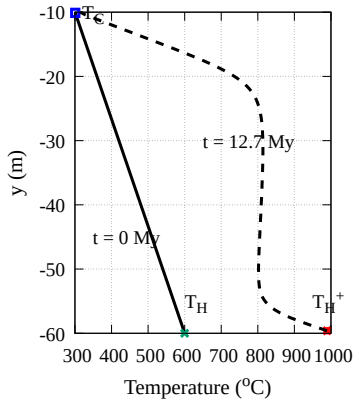
The increase in temperature responsible for these gravitational instabilities may have been caused by an increasing mantle heat flux and/or the thickening of a radiogenic crust [ENGLAND et THOMPSON, 1986b; THOMPSON et ENGLAND, 1984; UEDA et al., 2012]. The models proposed here present both mechanisms of convection and polydiapirism independently. Our aim is to better constrain the propositions of VANDERHAEGHE et al. [2018] for the case of Naxos, with the support of 3D models using OpenFOAM. Although our results already provide some insight on the dynamics of Naxos's crust, another study will be required in order to explore and demonstrate how the transition or the combination of both these episodes would have occurred.

a) Naxos Episode 1, Rayleigh-Bénard convection

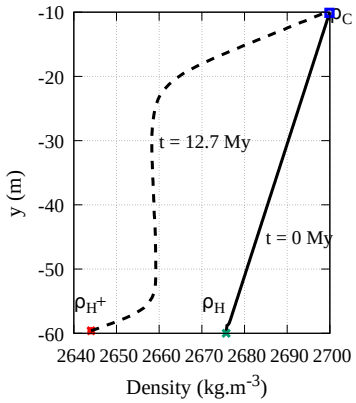
For the convection episode, we build a single-layer Rayleigh-Bénard system representing a pre-thickened orogenic crust. We assume that the first 10 km of cold upper crust are not affected by deeper mechanisms of deformation, therefore the model domain starts 10 km below the Earth's surface. The modeled crustal thickness is either 35 km or 50 km, with an initial linear geotherm spanning $T_C = 300^o$C at the upper boundary (-10 km depth), and $T_H = 600^o$C at the bottom boundary, down to depth -45 km or -60 km. Kinematic boundary conditions are prescribed : no slip at the lower boundary and free slip at the lateral and upper sides.

The densities are defined according to the Boussinesq approximation (Eq. 2.7), with a reference density ρ_1^0 given at $T_C = 300^o$C. The viscosities are defined bounded by maximum and minimum values related to minimum and maximum temperatures T_C and T_H, according to an Arrhenius law $\mu_i = B \cdot e^{\frac{A}{T}}$, with $A = \dfrac{\ln(\mu_{max}/\mu_{min})}{1/T_C - 1/T_H}$ and $B = \dfrac{\mu_{min}}{e^{A/T_H}}$. A and B are ajusted so that viscosities vary in the range 10^{17} $Pa.s$ (at 900 or 1000^{o}C) - 10^{21} $Pa.s$ (at 300^{o}C). Depth-dependent profiles of the initial and final temperature, the density and the viscosity are presented in Figs. 2.13a,b,c.

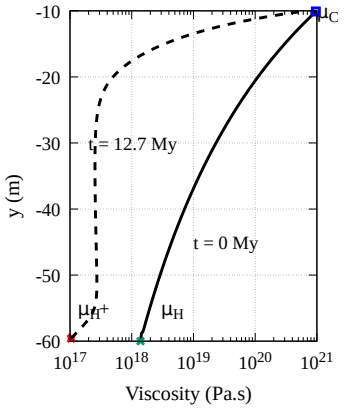
At time t_0^+, a temperature T_H^+ is applied all along the base of the model : both the viscosity and density evolve and the system progressively destabilises. The choice of T_H^+ depends on the choice of geodynamical setting that one may reasonably assume : two extreme cases can be considered, either a moderately thickened orogenic crust ($H = 45$ km) over a thin lithospheric mantle, thus $T_H^+ = 1000^o$ C, or an orogenic crust that has been over-thickened for at least 20 My and has thus



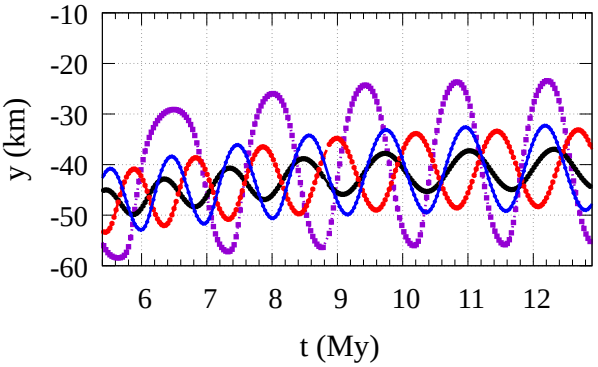
(a) Initial and final geotherm T^oC



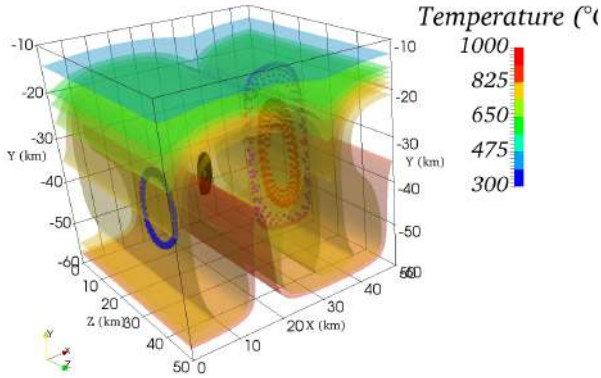
(b) Initial and final density



(c) Initial and final viscosity



(d) Height $y(time)$



(e) Isotherms

FIGURE 2.13 – Naxos RB episode 1, OpenFOAM simulation on a $125 \times 125 \times 87$ grid (see parameters in main text). **a,b,c)** vertical profiles of laterally averaged temperature, density and viscosity. **d)** Temporal evolution of the depth of 4 passive markers also plotted in e). **e)** 3D view of the isotherms after 12.9 My. Convection occurs over a height $\sim$ 30 km, producing 4–5 cycles within 7 My. The black markers are located along the vertical section z=16 km, purple and red markers along z=20 km and blue markers along z=26 km.

partially "relaxed" thermally, with $H = 60$ km and $T_H^+ = 900^o$ C [ENGLAND et THOMPSON, 1986b]. Since a more detailed parametric study will be carried out in a forthcoming contribution, we only present here a representative case together with a small selection of complementary tests (Table 2.3). This *representative* case has $H = 60$ km and $T_H^+ = 1000^o$ C (case $1H_{50}$), and produces a reasonably good fit with Naxos's timing and size of convective cells.

With T_H^+ applied at the base of the model domain, we determine a Rayleigh number based on the properties of the fluid at average temperature 600^{o}C. With $T_H^+ = 1000^o$ C, $Ra = 5 \cdot 10^4$. The Prandtl number is then estimated based on the lowest viscosity of the system, 10^{17} Pa.s : $Pr = 3.7 \cdot 10^4$. This value is lower than realistic geodynamical systems but KRISHNAMURTI [1970] showed that when $Pr > 100$, the dynamics of the system only depends on the Rayleigh number. Within the Boussinesq approximation, densities span the range $2645 - 2700$ kg.m^{-3} after 12.7 My.

Results are presented in Fig. 2.13 : the vertical profiles of temperature, density and viscosity (Fig. 2.13a, b, c), the temporal evolution of some particles (Fig. 2.13d), and the flow pattern (Fig. 2.13e). Various sizes of convection cycles appear depending on the initial position of particles. Va-

riations in density and viscosity follow variations in particle temperature. The general flow regime displays two-dimensional rolls, as predicted by Krishnamurti [1970], with cell sizes of the order of 10×20 km and cycle periods ranging from 1 My to 2 My. These numbers are in the range of those estimated by Vanderhaeghe et al. [2018].

Three other test cases (Table 2.3) show the following : for a greater viscosity 10^{18} Pa.s at $H = -60$ km depth (case $4H_{50}$), the Rayleigh number becomes too low for convection to develop. Decreasing the minimum viscosity below 10^{17} Pa.s generates a more vigorous convection, but the convective periods reduce and cell sizes increase, not fitting Naxos's data anymore. Decreasing the thickness of the model domain decreases the sizes of the convective cells (case $2H_{35}$). Finally, increasing the reference density by 100 kg/m^3 only slightly increases cell sizes (case $3H_{35}$).

Cases & Height (km)	Viscosities (Pa.s)	Densities (kg/m^3)	T_H^+ (^{o} C)	Cycles period (Ma)	Cycles size ($x \times z$ km)
$1H_{50}$	$\mu_{10^{17};10^{21}}$	2700	1000	1-2	7×15 to 15×37
$2H_{35}$	$\mu_{10^{17};10^{21}}$	2700	1000	0.7 - 2	3×6 to 12.5×20
$3H_{35}$	$\mu_{10^{17};10^{21}}$	2800	1000	0.8-2	10×24
$4H_{50}$	$\mu_{10^{18};10^{21}}$	2700	900		no convection

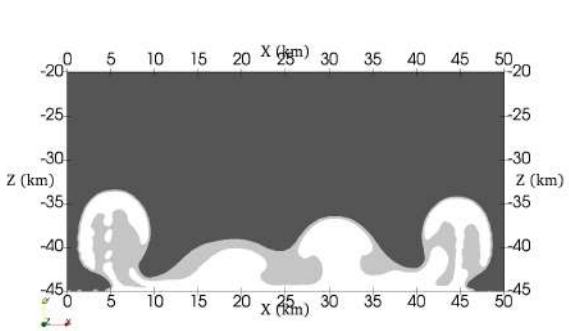
Tableau 2.3 – Test cases for RB convection in Naxos. Model thickness H, viscosities $\mu_{bottom;top}$, and densities ρ_1^0 at 300 ^{o}C. The cycles, timing and dimensions are those produced at the end of the model run.

b) Naxos Episode 2, Diapirism

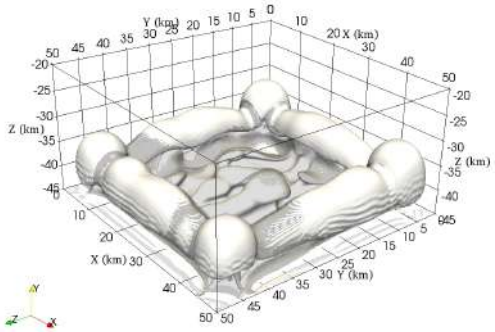
For the diapirism episode, we consider that the middle and lower crust behave as a three layers system like that of Weinberg [1992]. Temperature is not considered here, but from the episode 1 presented above, we choose the top of the model domain to lie 20 km below the top surface, where it becomes significantly less viscous. Underneath, the model domain extends down to -45 km depth, and is made of three layers similar to Weinberg et Schmeling [1992]'s case II : $\rho_1 = \rho_2/0.9 = \rho_3/0.89$ and $\mu_2 = \mu_3 = \mu_1/33$, $h_2 = h_3 = h_1/8$, with an Archimedes number $Ar = 0.3$ (see setup in Fig. 2.12b, with parameters given in the caption). The corresponding values stand within the range of variations of Earth's partially molten middle and lower continental crust (e.g. Hacker et al. [2015]; Rosenberg et Handy [2005]; Vanderhaeghe [2009]).

Figs. 2.14a-c-e show a vertical section of the system, Figs. 2.14b-d-f show a 3D view of the system, in which "domes-in-domes" structures develop. One of the large grey diapirs which develop within layer 2 is about 10 km wide while white "blobs" inside it are about 2 km wide (see Fig. 2.14c). The wavelength is about 12.5 km for the first destabilization event (4 diapirs) and 16 km for the second destabilization event (three diapirs). Both little and large diapirs (grey and white layers 2 and 3) rise imbricated, by about 15 km within 0.5 My, which corresponds to a velocity of the order of 3 cm/yr.

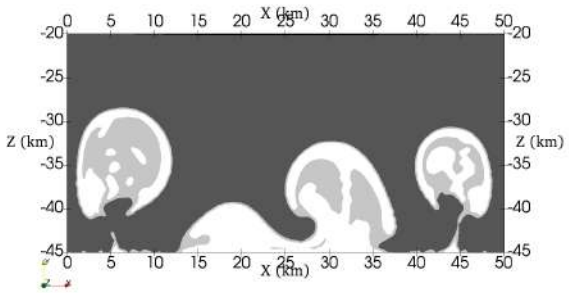
The modeled widest dome sizes are in agreement with L_{Na}, the size of the large domes estimated by Vanderhaeghe et al. [2018], and the smallest sizes are similar to d_{Na}, that of the estimated small domes. The growth rates are also found equivalent to those estimated for Naxos, allowing us to conclude



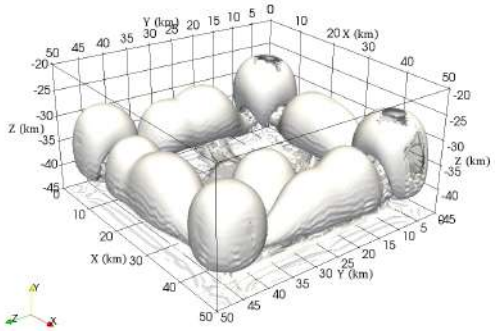
(a) Vertical section y=25km, t=1.23 Ma



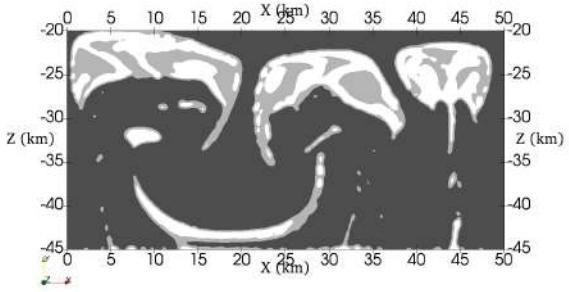
(b) Interfaces in 3D, 1.23 Ma



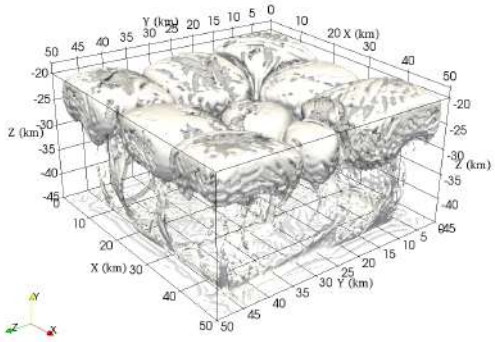
(c) Vertical section y=25km, t=1.36 Ma



(d) Interfaces in 3D, 1.36 Ma



(e) Vertical section y=25km, t=1.66 Ma



(f) Interfaces in 3D, 1.66 Ma

FIGURE 2.14 – Naxos RT episode 2, simulation made with OpenFOAM on a $200 \times 200 \times 140$ grid. Total thickness H = 35 km, horizontal widths L = 50 km, reference viscosity $\mu_1 = 3.3 \cdot 10^{18}$ Pa.s, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_1/33$, densities $\rho_1 = \rho_2/0.9 = \rho_3/0.89$=2537 kg/m^3, and heights $h_2 = h_3 = h_1/8$. **a-c-e)** display the vertical section along $y = 25$km, **b-d-f)** display the 3D interfaces, at three time-steps. Diapirs develop within about 1 My and reach the upper model boundary within another $\simeq 0.5$ My.

that this model configuration is compatible with the physical state of Naxos' partially molten crust at some point around 16 My.

c) Naxos application, Discussion for future work

Our preliminary models provide a quantitative description (convection velocities and dome sizes) of the development of gravity instabilities in the orogenic crust of Naxos around 16 My, in accordance with the estimates by Vanderhaeghe et al. [2018]. These models already yield some insight :

— The relatively low viscosities of the middle-to-lower crust that lead to gravitational instabilities ($1 - 5 \cdot 10^{17}$ Pa.s below 20 km depth), given our choices of initial geotherm, densities and basal temperature, imply that this crustal domain behaved according to a dominantly wet quartz composition. Such viscosities match those obtained with rock experiments on hydrated-quartz at mid-crustal conditions [Bürgmann et Dresen, 2008]. In fact in Naxos Island, the migmatite dome is mantled by metapelites, micaschists and marble layers that are made of quartz, micas and calcite displaying relatively soft rheological behaviour comparable to wet quartz [Kruckenberg et al., 2011].

— The modeled dynamics occurs at a deformation rate of the order of $10^{-13} - 10^{-14}\text{s}^{-1}$ corresponding to several cm per year of vertical mass transfer. This sets a perspective on the relative influence of far field tectonic boundary conditions, progressively switching from compressional to extensional over a time period of about 10 My throughout the Cyclades orogeny. Such a transition in tectonic kinematics is also invoked in other orogenic contexts, and raises the question of how heat from the mantle below can be maintained over equivalent time periods [England et Thompson, 1986b; Gerbault et al., 2018; Ueda et al., 2012]. This subject needs further work beyond the scope of the present contribution.

— The convection model (episode 1) shows that several cycles of convection of distinct timing occur, depending on whether the edges or the core of the rising crustal plumes are being sampled. These sampled locations cover distinct ranges of temperature : the large cycles cover a range of $670 - 920°\text{C}$ (purple marker in Figs.2.13d-g), whereas the small cycles remain at $810° \pm 10°\text{C}$ (orange marker in Fig.2.13d-g). Since zircons typically crystallise and dissolve as they progressively pass through the $\sim [700 - 900]°\text{C}$ range (Guergouz et al. [2018] and references therein), both small and large cycles may then explain the pattern that the zircons of Naxos appear to have gone through. Complementary data on sampled zircons across the domes of Naxos will help to better constrain their dynamics.

Further work is required to understand better how Naxos's crustal system would have progressively switched from convection to polydiapirism, or vice-versa. Although this switch may have been linked to a change in kinematic or thermal boundary conditions, more complex rheologies accounting for melting or internal heating were also likely at play. Some of these processes will be adressed in a forthcoming paper. One may also add that sub-scale two-phase flow of low viscosity and low density melt fluids should also be accounted for. Nonetheless, the overall mass balance associated with the evolution of this crustal domain would also require to make hypotheses on i) the amount of eroded material from the top surface and ii) the amount of material that has sunk down below Moho levels. These issues are clearly out of the scope of the present study, and we refer to other studies that discuss

them [Burg et Vigneresse, 2002; Cao et al., 2016; Gerbault et al., 2018; Gerya et al., 2008; Jull et Kelemen, 2001; Piccolo et al., 2019; Riel et al., 2016; Schmeling et al., 2019a; Weinberg, 1997].

2.1.10 Conclusions

We have tested two Volume-Of-Fluid methods without interface reconstruction, for four well documented Rayleigh-Taylor and Rayleigh-Bénard instabilities systems, and the results are shown to be in good agreement with analytical solutions and reference numerical and experimental results. Both JADIM and OpenFOAM codes were shown to be able to reproduce the various convection regimes that are predicted in a temperature-dependent two-layer system heated from below, for a reasonable range of parameters, both in two and three dimensions. To our knowledge such detailed comparisons of volume-of-fluid implementations have not been produced in the literature before. Using either a harmonic or an arithmetic viscosity averaging at interfaces leads to different structures in the deformed layers, even though the models match theoretical predictions for upwelling velocities and growth rates. The compositional fields tracking method used here via the geosciences code ASPECT appears more sensitive to initial perturbations of interfaces than the two VOF codes. The VOF codes exhibit less diffusion at interfaces and mass is better conserved in comparison to ASPECT (by several orders of magnitude).

In terms of codes performances, OpenFOAM is about two times faster than JADIM. In 2D, the compositional field tracking method available in ASPECT is about two times faster than OpenFOAM, mainly because the viscous term is solved with an implicit method while it is solved semi-implicitly in both VOF methods. Despite a better parallel efficiency of ASPECT, OpenFOAM appears faster than ASPECT in the specific 3D Rayleigh-Bénard case that was tested (given the default computational options that we used).

Here, the VOF method has been applied for the first time to three-dimensional three-layer Rayleigh-Taylor systems of crustal geodynamics. While some properties like the initial growth rates are similar between 3D and 2D models, differences such as the timing of destabilisation reach about 20%. Therefore, we conclude that 3D simulations are necessary in order to study precisely the structural evolution of gravitational instabilities of stratified crustal layers, in comparison to field data.

A preliminary application to the gneiss dome and subdomes exposed in Naxos is addressed by testing independently a convection setup and a diapirism setup. Both mechanisms or episodes, modeled with OpenFOAM, show good agreement with previous analytical estimates based on zircon geochronology and structural field geology : both mechanisms are likely to have been at play in the formation of the polydiapiric structures observed on Naxos Island. This provides insight into the geodynamic setting and rheological properties of this hot crustal domain over a period of about 15 My. However, several questions remain about the actual transition or combination of both these episodes. A follow-up study aims at investigating how both episodes could operate from a common starting configuration, as well as testing other first order parameters that would have controlled the evolution of this hot crustal domain.

To summarize, the present work shows that the VOF method is a promising tool for studying crustal diapirism and convection, aiming at a better understanding of the thermo-mechanical processes responsible for the exhumation of partially molten orogenic crust.

Acknowledgment

This work benefited from fruitful discussions with Anne Davaille, Yves D'Angelo and Annaïg Pedrono. An anonymous reviewer, René Gassmöller, and editor Gael Choblet are warmly thanked for constructive reviews. Some of the computational time was provided by the super computing center CALMIP (Toulouse, project P152). We are grateful to the Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT) which supported this work. This paper is part of the PhD thesis of the first author. The authors would like to thank Rached Abdesslem and Liwei Deng who contributed to the initiation of this collaborative project through their master's degree internships. We thank the Computational Infrastructure for Geodynamics (https ://geodynamics.org/) which is funded by the National Science Foundation under award EAR-0949446 and EAR-1550901 for supporting the development of ASPECT. Funding from INSU for a 3 days field mission to Naxos is acknowledged.

2.1.11 Appendices

a) Wavelength and growth rate predictions for two- and three-layer systems

Ramberg [1981a] analytical predictions

The vertical position y_i of a layer interface i is assumed to evolve as $y_i(t) = A_i e^{K_i q_i t}$. Ramberg [1981a] derived the following linear system for a two or three layers system to solve for vertical displacements y_1, y_2 :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & d_{12} & e_{13} & f_{14} \\ i_{21} & j_{22} & k_{23} & l_{24} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & d_{34} \\ g_{41} & h_{42} & i_{43} & j_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \\ v_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 y_1 \\ 0 \\ q_2 y_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

All coefficients c_{11} to j_{44} depend on ϕ_i, μ_i and boundary conditions. v_i and u_i are the velocities of layer i in horizontal and vertical directions respectively. q_i is defined as $q_i = \dfrac{(\rho_i - \rho_{i+1}) g h_{i+1}}{2\mu_{i+1}}$.

For example, for a two-layer system, the dimensionless growth rate K is :

$$K = \frac{-d_{12}}{c_{11} j_{22} - d_{12} i_{21}} \tag{2.16}$$

with :

$$c_{11} = \frac{\mu_1 2\phi_1^2}{\mu_2(\cosh(2\phi_1 - 1 - 2\phi_1^2)} - \frac{2\phi_2^2}{\cosh(2\phi_2) - 1 - 2\phi_2^2} \tag{2.17}$$

$$d_{12} = \frac{\mu_1(\sinh(2\phi_1) - 2\phi_1}{\mu_2(\cosh(2\phi_1) - 1 - 2\phi_1^2)} + \frac{\sinh(2\phi_2) - 2\phi_2}{\cosh(2\phi_2) - 1 - 2\phi_2^2} \tag{2.18}$$

$$i_{21} = \frac{\mu_1 \phi_2(\sinh(2\phi_1) + 2\phi_2)}{\mu_2(\cosh(2\phi_1) - 1 - 2\phi_1^2)} + \frac{\phi_2(\sinh(2\phi_2) + 2\phi_2)}{\cosh(2\phi_2) - 1 - 2\phi_2^2} \tag{2.19}$$

$$j_{22} = \frac{\mu_1 2\phi_1^2\phi_2}{\mu_2(\cosh(2\phi_1) - 1 - 2\phi_1^2)} - \frac{2\phi_2^3}{\cosh(2\phi_2) - 1 - 2\phi_2^2} \tag{2.20}$$

and

$$\phi_i = \frac{2\pi h_i}{\lambda}. \tag{2.21}$$

Burg et al. [2004] analytical predictions

Burg et al. [2004] provided relations to find the dominant wavelength λ_{dom} and growth rate K for a semi-infinite two-layer system :

$$\frac{\lambda_{dom}}{h_2} = 0.79 \left(\frac{\mu_t}{\mu_b}\right)^{1/3}, \tag{2.22}$$

$$K = \frac{\sigma}{q} = 0.53 \times 2 \times \left(\frac{\mu_t}{\mu_b}\right)^{-2/3}, \tag{2.23}$$

where h_2 is the depth of the bottom layer, and μ_b and μ_t are the viscosity of the bottom and top layers, respectively.

b) Dimensionless system of equations

All equations in the codes are solved in dimensional form, but they are formulated here after in their dimensionless form and expressed in terms of the Archimedes number (Appendix b)) :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla C_i = -\nabla \cdot (\mathbf{U}_r^* C_r), \tag{2.24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^* = 0, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla \mathbf{U}^* = -\nabla P^* + \mathbf{g}^* + \nabla \cdot [\frac{2}{Ar}(\nabla \mathbf{U}^* + (\nabla \mathbf{U}^*)^T)], \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla T^* = \nabla \cdot (\frac{2}{Ra} \nabla T^*), \tag{2.27}$$

with : $\mathbf{U}^* = U/qh$; $P^* = P/\rho(qh)^2$; $\mathbf{g}^* = g/(q^2 h)$.

Influence of Archimede's number

Figure 2.1.15 shows the dimensionless mean velocity of the two-layer Rayleigh-Taylor system depicted in Fig. 2.1a) (with $\gamma = 100$ and $h_2/H = 0.2$) for $Ar \geq 1$ (a) and $Ar \leq 1$ (b) as a function of dimensionless time τ. For $Ar \geq 1$, the dimensionless mean velocity varies according to Ar. For $Ar \leq 1$, dimensionless mean velocities are equal and follow the linear stability theory.

However, at small τ (< 10), the velocity differs due to the initiation of destabilization. Thanks to these results, we expect that the dynamics of a geological system (Ar typically around 10^{-20}) are equivalent to those of a system with $Ar = 1$. We can then use a viscosity around 10^3 $Pa.s$ instead of 10^{20} $Pa.s$, which accelerates our calculations. This result was shown in a Rayleigh-Taylor case but it is likely to be valid for any configuration as long as the local instantaneous $Ar \leq 1$. If $Ar \geq 1$, inertial effects may become significant and change the flow dynamics. Note that in the present context, the Archimedes number is nothing but a Reynolds number using a velocity scale which may be viewed

(a) $Ar \geqslant 1$ (b) $Ar \leqslant 1$

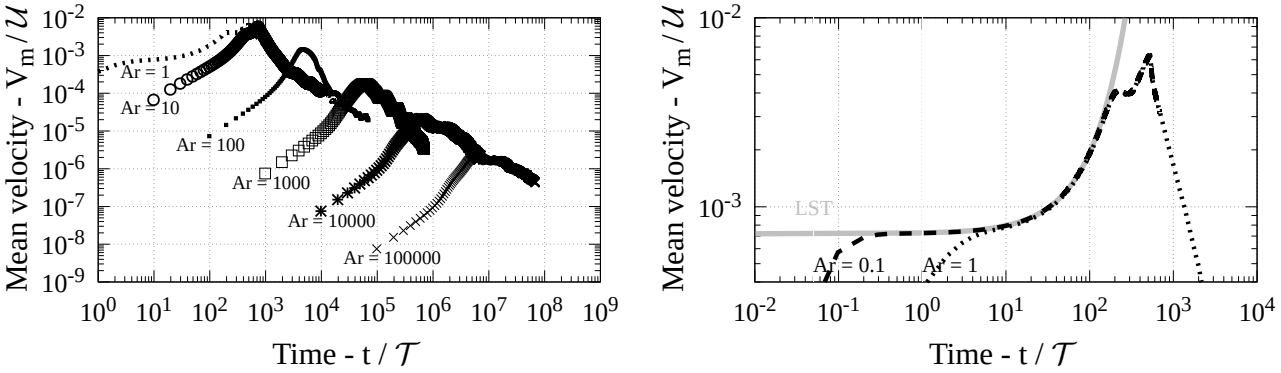
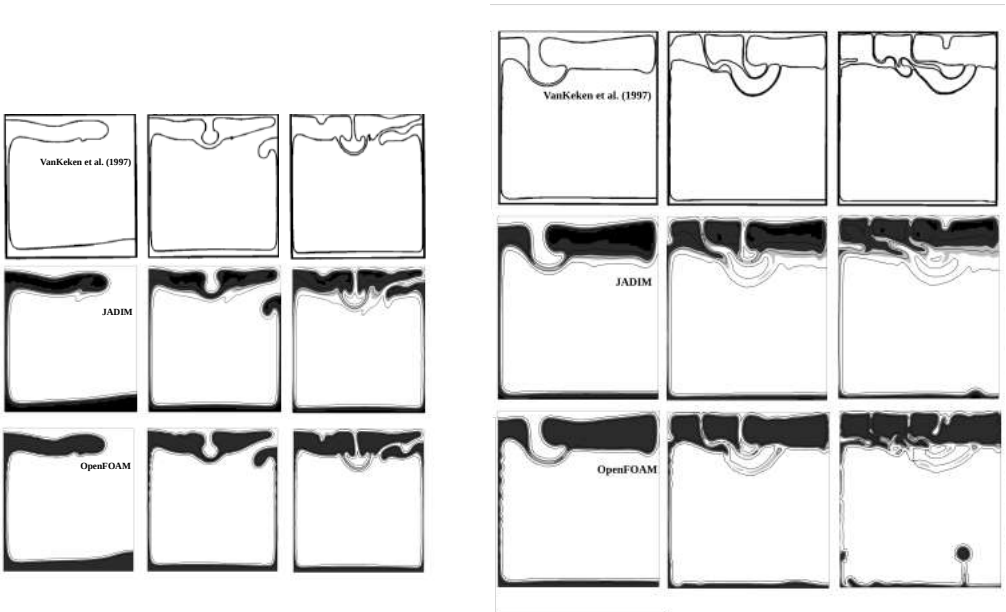


FIGURE 2.1.15 – Time evolution of the mean velocity in the two layer system for various Archimedes numbers. Velocity is scaled by $\mathcal{U}$ and time is scaled by $\mathcal{T}$ (Eq. (2.11)). For comparison, the result of the linear stability theory of RAMBERG [1981a] is also plotted (denoted by LST).

as a Stokes velocity. Therefore, it is reasonable to say that having $Ar \leq 1$ locally leads to negligible inertia effects.

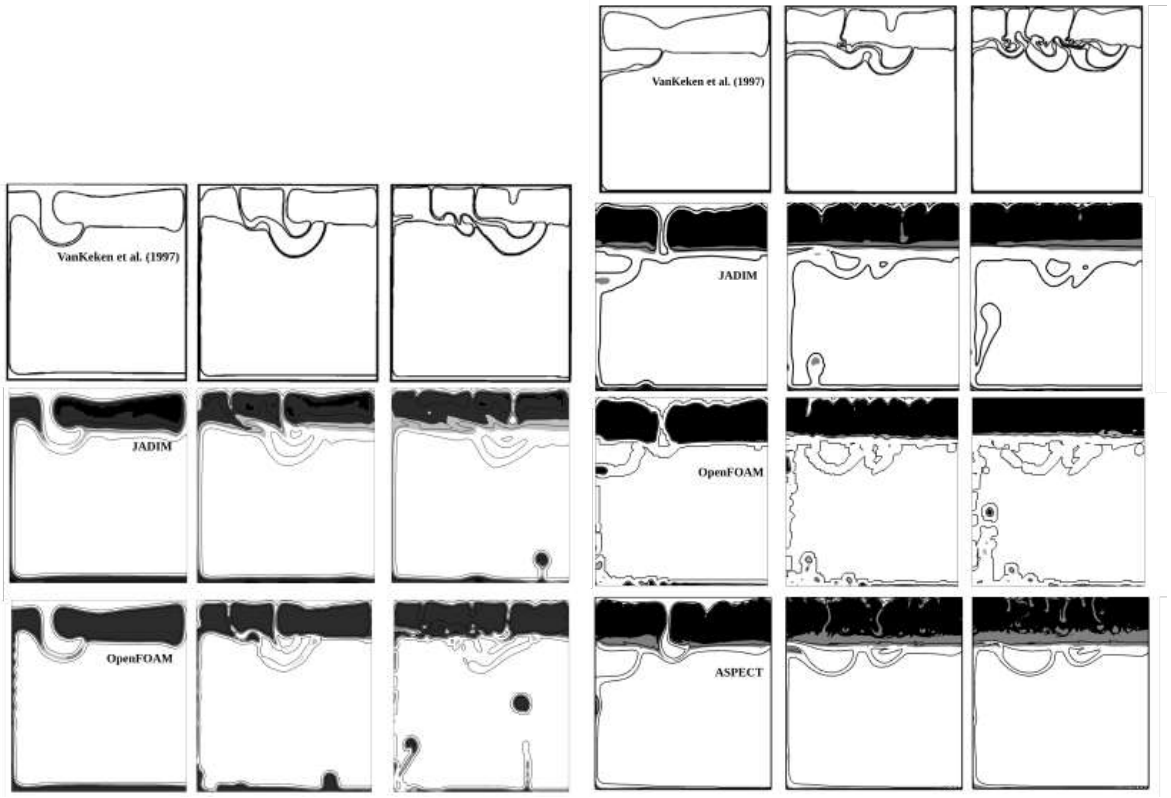
c) van Keken's test : Viscosity averaging

The main text displays van Keken's bench for viscosity contrasts $\gamma = 100$ (Fig.1) and an arithmetic viscosity averaging. The secondary instability on the top right is the most delicate to reproduce. Here we present the results of JADIM, OpenFOAM at $\gamma = 1$ and $\gamma = 10$ with arithmetic viscosity averaging (Fig. 2.1.16). In addition, $\gamma = 10, 100$ with an harmonic law are displayed Fig. 2.1.17, with the addition of ASPECT results.



(a) $\gamma = 1$ (b) $\gamma = 10$, Arithmetic μ

FIGURE 2.1.16 – Evolution of van Keken's system for viscosity ratios (a) $\gamma = 1$ thus no averaging, (b) $\gamma = 10$ and arithmetic averaging, at $t/\mathcal{T} = 50, 100, 150$. Resolutions 100x100 for JADIM and OpenFOAM.



(a) $\gamma = 10$, Harmonic μ (b) $\gamma = 100$, Harmonic μ

FIGURE 2.1.17 – Evolution of the two-phase RT system for a viscosity ratio $\gamma = 100$ at times $t/\mathcal{T} = 50$, 100, 150. From top to bottom, results from van Keken (VK), JADIM and OpenFOAM with harmonic viscosity averaging at resolution 91×100. Bottom-left displays ASPECT results, with harmonic viscosity and resolution 91×100.

d) Influence of mesh resolution, viscosity interpolation and interface perturbation on Rayleigh-Taylor instabilities

We plot in Fig. 2.1.19b) the time evolution of the velocity of the maximum vertical location of interface 1-2 with or without perturbing the two interfaces with a random perturbation in JADIM. For $t/\tau \leq 180$, the growth rate of the unperturbed interface is higher than that of the perturbed interface but the velocity value is lower. For $t/\tau \geq 300$, the growth rates become similar. The shape of interface 2-3 however, is significantly different depending on the type of initial perturbation (see snapshots in Fig. 2.1.19). Without initial perturbation both instabilities have a roughly similar wavelength and hence interface 2-3 deforms as an unique diapir. This is different from the prediction of the linear stability theory (Fig. 2.5d). Alternatively, the results for the simulation with perturbation are in agreement with the theory (Fig. 2.5c-d). It turns out that in this case interface 2-3 has a wavelength very sensitive to the initial perturbation of interfaces. This may be explained by how close the growth rates of the two interfaces are. This is not the case for cases I (Fig. 2.1.19 a) and III (Fig. 2.1.19c) where the shape and dynamics of the interfaces is roughly independent of the initial perturbation of the interfaces.

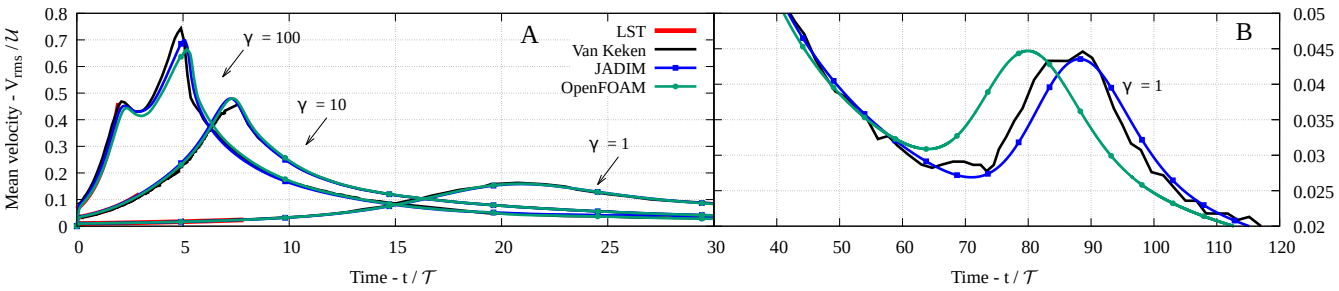


FIGURE 2.1.18 – Comparison of the time evolution of the mean velocity in the Rayleigh-Taylor two-layer system by VAN KEKEN et al. [1997], with JADIM and OpenFOAM, with harmonic viscosity averaging and a resolution 100x100. Velocity is scaled by $\mathcal{U}$ and time is scaled by $\mathcal{T}$, cf. Eqs. (2.11). $\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

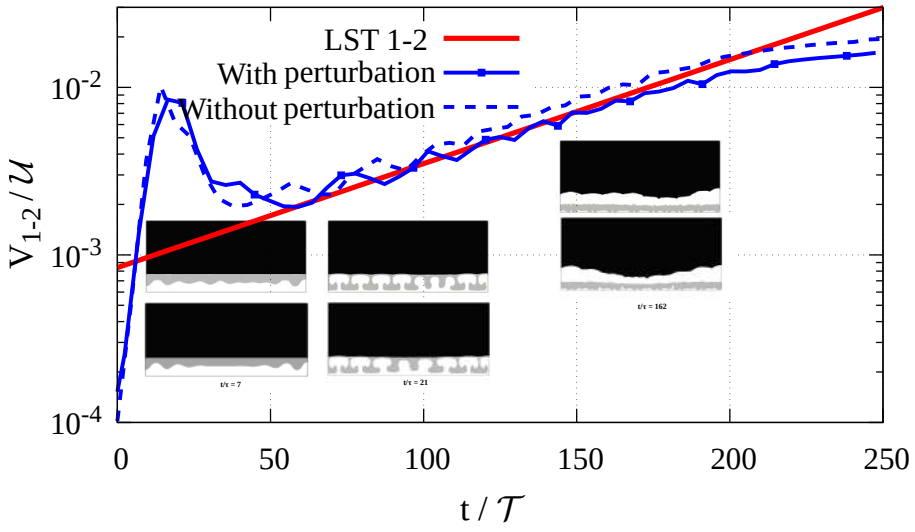
	Viscosity averaging	*harmonic*	*harmonic*	*harmonic*	*harmonic*	*arithmetic*
	Grid size	60×25	90×37	120×50	240×100	240×100
JADIM	1^{st} instability	0.1 %	5 %	3 %	REF	1%
	2^{nd} instability	25%	2 %	1.2 %	REF	2%
	Grid size	60×25	90×37	120×50	240×100	240×100
OpenFOAM	1^{st} instability	5 %	5 %	5 %	REF	0.8%
	2^{nd} instability	22	4.5%	4.5 %	REF	0%

TABLEAU 2.1.4 – Relative error of the dimensionless growth rate K as a function of mesh resolution. The case of resolution 240×100 is arbitrarily taken as reference for JADIM and OpenFOAM.

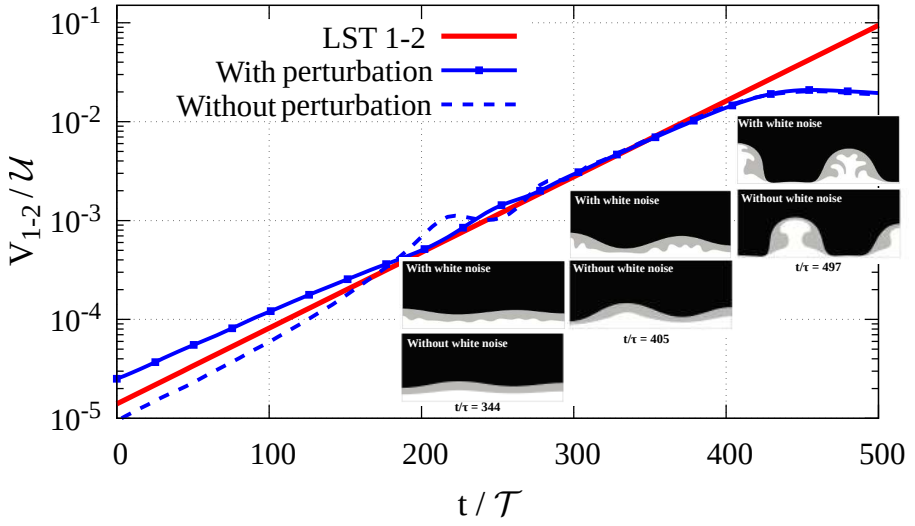
In the main text we display the results of Rayleigh-Taylor three-phase systems with harmonic viscosity interpolation. Below, in Figures 2.1.20 and 2.1.21 we show complementary tests comparing velocities between JADIM, OpenFOAM and ASPECT for various mesh resolutions and viscosity averaging.

The time evolution of the maximum vertical velocity at interface 1-2 using an arithmetic or a harmonic viscosity averaging are compared in Fig.2.1.21. For $0 < t/\tau < 200$, the arithmetic averaging exhibits a higher growth rate than the harmonic averaging, but as $t/\tau > 250$, the growth rates become similar.

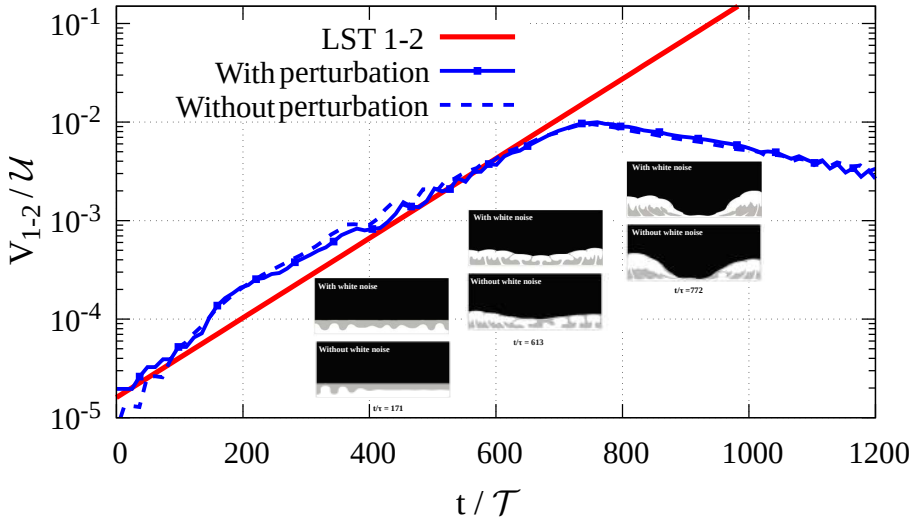
The evolution of layers 1 and 3 is roughly similar independently of the viscosity averaging. Note however, that at time $t/\tau = 497$ with arithmetic averaging, the diapir of layer 2 is slightly smaller than that with harmonic averaging. Indeed, the harmonic averaging favours a behavior controlled by the lowest viscosity at an interface, thus it is easier for layer 2 to invade layer 1.



(a) Case I

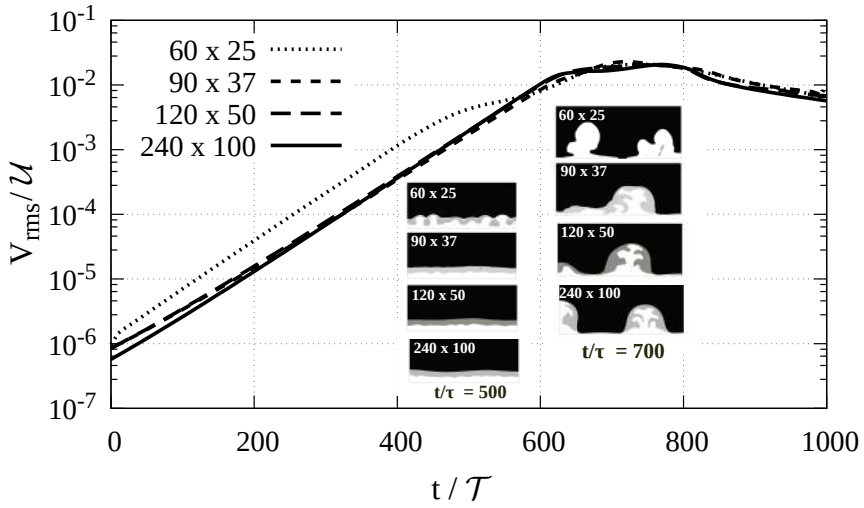


(b) Case II

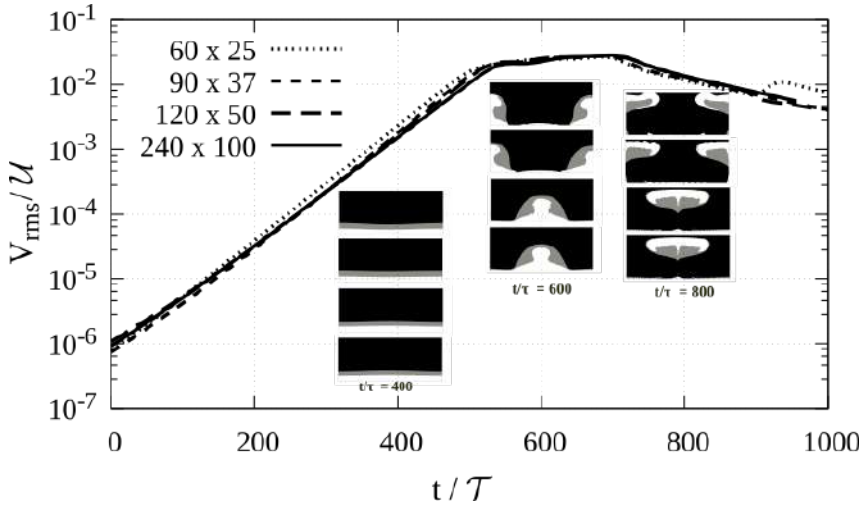


(c) Case III

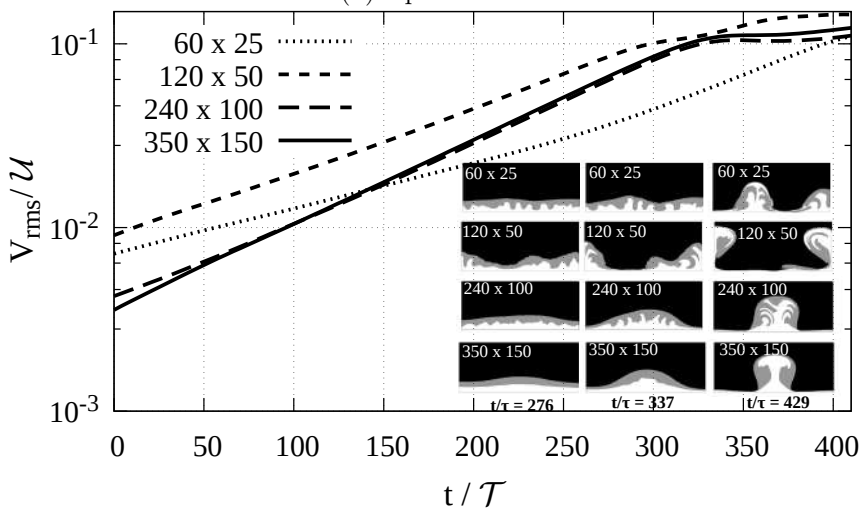
FIGURE 2.1.19 – Case I (a), II (b) and III (c) of WEINBERG et SCHMELING [1992] : time evolution of the velocity of the maximum height of interface 1-2 : with or without an initial random perturbation at interfaces (JADIM code, harmonic viscosity averaging), compared to linear stability theory (RAMBERG [1981a]). Time is scaled by $\mathcal{T}$ and $t/\mathcal{T} = 0$ is set as the time when one of the interface has raised by a distance of $3 \times 10^{-5} H$.



(a) JADIM



(b) OpenFOAM



(c) ASPECT

FIGURE 2.1.20 – Influence of mesh resolution on WEINBERG et SCHMELING [1992] case II : time evolution of the mean velocity for (a) JADIM, (b) OpenFOAM and (c) ASPECT, with harmonic viscosity averaging, $\gamma = 100$. Note that an initial perturbation at the interfaces was imposed for JADIM and ASPECT, not for OpenFOAM.

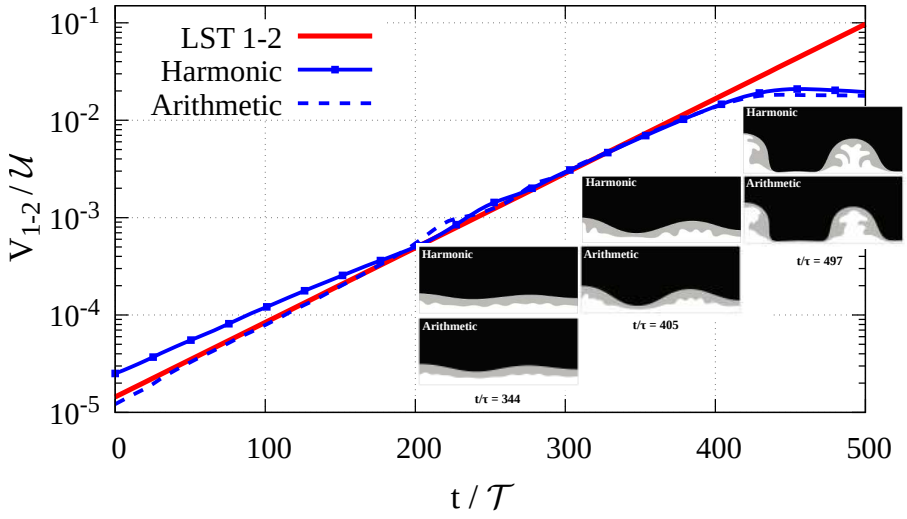


FIGURE 2.1.21 – Three-phase system by WEINBERG et SCHMELING [1992], with an arithmetic or a harmonic interpolation of viscosity at interfaces, with JADIM : Case II, the top layer is the densest, $\gamma = 100$ Time is scaled by $\mathcal{T}$ and $t/\mathcal{T} = 0$ is set as the time when one of the interface has raised by a distance of $3 \times 10^{-5} H$.

e) Mesh convergence tests with JADIM for Vatteville et al. [2009]'s case

(a) Maximum velocity contours (b) Velocity isocontour at $t/\tau = 7353$ (c) Axial Velocity over time

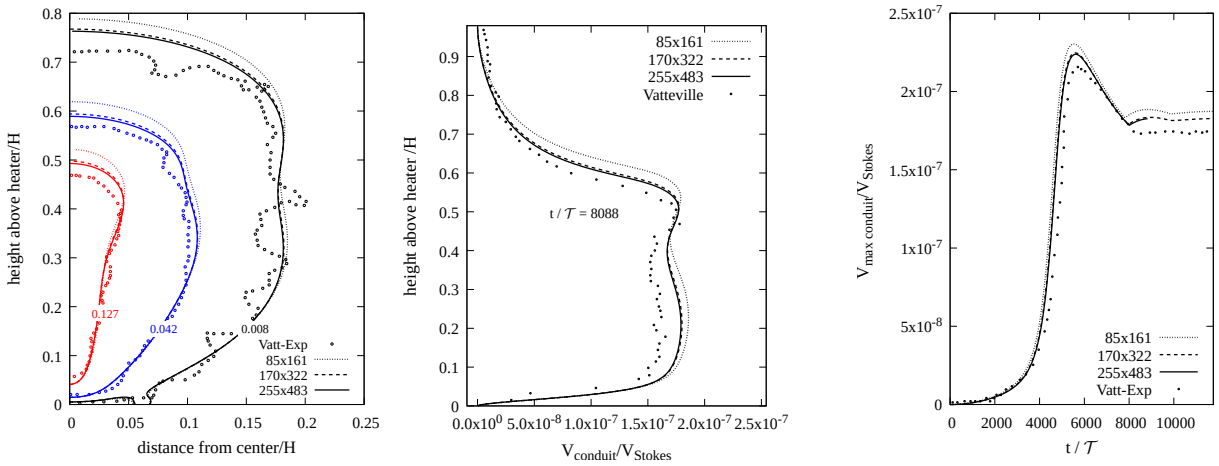
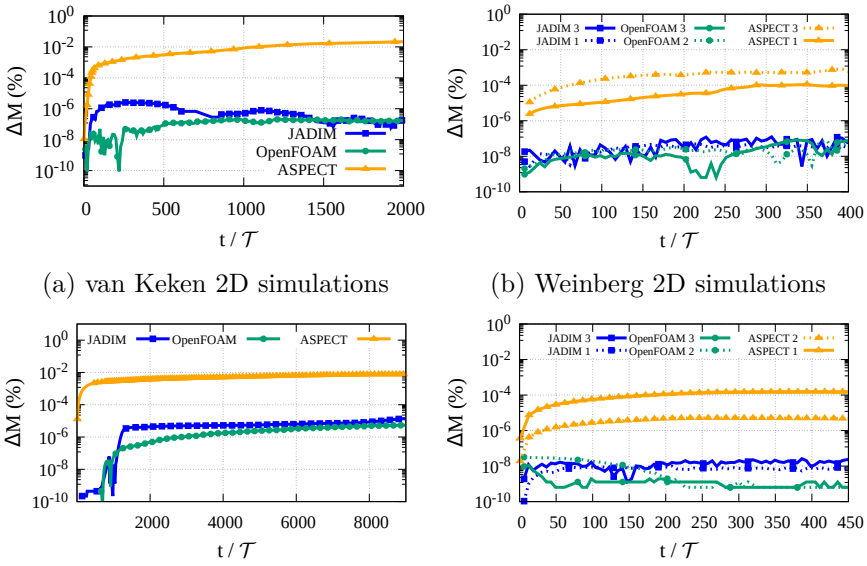


FIGURE 2.1.22 – Rayleigh-Bénard problem [VATTEVILLE et al., 2009] : comparison of velocity between laboratory (Vatt-Exp) and numerical experiments with JADIM, testing the influence of grid size. Velocity is scaled with $V_{Stokes} = \alpha g \Delta T H^2/\nu_{max}$, time is scaled with $\tau = \nu_{max}/(\alpha g \Delta T H)$, and distance with the domain height H.

f) Mass error for different setup cases



(a) van Keken 2D simulations

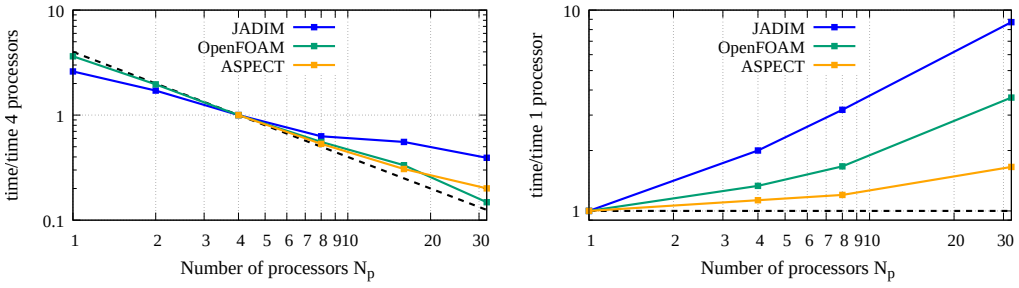
(b) Weinberg 2D simulations

(c) Le Bars 3D simulations

(d) Weinberg 3D simulations

FIGURE 2.1.23 – Relative mass error ΔM as a function of time for JADIM, OpenFOAM and ASPECT : (a) Two-layer Rayleigh-Taylor system ($\gamma = 100$, harmonic viscosity averaging, resolution 91×100) ; (b) Three-layer 2D Rayleigh-Taylor system (solid line : layer 3 ; dotted line : layer 1 (2 for OpenFOAM) ; case II, harmonic viscosity averaging, resolution 240×100) ; (c) Two-layer Rayleigh-Bénard system (harmonic viscosity averaging, resolution $90 \times 90 \times 44$) ; (d) Same as (b) in 3D (resolution $120 \times 100 \times 120$).

g) Codes Performances



(a) Strong scaling - 984 312 grid points

(b) Weak scaling - 27 000 grid points by processor

FIGURE 2.1.24 – Weak and strong scaling for the two-layer Rayleigh-Bénard problem of LE BARS et DAVAILLE [2004], case II, for JADIM, OpenFOAM and ASPECT with 10 time-steps. Dotted lines indicate optimal parallelization.

2.2 Portage d'un code VOF initialement sur CPU vers de l'hybride CPU-GPU

2.2.1 Contexte

Les performances de JADIM, notamment en temps de calcul, sont moins bonnes que celles d'OpenFOAM. En vue d'améliorer ces performances, Annaïg Pedrono, ingénieure de calcul à l'IMFT a développé, en collaboration avec Mickaël Duval de CALMIP, une version de JADIM fonctionnant en parallèle sur GPU. Les performances de cette version ont été testées lors du hackathon organisé par GENCI en décembre 2018 qui s'est déroulé sur deux jours. Nous avons composé une équipe mixte IMFT-CALMIP, constituée d'Annaïg, de Mickaël, de Nicolas Renon (CALMIP) et de moi-même. Nous avons remporté le premier prix dans la catégorie portage. Suite à cela, nous avons été sélectionnés pour participer à un deuxième hackathon organisé par OakRidge National Laboratory et NVIDIA à Juëlich (Allemagne) en avril 2019.

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus lors des deux hackathons. Ces résultats sont complémentaires des tests de performances présentés dans la section précédente.

2.2.2 Résultats

JADIM est un code parallèle qui s'exécute sur CPU. La résolution de la pseudo-équation de Poisson pour la pression représente entre 80 et 90 % du temps de calcul total. La bibliothèque PETSc est actuellement utilisée pour résoudre le système linéaire. L'objectif du hackathon est d'utiliser la bibliothèque AmgX (Algebric Multigrid Solver) de Nvidia qui fonctionne sur GPU pour résoudre le système linéaire et de comparer les performances de ces deux méthodes. Les problèmes simulés sont des problèmes à plusieurs fluides, les coefficients de la matrice changent à chaque itération temporelle (dus à la densité). De plus, ce sont des problèmes qui ont beaucoup d'itérations temporelles, d'où l'intérêt de résoudre le système linéaire rapidement.

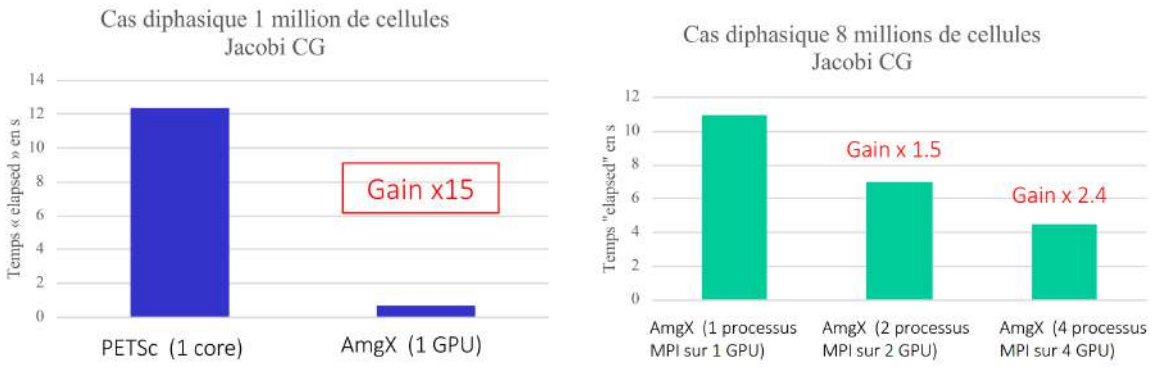
Nous avons effectué notre étude sur trois tailles de problèmes tridimensionnels (100^3, 200^3 et 400^3 cellules). Nous avons également réalisé les calculs sur plusieurs itérations comme dans une chaîne réelle de traitement.

Nous avons comparé les performances de PETSc sur un coeur CPU avec celles d'AMGX sur un coeur CPU et un coeur GPU (les coeurs GPU ne s'utilisent pas seuls, pour simplifier on utilisera le terme GPU pour signifier l'utilisation d'un coeur GPU et d'un coeur CPU), puis avec celles d'AMGX sur plusieurs GPU.

L'algorithme utilisé par les deux méthodes est similaire : gradient conjugué préconditionné (JCG).

La figure 2.2.1 présente les résultats obtenus lors du premier hackathon. Un gain de 1500 % en temps de calcul est obtenu lors de l'utilisation d'AmgX sur 1 GPU en comparaison avec PETSc sur 1 CPU sur un maillage de 100^3 (Fig. 2.2.1a). Nous avons également comparé les temps de calcul sur un cas 200^3 entre l'utilisation de plusieurs GPU et CPU. Lorsque le nombre de GPU et CPU est doublé, la vitesse de résolution du système est 1.5 plus rapide et 2.4 plus rapide lorsqu'il est quadruplé.

Les résultats de ce hackathon sont très encourageants puisque le gain en temps de calcul est loin



(a) Calcul séquentiel 1 GPU (b) Calcul parallèle multi-GPU

FIGURE 2.2.1 – [PEDRONO et al., 2019]

d'être négligeable et le portage est effectif sur plusieurs GPU. Cependant, ils peuvent être améliorés : c'est l'objet du second hackathon. Pour améliorer les performances en terme de temps de calcul, il est nécessaire de savoir où le code passe du temps. L'outil de profilage *pgprof* montre cela. Ensuite, l'outil OpenACC (Open Accelerators) permet d'ajouter des directives qui optimisent le temps passé dans une routine. OpenACC est facile d'utilisation puisque c'est le compilateur PGI qui gère les directives. Le gain en temps n'est visible que lorsque tout le code a été optimisé. En vue d'obtenir des résultats rapidement, ces directives n'ont été appliquées qu'à la partie centrale du code et donc à la résolution d'un système simple monophasique.

La figure 2.2.2 présente les résultats obtenus lors du second hackathon sur un cas monophasique de 8 millions de cellules (200^3). La partie A montre les résultats obtenus avec PETSc, c'est-à-dire avec la version de JADIM initiale sur CPU, on voit qu'effectivement la majeure partie du temps de calcul est passée dans le solveur de pression que ce soit sur un noeud (36 coeurs) ou une socket (18 coeurs). La partie B montre les résultats obtenus lors du premier hackathon, le temps passé dans le solveur de pression est réduit. Si on compare les temps sur 18 coeurs CPU, le gain en temps est obtenu à partir de l'utilisation de 2 GPU et 2 CPU. La partie C présente les résultats obtenus lors du second hackathon avec les directives OpenACC. Le temps passé dans le Runge-Kutta a diminué et donc le temps de calcul global également. Le temps de calcul avec 1 GPU et 1 CPU devient inférieur à celui de 18 coeurs. Enfin, le préconditionneur multigrille a été testé (au lieu du JCG), on obtient un gain de temps encore plus important (4 fois plus rapide que PETSc sur 18 CPU).

À l'issue de ce travail d'équipe nous avons pu constater des facteurs d'accélérations très intéressants.

L'ensemble du travail de portage s'est concentré sur le cœur du code JADIM. Il faut maintenant analyser l'ensemble des routines du code et l'optimiser entièrement. Ce n'est pas l'objectif de cette thèse, c'est pourquoi, même si les performances de JADIM sur GPU sont intéressantes, c'est OpenFOAM qui sera utilisé dans la suite de ce travail.

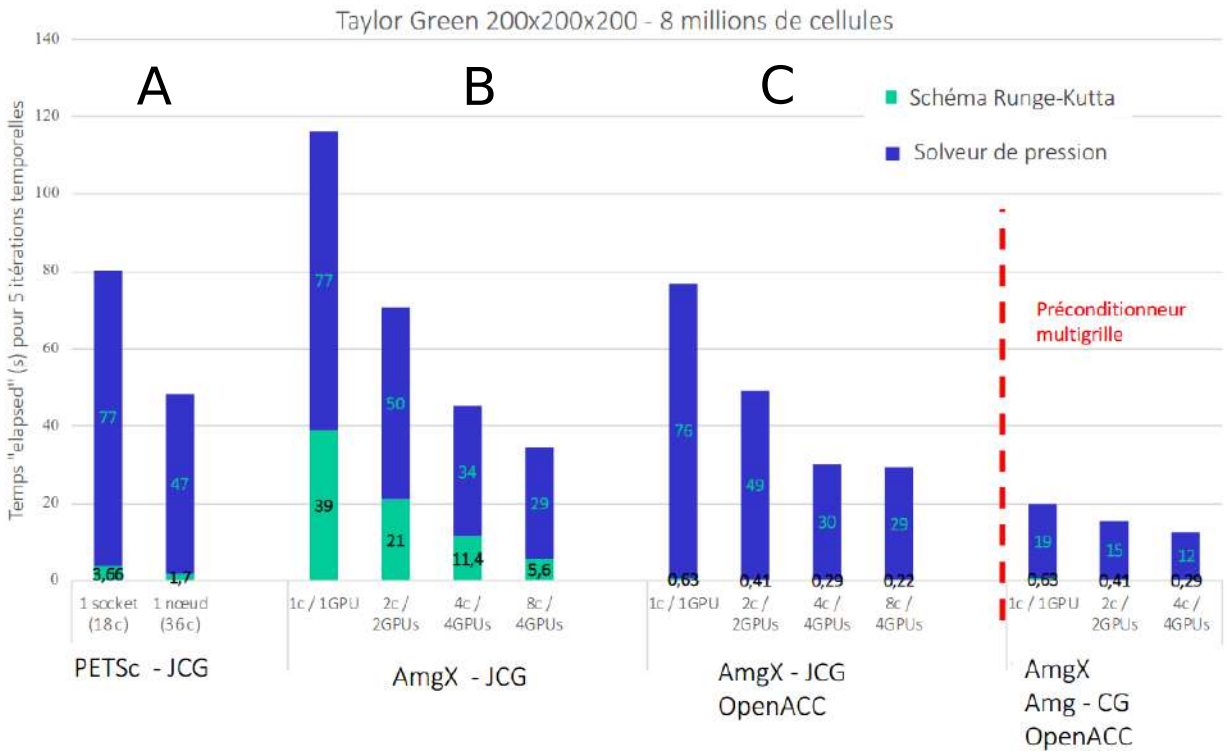


FIGURE 2.2.2 – Temps de calcul pour un cas monophasique de 200^3 cellules pour une résolution avec PETSc, AmgX, AmgX et OpenACC, AmgX et OpenACC multigrille [PEDRONO et al., 2019] (A,B : hackathon 1, C : hackathon 2).

2.3 Couplage systèmes multi-couches et thermique appliqué à Naxos

Dans cette partie, nous fusionnons système multi-couches et système thermique dans l'idée d'obtenir des cycles convectifs qui aboutissent à la formation de structures imbriquées à faible profondeur. Nous faisons des essais avec un système bi-couche puis tri-couche.

2.3.1 Système bi-couche

Deux fluides sont introduits dans le système présenté figures 2.3.1. Le système est refroidi par le dessus et chauffé par le dessous. Un géotherme linéaire (300^oC en haut à 600^oC en bas) est imposé (cliché b). Les deux fluides ont un ratio de viscosité 100 (cliché c) et des densités identiques (cliché d). Les résultats sont présentés figure 2.3.2. Le système se déstabilise d'abord sous forme de panaches thermiques dans la couche la moins visqueuse formant des diapirs de diamètre $\sim 5\ km$. Un ensemble de deux diapirs pourrait former un gros dôme de taille $\sim 10\ km$. Ensuite, la convection se développe. La couche la moins visqueuse se trouve entraînée sous forme de bulle au centre de la cellule convective. Le cycle de convection a une période de $\sim 2\ Ma$. La convection détruit les petites structures précédemment formées. A la fin, la convection est stabilisée mais ces petits diapirs ont disparus, ils ne peuvent donc pas se retrouver à faible profondeur.

Alors que les tailles des diapirs formés en profondeur ainsi que la période du cycle convectif correspondent à ceux rencontrés sur Naxos, la structure modélisée est différente de celle observée à

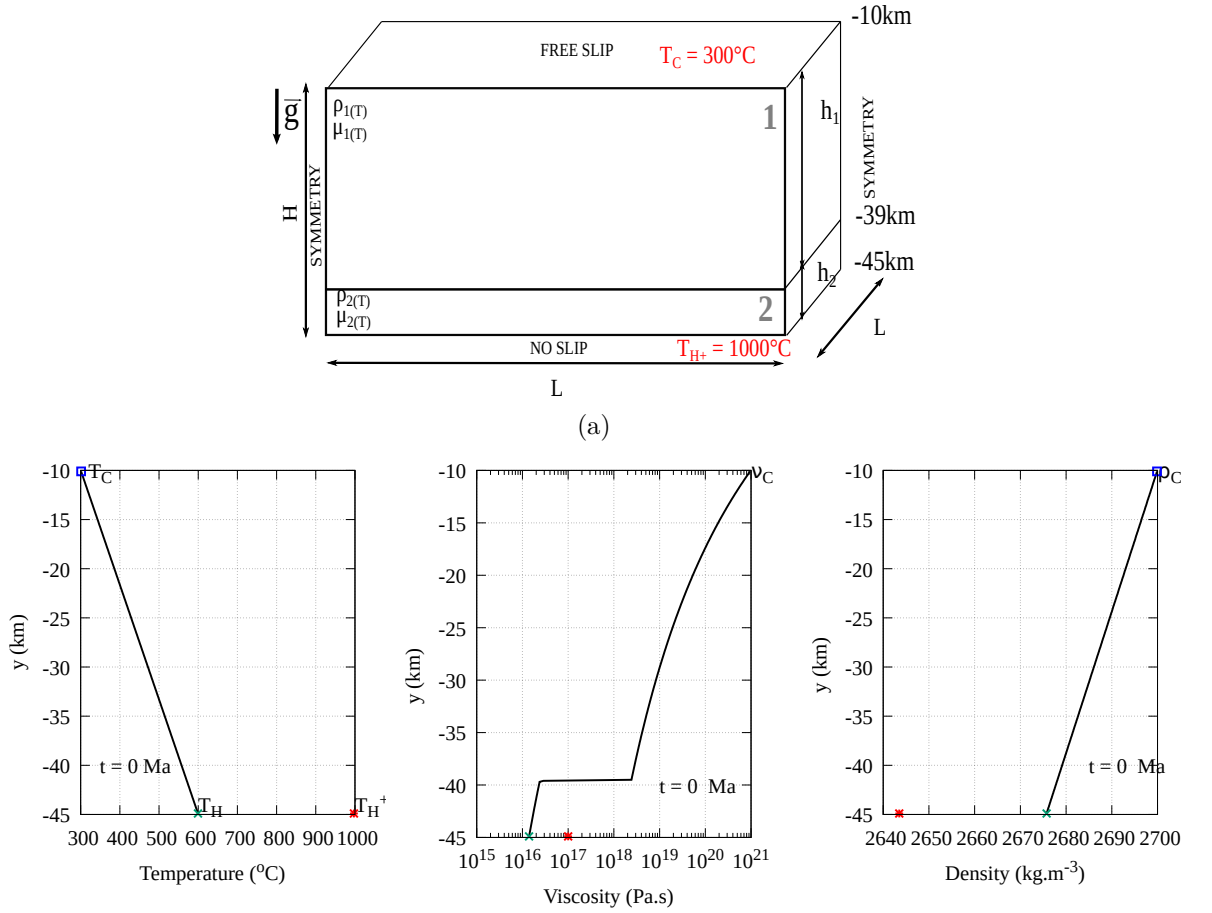


FIGURE 2.3.1 – Système bi-couche avec thermique. Géotherme linéaire initial basé sur 600°C, $\rho_i(T) = \rho_i^0(1 - \alpha\Delta T))$ avec i=1,2 $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_i(T) = \mu_i^0 exp(A/T)$, $\mu_1/\mu_2 = 100$

.

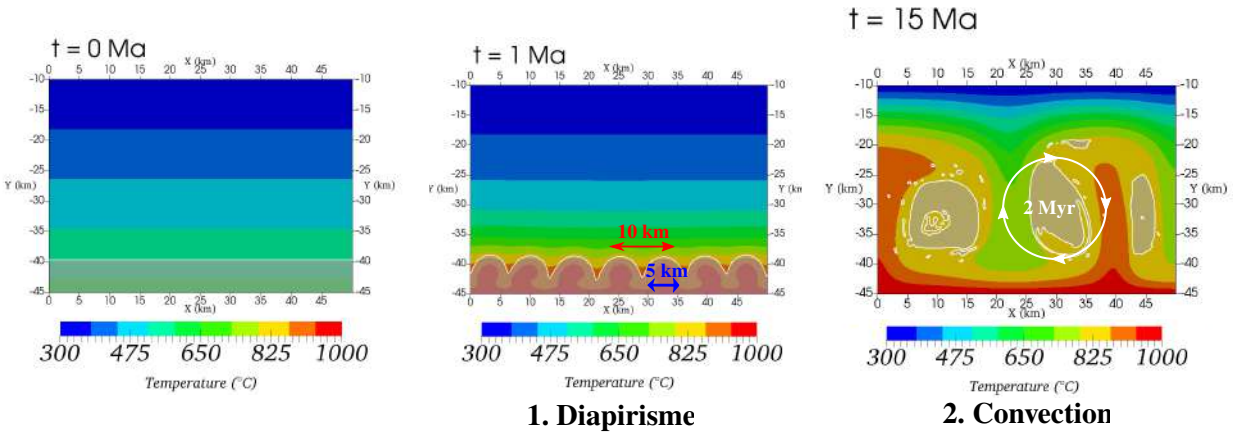


FIGURE 2.3.2 – Evolution du système bi-couche au cours du temps. Les isothermes sont représentés en couleur. La couche moins visqueuse est colorée en blanc transparent tandis que la couche plus visqueuse est laissée sans couleur.

Naxos. Ce scénario ne permet donc pas d'expliquer la formation de ces dômes.

2.3.2 Système tri-couche thermique

Nous étudions dans cette partie un système avec trois couches et de la thermique, tel que présenté sur la figure 2.3.3. La couche la plus dense est située au milieu et la moins dense en bas du système. Le diapirisme se forme initialement (figure 2.3.4) puis de grosses bulles de taille 20km s'élèvent et stagnent en haut du système. Ensuite, la convection se développe avec une période $\sim 2\ Ma.$ et entraîne quelques fragments des couches noire et blanche. Les bulles formées sont trop grosses et ne correspondent pas aux structures recherchées. Ici encore, même si les résultats en termes d'échelles temporelles correspondent bien à ceux de Naxos, les structures ne correspondent pas.

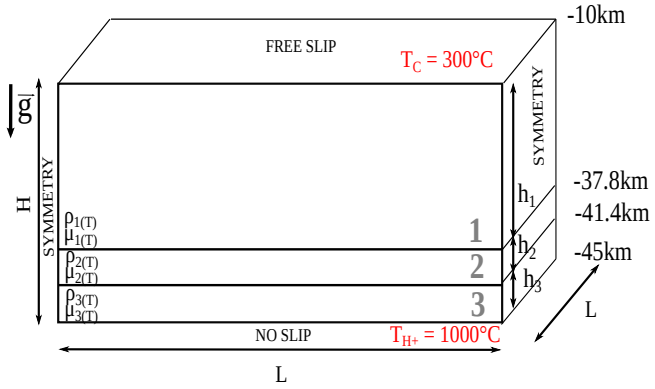


FIGURE 2.3.3 – Système tri-couche avec thermique. Géotherme linéaire initial basé sur 600°C, $\Delta\rho = 100$ kg.m^{-3} ; $\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$, $\mu_i(T) = \mu_i^0 exp(A/T)$; $\mu_1 = 100\mu_2 = 100\mu_3$.

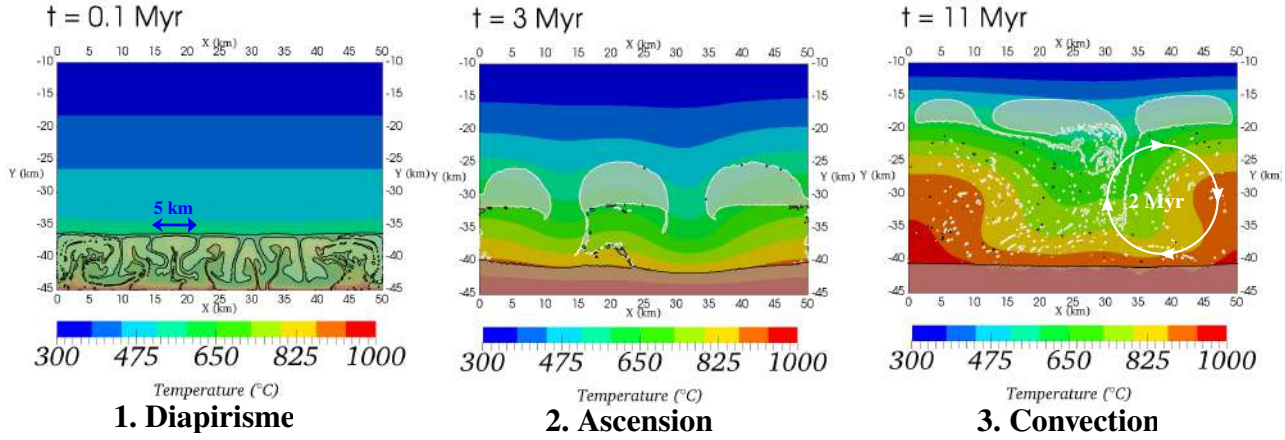


FIGURE 2.3.4 – Evolution du système tri-couche au cours du temps. Les isothermes sont représentés en couleur. La couche la moins dense est colorée en blanc transparent tandis que la couche la plus dense est colorée en noire.

2.3.3 Conclusion du couplage systèmes multi-couches et thermique

Dans un cas bi-couche, le polydiapirisme thermique est possible et se forme en bas du système. Ensuite, la convection se développe et détruit les petites structures. Le fluide, initialement localisé en

bas du système se retrouve sous forme de bulles et tourne au centre de la cellule convective. L'état final ne comporte donc pas de petites structures, or, c'est qui est observé à Naxos. Dans le cas tri-couche, la couche la moins dense s'élève sous forme de diapirs puis de grosses bulles et la convection se développe. Ceci n'est pas satisfaisant pour deux raisons : les structures finales ne sont pas celles espérées et les éléments légers n'ont pas enregistré de cycles convectifs avant de s'élever.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor démarre toujours avant la convection. Il est possible de ralentir son démarrage en augmentant les viscosités des fluides. Cependant, augmenter la viscosité des fluides signifie diminuer le nombre de Rayleigh et donc empêcher la création de la convection.

Les systèmes bi ou tri-couches montrent du polydiapirisme puis de la convection, ce qui est contradictoire avec le scénario proposé (convection puis diapirisme) puisque cet enchaînement ne permet pas d'expliquer les dômes de Naxos formés d'éléments ayant enregistré des cycles convectifs et situés à faible profondeur. Il semble donc nécessaire d'introduire d'autres processus dans le système. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation de la formation de dômes métamorphiques

Sommaire

3.1 Introduction 96
3.2 Implémentation numérique 98
3.2.1 Équations résolues 99
3.2.2 Prise en compte de la fusion partielle et des hétérogénéités 99
3.2.3 Adimensionalisation 101
3.3 Fusion partielle seule 104
3.3.1 Résultats du cas de référence $I_0M_1H_0$ 106
3.3.2 Étude paramétrique 110
3.3.3 Comparaison 2D-3D 117
3.3.4 Conclusion concernant la fusion partielle seule 122
3.4 Inclusions seules 123
3.4.1 Dynamique d'un réseau d'inclusions (viscosité constante) 127
3.4.2 Étude paramétrique 131
3.4.3 Conclusion concernant les inclusions seules 141
3.5 Association de la fusion partielle et des inclusions 143
3.5.1 Résultats du cas de référence $I_1M_1H_0$ 144
3.5.2 Étude paramétrique 147
3.5.3 Refroidissement 153
3.6 Discussion 157
3.6.1 Synthèse des modèles 157
3.6.2 Application aux dômes de Naxos et autres domaines orogéniques . . . 161
3.7 Conclusion du chapitre 3 174

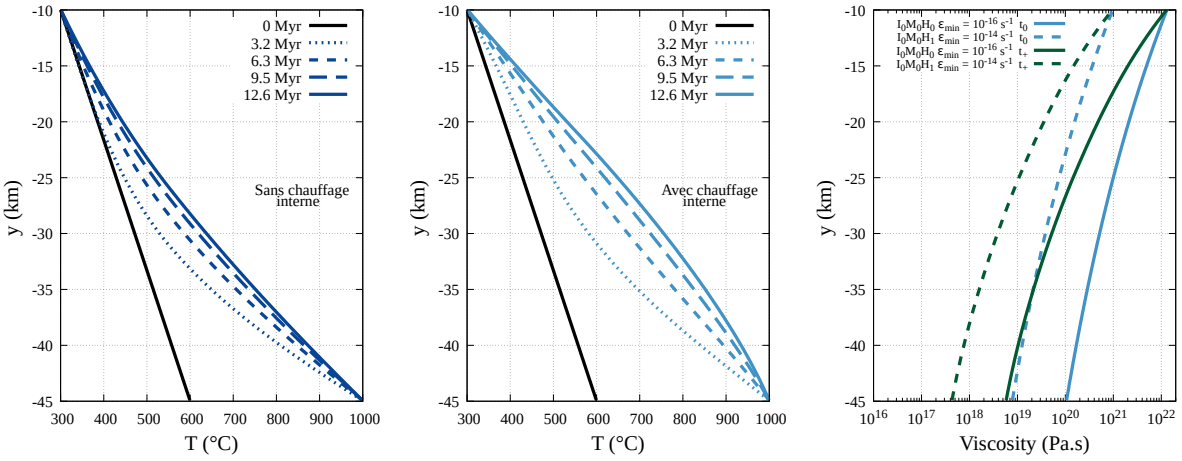
3.1 Introduction

Au regard des questions posées lors de la définition des objectifs de la thèse, le chapitre 2 a permis de répondre aux deux questions d'ordre technique : Capacité des méthodes VOF pour modéliser ce type de problème ? Avantages/inconvénients par rapport à un code de géodynamique classique ? En effet, nous avons montré que la méthode numérique VOF permet de reproduire avec précision le développement d'instabilités gravitaires de Rayleigh-Bénard et de Rayleigh-Taylor dans le cadre général d'une croûte orogénique telle que celle de Naxos.

De plus, nous avons répondu dans le chapitre 2 aux deux premières questions scientifiques : Quels paramètres permettent de retrouver les échelles spatiales et temporelles définies pour les dômes de Naxos ? La convection et le diapirisme peuvent-ils expliquer la formation de Naxos ? Concernant la première question, en considérant la viscosité comme uniquement dépendante de la température, nous avons montré qu'une viscosité $\mu(T = 1000^oC) = 10^{17}\ Pa.s$ et $\mu(T = 600^oC) = 10^{18}\ Pa.s$ permettait de retrouver les données de terrain spatiales et temporelles de Naxos (des petits dômes de 2 km imbriqués dans un gros dôme de 10 km avec une alternance de température ayant une période de 2 Ma). Concernant la deuxième question, la réponse s'est avérée être négative. En effet, nous avons vu au chapitre 2 que la convection, d'une part, permettait d'expliquer la période de 2 Ma enregistrée par les zircons, mais d'autre part était à l'origine de l'homogénéisation dans le système et de la destruction des "petits" dômes diapiriques formés. En l'absence de prise en compte d'autres processus, les dômes de Naxos apparaissent donc comme un paradoxe de la Nature ...

Il semble donc nécessaire de complexifier le système, et il existe pour cela plusieurs façons, qui sont abordées dans ce chapitre les unes après les autres. Le premier processus considéré est le chauffage interne qui contribue à réchauffer le système et favorise la convection. La figure 3.1.1a illustre l'impact de ce chauffage interne. Par la suite nous utilisons par défaut le chauffage interne dans tous les cas tests effectués. Le second processus considéré est la dépendance de la viscosité au taux de déformation local. Ceci est d'autant plus légitime que la rhéologie des roches non fondues dépend du taux de déformation et de la température (voir section 1.1.3.b). Le troisième processus considéré est la fusion partielle de la roche. En effet, la roche commence à fondre à partir d'une certaine température (température du solidus T_{sol}). La fusion partielle est essentielle à la naissance de la convection puisqu'elle permet d'obtenir des viscosités suffisamment faibles. En effet, les viscosités nécessaires à la convection ne peuvent être atteintes avec la rhéologie des roches non fondues (figure 3.1.1), sauf si de grandes épaisseurs de quartz composaient la croûte chaude, ce qui d'une part semble peu réaliste (eg. Burov [2011]), et d'autre part, provoque leur fusion partielle ! Le dernier processus considéré est l'apparition d'hétérogénéités spatiales dans la zone de roches partiellement fondues.

Dans une première étape de ce chapitre, nous implémentons donc d'abord la fusion partielle, et nous montrons que celle-ci ne permet pas de retrouver les structures observées à Naxos, notamment les structures de $\sim 2\ km$ à faible profondeur. Dans une seconde étape nous décidons de prendre en compte l'hétérogénéité du domaine crustal partiellement fondu. En effet, d'une part, l'observation géologique montre que le milieu est effectivement hétérogène, et d'autre part plusieurs travaux expérimentaux



(a) (b) (c)

FIGURE 3.1.1 – a) Température moyenne à différents temps dans le cas I_0M_0, sans chauffage interne et b) dans le cas, I_0M_0H avec chauffage interne ($H_r = 1.75 \times 10^{-10}\ W.kg^{-1}$, Eq. (3.4)). Avec chauffage interne, la température augmente de 120^0C de plus au bout de 12.6 Ma à 30 km de profondeur. c) Évolution de la viscosité selon la profondeur avec (pointillés) ou sans chauffage interne (traits pleins) (sans fusion partielle). Deux géothermes sont illustrés, au temps initial t_0 avec une température basale $T_H^{t_0} = 600^oC$ et lorsque le système est rééquilibré suite à l'augmentation de la température basale à $T_H^{t_+} = 1000^oC$ et ce, pour deux taux de déformations fixés $\dot{\varepsilon} = 10^{-14}, 10^{-16}\ s^{-1}$.

et de modélisation [BURGISSER et al., 2005; KATZ et WEATHERLEY, 2012; KOYAGUCHI et al., 1990] montrent que la dynamique de l'écoulement peut être significativement impactée par des hétérogénéités du milieu.

Nous traduisons ces hétérogénéités par des inclusions, c'est-à-dire des poches de fluide de densité et viscosité différentes du milieu environnant (appelé Milieu Global Équivalent : MGE) de taille sub-kilométrique. Nous avons choisi des hétérogénéités de deux types : plus lourdes et plus visqueuses ou plus légères et moins visqueuses que le milieu environnant. Ces inclusions sont affectées par la convection et peuvent coalescer ou éclater. La méthode VOF est donc idéale pour étudier ce type de système (voir chapitre 1, section 1.3.2). La prise en compte de ces hétérogénéités permet d'obtenir des petites structures à faible profondeur comme celles observées à Naxos.

Malgré la prise en compte de ces complexités dans un système de croûte chaude, il reste à reproduire l'enchaînement de la convection suivie de la création des structures de dômes imbriqués observés à Naxos, et pour cela, nous montrons à la fin de ce chapitre (section 3.5) que la combinaison de la fusion partielle et des inclusions permet l'obtention à la fois de la convection et de petites structures. Ce concept est schématisé sur la figure 3.1.2 : le milieu non fondu est considéré homogène, avec une viscosité μ_{NF} et une masse volumique ρ. Au passage du seuil $M = M_S$ (front de fusion), le milieu fond partiellement et fait apparaître les hétérogénéités qui se distinguent par une viscosité μ_{PF} et une densité différente de celle du MGE.

Une dernière complexité est alors introduite dans notre modélisation, tenant compte du fait que le chauffage basal du système ne peut perdurer indéfiniment, et qu'il doit s'arrêter au bout d'un

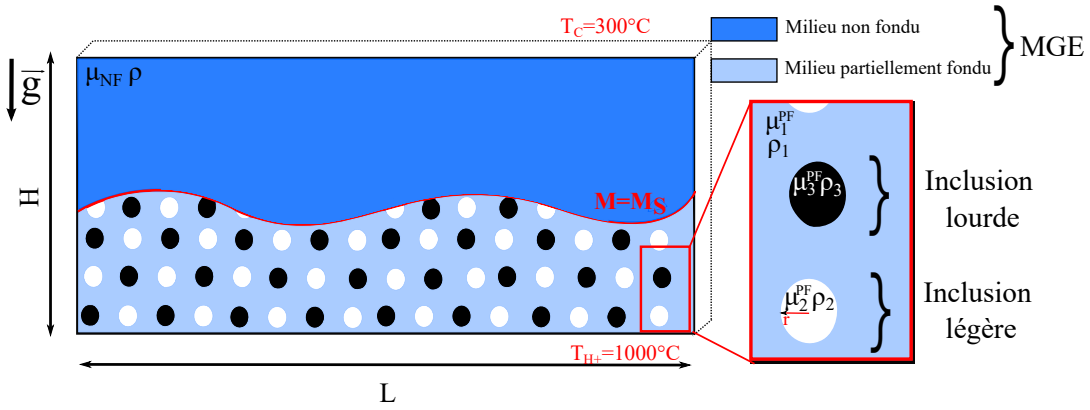


FIGURE 3.1.2 – Schéma conceptuel de la combinaison fusion partielle et inclusions hétérogènes, qui ne sont activées qu'une fois la fraction de melt seuil M_S atteinte. Les inclusions noires (blanches) sont localement plus (moins) denses et visqueuses que le fluide environnant (appelé milieu global équivalent - MGE). Les acronymes NF et PF font respectivement référence à "non-fondu" et "partiellement fondu". Les valeurs typiques sont : $H = 35\ km$, $L = 50\ km$, $M_s = 0.3$, $T_c = 300^oC$, $T_H^+ = 1000^oC$.

certain temps. L'arrêt du chauffage basal et donc le refroidissement du système permettent l'arrêt de la convection et la "fixation" de ces structures.

Enfin, une synthèse décrivant les conditions de formation de dômes dans un système convectif est montrée deux scénarios pour expliquer la formation des dômes de Naxos sont proposés.

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment ces quatre choix, le chauffage interne, la fusion partielle, les hétérogénéités compositionnelles et l'arrêt du chauffage basal, combinées ensemble dans un même système, permettent d'expliquer la formation des dômes de Naxos. Nous présentons d'abord les équations résolues et leur adimensionalisation, dans le cas général où il y a une dépendance non-linéaire de la viscosité avec le taux de déformation. Le chapitre présente ensuite les résultats obtenus avec seulement la fusion partielle, puis seulement les inclusions et enfin la combinaison des deux en incluant l'arrêt du chauffage basal.

3.2 Implémentation numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les nombres d'Archimède et de Rayleigh, basés sur un fluide newtonien pour adimensionner les équations et pouvoir utiliser des viscosités numériques inférieures à ce qu'elles sont en réalité. La prise en compte d'une rhéologie dépendant de façon non-linéaire au taux de déformation impose de redéfinir ces nombres adimensionnels afin de transformer correctement les viscosités réelles en viscosités numériques.

Nous rappelons d'abord les équations résolues, puis comment la fusion partielle est intégrée à celles-ci. Enfin, nous développons l'adimensionalisation des équations et les nombres adimensionnels pertinents dans ce problème.

3.2.1 Équations résolues

Les équations résolues dans ce chapitre sont les suivantes :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C_i = -\nabla \cdot (\mathbf{U}_r C_r), \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{3.2}$$

$$\rho_{ref} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho_{ref} \mathbf{U} \cdot \nabla \ \mathbf{U} = -\nabla P + \tilde{\rho}\mathbf{g} + \nabla \cdot [\tilde{\mu}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T) + \frac{H_r}{Cp(T)}, \tag{3.4}$$

avec

$$\kappa(T < 846K) = \left(\frac{567.3}{T} - 0.062\right) \cdot 10^{-6} \tag{3.5}$$

$$\kappa(T > 846K) = (0.732 - 1.35 \times 10^{-4} T) \cdot 10^{-6} \tag{3.6}$$

$$Cp(T < 846K) = 902.7 + 0.387T - 22.6 \times 10^{-6} T^{-2} \tag{3.7}$$

$$Cp(T > 846K) = 1037.6 + 0.146T - 216.7 \times 10^{-6} T^{-2} \tag{3.8}$$

Les équations (3.1), (3.2), (3.3) sont les mêmes que dans le chapitre 2, seules la viscosité $\tilde{\mu}$ et la densité $\tilde{\rho}$ vont être affectées par la fusion partielle et les hétérogénéités. L'équation de la chaleur (3.4) diffère puisque que l'on tient compte ici du chauffage interne, avec H_r (en $W.kg^{-1}$), le taux de production de chaleur radioactive ainsi que des variations de la diffusion thermique ($\kappa(T)$, Eqs. 3.5, 3.6 en $m^2.s^{-1}$) et de la capacité thermique ($Cp(T)$, Eqs. 3.7, 3.8 en $m^2.s^{-2}.K^{-1}$) avec la température [Whittington et al., 2009].

3.2.2 Prise en compte de la fusion partielle et des hétérogénéités

a) Fusion partielle

La modélisation de la fusion partielle peut s'effectuer selon des degrés de complexité variables allant jusqu'à prendre en compte les réactions chimiques à petite échelle [Jull et Kelemen, 2001; Malvoisin et al., 2015; Schmeling et al., 2019b]. Ici nous choisissons de faire une approximation de premier ordre de manière similaire à d'autres études [Burg et Gerya, 2005; Gerya et Yuen, 2003b] en introduisant un seul paramètre, à savoir la fraction de melt $0 \leq M \leq 1$ (à pression constante). Ce paramètre est ici défini comme variant linéairement avec la température :

$$M = \frac{T - T_{sol}}{T_{liq} - T_{sol}}, \tag{3.9}$$

où, dans toute l'étude, on fixe $T_{sol} = 600^oC$ et $T_{liq} = 1000^oC$. On introduit de plus une valeur critique de la fraction de melt, notée M_S, au delà de laquelle la viscosité diminue fortement. La valeur du seuil M_S est sujet à débat, c'est pourquoi une étude de sensibilité des résultats à ce paramètre est

menée dans la section 3.3 [Vanderhaeghe, 2009; Vigneresse, 2006].

b) Hétérogénéités spatiales

Le chapitre 2 présentait des systèmes multi-fluides dont les densité et viscosité du système variaient dans chaque fluide (équation 2.6) selon sa fraction volumique de fluide C_i. Dans ce chapitre, nous conservons trois fractions volumiques $0 \leq C_i \leq 1$ $(i = 1, 2, 3)$ telles que :

— Fluide 1 = milieu global équivalent (MGE) ($C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$),

— Fluide 2 = inclusions légères ($C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$),

— Fluide 3 = inclusions lourdes ($C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$).

Ceci nous permet de distinguer dans le système une phase 'continue' appelée MGE qui peut être fondue ou non, et deux phases 'discrètes' (au sens où elles sont initialement sous la forme d'inclusions séparées les unes des autres).

c) Densité et viscosité effectives

Dans ce chapitre, la masse volumique $\tilde{\rho}$ dépend à la fois de la température T (via l'équation d'état du fluide), de la phase considérée et de la fraction de melt. Notons toutefois que $\tilde{\rho}$ est indépendant du seuil M_S contrairement à la viscosité. La masse volumique est ainsi modélisée par :

$$\tilde{\rho} = \rho_{ref} \times [1 - \alpha(T - T_{ref})], \tag{3.10}$$

avec

$$\rho_{ref} = \sum_{i=1}^{3} C_i \times [\rho_i^{S0}(1 - M) + \rho_i^{L0} M], \tag{3.11}$$

où ρ_i^{S0} est la masse volumique de la roche non-fondue dans la phase i, ρ_i^{L0} celle de la roche fondue de cette même phase et T_{ref} une température de référence pour l'équation d'état du fluide (dans ce chapitre, $T_{ref} = 300^o C$).

Ici, la masse volumique varie continûment en fonction de la fraction de melt M. Notons cependant que d'autres choix sont possibles pour modéliser la masse volumique dans le système. Par exemple, celle-ci pourrait dépendre explicitement du seuil M_S et non plus de la valeur locale de M. L'effet d'autres choix de modélisation de $\tilde{\rho}$ sur la convection dans le système est présenté en annexe A.2.1.

Pour la viscosité $\tilde{\mu}$, deux lois sont introduites en fonction de la valeur relative de la fraction de melt M vis-à-vis de la valeur seuil M_S. Dans un cas, $\tilde{\mu}$ dépend de la température et du taux de déformation $\dot{\varepsilon}$, dans l'autre cas $\tilde{\mu}$ dépend de la fraction de melt et de la phase considérée. Au final, la viscosité dans le système est modélisée par :

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_{NF} = 0.25 \times 10^6 (0.75A)^{-\frac{1}{n}} (\max(\dot{\varepsilon}_{min}, \dot{\varepsilon}))^{\frac{1}{n}-1} \cdot exp(\frac{Q}{nRT}) & \text{si } M < M_S \\ \mu_{PF} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} C_i \mu_i^0 \cdot exp\left[2.5 + \left(\frac{1-M}{M}\right)^{0.48} (1 - M)\right] & \text{si } M \geq M_S \end{cases} \tag{3.12}$$

où μ_{NF} (resp. μ_{PF}) fait référence à la viscosité dans la roche non-fondue (resp. partiellement fondue), A est la constante du matériau en $Pa^{-n}.s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = \sqrt{(tr(\epsilon^2) - tr^2(\epsilon)/3)/2}$ est le second invariant du tenseur taux de déformation $\epsilon = (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)/2$ en s^{-1}, Q est l'énergie d'activation en $J.mol^{-1}$, n est le facteur exponentiel, R est la constante des gaz parfaits ($R = 8.314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$), et μ_i^0 est une viscosité caractéristique de la phase i lorsque celle-ci est partiellement fondue.

Lorsque $n > 1$ (comportement rhéo-fluidifiant), et si aucune régularisation n'est faite, la viscosité diverge si $\dot{\varepsilon}$ est nul. Nous définissons donc un $\dot{\varepsilon}$ minimal, noté $\dot{\varepsilon}_{min}$ (par défaut $\dot{\varepsilon}_{min} = 10^{-16}\ s^{-1}$) pour palier à ce problème. $\dot{\varepsilon}_{min}$ est important puisqu'il détermine la viscosité initiale et les viscosités minimales et maximales du système (voir figure 3.1.1).

Le modèle choisi pour la viscosité des roches non-fondues μ_{NF} est inspiré de Chen et Morgan [1990]. Celui pour la viscosité des roches partiellement fondues μ_{NF} est inspiré de Bittner et Schmeling [1995]; Pinkerton et Stevenson [1992]. Cette dernière loi en est une parmi d'autres, car plusieurs lois ont été proposées pour exprimer la rhéologie des roches partiellement fondues [Gerbault et al., 2018; Rey et al., 2009; Rosenberg et Handy, 2005; Rutter et al., 2011; Takei et Holtzman, 2009], dont une plus complexe déterminée par Caricchi et al. [2007] qui décrit la rhéologie de roches felsiques partiellement fondues.

Quand le système n'est pas suffisamment chauffé ($M < M_S$), les inclusions sont inactives, c'est à dire que les inclusions se comportent comme le milieu global équivalent MGE. Le système est ensuite chauffé, et une fois le seuil dépassé $M \geq M_S$, les inclusions sont 'activées' : elles ont une densité et une viscosité différentes de celles du MGE.

Rappelons enfin que la densité ne dépend pas du seuil M_S. Ceci implique que les inclusions peuvent avoir une densité différente du MGE quelle que soit la valeur de M et notamment lorsqu'elles se situent dans la zone non fondue. Cela n'a pas d'impact puisque dans cette zone, la viscosité est telle qu'elle empêche tout mouvement des inclusions.

3.2.3 Adimensionalisation

De la même manière que dans le chapitre 2, nous adimensionnons les équations afin de faire apparaître les nombres adimensionnels qui seront pertinents pour le problème, et le passage entre les échelles du terrain et celles choisies dans les simulations. La différence majeure avec le chapitre 2 est qu'ici les fluides sont non-newtoniens (ils peuvent dépendre de la température, de la fraction de melt et du taux de déformation).

Nous décrivons les choix faits pour adimensionner les équations, proposons une définition des nombres d'Archimède, de Rayleigh et de Prandtl généralisés aux fluides non-newtoniens en loi de puissance, et présentons les rapports d'échelles entre celles du terrain et celles de la simulation.

a) Equations adimensionnées

Sans perte de généralité, considérons le cas d'un fluide dont la viscosité $\tilde{\mu}$ dépend de la température et du taux de déformation via une loi de puissance. On peut l'exprimer sous la forme suivante :

$$\tilde{\mu} = K_{eff}(T)\dot{\varepsilon}^{\frac{1}{n}-1} \tag{3.13}$$

avec K_{eff} la consistance en $kg/(m.s^{2-1/n})$ qui devient homogène à la viscosité dynamique lorsque $n = 1$, n le facteur de la loi de puissance et $\dot{\varepsilon} = \sqrt{(tr(\epsilon^2) - tr^2(\epsilon)/3)/2}$ où $\epsilon = (\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T)/2$ est le tenseur taux de déformation. En comparant (3.12) et (3.13), on remarque que $K_{eff}(T) = 0.25 \times 10^6 (0.75A)^{-\frac{1}{n}} exp(\frac{Q}{nRT})$ si $M < M_S$ et $K_{eff}(T) = \sum_{i=1}^{3} C_i \mu_i^0 \cdot exp\left[2.5 + \left(\frac{1-M}{M}\right)^{0.48}(1-M)\right]$ si $M \geq M_S$. Dans les deux cas, K_{eff} est bien une fonction de la température (directement ou indirectement via la fraction de melt). Le tenseur des contraintes visqueuses, noté τ_v, peut s'écrire sous la forme $\tau_v = 2\tilde{\mu}\epsilon$. Dans le cadre de l'adimensionalisation des équations (3.1) -(3.4), nous considérons le cas général où n est quelconque.

Dans ce chapitre les équations sont adimensionnées en choisissant comme échelle de temps $\mathcal{T}$, de longueur $\mathcal{L}$, de vitesse $\mathcal{U}$, de pression $\mathcal{P}$ et de température $\mathfrak{T}$:

$$\mathcal{T} = q^{-1} = \left(\frac{2K_{eff}}{\Delta\rho g H}\right)^n, \quad \mathcal{L} = H, \quad \mathcal{U} = qH^2, \quad \mathcal{P} = \rho(qH)^2, \quad \mathfrak{T} = \Delta T, \tag{3.14}$$

où $\Delta\rho$ est l'écart caractéristique de densité dans le système (en pratique, on choisit $\Delta\rho = \rho_1^{S0} - \rho_1^{L0}$) et ΔT est l'écart caractéristique de température (en pratique, on choisit $\Delta T = T_{sol} - T_{liq}$). Notons que pour $n = 1$, la définition de $\mathcal{T}$ est équivalente à celle du chapitre 2 (éq. (2.11)).

Il est utile de remarquer que l'équation d'état du fluide (3.10) permet d'écrire $|\Delta\rho/\rho| = |\alpha\Delta T|$, ce qui nous permet d'exprimer l'échelle caractéristique de temps en fonction de l'écart de densité ou de température :

$$\mathcal{T} = q^{-1} = \left(\frac{2K_{eff}}{\Delta\rho g H}\right)^n = \left(\frac{2K_{eff}}{\rho\alpha g \Delta T H}\right)^n \tag{3.15}$$

On pose alors :

$$t^* = \frac{t}{\mathcal{T}}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{H}, \quad U^* = \frac{U}{qH^2}, \quad P^* = \frac{P}{\rho(qH)^2}, \quad g^* = \frac{g}{q^2 H}, \tag{3.16}$$

où l'astérisque désigne une grandeur adimensionnelle et x_i est la i-ème coordonnée spatiale. En injectant ces définitions dans les équations (3.1) -(3.4), on obtient, après simplification, les équations adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla^* C_i = -\nabla^* \cdot (\mathbf{U}_r^* C_r), \tag{3.17}$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{U}^* = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla^* \mathbf{U}^* = -\nabla^* P^* + \mathbf{g}^* + \nabla^* \cdot [\frac{2}{Ar}(\nabla^* \mathbf{U}^* + (\nabla^* \mathbf{U}^*)^T)], \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{U}^* \cdot \nabla^* T^* = \nabla^* \cdot (\frac{2}{Ra} \nabla^* T^*) + \frac{2Ra_H}{Ra^2}, \tag{3.20}$$

avec

$$Ar = \frac{2\rho q^{2-\frac{1}{n}} H^2}{K_{eff}} \quad \text{(nombre d'Archimède généralisé)}, \tag{3.21}$$

$$Ra = \frac{2q}{\kappa / H^2} \quad \text{(nombre de Rayleigh généralisé)}, \tag{3.22}$$

$$Ra_H = \frac{2qH^4 H_r}{\kappa^2 C_p \Delta T} \quad \text{(nombre de Rayleigh-Roberts généralisé)}. \tag{3.23}$$

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ces équations adimensionnelles. La première est l'absence du nombre de Prandtl dans celles-ci. Celui-ci peut en fait s'exprimer en fonction du nombre d'Archimède et du nombre de Rayleigh via :

$$Pr = \frac{Ra}{Ar} = \frac{K_{eff}}{\rho \kappa q^{1-\frac{1}{n}}} \quad \text{(nombre de Prandtl généralisé)}. \tag{3.24}$$

Par conséquent, il est indirectement présent dans la loi de conservation de quantité de mouvement et l'équation d'évolution de la température. Une autre remarque est qu'en prenant $n = 1$, les définitions (3.21)-(3.24) se simplifient en celles utilisées au chapitre 1 et 2 (éq. (1.6), (2.8) et (2.12)). Il en est de même pour les équations (3.17)-(3.20) vis-à-vis de (3.1)-(3.4).

b) Liens entre terrain et simulation numérique

Les valeurs typiques des nombres adimensionnels définis ci-dessus, en utilisant les valeurs de terrain du cas de Naxos (voir tableau 3.3.1 et $H = 35\ km$, $T = T_{sol} = 873\ K$, $M = M_S = 0.3$ [Dufek et Bergantz, 2005], $\Delta\rho = \rho_{S0} - \rho_{L0} = 100\ kg.m^{-3}$, $\kappa = \kappa(T_{liq}) \approx 6 \times 10^{-7} m^2.s^{-1}$, $C_p = C_p(T_{liq}) \approx 1223\ m^2.s^{-2}.K^{-1}$) sont, en fonction du choix de modèle de viscosité, $5 \times 10^{-22} \leq Ar \leq 4 \times 10^{-15}$, $147 \leq Ra \leq 4 \times 10^5$, $10^{12} \leq Ra_H \leq 3 \times 10^{15}$ et $1 \times 10^{20} \leq Pr \leq 3 \times 10^{23}$.

Dans les simulations, et comme expliqué au chapitre 2, nous choisissons les propriétés du système de telle sorte que le nombre d'Archimède soit d'ordre 1 (car nous avons montré que la dynamique était pertinente jusqu'à de telles valeurs de Ar et que ce choix permet un gain conséquent sur le temps de calcul).

De plus, les valeurs d'un certain nombre de paramètres physiques en entrée de la simulation sont identiques à ceux du terrain (l'accélération de pesanteur, les densités et leurs écarts, les températures et leurs écarts, le coefficient d'expansion thermique, la diffusivité thermique). Au final, seules la hauteur du système et la valeur de la viscosité caractéristique (K_{eff}, c'est-à-dire A ou μ_i^0) sont différentes. Ces deux valeurs sont donc choisies de sorte à avoir $Ar \approx 1$ et à être en similitude vis-à-vis du nombre de Rayleigh. Il est important de noter que ce choix crée un écart de valeur des nombres de Prandtl du terrain et numérique. En particulier, le nombre de Prandtl dans la simulation est grandement diminué. Néanmoins, nous avons vérifié qu'il restait toujours supérieur à 10^2.

En pratique, nous commençons par faire un choix pour la hauteur du système. Par exemple, le rapport entre la hauteur du système sur le terrain notée H^R (R pour réel) et celle du domaine de calcul, notée H^N (N pour numérique) est d'abord fixé à 10^5 (car cela permet d'avoir une taille de maille qui équivaut à 100 m). Connaissant la hauteur, la viscosité peut ensuite être calculée via le rapport entre les nombres d'Archimède de terrain Ar^R (par exemple $Ar^R = 10^{-15}$) et de simulation Ar^N (tel que $Ar^N = 1$) via la relation :

$$\frac{K^R_{eff}}{K^N_{eff}} = \left(\frac{Ar^R}{Ar^N}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\frac{H^R}{H^N}\right)^{\frac{2n+1}{2n}}. \tag{3.25}$$

Dans le cas de cet exemple, et avec $n = 1$, on peut écrire $\mu^R_0/\mu^N_0 = (H^R/H^N)^{3/2}(Ar^R/Ar^N)^{-1/2}$ et on obtient $\mu^N_0 = \mu^R_0/10^{15}$. Connaissant l'ensemble des paramètres numériques, on peut faire le lien entre les échelles de temps, de longueur et de vitesse du terrain et de la simulation numérique (en utilisant leur définition (3.14) et en calculant les rapports correspondants).

3.3 Fusion partielle seule

En géodynamique, on trouve quelques exemples de convection crustale dans une croûte en fusion partielle, certains cas sont récents [Babeyko et al., 2002; Riel et al., 2016], d'autres sont plus anciens, par exemple durant l'Archéen (de -3,85 milliards d'années à -2,5 milliards d'années), la croûte était plus chaude et a probablement convecté [Van Kranendonk et al., 2004].

En physique, certaines études considèrent le problème de Stefan [Davis et al., 1984; Esfahani et al., 2018; Favier et al., 2019; Purseed et al., 2020], qui concerne le mouvement d'une frontière liquide-solide, et explorent le développement de la convection dans le liquide sous cette frontière (voir figure 3.3.1) à mesure que le système est chauffé par le bas. Dans notre problème de géodynamique crustale, cette frontière correspond au front de fusion où $M = M_S$, le solide correspond aux roches crustales non-fondues et le liquide au domaine crustal partiellement fondu. Dans les travaux des auteurs cités ci-dessus, l'équation (3.4) est résolue sans chaleur interne et sans le terme advectif dans la phase solide, mais la chaleur latente est prise en compte au niveau du front de fusion. Viscosité et densité sont supposées constantes dans les deux phases et la densité varie selon l'hypothèse de Boussinesq. Ce problème dépend du nombre de Rayleigh et du nombre de Stefan $St = \frac{\mathcal{L}}{Cp\Delta T}$, avec $\mathcal{L}$ la chaleur latente de fusion par unité de masse en $J.kg^{-1}$. Les nombres de Rayleigh considérés sont de l'ordre de $10^4 < Ra < 10^8$. Selon la valeur de celui-ci, le régime thermique dans la phase liquide est diffusif ou convectif. Dans la phase solide, il est toujours diffusif.

Davis et al. [1984] étudient l'effet d'une épaisseur solide en haut du système et montrent que le nombre de Rayleigh critique est sensiblement réduit par rapport à une convection classique. Esfahani et al. [2018]; Favier et al. [2019] observent que, à mesure que les cellules de convection grandissent et s'étirent vers le haut, celles-ci finissent par fusionner, créant finalement une plus grande cellule ayant un ratio de taille quasi 1 :1, qui est celle observée en convection de Rayleigh-Bénard classique (figure 3.3.2). Favier et al. [2019] notent que cette fusion a lieu lorsque les panaches grandissent d'un facteur 3. Un saut de vitesse est observé lors de la fusion des panaches. L'évolution de la position de l'interface

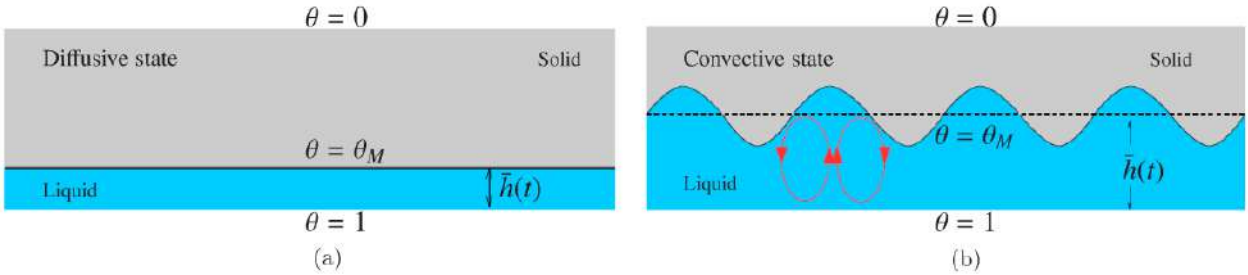


FIGURE 3.3.1 – Schéma du problème de Stefan. La zone gris clair correspond à la zone solide et la zone bleue foncée à la zone liquide. θ_M est la température de fusion adimensionnée [PURSEED et al., 2020].

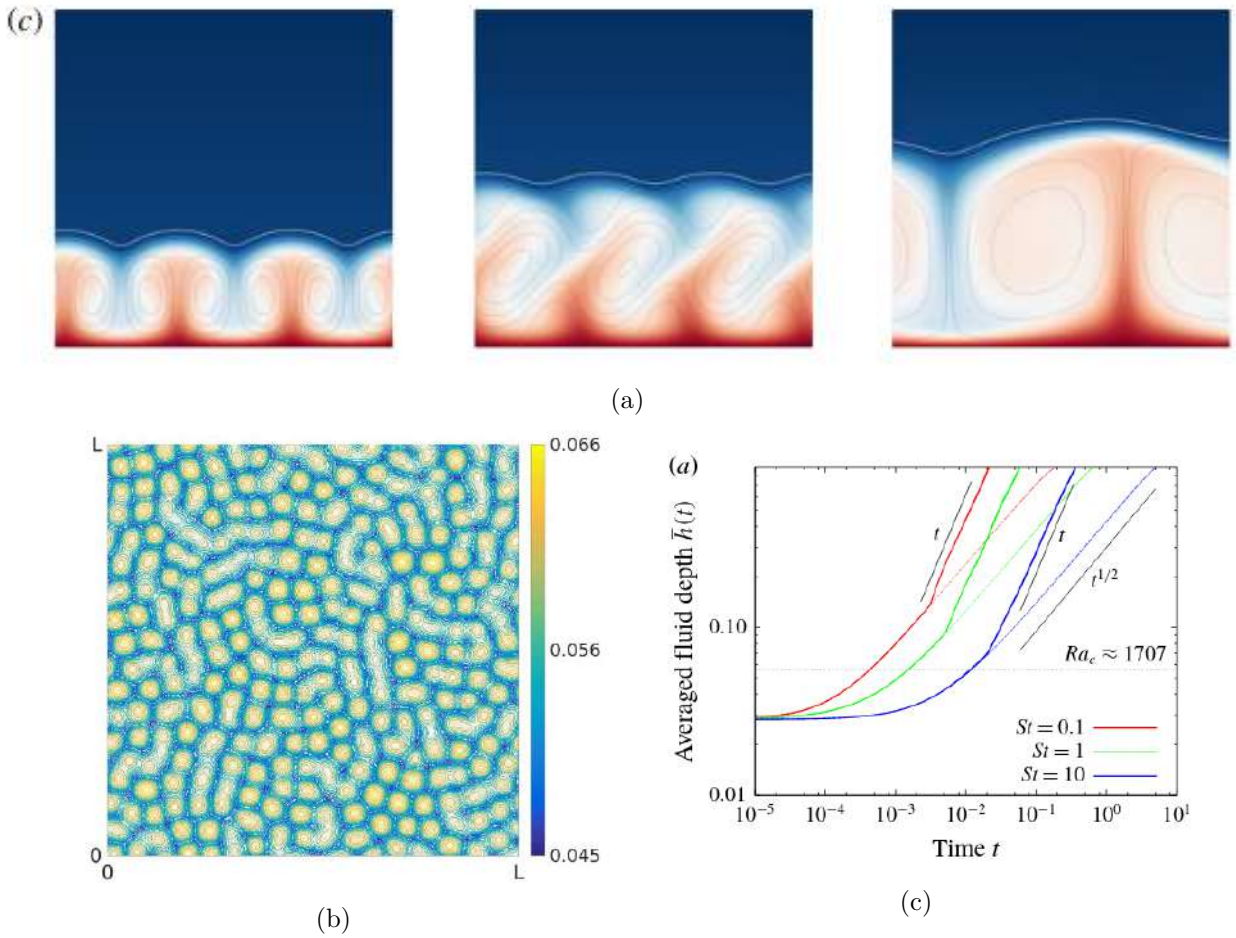


FIGURE 3.3.2 – a) Clichés du développement de la convection en 2D [FAVIER et al., 2019] sous une frontière liquide-solide. Les couleurs représentent le champ de vitesse. b)Vue du dessus du front de fusion dans le cas d'une convection stable en 3D [ESFAHANI et al., 2018] ($Ra \approx 2 \times 10^4$, $St = 1$). c) Position moyenne de la frontière liquide-solide au cours du temps pour des systèmes à différents nombres de Stefan. Le régime diffusif en trait pointillé est proportionnel à $t^{1/2}$. Le régime convectif en traits pleins est proportionnel à t [FAVIER et al., 2019].

dans le régime diffusif évolue en $t^{1/2}$ et en t dans le premier régime convectif (figure 3.3.2c). Esfahani et al. [2018] comparent ce type de système en 2D et en 3D, et concluent que la convection démarre au même temps dans les deux cas. Pour $Ra \sim 10^4$, la convection a lieu sous forme de cellules plutôt que de rouleaux (figure 3.3.2c), comme cela serait le cas dans une convection classique (voir chapitre 1, section 1.15). Certaines cellules ont fusionné et forment des structures allongées.

Dans la section ci-dessous, nous étudions un cas appliqué à Naxos où la fusion partielle est prise en compte. Nous regardons l'influence des viscosités, du chauffage interne, et du seuil de fusion. Enfin, nous comparons résultats bi et tri-dimensionnels. Par ailleurs, une pseudo-validation du modèle de Favier et al. [2019] est présentée en annexe A.1.

3.3.1 Résultats du cas de référence $I_0M_1H_0$

Dans cette partie, nous ne considérons pas les hétérogénéités spatiales. Ceci revient à considérer que $\rho_1^{S0} = \rho_2^{S0} = \rho_3^{S0} = \rho^{S0}$, $\rho_1^{L0} = \rho_2^{L0} = \rho_3^{L0} = \rho^{L0}$ et $\mu_1^0 = \mu_2^0 = \mu_3^0 = \mu^0$ dans les lois de densité et de viscosité (3.12) et (3.11). Elles ne dépendent alors plus des fractions volumiques de phase C_i, avec $i = 1, 2, 3$.

Nous considérons ici un domaine 2D d'extension horizontale (suivant x) de 49,4 km, verticale (suivant y) de 35 km, discrétisé avec un maillage comportant 494×350 cellules. Les conditions limites pour la vitesse sont une condition d'adhérence sur la frontière basse et de glissement sur la frontière haute et une condition périodique sur les frontières latérales ; pour la température nous imposons $T_H^+ = 1000^oC$ en bas, $T_C = 300^oC$ en haut et une périodicité sur les frontières latérales. Initialement, la vitesse est nulle et la température correspond au géotherme présenté sur la figure 3.3.3a (en noir).

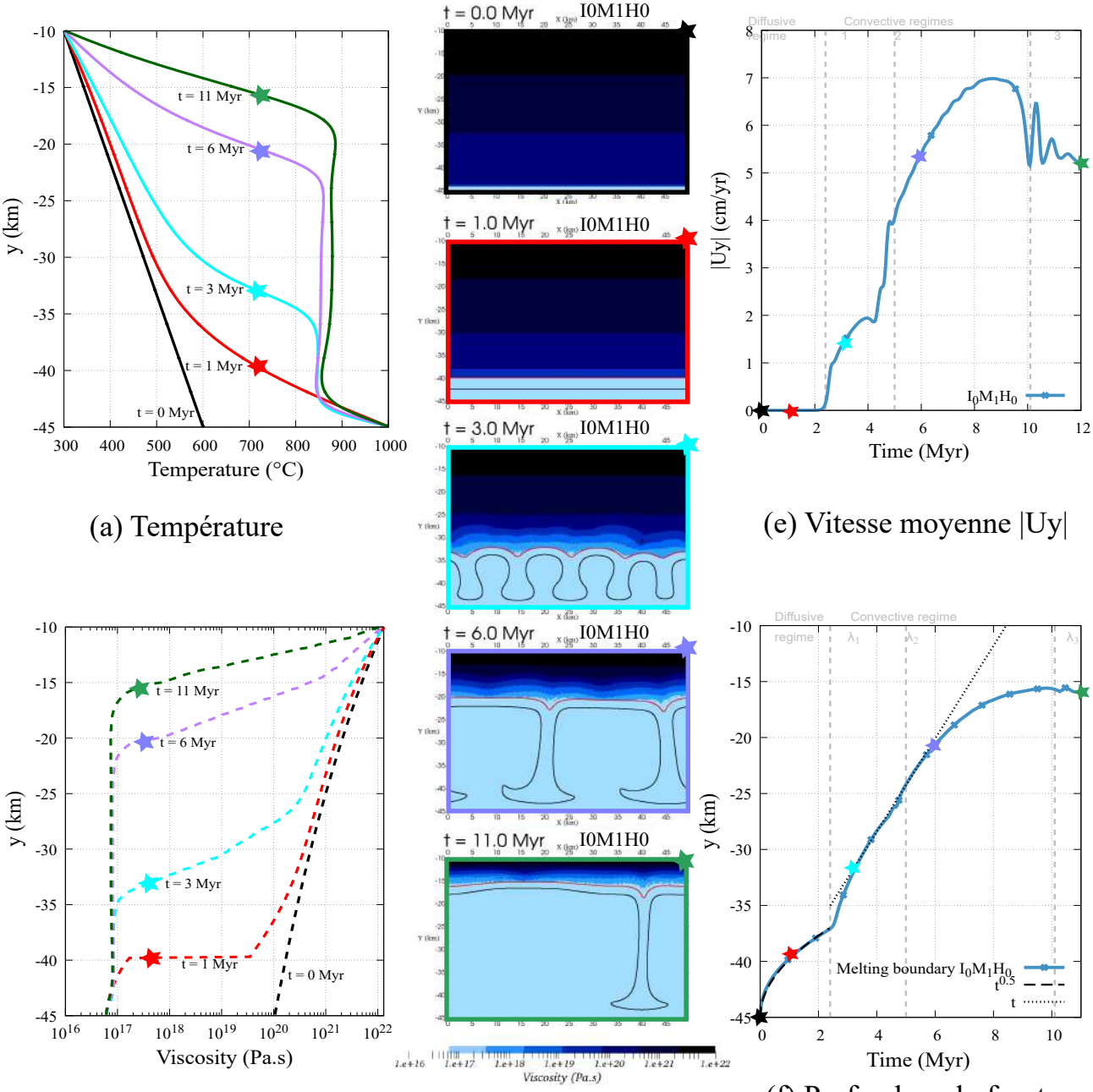
Nous étudions maintenant l'évolution d'un système appliqué à Naxos avec fusion partielle. L'objectif est ici de décrire ce qu'il se passe lorsque la fusion partielle est activée. Pour cela, on considère comme modèle de référence le cas $I_0M_1H_0$, dont les paramètres sont présentés sur le tableau 3.3.1. Le sigle $I_0M_1H_0$ sera explicité lors de l'étude paramétrique de la section 3.3.2.

Paramètre	α	T_{ref}	ρ_{S0}	ρ_{L0}	A	Q	n	H_r	μ_0	M_S
Unité	K^{-1}	K	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$Pa^{-n}.s^{-1}$	$kJ.mol^{-1}$		$\mu W.m^3$	$Pa.s$	
Valeur	3×10^{-5}	573	2800	2700	3.2×10^{-4}	154	2.3	1.75	5×10^{15}	0.3

Tableau 3.3.1 – Paramètres du cas de référence pour Naxos avec fusion partielle ($I_0M_1H_0$) [Ranalli, 1995].

La figure 3.3.3 présente l'évolution temporelle du système (distribution de la température, de viscosité, position du front de fusion et vitesse verticale moyenne dans l'écoulement).

On observe un régime diffusif sur le cliché c) entre $t = 0$ et $t = 2.4$ Ma (étoile rouge). De 2.4 à 4.0 Ma, un premier régime convectif se développe (étoile bleue). Le front de fusion se déforme avec une longueur d'onde de $\sim 10\ km$. Les cellules de convection s'allongent à mesure que le front de fusion se déplace vers le haut puis fusionnent pour former des panaches de longueur d'onde de $\sim 25\ km$ (étoile violette). A partir de 10.1 Ma, les cellules de convection fusionnent à nouveau pour former une grande cellule de convection de ratio hauteur/longueur quasi 1 :1 (étoile verte). Enfin, le front de fusion se stabilise autour d'une profondeur de -15.5 km. Rappelons que la température en haut est imposée ce qui "bloque" l'avancée du front de fusion.



(a) Température (b) Viscosité (c) Etapes de l'écoulement (e) Vitesse moyenne |Uy| (f) Profondeur du front de fusion

FIGURE 3.3.3 – Dynamique de l'écoulement pour le cas de référence $I_0M_1H_0$. a-b) Profils de température et de viscosité moyennes, pour quatre instants. La position du front de fusion est représentée par une étoile. c) Distribution spatiale de la viscosité. La courbe rouge représente la fraction de melt $M = M_S$ et la noire, $M = 0.6$. e) Évolution de la moyenne de la valeur absolue des vitesses verticales au cours du temps. f) Évolution de la profondeur moyenne du front de fusion au cours du temps. Le régime thermique est diffusif jusqu'à 2.4 Ma. Un premier régime convectif se développe alors de 2.4 Ma jusqu'à 5 Ma, caractérisé par une longueur d'onde $\lambda_1 = 10\ km$, une vitesse autour de 1.5 $cm.an^{-1}$ et une position du front de fusion proportionnel au temps. Un deuxième régime convectif se met en place de $t = 5$ Ma jusqu'à 10.1 Ma, caractérisé par $\lambda_2 = 25\ km$. Enfin, les cellules fusionnent, un troisième régime convectif apparaît, formant une cellule de ratio quasi 1 :1.

La figure 3.3.3e montre l'évolution de la vitesse verticale absolue moyennée $|Uy|$ dans le système en fonction du temps. Chaque changement de régime thermique s'accompagne d'un saut de cette vitesse : on observe un décrochement de vitesse à chaque changement de régime convectif. Lorsque le dernier régime convectif est atteint, la vitesse devient constante avec $|Uy|_f \approx 5\ cm.an^{-1}$.

Cette vitesse peut être comparée à l'estimation de Shibano et al. [2013] obtenue à partir des travaux de Kraichnan [1962]. Celle-ci se base sur une viscosité et une diffusion thermique constantes, et s'exprime par :

$$|Uy|_{theo} = 2\left(\frac{\alpha g \Delta T \kappa^2}{\nu}\right)^{1/3}. \tag{3.26}$$

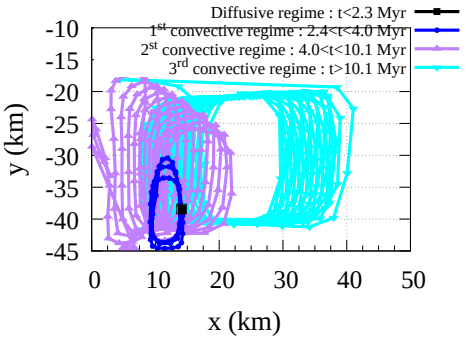
Nous l'appliquons au système stabilisé lorsque la taille de la cellule est presque de ratio 1 :1. La température moyenne de la couche convective sous le front de fusion est $T_{moy} = 1157\ K$, ce qui donne $\kappa(1157K) = 5.7 \times 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$ et $\nu(1157K) = 2.9 \times 10^{13}\ m^2.s^{-1}$ (valeurs obtenues en utilisant (3.6), (3.8) et (3.12)). En prenant $\alpha = 3 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, $g = 9.81\ m.s^{-2}$ et $\Delta T = T_H^+ - T_{moy}$ (T_H^+ étant la température imposée au fond), on obtient alors $|Uy|_{theo} \approx 4.7\ cm.an^{-1}$ ce qui est relativement proche de la valeur mesurée $|Uy|_f = 5\ cm.an^{-1}$. Notons toutefois que la vitesse théorique est légèrement plus faible que la vitesse du modèle. Cela peut être dû au fait que nous avons choisi la position du front de fusion comme borne haute pour déterminer l'épaisseur de la couche convective. Celle-ci est peut-être plus épaisse et la différence de température serait ainsi plus élevée que celle choisie ici. Si cette formule est appliquée à un régime convectif qui n'est pas encore stabilisé, les valeurs calculées ne sont pas en accord avec celles trouvées dans la simulation.

L'évolution de la position moyenne du front de fusion est donnée sur la figure 3.3.3f. En régime diffusif elle est proportionnelle à $\sim t^{0.5}$ et à $\sim t$ dans les premier et second régimes convectifs. Elle est constante dans le dernier régime convectif. Nous retrouvons donc qualitativement les résultats de Favier et al. [2019] : nous trouvons que la fusion des panaches convectifs s'accompagne d'un saut de vitesse, que le système se stabilise en une cellule de convection de ratio quasi 1 :1, que le régime diffusif évolue en $\sim t^{1/2}$ et le régime convectif en $\sim t$.

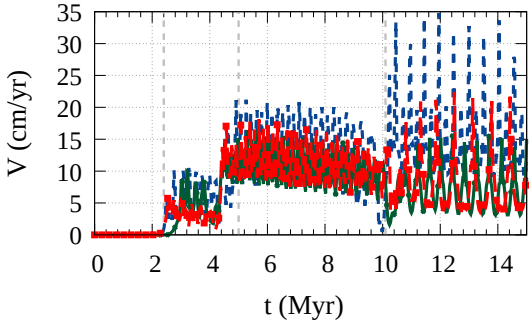
Nous analysons à présent cette configuration sous un angle "géologique", c'est-à-dire en termes d'évolution temporelle de cycles et de cellules convectives. Pour cela, trois traceurs passifs sont disposés dans l'écoulement et enregistrent les grandeurs caractéristiques locales comme la température, la vitesse et la position au cours du temps (figure 3.3.4). Ces traceurs passifs peuvent être considérés comme l'équivalent des zircons, qui, sans influencer l'écoulement, en enregistrent ses caractéristiques.

L'évolution temporelle de la position du traceur de la figure 3.3.4a illustre le changement de régime convectif entre des cellules convectives plutôt allongées de taille $\approx 5 \times 15$ km dans le premier régime convectif (partie bleue de la courbe) puis 5×26 km dans le second (partie violette) et des grandes cellules de 25×20 km (partie cyan).

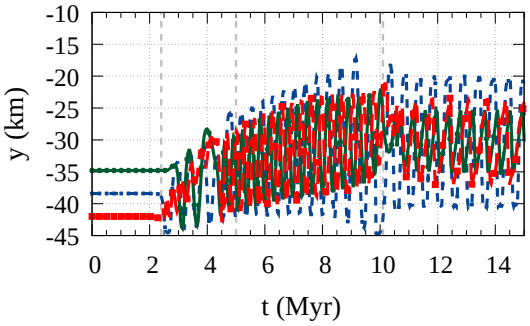
Les vitesse, position verticale et température des traceurs présentent une évolution sinusoïdale due au caractère périodique des régimes convectifs. La période (τ) du cycle convectif peut être mesurée via la position verticale y au cours du temps (figure 3.3.4b). On trouve respectivement $\tau_1 = 0.2 - 0.5\ Ma$, $\tau_2 = 0.4\ Ma$ et $\tau_3 = 0.5\ Ma$ pour les traceurs n°1,2 et 3 (figure 3.3.4e). A l'exception de la période du traceur rouge qui est plus petite dans le premier régime convectif que dans les deux autres,



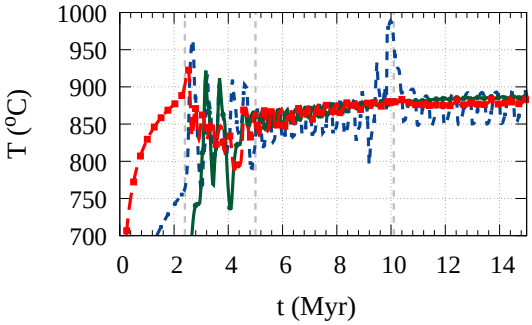
(a) Position du traceur au cours du temps. Le carré noir indique la position initiale du traceur, en $(x, y) = (14.1, -38.4)$.



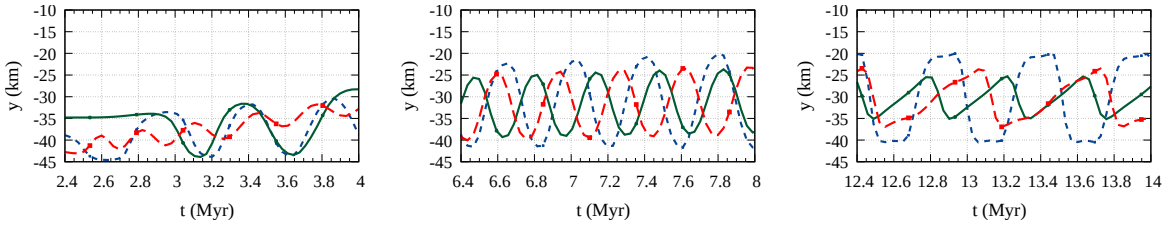
(c) Norme de la vitesse en fonction du temps



(b) Position verticale en fonction du temps



(d) Température en fonction du temps



(e) Zoom de la figure b)

FIGURE 3.3.4 – Évolution temporelle de la position (a,b), vitesse (c) et température (d) de trois traceurs initialement positionnés en $(x, y) = (14.4, -38.4)$, $(31.2, -34.8)$, $(34.4, -42)$. Seul un traceur est considéré dans le cliché (a).

la période est quasiment identique quelque soit le régime convectif et quelque soit le traceur.

La norme de la vitesse, V, des traceurs au cours du temps est illustrée figure 3.3.4c. Les 4 régimes thermiques sont observés, correspondant aux différents plateaux avec une forte augmentation de la vitesse lors du passage à un autre régime thermique. Celles-ci décroissent légèrement avant d'augmenter lors du passage au régime convectif suivant. Au sein d'un même régime convectif, les vitesses faibles correspondent au déplacement horizontal du marqueur et les vitesses plus grandes au déplacement vertical. Le traceur rouge enregistre des vitesses moins élevées que le bleu : les vitesses sont plus élevées au bord de la cellule convective qu'en son centre.

La figure 3.3.4d montre l'évolution de la température de chaque traceur au cours du temps. Celle-ci dépend du régime thermique et du traceur. Les traceurs bleu et vert enregistrent une différence de température entre position haute et basse allant jusque 150^oC dans le premier régime convectif, ensuite l'amplitude diminue autour de $\sim 50^oC$ dans le deuxième régime convectif puis augmente à nouveau lors du passage dans le troisième régime convectif avant de se stabiliser autour de 40^oC. Le traceur

rouge situé au centre d'une cellule convective subit peu de variation de température, $\sim 25^oC$.

Nous caractérisons les différents régimes de convection par :

— Une longueur d'onde : λ_{conv}

— La position finale du front de fusion, un fois la convection stabilisé : y_f

— La vitesse verticale moyenne : $|U_y|_f$

— Le temps de démarrage du régime : t_{conv}

— La période de cycle maximale enregistrée par un traceur : τ

— La taille de cycle maximale effectuée par un traceur : longueur $\times$ hauteur ($l \times h$)

— La différence de température maximale enregistrée par un traceur : ΔT

— La vitesse minimale et maximale enregistrée par un traceur : $v_{min} - v_{max}$

Les valeurs données sont des ordres de grandeur, nous présentons à chaque fois la gamme de paramètres la plus large enregistrée par les traceurs. Les résultats du cas de référence sont présentés dans le tableau 3.3.2 (première ligne).

Remarque sur les conditions limites aux bords pour la viscosité :

Il est utile de souligner qu'une attention particulière doit être donnée à la façon dont le modèle numérique calcule la viscosité sur les frontières du domaine, d'autant plus lorsque celle-ci varie de façon non-linéaire avec plusieurs grandeurs physiques, comme c'est le cas ici. La viscosité doit être calculée localement via (3.12). Pour l'anecdote, nous avions initialement imposé la viscosité en haut et en bas du système avec des valeurs constantes : la dynamique obtenue, présentée sur la figure 3.3.5 est sensiblement différente de celle présentée sur la figure 3.3.3. Nous obtenons ici des panaches de longueur d'onde 12.5 km qui fusionnent arrivés une fois en haut du système. Il n'apparaît alors plus que 2 régimes convectifs : un premier avec des cellules allongées et un second avec une cellule faisant la taille du système.

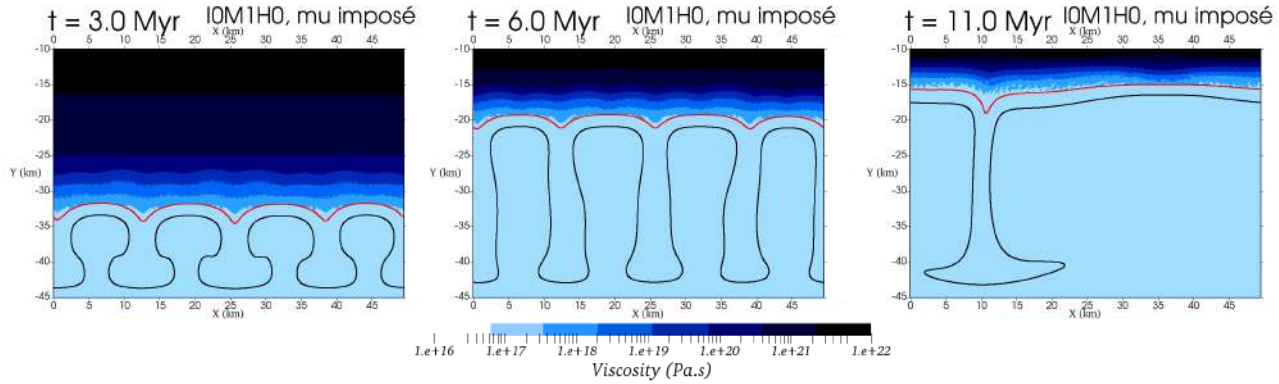


FIGURE 3.3.5 – Simulation proche du cas de référence (figure 3.3.3), la seule différence étant qu'une viscosité constante $\tilde{\mu} = 4.5 \times 10^{21}\ Pa.s$ est imposée en haut et en bas du domaine de calcul.

3.3.2 Étude paramétrique

Dans cette section, nous étudions l'influence de certains paramètres sur l'écoulement, comme la viscosité de la couche partiellement fondue (μ_0, Eq. 3.12), de la couche non fondue (A, Eq. 3.12), du

seuil de fusion M_S et de la chaleur interne H_r. L'idée est, entre autres, de savoir quelle gamme de paramètres permet de retrouver une période de convection de $\sim 2\ Ma$ correspondant à celle du scénario des dômes de Naxos. Le tableau 3.3.2 présente les cas testés ainsi que leurs résultats principaux. Dans ce tableau, on dénote les différentes simulations par $I_*M_*H_n$ tel que :

— "I" désigne la prise en compte ou non, d'inclusions (I pour inclusions),

— "M", la prise en compte de la fusion partielle (M pour melt),

— "H", le chauffage interne (H pour heat),

où $* = 1$ ou 0, si on inclut ou non le processus, et "n" est le numéro de la simulation considérée.

a) Influence de la viscosité des roches partiellement fondues

On considère d'abord l'effet de la viscosité de la couche partiellement fondue sur les caractéristiques de la convection, en variant le pré-facteur μ_0 de l'équation (3.12). Les paramètres sont les mêmes que précédemment et μ_0 varie de $\mu_0 = 5 \times 10^{15}$ à $\mu_0 = 5 \times 10^{17}$ Pa.s. Les résultats sont présentés sur la figure 3.3.6 et les caractéristiques résumées dans le tableau 3.3.2. En particulier, plus le système est visqueux, plus la convection démarre tard. L'épaisseur de la couche diffusive s'en trouve augmentée et les panaches sont plus larges (car leur taille est proportionnelle à l'épaisseur de couche initiale).

Howard [1966] a montré que le temps de déclenchement de la convection t_{conv} était proportionnel à la viscosité du fluide suivant la loi de puissance $t_{conv} \propto \mu^{2/3}$. Avec cette loi d'échelle, on peut estimer les rapports de temps de déclenchement entre les simulations $I_0M_1H_0$, $I_0M_1H_1$ et $I_0M_1H_2$. Pour le premier régime convectif, on a $\left(\frac{\mu_0(I_0M_1H_0)}{\mu_0(I_0M_1H_1)}\right)^{2/3} \approx 0.34$ à comparer à $\frac{t_{conv}(I_0M_1H_0)}{t_{conv}(I_0M_1H_1)} \approx 0.32$. De même, on a $\left(\frac{\mu_0(I_0M_1H_0)}{\mu_0(I_0M_1H_2)}\right)^{2/3} \approx 0.21$ vs $\frac{t_{conv}(I_0M_1H_0)}{t_{conv}(I_0M_1H_2)} \approx 0.20$. Même si le temps de démarrage de la convection est difficile à déterminer de manière absolue, de manière relative entre deux cas de viscosités différentes, nos résultats correspondent à la théorie.

La durée des régimes convectifs dépend de la viscosité : plus elle est élevée plus le régime perdure dans le temps. Lorsque la viscosité est multipliée par 10 (cas $I_0M_1H_2$), le premier régime convectif perdure au moins jusqu'à 30 Ma, temps auquel nous avons arrêté la simulation. Il est peut-être nécessaire d'avoir une plus grande épaisseur du système pour permettre la fusion des panaches. Dans le contexte orogénique de Naxos, il est peu réaliste que le chauffage basal ait duré aussi longtemps : un système ayant cette viscosité et cette épaisseur n'atteindra donc jamais le second régime convectif. Avec $\mu_0 = 5 \times 10^{17}\ Pa.s$, le système est purement diffusif.

Plus le système est visqueux et plus la vitesse de convection est lente. L'accord avec la formule (3.26) se dégrade lorsque la viscosité est augmentée :

— $|Uy|_{theo}(I_0M_1H_0) = 4.7\ cm.an^{-1}$ contre $|U_y|_f \approx 5\ cm.an^{-1}$ soit 6% de différence

— $|Uy|_{theo}(I_0M_1H_1) = 2.6\ cm.an^{-1}$ contre $|U_y|_f \approx 3\ cm.an^{-1}$ soit 15% de différence

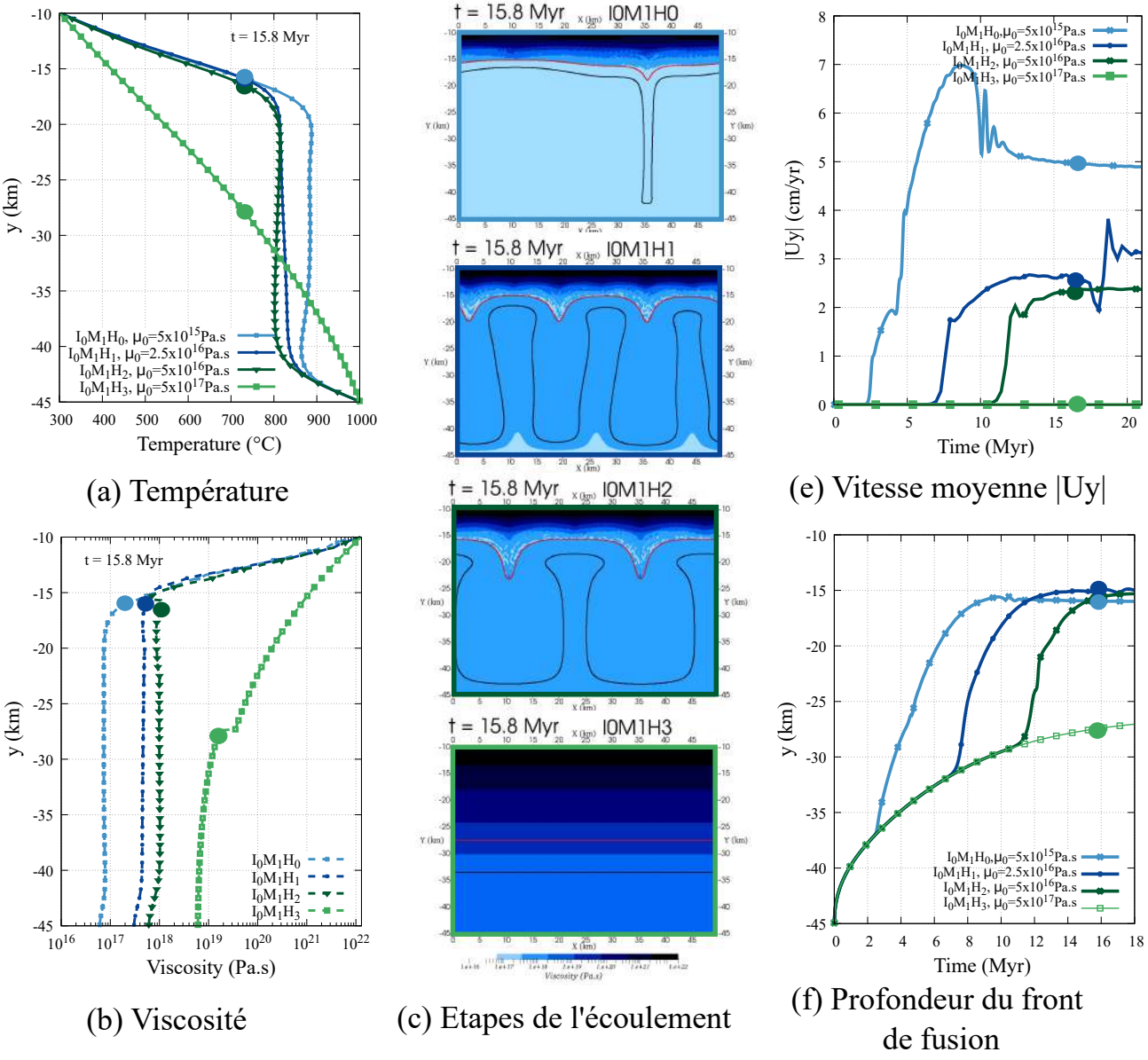
— $|Uy|_{theo}(I_0M_1H_2) = 1.9\ cm.an^{-1}$ contre $|U_y|_f \approx 2.3\ cm.an^{-1}$ soit 22% de différence

En revanche, (3.26) indique que la vitesse moyenne de la convection est proportionnelle à la viscosité du fluide suivant la loi de puissance $|U_y|_{theo} \propto \mu^{-1/3}$. Comme pour le temps de déclenchement de la convection, nous pouvons comparer les rapports de vitesse. On a $\left(\frac{\mu_0(I_0M_1H_0)}{\mu_0(I_0M_1H_1)}\right)^{-1/3} \approx 1.71$ à comparer à $\frac{|U_y|_f(I_0M_1H_0)}{|U_y|_f(I_0M_1H_1)} \approx 1.61$.

Cas	Différence avec le cas de référence	Régime convectif	Longueur d'onde λ km	Profondeur finale y_f km	$\lvert Uy\rvert_f$ $cm.yr^{-1}$	Temps de déclenchement t_{conv} Ma	Période τ Ma	Taille $l \times h$ km	ΔT K	$v_{min}-v_{max}$ $cm.yr^{-1}$
$I_0M_1H_0$	$\mu^0 = 5 \times 10^{15}\ Pa.s$; $M_S = 0.3$	1	10	-15.5	5	2.4	0.5	5×15	150	1-10
	$A = 3.2 \times 10^{-4}\ Pa^{-2.3}.s^{-1}$	2	25			4	0.4	5×26	50	7-21
Référence	$H_r = 1.75 \times 10^{-10}\ W.kg^{-1}$	3	50			10.1	0.5	25×20	50	3-35
	$\mu^0\ (Pa.s)$									
$I_0M_1H_1$	2.5×10^{16}	1	16.7	-15	3.1	7.5	< 1.75	5×27	150	0.25-6
		2	50			17	1.25	20×20	200	2-16
$I_0M_1H_2$	5×10^{16}	1	25	-15	2.4	12	< 1.5	10×25	175	1-8
$I_0M_1H_3$	5×10^{17}	Pas de convection								
	$A\ (Pa^{-n}.s^{-1})$									
$I_0M_1H_4$	7.9×10^{-6}	1	25	-18	1.8	7.5	< 2.5	7.5×25	200	0.5-5.5
	M_S									
$I_0M_1H_5$	0.1	1	12.5	-13.5	5.2	2	0.4	5×25	100	1-15
		2	50			8	0.9	22×22	50	5-30
	H_r									
I_0M_10	0	1	12.5	-16	5.5	3	0.55	5×25	100	0.5-14
		2	50			8	0.9	22×22	50	5-30
I_0M_11	$H_r = 0$; $\mu^0 = 2.5 \times 10^{16}\ Pa.s$	1	16.7	-16	2.4	10	2.5	8×25	200	0.5-6.5
	3D									
$I_0M_1H_0$	3D	1	10	-14	6.5	2	< 1.75	5×15	100	8-30
		2	25			2.6	0.4	10×20	50	3-35
		3	50			3.5	0.5	10×30	200	3-50
$I_0M_1H_1$	3D	1		-14	3.7	5	< 1	20×30	200	0.5-20

TABLEAU 3.3.2 – Caractéristiques de la convection pour différents cas où l'un des paramètres physiques diffère du cas de référence noté $I_0M_1H_0$ (viscosité de la couche partiellement fondue μ^0, celle de la roche non-fondue via A, valeur critique de la fraction de melt M_S, chauffage interne H_r, écoulement 3D). Les noms des cas sont des liens vers une vidéo de la simulation.

De même, $\left(\frac{\mu_0(I_0M_1H_0)}{\mu_0(I_0M_1H_2)}\right)^{-1/3} \approx 2.15$ est à comparer à $\frac{|U_y|_f(I_0M_1H_0)}{|U_y|_f(I_0M_1H_2)} \approx 2.08$.



(a) Température (e) Vitesse moyenne |Uy|

(b) Viscosité (c) Etapes de l'écoulement (f) Profondeur du front de fusion

FIGURE 3.3.6 – Influence de la viscosité μ_0 des roches partiellement fondues : (a-b) Distribution verticale à $t = 15.8\ Ma$ de la température et la viscosité (moyennées horizontalement). Les cercles correspondent à la position du front de fusion. (c) Distribution spatiale de la viscosité dans le domaine à $t = 15.8\ Ma$ (couleur) et iso-contours de $M = M_S$ (rouge), $M = 0.6$ (noir). (e-f) Évolution temporelle de la valeur absolue de la vitesse verticale moyenne et de la position moyenne du front de fusion. Les cercles correspondent au temps présenté en (c).

Remarquons enfin que la viscosité n'impacte pas la position finale du front de fusion (voir figure 3.3.6e).

Nous avons également enregistré les caractéristiques de l'écoulement grâce à des traceurs (voir le tableau 3.3.2). Une augmentation de la viscosité a pour conséquence une augmentation de la période du cycle convectif (1.25 et 1.5 Ma lorsque la viscosité est multipliée par 5 et 10 contre 0.5 Ma pour le cas de référence) ainsi qu'une différence de température auquel est soumis le traceur.

Les principales conséquences de l'augmentation de la viscosité μ_0 sont :

— Une augmentation de la longueur d'onde entre les panaches,
— Une augmentation de l'instant de démarrage de la convection,
— Une diminution de la vitesse des cycles de convection,
— Une augmentation de la période des cycles,
— Une diminution du nombre de régimes observés (jusqu'à leur disparition).

b) Effet de la viscosité des roches non fondues

Nous souhaitons ici savoir quel est l'impact de la viscosité de la couche non fondue sur les caractéristiques de la convection (μ_{NF} dans l'équation 3.12). Nous prenons le cas $I_0M_1H_1$ et multiplions la viscosité de la zone non fondue par 5. Cela équivaut à modifier $A = 3.2 \times 10^{-4}\ Pa^{-n}.s^{-1}$ à $A = 7.9 \times 10^{-6}\ Pa^{-n}.s^{-1}$. Ce nouveau cas est noté $I_0M_1H_4$.

La figure 3.3.7e présente l'évolution du front de fusion au cours du temps pour les cas $I_0M_1H_4$ et $I_0M_1H_1$. La convection démarre au même moment pour les deux cas ($\sim 7.5\ Ma$). La position finale du front de fusion est moins élevée et elle est atteinte plus tardivement lorsque la viscosité des roches non fondues est plus élevée. Cela s'explique par le fait que la profondeur à laquelle la viscosité augmente de façon abrupte est plus grande pour le cas $I_0M_1H_4$ (figure 3.3.7b). La diminution de l'épaisseur de couche convective a pour conséquence une diminution de la vitesse verticale de convection (voir figure 3.3.7d). De plus, les panaches ne fusionnent jamais. La période du cycle de convection est plus élevée lorsque la viscosité des roches non fondues (μ_{NF}) est plus grande.

En résumé, augmenter la viscosité de la roche non-fondue a pour effet de diminuer la vitesse moyenne de convection dans la zone partiellement fondue et de maintenir la convection dans le premier régime convectif. En revanche, cela n'a pas d'effet sur le démarrage de la convection.

c) Influence du seuil de fusion M_S

Comme évoqué dans le chapitre 1, la valeur du seuil M_S, qui représente la position du front de fusion est généralement comprise entre 0.1 et 0.4 [Arzi, 1978; Burg et Vigneresse, 2002; Dufek et Bergantz, 2005; Van der Molen et Paterson, 1979; Vanderhaeghe et Teyssier, 2001]. Nous testons ici l'influence de la valeur de M_S en comparant le cas $I_0M_1H_0$ où $M_S = 0.3$ et le cas $I_0M_1H_5$ où $M_S = 0.1$. La figure 3.3.8 présente l'évolution de la convection dans les deux cas. Un seuil M_S plus petit décale le front de fusion vers le haut car cela signifie que la température du front de fusion est plus faible (720^oC pour $M_S = 0.3$ et 640^oC pour $M_S = 0.1$). L'épaisseur de zone partiellement fondue est donc plus grande pour $M_S = 0.1$ que pour $M_S = 0.3$ à un même temps donné. L'épaisseur nécessaire au déclenchement de la convection est donc atteinte plus tôt et la convection démarre plus tôt. La vitesse verticale et la période des cycles convectifs sont du même ordre de grandeur dans les deux cas (voir tableau 3.3.2). En résumé, l'influence de M_S sur les résultats est relativement faible.

d) Influence du chauffage interne

Nous regardons ici l'effet de la présence ou l'absence du chauffage interne pour deux viscosités différentes : $\mu_0 = 5 \times 10^{15}\ Pa.s$ et $\mu_0 = 2.5 \times 10^{16}\ Pa.s$ (nous comparons deux à

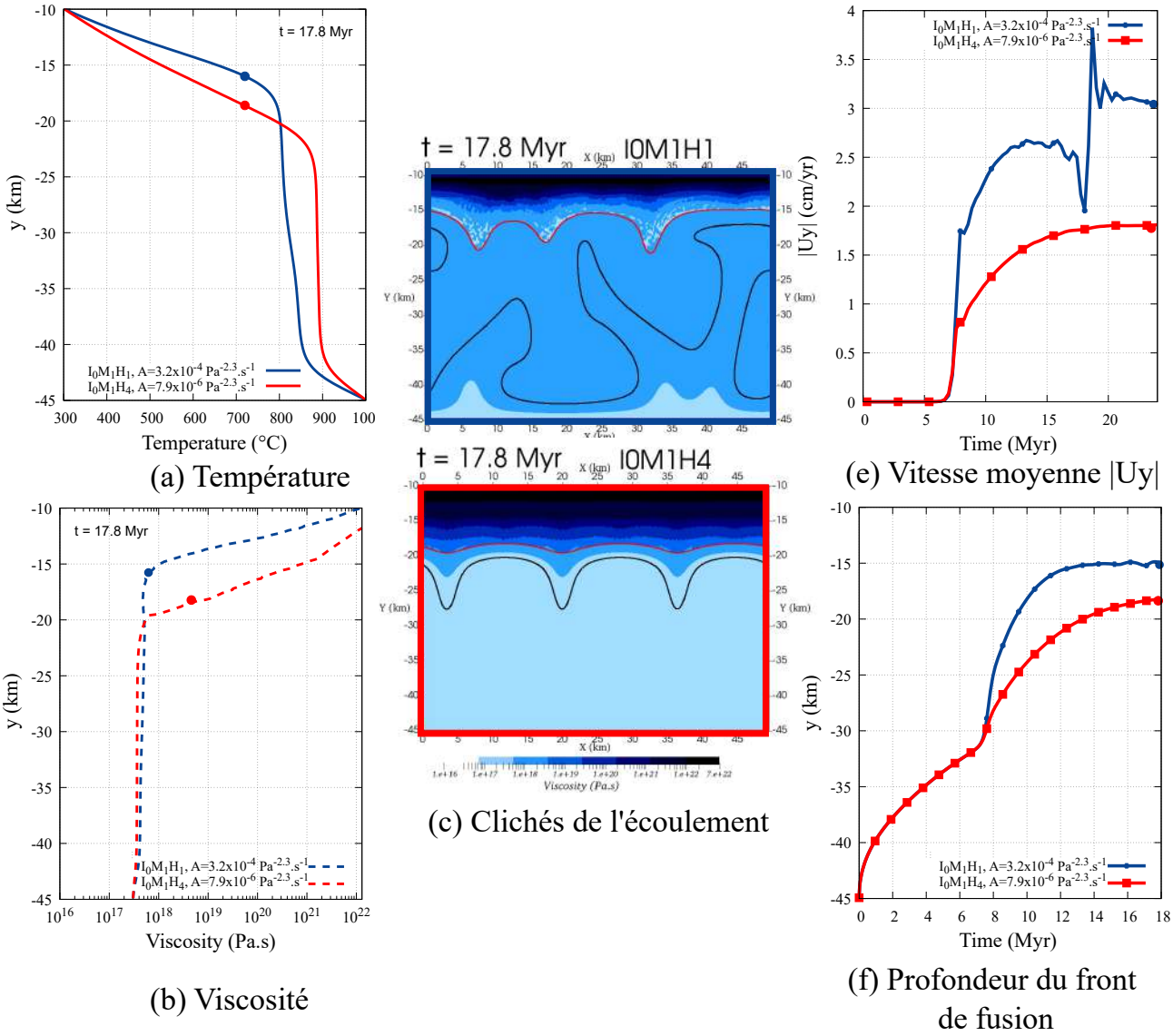
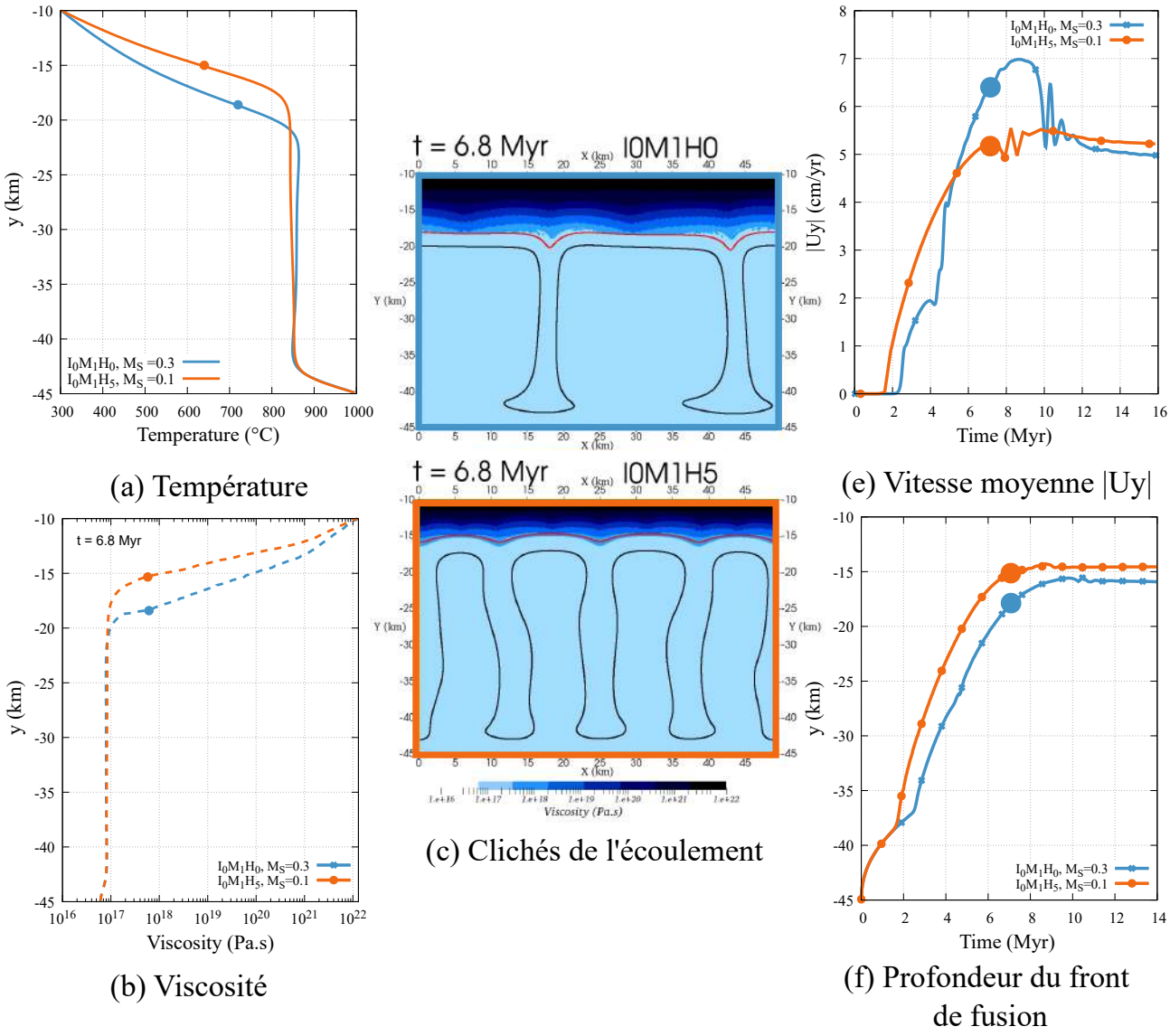


FIGURE 3.3.7 – Influence de la viscosité des roches non fondues (via A, voir Eq. (3.12)) via la comparaison des cas $I_0M_1H_1$ et $I_0M_1H_4$ où, respectivement, $A = 3.2 \times 10^{-4}\ Pa^{-2.3}.s^{-1}$ et $A = 7.9 \times 10^{-6}\ Pa^{-2.3}.s^{-1}$. (a-b) Distribution verticale à $t = 17.8\ Ma$ de la température et la viscosité (moyennées horizontalement). (c) Distribution spatiale de la viscosité dans le domaine à $t = 17.8\ Ma$ (couleur) et iso-contours de $M = M_S$ (rouge), $M = 0.6$ (noir). (e-f) Évolution temporelle de la valeur absolue de la vitesse verticale moyenne et de la position moyenne du front de fusion.



(a) Température

(b) Viscosité

(c) Clichés de l'écoulement

(e) Vitesse moyenne |Uy|

(f) Profondeur du front de fusion

FIGURE 3.3.8 – Influence de la valeur seuil de la fraction de melt $M_S = 0.3$ ($I_0M_1H_0$) et $M_S = 0.1$ ($I_0M_1H_5$). (a-b) Distribution verticale à $t = 6.8$ Ma de la température et la viscosité (moyennées horizontalement). Les cercles correspondent à la position du front de fusion. (c) Distribution spatiale de la viscosité dans le domaine à $t = 6.8$ Ma (couleur) et iso-contours de $M = M_S$ (rouge), $M = 0.6$ (noir). (e-f) Évolution temporelle de la valeur absolue de la vitesse verticale moyenne et de la position moyenne du front de fusion. Les cercles correspondent au temps présenté en (c).

deux les cas $I_0M_1H_0$-I_0M_10 et $I_0M_1H_1$-I_0M_11. Les résultats sont présentés sur la figure 3.3.9. On voit que lorsque $\mu_0 = 5 \times 10^{15}$ $Pa.s$, l'ajout de chauffage interne (courbes bleues claires) fait démarrer le premier régime convectif légèrement avant le cas sans chauffage interne (courbe bleue claire en trait pointillé). Les vitesses dans le cas sans chauffage interne sont légèrement supérieures dans le dernier régime convectif (de 10-15% environ).

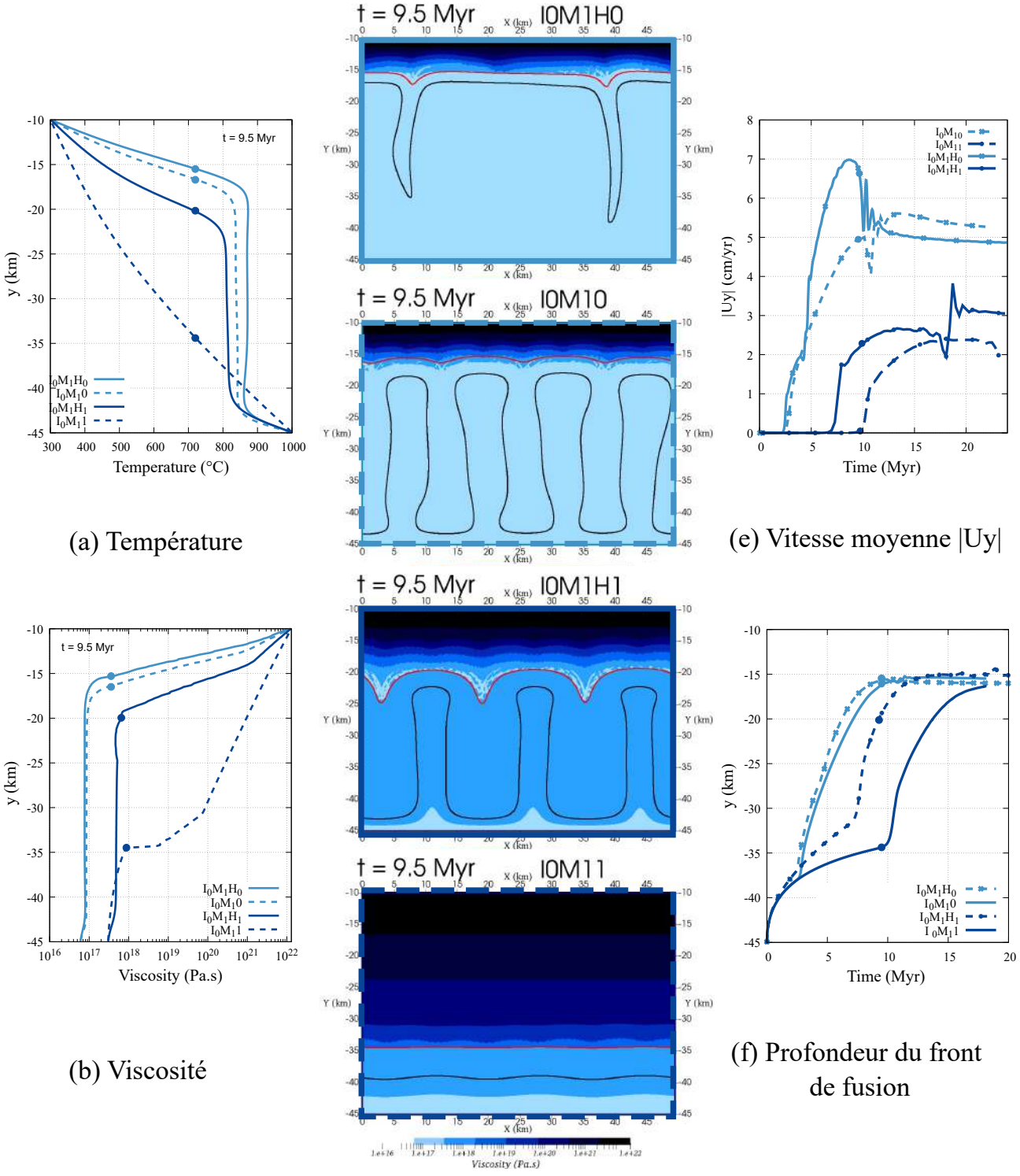
Lorsque $\mu_0 = 2.5 \times 10^{16}$ $Pa.s$ (courbes bleues foncées), le démarrage de la convection sans chauffage interne est 1.5 fois plus lent qu'avec chauffage interne. Les vitesses des deux régimes convectifs avec ou sans chauffage interne sont proches. Le chauffage interne a davantage d'impact lorsque la viscosité est plus élevée puisque la convection démarre plus tard et le système a eu le temps de chauffer davantage. Concernant les grandeurs enregistrées par les traceurs, elles sont du même ordre de grandeur dans les cas avec et sans chauffage interne ($\tau < 1$ Ma et la taille de la cellule est d'environ 20 $km \times 20$ km, cf tableau 3.3.2). En résumé, l'influence du chauffage interne, ici, consiste à déclencher la convection plus rapidement.

3.3.3 Comparaison 2D-3D

Dans cette section, nous regardons l'influence du caractère tridimensionnel de l'écoulement sur la dynamique du système. Le domaine de calcul a pour dimension 49.4 $km \times 49.4$ $km \times 35$ km dans les directions horizontales et verticale et le maillage correspondant est $49 \times 49 \times 35$. Les conditions limites au fond et en haut ($y = -45$ km et $y = -10$ km) sont les mêmes qu'en 2D. Une condition de périodicité est imposée sur les frontières latérales. Nous décidons de faire deux cas en 3D à savoir $I_0M_1H_0$ et $I_0M_1H_1$. Ceux-ci sont respectivement présentés sur les figures 3.3.11 et 3.3.12 (rappelons que le cas 2D équivalent pour $I_0M_1H_0$ est présenté sur la figure 3.3.3).

Contrairement au chapitre 2, la convection 3D n'est plus sous forme de rouleaux bidimensionnels mais a bien, dès le démarrage de la convection, une géométrie tridimensionnelle. Le front de fusion se déforme en petites cellules convectives qui croissent et fusionnent pour former de grandes cellules. La fusion partielle permet cette dynamique car les panaches thermiques se forment plus tôt (le nombre de Rayleigh est augmenté localement). Le front de fusion se déforme en petites cellules convectives qui croissent et fusionnent pour former de grandes cellules. La comparaison des cas 2D et 3D montre que la longueur d'onde est identique dans les deux cas sauf qu'en 3D, elle vaut pour les deux directions horizontales x et z. De plus, les panaches fusionnent à la même hauteur. Le profil moyen de température pour les systèmes 3D sont présentés sur les figures 3.3.11a et 3.3.12a et comparés avec les profils moyens 2D. La plus forte disparité est obtenue pour le cas $I_0M_1H_1$ à 5.5 Ma où le système est déjà déstabilisé en 3D mais pas en 2D. Pour les autres temps, les profils 2D et 3D sont très similaires.

La figure 3.3.10a présente l'évolution du front de fusion au cours du temps pour le cas $I_0M_0H_0$ en 2D et en 3D. Le maillage 2D a été volontairement modifié (il est plus grossier) afin de correspondre à celui en 3D. La conséquence de la diminution de la résolution du maillage (par 10 en 2D) est un démarrage de la convection environ 2 Ma plus tôt et des vitesses environ



(a) Température

(e) Vitesse moyenne |Uy|

(b) Viscosité

(f) Profondeur du front de fusion

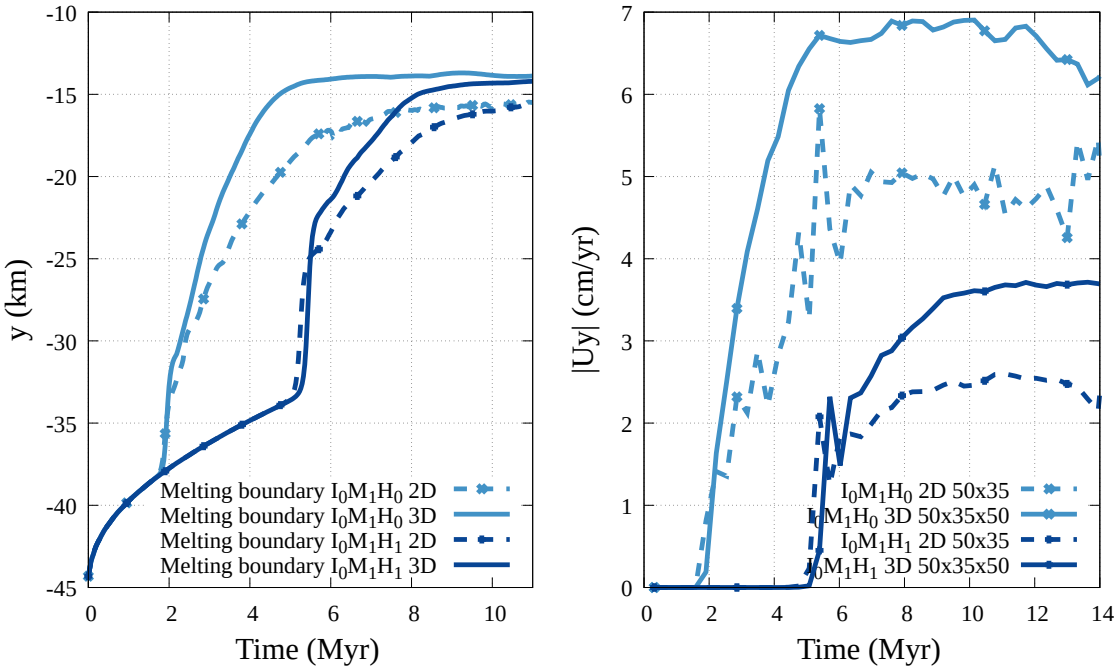
(c) Clichés de l'écoulement

FIGURE 3.3.9 – Influence de la prise en compte du chauffage interne : $H_r = 1.75\ W.kg^{-1}$ ($I_0M_1H_0$ et $I_0M_1H_1$) et $H_r = 0\ W.kg^{-1}$ (I_0M_10 et I_0M_11). (a-b) Distribution verticale à $t = 9.5\ Ma$ de la température et la viscosité (moyennées horizontalement). Les cercles correspondent à la position du front de fusion. (c) Distribution spatiale de la viscosité dans le domaine à $t = 9.5\ Ma$ (couleur) et iso-contours de $M = M_S$ (rouge), $M = 0.6$ (noir). (e-f) Évolution temporelle de la valeur absolue de la vitesse verticale moyenne et de la position moyenne du front de fusion. Les cercles correspondent au temps présenté en (c).

10% moins élevées (voir Fig. A.6.1 en annexe).

Le front de fusion dans le cas 3D atteint une profondeur légèrement plus faible qu'en 2D ($\sim -14\ km$). Lorsque le régime de convection est stabilisé, les vitesses verticales moyennes de convection (figure 3.3.10b) en 3D sont globalement plus élevées qu'en 2D (jusqu'à 1.4 fois plus). En revanche, les périodes enregistrées par les traceurs sont similaires (voir tableau 3.3.2).

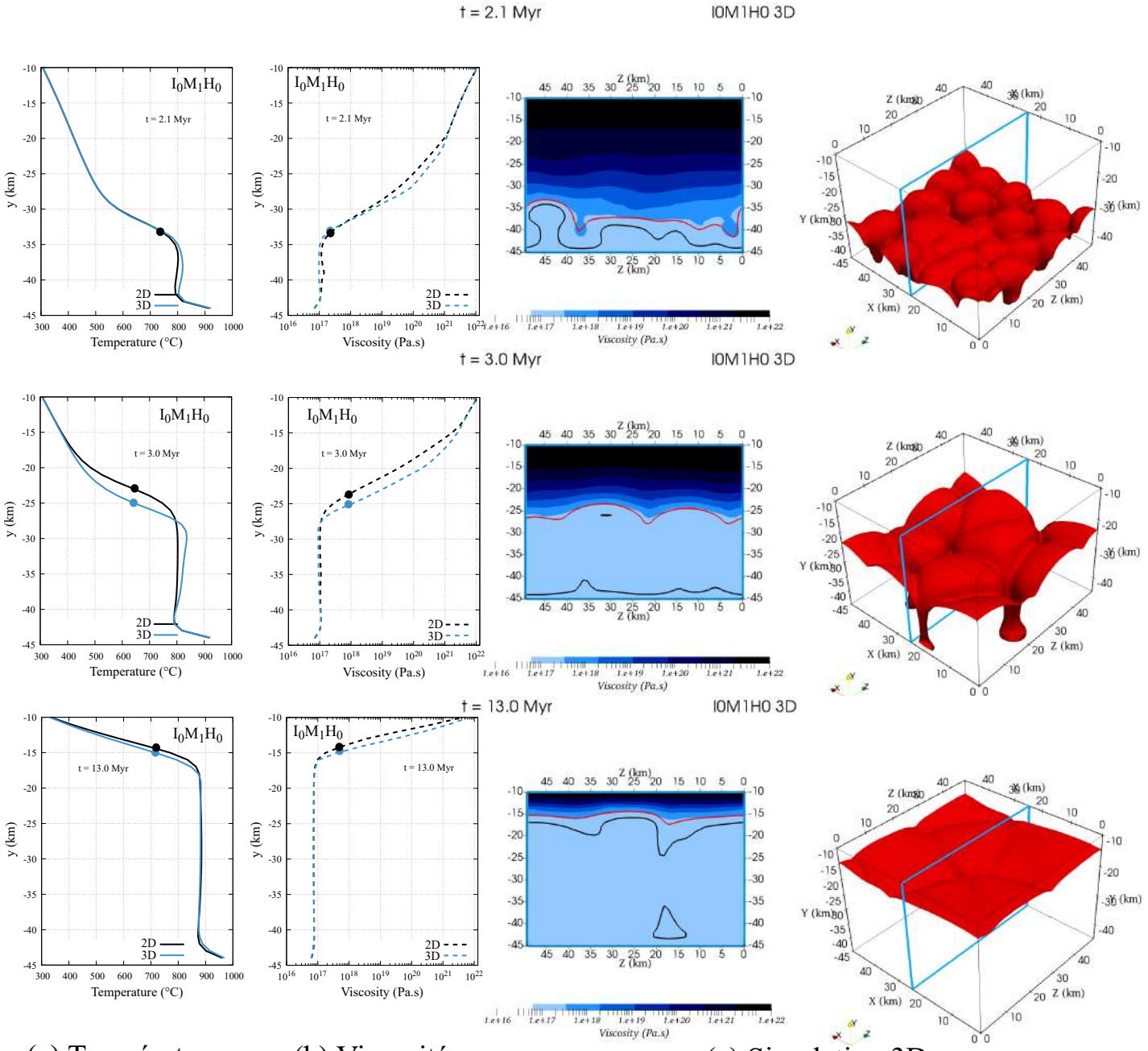
Les caractéristiques de la convection (vitesses, période, régime convectif, longueur d'onde, taille de cellule convective) sont globalement similaires en 2D et en 3D. En revanche, il est difficile d'extrapoler la forme tridimensionnelle de la cellule convective à partir des cellules bidimensionnelles.



(a) Position du front de fusion

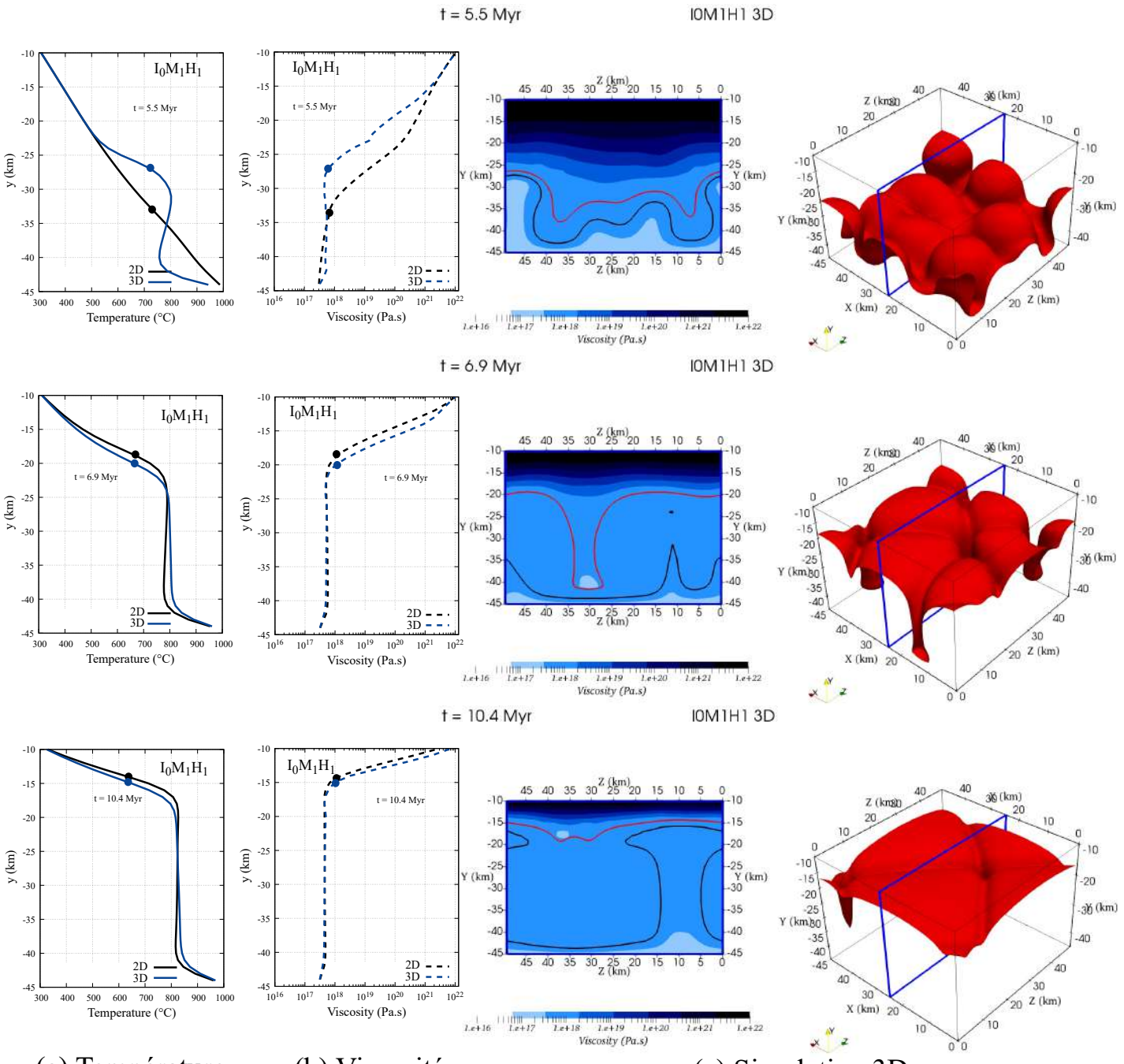
(b) Vitesse moyenne verticale |Uy|

FIGURE 3.3.10 – Influence du caractère 2D ou 3D de l'écoulement : (a) déplacement du front de fusion et (b) vitesse verticale pour les cas $I_0M_1H_0$ (en bleu clair) et $I_0M_1H_1$ (en bleu foncé) au cours du temps en 2D (traits pointillés) et 3D (traits pleins) avec les maillages 50×35 et $50 \times 35 \times 50$.



(a) Température (b) Viscosité (c) Simulation 3D

FIGURE 3.3.11 – Cas $I_0M_1H_0$ (2D vs 3D) : (a-b) Profils moyens de température et de viscosité à $t = 13\ Ma$. Les cercles correspondent à la position du front de fusion. (c) A gauche : vue dans le plan vertical $x = 25$ km de la distribution spatiale de la viscosité (en couleur) et des iso-contours de fraction de melt $M = M_S$ (en rouge), $M = 0.6$ (en noir). (c) A droite : Isosurface en 3D correspond à la position du front de fusion $M = M_S$. Le plan de visualisation en coupe est représenté par le cadre bleu.



(a) Température (b) Viscosité (c) Simulation 3D

FIGURE 3.3.12 – Cas $I_0M_1H_1$ (2D vs 3D) : (a-b) Profils moyens de température et de viscosité à $t = 10.4\ Ma$. Les cercles correspondent à la position du front de fusion. (c) A gauche : vue dans le plan vertical $x = 25$ km de la distribution spatiale de la viscosité (en couleur) et des iso-contours de fraction de melt $M = M_S$ (en rouge), $M = 0.6$ (en noir) ; (c) A droite : Isosurface en 3D correspond à la position du front de fusion $M = M_S$. Le plan de visualisation en coupe est représenté par le cadre bleu.

3.3.4 Conclusion concernant la fusion partielle seule

Dans un système convectif avec fusion partielle, on observe plusieurs régimes convectifs caractérisés par une taille de cellule convective et une vitesse de convection. Ces régimes se stabilisent dans la majorité des cas en une cellule de convection de ratio quasi 1 :1. Les différents traceurs placés dans l'écoulement enregistrent la même période au cours du temps, quelque soit le régime convectif où il se situe et quelque soit la position du traceur dans la cellule convective. Cela signifie que les vitesses sont différentes selon le régime convectif et selon la position du traceur dans la cellule convective. Connaître une période (donnée par des zircons par exemple) ne permet donc pas de déterminer la taille de la cellule convective et la vitesse de convection. On ne peut donc pas savoir dans quel régime convectif un traceur se situe et ni à quel moment ce régime convectif disparaît (pour évoluer vers un autre ou si le chauffage basal cesse). En revanche, on a montré que l'amplitude de variation de température dépend de la position du traceur dans la cellule convective. Celle subie par les zircons est de l'ordre de $\sim 100^oC$ signifiant que la distance parcourue doit être assez grande pour capter les températures les plus hautes et basses du cycle convectif.

Le paramètre ayant le plus d'effet sur les caractéristiques de la convection est la viscosité de la roche partiellement fondue (μ_0), car elle pilote la longueur d'onde initiale des panaches ainsi que la vitesse de convection. Nous observons également que plus les roches non fondues sont visqueuses et plus la vitesse de convection dans la zone partiellement fondue est faible. Le seuil de changement de la viscosité M_S a peu d'impact. Les systèmes 3D montrent une dynamique tridimensionnelle (dômes 3D plutôt que rouleaux 2D) en raison de l'inclusion de la fusion partielle qui favorise la convection (en augmentant la valeur du nombre de Rayleigh local).

Tentons à présent d'identifier la configuration donnant des caractéristiques de la convection les plus proches de celles présentées dans le scénario de formation des dômes de Naxos. Il s'agit en l'occurrence du cas $I_0M_1H_1$ où $\mu_0 = 2.5 \times 10^{16}\ Pa.s$ et donnant une période de 2 Ma. Les petites structures de convection (le premier régime avec de petits panaches de $\sim 7-10\ km$) sont effacées lors de la formation de la grosse structure (le dernier régime de convection avec la cellule de convection qui a la taille du système). Les petites structures convectives pourraient correspondre au dôme majeur de Naxos et ne sont préservées que lorsque la viscosité de la roche non fondue est grande. Le fait que des sous-dômes (de taille $\sim 2\ km$) soient observées actuellement en surface à Naxos signifie qu'ils ont été préservés et donc qu'il est indispensable, afin de bien comprendre leur formation, de les (re)trouver à la fin de la simulation. Dans ce but, il nous paraît nécessaire de tenir compte de petites structures initiales, à la sous-échelle. Pour cela, nous allons étudier les hétérogénéités compositionnelles et leur effet sur la convection. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3.4 Inclusions seules

Nous avons vu dans la section précédente que la prise en compte de la fusion partielle permet de capturer la dynamique convective proposée dans le scénario de formation des dômes de Naxos, ainsi que des structures assimilables au dôme principal de Naxos. L'idée dans cette section est d'insérer des inclusions de petites tailles dans le système initial afin de capturer les petites structures en dôme à faible profondeur.

La présence d'inclusions se justifie par le fait que, lorsque le milieu non fondu commence à fondre, tous les éléments qui le composent ne fondent pas en même temps ni de la même manière. Ces éléments, présents à la petite échelle et issus de la fusion partielle, sont supposés pouvoir se regrouper sous forme d'inclusions (méso-échelle), plus ou moins visqueuses et plus ou moins denses que le milieu environnant. Ce regroupement peut être dû à une dynamique d'ensemble des petites hétérogénéités [Culha et al., 2020], ou encore à une dynamique de propagation par le milieu poreux [Brown, 2010; Katz et Weatherley, 2012; Rabinowicz et Ceuleneer, 2005]. On suppose que la taille de ces inclusions est de l'ordre de quelques centaines de mètres au kilomètre [Edmonds et al., 2019] (figure 3.4.1).

Nous avons choisi une taille d'inclusions de 600 m de diamètre, d'une part car c'est une taille pouvant être résolue rapidement par le code et d'autre part car la vitesse des inclusions de cette taille est de l'ordre du centimètre par an si celles-ci s'élèvent dans un fluide de viscosité $\sim 10^{17}$ $Pa.s$. Cet ordre de grandeur de la vitesse est également celui de la vitesse de la convection. Les inclusions ne sont donc plus des traceurs passifs de l'écoulement mais deviennent des acteurs qui peuvent modifier les caractéristiques de la convection ainsi que l'aspect structurel final du système. Ceci a déjà été étudié et certains travaux sont détaillés ci-dessous.

Nous considérons deux types d'inclusions : des plus lourdes et plus visqueuses d'un côté et des plus légères et moins visqueuses de l'autre, par rapport au fluide environnant appelé Milieu Global Équivalent (MGE). La rhéologie et la densité du MGE sont celles d'un milieu moyenné. Avec la prise en compte des inclusions, celui-ci reste toujours un milieu moyenné car tout le système n'est pas discrétisé (nous ne modélisons pas chaque minéral) et les inclusions ne représentent pas un état solide ou liquide des roches (car cela correspond à une échelle trop petite par rapport à ce que l'on modélise) mais plutôt un état plus ou moins fondu. Les inclusions sont aussi des moyennes d'hétérogénéités plus ou moins lourdes et visqueuses. C'est pourquoi les rhéologies du MGE et des inclusions suivent la même loi (Eq. (3.12)) mais ont des valeurs différentes (car la viscosité dépend de la fraction volumique de phase C_i, cf. section 3.2).

La dynamique d'un ensemble de particules en sédimentation (instabilité de type Rayleigh-Taylor), ou dans un fluide sujet à de la convection thermique turbulente (instabilité de Rayleigh-Bénard) est très étudiée. On distingue *particules* qui sont des sphères rigides non déformables et *inclusions*, qui sont des poches de fluide déformables. Particules et inclusions peuvent avoir des dynamiques similaires si les inclusions sont suffisamment visqueuses.

De nombreux auteurs étudient le comportement d'un ensemble de particules localisées

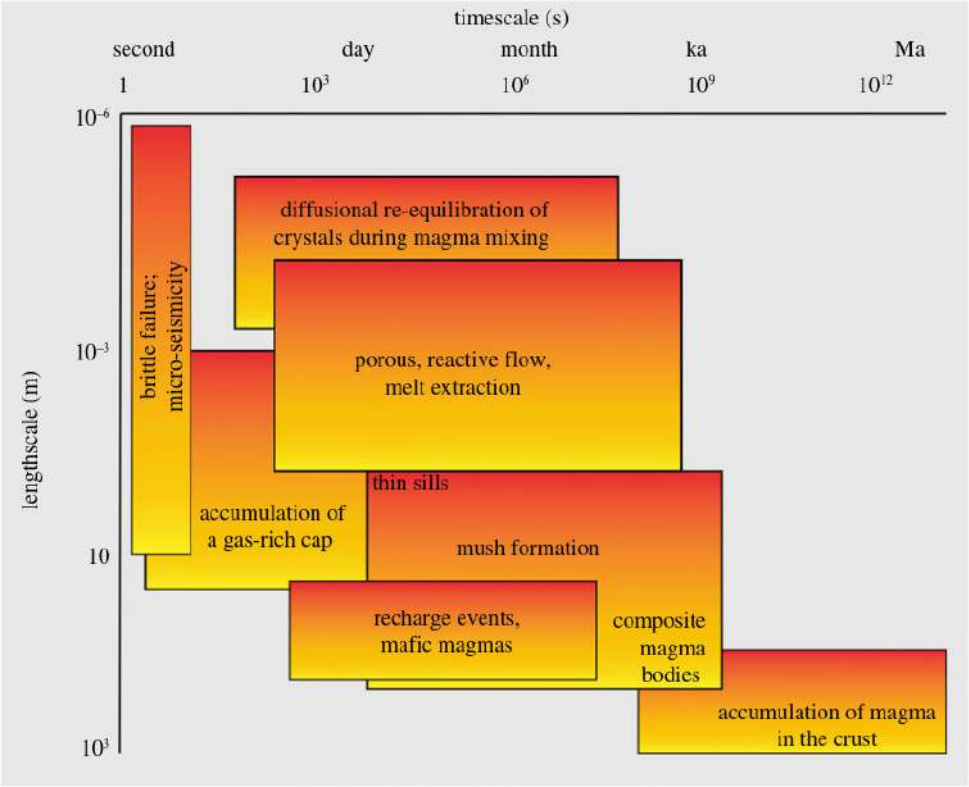


FIGURE 3.4.1 – Échelles spatiale et temporelle associées à différents processus magmatiques [EDMONDS et al., 2019]. L'échelle la plus grande est considérée ici ("accumulation of magma in the crust").

initialement en haut du système et qui sédimentent du fait de leur plus grande densité. Ils s'attachent à déterminer si les particules ont i) un comportement collectif similaire à un fluide ("fluid-like region") : l'interface entre la couche de particules et le fluide est déformée par des poches de particules qui tombent en formant des diapirs ; ii) un comportement individuel ("particle-like region"). Ceci est illustré sur la figure 3.4.2. Plus les particules sont concentrées, plus elles sont proches les unes de autres et plus elles vont agir comme un fluide. Lorsque les particules agissent comme un fluide, elles suivent la théorie de stabilité linéaire d'une instabilité de type Rayleigh-Taylor [CHANDRASEKHAR, 2013; CHOU et SHAO, 2016; DEUBELBEISS et al., 2010; HARADA et al., 2012; MICHIOKA et SUMITA, 2005; MOITRA et GONNERMANN, 2015; PAN et al., 2001; VÖLTZ et al., 2001]. Lorsqu'elles ont un comportement individuel, elles sédimentent à la vitesse de Stokes. Quelques auteurs ont considéré deux tailles de particules (eg. SHIBANO et al. [2013]) ; DEUBELBEISS et al. [2010] utilisent une couche de particules plus petites en bas du système et une couche de particules plus grosses au dessus. Par ailleurs, YAMATO et al. [2015] ont étudié la ségrégation de cristaux (particules rectangulaires) dans un dyke et conclu que l'arrangement initial des cristaux ainsi que leur rapport d'aspect (tant que la taille des cristaux restent faible par rapport à la taille du dyke) avaient peu d'influence sur la sédimentation des cristaux dans le magma.

Lorsque particules et convection sont présentes dans un même système, elles s'influencent mutuellement [KOYAGUCHI et al., 1990]. Deux types de comportements ont été identifiés

[Höink et al., 2005] : i) les particules sont maintenues en suspension par la convection ("C-regime"), ii) les particules sédimentent ("T-regime"). Ces comportements dépendent du nombre de Rayleigh ($Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$) et du nombre de flottabilité ($B = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f \alpha \Delta T}$) comme illustré sur la figure 3.4.3 [Lavorel et Le Bars, 2009]. D'autres auteurs utilisent plutôt un nombre de Rayleigh chimique [Verhoeven et Schmalzl, 2009] ou encore le nombre de Stokes comme c'est le cas de Patocka et al. [2020] qui étudient le comportement de particules légères ou lourdes dans un système convectif turbulent.

De nombreux travaux se sont intéressés à l'influence des particules sur la convection mais rarement à celle de la convection sur le mouvement des particules (ou des inclusions). Par exemple, Molina et al. [2012] montrent que la présence de cristaux dans un conduit magmatique accélère la vitesse de convection et que ceux-ci transitent du "T-regime" vers le "C-regime".

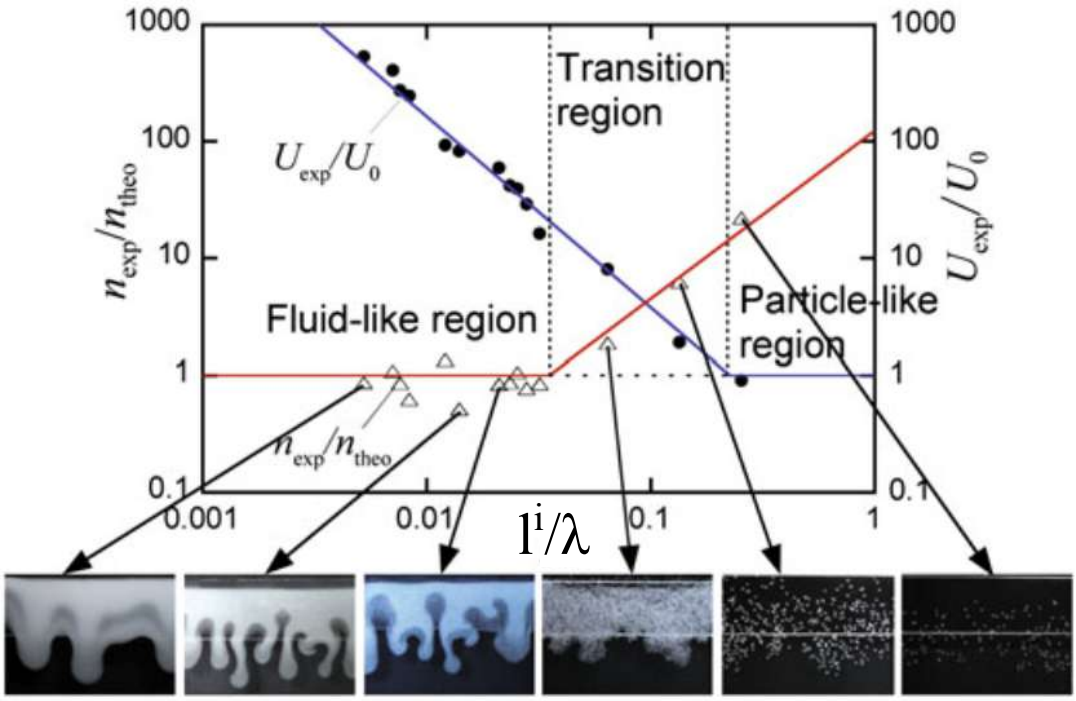


Figure 3.4.2 – Régimes de sédimentation d'une collection de particules dans un fluide, dans le plan (l^i/λ, n_{exp}/n_{theo}) où n_{exp} est le taux de croissance expérimental de déformation de l'interface fluide-particules et n_{theo} le taux de croissance de l'instabilité la plus rapide, l^i/λ est le ratio entre la distance moyenne entre les particules, $l^i \sim d_p/\phi_p^{1/3}$ (d_p le diamètre et ϕ_p la concentration en particules) et λ la longueur d'onde caractéristique de l'instabilité. U_{exp} est la vitesse de déformation de l'interface mesurée expérimentalement et U_0 est la vitesse de Stokes (d'après Harada et al. [2012]).

Le mouvement des inclusions dans les systèmes que nous étudions peut être dû à i) leurs caractéristiques physiques qui tend à les faire flotter ou couler, ii) à une instabilité de Rayleigh-Taylor lorsque les inclusions se comportent comme un fluide ou iii) à la convection.

Cette partie de la thèse est consacrée à l'étude, de façon simplifiée de l'impact réciproque des inclusions et de la convection, et des modalités d'obtention (épaisseur de la couche d'inclusions, viscosité, rhéologie) de petites structures comparables à celles de Naxos. Dans un premier

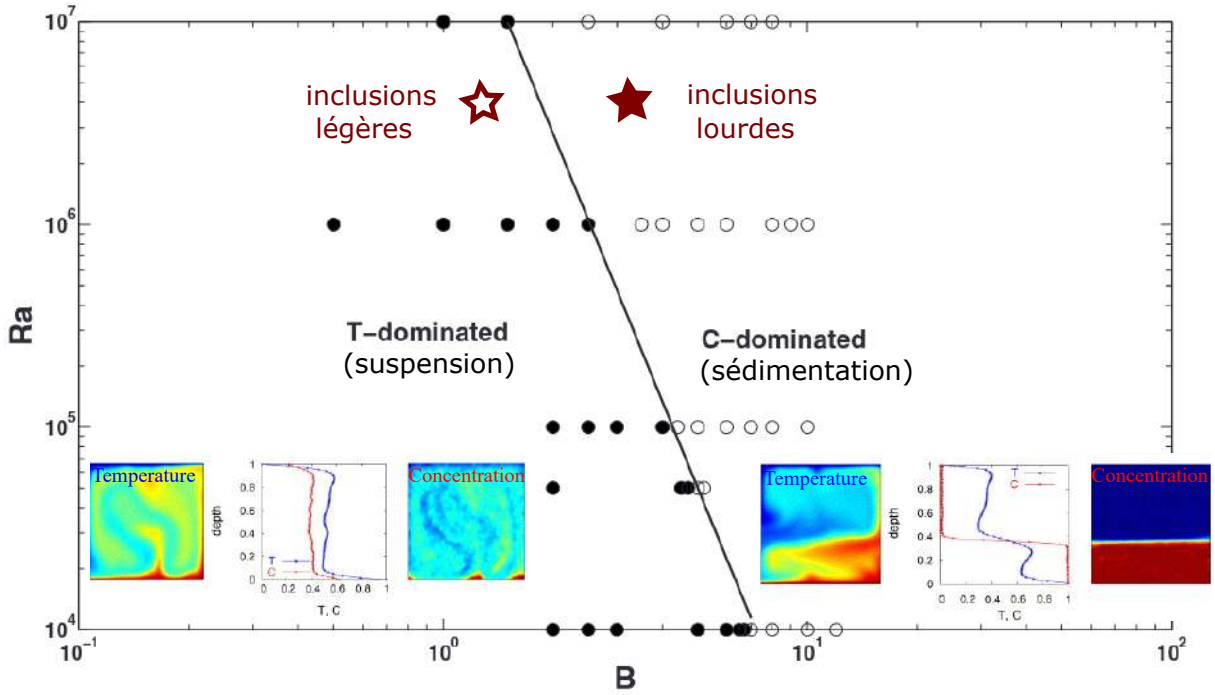


FIGURE 3.4.3 – Diagramme présentant les conditions des régimes de suspension "T-regime" et de sédimentation "C-regime" dans un système convectif en présence de particules, d'après [LAVOREL et LE BARS, 2009]. Ici $B = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f \alpha \Delta T}$ est le nombre de flottabilité, avec ρ_f (ρ_p), la masse volumique du fluide (des particules), α, le coefficient d'expansion thermique et ΔT, l'écart de température entre le haut et le bas du système et $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ est le nombre de Rayleigh, avec H, la hauteur du système, μ, la viscosité du fluide et κ, sa diffusivité thermique. Les cercles pleins et creux représentent les points d'expérience [LAVOREL et LE BARS, 2009]. Les images en insert montrent (de gauche à droite) un exemple de distribution spatiale de température, de profil vertical moyen de température et de concentration en particules pour les deux régimes [HÖINK et al., 2005]. Les deux étoiles correspondent à nos simulations pour les inclusions légères (étoile vide) et lourdes (étoile pleine) du cas $I_1 M_0 0$.

temps, la viscosité sera choisie constante afin de simplifier le problème et de comprendre la dynamique d'un ensemble d'inclusions dans un système convectif. Nous ferons varier l'épaisseur de la couche d'inclusions, le rayon et l'agencement des inclusions avant de tester différentes rhéologies, dans l'idée d'identifier quels sont les paramètres qui influencent le développement des structures et dans quelle gamme l'obtention de petites structures est possible.

Nous considérons dans toute cette partie (section 3.4) un système à trois phases : un milieu moyenné (MGE, phase 1), des inclusions légères (phase 2) et des inclusions lourdes (phase 3). Toutes les inclusions sont dès le départ "actives" dans le sens où elles ont une différence de densité et de viscosité avec le MGE telle que : $\rho_1 = \rho_2 + 100 = \rho_3 - 200$ et $\mu_1 = \mu_2 \times 10 = \frac{\mu_3}{10}$. La densité suit la loi de Boussinesq (3.10) et la viscosité est constante. Les inclusions sont initialement disposées sous forme de réseau, de manière alternative entre les légères et les lourdes. Les paramètres physiques des fluides sont donnés tableaux 3.4.4 et 3.4.5. Ces valeurs correspondent à des valeurs de viscosité et densité d'une roche en fusion partielle (figure 1.5). La viscosité du MGE est choisie de sorte à ce que les inclusions bougent assez rapidement (de l'ordre du cm par an) et à avoir de la convection.

3.4.1 Dynamique d'un réseau d'inclusions (viscosité constante)

Ici, nous considérons le cas de référence $I_1M_0H_0$, sans fusion partielle, avec chauffage interne. De plus, la viscosité de chaque phase est constante. Ce choix revient à remplacer respectivement les équations (3.11) et (3.12) par,

$$\rho_{ref} = \sum_{i=1}^{3} C_i \rho_i, \tag{3.27}$$

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{3} C_i \mu_i \tag{3.28}$$

où ρ_i (μ_i) est la masse volumique (viscosité) de la phase i ($i = 1$: MGE, 2 : inclusions légères, 3 : inclusions lourdes). Les paramètres physiques choisis ici sont résumés dans le tableau 3.4.3.

Paramètre	i	α	T_{ref}	ρ_i	μ_i	H_r	r
Unité		K^{-1}	K	$kg.m^{-3}$	$Pa.s$	$\mu W.m^3$	m
MGE	1	3×10^{-5}	573	2700	6×10^{16}	1.75	
Légères	2	3×10^{-5}	573	2600	6×10^{15}	2.3	300
Lourdes	3	3×10^{-5}	573	2900	6×10^{17}	0.9	300

TABLEAU 3.4.3 – Paramètres du cas de référence $I_1M_0H_0$ avec inclusions et chauffage interne mais sans fusion partielle.

Nous considérons ici un domaine 2D d'extension horizontale (suivant x) de 49.4 km, verticale (suivant y) de 35 km, discrétisé avec un maillage comportant 494×350 cellules. Les conditions limites pour la vitesse sont une condition d'adhérence sur la frontière basse et de glissement sur la frontière haute et une condition périodique sur les frontières latérales ; pour la température nous imposons $T_H^+ = 1000^oC$ en bas, $T_C = 300^oC$ en haut et une périodicité sur les frontières latérales. Initialement, l'épaisseur de la couche d'inclusions $h = 20\ km$. Dans le cas $I_1M_0H_0$, les nombres adimensionnels du problème valent $Ar = 32$, $Ra = 1.2 \times 10^6$, $Ra_H = 8.8 \times 10^9$ et $Pr = 2 \times 10^3$. En présence d'inclusions, il est aussi possible d'estimer un nombre de Stokes pour les inclusions de la phase i ($i = 2$ ou 3) tel que $St_i = \frac{1}{9}\frac{(\rho_i + \frac{1}{2}\rho_1)V_{Stokes}}{\mu_1}$. Ici, on a $St_2 \approx 7 \times 10^{-22}$ (inclusions légères) et $St_3 \approx 2 \times 10^{-21}$ (inclusions lourdes).

La figure 3.4.4 présente la dynamique de l'écoulement (cliché a pour le cas $I_1M_0H_0$). Dans un premier temps, les inclusions blanches et noires se séparent, c'est la ségrégation ($0 \leq t \leq 0.4\ Ma$). Les blanches s'extraient de la couche d'inclusions sous forme de filaments tandis que les noires, plus visqueuses ont tendance à couler en gardant leur forme circulaire initiale. Lorsque plusieurs inclusions blanches se sont extraites (~ 4), elles forment des gouttes ($t = 0.4\ Ma$) emprisonnant un peu de MGE. Ces gouttes ont deux formes : allongée verticalement ($\sim 900 \times 1800\ m$), ou allongée horizontalement ($\sim 1500 \times 1200\ m$). Les inclusions et filaments se déplacent avec une vitesse proche de celle de Stokes ($V_{Stokes} = \frac{2\Delta\rho g r^2}{9\mu_1} \sim 1 - 2\ cm.an^{-1}$). Le mélange (inclusions + MGE) se déstabilise alors sous forme d'instabilité de Rayleigh-Taylor

($t = 0.6\ Ma$) en créant des diapirs ayant une longueur d'onde $\lambda \sim 2\ km$.

Les isothermes suivent le mouvement des inclusions car le nombre de Prandtl est élevé ($Pr \sim 2 \times 10^3$). Une fois que le diapir le plus rapide a atteint le haut du système, il se refroidit et retombe ce qui déclenche la convection dans l'ensemble de la croûte chaude. La convection efface toutes les structures précédemment créées et entraîne une partie des inclusions blanches. Certaines forment une couche en haut du système. Des inclusions noires sont aussi entraînées par la convection mais beaucoup moins que les blanches. La majorité des inclusions noires forment une couche de fluide plus visqueuse et plus dense que le MGE en bas du système. On peut donc décomposer l'évolution de ce système en trois séquences : ségrégation, suivie d'instabilités de Rayleigh-Taylor avec création de structures diapiriques d'une taille de 2 km, puis déclenchement de la convection.

a) Instabilité de Rayleigh-Taylor

Afin de mieux comprendre l'instabilité de Rayleigh-Taylor formée par un réseau d'inclusions, nous rendons ici le système isotherme. Ceci revient par exemple à remplacer (3.4) par $T = T_{ref}$. Les résultats sont présentés sur la figure 3.4.4b. La grandeur l^i/λ, qui est le rapport de la distance entre deux particules sur la longueur d'onde de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, du diagramme de Harada et al. [2012] (cf. figure 3.4.2) peut être estimée et nous trouvons $l^i/\lambda = 1860/6000 \approx 0.31$. Notre système se situe donc dans la zone de transition entre les régimes "fluid-like" et "particle-like". Il est donc difficile d'anticiper le comportement du milieu.

Nous pouvons de plus tenter d'appliquer la théorie de stabilité linéaire de Ramberg [1981a] qui prédit la longueur d'onde et le taux de croissance d'une instabilité de Rayleigh-Taylor multi-couches. En s'appuyant sur le cliché de la figure 3.4.4b au temps $t = 0.4\ Ma$, considérons une couche d'épaisseur environ 10 km en $-30\ km \leq y \leq -20\ km$ d'un fluide composé de MGE et d'inclusions légères en proportion volumique $\approx 20\%$ localement plus léger que la couche supérieure d'épaisseur $10km$ aussi en $-20\ km \leq y \leq -10\ km$. En considérant la densité et la viscosité moyenne dans les deux couches, la théorie de Ramberg [1981a] prédit une longueur d'onde d'environ 25 km et un taux de croissance de 85 Ma^{-1}. Dans la simulation de la figure 3.4.4b, nous avons plutôt 6 km et 5 Ma^{-1}. Ceci confirme que dans le cas présent, le système n'est pas dans un régime de type "fluide-like" où cette théorie pourrait s'appliquer.

La taille et la vitesse d'ascension des structures ne semblent donc pas pouvoir être estimée grâce à la théorie de stabilité linéaire [Ramberg, 1981a]. On ne peut donc pas prévoir les caractéristiques des diapirs (taille, longueur d'onde, vitesse, etc) à partir des données du milieu.

b) Convection

Pour mieux comprendre l'influence des inclusions sur la convection, nous avons réalisé un cas, $I_0M_0H_0$, ayant les mêmes propriétés thermiques que le cas $I_1M_0H_0$ mais sans inclusions (figure 3.4.4c). Ceci revient à considérer que les inclusions ont la même densité et viscosité que le MGE.

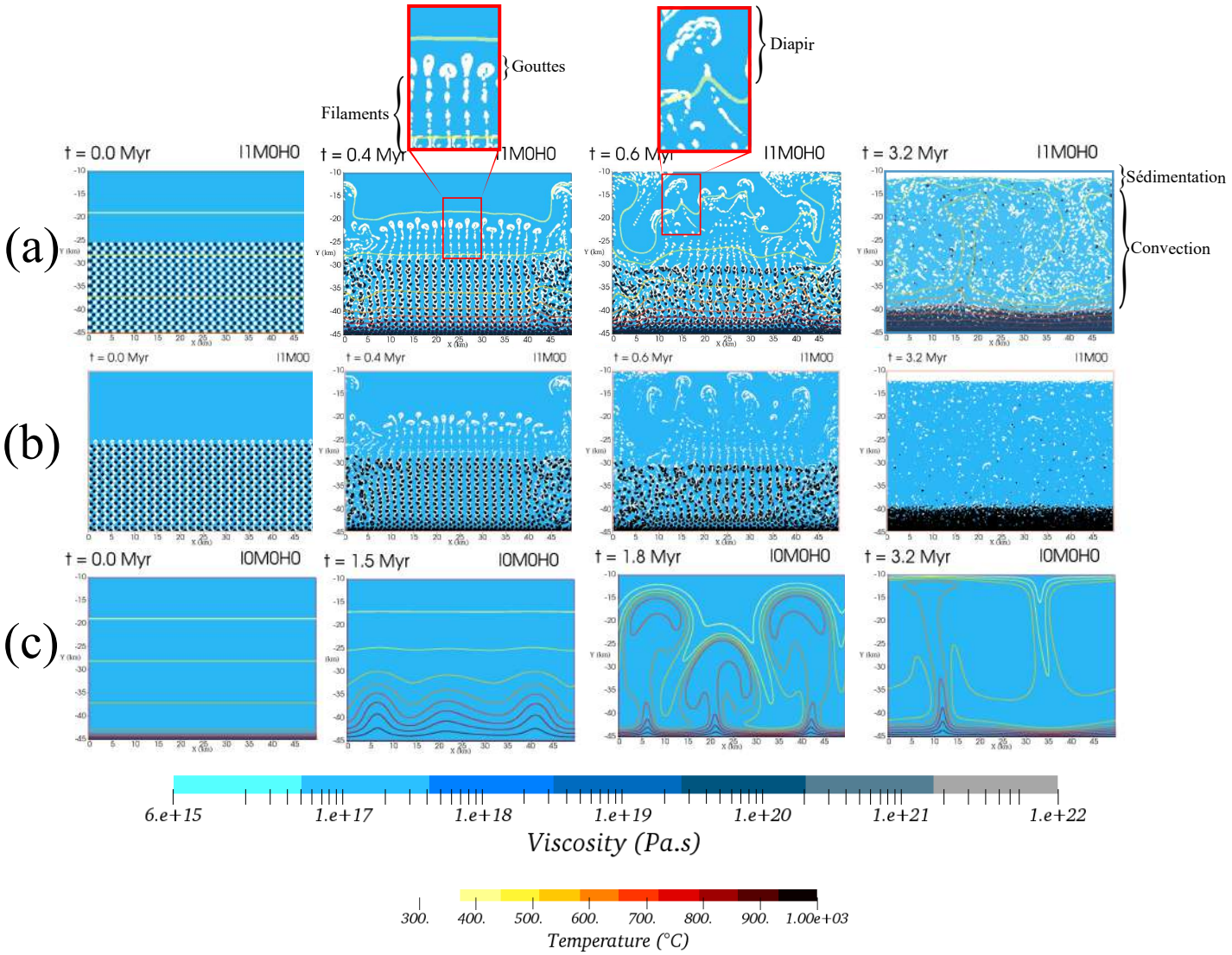


FIGURE 3.4.4 – Evolution temporelle d'un système avec inclusions et/ou chauffage (par le bas et interne) : (a) inclusions et chauffage, cas $I_1M_0H_0$; (b) inclusions seules, cas I_1M_00 (tel que (3.4) est remplacée par $T = T_{ref}$) ; (c) chauffage seul, cas $I_0M_0H_0$ (les inclusions ont la même densité et viscosité que le MGE). La palette de bleu montre la distribution spatiale de la viscosité. Les inclusions légères (lourdes) sont colorées en blanc (noir). Les isocontours représentent la température (palette de rouge). Les inclusions blanches (cas a et b) s'extraient sous forme de filaments et forment des gouttes au dessus de la couche d'inclusions. Ces gouttes se déstabilisent avec une longueur d'onde de 2 km. Enfin, la convection (cas a) démarre et casse les structures formées. Pour le cas c sans inclusions ($I_0M_0H_0$), la convection démarre plus tardivement que dans le cas a ($\sim 1.5\ Ma$ contre $\sim 0.6\ Ma$).

Dans le cas $I_0M_0H_0$ (apport de chaleur basale sans inclusions), les isothermes se déforment en 3 panaches au bout de 1.5 Ma. Au contraire, dans le cas $I_1M_0H_0$ avec inclusions, les isothermes suivent le mouvement des inclusions dès le début de la simulation, du fait d'un nombre de Prandtl élevé ,et la convection se déclenche plus rapidement ($\sim 1\ Ma$ avant) que dans le cas $I_0M_0H_0$ sans inclusions. Les panaches thermiques ne sont pas clairement identifiables et s'assimilent aux diapirs puisque les isothermes suivent leur déformation.

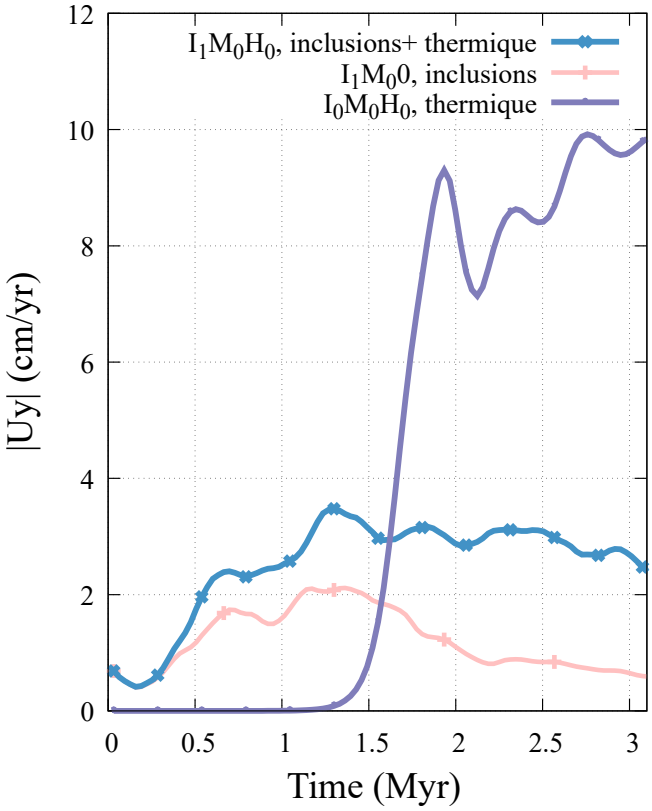


FIGURE 3.4.5 – Évolution de la vitesse verticale moyennée sur l'ensemble du domaine au cours du temps pour les cas inclusions et thermique ($I_1M_0H_0$ en bleu), inclusions seules (I_1M_00 en rose) et thermique seule ($I_0M_0H_0$ en violet). Le chauffage basal impacte les vitesses dès 0.3 Ma où courbes rose et bleue divergent.

Les vitesses verticales moyennées sur l'ensemble du domaine sont présentées figure 3.4.5. Le cas $I_0M_0H_0$ (chauffage basal sans inclusions) ne doit l'accélération de sa vitesse qu'à la convection, il faut donc que celle-ci démarre pour que les vitesses augmentent. Pour les cas avec inclusions, au début, ce sont les inclusions qui induisent le mouvement et donc des vitesses non nulles dans le système. Les cas avec inclusions avec et sans chauffage basal divergent au bout de 0.5 Ma au niveau des vitesses. L'effet de la thermique est donc ressenti à partir 0.5 Ma. Le cas thermique avec inclusions (en bleu) a une vitesse intermédiaire entre le cas thermique pure (en violet) et le cas inclusions seules (en rose). La présence d'inclusions ralentit fortement la convection mais permet un démarrage plus rapide de celle-ci.

On utilise le diagramme 3.4.3 pour vérifier dans quel régime (sédimentation ou entraînement par la convection) se situe les inclusions légères et lourdes. Le nombre de Rayleigh du système est $Ra = 4.7\times10^6$ et le nombre de flottabilité pour chaque type d'inclusion est $B_2 = 1.7$ (inclusions légères) et $B_3 = 3.4$ (inclusions lourdes). Les inclusions lourdes sont clairement dans le régime C, c'est-à-dire qu'elles sédimentent malgré la convection. C'est effectivement le cas sur la figure 3.4.4a pour les inclusions lourdes qui forment une couche en bas du système. Les inclusions légères ont un nombre de flottabilité qui est proche de la zone de transition, ce qui indiquerait un régime où inclusions flottantes et convectées coexistent. C'est effectivement le

cas sur la figure 3.4.4a où un grand nombre d'inclusions blanches est entraîné par la convection après 0.5 Ma.

Pour résumer, au début de la dynamique de l'écoulement, lorsque l'instabilité de Rayleigh-Taylor domine, le système se situe dans une régime de transition entre un comportement collectif et un comportement individuel des inclusions. La taille des structures formées par le regroupement des inclusions en haut du domaine ne peut donc pas être déterminée grâce à la théorie de stabilité linéaire [Ramberg, 1981a].

Par ailleurs, la convection est fortement affectée par la présence des inclusions. Afin de mieux comprendre quels sont les paramètres qui affectent les structures et la convection, nous faisons varier par la suite la taille et la distribution spatiale des inclusions ainsi que leur rhéologie et cela dans un système avec du chauffage basal.

3.4.2 Étude paramétrique

Dans un premier temps, nous étudions l'influence d'un certain nombre de paramètres (épaisseur, diamètre, rhéologie des inclusions) sur les structures formées avant la convection, puis nous faisons un focus sur l'interaction inclusions - convection. L'ensemble des cas simulés pour cette étude paramétrique est résumé dans les tableaux 3.4.4 et 3.4.5.

a) Influence de l'épaisseur de la couche d'inclusions

Ici, l'épaisseur de la couche d'inclusions h varie dans la gamme $7 \leq h \leq 35$ km dans les cas $I_1M_0H_{5-6-7}$. La dynamique des écoulements est illustrée figure 3.4.6.

La longueur d'onde des dipapirs est difficile à évaluer puisqu'elle n'est pas exactement la même entre tous les diapirs. Dans presque tous les cas, comme dans le cas de référence $I_1M_0H_0$, une modification de longueur d'onde se produit lorsque les inclusions se sont élevées de 5 km. Le seul cas où le changement ne s'est pas produit, est celui où les inclusions remplissent tout l'espace du système (cas $I_1M_0H_7$) car celles-ci n'ont pas la place de parcourir librement 5 km de distance verticale. Toutefois, il semble que la longueur d'onde soit indépendante de l'épaisseur de la couche d'inclusions.

La théorie de stabilité linéaire dans le cadre de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour un système avec des couches de fluides newtoniens et de densité constante (chapitre 1 et 2), prédit que les tailles des diapirs dépendent de l'épaisseur de la couche dans lequel ils se développent. Ce ne semble pas être vérifié dans notre cas où la couche est composée d'inclusions : la longueur d'onde varie très peu quelque soit l'épaisseur de la couche sans inclusions.

b) Influence du rayon et de l'agencement des inclusions

Regardons à présent l'influence de la taille et de la répartition initiale des inclusions sur la dynamique des diapirs, via 3 cas :

Cas		μ_i^0 $Pa.s$	Densité ρ_i^{L0} $kg.m^{-3}$	Production H_r $\mu W.m^3$	Rayon r m	Épaisseur h km	A $Pa^{-n}.s^{-1}$	Loi de viscosité
$I_1M_0H_0$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
Cas sans chaleur basale								
I_0M_00	1	6×10^{16}	2700	0	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	0				
	3	6×10^{16}	2700	0				
Cas sans inclusions								
$I_0M_0H_0$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28)
Influence de la viscosité newtonienne μ								
$I_1M_0H_1$	1	6×10^{17}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{16}	2600	2				
	3	6×10^{18}	2900	0.9				
$I_1M_0H_2$	1	6×10^{18}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{17}	2600	2				
	3	6×10^{19}	2900	0.9				
$I_1M_0H_3$	1	6×10^{19}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{18}	2600	2				
	3	6×10^{20}	2900	0.9				
Influence de l'épaisseur de la couche d'inclusion h								
$I_1M_0H_5$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	25	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
$I_1M_0H_6$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	7	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
$I_1M_0H_7$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	35	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
Influence de l'agencement et du rayon r des inclusions								
$I_1M_0H_9$	1	6×10^{16}	2700	1.75	600	7	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
$I_1M_0H_{16}$	1	6×10^{16}	2700	1.75	$300\leq r\leq 1800$	7 + random	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{17}	2900	0.9				
Inclusions noires supprimées								
$I_0M_1H_{21}$	1	6×10^{16}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.28) $\tilde{\mu}=cst$
	2	6×10^{15}	2600	2				
	3	6×10^{16}	2700	0.9				

TABLEAU 3.4.4 – Simulations effectuées pour l'étude paramétrique (rhéologie newtonienne). Les noms des cas sont des liens vers une vidéo de la simulation.

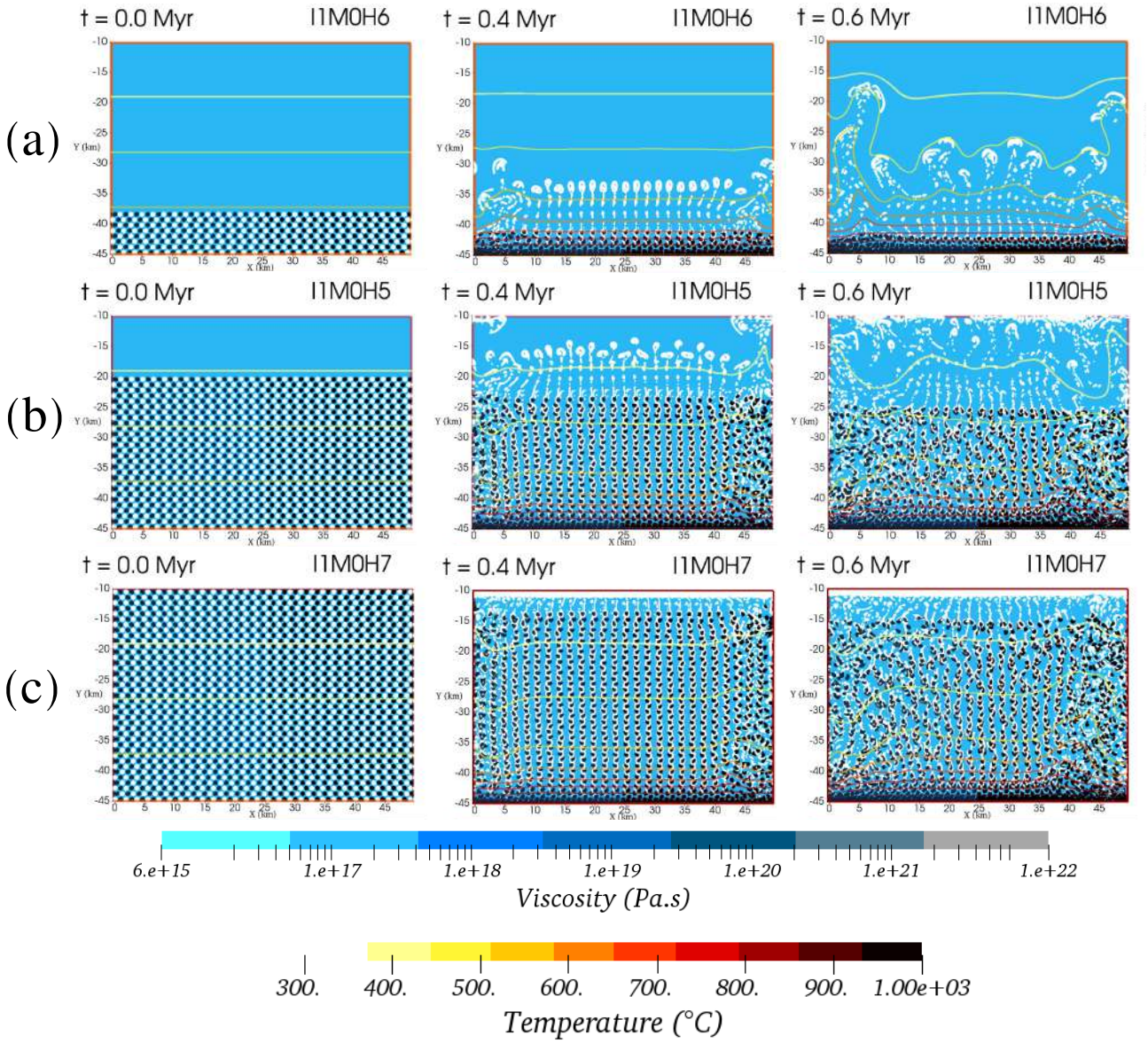


FIGURE 3.4.6 – Dynamique d'un système présentant des inclusions et du chauffage pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche d'inclusions. (a) $I_1M_0H_6$ ($h = 7\ km$), (b) $I_1M_0H_5$ ($h = 25\ km$) et (c) $I_1M_0H_7$ ($h = 35\ km$). Les inclusions légères sont colorées en blanc tandis que les lourdes sont colorées en noir (détails des paramètres cf. Tab. 3.4.4). Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentant la température. Des diapirs se forment si la place est suffisante.

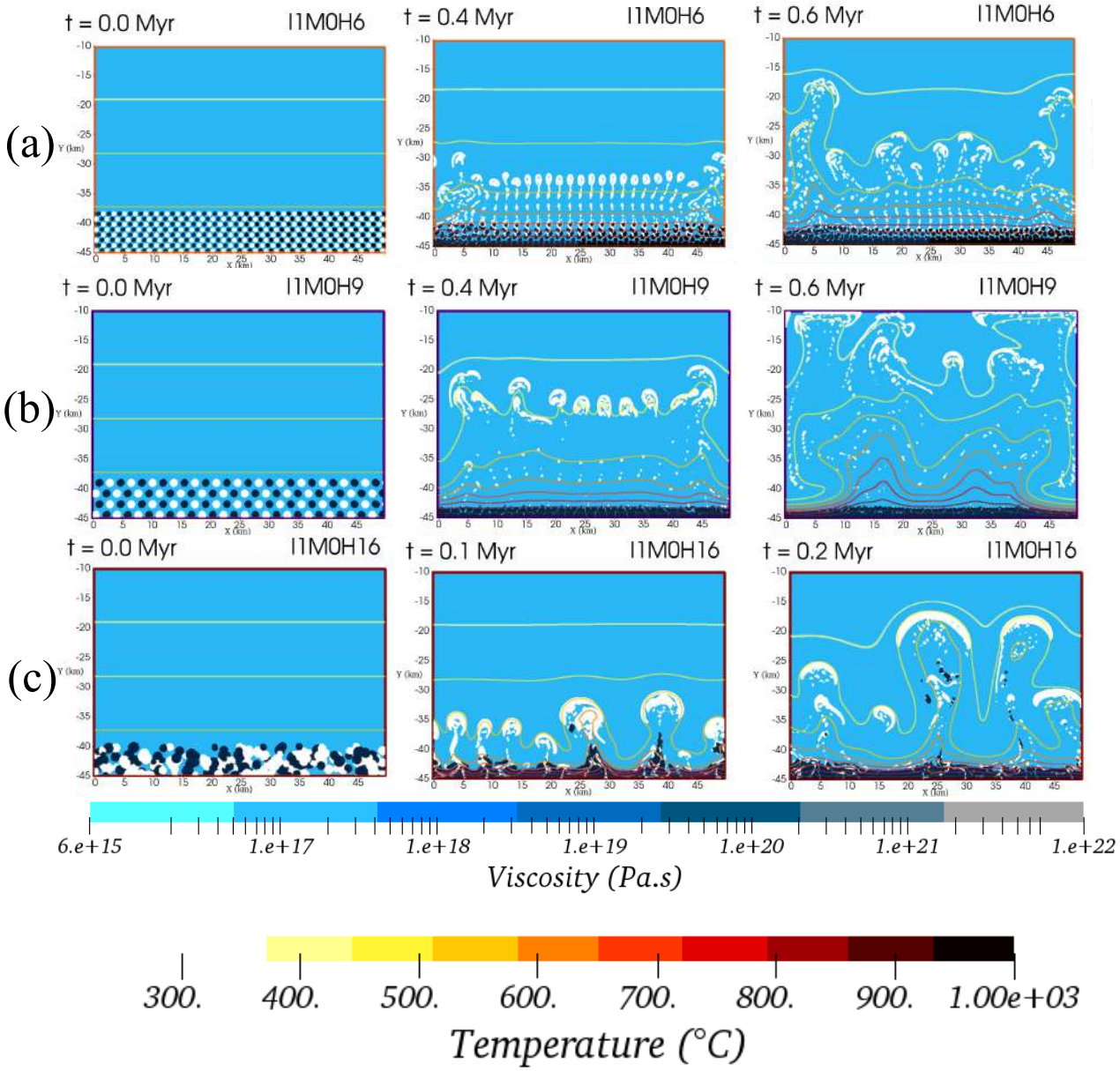


FIGURE 3.4.7 – Dynamique d'un système avec inclusions et chauffage pour différentes taille et répartition des inclusions : (a) les inclusions ont un rayon $r = 300\ m$ et une répartition régulière (cas $I_1M_0H_6$), (b) les inclusions ont un rayon $r = 600\ m$ et une répartition régulière (cas $I_1M_0H_9$), (c) les inclusions ont un rayon compris dans la gamme $300 \leq r \leq 1800\ m$ et sont disposées aléatoirement (cas $I_1M_0H_{16}$). Les inclusions légères sont colorées en blanc tandis que les lourdes sont colorées en noir (détails des paramètres cf. Tab. 3.4.4). Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentant la température.

Cas		μ_i^0 $Pa.s$	Densité ρ_i^{L0} $kg.m^{-3}$	Production H_r $\mu W.m^3$	Rayon r m	Épaisseur h km	A $Pa^{-n}.s^{-1}$	Loi de viscosité
Influence de la rhéologie								
$I_1M_0H_{10}$	1	5×10^{15}	2700	1.75	300	20	0	Eq. (3.12) $\tilde{\mu} = \mu_{PF}$
	2	5×10^{14}	2600	2				
	3	5×10^{16}	2900	0.9				
$I_1M_0H_{11}$	1	0	2700	1.75	300	20	3.2×10^{-4}	Eq. (3.12) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$
	2	0	2600	2			6.3×10^{-2}	
	3	0	2900	0.9			1.58×10^{-6}	
$I_1M_0H_{22}$	1	0	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}	Eq. (3.12) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$
	2	0	2600	2			4.0×10^{-3}	
	3	0	2900	0.9			2.5×10^{-5}	
$I_1M_0H_{23}$	1	0	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}	Eq. (3.12) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$
	2	0	2600	2			6.3×10^{-2}	
	3	0	2900	0.9			1.58×10^{-6}	
$I_1M_0H_{13}$	1	$\dot{\varepsilon}$	2700	1.75	300	20	3.2×10^{-4}	Eq. (3.12) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$
	2	=	2600	2			6.3×10^{-2}	
	3	$10^{-14}s^{-1}$	2900	0.9			1.58×10^{-6}	

TABLEAU 3.4.5 – Suite du tableau 3.4.4 (rhéologie non-newtonienne). Les noms des cas sont des liens vers une vidéo de la simulation.

— les inclusions ont un rayon de 300 m et sont réparties de façon ordonnée ($I_1M_0H_6$),

— les inclusions ont un rayon de 600 m et sont ordonnées ($I_1M_0H_9$),

— la taille et la disposition des inclusions sont aléatoires, la rayon étant compris dans la gamme $300 \leq r \leq 1800\ m$ ($I_1M_0H_{16}$).

Les clichés du cas $I_1M_0H_9$ sont présentés sur la figure 3.4.7b où le rayon des diapirs est $r = 600\ m$. Les inclusions s'élèvent plus vite que dans le cas $I_1M_0H_6$ (où $r = 300\ m$). Presque tous les diapirs atteignent le haut du système. On voit également que l'ascension de certains diapirs crée un "chemin préférentiel" pour les diapirs qui se trouvent en dessous et qui finissent par le suivre. Cela permet de créer des diapirs imbriqués en haut du système par ajout successif de matière.

Pour le cas $I_1M_0H_{16}$, où les inclusions ont une taille et une disposition aléatoire, on observe un comportement assez différent des deux cas mentionnés précédemment. La présence d'inclusions légères de taille importante (allant jusqu'à $r = 1800\ m$) et la distribution spatiale initiale non-uniforme favorise la formation d'inclusions de grande taille (par coalescence) qui montent en adoptant une forme de "parachute" dont l'épaisseur peut atteindre 2 km et 10 km d'envergure.

Quoiqu'il en soit et dans tous les cas, les inclusions ou les diapirs qui sont assez proches les uns des autres ont tendance à naturellement s'imbriquer : soit ils le font rapidement et forment une goutte qui poursuit son ascension en bloc, soit ils arrivent successivement sous un diapir au fur et à mesure de son ascension.

c) Influence de la rhéologie

Nous étudions à présent l'impact de la rhéologie du système. Nous conservons les rapports de viscosité entre les trois phases tels que $\mu_1^0 = 10\mu_2^0 = \mu_3^0/10$ (où la phase 1 est le MGE, la phase 2, la phase la plus légère, la phase 3, la plus lourde) et faisons varier toutes les viscosités. Pour le MGE, la gamme de viscosité est : $6 \times 10^{16} \leq \mu_1^0 \leq 6 \times 10^{20}$ $Pa.s$.

Rhéologie newtonienne

Dans un premier temps, on considère les fluides newtoniens et la viscosité constante par phases (cf. Eq. 3.28). Les résultats de simulations ($I_1M_0H_{1-2-3}$) sont présentés sur la figure 3.4.8. Plus la viscosité du fluide 1 (MGE) est élevée et plus la longueur d'onde de l'instabilité qui se développe est grande. Une viscosité μ_1^0 de 10^{18} $Pa.s$ permet de former des dômes dans des temps $t < 5$ Ma. On estime que les inclusions restent "figées" lorsque la viscosité du MGE est supérieure ou égale à 10^{19} $Pa.s$.

Rhéologie dépendant du taux de melt M, $\mu_{PF} = f(M)$

Considérons maintenant le cas de fluides non-newtoniens où les viscosités suivent la loi (3.12) telle que $\tilde{\mu} = \mu_{PF}$. Ici, les rhéologies dépendent de la température de telle sorte que la viscosité diminue lorsque le système se réchauffe. Les résultats sont présentés sur la figure 3.4.9.

Le cas $I_1M_0H_{10}$ correspond à un système où les viscosités seraient partout partiellement fondues (donc faibles). Le MGE est suffisamment peu visqueux initialement de façon à ce que les inclusions ségrègent dès le départ. L'apport basal de chaleur diminue la viscosité du MGE et des inclusions et favorise leur déplacement. Un panache de MGE moins dense et moins visqueux s'élève à droite du système ($x \approx 45$ km) dès $t = 2.1$ Ma. Ce panache entraîne inclusions lourdes et légères et déclenche la convection.

La convection est dans ce cas très spécifique puisque la cellule convective "se translate" rapidement de manière horizontale (de la droite vers la gauche) sur la couche d'inclusions noires visqueuses (voir la vidéo). Ce phénomène apparaît dans un système convectif bi-couche lorsque le contraste de viscosité est grand et/ou le nombre de flottabilité B entre les deux couches est proche de la valeur critique $B_c \sim 0.3$ (voir chapitre 2, section c)) [Le Bars, 2003]. Dans notre cas, les couches sont créées par un contraste de viscosité lié à la dépendance de la viscosité à la température et ces couches ont des densités très proches. Ce phénomène est rendu possible par la présence des inclusions qui changent les viscosité et densité effectives du système. Sans elles, la convection se stabilise sous forme de panaches thermiques statiques horizontalement.

Rhéologie dépendant de la température et du taux de déformation, $\mu_{NF} = f(T, \dot{\varepsilon})$

Considérons à présent le cas où les viscosités suivent la loi (3.12) tel que $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$. Elles dépendent de la température et du taux de déformation local. Les cas $I_1M_0H_{11}$ et $I_1M_0H_{23}$ sont présentés sur les figures 3.4.9b et c. Les inclusions se mobilisent à partir du bas du domaine,

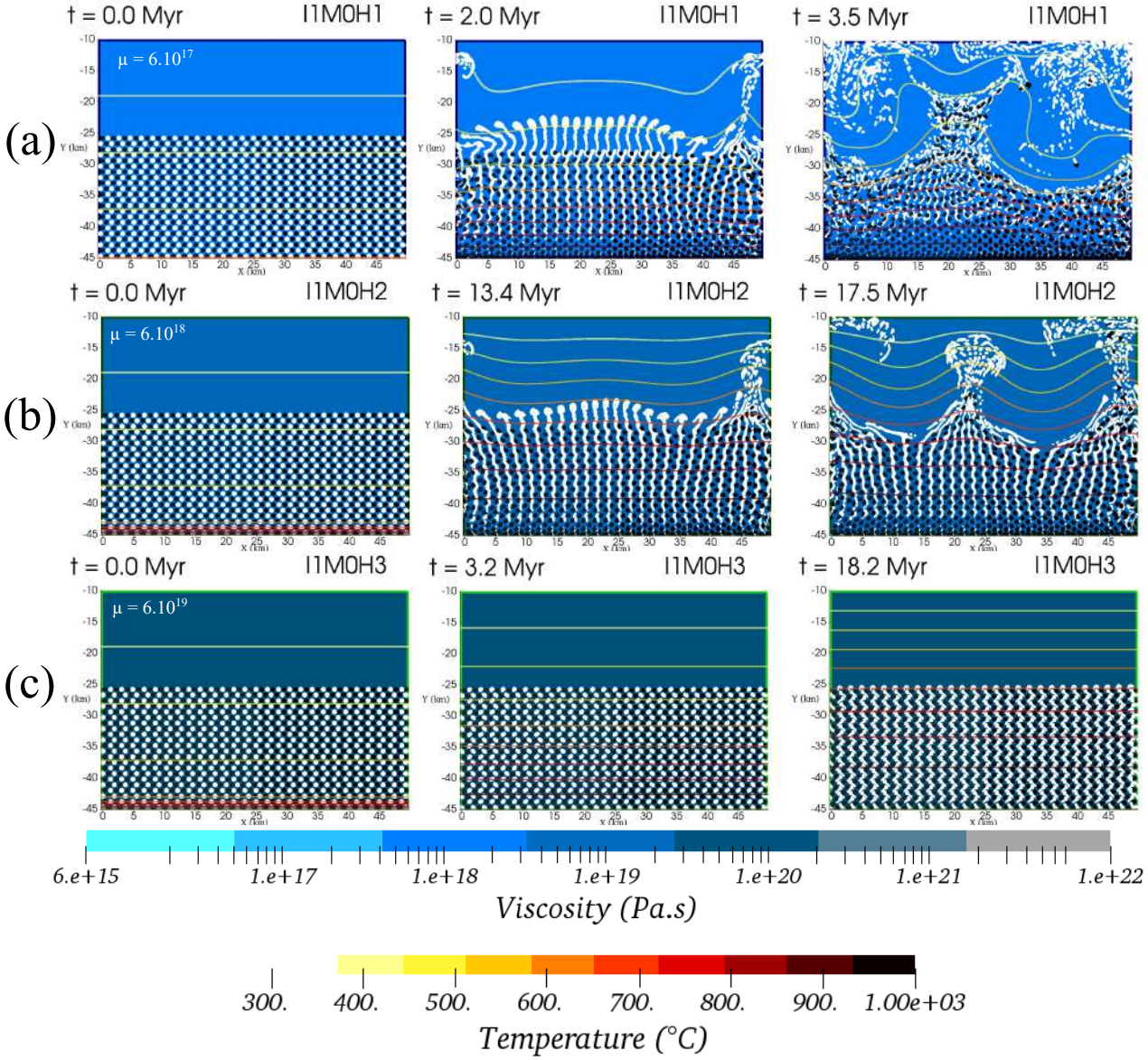


FIGURE 3.4.8 – Influence de la viscosité des fluides sur la dynamique des inclusions (fluides newtoniens de viscosité constante par phase suivant la loi 3.28). Ici, on fixe $\mu_1^0 = 10\mu_2^0 = \mu_3^0/10$ et on varie (a) $\mu_1^0 = 6 \times 10^{17}$ $Pa.s$ $(I_1M_0H_1)$, (b) $\mu_0^1 = 6 \times 10^{18}$ $Pa.s$ $(I_1M_0H_2)$ et (c) $\mu_0^1 = 6 \times 10^{19}$ $Pa.s$ $(I_1M_0H_3)$. Les inclusions légères sont colorées en blanc tandis que les lourdes sont colorées en noir (détails des paramètres cf. Tab. 3.4.4). Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentant la température.

au fur et à mesure que les isothermes s'élèvent. Les inclusions blanches fusionnent pendant leur ascension et finissent par former de grosses gouttes de diamètre 2 km.

Ici, la rhéologie dépend du taux de déformation, chaque mouvement des inclusions crée une diminution de la viscosité locale autour d'elles ce qui facilite leur mouvement et leur coalescence. C'est pourquoi, une inclusion blanche qui remonte va coalescer avec celles déjà présentes sans emprisonner de MGE créant ainsi un dôme homogène, car composé du même matériau mais ayant des viscosités différentes au sein du même amas. Si la viscosité des inclusions blanches était plus grande, celles-ci auraient moins de facilité à coalescer et à former des dômes homogènes. En effet, si on compare les cas $I_1M_0H_{22}$ et $I_1M_0H_{23}$ où les inclusions blanches sont respectivement 3 fois et 10 fois moins visqueuses que le MGE, on observe que les structures sont bien plus homogènes dans le dernier cas.

On peut aussi noter des petits mouvements circulaires locaux lors de l'ascension des inclusions blanches et de la descente des noires qui sont dûs à la formation de petits panaches thermiques très localisés autant spatialement que temporellement (la cellule à une taille de 5 à 7.5 km et $2.7 < t < 15$ Ma). Les panaches thermiques perdurent tant que les inclusions se déplacent et font diminuer localement la viscosité. Le taux de déformation atteint 10^{-13} s^{-1} localement, ce qui engendre une baisse de la viscosité jusqu'à 10^{17} $Pa.s$. Pour le cas $I_1M_0H_{11}$, à $t \simeq 18$ Ma, les inclusions s'accumulent dans deux couches respectives, en $-45 \leqslant y \leqslant -40$ km pour les lourdes, $-25 \leqslant y \leqslant -18$ km pour les légères. La viscosité est de 10^{18} $Pa.s$ entre -40 et -25 km, ce qui ne permet plus le développement de la convection. Le cas $I_1M_0H_{23}$ est composé d'un plus grand nombre d'inclusions que le cas $I_1M_0H_{11}$, ainsi un plus grand nombre d'inclusions est en mouvement ce qui fait perdurer les cycles convectifs plus longtemps. Par ailleurs, les inclusions blanches se figent à une profondeur de -15 km sous forme de dômes dentelés.

Nous avons inséré des traceurs dans l'écoulement du cas $I_1M_0H_{11}$ et les résultats sont présentés figure 3.4.10. Les traceurs verts, orange et rouge ont des trajectoires courtes (20 km) malgré la durée de la simulation (18 Ma). Certains traceurs (bleu et violet) présentent des oscillations de leur position car ils sont transportés par une cellule convective. La convection démarre autour de 4 Ma et s'arrête à 12 Ma. La période des cycles convectifs est de 2 Ma. Les traceurs atteignent des vitesses jusqu'à 2 $cm.an^{-1}$. La différence de température subie par un traceur lors d'une cycle est de l'ordre de 100^oC.

Rhéologie qui dépend de la température, $\mu_{NF} = f(T, \dot{\varepsilon} = 10^{-14}s^{-1})$ (Eq. (3.12))

Afin de vérifier le rôle de la dépendance du taux de déformation dans le déclenchement de la convection, nous reprenons la même loi rhéologique que précédemment en fixant le taux de déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-14}$ s^{-1} (cas $I_1M_0H_{13}$, figure 3.4.9e). Une fois séparées des lourdes, les inclusions légères peuvent encore s'élever (ce qui n'était pas le cas précédemment, voir figure 3.4.9b) car la viscosité est plus faible initialement (en effet $\dot{\varepsilon}_{min} = 10^{-14}$ s^{-1} contre $\dot{\varepsilon}_{min} = 10^{-16}$ s^{-1}). Les inclusions ne s'accumulent donc pas en $y \approx -18$ km mais continuent

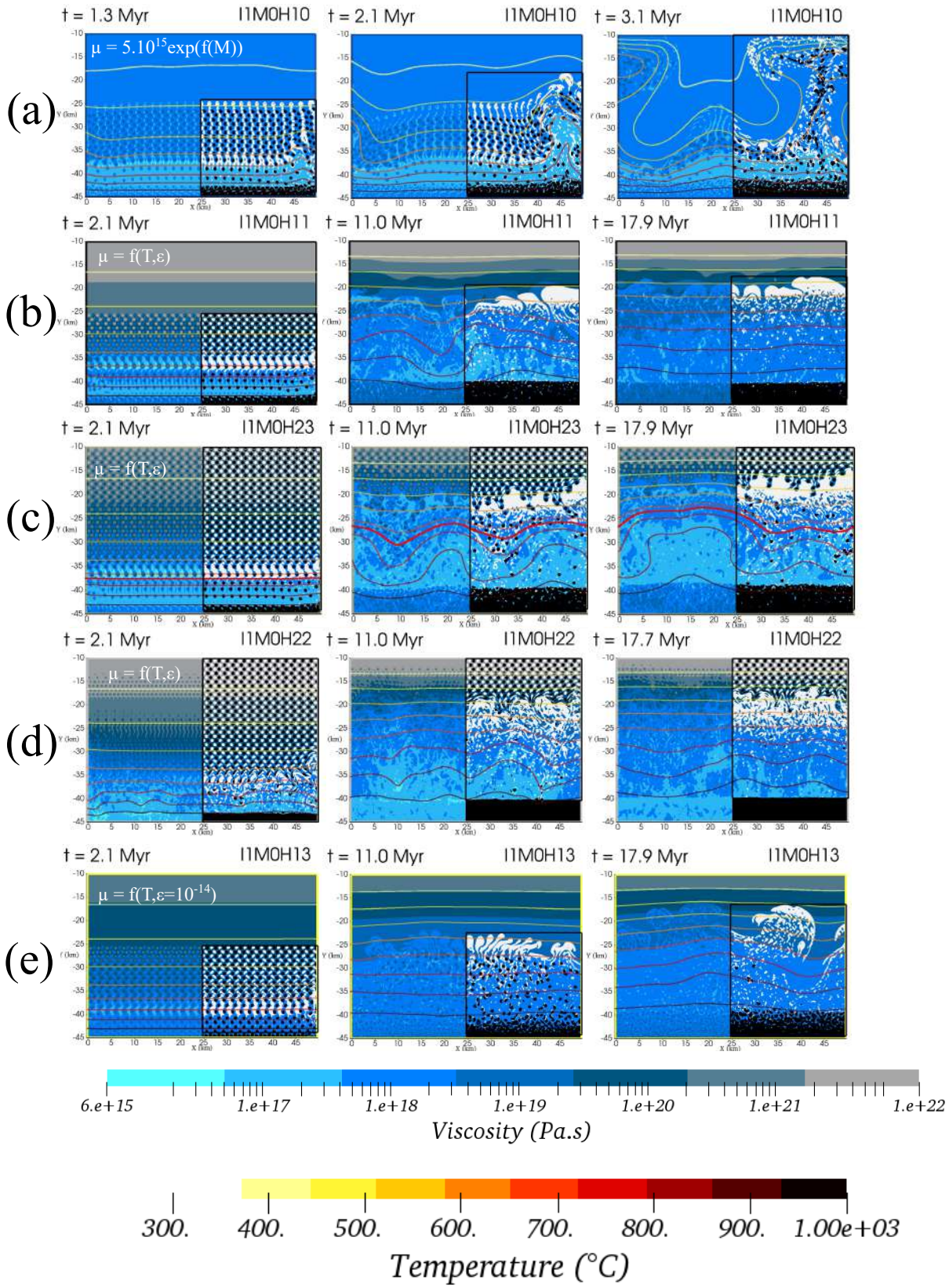
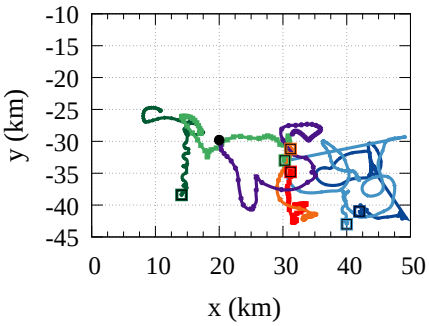
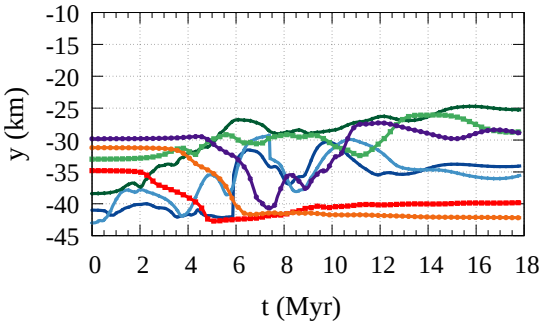


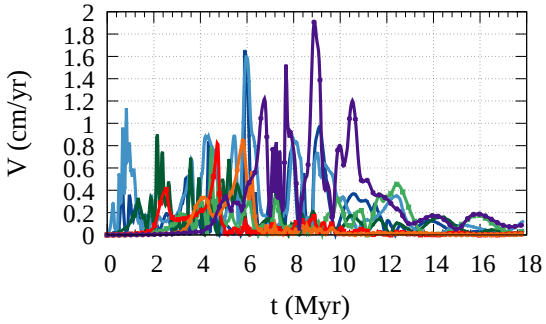
FIGURE 3.4.9 – Influence de la rhéologie des fluides sur la dynamique des inclusions (fluides non-newtoniens suivant la loi 3.12) : (a) $\tilde{\mu} = \mu_{PF}$, cas $I_1M_0H_{10}$; (b) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$, cas $I_1M_0H_{11}$; (c) comme (b) mais la hauteur des inclusions est $h = 35\ km$, cas $I_1M_0H_{23}$; (d) comme (b) mais $\mu_1^0 = 3.3\mu_2^0 = \mu_3^0/3.3$; (e) $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$, avec $\dot{\varepsilon} = 10^{-14}\ s^{-1}$, cas $I_1M_0H_{13}$. Afin d'identifier plus facilement les inclusions, celles-ci ont été colorées dans la partie droite du système (en blanc pour les inclusions légères, en noir pour les lourdes) (détails des paramètres cf. Tab. 3.4.5). Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentant la température.



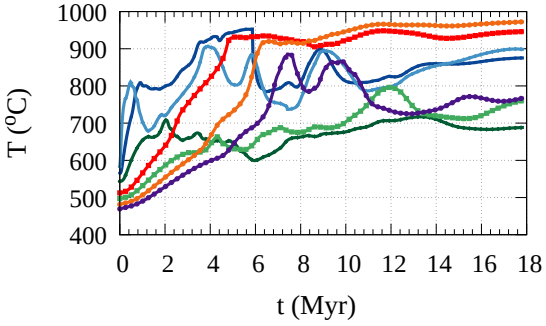
(a) Position x, y des traceurs. Le carré noir indique la position initiale



(b) Position verticale



(c) Magnitude des vitesses



(d) Température

FIGURE 3.4.10 – Évolution temporelle de la (a) position (x, y), (b) profondeur, (c) vitesse et (d) température de sept traceurs initialement placés dans la région $0 \leqslant x \leqslant 50\ km$, $-45 \leqslant y \leqslant -25\ km$ (cas $I_1M_0H_{11}$).

de s'élever sous forme de goutte. Dans le cas présent où la viscosité est indépendante de $\dot{\varepsilon}$, la convection ne se déclenche pas car la viscosité ne diminue pas autant que dans le cas $I_1M_0H_{11}$, dans lequel la déformation locale permettait de faire baisser encore la viscosité. Le taux de déformation joue donc un rôle majeur dans le déclenchement de la convection.

d) Impact des inclusions sur la convection

Les différents tests effectués permettent de tirer des conclusions sur l'interaction inclusions-convection. Nous avons tracé figure 3.4.11 les vitesses verticales moyennes de l'écoulement au cours du temps pour différents cas contrastés en incluant les deux cas limites d'un système thermique sans inclusions ($I_0M_0H_0$, violet clair) et d'un système sans chauffage basal avec seulement des inclusions (I_1M_00, rose pâle). Les vitesses aux temps courts sont généralement liées aux déplacements des inclusions. Aux temps longs, c'est une vitesse convective qui apparaît si la convection se développe.

Le première observation que l'on peut faire est que le déclenchement de la convection est favorisé par la présence des inclusions. En effet pour tous les cas présentés dans la figure 3.4.11 pour lesquels il y a des inclusions et une convection observée, cette dernière apparaît vers $t \approx 0.3 - 0.5\ Ma$ (courbes orange, verte et bleue). En l'absence d'inclusion, la convection

apparaît vers $t \approx 1.5\ Ma$ (courbe violette claire).

La seconde observation que l'on peut faire est que la convection est moins 'vigoureuse' en présence des inclusions. En effet, pour $t \geq 2\ Ma$, c'est-à-dire quand la convection est établie, la vitesse moyenne verticale $|U_y| \approx 8 - 10\ cm.an^{-1}$ sans inclusion (courbe violet clair), puis chute à $|U_y| \approx 7 - 8\ cm.an^{-1}$ quand il y a initialement une couche d'inclusions d'épaisseur $h = 7\ km$ au fond (courbe verte) ; $|U_y| \approx 3\ cm.an^{-1}$ quand la couche d'inclusions a une épaisseur $h = 20\ km$ (soit plus de la moitié du domaine, courbe bleue) ; enfin $|U_y| \approx 1\ cm.an^{-1}$ lorsque la totalité du domaine contient des inclusions (courbe violet foncé). Dans ce dernier cas, il n'y a pas de convection et la dynamique est équivalente à un cas sans chauffage (courbe rose).

Cette inhibition de la convection par les particules est due en grande partie à la différence de flottabilité entre celles-ci et le milieu ambiant (MGE). Cette différence crée des sources locales de quantité de mouvement à 'petite' échelle (de l'ordre du rayon r des inclusions) qui perturbent et finalement ralentissent le développement des panaches thermiques de plus grande échelle (de l'ordre de la hauteur du domaine H). Ceci est confirmé par le fait que lorsqu'on retire les inclusions lourdes du système, la vitesse moyenne de convection devient $|U_y| \approx 5\ cm.an^{-1}$ ce qui est supérieur à la valeur trouvée dans le cas avec inclusions lourdes et légères ($|U_y| \approx 3\ cm.an^{-1}$), mais qui reste sensiblement inférieur à la vitesse sans inclusion ($|U_y| \approx 8 - 10\ cm.an^{-1}$). La présence d'hétérogénéités spatiales de 'petite' échelle (ou leur apparition...) peut donc contribuer à la réduction de la convection, jusqu'à éventuellement la supprimer.

3.4.3 Conclusion concernant les inclusions seules

Nous avons vu dans le chapitre 2 que des dômes imbriqués (polydiapirs) peuvent se former par instabilité de Rayleigh-Taylor dans un système à 3 couches à partir du bas du domaine. Ces 'sous-dômes' ont une taille proche de la longueur d'onde théorique de l'instabilité. Cependant, nous avons aussi observé que de telles structures ne sont pas préservées dès lors que la convection se développe : de petite taille (kilométrique), elles sont 'lessivées'. L'introduction d'hétérogénéités spatiales (inclusions) permet de capturer des structures de petite échelle qui d'une part modifient la convection et d'autre part se forment pendant ou après l'épisode convectif, et qui peuvent être préservées à faible profondeur.

Dans le cas de fluides newtoniens, les sous-dômes formés à faible profondeur proviennent de la ségrégation puis déstabilisation d'une couche d'inclusions légères qui s'imbriquent et s'élèvent sous forme de diapir. Les diapirs sont formés d'inclusions blanches et de MGE et sont très hétérogènes. Cette hétérogénéité de composition des sous-dômes est foncièrement différente de l'homogénéité de composition des sous-dômes observés dans les cas multi-couches étudiés au chapitre 2. Toujours dans le cas de fluides newtoniens, les résultats obtenus ici montrent de plus que les inclusions ont impact significatif sur la convection, d'une part en favorisant le

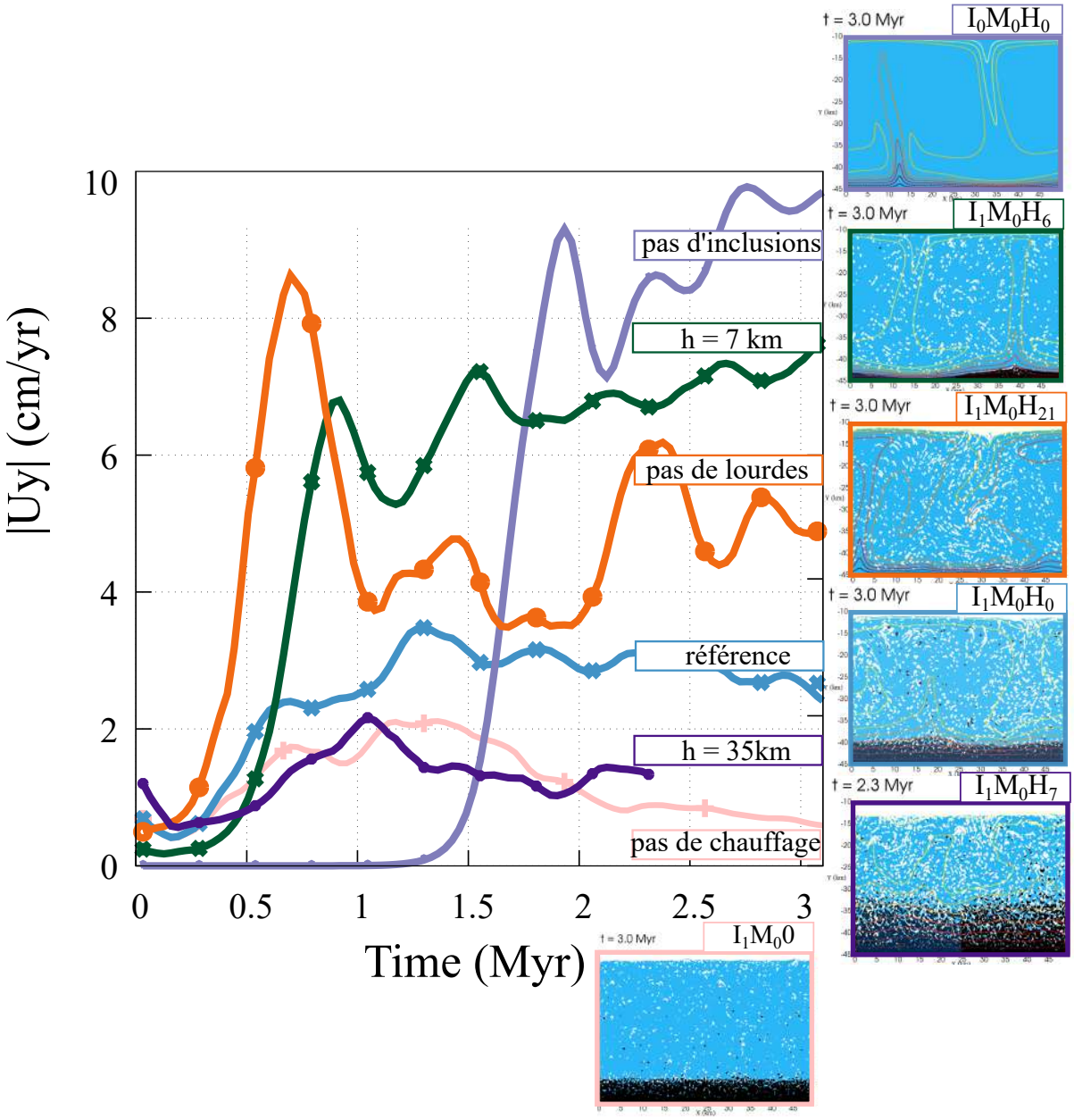


FIGURE 3.4.11 – Évolution temporelle de la vitesse verticale moyenne dans des systèmes contenant des inclusions. A droite, clichés de l'écoulement correspondant aux courbes à $t = 3Ma$ (le détail des paramètres est donné dans les tableaux 3.4.4 et 3.4.5).

déclenchement de celle-ci, d'autre part en réduisant la vigueur de la convection, allant parfois jusqu'à l'inhiber.

Dans le cas de fluides non-newtoniens, il faut ici distinguer les configurations où la viscosité dépend de la température uniquement de ceux où elle dépend de la température et du taux de déformation. En effet, le caractère rhéo-fluidifiant des fluides (dépendance au taux de déformation) accélère le démarrage de la convection et modifie la forme des structures diapiriques. Lorsque la viscosité des phases ne dépend que de la température, la dynamique peut

être expliquée schématiquement par la valeur locale de la viscosité. Typiquement, si celle-ci est relativement faible ($\sim 10^{17}\ Pa.s$) soit car le chauffage est suffisamment intense, soit car la viscosité du MGE est initialement 'basse', elle favorise le déplacement des inclusions, un déclenchement rapide de la convection et un lessivage des structures formées. Au contraire, si elle est grande ($\sim 10^{19}\ Pa.s$), les inclusions se déplacent très lentement, voire pas du tout et la convection est inhibée.

Lorsque la viscosité des phases dépend à la fois de la température et du taux de déformation, la dynamique du système est plus riche, car le déplacement des inclusions, même faible, engendre des sources locales de déformation et donc une chute de la viscosité. Ceci favorise d'autant plus le déplacement des inclusions ainsi que l'apparition de la convection. A l'inverse, lorsque les inclusions notamment légères arrivent dans une zone plus froide (et donc plus visqueuse), elle ralentissent, ce qui diminue le taux déformation, augmente la viscosité et accentue le ralentissement. Dans ce cas, la valeur spécifique de l'épaisseur initiale de la couche d'inclusions joue un rôle important, car toutes les inclusions sont soumises à leur flottabilité et participent à la diminution locale de la viscosité.

Un premier scénario se dessine ici pour expliquer la formation des dômes de Naxos. Les paramètres sont ceux du cas $I_1M_0H_{23}$, composé d'une couche d'inclusions sur tout le domaine avec une rhéologie dépendante du taux de déformation et de la température. Nous développons cette configuration dans la section 3.6.2, a). La diminution de la viscosité par le moyen d'une rhéologie non linéaire peut rendre compte au premier ordre le l'influence de la fusion partielle. Nous avons vu dans la section 3.3 que celle-ci peut également être approximée par deux rhéologies dont l'usage dépend d'un seuil (de fusion partielle) et par une interpolation entre deux densités ρ^{S0} et ρ^{L0}. C'est pourquoi la section suivante présente des simulations combinant la fusion partielle (approximée avec un seuil de fusion partielle) et inclusions.

3.5 Association de la fusion partielle et des inclusions

Nous avons vu que la prise en compte de la fusion partielle seule ne permet pas de reproduire des dômes imbriqués à faible profondeur, alors que l'ajout d'inclusions le permet. Cependant, il est nécessaire de considérer la fusion partielle dans la croûte profonde chauffée à plus de 800^oC. C'est pourquoi il est intéressant de combiner à la fois fusion partielle (telle qu'envisagée section 3.3) et inclusions. Pour rappel, on considère trois fluides : le milieu global équivalent (MGE) qui correspond au fluide 1, les inclusions légères au fluide 2, les inclusions lourdes au fluide 3.

Dans cette partie, les inclusions ne sont pas initialement différentes du MGE. C'est seulement une fois que la température a dépassé celle du front de fusion qu'elles s'activent véritablement et adoptent alors des densité et viscosité différentes du MGE (voir la section 3.2.2). Ce choix est une hypothèse forte que nous faisons. Ici, la viscosité du système suit l'équation

(3.12) que nous rappelons ici :

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_{NF} = 0.25 \times 10^6 (0.75A)^{-\frac{1}{n}} (\max(\dot{\varepsilon}_{min}, \dot{\varepsilon}))^{\frac{1}{n}-1} \cdot exp(\frac{Q}{nRT}) & \text{si } M < M_S \\ \mu_{PF} = \sum_{i=1}^{3} C_i \mu_i^0 \cdot exp\left[2.5 + \left(\frac{1-M}{M}\right)^{0.48} (1-M)\right] & \text{si } M \geq M_S \end{cases}$$

avec, dans cette section, $\mu_1^0 = 10 \times \mu_2^0 = \mu_3^0/10$. La densité du système suit le modèle (3.10)-(3.11) qui peut se réécrire $\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{3} C_i \times [\rho_i^{S0}(1-M) + \rho_i^{L0} M] \times [1 - \alpha(T - T_{ref})]$, où ρ_i^{S0} est la masse volumique de la roche non-fondue dans la phase i, ρ_i^{L0} celle de la roche fondue de cette même phase et T_{ref} une température de référence pour la loi de Boussinesq (dans ce chapitre, $T_{ref} = 300^oC$). La masse volumique ρ^{L0} est différente pour chaque fluide. Ceci est une alternative à considérer des températures de solidus et de liquidus différentes pour chaque fluide (comme utilisé par d'autres auteurs tels Katz et Weatherley [2012]).

Nous décrivons tout d'abord le cas avec fusion partielle et inclusions, que nous pouvons comparer au cas avec fusion partielle mais sans inclusions. Ensuite, de façon à représenter au mieux le cas de Naxos, nous faisons varier certains paramètres. Nous montrons en particulier que combiner inclusions et fusion partielle permet de décrire les structures observées à Naxos à la condition d'imposer au bout d'un certain temps un refroidissement du système, dont nous étudions les effets en fin de section.

3.5.1 Résultats du cas de référence $I_1M_1H_0$

Le cas de référence combinant fusion partielle et inclusions, noté $I_1M_1H_0$, est d'abord considéré.

Les paramètres de ce cas sont présentés dans le tableau 3.5.6. Le domaine de calcul, le maillage, les conditions initiales et les conditions limites sont identiques au cas $I_0M_1H_0$ (voir section 3.3.1).

Paramètre	i	α	T_{ref}	ρ^{S0}	ρ^{L0}	A	Q	n	H_r	μ_0	r	M_S
Unité		K^{-1}	K	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$Pa^{-n}.s^{-1}$	$kJ.mol^{-1}$		$\mu W.m^3$	$Pa.s$	m	
MGE	1	3×10^{-5}	573	2800	2700	3.2×10^{-4}	154	2.3	1.75	5×10^{15}		
Légères	2	3×10^{-5}	573	2800	2600	3.2×10^{-4}	154	2.3	2	5×10^{14}	300	0.3
Lourdes	3	3×10^{-5}	573	2800	2900	3.2×10^{-4}	154	2.3	0.9	5×10^{16}	300	

Tableau 3.5.6 – Paramètres du cas de référence $I_1M_1H_0$ avec fusion partielle et inclusions.

Les différentes étapes de l'écoulement sont illustrées sur la figure 3.5.1c. Dans un premier temps ($t \leq 1.2\ Ma$), le régime diffusif se met en place (la vitesse moyenne est nulle et la position du front de fusion évolue comme la racine carrée du temps) tandis que les inclusions ségrégent : les inclusions légères s'élèvent tandis que les lourdes descendent. Pour $2 \leq t \leq 8\ Ma$, un premier régime convectif se développe pour former des panaches thermiques ($\sim 15\ km$) entre 45 et 30 km de profondeur (la position du front de fusion évolue linéairement avec le temps). Pour $t \geq 8\ Ma$, ces panaches fusionnent pour former des cellules convectives de largeur 50 km ($2^{ème}$ régime convectif). Notons que cette transition entre les régimes convectifs est difficile à

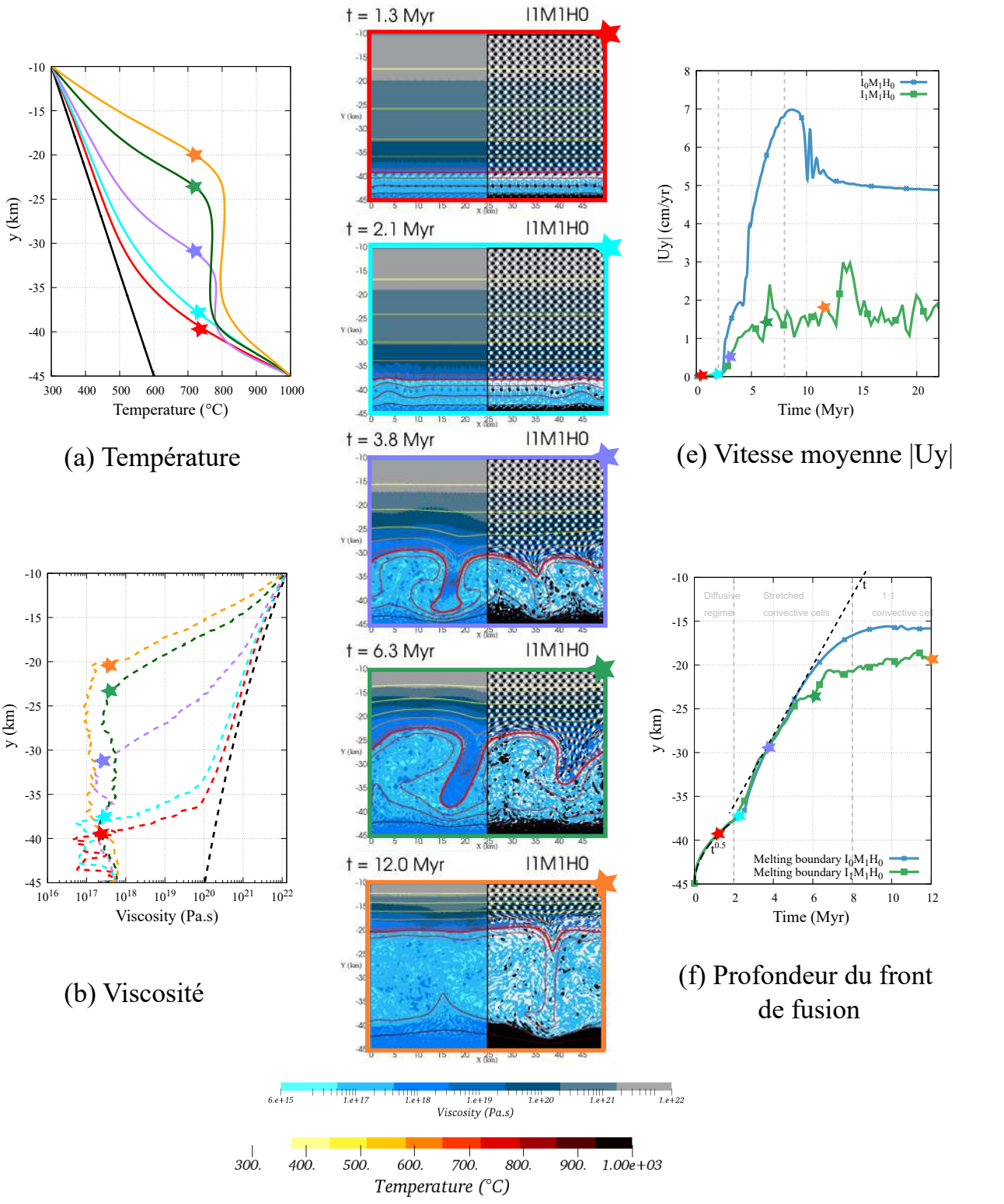
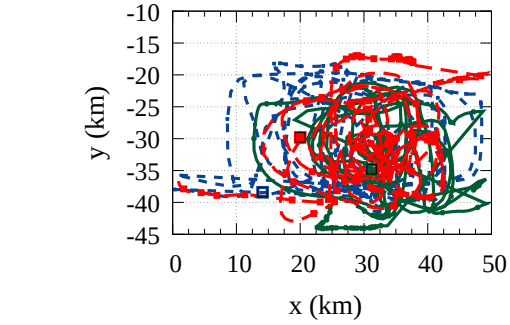


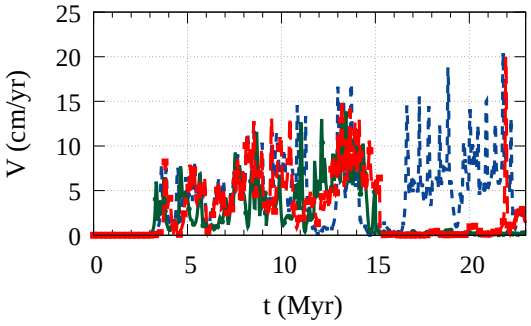
FIGURE 3.5.1 – Dynamique de l'écoulement pour le cas de référence $I_1M_1H_0$. a-b) Profils de température et de viscosité moyennes, pour cinq instants (la courbe noire représente la condition initiale). La position du front de fusion est représentée par une étoile. c) Clichés de l'écoulement. La courbe rouge représente la fraction de melt $M = M_S$. Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentent la température. Afin d'identifier plus facilement les inclusions, celles-ci ont été colorées dans la partie droite du système (en blanc pour les inclusions légères, en noir pour les lourdes). e-f) Évolution temporelle de la valeur absolue de la vitesse verticale moyenne et de la position moyenne du front de fusion. Pour comparaison, les résultats obtenus dans le cas $I_0M_1H_0$ sont tracés. Le régime thermique est diffusif jusqu'à 2.4 Ma.

déterminer au regard de la vitesse moyenne qui oscille et augmente de manière continue, sans qu'un saut de vitesse soit observé (figure 3.5.1d).

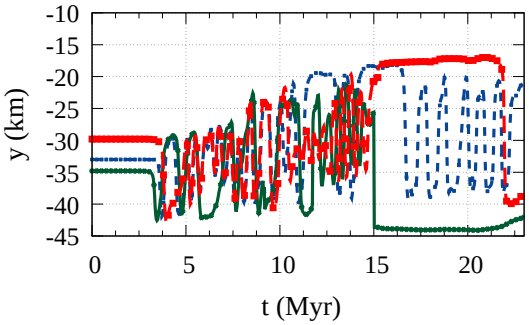
Des traceurs placés initialement en profondeur ($y < -30\ km$) montrent une période des cycles convectifs de l'ordre du million d'année, des vitesses d'ascension de l'ordre de 1-5 cm/an et des variations de température comprises entre 20 et 100^oC (figure 3.5.2).



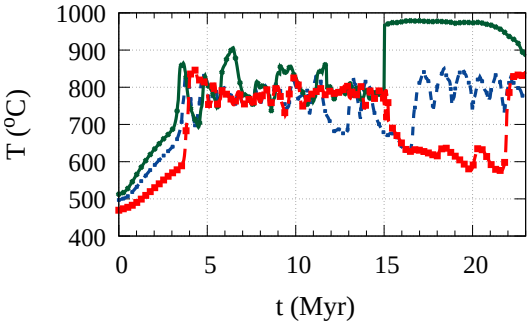
(a) Position x, y des traceurs. Les carrés noirs indiquent la position initiale



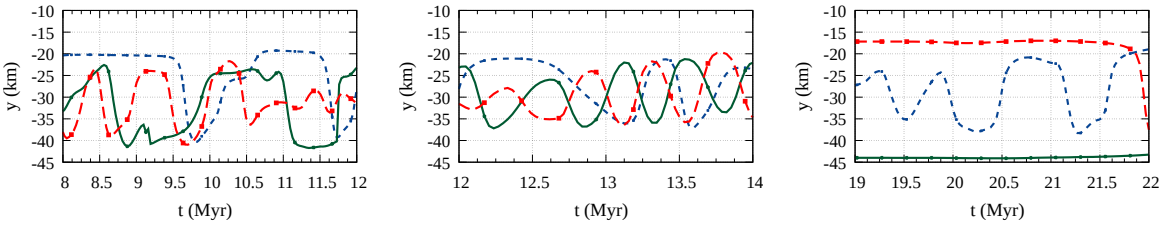
(c) Magnitude des vitesses



(b) Position verticale



(d) Température



(e) Zoom de la figure b)

FIGURE 3.5.2 – Évolution temporelle de la position (a,b), de la vitesse (c) et de la température (d) de trois traceurs initialement positionnés en $(x, y) = (14.4, -38.4)$, $(31.2, -34.8)$, $(34.4, -42)$ pour le cas $I_1M_1H_0$. On observe des cycles de période $\tau < 1\ Ma$ entre 4 et 15 Ma ($\sim$ 10 cycles). (e) Zomms de la figure (b).

La figure 3.5.1f compare l'évolution de la position du front de fusion au cours du temps pour les cas $I_0M_1H_0$ et $I_1M_1H_0$ (fusion partielle sans inclusions et fusion partielle avec inclusions). Le régime diffusif est identique pour les deux cas : la présence des inclusions n'affectent pas la diffusion de la chaleur. La transition entre les régimes diffusif et convectif se produit dans les deux cas autour de $\sim$ 2 Ma, même si elle est moins franche pour le cas avec inclusions. Cela signifie que le nombre de Rayleigh critique est le même dans les deux cas.

L'évolution des fronts de fusion des deux cas est très proche jusqu'à $t \sim 5\ Ma$. Trois

panaches se forment dans le premier régime convectif contre cinq pour le cas sans inclusions. La convection se stabilise à -19 km de profondeur pour $I_1M_1H_0$ contre -15.5 km pour $I_0M_1H_0$, l'épaisseur de couche convective est plus faible pour le cas avec inclusions car les inclusions noires ont formé une couche visqueuse entre -45 et -40 km. Les vitesses verticales moyennes sont deux à trois fois plus faibles dans le cas avec inclusions (1.8 $cm.an^{-1}$ contre 5 $cm.an^{-1}$, voir Fig. 3.5.1d).

L'ajout d'inclusions a donc pour conséquence de diminuer la vitesse moyenne de convection, les vitesses maximales et l'épaisseur de la couche convective mais augmente légèrement les périodes des cycles convectifs (1 Ma contre 0.5 Ma pour le cas sans inclusions).

3.5.2 Étude paramétrique

Nous varions dans cette partie les paramètres liés à la viscosité (μ_i^0 et A), à la densité des inclusions en phase partiellement fondue (ρ_2^{L0} et ρ_3^{L0}), au taux de production de chaleur des inclusions blanches (H_r), au rayon (r) et à l'épaisseur de la couche d'inclusions (h). Les paramètres des différents cas sont présentés dans le tableau 3.5.7. Nous réalisons également une analyse de sensibilité au maillage présentée en annexe A.6.2.

Au final, nous faisons varier ces paramètres dans la gamme suivante :

— Viscosité des roches partiellement fondues dans la phase MGE (Eq. 3.12) : $5 \times 10^{15} \leq \mu_1^0 \leq 5 \times 10^{17}\ Pa.s$,

— Densité des inclusions légères : $2500 \leq \rho_2^{L0} \leq 2600\ kg.m^{-3}$,

— Taux de production de chaleur interne : $0 \leq H_r \leq 10\ W.kg^{-1}$,

— Rayon des inclusions : $300 \leq r \leq 1800\ m$,

— Épaisseur de la couche d'inclusions : $7 \leq h \leq 35\ km$,

— Préfacteur de la viscosité des roches non-fondues (Eq. 3.12) : $1.6 \times 10^{-6} \leq A \leq 3.2 \times 10^{-4}\ Pa^{-2.3}.s^{-1}$,

— Rapport de viscosité entre le MGE et les inclusions : $10 \leq \frac{\mu_1^0}{\mu_2^0} = \frac{\mu_3^0}{\mu_1^0} \leq 1000$.

L'ensemble des résultats est présenté tableau 3.5.8. Nous considérons uniquement ici le dernier régime de convection pour comparer les cas car les différents régimes convectifs sont difficiles à distinguer. Pour l'ensemble des cas, le démarrage de la convection est compris entre $2.5 < t_{conv} < 12.5\ Ma$. Plus les fluides sont visqueux, plus le démarrage est retardé mais il est facilité lorsque les inclusions légères ont une densité moins élevée et un taux de production de chaleur plus élevé. La période des cycles convectifs est comprise entre $0.75 < \tau < 2\ Ma$. Les vitesses maximales sont comprises entre $2.8 < v_{max} < 20\ cm.an^{-1}$ et la vitesse verticale moyenne se situe autour de 1.5 $cm.an^{-1}$ (voir la figure 3.5.3). Le cas présentant les vitesses les plus faibles (moyennes et maximales) est le cas où la viscosité des roches non fondues, μ_{NF}, est grande ($I_1M_1H_7$). Le cas présentant les vitesses les plus grandes est le cas $I_1M_1H_0$ où la viscosité des roches partiellement fondues est la plus faible ($\mu_1^0 = 5 \times 10^{15}\ Pa.s$).

Cas		μ_i^0 $Pa.s$	Densité ρ_i^{L0} $kg.m^{-3}$	Production H_r $W.kg^{-1}$	Rayon r m	Epaisseur h km	A $Pa^{-n}.s^{-1}$
$I_1M_1H_0$ (référence)	1	5×10^{15}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	5×10^{14}	2600	2			
	3	5×10^{16}	2900	0.9			
$I_1M_1H_1$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2600	2			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_2$	1	5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	5×10^{15}	2600	2			
	3	5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_3$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2500	2			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_4$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2500	10			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_5$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	7	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2500	10			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_6$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	600	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2500	10			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_7$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	1.6×10^{-6}
	2	2.5×10^{15}	2500	10			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
I_1M_10	1	5×10^{15}	2700	0	300	35	3.2×10^{-4}
	2	5×10^{14}	2600	0			
	3	5×10^{16}	2900	0			
$I_1M_1H_8$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{14}	2600	10			
	3	2.5×10^{18}	2900	0.9			
$I_1M_1H_9$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{13}	2600	10			
	3	2.5×10^{19}	2900	0.9			
$I_1M_1H_{10}$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75	300	50	3.2×10^{-4}
	2	2.5×10^{15}	2500	10			
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_6 - mesh$ (maillage 250×175)	1	5×10^{16}	2700	1.75	600	35	3.2×10^{-4}
	2	5×10^{15}	2500	10			
	3	5×10^{17}	2900	0.9			
$I_1M_1H_6 - mesh2$ (maillage 988×700)	1	5×10^{16}	2700	1.75	600	35	3.2×10^{-4}
	2	5×10^{15}	2500	10			
	3	5×10^{17}	2900	0.9			

TABLEAU 3.5.7 – Paramètres des différents cas de l'étude paramétrique (simulations avec inclusions et fusion partielle) : les paramètres qui diffèrent du cas de référence sont colorés en bleu. Lorsque ce n'est pas spécifié, le domaine de calcul est discrétisé avec 494×350 cellules. Les noms des cas sont des liens vers une vidéo de la simulation.

Cas	Variation	Démarrage de la convection t_{conv} Ma	Période des cycles τ Ma	Taille de la cellule convective $l \times h$ km	Différence de température ΔT K	Vitesse maximale v_{max} $cm.an^{-1}$
$I_1M_1H_0$	Référence	2.5	< 1	20×20	200	20
$I_1M_1H_1$	μ_i^0	9.5	< 1	20×20	100	10.5
$I_1M_1H_2$	μ_i^0	12.5	< 2	15×20	150	9.5
$I_1M_1H_3$	ρ	9.5	1.5	15×25	80	12
$I_1M_1H_4$	$\rho; H_r$	5.5	< 2	25×25	250	12
$I_1M_1H_5$	$\rho; H_r; h$	6	1.5	10×25	150	10
$I_1M_1H_6$	$\rho; H_r; r$	4	1.3	20×25	200	11.5
$I_1M_1H_7$	$\rho; H_r; A$	6	2	10×15	50	2.8
I_1M_10	H_r	4	0.75	20×20	50	13.5
$I_1M_1H_8$	$\mu_2^0; \mu_3^0$	8	2	12×17	50	8.5
$I_1M_1H_9$	$\mu_2^0; \mu_3^0$	Pas de convection				
$I_1M_1H_{10}$	$\rho; H_r; H$	4.5	1.7	30×35	100	12
$I_1M_1H_6 - mesh$	mesh	4	< 2	10×15	150	11
$I_1M_1H_6 - mesh2$	mesh	4	< 2	10×15	200	11.5

TABLEAU 3.5.8 – Caractéristiques du dernier régime convectif pour les différents cas présentés dans le tableau 3.5.7. Les clichés correspondants aux cas sont présentés en annexe A.3.

Notons que les caractéristiques présentées dans le tableau 3.5.8 correspondent à des enregistrements de traceurs. Celles-ci dépendent donc du choix et du nombre de traceurs et ne reflètent qu'une partie de l'écoulement. Néanmoins, elles varient assez peu selon les différents paramètres utilisés. La densité des inclusions blanches, leur taux de production de chaleur interne, la quantité d'inclusions, ont finalement peu d'impact sur les caractéristiques de la convection.

Les clichés des écoulements, à $t = 17\ Ma$, représentatifs des différentes dynamiques observées sont présentés sur la figure 3.5.4. Les inclusions légères sont entraînées par la convection dans tous les cas sauf deux : lorsque la viscosité des roches non fondues est de $10^{24}\ Pa.s$ (viscosité maximale) à -10 km ($I_1M_1H_7$) et lorsque le contraste de viscosité entre le MGE et les inclusions est de 1000 ($I_1M_1H_9$). Ces cas sont également les seuls qui font apparaître des structures d'inclusions légères à une profondeur intermédiaire.

Dans le cas $I_1M_1H_7$ (Fig. 3.5.4 milieu), la couche supérieure est visqueuse, ce qui a deux conséquences : i) la convection est lente donc les inclusions blanches s'extraient de celle-ci, ii) les inclusions blanches s'accumulent entre -21 et -25 km sous forme de couche horizontale car la viscosité à cet endroit est trop élevée ($\sim 10^{19}\ Pa.$) pour leur permettre de poursuivre leur ascension. Le cas $I_1M_1H_7$ est intéressant puisqu'il combine à la fois des cycles convectifs et une formation de couche d'inclusions légères à faible profondeur.

Dans le cas $I_1M_1H_9$ (Fig. 3.5.4 droite), les inclusions légères forment des dômes imbriqués d'une taille de 5 km, les inclusions noires ne coalescent pas car elles sont trop visqueuses ($5 \times$

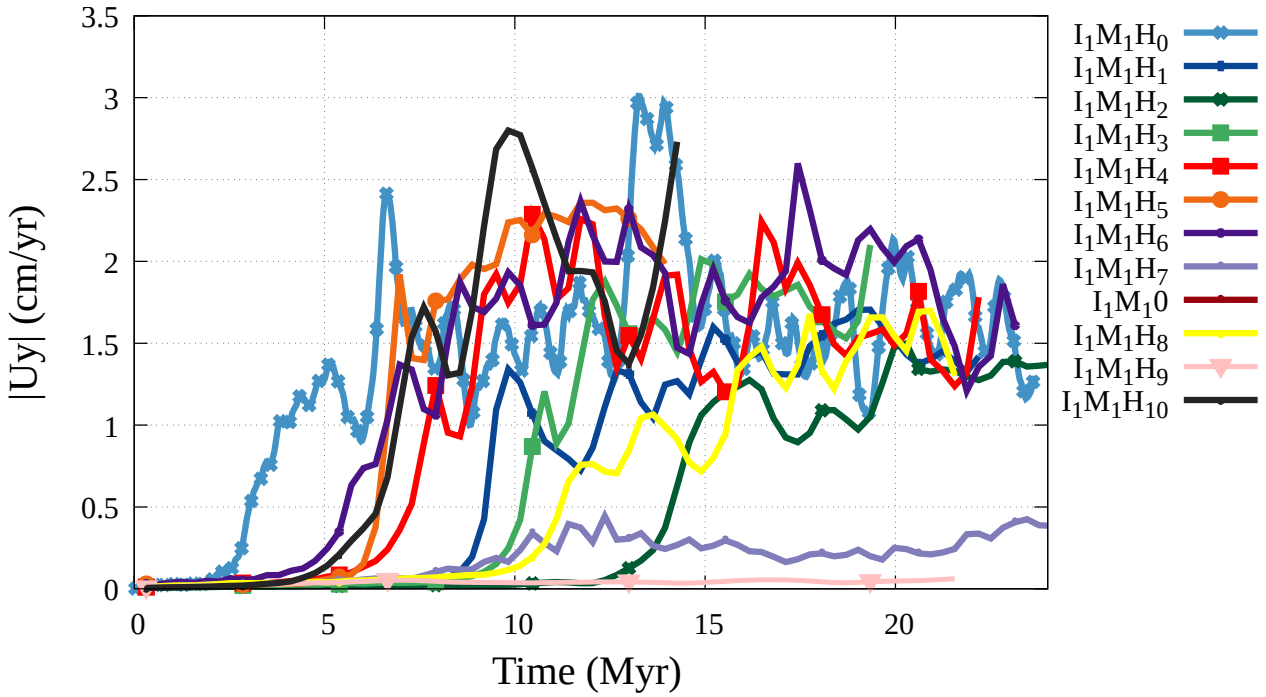


FIGURE 3.5.3 – Vitesse verticale moyenne dans tout le domaine au cours du temps pour les cas avec fusion partielle et inclusions (voir Tab. 3.5.7).

10^{19} $Pa.s$) et sédimentent en conservant leur volume. Ces deux cas ne peuvent pas correspondre à Naxos car dans le premier cas, les structures se figent à une trop grande profondeur et dans le deuxième il n'y a pas de cycle convectif.

Rôle de la taille initiale des hétérogénéités

Nous regardons ici l'influence de la taille et de la répartition des inclusions sur la dynamique des systèmes avec fusion partielle et inclusions. L'ensemble des cas est présenté dans le tableau 3.5.9.

Cas	$I_1M_1H_{12}$	$I_1M_1H_4$	$I_1M_1H_6$	$I_1M_1H_{11}$	$I_1M_1H_{16}$	$I_1M_1H_{13}$	$I_1M_1H_{15}$
r (m)	150	300	600	900	1200	$300 \leq r \leq 1800$	couche 7 km

TABLEAU 3.5.9 – Cas testant différentes tailles d'inclusions. Les autres paramètres sont ceux du cas $I_1M_1H_4$ (Tab. 3.5.7). Le maillage utilisé est de 494×350 cellules pour tous les cas sauf pour $I_1M_1H_{12}$ où le maillage est de 988×700 cellules.

Nous faisons d'abord varier le rayon des inclusions entre $150 \leq r \leq 1200$ m (cas $I_1M_1H_{4;6;11;12;16}$). De plus, nous avons réalisé un cas ($I_1M_1H_{13}$) où le rayon des inclusions est défini aléatoirement entre $150 \leq r \leq 1800$ m et les inclusions sont également disposées aléatoirement. Enfin, nous avons aussi testé un cas où ces hétérogénéités compositionnelles sont sous forme de couches horizontales (comme dans le chapitre 2), d'épaisseur 7 km et où la couche légère est initialement située sous la couche lourde.

L'ensemble des résultats, présentés sur la figure 3.5.5, permet de distinguer deux types de comportement selon la taille des inclusions :

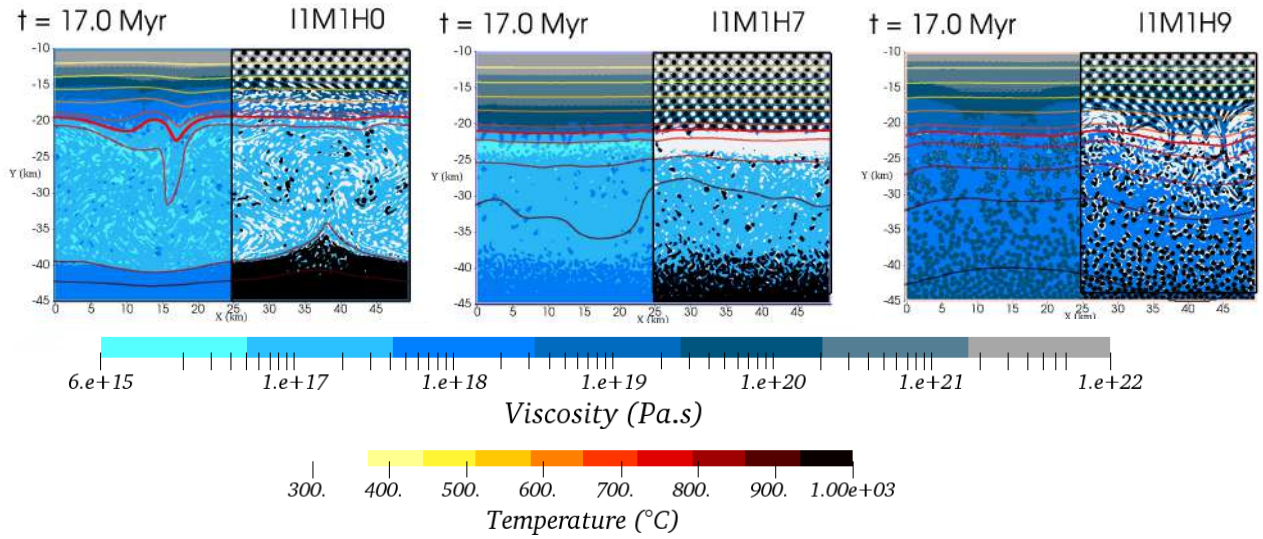


FIGURE 3.5.4 – Clichés des cas $I_1M_1H_0, H_6, H_7$ à $t = 17\ Ma$. La courbe rouge représente la fraction de melt $M = M_S$. Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentent la température. Afin d'identifier plus facilement les inclusions, celles-ci ont été colorées dans la partie droite du système (en blanc pour les inclusions légères, en noir pour les lourdes). Le cas $I_1M_1H_0$ est représentatif des cas H_1 à H_6 et des cas H_8 et H_{10} puisque tous ces cas présentent une cellule convective unique de la taille du système. Le cas $I_1M_1H_7$ montre que les inclusions blanches forment une couche au dessus de cellules convectives de faibles vitesses, car la couche supérieure est très visqueuse (jusqu'à $10^{24}\ Pa.s$). Le cas $I_1M_1H_9$ montre que la viscosité des inclusions noires est tellement élevée ($\sim 10^{19}\ Pa.s$) que cellesci ne coalescent pas et inhibent le développement de la convection.

— Lorsque $r < 600\ m$, les inclusions ne passent pas au dessus de la profondeur du front du fusion, elles suivent le mouvement des isothermes : elles ne peuvent s'élever dans un milieu où la viscosité $\lesssim 10^{18}\ Pa.s$. La coalescence de structures ne forme pas de poches de taille supérieure à 2 km. La viscosité est de $10^{17}\ Pa.s$ dans l'épaisseur convective. L'élévation des inclusions légères est contrainte par le déplacement des isothermes : elles ne peuvent s'élever avant que la convection ne se déclenche.

— Lorsque $r \geq 600\ m$, les inclusions ont une taille suffisante pour dépasser la profondeur du front de fusion et s'élever dans un milieu de viscosité $\mu \sim 10^{18}\ Pa.s$. Le mouvement des inclusions déplace les isothermes, ce qui déclenche la convection.

Ces deux comportements aboutissent au même résultat : la convection se déclenche avant que les structures légères n'atteignent une faible profondeur et se figent, et donc elle détruit toutes les structures formées quelque soit leur taille. Rappelons que ces comportements ne peuvent se manifester que grâce à une rhéologie qui dépend de M_S et de la température et parce que nos inclusions peuvent se déformer et se désagréger.

Nous concluons que dans un système convectif, quelque soit la taille et la forme initiales des hétérogénéités, celles-ci sont détruites par la convection.

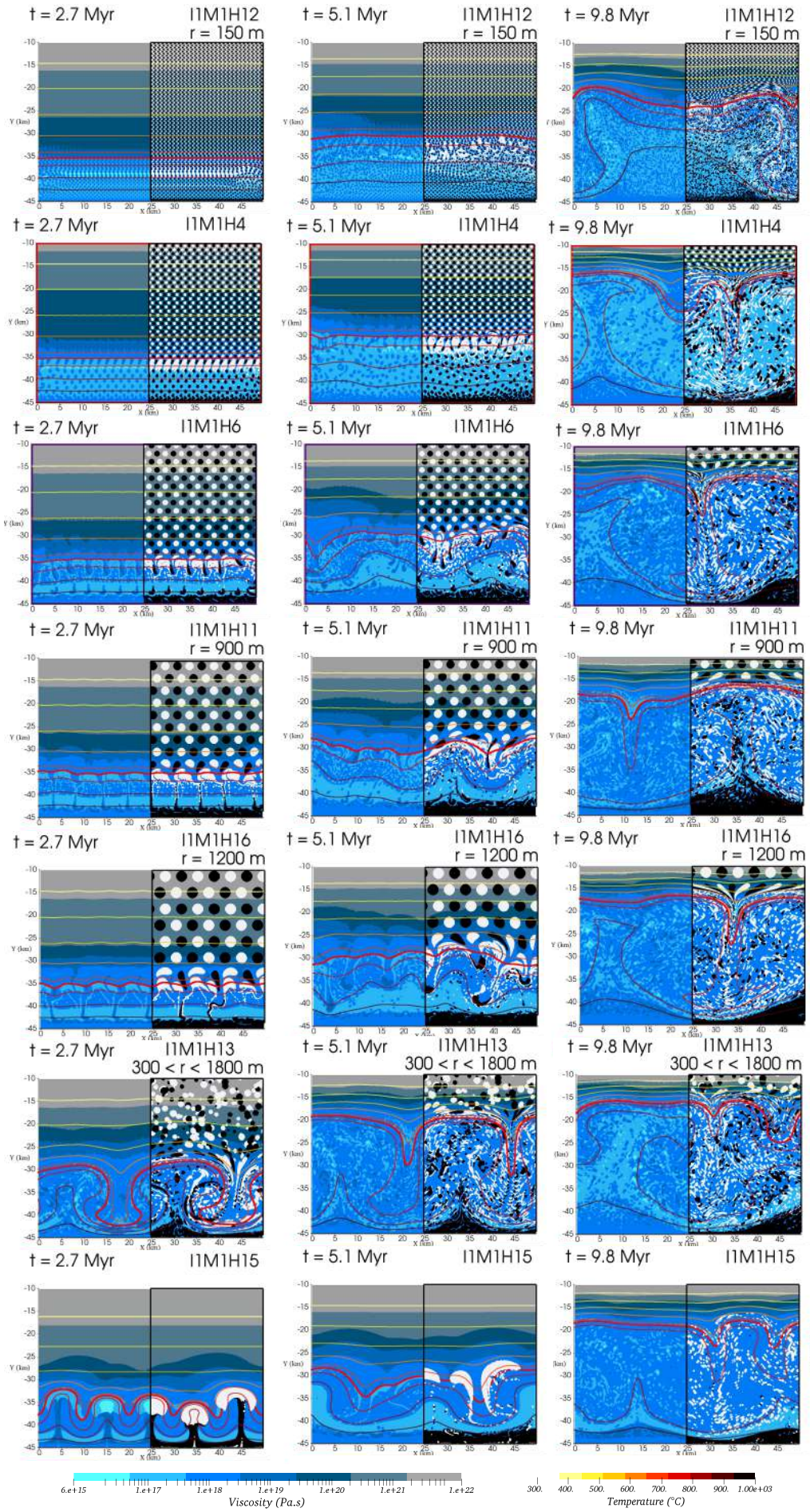


FIGURE 3.5.5 – Effet de la taille des inclusions, $150 \leq r \leq 1800\ m$. Les propriétés physiques de chaque cas sont données dans les tableaux 3.5.7 et 3.5.9.

3.5.3 Refroidissement

Au regard de tous les cas présentés dans la section précédente, on observe que les caractéristiques de la convection sont semblables à celles de Naxos (un cycle d'une période de $\sim 2\ Ma$). Cependant, les structures ne se figent jamais et les dômes situés à faible profondeur ne sont pas préservés. Nous décidons donc d'introduire une ultime complexité, à savoir le refroidissement du système au delà d'un certain temps de convection. Ce refroidissement est modélisé par une baisse (plus ou moins progressive) de la température basale du système.

a) Caractéristiques du refroidissement

Le chauffage basal ne peut subsister indéfiniment, la croûte finit par se refroidir en fin d'orogénèse [England et Thompson, 1986a; Ueda et al., 2012]. Les modalités du refroidissement (sa vitesse et son moment de démarrage) sont difficilement déterminables à partir des données pétrologiques et géochronologiques.

Dans cette section, nous considérons le cas $I_1M_1H_6 - mesh$ où le rayon des inclusions est de 600 m, car ses résultats correspondent à des caractéristiques temporelles en accord avec Naxos et les calculs sont réalisés sur un maillage de 247×175, ce qui réduit sensiblement le temps de calcul lors du passage en 3D.

L'évolution temporelle de la température imposée à la base du système est la suivante. Initialement à $t = 0^-$, la température basale est $T_H = 600^oC$. A $t = 0^+$ elle devient $T_H^+ = 1000^oC$ et reste constante jusqu'à $t_1 = 4.4\ Ma$. Entre t_1 et $t_2 = 9.4\ Ma$, la température basale décroît linéairement jusqu'à retrouver sa température initiale, c'est-à-dire $T_H = 600^oC$ et reste à cette valeur pour $t \geq t_2$ (figure 3.5.6).

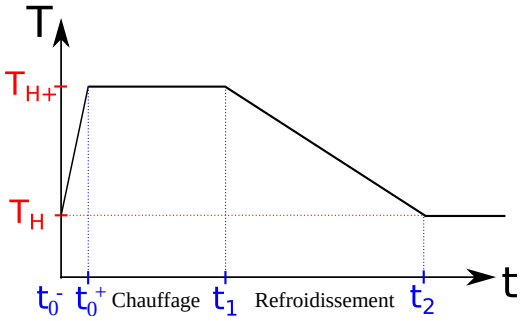


Figure 3.5.6 – Schéma de l'application des conditions limites en température en base du modèle au cours du temps t, avec t_0^+, le début du chauffage basal à température T_H^+, t_1, le début du refroidissement où la température est T_H^+, et t_2 la fin du refroidissement où la température redevient égale à la température initiale T_H.

Le choix des valeurs spécifiques de t_1 et t_2 est guidé par le fait que si l'on refroidit trop tôt, la chauffage basal n'est pas suffisant pour déclencher la convection, et au contraire si l'on refroidit trop tard et/ou trop progressivement, le système enregistre un nombre très important de cycles convectifs qui n'est plus représentatif des données de terrain. Le choix présent résulte de tests préliminaires et permet d'être en accord avec les données de la littérature, à savoir un

chauffage basal et une fusion partielle qui semblent s'arrêter au bout de 10-20 Ma [Babeyko et al., 2002] et une durée de refroidissement d'environ 10 Ma [Vanderhaeghe et al., 2003].

b) Modélisation de la densité des inclusions lors du refroidissement

Lors du chauffage du système, une partie de la roche fond et fait apparaître des hétérogénéités compositionnelles (les inclusions) dont les propriétés physiques diffèrent du milieu global équivalent. A $t \geq t_1$, le système commence à refroidir. Il est alors possible de définir plusieurs "comportements" pour les inclusions en fonction du caractère réversible ou non de leurs propriétés. Les deux configurations limites sont les suivantes :

— (A) : On considère que le système est réversible [Glazner et Miller, 1997]. La densité des inclusions, lors du refroidissement, suit alors la loi utilisée lors du chauffage, à savoir ici (3.11). Lors du refroidissement, la densité des inclusions tend vers celle du MGE et le milieu redevient homogène.

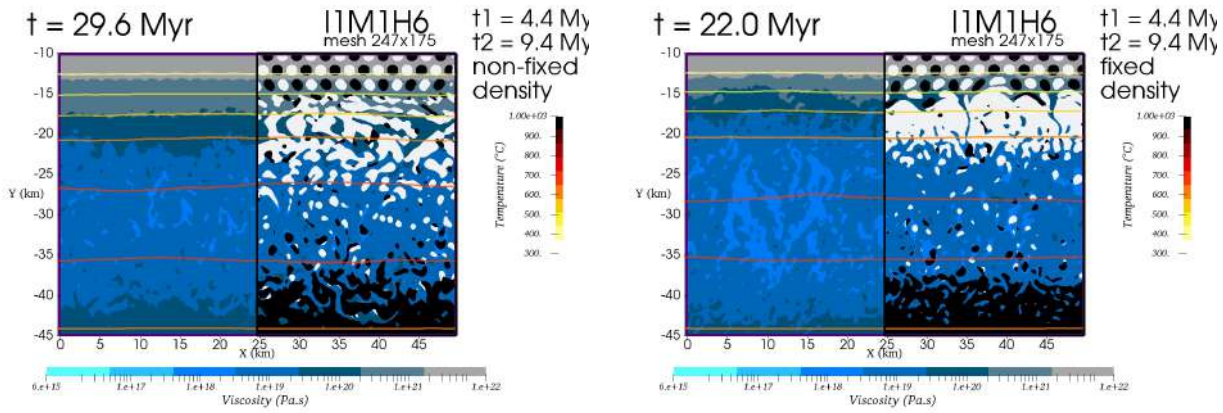
— (B) : On considère que le système une fois différencié ne peut plus redevenir homogène, et qu'il est donc irréversible [Clemens et Vielzeuf, 1987; Herzberg et al., 1983; Sparks et Huppert, 1984]. On peut dans ce cas considérer que la densité des inclusions, lors du refroidissement, devient constante et égale à sa valeur locale à $t = t_1$, au moment de l'arrêt du chauffage. Cela permet de rendre compte au premier ordre du mouvement irréversible de certains éléments lourds (Mg) et volatiles (H_2O, CO_2). La densité devient alors indépendante de M mais suit toujours l'équation d'état du fluide.

Ces deux façons de modéliser la densité des inclusions constituent deux cas extrêmes, la réalité se situe probablement entre les deux puisque l'on a pu voir dans le chapitre 1 section 3.2.2b) que la réaction de cristallisation n'est pas l'exacte opposée de la fusion, les caractéristiques de densité et viscosité à une température donnée peuvent être différentes.

Les résultats de la simulation du cas $I_1M_1H_6 - mesh$ avec refroidissement et les deux choix de modélisation de la densité des inclusions sont présentés sur les figures 3.5.7 et 3.5.8. Dans ces figures, le modèle de densité A est désigné par "non-fixed density" et le modèle B par "fixed density".

Lorsque la densité des inclusions peut revenir à sa valeur initiale lors du refroidissement (modèle A), les traceurs parcourent environ 3 cycles de convection avant de se figer et la convection perdure jusque 24 Ma. Les inclusions légères remontent et forment une couche hétérogène composée d'inclusions blanches et de MGE entre -15 et -25 km. Il faut noter que les inclusions légères ont continué à s'élever après l'arrêt de la convection car celles-ci ont emmagasiné plus de chaleur interne que le MGE et sont restées moins denses que celui-ci pendant un temps fini.

A l'inverse lorsque la densité des inclusions légères est figée (B) dès le refroidissement, celles-ci remontent pendant que la convection diminue en intensité. Le nombre de cycles parcourus par les traceurs est moindre (1 contre 3 pour le modèle de densité A). Le ralentissement de la convection est favorisé par la montée des inclusions (comme évoqué dans la section 3.4.2d))



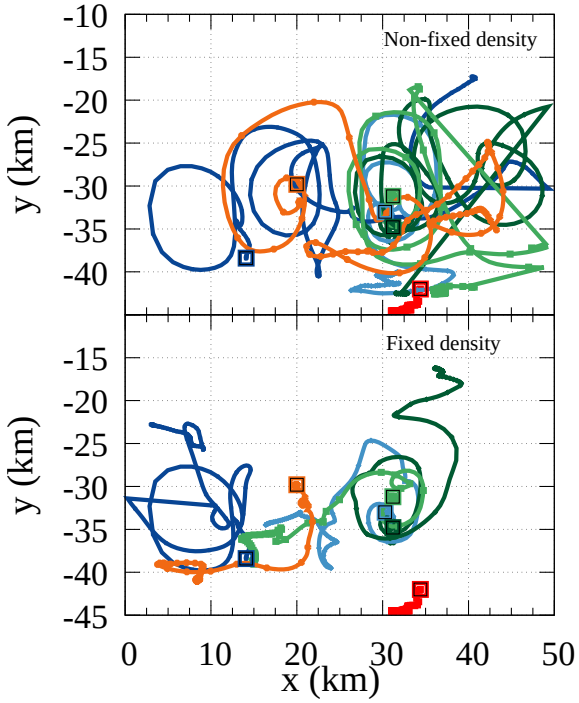
(a) (b)

FIGURE 3.5.7 – Simulation d'un scénario de chauffage puis refroidissement (cas $I_1M_1H_6 - mesh$) : clichés de l'écoulement aux temps longs, lorsque le système s'est figé (à $t \geq 20\ Ma$). Le refroidissement correspond à une baisse progressive de la température basale entre les temps $t_1 \leq t \leq t_2$. Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentent la température. Afin d'identifier plus facilement les inclusions, celles-ci ont été colorées dans la partie droite du système (en blanc pour les inclusions légères, en noir pour les lourdes). (a) La densité des inclusions suit la loi (3.11). Une couche hétérogène stagne entre -15 et -25 km de profondeur. (b) La densité des inclusions est celle qu'elles ont au moment de début du refroidissement (à t_1). Une structure composée de dômes de 5 km se fige entre -15 et -20 km.

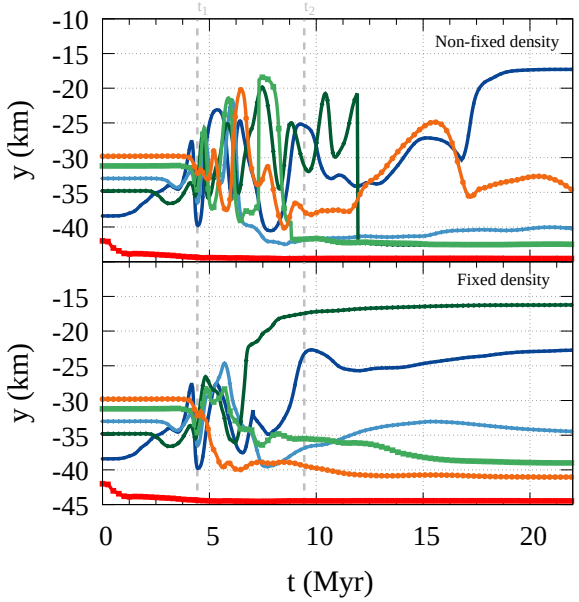
et s'arrête ici autour de 8 Ma. Les structures formées ressemblent à des dômes homogènes sur leur partie supérieure et hétérogène en dessous, zone où les dernières inclusions s'accumulent. Les résultats de cette configuration (refroidissement avec le modèle de densité B) montrent la formation de structures finales situées entre -15 et -20 km assimilables à des dômes de taille 5 km.

Nous concluons que la combinaison de la fusion partielle et des inclusions avec arrêt progressif du chauffage donne des résultats cohérents avec le scénario de formation des dômes de Naxos de VANDERHAEGHE et al. [2018] : convection avec des cycles d'une période de 2 Ma, suivi de diapirisme par refroidissement du domaine. Les structures en dôme sont observées lorsque la différence de densité entre le MGE et les inclusions légères reste suffisamment grande pendant et après le refroidissement (typiquement de l'ordre de $\sim 100\ kg.m^{-3}$).

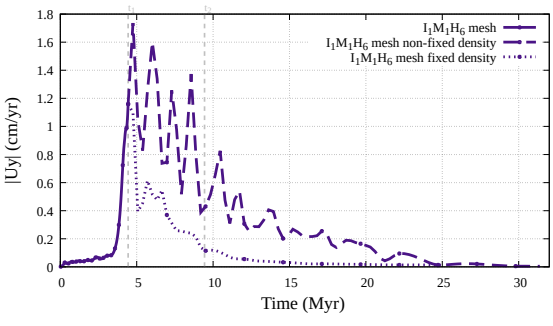
La section suivante se propose de faire une synthèse des résultats obtenus jusqu'ici dans le chapitre (avec/sans fusion partielle et inclusions) en les plaçant d'une part dans un cadre plus général via l'élaboration de cartographies des processus pertinents au regard des nombres adimensionnels du problème (section 3.6.1) et en proposant d'autre part deux scénarios plausibles de formation des dômes de Naxos et d'autres dômes métamorphiques décrits sur Terre (section 3.6.2).



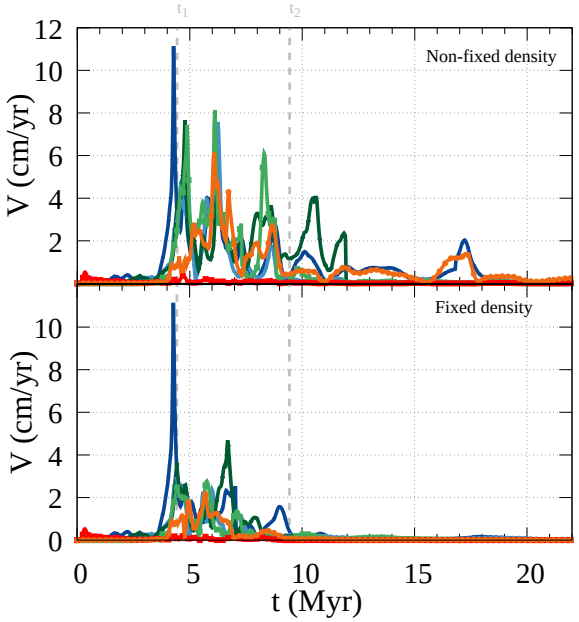
(a) Position x, y des traceurs. Les carrés noirs indiquent la position initiale des traceurs.



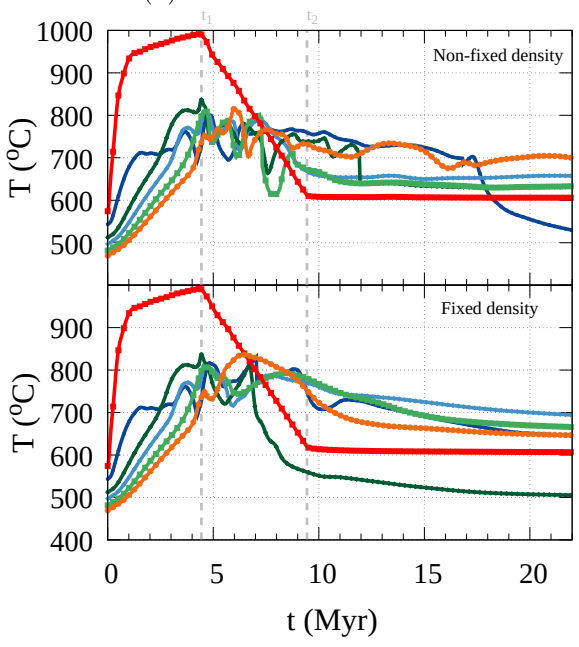
(b) Profondeur des traceurs



(c) Vitesse verticale moyenne



(d) Vitesses des traceurs



(e) Température des traceurs

FIGURE 3.5.8 – Évolution temporelle de la position, de la vitesse et de la température de traceurs disposés aléatoirement dans le système (cas $I_1M_1H_6 - mesh$). La réduction du chauffage commence à $t_1 = 4.4\ Ma$ et dure 5 Ma ($t_2 = 9.4\ Ma$). (clichés supérieurs) : la densité des inclusions suit la loi (3.11). (clichés inférieurs) : la densité des inclusions est celle qu'elles ont au moment de début du refroidissement (à t_1).

3.6 Discussion

3.6.1 Synthèse des modèles

Les cas simulés nous ont laissé voir différents moyens de combiner convection et diapirisme. Nous faisons ici une synthèse des simulations réalisées dans ce chapitre au regard des nombres adimensionnels, ce qui nous permet de définir une gamme de paramètres (concernant à la fois le MGE et les inclusions) permettant à la convection et au diapirisme de se produire en même temps. La valeur spécifique des nombres adimensionnels associés à chacune des simulations effectuées est donnée dans le tableau A.4.14.

a) Convection et fusion partielle

Tout d'abord, nous nous intéressons à la présence de convection dans le MGE en fusion partielle ainsi qu'au comportement des inclusions dans cette convection.

Rappelons que la prise en compte de la fusion partielle fait apparaître deux viscosités, une dans la "couche" non fondue (ou domaine non fondu) notée μ_{NF} telle que $M < M_S$, et une autre dans la couche partiellement fondue notée μ_{PF} telle que $M > M_S$ (Eq. 3.12). On peut donc calculer tous les nombres adimensionnels dépendant de la viscosité, notamment le nombre de Rayleigh, pour chacune des couches : Ra^{NF} et Ra^{PF} (Eq. 3.22). Pour calculer ces nombres, nous avons fixé $\Delta\rho = \rho_1^{S0} - \rho_1^{L0} = 100\ kg.m^{-3}$, $H = 35\ km$, $\rho = 2800\ kg.m^{-3}$, $\kappa = \kappa(300^oC) = 9.2 \times 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$. Notons que Ra^{PF} (Ra^{NF}) est calculé ici en utilisant $M = M_S$ ($T = 300^oC$) pour estimer la viscosité.

Ce type de système peut être vu comme un système mono-fluide où la viscosité dépend de la température. C'est pourquoi, de la même manière que Androvandi et al. [2011] (Fig. 1.16) qui ont cartographié les différents régimes de convection en fonction d'un nombre de Rayleigh 'haut' et 'bas', nous proposons un diagramme analogue dépendant des nombres Ra^{NF} et Ra^{PF} (Fig. 3.6.1a). Ce diagramme fait apparaître, selon les valeurs des nombres de Rayleigh, trois régimes thermiques :

- $Ra^{PF} \lesssim 10^4$, le régime est diffusif, il n'y a pas de convection,
- $Ra^{PF} \gtrsim 10^4$ et $Ra_{NF} \gtrsim 10^2$, la taille de la cellule convective fait la taille de la zone partiellement fondue ($M < M_S$), la convection est globale,
- $Ra_{PF} \gtrsim 10^4$ et $Ra_{NF} \lesssim 10$, la taille de la cellule convective est inférieure à celle de la zone partiellement fondue, la convection est locale.

Ces régimes sont très similaires à ceux trouvés par Androvandi et al. [2011]. En effet, autour de $Ra^{NF} \sim 10^3$ (Top Rayleigh Number) et $Ra^{PF} \sim 10^5$ (Bottom Rayleigh Number), pour Androvandi et al. [2011], le régime est stationnaire, ce qui pourrait s'assimiler à la convection globale que nous trouvons. Pour $Ra^{NF} < 10$ et $Ra^{PF} > 10^5$, pour Androvandi et al. [2011], le régime est un régime avec couvercle stagnant, ce qui pourrait s'assimiler à

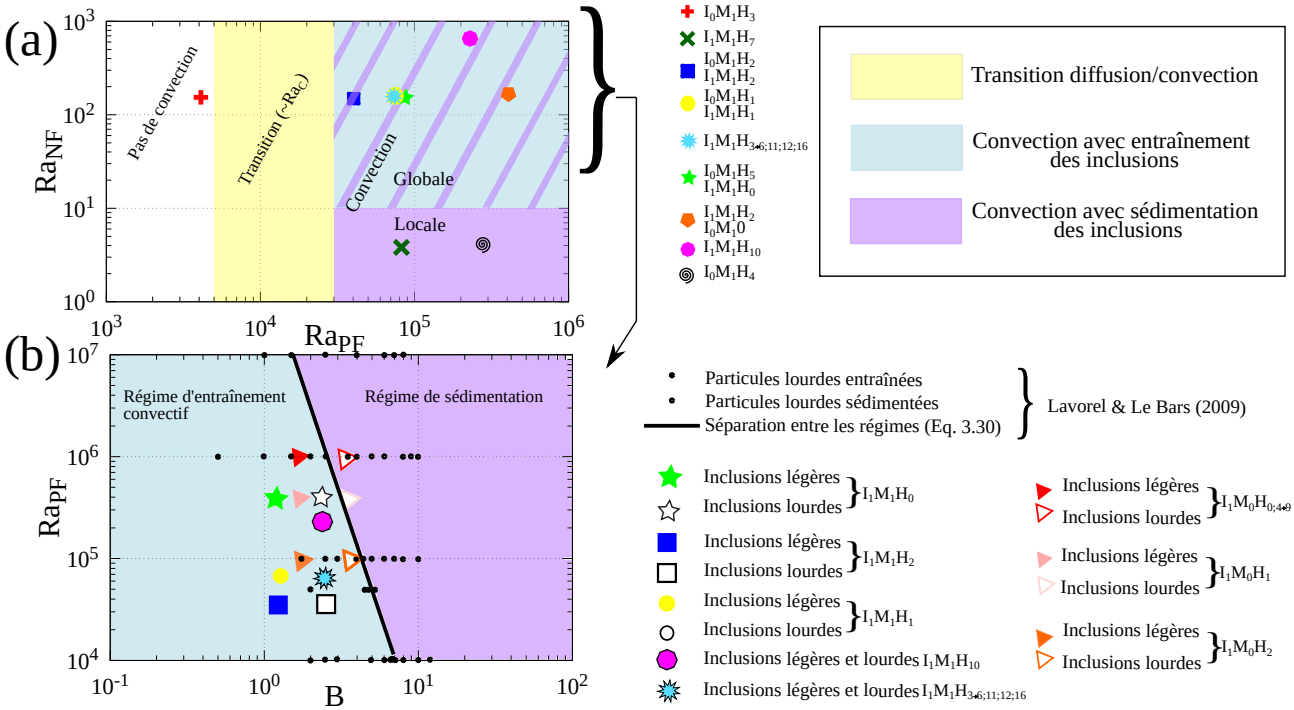


FIGURE 3.6.1 – (a) Régimes convectifs observés en fonction du nombre de Rayleigh dans la couche non fondue Ra^{NF} (telle que $M < M_S$) et dans la couche partiellement fondue Ra^{PF} (telle que $M > M_S$). Ces nombres sont définis par (3.22). (b) Régimes d'entraînement et de sédimentation des inclusions dans une cellule convective en fonction de Ra^{PF} et du nombre de flottabilité $B = \frac{|\rho_i^{L0} - \rho_1^{L0}|}{\rho_1^{L0} \alpha \Delta T}$ avec $i = 2$ pour les inclusions légères et $i = 3$ pour les inclusions lourdes.

la convection locale dans nos modèles. En dessous d'un Rayleigh critique de $Ra_c^{PF} \lesssim 10^4$, le système ne convecte pas, en accord qualitatif avec ces auteurs.

Nous pouvons remarquer sur la figure 3.6.1a que dans le problème présent, la transition entre régimes diffusif et convectif apparaît pour un nombre de Rayleigh $5\times10^3 \leq Ra_c^{PF} \leq 3\times10^4$ plus grand que $Ra_c \approx 1700$, le nombre de Rayleigh critique pour une convection "classique" avec des limites rigides [CHANDRASEKHAR, 2013]. Pour mieux contraindre la transition entre ces régimes thermiques dans nos modèles, citons VASIL et PROCTOR [2011] qui ont montré que le critère de déclenchement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard était modifié par la présence du front de fusion. Dans le cas où le nombre de Stefan est grand ($St = \frac{\mathcal{L}}{Cp\Delta T}$, avec $\mathcal{L}$ la chaleur latente de fusion par unité de masse en $J.kg^{-1}$), ils montrent que le Rayleigh critique $Ra_c^{VP} \approx 1296$. Ce nombre est encore inférieur aux valeurs que nous obtenons.

Il est important de noter que les nombres de Rayleigh que nous avons définis (Ra^{NF}, Ra^{PF}) sont des grandeurs globales basées sur les échelles du système complet, et que l'observation de la convection est faite aux temps longs, parfois à la suite de plusieurs régimes convectifs. Les critères de déclenchement de la convection présentés ci-dessus sont basés quant à eux sur les grandeurs locales. FAVIER et al. [2019] proposent donc un critère effectif utilisant une définition globale du nombre de Rayleigh (analogue à Ra^{PF}) et le rapport de hauteur h_c/H où h_c est l'épaisseur locale de la couche fondue (ici la profondeur du seuil $M = M_S$). Leur critère est le suivant : la convection apparaît si $Ra^{PF}(1 - M_S)\left(\frac{h_c}{H}\right)^3 > Ra_c^{VP} \approx 1296$. Dans notre cas

l'épaisseur de la couche partiellement fondue h_c n'étant pas connue a priori, ceci ne nous permet pas non plus de proposer un critère délimitant les régimes diffusifs et convectifs, figure 3.6.1a.

En revanche, il est possible d'utiliser le critère de Favier et al. [2019] pour estimer l'épaisseur de couche partiellement fondue h_c à atteindre pour espérer déclencher la convection. Par exemple, pour les cas $I_0M_1H_0$, $I_0M_1H_1$ et $I_0M_1H_2$, le nombre de Rayleigh de la couche partiellement fondue est respectivement $Ra^{PF} \approx 4 \times 10^5$, 8×10^4, 4×10^4 (voir tableau A.4.14) et on a $M_S = 0.3$ et $H = 35\ km$. Le critère indique qu'une épaisseur respective de 6, 10 et 13 km est nécessaire au déclenchement de la convection. Au regard de l'évolution temporelle de la profondeur du front de fusion de ces cas (figure 3.3.6e), ces valeurs d'épaisseurs correspondent raisonnablement bien aux profondeurs à partir de laquelle on observe la transition entre le régime diffusif et le premier régime convectif.

Le comportement des inclusions dans ces différents régimes thermiques est, en général :

— dans le régime diffusif, les inclusions ne sont soumises qu'à la ségrégation gravitaire,

— dans le régime de convection globale, les inclusions sont entraînées par la convection,

— dans le régime de convection locale, les inclusions légères s'accumulent au-dessus des cellules de convection.

Toutefois, Höink et al. [2005] et Lavorel et Le Bars [2009] ont montré que dans un régime convectif global, les inclusions peuvent aussi sédimenter dans certains cas. Ce point est détaillé ci-dessous.

b) Entraînement ou sédimentation des inclusions dans un fluide en convection

Le diagramme réalisé par Lavorel et Le Bars [2009] (Fig. 3.4.3) permet de déterminer selon les nombres de Rayleigh et de flottabilité si les inclusions sont susceptibles d'être entraînées par la convection ou de sédimenter. Ces auteurs proposent un critère de transition entre ces deux régimes, basé sur le nombre de flottabilité $B = \frac{\Delta\rho}{\rho\alpha\Delta T}$ où ρ est la masse volumique du fluide, le nombre de Rayleigh (et sa valeur critique), le rapport d'échelle entre la taille des inclusions et celle des cellules convectives, et enfin un nombre de Péclet critique Pe_s (le nombre de Péclet étant défini par $Pe = \frac{v_s H}{\kappa}$ avec $v_s = \frac{2}{9}\frac{\Delta\rho g r^2}{\rho\nu}$ la vitesse de Stokes) :

$$B = \frac{9\ \pi\ Pe_s}{2\ Ra}\left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\beta}\left(\frac{H}{r}\right)^2. \tag{3.29}$$

$Pe_s = 3.5 \times 10^{-5}$ est le nombre de Péclet critique (empirique), $Ra_c = 1708$ est le nombre de Rayleigh critique, $\frac{H}{r} = 6.66 \times 10^2$ est un rapport d'échelles de tailles, et $\beta = 0.77$ est un facteur exponentiel qui dépend des caractéristiques de la convection (et donc de Ra et Pr) [Grossmann et Lohse, 2001].

Le diagramme de Lavorel et Le Bars [2009] est reproduit sur la figure 3.6.1b avec les valeurs associées à nos simulations pour les cas avec inclusions (avec et sans fusion partielle).

Nous choisissons Ra^{PF} comme nombre de Rayleigh et le nombre de flottabilité est $B = \frac{\Delta\rho}{\rho_1^{L0}\alpha\Delta T}$. Seuls les cas où la convection est globale sont présentés ici. Pour les cas sans fusion partielle (I_1M_0*), $\Delta T = T_H^+ - T_C = 700^oC$, $\Delta\rho = |\rho_1 - \rho_i|$ avec $i = 2$ pour les inclusions légères et $i = 3$ pour les inclusions lourdes. Pour les cas avec fusion partielle (I_1M_1*), $\Delta T = T_H^+ - T_S = 280^oC$ et $\Delta\rho = |\rho_1^{L0} - \rho_i^{L0}|M_S$.

Dans tous les cas avec fusion partielle, les inclusions lourdes et légères se retrouvent dans le régime d'entraînement du diagramme : cet entrainement est effectivement observé dans les simulations. Concernant les cas où la viscosité est newtonienne (I_1M_0), les inclusions légères sont également toujours entraînées. Pour les inclusions lourdes, celles-ci sont proches de la transition entre les deux régimes. Et effectivement dans les simulations, certaines inclusions lourdes sont entraînées, d'autres sédimentent, notamment lorsqu'elles sont proches du bas du système. Notons que dans tous les cas, une couche d'inclusions lourdes a eu le temps de se former en bas du domaine avant le déclenchement de la convection. Cette couche subsiste même si certains de ses éléments sont entraînés.

La loi d'échelle qui représente la transition entre les deux régimes (convection versus sédimentation) est spécifique aux paramètres des expériences de laboratoire de Le Bars [2003]. Cette loi semble également valide pour les systèmes que nous étudions. Toutefois, avec les paramètres de nos systèmes, c'est-à-dire un nombre de Rayleigh critique d'environ $Ra_c \approx 2\times10^4$ (figure 3.6.1a) et $\frac{H}{r} = \frac{35\times10^3}{300} \approx 120$. Nous trouvons que le nombre de Péclet critique est $Pe_s \approx 0.76$ (avec $\beta = 0.77$). Ce nombre de Péclet critique représente la transition entre régimes d'entraînement et de sédimentation dans notre système et constitue un critère permettant de prédire s'il y a entraînement ou sédimentation des inclusions dans l'écoulement convectif.

Remarque :
Deux simulations supplémentaires ont été réalisées avec *10<B<60* . Aucune des deux ne permet que les inclusions légères sédimentent. Plusieurs explications peuvent être fournies pour expliquer cela :

— l'inclusion est un poche de fluide déformable et sécable et ce diagramme ne peut s'appliquer qu'à des particules indéformables et indivisibles,

— l'utilisation de deux rhéologies (μ_{PF} et μ_{NF}, Eq.3.12), elles-mêmes dépendantes de la température et du taux de déformation rend le diagramme non valide.

c) Bilan de cette synthèse

Dans cette partie, nous avons cherché à quantifier la gamme de paramètres nécessaire à la sédimentation des inclusions dans un régime convectif via l'utilisation des nombres adimensionnels (Ra_{NF}, Ra_{PF}, B). Pour obtenir à faible profondeur des petites structures couplées à la présence de cycles convectifs, c'est-à-dire que les inclusions sédimentent malgré la présence de cellules convectives, une première façon est de ralentir la convection ; nous avons pu identifier trois moyens pour cela :

— former une convection locale via l'utilisation d'inclusions et d'une rhéologie qui dépend

du taux de déformation, ce qui crée une convection locale de faible vigueur. Les structures formées sont des dômes circulaires (cas $I_1M_0H_{11}$, $I_1M_0H_{23}$, $I_1M_0H_{22}$).

— former une convection locale via l'utilisation d'un fluide non fondu telle que $Ra^{NF} < 10$ ce qui bloque l'élévation des isothermes et maintient la convection dans une couche restreinte. Les inclusions s'accumulent en une couche horizontale au dessus de cellules convectives (cas $I_1M_1H_7$).

— refroidir le système par diminution de la chaleur basale. La convection se développe puis faiblit, ce qui permet aux inclusions de remonter. Selon la différence de densité choisie, les structures formées constituent des dômes irréguliers de composition homogène ou une couche relativement plane de composition hétérogène (cas $I_1M_1H_6$).

Par la suite, nous testons deux scenarios pour expliquer la formation des dômes de Naxos : 1) la formation d'une convection locale, par l'utilisation d'inclusions combinées à un rhéologie non-linéaire et 2) le refroidissement du système. Ces deux scénarios sont explicités dans la partie suivante.

3.6.2 Application aux dômes de Naxos et autres domaines orogéniques

Dans cette section, nous discutons des conditions physico-chimiques requises pour le développement d'instabilités gravitaires au sein de la croûte partiellement fondue en confrontant les résultats des modèles numériques avec les données d'observation des objets naturels. Dans les modèles, la fusion partielle est simulée par une viscosité et une densité non-linéaires contrôlées par la température et un seuil de fusion partielle. Trois fluides avec des lois de comportement et de densité spécifiques sont considérés. Les données naturelles sont dans un premier temps, celles identifiées pour le dôme de Naxos. La discussion est ensuite élargie à d'autres dômes de migmatites représentatifs de racines crustales partiellement fondues à différentes époques depuis l'Archéen jusqu'au Phanérozoïque.

a) Formation des dômes de Naxos

L'île de Naxos présente une structure de dômes imbriqués (voir chapitre 1, section 1.11) formée entre -24 et -16 Ma et composée de sous-dômes d'une taille de 2-3 km inclus dans un dôme majeur de taille de 10 km. L'analyse géochronologique de zircons a mis en évidence une alternance de température tous les 2 Ma durant 8 Ma. Vanderhaeghe et al. [2018] ont proposé que la formation de ces dômes (Fig. 1.12) reflétait le résultat de cycles convectifs suivis de diapirisme.

Parmi les simulations étudiées dans ce chapitre, nos modèles nous permettent d'établir deux scénarios qui permettent de retrouver la période de 2 Ma et des sous-dômes de diamètre de 3 km. Afin de mieux comparer modèle réel et modèles numériques, ces scénarios sont détaillés ci-dessous et ont été simulés en 3D.

Le domaine de calcul a pour dimensions 49.4 $km \times 49.4\ km \times 35\ km$ dans les directions horizontales et verticale et le maillage correspondant est $250 \times 250 \times 175$. Les conditions limites au fond et en haut ($y = -45\ km$ et $y = -10\ km$) sont les mêmes qu'en 2D (adhérence en bas et glissement en haut). Une condition de périodicité est imposée sur les frontières latérales. Dans les deux scénarios proposés, le rayon des inclusions est de 600 m. Les simulations ont duré 8 jours sur 36 coeurs pour la simulation du scénario 1 et 5 jours sur 36 coeurs pour le scénario 2.

Scénario 1

Ce scénario correspond au modèle 2D $I_1M_0H_{23}$. Dans ce scénario, la fusion partielle n'est pas prise en compte (viscosité et densité ne dépendent pas d'un seuil M_S), de sorte que la rhéologie suit celle de roches non fondues (μ_{NF}, Eq. 3.12). Le domaine est rempli d'inclusions, activées dès le début car elles sont initialement plus (moins) denses et plus (moins) visqueuses que le MGE. Les paramètres sont ceux du cas $I_1M_0H_{23}$ mais le rayon des inclusions est de 600 m au lieu de 300 m (voir Tab. 3.6.10).

Cas	Fluide	Densité ρ_{L0} $kg.m^{-3}$	Production H_r $W.kg^{-1}$	Rayon r m	Épaisseur h km	A $Pa^{-2.3}.s^{-1}$
$I_1M_0H_{23-3D}$	1	2700	1.75	600	35	3.2×10^{-4}
	2	2600	2			6.3×10^{-2}
	3	2900	0.9			1.58×10^{-6}
$I_1M_0H_{23} - 2D$	1	2700	1.75	300	35	3.2×10^{-4}
	2	2600	2			6.3×10^{-2}
	3	2900	0.9			1.58×10^{-6}

TABLEAU 3.6.10 – Paramètres du scénario 1, cas $I_1M_0H_{23} - 3D$.

La figure 3.6.2 présente l'écoulement tridimensionnel du cas $I_1M_0H_{23-3D}$ pour deux temps $t = 4.4\ Ma$ et $t = 22.2\ Ma$. Les sous-figures a1 et a2 sont une vue 3D représentant deux isothermes (en rouge) à $T = 720^oC$ et $T = 827^oC$, et la fraction volumique de phase des inclusions légères (en blanc) et lourdes (en gris foncé) comprise entre $0.3 < C_i < 1$ (avec $i = 2, 3$). Nous n'avons pas représenté les inclusions légères de la partie supérieure du domaine qui sont immobiles (car le milieu environnant est trop visqueux), en 'coupant' leur visualisation au dessus d'une certaine profondeur. Les vues b_1 et b_2 sont une coupe dans le plan $z = 25\ km$ de la viscosité et des isothermes (isotherme $T = 720^oC$ en trait épais rouge). Les inclusions sont représentées de la même façon que dans la vue précédente mais les inclusions lourdes sont maintenant colorées en noir pour une meilleure visualisation. Le cliché c_1 représente les mêmes isothermes que ceux du cliché a_1 (pour $t = 12.7\ Ma$). Le cliché c_2 montre un zoom sur les structures diapiriques de faible profondeur à $t = 22.2\ Ma$ avec en jaune les structure se trouvant au dessus -17 km.

De la même façon qu'en 2D, les inclusions légères ségrègent une fois que le milieu global équivalent devient moins visqueuse), et s'agglomèrent pour former des dômes au dessus de 2

Cas		μ_0 $Pa.s$	Densité ρ_{L0} $kg.m^{-3}$	Production H_r $W.kg^{-1}$	Rayon r m	Épaisseur h km	A $Pa^{-n}.s^{-1}$
$I_1M_1H_6-3D$	1	2.5×10^{16}	2700	1.75			
	2	2.5×10^{15}	2500	10	600	35	3.2×10^{-4}
	3	2.5×10^{17}	2900	0.9			

TABLEAU 3.6.11 – Paramètres du scénario 2, $I_1M_1H_6-3D$

cellules convectives d'un diamètre de 25 km. La période d'un cycle convectif est $\tau = 2\ Ma$ (figure 3.6.3b). La figure 3.6.4 présente la topographie des structures formées en fin de simulation. La taille des petits dômes est de $\sim 3\ km$ (figure 3.6.4a). La cellule convective est légèrement bombée sur le dessus, faisant émerger (figure 3.6.4b) un dôme plus large de $\sim 30\ km$ de diamètre. L'écart de température de $\Delta T = 100^oC$ enregistré par les traceurs se situe entre 800^oC et 900^oC (figure 3.6.3d).

Le mouvement des inclusions combiné à une rhéologie dépendante du taux de déformation (et de la température) diminue la viscosité du système et lui permet de convecter. C'est une manière de simuler la fusion partielle (car la viscosité diminue) sans introduire la notion de seuil de melt. En 3D, la quantité d'inclusions en mouvement est plus importante et la convection est beaucoup moins localisée qu'en 2D. Notons qu'ici, nous avons choisi pour les inclusions une densité et viscosité initiales différentes du MGE, ce qui pourrait sembler discutable. Cependant, des tests supplémentaires indiquent qu'en choisissant pour les inclusions une densité dépendant du taux de melt (ce qui génère une différence locale de densité uniquement lorsque un seuil M_S est dépassé, configuration plus réaliste), nous avons obtenu des résultats similaires. Ceux-ci sont présentés en annexe A.2.2.

Scénario 2

Ce scénario combine :

— fusion partielle, par l'utilisation de densité et viscosité qui dépendent d'un taux de M (voir Eq. (3.12) et (3.11)),

— inclusions (qui remplissent le domaine) : les inclusions s'activent véritablement lorsque $M > M_S$,

— refroidissement progressif : la température basale passe de $T_H^+ = 1000^oC$ à $t_1 = 4.4\ Ma$ à $T_H^+ = 600^oC$ à $t_2 = 9.4\ Ma$, simulant un épaississement de la croûte par relaxation thermique du manteau lithosphérique après délamination,

— densité figée : la densité des inclusions est figée à leur densité au moment de l'arrêt du chauffage basal. Ceci pourrait refléter l'irréversibilité de la ségrégation, en considérant qu'une fois le milieu devenu hétérogène, il ne peut plus redevenir homogène et donc que les inclusions et le MGE ne peuvent plus avoir les mêmes propriétés de densité et de viscosité.

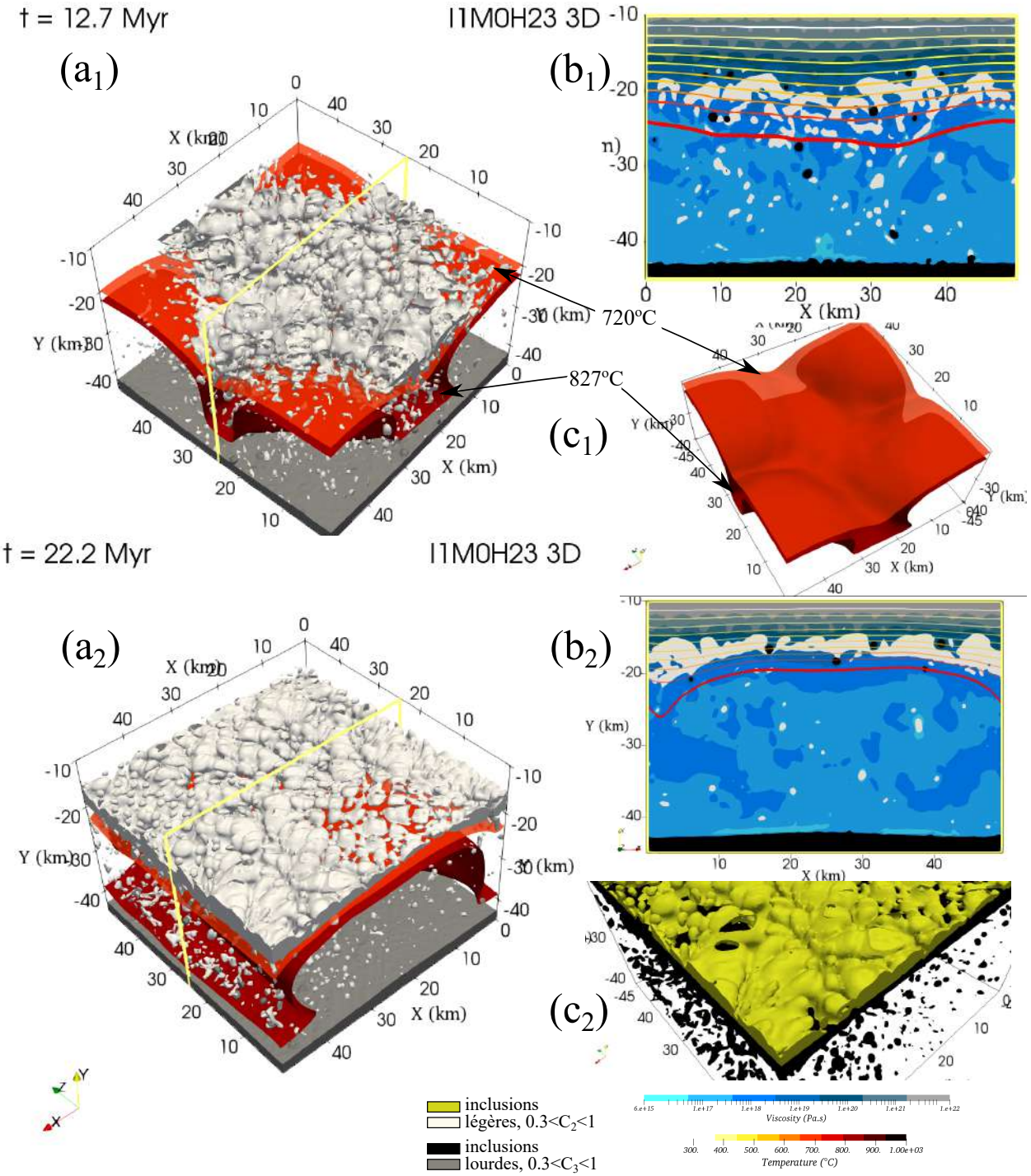
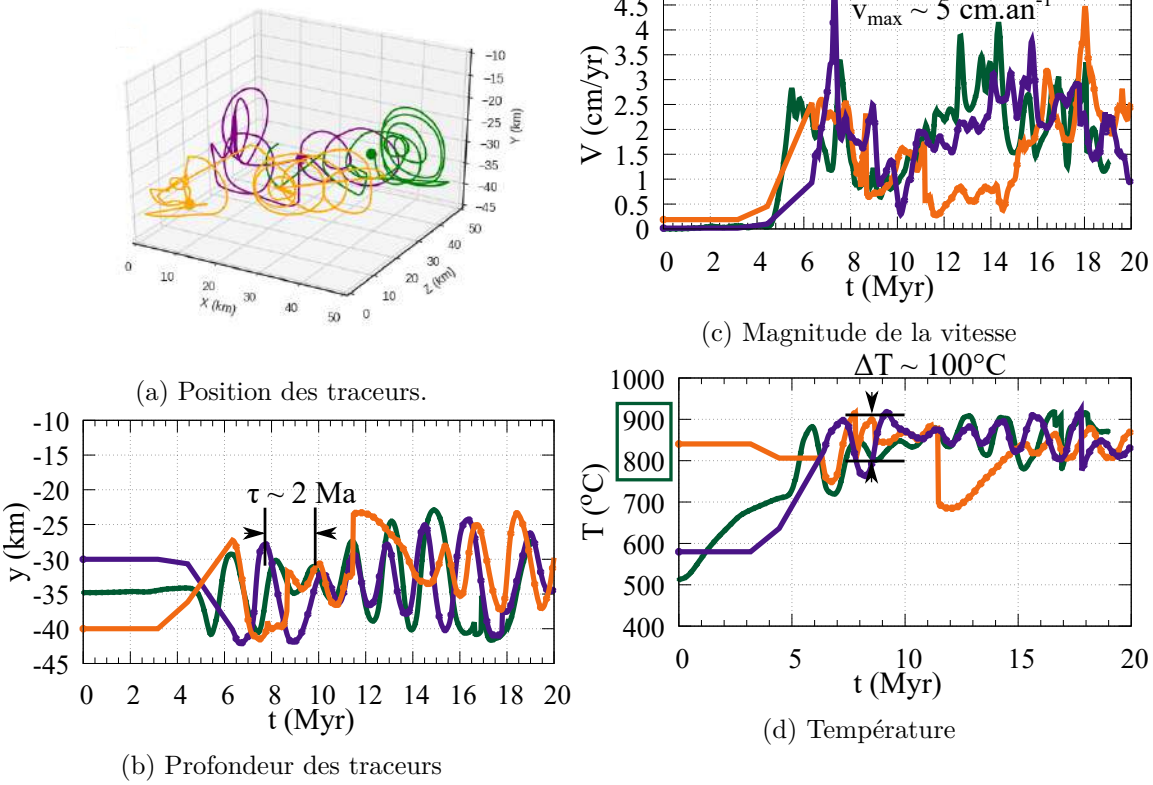


FIGURE 3.6.2 – Scénario 1, cas $I_1M_0H_{23}-3D$: a1, a2) vue 3D représentant deux isothermes (en rouge) à $T = 720^oC$ et $T = 827^oC$, et la fraction volumique de phase des inclusions légères (en blanc) et lourdes (en gris foncé) comprise entre $0.3 < C_i < 1$ (avec $i = 2, 3$). Les inclusions légères situées à faible profondeur et qui restent immobiles ne sont pas représentées. b1, b2) coupe dans le plan $z = 25\ km$ de la viscosité et des isothermes (le front de fusion $M = M_S$ est en trait épais rouge). Les inclusions sont représentées de le même façon que dans la vue précédente mais les inclusions lourdes sont maintenant colorées en noir pour une meilleure visualisation. c1) isothermes à $T = 720^oC$ et $T = 827^oC$. c2) zoom sur les structures en 2 couleurs : en jaune les structures situées au dessus de -17 km, en noir le reste.



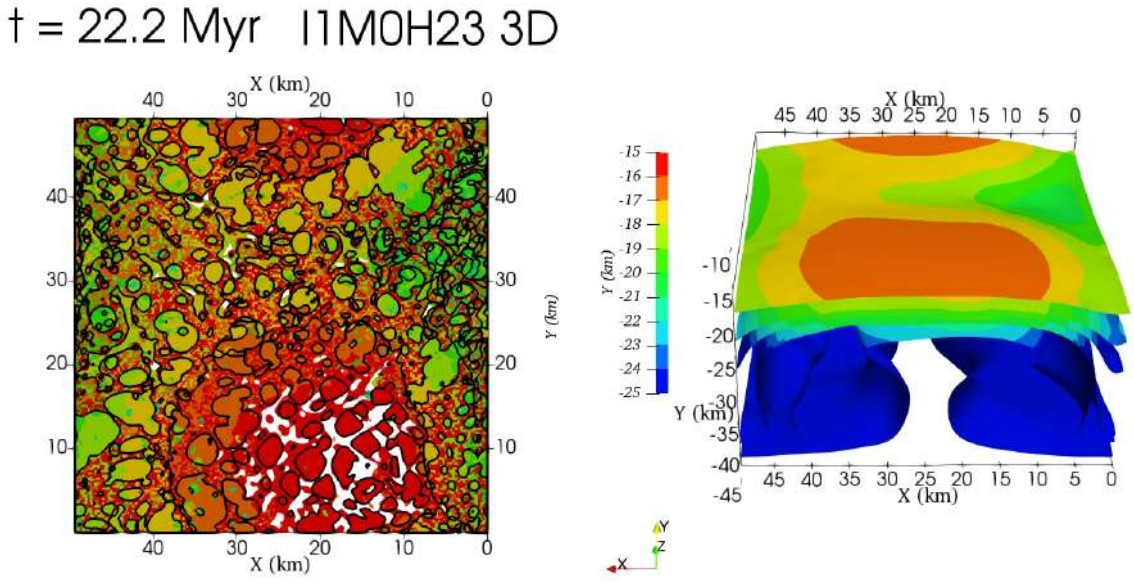
(a) Position des traceurs.

(c) Magnitude de la vitesse

(b) Profondeur des traceurs

(d) Température

FIGURE 3.6.3 – Cas $I_1M_0H_23{-}3D$: Évolution temporelle de la position (b,c), vitesse (c) et température (d) de trois traceurs.



(a) (b)

FIGURE 3.6.4 – Scénario 1, cas $I_1M_0H_{23} - 3D$: (a) Projection sur un plan 2D des structures de la figure 3.6.2, les couleurs représentent la profondeur, et les contours noirs des isocontours de valeur -20, -17 et -15 km. Les structures formées ressemblent à des dômes circulaires de diamètre ~ 3 km. Un dôme de plus grande taille, ~ 30 km est formé par l'altitude de la cellule convective. (b) Isothermes colorées par la profondeur y.

Les paramètres sont ceux du cas 2D $I_1M_1H_6$ (Tab. 3.6.11). Deux temps sont présentés figure 3.6.5 pour ce scénario : un temps montrant les cellules convectives ($t = 4.4\ Ma$) et un temps où les structures sont figées ($t = 22.2\ Ma$).

La convection se développe d'abord sous forme de cellule convective de diamètre $\sim 25\ km$. La convection entraîne les inclusions légères et lourdes. Le système est ensuite refroidi à 4.4 Ma : la taille des cycles convectifs se réduit ainsi que leur vitesse et les inclusions légères s'élèvent et s'aggrègent pour former des dômes irréguliers. Le système est figé vers 22 Ma.

Les figures 3.6.6 et 3.6.7 présentent des indicateurs locaux via des traceurs placés dans l'écoulement et une vue d'en haut des structures finales formées à faible profondeur. Les périodes des cycles convectifs sont $\tau < 1.5\ Ma$. Le système s'immobilise totalement au bout de 22 Ma. Des structures irrégulières de taille de 5 à 10 km se forment. La différence de température enregistrée par les traceurs se situe entre 700^oC et 800^oC.

Synthèse des deux scénarios

Ces scénarios permettent à la fois d'expliquer les cycles de 2 Ma de température dans les zircons et l'obtention de sous-dômes d'un diamètre de 2 km. Le tableau 3.6.12 récapitule les choix effectués pour la densité et la viscosité dans chacun des deux scénarios ainsi que les principaux résultats obtenus. La formation du dôme majeur peut être vue comme un assemblage de petits dômes. Les différences de température enregistrée par les traceurs est de $\Delta T = 100^oC$ pour les deux scénarios. Toutefois, la gamme enregistrée par le scénario 1 est plus chaude puisqu'elle se situe entre 800 et 900^oC contre 700 et 800^oC pour le scénario 2. Cette gamme est propre à chacun des scénarios, en effet, dans le scénario 1, les inclusions lourdes maintiennent une couche visqueuse chaude en bas du système tandis que dans le scénario 2, la couche visqueuse basale formée d'inclusions lourdes est beaucoup moins épaisse et des panaches descendants froids viennent refroidir le système.

La dissolution-cristallisation du zircon a lieu environ entre 700^oC et 900^oC pour la composition chimique du système considéré dans Guergouz et al. [2018]; Kelsey et al. [2008]. Si la composition chimique change, cet intervalle de température change aussi légèrement. Les deux scénarios se situent donc dans la gamme acceptable des températures de dissolution-cristallisation du zircon. Une plus grande précision sur la gamme de température enregistrée par les zircons permettrait de choisir entre les deux scénarios.

Dans les deux scénarios, le déclenchement de la convection se produit grâce à une diminution de la viscosité : i) locale dans le scénario 1 où la dépendance au taux de déformation déclenche la convection par le mouvement des inclusions, ii) globale dans le scénario 2 où la viscosité des roches partiellement fondues devient faible.

Nous n'avons pas refroidi le système dans le scénario 1 car les structures se figent sans cela. Le refroidissement du système aurait provoqué l'arrêt de la convection sans modifier la structure des dômes situés au-dessus. Par ailleurs, la convection s'arrête d'elle-même lorsque les inclusions ne sont plus en mouvement.

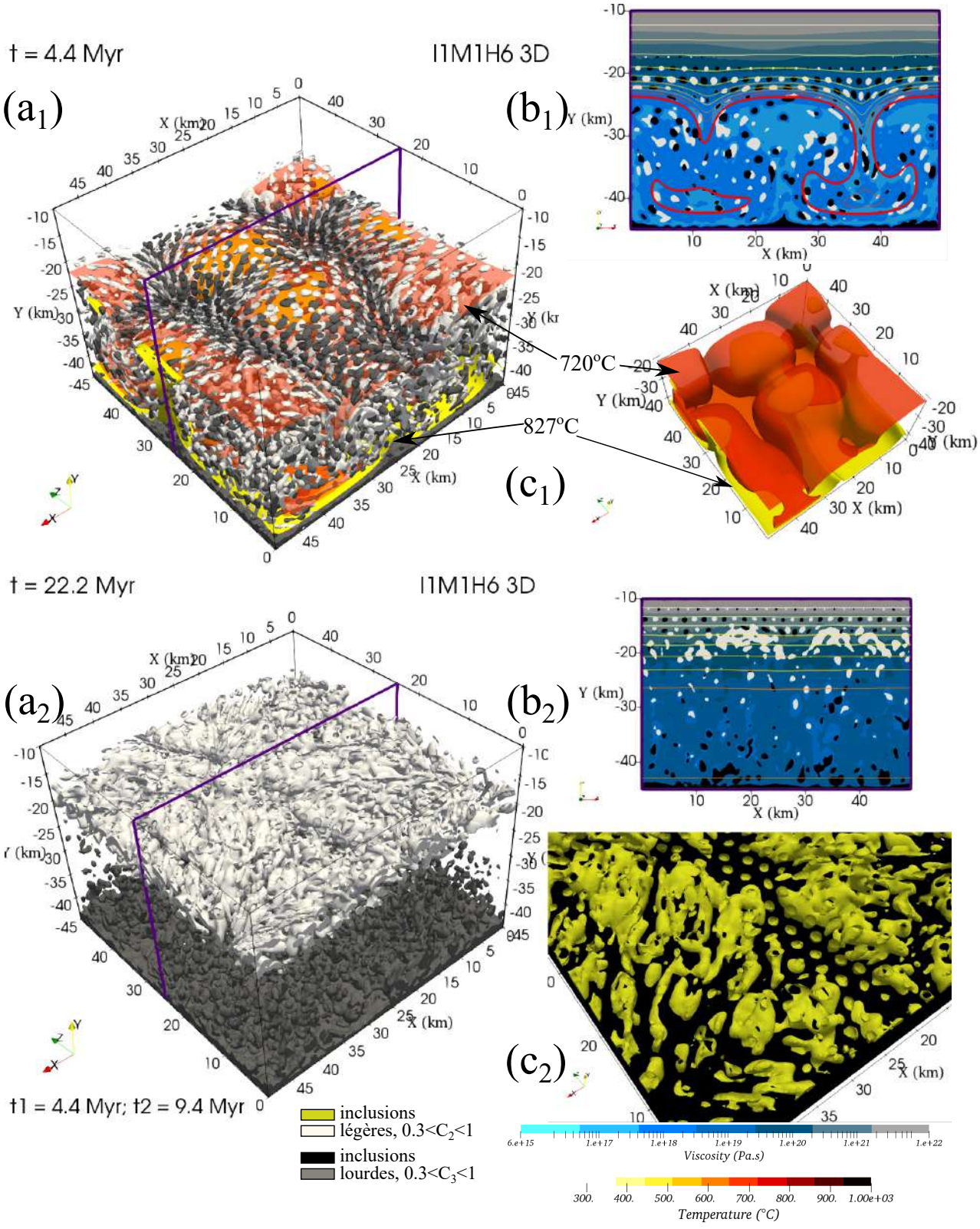
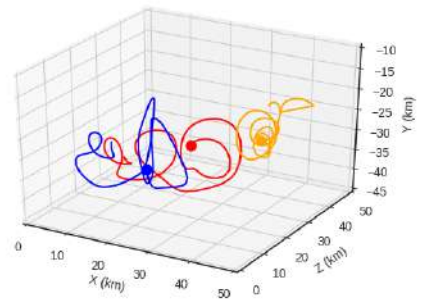
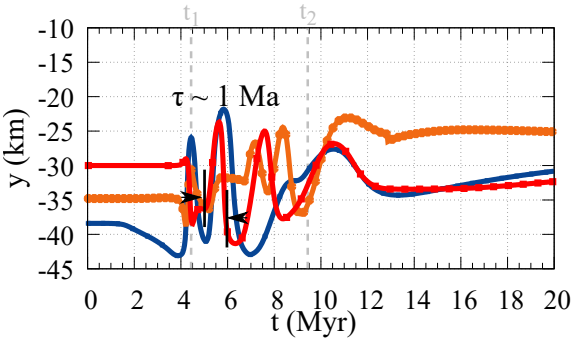


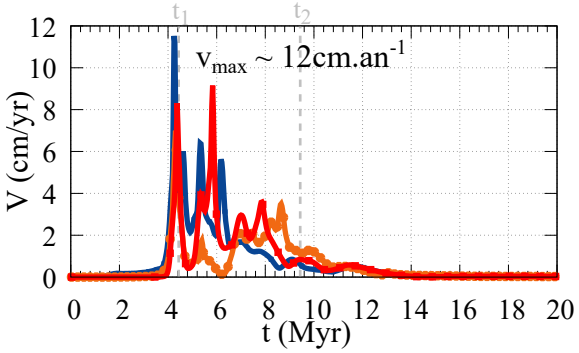
FIGURE 3.6.5 – Scénario 2, cas $I_1M_1H_6-3D$: a1, a2) vue 3D représentant deux isothermes (en rouge) à $T = 720^oC$ et $T = 827^oC$, et la fraction volumique de phase des inclusions légères (en blanc) et lourdes (en gris foncé) comprise entre $0.3 < C_i < 1$ (avec $i = 2, 3$). Les inclusions légères situées à faible profondeur et qui restent immobiles ne sont pas représentées. b1, b2) coupe dans le plan $z = 25\ km$ de la viscosité et des isothermes (le front de fusion $M = M_S$ est en trait épais rouge). Les inclusions sont représentées de le même façon que dans la vue précédente mais les inclusions lourdes sont maintenant colorées en noir pour une meilleure visualisation. c1) isothermes à $T = 720^oC$ et $T = 827^oC$. c2) zoom sur les structures en 2 couleurs : en jaune les structures situées au dessus de -17 km, en noir le reste.



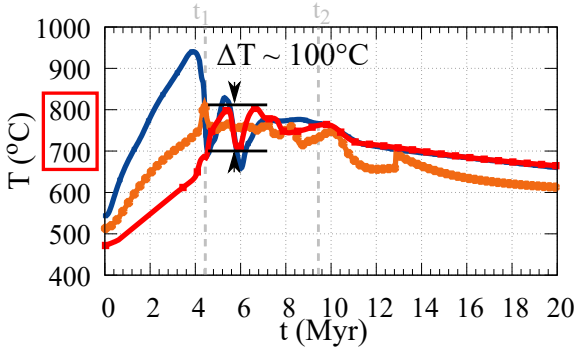
(a) Position des traceurs.



(b) Profondeur des traceurs



(c) Magnitude de la vitesse



(d) Température

FIGURE 3.6.6 – Cas $I_1M_1H_6-3D$: Évolution temporelle de la position (b,c), vitesse (c) et température (d) de trois traceurs.

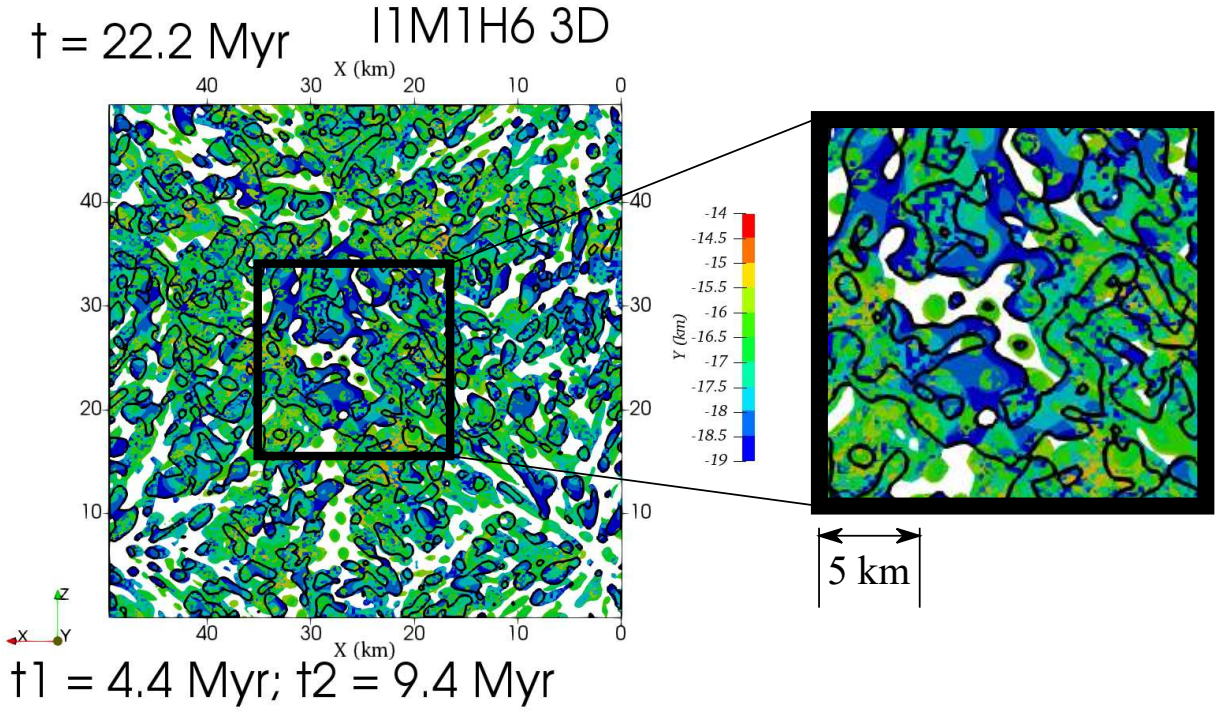


FIGURE 3.6.7 – Projection sur un plan 2D des structures de la figure 3.6.5, les couleurs représentent la profondeur, et les contours noirs des isocontours de valeur -19 km. Les structures formées sont irrégulières.

Scénario 1 (sans fusion partielle)	Scénario 2 (avec fusion partielle)
$\rho_i^{S0} = \rho_i^{L0}$ $\mu_1^{NF} = \mu_2^{NF} \times 10 = \mu_3^{NF}/10$	$\rho_1^{S0} = \rho_2^{S0} = \rho_3^{S0}$ $\rho_1^{L0} \neq \rho_2^{L0} \neq \rho_3^{L0}$ $\mu_1^{NF} = \mu_2^{NF} = \mu_3^{NF}$ $\mu_1^{PF} = \mu_2^{PF} \times 10 = \mu_3^{PF}/10$
Inclusions + $\mu^{NF} = f(\dot{\varepsilon}, T)$ Convection et diapirisme Dômes circulaires	Fusion partielle + inclusions + refroidissement Convection puis diapirisme Dômes irréguliers
$\tau = 2\ Ma$ $\Delta T = 100^oC$ $D_{dôme} \sim 3\ km$ $v_{max} = 4.2\ cm.an^{-1}$	$\tau < 1\ Ma$ $\Delta T = 100^oC$ $D_{dôme} \sim 5\ km$ $v_{max} = 12\ cm.an^{-1}$ pendant 10 Ma

TABLEAU 3.6.12 – Synthèse des deux scénarios pouvant expliquer la formation des dômes de Naxos.

Ces deux scénarios mettent en exergue l'importance de la diminution de la viscosité (localement ou globalement) mais aussi l'importance de la densité :

— des inclusions légères lorsque leur différence de densité est suffisamment grande pour qu'elle puissent sédimenter dans la cellule convective,

— entre MGE non fondu et partiellement fondu, plus celle-ci est grande et plus le scénario ressemblera au scénario 2 (voir annexe A.2.1).

Les scénarios 1 et 2 peuvent présenter un résultat similaire (une convection qui entraîne les inclusions légères), si la densité dans le scénario 1 est prescrite identique à celle du scénario 2, c'est-à-dire si la densité dépend de la fraction de melt (voir annexe A.2.1). Se pose la question de la densité dans un système avec fusion partielle. Nous avons considéré que celle-ci était une interpolation entre une masse volumique non fondue et fondue. Ce choix reste discutable. Par exemple, on pourrait, de la même manière que la viscosité, diminuer la densité du MGE, une fois le seuil M_S passé.

Ces deux scénarios présentent deux visions de la formation des dômes de Naxos : un où convection et diapirisme se déroulent en même temps (scénario 1) et l'autre où la convection précède le diapirisme (scénario 2).

Le premier scénario montre une fixation des structures sans refroidissement et comporte en ce sens moins d'étapes et moins d'approximations que le second scénario. En revanche, les structures formées dans le premier scénario n'ont pas subi la convection et n'ont donc pas enregistré ses cycles, seules la partie basale des dômes est une accumulation des inclusions légères qui ont potentiellement enregistré les cycles convectifs en arrivant plus tardivement. A l'inverse, dans le second scénario, la totalité des inclusions et des dômes formés par l'accumulation des inclusions a subi la convection. Ainsi, le scénario 2 semble mieux expliquer la formation des dômes de Naxos.

De plus, le second scénario utilise des lois (de viscosité et de densité) qui permettent de prendre en compte la fusion partielle au premier ordre (on trouve des roches métamorphiques au coeur des dômes), c'est-à-dire que la densité et la viscosité des roches est modifiée lorsque

celles-ci ont un taux de melt suffisant. Cette façon de prendre en compte la fusion partielle reste une approximation. En effet, on peut considérer que le scénario 1 prend également en compte la fusion partielle puisque l'on observe une diminution de la viscosité (due dans ce cas à une rhéologie non-linéaire).

Le choix de la densité et la rhéologie des roches sont cruciaux tout en restant mal contraints.

Ainsi, ce sont les caractéristiques finales des modèles (géométrie des dômes, temps caractéristiques des instabilités, températures enregistrées) qui peuvent apporter des contraintes supplémentaires sur la viscosité et la densité des systèmes naturels.

b) Comparaison avec d'autres domaines orogéniques

Convection crustale

Nous avons illustré le fait que la convection crustale peut se produire dans les zones orogéniques si la croûte est suffisamment peu visqueuse ($\sim 10^{17}\ Pa.s$ localement ou globalement) et chaude (par addition d'une source chaude basale à une croûte épaissie). Quoique débattue, la convection crustale a été proposée précédemment, notamment par Babeyko et al. [2002]; Riel et al. [2016]; Schenker et al. [2012].

Plusieurs zones orogéniques sur Terre peuvent remplir ces conditions. Par exemple, sous le plateau orogénique de l'Altiplano-Puna, Babeyko et al. [2002] expliquent les hautes températures (déduites de l'observation géophysique) par la présence d'une convection crustale. Selon Babeyko et al. [2002], la convection se produit lorsque la croûte est peu visqueuse (c'est-à-dire que sa composition est dominée par du quartz), lorsque le chauffage basal est important ($\sim 900^oC$) et la croûte épaissie. La convection dans leur modèle de l'Altiplano-Puna se déclenche à partir de 5 Ma après l'épaississement et la croûte atteint 800^oC à 20 km de profondeur. Ces résultats sont très proches de ceux que nous avons obtenus dans un système convectif avec fusion partielle.

Diapirisme

Les dômes de migmatites traduisent un épisode de fusion partielle dans la croûte. Les différences de masse volumique entre les diapirs et la roche environnante varient selon le contexte mais on estime $50 \lesssim \Delta\rho \lesssim 400\ kg.m^{-3}$ [Fialko et Pearse, 2012; Stephansson, 1975]. Si la différence de densité est faible alors la vitesse d'ascension sera faible ; par exemple Stephansson [1975] trouve un temps d'ascension de 100 Ma avec $\Delta\rho = 50\ kg.m^{-3}$ pour expliquer la formation des dômes Svecofenniens (Suède). Selon Platt [1993], les diapirs s'élèvent en une dizaine de Ma jusqu'à 15 - 20 km de profondeur et les dernières étapes de l'exhumation sont dues à la tectonique. Nous trouvons dans nos modèles des temps entre 10-20 Ma avec $\Delta\rho = 100 - 200\ kg.m^{-3}$ et des diapirs exhumés jusque -15 km de profondeur, ce qui est en accord avec la littérature.

La taille des diapirs de migmatites observés est variable, allant du mètre à la centaine de kilomètres (Fig. 3.6.8c) [Whitney et al., 2004b]. Le polydiapirisme est observé seulement dans certains cas avec des structures de sous-dômes de taille $\sim 3-5\ km$. La formation de ces structures peut provenir des processus suivants :

— d'un diapirisme d'hétérogénéités compositionnelles (inclusions de taille sous-kilométrique) ; la taille des structures est liée à la taille initiale des inclusions et ne pourra pas être inférieure à celle-ci,

— d'un diapirisme et d'une convection qui se produisent en même temps (scénario 2) avec des inclusions de taille sous-kilométrique, la taille des structures est liée à la taille initiale des inclusions,

— d'une convection et d'un refroidissement. Ici, seule compte la prise en compte d'hétérogénéités compositionnelles. En effet, quelque soit la taille des inclusions, celles-ci seront désagrégées par la cellule convective. Le refroidissement fera émerger des structures irrégulières d'inclusions désagrégées puis coalescées.

Le dôme du Velay (Massif Central) a un diamètre de 100 km et est composé d'un ensemble de sous-dômes d'un diamètre de $\sim 5-10\ km$ (voir Fig. 3.6.8a). Si l'origine de ces structures est gravitaire alors on pourrait imaginer un scénario en deux étapes, une première étape où le plus gros dôme se serait formé par déformation puis ascension d'une couche horizontale basale, puis dans une seconde étape, formation et ascension d'inclusions de petites tailles.

Les dômes et sous-dômes de Entia (Australie) et de Thor-Odin (Canada) (Fig. 3.6.8b) sont de l'ordre de $30-40\ km$ et $10\ km$ respectivement. Ils pourraient avoir pour origine une agrégation de plusieurs inclusions de grande taille de manière hétérogène.

La majorité des dômes métamorphiques ne sont pas circulaires [Whitney et al., 2004b] (Fig. 3.6.8c). La non circularité peut traduire plusieurs choses :

— une élongation tectonique,

— un rouleau convectif bi-dimensionnel,

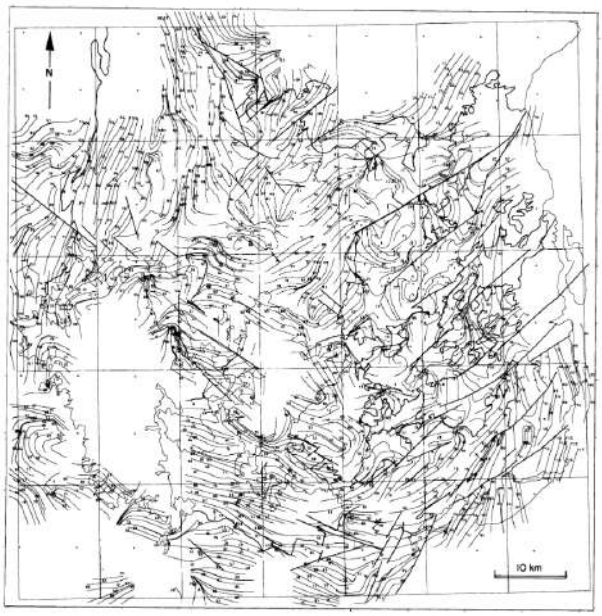
— une formation de structures irrégulières après refroidissement de cellules convectives.

A partir de nos modèles, nous proposons que la forme et la taille des dômes observés sur le terrain peut révéler leur mode de formation :

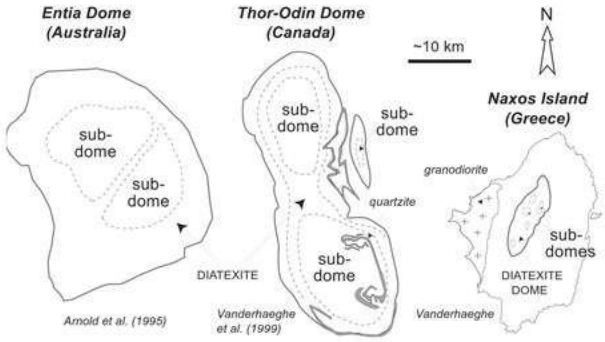
— des petits dômes circulaires reflètent le développement d'une instabilité gravitaire de type diapir (avec ou sans convection, qui si elle est présente se déroule en même temps que le diapirisme) (scénario 1),

— des petits dômes irréguliers reflètent une reformation de structures par diapirisme suite à une convection et un refroidissement (scénario 2),

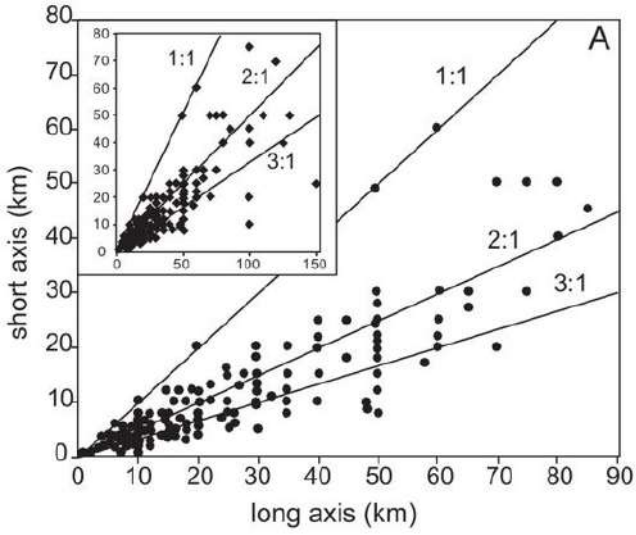
— des gros dômes circulaires reflètent le développement d'une instabilité gravitaire de type diapir, formée soit à partir d'une couche basale horizontale moins dense que la couche



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.6.8 – a) Exemple de large dôme : trajectoires de foliations illustrant la forme des structures (de taille $\sim 5-10\ km$) à l'intérieur du dôme du Velay de taille $\sim 100\ km$ (Massif Central) [LEDRU et al., 2001]. b) Exemples de sous-dômes de taille $\sim 10\ km$: Entia, Thor-Odin et Naxos [VANDERHAEGHE et al., 1999; WHITNEY et al., 2004a]. c) Dimensions de dômes de gneiss rencontrés dans les terrains métamorphiques terrestres [WHITNEY et al., 2004a].

supérieure qui se déstabiliserait sous forme de diapir jusqu'à formation d'une poche régulière peu déformable (diapirisme classique du chapitre 2 [Weinberg, 1992]) ou soit à partir de l'accumulation d'un grand volume de fluide moins dense,

— des gros dômes hétérogènes pourraient traduire une accumulation de petites hétérogénéités successives, par imbrication par en dessous durant l'ascension ($I_1M_0H_{16}$, Fig. 3.4.7).

Par ailleurs, sous les chaînes actives et chaudes actuelles (Altiplano et Tibet), certains auteurs mentionnent la présence de couches de niveaux partiellement fondus s'accumulant à 15-20km de profondeur [Alsdorf et Nelson, 1999; Ross et al., 2004] tandis que d'autres la réfutent (e.g. Hetényi et al. [2007] pour le Tibet).

Concernant l'Altiplano les études géophysiques tendent à indiquer 10-20 % de fusion partielle (e.g. Schilling et al. [2006]). Des études récentes se concentrent sur l'Altiplano-Puna Magma Body (APMB), qui est un bombement d'une centaine de kilomètres situé à ∼23°S, et qui est interprété comme une remontée diapirique d'un corps en fusion partielle, de viscosité environ $10^{16}\ Pa.s$ et de contraste de densité de l'ordre de 400 $kg.m^{-3}$ avec la croûte environnante [Fialko et Pearse, 2012]. La gamme des paramètres est voisine de la notre, une comparaison plus précise pourra être réalisée dans une étude future.

Convection et diapirisme

Durant l'Archéen (entre – 3.9 et – 2.5 milliards d'années), la température du manteau aurait été plus chaude qu'actuellement, la température du Moho aurait été proche de $\sim 900^oC$ [Collins et al., 1998; Thébaud et Rey, 2013; Van Kranendonk et al., 2004; Vanderhaeghe et al., 2019; Wiemer et al., 2018]. Le développement de la convection et la formation de dômes par instabilités gravitaires aurait donc été facilitée et se serait produite de façon beaucoup plus fréquente qu'aujourd'hui. La période archéenne constitue un exemple de domination des forces verticales sur les forces horizontales [Cagnard et al., 2011], ayant précédé la mise en place de la tectonique des plaques [Fischer et Gerya, 2016].

A titre illustratif, le craton du Pilbara est un vestige de la période Archéenne. Van Kranendonk et al. [2004] décrivent la structuration de ce craton (Fig. 3.6.9) en 3 étapes : (a) une première étape de mise en place de roches magmatiques qui s'infiltrent dans la roche environnante sous forme de couche horizontale aux alentours de 25-30 km de profondeur, (b) puis une seconde étape de volcanisme où la croûte entre en fusion partielle et enfin (c) une dernière étape où la convection a lieu. Son historique commence avec une croûte épaisse de $\sim 43\ km$ [Wiemer et al., 2018], une température du Moho autour de $\sim 850-900^oC$. Les paramètres sont très proches de ceux utilisés dans nos modèles. Le résultat final peut être comparé. Les diapirs surplombant des cellules convectives schématisés sur la figure ressemblent aux deux scénarios que nous proposons pour expliquer la formation des dômes de Naxos.

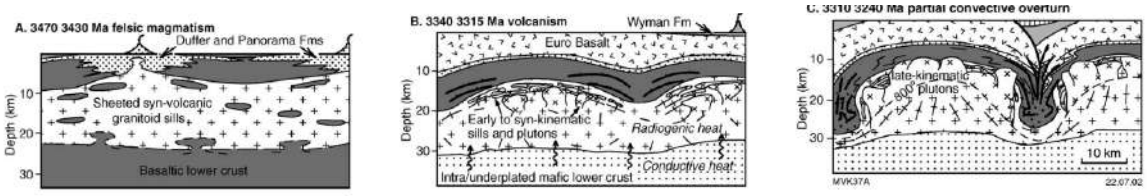


FIGURE 3.6.9 – Schéma de la formation du craton de Pilbara [VAN KRANENDONK et al., 2004]. (A) magmatisme : infiltration des roches magmatiques sous forme d'une couche horizontale entre -25 et -30 km de profondeur. (B) volcanisme : la croûte entre en fusion partielle. (C) convection. Au final, sont observés un dôme principal de taille de $\sim 50\ km$ et sous-dômes de taille $\sim 10\ km$.

3.7 Conclusion du chapitre 3

Dans ce chapitre, nous avons cherché une configuration (via l'implémentation de nouveaux processus) propice à la fois à une convection crustale et au développement de dômes et sous-dômes dont les structures sont préservées à la fin de l'épisode convectif. Pour cela nous avons testé différents éléments comme la fusion partielle, les hétérogénéités compositionnelles et le refroidissement.

Nous avons d'abord étudié la convection dans une croûte en fusion partielle. Avec fusion partielle, on distingue approximativement deux zones : une zone non fondue, caractérisée par une viscosité $\sim 10^{21}\ Pa.s$ et une densité $\sim 2800\ kg.m^{-3}$, et une zone partiellement fondue caractérisée par une viscosité $\sim 10^{17}\ Pa.s$ et une densité $\sim 2700\ kg.m^{-3}$. Au fur et à mesure de l'augmentation de température dans le système, un front de fusion se propage de la croûte inférieure vers le haut et la quantité de fluide partiellement fondu augmente. La zone partiellement fondue commence à convecter sous forme de cellules avec un diamètre $\sim 5\ km$ et l'évolution de la position du front de fusion est proportionnelle au temps, puis ces panaches fusionnent pour former des cellules convectives de 25 km de large. Si la viscosité du fluide non fondu est suffisamment grande, un régime convectif local se forme caractérisé par des cellules convectives de taille $\sim 8\ km$. Cette taille correspond à celle du dôme principal de Naxos. Toutefois, la formation des sous-dômes n'est pas expliquée.

Nous avons ensuite testé l'impact d'hétérogénéités de viscosité et de densité (appelées inclusions) au sein du système sur le développement des instabilités gravitaires. Nous avons étudié les interactions entre les inclusions et la convection. Sous l'effet de leur flottabilité, les inclusions entraînent les isothermes, favorisant le déclenchement de la convection. Elles sont ensuite entraînées dans les cellules convectives et contribuent à diminuer la vitesse moyenne de convection, au point parfois de pouvoir totalement l'inhiber. Lorsque la rhéologie des fluides est non-linéaire et en particulier dépendante du taux de déformation, les interactions inclusions-convection sont beaucoup plus subtiles. En effet, le déplacement des inclusions par effet de flottabilité génère une déformation qui entraîne une diminution locale de la viscosité, pouvant déclencher de la convection (dite "localisée"). A contrario, si les inclusions ont disparu de cette cellule convective locale (car elles ont complètement sédimenté, vers le haut ou vers le bas), la viscosité ré-augmente fortement et le système peut s'arrêter de convecter. Par ailleurs, nos résul-

tats montrent que les inclusions se figent au dessus des cellules convectives, à faible profondeur lorsque la viscosité du MGE est de 10^{19} $Pa.s$.

Nous avons enfin combiné fusion partielle et inclusions. Nos résultats montrent que l'observation des cycles convectifs et des structures en dômes/sous-dômes est possible si les inclusions sont en capacité de sédimenter (vers le haut ou vers le bas) dans les cellules convectives. C'est le cas si i) la convection est "peu vigoureuse" en début de chauffage basal (parce que le fluide supérieur est très visqueux par exemple) ce qui permet à la sédimentation de dominer ; ii) lorsque l'épisode convectif s'arrête suite à un refroidissement ce qui permet aussi à la sédimentation de dominer sur la convection.

Une synthèse des cas étudiés dans ce chapitre nous a permis de caractériser les différents régimes thermiques observés (diffusif, convectif local ou convectif global) en fonction des nombres de Rayleigh dans les roches non fondues et partiellement fondues. Dans le cas d'un régime convectif local, les inclusions légères s'accumulent et forment une couche horizontale ou bien des dômes, à environ 15 km de profondeur. Dans le régime convectif global, les inclusions sont généralement entraînées dans les cellules convectives, et les dômes qui s'agglutinent à environ 15 km de profondeur sont plutôt hétérogènes, composés de MGE et d'inclusions légères. De plus, nous avons déterminé un critère basé sur un nombre de Péclet critique permettant d'estimer le rayon moyen des inclusions et la différence de densité avec le MGE nécessaires à leur sédimentation dans un système en convection. Toutefois, les résultats de nos simulations ne nous ont pas permis de valider complètement ce critère.

Finalement, nous avons trouvé deux scénarios pouvant expliquer la formation des dômes de Naxos. Les deux nécessitent une diminution de la viscosité du MGE. Dans le premier scénario, le processus clé est la dépendance de la viscosité au taux de déformation qui induit une diminution locale de la viscosité lorsque les inclusions sont en mouvement. On a ainsi l'apparition de cellules convectives, qui peuvent s'assimiler à des dômes principaux (de diamètre d'une dizaine de km), surplombées par des sous-dômes (de taille kilométrique).

Dans le second scénario, le processus clé est la combinaison de la fusion partielle, qui modifie la rhéologie et la densité en fonction du taux de melt (qui permet la convection) et d'un refroidissement (qui permet du diapirisme). Dans ce cas, les inclusions sont entraînées dans les cellules convectives puis remontent par diapirisme lors de l'arrêt progressif du chauffage basal.

Ces deux scénarios se distinguent par une gamme distincte de températures extrêmes enregistrées par les traceurs dans les sous-dômes (entre 800^oC et 900^oC pour le scénario 1 et entre 700^oC et 800^oC pour le scénario 2) et par la quantité d'inclusions entraînées dans la convection. Notons toutefois que ces scénarios expliquent bien la formation des sous-dômes de Naxos (dits de second ordre) mais mal celle du dôme principal (de premier ordre) qui englobe les sous-dômes. Une autre possibilité de former des dômes de premier ordre est l'action de forces horizontales qui pourrait avoir progressivement pris de plus en plus d'importance vers la fin de l'orogène (14 Ma, cf. Fig. 1.13). Cet aspect n'est pas traité dans nos modèles.

Enfin, nous avons comparé nos résultats avec quelques autres dômes de migmatites observés sur Terre, et avons trouvé de bons accords à priori entre les régimes thermiques et la taille

des dômes. Nous proposons ainsi des explications pour leur mode de formation.

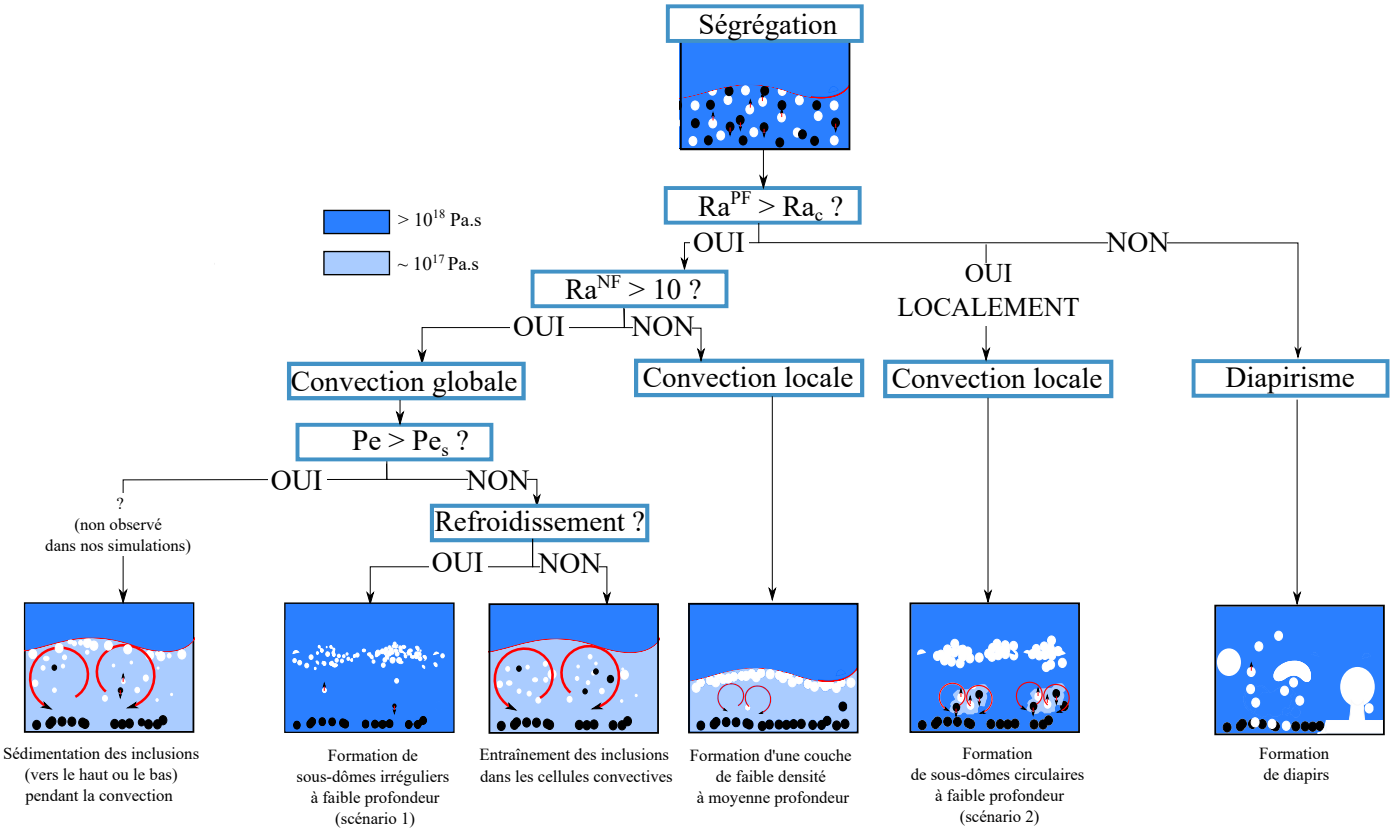


FIGURE 3.7.1 – Synthèse schématique des résultats du chapitre 3

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail était d'étudier le développement d'instabilités gravitaires dans une croûte orogénique chaude. En effet, les conditions physiques (thermique du système, densité et viscosité des roches) contrôlant la convection, le diapirisme et leur interaction restent à ce jour mal contraintes. Or, ces instabilités redistribuent la matière au sein de la croûte et participent à sa différenciation chimique, processus essentiel à son évolution.

La convection et le diapirisme sont des processus nécessitant de capturer rigoureusement les interfaces entre les fluides mis en jeu. L'idée a donc été d'utiliser la méthode numérique de Volume-Of-Fluid (VOF) issue de la mécanique des fluides. Nous avons vérifié dans la première partie de cette thèse qu'il était possible de l'utiliser sur des instabilités gravitaires ayant lieu dans la croûte ou le manteau. Pour cela, nous avons comparé trois codes, deux utilisant une méthode VOF : JADIM et OpenFOAM, et un utilisant la méthode des compositions ASPECT, avec des résultats de la littérature. Un solveur thermique et multiphasique a été implémenté dans le code OpenFOAM à partir d'un solveur multiphasique déjà existant. JADIM et OpenFOAM fournissent des résultats semblables et conservent mieux la masse qu'ASPECT. OpenFOAM fournit des résultats plus rapidement que JADIM, c'est pourquoi nous avons choisi de l'utiliser dans cette thèse.

Comme application majeure de nos simulations numériques, nous avons ensuite essayé de retrouver le scénario du développement des dômes de Naxos avec pour objectif d'expliquer la période de 2 Ma mesurée sur des zircons (interprétée comme étant des cycles convectifs par Vanderhaeghe et al. [2018]) et de retrouver les structures finales en forme de dômes imbriqués : des petits dômes de 2 km dans un dôme majeur de 10 km. Nous avons pour cela d'abord étudié un système mono-couche convectif (RB) et retrouvé les données temporelles de la convection supposée de Naxos. Ensuite, dans un second système, cette fois multi-couches mais sans chauffage basal (RT), nous avons retrouvé la taille des dômes de Naxos. Cette étude nous a permis de cibler la gamme de paramètres (densité, viscosité, température, ...) nécessaire à l'obtention des données spatiales et temporelles issues de l'observation des dômes de Naxos.

Cependant, il restait à expliquer la transition entre convection et diapirisme. Le couplage d'un système avec chauffage basal et avec des couches horizontales (RT+RB) de fluides différents permet d'obtenir des cellules convectives de la période recherchée, mais ne préservent pas les diapirs formés à la base du système qui se trouvent à terme piégés dans la cellule convective.

Nous avons donc dans une dernière partie, complexifié le système en ajoutant du chauffage interne, la fusion partielle, une rhéologie non-linéaire et des hétérogénéités compositionnelles.

Nous avons d'abord étudié la convection avec la fusion partielle et avons trouvé que des cellules convectives de petites tailles se forment à la base du système avant de grandir et de fusionner en une grande cellule convective de la taille du domaine. Ensuite, nous avons étudié des hétérogénéités compositionnelles matérialisées par un réseau d'inclusions sphériques, d'un diamètre de 600 m, de deux types : plus lourdes et visqueuses et plus légères et moins visqueuses que le milieu environnant. Nous avons trouvé que les inclusions légères ségrégaient d'abord avant de se déstabiliser sous forme de diapirs composés de différentes inclusions. Si ces diapirs ne se sont pas formés avant ou pendant la convection, ils sont détruits par celle-ci. Enfin, en associant fusion partielle et inclusions, nous avons trouvé que la présence d'inclusions ralentissait fortement la convection. De plus, sans un refroidissement du système aucune structure diapirique n'est observée (dans le cas associant fusion partielle et inclusions).

Nous avons trouvé deux scénarios qui pourraient être à l'origine des dômes de Naxos. Le premier se compose d'une rhéologie dépendante du taux de déformation et de la température, qui s'apparente à une rhéologie de roches non fondues. La dépendance au taux de déformation permet à la viscosité de descendre localement jusque 10^{17} $Pa.s$ qui est la viscosité permettant au système de convecter. La convection est donc dans ce cas localisée spatiallement et temporellement puisqu'il faut que des inclusions soient en mouvement pour que la viscosité diminue. Une fois que toutes les inclusions ont terminé leur déplacement, la viscosité du système est telle qu'il n'y a plus de convection, et des structures en dôme de taille de 5 km stagnent entre -15 et -20 km de profondeur. Ce scénario signifie que convection et ascension des inclusions se déroulent en même temps.

Le second scénario implique la prise en compte de la fusion partielle (approximée par l'utilisation d'une viscosité et d'une densité qui dépendent d'un taux de melt), qui rend les roches suffisamment peu visqueuses pour pouvoir convecter. Cependant, cette convection ne préserve aucune structure et le milieu est très hétérogène : un grand nombre d'inclusions est entraîné dans la cellule convective. Le refroidissement progressif du système à partir de 5 Ma permet aux inclusions légères de s'élever pour former des dômes irréguliers. Dans ce scénario, la totalité des dômes finaux a enregistré les cycles convectifs, ce qui n'est pas le cas pour le premier scénario où seule la partie basale des dômes a été entraînée par la convection.

Dans ces deux scénarios de petites structures de l'ordre de 2 km sont obtenues à faible profondeur. Le dôme majeur de Naxos pourrait être vu comme un ensemble de sous-dômes ou bien, dans le premier scénario, comme étant le sommet d'une cellule convective. Ces scénarios n'excluent pas qu'une traction horizontale extensive à partir de 16 Ma (invoquée par d'autres auteurs, et à partir de 8 Ma dans nos modèles) soit responsable de la formation du dôme principal.

A partir des différents tests effectués, nous avons pu établir différents régimes thermiques de la convection avec fusion partielle. Par exemple, selon la viscosité des roches non-fondues, la convection de la croûte peut être plus ou moins active. Nous avons également clarifié l'interaction entre convection et inclusions en déterminant pour quels paramètres les inclusions peuvent sédimenter et former des dômes.

L'originalité de ce travail est d'avoir pris en compte des hétérogénéités de taille relativement petite qui approximent les processus de ségrégation à la sous-échelle. C'est la prise en compte de ces hétérogénéités qui permet de former des dômes de petites tailles et surtout de former des dômes pendant ou après une période de convection.

Plusieurs perspectives à ce travail peuvent être envisagées. D'abord, des résultats complémentaires peuvent être obtenus en étudiant l'effet de rhéologies différentes pour le milieu environnant et pour les inclusions. On pourrait également utiliser des températures du solidus et du liquidus différentes pour les inclusions et le MGE, ce qui remplacerait l'utilisation d'une densité unique ρ^{S0}.

Nous pourrions aussi implémenter des efforts horizontaux sur les bords latéraux du domaine qui simuleraient l'effet de la tectonique et permettraient de comparer l'importance relative des forces verticales et horizontales. Nous vérifierions ainsi que les dômes imbriqués de l'île de Naxos proviennent des deux types de force à la fois et si l'une est dominante par rapport à l'autre.

Par ailleurs, nous avons fait une hypothèse forte en considérant des inclusions de 600 m comme étant le résultat du regroupement par migration et coalescence de produits ou résidus de fusion partielle de taille décimétrique. Il conviendrait d'étudier la formation de ces inclusions à cette sous-échelle en prenant en compte divers processus de percolation en milieu poreux ainsi que leur évolution. Bien qu'elle rende compte des principaux effets sur la viscosité et la densité à l'échelle kilométrique où nos modèles se situent, la fusion partielle a été abordée de manière simplifiée. Un aspect thermodynamique tenant compte des changements de phase inhérents à la fusion partielle pourrait être ajouté.

Du point de vue de la mécanique des fluides, l'étude approfondie de la dynamique d'un réseau de gouttes visqueuses pourrait permettre de mieux comprendre les structures formées par l'instabilité de Rayleigh-Taylor et de prédire leurs caractéristiques lorsque ce réseau se situe dans un régime de transition. On pourrait également étudier plus finement l'impact des inclusions sur la convection afin d'élaborer des lois d'échelle, capables de prédire les caractéristiques de la convection en fonction des paramètres des inclusions et du MGE.

Enfin, on peut imaginer d'autres applications au solveur combinant fusion partielle et inclusions. Les processus ayant lieu dans les chambres magmatiques, les océans de magma, les lacs de lave ou encore dans la formation des alliages sont similaires à ceux étudiés dans ce travail. En effet, on peut trouver dans chacune de ces situations des cycles convectifs associés à la présence de particules. Les chambres magmatiques sont des réservoirs où un magma provenant du manteau s'accumule. Si le sommet d'une telle chambre fond partiellement, des particules vont se détacher et sédimenter, affectant la dynamique du réservoir magmatique. Les océans de magma se formant à la suite d'un impact géant sur une planète, convectent et finissent par se refroidir. Alors des cristaux initialement situés en surface vont couler. D'autres cristaux localisés en profondeur, peuvent devenir moins denses que le magma environnant et s'élever. La convection a lieu pendant le refroidissement et l'interaction entre les cristaux et la convection demeure un sujet d'étude. Les lacs de lave dans les cratères de volcans (qui rejettent alors du

fluide et non des cendres) voient leur surface se solidifier au bout d'un certain temps, ce qui forme une croûte qui peut craqueler et plonger dans le fluide sous-jacent. Enfin, du point du vue industriel, lors de la création d'un alliage et de sa solidification, la convection favorise la fragmentation de certains éléments.

Bibliographie

Alsdorf, D. et D. Nelson. 1999, «Tibetan satellite magnetic low : Evidence for widespread melt in the tibetan crust ?», Geology, vol. 27, n° 10, p. 943–946. 173

Androvandi, S., A. Davaille, A. Limare, A. Foucquier et C. Marais. 2011, «At least three scales of convection in a mantle with strongly temperature-dependent viscosity», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 188, n° 3, p. 132 – 141. 22, 24, 25, 157

Arndt, D., W. Bangerth, T. C. Clevenger, D. Davydov, M. Fehling, D. Garcia-Sanchez, G. Harper, T. Heister, L. Heltai, M. Kronbichler et al.. 2019, «The `deal.II` library, version 9.1», Journal of Numerical Mathematics. 48

Arzi, A. A. 1978, «Critical phenomena in the rheology of partially melted rocks», Tectonophysics, vol. 44, n° 1-4, p. 173–184. 15, 114

Avigad, D., A. Ziv et Z. Garfunkel. 2001, «Ductile and brittle shortening, extension-parallel folds and maintenance of crustal thickness in the central Aegean (Cyclades, Greece)», Tectonics, vol. 20, n° 2, p. 277–287. 19

Babeyko, A., O. O. Sobolev S., Trumbull R.B. et L. Lavier. 2002, «Numerical models of crustal scale convection and partial melting beneath the altiplano–puna plateau», Earth and Planetary Science Letters, vol. 199, n° 3, p. 373 – 388. 9, 10, 11, 26, 33, 104, 154, 170

Bangerth, W., J. Dannberg, R. Gassmoeller et T. Heister. 2019, «ASPECT v2.1.0», . 45, 48, 51

Barraud, J. 2001, La ségrégation et la migration des liquides de fusion lors de la déformation des migmatites : modélisation analogique, numérique et exemples de terrain, thèse de doctorat. 14

Benkenida, A. 1999, Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces : application à la dynamique des bulles de Taylor, thèse de doctorat, Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse. 51

Bercovici, D. 2010, Treatise on Geophysics, Volume 7 : Mantle Dynamics, Elsevier. 7, 23, 26, 44

Berner, H., H. Ramberg et O. Stephansson. 1972, «Diapirism in theory and experiment», Tectonophysics, vol. 15, p. 197–218. 44, 62

Biot, M. A. 1966, «Three-dimensional gravity instability derived from two-dimensional solutions», Geophysics, vol. 31, n° 1, p. 153–166. 29, 62, 63

Bittner, D. et H. Schmeling. 1995, «Numerical modelling of melting processes and induced diapirism in the lower crust», Geophysical Journal International, vol. 123, n° 1, p. 59–70. 10, 11, 30, 33, 101

Boillot, G. Introduction a la geologie : La dynamique de la Terre, Dunod, Paris, ISBN 9782100538034. 31

Bonhomme, R., J. Magnaudet, F. Duval et B. Piar. 2012, «Inertial dynamics of air bubbles crossing a horizontal fluid–fluid interface», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 707, p. 405–443. 35, 45

Bonini, M., D. Sokoutis, G. Mulugeta, M. Boccaletti, G. Corti, F. Innocenti, P. Manetti et F. Mazzarini. 2001, «Dynamics of magma emplacement in centrifuge models of continental extension with implications for flank volcanism», Tectonics, vol. 20, n° 6, p. 1053–1065. 31

Bonometti, T. et J. Magnaudet. 2006, «Transition from spherical cap to toroidal bubbles», Transition from spherical cap to toroidal bubbles, vol. 18, n° 5, p. 052 102. 35, 45

Bonometti, T. et J. Magnaudet. 2007, «An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics», International Journal of Multiphase Flow, vol. 33, n° 2, p. 109 – 133. 35, 47

Bouchez, J. L. et H. Diot. 1990, «Nested granites in question : Contrasted emplacement kinematics of independent magmas in the Zaer pluton, Morocco», Geology, vol. 18, n° 10, p. 966–969. 29

Bourgouin, L., H.-B. Mühlhaus, A. J. Hale et A. Arsac. 2006, «Towards realistic simulations of lava dome growth using the level set method», Acta Geotechnica, vol. 1, n° 4, p. 225–236. 35

Brooks, A. et T. Hughes. 1982, «Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations», Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, p. 199–259. 48

Brown, M. 1994, «The generation, segregation, ascent and emplacement of granite magma : the migmatite-to-crustally-derived granite connection in thickened orogens», Earth-Science Reviews, vol. 36, n° 1-2, p. 83–130. 44

Brown, M. 1995, «Mechanisms and consequence of melt segregation from crustal protolith», Journal of Geophysical Research, vol. 100, p. 15 655–15 679. 9

Brown, M. 2010, «Melting of the continental crust during orogenesis : the thermal, rheological, and compositional consequences of melt transport from lower to upper continental crust», Canadian Journal of Earth Sciences, vol. 47, n° 5, p. 655–694. 123

Brun, J., D. Gapais et B. Le Theoff. 1981, «The mantled gneiss domes of Kuopio (Finland) : interfering diapirs», Tectonophysics, vol. 74, n° 3-4, p. 283–304. 7

Brun, J.-P. 1981, Instabilités gravitaires et déformation de la croûte continentale. Application au développement des dômes et des plutons., thèse de doctorat. 9, 29

Brun, J.-P., D. Sokoutis et J. Van Den Driessche. 1994, «Analogue modeling of detachment fault systems and core complexes», Geology, vol. 22, n° 4, p. 319–322. 31, 32

Buick, I. 1991, «The late Alpine evolution of an extensional shear zone, Naxos, Greece», Journal of the Geological Society, vol. 148, n° 1, p. 93–103. 19

Burg, J.-P. et T. Gerya. 2005, «The role of viscous heating in Barrovian metamorphism of collisional orogens : thermomechanical models and application to the Lepontine Dome in the Central Alps», Journal of Metamorphic Geology, vol. 23, n° 2, p. 75–95. 99

Burg, J.-P., B. J. Kaus et Y. Y. Podladchikov. 2004, «Dome structures in collision orogens : Mechanical investigation of the gravity/compression interplay», Special papers -Geological society of America, p. 47–66. 44, 59, 60, 80

Burg, J.-P. et O. Vanderhaeghe. 1993, «Structures and way-up criteria in migmatites, with application to the Velay dome (French Massif Central)», Journal of Structural Geology, vol. 15, n° 11, p. 1293–1301. 44

Burg, J.-P. et J.-L. Vigneresse. 2002, «Non-linear feedback loops in the rheology of cooling-crystallizing felsic magma and heating-melting felsic rock», Geological Society, London, Special Publications, vol. 200, n° 1, p. 275–292. 78, 114

Burgisser, A., G. W. Bergantz et R. E. Breidenthal. 2005, «Addressing complexity in laboratory experiments : the scaling of dilute multiphase flows in magmatic systems», Journal of Volcanology and Geothermal Research, vol. 141, n° 3-4, p. 245–265. 97

Bürgmann, R. et G. Dresen. 2008, «Rheology of the lower crust and upper mantle : Evidence from rock mechanics, geodesy, and field observations», Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol. 36, p. 531–567. 13, 77

Burov, E., C. Jaupart et L. Guillou-Frottier. 2003, «Ascent and emplacement of buoyant magma bodies in brittle-ductile upper crust», Journal of Geophysical Research, vol. 108, n° B4, p. n/a–n/a. 12

Burov, E. B. 2011, «Rheology and strength of the lithosphere», Marine and Petroleum Geology, vol. 28, n° 8, p. 1402 – 1443. 13, 96

Byerlee, J. 1978, «Friction of rocks», dans Rock friction and earthquake prediction, Springer, p. 615–626. 11

Cabot, W. H. et A. W. Cook. 2006, «Reynolds number effects on Rayleigh–Taylor instability with possible implications for type ia supernovae», Nature Physics, vol. 2, n° 8, p. 562–568. 27

Cagnard, F., P. Barbey et D. Gapais. 2011, «Transition between "archaean-type" and "modern-type" tectonics : Insights from the finnish lapland granulite belt», Precambrian Research, vol. 187, n° 1-2, p. 127–142. 173

Calais, U. 2020, «Forces et rhéologie», . 12

Cao, W., B. Kaus et S. Paterson. 2016, «Intrusion of granitic magma into the continental crust facilitated by magma pulsing and dike-diapir interactions : Numerical simulations», Tectonics, vol. 35, n° 6, p. 1575–1594. 10, 33, 78

Caricchi, L., L. Burlini, P. Ulmer, T. Gerya, M. Vassalli et P. Papale. 2007, «Non-newtonian rheology of crystal-bearing magmas and implications for magma ascent dynamics», Earth and Planetary Science Letters, vol. 264, n° 3-4, p. 402–419. 101

Carter, N. L. et M. C. Tsenn. 1987, «Flow properties of continental lithosphere», Tectonophysics, vol. 136, n° 1-2, p. 27–63. 12

Berberović, E., N. P. van Hinsberg, S. Jakirlić, I. V. Roisman et C. Tropea. 2009, «Drop impact onto a liquid layer of finite thickness : Dynamics of the cavity evolution», Physical Review E, vol. 79, p. 036 306. 47

Chandrasekhar, S. 2013, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Courier Corporation. 22, 27, 49, 124, 158

Chen, Y. et W. J. Morgan. 1990, «A nonlinear rheology model for mid-ocean ridge axis topography», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 95, n° B11, p. 17 583–17 604. 101

Chou, Y.-J. et Y.-C. Shao. 2016, «Numerical study of particle-induced Rayleigh-Taylor instability : Effects of particle settling and entrainment», Physics of Fluids, vol. 28, n° 4, p. 043 302. 124

Christensen, U. 1984, «Convection with pressure-and temperature-dependent non-newtonian rheology», Geophysical Journal International, vol. 77, n° 2, p. 343–384. 43

Christensen, U. R. et D. A. Yuen. 1985, «Layered convection induced by phase transitions», Journal of Geophysical Research, vol. 90, n° B12, p. 10 291–10 300. 43

Clark, C., I. C. Fitzsimons, D. Healy et S. L. Harley. 2011, «How does the continental crust get really hot ?», Elements, vol. 7, n° 4, p. 235–240. 10

Clemens, J. et D. Vielzeuf. 1987, «Constraints on melting and magma production in the crust», Earth and Planetary Science Letters, vol. 86, n° 2-4, p. 287–306. 154

Collins, W. 1989, «Polydiapirism of the Archean Mount Edgar Batholith, Pilbara Block, Western Australia», Precambrian Research, vol. 43, n° 1-2, p. 41–62. 29

Collins, W., V. Kranendonk, MJ et C. Teyssier. 1998, «Partial convective overturn of Archaean crust in the east Pilbara Craton, western Australia : driving mechanisms and tectonic implications», Journal of Structural Geology, vol. 20, n° 9-10, p. 1405–1424. 26, 173

Coltice, N., G. Larrouturou, E. Debayle et E. J. Garnero. 2018, «Interactions of scales of convection in the Earth's mantle», Tectonophysics, vol. 746, p. 669–677. 5

Connolly, J. et Y. Y. Podladchikov. 1998, «Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock», Geodinamica Acta, vol. 11, n° 2-3, p. 55–84. 15

Connolly, J. A. et Y. Y. Podladchikov. 2015, «An analytical solution for solitary porosity waves : dynamic permeability and fluidization of nonlinear viscous and viscoplastic rock», Geofluids, vol. 15, n° 1-2, p. 269–292. 15

Corti, G., M. Bonini, S. Conticelli, F. Innocenti, P. Manetti et D. Sokoutis. 2003, «Analogue modelling of continental extension : a review focused on the relations between the patterns of deformation and the presence of magma», Earth-Science Reviews, vol. 63, n° 3-4, p. 169–247. 31

Cruden, A., H. Koyi et H. Schmeling. 1995, «Diapiric basal entrainment of mafic into felsic magma», Earth and Planetary Science Letters, vol. 131, n° 3-4, p. 321–340. 44

Culha, C., J. Suckale, T. Keller et Z. Qin. 2020, «Crystal fractionation by crystal-driven convection», Earth and Space Science Open Archive. 123

Davaille, A. 1999, «Two-layer thermal convection in miscible viscous fluids», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 379, p. 223–253. 32

Davaille, A. et A. Limare. 2015, «7.03 - laboratory studies of mantle convection», dans Treatise on Geophysics (Second Edition), édité par G. Schubert, second edition éd., Elsevier, Oxford, ISBN 978-0-444-53803-1, p. 73 – 144. 32

Davis, S. H., U. Müller et C. Dietsche. 1984, «Pattern selection in single-component systems coupling bénard convection and solidification», Journal of Fluid Mechanics, vol. 144, p. 133–151. 104

Deshpande, S. S., L. Anumolu et M. F. Trujillo. 2012, «Evaluating the performance of the two-phase flow solver interfoam», Computational science discovery, vol. 5, n° 1, p. 014 016. 47

Deubelbeiss, Y. et B. Kaus. 2008, «Comparison of Eulerian and Lagrangian numerical techniques for the stokes equations in the presence of strongly varying viscosity», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 171, n° 1, p. 92 – 111. 34, 44

Deubelbeiss, Y., B. Kaus et J. Connolly. 2010, «Direct numerical simulation of two-phase flow : Effective rheology and flow patterns of particle suspensions», Earth and Planetary Science Letters, vol. 290, n° 1-2, p. 1–12. 124

Dietterich, H. R., E. Lev, J. Chen, J. A. Richardson et K. V. Cashman. 2017, «Benchmarking computational fluid dynamics models of lava flow simulation for hazard assessment, forecasting, and risk management», Journal of Applied Volcanology, vol. 6, n° 1, p. 9. 45

Donea, J. et A. Huerta. 2003, Finite Element Methods for Flow Problems, 350, John Wiley & Sons. 48

Duan, Z., B. He et Y. Duan. 2015, «Sphere drag and heat transfer», Scientific reports, vol. 5, p. 12 304. 49

Dufek, J. et G. Bergantz. 2005, «Lower crustal magma genesis and preservation : a stochastic framework for the evaluation of basalt–crust interaction», Journal of Petrology, vol. 46, n° 11, p. 2167–2195. 103, 114

Dziewonski, A. M. et D. L. Anderson. 1981, «Preliminary reference Earth model», Physics of the earth and planetary interiors, vol. 25, n° 4, p. 297–356. 4

Edmonds, M., K. V. Cashman, M. Holness et M. Jackson. 2019, «Architecture and dynamics of magma reservoirs», . 123, 124

Eglinger, A., O. Vanderhaeghe, A. André-Mayer, P. Goncalves, A. Zeh, C. Durand et E. Deloule. 2016, «Tectono-metamorphic evolution of the internal zone of the Pan-African Lufilian orogenic belt (Zambia) : Implications for crustal reworking and syn-orogenic uranium mineralizations», Lithos, vol. 240, p. 167–188. 44

England, P. C. et A. Thompson. 1986a, «Some thermal and tectonic models for crustal melting in continental collision zones», Geological Society, London, Special Publications, vol. 19, n° 1, p. 83–94. 10, 153

England, P. C. et A. Thompson. 1986b, «Some thermal and tectonic models for crustal melting in continental collision zones», Geological Society, London, Special Publications, vol. 19, n° 1, p. 83–94. 73, 74, 77

England, P. C. et A. B. Thompson. 1984, «Pressure—temperature—time paths of regional metamorphism i. heat transfer during the evolution of regions of thickened continental crust», Journal of Petrology, vol. 25, n° 4, p. 894–928. 9

Esfahani, B. R., S. C. Hirata, S. Berti et E. Calzavarini. 2018, «Basal melting driven by turbulent thermal convection», Physical Review Fluids, vol. 3, n° 5, p. 053 501. 104, 105, 106

Evans, B. et D. L. Kohlstedt. 1995, «Rheology of rocks», Rock Physics and Phase Relations : A Handbook of Physical Constants, AGU Ref. Shelf, vol. 3, p. 148–165. 11

Faccenda, M., T. V. Gerya et S. Chakraborty. 2008, «Styles of post-subduction collisional orogeny : influence of convergence velocity, crustal rheology and radiogenic heat production», Lithos, vol. 103, n° 1-2, p. 257–287. 11

Favier, B., J. Purseed et L. Duchemin. 2019, «Rayleigh–Bénard convection with a melting boundary», Journal of Fluid Mechanics, vol. 858, p. 437–473. 104, 105, 106, 108, 158, 159, I, II

Fernandez, N. et B. J. Kaus. 2015, «Pattern formation in 3-d numerical models of down-built diapirs initiated by a Rayleigh–Taylor instability», Geophysical Journal International, vol. 202, n° 2, p. 1253–1270. 62

Fialko, Y. et J. Pearse. 2012, «Sombrero uplift above the altiplano-puna magma body : Evidence of a ballooning mid-crustal diapir», Science, vol. 338, n° 6104, p. 250–252. 170, 173

Fischer, R. et T. Gerya. 2016, «Early earth plume-lid tectonics : A high-resolution 3d numerical modelling approach», Journal of Geodynamics, vol. 100, p. 198–214. 173

Fleitout, L. et C. Froidevaux. 1980, «Thermal and mechanical evolution of shear zones», Journal of Structural Geology, vol. 2, n° 1-2, p. 159–164. 10

Forsyth, D. et S. Uyeda. 1975, «On the relative importance of the driving forces of plate motion», Geophysical Journal International, vol. 43, n° 1, p. 163–200. 5

Ganne, J., M. Gerbault et S. Block. 2014, «Thermo-mechanical modeling of lower crust exhumation—constraints from the metamorphic record of the palaeoproterozoic eburnean orogeny, west african craton», Precambrian Research, vol. 243, p. 88–109. 33, VI

Gassmöller, R., H. Lokavarapu, W. Bangerth et G. Puckett. 2019, «Evaluating the accuracy of hybrid finite element/particle-in-cell methods for modelling incompressible stokes flow», "Geophysical Journal International", vol. 219, n° 3, p. 1915–1938. 48

Gassmöller, R., H. Lokavarapu, E. Heien, E. G. Puckett et W. Bangerth. 2018, «Flexible and scalable particle-in-cell methods with adaptive mesh refinement for geodynamic computations», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 19, n° 9, p. 3596–3604. 48

Gautier, P. et J.-P. Brun. 1994, «Crustal-scale geometry and kinematics of late-orogenic extension in the central Aegean (Cyclades and Ewia Island)», Tectonophysics, vol. 238, n° 1-4, p. 399–424. 19

Gerbault, M., J. Schneider, A. Reverso-Peila et M. Corsini. 2018, «Crustal exhumation during ongoing compression in the Variscan Maures-Tanneron Massif, France-Geological and thermo-mechanical aspects», Tectonophysics, vol. 746, p. 439–458. 10, 33, 34, 44, 77, 78, 101

Gerya, T., L. Perchuk et J.-P. Burg. 2008, «Transient hot channels : perpetrating and regurgitating ultrahigh-pressure, high-temperature crust–mantle associations in collision belts», Lithos, vol. 103, n° 1-2, p. 236–256. 7, 44, 78

Gerya, T. V. et J.-P. Burg. 2007, «Intrusion of ultramafic magmatic bodies into the continental crust : Numerical simulation», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 160, n° 2, p. 124 – 142. 10, 33

Gerya, T. V., L. L. Perchuk, D. D. van Reenen et C. A. Smit. 2000, «Two-dimensional numerical modeling of pressure–temperature-time paths for the exhumation of some granulite facies terrains in the precambrian», Journal of Geodynamics, vol. 30, n° 1-2, p. 17–35. 7

Gerya, T. V. et D. A. Yuen. 2003a, «Characteristics-based marker-in-cell method with conservative finite-differences schemes for modeling geological flows with strongly variable transport properties», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 140, n° 4, p. 293–318. 34

Gerya, T. V. et D. A. Yuen. 2003b, «Rayleigh–Taylor instabilities from hydration and melting propel 'cold plumes' at subduction zones», Earth and Planetary Science Letters, vol. 212, n° 1-2, p. 47–62. 99

Glazner, A. F. et D. M. Miller. 1997, «Late-stage sinking of plutons», Geology, vol. 25, n° 12, p. 1099–1102. 154

Graveleau, F., J. Malavieille et S. Dominguez. 2012, «Experimental modelling of orogenic wedges : A review», Tectonophysics, vol. 538, p. 1–66. 30, 31

Griffiths, R. W. 1986, «Particle motions induced by spherical convective elements in stokes flow», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 166, p. 139–159. 31

Grossmann, S. et D. Lohse. 2001, «Thermal convection for large Prandtl numbers», Physical review letters, vol. 86, n° 15, p. 3316. 159

Guergouz, C., L. Martin, O. Vanderhaeghe, N. Thébaud et M. Fiorentini. 2018, «Zircon and monazite petrochronologic record of prolonged amphibolite to granulite facies metamorphism in the ivrea-verbano and strona-ceneri zones, nw italy», Lithos, vol. 308, p. 1–18. 77, 166

Guermond, J., R. Pasquetti et B. Popov. 2011, «Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws», Journal of Computational Physics, vol. 230, n° 11, p. 4248–4267. 48

Guillou-Frottier, L. et C. Jaupart. 1995, «On the effect of continents on mantle convection», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 100, n° B12, p. 24 217–24 238. 23

Hacker, B. R., P. B. Kelemen et M. D. Behn. 2015, «Continental lower crust», Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol. 43, p. 167–205. 75

Harada, S., T. Mitsui et K. Sato. 2012, «Particle-like and fluid-like settling of a stratified suspension», The European Physical Journal E, vol. 35, n° 1, p. 1–6. 124, 125, 128

He, Y., E. Puckett et M. Billen. 2017, «A discontinuous Galerkin method with a bound preserving limiter for the advection of non-diffusive fields in solid Earth geodynamics», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 263, p. 23–37. 48

Heister, T., J. Dannberg, R. Gassmöller et W. Bangerth. 2017, «High accuracy mantle convection simulation through modern numerical methods–ii : realistic models and problems», Geophysical Journal International, vol. 210, n° 2, p. 833–851. 44, 45, 48

Herzberg, C., W. Fyfe et M. Carr. 1983, «Density constraints on the formation of the continental moho and crust», Contributions to Mineralogy and Petrology, vol. 84, n° 1, p. 1–5. 154

Hetényi, G., R. Cattin, F. Brunet, L. Bollinger, J. Vergne, J. L. Nábělek et M. Diament. 2007, «Density distribution of the india plate beneath the tibetan plateau : Geophysical and petrological constraints on the kinetics of lower-crustal eclogitization», Earth and Planetary Science Letters, vol. 264, n° 1-2, p. 226–244. 173

Hillebrand, B., C. Thieulot, T. Geenen, A. P. van den Berg et W. Spakman. 2014, «Using the level set method in geodynamical modeling of multi-material flows and earth's free surface», Solid Earth, vol. 5, n° 2, p. 1087–1098. 44

Hirt, C. et B. Nichols. 1981, «Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries», J. Computational Physics, vol. 39, n° 1, p. 201 – 225. 34, 46

Hirth, G. et D. L. Kohlstedt. 1995, «Experimental constraints on the dynamics of the partially molten upper mantle : Deformation in the diffusion creep regime», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 100, n° B2, p. 1981–2001. 11

Hopkins, M., T. M. Harrison et C. E. Manning. 2008, «Low heat flow inferred from> 4 gyr zircons suggests hadean plate boundary interactions», Nature, vol. 456, n° 7221, p. 493–496. 9

Howard, L. N. 1966, «Convection at high Rayleigh number», dans Appl. Mech., édité par H. Görtler, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-662-29364-5, p. 1109–1115. 111

Huet, B., L. Le Pourhiet, L. Labrousse, E. Burov et L. Jolivet. 2011, «Post-orogenic extension and metamorphic core complexes in a heterogeneous crust : the role of crustal layering inherited from collision. Application to the Cyclades (Aegean domain)», Geophysical Journal International, vol. 184, n° 2, p. 611–625. 33

Höink, T., J. Schmalzl et U. Hansen. 2005, «Formation of compositional structures by sedimentation in vigorous convection», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 153, n° 1, p. 11 – 20. 125, 126, 159

Isacks, B., J. Oliver et L. R. Sykes. 1968, «Seismology and the new global tectonics», Journal of Geophysical Research, vol. 73, n° 18, p. 5855–5899. 4

Issa, R. 1986, «Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting», Journal of computational physics, vol. 62, n° 1, p. 40 – 65. 48

Jansen, J. B. H. et R. D. Schuiling. 1976, «Metamorphism on naxos ; petrology and geothermal gradients», American Journal of Science, vol. 276, n° 10, p. 1225–1253. 19

Jasak, H., A. Jemcov et Z. Tukovic. 2007, «OpenFOAM : A C++ library for complex physics simulations», vol. 1000, p. 1 – 20. 45

Jasak, H., H. Weller et A. Gosman. 1999, «High resolution nvd differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes», International journal for numerical methods in fluids, vol. 31, n° 2, p. 431–449. 47

Jolivet, L. et J.-P. Brun. 2010, «Cenozoic geodynamic evolution of the Aegean», International Journal of Earth Sciences, vol. 99, n° 1, p. 109–138. 17

Jolivet, L., A. Menant, P. Sternai, A. Rabillard, L. Arbaret, R. Augier, V. Laurent, A. Beaudoin, B. Grasemann, B. Huet et al.. 2015, «The geological signature of a slab tear below the Aegean», Tectonophysics, vol. 659, p. 166–182. 16

Jull, M. et P. á. Kelemen. 2001, «On the conditions for lower crustal convective instability», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 106, n° B4, p. 6423–6446. 44, 78, 99

Katz, R. F. et S. M. Weatherley. 2012, «Consequences of mantle heterogeneity for melt extraction at mid-ocean ridges», Earth and Planetary Science Letters, vol. 335, p. 226–237. 97, 123, 144

Kaus, B. 2004, Modelling approaches to geodynamic processes, thèse de doctorat, Swiss Federal Institute of Technology. 44, 62

van Keken, P. E., S. D. King, H. Schmeling, U. R. Christensen, D. Neumeister et M.-P. Doin. 1997, «A comparison of methods for the modeling of thermochemical convection», Journal of Geophysical Research, vol. 102, n° B10, p. 22 477–22 495. 39, 40, 45, 49, 50, 51, 53, 54, 69, 83

Kelsey, D., C. Clark et M. Hand. 2008, «Thermobarometric modelling of zircon and monazite growth in melt-bearing systems : Examples using model metapelitic and metapsammitic granulites», Journal of Metamorphic Geology, vol. 26, n° 2, p. 199–212. 166

Kirby, S. H. 1985, «Rock mechanics observations pertinent to the rheology of the continental lithosphere and the localization of strain along shear zones», Tectonophysics, vol. 119, n° 1-4, p. 1–27. 11, 12

Kohlstedt, D., B. Evans et S. Mackwell. 1995, «Strength of the lithosphere : Constraints imposed by laboratory experiments», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 100, n° B9, p. 17 587–17 602. 11

Korenaga, J. 2018, «Crustal evolution and mantle dynamics through earth history», Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 376, n° 2132, p. 20170 408. 43

Koyaguchi, T., M. A. Hallworth, H. E. Huppert et R. S. J. Sparks. 1990, «Sedimentation of particles from a convecting fluid», Nature, vol. 343, n° 6257, p. 447. 97, 124

Kraichnan, R. H. 1962, «Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number», The Physics of Fluids, vol. 5, n° 11, p. 1374–1389. 25, 108

Krishnamurti, R. 1970, «On the transition to turbulent convection. part 1. the transition from two- to three-dimensional flow», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 42, n° 2, p. 295–307. 22, 23, 74, 75

Kronbichler, M., T. Heister et W. Bangerth. 2012, «High accuracy mantle convection simulation through modern numerical methods», Geophysical Journal International, vol. 191, n° 1, p. 12–29. 45, 48

Kruckenberg, S., O. Vanderhaeghe, E. Ferré, C. Teyssier, et D. Whitney. 2011, «Flow of partially molten crust and the internal dynamics of a migmatite dome, Naxos, Greece», Tectonics, vol. 30, n° 3, p. n/a–n/a. 8, 18, 19, 77

Lavorel, G. et M. Le Bars. 2009, «Sedimentation of particles in a vigorously convecting fluid», Physical Review E, vol. 80, n° 4, p. 046 324. 125, 126, 159

Le Bars, M. 2003, Convection thermique dans un fluide visqueux hétérogène : phénoménologie, lois d'échelle et applications aux systèmes terrestres, thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe. 32, 33, 69, 136, 160

Le Bars, M. et A. Davaille. 2004, «Large interface deformation in two-layer thermal convection of miscible viscous fluids», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 499, p. 75–110. 32, 40, 45, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 87

Le Pichon, X. 1968, «Sea-floor spreading and continental drift», Journal of Geophysical Research, vol. 73, n° 12, p. 3661–3697. 4

Le Pourhiet, L., B. Huet, D. A. May, L. Labrousse et L. Jolivet. 2012, «Kinematic interpretation of the 3d shapes of metamorphic core complexes», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 13, n° 9. 33

Ledru, P., G. Courrioux, C. Dallain, J. Lardeaux, J. Montel, O. Vanderhaeghe et G. Vitel. 2001, «The Velay dome (French Massif Central) : melt generation and granite emplacement during orogenic evolution», Tectonophysics, vol. 342, n° 3-4, p. 207–237. 172

Limare, A., K. Vilella, E. Di Giuseppe, C. Farnetani, E. Kaminski, E. Surducan, V. Surducan, C. Neamtu, L. Fourel et C. Jaupart. 2015, «Microwave-heating laboratory experiments for planetary mantle convection», Journal Of Fluid Mechanics, vol. 777, p. 50–67. 32

Louis-Napoléon, A., M. Gerbault, T. Bonometti, C. Thieulot, R. Martin et O. Vanderhaeghe. 2020, «3-d numerical modelling of crustal polydiapirs with Volume-Of-Fluid methods», Geophysical Journal International, vol. 222, n° 1, p. 474–506. 37

Malvoisin, B., Y. Y. Podladchikov et J. C. Vrijmoed. 2015, «Coupling changes in densities and porosity to fluid pressure variations in reactive porous fluid flow : local thermodynamic equilibrium», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 16, n° 12, p. 4362–4387. 99

Manga, M. et D. Weeraratne. 1999, «Experimental study of non-Boussinesq Rayleigh-Bénard convection at high Rayleigh and Prandtl numbers», Physics of Fluids, vol. 11, n° 10, p. 2969–2976. 23

McKenzie, D. 1984, «The generation and compaction of partially molten rock», Journal of petrology, vol. 25, n° 3, p. 713–765. 15

Menant, A., L. Jolivet, J. Tuduri, C. Loiselet, G. Bertrand et L. Guillou-Frottier. 2018, «3D subduction dynamics : A first-order parameter of the transition from copper- to gold-rich deposits in the eastern Mediterranean region», Ore Geol. Rev., vol. 94, p. 118 – 135. 44

Michioka, H. et I. Sumita. 2005, «Rayleigh-Taylor instability of a particle packed viscous fluid : Implications for a solidifying magma», Geophysical research letters, vol. 32, n° 3. 124

Moitra, P. et H. Gonnermann. 2015, «Effects of crystal shape-and size-modality on magma rheology», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 16, n° 1, p. 1–26. 124

Van der Molen, I. et M. Paterson. 1979, «Experimental deformation of partially-melted granite», Contributions to Mineralogy and Petrology, vol. 70, n° 3, p. 299–318. 114

Molina, I., A. Burgisser et C. Oppenheimer. 2012, «Numerical simulations of convection in crystal-bearing magmas : A case study of the magmatic system at Erebus, Antarctica», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 117, n° B7. 125

Molnar, P. et P. England. 1990, «Temperatures, heat flux, and frictional stress near major thrust faults», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 95, n° B4, p. 4833–4856. 10

Moresi, L., F. Dufour et H.-B. Mühlhaus. 2003, «A lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials», Journal of computational physics, vol. 184, n° 2, p. 476–497. 34

Morgan, W. J. 1968, «Rises, trenches, great faults, and crustal blocks», Journal of Geophysical Research, vol. 73, n° 6, p. 1959–1982. 4

Nataf, H.-C., B. Hager et R. Scott. 1984, «Convection experiments in a centrifuge and the generation of plumes in a very viscous fluid», dans Annales Geophysicae, vol. 2, European Geosciences Union, p. 303–309. 23

Nicollet, C. 2017, Métamorphisme et géodynamique : Cours, Exercices corrigés, 16 planches couleurs, Dunod, Paris, ISBN 9782100771349. 6

Orgogozo, L., N. Renon, C. Soulaine, F. Hénon, S. Tomer, D. Labat, O. Pokrovsky, M. Sekhar, R. Ababou et M. Quintard. 2014, «An open source massively parallel solver for richards equation : Mechanistic modelling of water fluxes at the watershed scale», Computer Physics Communications, vol. 185, n° 12, p. 3358 – 3371. 45

Osher, S. et J. A. Sethian. 1988, «Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations», Journal of computational physics, vol. 79, n° 1, p. 12–49. 34

Pan, T.-W., D. D. Joseph et R. Glowinski. 2001, «Modelling Rayleigh-Taylor instability of a sedimenting suspension of several thousand circular particles in a direct numerical simulation», Journal of Fluid Mechanics, vol. 434, p. 23. 124

Patocka, V., E. Calzavarini et N. Tosi. 2020, «Settling of inertial particles in turbulent Rayleigh-Benard convection», arXiv preprint arXiv :2005.05448. 125

Pedrono, A., A. Louis-Napoléon, P. Elyakime, M. Pigou, N. Renon et M. Duval. 2019, «Portage efficace d'un code de calcul en mécanique des fluides sur GPUs sans coder une ligne de CUDA (ou presque)», . 89, 90

Perchuk, L., Y. Y. Podladchikov et A. Polyakov. 1992, «Hydrodynamic modelling of some metamorphic processes», Journal of Metamorphic Geology, vol. 10, n° 3, p. 311–319. 44

Perry, H., C. Jaupart, J.-C. Mareschal et G. Bienfait. 2006, «Crustal heat production in the Superior Province, Canadian Shield, and in North America inferred from heat flow data», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 111, n° B4. 9

Piccolo, A., R. M. Palin, B. J. Kaus et R. W. White. 2019, «Generation of earth's early continents from a relatively cool Archean mantle», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 20, n° 4, p. 1679–1697. 78

Pinkerton, H. et R. Stevenson. 1992, «Methods of determining the rheological properties of magmas at sub-liquidus temperatures», Journal of Volcanology and Geothermal Research, vol. 53, n° 1, p. 47 – 66. 101

Platt, J. 1993, «Exhumation of high-pressure rocks : A review of concepts and processes», Terra nova, vol. 5, n° 2, p. 119–133. 7, 170

Poliakov, A., P. Cundall, Y. Podlachikov et V. Lyakhovsky. 1993, «An explicit inertial method for the simulation of viscoelastic flow : an evaluation of elastic effects on diapiric flow in two and three layers models», Kluwer Academic Publishers, p. 175–195. 44

Polyansky, O., V. Reverdatto, A. Babichev et V. Sverdlova. 2016, «The mechanism of magma ascent through the solid lithosphere and relation between mantle and crustal diapirism : numerical modeling and natural examples», Russian Geology and Geophysics, vol. 57, n° 6, p. 843 – 857. 33

Popov, I. Y., I. Lobanov, S. Popov, A. Popov et T. Gerya. 2014, «Practical analytical solutions for benchmarking of 2-d and 3-d geodynamic stokes problems with variable viscosity», Solid Earth, vol. 5, n° 1, p. 461–476. 68

Puckett, E., D. L. Turcotte, Y. He, H. Lokavarapu, J. M. Robey et L. H. Kellogg. 2018, «New numerical approaches for modeling thermochemical convection in a compositionally stratified fluid», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 276, p. 10 – 35. 35, 45, 46

Purseed, J., B. Favier, L. Duchemin et E. W. Hester. 2020, «Bistability in Rayleigh-Bénard convection with a melting boundary», Physical Review Fluids, vol. 5, n° 2, p. 023 501. 104, 105

Pusok, A. E., B. J. Kaus et A. A. Popov. 2017, «On the quality of velocity interpolation schemes for marker-in-cell method and staggered grids», Geophysics, vol. 174, n° 3, p. 1071–1089. 45

Rabinowicz, M. et G. Ceuleneer. 2005, «The effect of sloped isotherms on melt migration in the shallow mantle : a physical and numerical model based on observations in the oman ophiolite», Earth and Planetary Science Letters, vol. 229, n° 3-4, p. 231–246. 123

Rabinowicz, M., P. Genthon, G. Ceuleneer et M. Hillairet. 2001, «Compaction in a mantle mush with high melt concentrations and the generation of magma chambers», Earth and Planetary Science Letters, vol. 188, n° 3-4, p. 313–328. 15

Ramberg, H. 1967, «Gravity, deformation and the earth's crust, as studied by centrifuged models», L. : Academic Press.–1967.–217 P. 32

Ramberg, H. 1968a, «Fluid dynamics of layered systems in the field of gravity, a theoretical basis for certain global structures and isostatic adjustment», Physics Earth Planet. Int., vol. 1, n° 2, p. 63 – 87. 49

Ramberg, H. 1968b, «Instability of layered systems in the field of gravity. ii», Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 1, n° 7, p. 448 – 474. 29, 31

Ramberg, H. 1972, «Theoretical models of density stratification and diapirism in the earth», Journal of Geophysical Research, vol. 77, n° 5, p. 877–889. 44

Ramberg, H. 1980, «Diapirism and gravity collapse in the scandinavian caledonides», Journal of the Geological Society, vol. 137, n° 3, p. 261–270. 44

Ramberg, H. 1981a, Gravity, deformation, and the earth s crust : In theory, experiments, and geological application, 452, Academic press. 28, 29, 31, 39, 40, 44, 49, 50, 54, 57, 58, 59, 60, 68, 69, 79, 81, 84, 128, 131

Ramberg, H. 1981b, «The role of gravity in orogenic belts», Geological Society, London, Special Publications, vol. 9, n° 1, p. 125–140. 70

Ranalli, G. 1995, Rheology of the Earth, Springer Science & Business Media. 11, 106

Ranalli, G. 2001, «Experimental tectonics : from sir james hall to the present», Journal of Geodynamics, vol. 32, n° 1-2, p. 65–76. 31

Ratcliff, J. T., P. J. Tackley, G. Schubert et A. Zebib. 1997, «Transitions in thermal convection with strongly variable viscosity», Physics of the earth and planetary interiors, vol. 102, n° 3-4, p. 201–212. 23

Rey, P., C. Teyssier et D. L. Whitney. 2009, «The role of partial melting and extensional strain rates in the development of metamorphic core complexes», Tectonophysics, vol. 477, n° 3-4, p. 135–144. 101

Rey, P. F., C. Teyssier, S. C. Kruckenberg et D. L. Whitney. 2011, «Viscous collision in channel explains double domes in metamorphic core complexes», Geol., vol. 39, n° 4, p. 387–390. 19, 30, 33

Ribe, N. M. 1983, «Diapirism in the Earth's mantle : Experiments on the motion of a hot sphere in a fluid with temperature-dependent viscosity», Journal of Volcanology and Geothermal Research, vol. 16, n° 3-4, p. 221–245. 31

Riel, N., J. Mercier et R. Weinberg. 2016, «Convection in a partially molten metasedimentary crust ? insights from the el oro complex (ecuador)», Geol., vol. 44, n° 1, p. 31. 10, 44, 78, 104, 170

Roberts, P. 1967, «Convection in horizontal layers with internal heat generation. theory», Journal of Fluid Mechanics, vol. 30, n° 1, p. 33–49. 26

Robey, J. M. et E. G. Puckett. 2019, «Implementation of a volume-of-fluid method in a finite element code with applications to thermochemical convection in a density stratified fluid in the earth's mantle», Computers & Fluids, vol. 190, p. 217–253. 35, 48

Rosenberg, C. et M. Handy. 2005, «Experimental deformation of partially melted granite revisited : implications for the continental crust», Journal of metamorphic Geology, vol. 23, n° 1, p. 19–28. 15, 75, 101

Ross, A. R., L. D. Brown, P. Pananont, K. Nelson, S. Klemperer, S. Haines, Z. Wenjin et G. Jingru. 2004, «Deep reflection surveying in central tibet : lower-crustal layering and crustal flow», Geophysical Journal International, vol. 156, n° 1, p. 115–128. 173

Rudnick, R. L. et D. M. Fountain. 1995, «Nature and composition of the continental crust : a lower crustal perspective», Reviews of geophysics, vol. 33, n° 3, p. 267–309. 44

Rutter, E., J. Mecklenburgh et K. Brodie. 2011, «Rock mechanics constraints on mid-crustal low-viscosity flow beneath tibet», Geological Society, London, Special Publications, vol. 360, n° 1, p. 329–336. 101

Samuel, H. et M. Evonuk. 2010, «Modeling advection in geophysical flows with particle level sets», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 11, n° 8. 35

Sawyer, E. 1994, «Melt segregation in the continental crust», Geology, vol. 22, n° 11, p. 1019–1022. 44

Scardovelli, R. et S. Zaleski. 1999, «Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow», Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 31, n° 1, p. 567–603. 35

Schellart, W. P. et V. Strak. 2016, «A review of analogue modelling of geodynamic processes : Approaches, scaling, materials and quantification, with an application to subduction experiments», Journal of Geodynamics, vol. 100, p. 7 – 32. 30, 31

Schenker, L., Filippo, T. Gerya et J.-P. Burg. 2012, «Bimodal behavior of extended continental lithosphere : Modeling insight and application to thermal history of migmatitic core complexes», Tectonophysics, vol. 579, p. 88–103. 11, 26, 33, 34, 170

Schilling, F. R., R. B. Trumbull, H. Brasse, C. Haberland, G. Asch, D. Bruhn, K. Mai, V. Haak, P. Giese, M. Muñoz et al.. 2006, «Partial melting in the central andean crust : a review of geophysical, petrophysical, and petrologic evidence», dans The Andes, Springer, p. 459–474. 173

Schmalholz, S. et Y. Podladchikov. 1999, «Buckling versus folding : importance of viscoelasticity», Geophysical Research Letters, vol. 26, nº 17, p. 2641–2644. 44

Schmeling, H., A. Babeyko, A. Enns, C. Faccenna, F. Funiciello, T. Gerya, G. Golabek, S. Grigull, B. Kaus, G. Morra, S. Schmalholz et J. van Hunen. 2008, «A benchmark comparison of spontaneous subduction models—towards a free surface», Phys.s Earth Planet. Int., vol. 171, nº 1, p. 198 – 223. 33, 34, 45, 46, 51

Schmeling, H., G. Marquart, R. Weinberg et H. Wallner. 2019a, «Modelling melting and melt segregation by two-phase flow : new insights into the dynamics of magmatic systems in the continental crust», Geophysical Journal International, vol. 217, nº 1, p. 422–450. 78

Schmeling, H., G. Marquart, R. Weinberg et H. Wallner. 2019b, «Modelling melting and melt segregation by two-phase flow : new insights into the dynamics of magmatic systems in the continental crust», Geophysical Journal International, vol. 217, nº 1, p. 422–450. 99

Schubert, G. et D. Turcotte. 1971, «Phase changes and mantle convection», Journal of Geophysical Research, vol. 76, nº 5, p. 1424–1432. 44

Selig, F. 1965, «A theoretical prediction of salt dome patterns», Geophys., vol. 30, nº 4, p. 633–643. 44

Shibano, Y., I. Sumita et A. Namiki. 2013, «A laboratory model for melting erosion of a magma chamber roof and the generation of a rhythmic layering», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 118, nº 8, p. 4101–4116. 25, 108, 124

Sizova, E., C. Hauzenberger, H. Fritz, S. W. Faryad et T. Gerya. 2019, «Late orogenic heating of (ultra) high pressure rocks : Slab rollback vs. slab breakoff», Geosciences, vol. 9, nº 12, p. 499. 5, 6, 11, 33

Solano, J. M. S., M. D. Jackson, R. S. J. Sparks, J. D. Blundy et C. Annen. 2012, «Melt Segregation in Deep Crustal Hot Zones : a Mechanism for Chemical Differentiation, Crustal Assimilation and the Formation of Evolved Magmas», Journal of Petrology, vol. 53, nº 10, p. 1999–2026. 10

Sparks, R. S. J. et H. E. Huppert. 1984, «Density changes during the fractional crystallization of basaltic magmas : fluid dynamic implications», Contributions to Mineralogy and Petrology, vol. 85, n° 3, p. 300–309. 154

Stephansson, O. 1975, «Polydiapirism of granitic rocks in the svecofennian of central sweden», Precambrian Research, vol. 2, n° 2, p. 189–214. 29, 170

Stevenson, D. 1986, «On the role of surface tension in the migration of melts and fluids», Geophysical Research Letters, vol. 13, n° 11, p. 1149–1152. 15

Tackley, P. et S. King. 2003, «Testing the tracer ratio method for modeling active compositional fields in mantle convection simulations», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 4, n° 4. 51, 54

Takei, Y. et B. K. Holtzman. 2009, «Viscous constitutive relations of solid-liquid composites in terms of grain boundary contiguity : 1. grain boundary diffusion control model», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 114, n° B6. 101

Talbot, C. 1971, «Thermal convection below the solidus in a mantled gneiss dome, fungwi reserve, rhodesia», Journal of The Geological Society - J GEOL SOC, vol. 127, p. 377–410. 29

Talbot, C., P. Ronnlund, H. Schmeling, H. Koyi et M. Jackson. 1991, «Diapiric spoke patterns», Tectonophysics, vol. 188, n° 1, p. 187 – 201. 62

Tapponnier, P., G. Peltzer, A. Le Dain, R. Armijo et P. Cobbold. 1982, «Propagating extrusion tectonics in asia : New insights from simple experiments with plasticine», Geology, vol. 10, n° 12, p. 611–616. 31

Taylor, S. R. et S. M. McLennan. 1985, «The continental crust : its composition and evolution», . 44

Thébaud, N. et P. Rey. 2013, «Archean gravity-driven tectonics on hot and flooded continents : controls on long-lived mineralised hydrothermal systems away from continental margins», Precambrian Research, vol. 229, p. 93–104. 173

Thompson, A. B. 1999, «Some time-space relationships for crustal melting and granitic intrusion at various depths», Geological Society, London, Special Publications, vol. 168, n° 1, p. 7–25. 9

Thompson, A. B. et J. A. Connolly. 1995, «Melting of the continental crust : some thermal and petrological constraints on anatexis in continental collision zones and other tectonic settings», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 100, n° B8, p. 15 565–15 579. 7, 9, 10

Thompson, A. B. et P. C. England. 1984, «Pressure–temperature–time paths of regional metamorphism ii. their inference and interpretation using mineral assemblages in metamorphic rocks», Journal of Petrology, vol. 25, n° 4, p. 929–955. 73

Tirel, C., J.-P. Brun et E. Burov. 2008, «Dynamics and structural development of metamorphic core complexes», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 113, n° B4. 33

Tirel, C., F. Gueydan, C. Tiberi et J.-P. Brun. 2004, «Aegean crustal thickness inferred from gravity inversion. geodynamical implications», Earth and Planetary Science Letters, vol. 228, n° 3-4, p. 267–280. 17, 33

Toé, W., O. Vanderhaeghe, A.-S. André-Mayer, J.-L. Feybesse et J.-P. Milési. 2013, «From migmatites to granites in the Pan-African Damara orogenic belt, Namibia», Journal of African Earth Sciences, vol. 85, p. 62–74. 44

Trompert, R. et U. Hansen. 1998, «On the Rayleigh number dependence of convection with a strongly temperature-dependent viscosity», Physics of Fluids, vol. 10, n° 2, p. 351–360. 23

Turcotte, D. et G. Schubert. 1982, Geodynamics applications of continuum physics to geological problems, New York, NY (US) ; John Wiley and Sons, Inc. 5, 8, 9, 44

Ueda, K., T. V. Gerya et J. Burg. 2012, «Delamination in collisional orogens : Thermomechanical modeling», Journal of Geophysical Research : Solid Earth, vol. 117, n° B8. 73, 77, 153

Urai, J., R. Schuiling et J. Jansen. 1990, «Alpine deformation on Naxos (Greece)», Geological Society, London, Special Publications, vol. 54, n° 1, p. 509–522. 19

Van Kranendonk, M. J., W. Collins, A. Hickman et M. J. Pawley. 2004, «Critical tests of vertical vs. horizontal tectonic models for the Archaean East Pilbara granite–greenstone terrane, Pilbara craton, western Australia», Precambrian Research, vol. 131, n° 3-4, p. 173–211. 104, 173, 174

Vanderhaeghe, O. 2009, «Migmatites, granites and orogeny : Flow modes of partially-molten rocks and magmas associated with melt/solid segregation in orogenic belts», Tectonophysics, vol. 477, n° 3–4, p. 119 – 134. 6, 14, 15, 16, 44, 75, 100

Vanderhaeghe, O. 2012, «The thermal–mechanical evolution of crustal orogenic belts at convergent plate boundaries : A reappraisal of the orogenic cycle», Journal of Geodynamics, vol. 56, p. 124–145. 6, 11

Vanderhaeghe, O. et S. Duchêne. 2010, «Crustal-scale mass transfer, geotherm and topography at convergent plate boundaries», Terra Nova, vol. 22, n° 5, p. 315–323. 19

Vanderhaeghe, O., C. Guergouz, C. Fabre, S. Duchêne et D. Baratoux. 2019, «Secular cooling and crystallization of partially molten Archaean continental crust over 1 Ga», Comptes Rendus Geoscience, vol. 351, nº 8, p. 562 – 573. 173

Vanderhaeghe, O., C. Hibsch, L. Siebenaller, L. Martin, S. Duchêne, M. de St Blanquat, S. Kruckenberg et A. Fotiadis. «Penrose conference extending a continent», . 17

Vanderhaeghe, O., S. Kruckenberg, M. Gerbault, L. Martin, S. Duchêne et E. Deloule. 2018, «Crustal-scale convection and diapiric upwelling of a partially molten orogenic root (Naxos dome, Greece)», Tectonophysics, vol. 746, p. 459–469. 18, 19, 20, 29, 41, 44, 46, 72, 73, 75, 77, 155, 161, 177

Vanderhaeghe, O. et C. Teyssier. 2001, «Partial melting and flow of orogens», Tectonophysics, vol. 342, nº 3-4, p. 451–472. 14, 17, 114

Vanderhaeghe, O., C. Teyssier, I. McDougall et W. J. Dunlap. 2003, «Cooling and exhumation of the shuswap metamorphic core complex constrained by 40ar/39ar thermochronology», Geological Society of America Bulletin, vol. 115, nº 2, p. 200–216. 154

Vanderhaeghe, O., C. Teyssier et R. Wysoczanski. 1999, «Structural and geochronological constraints on the role of partial melting during the formation of the shuswap metamorphic core complex at the latitude of the thor-odin dome, british columbia», Canadian Jounral of Earth Sciences, vol. 36, nº 6, p. 917–943. 172

Vanderhaeghe, O. et D. Whitney. 2004, «Structural development of the naxos migmatite dome», Special paper - Geol. Soc. Amer., p. 211–228. 16, 19

Vasil, G. et M. Proctor. 2011, «Dynamic bifurcations and pattern formation in melting-boundary convection», Journal of Fluid Mechanics, vol. 686, p. 77. 158

Vatteville, J., P. E. van Keken, A. Limare et A. Davaille. 2009, «Starting laminar plumes : Comparison of laboratory and numerical modeling», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 10, nº 12. 40, 45, 63, 64, 65, 70, 86

Verhoeven, J. et J. Schmalzl. 2009, «A numerical method for investigating crystal settling in convecting magma chambers», Geochemistry, Geophysics, Geosystems, vol. 10, nº 12. 125

Vigneresse, J. et J. Clemens. 2000, «Granitic magma ascent and emplacement : neither diapirism nor neutral buoyancy», Geological Society, London, Special Publications, vol. 174, nº 1, p. 1–19. 9

Vigneresse, J.-L. 2006, «Granitic batholiths : from pervasive and continuous melting in the lower crust to discontinuous and spaced plutonism in the upper crust», Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh, vol. 97, nº 4, p. 311–324. 15, 44, 100

Völtz, C., W. Pesch et I. Rehberg. 2001, «Rayleigh-Taylor instability in a sedimenting suspension», Physical Review E, vol. 65, n° 1, p. 011 404. 124

Weinberg, F. R. et H. Schmeling. 1992, «Polydiapirs : multiwavelength gravity structures», Journal of Structural Geology., vol. 14, n° 4, p. 425–436. 29, 39, 40, 41, 44, 45, 49, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 69, 71, 72, 75, 84, 85, 86

Weinberg, R. et Y. Podladchikov. 1994, «Diapiric ascent of magmas through power law crust and mantle», Journal of Geophysical Research, vol. 99, n° B5, p. 9543–9559. 44

Weinberg, R. F. 1992, «Internal circulation in a buoyant two-fluid newtonian sphere : implications for composed magmatic diapirs», Earth Planet. Sci. Lett., vol. 110, n° 1, p. 77 – 94. 61, 62, 75, 173

Weinberg, R. F. 1997, «Diapir-driven crustal convection : decompression melting, renewal of the magma source and the origin of nested plutons», Tectonophysics, vol. 271, n° 3, p. 217 – 229. 78

Weinberg, R. F. et Y. Y. Podladchikov. 1995, «The rise of solid-state diapirs», Journal of Structural Geology, vol. 17, n° 8, p. 1183–1195. 7

White, D. B. 1988, «The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity», Journal of Fluid Mechanics, vol. 191, p. 247–286. 23

Whitehead, A. J. et S. D. Luther. 1975, «Dynamics of laboratory diapir and plume models», Journal of Geophysical Research, vol. 80, p. 705–717. 31

Whitehead, J. A. 1988, «Fluid models of geological hotspots», Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 20, n° 1, p. 61–87. 29, 44

Whitehead Jr, J. A. et B. Parsons. 1977, «Observations of convection at Rayleigh numbers up to 760,000 in a fluid with large Prandtl number», Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 9, n° 1, p. 201–217. 23

Whitney, D., C. Teyssier et C. S. Siddoway. 2004a, Gneiss domes in orogeny, vol. 380, Geological Society of America. 172

Whitney, D. L., C. Teyssier et O. Vanderhaeghe. 2004b, «Gneiss domes and crustal flow», Gneiss domes in orogeny, vol. 380, p. 15. 7, 44, 171

Whittington, A. G., A. M. Hofmeister et P. I. Nabelek. 2009, «Temperature-dependent thermal diffusivity of the Earth's crust and implications for magmatism», Nature, vol. 458, n° 7236, p. 319–321. 10, 99

Wiemer, D., C. E. Schrank, D. T. Murphy, L. Wenham et C. M. Allen. 2018, «Earth's oldest stable crust in the Pilbara Craton formed by cyclic gravitational overturns», Nature Geoscience, vol. 11, n° 5, p. 357–361. 173

Wilcock, W. S. D. et J. A. Whitehead. 1991, «The Rayleigh-Taylor instability of an embedded layer of low-viscosity fluid», Journal of Geophysical Research, vol. 96, n° B7, p. 12 193–12 200. 44

Wortel, M. et W. Spakman. 2000, «Subduction and slab detachment in the mediterranean-carpathian region», Science, vol. 290, n° 5498, p. 1910–1917. 16

Xi, H.-D., S. Lam et K.-Q. Xia. 2004, «From laminar plumes to organized flows : the onset of large-scale circulation in turbulent thermal convection», Journal of Fluid Mechanics, vol. 503, p. 47–56. 23

Yamato, P., T. Duretz, D. A. May et R. Tartese. 2015, «Quantifying magma segregation in dykes», Tectonophysics, vol. 660, p. 132–147. 124

Yin, A. 2004, «Gneiss domes and gneiss dome systems», Geological Society of America Special Papers, vol. 380, p. 1–14. 7

Youngs, D. 1982, «Numerical methods for fluid dynamics», . 46

Zalesak, S. T. 1979, «Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids», Journal of computational physics, vol. 31, n° 3, p. 335 – 362. 47

Zhang, J., S. Childress et A. Libchaber. 1997, «Non-boussinesq effect : Thermal convection with broken symmetry», Physics of Fluids, vol. 9, n° 4, p. 1034–1042. 23

Annexes

A.1 Fusion partielle : comparaison avec les résultats de Favier et al. [2019]

Dans cette annexe, nous cherchons à tester la pertinence de notre modélisation de la fusion partielle détaillée dans la section 3.3 avec des résultats de la littérature, en particulier ceux de Favier et al. [2019]. Pour cela, nous fixons d'abord la viscosité μ_{PF}, $\dot{\varepsilon}$, κ et posons $H_r = 0$. L'idée étant d'avoir une viscosité grande dans la partie non fondue afin que le terme d'advection dans l'équation de la chaleur soit négligeable. Nous supprimons également le chauffage interne. L'évolution du front de fusion d'un tel système est présentée figures A.1.1 et A.1.2. 13 panaches thermiques se forment d'abord en profondeur, s'élèvent d'une dizaine de kilomètres avant de fusionner en 4 panaches, puis s'élèvent à nouveau et forment une grande cellule convective de la taille du système. Comme le montrent Favier et al. [2019], la position du front de fusion évolue en $\sim t^{0.5}$ dans le régime diffusif et en $\sim t$ dans le régime convectif. A partir de 1.5 Ma, le front de fusion s'écarte de la courbe $\sim t$ dû au fait que dans notre système, la température du solidus (T_{sol}) diffère de la température en haut du système (T_C) : tout ne peut pas fondre et il subsiste toujours une épaisseur de couche non fondue.

Même si notre modèle diffère de celui de Favier et al. [2019] et que nous ne prenons pas en compte la chaleur latente, les résultats obtenus correspondent bien, de manière qualitative.

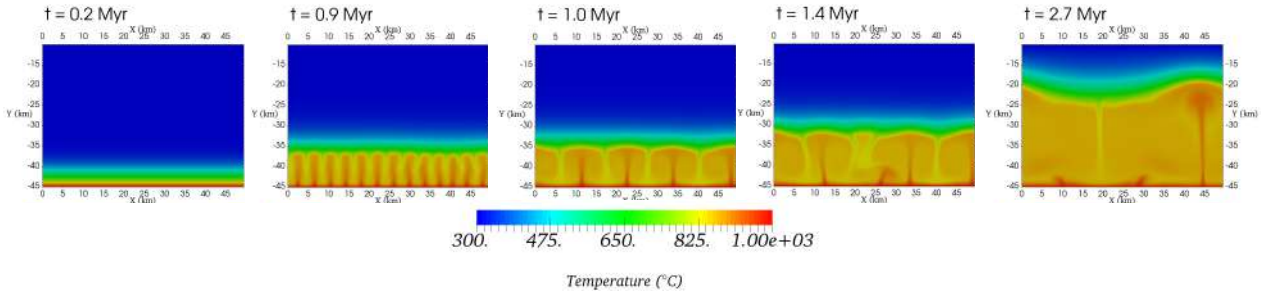


Figure A.1.1 – Évolution temporelle de la température au cours du temps pour un système en fusion partielle (OpenFOAM) et avec des conditions initiales similaires à celles de Favier et al. [2019] ($H_r = 0$, κ, constante et μ newtonienne). Les étapes diffusive, puis de cellules allongées fusionnant progressivement en une cellule unique sont visibles.

.

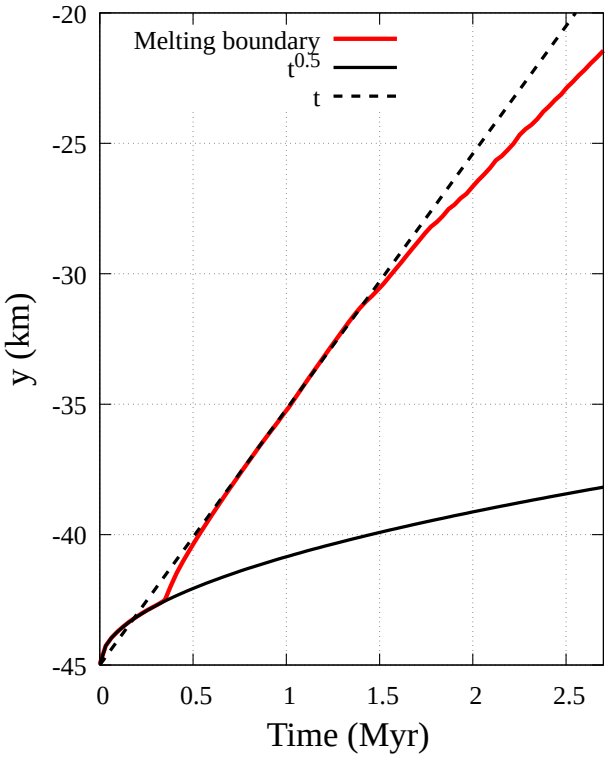


FIGURE A.1.2 – Evolution de la position du front de fusion au cours du temps pour un système en fusion partielle similaire à FAVIER et al. [2019]. Les étapes diffusive puis convective s'approchent bien d'une pente en $\sim t^{0.5}$ puis en $\sim t$.

A.2 Fusion partielle : les différents modèles de densité des phases

Il existe plusieurs façons de modéliser les densités des 3 fluides (MGE et inclusions) lorsqu'ils se trouvent en fusion partielle. Nous avons testé 4 configurations (voir Tab. A.2.13) : A et B pour clarifier l'impact de la densité du MGE , et C et D pour clarifier l'impact de la densité initiale des inclusions.

Fluide	Configuration A		Configuration B		Configuration C		Configuration D	
i	ρ^{S0}	ρ^{L0}	ρ^{S0}	ρ^{L0}	ρ^{S0}	ρ^{L0}	ρ^{S0}	ρ^{L0}
	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$
1	2800	2700	2700	2700	2700	2700	2800	2700
2	2800	2600	2600	2600	2700	2600	2600	2600
3	2800	2900	2900	2900	2700	2900	2900	2900
	$I_1M_1H_2$-$I_1M_1H_4$ $I_1M_0H_{23}\rho(M)$		$I_1M_0H_{23}$		$I_1M_0H_{25}$		$I_1M_1H_{14}$	

TABLEAU A.2.13 – Configurations possibles pour le choix des densités avec $\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{3} C_i \times [\rho_i^{S0}(1-M) + \rho_i^{L0}M] \times [1-\alpha(T-T_{ref})]$. Dans les configurations A et D, la densité du MGE (phase 1) est interpolée selon M. Dans les configurations B et D, la densité des inclusions ne dépend pas de M.

A.2.1 Rôle de la densité du MGE

Nous vérifions tout d'abord l'impact de densités initiales ρ^{L0} et ρ^{S0} différentes. Rappelons pour cela l'equation 3.11 : $\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{3} C_i \times [\rho_i^{S0}(1-M) + \rho_i^{L0}M] \times [1-\alpha(T-T_{ref})]$.

Les configurations A et B permettent de voir l'effet de l'évolution de la densité du MGE au cours de la fusion partielle. Dans la configuration A, la densité du MGE est interpolée entre ρ^{L0} et ρ^{S0} selon M, et varie avec la température selon l'approximation de Boussinesq. Dans la configuration B, $\rho^{L0} = \rho^{S0}$, et la densité du MGE ne varie que grâce à l'approximation de Boussinesq.

Dans la figure A.2.1, nous comparons les cas $I_1M_1H_2$ (configuration A) et $I_1M_0H_{23}$ (configuration B) car ils présentent une gamme de viscosité similaire. Pourtant, le cas $I_1M_1H_2$ subit une convection globale et rapide tandis que $I_1M_0H_{23}$ développe une convection localisée. Cela s'explique par la densité choisie. En effet, le cas $I_1M_1H_2$ présente la particularité d'une viscosité μ_{PF} 10 fois supérieure au cas de référence $I_1M_1H_0$, et une densité du MGE interpolée selon M entre ρ^{L0} et ρ^{S0}. Le cas $I_1M_0H_{23}$ en revanche (section 3.4.2 et Fig. A.2.1) n'a pas de fusion partielle mais les inclusions ont initialement des densités et viscosités différentes du MGE (voir tableau A.2.13).

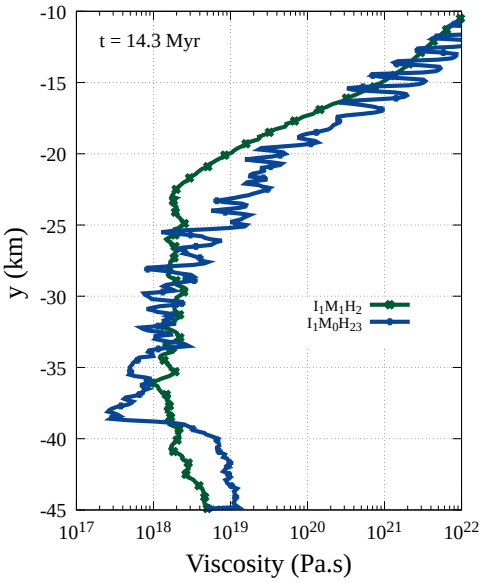
Il en résulte une plus grande différence de densité entre zone chaude, partiellement fondue dans $I_1M_1H_2$ et zone froide, non fondue dans $I_1M_0H_{23}$($\Delta\rho = 100\ kg.m^{-3}$ contre $50\ kg.m^{-3}$, Fig. A.2.1b). Cela crée une force de flottabilité supplémentaire à celle de Boussinesq dans le fluide partiellement fondu ce qui intensifie la convection.

En testant un cas supplémentaire correspondant au cas $I_1M_0H_{23}$, mais en interpolant les densités selon M, les résultats sont similaires à ceux du cas $I_1M_1H_2$ (voir Fig. A.2.1c, cas $I_1M_0H_{23}\rho(M)$). Tant que la différence entre ρ_1^{S0} et ρ_1^{L0} est suffisante, la convection est globale.

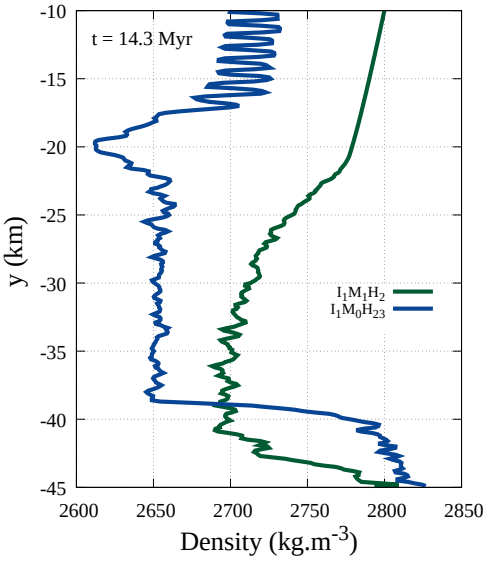
Interpoler la densité du MGE entre ρ^{L0} et ρ^{S0} en fonction de M est un choix. Ce choix fût fait par d'autres auteurs avant nous mais il est important puisqu'il modifie les caractéristiques de la convection. D'autres choix peuvent être faits, par exemple la densité pourrait dépendre du seuil M_S (de la même manière que la viscosité), de la façon suivante : $\rho_{ref} = \sum_{i=1}^{3} C_i \times [\rho_i^{S0}(1-H(M-M_S)) + \rho_i^{L0}H(M-M_S)]$, avec $H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ (fonction de Heaviside). Dans ce cas, on observe que la convection obtenue est une convection classique et revient à choisir $\rho_1^{S0} = \rho_1^{L0}$.

A.2.2 Densité initiale des inclusions

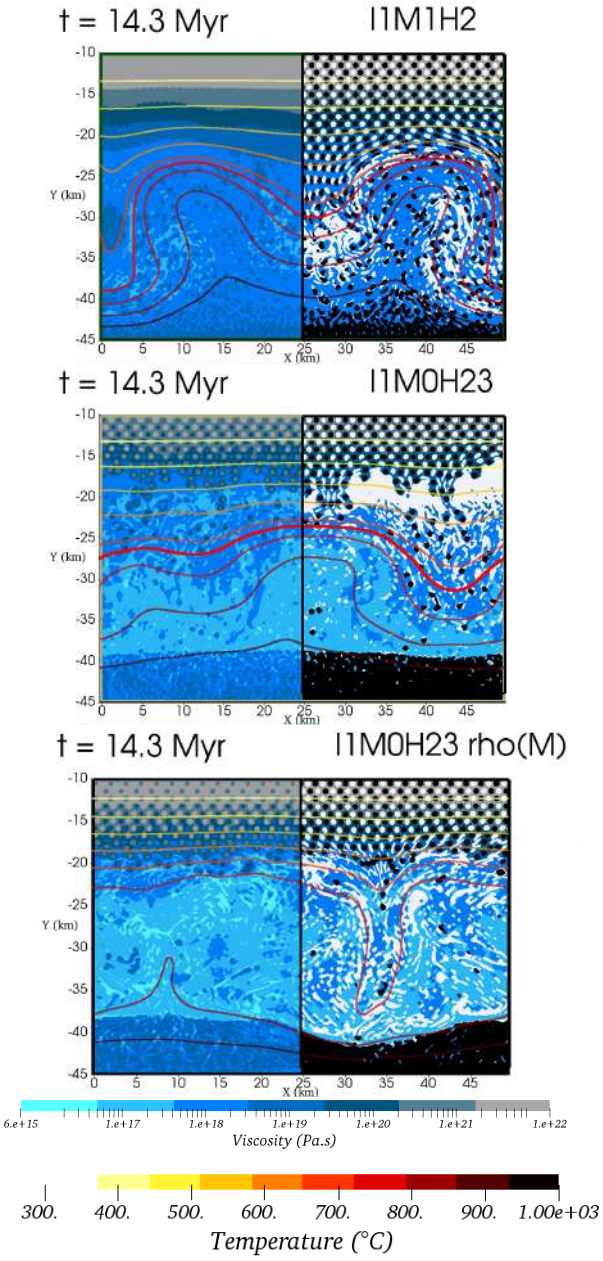
On peut se demander quel est l'effet de la densité initiale des inclusions (densités initiales différentes du MGE - configurations B et D vs densités identiques à celles du MGE - configurations A et C) sur la dynamique du système.



(a) Profil moyen de viscosité



(b) Profil moyen de densité



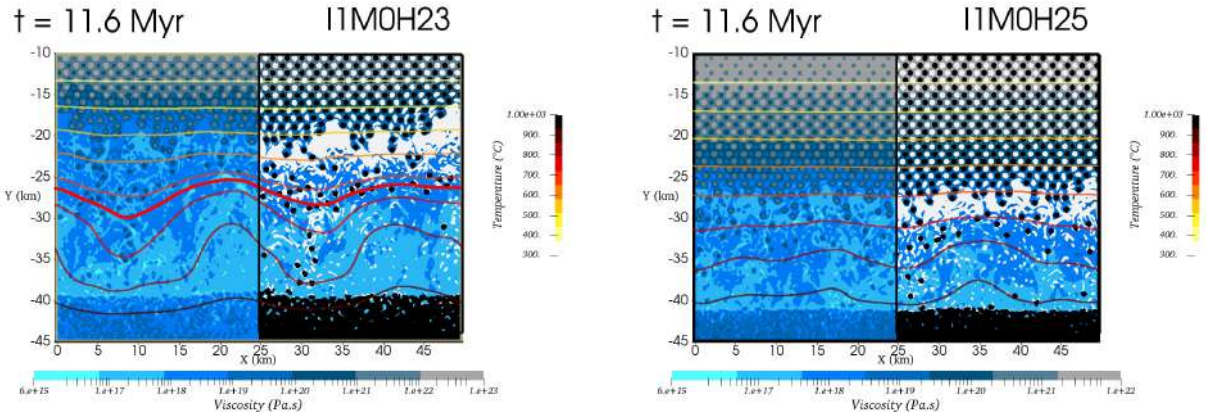
(c) Dynamique de l'écoulement

FIGURE A.2.1 – Comparaison de cas à $t = 14.3Ma$: $I_1M_0H_{23}$ sans fusion partielle, $I_1M_1H_2$ avec fusion partielle (M), et $I_1M_0H_{23}\rho(M)$ qui combine une viscosité μ^{NF} et une densité dépendant de M.

a) Effet de la densité initiale des inclusions lorsque $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$ (Eq. 3.12)

Les configurations B et C permettent de tester l'effet de la densité initiale dans les cas avec inclusions et sans fusion partielle (lorsque $\rho_1^{L0} = \rho_1^{S0}$). Nous comparons les cas $I_1M_0H_{23}$ (configuration B) et $I_1M_0H_{25}$ (configuration C) qui ont des paramètres identiques mis à part la densité des inclusions (tableau 3.4.5).

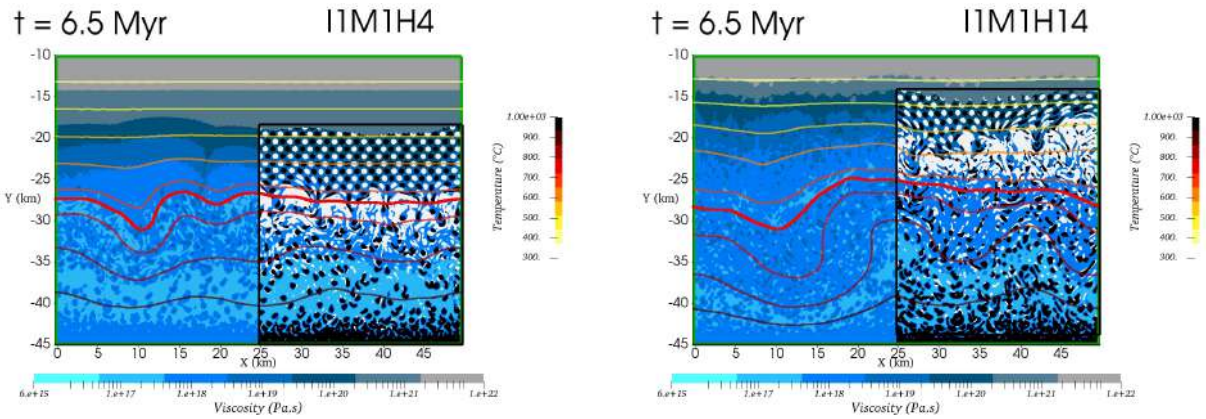
Le résultat des simulations présenté figure A.2.2, révèle que considérer les inclusions initialement plus ou moins denses que le MGE a pour seul effet d'accélérer leur sédimentation (car le contraste de densité avec le MGE est plus élevé).



(a) Configuration B (b) Configuration C

FIGURE A.2.2 – Comparaison des cas $I_1M_0H_{23}$ où les inclusions ont des densités initiales différentes de celle du MGE et $I_1M_0H_{25}$ où les inclusions ont des densités initiales identiques au MGE, et $\rho_1^{L0} = \rho_1^{S0}$.

b) Effet de la densité initiale des inclusions lorsque la viscosité $\tilde{\mu} = \mu_{NF}$ $(M < M_S)$ et $\tilde{\mu} = \mu_{PF}$ $(M > M_S)$ (Eq. 3.12) avec $\rho_1^{S0} \neq \rho_1^{L0}$



(a) Configuration A (b) Configuration D

FIGURE A.2.3 – Comparaison des cas $I_1M_1H_{14}$ où les inclusions ont des densités initiales différentes de celle du MGE et $I_1M_1H_4$ où les inclusions ont des densités initiales identiques au MGE, et $\rho_1^{L0} \neq \rho_1^{S0}$.

Les configurations A et D permettent de vérifier l'effet de la densité initiale dans les cas avec inclusions et avec fusion partielle (c'est-à-dire dans les cas où $\rho_1^{L0} \neq \rho_1^{S0}$). Nous comparons les cas $I_1M_1H_4$ (configuration A) et $I_1M_1H_{14}$ (configuration D) qui ont des paramètres identiques à part la densité des inclusions (tableau 3.5.7).

Le résultat des simulations présenté figure A.2.3, révèle que considérer les inclusions initialement plus ou moins denses que le MGE permet aux inclusions légères de s'élever plus vite que la convection ne se met en place et de former des dômes. En effet, les inclusions peuvent s'élever au dessus du front de fusion ce qui n'est pas possible dans la configuration A.

Ces tests montrent que la prescription détaillée de l'évolution des densités dans un milieu hétérogène en fusion partielle est cruciale pour la dynamique du système. Ces densités sont cependant difficiles à reconstituer à partir de calculs thermodynamiques et pétrologiques réalisés sur les roches de terrain (e.g. discussion dans Ganne et al. [2014]).

A.3 Clichés des cas I_1M_1

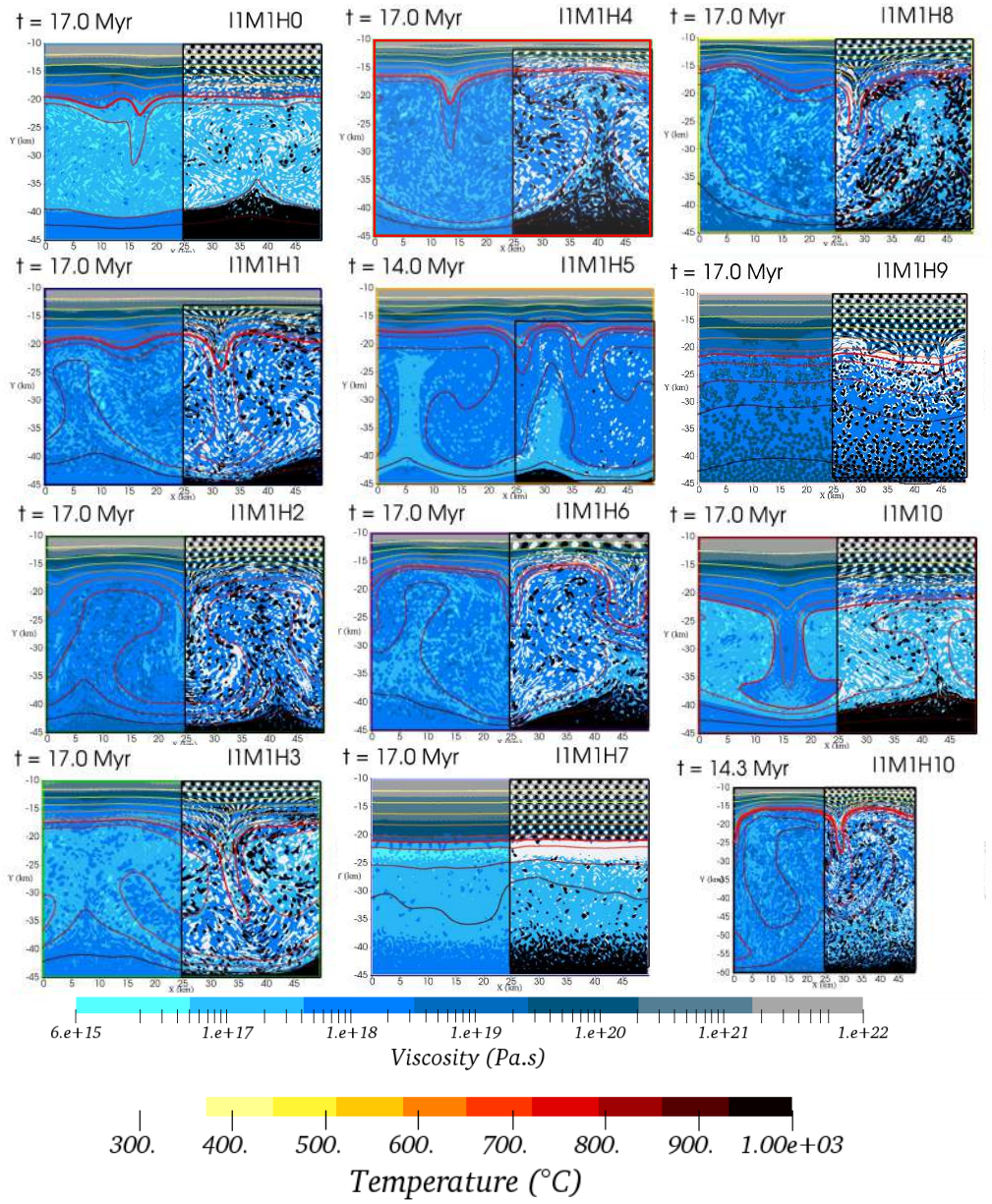


FIGURE A.3.1 – Clichés des cas $I_1M_1H_{0:10}$ à $t = 17\ Ma$. La courbe rouge représente la fraction de melt $M = M_S$. Le champ couleur montre la distribution de viscosité, les iso-contours représentent la température. Afin d'identifier plus facilement les inclusions, celles-ci ont été colorées dans la partie droite du système (en blanc pour les inclusions légères, en noir pour les lourdes).

A.4 Nombres adimensionnels des simulations effectuées au chapitre 3

Cas	Pr^{NF}	Pr^{PF}	Ar^{NF}	Ar^{PF}	Ra^{NF}	Ra^{PF}	Ra_H^{NF}	Ra_H^{PF}	B_2	B_3	Convection ?
$I_0M_1H_0$	2.9×10^8	1×10^5	5×10^{-7}	3.9	1.5×10^2	4×10^5	1.1×10^6	3×10^9	×	×	oui
$I_0M_1H_1$	2.9×10^8	5.2×10^5	5×10^{-7}	1.6×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6×10^8	×	×	oui
$I_0M_1H_2$	2.9×10^8	1×10^6	5×10^{-7}	3.9×10^{-2}	1.5×10^2	4×10^4	1.1×10^6	3×10^8	×	×	oui
$I_0M_1H_3$	2.9×10^8	1×10^7	5×10^{-7}	3.9×10^{-4}	1.5×10^2	4×10^3	1.1×10^6	3×10^7	×	×	non
$I_0M_1H_4$	1.1×10^{10}	1×10^5	3.2×10^{-10}	3.9	3.7	4×10^5	2.8×10^4	3×10^9	×	×	oui
$I_0M_1H_5$	2.9×10^8	4.8×10^5	5×10^{-7}	1.8×10^{-1}	1.5×10^2	8.7×10^4	1.1×10^6	6.7×10^8	×	×	oui
I_0M_10	2.9×10^8	1×10^5	5×10^{-7}	3.9	1.5×10^2	4×10^5	0	0	×	×	oui
$I_1M_0H_0$	3.6×10^4		32		1.2×10^6		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_1$	3.6×10^5		3.2×10^{-1}		1.2×10^5		8.8×10^8		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_2$	3.6×10^6		3.2×10^{-3}		1.2×10^4		8.8×10^7		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_3$	3.6×10^7		3.2×10^{-5}		1.2×10^3		8.8×10^7		1.8	3.5	non
$I_1M_0H_5$	3.6×10^4		32		1.2×10^6		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_6$	3.6×10^4		32		1.2×10^6		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_7$	3.6×10^4		32		1.2×10^7		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_9$	3.6×10^4		32		1.2×10^6		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_{10}$	1.0×10^5		3.9		4.0×10^5		3.1×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_{11}$	2.8×10^8		5.3×10^{-7}		1.5×10^2		1.1×10^6		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_{13}$	3.2×10^6		4.1×10^{-3}		1.3×10^4		1.0×10^8		1.8	3.5	non
$I_1M_0H_{16}$	3.6×10^4		32		1.2×10^6		8.8×10^9		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_{22}$	3.2×10^6		4.1×10^{-3}		1.3×10^4		1.0×10^8		1.8	3.5	oui
$I_1M_0H_{23}$	3.2×10^6		4.1×10^{-3}		1.3×10^4		1.0×10^8		1.8	3.5	oui
$I_1M_1H_0$	2.9×10^8	1.0×10^5	5×10^{-7}	3.9	1.5×10^2	4×10^5	1.1×10^6	3×10^9	1.3	2.7	oui
$I_1M_1H_1$	2.9×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.6×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6×10^8	1.3	2.7	oui
$I_1M_1H_2$	2.9×10^8	1.0×10^6	5.3×10^{-7}	3.9×10^{-2}	1.5×10^2	4×10^4	1.1×10^6	3×10^8	1.3	2.7	oui
$I_1M_1H_3$	2.9×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_4$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_5$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	$8. \times 10^4$	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_6$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	$8. \times 10^4$	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_7$	1.1×10^{10}	5.2×10^5	3.2×10^{-10}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	$8. \times 10^4$	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_8$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	$8. \times 10^4$	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_9$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	$8. \times 10^4$	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_{10}$	1.8×10^8	5.2×10^5	3.9×10^{-6}	4.3×10^{-1}	6.7×10^2	2.4×10^5	2.6×10^6	3.7×10^9	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_{11}$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_{13}$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_{15}$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui
$I_1M_1H_{16}$	2.8×10^8	5.2×10^5	5.3×10^{-7}	1.5×10^{-1}	1.5×10^2	8×10^4	1.1×10^6	6.2×10^8	2.7	2.7	oui

TABLEAU A.4.14 – Nombres adimensionnels Pr, Ar, Ra, et Ra_H, définis par (3.21)-(3.24) et calculés dans le cas d'une viscosité de roches non fondues (NF) et partiellement fondues (PF) pour tous les cas simulés dans ce chapitre.

A.5 Régimes de convection dans l'espace des paramètres (Ar, Ra)

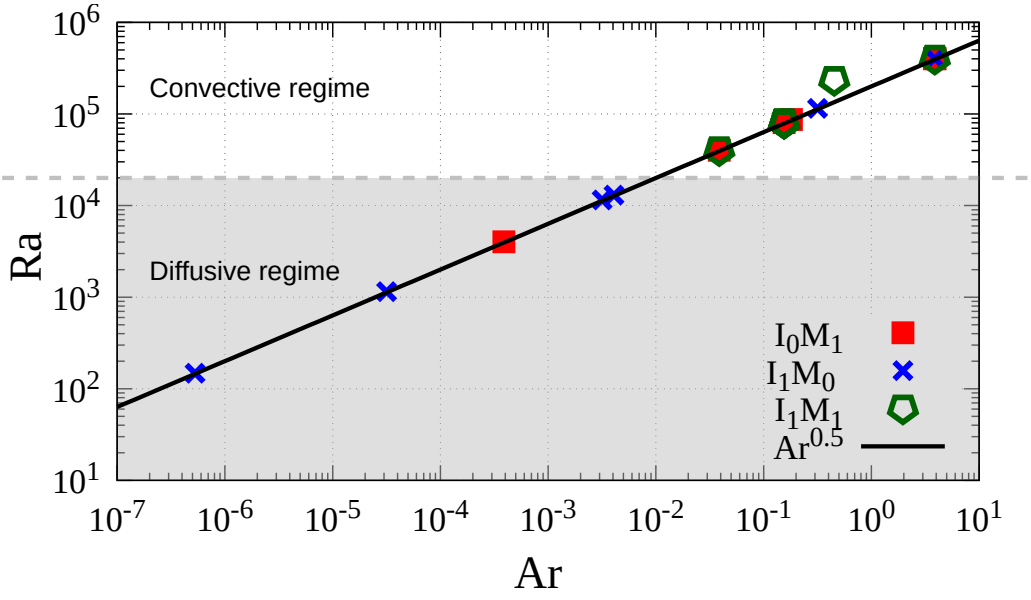


FIGURE A.5.1 – Diagramme du nombre Rayleigh, Ra (Ra_{PF}) en fonction du nombre d'Archimède, Ar. Les points rouges correspondent aux cas avec seulement de la fusion partielle, les bleus aux inclusions seules et les verts au couplage fusion partielle et inclusions. L'ensemble des points se situent autour de la courbe $Ra \sim \sqrt{Ar}$. En-dessous de $Ra < 2 \times 10^4$, il n'y a pas de convection.

A.6 Sensibilité au maillage

A.6.1 Fusion partielle

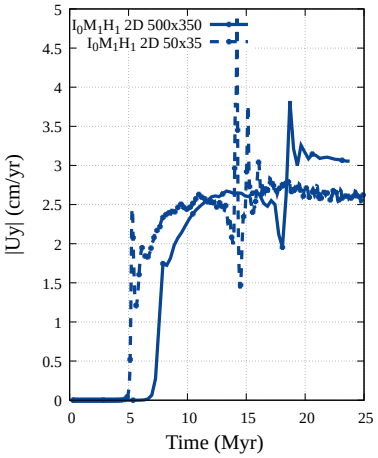


FIGURE A.6.1 – Vitesse verticale moyenne pour deux maillages 500×350 et 50×35 pour le cas $I_0M_1H_1$.

A.6.2 Combinaison fusion partielle et inclusions

Nous avons testé trois résolutions spatiales pour le cas $I_1M_1H_6$: 297×175, 494×350 et 988×700. Les résultats sont présentés figure A.6.2.

La diminution de la taille des cellules de maillage a pour conséquence une destruction plus fine des inclusions et donc plus de quantité d'inclusions en mouvement, ce qui diminue davantage la viscosité par rapport aux maillages plus grossiers. Les principaux effets de la taille du maillage sont :

— un démarrage plus tardif de la convection lorsque le maillage est raffiné,

— une évolution du front de fusion plus linéaire, c'est-à-dire une transition entre les régimes thermiques moins raide.

Les vitesses moyennes de convection sont toujours comprises entre 0.5 et 2.5 $cm.an^{-1}$, les profils de viscosité et de température sont proches à $t = 18\ Ma$, la position du front de fusion pendant le dernier régime convectif est autour de -16 km de profondeur et la période enregistrée par les traceurs est $< 2\ Ma$ pour les trois tailles de maille. En revanche, avec le maillage le plus grossier, 297×175, la vitesse moyenne présente plus d'oscillations, peut-être dues à un pas de temps trop élevé.

Nous pouvons considérer que la convergence en maillage a été atteinte puisque les grandeurs considérées (période, vitesse moyenne, taille de cellule convective, voir tableau 3.5.8) sont peu affectées par le changement de taille de maille, nous utilisons donc le maillage 297×175 pour les calculs 3D.

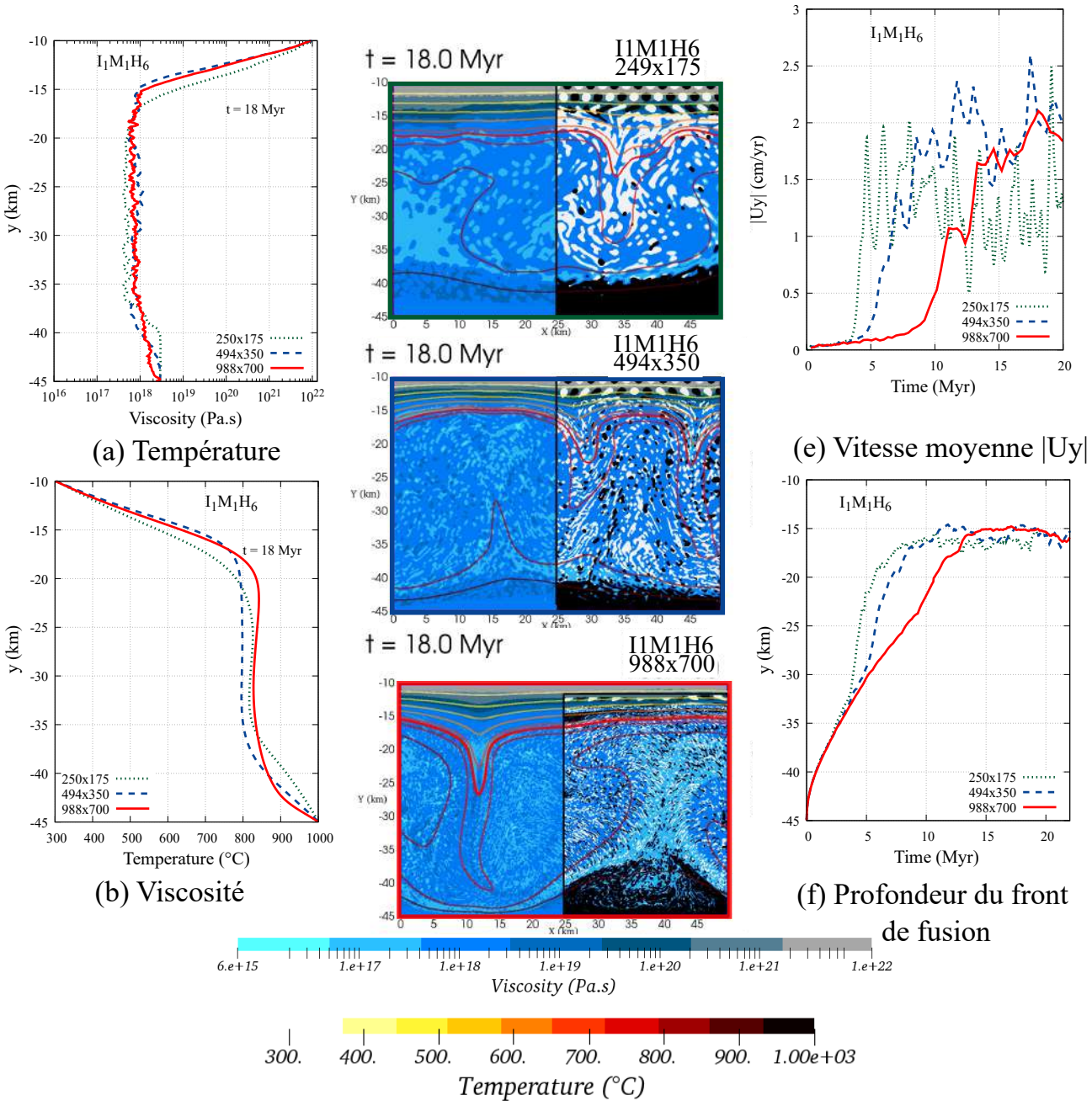


FIGURE A.6.2 – Dynamique de l'écoulement pour 3 maillages : 297 × 175, 494 × 350 et 988 × 700 pour le cas $I_1M_1H_6$. a-b) Profils de température et de viscosité moyennes, pour quatre instants. c) Distribution spatiale de la viscosité. La courbe rouge représente la fraction de melt $M = M_S$. e) Évolution de la moyenne de la valeur absolue des vitesses verticales au cours du temps. f) Évolution de la profondeur moyenne du front de fusion au cours du temps.

A.7 Glossaire

Notations relatives aux paramètres physiques des fluides		
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$Pa.s$
α	Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
κ, D_{th}	Diffusion thermique	$m^2.s^{-1}$
k	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
H_r	Taux de production de chaleur radioactive	$W.kg^{-1}$
Cp	Capacité thermique	$m^2.s^{-2}.K^{-1}$
T_{ref}	Température de référence pour la densité	K
Notations relatives à la fusion partielle		
μ_0	Préfacteur de la viscosité de la roche partiellement fondue	$Pa.s$
Q	Énergie d'activation	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
A	Constante du matériau	$Pa^{-n}.s^{-1}$
n	Facteur exponentiel	
ρ^{L0}	Masse volumique de la roche partiellement fondue	$kg.m^{-3}$
ρ^{S0}	Masse volumique de la roche non fondue	$kg.m^{-3}$
M	Taux de melt	
M_S	Seuil de melt pour la viscosité	
T_{sol}	Température du solidus	K
T_{liq}	Température du liquidus	K
K_{eff}	Consistance	$kg.m^{-1}.s^{-2+1/n}$
Notations relatives au domaine de calcul		
H	Hauteur	m
L	Longueur	m
$\mathcal{A}$	Aire	m^2
T_C	Température en haut du domaine	^oC
T_H	Température initiale en bas du domaine	^oC
T_H^+	Température de chauffage basal	^oC
T_{in}	Température à l'intérieur du domaine	^oC
h	Épaisseur d'une couche de fluide ou d'inclusions	m
r	Rayon d'une inclusion	m
Notations relatives aux grandeurs constantes		
g	Accélération de la gravité	9.81 $m.s^{-2}$
R	Constante des gaz parfaits	8.314 $J.mol^{-1}.K^{-1}$

Notations relatives aux bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie		
$\mathbf{U}$	Vitesse	$m.s^{-1}$
P	Pression	Pa
T	Température	K
C	Fraction volumique de phase	
$\dot{\varepsilon}$	Taux de déformation	s^{-1}
Notations relatives aux nombres adimensionnels		
Ra	Nombre de Rayleigh	
Ar	Nombre d'Archimède	
Pr	Nombre de Prandtl	
Pe	Nombre de Péclet	
At	Nombre d'Atwood	
B	Nombre de flottabité	
St	Nombre de Stefan	
K	Taux de croissance adimensionnel	
γ	Rapport de viscosité	
t/τ	Temps adimensionnel	
Notations liées aux caractéristiques de l'écoulement		
V_{rms}	Racine carrée de la vitesse moyenne	$m.s^{-1}$
ΔM	Erreur de masse	
M_0	Masse initiale	
λ	Longueur d'onde	m
σ	Taux de croissance	s^{-1}
V_S	Vitesse de Stokes	$cm.an^{-1}$
$\lvert U_y \rvert$	Vitesse verticale moyennée	$cm.an^{-1}$
V	Magnitude de la vitesse	$cm.an^{-1}$
τ	Période de la cellule convective	Ma
t_{conv}	Démarrage d'un régime convectif	Ma
$l \times h$	Dimension de la cellule convective	km
ΔT	Différence de température	K
v_{max}	Vitesse maximale dans une cellule convective	$cm.an^{-1}$
Notations liées aux échelles caractéristiques		
$\mathcal{T}; q^{-1}$	Échelle de temps	s
$\mathcal{L}$	Échelle de taille	m
$\mathcal{U}$	Échelle de vitesse	$m.s^{-1}$
$\mathcal{P}$	Échelle de pression	Pa
$\mathfrak{T}$	Échelle de température	K