Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :
Julien SAINT-JAMES

le mercredi 16 décembre 2020

Titre :

Prévision de la transition laminaire-turbulent dans le code elsA
Extension de la méthode des paraboles aux parois chauffées

École doctorale et discipline ou spécialité :
ED MEGeP : Dynamique des fluides

Unité de recherche :
Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

Directeur(s) de Thèse :

Mme Estelle PIOT (directrice de thèse)

Jury :
M. Jean-Christophe ROBINET Professeur Arts et Métiers ParisTech – Président
M. Christophe AIRIAU Professeur Université Paul Sabatier - Examinateur
M. Frédéric ALIZARD Maître de conférences Université Lyon 1 - Rapporteur
M. Julien CLIQUET Ingénieur de recherche AIRBUS - Examinateur
M. Eric GONCALVES Professeur ENSMA - Rapporteur
Mme Estelle PIOT Chargée de recherche ONERA - Directrice de thèse

La version numérique de ce document permet une navigation aussi aisée que possible dans les différentes parties: les tables des matières, références aux équations figures et tables, les références bibliographiques ainsi que les symboles du texte listés dans la nomenclature sont des liens hypertextes renvoyant à l'élément adéquat (cliquer sur un symbole dans le texte renvoie à son entrée dans la nomenclature). La plupart des logiciels de lecture proposent des raccourcis clavier pour revenir à la page courante (par exemple `Alt+`$\leftarrow$ pour Adobe Reader).

Remerciements

C'est bien beau d'écrire un manuscrit mais avant ça il faut avoir un laboratoire d'accueil. C'est pour cette raison que je remercie Pierre Millan, Jérôme Anthoine et Estelle Piot de m'avoir accueilli au DMPE et au sein de l'unité ITAC.

Je tiens à remercier aussi les membres du jury : Frédéric Alizard, Éric Goncalves, Christophe Airiau, Jean-Christophe Robinet et Julien Cliquet qui ont accepté de participer à cette soutenance malgré les conditions particulières de cette année 2020.

Une thèse n'est pas un travail personnel mais bien un travail d'équipe dans lequel l'encadrement a une place très importante. Je voudrai donc remercier Estelle d'avoir dirigé cette thèse et de m'avoir épaulé dans les moments un peu plus délicats. Je voudrai aussi remercier Olivier Vermeersch pour ses nombreux conseils scientifiques et de m'avoir recadré de temps en temps. Enfin merci Hugues Deniau pour ton aide sur les problèmes numériques et aussi pour toutes les discussions autour de la montagne.
Je tiens aussi à remercier l'ensemble des personnes qui composent l'unité ITAC (Maxime, Fabien, Rémi ...) avec qui j'ai passé d'inoubliables repas d'unité (avec les afters au Black Lion) ! Je remercie aussi l'ensemble des personnes du DMPE pour leur gentillesse et pour leur aide.

Cette thèse m'a donné l'occasion de proposer un stage et d'encadrer un stagiaire. Je tiens à remercier Vivien Gillo pour son fabuleux travail et j'espère n'avoir pas été trop chiant !

Au sein de ses trois années j'ai vu passé beaucoup de monde que ce soit doctorants ou stagiaires. Je ne vais pas faire de liste puisque je risquerais d'en oublier quelques uns mais je voudrais remercier chaleureusement Thomas Batmalle pour les nombreuses discussions dans le bureau, pour sa bonne humeur, son aide et surtout pour la qualité de ses bières, Loïc VG le pâtissier de m'avoir aidé à bien m'installer dans le bureau et de m'avoir aidé sur les questions administratives, Maxime Bouyges de m'avoir tant aidé sur LaTeX ses derniers mois, Loïc Jecker pour les nombreuses conversations que j'ai pu avoir avec lui, Guillaume Bégou qui, malgré le fait qu'il est changé de département, à continuer de m'aider, Adrien et Arthur pour les sorties vélos entre midi et deux et pour moments à commenter le Tour de France et le Giro, Jeanne pour les moments de rigolades et pour la joie que tu as amené dans le couloir, sans oublier Pierre alias Piou Piou pour tous les apéros, les sorties montagnes à moitié saoul et pour toutes ses bonnes barres de rires (aujourd'hui c'est ski plaisir) ! ! Merci à tous les autres que je n'ai pas citer aussi bien sur !
Je voudrais aussi remercier Émerik alias Ricou pour avoir relu mon manuscrit et de m'avoir donné de précieux conseils mais aussi pour toutes les sorties montagnes et vélos ! Et ça devrait continuer !
Enfin je voudrais remercier du fond du cœur les doctorants de mon année (l'ONERA sexy team). Merci à Mathias, Virgile pour les JDD (j'attends toujours l'invitation pour la Corse), Mr Crouzy et Dams alias Piou Piou pour les nombreuses discussions dans le bureau Doc-Tom et la lecture de l'horoscope (donnée importante pour mener à bien une thèse i, sans oublier Adèle alias Abdoul pour les longues discussions et les sorties arrosées dans les bars (désolé pour ses longues pauses thé à 10h et 16h je t'ai pris pas mal de temps) ! On a passé des super moments tous ensemble (comme ce fameux repas de Noël ou bien des apéros dont certains sont resté mythiques !).
Je voudrais faire une spéciale dédicace à mon ancien coloc' et collègue Loïc Adjanohoun ! Merci de ta patience et merci d'avoir été la dans les moments les plus difficiles. J'ai énormément de souvenir de nos discussions à refaire le monde ou bien des repas pâtes du dimanche soir ! Mais je sais que j'en aurai d'autre avec toi ! En tout cas merci frérot !

Je voudrais aussi remercier ma famille (mon frère et mes parents) pour leur soutien et leur aide tout au long de cette thèse mais aussi tout au long de ma scolarité. Bon ok ce n'est peut être pas fini mais merci quand même !

Enfin je ne pouvais pas finir ces remerciements sans remercier du fond de mon cœur la femme qui partage ma vie depuis 3 ans maintenant. Merci Maïwen de m'avoir épaulé pendant ses trois

années et surtout merci d'avoir relu la totalité de cette thèse pour corriger mes nombreuses fautes ! J'espère que tu pourras encore me supporter pour les années qui arrivent !

Table (réduite) des matières

Remerciements iii
1. Introduction . . . vii

I. État de l'art 1

1. Couche limite et transition laminaire-turbulent 3
1.1. Hypothèses relatives à la couche limite . . . 4
1.2. Équations de Prandtl . . . 5
1.3. Grandeurs caractéristiques de la couche limite . . . 8
1.4. Note sur la couche limite tridimensionnelle . . . 11
1.5. Équations de similitude avec prise en compte de la température de paroi . . . 13
1.6. Route vers la turbulence : le phénomène de transition . . . 15
1.7. Cas de la couche limite avec paroi chaude . . . 24

2. Analyse de stabilité modale de la couche limite 27
2.1. Analyse de stabilité modale . . . 28
2.2. Mise en place des calculs de stabilité . . . 36
2.3. Prévision de la position de transition naturelle : différentes méthodes . . . 42

3. La méthode des paraboles pour les instabilités de type Tollmien-Schlichting 47
3.1. Modèle V : instabilités visqueuses en régime transsonique . . . 48
3.2. Modèle VI : instabilités visqueuses-inflexionnelles en régime supersonique . . . 49

II. Développement de la nouvelle base de données 53

4. Étude des instabilités longitudinales de la couche limite sur paroi chaude 55
4.1. Génération des profils de vitesse et de température de référence . . . 56
4.2. Construction des diagrammes de stabilité . . . 58

5. Modélisation de l'évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales 73
5.1. Évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales sur paroi chaude 74
5.2. Construction de la nouvelle base de données . . . 75

6. Adaptation de la base de données à une approche RANS 85
6.1. La méthode des paraboles dans un calcul RANS . . . 85
6.2. Prise en compte des effets de gradient de pression sur paroi athermane . . . 86
6.3. Prise en compte des effets de température de paroi . . . 102
6.4. Mise en évidence de l'unicité des paramètres indexant la base de données . . . 105
6.5. Note sur la construction de la base de données . . . 107

7. Étude de la capacité de la méthode des paraboles étendue à prévoir une position de transition 109
7.1. Validation à l'aide de données expérimentales . . . 110
7.2. Validation à l'aide de la stabilité exacte avec une paroi chauffée uniformément à 400K . . . 116
7.3. Cas particulier du chauffage localisé . . . 117
7.4. Cas avec un chauffage localisé non uniforme . . . 122
7.5. Conclusion . . . 123

III. Conclusion **125**

8. Conclusion **127**
8.1. Discussion . . . 127
8.2. Bilan . . . 129
8.3. Perspectives . . . 129

A. Tri-diagonalisation du système d'équations de Levy-Lees **133**

B. Équation d'Orr-Sommerfeld **137**
B.1. Mise en place des équations aux petites perturbations pour un écoulement incompressible. Équation de stabilité linéaire locale . . . 137
B.2. Approche locale : équation d'Orr-Sommerfeld . . . 138

C. Équations de stabilité linéaire locale selon Mack [1] **141**

D. L'algorithme de Thomas **143**
D.1. Forme du système d'équations . . . 143
D.2. Résolution du système . . . 143

E. Formulation en ψ_k des coefficients des matrices A et B en théorie spatiale **145**

F. Validation de la méthode de tir **147**

G. Détermination d'un profil avec survitesse dans un solveur RANS **153**
G.1. Paramètre lié au profil de vitesse . . . 153
G.2. Couplage paramètre de similitude - paramètre lié au profil de vitesse . . . 153

Table (exhaustive) des matières **157**

Table des figures **161**

Nomenclature **167**

Bibliographie **171**

1. Introduction

Les contraintes environnementales associées à l'augmentation du trafic aérien poussent les acteurs du domaine aéronautique à diminuer la consommation des aéronefs. D'après l'IATA (*International Air Transport Association*), le nombre de voyageurs devrait dépasser les 7 milliards à l'horizon 2035 soit une augmentation de près de 50% du nombre de voyageurs depuis 2016 [1]. Cette augmentation se traduit aussi par une augmentation des émissions de CO_2 (+16 % depuis 2005 en Europe [2])). La prévision de la transition laminaire-turbulent dans la couche limite est alors un enjeu majeur du fait de son impact sur l'efficacité énergétique de l'avion. En effet, le passage d'un état laminaire à un état turbulent implique une augmentation du coefficient de frottement et donc de la trainée globale de l'avion. D'autre part, il est bien connu qu'avec des conditions atmosphériques givrantes, du givre peut se former sur les ailes. L'apparition de ce givre cause des problèmes de sécurité lors du vol. En effet, cette accrétion peut à la fois modifier les performances de la prise d'air de la nacelle et donc du moteur, et générer une perte de portance de l'avion ce qui peut engendrer des accidents graves. Pour éviter cela, les industriels placent des éléments chauffants proche du bord d'attaque des ailes ou des nacelles ce qui évite l'accrétion de givre. Cependant la présence d'un élément chauffant va amplifier les instabilités présentes au sein de la couche limite. Or le phénomène de transition est régi par l'amplification de ces instabilités. Cette amplification déplace la transition laminaire-turbulent proche du bord d'attaque. C'est pourquoi la modélisation de ces amplifications avec une prise en compte des effets de température de paroi dans un contexte RANS est primordiale pour le design d'ailes ou de nacelles laminaires.

Van Ingen et Smith et Gamberoni (1956) ont étudié des résultats expérimentaux montrant l'effet du gradient de pression sur la position de transition et les ont corrélés à des résultats numériques. Cela leur a permis de déterminer un rapport d'amplification des ondes instables au sein de la couche limite à partir duquel le phénomène de transition apparait. C'est la méthode du facteur N. Cette méthode permet de lier les amplifications totales des instabilités présentes dans la couche limite à une position de transition. Elle repose sur la théorie de la stabilité linéaire locale et a été validée dans un premier temps pour des écoulements incompressibles bi-dimensionnels. Il a été montré que cette méthode pouvait être utilisée pour des écoulements tri-dimensionnels compressibles et qu'elle permettait de prendre en compte les effets d'aspiration et de température de paroi [3]. Cependant cette méthode repose sur l'utilisation de la stabilité linéaire locale appliquée aux profils de l'écoulement au sein de la couche limite ; elle est de ce fait coûteuse en temps de calcul et compliquée à mettre en œuvre dans le cadre de simulations numériques de type RANS. C'est pourquoi de nombreuses alternatives ont été mises au point comme des couplages externes entre des solveurs Navier-Stokes et des codes de stabilité ou bien des critères de transition ou des modèles à équations de transport plus ou moins physiques directement implémenté dans le solveur RANS.

Arnal, Habiballah et Delcourt (1984) ont étudié la stabilité de différents profils de vitesse représentatifs d'écoulements de couche limite 2D incompressibles. Ils ont ensuite modélisé l'évolution des courbes de facteurs N pour ces profils. Cela leur a permis de développer une corrélation nommée AHD basée sur le nombre de Reynolds de quantité de mouvement et une valeur critique de ce paramètre au dessus duquel la transition a lieu. Ce critère permet de remplacer l'utilisation de la méthode du facteur N pour la détermination d'une position de transition. Ce critère est uniquement valable pour les ondes de Tollmien-Schlichting. Il a été étendu aux écoulements compressibles et aux parois chaudes. Cependant cette extension ne prend pas en compte les effets d'histoire de la couche limite thermique se développant au sein de la couche limite dynamique.

Arnal (1989) a réalisé une étude de stabilité sur des profils de vitesse représentatifs des écoulements de couche limite 2D. Il a ensuite tabulé la valeur des taux d'amplification spatiale dans une base de données indexée par le facteur de forme incompressible et le nombre de Mach extérieur.

1. Cette prévision a été réalisée avant la crise sanitaire liée au Covid19

Ceci a permis le développement de la méthode dite des paraboles qui propose une représentation analytique des amplifications spatiales des instabilités responsables de la transition, ce qui permet une mise en œuvre à faible coût de la méthode du facteur N. Cette méthode représente bien la physique de la transition car les résultats qu'elle donne sont similaires à ceux obtenus par l'étude de stabilité. Elle se place à mi-chemin entre la stabilité exacte et les critères de transition donc présente certains avantages. Cependant l'utilisation de ce modèle initialement développé pour un code parabolique de résolution de la couche limite est difficile à mettre en œuvre dans un approche RANS : intégration des taux d'amplification, calcul difficile du facteur de forme H_{i}. De plus, ce modèle est limité aux parois froides et aux parois athermanes.

Depuis les années 1990, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'élaboration de bases de données associées à l'amplification des ondes instables de la couche limite. L'élaboration de ces bases passe par une étude de stabilité de profils représentatifs des écoulements de couche limite. Stock et Dagenhart (1989) et Drela (2003) ont élaboré des bases de données pour des écoulements incompressibles bidimensionnels. Van Ingen (2008) a élaboré une base de données permettant la prise en compte de l'aspiration de la couche limite. Cette base de données ne concerne que les écoulements incompressibles bidimensionnels.

Menter (2003) et Langtry et Menter (2009) ont développé un modèle permettant la prise en compte de la transition dans un solveur RANS. Ce modèle couple des corrélations permettant le calcul de la transition à des grandeurs locales d'un point de vue RANS. Bien qu'il fut construit dans un premier temps pour des écoulements autour des aubes de turbomachines, différentes calibrations ont permis de l'utiliser pour déterminer la transition autour d'ailes. Cependant ce modèle est un modèle ingénieur. Il ne permet pas de prendre en compte la physique de la transition. De plus, il n'est valable que pour des parois athermanes.

Pour résumer, la méthode du facteur N est la meilleure pour déterminer une position de transition physique mais difficile à mettre en œuvre car elle est non locale donc non adaptée à une formulation RANS. Elle repose aussi sur des calculs de stabilité exacte. Un couplage entre un code RANS et un outil de transition permet de contourner cette difficulté mais se heurte à des difficultés informatiques. L'utilisation de corrélations permet d'éviter le calcul du facteur N. Ces corrélations peuvent être utilisables sur parois athermanes et sur parois chaudes. Des modèles RANS (comme le modèle de Menter) peuvent être calibrés à partir de ces corrélations. Depuis la thèse de Bégou [4], la méthode du facteur N a été reformulée pour une approche RANS et la méthode des paraboles peut être utilisée afin de remplacer les calculs de stabilité exacte.
Toutefois les modèles RANS basés sur les corrélations ne reproduisent pas la physique de la transition. La méthode des paraboles ne permet pas la prévision de la transition laminaire-turbulent sur parois chaudes.

C'est ce qui justifie cette étude. Elle consiste à mettre en place un modèle de prévision de la transition laminaire-turbulent dans un code RANS par extension de la méthode des paraboles sur parois chaudes.

Une étude bibliographique a d'abord été faite, portant sur la transition de la couche limite (Chapitre 1), sur la stabilité de cette dernière (Chapitre 2) et sur la méthode des paraboles elle-même (Chapitre 3).
La démarche a ensuite consisté dans le Chapitre 4 à étudier des amplifications spatiales des instabilités longitudinales de la couche limite sur parois chaudes à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire locale. Pour cela, la première étape a été de générer des profils de vitesse et de températures représentatifs des écoulements de couche limite sur parois chaudes à l'aide de la résolution d'équations de similitude avec prise en compte de la température de paroi. Ensuite l'objectif a été de construire des diagrammes de stabilité afin de déterminer la plage de stabilité des profils de couche limite. Pour cela, nous avons résolu les équations de stabilité linéaire locale pour chaque

profil de couche limite en faisant varier le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement afin de déterminer le taux d'amplification spatiale. Ce nombre de Reynolds est un paramètre clé dans la résolution des équations de stabilité linéaire locale.

La deuxième étape, qui est présentée dans le Chapitre 5 a été de modéliser, à l'aide de ces diagrammes de stabilité, la nature parabolique de l'évolution des amplifications des instabilités sur parois chaudes par construction d'une base de données. Pour cela, nous avons étudié l'évolution du taux d'amplification spatiale en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement. Nous avons vérifié que cette évolution pouvait être assimilée à des demi-paraboles pour une fréquence fixée afin de pouvoir utiliser la modélisation proposée par la méthode des paraboles. Ensuite, l'objectif a été de construire une base données afin d'étendre la méthode des paraboles aux parois chaudes.

L'étape suivante, présentée dans le Chapitre 6 a été d'adapter la base de données précédemment construite à une approche RANS. Pour cela, l'objectif a été d'indexer la base de données par des paramètres afin de prendre en compte les différents effets physiques influant sur le phénomène de transition. Pour cela, une recherche de paramètres de similitudes a été effectuée afin de prendre en compte à la fois les effets de gradient de pression et de température de paroi. Ces paramètres doivent être accessibles pour des calculs RANS et être le plus robuste possible.

L'objectif du Chapitre 7 a été d'étudier la capacité de la base de données à prévoir une position de transition dans un calcul RANS. Pour cela, on a effectué des simulations numériques RANS autour d'un profil ONERAD sous plusieurs configurations. Nous avons cherché la position de transition sur l'extrados de ce profil en utilisant notre base de données. Une comparaison a été faite avec des résultats expérimentaux et des résultats issus de la stabilité linéaire locale. A l'heure actuelle, le couplage entre le solveur RANS et la base de données est externe mais à priori il n'y a pas de difficulté à l'intégrer dans le solveur elsA (cf thèse de Bégou [4]).

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Couche limite et transition laminaire-turbulent

L'objectif de ce chapitre est de présenter les éléments essentiels à la compréhension des écoulements de couche limite incompressible et compressible. Ces éléments sont tirés de Cousteix [5]. Le cas de la couche limite bidimensionnelle est présenté en détail puisque dans cette étude nous nous intéressons seulement aux ondes de Tollmien-Schlichting. La couche limite tridimensionnelle est présentée succinctement. Les équations de similitude permettant de prendre en compte la température de paroi obtenues à l'aide du changement de variable de Levy-Lees sont détaillées. Enfin le phénomène de transition du régime laminaire au régime turbulent de la couche limite est expliqué. Le processus de transition vers la turbulence provoqué par des instabilités modales (ondes de Tollmien-Schlichting pour la couche limite 2D, ondes crossflow pour la couche limite 3D) est détaillé. L'influence d'une paroi chauffée sur la croissance des instabilités et donc sur la transition est ensuite présentée.

Sommaire

1.1. Hypothèses relatives à la couche limite 4
1.2. Équations de Prandtl 5
1.2.1. Couche limite incompressible 5
1.2.2. Couche limite compressible 7
1.3. Grandeurs caractéristiques de la couche limite 8
1.3.1. Coefficient de frottement et épaisseurs de couche limite 8
1.3.2. Interprétation physique des épaisseurs de couche limite 9
1.4. Note sur la couche limite tridimensionnelle 11
1.4.1. Repère aile et repère aérodynamique 11
1.4.2. Équations de couche limite compressible tridimensionnelle instationnaire 12
1.5. Équations de similitude avec prise en compte de la température de paroi 13
1.6. Route vers la turbulence : le phénomène de transition 15
1.6.1. Différents mécanismes de transition 16
1.6.2. Les perturbations modales en transition naturelle 18
1.6.3. Nature des instabilités 19
1.6.4. Paramètres agissant sur la transition 23
1.7. Cas de la couche limite avec paroi chaude 24

1.1. Hypothèses relatives à la couche limite

Le concept de couche limite a été introduit par Prandtl en 1904 en faisant l'hypothèse que les effets de la viscosité n'interviennent qu'au voisinage de la paroi. En d'autres termes, Prandtl affirme qu'il existe deux régions distinctes dans un écoulement autour d'une paroi quelconque : une région externe qui peut être décrite par les équations d'Euler (équations régissant le comportement d'un fluide parfait) et une région interne nommée couche limite où la viscosité domine la dynamique de l'écoulement.
Dans la région interne, dans la direction normale à la paroi, la vitesse longitudinale passe d'une valeur nulle (condition d'adhérence à la paroi) à la valeur U_e la vitesse de l'écoulement en fluide parfait. Cette évolution suggère la définition d'une certaine hauteur δ, nommée épaisseur de couche limite, qui est la distance à laquelle la vitesse longitudinale U atteint la valeur U_e. Classiquement, cette distance est définie comme étant la distance où $U/U_\mathrm{e} = 0{,}99$.

Le corps considéré et sa couche limite doivent donc former un ensemble élancé du point de vue de l'écoulement extérieur. Autrement dit, à une distance donnée L_{ref} sur un corps présentant une couche limite, nous devons avoir :

$$\delta \ll L_{ref} \tag{1.1}$$

Cette condition peut être reformulée de la façon suivante : la couche limite est une région dans laquelle les efforts de cisaillement visqueux engendrés par la forte variation normale de vitesse sont de l'ordre de grandeur de ceux d'inertie. Nous noterons ρ la masse volumique du fluide, P la pression, U la vitesse longitudinale et V_{ref} une vitesse de référence. Dans la suite, nous nous plaçons dans un repère cartésien (x est la direction longitudinale,y la direction normale à la paroi et z la direction transervale).
Comparons les ordres de grandeur des efforts d'inertie et visqueux sur un volume fluide élémentaire de forme parallélépipédique $dxdydz$ en s'appuyant sur les ordres de grandeur suivants :

$$U \approx V_{ref} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{V_{ref}}{\delta^2} \qquad \rho\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{\rho_{ref} V_{ref}}{L_{ref}} \tag{1.2}$$

Les efforts d'inertie sont de l'ordre de grandeur de leur composante suivant x :

$$F_\mathrm{inert} = \rho U\frac{\partial U}{\partial x}dxdydz \approx \rho_{ref}\frac{V_{ref}^2}{L_{ref}}dxdydz$$

Les efforts de cisaillement peuvent être exprimés comme :

$$F_\mathrm{visc} = \mu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dxdydz \approx \mu\frac{V_{ref}}{\delta^2}dxdydz$$

où μ est la viscosité dynamique et peut être considérée comme constante.
Le rapport entre les deux efforts est donné par :

$$\frac{F_\mathrm{inert}}{F_\mathrm{visc}} \approx \frac{\rho_{ref}}{\mu}\frac{V_{ref}}{L_{ref}}\delta^2 = Re_{L_{ref}}\frac{\delta^2}{L_{ref}^2}$$

Soit, pour garder ce rapport proche de l'unité :

$$\boxed{\frac{\delta}{L_{ref}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_{L_{ref}}}}} \tag{1.3}$$

La conclusion est que pour respecter la condition $\delta \ll L$ la notion de couche limite s'applique lorsque le nombre de Reynolds est grand. Plus la vitesse est élevée et plus l'épaisseur de la couche limite est faible.

1.2. Équations de Prandtl

Comme nous venons de le voir, l'hypothèse de couche limite est intimement liée à l'hypothèse de grand nombre de Reynolds. Il a été souligné précédemment que la zone externe de la couche limite peut être décrite par les équations de fluide parfait (équations d'Euler), qui sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en négligeant les termes liés à la viscosité. L'idée est de faire une analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes et de négliger des termes sous l'hypothèse grand nombre de Reynolds.

1.2.1. Couche limite incompressible

Plaçons nous dans un cas incompressible bidimensionnel, en considérant que les forces de masse sont négligeables et que le rayon de courbure de la paroi est grand devant l'épaisseur de couche limite. Cette dernière hypothèse permet de se placer dans un repère cartésien (axe longitudinal suivant x, normale à la paroi selon y).
Dans ce repère les équations de Navier-Stokes sont, en notant ν la viscosité cinématique définie par $\nu = \mu/\rho$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{1.4a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \tag{1.4b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \tag{1.4c}$$

Les équations de Navier-Stokes sont adimensionnées par :

$$\overline{U} = \frac{U}{V_{ref}} \qquad x^* = \frac{x}{L_{ref}} \qquad y^* = \frac{y}{\delta} \tag{1.5}$$

Il faut déterminer maintenant un adimensionnement pour la vitesse normale à la paroi V. Nous injectons dans l'équation de continuité (1.4a) les adimensionnements précédents (1.5) ainsi que l'hypothèse $\delta/L_{ref} \sim Re_{L_{ref}}^{-1/2}$. Cela donne :

$$\frac{V_{ref}}{L_{ref}}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{Re_{L_{ref}}}}{L_{ref}}\frac{\partial V}{\partial y^*} = 0 \tag{1.6}$$

En posant :

$$\overline{V} = \frac{V}{V_{ref}}\sqrt{Re_{L_{ref}}} \tag{1.7}$$

nous pouvons écrire l'équation de continuité sous la forme :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y^*} = 0 \tag{1.8}$$

qui est non-triviale si $\partial\overline{V}/\partial y^*$ est d'ordre 1.
Il faut maintenant traiter les équations de quantité de mouvement (1.4b) et (1.4c). Pour cela, deux variables adimensionnées supplémentaires sont introduites :

$$\overline{P} = \frac{P}{\rho_{ref} V_{ref}^2} \qquad t^* = \frac{t}{t_{ref}}, \tag{1.9}$$

qui sont de l'ordre de l'unité si l'on considère que t^* est de l'ordre de grandeur des variations temporelles de l'écoulement.
Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$\frac{V_{ref}}{t_{ref}}\frac{\partial \overline{U}}{\partial t^*} + \frac{V_{ref}^2}{L_{ref}}\overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \frac{V_{ref}^2}{\sqrt{Re_{L_{ref}}}\delta}\overline{V}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y^*} = -\frac{V_{ref}^2}{L_{ref}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x^*} + \nu\frac{V_{ref}}{L_{ref}^2}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^{*2}} + \nu\frac{V_{ref}}{\delta^2}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^{*2}} \tag{1.10a}$$

$$\frac{V_{ref}}{t_{ref}\sqrt{Re_{L_{ref}}}}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t^*} + \frac{V_{ref}^2}{L_{ref}\sqrt{Re_{L_{ref}}}}\overline{U}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x^*} + \frac{V_{ref}^2}{Re_{L_{ref}}\delta}\overline{V}\frac{\partial \overline{V}}{\partial y^*} = -\frac{V_{ref}^2}{\delta}\frac{\partial \overline{P}}{\partial y^*} + \nu\frac{V_{ref}}{\sqrt{Re_{L_{ref}}}L_{ref}^2}\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^{*2}} + \nu\frac{V_{ref}}{\sqrt{Re_{L_{ref}}}\delta^2}\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^{*2}} \tag{1.10b}$$

En simplifiant la première équation par V_{ref}^2/L_{ref} et la seconde par V_{ref}^2/δ et en utilisant à nouveau l'hypothèse $\delta \simeq L_{ref}Re_{L_{ref}}^{-1/2}$, le précédent système devient :

$$\frac{L_{ref}}{V_{ref}t_{ref}}\frac{\partial \overline{U}}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y^*} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_{L_{ref}}}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^{*2}} \tag{1.11a}$$

$$\frac{1}{Re_{L_{ref}}}\left(\frac{L_{ref}}{V_{ref}t_{ref}}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t^*} + +\overline{U}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{V}}{\partial y^*}\right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_{L_{ref}}^2}\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re_{L_{ref}}}\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^{*2}} \tag{1.11b}$$

Nous avons supposé que tous les termes sans dimension et leurs dérivées par rapport à x^* et y^* étaient d'ordre 1. Tous les termes de ces équations sont du même ordre de grandeur excepté ceux multipliés par $Re_{L_{ref}}^{-\alpha}$ $(\alpha \geqslant 1)$ qui deviennent négligeables lorsque $Re_{L_{ref}}$ devient grand. En admettant que $L_{ref}/(V_{ref}t_{ref})$ est au plus d'ordre 1, ce qui exclut donc l'étude de phénomènes instationnaires à haute fréquence ou avec des accélérations brutales, les équations de quantité de mouvement se simplifient sous la forme :

$$\frac{L_{ref}}{V_{ref}t_{ref}}\frac{\partial \overline{U}}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y^*} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^{*2}} \tag{1.12}$$

$$0 = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y^*} \tag{1.13}$$

Le retour aux variables dimensionnées nous donne :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{1.14a}$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho U\frac{\partial U}{\partial x} + \rho V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1.14b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} \tag{1.14c}$$

L'hypothèse de couche limite conduit à négliger le terme de diffusion longitudinale dans l'équation de quantité de mouvement longitudinale (1.14b).
L'équation de quantité de mouvement dans la direction normale (1.14c) exprime le fait que selon la normale à la paroi, la pression statique ne varie pas. La connaissance de la pression à la frontière de la couche limite ou à la paroi suffit pour connaître la pression dans la couche limite. Il est important de préciser que cette remarque ne concerne que la pression statique. En effet, la pression totale varie selon la direction y. Cette variation vient des forces de viscosité.
Les équations de Navier-Stokes simplifiées par les hypothèses de couche limite sont appelées **équations de Prandtl**. Elles sont obtenues par application directe de l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds et ne correspondent pas aux équations de fluide parfait : les effets dûs à la

viscosité ne sont pas négligés sur tous les termes.

1.2.2. Couche limite compressible

Les écoulements compressibles se rencontrent lorsque le nombre de Mach augmente ($M > 0{,}3$) ou lorsque le rapport entre la température de frottement T_f [1] et la température de la paroi T_p diffère de l'unité. Dans ce dernier cas, la masse volumique ne peut plus être considérée comme constante. Une équation supplémentaire s'ajoute à celles de continuité et de quantité de mouvement : l'équation de l'énergie. Le coefficient de diffusivité thermique a intervenant dans cette nouvelle équation joue un rôle identique à la viscosité cinématique ν dans l'équation du mouvement. De plus, ce coefficient a est directement lié à la conductivité thermique κ du fluide par $a = \frac{\kappa}{\rho C_p}$ où C_p est la capacité calorifique à pression constante.

De la même façon que les variations importantes de vitesse sont confinées dans une couche limite d'épaisseur δ donnée par :

$$\delta \simeq \frac{L_{ref}}{\sqrt{Re_{L_{ref}}}} \qquad \text{avec} \qquad Re_{L_{ref}} = \frac{V_{ref} L_{ref}}{\nu} \tag{1.15}$$

les variations importantes de température sont confinées dans une couche limite thermique d'épaisseur δ_T donnée par :

$$\delta_T \simeq \frac{L_{ref}}{\sqrt{P_e}} \qquad \text{avec} \qquad P_e = \frac{V_{ref} L_{ref}}{a} \tag{1.16}$$

où P_e est le nombre de Péclet. Le rapport des épaisseurs est :

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{P_r}} \tag{1.17}$$

où $P_r = \nu/a$ est le nombre de Prandtl qui compare les temps caractéristiques des phénomènes thermiques et dynamiques.

Dans le cas de l'air à température ambiante, le nombre de Prandtl est voisin de l'unité ($P_r = 0{,}725$). Les couches limites thermique et dynamique ont donc des épaisseurs du même ordre de grandeur. Ce constat nous permet d'appliquer à l'équation de l'énergie un raisonnement analogue à celui fait pour l'équation de quantité de mouvement et d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \tag{1.18a}$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{1.18b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{1.18c}$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho U \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \tag{1.18d}$$

où h est l'enthalpie spécifique du fluide.
L'équation d'énergie peut encore s'écrire, en considérant $C_p = \text{cste}$, sous la forme :

$$\rho \frac{\partial h_i}{\partial t} + \rho U \frac{\partial h_i}{\partial x} + \rho V \frac{\partial h_i}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{P_r} - 1\right)\mu \frac{\partial h_i}{\partial y}\right] \tag{1.19}$$

où h_i est l'enthalpie totale.

1. On définira plus loin T_f comme étant la température qu'aurait la paroi si elle était athermane

1.3. Grandeurs caractéristiques de la couche limite

1.3.1. Coefficient de frottement et épaisseurs de couche limite

Un des objectifs majeurs d'un calcul de couche limite autour d'une paroi (par exemple une aile) est la détermination de la force de frottement pariétale, responsable en grande partie de la trainée. Elle s'obtient par intégration suivant la direction longitudinale x de la contrainte pariétale τ_p qui, à l'aide de la loi de Newton, est exprimée par :

$$\tau_\mathrm{p} = \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{1.20}$$

On appelle coefficient de frottement pariétal $\mathrm{C_f}$ la contrainte pariétale rendue sans dimension par la pression dynamique extérieure :

$$\mathrm{C_f} = \frac{\tau_\mathrm{p}}{\frac{1}{2}\rho_e {U_\mathrm{e}}^2}, \tag{1.21}$$

avec ρ_e et U_e la masse volumique et la vitesse à l'extérieur de la couche limite, pris à la même abscisse que τ_p.

Les effets thermiques font intervenir un flux de chaleur pariétal qui suit la loi de Fourier :

$$\Phi_\mathrm{p} = -\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{1.22}$$

où κ est le coefficient de conductivité thermique de la paroi.
Comme dans le cas de la contrainte pariétale, ce flux de chaleur peut être adimensionné à l'aide des valeurs de masse volumique, vitesse et enthalpie spécifique totale à l'extérieur de la couche limite h_ie, ce qui donne le coefficient de flux de chaleur

$$\mathrm{C_h} = \frac{\Phi_\mathrm{p}}{\rho_e U_\mathrm{e} h_\mathrm{ie}} \tag{1.23}$$

Dans le cas d'une paroi athermane (isolante et non rayonnante), la température de la paroi a une valeur T_f appelée température de frottement ou de récupération. La différence entre la température de récupération et la température d'arrêt extérieure est caractérisée par le facteur de récupération r :

$$r = \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{ie} - T_\mathrm{e}} \tag{1.24}$$

où $T_\mathrm{ie} = T_\mathrm{e} + \frac{|\boldsymbol{U_\mathrm{e}}|^2}{2\mathrm{C_p}}$ est la température d'arrêt à la frontière de la couche limite.
De plus, en faisant intervenir le facteur de récupération nous obtenons la relation suivante :

$$T_\mathrm{f} = T_\mathrm{e}\left(1 + r\frac{\gamma - 1}{2}{M_\mathrm{e}}^2\right) \tag{1.25}$$

où M_e est le nombre de Mach à la frontière de la couche limite. En pratique, $r = 0{,}85$ pour une couche limite laminaire et $r = 0{,}9$ pour une couche limite turbulente. Il est important de noter que ces valeurs ont été déterminées de façon empirique pour des écoulements sur plaques planes. Si la température de paroi est supérieure à la température de frottement, on dit que la paroi est chaude ; la paroi cède de la chaleur au fluide et le flux de chaleur Φ_p est positif ($(\partial T/\partial y)_{y=0} < 0$). Lorsque la paroi est froide, elle absorbe la chaleur cédée par le fluide. Les différents scénarios sont représentés sur la figure 1.1.

Une grandeur primordiale d'une couche limite est son épaisseur δ. Cette épaisseur, dont la définition a été introduite précédemment, permet de définir d'autres grandeurs caractéristiques :

$$\text{Épaisseur de déplacement} \quad \delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \tag{1.26}$$

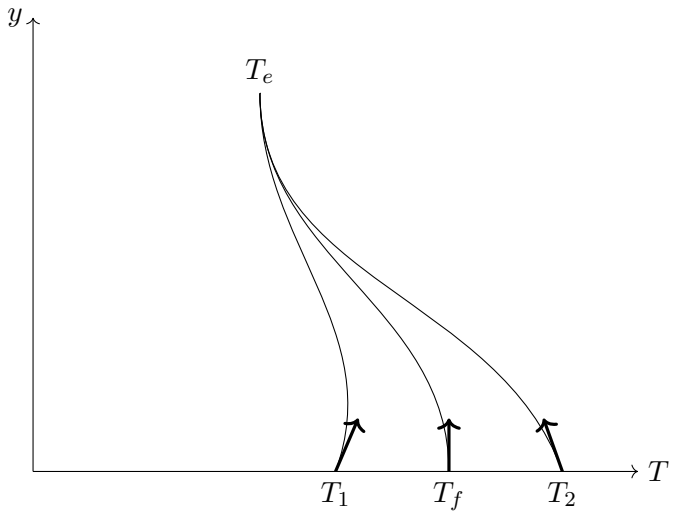


FIGURE 1.1. – Allure des distributions de températures d'une couche limite avec flux de chaleur à la paroi d'après [5].
$T = T_\mathrm{f}$: paroi athermane ; $T_1 < T_\mathrm{f}$: paroi froide ; $T_2 > T_\mathrm{f}$: paroi chaude.

$$\text{Épaisseur de quantité de mouvement} \quad \theta_{11} = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_e U_\mathrm{e}} \left(1 - \frac{U}{U_\mathrm{e}}\right) dy \tag{1.27}$$

$$\text{Facteur de forme} \quad H = \frac{\delta_1}{\theta_{11}} \tag{1.28}$$

$$\text{Épaisseur d'énergie} \quad \Delta = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_e U_\mathrm{e}} \left(\frac{h_\mathrm{i}}{h_\mathrm{ie}} - 1\right) dy \tag{1.29}$$

$$\text{Épaisseur d'énergie cinétique} \quad \delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_e U_\mathrm{e}} \left(1 - \left(\frac{U}{U_\mathrm{e}}\right)^2\right) dy \tag{1.30}$$

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\theta_{11}} \tag{1.31}$$

En écoulement incompressible, les masses volumiques peuvent être considérées comme constantes. Ceci permet de définir des épaisseurs caractéristiques "incompressibles".

$$\delta_{1i} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_\mathrm{e}}\right) dy \tag{1.32}$$

$$\theta_{11i} = \int_0^\delta \frac{U}{U_\mathrm{e}} \left(1 - \frac{U}{U_\mathrm{e}}\right) dy \tag{1.33}$$

$$H_\mathrm{i} = \frac{\delta_{1i}}{\theta_{11i}} \tag{1.34}$$

Bien entendu nous avons équivalence des deux définitions dans le cas d'un écoulement réellement incompressible.

1.3.2. Interprétation physique des épaisseurs de couche limite

Les épaisseurs caractéristiques définies précédemment peuvent être interprétées en terme de pertes de débit entre l'écoulement de fluide parfait et l'écoulement en présence de couche limite [5] (débit de masse, débit de quantité de mouvement, débit d'énergie ...).
Le débit massique dans la couche limite est donné par :

$$q = \int_0^\delta \rho U dy \tag{1.35}$$

Dans le cas d'un fluide parfait ce débit vaut :

$$Q = \int_0^\delta \rho_e U_\mathrm{e} dy \tag{1.36}$$

La perte de débit engendrée par les effets visqueux de la couche limite est :

$$Q - q = \int_0^\delta (\rho_e U_\mathrm{e} - \rho U) dy \tag{1.37}$$

soit en utilisant la définition de l'épaisseur de déplacement δ_1 (équation (1.26)) :

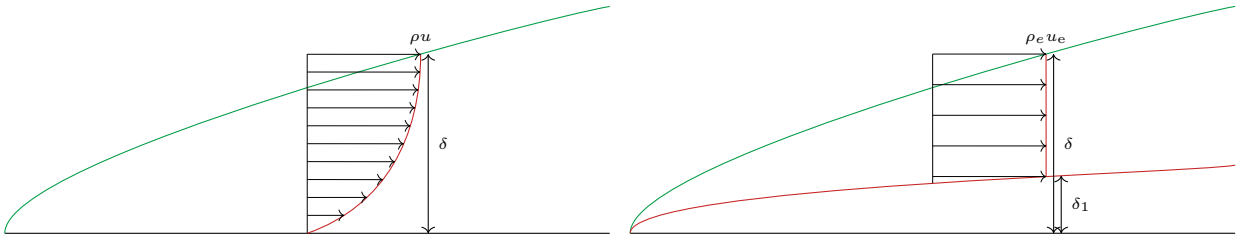
$$Q - q = \rho_e U_\mathrm{e} \delta_1 \tag{1.38}$$

ce qui revient à dire que la perte de débit de masse engendrée par la présence d'une couche limite est confinée dans une couche fictive d'épaisseur δ_1.

Une autre façon d'interpréter l'épaisseur de déplacement est de dire qu'il y a égalité des débits massiques entre un écoulement réel d'épaisseur de couche limite δ (Figure 1.2a) et un écoulement pour lequel la paroi est "relevée" de δ_1 et vaut la vitesse de fluide parfait entre δ_1 et δ (Figure 1.2b). Ceci se traduit par :

$$\int_0^\delta \rho U dy = \int_{\delta_1}^\delta \rho_e U_\mathrm{e} dy \tag{1.39}$$

L'épaisseur de déplacement est donc la hauteur dont il faudrait déplacer en chaque point la paroi pour maintenir le débit inchangé en fluide parfait. La surface fictive ainsi définie s'appelle surface de déplacement.



(a) Écoulement réel (b) Écoulement fictif de même débit massique

FIGURE 1.2. – Interprétation de l'épaisseur de déplacement δ_1 tirée de la thèse de Bégou [4], d'après [5]

Le même raisonnement est possible pour l'épaisseur de quantité de mouvement θ_{11}, qui peut être interprétée en s'intéressant au débit de quantité de mouvement qui pour un écoulement réel est :

$$m = \int_0^\delta \rho U^2 dy \tag{1.40}$$

Supposons qu'à la place de l'écoulement de couche limite, il y ait un écoulement de même débit q mais de vitesse constante U_e. Cette quantité devient alors :

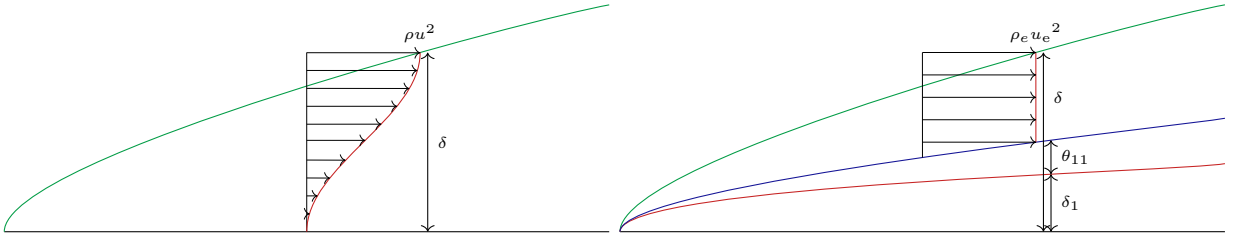
$$M = U_\mathrm{e} q = U_\mathrm{e} \int_0^\delta \rho U dy = \int_0^\delta \rho U U_\mathrm{e} dy \tag{1.41}$$

La perte de débit de quantité de mouvement est donc reliée à l'épaisseur de quantité de mouve-

ment :

$$M - m = \rho_e {U_\mathrm{e}}^2 \theta_{11}. \tag{1.42}$$

L'épaisseur de quantité de mouvement définit ainsi la hauteur dont il faudrait déplacer en chaque point la surface de déplacement pour conserver le débit de quantité de mouvement.



(a) Écoulement réel

(b) Écoulement fictif de même débit de quantité de mouvement

FIGURE 1.3. – Interprétation de l'épaisseur de quantité de mouvement θ_{11} tirée de la thèse de Bégou [4], d'après [5]

De la même façon, l'épaisseur d'énergie cinétique représente la perte de cette énergie cinétique due à la présence de la couche limite, pour une même valeur du débit masse :

$${U_\mathrm{e}}^2 \int_0^\delta \rho U dy - \int_0^\delta \rho U^3 dy = \rho_e {U_\mathrm{e}}^3 \delta_3 \tag{1.43}$$

Enfin, l'épaisseur d'énergie ou épaisseur d'enthalpie d'arrêt représente le gain (positif ou négatif) du débit d'enthalpie d'arrêt pour une même valeur du débit masse :

$$\int_0^\delta \rho U h_\mathrm{i} dy - h_\mathrm{ie} \int_0^\delta \rho U dy = \rho_e U_\mathrm{e} h_\mathrm{ie} \Delta \tag{1.44}$$

1.4. Note sur la couche limite tridimensionnelle

1.4.1. Repère aile et repère aérodynamique

Pour un écoulement tridimensionnel, une nouvelle composante de la vitesse est introduite en considérant un premier repère lié à l'aile : U est dans la direction x normale au bord d'attaque, W est la vitesse dans la direction z parallèle au bord d'attaque et V est toujours selon y normale à la paroi. C'est dans ce premier repère que les équations de couche limite sont établies par une approche similaire à celle utilisée pour le cas bidimensionnel.

Considérons la vitesse $\mathbf{U}_e = (U_\mathrm{e}, W_\mathrm{e}, V_\mathrm{e})$ à la frontière de la couche limite. Elle nous permet de définir l'angle θ de la ligne de courant extérieure à la couche limite (la projection des lignes de courant traversant la frontière de couche limite) par rapport à la direction x (Figure 1.4) :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{W_\mathrm{e}}{U_\mathrm{e}}\right) \tag{1.45}$$

Si la courbure du profil est assez faible, le changement de repère s'effectue par simple rotation de θ autour de y, ce qui nous permet de définir un repère couche limite (ξ, η, y) dans lequel les composantes de la vitesse sont :

$$u = U\cos\theta + W\sin\theta \tag{1.46}$$

$$w = -U\sin\theta + W\cos\theta \tag{1.47}$$

$$v = V \tag{1.48}$$

et donc à la frontière de la couche limite

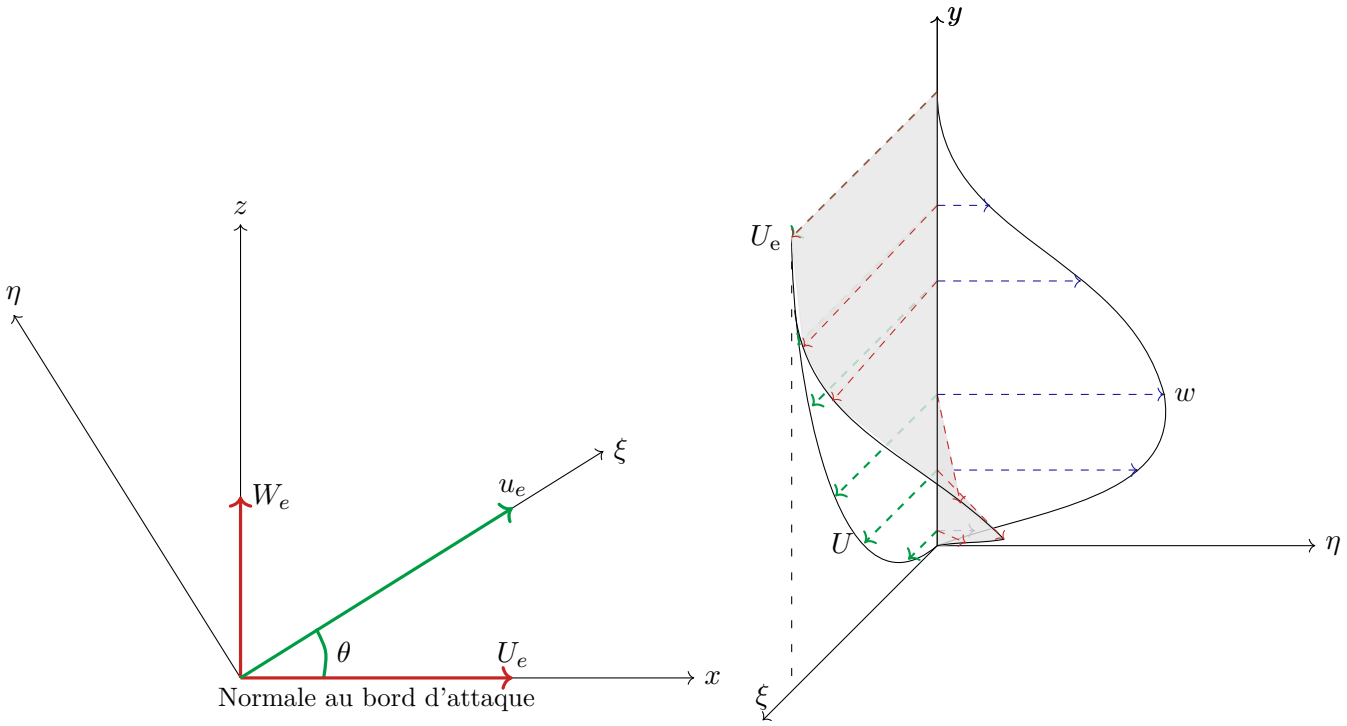
$$\begin{aligned} u_\mathrm{e} &= U_\mathrm{e}\cos\theta + W_\mathrm{e}\sin\theta \qquad w_e = 0 \qquad v_\mathrm{e} = V_\mathrm{e} \\ &= \sqrt{{U_\mathrm{e}}^2 + {W_\mathrm{e}}^2} \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ce qui nous permet de définir les adimensionnements suivants :

$$\overline{u} = \frac{u}{U_\mathrm{e}} = \overline{U}\cos^2\theta + \overline{W}\sin^2\theta \tag{1.50}$$

$$\overline{w} = \frac{w}{U_\mathrm{e}} = \sin\theta\cos\theta(\overline{W} - \overline{U}) \tag{1.51}$$

où $\overline{U} = U/U_\mathrm{e}$ et $\overline{W} = W/U_\mathrm{e}$.



(a) Vitesse à la frontière de la couche limite

(b) Profil complet de vitesse dans le repère couche limite

FIGURE 1.4. – Définitions des repères liés à l'aile (x, z, y) et à la couche limite (ξ, η, y)

Notons que w est nulle à la paroi (condition d'adhérence à la paroi) et est nulle à la frontière de la couche limite par construction. L'orientation du repère (ξ, η, y) est imposée par la direction de la vitesse à la frontière à la couche limite et la normale à la paroi. Le signe de w dépend donc de cette orientation. Ainsi sur un profil symétrique mis en flèche à incidence nulle, nous trouverons des signes opposés pour w si nous considérons soit l'extrados soit l'intrados.

1.4.2. Équations de couche limite compressible tridimensionnelle instationnaire

Nous considérons le cas général d'une couche limite tridimensionnelle compressible instationnaire. Suivant les cas considérés (aile en flèche d'envergure infinie, écoulement stationnaire ...) des simplifications peuvent être effectuées.
En suivant le même raisonnement que dans le cas de la couche limite bidimensionnelle et en

adimensionnant W par V_{ref} et z par L_{ref}, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0 \tag{1.52a}$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} + \rho W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{1.52b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{1.52c}$$

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} + \rho U \frac{\partial W}{\partial x} + \rho V \frac{\partial W}{\partial y} + \rho W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{1.52d}$$

$$\rho \frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial t} + \rho U \frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{P_r}} - 1\right)\mu \frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial y}\right] \tag{1.52e}$$

Comme dans le cas de la couche limite bidimensionelle, pour une couche limite tridimensionnelle des grandeurs caractéristiques peuvent être déterminées. Elles sont détaillées dans la thèse de Bégou [4].

1.5. Équations de similitude avec prise en compte de la température de paroi

Dans le cadre des écoulements incompressibles, les équations de Falkner-Skan (Falkner-Skan-Cooke pour un écoulement tridimensionnel) sont des équations de similitude et fournissent une base de profils de vitesse intéressante puisqu'elle est représentative des écoulements de couche limite. Dans le cas particulier de la plaque plane où le gradient pression est nul ($\frac{\partial P}{\partial x} = 0$) nous retrouvons la solution de Blasius.

Pour le cas d'un écoulement compressible, la notion de similitude est à considérer avec précaution. Il existe plusieurs transformations permettant d'avoir des équations de similitude (Stewardson [6], Howarth [7], Levy-Lees [8]). Pour le cas de la couche limite sur paroi chaude, nous allons nous focaliser sur le changement de variable de Levy-Lees [8] qui permet une prise en compte des effets de la température de paroi sur l'écoulement moyen.

Transformation de Levy-Lees

Les équations de la couche limite bidimensionnelle compressible sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \\ \rho U \dfrac{\partial U}{\partial x} + \rho V \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) \\ \rho U \dfrac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial x} + \rho V \dfrac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{P_r}} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu \dfrac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial y}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{P_r}}\right) \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U \mu \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{1.53}$$

avec $h_\mathrm{i} = h + \frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}$ l'enthalpie totale et $\mathrm{P_r}$ le nombre de Prandtl.
En se plaçant à l'extérieur de la couche limite, nous obtenons la relation suivante pour le gradient de pression :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_e U_\mathrm{e} \frac{dU_\mathrm{e}}{dx} \tag{1.54}$$

où l'indice e désigne les quantités à la frontière de la couche limite.

La transformation de Levy-Lees correspond au changement de variable suivant :

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_\mathrm{p}\mu_\mathrm{p}U_\mathrm{e}dx \qquad \eta(x,y) = \frac{U_\mathrm{e}}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \rho dy \tag{1.55}$$

Ce changement de variable est légèrement différent de celui que nous trouvons dans [8], dans la mesure où dans la définition de ξ les grandeurs à la paroi sont utilisées à la place des grandeurs à la frontière de la couche limite (ρ_p, μ_p remplace ρ_e, μ_e).

En définissant :

$$\frac{U}{U_\mathrm{e}} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{1.56}$$

et

$$g = \frac{h_\mathrm{i}}{h_\mathrm{ie}} \tag{1.57}$$

les équations de quantités de mouvement et d'énergie deviennent :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_\mathrm{p}\mu_\mathrm{p}}f''\right) + ff'' + \beta_\mathrm{H}\left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2\right) = 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right)} \tag{1.58}$$

où le paramètre de gradient de pression, appelé paramètre de Hartree, est $\beta_\mathrm{H} = \frac{2\xi}{U_\mathrm{e}}\frac{dU_\mathrm{e}}{d\xi}$. Ce paramètre est lié au gradient de vitesse extérieure et donc aussi au gradient de pression longitudinal.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p}\frac{g'}{\mathrm{P_r}}\right) + fg' + \frac{{U_\mathrm{e}}^2}{h_\mathrm{ie}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathrm{P_r}-1}{\mathrm{P_r}}\frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p}f'f''\right) = 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial g}{\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}\right)} \tag{1.59}$$

Les conditions aux limites sont :
— en $\eta = 0$: $\frac{\partial f}{\partial\eta} = 0$ et $g = g_\mathrm{P} = \frac{h_\mathrm{P}}{h_\mathrm{ie}}$ ou $\left.\frac{\partial g}{\partial\eta}\right|_0 = 0$ pour une paroi athermane
— en $\eta = 1$: $\frac{\partial f}{\partial\eta} = 1$ et $g = 1$

Les équations encadrées (équation (1.58) et (1.59)) sont les équations de similitude pour une couche limite compressible avec prise en compte de la température de paroi. Afin d'obtenir des solutions semblables, il faut que les fonctions f et g soient indépendantes de la variable ξ. Ainsi les seconds membres des deux équations seront nuls. Dans les premiers membres, les conditions seront alors en toute rigueur :

1. $\frac{\rho\mu}{\rho_\mathrm{p}\mu_\mathrm{p}}$ fonction de η
2. $\beta_\mathrm{H}\left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2\right)$ fonction de η
3. $\mathrm{P_r} = 1$ ou $\begin{cases}\mathrm{P_r} \text{ fonction de } \eta \text{ ou } \mathrm{P_r} \text{ constant et } \frac{{U_\mathrm{e}}^2}{h_\mathrm{ie}} \text{ constant}\end{cases}$
4. g_P constant

Il est bien évident que l'ensemble de ces conditions ne sont rassemblées que dans des cas particuliers. Ces cas sont essentiellement celui de l'écoulement uniforme et celui du point d'arrêt.
Dans le cas général d'un gradient de vitesse extérieure, les changements de variables (1.55) ne permettent pas de transformer les équations de la couche limite en équations différentielles ordinaires. Les équations (1.58) et (1.59) comportent alors des termes dépendants de ξ, c'est-à-dire de l'abscisse. Il convient alors de faire appel à des techniques approchées dont la plus simple correspond au concept de *similitude locale* [5].

Dans ce concept, il est supposé que les caractéristiques de l'écoulement extérieur et de la température de paroi varient assez lentement pour que les dérivées de f et de g par rapport à ξ soient négligeables devant les dérivées par rapport à η.

Les seconds membres des équations (1.58) et (1.59) sont ainsi négligés et celles-ci s'écrivent :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p}f''\right)+ff''+\beta_{\mathrm{H}}\left(\frac{\rho_e}{\rho}-f'^2\right)=0} \tag{1.60}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p}\frac{g'}{\mathrm{P_r}}\right)+fg'+\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{h_{\mathrm{ie}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathrm{P_r}-1}{\mathrm{P_r}}\frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p}f'f''\right)=0} \tag{1.61}$$

Il est alors supposé que ces équations sont des équations différentielles ordinaires en η et que les termes dépendants de ξ qui y figurent encore n'interviennent qu'à titre de paramètres et par leurs valeurs locales. La résolution des équations (1.60) et (1.61) permet la détermination de profils de vitesse et de température.

1.6. Route vers la turbulence : le phénomène de transition

Les premières expériences systématiques relatives aux conditions dans lesquelles se produit la transformation d'un écoulement laminaire en écoulement turbulent sont celles effectuées par Reynolds (1883). Ces expériences concernaient l'étude de l'écoulement des liquides dans des conduites cylindriques (figure 1.5). Ce sont ces expériences qui ont conduit Reynolds à formuler la loi de similitude qui porte son nom, loi découverte lors d'études d'un phénomène de transition.
Observant un filet de colorant dans un écoulement d'eau dans un tube en verre et pour différents débits, il fait le constat suivant :

- à faible vitesse le filet coloré demeure rigoureusement parallèle aux génératrices du tube : c'est l'écoulement laminaire.
- pour des vitesses plus élevées, le filet demeure parallèle à l'axe jusqu'à une faible distance de l'entrée et se met à osciller ; la matière colorée se diffusant dans tout le tube : l'écoulement est devenu turbulent.
- répétant l'expérience pour des tubes de différents diamètres, Reynolds s'aperçoit que la vitesse à laquelle apparaît la turbulence est inversement proportionnelle au diamètre du tube.

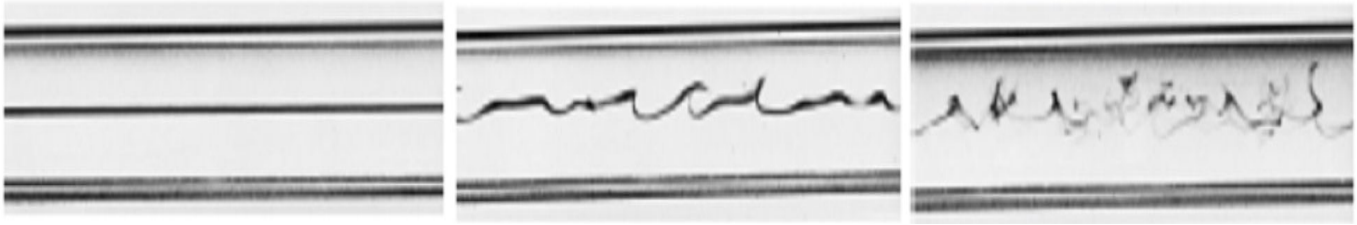
Il dégage ainsi trois paramètres d'influence (la vitesse U_∞ de l'écoulement, le diamètre D du tube et la viscosité cinématique ν du fluide) et une relation entre ces paramètres permettant de caractériser le régime d'écoulement : c'est le nombre de Reynolds Re_D défini par :

$$Re_D=\frac{U_\infty D}{\nu}. \tag{1.62}$$

L'écoulement est turbulent à partir d'une certaine valeur de ce nombre sans dimension nommée nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re_{crit}}$. Ce nombre de Reynolds critique est très sensible aux conditions de l'expérience et aux types d'écoulements (en conduite, sur plaque plane, sur une aile ...). L'écoulement devient turbulent après être passé par une phase dite transitoire qui sera l'objet de ce paragraphe.

Il a été découvert plus tard que la couche limite qui se développe le long de la paroi d'un obstacle immergé dans un fluide est également sujette au phénomène de transition et ne demeure laminaire que sur une certaine distance, et plus précisément jusqu'à un certain nombre de Reynolds (alors défini en fonction de l'abscisse curviligne x).
De nombreuses expériences ont été réalisées sur plaque plane pour l'étude des fluctuations turbulentes au sein de la couche limite. À la suite de ces travaux, il a été reconnu que le processus de transition le long d'une paroi solide se prête d'une façon très générale à la description schématique suivante (cette description a été recueillie dans [9]) :

- La transition est due à des perturbations produites par différentes causes possibles au sein de la couche limite laminaire, et qui sont amplifiées lorsqu'elles se propagent jusqu'à conduire



(a) Régime laminaire (b) Régime transitoire (c) Régime turbulent

FIGURE 1.5. – Expérience de Reynolds
source image : *http ://olivier.granier.free.fr/MOOC/co/rappels-de-cours-meca-fluide-nbre-reynolds.html*

au régime turbulent.

La figure 1.6 permet de distinguer différentes régions dans l'écoulement de la couche limite se développant sur une plaque plane.

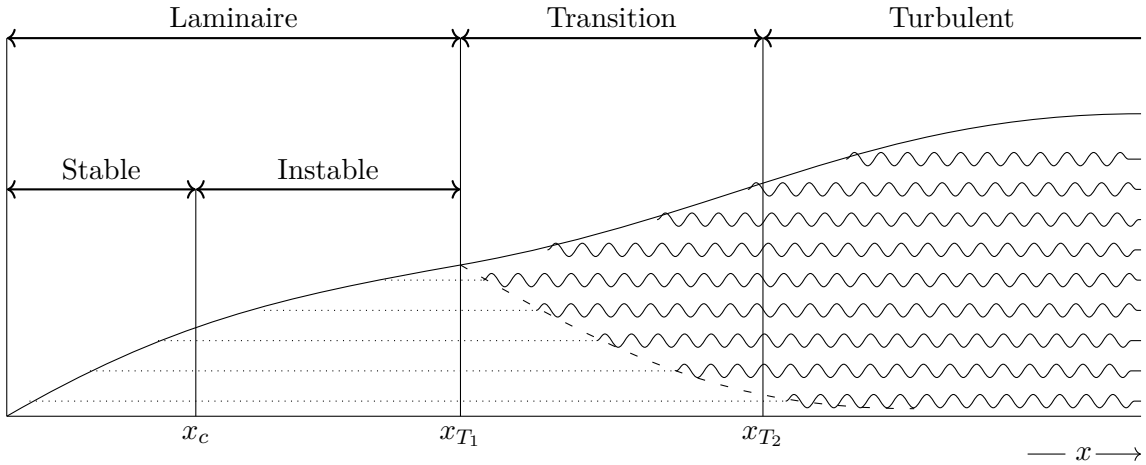


FIGURE 1.6. – Couche limite et transition sur plaque plane [9]

— Jusqu'à une distance x_c correspondant à un nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}} = \frac{U_e x_c}{\nu}$ toutes les perturbations sont amorties par la viscosité.
— Au delà de x_c les perturbations sont amplifiées : leur amplitude croit à mesure qu'elles se propagent en aval.
— À partir de l'abscisse x_{T_1} c'est le début de la transition : les perturbations semblent se grouper pour affecter l'ensemble des particules fluides et former des "taches turbulentes" (*turbulent spot*) [9]. Le régime turbulent est établi lorsque l'ensemble de la couche limite est soumise à un système de fluctuations complètement [2] désordonnées. Le point x_{T_2} marque la fin de la zone de transition et le début du régime turbulent.

1.6.1. Différents mécanismes de transition

Dans le cadre d'écoulements externes, la couche limite est soumise à des perturbations venant de l'environnement (turbulence extérieure, bruit rayonné, rugosité de paroi ...). La réponse de la couche limite à ces perturbations ainsi que la nature de celles-ci va donner lieu à différents scénarios de transition. C'est au travers d'une étape dite de réceptivité [11] que les propriétés de

2. le terme "complètement" est à prendre avec des pincettes, au vu des recherches en cours dans la communauté de la turbulence sur l'existence de structures cohérentes au sein des couches limites turbulentes [10]

la couche limite vont déterminer la suite du processus. Reshotko [12] a schématisé les différents scénarios possibles (Figure 1.7).

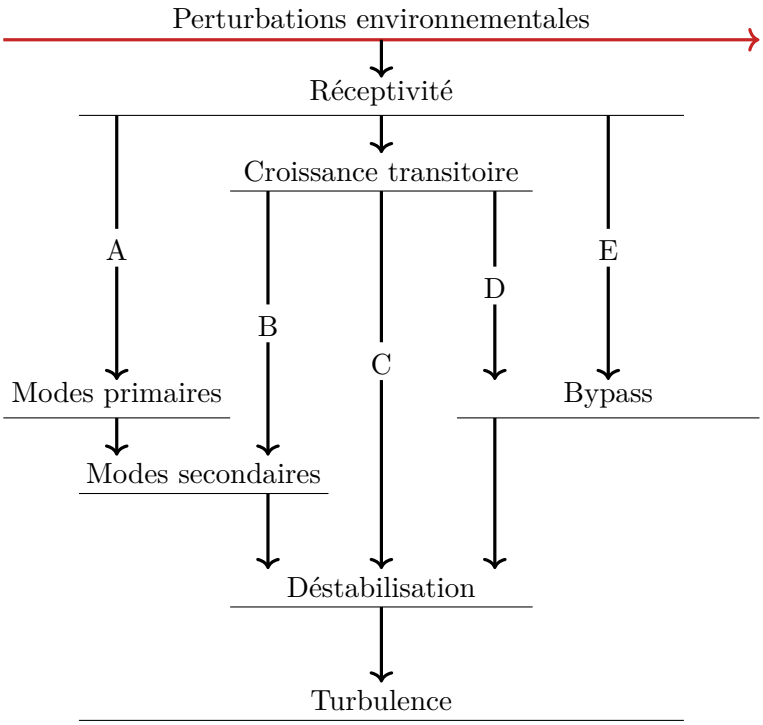


FIGURE 1.7. – Scénarios de transition d'après Reshotko [12]

Dans cette étude, nous ne nous intéresserons qu'au scénario décrit par le chemin A, et nous nous restreindrons aux écoulements subsoniques à supersoniques c'est-à-dire jusqu'à M = 4 (les écoulements hypersoniques ne seront donc pas pris en compte).

Les différents chemins vers la turbulence

Les différents chemins présentés sur la figure 1.7 correspondent aux mécanismes suivants :

Chemin A : c'est le mécanisme classique de transition pour les écoulements externes à faible niveau de turbulence extérieure (voilures d'aéronefs, véhicules automobiles ...), qui sont notre cas d'étude. Nous parlerons dans ce cas de transition naturelle. Au cours de ce scénario, les perturbations sont amplifiées de façon modale [13]. En 2D, les ondes sont appelées modes de Tollmien-Schlichting (TS) auxquelles viennent s'ajouter les ondes "crossflow" (CF) en 3D. Dans des cas particuliers d'autres instabilités peuvent apparaitre (instabilités de Görtler pour les surfaces concaves [14], instabilités de Görtler-Hämmerlin sur la ligne de partage [15]).

Ce mécanisme de transition est un mécanisme modal, la transition étant causée par la dégénérescence du mode le plus instable après son amplification linéaire. L'identification et le suivi de ce mode permet donc d'évaluer la position de la transition.

Autres chemins : lorsque le niveau des perturbations extérieures augmente, un phénomène de croissance transitoire intervient. De par sa faible amplitude, une cohabitation entre l'amplification modale (onde TS) et l'amplification multi-modale des modes de Klebanoff est possible. Ce processus apparaît à un taux de turbulence extérieure moyen $0{,}1\% \leqslant T_u \leqslant 0{,}7\%$ avec une interaction entre les deux types d'instabilités (Kosorygin et Polyakov [16]). Ceci est le cas de figure décrit par le **chemin B**.
Pour le **chemin C**, le taux de turbulence extérieure devient supérieur à 0,7% ($0{,}7\% \leqslant T_u \leqslant 1\%$) et l'instabilité modale (onde TS) est entièrement cachée par la croissance transitoire [16]. La

théorie des perturbations optimales [17] [18] [19] a montrée que les perturbations initiales, correspondant à des tourbillons longitudinaux, entrainent la formation de stries (modes de Klebanoff) dans la couche limite qui provoquent la transition.
Lorsque le taux de turbulence extérieure dépasse 1% (**chemin D**), ce sont les modes de Klebanoff qui pilotent la transition. Ce cas se rencontre dans les turbomachines où les étages avals sont soumis au sillage d'éléments en amont donc à de forts taux de turbulence extérieure. L'absence de filtrage des hautes fréquences permet une amplification des stries jusqu'à une amplitude critique, atteinte proche du bord d'attaque, qui permet une interaction des modes de Klebanoff. La transition dans ce cas est dite bypass.
Enfin si les perturbations extérieures augmentent encore (**chemin E**), leur amplitude est telle que le forçage de la couche limite qui en découle ne permet pas l'existence de zone laminaire. Il est alors difficile de parler de zone de transition puisque la couche limite est turbulente dès sa formation.

1.6.2. Les perturbations modales en transition naturelle

Les perturbations auxquelles la couche limite est soumise dans le cas de la transition naturelle sont de faible intensité. Ce type de configuration se retrouve sur les ailes ou les nacelles d'avions de transport en croisière avec un état de surface de bonne qualité.

Instabilités de Tollmien-Schlichting

L'existence des ondes de Tollmien-Schlichting (TS) a été établie mathématiquement par Tollmien (1929) et Schlichting (1933) lorsqu'ils ont déterminé l'amplification des ondes les plus instables sur un écoulement de couche limite bidimensionnel. Ces instabilités sont de type visqueux et ont été observées expérimentalement par Schubauer et Skramstad [20] sur une couche limite de plaque plane excitée artificiellement par un ruban vibrant aux fréquences prévues par Tollmien et Schlichting. Les modes TS sont des ondes longitudinales qui s'amplifient dans le sens de l'écoulement.

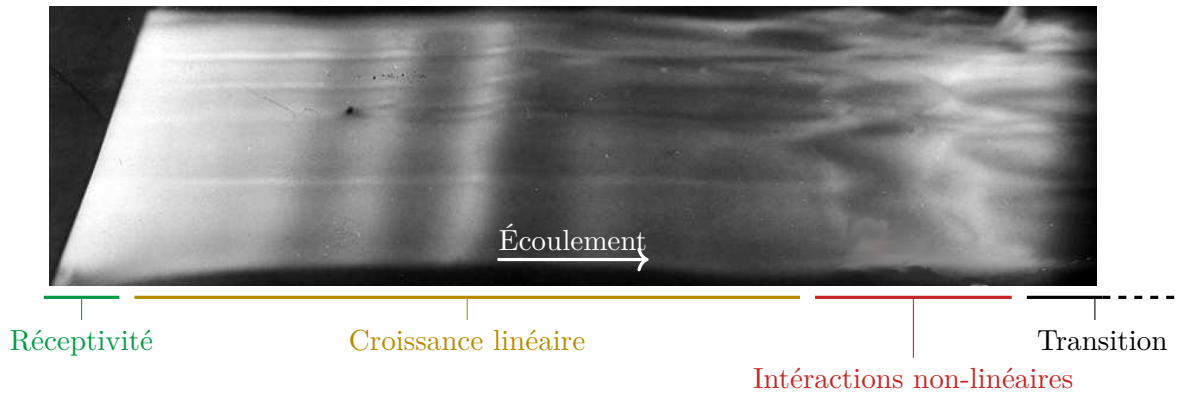


FIGURE 1.8. – Visualisation d'ondes TS dans un tunnel hydraulique (Werlé, Onera 1980)

Instabilités Crossflow

Dans le cas d'une couche limite tridimensionnelle (par exemple pour une aile en flèche), des instabilités transversales ("crossflow" en anglais, abrégé CF) apparaissent ; leur direction de propagation est presque parallèle au bord d'attaque.
Nous avons vu précédemment que w était nulle à la paroi et à la frontière de la couche limite par construction avec une dérivée normale nulle à la frontière de la couche limite. Il existe donc nécessairement un point d'inflexion sur ce profil de vitesse (voir Figure 1.9). C'est ce point d'inflexion dans le profil de w qui est à l'origine des instabilités CF [21]. Ces instabilités ne peuvent pas exister dans le cas d'écoulement purement bidimensionnel.

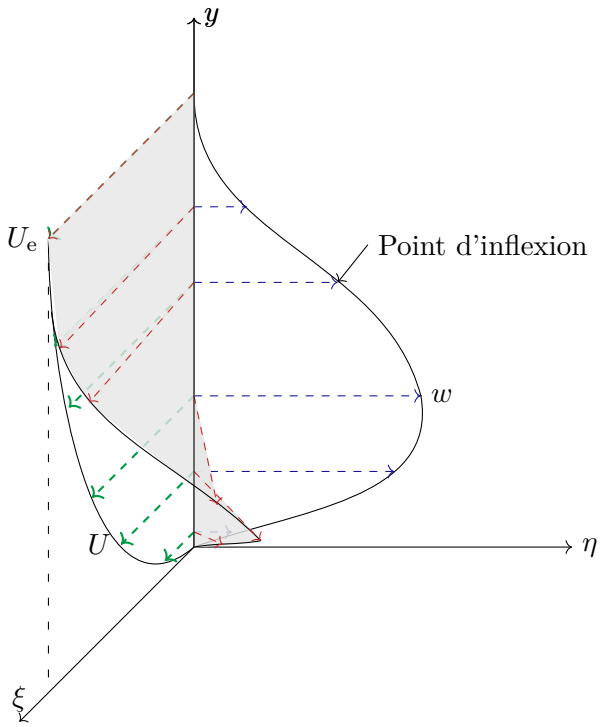


FIGURE 1.9. – Point d'inflexion dans le profil de vitesse transversale w

Les CF se manifestent sous la forme de tourbillons longitudinaux périodiques en **z**. Ils ont la particularité d'exister à des fréquences non nulles (CF instationnaires) mais aussi à une fréquence nulle (CF stationnaires). Ces CF stationnaires peuvent être mis en évidence expérimentalement en enduisant la paroi d'un marqueur (acénapthène par exemple) : les tourbillons étant source de frottements importants le marqueur s'évapore formant ainsi des "stries". Une évaporation plus étendue du marqueur indique la fin de la zone de croissance linéaire (voir Figure 1.10).

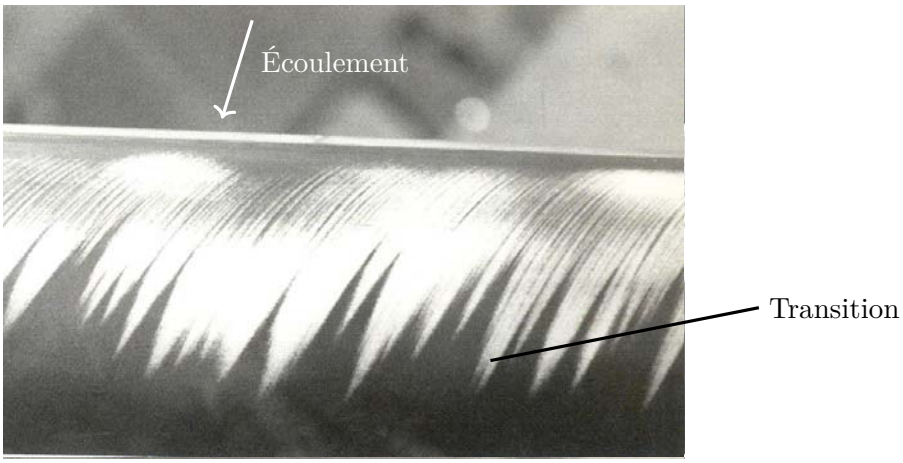


FIGURE 1.10. – Visualisation d'instabilités de type crossflow stationnaire obtenues à l'Onera par sublimation pariétale

1.6.3. Nature des instabilités

Afin de normaliser le problème, nous posons F la fréquence réduite définie par :

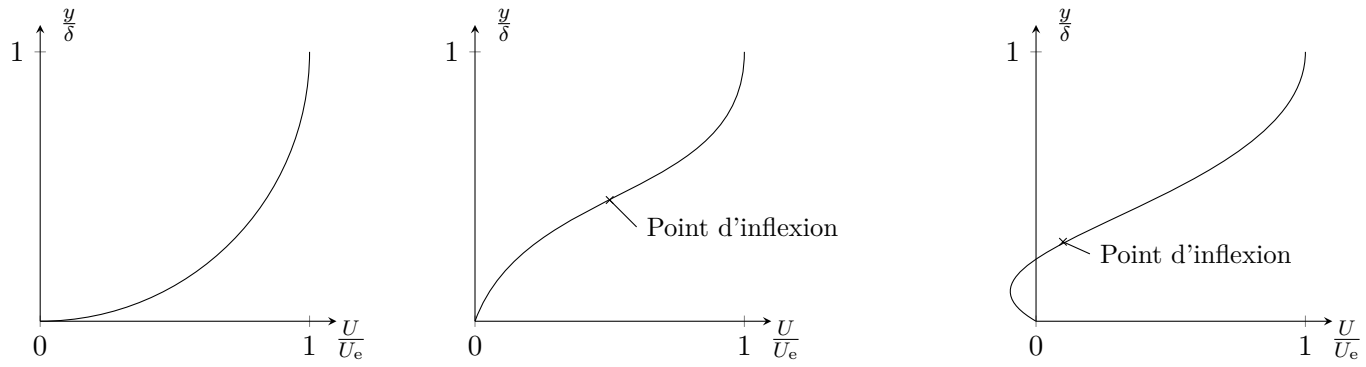
$$\mathrm{F} = \frac{2\pi \mathrm{f} \nu_e}{{U_\mathrm{e}}^2} = 2\pi \mathrm{f} \frac{\delta_1}{U_\mathrm{e}} \frac{\nu_e}{\delta_1 U_\mathrm{e}} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}_{\delta_1}} \frac{\delta_1}{U_\mathrm{e}} = \frac{\omega^*}{\mathrm{Re}_{\delta_1}} \tag{1.63}$$

où ω^* est une pulsation adimensionnée.
Ainsi dans la plan $(\omega^*, \mathrm{Re}_{\delta_1})$, les courbes iso-fréquence réduite F (iso-F) sont des droites passant par l'origine.
Ici différents types d'instabilités nous intéressent : les instabilités de type visqueuses, visqueuses-inflexionnelles et inflexionnelles. Les ondes de Tollmien-Schlichting relèvent des deux premiers types tandis que les ondes CF relèvent elles du troisième.

Instabilités visqueuses Ces instabilités se rencontrent principalement sur les profils de vitesse ne présentant pas de point d'inflexion (figure 1.11a)

Instabilités visqueuses-inflexionnelles Ces instabilités sont la superposition d'instabilités visqueuses et inflexionnelles émergeant par la présence d'un point d'inflexion relativement bas dans la couche limite. Ces instabilités se retrouvent sur des profils de vitesse avec gradient de pression adverse modéré (figure 1.11b) et jusqu'en amont d'un décollement. Elles se retrouvent aussi dans le cas d'écoulements sur paroi chaude.

Instabilités inflexionnelles Ces instabilités émergent par la présence d'un point d'inflexion plus prononcé et plus haut dans la couche limite que dans le cas précédent (figure 1.11c). Ce type de profil présente un courant de retour et correspond à un écoulement décollé ou au profil de vitesse projeté dans la direction opposée au signe de w.



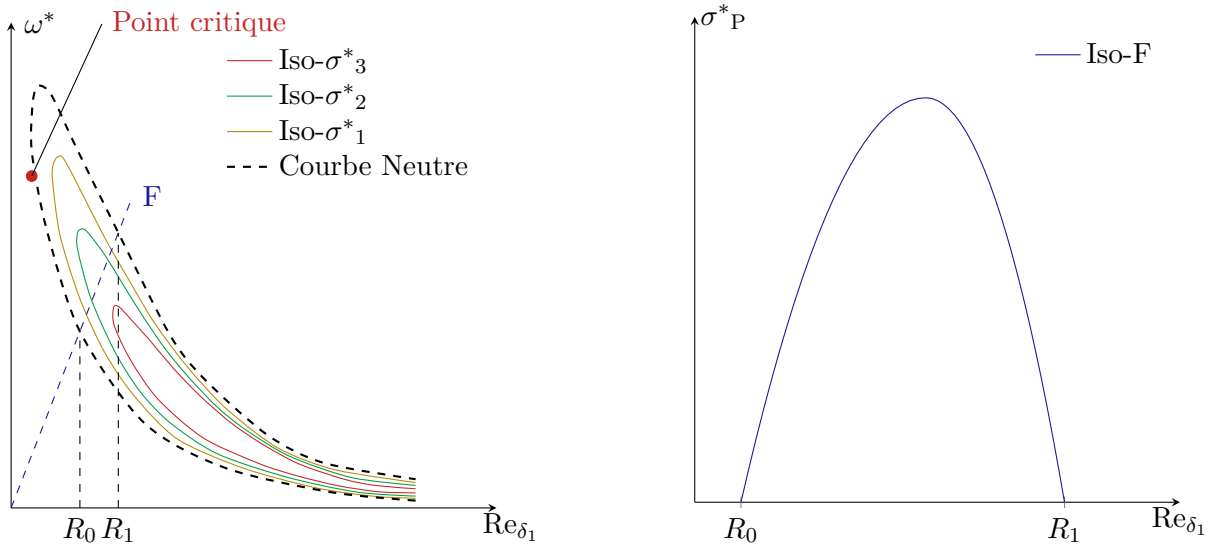
(a) Gradient de pression favorable (b) Gradient de pression adverse modéré (c) Courant de retour

FIGURE 1.11. – Profils de vitesse de couche limite

1.6.3.1. Instabilités visqueuses

Les instabilités visqueuses sont dues à l'effet déstabilisant de la viscosité. Cet effet a été mis en évidence par Prandtl en 1921. Ce type d'instabilités se rencontre en écoulement accéléré (gradient de pression négatif) pour les écoulements bidimensionnels, ou en écoulement uniforme (type Blasius).
La forme schématique du diagramme de stabilité pour ce type d'instabilités est représenté sur la figure 1.12a . De plus l'évolution du taux d'amplification le long d'une iso-F est représentée par la figure 1.12b .

La courbe en pointillé noir représente la courbe neutre, courbe sur laquelle les ondes ne sont ni amplifiées ni amorties. Le point critique, marqué par un cercle rouge sur la figure, correspond à la valeur de Re_{δ_1} à partir de laquelle les ondes peuvent être amplifiées. Autrement dit pour un nombre de Reynolds Re_{δ_1} inférieur à cette valeur critique, tous les modes sont stables. Une caractéristique des instabilités visqueuses est que la courbe neutre peut se refermer pour un nombre de Reynolds élevé.



(a) Diagramme de stabilité

(b) Courbe iso-F

FIGURE 1.12. – Diagramme de stabilité pour des instabilités visqueuses

La figure 1.12b représente l'évolution du taux d'amplification σ^*_P (taux d'amplification spatiale adimensionné) le long d'une iso-F. Nous pouvons constater que ce type de courbe est proche de la superposition de deux demi-paraboles.

1.6.3.2. Instabilités visqueuses-inflexionnelles

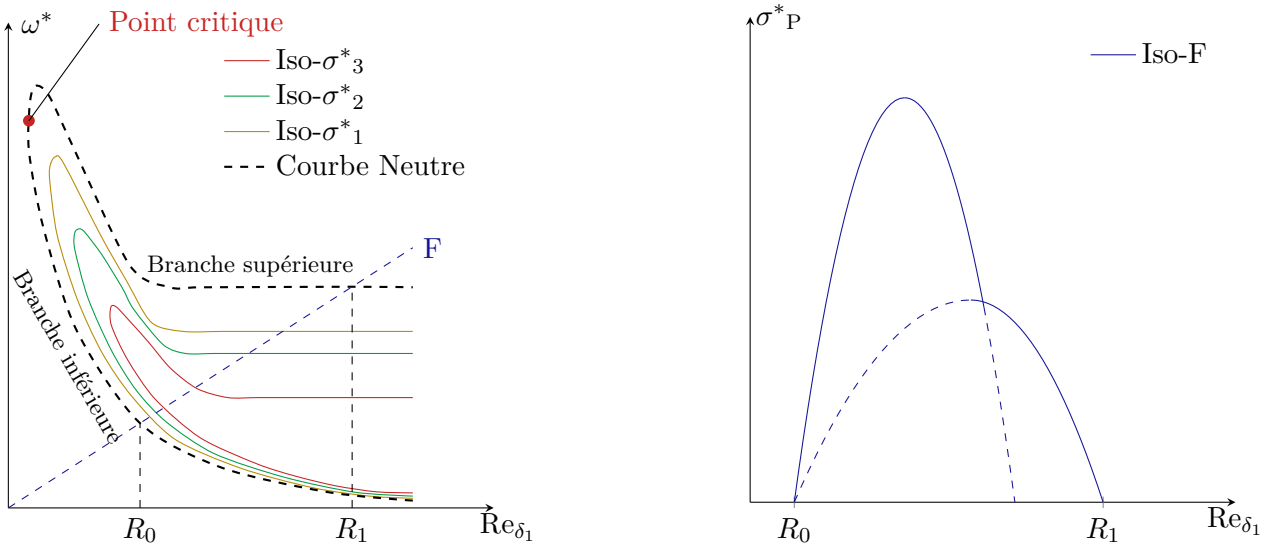
Ce type d'instabilités correspond à la juxtaposition d'instabilités visqueuses et inflexionnelles. Au cours de ses travaux, Reynolds a remarqué que deux types de comportement pouvaient se dégager lors l'apparition de ce type d'instabilités. Dans un premier cas les instabilités visqueuses apparaissent naturellement mais de façon irrégulière. Dans un second cas, le profil de vitesse présente un point d'inflexion et les instabilités associées apparaissent plus régulièrement. Lors de l'étude de son équation de stabilité pour les écoulements non-visqueux, Rayleigh [22] a montré qu'un paramètre pertinent pour l'étude d'instabilités était le point d'inflexion du profil de vitesse. Il a formulé le théorème suivant :

Théorème du point d'inflexion de Rayleigh : La présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse est une condition nécessaire mais non-suffisante à la présence d'instabilités non-visqueuses. Un écoulement non-visqueux sans point d'inflexion est donc inconditionnellement stable.

Bien que la démonstration de ce théorème ait été réalisée pour un écoulement incompressible, Lees et Lin [23] ont généralisé ce théorème au cas des écoulements compressibles en considérant cette fois le point d'inflexion généralisé.

Ces instabilités apparaissent lorsque le point d'inflexion du profil de vitesse est bas dans la couche limite ($y/\delta < 0{,}2$). Elles se rencontrent pour des écoulements avec gradient de pression adverse modéré et jusqu'en amont d'un décollement.

Nous pouvons distinguer deux branches distinctes sur cette forme schématique du diagramme de stabilité (figure 1.13a). Une première branche qui tend vers 0 lorsque Re_{δ_1} tend vers l'infini ce qui est caractéristique de la partie visqueuse de l'instabilité, et une seconde branche qui "s'ouvre" et qui tend vers une valeur constante de ω^* pour des nombres de Reynolds élevés. Contrairement aux instabilités purement visqueuses, il existe donc une plage de pulsations inconditionnellement instables quand Re_{δ_1} tend vers l'infini.
À iso-F, l'évolution du taux d'amplification peut être approché par quatre demi-paraboles comme l'illustre la figure 1.13b.



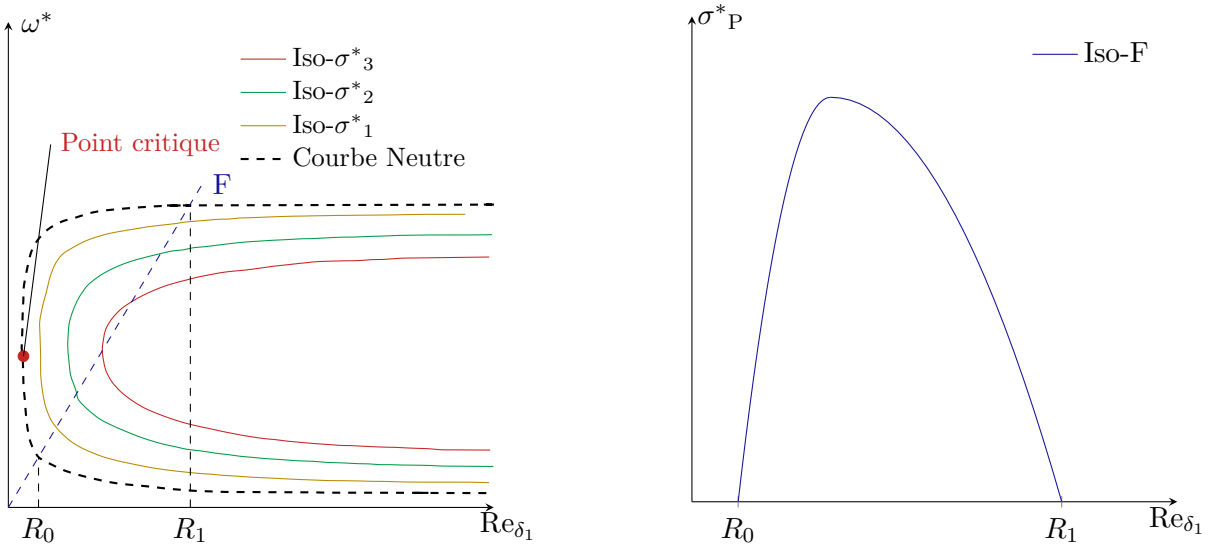
(a) Diagramme de stabilité

(b) Évolution de $\sigma^*{}_\mathrm{P}$ selon une iso-F

FIGURE 1.13. – Diagramme de stabilité pour des instabilités visqueuses-inflexionelles

1.6.3.3. Instabilités inflexionnelles

Le diagramme de stabilité de ce type d'instabilités, présenté sur la figure 1.14a, diffère grandement de celui des instabilités visqueuses. En effet, comme nous pouvons le voir, le diagramme ne se referme pas aux nombres de Reynolds Re_{δ_1} élevés. Pour une pulsation ω^* donnée, nous pouvons observer une faible dépendance de $\sigma^*{}_\mathrm{P}$ à Re_{δ_1} ce qui correspond au fait que c'est le point d'inflexion qui gouverne toute la stabilité. La contribution visqueuse n'est aperçue qu'aux faibles valeurs de Re_{δ_1}.



(a) Diagramme de stabilité

(b) Courbe iso-F

FIGURE 1.14. – Diagramme de stabilité pour des instabilités inflexionelles

Le long d'une iso-F l'évolution du taux d'amplification peut être approchée par deux demi-paraboles (figure 1.14b) comme dans le cas des instabilités visqueuses.

1.6.4. Paramètres agissant sur la transition

On distingue deux types de paramètres agissant sur la transition : les facteurs ayant trait à l'écoulement de base et les facteurs influant directement sur les perturbations ou la réceptivité de la couche limite.

1.6.4.1. Modification de l'écoulement de base

Saric *et al.* [24] mentionnent que pour un écoulement bidimensionnel, l'étude de l'équation d'Orr-Sommerfeld (détaillée en annexe B) met en évidence que la courbure du profil de vitesse, dU^2/dy^2 est un paramètre clé de la stabilité du profil : le profil est stable quand ce paramètre est négatif et d'autant plus stable que sa valeur absolue est grande proche de la paroi.
Étant donné que notre écoulement de base est celui d'une couche limite, l'équation de quantité de mouvement longitudinale compressible s'écrit à la paroi :

$$\mu(T_\mathrm{p})\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho U\frac{\partial U}{\partial x} + \rho V_p\frac{\partial U}{\partial y} - f_{vol} \qquad \text{avec } f_{vol} \text{ une force volumique extérieure} \quad (1.64)$$

où V_p est la vitesse verticale à la paroi de l'écoulement de base. Cette vitesse est non-nulle uniquement pour les parois équipées d'un dispositif d'aspiration ou de soufflage.
Les effets stabilisant possibles sont :

Aspiration en paroi L'aspiration en paroi à un effet sur V_p qui est alors négatif, ce qui va stabiliser la couche limite.

Gradient de pression Les gradients de pression négatifs (ou favorables, écoulements accélérés) vont permettre de stabiliser la couche limite. Ces gradients se retrouvent en général sur les bords d'attaques où l'écoulement est accéléré et stabilisent les ondes TS.

Température de paroi L'effet de la température sur la stabilité de la couche limite intervient à travers la viscosité dynamique μ. La loi de Sutherland s'écrit :

$$\mu(T_\mathrm{p}) = \mu_\mathrm{ref}\left(\frac{T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{suth}}\right)^{3/2}\frac{T_\mathrm{suth}+S_\mathrm{suth}}{T_\mathrm{p}+S_\mathrm{suth}} \quad (1.65)$$

avec pour l'air

$$\mu_\mathrm{ref} = 1{,}716\times10^{-5}\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}} \qquad T_\mathrm{suth} = 273{,}15\mathrm{K} \qquad S_\mathrm{suth} = 110{,}4\mathrm{K} \quad (1.66)$$

Cette loi nous montre que la viscosité augmente avec la température. La diminution de la viscosité permet des vitesses plus importante proche paroi [25]. Les parois froides ont donc un effet stabilisant, ce qui est le cas des écoulements à haute vitesse et à haute altitude où un refroidissement relatif de la paroi est observé [26]. Au contraire, les parois chaudes ont un effet déstabilisant (c'est le cas pour les dispositifs anti-givrage qui peuvent se retrouver sur les ailes ou sur les nacelles). Cependant il a été montré qu'un chauffage localisé pouvait avoir un effet stabilisant sur la couche limite [27]. L'influence de la température de paroi est détaillée dans la prochaine section.

Force volumique En fournissant une force volumique f_{vol} (ici $f_{vol} > 0$) au fluide, l'écoulement se stabilise. C'est le but des actionneurs à plasma [28]. Ces actionneurs peuvent réduire fortement l'amplitude des ondes TS [29].

Pour des écoulements de couche limite tridimensionnelle, ces propriétés sont retrouvées. Cependant, il est important de noter que les CF sont déstabilisées par la présence d'un gradient de pression négatif et stabilisées par un gradient de pression positif à l'inverse des ondes TS.

1.6.4.2. Modification de la réceptivité

Turbulence extérieure L'augmentation de l'intensité de la turbulence extérieure diminue le nombre de Reynolds de transition, ce qui rapproche le point de transition vers le bord d'attaque. La turbulence extérieure se propage le long de la ligne de courant, à la vitesse de l'écoulement. Elle est tridimensionnelle et couvre une large gamme de fréquence.

Bruit rayonné Le bruit est un mode irrotationnel de la perturbation extérieure, il peut être considéré comme monodimensionnel et peut être constitué d'une fréquence unique comme couvrir la totalité du spectre acoustique. Il peut modifier l'amplitude initiale des modes présents dans la couche limite.

Rugosités de paroi Les rugosités de paroi, en créant un sillage turbulent au sein de la couche limite, favorisent les CF et rapprochent le point de transition du bord d'attaque. Elles amplifient aussi les stries et amplifient ou atténuent les TS. Elles se rencontrent très facilement sur les ailes d'avions (défaut de surfaces, raccordement, insectes ...).

1.7. Cas de la couche limite avec paroi chaude

Dans ce cas d'étude, le rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ est pris comme étant plus grand que l'unité. T_p est la température de la paroi et T_f la température de frottement adiabatique.
Le résultat général des études réalisées dans le cadre d'un écoulement de couche limite dans de l'air avec paroi chauffée est le suivant : une paroi chaude tend à déstabiliser la couche limite. Pour un écoulement autour d'un profil, cela signifie que le point de transition se déplace vers le bord d'attaque.
Özgen [30] s'est intéressé aux comportements de la couche limite pour une plaque plane chauffée. Il a tracé les profils de vitesse ainsi que les profils de courbure (dérivée seconde) du profil de vitesse pour différents taux de transfert thermique. Le tracé des profils de vitesse pour les différents taux de transfert thermique (figure 1.15) montre que lorsque la paroi est chauffée un déficit de vitesse se crée comme pour un écoulement soumis à un gradient de pression adverse ($\beta_\mathrm{H} < 0$). De plus, ces profils nous donnent une information importante : le chauffage crée un point d'inflexion sur le profil de vitesse longitudinale dans la couche limite. Plus la différence $T_\mathrm{p} - T_\mathrm{f}$ est élevée et plus le point d'inflexion "monte" dans la couche limite. L'existence d'un point d'inflexion généralisé est la cause de la déstabilisation de la couche limite (théorème de Rayleigh [22]). Le point d'inflexion généralisé est tel qu'à $y = y_\mathrm{ig}$:

$$\frac{d}{dy}\left(\rho\frac{dU}{dy}\right)\bigg|_{y=y_\mathrm{ig}} = 0 \tag{1.67}$$

Pour un écoulement d'air, la relation entre la viscosité dynamique μ et la température T est donnée par la loi de Sutherland (1.6.4.1). La masse volumique est inversement proportionnelle à la température :

$$\rho \propto \frac{1}{T} \tag{1.68}$$

D'après les deux relations ci-dessus, la viscosité cinématique ν augmente avec la température :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \propto (T)^{\frac{3}{2}} \tag{1.69}$$

Lorsque la paroi est chauffée, la viscosité cinématique augmente proche de la paroi ce qui déstabilise la couche limite. Ozgen [30] a de plus montré que le chauffage de la paroi augmente aussi le déficit de vitesse par rapport au cas athermane ce qui tend à déstabiliser la couche limite. Ce résultat a été montré expérimentalement par Liepmann et Fila [31].
Les calculs de stabilité exacte menés par Ozgen, dans le cadre d'une analyse de stabilité temporelle, ont permis de tracer les courbes neutres (courbes telles que le taux d'amplification σ est

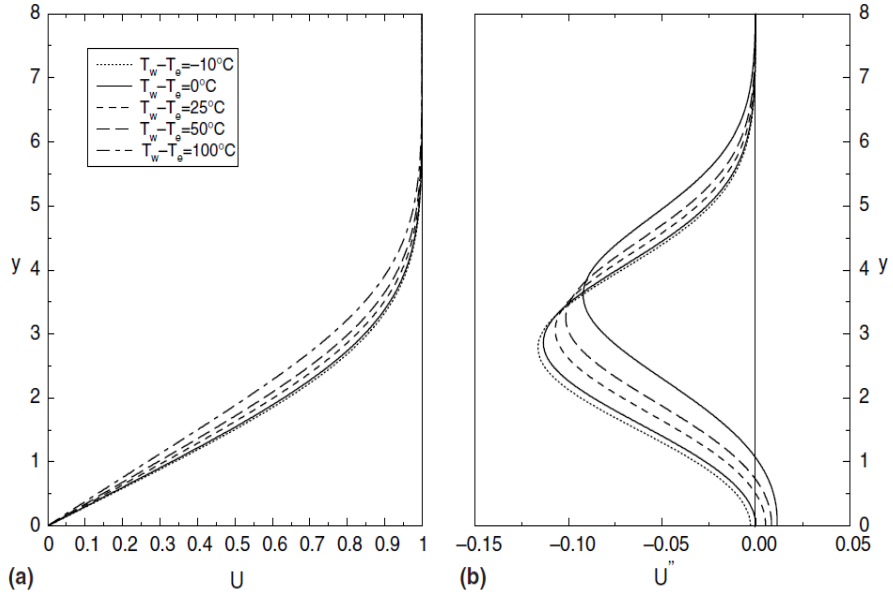


FIGURE 1.15. – Profil de vitesse (a) et profil de courbure (b) pour différentes température de paroi (Ozgen [30]). La courbe présentant le point d'inflexion le plus haut sur la figure (b) correspond à $T_\mathrm{p} - T_\mathrm{e} = 100°\mathrm{C}$.

nul) pour différentes températures de paroi. Encore une fois, la figure 1.16 illustre le fait que le chauffage de paroi tend à déstabiliser la couche limite.
Pour des températures de paroi élevées, la courbe neutre ne se referme pas lorsque $\mathrm{Re}\to\infty$. Ceci est la trace d'une instabilité visqueuse-inflexionnelle due à la présence, dans la couche limite, d'un point d'inflexion généralisé.

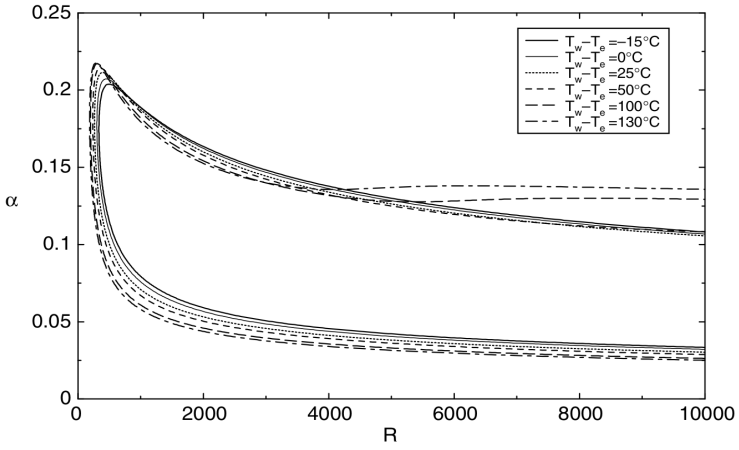


FIGURE 1.16. – Courbe neutre ($\sigma^* = 0$) pour différentes températures de paroi (Ozgen [30]) avec R le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de longueur de Blasius $L = \sqrt{u_\mathrm{e} x/\nu_e}$

Chapitre 2

Analyse de stabilité modale de la couche limite

En transition naturelle, les instabilités sont considérées comme modales. L'étude du phénomène de transition passe donc nécessairement par une analyse de stabilité modale de la couche limite. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les équations de stabilité linéaire locale nécessaires à l'analyse de stabilité de la couche limite. La mise en place de ces équations est détaillée puisqu'elles constituent l'élément majeur de notre étude par la suite. Ensuite les différentes théories de stabilité sont rappelées. Le cas particulier d'un écoulement tridimensionnel est traité. Les principaux théorèmes de stabilité sont rappelés de façon succincte.
La résolution de ces équations permet la détermination des taux d'amplification des instabilités présentes dans la couche limite. La méthode du e^N, qui permet de faire un lien entre taux d'amplification et position de transition, est introduite à la fin de ce chapitre. Une reformulation de cette méthode pour une approche RANS est présentée brièvement. Les détails de cette reformulation sont accessibles dans la thèse de Bégou [4].

Sommaire

2.1. Analyse de stabilité modale 28
2.1.1. Équation de stabilité linéaire locale (LLS equations) 28
2.1.2. Pertinence de l'utilisation de la stabilité linéaire locale 35
2.1.3. Résolution des équations de stabilité linéaire locale 35
2.2. Mise en place des calculs de stabilité 36
2.2.1. Théorie de la stabilité temporelle 36
2.2.2. Théorie de la stabilité spatiale 36
2.2.3. Mise en données d'un calcul de stabilité 37
2.2.4. Cas d'un écoulement tridimensionnel 38
2.2.5. Stabilité : principaux théorèmes 39
2.3. Prévision de la position de transition naturelle : différentes méthodes 42
2.3.1. Méthode du e^N 42
2.3.2. Méthodes simplifiées 44
2.3.3. Utilisation de la méthode e^N dans un solveur RANS 45

2.1. Analyse de stabilité modale

Dans cette section, les équations du mouvement pour les petites perturbations ainsi que les équations de l'analyse de stabilité linéaire locale vont être développées. Ces développements sont inspirés par l'étude de Mack [1].

2.1.1. Équation de stabilité linéaire locale (LLS equations)

Mack [1] a détaillé la mise en place des équations de stabilité linéaire dans le cadre d'une couche limite compressible. Nous rappelons que pour le cas incompressible, ces équations se ramènent à l'équation d'Orr-Sommerfeld. Dans toute la suite de la section nous nous placerons dans le cas compressible.

Équations des petites perturbations

Considérons un écoulement tridimensionnel. Les équations de Navier-Stokes sont, avec la convention d'Einstein :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.1b}$$

$$\rho \mathrm{C_v} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij} S_{ij} \tag{2.1c}$$

$$p = \rho r_{\mathrm{gaz}} T \tag{2.1d}$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.2a}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \left[\frac{2}{3} (\lambda - \mu) S_{kk} - p \right] \delta_{ij} \tag{2.2b}$$

S_{ij} représente le taux de déformation de l'écoulement et τ_{ij} la contrainte totale où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, 0 sinon).
L'équation (2.1a) est l'équation de continuité, (2.1b) les équations de conservation de quantité de mouvement, (2.1c) l'équation d'énergie exprimée en fonction de la température T et (2.1d) l'équation d'état. L'air est supposé comme étant un gaz parfait.
Contrairement au cas incompressible, nous voyons apparaître ici de nouvelles grandeurs telles que T la température, κ le coefficient de conductivité thermique, r_{gaz} la constante spécifique des gaz ($r_{\mathrm{gaz}} = 287{,}058\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ pour l'air), $\mathrm{C_v}$ la capacité thermique à volume constant qui est prise constante grâce à l'hypothèse de gaz parfait, λ le coefficient de seconde viscosité, assimilé ici à la viscosité de volume (*bulk viscosity*). L'hypothèse de Stokes impose que la viscosité de volume soit nulle :

$$\lambda = 0.$$

Les équations de stabilité linéaire s'obtiennent en suivant la même démarche que pour l'obtention de l'équation d'Orr-Sommerfeld lorsqu'on est en régime incompressible. Les grandeurs physiques sont écrites comme la somme d'une valeur moyenne temporelle et d'une petite perturbation :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \qquad \text{avec} \qquad \phi = [u, v, w, T, p, \rho, \mu, \kappa] \tag{2.3}$$

À la différence du cas incompressible, la masse volumique, la viscosité dynamique et le coefficient de conductivité thermique ne sont plus pris comme égaux à leur valeur moyenne. Néanmoins, on

suppose que la variation de ces deux dernière grandeurs ne dépend que de la température. Nous avons donc :

$$\mu' = \frac{d\mu}{dT}\theta \tag{2.4a}$$

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{dT}\theta \tag{2.4b}$$

où θ représente la fluctuation de température ($T = \overline{T} + \theta$).
Les hypothèses utilisées dans le cas compressible sont identiques à celles utilisées dans le cas incompressible :

1. L'écoulement moyen est un écoulement parallèle. Les composantes du vecteur vitesse moyen ne dépendent que de la direction y normale à la paroi : $\boldsymbol{V} = (\overline{U}(y), \overline{V}(y), \overline{W}(y))$. L'équation de continuité (2.1a) nous permet de dire que $\overline{V}(y) = const = V_p$.
   En l'absence de soufflage ou d'aspiration, nous prendrons $V_p = 0$. Le vecteur vitesse est donc
   $\boldsymbol{V} = (\overline{U}(y), 0, \overline{W}(y))$.
2. Les grandeurs moyennes vérifient les équations de Navier-Stokes stationnaires.
3. Les perturbations étant petites ($\phi' \ll 1$), les termes quadratiques (par ex : $\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial x}$) sont négligeables.
4. La température moyenne $\overline{T}$ ne dépend que de y. Les grandeurs μ, κ, ρ ne dépendent alors que de y.

La prochaine étape est d'écrire les équations de Navier-Stokes (2.1a)-(2.1d) en utilisant la décomposition (2.3).
Commençons par l'équation de continuité. Pour un écoulement tridimensionnel compressible, nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

En utilisant (2.3), nous obtenons :

$$\frac{\partial(\overline{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial((\overline{\rho} + \rho')(\overline{U_i} + u_i'))}{\partial x_i} = 0 \tag{2.6}$$

Soit en développant,

$$\frac{\partial(\overline{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\overline{U} + \overline{\rho}u' + \rho'\overline{U} + \rho'u') + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\overline{V} + \overline{\rho}v' + \rho'\overline{V} + \rho'v') + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{W} + \overline{\rho}w' + \rho'\overline{W} + \rho'w') = 0 \tag{2.7}$$

L'hypothèse 1 nous permet d'écrire que $\overline{V} = 0$ et que $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$.
L'hypothèse 2 nous permet de dire que :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}.\overline{U_i}}{\partial x_i} = 0$$

et l'hypothèse 3 que $\rho' u_i'$ est négligeable.
En combinant toutes les hypothèses et leurs implications, l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}u'}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho}v'}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho}w'}{\partial z} + \overline{U}\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \overline{W}\frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0 \tag{2.8}$$

Soit en développant les dérivées et en factorisant ensuite,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) + v'\frac{d\overline{\rho}}{dy} + \overline{U}\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \overline{W}\frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0 \tag{2.9}$$

L'équation ci-dessus est donc l'équation de continuité pour les petites perturbations. L'étape suivante est d'adimensionner cette équation. Pour cela, on utilise la vitesse à l'extérieure de la couche limite U_e, une longueur de référence L comme par exemple l'épaisseur de couche limite δ, et les valeurs à l'extérieure de la couche limite des grandeurs physiques ($\rho_e, \mu_e, P_\mathrm{e} \ldots$). Les grandeurs adimensionnelles seront annotées d'une étoile.
Pour la variable temporelle, nous aurons $t^* = \frac{t}{t_{ref}}$ avec $t_{ref} = \frac{L}{U_\mathrm{e}}$.
Pour l'équation de continuité l'adimensionnement donne :

$$\frac{\rho_e U_\mathrm{e}}{L}\frac{\partial \rho'^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_e U_\mathrm{e}}{L}\overline{\rho^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v'^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w'^*}{\partial z^*}\right) + \frac{\rho_e U_\mathrm{e}}{L} v'^* \frac{d\overline{\rho^*}}{dy^*} + \frac{\rho_e U_\mathrm{e}}{L}\overline{U^*}\frac{\partial \rho'^*}{\partial x^*} + \frac{\rho_e U_\mathrm{e}}{L}\overline{W^*}\frac{\partial \rho'^*}{\partial z^*} = 0 \tag{2.10}$$

d'où en simplifiant,

$$\frac{\partial \rho'^*}{\partial t^*} + \overline{\rho^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v'^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w'^*}{\partial z^*}\right) + v'^* \frac{d\overline{\rho^*}}{dy^*} + \overline{U^*}\frac{\partial \rho'^*}{\partial x^*} + \overline{W^*}\frac{\partial \rho'^*}{\partial z^*} = 0 \tag{2.11}$$

Maintenant que nous avons déterminé l'équation de continuité pour les petites perturbations, il nous reste à effectuer la même démarche afin de déterminer les équations de quantité de mouvement et d'énergie pour les petites perturbations. L'équation de quantité de mouvement selon x sera détaillée et nous donnerons directement les résultats pour les autres équations afin de ne pas surcharger ce manuscrit.

L'équation de quantité de mouvement selon x s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{3}\mu S_{kk} - p\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) \tag{2.12}$$

avec $S_{kk} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ la trace du tenseur taux de déformation S_{ij}.
D'après l'hypothèse (4), nous savons que μ ne dépend que de y. D'où en développant, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)\right] - \frac{1}{\rho}\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \tag{2.13}$$

Nous décomposons les grandeurs physiques présentes dans cette équation en utilisant la décomposition (2.3).

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial t} + (\overline{U}+u')\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial x} + (\overline{V}+v')\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial y} + (\overline{W}+w')\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial z} &= -\frac{1}{\overline{\rho}+\rho'}\frac{\partial(\overline{P}+\Pi)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\overline{\rho}+\rho'}\left[2(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial^2(\overline{U}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left((\overline{\mu}+\mu')\left(\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{V}+v')}{\partial x}\right)\right)\right] \\ + \frac{(\overline{\mu}+\mu')}{\overline{\rho}+\rho'}\left[\frac{\partial^2(\overline{U}+u')}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(\overline{W}+w')}{\partial x \partial z}\right] - \frac{1}{\overline{\rho}+\rho'}\frac{2}{3}(\overline{\mu}+\mu')&\left(\frac{\partial^2(\overline{U}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\overline{V}+v')}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(\overline{W}+w')}{\partial x \partial z}\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

où Π représente la fluctuation de pression.
En développant terme à terme en utilisant l'hypothèse d'écoulement parallèle et en linéarisant, nous arrivons à :

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{U}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}+\overline{W}\frac{\partial u'}{\partial z}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial(\overline{P}+\Pi)}{\partial x}+\frac{1}{\overline{\rho}}\left[2\overline{\mu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left((\overline{\mu}+\mu')\left(\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\right)\right]$$
$$+\frac{\overline{\mu}}{\overline{\rho}}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right]-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{2}{3}\overline{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right) \quad (2.15)$$

Les grandeurs moyennes vérifiant les équations de Navier-Stokes stationnaires (hypothèse (2)), il nous vient alors :

$$0=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}+\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\mu}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right) \quad (2.16)$$

L'équation (5.2) devient :

$$\overline{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{U}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}+\overline{W}\frac{\partial u'}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+\left[2\overline{\mu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\overline{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right)\right]$$
$$+\frac{d\overline{\mu}}{dy}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\overline{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mu'\frac{d\overline{U}}{dy}\right) \quad (2.17)$$

Nous savons que μ ne dépend que de la température. Or l'hypothèse (4) nous dit que $\overline{T}$ ne dépend que de y. Nous pouvons donc écrire que $\frac{d\overline{\mu}}{dy}=\frac{d\overline{\mu}}{dT}\frac{d\overline{T}}{dy}$. De plus le dernier terme du membre de droite de l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dy}\left(\mu'\frac{d\overline{U}}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}\theta\frac{d\overline{U}}{dy}\right)=\frac{d\overline{\mu}}{dT}\left(\frac{d^2\overline{U}}{dy^2}\theta+\frac{d\overline{U}}{dy}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\frac{d\overline{U}}{dy}\theta \quad (2.18)$$

Finalement en remplaçant ce terme dans (5.3), nous obtenons :

$$\overline{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{U}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}+\overline{W}\frac{\partial u'}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+\left[2\overline{\mu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\overline{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right)\right]$$
$$\frac{d\overline{\mu}}{dT}\frac{d\overline{T}}{dy}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\overline{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial z}\right)+\frac{d\overline{\mu}}{dT}\left(\frac{d^2\overline{U}}{dy^2}\theta+\frac{d\overline{U}}{dy}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\frac{d\overline{U}}{dy}\theta \quad (2.19)$$

Cette équation est donc l'équation de quantité de mouvement longitudinale pour les perturbations. L'étape suivante est l'adimensionnement de cette équation. Pour cela, on utilise la vitesse à l'extérieure de la couche limite U_e, une longueur de référence L mais aussi ρ_e pour adimensionner la masse volumique, T_e pour la température, P_e pour le terme de pression et μ_e pour les termes de diffusion.
L'adimensionnement nous donne donc :

$$\rho_e\overline{\rho^*}\left(\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{L}\frac{\partial u'^*}{\partial t^*}+\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{L}\overline{U^*}\frac{\partial u'^*}{\partial x^*}+\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{L}v'^*\frac{\partial\overline{U^*}}{\partial y^*}+\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{L}\overline{W^*}\frac{\partial u'^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{P_\mathrm{e}}{L}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x^*}+$$
$$\mu_e\frac{U_\mathrm{e}}{L^2}\left[2\overline{\mu^*}\frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^{*2}}+\overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 u'^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u'^*}{\partial z^{*2}}+\frac{\partial^2 v'^*}{\partial x^*\partial y^*}+\frac{\partial^2 w'^*}{\partial x^*\partial z^*}\right)\right]+\mu_e\frac{U_\mathrm{e}}{L^2}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v'^*}{\partial x^*}\right)-$$
$$\mu_e\frac{U_\mathrm{e}}{L^2}\frac{2}{3}\overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v'^*}{\partial x^*\partial y^*}+\frac{\partial^2 w'^*}{\partial x^*\partial z^*}\right)+\mu_e\frac{U_\mathrm{e}}{L^2}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\left(\frac{d^2\overline{U^*}}{dy^{*2}}\theta^*+\frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\right)+$$
$$\mu_e\frac{U_\mathrm{e}}{L^2}\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\theta^* \quad (2.20)$$

Il nous reste à multiplier (2.20) par $L/\rho_e{U_\mathrm{e}}^2$. Le terme P_∞ nous est donné par l'équation d'état (2.1d). L'adimensionnement du terme de pression nous donne la forme suivante :

$$-\frac{P_\mathrm{e}}{L}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x^*}=-\frac{\rho_e r_{\mathrm{gaz}}T_\mathrm{e}}{L}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x^*} \quad (2.21)$$

Soit en multipliant par $L/\rho_e {U_\mathrm{e}}^2$,

$$-\frac{L}{\rho_e {U_\mathrm{e}}^2}\frac{\rho_e r_{\mathrm{gaz}} T_\mathrm{e}}{L}\frac{\partial \Pi^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial x^*} \tag{2.22}$$

avec $M_\mathrm{e} = \frac{U_\mathrm{e}}{a}$ le nombre de Mach, $a = \sqrt{\gamma r_{\mathrm{gaz}} T_\mathrm{e}}$ la célérité du son et γ le rapport des chaleurs spécifiques. Finalement, l'équation de quantité de mouvement longitudinale pour les perturbations est :

$$\begin{aligned}\overline{\rho^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial t^*} + \overline{U^*}\frac{\partial u'^*}{\partial x^*} + v'^*\frac{\partial \overline{U^*}}{\partial y^*} + \overline{W^*}\frac{\partial u'^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{1}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial x^*} + \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^{*2}} + \overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 u'^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u'^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w'^*}{\partial x^* \partial z^*}\right)\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v'^*}{\partial x^*}\right) - \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2}{3}\overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w'^*}{\partial x^* \partial z^*}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu*}}{dT^*}\left(\frac{d^2\overline{U^*}}{dy^{*2}}\theta^* + \frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right) + \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\frac{d\overline{T^*}}{dy^*}\frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\theta^*\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec $\mathrm{Re} = \frac{\rho_e U_\mathrm{e} L}{\mu_e}$ le nombre de Reynolds.

Étant donné que la démarche pour obtenir les équations de quantité de mouvement selon y et z, l'équation d'énergie ainsi que l'équation d'état est identique, ces équations seront directement données sous forme adimensionnelle.
L'équation de quantité de mouvement selon y est :

$$\begin{aligned}\overline{\rho^*}\left(\frac{\partial v'^*}{\partial t^*} + \overline{U^*}\frac{\partial v'^*}{\partial x^*} + \overline{W^*}\frac{\partial v'^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{1}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial y^*} + \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\frac{\partial^2 v'^*}{\partial y^{*2}} + \overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 v'^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w'^*}{\partial y^* \partial z^*}\right)\right] - \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2}{3}\overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w'^*}{\partial y^* \partial z^*}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu*}}{dT^*}\left(2\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\frac{\partial v'^*}{\partial y} + \frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \frac{d\overline{W^*}}{dy^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*}\right) \\ - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v'^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w'^*}{\partial z^*}\right)\end{aligned} \tag{2.24}$$

L'équation de quantité de mouvement adimensionnée selon z pour les perturbations est :

$$\begin{aligned}\overline{\rho^*}\left(\frac{\partial w'^*}{\partial t^*} + \overline{U^*}\frac{\partial w'^*}{\partial x^*} + v'^*\frac{\partial \overline{W^*}}{\partial y^*} + \overline{W^*}\frac{\partial w'^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{1}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial z^*} + \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\frac{\partial^2 w'^*}{\partial z^{*2}} + \overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 w'^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w'^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^* \partial z^*}\right)\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\left(\frac{\partial w'^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v'^*}{\partial z^*}\right) - \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2}{3}\overline{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 w'^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 v'^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{\partial^2 u'^*}{\partial x^* \partial z^*}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu*}}{dT^*}\left(\frac{d^2\overline{W^*}}{dy^{*2}}\theta^* + \frac{d\overline{W^*}}{dy^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right) + \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\frac{d\overline{W^*}}{dy^*}\theta^*\end{aligned} \tag{2.25}$$

L'équation d'énergie adimensionnée pour les perturbations est :

$$\overline{\rho^*}\left(\frac{\partial\theta^*}{\partial t^*}+\overline{U^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*}+v'^*\frac{\partial\overline{T}^*}{\partial y^*}+\overline{W^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial z^*}\right)=-(\gamma-1)\left(\frac{\partial u'^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v'^*}{\partial y^*}+\frac{\partial w'^*}{\partial z^*}\right)+$$
$$\frac{\gamma\overline{\mu^*}}{\mathrm{P_r Re}}\left[\frac{\partial^2\theta^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2\theta^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2\theta^*}{\partial z^{*2}}+\frac{1}{\overline{\kappa^*}}\frac{d\overline{\kappa^*}}{d\overline{T}^*}\frac{d^2T^*}{dy^{*2}}\theta^*+\frac{2}{\overline{\kappa^*}}\frac{d\overline{\kappa^*}}{dT^*}\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial y}+\frac{1}{\overline{\kappa^*}}\frac{d^2\overline{\kappa^*}}{dT^{*2}}\left(\frac{d\overline{T}^*}{dy^*}\right)^2\theta^*\right]$$
$$+\gamma(\gamma-1){M_e}^2\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\left(\frac{\partial u'^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v'^*}{\partial x^*}\right)+2\overline{\mu^*}\frac{d\overline{W^*}}{dy^*}\left(\frac{\partial v'^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w'^*}{\partial y^*}\right)+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\theta^*\left(\left(\frac{d\overline{U^*}}{dy^*}\right)^2+\left(\frac{d\overline{W^*}}{dy^*}\right)^2\right)\right] \tag{2.26}$$

avec $\mathrm{P_r}=\frac{\mathrm{C_p}\mu}{\kappa}$ le nombre de Prandtl. La forme de cette équation est celle donnée par Mack [1].
L'équation d'état pour les perturbations est :

$$\Pi^*=\frac{\rho'^*}{\overline{\rho^*}}+\frac{\theta^*}{\overline{T}^*} \tag{2.27}$$

Nous venons d'obtenir les différentes équations pour les perturbations. Les équations (2.11) et (2.23) - (2.27) ont pour conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &u'^*=0,\quad v'^*=0,\quad w'^*=0,\quad \theta^*=0 && \text{en} \quad y^*=0\\ &u'^*=0,\quad v'^*=0,\quad w'^*=0,\quad \theta^*=0,\quad \Pi^*=0 && \text{en} \quad y^*\to\infty \end{aligned} \tag{2.28}$$

À noter (Mack [1]) que lorsque y^* tend vers ∞, les perturbations peuvent être prises comme étant non nulles mais bornées (comme par exemple pour un écoulement supersonique). Il nous reste à déterminer la forme des perturbations et à injecter cette dernière dans les équations (2.11) et (2.23)-(2.27).

Équations de stabilité : Orr-Sommerfeld généralisée

Dans le cadre de notre étude, la transition naturelle, les perturbations sont modales. Elles peuvent donc être écrites comme le produit d'une fonction propre (appelée aussi fonction de forme ou fonction d'amplitude) notée $\underline{\varphi}$ et d'une fonction d'onde. L'hypothèse d'écoulement parallèle nous permet de postuler que la fonction propre ne dépend que de y et la fonction d'onde de (x,z,t). Nous avons donc :

$$\varphi'=\underline{\varphi}(y)e^{i(\alpha_c x+\beta_c z-\omega_c t)}+C.C \tag{2.29}$$

avec $(\alpha_c,\beta_c,\omega_c)\in\mathbb{C}$ constant. En variables adimensionnées cela devient :

$$\varphi'*=\underline{\varphi^*}(y^*)e^{i(\alpha_c^* x^*+\beta_c^* z^*-\omega_c^* t^*)}+C.C \tag{2.30}$$

On injecte (2.30) dans les équations (2.11) et (2.23)-(2.27).On notera $\mathbf{D}$ l'opérateur dérivation dans la direction y et $\mathbf{D}^2$ celui de la dérivée seconde.
L'équation de continuité (équation (2.11)) devient :

$$\boxed{i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{\rho^*}+\overline{\rho^*}(\mathbf{D}\underline{v^*}+i\beta_c^*\underline{w^*}+i\alpha_c^*\underline{u^*})+\mathbf{D}\overline{\rho^*}\underline{v^*}=0} \tag{2.31}$$

L'équation de quantité de mouvement longitudinale (équation (2.23)) devient :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{u^*}+\underline{v^*}\mathbf{D}\overline{U^*}\right]=-i\alpha_c^*\frac{\underline{p^*}}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[-2\overline{\mu^*}\alpha_c^{*2}\underline{u^*}+\overline{\mu^*}(\mathbf{D}^2\underline{u^*}-\beta_c^{*2}\underline{u^*}+i\alpha_c^*\mathbf{D}\underline{v^*}-\alpha_c^*\beta_c^*\underline{w^*})\right]-\frac{2}{3}\frac{\overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}}(-\alpha_c^{*2}\underline{u^*}+i\alpha_c^*\mathbf{D}\underline{v^*}-\alpha_c^*\beta_c^*\underline{w^*})+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}\overline{T^*}(\mathbf{D}\underline{u^*}+i\alpha_c^*\underline{v^*})+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\mathbf{D}^2\overline{U^*}\underline{\theta^*}+\mathbf{D}\overline{U^*}\mathbf{D}\underline{\theta^*})+\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\mathbf{D}\overline{T^*}\mathbf{D}\overline{U^*}\underline{\theta^*}\right] \quad (2.32)$$

L'équation de quantité de mouvement normale (équation (2.24)) devient :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{v^*}\right]=-\frac{1}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}\mathbf{D}\underline{p^*}+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\mathbf{D}^2\underline{v^*}+\overline{\mu^*}(-\alpha_c^{*2}\underline{v^*}-\beta_c^{*2}\underline{v^*}+i\alpha_c^*\mathbf{D}\underline{u^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\underline{w^*})\right]$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[-\frac{2}{3}\overline{\mu^*}(i\alpha_c^*\mathbf{D}\underline{u^*}+\mathbf{D}^2\underline{v^*}+i\beta_c^*\mathbf{D}\underline{w^*})+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(2\mathbf{D}\overline{T^*}\mathbf{D}\underline{v^*}+i\underline{\theta^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\right]$$
$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}\overline{T^*}(i\alpha_c^*\underline{u^*}+\mathbf{D}\underline{v^*}+i\beta_c^*\underline{w^*}) \quad (2.33)$$

L'équation de quantité de mouvement transversale (équation (2.25)) devient :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{w^*}+\underline{v^*}\mathbf{D}\overline{W^*}\right]=-i\beta_c^*\frac{\underline{p^*}}{\gamma {M_\mathrm{e}}^2}+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[-2\overline{\mu^*}\beta_c^{*2}\underline{w^*}+\overline{\mu^*}(\mathbf{D}^2\underline{w^*}-\alpha_c^{*2}\underline{w^*}+i\beta_c^*\mathbf{D}\underline{v^*}-\alpha_c^*\beta_c^*\underline{u^*})\right]-\frac{2}{3}\frac{\overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}}(-\beta_c^{*2}\underline{w^*}+i\beta_c^*\mathbf{D}\underline{v^*}-\alpha_c^*\beta_c^*\underline{u^*})+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}\overline{T^*}(\mathbf{D}\underline{w^*}+i\beta_c^*\underline{v^*})+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\mathbf{D}^2\overline{W^*}\underline{\theta^*}+\mathbf{D}\overline{W^*}\mathbf{D}\underline{\theta^*})+\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\mathbf{D}\overline{T^*}\mathbf{D}\overline{W^*}\underline{\theta^*}\right] \quad (2.34)$$

L'équation de l'énergie (équation (2.26)) devient :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{\theta^*}+\underline{v^*}\mathbf{D}\overline{T^*}\right]=-(\gamma-1)(i\alpha_c^*\underline{u^*}+\mathbf{D}\underline{v^*}+i\beta_c^*\underline{w^*})$$
$$+\frac{\gamma\overline{\mu^*}}{\mathrm{P_r Re}}\left[\mathbf{D}^2-(\alpha_c^{*2}+\beta_c^{*2})+\frac{1}{\kappa^*}\frac{d\overline{\kappa^*}}{dT^*}\mathbf{D}^2\overline{T^*}\underline{\theta^*}+\frac{1}{\kappa^*}\frac{d^2\overline{\kappa^*}}{dT^{*2}}(\mathbf{D}\overline{T^*})^2\underline{\theta^*}+\frac{2}{\kappa^*}\frac{d\overline{\kappa^*}}{dT^*}\mathbf{D}\overline{T^*}\mathbf{D}\underline{\theta^*}\right]$$
$$+\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\left[2\overline{\mu^*}\mathbf{D}\overline{U^*}(\mathbf{D}\underline{u^*}+i\alpha_c^*\underline{v^*})+2\overline{\mu^*}\mathbf{D}\overline{W^*}(\mathbf{D}\underline{w^*}+i\beta_c^*\underline{v^*})+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\underline{\theta^*}((\mathbf{D}\overline{U^*})^2+(\mathbf{D}\overline{W^*})^2)\right] \quad (2.35)$$

L'équation d'état nous donne :

$$\boxed{\underline{p^*}=\underline{\rho^*}/\overline{\rho^*}+\underline{\theta^*}/\overline{T^*}} \quad (2.36)$$

Les équations (2.31)-(2.36) sont les équations de *stabilité linéaire locale* pour un écoulement compressible tridimensionnel. C'est l'équivalent en compressible de l'équation d'Orr-Sommerfeld. Mack [1] a combiné les équations précédemment obtenues afin d'obtenir une équation de quantité de mouvement dans la direction parallèle et dans la direction perpendiculaire au vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$ (cf figures 2.2 et 2.3). Ces équations ainsi que la démarche seront données en annexe de ce manuscrit.

La résolution de ce système d'équations revient à résoudre un problème aux valeurs propres. La résolution de ce problème aux valeurs propres va permettre de construire des diagrammes de stabilité.

2.1.2. Pertinence de l'utilisation de la stabilité linéaire locale

L'utilisation de la stabilité linéaire locale fait appel à des hypothèses fortes sur la forme de l'écoulement. Elle suppose de modéliser linéairement un phénomène complexe et non-linéaire et fait aussi l'impasse sur la modélisation des effets non-parallèles et des effets de courbure.
L'utilisation des équations de stabilité linéaire parabolisée (PSE) permet de prendre en compte ces effets. L'hypothèse d'écoulement parallèle n'est plus faite et les effets de courbure [1] peuvent être pris en compte. La prise en compte des effets non-linéaires peut être effectuée par une approche non-linéaire (NPSE par exemple). Cependant, Obremski *et al* [33] ont montré que pour un écoulement 2D incompressible, la partie linéaire de l'amplification des instabilités couvre entre 75 et 85 % de la distance entre l'apparition des premières instabilités et la fin de la transition. Pour des écoulements 3D compressibles, et en particulier en présence d'instabilités CF, la portion "linéaire" n'est pas toujours aussi importante. Néanmoins, et sous réserve d'un choix intelligent du facteur N à la transition (qui sera défini plus loin), l'approche par stabilité linéaire locale représente un compromis très intéressant entre représentativité physique et facilité de mise en oeuvre. Nous pouvons nous référer à Arnal & Casalis [32] pour une discussion détaillée sur cette question et une présentation des différentes approches possibles.

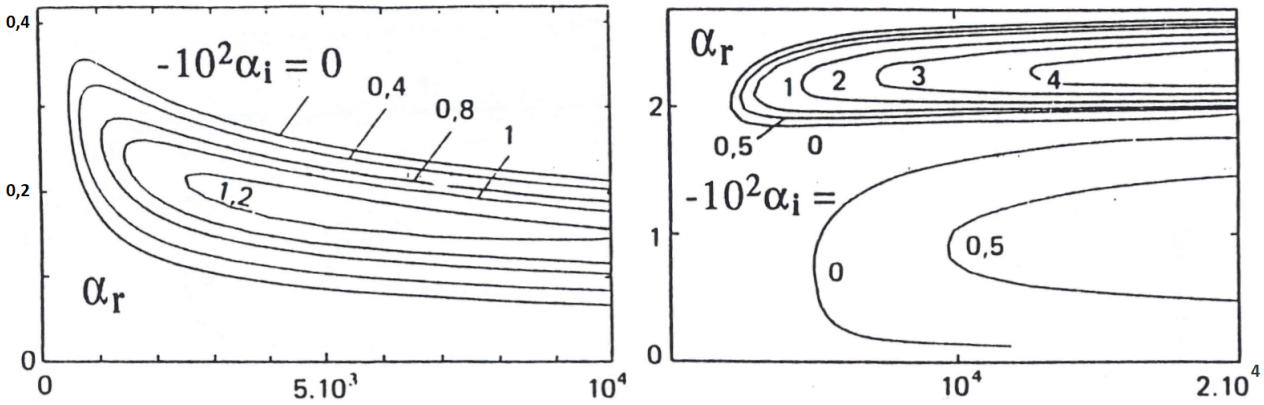
2.1.3. Résolution des équations de stabilité linéaire locale

Dans la littérature, il existe plusieurs manières de résoudre les équations de stabilité linéaire dans le cas compressible. Hauptmann [34] a résolu ces équations par le biais d'une méthode de perturbation. Cette résolution est valide pour des transferts de chaleur faibles à modérés ($0 \leqslant T_\mathrm{p} - T_\mathrm{e} \leqslant 50\mathrm{K}$).
Herwig & Schäfer [35], Schäfer [36] ont résolu une version modifiée de l'équation d'Orr-Sommerfeld, incluant les effets de la pression et de la température sur les propriétés du fluide, en utilisant des séries de Taylor en fonction de la pression et de la température. Ces résultats sont valides pour de faibles flux de chaleur ($-10\mathrm{K} \leqslant T_\mathrm{p} - T_\mathrm{e} \leqslant 10\mathrm{K}$).
Une extension de l'équation d'Orr-Sommerfeld peut être obtenue en combinant les équations (2.31)-(2.36). Cependant, cette extension fait intervenir la dérivée seconde voir troisième de la viscosité par rapport à la température ce qui peut demander une précision accrue de l'évolution de la viscosité en fonction de la température.
La méthode de tir (ou méthode de Newton-Raphson) est une méthode efficace pour résoudre ce genre d'équations. Elle permet d'avoir des résultats généraux dans le sens où elle ne se limite pas à de faibles rapports de température. Cependant, cette méthode nécessite la connaissance d'une valeur initiale, proche de la valeur recherchée, qui peut être délicate à déterminer.

Peu importe la méthode de résolution choisie, la résolution des équations de stabilité linéaire locale (LLS) pour un écoulement moyen donné va permettre de construire un diagramme de stabilité. Il est important de noter que ce diagramme est associé à l'écoulement moyen utilisé pour la résolution des équations LLS. Autrement dit, pour un écoulement moyen donné il existe un seul diagramme de stabilité et réciproquement.
Les figures 2.1a et 2.1b montrent des diagrammes de stabilité pour des nombres de Mach $\mathrm{M} = 0$ et $\mathrm{M} = 4{,}5$ pour des écoulements sur plaque plane, $\beta_\mathrm{H} = 0$. Sur ces figures, l'abscisse représente le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement Re_{δ_1}. Ces diagrammes sont tirés de Vignau et al [37]. L'augmentation du nombre de Mach $0 < \mathrm{M} < 4$ stabilise la couche limite (les instabilités sont de moins en moins amplifiées). À partir de $\mathrm{M} = 4$, un second mode, appelé mode

1. Les effets non-parallèles et de courbure du même ordre de grandeurs se compensent (les effets non-parallèles sont déstabilisant et les effets de courbure stabilisant) [32]

de Mack, apparaît et va déstabiliser la couche limite. Ce mode est visible sur la partie supérieure de la figure 2.1b.



(a) Diagramme de stabilité pour M = 0 (b) Diagramme de stabilité pour M = 4,5

FIGURE 2.1. – Diagrammes de stabilité pour différents nombres de Mach sur plaque plane d'après [37]

2.2. Mise en place des calculs de stabilité

Les hypothèses faites sur (α_c^*, β_c^*) et sur ω_c^* vont conditionner le type de stabilité étudié : stabilité temporelle ou stabilité spatiale.
Afin de simplifier les notations nous noterons $\alpha_c^* = \alpha$, $\beta_c^* = \beta$, $\omega_c^* = \omega$ et les $*$ des quantités adimensionnées seront supprimées dans la suite de ce manuscrit. Le taux d'amplification locale adimensionnée est toujours noté σ^*.

2.2.1. Théorie de la stabilité temporelle

En stabilité temporelle, nous avons :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \tag{2.37}$$

Dans ce cas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ et ω_r représente la pulsation de l'onde. On note $\alpha = \alpha_r$ et $\beta = \beta_r$
Les perturbations peuvent donc s'écrire comme :

$$\varphi' = \underline{\varphi}(y) e^{\omega_i t} e^{i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega_r t)} + C.C \tag{2.38}$$

Les perturbations seront :
- amplifiées si $\omega_i \geqslant 0$
- neutres si $\omega_i = 0$
- amorties si $\omega_i \leqslant 0$

α et β sont les composantes du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ dans la direction x et z respectivement (Figure 2.2). L'angle ϕ_k entre le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et la direction x est défini :

$$\phi_\mathrm{k} = \arctan\left(\frac{\beta_r}{\alpha_r}\right) \tag{2.39}$$

2.2.2. Théorie de la stabilité spatiale

Lorsque la stabilité spatiale est utilisée, $\omega \in \mathbb{R}$, α et β sont complexes :

$$\alpha \quad = \quad \alpha_r + i\alpha_i \tag{2.40}$$

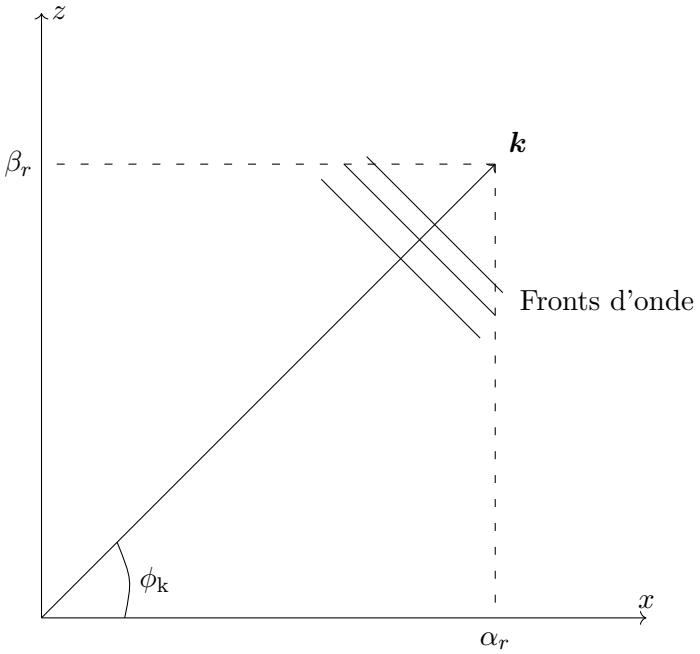


FIGURE 2.2. – Description de la direction de propagation en stabilité temporelle dans le repère fixe (x, y, z)

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \tag{2.41}$$

Les perturbations s'écrivent alors comme :

$$\varphi' = \underline{\varphi}(y)e^{-\alpha_i x - \beta_i z}e^{i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega t)} + C.C \tag{2.42}$$

Comme dans le cas de l'approche temporelle, nous pouvons définir un vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$ dont la composante dans la direction x (respectivement z) est α_r (respectivement β_r) comme illustré sur la figure 2.3. Dans le cadre de la stabilité spatiale, nous pouvons définir un vecteur amplification $\boldsymbol{A}$ dont la composante dans la direction x (respectivement z) est α_i (respectivement β_i).
Nous pouvons associer à ces deux vecteurs les angles ϕ_{k} et ϕ_A définit dans le repère fixe (x, y, z) par :

$$\phi_{\mathrm{k}} = \arctan\left(\frac{\beta_r}{\alpha_r}\right) \tag{2.43}$$

$$\phi_A = \arctan\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \tag{2.44}$$

Si $\beta_i = 0$ (c'est-à-dire pas d'amplification selon z), les perturbations seront :
— amplifiées si $\alpha_i \leqslant 0$
— neutres si $\alpha_i = 0$
— amorties si $\alpha_i \geqslant 0$

Le cas de la valeur de β_i pour un écoulement tridimensionnel est traité dans la suite de ce chapitre.
Il est important de noter que $\phi_i = \psi_i + \theta$.

2.2.3. Mise en données d'un calcul de stabilité

L'écoulement de base est déterminé à l'aide des équations de similitudes détaillées au chapitre 1. Des deux formulations précédentes (temporelle et spatiale), il apparaît clairement que la résolution d'un problème aux valeurs propres impliquera 5 paramètres pour la stabilité temporelle

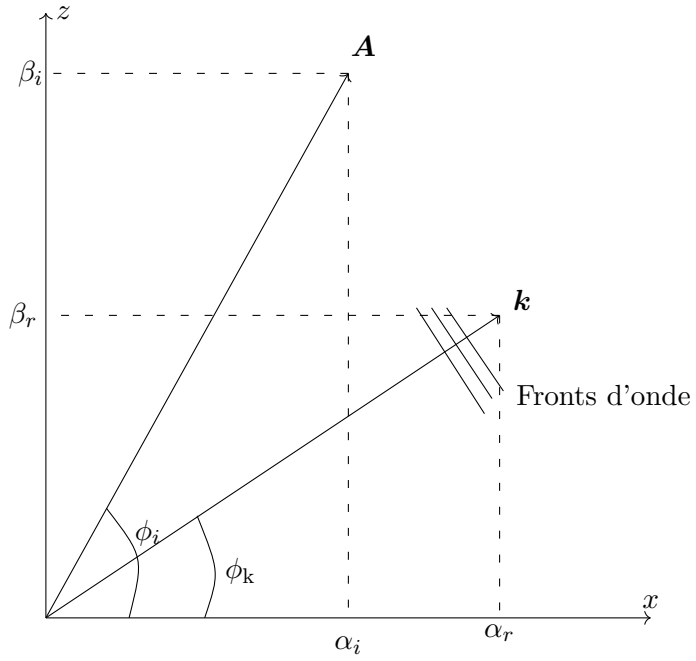


FIGURE 2.3. – Description des directions de propagation et d'amplification en stabilité spatiale dans le repère fixe (x, y, z)

$(\alpha, \beta, \omega_r, \omega_i, \mathrm{Re})$ et 6 paramètres pour la stabilité spatiale $(\alpha_r, \alpha_i, \beta_r, \beta_i, \omega, \mathrm{Re})$. Le premier ensemble de paramètres peut être remplacé par $(\alpha, \psi, \omega_r, \omega_i, \mathrm{Re})$ alors que le deuxième ensemble peut être remplacé par $(\alpha_r, \alpha_i, \psi_k, \psi_A, \omega, \mathrm{Re})$. Nous nous plaçons ici dans un repère couche limite comme décrit dans la figure 2.4.

Numériquement, les données d'entrée pour un calcul de stabilité sont les profils de vitesse et de température moyens et l'ensemble des paramètres précédemment introduits excepté 2 paramètres (α_r et α_i en théorie spatiale ou ω_r et ω_i en théorie temporelle). Le calcul donne alors les 2 paramètres restants (valeurs propres) et les profils des amplitudes des perturbations (vecteurs propres).

2.2.4. Cas d'un écoulement tridimensionnel

En théorie temporelle, le passage d'un écoulement bidimensionnel à un écoulement tridimensionnel ne pose pas de problème pour le calcul du taux d'amplification. En effet, pour cette théorie α et β sont réels et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est complexe. Pour un écoulement tri-dimensionnel en théorie temporelle, le taux d'amplification σ^* reste donc ω_i. En théorie spatiale, la détermination du taux d'amplification locale pour un écoulement 3D n'est pas directe contrairement au cas 2D. En effet, pour cette théorie α et β sont complexes. Le vecteur taux d'amplification locale $\boldsymbol{A}$ est donc $(-\alpha_i, -\beta_i)$.
Lorsque nous sommes en présence d'un écoulement 3D ou 2D avec des perturbations tridimensionnelles, la résolution du problème aux valeurs propres implique 6 paramètres $(\alpha_r, \alpha_i, \beta_r, \beta_i, \omega, \mathrm{Re})$ ou $(\alpha_r, \alpha_i, \psi_k, \psi_A, \omega, \mathrm{Re})$. Les paramètres Re et ω sont fixés ainsi que β_r (ou ψ_k). Nous devons donc faire une hypothèse sur la valeur β_i (ou de ψ_A).
Arnal [3] donne un récapitulatif des différentes méthodes existantes pour calculer β_i.

• La première méthode est celle de Cebeci-Stewartson [38] [39] qui utilise la théorie des paquets d'ondes. Cette méthode connue sous le nom de "*saddle point method*" ou "méthode du point selle" introduite par Nayfeh [40] consiste à déterminer β_i à partir de la condition :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \quad \text{réel pour un } \omega \text{ et } \mathrm{Re}_{\delta_1} \text{ fixé} \tag{2.45}$$

pour chaque direction ψ_k. Cette condition vient de l'évaluation asymptotique de l'intégrale donnant la pression p pour un paquet d'onde :

$$p(x,z,y,t) = \int 1(y,\beta)\exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]\mathrm{d}\beta \tag{2.46}$$

La méthode du point selle est utilisée pour obtenir la partie principale de l'intégrale ce qui conduit à la relation $\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\frac{z}{x}$ qui doit être réelle.

• La deuxième méthode est de faire une hypothèse sur la direction d'amplification. Une hypothèse simple est de considérer que la direction d'amplification est la direction de la vitesse de groupe soit :

$$\beta_i = \alpha_i \tan\phi_\mathrm{g} \tag{2.47}$$

où ϕ_g est la direction de la vitesse de groupe dans le repère fixe (x,z). De plus, Mack [1] a montré que la direction de la vitesse de groupe était très peu éloignée de celle de la ligne de courant extérieure. Nous pouvons donc écrire que $\phi_\mathrm{g} = \theta$ où θ est l'angle que fait la ligne de courant extérieure dans le repère fixe.

• La troisième est proposée par Mack [41]. Elle consiste à supposer que dans le cas d'une aile en flèche d'envergure infinie et de corde constante dans le repère fixe (le repère lié à l'aile) $\beta_i = 0$.

Le but de ces différentes méthodes est de résoudre le problème aux valeurs propres en effectuant une hypothèse sur la valeur de β_i.
La méthode du point selle implique un calcul supplémentaire pour déterminer l'expression de β_i. Nous ne nous intéresserons donc qu'aux deux dernières méthodes. En ce qui concerne le calcul du facteur N la méthode de Mack ou de Cebeci donne un résultat identique [42].

Dans sa thèse, Laburthe [42] a pu comparer différentes méthodes pour le calcul du facteur N, méthode détaillée plus loin, pour un écoulement 3D (théorie temporelle, $\beta_i = 0$ et $\beta_i = \alpha_i \tan\theta$). Nous nous intéresserons particulièrement aux comparaisons entre $\beta_i = 0$ et $\beta_i = \alpha_i \tan\theta$.
Laburthe s'est placé dans un repère fixe et a effectué des calculs de facteur N avec les deux hypothèses sur la valeur de β_i. Après comparaison des résultats sur différentes configurations, il s'est avéré qu'il existe une très faible différence entre l'hypothèse $\beta_i = 0$ et l'hypothèse $\beta_i = \alpha_i \tan\theta$. Afin de garder une continuité lors des calculs de stabilité entre la ligne de partage et le reste de l'aile, Laburthe recommande de choisir $\beta_i = \alpha_i \tan\theta$. Cela évite de passer d'un calcul avec $\alpha_i = 0$ et $\beta_i \neq 0$ le long de la ligne de partage à un calcul où $\alpha_i \neq 0$ et $\beta_i = 0$ de façon discontinue.
Nous choisirons donc cette dernière hypothèse. Cependant, rappelons que l'hypothèse

$$\beta_i = \alpha_i \tan\theta \tag{2.48}$$

est "faite" dans un repère fixe (x,z,y). Si nous nous plaçons dans le repère (ξ,η,y) lié à la ligne de courant extérieure (comme c'est le cas dans le solveur RANS elsA) la relation (2.48) est équivalente à

$$\beta_i = 0 \tag{2.49}$$

En nous plaçant dans le repère lié à la ligne de courant, nous considérerons alors $\beta_i = 0$. Pour des écoulements 3D ou 2D soumis à des perturbations tridimensionnelles, les instabilités s'amplifient dans la direction de la ligne de courant extérieure.

2.2.5. Stabilité : principaux théorèmes

Il existe différents théorèmes qui permettent une simplification du problème aux valeurs propres. Nous nous contenterons de les donner directement. Les démonstrations peuvent se trouver dans la thèse de Bégou [4].

Théorème de Squire [43] : réduction de perturbations 3D à 2D en stabilité temporelle

En comparant l'équation d'Orr-Sommerfeld dans le cas de perturbations bidimensionnelles à celle dans le cas de perturbations tridimensionnelles, pour un écoulement de base bidimensionnel $\overline{\mathbf{V}} = (\overline{U}(y), 0, 0)$, Squire a pu déterminer un théorème qui peut se formuler de trois façons différentes.

Première formulation Si un écoulement parallèle admet des perturbations tridimensionnelles temporellement instables à un nombre de Reynolds Re, il admet aussi des perturbations bidimensionnelles temporellement plus instables à un nombre de Reynolds inférieur.

Deuxième formulation Pour toute perturbation tridimensionnelle instable il existe une perturbation bidimensionnelle moins stable.

Troisième formulation Pour déterminer le nombre de Reynolds critique (à partir duquel apparaissent les premières instabilités), il est suffisant de ne considérer que des perturbations bidimensionnelles.

Théorème de Stuart : réduction de l'écoulement de base 3D à 2D

Stuart [44] a montré une équivalence entre l'analyse de stabilité temporelle d'un écoulement 3D parallèle pour des perturbations se propageant dans une direction ψ_k et l'analyse de stabilité temporelle du même profil projeté dans cette direction pour ne considérer qu'un écoulement 2D.

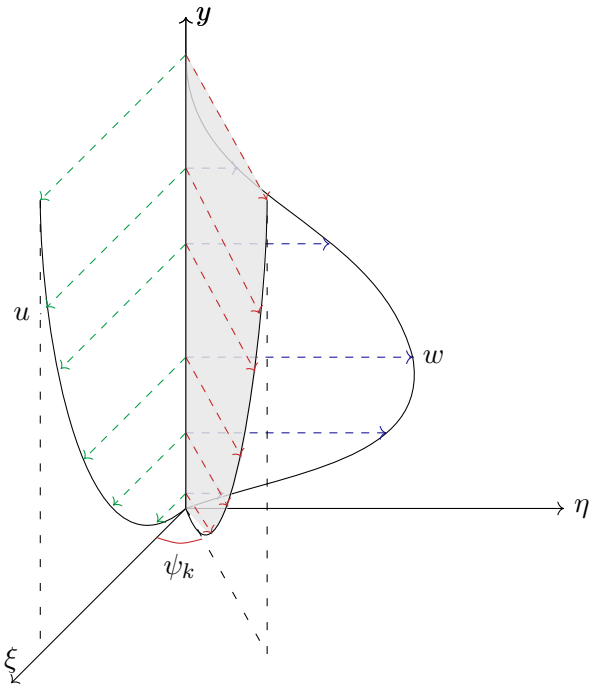


FIGURE 2.4. – Projection des composantes de l'écoulement de base dans la direction de propagation de l'instabilité dans le repère (ξ, y, η) de couche limite

Le théorème de Stuart s'énonce de la façon suivante :

Théorème L'analyse de stabilité temporelle d'un écoulement de base parallèle de la forme

$$(\overline{U}(y), 0, \overline{W}(y)) \tag{2.50}$$

soumis à des perturbations 3D de direction ϕ_k peut être faite en faisant l'analyse temporelle de l'écoulement de base

$$\overline{U}_{\psi_\mathrm{k}}(y) = \cos\phi_\mathrm{k}\overline{U}(y) + \sin\phi_\mathrm{k}\overline{W}(y) \tag{2.51}$$

soumis à des perturbations 2D, le taux d'amplification étant le même.
Cette propriété a été démontrée par Dunn et Lin [45] pour les écoulements compressibles.

Relation de Gaster : passage du temporel au spatial

Gaster [46] s'intéresse à des perturbations 2D d'un écoulement 2D en analyse temporelle puis en analyse spatiale et cherche à relier les deux résultats.
Le taux d'amplification spatiale $\sigma^* = -\alpha_i$ qui nous intéresse en stabilité spatiale peut être déduit du taux d'amplification ω_i de la stabilité temporelle :

$$\sigma^* = \frac{\omega_i}{\Re(V_\mathrm{g})} \tag{2.52}$$

où V_g représente la vitesse de groupe . Ce taux d'amplification correspond en fait à l'amplification de la perturbation dans la direction de la vitesse de groupe ϕ_g. Dans le cas de perturbations 3D, la transformation de Squire permet de déterminer le taux d'amplification dans n'importe quelle direction ψ_A (entre la ligne de courant extérieure et $\mathbf{k}$) ou ϕ_A (entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{x}$)

$${\sigma^*}_{\phi_A} = \frac{\omega_i}{\|\Re(V_\mathrm{g})\|\cos(\phi_A - \phi_\mathrm{g})} \tag{2.53}$$

En faisant l'hypothèse que $\phi_\mathrm{g} \simeq \theta$ (Arnal [3]), la relation de Gaster sera utilisée sous la forme :

$${\sigma^*}_{\phi_A} = \frac{\omega_i}{\|\Re(V_\mathrm{g})\|\cos(\phi_A - \theta)} \tag{2.54}$$

Le calcul du taux d'amplification spatiale pour différentes directions d'amplification ϕ_A est alors rendu possible. On va considérer maintenant les différentes hypothèses possibles pour le choix de la direction d'amplification.

• **Direction de propagation** $\phi_A = \phi_\mathrm{k} = \psi_\mathrm{k} + \theta$, dans ce cas l'amplification se fait dans la direction de propagation et nous avons

$${\sigma^*}_\mathrm{P} = \frac{\omega_i}{\|\Re(V_\mathrm{g})\|\cos(\psi_\mathrm{k})} \tag{2.55}$$

• **Direction de la ligne de courant extérieure** Dans ce cas $\phi_A = \theta$ et on considère une amplification dans la direction de la vitesse de groupe

$${\sigma^*}_{str} = \frac{\omega_i}{\Re(V_\mathrm{g})} = {\sigma^*}_\mathrm{P}\cos(\psi_\mathrm{k}) \tag{2.56}$$

• **Direction normale au bord d'attaque** Ici $\phi_A = 0$

$${\sigma^*}_{LE} = \frac{\omega_i}{\Re(V_\mathrm{g})\cos(\theta)} = {\sigma^*}_\mathrm{P}\frac{\cos(\psi_\mathrm{k})}{\cos(\theta)} \tag{2.57}$$

Nous verrons dans le prochain chapitre que la méthode des paraboles nous permet d'obtenir ${\sigma^*}_\mathrm{P}$ ce qui explique l'intérêt des transformations qui permettent d'exprimer le taux d'amplification spatiale à partir de ${\sigma^*}_\mathrm{P}$ dans n'importe quelle direction d'amplification.

2.3. Prévision de la position de transition naturelle : différentes méthodes

2.3.1. Méthode du e^N

La méthode du facteur N développée par J.L. Van Ingen [47] et Smith et Gamberoni [48] en 1956 consiste à déterminer l'amplification totale d'un mode à partir de la connaissance des taux d'amplification locaux, déterminés à l'aide des équations de stabilité linéaire locale. Un mode d'amplitude initiale A_0 en s_{crit} s'amplifie jusqu'à une amplitude A en s et l'amplification est définie comme étant le rapport A/A_0. Un facteur N est alors défini pour chaque mode dont l'amplification est exponentielle, donné par :

$$N(s, f, \psi_k) = \ln \frac{A}{A_0} = \int_{s_{crit}}^{s} \sigma^*(f, \psi_k, \eta) ds \tag{2.58}$$

où s représente l'abscisse curviligne du chemin d'intégration qui doit correspondre au chemin le long duquel s'amplifie le mode et s_{crit} l'abscisse critique, abscisse à partir de laquelle les modes commencent à s'amplifier. Pour un mode qui s'amplifie suivant la direction de la vitesse de groupe, dont la direction est proche de celle de la ligne de courant extérieure, nous aurons :

$$s = s(x) \qquad s_{cr} = s(x_{cr}) \qquad \sigma^* = \sigma^*{}_{str} \tag{2.59}$$

alors que pour un mode s'amplifiant dans la direction normale au bord d'attaque

$$s = x \qquad s_{cr} = x_{cr} \qquad \sigma^* = \sigma^*{}_{LE}. \tag{2.60}$$

La méthode du facteur N suppose que la transition a lieu à la position x_T lorsqu'une quantité N_{env} atteint une valeur seuil N_T comme visible sur la figure 2.5.

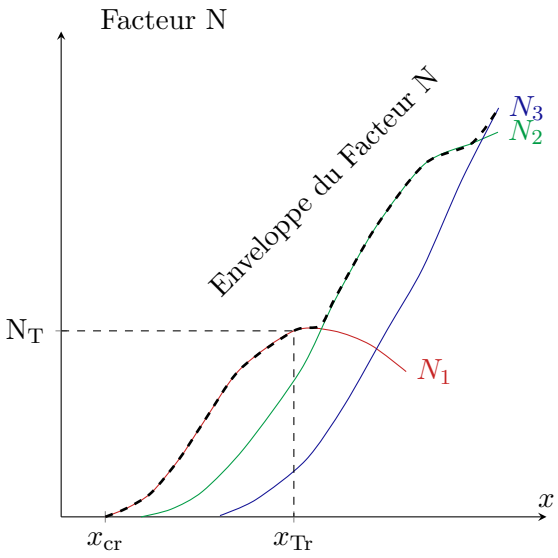


FIGURE 2.5. – Courbes de facteurs N pour différentes fréquences, méthode enveloppe.

On distinguera trois méthodes pour construire N_{env} :

Méthode enveloppe : Pour réduire le coût de la méthode il est possible de maximiser les taux d'amplifications par rapport à ψ_k. Cette méthode ne fait donc pas la distinction entre des perturbations se propageant dans des directions proches de celle de la vitesse extérieure (ce qui est le cas des ondes de Tollmien-Schlichting) et des perturbations se propageant dans la direction

transversale (ondes CF).

$$\mathrm{N_{env}} = \max_{\mathrm{f}} \left[\int_{s_{cr}}^{s} \max_{\psi_\mathrm{k}} \sigma^*(\mathrm{f}, \psi_\mathrm{k}) ds \right] \tag{2.61}$$

Méthode à paramètre fixé : Une autre approche consiste à fixer la fréquence ainsi qu'un autre paramètre tel que β_r (longueur d'onde transversale physique), $2\pi/\sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}$ (longueur d'onde totale physique) ou ψ_k (direction de propagation par rapport à la direction de la ligne de courant extérieure). Par cette approche des ondes de natures différentes sont donc séparées.

$$\mathrm{N_{env}}(\psi_\mathrm{k}) = \max_{\mathrm{f}} \left[\int_{\mathrm{s_{crit}}}^{\mathrm{s}} \sigma^*(\mathrm{s}, \psi_\mathrm{k}) ds \right] \tag{2.62}$$

Méthode N-longi, N-crossflow : Il est possible de calculer un facteur N associé aux instabilités longitudinales (NTS) et transversales (NCF). La distinction entre ces deux types d'instabilités est ainsi réalisée explicitement et la couche limite est considérée comme laminaire tant que le couple (NTS,NCF) est contenu dans une courbe limite définie au préalable.

Mack [1] a établi une relation semi-empirique dans le cas de la méthode à paramètre fixé permettant de lier un facteur $\mathrm{N_T}$ critique, à partir duquel les perturbations TS sont suffisamment amplifiées pour provoquer la transition, à l'intensité des perturbations extérieures $\mathrm{T_u}$:

$$\mathrm{N_T} = -8{,}41 - 2{,}4 \ln(\mathrm{T_u}) \qquad 10^{-3} < \mathrm{T_u} < 10^{-2} \tag{2.63}$$

La dépendance en $\mathrm{T_u}$ de cette relation représente bien la sensibilité des ondes TS à la turbulence infinie amont. Les ondes CF stationnaires sont quant à elles sensibles à la rugosité de paroi.
Malgré quelques tentatives, il n'existe pas à l'heure actuelle un critère aussi universel que celui de Mack permettant de relier l'état de surface d'une paroi à une valeur de transition pour les ondes CF.

Quelques remarques sur la valeur de N_T

Il est important de noter que la valeur de $\mathrm{N_T}$ est dépendante de la méthode employée. La relation de Mack pourra être utilisée pour des méthodes à paramètre fixé mais pas pour des méthodes enveloppes.

Ensuite, le facteur N de transition $\mathrm{N_T}$ est le seul paramètre de la méthode du facteur N qui permet d'introduire une notion de réceptivité. En effet, la réceptivité pilote l'amplitude initiale des perturbations et la méthode du facteur N donne leur amplification totale. Si nous considérons que la transition est due à une amplification critique des perturbations, alors $\mathrm{N_T}$ peut être vu comme le lien entre l'amplitude critique et l'amplitude initiale. Ainsi une modification de l'environnement dans lequel se développent les perturbations (donc de la réceptivité) se traduira par une modification de la valeur de $\mathrm{N_T}$.

Enfin, c'est le facteur N qui permet de faire le lien entre des calculs de stabilité exacte et des positions de transition expérimentales. Il est donc courant dans le cadre d'une campagne expérimentale comprenant plusieurs régimes d'écoulements de sélectionner quelques cas pour étalonner la valeur de $\mathrm{N_T}$ à utiliser pour les autres cas (en supposant bien sûr que l'état de surface ne varie pas pour ne pas modifier la réceptivité des ondes CF et que le taux de turbulence extérieure varie peu pour ne pas modifier la réceptivité des ondes TS).

Il n'y a pas de signification physique à vouloir modifier à tout prix la valeur de $\mathrm{N_T}$ pour obtenir des positions de transition cohérentes sur tous les cas d'une série de tests pour lesquels les paramètres liés à la réceptivité sont constants : la variation de $\mathrm{N_T}$ est alors à imputer à l'emploi de la méthode du facteur N et à la mise en défaut éventuelle des hypothèses sur lesquelles elle repose (écoulement parallèle, croissance linéaire).

2.3.2. Méthodes simplifiées

Afin de palier à l'utilisation de calculs de stabilité exacte pour déterminer le taux d'amplification locale σ qui sont très coûteux en temps ingénieur, des méthodes simplifiées (critères de transition, méthodes databases, réseaux de neurones ...) ont été mises au point. L'objectif de ces méthodes est soit de remplacer le calcul du facteur N (utilisation de critères de transition) soit de rendre le calcul du facteur N moins coûteux en stockant dans une base de données des taux d'amplification par exemple (méthodes databases). Des modèles RANS pour la prise en compte de la transition ont aussi été développés à partir des critères de transition. Ces modèles permettent de remplacer le calcul du facteur N.

Critères de transition

Le principe des critères de transition est de donner une position de transition à partir d'une méthode simple. La simplification de l'expression du facteur N donne lieu à une zoologie de critères de transition dont notamment ceux de Gleyzes *et al* [49] pour la détermination de la transition dans un bulbe, Abu-Ghannam et Shaw (ABS) [50] pour la transition bypass et Arnal, Habiballah, et Delcourt (AHD) [51] pour la transition par ondes TS. Le critère C1 [52] peut être utilisé pour la détermination de la transition pour des écoulements tridimensionnels. Dans ce cas, la transition est provoquée par amplification des ondes CF. L'ensemble de ces critères est détaillé dans [4].
Pour le cas des parois chaudes peu de critères de transition existent. Le critère AHD, valable pour les ondes TS, a été étendu aux parois chaudes [53]. Masad *et al* [54] ont développé une corrélation de transition permettant la prise en compte de la température de paroi ainsi que de l'aspiration à la paroi. Ce critère a été déterminé par une analyse de stabilité de profils de couche limite sur plaque plane. Il est valable pour des rapports de température $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ entre 0,95 et 1,05.

Approche de type base de données

Une autre approche consiste à simplifier le calcul du taux d'amplification des perturbations. Ce dernier peut être par exemple stocké dans une base de données, indexée sur des paramètres particuliers des profils de vitesse de la couche limite.
Van Ingen [55] a étudié la stabilité de profils de couche limite avec ou sans aspiration et jusqu'au décollement. Ceci lui a permis de créer une base de données. Cette base de données est indexée par le facteur de forme incompressible H_i et stocke les taux d'amplification $-\alpha_i$ et la fréquence des instabilités ω. Cette base de données est valide pour des écoulements avec aspiration de paroi.
Drela [56] a construit une base de données en appliquant l'équation d'Orr-Sommerfeld adimensionnée à des profils de similitude. Cette base de données fournit les taux d'amplification des ondes TS en fonction de H_i, $\mathrm{Re}_{\theta_{11}}$ et $\omega\theta_{11}/U_\mathrm{e}$, ce qui lui permet d'intégrer directement le taux d'amplification du mode le plus instable à chaque station et ainsi utiliser la méthode enveloppe du facteur N.
Stock et Dagenhart [57] ont réalisé une étude de stabilité de profils de couche limite laminaire allant des profils de couche limite pour des écoulements accélérés jusqu'aux écoulements proches du décollement. Cela leur a permis de construire une base de données afin de pouvoir utiliser la méthode du facteur N. Les taux d'amplification sont stockés dans cette base de données indexée par le facteur de forme incompressible H_i. Un recalcul de ce paramètre est effectué à l'aide du paramètre $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$. Une interpolation cubique permet de déterminer le taux d'amplification à partir de la valeur du H_i.
Dagenhart [58] a proposé une base de données pour les ondes CF qui se base sur la distance à laquelle le profil transversal atteint 10% de sa valeur maximale.
La méthode des paraboles [59] développée à l'ONERA depuis une trentaine d'années est aussi une approche simplifiée. La base de données, indexée par le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite M_e et par H_i, stocke des coefficients permettant le calcul du taux d'amplification σ^*. Cette méthode est présentée en détail dans ce manuscrit au chapitre 3 et est valable pour

les ondes TS et CF sur parois froides et sur parois athermanes. Elle se trouve à mi-chemin entre l'utilisation de critères et l'utilisation de la stabilité linéaire locale.

Modèle RANS : modèle $\gamma_{\text{interm}} - \text{Re}_{\theta_t}$

La formulation du calcul du facteur N n'étant pas adaptable, dans un premier temps, à une approche RANS, Menter et Langtry [60] ont construit un modèle RANS permettant la prise en compte de la transition. Ce modèle est basé sur une modélisation par équations de transport. Les grandeurs γ_{interm} représentant la valeur de l'intermittence et Re_{θ_t}, représentant le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement à la position de transition, sont transportées. Ces équations sont construites de la même façon que les équations de transport pour les modèles de turbulence à savoir avec des termes de production, de destruction et de diffusion. Ces différents termes font appel à des fonctions et à des coefficients qui doivent être calibrés. Cette calibration s'effectue à l'aide de configurations de référence. La détermination de γ_{interm} et Re_{θ_t} est effectuée à l'aide de variables locales d'un point de vue RANS. Seules les valeurs dans les cellules voisines sont nécessaires.

Les détails de ce modèle ne sont pas donnés dans ce manuscrit. Le modèle $\gamma_{\text{interm}} - \text{Re}_{\theta_t}$ a été initialement conçu pour des écoulements de turbomachines et pour des transitions de type bypass sur paroi athermane. En calibrant différemment les fonctions, ce modèle peut être utilisé avec précaution pour de la transition naturelle et toujours sur paroi athermane [61] [62].
Ce modèle se veut être un modèle ingénieur et n'est donc pas un modèle physique. Le passage du formalisme local en approche couche limite (c'est-à-dire la connaissance du profil de vitesse et de température en une station donnée) au formalisme local en approche RANS (c'est-à-dire la connaissance des grandeurs uniquement dans la cellule de calcul et ses voisins immédiats) implique donc une perte de la physique complexe du phénomène de transition, difficile à contre-balancer par l'optimisation des paramètres des corrélations utilisées.

Limitations

Les méthodes *databases* présentées précédemment sont valides pour des écoulements incompressibles bidimensionnels. Malgré le nombre important de méthodes simplifiées existantes (critères, méthodes databases, modèle RANS, réseaux de neurones) dans la littérature, aucunes (ou très peu) ne peuvent prendre en compte les effets de la température de paroi sur la transition. Actuellement, seule la stabilité linéaire locale est capable de prendre en compte ces effets.

2.3.3. Utilisation de la méthode e^N dans un solveur RANS

Au cours de sa thèse, Bégou a reformulé et a implémenté le calcul du facteur N dans le solveur RANS elsA. Ce travail de reformulation peut être trouvé dans [63]. Cette reformulation est réalisée à l'aide d'une modélisation par équations de transport. Cette modélisation est très appropriée à une approche RANS.
La nouvelle équation de transport est la suivante :

$$\frac{\partial \rho \text{N}}{\partial t} + \text{div}\left(\rho \text{N} \boldsymbol{V}\right) = \rho \parallel \boldsymbol{V} \parallel \sigma^* - \Gamma_{\text{att}} \sigma_{\text{att}} \rho \text{N} \tag{2.64}$$

où σ_{att} est un coefficient de forçage égal à 1,1 et

$$\Gamma_{\text{att}} = \begin{cases} 1 & \text{si la cellule se trouve dans la zone du point d'arrêt} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.65}$$

Une fois le champ de facteur N déterminé, la valeur du facteur N est extraite à la frontière de la couche limite. La bonne détermination de l'épaisseur de la couche limite est donc un élément essentiel pour ce modèle. Bégou a proposé une méthode de calcul de cette épaisseur à l'aide d'une

fonction test inspirée de [57]. Les détails de la mise en place de cette méthode se trouvent dans [4].

Chapitre 3

La méthode des paraboles pour les instabilités de type Tollmien-Schlichting

La résolution des équations de stabilité linéaire locale (LLS) (ou d'Orr-Sommerfeld dans le cas incompressible) peut s'avérer extrêmement coûteuse surtout s'il est question d'une mise à jour de la position de transition dans un calcul RANS par exemple. La méthode des paraboles, méthode dite *database*, permet la modélisation du taux d'amplification pour différents types d'instabilités. Dans ce chapitre le principe de fonctionnement de la méthode des paraboles est introduit sans toutefois rentrer dans tous les détails. Ces développements sont fortement inspirés par la thèse de Bégou [4]. Nous présenterons seulement la modélisation des ondes TS (visqueux et visqueux-inflexionnel). La modélisation des CF stationnaires, instationnaires et des instabilités inflexionnelles en écoulement décollé se trouvera dans [4]. Nous nous limitons dans ce chapitre à présenter la méthode des paraboles pour les ondes TS, qui a été mise en place dans le contexte des parois athermanes ou des parois froides. Son extension aux parois chauffées sera présentée dans les chapitres suivants.

Sommaire

3.1. Modèle V : instabilités visqueuses en régime transsonique **48**

3.2. Modèle VI : instabilités visqueuses-inflexionnelles en régime supersonique **49**

3.1. Modèle V : instabilités visqueuses en régime transsonique

Une étude concernant la stabilité d'un nombre important de profils de Falkner-Skan-Cooke a été menée à l'ONERA/DERAT par Arnal. Cette étude a permis de constater que l'évolution du taux d'amplification en fonction du nombre de Reynolds Re_{δ_1} pouvait être modélisée par deux demi-paraboles (Vialle [64]). Les paramètres de ces paraboles ont été déterminés et ce premier modèle a été complété pour des écoulements transsoniques et validé sur des cas expérimentaux [59].

Coefficients des paraboles

Comme vu au chapitre 1, l'évolution du taux d'amplification pour des instabilités visqueuses peut être approchée par deux demi-paraboles.

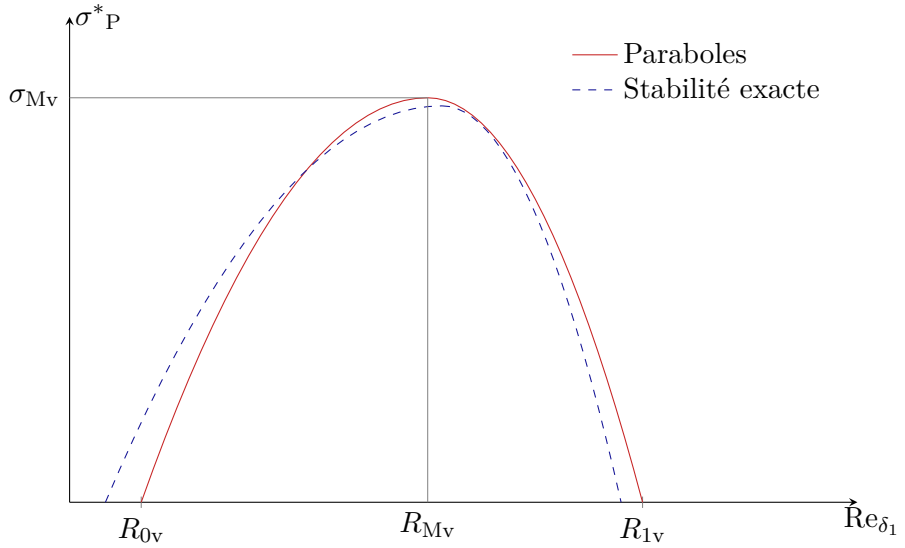


FIGURE 3.1. – Courbe iso-F approchée par deux demi-paraboles pour les instabilités visqueuses

L'expression analytique associée à la modélisation par des demi-paraboles s'écrit :

$$\frac{\sigma^*_{\mathrm{P}}}{\sigma_{\mathrm{Mv}}} = 1 - \left[\frac{\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_{\mathrm{Mv}}}{R_{\mathrm{kv}} - R_{\mathrm{Mv}}}\right]^2 \qquad \text{avec} \qquad R_{\mathrm{kv}} = \begin{cases} R_{0\mathrm{v}} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_{\delta_1} < R_{\mathrm{Mv}} \\ R_{1\mathrm{v}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.1}$$

Il reste maintenant à déterminer les coefficients $R_{\mathrm{Mv}}, R_{0\mathrm{v}}, R_{1\mathrm{v}}$ et σ_{Mv}. Arnal [59] a tracé des diagrammes de stabilité pour différents écoulements adiabatiques et différentes fréquences et a ensuite déterminé l'évolution en fonction de F de ces coefficients.
Il aboutit aux résultats suivants :

$$\sigma_{\mathrm{Mv}} = A_{\mathrm{Mv}}\left(1 - \frac{F}{F_{\mathrm{Mv}}}\right) \tag{3.2}$$

$$R_{\mathrm{Mv}} = K_{\mathrm{Mv}} F^{-E_{\mathrm{Mv}}} \tag{3.3}$$

$$R_{0\mathrm{v}} = R_{\mathrm{Mv}}\left[1 - A_{0\mathrm{v}}\left(1 - \frac{F}{F_{0\mathrm{v}}}\right)\right] \tag{3.4}$$

$$R_{1\mathrm{v}} = R_{\mathrm{Mv}}\left[1 - A_{1\mathrm{v}}\left(1 - \frac{F}{F_{1\mathrm{v}}}\right)\right] \tag{3.5}$$

Paramètres des coefficients

Les paramètres $A_{\mathrm{Mv}}, A_{0\mathrm{v}}, A_{1\mathrm{v}}, F_{\mathrm{Mv}}, F_{0\mathrm{v}}, F_{1\mathrm{v}}, K_{\mathrm{Mv}}$ et E_{Mv} sont tabulés en fonction du facteur de forme incompressible H_{i}, qui joue le rôle d'un paramètre de gradient de pression, et le nombre de Mach extérieur M_{e} qui tient compte des effets de compressibilité.

Il s'agit donc d'une méthode type base de données, dont l'intérêt majeur est que le temps de calcul est réduit d'un facteur quatre par rapport à des calculs de stabilité exacte ce qui permet de réaliser des études paramétriques.

Lors de sa thèse, Jelliti [65] a étendu cette méthode à des nombres de Mach allant jusqu'à $M_e = 1{,}3$. La différence avec le premier modèle est que la direction de propagation des ondes ψ_k n'est plus considérée comme étant nulle.
Un premier cas d'application, à bas nombre de Mach, a été réalisé par Arnal [59]. Il a ensuite testé cette méthode sur le profil supercritique CAST10 pour un écoulement transsonique. Il a montré lors de cette étude que le nombre de Mach extérieur M_e était un paramètre indispensable pour la tabulation des différents paramètres. Ces deux cas d'application sont résumés dans la thèse de Bégou [4].

3.2. Modèle VI : instabilités visqueuses-inflexionnelles en régime supersonique

Lors d'une étude de *laminarisation* sur la coiffe d'Ariane V [26], la méthode des paraboles a été étendue pour des nombres de Mach allant jusqu'à $M_e = 4$ et pour des rapports T_p/T_f compris entre 0,4 et 1. Un rapport $T_p/T_f < 1$ implique donc un refroidissement de paroi.
Cette extension a été obtenue en réalisant des calculs de stabilité sur des profils de similitude suivie d'une modélisation des résultats. Les profils utilisés pour cette extension sont obtenus par le changement de variable de Levy-Lees [8] qui donne des solutions de similitude.

Coefficients des paraboles

Cette fois-ci, les instabilités sont de nature visqueuses-inflexionnelles dont le diagramme de stabilité est représenté par la figure 1.13a.
Dans un écoulement compressible, l'instabilité est pilotée par la présence d'un point d'inflexion généralisé (PIG) dans lequel intervient la masse volumique ρ. Ce point lorsqu'il existe, est à l'altitude y_{ig} telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right)\bigg|_{y=y_{ig}} = 0 \tag{3.6}$$

Une façon de différencier les instabilités visqueuses des instabilités inflexionnelles est de dire que l'instabilité est visqueuse si une augmentation du nombre de Reynolds permet de passer d'un état instable à un état stable.
L'instabilité inflexionnelle commence à intervenir pour $M_e = 0$ sur paroi athermane pour des écoulements ralentis et dans ce cas le gradient de pression doit être relativement important pour que cette instabilité se manisfeste à des nombres de Reynolds réalistes. Lorsque le nombre de Mach augmente, le profil de masse volumique permet l'apparition d'un PIG en écoulement uniforme voir accéléré. À partir de $M_e = 2$, l'instabilité inflexionnelle est omniprésente.
Comme nous l'avons vu sur la figure 1.13b, l'évolution du taux d'amplification peut être modélisée par quatre demi-paraboles. La méthode des paraboles modélise l'évolution du taux d'amplification $\sigma^*{}_v$ (pour les instabilités visqueuses) d'une part et du taux d'amplification $\sigma^*{}_i$ (pour les instabilités inflexionnelles) d'autre part par deux jeux distincts de deux demi-paraboles. Le taux d'amplification final est donné par $\sigma^*{}_P = \max(\sigma^*{}_v, \sigma^*{}_i)$ où $\sigma^*{}_v$ et $\sigma^*{}_i$ sont donnés par :

$$\frac{\sigma^*{}_v}{\sigma_{Mv}} = 1 - \left[\frac{\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_{Mv}}{R_{kv} - R_{Mv}}\right]^2 \quad \text{avec} \quad R_{kv} = \begin{cases} R_{0v} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_{\delta_1} < R_{Mv} \\ R_{1v} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\frac{\sigma^*{}_i}{\sigma \mathrm{Mi}} = 1 - \left[\frac{\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_{Mi}}{R_{ki} - R_{Mi}}\right]^2 \quad \text{avec} \quad R_{ki} = \begin{cases} R_{0i} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_{\delta_1} < R_{Mi} \\ R_{1i} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.8}$$

L'indice "v" désigne les coefficients des paraboles liés aux instabilités visqueuses et "i" correspond aux instabilités inflexionnelles.

Il est apparu que la décroissance du taux d'amplification inflexionnelle était mieux représentée par une loi linéaire que par une loi parabolique pour $\sigma^*{}_i \to 0$ comme représenté sur la figure 5.8.

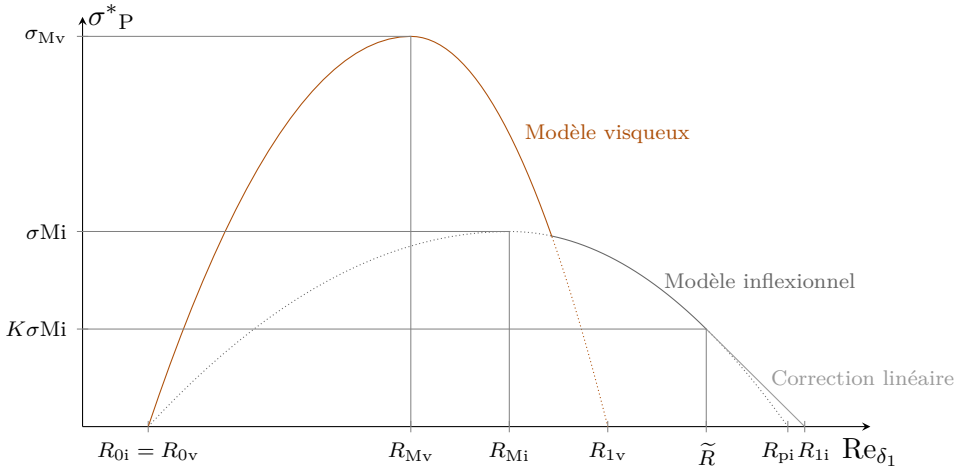


FIGURE 3.2. – Courbe iso-F approchée par quatre demi-paraboles pour les instabilités visqueuses-inflexionnelles

Le raccord entre les deux lois d'évolution est effectué lorsque $\sigma^*{}_i = K\sigma\mathrm{Mi}$, avec $K = 0{,}5$, en $\mathrm{Re}_{\delta_1} = \widetilde{R}$ avec une condition d'égalité des tangentes. La loi linéaire est donnée par :

$$\frac{\sigma^*{}_i}{\sigma\mathrm{Mi}} = (\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_{1\mathrm{i}})\frac{K}{\widetilde{R} - R_{1\mathrm{i}}} \qquad \text{avec} \qquad \widetilde{R} = \frac{2(1-K)R_{1\mathrm{i}} + KR_{\mathrm{Mi}}}{2-K} \tag{3.9}$$

Quand F décroit, σ_{Mv} atteint un maximum avant de décroître. De plus, pour les instabilités visqueuses, les deux branches du diagramme de stabilité se referment lorsque le nombre de Reynolds devient grand (figure 1.12a). σ_{Mv} tend donc vers 0 lorsque F tend vers 0. Afin d'éviter de modéliser ce phénomène qui ne se rencontre que pour des nombres de Reynolds trop élevés, le choix a été fait de limiter σ_{Mv} :

$$\sigma_{\mathrm{Mv}} = \sigma_{\mathrm{Ml}} \qquad \text{si} \qquad \mathrm{F} < F_{\mathrm{Mv}}\left(1 - \frac{\sigma\mathrm{Mi}}{A_{\mathrm{Mv}}}\right) \tag{3.10}$$

Les coefficients s'expriment par :

$$\sigma_{\mathrm{Mv}} = \min\left(A_{\mathrm{Mv}}\left(1 - \frac{\mathrm{F}}{F_{\mathrm{Mv}}}\right), \sigma_{\mathrm{Ml}}\right) \tag{3.11}$$

$$\sigma\mathrm{Mi} = A_{\mathrm{Mi}}\left(1 - \frac{\mathrm{F}}{F_{\mathrm{Mi}}}\right) \tag{3.12}$$

$$R_{\mathrm{Mv}} = K_{\mathrm{Mv}}(10^5\mathrm{F})^{-E_{\mathrm{Mv}}} \tag{3.13}$$

$$R_{\mathrm{Mi}} = \max(R_{\mathrm{Mv}}, K_{\mathrm{Mi}}(10^5\mathrm{F})^{-E_{\mathrm{Mi}}}) \tag{3.14}$$

$$R_{0\mathrm{v}} = R_{\mathrm{Mv}}\left[1 - A_{0\mathrm{v}}\left(1 - \frac{\mathrm{F}}{F_{0\mathrm{v}}}\right)\right] \tag{3.15}$$

$$R_{0\mathrm{i}} = R_{0\mathrm{v}} \tag{3.16}$$

$$R_{1\mathrm{v}} = K_{1\mathrm{v}}(10^5\mathrm{F})^{-E_{1\mathrm{v}}} \tag{3.17}$$

$$R_{1\mathrm{i}} = K_{1\mathrm{i}}(10^5\mathrm{F})^{-E_{1\mathrm{i}}} \tag{3.18}$$

Les coefficients présents dans les équations précédentes sont tabulés dans une base de données

indexée par le facteur de forme H_i et par le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite M_e. En pratique, c'est ce modèle qui est utilisé dans les codes ONERA. Le modèle visqueux présenté dans la section précédente apparaît alors comme étant un cas particulier de ce modèle.

Paramètres des coefficients avec paroi en déséquilibre thermique

Le paramètre $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ est maintenant pris en compte. Le cas athermane correspond à $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1$ et les cas étudiés correspondent à des parois froides, soit $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} < 1$.
L'extension aux parois froides de la méthode s'est effectuée de la façon suivante : 4 nombres de Mach ont été choisis $M_\mathrm{e} = 1{,}6; 2{,}2; 3$ et 4, et pour chaque nombre de Mach deux valeurs du facteur de forme H_i ont été choisis (une correspondante à un écoulement uniforme et l'autre à un écoulement accéléré). Pour chaque doublet $M_\mathrm{e}, H_\mathrm{i}$ des calculs de stabilité exacte ont été réalisés pour différentes valeurs de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$. L'ensemble des résultats peut être trouvé dans [26].

Il est apparu que le refroidissement de la paroi exerce un effet stabilisant, dû au fait que le PIG se rapproche de la paroi (Vignau [66]). L'allure générale des courbes du taux d'amplification n'est pas modifiée. L'expression analytique du modèle reste donc valable. Cet effet stabilisant est tel que pour $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 0{,}4$ l'écoulement est inconditionnellement stable.

Une correction a été apportée par Arnal [26] et consiste en une fonction correctrice

$$f = \frac{\frac{T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{f}} - \tilde{T}}{1 - \tilde{T}} \tag{3.19}$$

où $\tilde{T}$ dépend de M_e et représente le rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ en dessous duquel les instabilités ne subsistent plus. Cette fonction permet alors de corriger les paramètres des coefficients des paraboles :

- $A_\mathrm{Mv}, A_\mathrm{Mi}, \sigma_\mathrm{Ml}$ et A_0v sont égaux à leur valeur sur paroi athermane multipliée par f
- $F_\mathrm{Mv}, F_\mathrm{Mi}$ et F_0v sont égaux à leur valeur sur paroi athermane multipliée par $f^{1,6}$
- $K_\mathrm{Mv}, K_\mathrm{Mi}, K_\mathrm{1v}$ et K_1i sont égaux à leur valeur sur paroi athermane multipliée par $f^{0,4}$
- $E_\mathrm{Mv}, E_\mathrm{Mi}, E_\mathrm{1v}$ et E_1i ne sont pas modifiés.

Dans le cadre d'écoulement sur paroi chaude, ce raisonnement ne peut être appliqué car en présence d'une paroi chauffée les instabilités sont amplifiées et ce quelque soit la valeur de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$. Le paramètre $\tilde{T}$ ne peut alors exister dans ce cas.

Cette première partie a permis d'expliquer les différents phénomènes de transition de la couche limite. La méthode des paraboles est un modèle de transition basé sur une approximation de l'évolution du taux d'amplification locale σ^* le long d'une iso-F. Dans la suite de ce manuscrit, les différentes étapes de l'extension de la méthode des paraboles seront présentées.

Deuxième partie

Développement de la nouvelle base de données

Chapitre 4

Étude des instabilités longitudinales de la couche limite sur paroi chaude

L'extension de la méthode des paraboles aux parois chaudes passe par la construction d'une nouvelle base de données. Pour cela, des calculs de stabilité sont effectués sur des profils de couche limite (vitesse et température) de référence.
La première partie de ce chapitre est consacrée à la génération des profils de couche limite de référence. Ils sont obtenus par la résolution des équations de similitude détaillées dans le chapitre 1. La seconde partie est consacrée aux calculs de stabilité effectués sur ces profils. Une mise sous forme matricielle des équations de stabilité linéaire locale en théorie pseudo-temporelle est effectuée. La résolution de ce problème aux valeurs propres est faite à l'aide d'une méthode de tir. Une fois cette méthode validée, la construction des diagrammes de stabilité est effectuée et des comparaisons avec des diagrammes de référence sont réalisées.

Sommaire

4.1. Génération des profils de vitesse et de température de référence . . 56
4.1.1. Résolutions des équations de similitude 56
4.1.2. Construction de la base de profils de couche limite de référence 57
4.2. Construction des diagrammes de stabilité 58
4.2.1. Résolution d'un problème aux valeurs propres à l'aide de la méthode de tir 58
4.2.2. Validation des diagrammes de stabilité sur paroi athermane 65
4.2.3. Diagrammes de stabilité sur paroi chaude 67

4.1. Génération des profils de vitesse et de température de référence

Afin de construire une base de données avec prise en compte des effets de température de paroi, il faut des profils de vitesse et de température de référence. L'obtention de ces profils a pour but de construire une famille de profils représentative des écoulements de couche limite sur paroi chaude.

4.1.1. Résolutions des équations de similitude

Pour rappel, les équations de similitude avec prise en compte des effets de température de paroi sur l'écoulement moyen sont :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}f''\right)+ff''+\beta_{\mathrm{H}}\left(\frac{\rho_e}{\rho}-f'^2\right)=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}\frac{g'}{\mathrm{P_r}}\right)+fg'=-\frac{{U_{\mathrm{e}}}^2}{h_{ie}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathrm{P_r}-1}{\mathrm{P_r}}\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}f'f''\right) \tag{4.2}$$

avec

$$f'=\frac{U}{U_{\mathrm{e}}}\qquad\text{et}\qquad g=\frac{h_{\mathrm{i}}}{h_{\mathrm{ie}}} \tag{4.3}$$

La résolution des équations de Levy-Lees avec le concept de similitude locale (équations (4.1) et (4.2)) permet de déterminer les profils de vitesse et de température de l'écoulement de base. La résolution de ces équations passe par la détermination de f' et g. Les équations (4.1) et (4.2) forme un système non-linéaire. La résolution de ce système est réalisée à l'aide d'une méthode pseudo-instationnaire qui converge vers l'état stationnaire. La différence entre une solution initiale et une solution à l'instant n est considérée comme un accroissement temporel. La discrétisation présentée en annexe conduit à la résolution d'un système tri-diagonal pour calculer les incréments temporels. Un système tri-diagonal est un système qui peut se mettre sous la forme :

$$a_ix_{i-1}+b_ix_i+c_ix_{i+1}=d_i\quad\text{pour}\quad i=1..n \tag{4.4}$$

avec $a_1=0$ et $c_n=0$.
La transformation des équations de Levy-Lees en système tri-diagonal est effectuée en annexe de ce manuscrit. Une fois cette transformation effectuée, l'algorithme de Thomas (détaillé en annexe C) est utilisé pour résoudre ce système tri-diagonal. Le code *Similc2*, disponible à l'ONERA, repose sur cette "stratégie" et fournit les profils de vitesse et de température de référence.

Pour un écoulement de plaque plane, $\beta_{\mathrm{H}}=0$ à Mach $\mathrm{M}=0{,}6$ sur paroi athermane $T_{\mathrm{p}}=T_{\mathrm{f}}$ le code fournit les profils tracés sur la figure 4.1. La température de frottement est définie par

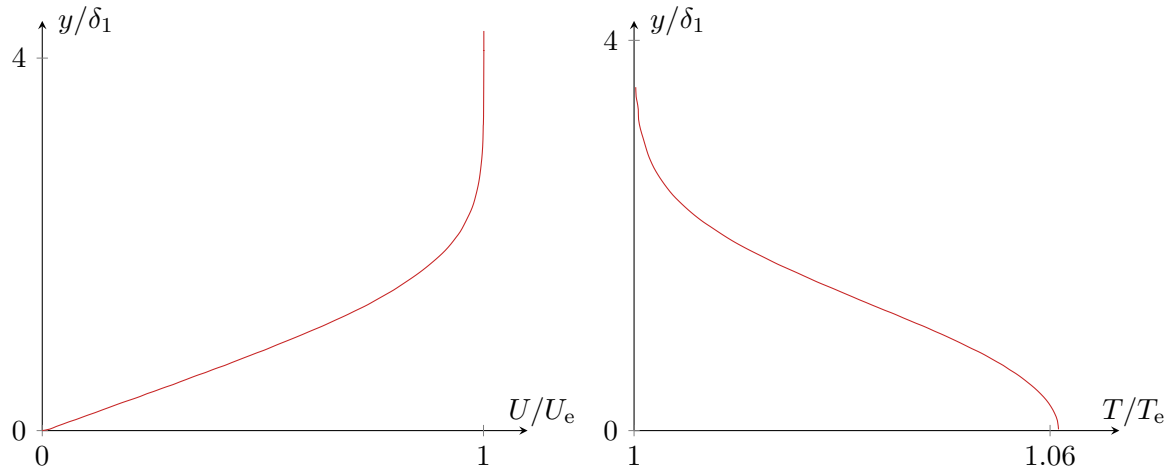
$$T_{\mathrm{f}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}{M_{\mathrm{e}}}^2\right)T_{\mathrm{e}} \tag{4.5}$$

soit ici,

$$T_{\mathrm{f}}=1{,}0612T_{\mathrm{e}} \tag{4.6}$$

Ceci est la raison pour laquelle sur la figure 4.1, à la paroi, $\frac{T}{T_{\mathrm{e}}}\neq 1$.

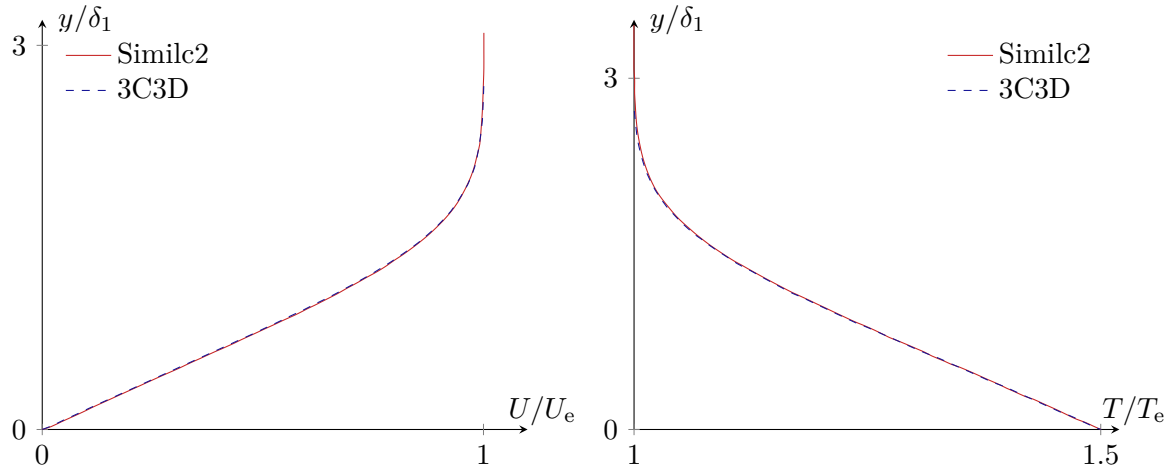
Afin de valider la détermination des profils de vitesse et de température, une comparaison a été faite avec le code de couche limite *3C3D*. Cette comparaison s'effectue sur un écoulement de type Blasius à savoir un écoulement sans gradient de pression. Pour cet écoulement le nombre de Mach est fixé à $M_{\mathrm{e}}=0{,}001$ et le rapport de température vaut $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}}=1{,}5$. Les profils de vitesse et de température sont tracés à l'aide du code *Similc2* d'une part et d'autre part à l'aide de *3C3D*. La superposition des profils de vitesse (figure 4.2a) et de température (figure 4.2b) permet de valider la détermination des profils de similitude avec prise en compte de la température de paroi à l'aide



(a) Profil de vitesse (b) Profil de température

FIGURE 4.1. – Profils de vitesse et de température sur plaque plane pour $M_e = 0{,}6$ et sur paroi athermane $T_p/T_f = 1$.

du code *Similc2*. Les figures 4.3a et 4.3b permettent de valider la détermination des profils de similitude pour un cas avec un gradient de pression négatif ($\beta_H = -0{,}12$) et un nombre de Mach non nul ($M_e = 0{,}6$).



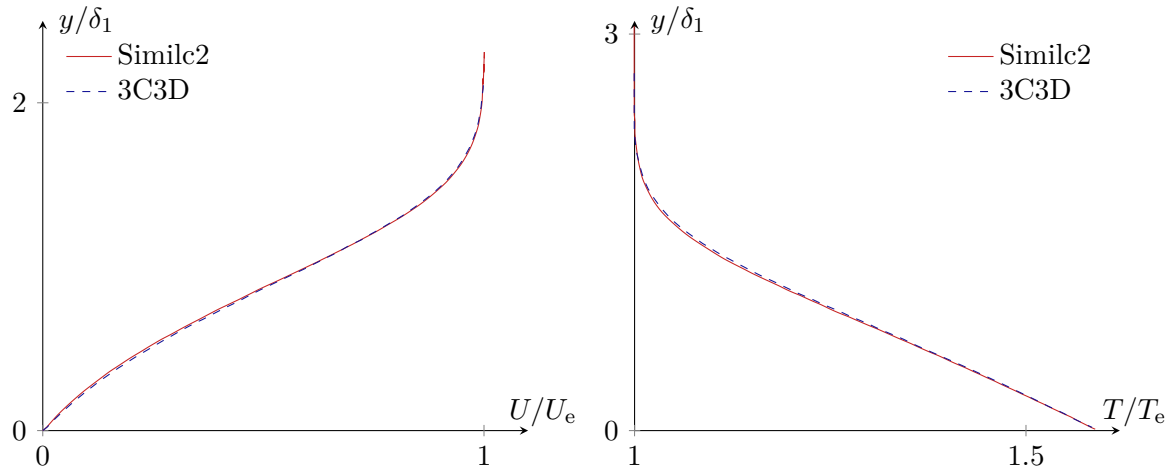
(a) Profils de vitesse (b) Profils de température

FIGURE 4.2. – Comparaison des profils de vitesse et de température sur plaque plane ($\beta_H = 0$) pour $M_e = 0{,}001$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ entre *Similc2* et *3C3D*.

4.1.2. Construction de la base de profils de couche limite de référence

Les profils déterminés dépendent de 3 paramètres : le paramètre d'Hartree β_H, le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite M_e et le rapport de température T_p/T_f.
Pour l'extension de la méthode des paraboles aux parois chaudes, la base de profils de référence est construite en faisant varier ces 3 paramètres. Pour la construction il a été choisi :

- 5 nombres de Mach : $M_e = [0{,}001; 0{,}6; 0{,}9; 1{,}1; 1{,}3]$
- 9 gradients de vitesse extérieure différents : 5 gradients négatifs, 1 gradient nul et 3 gradients positifs.
- 8 rapports de température T_p/T_f : $T_p/T_f = [1; 1{,}05; 1{,}1; 1{,}2; 1{,}5; 1{,}65; 1{,}8; 2]$



(a) Profils de vitesse

(b) Profils de température

FIGURE 4.3. – Comparaison des profils de vitesse et de température avec gradient de pression ($\beta_H = -0{,}12$) pour $M_e = 0{,}6$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ entre *Similc2* et *3C3D*.

Les nombres de Mach ont été choisis de la même façon que la base de données originale [65]. Les effets de compressibilité deviennent important à partir de $M_e = 0{,}6$. C'est pourquoi il n'y a aucun point entre $M_e = 0{,}001$ et $M_e = 0{,}6$. Les gradients de vitesse extérieure ont été choisis de telle sorte à être proches du décollement pour les gradients négatifs les plus élevés. La valeur maximale du gradient positif a été fixée à $\beta_H = 0{,}2$. Pour des gradients de vitesse extérieur positifs plus élevés et sous certaines conditions de température, un phénomène de survitesse locale apparait. La forme du profil de vitesse est alors grandement modifiée. Ce phénomène sera traité à part (voir la discussion section 6.4 et l'annexe G).
Pour les applications dégivrage ou anti-givrage, les rapports de température utilisés sont aux alentours de $T_p/T_f = 1{,}5$. C'est pourquoi, il a été choisi de fixer la valeur maximale de T_p/T_f à 2.

4.2. Construction des diagrammes de stabilité

4.2.1. Résolution d'un problème aux valeurs propres à l'aide de la méthode de tir

Pour rappel les diagrammes de stabilité sont des diagrammes $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ en théorie spatiale et $(\alpha, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ en théorie temporelle. Il faut une méthode de résolution rapide afin de pouvoir construire les diagrammes de stabilité. En effet, la construction des diagrammes passe par un balayage du plan $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ ou $(\alpha, \mathrm{Re}_{\delta_1})$. Suivant les plages de variations de ω (respectivement α) et de Re_{δ_1}, le nombre de résolutions du problème aux valeurs propres à effectuer peut atteindre jusqu'à quelques milliers.
Pour cela, nous avons choisi la méthode de tir (*shooting method*). Cette méthode permet de déterminer une valeur propre pour un couple (ω, Re_{δ_1}) donné en théorie spatiale ou pour un couple (α, Re_{δ_1}) en théorie temporelle. Cela permet de placer un point sur le diagramme.

4.2.1.1. Méthode de tir en théorie spatiale

Les équations de stabilité linéaire locale déterminées précédemment (Chapitre 2) sont mises sous forme matricielle où le nombre d'onde longitudinal α est factorisé dans le membre de droite et représente la valeur propre générale qui doit être déterminée :

$$A \cdot q = \alpha \cdot B \cdot q \tag{4.7}$$

où q est le vecteur perturbation : c'est un vecteur propre. Comme nous nous sommes placés en théorie spatiale, nous nous intéressons à l'amplification longitudinale des instabilités dans la

couche limite, donc à la partie imaginaire de α.
Le vecteur propre q est définit comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta \\ \Pi \\ \alpha u' \\ \alpha v' \\ \alpha w' \\ \alpha\theta \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

où Π représente la perturbation de pression. Les matrices A et B sont des matrices creuses de dimension $(9Ny; 9Ny)$ où Ny (typiquement $Ny = 100$) représente le nombre de points de collocation spectrale utilisés pour calculer les matrices dérivées premières $\mathbf{D}$ et secondes $\mathbf{D}^2$, par rapport à y. Ici ce sont les points de Gauss-Lobatto qui sont utilisés. Ces points sont définis sur $[-1, 1]$ par :

$$\xi_i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{Ny}\right)$$

Une fois les matrices dérivées calculées, une projection de ces dernières est réalisée, sur un intervalle physique $[0, Y_{\text{inf}}]$.
Les coefficients des matrices A et B dépendent des grandeurs moyennes de l'écoulement.
Les termes non nuls des matrices sont :

$$\begin{pmatrix} \cdot & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & A_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Id & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Id & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Id & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Id \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta \\ \Pi \\ \alpha u' \\ \alpha v' \\ \alpha w' \\ \alpha\theta \end{pmatrix} = \alpha \times \begin{pmatrix} B_{11} & \cdot & \cdot & B_{14} & B_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdot & B_{25} & B_{26} & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{31} & B_{32} & \cdot & B_{34} & \cdot & \cdot & B_{37} & \cdot & \cdot \\ B_{41} & \cdot & B_{43} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{48} & \cdot \\ B_{51} & B_{52} & \cdot & B_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{59} \\ Id & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & Id & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Id & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Id & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

où Id est la matrice identité de dimension $Ny \times Ny$. Les termes A_{ij} et B_{ij} sont aussi des matrices de dimension $Ny \times Ny$.
Dans tout ce qui suit, ρ et T font références à la valeur moyenne de la masse volumique et de la température. Les coefficients ci-dessous proviennent de la discrétisation spatiale des équations de stabilité linéaire locale. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

$$\begin{aligned} A_{12} &= \mathbf{D}\rho + \rho\mathbf{D} \\ A_{13} &= i\beta\rho \\ A_{14} &= i\omega\rho/T - i\beta\rho\overline{W}/T \\ A_{15} &= -i\omega\rho + i\beta\rho\overline{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \rho i(\beta\overline{W} - \omega) - \frac{1}{\text{Re}}\left(\overline{\mu}(\mathbf{D}^2 - \beta^2) + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D})\right) \\ A_{22} &= \rho\mathbf{D}\overline{U} \\ A_{24} &= -\frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{U} + \mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{U}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{32} &= \rho i(\beta\overline{W}-\omega) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{4}{3}\overline{\mu}\mathbf{D}^2 - \overline{\mu}\beta^2 - \frac{4}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right)\\
A_{33} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}i\beta\mathbf{D} - \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}Ti\beta\right)\\
A_{34} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}i\beta\mathbf{D}\overline{W}\\
A_{35} &= \mathbf{D}/\gamma {M_\mathrm{e}}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{42} &= \rho\mathbf{D}\overline{W} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}i\beta\mathbf{D} + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}Ti\beta\right)\\
A_{43} &= \rho i(\beta\overline{W}-\omega) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\overline{\mu}\beta^2 + \overline{\mu}\mathbf{D}^2 + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right)\\
A_{44} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{W} + \mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{W}\right)\\
A_{45} &= i\beta/\gamma {M_\mathrm{e}}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{51} &= -2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D}\\
A_{52} &= \rho\mathbf{D}T + (\gamma-1)\mathbf{D} - 2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}i\beta\mathbf{D}\overline{W}\\
A_{53} &= (\gamma-1)i\beta - 2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D}\\
A_{54} &= \rho i(\beta\overline{W}-\omega) - \frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}}\left((\mathbf{D}^2-\beta^2) + \frac{1}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}^2T + \frac{2}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\overline{\kappa}}{dT^2}(\mathbf{D}T)^2\right)\\
&\quad - \gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}((\mathbf{D}\overline{U})^2 + (\mathbf{D}\overline{W})^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= -i\rho\\
B_{14} &= i\overline{U}\frac{\rho}{T}\\
B_{15} &= -i\rho\overline{U}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{21} &= -i\rho\overline{U}\\
B_{22} &= i\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T + \frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D}\right)\\
B_{23} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\beta\overline{\mu}\\
B_{25} &= -i/\gamma {M_\mathrm{e}}^2\\
B_{26} &= \frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{31} &= i\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} - \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right)\\
B_{32} &= -i\rho\overline{U}\\
B_{34} &= i\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}\overline{U}\\
B_{37} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{41} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\beta\overline{\mu} \\
B_{43} &= -i\rho\overline{U} \\
B_{48} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu} \\
\\
B_{51} &= -i(\gamma-1) \\
B_{52} &= 2i\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{U} \\
B_{54} &= -i\rho\overline{U} \\
B_{59} &= -\frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}}
\end{aligned}
$$

où κ est la conductivité thermique de l'air. Nous considérons que le nombre de Prandtl est constant ($\mathrm{P_r} = 0{,}725$). Cette hypothèse nous permet de remplacer $\frac{1}{\overline{\kappa}}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}$ par $\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}$ dans l'expression de la matrice A_{54}. Les coefficients ci-dessus font apparaître le nombre d'onde transversale β. Or celui-ci peut être relié à ψ_k comme nous l'avons vu précédemment. Ceci permet de prendre en compte la direction de propagation des instabilités. La transformation de β en $\alpha\tan(\psi_\mathrm{k})$ implique une transformation des coefficients des matrices A et B. Ces nouveaux coefficients sont détaillés en annexe.

Nous rappelons les conditions aux limites des équations de stabilité linéaire locale [1] :

$$
\begin{aligned}
&u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad \theta = 0 \qquad \text{en} \qquad y = 0 \\
&u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad \theta = 0, \quad \Pi = 0 \qquad \text{en} \qquad y \to \infty
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Ces conditions limites sont directement implémentées dans les matrices A et B dans les lignes "bordures" de ces dernières.
La condition limite $u' = 0$ en $y = 0$ se traduit donc par :

$$
A(1,1) = 1 \quad A(1, 2:9*Ny) = 0 \quad \text{et} \quad B(1, 1:9*Ny) = 0 \tag{4.11}
$$

et la condition $u' = 0$ en $y \to \infty$ par :

$$
A(Ny,Ny) = 1 \quad A(Ny, 1:Ny-1) = 0 \quad A(Ny, Ny+1:9*Ny) = 0 \quad \text{et} \quad B(Ny, 1:9*Ny) = 0 \tag{4.12}
$$

La condition en $+\infty$ est imposée à l'ordonnée maximale Y_∞. Cette valeur est choisie de telle sorte que $\frac{U}{U_\mathrm{e}} = 1$ et que Π soit nulle en $y = Y_\infty$ (ici $Y_\infty = 200$).

Comme mentionné au début de cette partie, nous allons utiliser une méthode de tir pour déterminer la valeur propre α. Cette valeur propre sera recherchée à proximité d'une valeur α_0. Au préalable, une étape de déshomogénéisation des matrices A et B est nécessaire. Elle a pour but d'éviter que la matrice $A - \alpha \cdot B$ soit singulière et donc non-inversible. Cette étape est détaillée dans la thèse de Piot [67].
Cette étape consiste à remplacer la condition aux limites $v'(0) = 0$, traduit dans les matrices A et B par :

$$
A(Ny+1,:) = 0 \quad A(Ny+1, Ny+1) = 1 \quad \text{et} \quad B(Ny+1,:) = 0 \quad , \tag{4.13}
$$

par la condition $\mathbf{D}u'(0) = 1$ qui se traduit par :

$$
A_d(Ny+1,:) = 0 \quad A_d(Ny+1, 1:Ny) = \mathbf{D}(1,:) \quad \text{et} \quad B_d(Ny+1,:) = 1 \tag{4.14}
$$

Les nouvelles matrices seront notées A_d et B_d.
La condition $v'(0) = 0$ devient alors un critère de convergence pour la méthode de tir.

Le problème au valeur propre était :

$$A \cdot q = \alpha \cdot B \cdot q \Rightarrow (A - \alpha \cdot B) \cdot q = 0 \tag{4.15}$$

Avec les nouvelles matrices A_d et B_d ce problème peut se mettre sous la forme :

$$(A_d - \alpha \cdot B_d) \cdot q = b \tag{4.16}$$

où b est un vecteur rempli de zéro excepté à la ligne $Ny + 1$ où $b = 1$. Cette valeur correspond à la condition $\mathbf{D}u'(0) = 1$ que nous imposons.
Le système (4.16) peut s'inverser et se mettre sous la forme :

$$q = (A_d - \alpha \cdot B_d)^{-1} \cdot b \tag{4.17}$$

α va varier, selon un algorithme de Newton-Raphson, jusqu'à ce que la condition $v'(0) = q(Ny + 1) = 0$ soit vérifiée. La valeur de α qui vérifiera cette condition sera donc le mode propre des équations de stabilité linéaire locale pour le couple $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ en théorie spatiale.

Détaillons maintenant la méthode de tir. Pour converger vers la valeur appropriée de α un premier calcul est effectué avec une valeur initiale choisie par l'utilisateur. Ce premier calcul va nous permettre d'obtenir un première valeur $v_\alpha(0)$. Un second calcul est effectué avec la valeur $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ ce qui nous donne une deuxième valeur $v_{\alpha+\Delta\alpha}(0)$. Le choix de $\Delta\alpha \in \mathbb{R}$ est laissé à l'utilisateur.
Ainsi en initialisant le calcul avec une valeur arbitraire α_0, la valeur suivante α_1 est donnée par :

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\Delta\alpha \cdot v_\alpha(0)}{v_{\alpha+\Delta\alpha}(0) - v_\alpha(0)} \tag{4.18}$$

Ainsi, pour la k-ème itération :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\Delta\alpha \cdot v_\alpha^k(0)}{v_{\alpha+\Delta\alpha}^k(0) - v_\alpha^k(0)} \tag{4.19}$$

Le calcul s'arrête lorsque que $\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{\alpha_k} \leqslant \varepsilon$ où ε est l'erreur de convergence choisie par l'utilisateur (ici $\varepsilon = 10^{-5}$). La condition $v'(0) = 0$ est alors vérifiée. Pour que cette méthode soit efficace il faut que la valeur arbitraire initiale α_0 ne soit pas très éloignée de la valeur convergée finale.

4.2.1.2. Méthode de tir en théorie pseudo-temporelle

Nous venons de voir la mise en place de la méthode de tir en théorie spatiale ainsi que les différents coefficients des matrices A et B pour cette théorie. Nous pouvons remarquer que par le choix du vecteur perturbation q, les matrices A et B pouvaient être de grande taille (nous avons généralement $Ny = 100$ ce qui donne des matrices de dimensions 900 x 900). Ceci peut être "handicapant" d'un point de vue temps de calcul et a fortiori pour la détermination de diagrammes de stabilité.
Pour contourner cette difficulté, le problème aux valeurs propres peut être réécrit sous une forme pseudo-temporelle où ce n'est plus le nombre d'onde longitudinal α qui est factorisé mais la pulsation ω :

$$A \cdot q = \omega \cdot B \cdot q \tag{4.20}$$

où q est le vecteur perturbation. Pour cette formulation le vecteur propre q est défini par :

$$q = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta \\ \Pi \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Cette forme est appelée pseudo-temporelle puisque la forme de la factorisation est identique à celle de la théorie temporelle mais ici le nombre d'onde longitudinal α est toujours complexe et la pulsation ω est réelle (contrairement à la théorie temporelle). Nous pouvons directement remarquer que le vecteur q ne contient plus que 5 éléments contrairement à la théorie spatiale où il en comptait 9. Les matrices A et B sont donc des matrices de dimension $(5Ny, 5Ny)$.
Les termes non-nuls de ces matrices sont :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta \\ \Pi \end{pmatrix} = \omega \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & B_{14} & B_{15} \\ B_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & B_{32} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & B_{43} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & B_{54} & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta \\ \Pi \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Les termes A_{ij} et B_{ij} sont des matrices $Ny \times Ny$.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= i\alpha\rho \\
A_{12} &= \rho\mathbf{D} + \mathbf{D}\rho \\
A_{13} &= i\beta\rho \\
A_{14} &= -i\frac{\rho}{T}(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W}) \\
A_{15} &= i\rho(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= i\rho(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W}) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\overline{\mu}\alpha^2 + \overline{\mu}(\mathbf{D}^2 - \beta^2) + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right) \\
A_{22} &= \rho\mathbf{D}\overline{U} - \frac{1}{\mathrm{Re}}i\alpha\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right) \\
A_{23} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{3}\alpha\beta\overline{\mu} \\
A_{24} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{U} + \mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{U}\right) \\
A_{25} &= i\alpha/\gamma {M_\mathrm{e}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}i\alpha\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} - \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right) \\
A_{32} &= i\rho(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W}) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\overline{\mu}\mathbf{D}^2 - \overline{\mu}(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{4}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right) \\
A_{33} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}i\beta\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} - \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right) \\
A_{34} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}(i\alpha\mathbf{D}\overline{U} + i\beta\mathbf{D}\overline{W}) \\
A_{35} &= \mathbf{D}/\gamma {M_\mathrm{e}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{41} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{3}\alpha\beta\overline{\mu} \\
A_{42} &= \rho\mathbf{D}\overline{W} - \frac{1}{\mathrm{Re}}i\beta\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right) \\
A_{43} &= i\rho(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W}) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\overline{\mu}\beta^2 + \overline{\mu}(\mathbf{D}^2 - \alpha^2) + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right) \\
A_{44} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{W} + \mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{W}\right) \\
A_{45} &= i\beta/\gamma {M_\mathrm{e}}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{51} &= i\alpha(\gamma-1) - 2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D} \\
A_{52} &= \rho\mathbf{D}T + (\gamma-1)\mathbf{D} - 2i\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}(\alpha\mathbf{D}\overline{U} + \beta\mathbf{D}\overline{W}) \\
A_{53} &= i\beta(\gamma-1) - 2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D} \\
A_{54} &= i\rho(\alpha\overline{U} + \beta\overline{W}) - \frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}}\left((\mathbf{D}^2 - \alpha^2 - \beta^2) + \frac{1}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}^2T + \frac{2}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\overline{\kappa}}{dT^2}(\mathbf{D}T)^2\right) \\
&\quad - \gamma(\gamma-1)\frac{{M_\mathrm{e}}^2}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}((\mathbf{D}\overline{U})^2 + (\mathbf{D}\overline{W})^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{14} &= -i\frac{\rho}{T} \\
B_{15} &= i\rho \\
B_{21} &= i\rho \\
B_{32} &= i\rho \\
B_{43} &= i\rho \\
B_{54} &= i\rho
\end{aligned}
$$

Comme en théorie spatiale, l'hypothèse de nombre de Prandtl constant nous permet de remplacer les termes en $\frac{1}{\overline{\kappa}}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}$ par $\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}$ dans l'expression de la matrice A_{54}. Comme précédemment, nous pouvons effectuer une transformation sur $\beta = \alpha\tan(\psi_\mathrm{k})$ afin de tenir compte de la direction de propagation des perturbations ψ_k. Cependant cette transformation ne conduit pas à une modification des coefficients des matrices.
Les conditions limites et leurs implémentations restent inchangées par rapport à la théorie spatiale.

Dans ce cadre pseudo-temporel, nous utiliserons toujours la méthode de tir détaillée dans la partie précédente. Nous changeons donc la condition limite $v'(0) = 0$ par $\mathbf{D}u'(0) = 1$. Ceci est effectué en modifiant la Ny-ème ligne des matrices A et B. Cela nous conduit à la création de deux nouvelles matrices notées A_d et B_d.
Le problème aux valeurs propres se met sous la forme :

$$(A_d - \omega \cdot B_d) \cdot q = b \Rightarrow q = (A_d - \omega \cdot B_d)^{-1} \cdot b \tag{4.23}$$

où b est un vecteur rempli de zéro excepté à la ligne $Ny+1$ où $b = 1$. Cette valeur correspond à la condition $\mathbf{D}u'(0) = 1$ que nous imposons.
Les matrices A_d et B_d dépendent toutes les deux du nombre d'onde longitudinal α. Nous allons *tirer* sur la valeur de α jusqu'à que la condition $v'(0) = q(Ny+1) = 0$ soit vérifiée. La valeur de α vérifiant cette condition sera le mode propre des équations de stabilité linéaire locale pour le couple $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ considéré. Cela implique donc que ω soit constant lors de l'application de la méthode de tir.
Avec cette méthode nous obtenons le nombre d'onde longitudinal avec une formulation temporelle du problème aux valeurs propres à condition que les matrices A_d et B_d soient mis à jour à chaque itération.

4.2.1.3. Bilan des deux formulations

Comme nous venons de le voir, le problème aux valeurs propres peut être traité de différentes formes selon le type de stabilité que nous souhaitons (théorie spatiale ou pseudo-temporelle).
La théorie spatiale nous permet naturellement d'obtenir le nombre d'onde longitudinal α. En utilisant une méthode de tir, nous pouvons déterminer α pour un couple $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ fixé. La répétition de cette méthode pour différents couples $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ nous permet d'obtenir un diagramme

de stabilité. Cependant nous avons remarqué que, de par l'expression du vecteur perturbation q, les matrices manipulées peuvent être de taille importante ((900 x 900) par exemple) ce qui peut être handicapant d'un point de vue temps de calcul. C'est pourquoi une autre formulation du problème aux valeurs propres a été proposée.
En formulation pseudo-temporelle, nous avons vu, lors de la mise sous forme matricielle, que le vecteur perturbation q considéré ne contenait plus que 5 éléments ce qui par conséquent nous permet de réduire la taille des matrices manipulées. Nous passons de matrices de dimensions 900×900 en formulation spatiale à des matrices de dimension 500×500 en formulation pseudo-temporelle (nous considérons $Ny = 100$). C'est là tout l'avantage de cette formulation. L'importante réduction des dimensions des matrices nous permet d'espérer un important gain en terme de temps de calcul. C'est pourquoi nous utilisons cette formulation pour appliquer la méthode de tir visant à étudier la stabilité spatiale. En effet, même si nous nous sommes placés dans une formulation pseudo-temporelle, nous *tirons* sur la valeur du nombre d'onde complexe α en gardant $\omega \in \mathbb{R}$.

L'hypothèse d'une importante réduction du temps de calcul nécessaire à la convergence de la méthode de tir en formulation pseudo-temporelle, nous pousse à choisir cette dernière pour la détermination des diagrammes de stabilité. Lors de nos premiers calculs de stabilité nous vérifierons bien que nous obtenons la même valeur de α entre les deux formulations pour un couple $(\omega, \mathrm{Re}_{\delta_1})$ fixé. Les calculs de stabilité ont été réalisés à l'aide d'un script Matlab déjà disponible à l'ONERA. Cependant la détermination des coefficients des différentes matrices a été réalisée durant la thèse.

4.2.2. Validation des diagrammes de stabilité sur paroi athermane

Le but de cette validation est double. Elle permet d'une part de vérifier les coefficients des matrices A et B en comparant les résultats à des résultats de référence, et d'autre part de vérifier l'égalité des résultats entre la méthode de tir avec une formulation spatiale ou une formulation pseudo-temporelle. Nous commencerons cette validation par ce dernier point.

4.2.2.1. Validation de la méthode de tir avec formulation pseudo-temporelle

Nous allons vérifier que les formulations pseudo-temporelle et spatiale du problème aux valeurs propres sont bien identiques.

Pour la comparaison des deux formulations, nous regarderons les résultats donnés par la méthode de tir pour un nombre de Mach extérieur de $M_\mathrm{e} = 0{,}001; 0{,}9; 3$, pour un nombre de Reynolds Re_{δ_1} fixé et une pulsation adimensionnée ω variable mais réelle. Tous ces calculs seront effectués sur paroi athermane ($T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1$) et sur plaque plane ($\beta_\mathrm{H} = 0$). L'écoulement moyen utilisé est solution des équations de similitude de Levy-Lees.

Commençons par $M_\mathrm{e} = 0{,}001$.

$\mathrm{Re}_{\delta_1} = 4000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}0250$	0,2−0,001i	0,10432 - 0,0023449i	6	9,66s
$\omega = 0{,}0400$	0,2−0,001i	0,15241 - 0,010367i	5	9,71s
$\omega = 0{,}0750$	0,2−0,001i	0,25636 - 0,0048356i	6	9,73s

TABLE 4.1. – Valeur propre en formulation spatiale pour $M_\mathrm{e} = 0{,}001$

$\mathrm{Re}_{\delta_1} = 4000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}0250$	0,2 - 0,001i	0,10432 - 0,0023449i	6	6,51s
$\omega = 0{,}0400$	0,2 - 0,001i	0,15241 - 0,010367i	5	6,48s
$\omega = 0{,}0750$	0,2 - 0,001i	0,25636 - 0,0048356i	6	7,09s

TABLE 4.2. – Valeur propre en formulation pseudo-temporelle pour $M_\mathrm{e} = 0{,}001$

Passons maintenant à $M_e = 0{,}9$.

$Re_{\delta_1} = 4000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}0250$	0,2 - 0,001i	0,088912 - 0,002199i	8	12,2s
$\omega = 0{,}0400$	0,2 - 0,001i	0,13016 - 0,0079058i	7	10,75s
$\omega = 0{,}0750$	0,2 - 0,001i	0,21798 - 0,0032517i	5	9,05s

TABLE 4.3. – Valeur propre en formulation spatiale pour $M_e = 0{,}9$

$Re_{\delta_1} = 4000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}0250$	0,2 - 0,001i	0,088912 - 0,002199i	8	7,08s
$\omega = 0{,}0400$	0,2 - 0,001i	0,13016 - 0,0079058i	7	6,71s
$\omega = 0{,}0750$	0,2 - 0,001i	0,21798 - 0,0032519i	5	7,23s

TABLE 4.4. – Valeur propre en formulation pseudo-temporelle pour $M_e = 0{,}9$

Enfin étudions le cas $M_e = 3$.

$Re_{\delta_1} = 10000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}100$	0,146 - 0,001i	0,1463 - 0,00046723i	5	8,99s
$\omega = 0{,}150$	0,215 - 0,001i	0,2149 - 0,00098896i	3	7,26s
$\omega = 0{,}175$	0,25 - 0,001i	0,24814 - 0,0011659i	5	9,05s

TABLE 4.5. – Valeur propre en formulation spatiale pour $M_e = 3$ et $\psi_k = 0$

$Re_{\delta_1} = 10000$	α_{init}	α	Nombre d'itérations	Temps CPU
$\omega = 0{,}100$	0,146 - 0,001i	0,14629 - 0,00046631i	5	6,2s
$\omega = 0{,}150$	0,215 - 0,001i	0,21488 - 0,00098743i	3	6,28s
$\omega = 0{,}175$	0,25 - 0,001i	0,24811 - 0,0011643i	5	6,81s

TABLE 4.6. – Valeur propre en formulation pseudo-temporelle pour $M_e = 3$ et $\psi_k = 0$

À la lecture des tableaux précédents (tableaux 4.1-4.6), plusieurs remarques peuvent être faites. Premièrement, les valeurs propres α déterminées par les deux formulations sont identiques à 10^{-6} près. Lorsque le nombre de Mach vaut 3, la différence entre les deux valeurs de α est inférieure à 10^{-5} (tableaux 4.5 et 4.6). L'équivalence entre l'application de la méthode de tir pour la formulation spatiale et temporelle est vérifiée. De plus, nous pouvons remarquer que même si le nombre d'itérations nécessaire à la convergence reste identique dans les deux cas, la formulation pseudo-temporelle permet un gain de temps CPU non négligeable (environ 30% de gain). Cela nous conforte dans le choix de la formulation pseudo-temporelle pour la construction de diagrammes de stabilité. Un travail informatique permettrait certainement de diminuer le temps de calcul de chaque valeur propre. Cependant cette optimisation ne fait pas partie du cadre de la thèse et le temps de calcul s'est avéré suffisamment rapide pour notre besoin. Néanmoins, cette comparaison nous permet juste de montrer que les deux formulations de la méthode de tir sont équivalentes. Elle ne justifie en rien l'exactitude des coefficients des matrices A_d et B_d et des résultats.
Il est important de remarquer que la méthode de tir est très sensible à la valeur initiale α_{init} surtout lorsque le nombre de Mach devient important ($M_e > 1$). Alors que dans le cas où $M_e < 1$, nous pouvions garder une même valeur de α_{init}, il nous est impossible de faire la même chose pour le cas $M_e = 3$. Lorsque le nombre de Mach augmente, le bassin de convergence de la méthode de tir diminue. Pour des nombres de Mach importants, la valeur initiale α_{init} devra être très proche de la valeur finale α. C'est un des inconvénients de cette méthode. Il faudra donc porter un soin particulier à l'initialisation de la méthode de tir lors de la construction de diagrammes de stabilité au risque d'obtenir des valeurs complètement fausses.

4.2.2.2. Validation de la méthode de tir avec des valeurs de référence

Nous venons de valider l'utilisation de la méthode de tir avec une formulation pseudo-temporelle par comparaison à la formulation spatiale. Nous n'utiliserons donc que la formulation pseudo-temporelle dans la suite de ce manuscrit. Il faut maintenant valider cette méthode avec des résultats de référence. Ces résultats seront ceux de Vignau & Arnal [37] et d'Arnal [68]. Les résultats de référence sont obtenus à l'aide d'un changement de variable qui permet de transformer les équations de stabilité linéaire en un système de huit équations du premier ordre. Cette méthode est détaillée dans l'article de Mack [1].

Commençons par valider nos résultats sur quelques points. La valeur α_{ref} est celle donnée par Vigneau & Arnal [37] et $\Delta\alpha_i$ correspond à l'erreur relative sur $\alpha_i = \mathrm{Im}(\alpha)$ définie par :

$$\Delta\alpha_i = \frac{\mid \alpha_{i_{ref}} - \alpha_i \mid}{\alpha_{i_{ref}}} \tag{4.24}$$

$\mathrm{Re}_{\delta_1} = 4000$	α_{ref}	α	$\Delta\alpha_i$
$\omega = 0{,}0250$	0,10486 - 0,002783i	0,10432 - 0,0023449i	15%
$\omega = 0{,}0400$	0,15331 - 0,01070i	0,15241 - 0,010367i	3%
$\omega = 0{,}0750$	0,25737 - 0,003932i	0,25636 - 0,0048356i	23%

TABLE 4.7. – Comparaison des résultats entre la méthode de tir et [37] pour $M_\mathrm{e} = 0{,}001$

$\mathrm{Re}_{\delta_1} = 4000$	α_{ref}	α	$\Delta\alpha_i$
$\omega = 0{,}0250$	0,0888 - 0,001960	0,088912 - 0,002199i	12%
$\omega = 0{,}0400$	0,1299 - 0,007784	0,13016 - 0,0079058i	1,5%
$\omega = 0{,}0750$	0,2179 - 0,003834	0,21798 - 0,0032519i	15%

TABLE 4.8. – Comparaison des résultats entre la méthode de tir et [37] pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$

$\mathrm{Re}_{\delta_1} = 10000$	α_{ref}	α	$\Delta\alpha_i$
$\omega = 0{,}100$	0,1468 - 0,0003929	0,14629 - 0,00046631i	18,6%
$\omega = 0{,}150$	0,2155 - 0,0008767	0,21488 - 0,00098743i	12,6%
$\omega = 0{,}175$	0,2488 - 0,001086	0,24811 - 0,0011643i	7,2%

TABLE 4.9. – Comparaison des résultats entre la méthode de tir et [37] pour $M_\mathrm{e} = 3$ et $\psi_\mathrm{k} = 0$

Au vu des valeurs de $\Delta\alpha_i$ il nous paraît plus pertinent de comparer directement les diagrammes de stabilité donnés par notre méthode et ceux donnés par [37]. En effet, nous pouvons remarquer que l'erreur relative peut varier de façon importante entre différents points pour un nombre de Mach fixé. Les valeurs importantes de $\Delta\alpha_i$ viennent du fait que les valeurs de α_i sont petites.

Pour un nombre de Mach extérieur de 0,001 et de 0,9 , nous obtenons les diagrammes représentés sur les figures 4.4 et 4.5.

Afin de ne pas surcharger ce manuscrit de diagrammes, nous avons joint en annexe d'autres cas de validation pour différents nombres de Mach, des directions de propagation non nulles et des rapports $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ différents de l'unité ($T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} < 1$) car les travaux de Vignau & Arnal [37] n'ont porté que sur des parois froides. Comme nous pouvons le voir sur les figures 4.4 et 4.5 ainsi que sur les figures disponibles en annexe, nos résultats sont en très bon accord avec les résultats de référence même si des écarts sont observables pour le cas $M_\mathrm{e} = 0{,}001$. Ce décalage disparaît dès lors que nous utilisons une formulation incompressible pour les matrices A et B (figure 4.6).

4.2.3. Diagrammes de stabilité sur paroi chaude

La méthodologie de construction des diagrammes de stabilité ayant été validée pour des parois athermanes, les diagrammes de stabilité pour des écoulements de couche limite sur paroi chaude

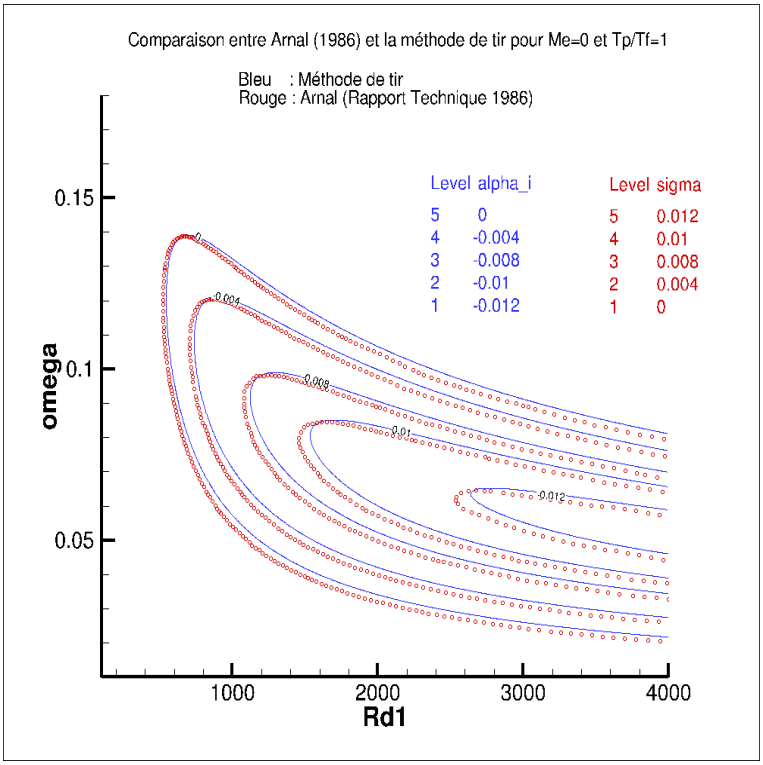


FIGURE 4.4. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}001$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal [68] pour différents taux d'amplification $\sigma = -\alpha_i$.

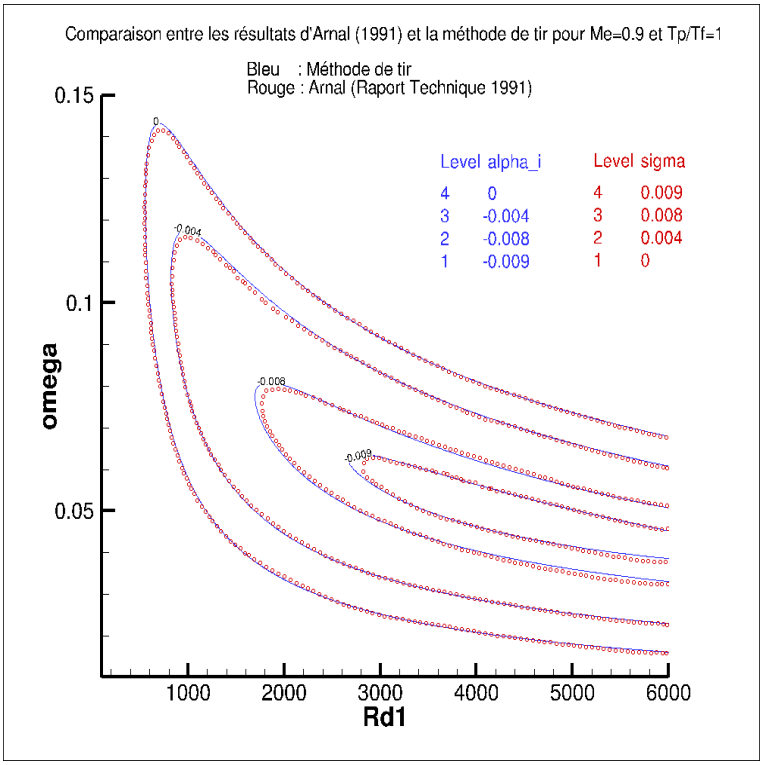


FIGURE 4.5. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}9$ entre la méthode de tir et les résultats de Vignau et Arnal [37] pour différents taux d'amplification $\sigma = -\alpha_i$.

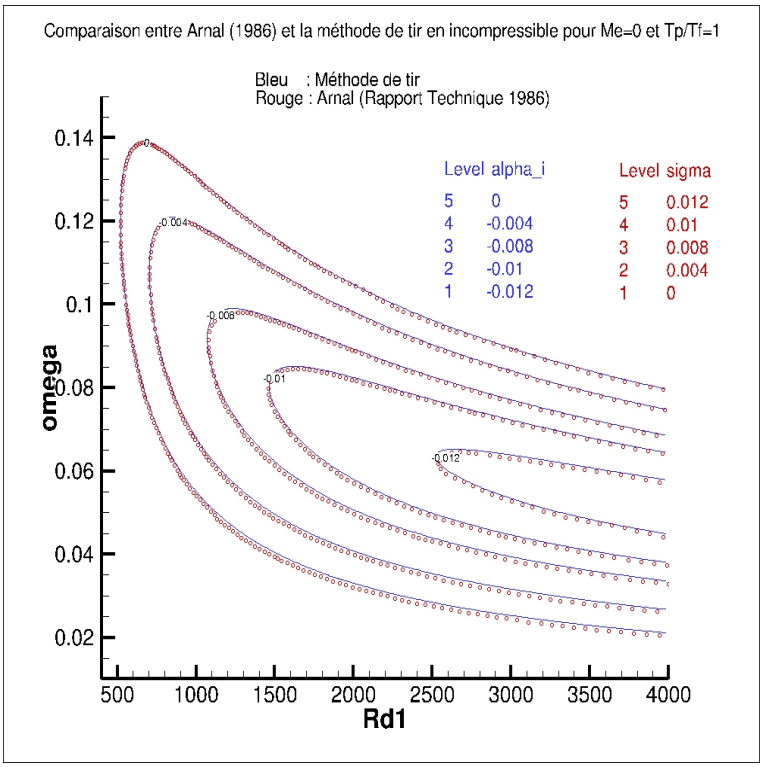


FIGURE 4.6. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}001$ entre la méthode de tir avec une formulation incompressible et les résultats d'Arnal [68] avec $\sigma = -\alpha_i$

peuvent être construits. La figure 4.7 montre un diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$. Comme attendu, d'après l'étude bibliographique, le diagramme de stabilité est caractéristique d'une instabilité visqueuse-inflexionnelle.

Il est intéressant de voir l'influence de la température de paroi sur la stabilité. Pour cela, des calculs de stabilité ont été réalisés sur des profils avec un nombre de Mach extérieur $M_e = 0{,}3$, un gradient de pression $\beta_H = 0$ et trois rapports de température $T_p/T_f = 1$, 1,2, 1,5.

Lorsque que la température de paroi augmente, la plage du domaine instable augmente. Pour un nombre de Reynolds $Re_{\delta_1} = 6000$ la valeur maximale de la pulsation ω passe de 0,7 à 0,13 pour un $T_p/T_f = 1{,}2$ (figures 4.8a et4.8b). Cette remarque est valable pour un $T_p/T_f = 1{,}5$ (figure 4.9). De plus, il apparait clairement dans ces trois figures que plus la température de paroi augmente et plus les taux d'amplification σ^* (ici $\sigma^* = -\alpha_i$) augmentent. Nous passons d'une valeur maximale proche de $\sigma^* = 0.016$ sur une paroi athermane à une valeur maximale de $\sigma^* = 0.03$ pour un rapport de température égal à 1,5. Autrement dit, plus on augmente la température de paroi et plus les instabilités sont amplifiées. La transition se produit plus tôt (plus proche du bord d'attaque) lorsque la paroi est chaude que sur une paroi athermane. Ce résultat était attendu mais la validation de ce constat permet de confronter les résultats obtenus.

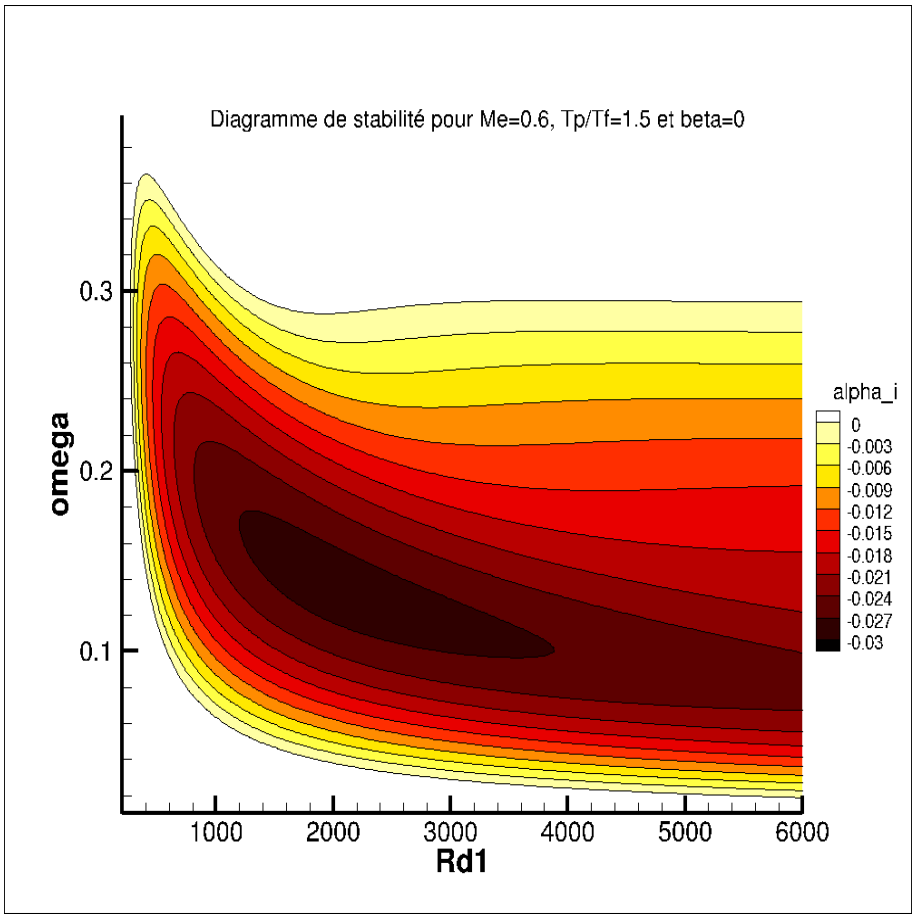
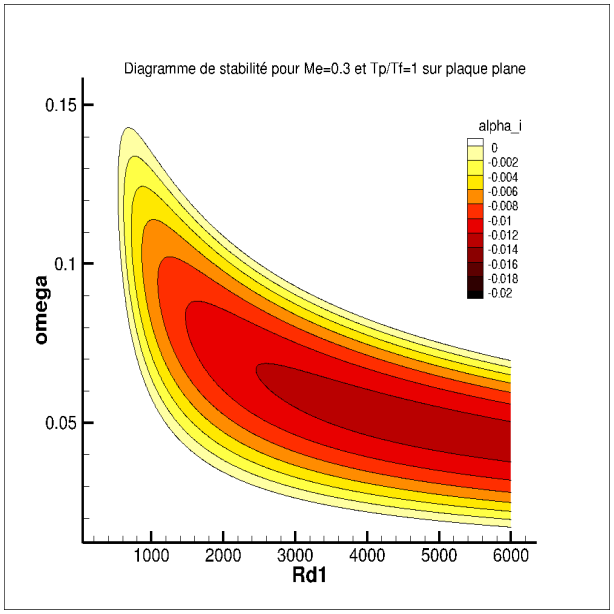
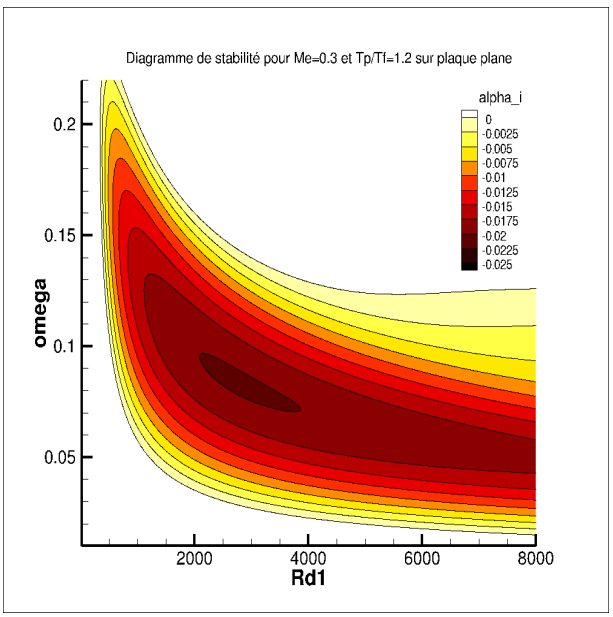


FIGURE 4.7. – Diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$



(a) Diagramme de stabilité pour $T_p/T_f = 1$



(b) [Diagramme de stabilité pour $T_p/T_f = 1{,}2$

FIGURE 4.8. – Diagrammes de stabilité pour $M_e = 0{,}3$, $\beta_H = 0$ et un rapport de température $T_p/T_f = 1$ et $T_p/T_f = 1{,}2$

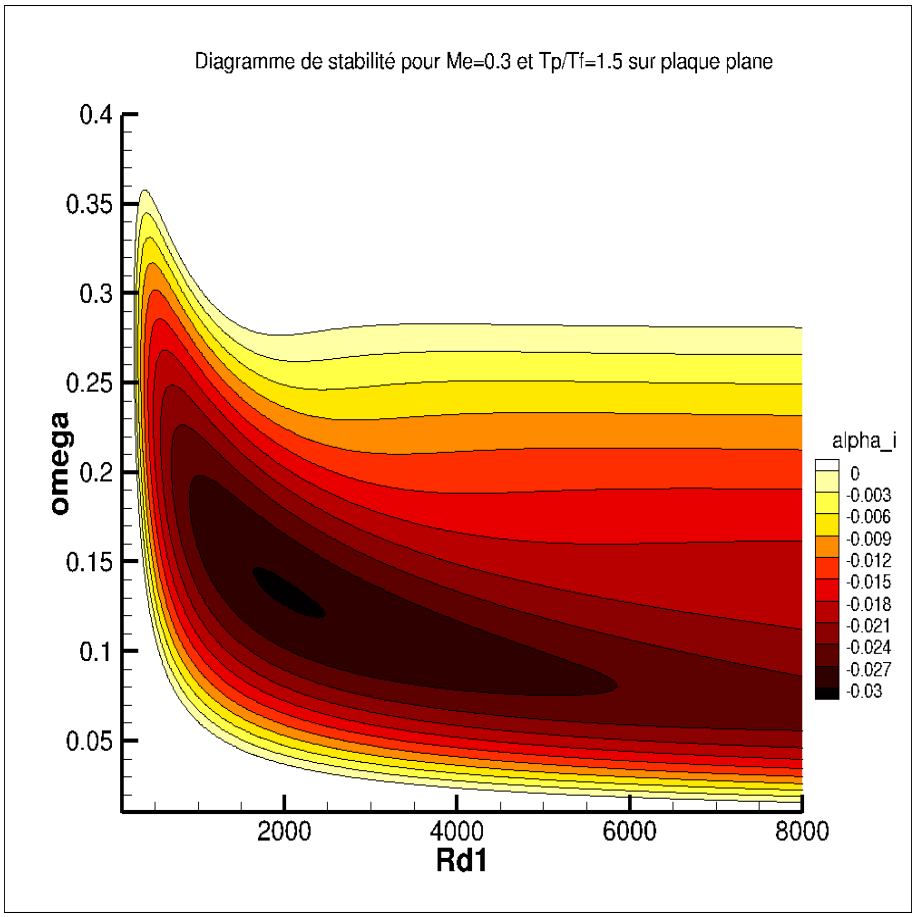


FIGURE 4.9. – Diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}3$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$

Chapitre 5

Modélisation de l'évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales

Le chapitre précédent a décrit la méthode de résolution du problème aux valeurs propres et la construction des diagrammes de stabilité pour des écoulements de couche limite sur parois chaudes. L'objectif de ce chapitre est de modéliser les taux d'amplification des instabilités longitudinales. Pour cela, une vérification de l'évolution parabolique des taux d'amplification des instabilités est effectuée. Ensuite, la méthode de construction de la base de données est détaillée suivant la nature des instabilités. Pour chaque fréquence réduite F, 4 demi-paraboles sont construites. Ces demi-paraboles sont définies par des paramètres $(R_0, R_{1\mathrm{i}}, R_{1\mathrm{v}}, R_{\mathrm{Mv}}, \dots)$. Le calcul de $\sigma^*(\mathrm{Re}_{\delta_1}, \mathrm{F})$ repose sur une détermination simple des 4 demi-paraboles correspondant à une fréquence réduite F. Il faut donc modéliser les fonctions $R_0(\mathrm{F}), R_{\mathrm{Mv}}(\mathrm{F})$, etc ....

Sommaire

5.1. Évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales sur paroi chaude 74
5.2. Construction de la nouvelle base de données 75
5.2.1. Instabilités visqueuses 75
5.2.2. Instabilités visqueuses-inflexionnelles 79
5.2.3. Reconstruction des paraboles 82

5.1. Évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales sur paroi chaude

La méthode des paraboles originale construite sur paroi adiabatique repose sur le fait que selon une iso-F, le taux d'amplification σ^* peut être modélisé à l'aide de demi-paraboles. Une vérification du caractère parabolique de σ^* le long d'une iso-fréquence réduite F pour des parois chaudes doit être effectuée.

Vérification du caractère parabolique de σ^*

Le diagramme de stabilité représenté figure 5.1 est le diagramme de stabilité pour un écoulement avec $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ obtenu suite aux travaux présentés dans le chapitre précédent.

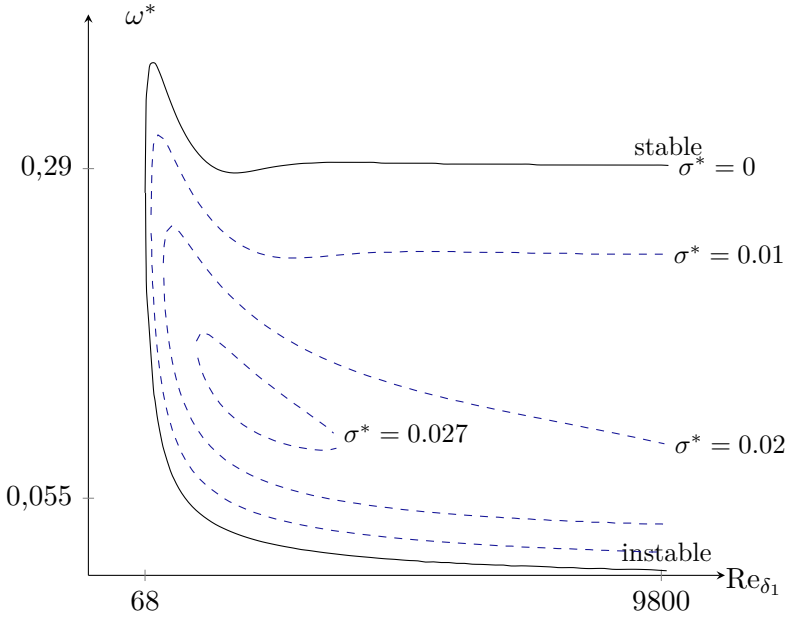


FIGURE 5.1. – Diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$

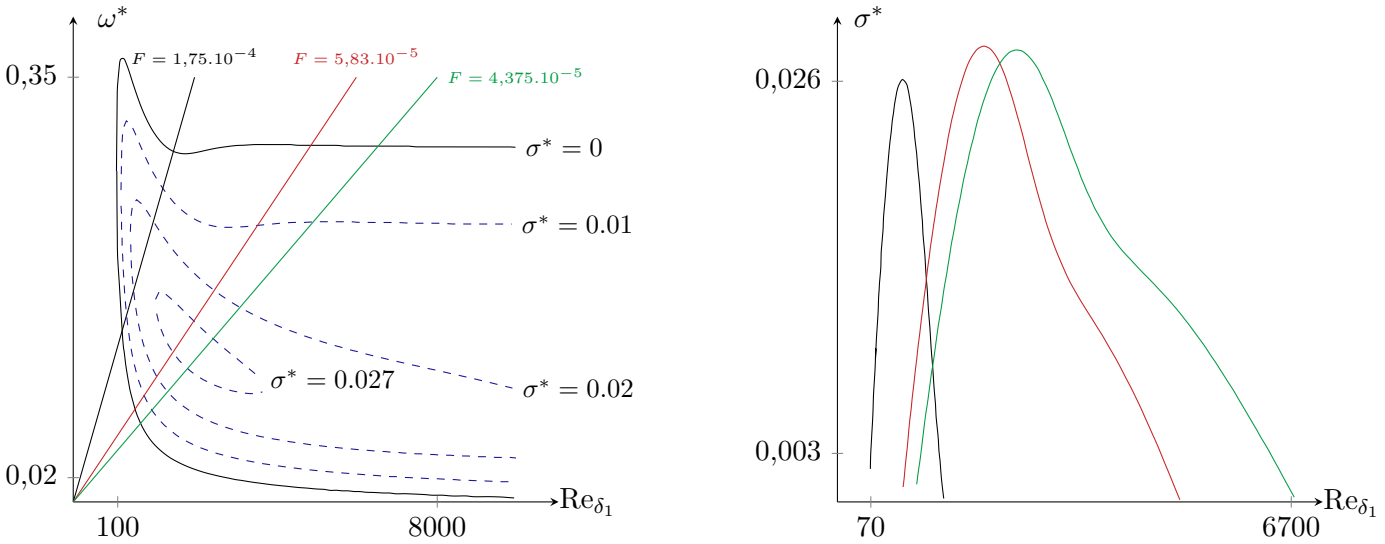
Ce diagramme de stabilité est comme attendu caractéristique d'une instabilité visqueuse-inflexionnelle puisque lorsque Re_{δ_1} tend vers l'infini la branche inférieure tend vers 0 et la branche supérieure reste ouverte. Il reste à regarder l'évolution du taux d'amplification σ^* selon Re_{δ_1} en traçant des iso-fréquences réduites F (Figure 5.2a).

D'après la figure 5.2b, le taux d'amplification σ^* peut être modélisé par des arcs de paraboles. La figure 5.3 permet de visualiser les quatre demi-paraboles utilisées pour reconstruire l'évolution de σ^*. Deux demi-paraboles correspondent à l'instabilité visqueuse et les deux autres à l'instabilité inflexionnelle. Le raccordement entre les deux jeux de demi-paraboles est un point délicat de la modélisation. C'est dans cette zone que les écarts entre la modélisation et la stabilité exacte seront les plus important.

Il s'avère que la reconstruction à l'aide de demi-paraboles est valide au moins jusqu'à $T_p/T_f = 2{,}7$. Du moment où il y a existence d'instabilités visqueuses-inflexionnelles, la modélisation par demi-paraboles est valide.

En pratique, les diagrammes de stabilité sont tracés en fonction de la fréquence réduite F qui est reliée à la pulsation ω^* par :

$$\mathrm{F} = \frac{\omega^*}{\mathrm{Re}_{\delta_1}}$$



(a) Diagramme de stabilité avec des iso-fréquences réduites (b) Évolution du taux d'amplification σ^* pour trois fréquences réduites F

FIGURE 5.2. – Diagramme de stabilité et évolution de $\sigma^* = f(\mathrm{Re}_{\delta_1})$

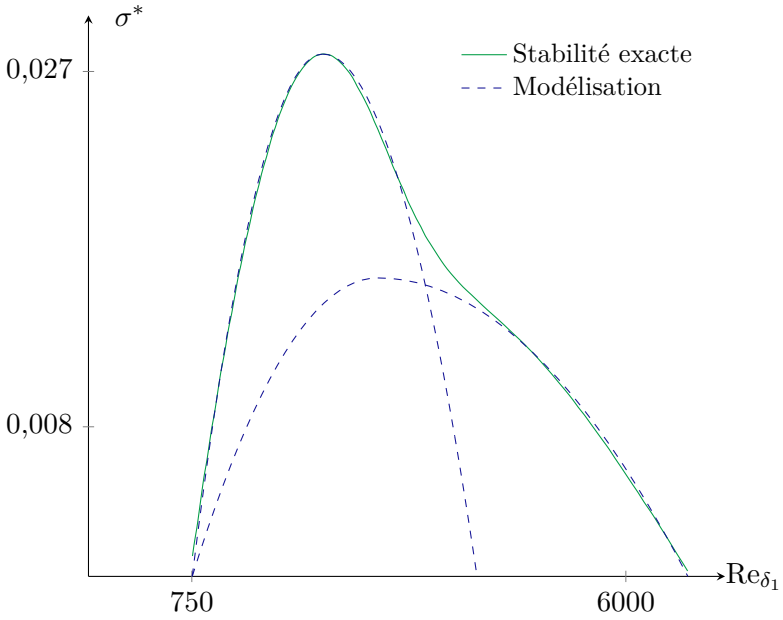


FIGURE 5.3. – Modélisation à l'aide de demi-paraboles de $\sigma^* = f(\mathrm{Re}_{\delta_1})$ pour F = $4{,}38.10^{-5}$

5.2. Construction de la nouvelle base de données

Nous allons détailler la construction de la base de données utilisée par la méthode des paraboles pour les instabilités visqueuses et visqueuses-inflexionnelles comme expliqué au chapitre 3 de l'état de l'art. Les paraboles sont définies à partir des paramètres $R_{1\mathrm{v}}, R_0, R_{\mathrm{Mv}}, \ldots$. Ces paramètres sont calculés à partir de F et de coefficients comme $E_{1\mathrm{i}}, K_{1\mathrm{i}}, E_{\mathrm{Mv}}, K_{\mathrm{Mv}}, \ldots$. Le terme construction est synonyme dans ce cas de détermination des coefficients présents dans la future base de données.

5.2.1. Instabilités visqueuses

Dans son stage, Reynaud [69] a étendu la méthode des paraboles aux parois chaudes seulement sur plaque plane et jusqu'à un rapport de $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}} = 1{,}1$. Cette base de données est trop restrictive

pour des applications industrielles. Nous allons donc créer une nouvelle base de données permettant de prendre en compte des rapports de T_p/T_f plus importants et différents gradients de pression c'est-à-dire tels que $\beta_H \neq 0$.
De plus, Reynaud a voulu savoir si une autre formulation des paramètres du modèle des paraboles $(\sigma_{Mv}, R_{Mv}, R_{0v}, R_{1v})$ était possible. Il a donc regardé l'évolution de ces différents paramètres en fonction de la grandeur T_p/T_f. Un calcul avec gradient de pression positif a donné des résultats moins concluants puisque l'évolution "linéaire" des coefficients R_{1v} et R_{Mv} en fonction de T_p/T_f est perdue (Figure 5.4).
Nous choisirons donc de garder l'expression des coefficients en fonction de la fréquence réduite F.

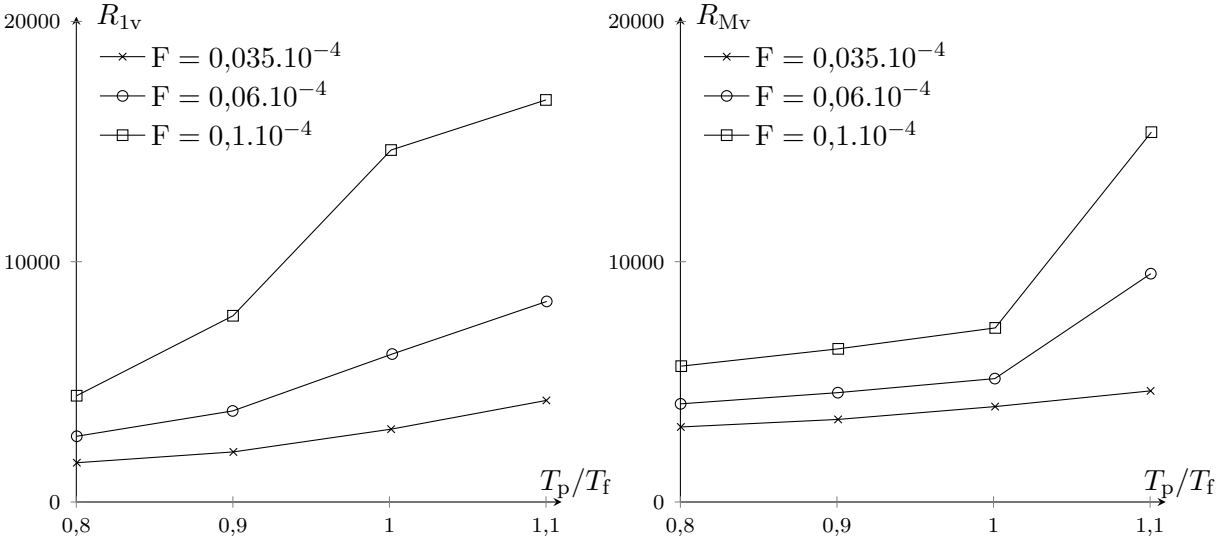


FIGURE 5.4. – Évolution de R_{1v} et R_{Mv} pour $M_e = 1{,}3$ et pour un gradient de pression positif d'après Reynaud [69]

Dans le cas visqueux, l'évolution du taux d'amplification en fonction de Re_{δ_1} peut être modélisée par deux-demi paraboles dont les équations sont rappelées ci-dessous :

$$\frac{\sigma^*{}_P}{\sigma_{Mv}} = 1 - \left[\frac{Re_{\delta_1} - R_{Mv}}{R_k - R_{Mv}}\right]^2 \qquad \text{avec} \qquad R_k = \begin{cases} R_{0v} & \text{si} \quad Re_{\delta_1} < R_M \\ R_{1v} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.1}$$

L'objectif ici est de déterminer les coefficients du modèle. Nous rappelons que l'évolution des paramètres du modèle en fonction de la fréquence réduite F est :

$$\sigma_{Mv} = A_{Mv}\left(1 - \frac{F}{F_{Mv}}\right) \tag{5.2}$$

$$R_{Mv} = K_{Mv}(10^5 F)^{-E_{Mv}} \tag{5.3}$$

$$R_{0v} = R_{Mv}\left[1 - A_{0v}\left(1 - \frac{F}{F_{0v}}\right)\right] \tag{5.4}$$

$$R_{1v} = R_{Mv}\left[1 - A_{1v}\left(1 - \frac{F}{F_{1v}}\right)\right] \tag{5.5}$$

Les équations (5.2), (5.4) et (5.5) correspondent à des droites et l'équation (5.3) à une droite dans un système logarithmique.
Pour déterminer la valeur des coefficients à tabuler, il faut dans un premier temps déterminer l'évolution de $\sigma_{Mv}, R_{Mv}, R_{0v}$ et R_{1v} en fonction de F puis dans un second temps, réaliser une régression linéaire. Les coefficients issus de la régression linéaire peuvent être liés aux coefficients de la méthode des paraboles comme nous le verrons dans la suite. La démarche utilisée pour la détermination des paramètres est tirée du rapport de stage de Reynaud [69].

Déterminons l'évolution des paramètres du modèle en fonction de F. Pour cela, pour chaque fréquence F instable l'évolution du taux d'amplification σ^* en fonction de Re_{δ_1} est tracée. Ensuite des interpolations polynomiales locales d'ordre 2 sont effectuées. Ces interpolations sont réalisées aux voisinages de $\sigma^* = 0$ et $\sigma^* = \sigma_{\mathrm{Mv}}$.
• Au voisinage de $\sigma^* = 0$, la détermination des zéros du polynôme permet de déterminer $R_{0\mathrm{v}}$ et $R_{1\mathrm{v}}$.
• Au voisinage de $\sigma^* = \sigma_{\mathrm{Mv}}$, la détermination de la valeur pour laquelle la dérivée du polynôme est nulle permet de connaître la valeur de R_{Mv}. À partir de cette valeur, il est possible de connaître σ_{Mv}.
Ce travail est à réaliser pour chaque fréquence instable contenue dans le diagramme de stabilité étudié.

Une fois ces 4 valeurs déterminées, il est possible de reconstruire l'évolution de σ^* à l'aide des deux demi-paraboles. Cette démarche va être illustrée sur le cas $M_{\mathrm{e}} = 0{,}3$ et $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}} = 1$. La figure 5.5 montre la comparaison entre l'amplification donnée par la stabilité exacte et le modèle des deux demi-paraboles pour $\mathrm{F} = 1{,}5.10^{-5}$.

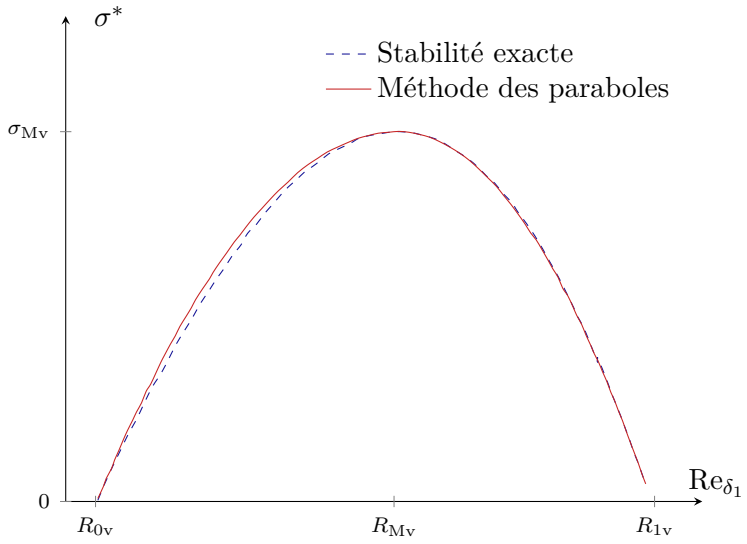
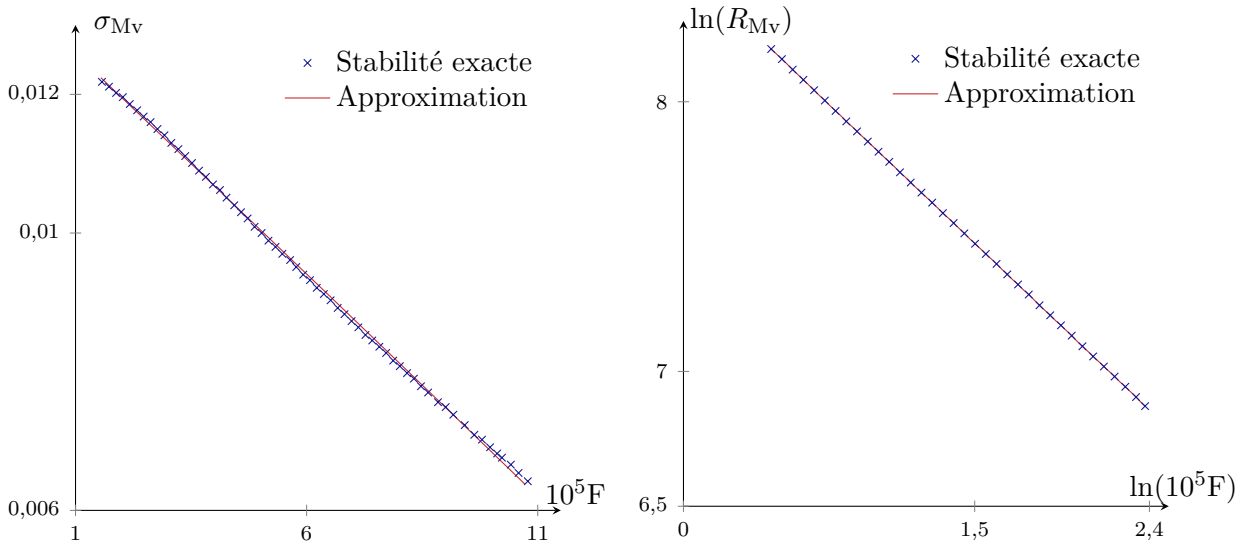


FIGURE 5.5. – Évolution de σ^* à partir d'un calcul de stabilité exacte et à partir de la modélisation de la méthode des paraboles en fonction de Re_{δ_1} pour $M_{\mathrm{e}} = 0{,}3$, $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}} = 1$ et $\mathrm{F} = 1{,}5.10^{-5}$

Lorsque que toutes les fréquences instables ont été traitées, il reste à réaliser une approximation linéaire pour déterminer les coefficients du modèle (Figure 5.6 et Figure 5.7). En effet, une droite est obtenue dans tous les cas avec la stabilité exacte. La régression linéaire pour le paramètre R_{Mv} s'effectue dans un repère logarithmique comme précisé plus haut.

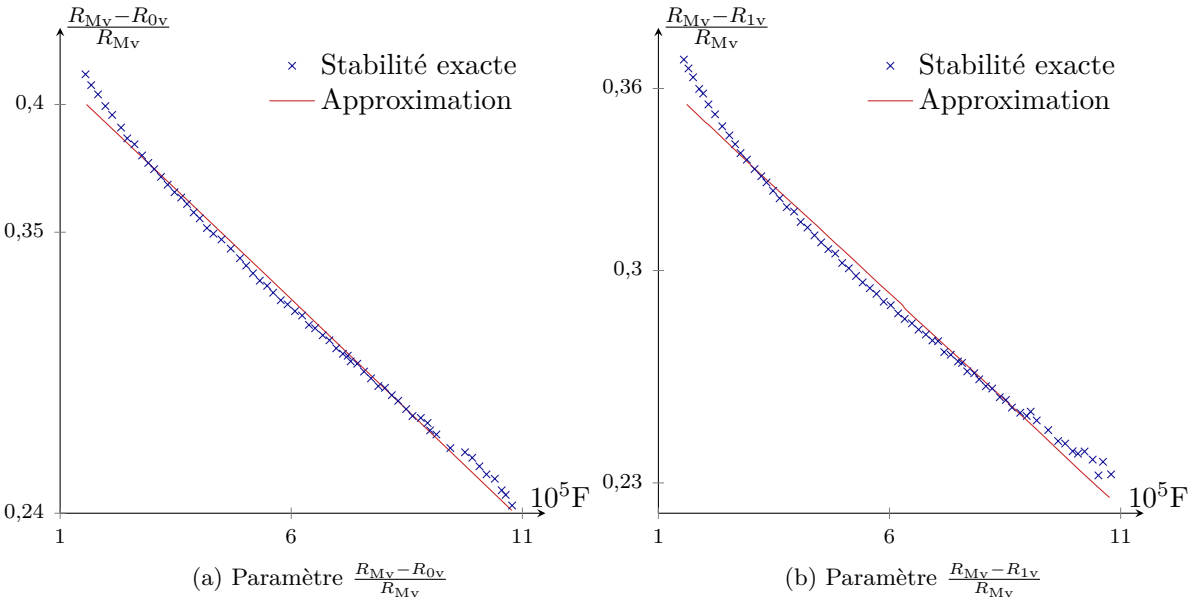
Une fois la régression linéaire réalisée, la détermination des différents coefficients est possible. Prenons comme exemple, le cas de la détermination des paramètres A_{Mv} et F_{Mv} comme définis dans l'équation (5.2).
La régression linéaire de l'évolution de σ_{Mv} en fonction de F nous donne une droite d'équation $y = 56{,}1115\mathrm{F} + 0{,}012\,917$ que nous noterons $y = a\mathrm{F} + b$ pour plus de simplicité. L'équation (5.2) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{\mathrm{Mv}} = A_{\mathrm{Mv}} - A_{\mathrm{Mv}}\frac{\mathrm{F}}{F_{\mathrm{Mv}}} \tag{5.6}$$



(a) Paramètre σ_{Mv} (b) Paramètre R_{Mv}

FIGURE 5.6. – Détermination des paramètres pour σ_{Mv} et R_{Mv}



(a) Paramètre $\frac{R_{Mv}-R_{0v}}{R_{Mv}}$ (b) Paramètre $\frac{R_{Mv}-R_{1v}}{R_{Mv}}$

FIGURE 5.7. – Détermination des paramètres pour R_{0v} et R_{1v}

Nous en déduisons directement :

$$A_{Mv}/F_{Mv} = -a \qquad \text{et} \qquad A_{Mv} = b \tag{5.7}$$

d'où

$$A_{Mv} = b \qquad \text{et} \qquad F_{Mv} = -\frac{b}{a} \tag{5.8}$$

Cette démarche est effectuée pour déterminer tous les coefficients du modèle. Ensuite, ils peuvent être stockés dans une base de données.
Pour des écoulements sur plaque plane à faible nombre de Mach (M < 1) et pour des chauffages de paroi faibles ($T_p/T_f \leqslant 1{,}1$), les instabilités présentent dans la couche limite sont considérées comme purement visqueuses.

5.2.2. Instabilités visqueuses-inflexionnelles

Un chauffage de la paroi modéré ($T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} > 1{,}1$) ou l'association d'un chauffage de paroi faible et d'un paramètre d'Hartree β_H négatif va créer un point d'inflexion sur le profil de vitesse de couche limite et par conséquent va faire naître une instabilité inflexionnelle. Cette instabilité ne contrôlant pas entièrement le phénomène de transition, nous nous retrouvons avec des instabilités dites visqueuses-inflexionnelles. L'évolution du taux d'amplification est dans ce cas modélisée par quatre demi-paraboles. La méthode des paraboles fournie l'évolution du taux d'amplification σ_v^* (pour les instabilités visqueuses) d'une part et du taux d'amplification σ_i^* (pour les instabilités inflexionnelles) d'autre part par deux jeux distincts de deux demi-paraboles comme détaillé dans le chapitre 3.
Pour rappel, σ_v^* et σ_i^* sont donnés par :

$$\frac{\sigma_\mathrm{v}^*}{\sigma_\mathrm{Mv}} = 1 - \left[\frac{\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_\mathrm{Mv}}{R_\mathrm{kv} - R_\mathrm{Mv}}\right]^2 \qquad \text{avec} \qquad R_\mathrm{kv} = \begin{cases} R_\mathrm{0v} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_{\delta_1} < R_\mathrm{Mv} \\ R_\mathrm{1v} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\frac{\sigma_\mathrm{i}^*}{\sigma\mathrm{Mi}} = 1 - \left[\frac{\mathrm{Re}_{\delta_1} - R_\mathrm{Mi}}{R_\mathrm{ki} - R_\mathrm{Mi}}\right]^2 \qquad \text{avec} \qquad R_\mathrm{ki} = \begin{cases} R_\mathrm{0i} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_{\delta_1} < R_\mathrm{Mi} \\ R_\mathrm{1i} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.10}$$

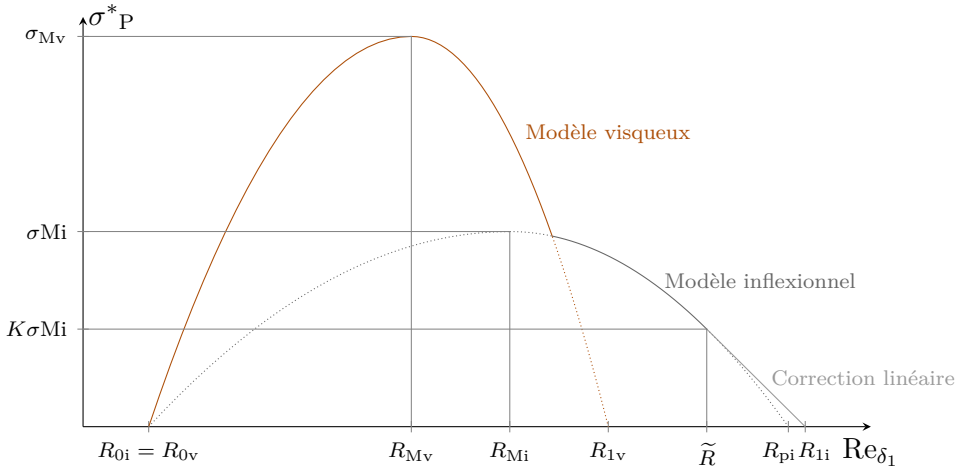


FIGURE 5.8. – Courbe iso-F approchée par quatre demi-paraboles pour les instabilités visqueuses-inflexionnelles

Pour la détermination de l'ensemble des paramètres, la méthode suivante est utilisée :

1. Les paramètres $R_\mathrm{0v}(= R_\mathrm{0i})$ et σ_Mv sont déterminés par une interpolation parabolique locale.
2. Le paramètre R_Mv est la valeur de Re_{δ_1} pour laquelle $\sigma^* = \sigma_\mathrm{Mv}$.
3. Le paramètre R_1i est déterminé par une interpolation linéaire locale au niveau de $\sigma^* = 0$.
4. La valeur de $\sigma\mathrm{Mi}$ est prise comme la valeur de σ^* au "creux" défini comme l'endroit où il y a un changement de pente dans la décroissance de $\sigma^*(\mathrm{Re}_{\delta_1})$. La position de ce "creux" est donnée par la valeur maximale de la dérivée seconde de $\sigma^* = f(\mathrm{Re}_{\delta_1})$.
5. On fait passer une parabole partant de σ_Mv et passant par le "creux". Ceci nous permet de déterminer R_1v.
6. La correction linéaire se raccorde à l'évolution parabolique en $\sigma^*\mathrm{P} = K\sigma\mathrm{Mi}$ en $\mathrm{Re}_{\delta_1} = \widetilde{R}$ avec $K = 0{,}5$ (valeur empirique). Connaissant $K\sigma\mathrm{Mi}$, nous pouvons trouver la valeur de $\widetilde{R}$.
7. Nous faisons passer une parabole par $K\sigma\mathrm{Mi}$ avec égalité des pentes en $\mathrm{Re}_{\delta_1} = \widetilde{R}$ et on détermine son zéro et son maximum. On trouve alors R_pi et R_Mi. Le paramètre R_pi correspondrait à R_1i en l'absence de correction linéaire (Figure 5.8).

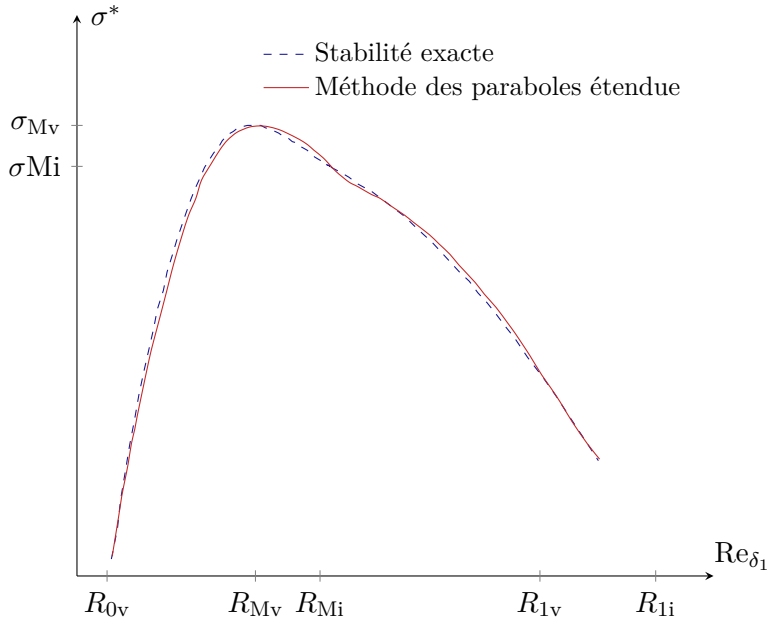


FIGURE 5.9. – Construction des arcs de paraboles en rouge pour $\mathrm{F} = 1{,}56.10^{-4}, M_{\mathrm{e}} = 0{,}3, T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}} = 2{,}7$ et $\beta_{\mathrm{H}} = 0$

Nous pouvons reconstruire les arcs de paraboles pour chaque fréquence réduite (Figure 5.9). Ainsi en faisant un balayage en fréquence, les lois d'évolution des paramètres en fonction de F peuvent être définies.
La démarche pour déterminer les coefficients est identique au cas de l'instabilité visqueuse. Une régression linéaire est effectuée à partir des lois d'évolution des paramètres. À partir des coefficients de cette régression linéaire, les coefficients peuvent être déterminés. L'ensemble des coefficients peut être définis pour l'écoulement concerné et être stocké dans la base de données.

5.2.2.1. Discussion sur la loi d'évolution de $R_{0\mathrm{v}}$

Dans le modèle visqueux-inflexionnel de la méthode des paraboles sur paroi adiabatique, l'évolution de $R_{0\mathrm{v}}$ suit une loi linéaire en fonction de F. Lorsque le rapport $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}}$ devient plus grand que l'unité cette loi n'est plus valable dans le sens où il y a une perte du caractère linéaire du groupement $\frac{R_{\mathrm{Mv}}-R_{0\mathrm{v}}}{R_{\mathrm{Mv}}}$ en fonction de F. Il a été remarqué qu'une loi du type $K_0(10^5\mathrm{F})^{E_0}$ permettait de prendre en compte l'ensemble des rapports de température utilisé pour la création de la base de données. De plus, cette loi logarithmique permet de s'affranchir de la recherche du paramètre R_{Mv} pour déterminer $R_{0\mathrm{v}}$. Dans un repère log-log, l'évolution de $R_{0\mathrm{v}}$ suit bien une loi linéaire en fonction de 10^5F comme le montre la figure 5.10. À partir de maintenant, l'évolution de $R_{0\mathrm{v}}$ sera donnée par la loi logarithmique.

5.2.2.2. Discussion sur la loi d'évolution de σ_{Mv}

Dans la méthode des paraboles, le paramètre σ_{Mv} répond à une évolution linéaire décroissante (Figure 5.6(a)) en fonction de F à partir d'une fréquence F_C de "coupure". Cette fréquence F_C vaut 10^{-7} pour la méthode des paraboles sur paroi athermane. Pour des fréquences inférieures à F_C, σ_{Mv} croît en fonction de F. Dans le cas d'une paroi athermane cela ne posait pas de problème puisqu'une fréquence réduite de 10^{-7} n'était observée que pour des nombres de Reynolds Re_{δ_1} difficilement atteignables en pratique car très élevés.
Par contre, lorsque le rapport de température $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{f}}$ augmente, la fréquence de coupure augmente et devient non négligeable. L'évolution parabolique du paramètre σ_{Mv} doit être prise en compte dans ce cas comme le montre la figure 5.11. Sur cette figure, la fréquence de "coupure" F_C est

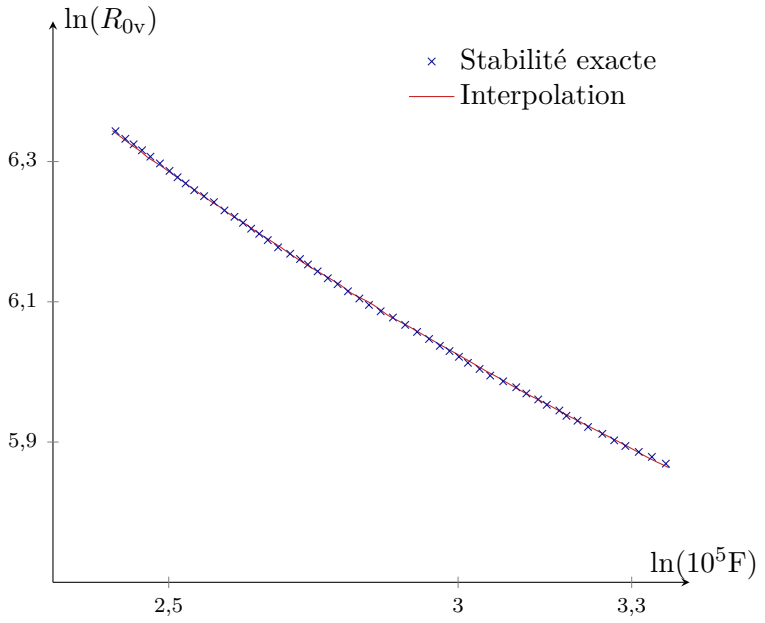


FIGURE 5.10. – Évolution logarithmique du paramètre R_{0v} pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 2$ et $\beta_H = 0$

de l'ordre de $6{,}6.10^{-5}$. Cette prise en compte implique l'ajout de coefficients supplémentaires à stocker dans la base de données.
Pour une fréquence réduite inférieure à la fréquence de "coupure", σ_{Mv} est modélisé par :

$$\sigma_{Mv} = B_{Mv}F^2 + C_{Mv}F + D_{Mv} \tag{5.11}$$

où B_{Mv}, C_{Mv} et D_{Mv} sont des coefficients à stocker dans la base de données.

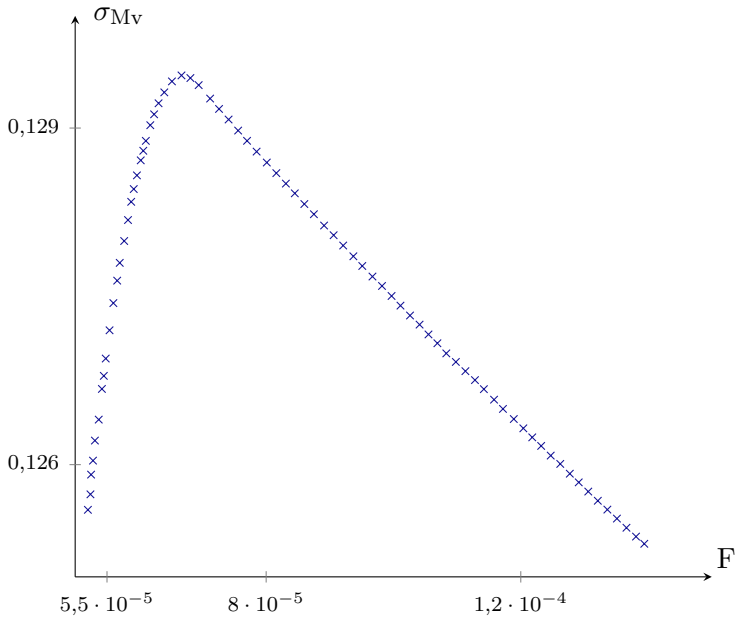


FIGURE 5.11. – Évolution "complète" du paramètre σ_{Mv} pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 1{,}1$ et $\beta_H = -0{,}1765$

5.2.3. Reconstruction des paraboles

Afin de valider la détermination des coefficients du modèle, il faut, à partir d'une fréquence réduite donnée, reconstruire les arcs de paraboles et se comparer aux calculs de stabilité exacte. Le paragraphe précédent a permis, à partir des calculs de stabilité exacte, de construire les demi-paraboles afin de modéliser au mieux l'évolution de σ^* en fonction de Re_{δ_1}. Dans ce paragraphe, les demi-paraboles vont être reconstruites à partir des coefficients stockés dans la base de données et d'une fréquence réduite. Le taux d'amplification $\sigma^*{}_\mathrm{P}$ est déterminé à partir du modèle des paraboles. Cette reconstruction est comparée à la stabilité exacte.

5.2.3.1. Modèle visqueux

Pour le modèle visqueux, il n'y a que deux demi-paraboles à construire. Les coefficients $A_\mathrm{Mv}, F_\mathrm{Mv}, K_\mathrm{Mv}, E_\mathrm{Mv}, A_\mathrm{0v}, F_\mathrm{0v}, A_\mathrm{1v}$ et F_1v ont été déterminés à partir des lois d'évolution, en fonction de F, des paramètres $\sigma_\mathrm{Mv}, R_\mathrm{Mv}, R_\mathrm{0v}$ et R_1v.
Prenons le cas d'un écoulement dont le nombre de Mach vaut 0,9 sur paroi athermane ($T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1$) et sur plaque plane. Choisissons une fréquence réduite $\mathrm{F} = 1{,}10^{-4}$.

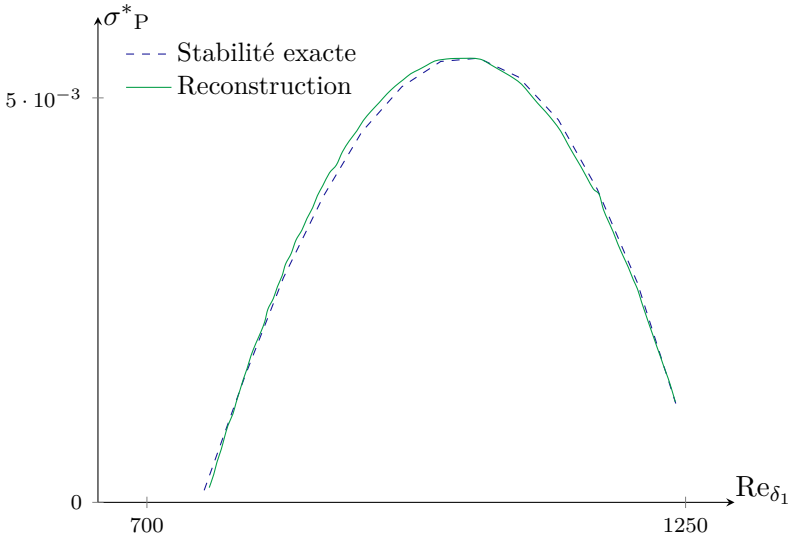


FIGURE 5.12. – Comparaison entre un calcul de stabilité exacte, et la reconstruction des paraboles pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9, T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1$ et $\beta_\mathrm{H} = 0$

La figure 5.12 compare l'évolution du taux d'amplification local $\sigma^*{}_\mathrm{P}$ en fonction de Re_{δ_1} pour un calcul de stabilité exacte (pointillés bleu) et la construction des paraboles à partir des coefficients stockés dans la base de données pour l'écoulement considéré (trait vert). D'un point de vue qualitatif, les 2 courbes sont proches.
Regardons maintenant les différences dans le calcul des paramètres.

	σ_Mv	R_0v	R_Mv	R_1v
Stabilité exacte	0,0055	758,5988	1019,8	1270,3
Construction des paraboles	0,0055	763,3797	1026,4	1269,7
Erreur relative (%)	0	0,63	0,65	0,047

TABLE 5.1. – Comparaison des valeurs des paramètres pour$M_\mathrm{e} = 0{,}9, T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1$ et $\beta_\mathrm{H} = 0$

Les deux demi-paraboles obtenues à l'aide des coefficients sont très proches de la courbe de stabilité exacte. De plus, d'après les valeurs des erreurs relatives dans le tableau 6.1 la détermination des paramètres est excellente.
La démarche de l'obtention des coefficients ainsi que des lois d'évolutions des paramètres du modèle visqueux est validée comme l'illustre la figure 5.12 et le tableau 6.1.

Comparaison avec la base de données originale pour un écoulement uniforme Afin de valider la méthode de détermination des différents coefficients de la méthode des paraboles, une comparaison a été faite avec les coefficients de la base de données originale d'Arnal [65]. Une comparaison est réalisée pour un écoulement sans gradient de pression puisque c'est le seul gradient de pression commun entre les deux bases de données.

Le nombre de Mach M_e de cet écoulement est fixé à 0,6. Dans la base de données actuelle le modèle visqueux-inflexionnel est utilisé. Pour des écoulements uniformes et accélérés, les coefficients liés à l'instabilité inflexionnelle sont fixés à des valeurs particulières ($A_{Mi} = 0$, $K_{Mi} = 0$, $E_{Mi} = 1$, ...) afin de négliger la partie inflexionnelle.
Trois fréquences réduites F ont été choisies : F = 1,10^{-5}, F = 3,5.10^{-5}, et F = 1,10^{-4}. L'évolution du taux d'amplification σ^*_P a été calculé à l'aide des différents coefficients se trouvant dans la base de données. Même si lorsque la fréquence réduite diminue des écarts sont visibles, la figure 5.13 permet de valider la méthode de détermination des différents coefficients de la méthode des paraboles.

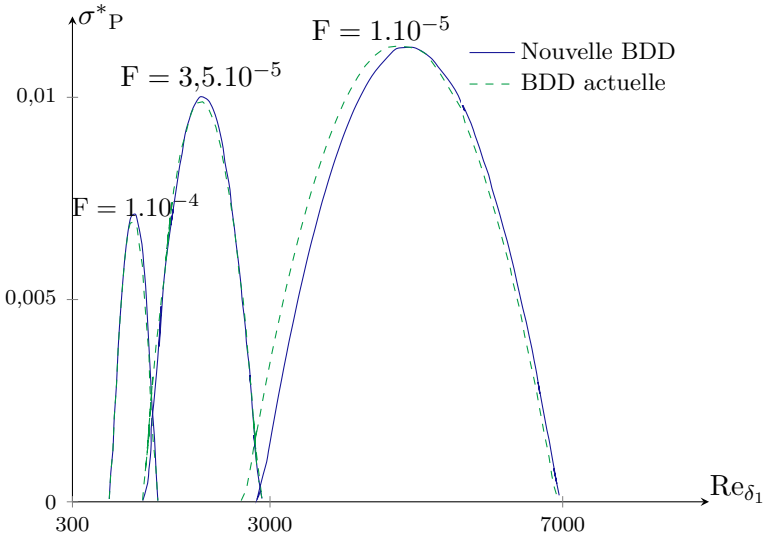


FIGURE 5.13. – Comparaison entre les coefficients d'Arnal et les nouveaux coefficients pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 1$ et $\beta_H = 0$

5.2.3.2. Modèle visqueux-inflexionnel

Pour le modèle visqueux-inflexionnel, il y a 4 demi-paraboles à construire et 15 coefficients à stocker. Comme précédemment, les coefficients ont été déterminés à l'aide des lois d'évolutions des différents paramètres du modèle.
Prenons le cas d'un écoulement avec un nombre de Mach nul ($M_e = 0{,}001$) sur paroi chaude ($T_p/T_f = 1{,}5$) et sans gradient de pression ($\beta_H = 0$). Choisissons une fréquence réduite F = 1,036.10^{-4}.

La figure 5.14 représente l'évolution de σ^* pour une fréquence réduite de 1,036.10^{-4} pour un calcul de stabilité exacte et la reconstruction de cette évolution à l'aide des coefficients. La première demi-parabole liée à l'instabilité visqueuse est très bien reconstruite. La reconstruction des demi-paraboles liée à l'instabilité inflexionnelle laisse place à des écarts entre le modèle et la stabilité exacte. Cette erreur vient du fait que la modélisation de σ^* par 4 demi-paraboles pour la fréquence réduite considérée est moins précise dans ce cas que dans d'autres, tel celui qui avait été présenté sur la figure 5.9.

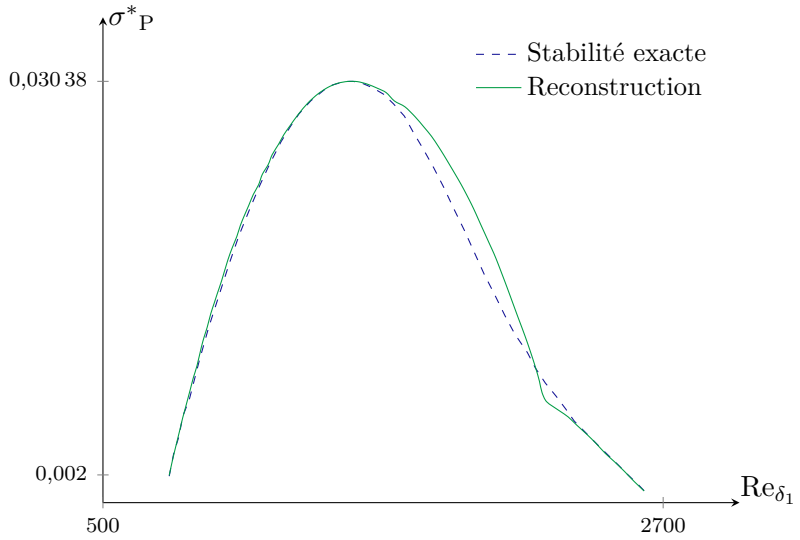


FIGURE 5.14. – Comparaison entre un calcul de stabilité exacte, et la reconstruction des paraboles pour $M_e = 0{,}001$, $T_p/T_f = 1{,}5$ et $\beta_H = 0$

	σ_{Mv}	R_0	R_{Mv}	R_{1i}
Stabilité exacte	0,0304	730	1480	2700
Construction des paraboles	0,0304	735,4642	1472	2670,2
Erreur relative (%)	0	0,75	0,54	1,12

TABLE 5.2. – Comparaison des valeurs de quelques paramètres pour $M_e = 0{,}001, T_p/T_f = 1{,}5$ et $\beta_H = 0$

Le tableau 6.2 montre bien que la partie visqueuse du modèle est très bien reconstruite par les demi-paraboles et le paramètre R_{1i} est bien déterminé par les demi-paraboles. Dans ce tableau, les paramètres liés à l'instabilité inflexionnelle tels que R_{Mi} et σMi ne sont pas détaillés car la détermination à partir de la stabilité exacte n'est pas directement visible.
L'écart existant entre la stabilité exacte et la méthode des paraboles vient de la détermination des paramètres. En effet, cette détermination, s'effectuant pour chaque fréquence instable, va dépendre de la fréquence. Autrement dit, il se peut que pour une fréquence fixée, la reconstruction s'effectue très bien comme sur la figure 5.9 alors que pour une fréquence autre, des écarts peuvent être observés entre la reconstruction et la stabilité exacte comme sur la figure 5.14.
Il sera important de vérifier dans le chapitre 7, l'impact des écarts de modélisation entre la méthode des paraboles et la stabilité exacte sur la prévision de la transition.

Chapitre 6

Adaptation de la base de données à une approche RANS

La base de données étant construite, il faut maintenant l'indexer. L'indexation permet de relier les profils de couche limite issus d'un calcul RANS aux profils de couche limite utilisés pour la construction de la base de données. La première partie de ce chapitre traite de la prise en compte des effets de gradient de pression. La méthode des paraboles a été initialement utilisée dans un code de couche limite, les effets de gradient de pression étant pris en compte au travers du facteur de forme incompressible H_{i}. La question qui se pose dans cette étude est de savoir si ce paramètre est toujours pertinent dans le cadre d'une approche RANS. La seconde partie du chapitre traite de la recherche d'un paramètre de similitude pour les profils de température.
Les effets de compressibilité sont retranscrits à l'aide du nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite M_{e} comme dans la base de données originale.

Sommaire

6.1. La méthode des paraboles dans un calcul RANS 85
6.2. Prise en compte des effets de gradient de pression sur paroi athermane 86
6.2.1. Comparaison et validation sur différents maillages 86
6.2.2. Comparaison stabilité exacte et base de données 95
6.2.3. Analyse de sensibilité 98
6.2.4. Conclusion 101
6.3. Prise en compte des effets de température de paroi 102
6.3.1. Détermination d'un paramètre de similitude pour les profils de température 102
6.3.2. Validation du paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ 104
6.3.3. Détermination d'un autre paramètre d'indexation 104
6.4. Mise en évidence de l'unicité des paramètres indexant la base de données 105
6.5. Note sur la construction de la base de données 107

6.1. La méthode des paraboles dans un calcul RANS

Lors d'un calcul RANS, nous obtenons un profil de vitesse dont nous étudions la stabilité afin de calculer l'amplification des ondes instables dans la zone laminaire de l'écoulement. Dans un premier temps, la détermination de la zone laminaire s'effectue en imposant une position de transition loin du bord d'attaque (aux alentours de 70 % de corde).
Il est alors possible dans cette zone laminaire étendue de calculer des grandeurs intégrales $(\delta_1, \theta_{11}, H_{\mathrm{i}}, \dots)$ à chaque station. À partir de ces grandeurs (H_{i} et M_{e} pour la base de données originale), nous pouvons "entrer" dans la base de données de la méthode des paraboles. Après interpolations entre les différents coefficients, un taux d'amplification à chaque station de calcul peut être déterminé. L'intégration de ces taux d'amplification le long de la ligne de courant à l'aide d'équations de transport (chapitre 2) permet de déterminer une position de transition. Cette position est alors calculée en interne du solveur et mise à jour au fil de la convergence du calcul.

6.2. Prise en compte des effets de gradient de pression sur paroi athermane

La base de données originale de la méthode des paraboles est indexée par le nombre de Mach M_e et le facteur de forme incompressible H_i.
Le facteur de forme H_i permet la prise en compte des effets du gradient de pression sur la stabilité du profil de vitesse. Néanmoins est-il pertinent d'indexer la base de données par H_i pour une approche RANS ? En effet, lors d'un calcul RANS, le nombre de points présents dans la couche limite est limité. Ceci implique donc des écarts sur les grandeurs intégrales de couche limite (δ_1, θ_{11}) et donc H_i par rapport à un calcul équivalent réalisé avec un solveur de couche limite. Il est donc important de savoir si l'erreur commise sur la valeur du H_i implique des écarts sur les taux d'amplification, déterminés par la méthode des paraboles, et par conséquence sur la prévision du point de transition.

Afin de pouvoir répondre à la question précédente, une étude approfondie a été menée sur un profil ONERAD sans incidence. Cette étude va permettre de comparer les résultats obtenus à partir d'une indexation via le facteur de forme H_i ou bien un autre paramètre de similitude qui est $C_f Re_{\theta_{11}}$. Les calculs de cette étude ont été réalisés avec le solveur RANS elsA. Ce profil a une corde $c = 0{,}35$m et est un profil laminaire couramment utilisé à l'ONERA pour étudier expérimentalement les mécanismes de transition. Les conditions génératrices sont un nombre Mach infini amont M_∞ de 0,17, un nombre de Reynolds basé sur la corde Re_c de $2{,}5.10^6$ et une température génératrice $T_{i\infty}$ de 300K. Le calcul est un calcul bidimensionnel sans flèche.
Pour cela trois maillages ont été réalisés. Un premier maillage très raffiné avec 200 points dans l'épaisseur de couche limite, un deuxième avec environ 110 points et enfin un dernier plus grossier présentant entre 60 et 70 points dans l'épaisseur de couche limite. Dans tous ces cas, la distance entre la paroi et la première maille est gardée constante (le long de l'extrados $0{,}05 \leqslant y^+ \leqslant 0{,}2$).
Pour chaque maillage, 6 positions longitudinales ont été choisies afin de balayer différentes valeurs du facteur de forme H_i. Pour chaque station, les taux d'amplification ont été déterminés par la méthode des paraboles (à l'aide d'un calcul elsA) pour trois fréquences physiques ($f = 2000, 3000, 4000$ Hz). Pour chaque maillage, un calcul de pré-convergence avec une position de transition fixée à environ 70 % de corde est réalisé. Après cette étape, le calcul est prolongé en activant la méthode des paraboles.
Ensuite, les profils de vitesse déterminés par elsA aux stations choisies sont extraits. Un calcul de stabilité exacte a été effectué pour chaque profil et pour chaque fréquence. Les taux d'amplification obtenus sont considérés comme valeurs de référence.
Pour finir, des profils de similitudes à iso-H_i et iso-$C_f Re_{\theta_{11}}$ ont été déterminés à l'aide du code de similitude *Similc2*. Des calculs de stabilité exacte ont été réalisés sur chaque profil de similitude et pour chaque fréquence. Les résultats sont résumés dans les paragraphes suivants.

Afin d'éviter toutes erreurs liées à des adimensionnements, les taux d'amplification sont dimmensionnés et donnés en m^{-1}.

6.2.1. Comparaison et validation sur différents maillages

6.2.1.1. Comparaison et validation sur maillage raffiné

Le maillage raffiné contient entre 190 et 200 points dans la couche limite.

Le tableau 6.1 correspond aux taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles originale après un calcul RANS elsA. Les valeurs $\sigma_{2000}, \sigma_{3000}$ et σ_{4000} sont les taux d'amplification pour une fréquence de 2000 Hz, 3000 Hz et 4000 Hz respectivement.

Stations (%)	H_i	$\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}$	σ_{2000}	σ_{3000}	σ_{4000}
x/c=30,87	2,5926	0,2240	8,7301	39,3907	47,7651
x/c=33,63	2,59599	0,2217	14,9605	42,7724	46,9369
x/c=37,24	2,61364	0,2150	25,709	50,5071	48,3103
x/c=42,13	2,66412	0,1961	45,5022	66,8345	56,0182
x/c=49,07	2,80085	0,1529	80,1982	93,056	74,5927
x/c=63,22	3,18101	0,0773	159,741	163,761	157,179

TABLE 6.1. – Taux d'amplification donnés par elsA après interpolation dans la base de données originale à différentes stations et pour différentes fréquences

Le tableau 6.2 correspond aux taux d'amplification déterminés par un calcul de stabilité exacte à chaque station. Ces valeurs seront prises comme valeurs de référence. Idéalement les valeurs de référence auraient été les valeurs données par un calcul de stabilité exacte à partir de profils de vitesse issus d'un calcul de couche limite (en utilisant 3C3D par exemple). Cependant pour ce maillage, les profils elsA et 3C3D sont identiques (figure 6.1).

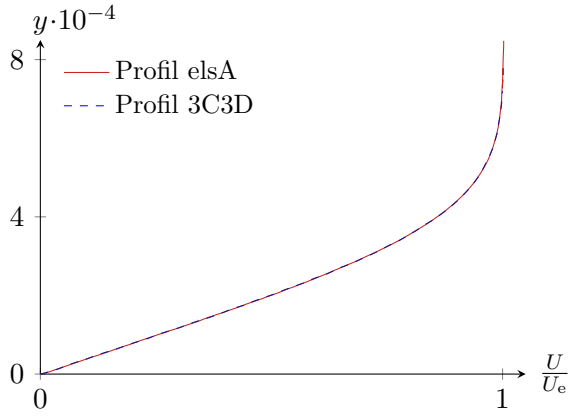


FIGURE 6.1. – Comparaison du profil de vitesse donné par elsA sur le maillage fin et par 3C3D à $x/c = 37,24\%$

Stations (%)	$\sigma_{ref_{2000}}$	$\sigma_{ref_{3000}}$	$\sigma_{ref_{4000}}$
x/c=30,87	-0,4908	34,2862	44,4443
x/c=33,63	6,7819	39,3996	44,6034
x/c=37,24	20,0836	50,1313	48,8004
x/c=42,13	45,1557	71,2258	60,1805
x/c=49,07	90,8155	108,0739	86,5704
x/c=63,22	152,4430	169,0329	171,2465

TABLE 6.2. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte à différentes stations et pour différentes fréquences. Valeurs de référence.

Comme expliqué précédemment, des profils de similitude ont été déterminés. Ces profils correspondent à une valeur donnée du facteur de forme H_i ou du produit $C_fRe_{\theta_{11}}$ déterminées aux positions longitudinales étudiées et fournie par le tableau 6.1. Des calculs de stabilité exacte ont été effectués sur ces profils.
Le tableau 6.3 donne les différents taux d'amplification pour les profils à iso-H_i et le tableau 6.4 les donne pour les profils à iso-$C_fRe_{\theta_{11}}$.

Stations (%)	$\sigma_{H_{\mathrm{i}}2000}$	$\sigma_{H_{\mathrm{i}}3000}$	$\sigma_{H_{\mathrm{i}}4000}$
x/c=30,87	1,1748	37,8777	50,8886
x/c=33,63	8,2143	42,4336	50,2064
x/c=37,24	20,5494	51,3291	51,5953
x/c=42,13	42,8817	67,6930	55,8761
x/c=49,07	82,8126	96,0695	74,5661
x/c=63,22	140,2804	155,9997	159,9296

TABLE 6.3. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-H_{i} à différentes stations et pour différentes fréquences

Stations (%)	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}2000}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}3000}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}4000}$
x/c=30,87	-1,1474	34,9125	47,3655
x/c=33,63	7,0683	40,9776	48,4687
x/c=37,24	20,7091	51,5510	51,8171
x/c=42,13	46,9831	73,0126	62,8200
x/c=49,07	94,4704	112,3885	98,4704
x/c=63,22	155,3033	177,2408	185,9710

TABLE 6.4. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}$ à différentes stations et pour différentes fréquences

Comparaison avec les résultats de référence

Pour rappel, les valeurs de référence sont celles obtenues par des calculs de stabilité exacte à partir des profils de vitesse RANS (profils déterminés par elsA). Nous allons comparer les valeurs des taux d'amplification obtenue avec des profils de similitude aux valeurs de référence.
Le tableau 6.5 résume les différents résultats et donne les écarts relatifs ε en % pour $f = 2000$ Hz, le tableau 6.6 pour $f = 3000$ Hz et le tableau 6.7 pour $f = 4000$ Hz.

Stations (%)	σ_{ref}	$\sigma_{H_{\mathrm{i}}}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$	$\varepsilon_{H_{\mathrm{i}}}$ (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	-0,4908	1,1748	-1,1474	...	...
x/c=33,63	6,7819	8,2143	7,0683	**21,12**	**4,22**
x/c=37,24	20,0836	20,5494	20,7091	**2,32**	**3,11**
x/c=42,13	45,1557	42,8817	46,9831	**5,04**	**4,05**
x/c=49,07	90,8155	82,8126	94,4690	**8,81**	**4,02**
x/c=63,22	152,4430	140,2804	155,3033	**7.98**	**1,88**

TABLE 6.5. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 2000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	$\sigma_{H_{\mathrm{i}}}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$	$\varepsilon_{H_{\mathrm{i}}}$ (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	34,2862	37,8777	34,9125	**10,48**	**1,83**
x/c=33,63	39,3996	42,4336	40,9776	**7,70**	**4,01**
x/c=37,24	50,1313	51,3291	51,5510	**2,57**	**2,83**
x/c=42,13	71,2258	67,6930	73,0126	**4,96**	**2,51**
x/c=49,07	108,0739	96,4690	112,3885	**10,74**	**3,99**
x/c=63,22	169,0329	155,9997	177,2408	**7,71**	**4,86**

TABLE 6.6. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 3000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	44,4443	50,8886	47,3655	**14,50**	**6,57**
x/c=33,63	44,6034	50,2064	48,4687	**12,56**	**8,67**
x/c=37,24	48,8004	51,5953	51,8171	**5,73**	**6,18**
x/c=42,13	60,1805	55,8761	62,8200	**7,15**	**4,39**
x/c=49,07	86,5704	74,5661	98,4704	**13,87**	**13,75**
x/c=63,22	171,2465	159,9296	185,9710	**6,61**	**8,60**

TABLE 6.7. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 4000$ Hz

Au vu des valeurs des erreurs relatives ε pour les différentes fréquences, la paramétrisation par $C_f\text{Re}_{\theta_{11}}$ donne de meilleurs résultats comme le confirme l'évolution des taux d'amplification donnés par les profils de similitudes à iso-H_i et à iso-$C_f\text{Re}_{\theta_{11}}$ et l'évolution des valeurs de référence des taux d'amplification (figures 6.2, 6.3 et 6.4).

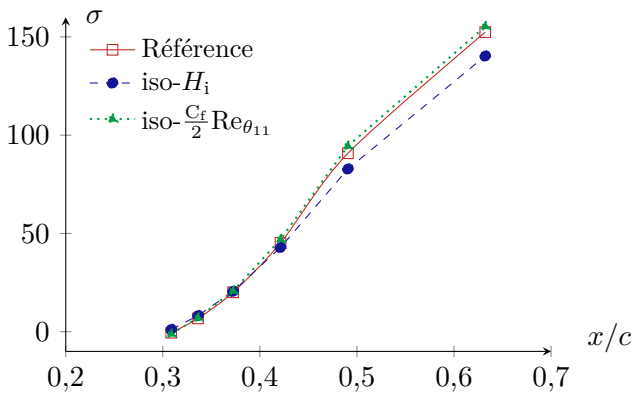


FIGURE 6.2. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 2000$ Hz

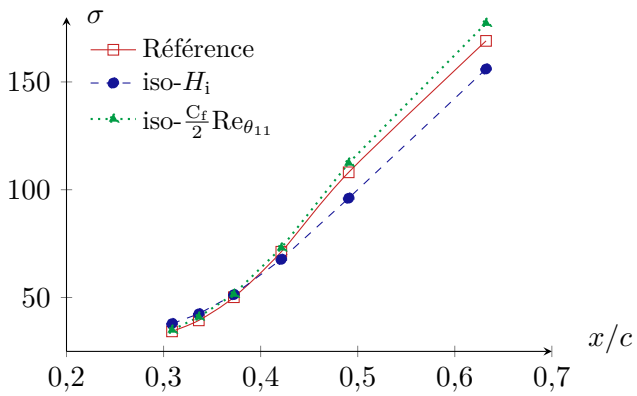


FIGURE 6.3. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 3000$ Hz

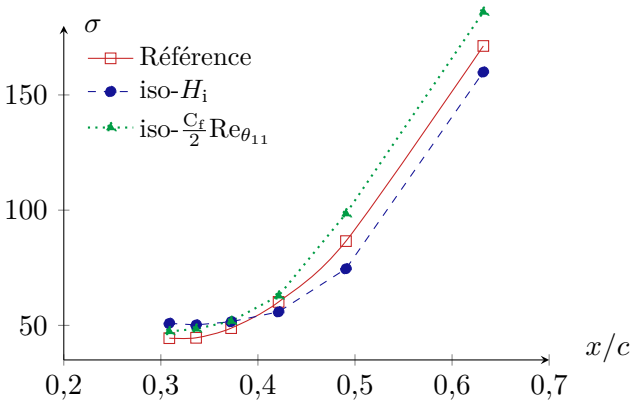


FIGURE 6.4. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 4000$ Hz

6.2.1.2. Comparaison et validation sur maillage moyen

Dans ce maillage, le nombre de points dans l'épaisseur de couche limite oscille entre 110 et 120. L'étude effectuée pour ce maillage est identique à la précédente. Les coefficients $\sigma_{2000}, \sigma_{3000}$ et σ_{4000} correspondent aux taux d'amplification pour une fréquence de 2000 Hz, 3000 Hz et 4000 Hz respectivement. Le tableau 6.8 regroupe les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles originale après un calcul RANS elsA.

Stations (%)	H_i	$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}$	σ_{2000}	σ_{3000}	σ_{4000}
x/c=30,87	2,57804	0,2283	2,40092	34,0589	43,8184
x/c=33,63	2,58003	0,2263	8,58034	37,1873	42,8178
x/c=37,24	2,59484	0,2204	19,0804	43,5705	42,5352
x/c=42,13	2,63893	0,2033	37,9475	59,091	49,0179
x/c=49,07	2,75543	0,1646	70,5312	84,6201	65,9565
x/c=63,22	3,1108	0,0878	145,059	148,261	141,127

TABLE 6.8. – Taux d'amplification donnés par elsA à différentes stations et pour différentes fréquences pour le maillage moyen

Le tableau 6.9 correspond aux taux d'amplification déterminés par un calcul de stabilité exacte à chaque station. Ces valeurs seront prises comme valeurs de référence.

Stations (%)	$\sigma_{\mathrm{ref}_{2000}}$	$\sigma_{\mathrm{ref}_{3000}}$	$\sigma_{\mathrm{ref}_{4000}}$
x/c=30,87	-7,4338	27,08	38,0442
x/c=33,63	-0,2348	32,1651	38,4959
x/c=37,24	12,4371	42,7319	42,7862
x/c=42,13	36,5504	63,6580	53,9412
x/c=49,07	79,3588	97,3851	74,9061
x/c=63,22	145,1930	157,5657	156,7392

TABLE 6.9. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte à différentes stations et pour différentes fréquences

Le tableau 6.10 donne les différents taux d'amplification pour les profils à iso-H_i et le tableau 6.2.1.2 pour les profils à iso-$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}$.

Stations (%)	$\sigma_{H_{\mathrm{i}2000}}$	$\sigma_{H_{\mathrm{i}3000}}$	$\sigma_{H_{\mathrm{i}4000}}$
x/c=30,87	-5,4498	31,1823	45,2941
x/c=33,63	1,4759	35,6769	44,8410
x/c=37,24	13,1062	44,3414	46,4300
x/c=42,13	34,4742	60,2114	50,4530
x/c=49,07	72,1052	86,2892	62,1943
x/c=63,22	131,3478	142,9457	143,9789

TABLE 6.10. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-H_i à différentes stations et pour différentes fréquences

Stations (%)	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}2000}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}3000}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}4000}$
x/c=30,87	-7,6427	28,3778	41,9526
x/c=33,63	0,5213	34,4633	43,3885
x/c=37,24	13,4091	44,7256	46,8821
x/c=42,13	38,4606	65,3190	56,9725
x/c=49,07	83,0215	101,2992	84,2065
x/c=63,22	147,2077	165,8315	172,1858

TABLE 6.11. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-$\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}$ à différentes stations et pour différentes fréquences

Comparaison avec les résultats de référence

Nous allons comparer les valeurs des taux d'amplification obtenus avec des profils de similitude aux valeurs de référence.
Le tableau 6.12 résume les différents résultats et donne les écarts relatifs (ε) en % pour $f = 2000$ Hz, le tableau 6.13 pour $f = 3000$ Hz et le tableau 6.14 pour $f = 4000$ Hz.

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	-7,4338	-5,4498	-7,6427	...	...
x/c=33,63	-0,2348	1,4759	0,5213	...	...
x/c=37,24	12,4371	13,1062	13,4091	**5,38**	**7,82**
x/c=42,13	36,5504	34,4742	38,4606	**5,68**	**5,23**
x/c=49,07	79,3588	72,1052	83,0215	**9,14**	**4,62**
x/c=63,22	145,1930	131,3478	147,2077	**9,81**	**1,39**

TABLE 6.12. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 2000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	27,08	31,1823	28,3778	**15,15**	**4,79**
x/c=33,63	32,1651	35,6769	34,4633	**10,92**	**7,15**
x/c=37,24	42,7319	44,3414	44,7256	**3,77**	**4,67**
x/c=42,13	63,6580	60,2114	65,3190	**5,41**	**2,61**
x/c=49,07	97,3851	86,2892	101,2992	**11,39**	**4,02**
x/c=63,22	157,5657	142,9457	165,8315	**9,28**	**5,25**

TABLE 6.13. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 3000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	38,0442	45,2941	41,9526	**19,06**	**10,27**
x/c=33,63	38,4959	44,8410	43,3885	**16,48**	**12,71**
x/c=37,24	42,7862	46,4300	46,8821	**8,52**	**9,57**
x/c=42,13	53,9412	50,4530	56,9725	**6,47**	**5,62**
x/c=49,07	74,9061	62,1943	84,2065	**16,97**	**12,42**
x/c=63,22	156,7392	143,9789	172,1858	**8,14**	**9,85**

TABLE 6.14. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 4000$ Hz

Comme dans le cas du maillage fin, les tableaux ci-dessus ainsi que les comparaisons illustrées sur les figures 6.5, 6.6 et 6.7 nous permettent de dire que ce sont les profils de similitude à iso-$\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}$ qui donnent, dans l'ensemble, les taux d'amplification les plus proches des valeurs de référence.

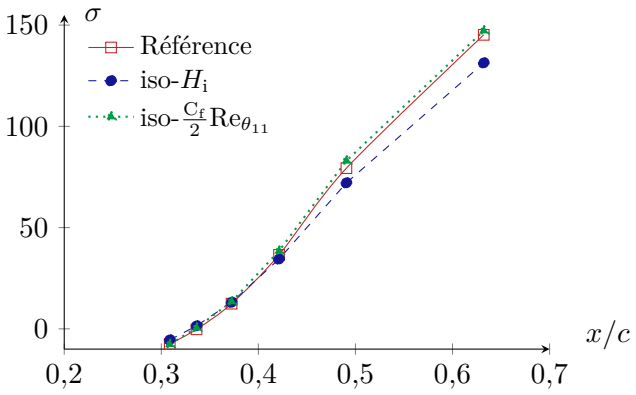


FIGURE 6.5. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 2000$ Hz

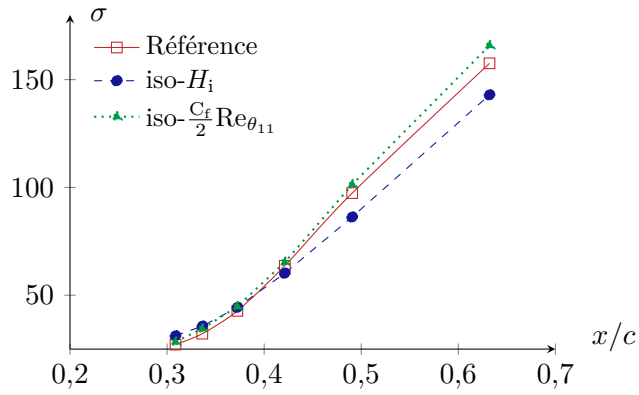


FIGURE 6.6. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 3000$ Hz

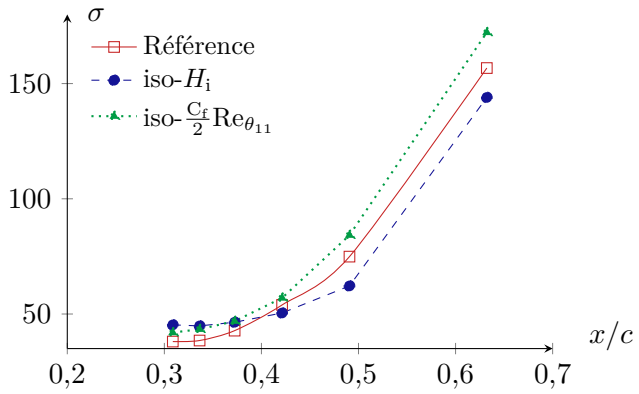


FIGURE 6.7. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 4000$ Hz

6.2.1.3. Comparaison et validation sur maillage grossier

Pour ce cas le nombre de points dans l'épaisseur de couche limite est entre 60 et 70.
L'étude effectuée pour ce maillage est identique aux deux précédentes. Le tableau 6.15 présente les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles originale après un calcul RANS elsA.

Stations (%)	H_i	$\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}$	σ_{2000}	σ_{3000}	σ_{4000}
x/c=30,87	2,57332	0,2302	4,18468	34,2793	41,8032
x/c=33,63	2,57329	0,2285	9,40413	36,4509	39,4803
x/c=37,24	2,58431	0,2227	34,7472	40,8248	36,235
x/c=42,13	2,62015	0,2068	34,7472	52,0899	36,235
x/c=49,07	2,72901	0,1668	65,9891	75,8262	50,606
x/c=63,22	3,10182	0,0807	140,115	139,682	131,481

TABLE 6.15. – Taux d'amplification donnés par elsA à différentes stations et pour différentes fréquences

Le tableau 6.16 correspond aux taux d'amplification déterminés par un calcul de stabilité exacte à chaque station. Ces valeurs seront prises comme valeurs de référence.

Stations (%)	$\sigma_{\text{ref}_{2000}}$	$\sigma_{\text{ref}_{3000}}$	$\sigma_{\text{ref}_{4000}}$
x/c=30,87	-0,4602	34,6994	45,9006
x/c=33,63	6,3827	39,7631	46,6097
x/c=37,24	18,7583	50,2946	51,6719
x/c=42,13	42,3164	71,0180	64,5172
x/c=49,07	86,2532	107,8077	90,8468
x/c=63,22	161,1253	181,0637	185,3451

TABLE 6.16. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte à différentes stations et pour différentes fréquences

Le tableau 6.17 donne les différents taux d'amplification pour les profils à iso-H_i et le tableau 6.18 pour les profils à iso-$\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}$.

Stations (%)	$\sigma_{H_{\text{i}2000}}$	$\sigma_{H_{\text{i}3000}}$	$\sigma_{H_{\text{i}4000}}$
x/c=30,87	-3,2289	31,6215	42,8617
x/c=33,63	2,5437	34,9128	40,9159
x/c=37,24	12,7291	41,6885	40,0935
x/c=42,13	31,2896	54,0096	39,5158
x/c=49,07	66,6775	76,1120	45,2644
x/c=63,22	126,3726	135,9845	135,3871

TABLE 6.17. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-H_i à différentes stations et pour différentes fréquences

Stations (%)	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}{}_{2000}}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}{}_{3000}}$	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}{}_{4000}}$
x/c=30,87	-5,8100	28,3342	38,9510
x/c=33,63	1,4813	33,5678	39,3085
x/c=37,24	13,7644	42,9992	41,6796
x/c=42,13	36,8418	61,1237	48,6128
x/c=49,07	81,4476	96,5711	76,0413
x/c=63,22	151,6913	172,0778	179,5453

TABLE 6.18. – Taux d'amplification donnés par la stabilité exacte pour des profils de similitude à iso-$\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}$ à différentes stations et pour différentes fréquences

Comparaison avec les résultats de référence

Nous allons comparer les valeurs des taux d'amplification obtenues avec des profils de similitude aux valeurs de référence.
Le tableau 6.19 résume les différents résultats et donne les écarts relatifs (ε) en % pour $f = 2000$ Hz, le tableau 6.20 pour $f = 3000$ Hz et le tableau 6.21 pour $f = 4000$ Hz.

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}\text{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	-0,4602	-3,2289	-5,8100	...	...
x/c=33,63	6,3827	2,5437	1,4813	**60,15**	**76,79**
x/c=37,24	18,7583	12,7291	13,7644	**32,14**	**26,62**
x/c=42,13	42,3164	31,2896	36,8418	**26,06**	**12,94**
x/c=49,07	86,2532	66,6775	81,4476	**22,70**	**5,57**
x/c=63,22	161,1253	126,3726	151,6913	**21,57**	**5,86**

TABLE 6.19. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 2000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	34,6994	31,6215	28,3342	**8,87**	**18,34**
x/c=33,63	39,7631	34,9128	33,5678	**12,20**	**15,58**
x/c=37,24	50,2946	41,6885	42,9992	**17,11**	**14,51**
x/c=42,13	71,0180	54,0096	61,1237	**23,95**	**13,93**
x/c=49,07	107,8077	76,1120	96,5711	**29,40**	**10,42**
x/c=63,22	181,0637	135,9845	172,0778	**24,90**	**4,96**

TABLE 6.20. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 3000$ Hz

Stations (%)	σ_{ref}	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$	ε_{H_i} (%)	$\varepsilon_{\frac{C_f}{2}Re_{\theta_{11}}}$ (%)
x/c=30,87	45,9006	42,8617	38,9510	**6,62**	**15,14**
x/c=33,63	46,6097	40,9159	39,3085	**12,22**	**15,66**
x/c=37,24	51,6719	40,0935	41,6796	**22,41**	**19,43**
x/c=42,13	64,5172	39,5158	48,6128	**38,75**	**24,65**
x/c=49,07	90,8468	45,2644	76,0413	**50,18**	**16,30**
x/c=63,22	185,3451	135,3871	179,5453	**26,95**	**3,13**

TABLE 6.21. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 4000$ Hz

Pour cette étude, conclure quant au meilleur choix de paramètres est plus délicat. Les erreurs relatives sont très importantes dans certains cas et les profils iso-H_i donnent parfois de meilleurs résultats que les profils iso-$C_fRe_{\theta_{11}}$. De manière général, les profils iso-$C_fRe_{\theta_{11}}$ donnent néanmoins des taux d'amplification plus proches des valeurs de référence comme le confirme la comparaison des taux d'amplification donnés par les profils de similitudes à iso-H_i et à iso-$C_fRe_{\theta_{11}}$ et valeurs de référence des taux d'amplification (figures 6.8, 6.9 et 6.10).

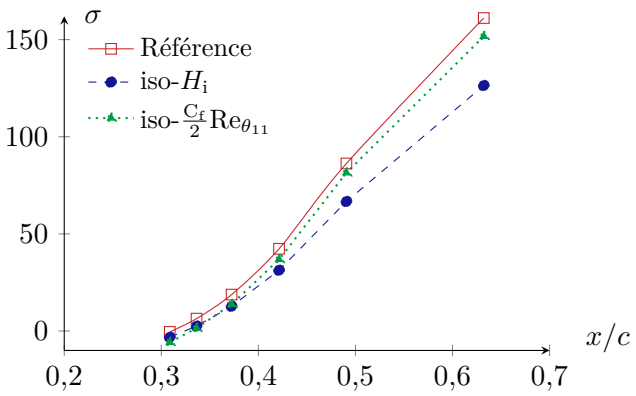


FIGURE 6.8. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 2000$ Hz

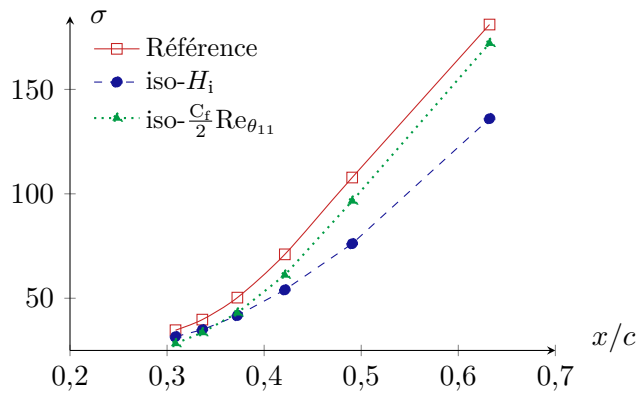


FIGURE 6.9. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 3000$ Hz

Conclusion

Au vu de l'ensemble des résultats, le choix a été fait d'indexer la nouvelle base de données par $C_fRe_{\theta_{11}}$ au lieu de H_i comme dans la base de données précédente [59] [4]. Les sections suivantes auront pour vocation de confirmer la pertinence de ce choix.

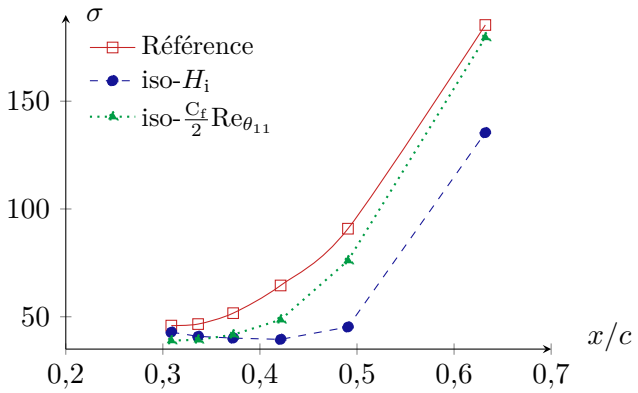


FIGURE 6.10. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 4000$ Hz

6.2.2. Comparaison stabilité exacte et base de données

6.2.2.1. Taux d'amplification

Nous allons maintenant comparer les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles originale indexée via le facteur de forme H_i, par la méthode des paraboles indexée via le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ et par la stabilité exacte. Cette comparaison est réalisée d'un point de vue qualitatif et pour les 3 maillages. Cela permettra de conclure sur la robustesse du paramètre d'indexation de la base de données.

Les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles classique seront notés σ_{parab}, ceux de la "nouvelle" méthode des paraboles σ_{new}, et ceux des calculs de stabilité exacte σ_{stab}. Afin de ne pas surcharger en figures ce manuscrit, les comparaisons sont effectuées pour $f = 3000$ Hz seulement.

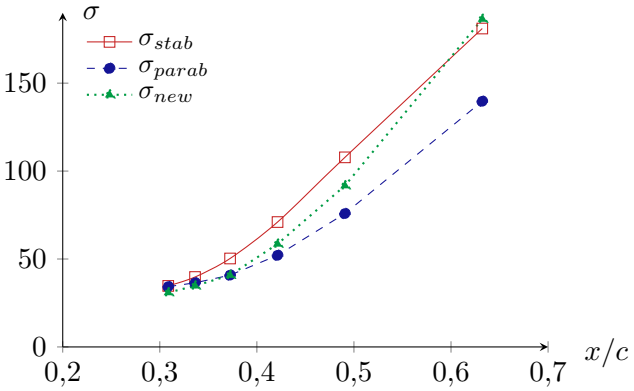


FIGURE 6.11. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage grossier et pour $f = 3000$ Hz

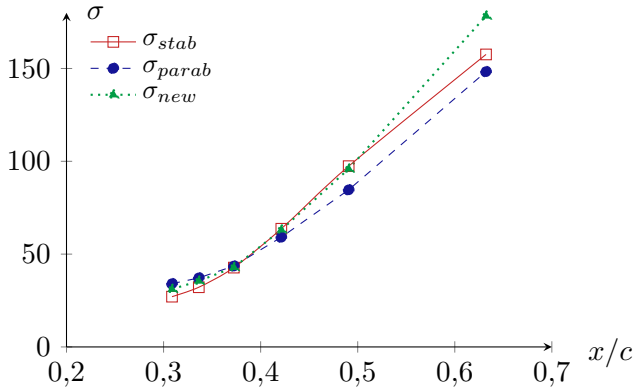


FIGURE 6.12. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage moyen et pour $f = 3000$ Hz

D'après les figures 6.11, 6.12 et 6.13 les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles avec une indexation de la base de données par $C_f Re_{\theta_{11}}$ sont plus proches des résultats de la stabilité exacte excepté à la dernière station. Cependant cet écart ne pose pas de problème car,

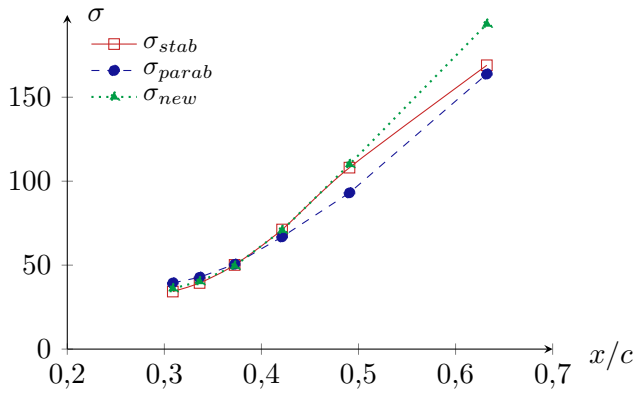


FIGURE 6.13. – Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage raffiné et pour $f = 3000$ Hz

comme nous le verrons dans la section suivante, à cette position l'écoulement est déjà turbulent.

Il est intéressant de regarder l'évolution de σ_{parab} et de σ_{new} en fonction de la qualité du maillage.

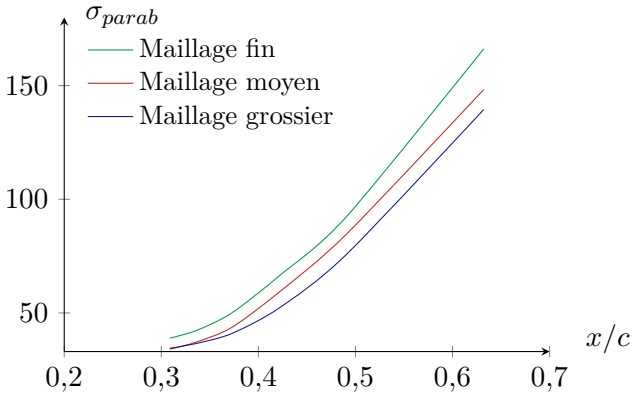


FIGURE 6.14. – Évolution de σ_{parab} le long du profil pour différentes qualités de maillage et pour $f = 3000$ Hz

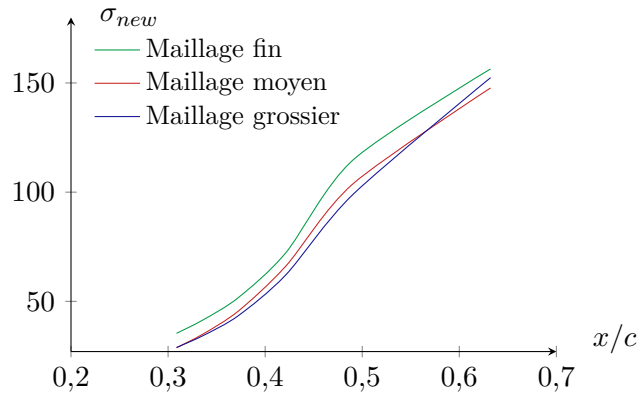


FIGURE 6.15. – Évolution de σ_{new} le long du profil pour différentes qualités de maillage et pour $f = 3000$ Hz

D'après les figures 6.14 et 6.15, l'indexation de la base de données par $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ semble plus robuste que celle par H_i. Les valeurs de σ_{new} sont très proches pour le maillage grossier et le maillage moyen contrairement aux valeurs de σ_{parab} où un écart existe. Cela confirme la robustesse du paramètre $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ puisque sa sensibilité au maillage est moindre que pour le facteur de forme H_i.

6.2.2.2. Facteur N

La méthode du facteur N étant largement utilisée pour la détermination de la position de transition, il est intéressant et nécessaire de comparer les évolutions des différents facteurs N : le facteur N calculé par la stabilité exacte à partir des profils elsA, et ceux fournis par σ_{parab} et σ_{new}. Les fréquences physiques utilisées pour le calcul du facteur N sont comprises entre 2000 et 6000 Hz. La comparaison est effectuée sur les courbes enveloppes des facteurs N définies par $\mathrm{N_{env}} = \max_{\mathrm{F}} \mathrm{N(F)}$.

Dans cette analyse, la position de transition "réelle" (c'est-à-dire la position de transition déterminée à l'aide d'une étude expérimentale) n'est pas recherchée. L'objectif ici est de comparer les différentes indexations de la base de données.

Les figures 6.16, 6.17 et 6.18 comparent les courbes enveloppes des trois facteurs N pour les différents maillages utilisés précédemment. Pour chaque maillage, l'évolution de la vitesse extérieure U_e est ajoutée à la figure.

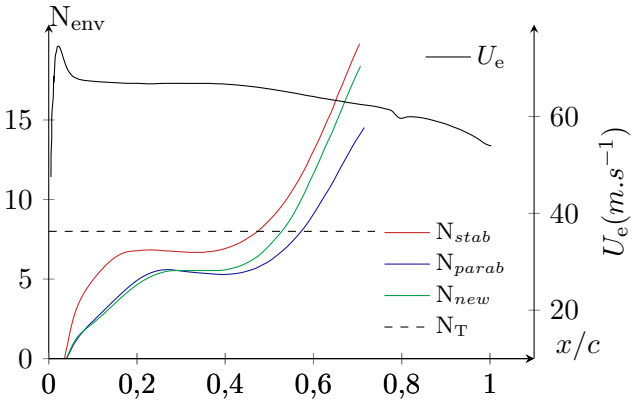


FIGURE 6.16. – Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage grossier

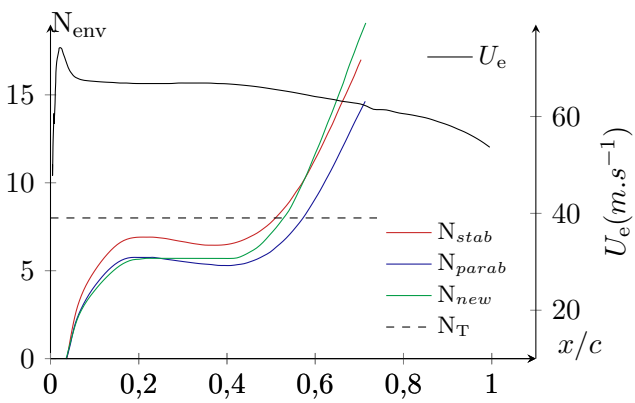


FIGURE 6.17. – Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage moyen

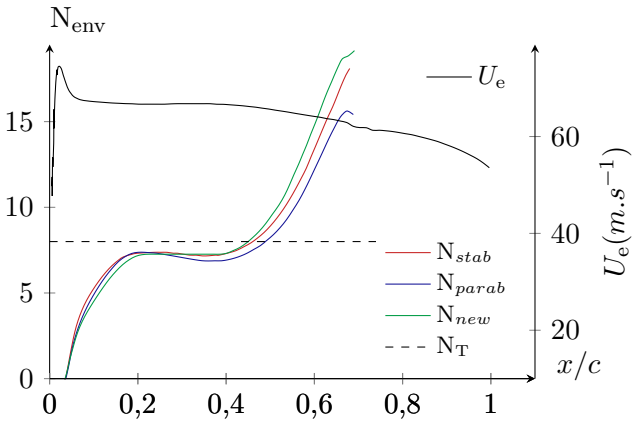


FIGURE 6.18. – Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage fin

Pour les 3 maillages, les évolutions de N_{new} et de N_{parab} sont identiques à celle de N_{stab}. Après la décélération proche du bord d'attaque, les ondes TS s'amplifient une première fois. Ensuite cette amplification diminue légèrement du fait du faible gradient de vitesse extérieure U_e. Puis lors du deuxième ralentissement, les ondes TS sont de nouveaux amplifiées.
L'écart entre la courbe de N_{stab} et les courbes de N_{new} et N_{parab} sur la figure 6.16 vient du fait qu'après le pic de vitesse, l'amplification des ondes TS est sous-estimée par la méthode des paraboles. Cet écart disparaît à mesure que le maillage devient de plus en plus fin.
Pour le maillage fin (figure 6.18), les trois courbes sont très proches les unes des autres comme attendu. En effet, le nombre important de points dans la couche limite pour ce maillage permet d'avoir très peu d'erreur sur le calcul des grandeurs intégrales et donc sur H_i et sur $Re_{\theta_{11}}$. Ceci

permet donc un très bon calcul des taux d'amplification. Pour ce genre de configuration similaire à ce qui est obtenu dans un calcul de couche limite, la méthode des paraboles permet bien de retomber sur les calculs de stabilité exacte.
Dans les trois cas, l'indexation de la base de données par $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ donne des résultats plus proches de la stabilité exacte que par H_i lorsque N est supérieur à 5. Utiliser ce paramètre d'indexation plutôt que le facteur de forme H_i est donc une des améliorations apportées par cette thèse.

6.2.3. Analyse de sensibilité

6.2.3.1. À partir des profils de similitude

Un point important à étudier est la sensibilité des taux d'amplification par rapport aux paramètres H_i et $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$. Pour cela, des profils de similitude ont été déterminés avec des erreurs relatives, notées ε_{simi}, de 1 %, 3% et de 5 % sur les paramètres H_i et $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ par rapport à une valeur de "base". Cette valeur de base a été choisie arbitrairement et correspond à la station $x/c = 42{,}13\%$ où $H_\mathrm{i} = 2{,}6389$ et $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}} = 0{,}2033$ pour le maillage moyen. Les taux d'amplification donnés par la stabilité exacte à partir de ces valeurs de bases ont été pris comme valeurs de référence.
Une fois ces profils déterminés, des calculs de stabilité exacte ont été réalisés puis une comparaison entre les différents taux d'amplification est effectuée. Les erreurs relatives entre les taux d'amplification donnés par la valeur de base (pour $\varepsilon_{simi} = 0$) et les taux d'amplification donnés par les autres valeurs des paramètres sont notées $\varepsilon_{H_\mathrm{i}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}}$.

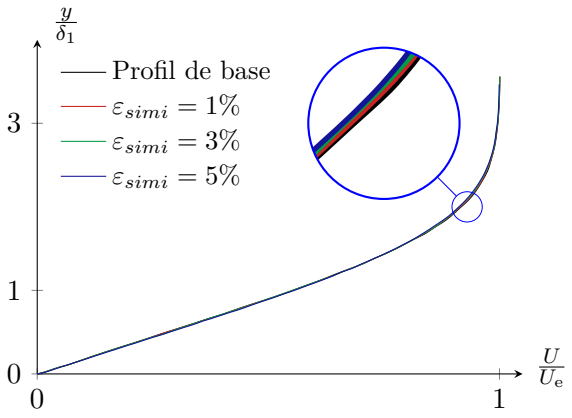


FIGURE 6.19. – Profils de vitesse déterminés à partir des erreurs relatives ε_{simi} sur le paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$

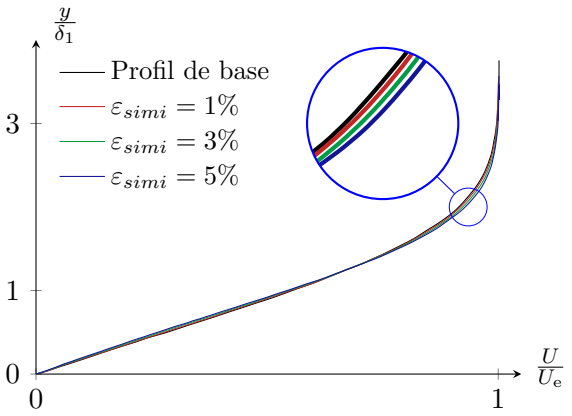


FIGURE 6.20. – Profils de vitesse déterminés à partir des erreurs relatives ε_{simi} sur H_i

La figure 6.19 présente les différents profils de vitesse associés aux différentes erreurs relatives ε_{simi}. Les profils donnés à partir des erreurs relatives sur le paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ sont pratiquement identiques. En $y/\delta_1 = 2$, une erreur relative de 3% sur $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ implique une erreur relative de 0,25% sur la valeur de U/U_e.
Les profils déterminés à partir des écarts relatifs identiques sur le facteur de forme H_i présentent de plus grandes différences (figure 6.20). En $y/\delta_1 = 2$, un écart relatif de 3% implique un écart relatif de 0,8% sur la valeur de U/U_e. Même si cet écart est petit, la différence sur les profils de vitesse est nettement plus visible que dans le cas des écarts associés au paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$.

Le tableau 6.22 donne les différentes valeurs de H_i et de $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ en fonction des erreurs ε_{simi}.

ε_{simi} (%)	H_i	$\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$
0	2,6389	0,2033
1	2,6653	0,2053
3	2,7181	0,2094
5	2,7708	0,2135

TABLE 6.22. – Valeurs de H_i et de $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ en fonction de ε_{simi}

Le tableau 6.23 donne les taux d'amplification obtenus pour chaque profil de similitude ainsi que les écarts relatifs ε en % pour $f = 2000$ Hz, le tableau 6.24 pour $f = 3000$ Hz et le tableau 6.25 pour $f = 4000$ Hz.

ε_{simi} (%)	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$	$\varepsilon_{H_\mathrm{i}}$ (%)	$\varepsilon_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
0	34,4742	38,4606	...	...
1	40,9604	36,7041	**18,81**	**4,57**
3	53,6920	33,1537	**55,75**	**13,8**
5	66,0665	29,6323	**91,64**	**22,95**

TABLE 6.23. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 2000$ Hz

ε_{simi} (%)	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$	$\varepsilon_{H_\mathrm{i}}$ (%)	$\varepsilon_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
0	60,2114	65,3190	...	...
1	68,5580	63,0767	**13,11**	**3,43**
3	84,9604	58,5504	**40,17**	**10,36**
5	101,0307	54,0242	**66,69**	**17,29**

TABLE 6.24. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 3000$ Hz

ε_{simi} (%)	σ_{H_i}	$\sigma_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$	$\varepsilon_{H_\mathrm{i}}$ (%)	$\varepsilon_{\frac{\mathrm{C_f}}{2}\mathrm{Re}_{\theta_{11}}}$ (%)
0	50,4530	56,9725	...	...
1	61,0835	54,1073	**21,07**	**5,03**
3	82,3028	48,2937	**63,13**	**15,23**
5	103,1069	42,6048	**104,4**	**25,22**

TABLE 6.25. – Comparaisons des taux d'amplification pour $f = 4000$ Hz

Les tableaux 6.23, 6.24 et 6.25 permettent de dire que les taux d'amplification sont beaucoup moins sensibles aux variations sur les valeurs de $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ que sur celles de H_i.
Le paramètre $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ apparait ainsi comme étant un paramètre pertinent pour l'indexation de la base de données dans la mesure où la marge d'erreur admissible sur le calcul de $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ est plus importante que pour H_i.

6.2.3.2. À partir du calcul RANS

Peu importe les paramètres utilisés pour indexer la base de données, un effort particulier doit être réalisé afin de permettre une détermination correcte des grandeurs de couche limite ($\delta, \delta_1, \theta_{11}$, ...) (cf section 6.2.3.1).
Un aspect important pour la méthode des paraboles est de quantifier l'erreur commise sur la position de transition à partir de l'erreur commise sur la détermination des grandeurs de couche limite dans un calcul RANS. Les trois maillages utilisés pour l'étude donnent des évolutions de $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ et H_i différentes. Ces différences peuvent être vues comme des erreurs commises sur le calcul des grandeurs intégrales. L'évolution du nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite M_e est donnée par la figure 6.21. L'évolution de M_e ne dépend pas du maillage puisque les trois

courbes se superposent. Ceci signifie que seuls les écarts sur les valeurs de $C_f Re_{\theta_{11}}$ et de H_i vont impacter les positions de transition. L'évolution de ces paramètres est donnée par les figures 6.22 et 6.23. L'écart sur la position où H_i atteint son maximum est dû à un écart sur la position de transition imposée initialement pour le calcul RANS sur les trois maillages.

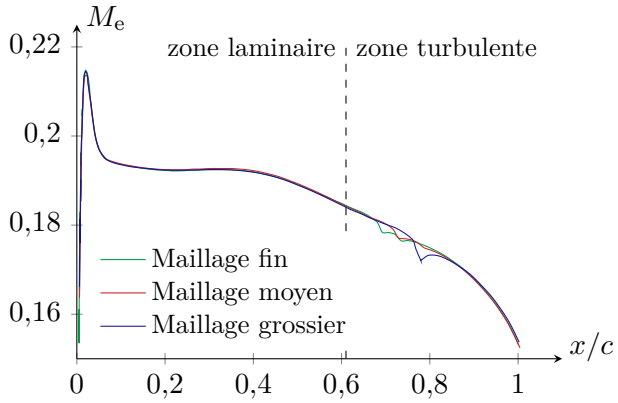


FIGURE 6.21. – Évolution de M_e le long de la corde et pour différents maillages

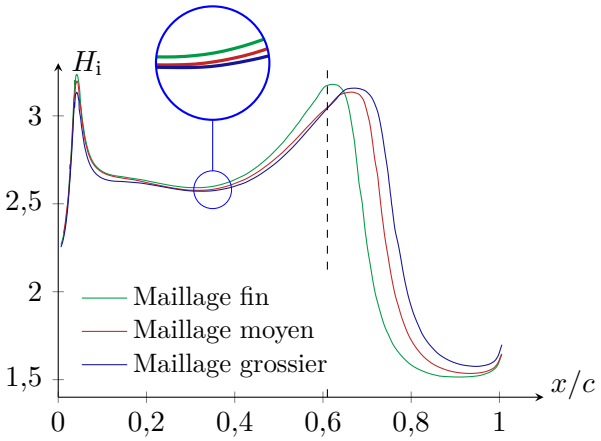


FIGURE 6.22. – Évolution de H_i le long de la corde et pour différents maillages

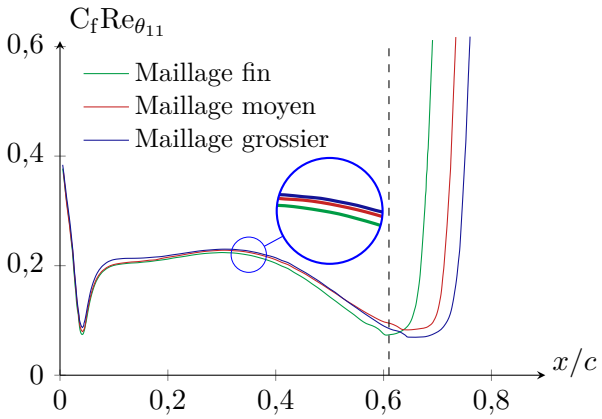


FIGURE 6.23. – Évolution de $C_f Re_{\theta_{11}}$ le long de la corde et pour différents maillages

Pour le calcul de la position de transition, une valeur seuil N_T est fixée à 8. Cette valeur est une valeur typique pour des expériences dans des souffleries silencieuses. Pour rappel, la valeur seuil est déterminée à partir de la loi de Mack (équation (2.63)) avec, dans ce cas, une intensité de turbulence extérieure proche de 0,1%.
Premièrement, une comparaison des positions de transition données par les différents maillages est effectuée. Ensuite, une étude de sensibilité est faite sur les taux d'amplification.

Le tableau 6.26 donne les positions de transition déterminées pour les 3 maillages. Une erreur relative ε_X, entre les positions de transition, est calculée en prenant comme valeur de référence les positions de transition données par la stabilité exacte. ε_{H_i} est l'erreur relative entre la position de transition donnée par la stabilité exacte et celle calculée par la méthode des paraboles avec une indexation de la base de données par H_i. $\varepsilon_{C_f Re_{\theta_{11}}}$ est l'erreur relative entre la position de transition donnée par la stabilité exacte et celle calculée par la méthode des paraboles indexée par $C_f Re_{\theta_{11}}$.

D'après le tableau 6.26, l'erreur commise sur la position de transition est moins importante (d'un facteur 3 pour le maillage moyen et fin) lorsque la base de données de la méthode des paraboles est indexée par $C_f Re_{\theta_{11}}$.

	Maillage grossier (%)	Maillage moyen (%)	Maillage fin (%)
Stabilité exacte	48	51	46
Base de données indexée par H_i	57	57	49
Base de données indexée par $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$	53	53	45
$\varepsilon_{H_\mathrm{i}}$ (%)	**18.8**	**11.6**	**6.5**
$\varepsilon_{\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}}$ (%)	**10.4**	**3.9**	**2.2**

TABLE 6.26. – Positions de transition (%) pour les différents maillages et erreurs relatives ε_X associées

À $x/c = 0{,}35$, l'erreur relative sur la valeur de H_i entre le maillage fin (courbe verte) et le maillage grossier (courbe bleue) est proche de 0,97% (voir zoom sur la figure 6.22). À la même position, l'erreur sur $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ est proche de 3,3% (voir zoom sur la figure 6.23).
Pour cette station, la fréquence la plus instable est de 3600Hz. La figure 6.24 montre, pour cette fréquence, les taux d'amplification calculés par la méthode des paraboles pour les deux indexations, σ_{H_i} et $\sigma_{\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}}$, et pour le maillage fin et grossier. À $x/c = 0{,}35$, l'erreur relative sur σ_{H_i} entre les deux maillages est de 16% alors que pour $\sigma_{\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}}$ l'erreur est de 15,7%.
Ces résultats montrent qu'on obtient une erreur identique sur les taux d'amplification alors même que l'erreur faite sur le calcul de $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ est 3 fois plus importante que sur le calcul de H_i. Ceci prouve de nouveau la robustesse du paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ par rapport à H_i. De plus, il est intéressant de noter que malgré l'écart sur la position de la valeur maximale du taux d'amplification $\sigma_{\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}}$, cette valeur est bien calculée pour le maillage grossier. Ce n'est pas le cas de σ_{H_i}.

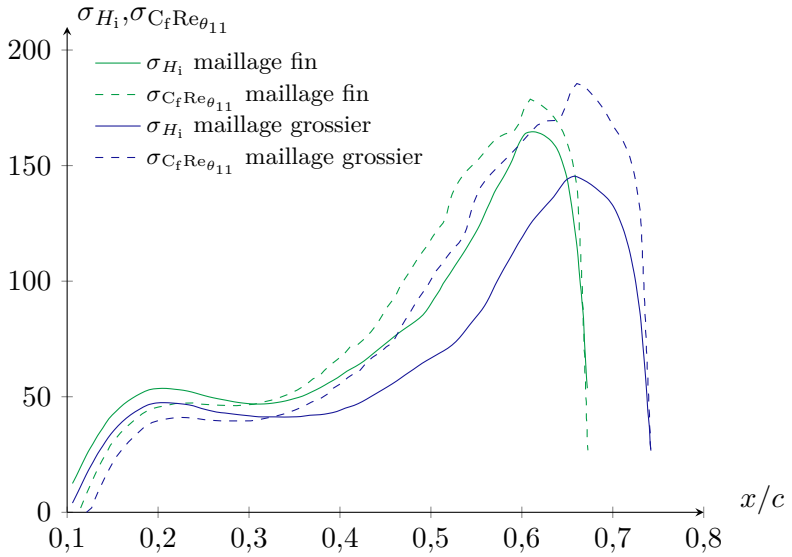


FIGURE 6.24. – Évolution de σ_P le long de la corde pour le maillage fin et grossier et pour $f = 3600$ Hz

6.2.4. Conclusion

Au vu de l'ensemble des résultats (qualitatifs et quantitatifs), la paramétrisation de la base de données par le paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ apparaît comme étant meilleure (plus proche des résultats de la stabilité exacte) et plus robuste (moins dépendante du nombre de points dans la couche limite). C'est donc ce paramètre qui prendra en compte les effets de gradients de pression sur les taux d'amplification.

Le profil de vitesse de couche limite est "mieux représenté" par une paramétrisation par H_i

(figure 6.25) mais la paramétrisation par $C_f Re_{\theta_{11}}$ permet une meilleure correspondance avec les résultats de stabilité exacte notamment grâce au fait que proche paroi le profil de vitesse elsA et le profil de vitesse à iso-$C_f Re_{\theta_{11}}$ sont identiques.

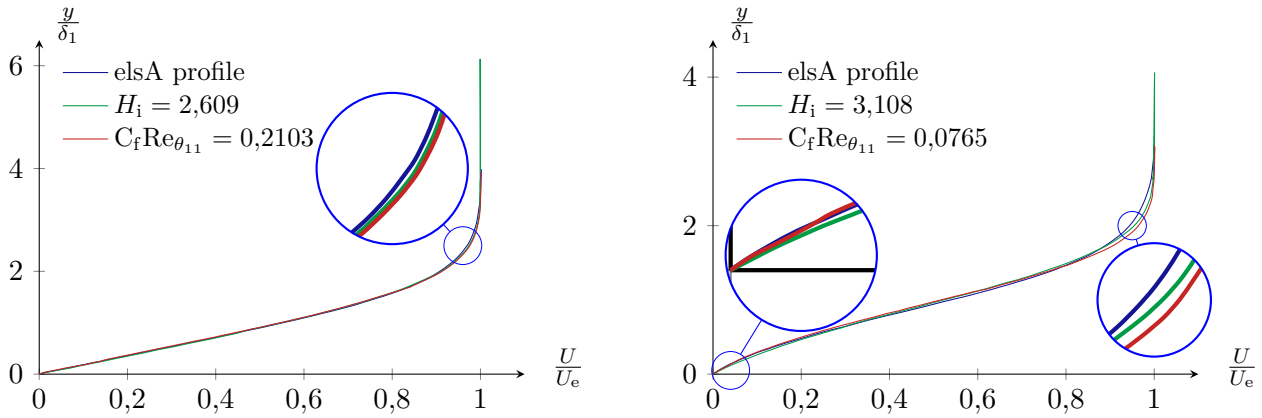


FIGURE 6.25. – Comparaisons des profils de couche limite elsA et de similitude à iso-H_i et iso-$C_f Re_{\theta_{11}}$

6.3. Prise en compte des effets de température de paroi

Pour un écoulement sur paroi athermane, la base de données est indexée par le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ et le nombre de Mach extérieur M_e. La prise en compte de la température de paroi nécessite l'ajout d'un paramètre supplémentaire car le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ seul ne permet pas de prendre en compte cet effet [30]. Ce paramètre additionnel doit être compatible RANS et doit caractériser la forme des profils de température dans la couche limite.

6.3.1. Détermination d'un paramètre de similitude pour les profils de température

Le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ ou le facteur de forme incompressible H_i sont deux des nombreux paramètres de similitude existant pour les profils de Falkner-Skan. Ces profils dépendent d'un gradient de pression directement relié à la valeur β_H. La notion de paramètre de similitude signifie qu'il existe une relation bijective entre un paramètre de similitude et le gradient de pression dans le cas des profils de Falkner-Skan. Ainsi quelle que soit la valeur de β_H, il est possible de déterminer une et une seule valeur de $C_f Re_{\theta_{11}}$. Le raisonnement inverse est tout aussi juste.

L'idée pour la recherche d'un paramètre pertinent pour les profils de température est de suivre le raisonnement précédent non pas pour le gradient de pression (et donc le paramètre β_H) mais pour le rapport de température T_p/T_f. Un travail bibliographique a mis en avant la notion d'analogie de Reynolds. Celle-ci permet de faire un lien entre un coefficient de flux de chaleur pariétal $C_h M$ et le coefficient de frottement C_f. Dans la littérature [5], le coefficient de flux de chaleur pariétal est défini par :

$$C_h M = \frac{\Phi_p}{\rho_e U_e (h_p - h_f)} \tag{6.1}$$

où Φ_p est le flux de chaleur à la paroi, h_p l'enthalpie à la paroi et h_f l'enthalpie de frottement adiabatique. Le coefficient $C_h M$ est aussi connu comme étant le nombre de Margoulis ou nombre de Stanton.

Le flux de chaleur transmis au fluide à travers la paroi Φ_p est :

$$\Phi_\mathrm{p} = -\kappa_\mathrm{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} \tag{6.2}$$

où κ_p est la conductivité thermique du fluide à la paroi.
L'analogie de Reynolds permet de relier $\mathrm{C_hM}$ et $\mathrm{C_f}$ par un facteur d'analogie s :

$$\frac{\mathrm{C_hM}}{\mathrm{C_f}/2} = s \tag{6.3}$$

Ce rapport consiste à traduire l'analogie entre les transports de quantité de mouvement et d'enthalpie. Le facteur s dépend fortement du gradient de pression.

Le paramètre $\mathrm{C_fRe}_{\theta_{11}}$ étant un paramètre de similitude pour les profils de Falkner-Skan, l'idée a été de voir si son équivalent en thermique existait.

La définition du $\mathrm{C_hM}$, ou nombre de Margoulis, (équation (6.1)) fait appaître un terme h_f qui est l'enthalpie de frottement. Cette enthalpie s'exprime à l'aide de la température de frottement T_f par :

$$h_\mathrm{f} = \mathrm{C_p}T_\mathrm{f}$$

La température T_f s'exprime par :

$$T_\mathrm{f} = T_\mathrm{e}\left(1 + r\frac{\gamma-1}{2}{M_\mathrm{e}}^2\right) \tag{6.4}$$

où r est le facteur de récupération défini par

$$r = \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{ie} - T_\mathrm{e}}$$

Pour rappel, ce facteur a été déterminé empiriquement pour des écoulements sur plaque plane donc sans gradient de pression. Afin d'éviter l'utilisation de ce paramètre dans le calcul du $\mathrm{C_hM}$, il a été décidé de trouver un groupement différent de grandeurs pour adimensionner le flux de chaleur à la paroi Φ_p. L'équation globale de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{\Phi_\mathrm{p}}{\rho_e U_\mathrm{e} h_\mathrm{ie}} = \frac{1}{\rho_e U_\mathrm{e}}\frac{d}{dx}(\rho_e U_\mathrm{e}\Delta) \tag{6.5}$$

Le terme de gauche est sans dimension et peut être vu comme un coefficient de flux de chaleur. Il sera donc utilisé comme définition du nouveau coefficient de flux de chaleur pariétal :

$$\mathrm{C_h} = \frac{\Phi_\mathrm{p}}{\rho_e U_\mathrm{e} h_\mathrm{ie}} \tag{6.6}$$

Cette définition permet d'éviter le calcul de la température de frottement. De plus, elle permet d'avoir une valeur finie de $\mathrm{C_h}$ (à savoir $\mathrm{C_h} = 0$) pour des calculs sur parois athermanes. Ce n'est pas le cas du nombre de Margoulis $\mathrm{C_hM}$ où dans ce cas $\mathrm{C_hM}$ n'est pas défini puisque $h_\mathrm{p} = h_\mathrm{f}$. Enfin, la bibliographie [5] donne aussi la définition de l'épaisseur intégrale d'enthalpie :

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_e U_\mathrm{e}}\left(\frac{h_\mathrm{i}}{h_\mathrm{ie}} - 1\right)\mathrm{dy} \tag{6.7}$$

Il est alors possible de définir un nombre de Reynolds Re_Δ basé sur cette épaisseur d'enthalpie.

La prochaine étape consiste à vérifier l'existence d'une relation bijective entre le paramètre $\mathrm{C_hRe}_\Delta$ et le rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$. C'est ce qui va être détaillé dans la prochaine section.

6.3.2. Validation du paramètre C_hRe_Δ

Pour vérifier l'existence d'une relation bijective, le paramètre C_hRe_Δ a été calculé à l'aide de plusieurs écoulements de similitude (similitude de Levy-Lees) obtenus pour différentes valeurs du rapport de température T_p/T_f.

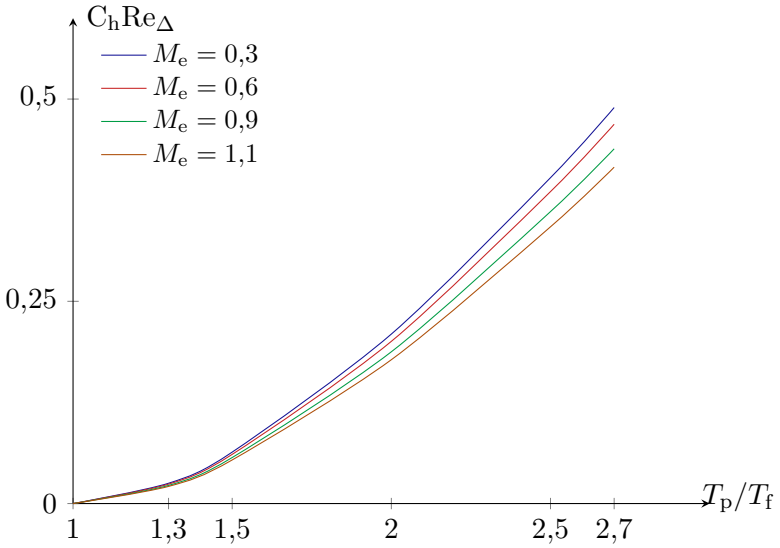


FIGURE 6.26. – Évolution de C_hRe_Δ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = 0$ et pour différents nombres de Mach M_e

La figure 6.26 montre l'existence d'une relation bijective entre C_hRe_Δ et T_p/T_f. En effet, pour un nombre de Mach M_e et un rapport T_p/T_f fixés, il existe une et une seule valeur de C_hRe_Δ. Sur la figure 6.26, le gradient de pression a été pris comme nul. La conclusion précédente est toujours valable lorsque $\beta_H \neq 0$ (Figure 6.27 et Figure 6.28).

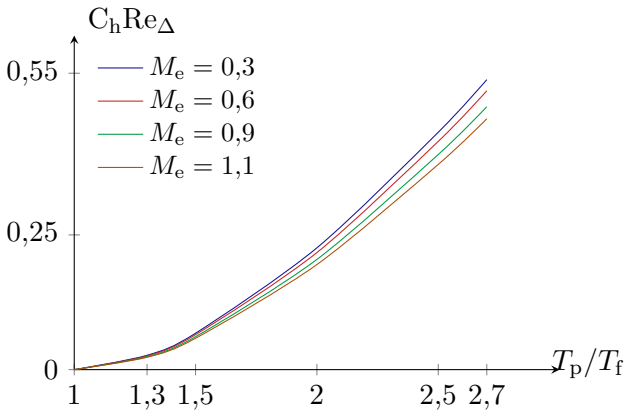


FIGURE 6.27. – Évolution de C_hRe_Δ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = 0{,}05$ et pour différents nombres de Mach M_e

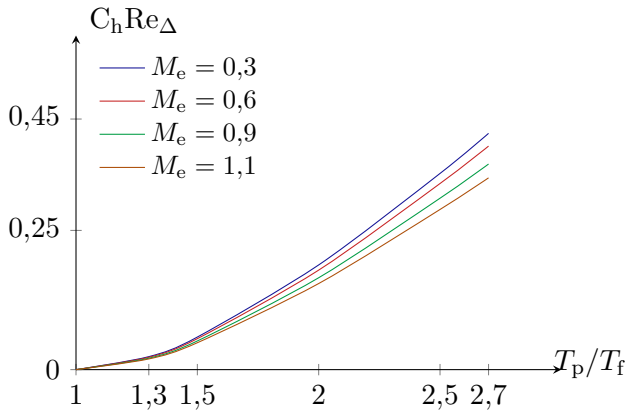


FIGURE 6.28. – Évolution de C_hRe_Δ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = -0{,}05$ et pour différents nombres de MachM_e

6.3.3. Détermination d'un autre paramètre d'indexation

Au cours de ces travaux, un premier choix de paramètre permettant de prendre en compte la forme du profil de température avait d'abord été fait. L'idée ici avait été de trouver un équivalent thermique au facteur de forme incompressible H_i pour le profil de température. Comme détaillé

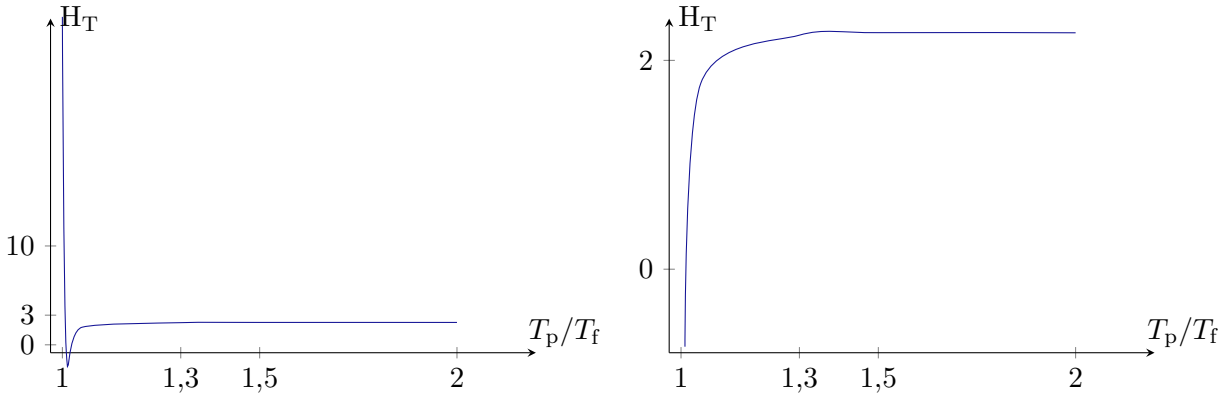
dans les sections précédentes, une épaisseur d'enthalpie Δ a été déterminée à partir du profil $h_\mathrm{i}/h_\mathrm{ie}$. En raisonnant de la même façon que dans le cas d'un profil de vitesse, une épaisseur de déplacement thermique peut être calculée à partir de $h_\mathrm{i}/h_\mathrm{ie}$. Cette épaisseur est définie par :

$$\delta_{1T} = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_e}\left(\frac{h_\mathrm{i}}{h_\mathrm{ie}} - 1\right)\mathrm{dy} \tag{6.8}$$

Á partir de ces deux épaisseurs, une facteur de forme thermique peut être définie par :

$$\mathrm{H_T} = \frac{\delta_{1T}}{\Delta} \tag{6.9}$$

Cependant, ce paramètre n'est pas bijectif vis à vis du rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ comme illustré sur la figure 6.29 pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$ et $\beta_\mathrm{H} = 0$. C'est pourquoi ce paramètre n'a pas été retenu comme paramètre pertinent pour l'indexation de la base de données. Le choix s'est porté à la place sur $\mathrm{C_hRe_\Delta}$.



(a) Évolution sur l'ensemble du domaine de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$

(b) Zoom pour $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} > 1$

FIGURE 6.29. – Évolution de $\mathrm{H_T}$ en fonction de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ pour $\beta_\mathrm{H} = 0$ et pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$

6.4. Mise en évidence de l'unicité des paramètres indexant la base de données

Pour un écoulement compressible de couche limite, les équations de Prandtl sont couplées. Ceci implique que le gradient de pression a une influence sur le profil de température et que la température influence le profil de vitesse. Ce couplage se retrouve donc dans l'évolution du paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ mais aussi sur l'évolution de $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$. Sur la figure 6.30 le nombre de Mach extérieur est fixé à 0,9. Le fait que pour un rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ donné, le paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ varie avec la gradient de pression justifie le couplage évoqué précédemment.

L'évolution du paramètre $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ dépend du gradient de pression mais aussi du rapport de température $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ (Figure 6.31). La question de l'unicité de la valeur de $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ pour un couple $(\beta_\mathrm{H}, T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f})$ et pour un nombre de Mach donné s'est posée. La figure 6.31 montre qu'une même valeur de $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ peut être obtenue pour deux écoulements différents (soit deux couples $(\beta_\mathrm{H}, T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f})$ différents). La même chose se passe pour le paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ (Figure 6.30). Cela équivaut à dire que pour une valeur identique de $\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}$ ou une valeur de $\mathrm{C_hRe_\Delta}$, deux taux d'amplification différents pourraient être obtenus.

Pour palier à ce problème d'unicité, un raisonnement sur le couple $(\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}, \mathrm{C_hRe_\Delta})$ a été effectué. Nous avons tracé dans le plan $(\mathrm{C_fRe_{\theta_{11}}}, \mathrm{C_hRe_\Delta})$ des courbes paramétrées par le couple $(\beta_\mathrm{H}, T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f})$ (Figure 6.32). Chaque courbe correspond à une valeur de β_H et chaque point de la

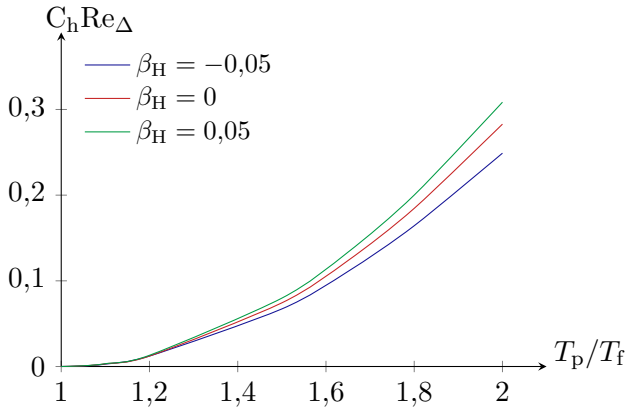


FIGURE 6.30. – Évolution de C_hRe_Δ en fonction de T_p/T_f pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H)

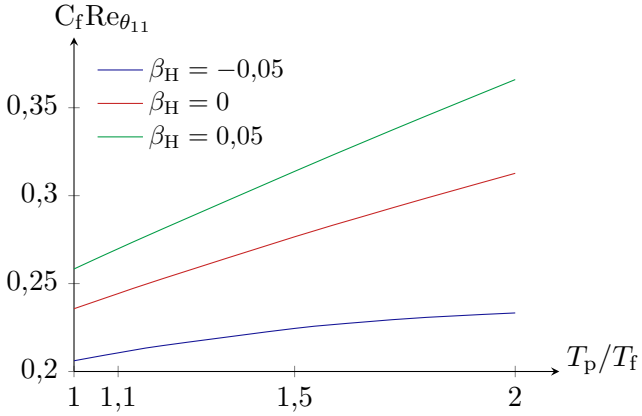


FIGURE 6.31. – Évolution de $C_fRe_{\theta_{11}}$ en fonction de T_p/T_f pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H)

courbe correspond à une valeur du rapport T_p/T_f. Les courbes ne se coupant pas, nous pouvons dire qu'une valeur du couple $(\beta_H, T_p/T_f)$ correspond à une et une seule valeur du couple $(C_fRe_{\theta_{11}}, C_hRe_\Delta)$. Le raisonnement inverse est tout aussi justifié. Un couple $(C_fRe_{\theta_{11}}, C_hRe_\Delta)$ donné va ainsi rencontrer une et une seule courbe. Ceci montre l'unicité du couple $(C_fRe_{\theta_{11}}, C_hRe_\Delta)$ pour un couple $(\beta_H, T_p/T_f)$ donné.
En raisonnant non plus avec des valeurs indépendantes mais avec des couples, nous nous assurons de la détermination d'un unique taux d'amplification pour le couple considéré. Ceci est illustré pour $M_e = 0{,}9$ mais se retrouve aux autres valeurs de Mach.

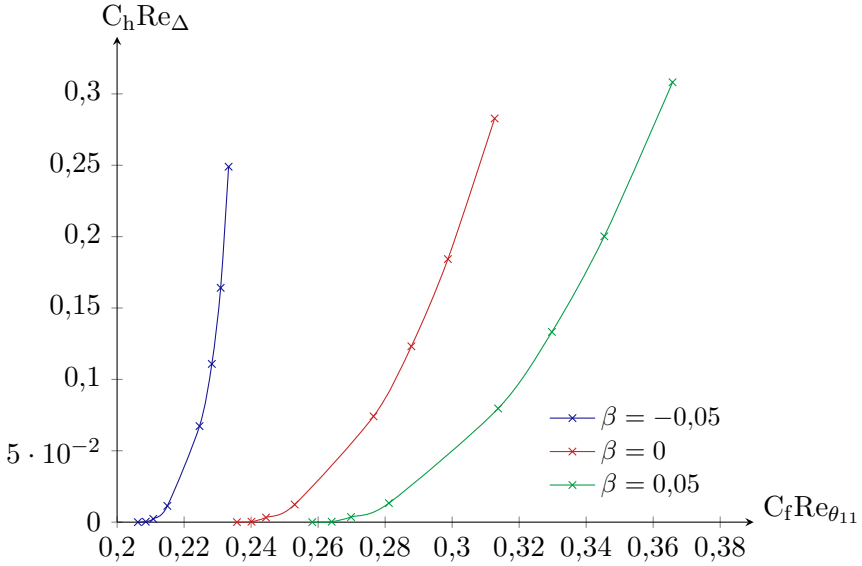


FIGURE 6.32. – Évolution de $C_hRe_\Delta = f(C_fRe_{\theta_{11}})$ pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H) et différents rapports T_p/T_f

Limitations

Afin de valider l'unicité précédemment montrée, il a fallu réaliser un balayage en β_H afin d'explorer tout le plan $(C_fRe_{\theta_{11}}, C_hRe_\Delta)$. Lors de ce balayage, il a été remarqué l'existence

d'une valeur limite $\beta_{H_{lim}}$ du gradient de vitesse extérieure β_H au delà de laquelle les courbes $C_hRe_\Delta = f(C_fRe_{\theta_{11}})$ se croisaient (figure 6.33) . Cette valeur dépend du nombre de Mach extérieur M_e et du rapport de température T_p/T_f. Au delà de la valeur $\beta_H = \beta_{H_{lim}}$, l'unicité du couple $(C_fRe_{\theta_{11}}, C_hRe_\Delta)$ au regard du couple $(\beta_H, T_p/T_f)$ est donc perdue.

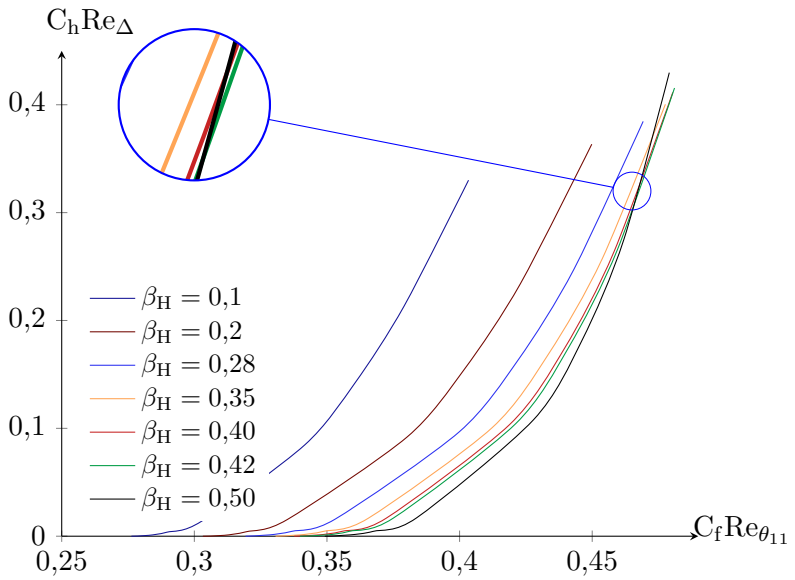


FIGURE 6.33. – Évolution de $C_hRe_\Delta = f(C_fRe_{\theta_{11}})$ pour $M_e = 0,9$ après un balayage en β_H (ici $\beta_{H_{lim}} = 0,39$)

Pour des gradients de pression correspondant à des valeurs de β_H supérieures à $\beta_{H_{lim}}$ et des rapports de température $T_p/T_f > 1,5$, il est apparu que la forme du profil de vitesse de couche limite se trouvait largement modifiée. Proche paroi, il y a existence d'une survitesse. Cela veut dire que localement, la vitesse U est supérieure à la vitesse à la frontière de la couche limite U_e (Figure 6.35). C'est la quantité de mouvement ρU qui subit l'influence du gradient de pression. Cette quantité est constante dans toute l'épaisseur de la couche limite. Lorsque la paroi est chaude, la masse volumique ρ peut devenir inférieur à sa valeur ρ_e et la vitesse U peut devenir supérieure à U_e. Pour des rapports de température inférieurs à 1,5, ce phénomène apparaît pour des valeurs de β_H très élevées ($\beta_H > 1$).
Pour des valeurs inférieures à $\beta_{H_{lim}}$, les profils de vitesse sont des profils "classiques" de couche limite (figure 6.34).

La survitesse implique une diminution des grandeurs intégrales de couche limite telle que l'épaisseur de déplacement δ_1 ou l'épaisseur de quantité de mouvement θ_{11}. La diminution de θ_{11} implique la diminution de $C_fRe_{\theta_{11}}$. Pour des survitesses importantes le paramètre $C_fRe_{\theta_{11}}$ peut devenir négatif. Ce changement de signe est à imputer au changement de signe de θ_{11}. C'est pour cette raison, que dans le plan $(C_hRe_\Delta, C_fRe_{\theta_{11}})$ à partir d'une certaine valeur de β_H les courbes se croisent.
Il a donc été décidé de traiter les profils avec survitesse comme une famille de profils à part. Dans cette thèse, les profils avec survitesse ne seront pas considérés. Néanmoins, il serait éventuellement possible de traiter la stabilité de ces profils via une seconde base de données. Durant ces travaux de thèse, un stage a été réalisé sur le phénomène de survitesse. Ce stage se focalisait sur la détermination dans un solveur RANS d'un profil avec survitesse. Les principaux résultats de ce stage sont résumés dans l'annexe G de ce manuscrit.

6.5. Note sur la construction de la base de données

Les deux chapitres précédents détaillent la mise en place de la nouvelle base de données. Le chapitre 5 a expliqué les différentes étapes pour déterminer l'ensemble des coefficients à placer

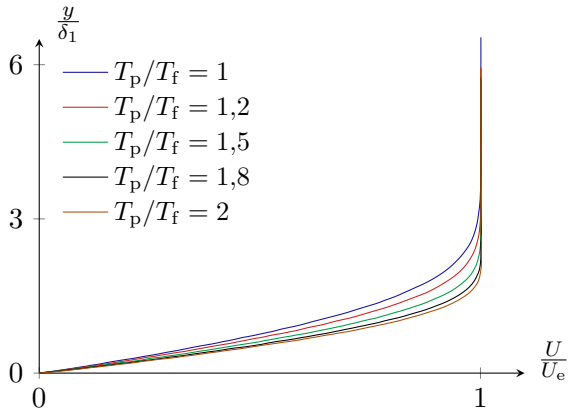


FIGURE 6.34. – Profils de vitesse pour $\beta_H = 0{,}28 < \beta_{H_{lim}}$ pour $M_e = 0{,}9$ et différents rapports de température

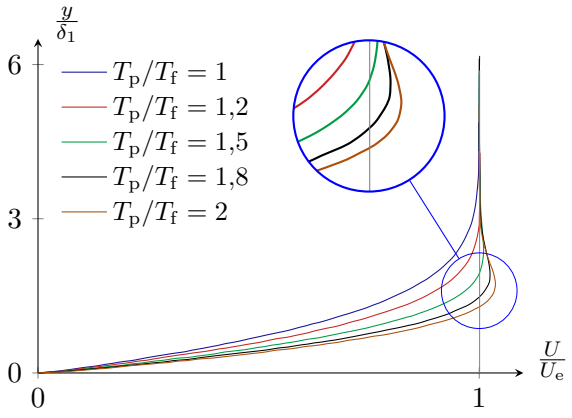


FIGURE 6.35. – Profils de vitesse pour $\beta_H = 1 > \beta_{H_{lim}}$ pour $M_e = 0{,}9$ et différents rapports de température

dans la base de données. Le chapitre 6 a traité du choix des paramètres afin d'indexer la base. Le point de départ de la construction de la base de données est l'utilisation des profils de Levy-Lees avec le concept de similitude locale. Comme expliqué au chapitre 1 de l'état de l'art, ce concept est lié à des hypothèses fortes pouvant être restrictives.
Il faut noter cependant qu'il est tout à fait possible de créer une base de données à l'aide de profils extraits d'un calcul Navier-Stokes par exemple (comme ce fût le cas pour la méthode des paraboles pour les crossflows instationnaires [32]). Les différentes étapes de construction et d'indexation restent inchangées et s'appliquent sans aucun problème. Cette option n'a pas été choisi puisqu'il était plus facile de contrôler tous les paramètres de la détermination des profils de similitude.

Chapitre 7

Étude de la capacité de la méthode des paraboles étendue à prévoir une position de transition

Dans la partie précédente, la mise en place des calculs de stabilité a été détaillée. À partir des diagrammes de stabilité, la nature parabolique de l'évolution du taux d'amplification des instabilités le long d'une iso-fréquence réduite a été vérifiée avec un chauffage de paroi. Ensuite, la nouvelle base de données a été construite (détermination de l'ensemble des coefficients à stocker) et indexée.
Dans cette partie, la méthode des paraboles étendue va être appliquée à des profils d'aile avec une paroi chauffée. Une première validation est réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux. Ensuite, une seconde est effectuée à partir de comparaisons avec des résultats issus de la stabilité exacte.

Sommaire

7.1. Validation à l'aide de données expérimentales 110
7.1.1. Montage expérimental 110
7.1.2. Mise en place du calcul numérique 110
7.1.3. Cas avec paroi athermane 111
7.1.4. Cas avec paroi chauffée 113
7.2. Validation à l'aide de la stabilité exacte avec une paroi chauffée uniformément à 400K 116
7.3. Cas particulier du chauffage localisé 117
7.3.1. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ 117
7.3.2. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$ 118
7.3.3. Chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ 119
7.4. Cas avec un chauffage localisé non uniforme 122
7.5. Conclusion 123

7.1. Validation à l'aide de données expérimentales

La validation numérique de la méthode des paraboles étendue est réalisée à l'aide du solveur RANS elsA (détenu par le groupement Airbus-Safran-ONERA) sur un profil d'aile ONERAD avec une peau chauffante recouvrant entièrement l'extrados (Figure 7.1). Pour cette configuration des résultats expérimentaux sont disponibles [70] avec des mesures de positions de transition. Cette configuration a été testée dans la soufflerie F2 de l'ONERA (centre Fauga-Mauzac).
Pour enrichir cette validation, des calculs de stabilité exacte sont réalisés sur les profils de couche limite (u, T) obtenus à partir des simulations RANS. Une comparaison entre les résultats de stabilité exacte et de la méthode des paraboles étendue est effectuée.

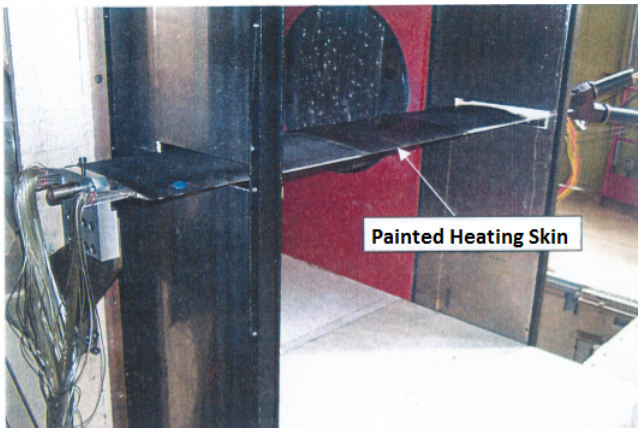


FIGURE 7.1. – Montage expérimental du profil ONERAD avec peau chauffante dans la soufflerie F2 [70]

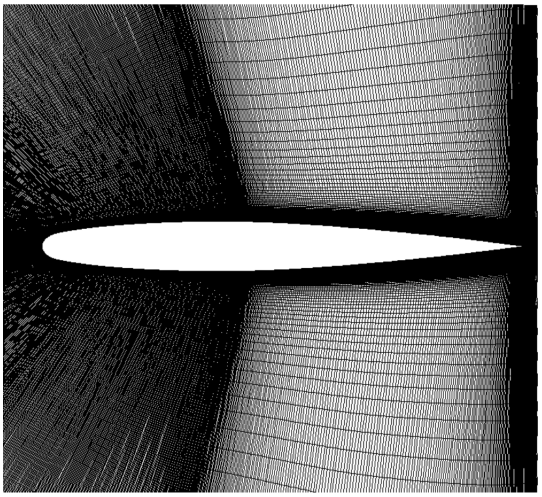


FIGURE 7.2. – Maillage autour du profil ONERAD

7.1.1. Montage expérimental

Pour cette expérience, un profil d'aile ONERAD, d'une longueur de corde de 0,35m, est utilisé. La vitesse infinie amont V_∞ est fixée à 80 $m.s^{-1}$, le nombre de Reynolds basé sur la corde est proche de 2.10^6 et le nombre de Mach infini amont M_∞ est de 0,23. La température totale est de 290K et la pression totale est fixée à 10^5Pa. Dans cette soufflerie, le taux de turbulence extérieure T_u est proche de 0,1%. Le montage expérimental correspond à un courant plan bidimensionnel (pas de flèche).
Comme illustré sur la figure 7.1 une peau chauffante est montée sur la partie centrale de l'extrados afin d'éviter tout effet de bord. Cette peau chauffante est appliquée sur toute la corde. Ceci permet d'éviter un effet de marche à la jonction chauffée-non chauffée. Les spécifications techniques de la peau chauffante et sa mise en place sont décrites dans [70].
Pendant cette campagne d'essai, deux températures de paroi ont été étudiées : $T_p = 320$ K et $T_p = 340$ K.

7.1.2. Mise en place du calcul numérique

Les données d'entrée du calcul sont le nombre de Mach infini amont M_∞ fixé à 0,23, le nombre de Reynolds basé sur la corde égal à $1{,}75 \times 10^6$ et la température d'arrêt T_i qui vaut 290K. Le maillage utilisé pour la simulation, comprenant entre 60 et 70 points dans l'épaisseur de la couche limite, est celui visible sur la figure 7.2. Le calcul est mené en atmosphère infinie.
Dans un premier temps, un calcul de pré-convergence est effectué avec une position de transition fixée (proche de 70% de la longueur corde). Ce calcul de pré-convergence permet de connaître l'évolution du coefficient de pression K_p le long de l'extrados. Cette évolution est ensuite comparée aux valeurs expérimentales pour chaque angle d'attaque (figures 7.3, 7.4 et 7.5). Pour un angle

d'attaque $AoA = -1\,^\circ$, la valeur numérique de l'angle d'attaque est réajustée à $AoA_{num} = -0{,}8\,^\circ$ afin d'avoir un meilleur accord entre le profil numérique et expérimental de la distribution de pression. Cette différence sur les valeurs de l'angle d'incidence provient sûrement d'un effet de blocage qui commence à apparaître dans la veine lorsque l'incidence augmente.

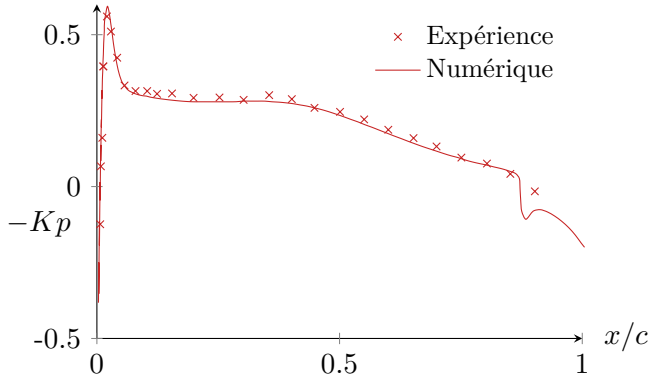


FIGURE 7.3. – Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA = 0\,^\circ$

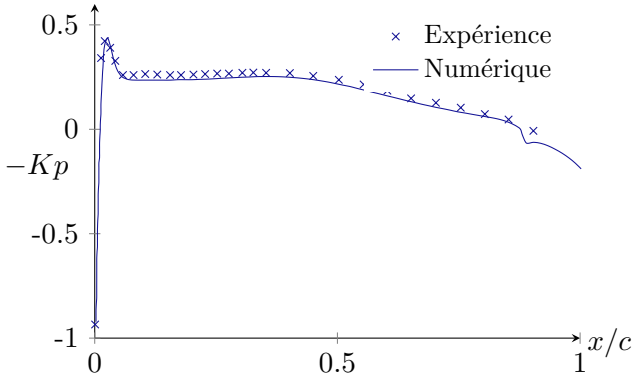


FIGURE 7.4. – Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$

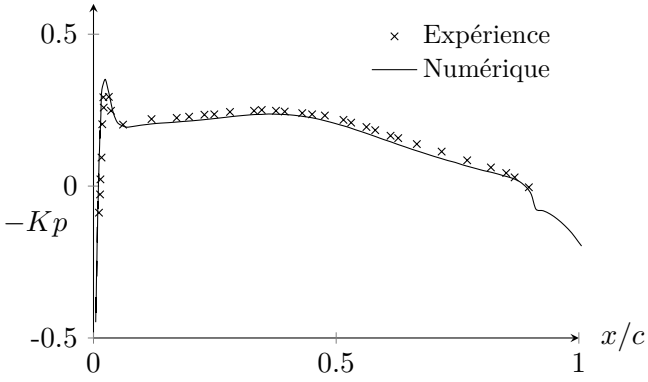


FIGURE 7.5. – Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA_{exp} = -1\,^\circ$ et $AoA_{num} = -0{,}8\,^\circ$

Dans un second temps, la simulation RANS est poursuivie à partir des résultats du calcul de pré-convergence. Cette fois-ci, la méthode des paraboles est activée pour déterminer la position de transition. Une fois ce calcul effectué, les profils de vitesse et de température de la couche limite sont extraits le long de l'extrados. Un calcul de stabilité exacte est alors effectué à partir de ces profils. De cette façon la comparaison entre la méthode des paraboles et les calculs de stabilité exacte qui va suivre se fait sur un écoulement de base identique.
A partir des calculs de stabilité exacte, il est possible de déterminer des facteurs N pour différentes fréquences f. La courbe enveloppe du facteur N est alors définie comme $N_{env} = \max_F(N(F))$. La comparaison s'effectuera sur l'évolution des différentes courbes enveloppes déterminées par la méthode des paraboles d'une part et d'autre part par le calcul de stabilité exacte.
Les mesures expérimentales seront utilisées pour comparer les positions de transition.

7.1.3. Cas avec paroi athermane

Afin de valider la nouvelle base de données, une première étape est de considérer une paroi athermane sur le profil ONERAD. Une simulation RANS est effectuée avec trois angles d'attaque ($AoA_{num} = -0{,}8\,^\circ$, $-0{,}5\,^\circ$ et $0\,^\circ$) afin de reproduire les K_p expérimentaux. L'évolution de la

courbe enveloppe N_{env} déterminée par la nouvelle base de données (BDD étendue) est comparée à l'évolution de la courbe enveloppe de référence (courbe enveloppe déterminée via le calcul de stabilité exacte) et à l'évolution de la courbe enveloppe déterminée à partir de la méthode des paraboles originale (BDD originale) utilisée dans [4].
Le calcul des facteurs N est effectué sur la plage de fréquences [3000 , 8000] Hz, ce qui correspond à la plage de fréquences où les ondes TS sont amplifiées. Une condition de paroi athermane est imposée sur le profil. Cette condition limité est réalisée en imposant $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$. La détermination de la position de transition expérimentale est réalisée en l'absence de la peau chauffante.

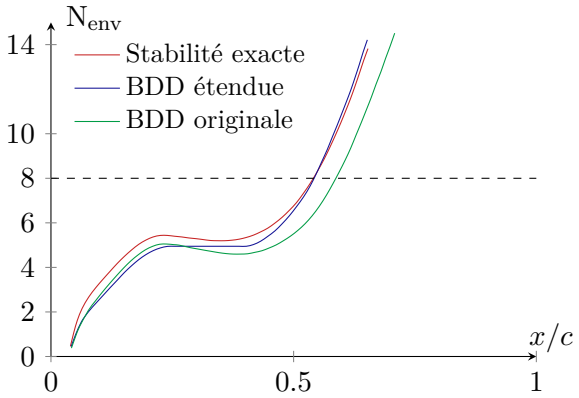


FIGURE 7.6. – Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0$ °. $T_p = 290K$

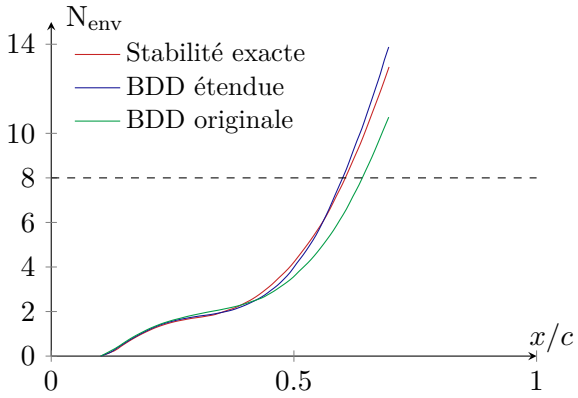


FIGURE 7.7. – Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5$ °. Paroi athermane

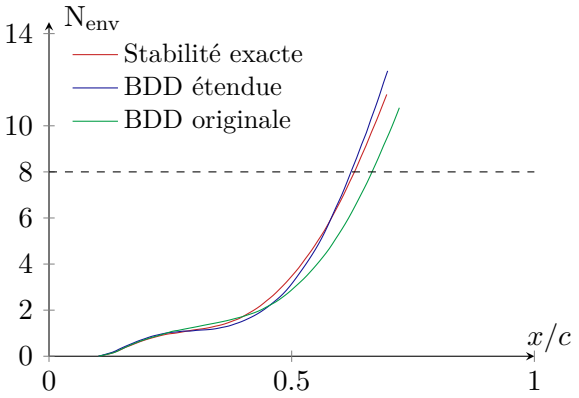


FIGURE 7.8. – Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1$ °. Paroi athermane

Les figures 7.6, 7.7 et 7.8 montrent un très bon accord entre la courbe enveloppe fournie par la méthode des paraboles étendue et celle calculée par la stabilité exacte. L'indexation de la base de données à l'aide du paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ plutôt que le facteur de forme incompressible H_i, utilisé dans la base de données originale [59], fournit de meilleurs résultats comparés aux calculs de stabilité exacte.
La courbe en pointillés noire représente la valeur seuil N_T, déterminée par la loi de Mack, correspondant au déclenchement de la transition. Le taux de turbulence T_u de 0,1% donne une valeur seuil N_T de 8.

Une comparaison entre les positions de transition expérimentale et numérique est réalisée pour les trois angles d'attaque. Le tableau 7.1 montre des résultats corrects et valide ainsi la nouvelle

base de données. La différence maximale entre la position de transition expérimentale et numérique est de l'ordre de 7% de corde ce qui est acceptable.
Les écarts entre les positions de transition expérimentale et numérique peuvent s'expliquer par le fait que la valeur seuil $N_T = 8$ n'est peut être pas adaptée. De plus il faut garder en tête qu'il y a une incertitude de mesure, non disponible dans ce cas, sur les positions de transition expérimentales. Expérimentalement la transition est détectée à l'aide d'un pitot lécheur.

	Expérience	Base de données étendue
$AoA = 0\,^\circ$	59%	55%
$AoA = -0{,}5\,^\circ$	65%	60%
$AoA = -1\,^\circ$	69%	62%

TABLE 7.1. – Positions de transition laminaire-turbulent sur paroi athermane, pour $U_0 = 80\ m.s^{-1}$ et les trois angles d'attaque.

7.1.4. Cas avec paroi chauffée

Puisque la nouvelle base de données a été validée pour des écoulements sur paroi athermane, les effets de température de paroi peuvent maintenant être pris en compte. Pour cela deux températures de paroi vont être étudiées : $T_p = 320$K et $T_p = 340$K correspondant à celles imposées lors de l'expérience sur le profil ONERAD dans la soufflerie F2.

7.1.4.1. $T_p = 320$K

La température de paroi est fixée à 320K ce qui correspond à un rapport de température T_p/T_f proche de 1,06. La simulation RANS est effectuée pour les trois angles d'incidence précédemment étudiés avec une condition isotherme à la paroi. Pour le calcul des facteurs N, une plage de fréquences f comprises entre 3000 et 8000 Hz est utilisée. Comme dans le cas d'une paroi athermane, ce sont les courbes enveloppes qui seront comparées.

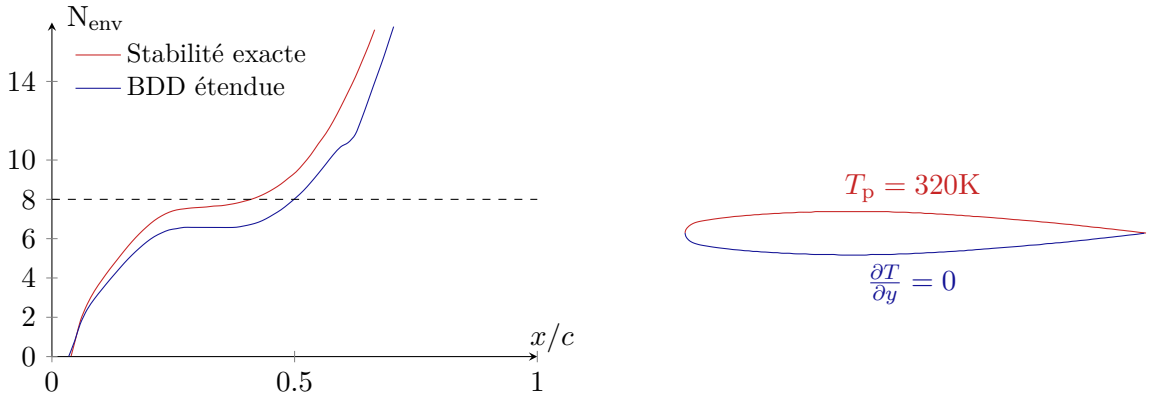


FIGURE 7.9. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$ et $T_p = 320$K et rappel des conditions limites

Les figures 7.9, 7.10 et 7.11 montrent un bon accord entre les courbes enveloppes N_{env} issues de la méthode des paraboles étendue et du calcul de stabilité exacte. Pour le cas d'un angle d'incidence $AoA = 0\,^\circ$, l'écart entre les deux courbes est plus important et atteint 7% de corde pour la position de transition. Cela s'explique par le fait que la courbe enveloppe atteint la valeur seuil N_T dans une zone où l'enveloppe du facteur N est quasi-constante le long de l'extrados. Cette zone vient de la géométrie même du profil ONERAD. En effet ce profil a été dans un premier temps designé afin de réduire le choc présent sur l'extrados pour des écoulements transsoniques. Cela passe donc par une zone où l'écoulement est très peu ralenti (le coefficient de pression K_p est alors quasi-constant dans cette zone). Ceci implique donc ce plateau sur les évolutions de

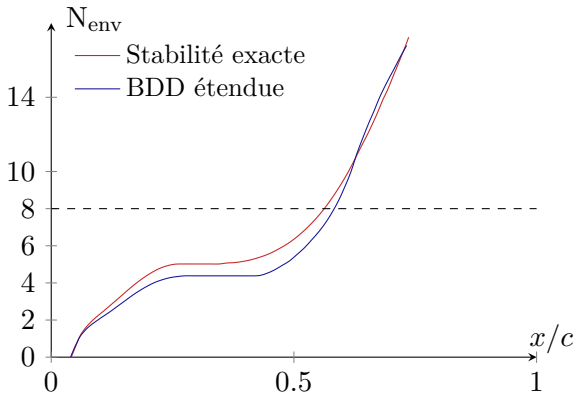


FIGURE 7.10. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5\,^{\circ}$ et $T_p = 320$K

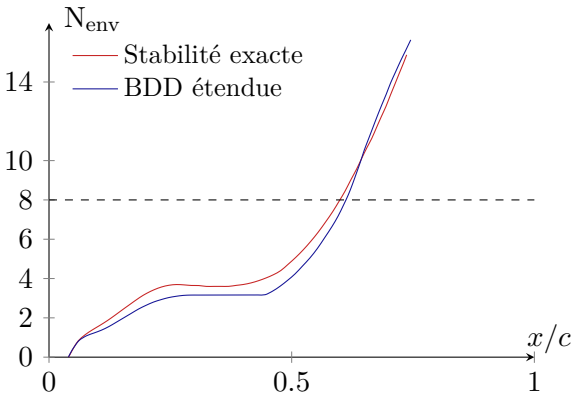


FIGURE 7.11. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1\,^{\circ}$ et $T_p = 320$K

N_{env}. De plus, il est clairement visible que dans cette zone la détermination de N_T est primordiale puisque une légère variation de cette valeur implique une variation importante de la position de transition. Ce n'est plus le cas pour les deux autres angles d'incidence. Comme dans le cas de la paroi athermane, une comparaison entre les positions de transition déterminées numériquement et expérimentalement est effectuée (figure 7.12).

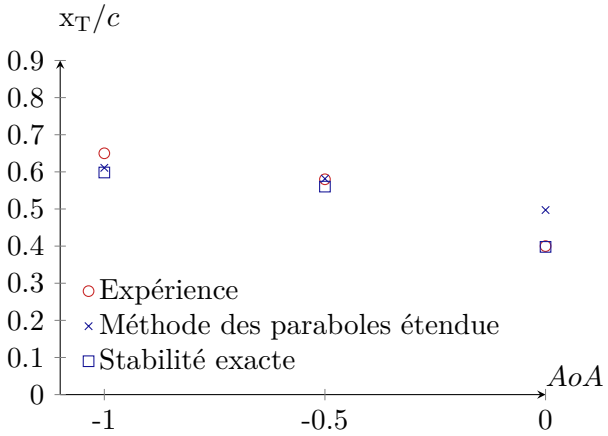


FIGURE 7.12. – Positions de transition laminaire-turbulent pour $T_p = 320K$, $U_0 = 80\ m.s^{-1}$ et les trois angles d'incidence.

La figure 7.12 montre un très bon accord entre les positions de transition déterminées numériquement et expérimentalement mis à part pour un angle d'incidence nul comme expliqué précédemment.

7.1.4.2. $T_p = 340$K

Ici, la température de paroi est fixée à 340K ce qui correspond à un rapport de température T_p/T_f proche de 1,13. Pour le calcul des facteurs N, la plage de fréquences f reste entre 3000 et 8000 Hz. Comme dans les deux précédents cas, une comparaison des courbes enveloppes est effectuée.

Un très bon accord entre les courbes enveloppes N_{env} issues de la méthode des paraboles étendue et du calcul de stabilité exacte est observé (figures 7.13, 7.14 et 7.15). Il est clairement visible sur la figure 7.13 que la prise en compte de la température de paroi est essentielle pour calculer la position de transition.

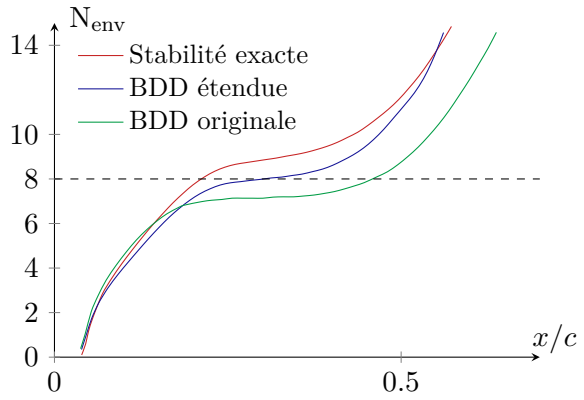


FIGURE 7.13. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$

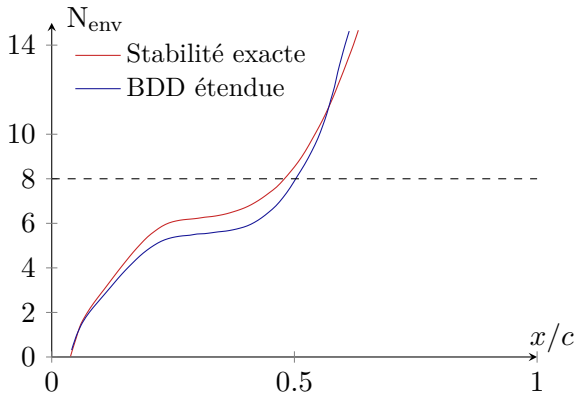


FIGURE 7.14. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$

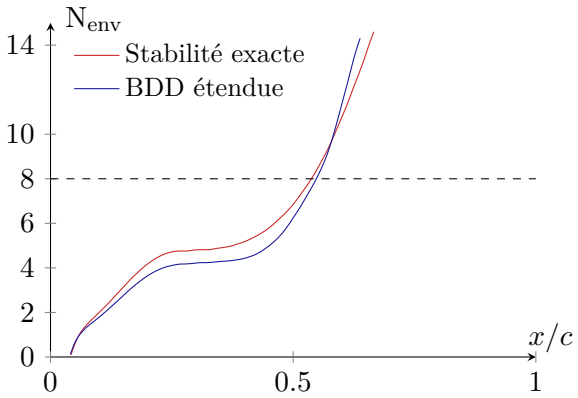


FIGURE 7.15. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$

Pour le cas $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ l'écart le plus important entre la stabilité exacte et la méthode des paraboles se trouve pour un angle d'incidence de $0\,^\circ$ et vaut 7% de corde. La raison de cet écart est identique à celle avancée pour une température de paroi de 320K : la présence d'un plateau sur les courbes enveloppes. La présence de ce plateau rend la détermination de la position de transition très sensible à la valeur seuil $\mathrm{N_T}$. En effet, pour $\mathrm{N_T} = 7{,}8$, la méthode des paraboles donne une position de transition à $\mathrm{x_T}/c = 0{,}24$ alors que pour $\mathrm{N_T} = 8{,}2$ la position de transition est $\mathrm{x_T}/c = 0{,}34$.
Une comparaison entre les positions de transition déterminées numériquement et expérimentalement est réalisée (figure 7.16).

La figure 7.16 montre un très bon accord entre les positions de transition déterminées numériquement et expérimentalement. Ceci permet de valider le choix du paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ comme paramètre d'indexation de la base de données pour la prise en compte de la température de paroi.

Cette première partie a permis, à l'aide de résultat expérimentaux, une première validation de la méthode des paraboles étendue sur paroi chaude. De plus, cela valide le bon choix des différents rapports $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ pour la construction de la base de données.
À priori, les résultats de la base de données sont cohérents avec des faibles valeurs de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$. Il est légitime de se demander si le modèle apporte de réelles améliorations par rapport à la base de données originale et s'il permet de réellement prendre en compte l'influence de la température de paroi. C'est pourquoi un autres cas de validation va être présenté pour un nombre de Mach plus élevé et un rapport de température $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ plus élevé tout en restant dans une configuration où

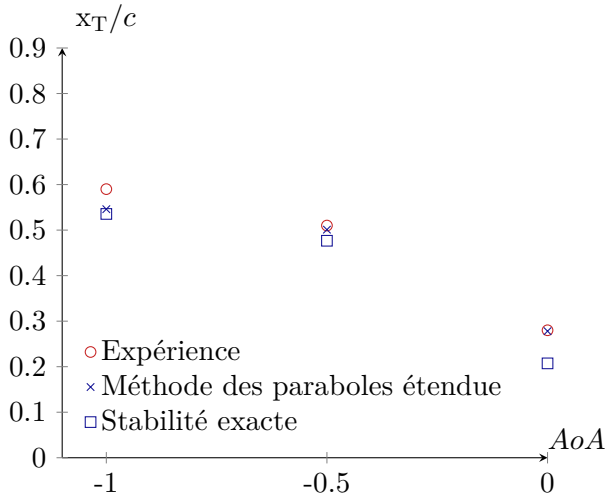


FIGURE 7.16. – Positions de transition laminaire-turbulent pour $T_p = 340K$, $U_0 = 80\ m.s^{-1}$ et les trois angles d'incidence.

il est possible d'obtenir une convergence de la simulation numérique. En effet, une température de paroi trop élevée ou un gradient de pression positif ($\beta_H \leqslant 0$) provoque un décollement de la couche limite proche du bord d'attaque. Le mécanisme de transition est alors une transition par bulbe. Nous sortons du cadre de notre étude. Une attention particulière sera donc portée pour obtenir des écoulements attachés. Cette deuxième validation sera réalisée uniquement avec une comparaison entre les résultats de la méthode des paraboles et de la stabilité exacte. Ceci est dû au fait qu'il y a peu d'expériences qui ont été réalisées sur des profils avec un chauffage de paroi pour des écoulements subsoniques.

7.2. Validation à l'aide de la stabilité exacte avec une paroi chauffée uniformément à 400K

Pour ce cas de validation, la température de paroi sur l'extrados est fixée à 400K. Afin d'éviter l'apparition d'un bulbe de décollement sur cette partie du profil, le nombre de Mach infini amont est augmenté. Pour ce calcul, le nombre de Mach vaut $M_\infty = 0{,}5$. Le rapport de température T_p/T_f est d'environ 1,3. L'angle d'incidence vaut ici $-0{,}2\,^\circ$. Les conditions génératrices correspondent à $M_\infty = 0{,}5, T_{i\infty} = 290K$ et $Re_c = 3{,}59.10^6$.

La figure 7.17 compare la courbe enveloppe du facteur N déterminée par la stabilité exacte et la courbe enveloppe du facteur N donnée par la méthode des paraboles étendue. La gamme de fréquences pour le calcul du facteur N est entre 5000 et 10000 Hz.
Ici, la position de transition est estimée à $x_T/c = 0{,}28$. Comme visible sur cette figure, le résultat de la méthode des paraboles est très proche de celui de la stabilité exacte puisque l'écart sur la position de transition est de 0,8% de corde. Ceci permet de donner une première réponse positive sur la prise en compte des effets de la température de paroi par la méthode des paraboles étendue.

Afin de valider la nouvelle base de données, il faudrait de nouveaux cas avec des rapports de T_p/T_f plus élevés. Cependant, pour ces cas l'obtention d'une simulation où l'écoulement est attaché et avec convergence du calcul est vraiment délicate sur ce profil ONERAD. Il a donc été décidé plutôt de se rapprocher des problématiques industrielles en traitant des cas avec un chauffage localisé.

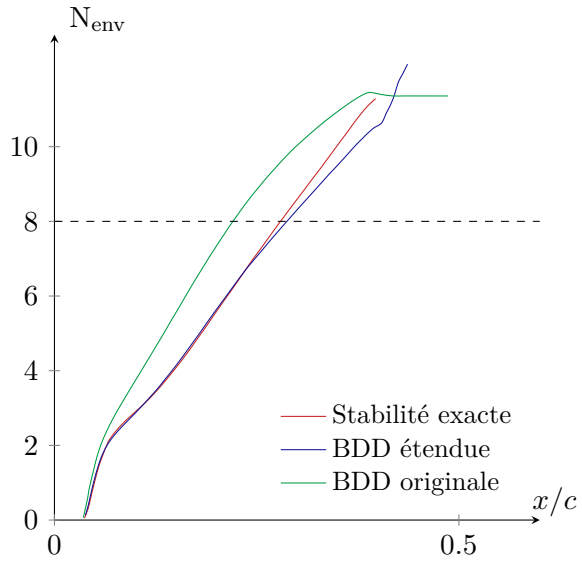


FIGURE 7.17. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}2\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$

7.3. Cas particulier du chauffage localisé

Les dispositifs de de-icing ou d'anti-icing ne se trouvent pas sur la totalité de l'aile. Ils sont en général placés proche du bord d'attaque de l'aile ou de la nacelle. Le chauffage de la paroi est donc localisé sur cette zone. Le but de cette section est de confronter la méthode des paraboles à ce type de cas, plus proches des configurations industrielles.

7.3.1. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$

Dans cette première configuration, le chauffage est appliqué sur la zone du bord d'attaque jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec une température de paroi $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$. Au delà, la condition $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ est imposée.
Pour le calcul, les conditions génératrices sont identiques à celles du cas d'un chauffage uniforme à $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ avec $AoA = 0\,^\circ$ (paragraphe 7.1.4.2). Les fréquences utilisées pour le calculs du facteur N varient entre 3000 et 8000Hz.

La figure 7.18 compare les différentes évolutions des courbes enveloppes du facteur N. Sur la zone chauffée, les courbes sont très proches même si la courbe enveloppe de la nouvelle base de données s'écarte de la courbe exacte un peu avant $x/c = 0{,}1$. Ce comportement est identique à celui observé pour un chauffage uniforme 7.13. Ensuite l'écart entre les deux courbes devient de plus en plus important. Puis à partir de $x/c = 0{,}5$, cet écart reste constant. Les pentes de $\mathrm{N_{env}}$ deviennent identiques ce qui signifie que les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles sont très proches de ceux de la stabilité exacte. Les courbes en pointillés représentent les courbes enveloppes du facteur N pour le cas de la paroi athermane présenté au début de ce chapitre. Pour $x/c \geqslant 0{,}5$, les évolutions de toutes les courbes sont très proches que ce soit dans le cas où la paroi est localement chauffée ou entièrement athermane.

L'augmentation de l'écart entre les deux courbes entre $x/c = 0{,}1$ et $x/c = 0{,}5$ est due au changement de condition à la paroi. En effet, pour $x/c > 0{,}1$, la paroi est considérée comme athermane (la condition $\partial T/\partial y = 0$ est imposée). Cette condition implique une discontinuité de la valeur du flux de chaleur à la paroi. Le paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ passe alors d'une valeur non nulle à une valeur nulle caractéristique d'une paroi athermane. Cette discontinuité implique une discontinuité dans le calcul des taux d'amplification par la méthode des paraboles. Les interpolations se font seulement sur les profils adiabatiques. Les effets d'histoire ne sont alors pas pris en compte. En effet, en imposant $\partial T/\partial y = 0$ à la paroi à partir de $x/c = 0{,}1$, il y a une zone (ici jusqu'à

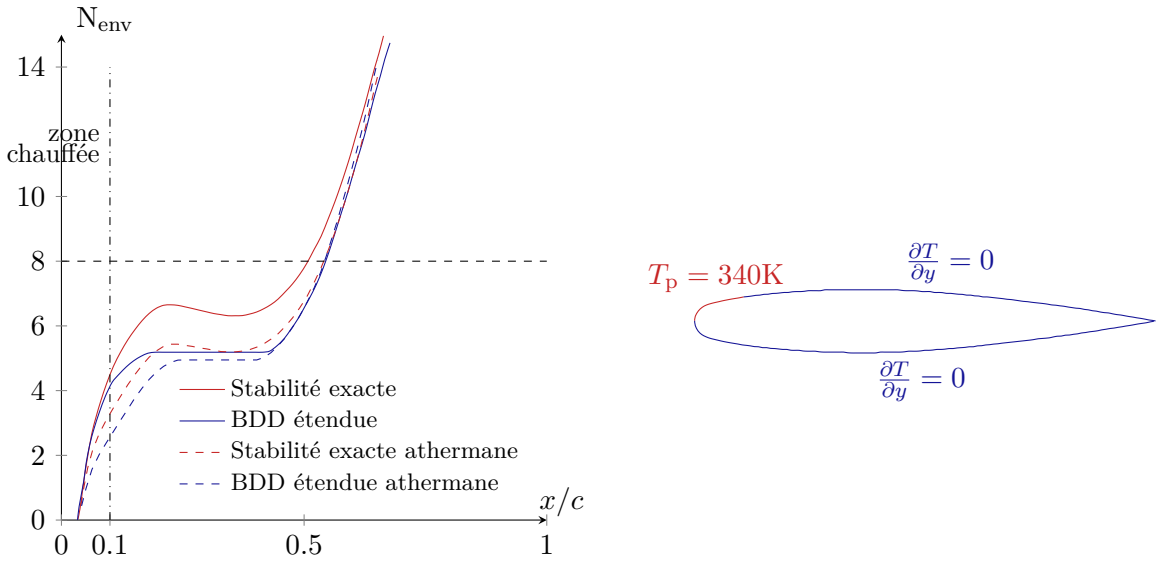


FIGURE 7.18. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^{\circ}$ et un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ et rappel des conditions limites

$x/c = 0{,}4$) où T_p évolue vers T_f. Ceci est illustré sur la figure 7.19. La courbe bleue représente le profil de température à la première position où la paroi n'est pas chauffée. Du point de vue de la base de données, les profils de température passent brusquement d'un profil isotherme à un profil adiabatique. La figure 7.20 illustre le fait qu'après le chauffage, la base de données va "encadrer" les profils elsA avec des profils de température adiabatique ce qui est évidemment non souhaité. En effet, les profils de similitude doivent encadrer de part et d'autre les profils elsA (vitesse et température) pour obtenir une détermination correcte du taux d'amplification.
Cette non prise en compte des effets d'histoire peut venir de l'indexation de la base de données par le paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$. Les profils de similitude choisis pour la construction de la base de données sont soit isothermes soit adiabatiques. La discontinuité observée est donc attendue. Proche de la jonction chauffée-non-chauffée, le profil de température réel se situe entre un profil isotherme et un profil adiabatique. À la paroi, il a une forme de profil adiabatique alors que plus loin il est proche d'un profil isotherme. Un paramètre d'indexation basé sur la forme du profil de température aurait peut être été en mesure de prendre en compte la forme particulière des profils de température à l'aval de la jonction.

Toutefois, l'erreur sur la position de transition est d'environ 4% ce qui est tout a fait acceptable. Ici la stabilité exacte donne une position de transition $\mathrm{x_T}/c = 0{,}51$ alors que pour la méthode des paraboles $\mathrm{x_T}/c = 0{,}55$. Cette remarque est valable pour des $\mathrm{N_T}$ proche de 8. Pour une valeur seuil plus faible (par exemple $\mathrm{N_T} = 6$), l'écart entre la stabilité exacte et la méthode des paraboles est beaucoup plus important. Ceci s'explique que pour $\mathrm{N_T} = 6$, la transition s'effectue dans la zone où les effets d'histoire sur le profil de température sont importants.

7.3.2. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$

Cette configuration est identique à la précédente à l'exception près que la température de paroi vaut $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$ dans la zone du bord d'attaque. Les conditions génératrices sont identiques à celles détaillées pour le cas d'un chauffage uniforme (paragraphe 7.2). L'angle d'attaque vaut $AoA = -0{,}2\,^{\circ}$. Les fréquences pour le calcul du facteur N sont comprises entre 3000 et 8000Hz.

La comparaison entre les différentes courbes enveloppes donne les mêmes conclusions que le paragraphe précédent (figure 7.21). Sur la zone chauffée, les deux courbes se superposent parfaitement. Lorsque la paroi n'est plus chauffée, la différence entre les deux courbes augmente. C'est dans cette zone que progressivement, les profils de température vont tendre vers des profils

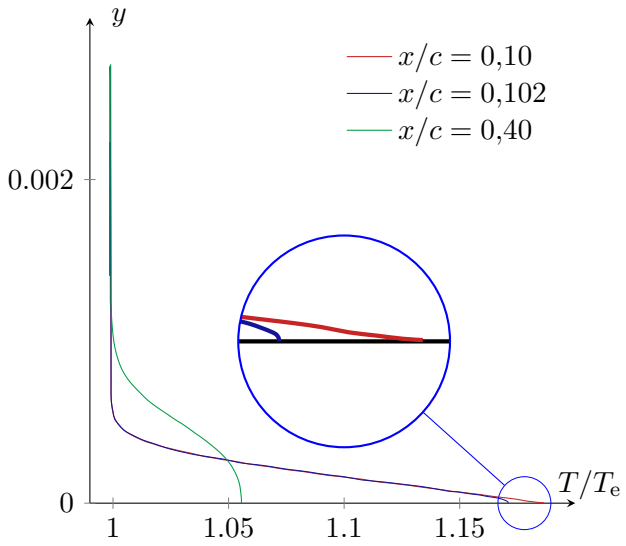


FIGURE 7.19. – Profils de température à différentes positions longitudinales pour un chauffage localisé avec $T_p = 340$K

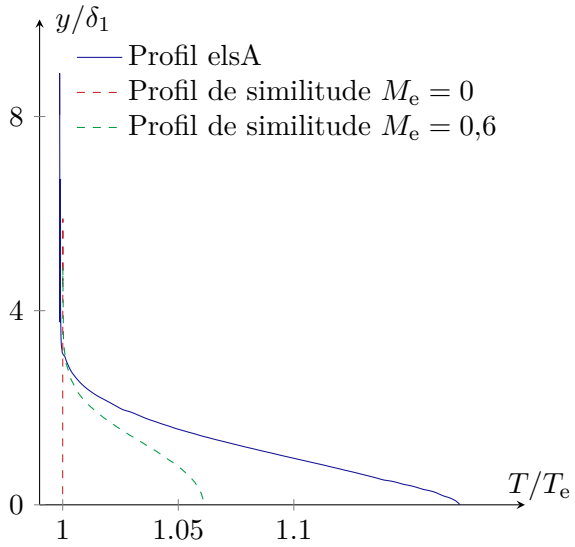


FIGURE 7.20. – Profil de température elsA à $x/c = 0{,}102$ et profils de similitude pour un chauffage localisé avec $T_p = 340$K

adiabatiques. Quant à la méthode des paraboles, elle va directement chercher des profils adiabatiques dans la base de données. À partir de $x/c = 0{,}4$, l'écart se stabilise et l'égalité des pentes est observée.

Pour cette gamme de fréquences, la méthode des paraboles donne une position de transition $x_T/c = 0{,}54$ alors que pour la stabilité exacte $x_T/c = 0{,}50$. Encore une fois, une erreur de 4% de corde est très acceptable sachant que les effets d'histoire ne sont actuellement pas pris en compte pour ce genre de configuration.

7.3.3. Chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$

Pour cette configuration, l'extrados est chauffé jusqu'à 4% de corde. Dans le cas de la paroi athermane $x/c = 0{,}04$ représente l'abscisse critique.
D'après Arnal [71], un chauffage localisé, au bon endroit, permet une stabilisation de la couche limite. En effet, le fluide voit dans un premier temps une paroi chaude. Les instabilités sont alors amplifiées. Puis après cet élément chauffant, le fluide voit une paroi froide. Ceci implique un

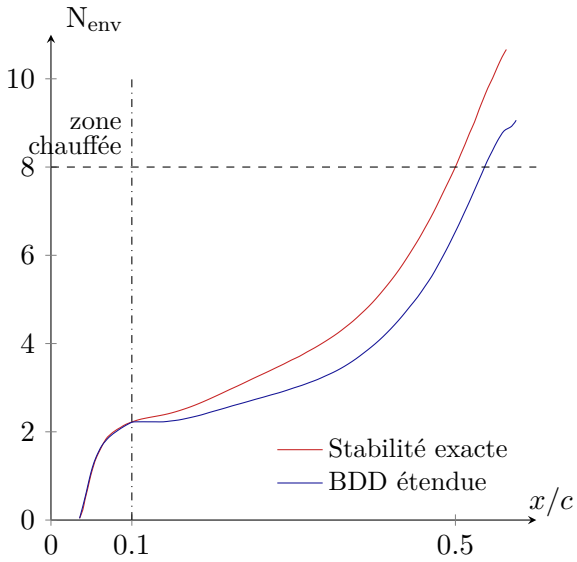


FIGURE 7.21. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes pour $AoA = -0{,}2\,^\circ$ et un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$

amortissement des instabilités. Une fois que l'équilibre thermique entre le fluide et la paroi est atteint, les instabilités s'amplifient de la même façon que si la paroi était athermane. La présence de la zone d'amortissement permet un recul de la position de transition. Cependant, la position de l'élément chauffant est primordiale. Placé dans une zone où les instabilités ne sont pas encore amplifiées, cet élément va permettre la stabilisation de la couche limite. Dans le cas contraire, l'élément va "sur-amplifier" les instabilités par rapport à une configuration où il n'y aurait pas d'élément chauffant ce qui va inévitablement déstabiliser la couche limite.

L'objectif ici est de valider la méthode des paraboles étendue dans une configuration où le chauffage est localisé très proche du bord d'attaque. Le chauffage de la paroi est réalisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$. La température de paroi est $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$. Les conditions génératrices sont identiques à celles de la section 7.1.4.2. L'angle d'incidence est fixé à $AoA = 0\,^\circ$. Pour prendre en compte la "paroi froide" après la zone chauffée, la température de la paroi T_p vaut T_f. Dans ce cas $T_\mathrm{p} = 289{,}5\mathrm{K}$. C'est une condition de paroi isotherme et non de paroi athermane.

La figure 7.22 compare les courbes enveloppes du facteur N issues de la stabilité exacte et de la méthode des paraboles. Les fréquences f utilisées pour le calcul du facteur N varient entre 3000 et 8000Hz.
Jusqu'à $x/c = 0{,}25$, les deux courbes se superposent très bien. Ensuite la courbe de stabilité exacte décroit légèrement alors que la courbe de facteur N issue de la méthode des paraboles reste constante. La position de transition est très bien calculée par la méthode des paraboles. L'écart entre la stabilité exacte et la méthode des paraboles est de 1% de corde pour la position de transition. Pour la méthode des paraboles $\mathrm{x_T}/c = 0{,}55$ et pour la stabilité exacte la position de transition est proche de $\mathrm{x_T}/c = 0{,}56$.

L'effet d'un chauffage localisé sur la stabilité de la couche limite n'est visible que sur les courbes de facteurs N issues de la stabilité exacte. En amont de la partie chauffée, la paroi est considérée comme froide. La valeur de $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ est donc négative. Cependant avant l'utilisation de la base de données un test est effectué sur les valeurs des paramètres d'indexation. Ce test a pour but d'être sur que ces valeurs sont présentes dans la base de données. Ainsi pour une valeur négative de $\mathrm{C_hRe_\Delta}$, la base de données va faire comme si $\mathrm{C_hRe_\Delta} = 0$ puisque la base ne contient pas de valeur négative du paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$. La figure 7.23 compare les courbes enveloppes dans un cas où la paroi est chauffée localement (ici jusqu'à $x/c = 0{,}04$) et dans un cas où la paroi est athermane. L'écart sur la position de transition est faible mais bien visible. Le cas d'un chauffage localisé donne ici une position légèrement plus en aval ($\mathrm{x_T}/c = 0{,}56$) que pour une paroi athermane

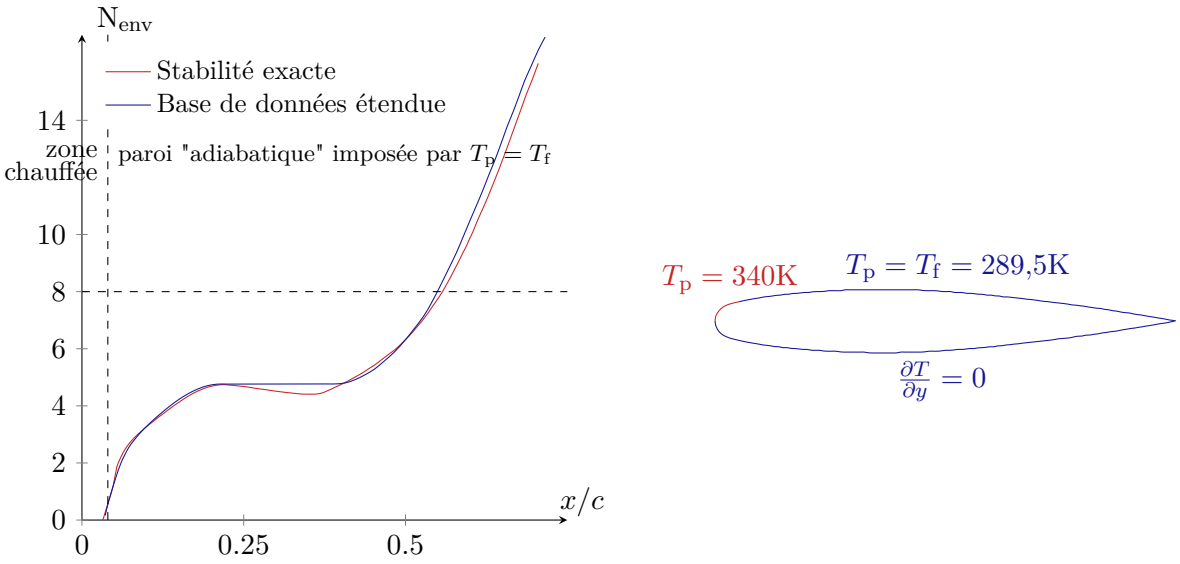


FIGURE 7.22. – Comparaison entre les différentes courbes enveloppes pour $AoA = 0\,^\circ$ et un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ avec $T_p = 340K$ et rappel des conditions limites

($x_T/c = 0{,}54$) dans le cas de la stabilité exacte (courbes rouges). Cependant la méthode des paraboles (courbes bleues) n'est pas capable de prendre en compte l'effet de la "paroi froide" sur la position de transition. Les positions de transition prévues par la méthode des paraboles pour un chauffage local et pour une paroi athermane sont très proches comme l'illustre la figure 7.23. Tout se passe comme si, immédiatement après l'élément chauffant, la paroi était athermane. Cela vient du fait que l'extension de la base de données originale a été réalisée pour les parois chaudes. L'utilisation de la méthode des paraboles avec des parois froides (cf section 3.2) ou son extension aux parois froides permettrait sûrement de tenir compte de cet effet.

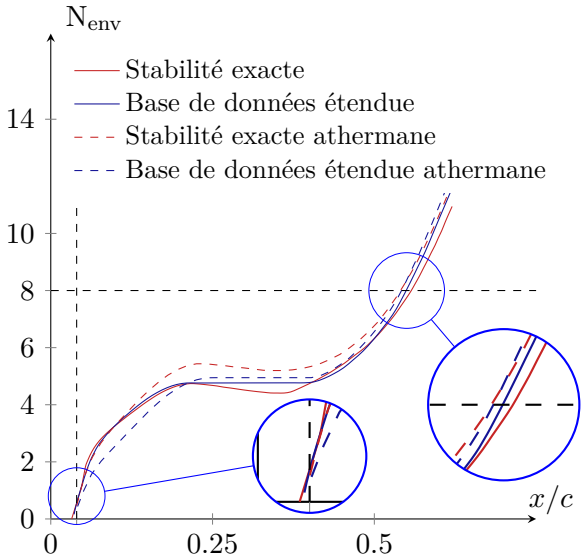


FIGURE 7.23. – Comparaison entre les courbes enveloppes pour $AoA = 0\,^\circ$, un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ avec $T_p = 340K$ et une paroi athermane

7.4. Cas avec un chauffage localisé non uniforme

Pour cette configuration, le chauffage reste localisé dans la zone du bord d'attaque mais cette fois-ci il n'est plus considéré comme uniforme. En se déplaçant du bord d'attaque vers la fin de la zone de chauffage, la température de la paroi décroit. Le chauffage est appliqué jusqu'au quart de corde (longueur de chauffage utilisée pour les dispositifs anti-givrage [72]).
La figure 7.24 représente le profil ONERAD utilisé pour les différentes simulations. La température de paroi T_p est fixée à 400K proche du bord d'attaque et décroit jusqu'à $T_\mathrm{p} = 380\mathrm{K}$ à $x/c = 0{,}25$. Cette zone de chauffage est repérée en rouge sur la figure. Au delà, la condition $\partial T/\partial y = 0$ est imposée. L'angle d'incidence est ici $AoA = -0{,}2\,^\circ$. Le gradient de température est de l'ordre de $\nabla T = 230 K.m^{-1}$ ce qui correspond à l'ordre de grandeur des systèmes de protection contre le givre.

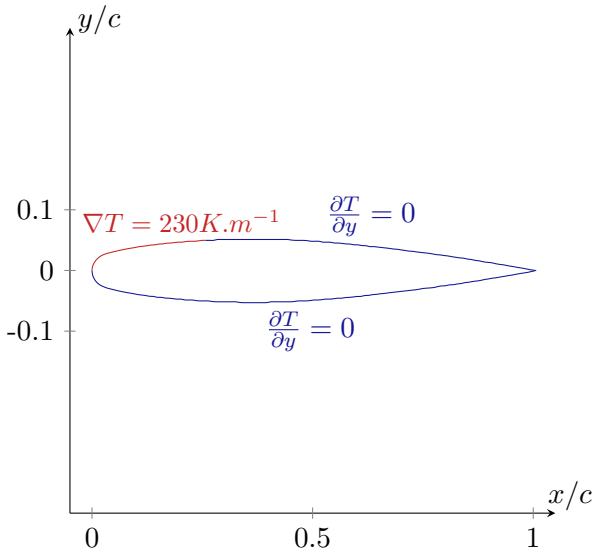


FIGURE 7.24. – Profil ONERAD chauffé avec un rappel des conditions limites

La mise en place d'une rampe de température dans le solveur elsA n'étant pas facile, il a été décidé de modéliser cette rampe avec différents paliers. Sur chaque palier, la température de paroi est uniforme. Les paliers de température sont $T_\mathrm{p} = [400, 397, 395, 390, 385, 380]\mathrm{K}$.
Les conditions génératrices sont identiques à celles utilisées dans le paragraphe 7.2. Les fréquences f sont toujours comprises entre 3000 et 8000Hz.

Sur la partie chauffée du profil ($0 \leqslant x/c \leqslant 0{,}25$), la méthode des paraboles donne des résultats en accord avec la stabilité exacte comme l'illustre la figure 7.25. Les différents paliers de température de paroi sont bien pris en compte par la méthode des paraboles. Lorsque le chauffage s'arrête la courbe enveloppe du facteur N donnée par la méthode des paraboles décroche par rapport à la courbe enveloppe de la stabilité exacte. Ce "décrochage" est du au changement de la condition à la paroi pour le profil de température comme discuté au paragraphe 7.3.1.
Pour la méthode des paraboles, $\mathrm{N_{env}}$ atteint difficilement $\mathrm{N_T} = 8$ (l'augmentation de $\mathrm{N_{env}}$ après le palier est purement numérique). Dans ce cas, l'erreur sur la position de transition est de 6% de corde (pour la méthode des paraboles $\mathrm{x_T}/c = 0{,}52$ et pour la stabilité exacte $\mathrm{x_T}/c = 0{,}46$). La base de données originale (en vert sur la figure 7.25) donne dans ce cas une position de transition $\mathrm{x_T}/c = 0{,}34$. Pour ce type de configuration, la prise en compte des effets de température de paroi est nécessaire pour obtenir une bonne prévision de la position de transition.

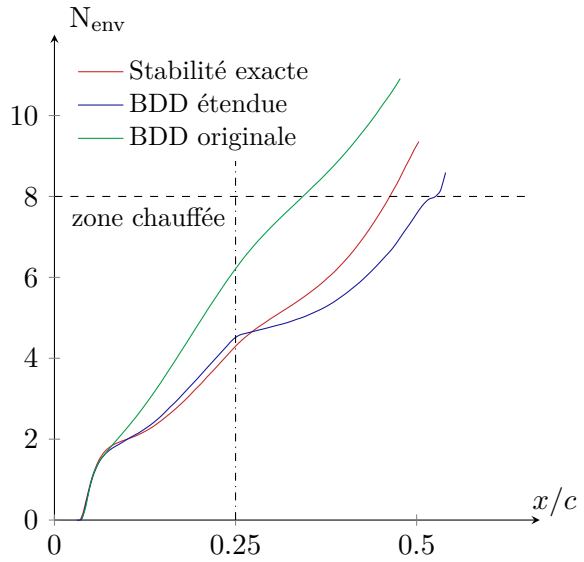


FIGURE 7.25. – Comparaison entre les courbes enveloppes pour $AoA = -0{,}2\,^{\circ}$, un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}25$ avec $\nabla T = 230 K.m^{-1}$

7.5. Conclusion

Ce chapitre a permis de valider la méthode des paraboles étendue tout en montrant ses limitations. Tout d'abord cette validation a été réalisée sur un chauffage uniforme et sur toute la longueur de l'extrados d'un profil ONERAD. Ensuite pour se rapprocher des utilisations industrielles des dispositifs de lutte contre le givrage, un chauffage uniforme et localisé sur la zone du bord d'attaque a été réalisé. Dans ces configurations la méthode des paraboles donne de très bons résultats sur la partie chauffée du profil. Cependant juste après la zone chauffée, le changement brusque de condition limite du profil de température impose une discontinuité dans le calcul du paramètre $\mathrm{C_h Re_\Delta}$. La courbe enveloppe du facteur N de la méthode des paraboles s'écarte de celle donnée par la stabilité exacte. Une fois une zone transitoire passée, les pentes des courbes enveloppes sont similaires ce qui permet de dire que les taux d'amplification donnés par la méthode des paraboles sont proches de ceux de la stabilité exacte.
Enfin, une configuration encore plus réaliste avec différents paliers de températures a été réalisée. Sur l'ensemble de la partie chauffée, la méthode des paraboles donne de très bons résultats vis à vis de la stabilité exacte. Lorsque la paroi n'est plus chauffée, un décrochage entre les deux courbes enveloppes est là encore observé. Ce décrochage était attendu au vu des résultats sur la configuration avec un chauffage uniforme et localisé. Cette limitation pourrait être levée en indexant la base de données par un paramètre représentatif de la forme et indépendant de la condition à la paroi du profil de température. Une première tentative a été réalisée à l'aide d'un facteur de forme thermique (cf Chapitre 6). Malheureusement il n'y a pas de bijection entre ce paramètre et le rapport $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$. Cette condition doit être obligatoirement respectée.

Troisième partie

Conclusion

Chapitre 8

Conclusion

8.1. Discussion

L'objectif de ce travail de thèse était de prévoir la transition laminaire-turbulent sur parois chaudes par extension de la méthode des paraboles. Cet objectif a donné naissance à quatre axes de recherche : la détermination d'un écoulement de base permettant la prise en compte de la température de paroi tout en étant représentatif des profils rencontrés par des écoulements réels, l'étude de stabilité de cet écoulement, la détermination d'un paramètre indexant la base de données contenant les effets de la température de paroi et l'étude de la capacité de la base de données étendue à prévoir la position de transition.

Tout d'abord, un écoulement de base permettant la prise en compte de la température de paroi a été déterminé. Cet écoulement est solution des équations de similitude de Levy-Lees [8]. La résolution de ces équations fait appel au concept de similitude locale. Ce concept suppose que les caractéristiques de l'écoulement extérieur et de la température de paroi varient assez lentement pour que les dérivées dans la direction longitudinale de la vitesse et de la température soient négligeables devant les dérivées dans la direction normale. Les profils de vitesse et de température issus de ces équations ont été validés à l'aide du code de couche limite 3C3D. Ces profils sont les points d'entrées des calculs de stabilité.

En revanche, les écoulements avec des fortes accélérations ou décélérations et des températures de paroi non constantes ne sont pas bien modélisés par les solutions de similitude. Ceci est causé par l'utilisation du concept de similitude locale. Ce problème de représentativité de la base de données pourrait être levé en utilisant par exemple des solutions Navier-Stokes sur différentes configurations de chauffage de paroi afin d'obtenir une base de profils représentative d'écoulements de couche limite sur parois chaudes.

L'étude de stabilité linéaire de ces écoulements a été effectuée en appliquant une approche locale. Cette approche a été appliquée avec succès sur des écoulements incompressible et compressible. En supposant que toutes les grandeurs physiques de l'écoulement pouvaient se décomposer comme une valeur moyenne et une perturbation, les équations aux petites perturbations ont pu être déterminées. Cette thèse se focalisait sur le phénomène de transition naturelle. Pour ce type de transition, les perturbations sont considérées comme étant modales. En utilisant cette propriété, les équations de stabilité linéaire locale ont pu être déterminées. Résoudre ce système d'équations revenait à résoudre un problème aux valeurs propres. La mise sous forme matricielle des équations de stabilité linéaire locale a permis de résoudre ce problème aux valeurs propres. Cette mise sous forme matricielle s'est effectuée en utilisant une théorie pseudo-temporelle. L'utilisation de cette théorie a permis un gain de temps de calcul non négligeable sur le calcul des valeurs propres. À partir de là, des diagrammes de stabilité ont pu être déterminés pour la base de profils de similitude prenant en compte la température de paroi.

La recherche des paramètres d'indexation de la base de données a été une étape clé de ces travaux. En effet, ce sont ces paramètres qui permettent de faire le lien entre les profils issus d'une simulation RANS et les profils utilisés pour la construction de la base de données. Une étude de sensibilité sur différents maillages a permis de montrer que le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ permettait une meilleur prise en compte des effets de gradient de pression que le facteur de forme incompressible H_i. La prise en compte des effets de la température de paroi est passée par la recherche et la

création d'un paramètre de similitude pour les profils de température. L'idée a été de trouver un équivalent thermique du paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ (paramètre de similitude pour les profils de vitesse). Le produit entre le coefficient de flux de chaleur C_h et un nombre de Reynolds basé sur une épaisseur d'enthalpie Δ a permis de créer le paramètre $C_h Re_\Delta$. Ce paramètre a été considéré comme paramètre de similitude pour les profils de température. Dans le cas d'un écoulement compressible, les équations de Navier-Stokes sont liées les unes aux autres. Cette caractéristique est visible sur les paramètres de similitude. Autrement dit, la température de paroi va agir sur le profil de vitesse et donc sur le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ et le gradient de pression va influencer la forme du profil de température et va donc jouer sur le paramètre $C_h Re_\Delta$. Pour éviter des pertes de bijectivité, il a été décidé de raisonner sur le couple ($C_f Re_{\theta_{11}}$,$C_h Re_\Delta$). En traçant un abaque ($C_f Re_{\theta_{11}} = f(C_h Re_\Delta)$) pour différents rapports de température T_p/T_f et différents gradients de pression β_H, la bijectivité du couple ($C_f Re_{\theta_{11}}$,$C_h Re_\Delta$) vis à vis du couple ($\beta_H, T_p/T_f$) a été validé sur des profils de similitude. Il faudra la vérifier si la base de données est étendue à des profils issus de calcul RANS.

En revanche, cette bjectivité est restreinte à une valeur maximale du gradient de pression β_H dépendante du rapport T_p/T_f. Il a été observé un repliement des courbes de l'abaque à partir d'une certaine valeur du couple (β_H,T_p/T_f). Au delà de cette valeur limite, un phénomène de survitesse sur le profil de vitesse a été observé. Ces profils ont pu être identifiés (voir Annexe G). Pour tenir compte de ce phénomène lors de la détermination de la transition, une base de données spécifique aux profils avec survitesse peut être créée.

Enfin, des simulations RANS autour d'un profil ONERAD pour différentes conditions de température de paroi et de gradient de pression ont pu valider la capacité de la base de données étendue à prédire correctement une position de transition. Certaines de ces simulations ont pu être comparées à des résultats expérimentaux [70] où le chauffage est appliqué sur toute la longueur de l'extrados. La présence d'un plateau sur les courbes enveloppes du facteur N, caractéristique de la géométrie du profil ONERAD, rend la détermination de la position de transition très dépendante de la valeur seuil N_T. Des simulations plus proche des problématiques industrielles pour le dégivrage des ailes ont été réalisées. Dans ces simulations le chauffage n'est plus appliqué sur la totalité de l'extrados mais est localisé dans une zone proche du bord d'attaque (sur le premier quart de corde). Différents cas de chauffage ont été étudiés : un chauffage localisé uniforme et un chauffage localisé non-uniforme. Dans les deux configurations, la méthode des paraboles étendue a permis une détermination précise de la position de transition.

En revanche, sur ces configurations localisées, il a été montré l'existence d'un effet d'histoire sur le profil de température. Cet effet vient de la discontinuité de la condition à la paroi pour la température. Pour la base de données, les profils de température sont soit isothermes soit adiabatiques. Or dans ce cas, les profils de température ont une forme proche d'un profil isotherme mais avec une condition à la paroi identique à un profil adiabatique. Dans la zone où les profils de température issus de la simulation RANS passent d'un profil isotherme à un profil adiabatique, la méthode des paraboles étendue sous-estime les taux d'amplification ce qui provoque un "décrochage" de la courbe enveloppe du facteur N par rapport à la stabilité exacte. Une solution pour prendre en compte ces effets d'histoire serait de trouver un autre paramètre d'indexation lié au profil de température qui prend en compte la forme de ce profil. Ce paramètre doit être indépendant de la condition à la paroi du profil de température.

8.2. Bilan

Les travaux au cours de cette thèse ont permis d'étendre la méthode des paraboles aux parois chaudes. Cette extension est capable de déterminer une position de transition sur des configurations avec des parois isothermes et athermanes.

Tout d'abord, il a été montré que le changement de variable de Levy-Lees fourni des profils de similitude permettant de prendre en compte la température de paroi. Il est alors possible d'obtenir une base de profils représentative des écoulements de couche limite sur parois chaudes.

La mise sous forme matricielle des équations de stabilité linéaire locale en utilisant la théorie pseudo-temporelle a permis de déterminer les diagrammes de stabilité associés aux profils de similitude.

La recherche des paramètres d'indexation a permis de montrer que le paramètre de similitude $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ était mieux adapté à la prise en compte des effets de gradient de pression pour une approche RANS. Elle a aussi permet de créer un paramètre de similitude pour les profils de température : le paramètre $\mathrm{C_h Re}_{\Delta}$.

Enfin, des simulations RANS autour d'un profil ONERAD sous plusieurs configurations a permis de valider la capacité de la méthode des paraboles étendue à prévoir une position de transition que la paroi soit athermane ou isotherme. Ces simulations ont aussi montré les limites de la base de données construite au cours de la thèse.

8.3. Perspectives

Les limites observées lors de la détermination des paramètres d'indexation et lors de la validation de la méthode des paraboles amènent à établir plusieurs perspectives.

Sous des conditions de gradient de pression et de température particulières, un phénomène de survitesse apparaît au sein de la couche limite. La présence de ce phénomène change radicalement la forme du profil de vitesse. Afin d'être capable de prévoir une position de transition sur un nombre important de configurations et ainsi d'augmenter le domaine de validité de la méthode des paraboles, il faudrait étendre cette méthode aux profils avec survitesse.

De plus, lorsque le chauffage de la paroi est localisé (ce qui est représentatif des problématiques industrielles), la méthode des paraboles sous-estime les taux d'amplification des instabilités lorsque que la paroi passe d'une condition isotherme à une condition athermane. L'utilisation du paramètre $\mathrm{C_h Re}_{\Delta}$ ne permet pas de prendre en compte les effets d'histoire sur le profil de température. Un paramètre basé entièrement sur la forme du profil de température pourrait être capable de prendre en compte cet effet et ainsi améliorer la prévision de la position de transition dans ce genre de configuration. Une autre solution serait d'imposer $T_\mathrm{p} = T_\mathrm{f}$ dans les zones non-chauffées et étendre la base de données aux parois froides.

Enfin, toujours pour étendre le domaine de validité de la méthode des paraboles, il semble important d'étudier en profondeur le phénomène de transition par bulbes et ainsi étendre la méthode à ce type de transition.

Annexes

Annexe A

Tri-diagonalisation du système d'équations de Levy-Lees

La résolution des équations de Levy-Lees nous permet de déterminer des profils de vitesse et de température de l'écoulement de base. La résolution de ces équations est réalisée à l'aide d'une méthode dite pseudo-instationnaire. La différence entre une solution initiale et une solution à l'instant n est considérée comme un accroissement temporel. L'objectif est d'obtenir une solution stationnaire donc une différence, entre les deux solutions, nulle. Cette méthode couplée avec une discrétisation adaptée (détaillée dans ce qui suit) nous permet d'obtenir un système linéaire sous forme d'un système tri-diagonal.
L'algorithme de Thomas (détaillé en annexe C) permet de résoudre des systèmes tri-diagonaux. Un système tri-diagonal est un système qui peut se mettre sous la forme :

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad \text{pour} \quad i = 1..n \tag{A.1}$$

avec $a_1 = 0$ et $c_n = 0$.
Si nous pouvons transformer les équations (4.1) et (4.2) en un système tri-diagonal nous pourrons utiliser l'algorithme de Thomas et ainsi déterminer les profils de vitesse et de température.
Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'équation de similitude pour la quantité de mouvement puis à celle de l'énergie.

Équation de quantité de mouvement L'équation de similitude pour la quantité de mouvement est la suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}f''\right)}_{①} + \underbrace{f f''}_{②} + \underbrace{\beta_{\mathrm{H}}\left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2\right)}_{③} = 0$$

Afin de simplifier les notations, nous noterons $\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}} = mr$.
Nous noterons aussi $\Delta_i = \delta_i + \delta_{i-1}$ la discrétisation dans la direction η.

L'objectif ici est de discrétiser l'équation ci-dessus au point i. Le terme d'accroissement temporel lié à la méthode de résolution vaut $\frac{df'(i)}{dt} = \frac{f'(i)^n - f'(i)^{n-1}}{\Delta_t}$.
La valeur de Δ_t est fixée par l'utilisateur. La dérivée en η est évaluée aux points $i + 1/2$ et $i - 1/2$.

Le terme ① nous donne donc :

$$① \Leftrightarrow \left[mr(i+\tfrac{1}{2})f''(i+\tfrac{1}{2}) - mr(i-\tfrac{1}{2})f''(i-\tfrac{1}{2})\right] \frac{1}{\delta_{i-\frac{1}{2}}+\delta_{i+\frac{1}{2}}} \tag{A.2}$$

$$\Leftrightarrow \left[mr(i+\tfrac{1}{2})f''(i+\tfrac{1}{2}) - mr(i-\tfrac{1}{2})f''(i-\tfrac{1}{2})\right] \frac{2}{\Delta_i} \tag{A.3}$$

avec

$$mr(i+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(mr(i+1) + mr(i)\right) \quad ; \quad mr(i-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(mr(i) + mr(i-1)\right) \tag{A.4}$$

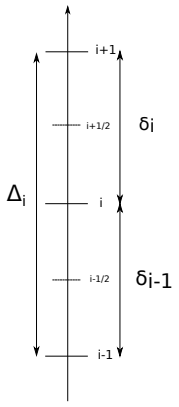


FIGURE A.1. – Description du maillage pour la tri-diagonalisation de l'équation (1.58)

$$f''(i+\frac{1}{2}) = \frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i} \quad ; \quad f''(i-\frac{1}{2}) = \frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}} \tag{A.5}$$

Ainsi le terme ① devient :

$$① \Leftrightarrow \left[(mr(i+1)+mr(i))\frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i} - (mr(i)+mr(i-1))\frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]\frac{1}{\Delta_i} \tag{A.6}$$

Les termes ② et ③ deviennent :

$$② \Leftrightarrow f(i)\frac{f'(i+1)-f'(i-1)}{\Delta_i} \tag{A.7}$$

$$③ \Leftrightarrow \beta\left(\frac{\rho_e}{\rho}(i) - f'(i)f'(i)\right) \tag{A.8}$$

En recombinant tous ces termes et en ajoutant le terme d'accroissement temporel, l'équation (4.1) devient :

$$\begin{aligned}\left[(mr(i+1)+mr(i))\frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i} - (mr(i)+mr(i-1))\frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]\frac{1}{\Delta_i} + \\ f(i)\frac{f'(i+1)-f'(i-1)}{\Delta_i} - \beta f'(i)f'(i) + \frac{f'(i)}{\Delta_t} = -\beta\frac{\rho_e}{\rho}(i) + \frac{f'(i)^{n-1}}{\Delta_t}\end{aligned} \tag{A.9}$$

Nous pouvons regrouper les termes en $f'(i+1)$, $f'(i)$ et $f'(i-1)$:

$$\begin{aligned}f'(i-1)\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}} - f(i)\right] - \\ f'(i)\left[\frac{1}{\Delta_t} + \left(\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i} + \frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}\right)\frac{1}{\Delta_i} + \beta f'(i)\right] + \\ f'(i+1)\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i} + f(i)\right] = -\beta\frac{\rho_e}{\rho}(i) + \frac{f'(i)^{n-1}}{\Delta_t}\end{aligned} \tag{A.10}$$

En notant :

$$a_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}} - f(i)\right] \tag{A.11}$$

$$b_i = -\left[\frac{1}{\Delta_t} + \left(\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i} + \frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}\right)\frac{1}{\Delta_i} + \beta f'(i)\right] \tag{A.12}$$

$$c_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i} + f(i)\right] \tag{A.13}$$

$$d_i = -\beta\frac{\rho_e}{\rho}(i) + \frac{f'(i)^{n-1}}{\Delta_t} \tag{A.14}$$

nous pouvons mettre l'équation (4.1) sous la forme :

$$a_i f'(i-1) + b_i f'(i) + c_i f'(i+1) = d_i \tag{A.15}$$

Étant donnée que l'équation (A.15) représente un système tri-diagonal, nous pouvons utiliser l'algorithme de Thomas.

Équation de l'énergie L'équation de similitude pour l'énergie est la suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}\frac{g'}{\mathrm{P_r}}\right)}_{①}+\underbrace{fg'}_{②}=-\underbrace{\frac{{U_{\mathrm{e}}}^2}{h_{\mathrm{ie}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathrm{P_r}-1}{\mathrm{P_r}}\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}f'f''\right)}_{③}$$

Comme précédemment, on note $mr=\frac{\rho\mu}{\rho_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{p}}}$ et les dérivées en η sont évaluées aux points $i+1/2$ et $i-1/2$. Le terme d'accroissement temporel vaut $\frac{dg(i)}{dt}=\frac{g(i)^n-g(i)^{n-1}}{\Delta_t}$.

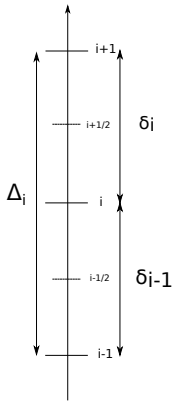


FIGURE A.2. – Description du maillage pour la tri-diagonalisation de l'équation (1.59)

On a donc :

$$① \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{P_r}}\left[mr(i+\frac{1}{2})g'(i+\frac{1}{2})-mr(i-\frac{1}{2})g'(i-\frac{1}{2})\frac{2}{\Delta_i}\right] \quad (A.16)$$

avec

$$mr(i+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\left(mr(i+1)+mr(i)\right) \quad ; \quad mr(i-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\left(mr(i)+mr(i-1)\right) \quad (A.17)$$

$$g'(i+\frac{1}{2})=\frac{g(i+1)-g(i)}{\delta_i} \quad ; \quad g'(i-\frac{1}{2})=\frac{g(i)-g(i-1)}{\delta_{i-1}} \quad (A.18)$$

Ainsi,

$$① \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{P_r}}\left[\left(mr(i+1)+mr(i)\right)\frac{g(i+1)-g(i)}{\delta_i}-\left(mr(i)+mr(i-1)\right)\frac{g(i)-g(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]\frac{1}{\Delta_i} \quad (A.19)$$

Le terme ② devient :

$$② \Leftrightarrow f(i)\frac{g(i+1)-g(i-1)}{\Delta_i} \quad (A.20)$$

Le terme ③ devient :

$$③ \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{\mathrm{P_r}}\right)\left[(mrf')(i+\frac{1}{2})f''(i+\frac{1}{2})-(mrf')(i-\frac{1}{2})f''(i-\frac{1}{2})\right]\frac{2}{\Delta_i}\frac{{U_{\mathrm{e}}}^2}{h_{\mathrm{ie}}} \quad (A.21)$$

avec

$$(mrf')(i+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(mr(i+1)f'(i+1)+mr(i)f'(i)) \quad (A.22)$$

$$(mrf')(i-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(mr(i)f'(i)+mr(i-1)f'(i-1)) \quad (A.23)$$

$$f''(i+\frac{1}{2})=\frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i} \quad f''(i-\frac{1}{2})=\frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}} \quad (A.24)$$

d'où,

$$③ \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{\mathrm{P_r}}\right)\frac{1}{\Delta_i}\frac{{U_{\mathrm{e}}}^2}{h_{\mathrm{ie}}}\left[(mr(i+1)f'(i+1)+mr(i)f'(i))\frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i}\right]- \left(1-\frac{1}{\mathrm{P_r}}\right)\frac{1}{\Delta_i}\frac{{U_{\mathrm{e}}}^2}{h_{\mathrm{ie}}}\left[(mr(i)f'(i)+mr(i-1)f'(i-1))\frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}}\right] \quad (A.25)$$

En recombinant les différents termes et en ajoutant le terme d'accroissement temporel, l'équation(4.2) devient :

$$\frac{1}{\mathrm{P_r}}\left[\left(mr(i+1)+mr(i)\right)\frac{g(i+1)-g(i)}{\delta_i}-\left(mr(i)+mr(i-1)\right)\frac{g(i)-g(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]\frac{1}{\Delta_i}+$$

$$f(i)\frac{g(i+1)-g(i-1)}{\Delta_i}+\frac{g(i)}{\Delta_t}=term1(term2-term3)+\frac{g(i)^{n-1}}{\Delta_t} \quad (A.26)$$

en notant :

$$term1 = \left(1-\frac{1}{\mathrm{P_r}}\right)\frac{1}{\Delta_i}\frac{{U_\mathrm{e}}^2}{h_\mathrm{ie}} \quad (A.27)$$

$$term2 = (mr(i+1)f'(i+1)+mr(i)f'(i))\frac{f'(i+1)-f'(i)}{\delta_i} \quad (A.28)$$

$$term3 = (mr(i)f'(i)+mr(i-1)f'(i-1))\frac{f'(i)-f'(i-1)}{\delta_{i-1}} \quad (A.29)$$

Nous pouvons regrouper les termes en $g(i+1)$, $g(i)$ et $g(i-1)$:

$$\begin{aligned} g(i-1)\frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i}+f(i)\right]- \\ g(i)\frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i}+\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]+\frac{g(i)}{\Delta_t} \\ g(i+1)\frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}-f(i)\right]=term1(term2-term3)+\frac{g(i)^{n-1}}{\Delta_t} \end{aligned} \quad (A.30)$$

En notant :

$$a_i = \frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i}+f(i)\right] \quad (A.31)$$

$$b_i = -\frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i+1)+mr(i)}{\delta_i}+\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}\right]+\frac{1}{\Delta_t} \quad (A.32)$$

$$c_i = \frac{1}{\mathrm{P_r}}\frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{mr(i)+mr(i-1)}{\delta_{i-1}}-f(i)\right] \quad (A.33)$$

$$d_i = term1(term2-term3)+\frac{g(i)^{n-1}}{\Delta_t} \quad (A.34)$$

nous pouvons mettre l'équation (4.2) sous la forme :

$$a_i g(i-1)+b_i g(i)+c_i g(i+1)=d_i \quad (A.35)$$

L'équation (A.35) représente un système tri-diagonal donc nous pouvons utiliser l'algorithme de Thomas pour sa résolution.

Annexe B

Équation d'Orr-Sommerfeld

B.1. Mise en place des équations aux petites perturbations pour un écoulement incompressible. Équation de stabilité linéaire locale

Afin de mettre en place l'équation d'Orr-Sommerfeld, une décomposition des différentes grandeurs est réalisée : $\overrightarrow{V} = \left\langle \overrightarrow{V} \right\rangle + \boldsymbol{v'}$. Toutes grandeurs se décomposent en une grandeur moyenne et une partie fluctuante :

$$\begin{cases} u^* &= \overline{U} + u' \\ v^* &= \overline{V} + v' \\ w^* &= \overline{W} + w' \\ p^* &= \overline{P} + p' \end{cases} \tag{B.1}$$

où $\overline{\varphi}$ est la partie moyenne, φ' la fluctuations et φ^* la grandeur sous forme adimensionnelle.
Nous allons considérer l'hypothèse d'écoulement parallèle ce qui nous permet de simplifier l'écriture du vecteur vitesse et par suite des équations de Navier-Stokes. Cette hypothèse nous permet d'écrire $\left\langle \overrightarrow{V} \right\rangle = (\overline{U}(y^*), 0, \overline{W}(y^*))$.

La décomposition vue précédemment (relation B.1) est utilisée puis les équations sont rendues sans dimensions. L'hypothèse d'écoulement parallèle est ensuite appliquée :

$$\frac{\partial u'}{\partial t^*} + (\overline{U}+u')\frac{\partial u'}{\partial x^*} + v'\frac{\partial(\overline{U}+u')}{\partial y^*} + (\overline{W}+w')\frac{\partial u'}{\partial z^*} + \frac{\partial(\overline{P}+p')}{\partial x^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2(\overline{U}+u')}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t^*} + (\overline{U}+u')\frac{\partial v'}{\partial x^*} + v'\frac{\partial v'}{\partial y^*} + (\overline{W}+w')\frac{\partial v'}{\partial z^*} + \frac{\partial(\overline{P}+p')}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t^*} + (\overline{U}+u')\frac{\partial w'}{\partial x^*} + v'\frac{\partial(\overline{W}+w')}{\partial y^*} + (\overline{W}+w')\frac{\partial w'}{\partial z^*} + \frac{\partial(\overline{P}+p')}{\partial z^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2(\overline{W}+w')}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.4}$$

où Re représente le nombre de Reynolds.
Nous supposons maintenant que les grandeurs moyennes vérifient les équations de Navier-Stokes stationnaires. Cette hypothèse nous permet d'obtenir une condition sur le terme de pression.

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y^*} + \overline{W}\frac{\partial \overline{U}}{\partial z^*} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial x^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{V}}{\partial y^*} + \overline{W}\frac{\partial \overline{V}}{\partial z^*} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial \overline{W}}{\partial x^*} + \overline{V}\frac{\partial \overline{W}}{\partial y^*} + \overline{W}\frac{\partial \overline{W}}{\partial z^*} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial z^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z^{*2}}\right) \tag{B.7}$$

et après application de la dernière hypothèse :

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^{*2}} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P}}{\partial y^*} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{P}}{\partial z^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial y^{*2}} \tag{B.8}$$

En injectant ces dernières relations et en effectuant une linéarisation (les termes quadratiques sont négligés), nous obtenons les équations pour les petites perturbations pour un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u'}{\partial x^*} + \frac{\partial v'}{\partial y^*} + \frac{\partial w'}{\partial z^*} = 0 \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial u'}{\partial x^*} + v'\frac{\partial \overline{U}}{\partial y^*} + \overline{W}\frac{\partial u'}{\partial z^*} + \frac{\partial p'}{\partial x^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u' \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial v'}{\partial x^*} + \overline{W}\frac{\partial v'}{\partial z^*} + \frac{\partial p'}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v' \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t^*} + \overline{U}\frac{\partial w'}{\partial x^*} + v'\frac{\partial \overline{W}}{\partial y^*} + \overline{W}\frac{\partial w'}{\partial z^*} + \frac{\partial p'}{\partial z^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 w' \tag{B.12}$$

où ∇^2 est l'opérateur laplacien : $\nabla^2(\boldsymbol{.}) = (\frac{\partial^2 .}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 .}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 .}{\partial z^{*2}})$

B.2. Approche locale : équation d'Orr-Sommerfeld

En transition naturelle, les perturbations sont modales et peuvent s'écrire sous la forme :

$$\varphi' = \underline{\varphi'}(y^*)e^{\mathbf{i}(\alpha^* x^* + \beta^* z^* - \omega^* t^*)} + C.C \tag{B.13}$$

avec $(\alpha^*, \beta^*, \omega^*) \in \mathbb{C}$ constants.
En injectant cette forme de perturbations dans les équations des petites perturbations, nous obtenons :

$$\mathbf{i}\alpha^*\underline{u'} + \mathbf{D}\underline{v'} + \mathbf{i}\beta^*\underline{w'} = 0 \tag{B.14}$$

$$-\mathbf{i}\omega^*\underline{u'} + \mathbf{i}\alpha^*\overline{U}\underline{u'} + v'\mathbf{D}\overline{U} + \mathbf{i}\beta^*\overline{W}\underline{u'} + \mathbf{i}\alpha^*\underline{p'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\alpha^{*2}\underline{u'} - \mathbf{D}\underline{u'} + \beta^{*2}\underline{u'}) = 0 \tag{B.15}$$

$$-\mathbf{i}\omega^*\underline{v'} + \mathbf{i}\alpha^*\overline{U}\underline{v'} + \mathbf{i}\beta^*\overline{W}\underline{v'} + \mathbf{D}\underline{p'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\alpha^{*2}\underline{v'} - \mathbf{D}\underline{v'} + \beta^{*2}\underline{v'}) = 0 \tag{B.16}$$

$$-\mathbf{i}\omega^*\underline{w'} + \mathbf{i}\alpha^*\overline{U}\underline{w'} + v'\mathbf{D}\overline{W} + \mathbf{i}\beta^*\overline{W}\underline{w'} + \mathbf{i}\beta^*\underline{p'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\alpha^{*2}\underline{w'} - \mathbf{D}\underline{w'} + \beta^{*2}\underline{w'}) = 0 \tag{B.17}$$

où $\mathbf{D}$ est l'opérateur de dérivation dans la direction y.
En factorisant les équations, elles deviennent :

$$\mathbf{i}(\alpha^*\overline{U} + \beta^*\overline{W} - \omega^*)\underline{u'} + \underline{v'}\mathbf{D}\overline{U} + \mathbf{i}\alpha^*\underline{p'} - [\mathbf{D}^2 - k^2]\frac{\underline{u'}}{\mathrm{Re}} = 0 \tag{B.18}$$

$$\mathbf{i}(\alpha^*\overline{U} + \beta^*\overline{W} - \omega^*)\underline{v'} + \mathbf{D}\underline{p'} - [\mathbf{D}^2 - k^2]\frac{\underline{v'}}{\mathrm{Re}} = 0 \tag{B.19}$$

$$\mathbf{i}(\alpha^*\overline{U} + \beta^*\overline{W} - \omega^*)\underline{w'} + \underline{v'}\mathbf{D}\overline{W} + \mathbf{i}\beta^*\underline{p'} - [\mathbf{D}^2 - k^2]\frac{\underline{w'}}{\mathrm{Re}} = 0 \tag{B.20}$$

avec $k^2 = \alpha^{*2} + \beta^{*2}$.

Le changement de variable suivant est réalisé :

$$\phi = \underline{v'} \quad \text{et} \quad \chi_1 = \mathbf{i}\alpha^*\underline{u'} + \mathbf{i}\beta^*\underline{w'} \tag{B.21}$$

L'équation de conservation de la masse permet d'obtenir la relation

$$\chi_1 + \mathbf{D}\phi = 0 \Longleftrightarrow \chi_1 = -\mathbf{D}\phi \tag{B.22}$$

La prochaine étape consiste à éliminer le terme de pression. Pour cela, les équations de quantité

de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$ sont multipliées par $\mathbf{i}\alpha^*\mathrm{Re}$ et $\mathbf{i}\beta^*\mathrm{Re}$ respectivement. Ensuite, les deux équations sont sommées :

$$\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\overline{U}+\beta^*\overline{W}-\omega^*)\chi_1+\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\mathbf{D}\overline{U}+\beta^*\mathbf{D}\overline{W})\phi-k^2\mathrm{Re}\underline{p'}-[\mathbf{D}^2-k^2]\chi_1=0 \tag{B.23}$$

Grâce à (B.22), l'équation (B.23) devient :

$$-\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\overline{U}+\beta^*\overline{W}-\omega^*)\mathbf{D}\phi+\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\mathbf{D}\overline{U}+\beta^*\mathbf{D}\overline{W})\phi-k^2\mathrm{Re}\underline{p'}+[\mathbf{D}^2-k^2]\mathbf{D}\phi=0 \tag{B.24}$$

L'équation ainsi obtenue est ensuite dérivée selon y et l'équation de quantité de mouvement selon y (équation (B.19)) est multipliée par $\mathrm{Re}k^2$:

$$\mathbf{D}(\text{B.24})\Rightarrow -\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\overline{U}+\beta^*\overline{W}-\omega^*)\mathbf{D}^2\phi+\mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\mathbf{D}^2\overline{U}+\beta^*\mathbf{D}^2\overline{W})\phi\quad -k^2\mathrm{Re}\mathbf{D}\underline{p'}+[\mathbf{D}^2-k^2]\mathbf{D}^2\phi=0 \tag{B.25}$$

$$Rek^2(\text{B.19})\Rightarrow \mathbf{i}\mathrm{Re}(\alpha^*\overline{U}+\beta^*\overline{W}-\omega^*)k^2\phi\qquad +k^2Re\mathbf{D}\underline{p'}-[\mathbf{D}^2-k^2]k^2\phi=0 \tag{B.26}$$

Enfin ces deux dernières équations sont sommées et factorisées. Nous obtenons :

$$\boxed{L(\phi)=[\mathbf{D}^2-k^2]^2\phi-\mathbf{i}\mathrm{Re}\left[(\alpha^*\overline{U}+\beta^*\overline{W}-\omega^*)[\mathbf{D}^2-k^2]\phi-(\alpha^*\mathbf{D}^2\overline{U}+\beta^*\mathbf{D}^2\overline{W})\phi\right]} \tag{B.27}$$

Les conditions aux limites associées sont :

$$\phi(0)=\mathbf{D}\phi(0)=0\qquad\text{et}\qquad\phi(y^*\to\infty)=0 \tag{B.28}$$

ce qui correspond à des perturbations s'annulant loin de la couche limite et d'avoir $u'=v'=w'=0$ à la paroi. L'équation (B.27) est l'équation d'**Orr-Sommerfeld**.

Annexe C

Équations de stabilité linéaire locale selon Mack [1]

Mack [1] a donné une autre forme pour équations de stabilité linéaire locale. Il a effectué des combinaisons afin d'obtenir une équation de quantité de mouvement dans la direction parallèle et dans la direction perpendiculaire au vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$. Ici nous garderons le terme de viscosité de volume λ pour plus de généralité.

Le point de départ de la démarche pour obtenir une autre forme des équations de stabilité linéaire locale reste toujours les équations pour les petites perturbations déterminées plus tôt dans ce manuscrit (équations (2.11) et (2.23)-(2.27)).
La démarche pour obtenir les équations de stabilité linéaire locale selon la direction parallèle et perpendiculaire au vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$ est la suivante :

1. On injecte (2.30) dans les équations (2.11) et (2.23)-(2.27).On notera $\mathbf{D}$ l'opérateur dérivation dans la direction y.
2. On introduit le changement de variable suivant : $\chi_1 = \alpha_c^* \underline{u^*} + \beta_c^* \underline{w^*}$ et $\chi_2 = \alpha_c^* \underline{w^*} - \beta_c^* \underline{u^*}$
3. On multiplie l'équation de quantité de mouvement selon x et z par α_c^* et β_c^* respectivement. On somme ensuite ces deux equations pour faire apparaître χ_1.
4. On multiplie ensuite l'équation de quantité de mouvement selon x et z par $-\beta_c^*$ et α_c^* respectivement. On somme ensuite ces deux equations pour faire apparaître χ_2.

En suivant cette démarche nous obtenons les équations de stabilité linéaire locale selon Mack [1]. Pour l'équation de continuité, nous avons :

$$i(\alpha_c^* \overline{U^*} + \beta_c^* \overline{W^*} - \omega_c^*)\underline{\rho^*} + \overline{\rho^*}(\mathbf{D}\underline{v^*} + i\chi_1) + \mathbf{D}\overline{\rho^*}\underline{v^*} = 0 \tag{C.1}$$

Pour l'équation de quantité de mouvement dans la direction parallèle au vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*} + \beta_c^*\overline{W^*} - \omega_c^*)\chi_1 + (\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*} + \beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\underline{v^*}\right] &= -i(\alpha_c^{*2} + \beta_c^{*2})\frac{p^*}{\gamma {M_e}^2} \\ &+ \frac{\overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}}\left[\mathbf{D}^2\chi_1 + (\alpha_c^{*2} + \beta_c^{*2})(i\mathbf{D}\underline{v^*} - 2\chi_1)\right] + \frac{2}{3}\frac{\overline{\lambda^*} - \overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}}(\alpha_c^{*2} + \beta_c^{*2})(i\mathbf{D}\underline{v^*} - \chi_1) \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}^2\overline{U^*} + \beta_c^*\mathbf{D}^2\overline{W^*})\underline{\theta^*} + \frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}\theta^* + \frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\mathbf{D}\overline{T^*}\underline{\theta^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*} + \beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\right] \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\mathbf{D}\chi_1 + i(\alpha_c^{*2} + \beta_c^{*2})\underline{v^*})\end{aligned} \tag{C.2}$$

Pour l'équation de quantité de mouvement selon y, nous avons :

$$\begin{aligned}i\overline{\rho^*}(\alpha_c^*\overline{U^*} + \beta_c^*\overline{W^*} - \omega_c^*)\underline{v^*} &= -\frac{\mathbf{D}\underline{p^*}}{\gamma {\mathrm{M}_\infty}^2} + \frac{\overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}_\infty}\left[2\mathbf{D}^2\underline{v^*} + i\mathbf{D}\chi_1 - (\alpha_c^{*2} + \beta_c^{*2})\underline{v^*}\right] + \frac{2}{3}\frac{\overline{\lambda^*} - \overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}_\infty}(\mathbf{D}^2\underline{v^*} + i\chi_1) \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\left[i\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*} + \beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\underline{\theta^*} + 2\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}T^*\mathbf{D}\underline{v^*} + \frac{2}{3}\frac{d}{dT^*}(\overline{\lambda^*} - \overline{\mu^*})\mathbf{D}\overline{T^*}(\mathbf{D}\underline{v^*} + i\chi_1)\right]\end{aligned} \tag{C.3}$$

Pour l'équation de quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire au vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{k}$, nous avons :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\chi_2+(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{W^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{U^*})\underline{v^*}\right]=\frac{\overline{\mu^*}}{\mathrm{Re}}\left[\mathbf{D}^2\chi_2+(\alpha_c^{*2}+\beta_c^{*2})\chi_2\right]+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}T^*\mathbf{D}\chi_2$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}^2\overline{W^*}+\beta_c^*\mathbf{D}^2\overline{U^*})\underline{\theta^*}+(\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}\mathbf{D}\underline{\theta^*}+\frac{d^2\overline{\mu^*}}{dT^{*2}}\mathbf{D}\overline{T^*}\underline{\theta^*})(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{W^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{U^*})\right] \quad \text{(C.4)}$$

Pour l'équation d'énergie nous avons :

$$\overline{\rho^*}\left[i(\alpha_c^*\overline{U^*}+\beta_c^*\overline{W^*}-\omega_c^*)\underline{\theta^*}+\mathbf{D}\overline{T^*}\underline{v^*}\right]=-(\gamma-1)(\mathbf{D}\underline{v^*}+i\chi_1)+\frac{\gamma\overline{\mu^*}}{\sigma\mathrm{Re}}(\mathbf{D}^2\underline{\theta^*}-(\alpha_c^{*2}+\beta_c^{*2})\underline{\theta^*})$$
$$+\frac{\gamma\overline{\mu^*}}{\sigma\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\kappa^*}\left[\frac{d\overline{\kappa^*}}{dT^*}\mathbf{D}^2\overline{T^*}+\frac{d^2\overline{\kappa^*}}{dT^{*2}}(\mathbf{D}\overline{T^*})^2\right]\underline{\theta^*}+\frac{2}{\kappa^*}\frac{d\overline{\kappa^*}}{dT^*}\mathbf{D}\overline{T^*}\mathbf{D}\underline{\theta^*}\right)$$
$$+\gamma(\gamma-1){M_\mathrm{e}}^2\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[i2\overline{\mu^*}(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\underline{v^*}+\frac{d\overline{\mu^*}}{dT^*}((\mathbf{D}\overline{U^*})^2+(\mathbf{D}\overline{W^*})^2)\right]$$
$$+\gamma(\gamma-1){M_\mathrm{e}}^2\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{2\overline{\mu^*}}{(\alpha_c^{*2}+\beta_c^{*2})}\left[(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{U^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{W^*})\mathbf{D}\chi_1+(\alpha_c^*\mathbf{D}\overline{W^*}+\beta_c^*\mathbf{D}\overline{U^*})\mathbf{D}\chi_2\right] \quad \text{(C.5)}$$

L'équation d'état nous donne :

$$\underline{p^*}=\underline{\rho^*}/\overline{\rho^*}+\underline{\theta^*}/\overline{T^*} \quad \text{(C.6)}$$

Les équations (C.1)-(C.6) représentent une forme différente des équations de stabilité linéaire locale pour un écoulement compressible tri-dimensionnel.

Annexe D

L'algorithme de Thomas

L'algorithme de Thomas est une forme simplifiée de la méthode par élimination de Gauss et est utilisée pour résoudre des systèmes tri-diagonaux d'équations.

D.1. Forme du système d'équations

Un système tridiagonal avec n inconnues s'écrit sous la forme suivante :

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad \text{pour} \quad i = 1..n \tag{D.1}$$

avec $a_1 = 0$ et $c_n = 0$.
Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

D.2. Résolution du système

Supposons que les inconnues du système soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que nous devons résoudre les équations suivantes :

$$b_1 x_1 + c_1 x_1 = d_1 \qquad i = 1 \tag{D.3}$$
$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{D.4}$$
$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \qquad i = n \tag{D.5}$$

Nous allons modifier l'équation pour $i = 2$ avec la première ($i = 1$) :

$$(\text{équation } 2).b_1 - (\text{équation } 1).a_2 \tag{D.6}$$

ce qui donne après simplification :

$$(b_2 b_1 - c_1 a_2) x_2 + c_2 b_1 x_3 = d_2 b_1 - d_1 a_2 \tag{D.7}$$

L'effet de cette modification est d'éliminer le terme en x_1 de la deuxième équation. En utilisant la même transformation avec l'équation 2 **modifiée** sur la troisième, nous obtenons :

$$(b_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) - c_2 b_1 a_3) x_3 + c_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) x_4 = d_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) - (d_2 b_1 - d_1 a_2) a_3 \tag{D.8}$$

Cette fois c'est le terme en x_2 qui a été éliminé.
Nous pouvons donc continuer cette procédure jusqu'à la *n-ième* ligne. La *n-ième* équation ne dépendra que d'une seule inconnue, x_n. Nous pouvons donc déterminer l'expression de x_n et l'utiliser afin de résoudre la *(n-1)-ième* équation et donc déterminer l'expression de x_{n-1} et ainsi de suite. C'est ce que l'on pourrait appeler une procédure de marche en arrière (*backward*

susbtitution).
Il est clair que plus nous avancerons dans la modification des équations et plus les coefficients seront longs et compliqués. Nous pouvons donc introduire les coefficients modifiés (s'il n'y a aucun risque de division par zéro) ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
a'_i &= 0 && \text{(D.9)}\\
b'_i &= 1 && \text{(D.10)}\\
c'_1 &= \frac{c_1}{b_1} && \text{(D.11)}\\
c'_i &= \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} && \text{(D.12)}\\
d'_1 &= \frac{d_1}{b_1} && \text{(D.13)}\\
d'_i &= \frac{d_i - d'_{i-1}a_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} && \text{(D.14)}\\
& && \text{(D.15)}
\end{aligned}
$$

Avec les coefficients ci-dessus, le système devient :

$$
\begin{aligned}
x_i + c'_i x_{i+1} &= d'_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 && \text{(D.16)}\\
x_n &= d'_n && \text{(D.17)}\\
& && \text{(D.18)}
\end{aligned}
$$

Étant donné que la dernière équation ne fait intervenir qu'une seule inconnue, x_n, la substitution par marche en arrière nous donne :

$$
\begin{aligned}
x_n &= d'_n && \text{(D.19)}\\
x_i &= d'_i - c'_i x_{i+1} \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1 && \text{(D.20)}\\
& && \text{(D.21)}
\end{aligned}
$$

Annexe E

Formulation en ψ_{k} des coefficients des matrices A et B en théorie spatiale

Nous rappelons qu'en théorie spatiale, le problème aux valeurs propres est mis sous la forme :

$$A \cdot q = \alpha \cdot B \cdot q \tag{E.1}$$

Afin de tenir compte facilement de la direction de propagation des perturbations ψ_{k}, nous avons vu que nous pouvions écrire

$$\beta = \alpha \tan(\psi_{\mathrm{k}}) \tag{E.2}$$

Cette transformation implique donc une modification des coefficients des matrices A et B via la présence de α dans l'écriture de β.
Les nouveaux coefficients sont donc :

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \mathbf{D}\rho + \rho\mathbf{D} \\
A_{13} &= 0 \\
A_{14} &= i\omega\rho/T \\
A_{15} &= -i\omega\rho \\
\\
A_{21} &= -i\rho\omega - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{\mu}\mathbf{D}^2 + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D})\right) \\
A_{22} &= \rho\mathbf{D}\overline{U} \\
A_{24} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{U} + \mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{U}\right) \\
A_{32} &= -i\rho\omega - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{4}{3}\overline{\mu}\mathbf{D}^2 - \frac{4}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right) \\
A_{33} &= 0 \\
A_{35} &= \mathbf{D}/\gamma {M_{\mathrm{e}}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{42} &= \rho\mathbf{D}\overline{W} \\
A_{43} &= -i\rho\omega - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{\mu}\mathbf{D}^2 + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D}\right) \\
A_{44} &= 0 \\
A_{45} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}(\mathbf{D}^2\overline{W} + \mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D}) + \frac{d^2\overline{\mu}}{dT^2}\mathbf{D}T\mathbf{D}\overline{W}\right) \\
\\
A_{51} &= -2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_{\mathrm{e}}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{U}\mathbf{D} \\
A_{52} &= \rho\mathbf{D}T + (\gamma-1)\mathbf{D} \\
A_{53} &= -2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_{\mathrm{e}}}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{W}\mathbf{D}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{54} &= -i\rho\omega - \frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}}\left(\mathbf{D}^2 + \frac{1}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}^2 T + \frac{2}{\kappa}\frac{d\overline{\kappa}}{dT}\mathbf{D}T\mathbf{D} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\overline{\kappa}}{dT^2}(\mathbf{D}T)^2\right) \\
&\quad - \gamma(\gamma-1)\frac{{M_e}^2}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}((\mathbf{D}\overline{U})^2 + (\mathbf{D}\overline{W})^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= -i\rho \\
B_{13} &= -i\rho\tan(\psi_k) \\
B_{14} &= i\overline{U}\frac{\rho}{T} + i\tan(\psi_k)\rho\overline{W}/T \\
B_{15} &= -i\rho\overline{U} - i\tan(\psi_k)\rho\overline{W}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{21} &= -i\rho\overline{U} - i\rho\tan(\psi_k)\overline{W} \\
B_{22} &= i\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T + \frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D}\right) \\
B_{23} &= 0 \\
B_{25} &= -i/\gamma{M_e}^2 \\
B_{26} &= -\frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\tan(\psi_k)^2\overline{\mu} \\
B_{28} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\tan(\psi_k)\overline{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{31} &= -i\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}\mathbf{D} + \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}T\right) \\
B_{32} &= -i\rho\overline{U} - i\rho\tan(\psi_k)\overline{W} \\
B_{33} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}i\tan(\psi_k)\mathbf{D} - \frac{2}{3}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}Ti\tan(\psi_k)\right) \\
B_{34} &= i\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}\overline{U} + i\frac{1}{\mathrm{Re}}\tan(\psi_k)\frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}\overline{W} \\
B_{35} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\overline{\mu}}{dT}i\tan(\psi_k)\mathbf{D}\overline{W} \\
B_{37} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\tan(\psi_k)^2\overline{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{41} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\beta\overline{\mu} \\
B_{42} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{3}\overline{\mu}i\beta\mathbf{D} + \frac{d\overline{\mu}}{dT}\mathbf{D}Ti\beta\right) \\
B_{43} &= -i\rho\overline{U} - i\rho\tan(\psi_k)\overline{W} \\
B_{46} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{3}\beta\overline{\mu} \\
B_{48} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\mu} - i\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{4}{3}\overline{\mu}\tan(\psi_k)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{51} &= -i(\gamma-1) \\
B_{52} &= 2i\gamma(\gamma-1)\frac{{M_e}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}\mathbf{D}\overline{U} + 2\gamma(\gamma-1)\frac{{M_e}^2}{\mathrm{Re}}\overline{\mu}i\tan(\psi_k)\mathbf{D}\overline{W} \\
B_{53} &= -(\gamma-1)i\tan(\psi_k) \\
B_{54} &= -i\rho\overline{U} - i\rho\tan(\psi_k)\overline{W} \\
B_{59} &= -\frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}} - \frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{P_r Re}}\tan(\psi_k)^2
\end{aligned}
$$

Annexe F

Validation de la méthode de tir

Le but de cette annexe est de compléter la phase de validation commencée dans le chapitre 3. Nous allons directement comparer les diagrammes de stabilité donnés par Jelliti [65] et Arnal et Vignau [37] avec ceux déterminés avec la méthode de tir.
Ces comparaisons ont été réalisées pour différents nombres de Mach extérieur, différentes directions de propagation ψ_k et avec différents rapports T_p/T_f et toujours sur plaque plane ($\beta_H = 0$).

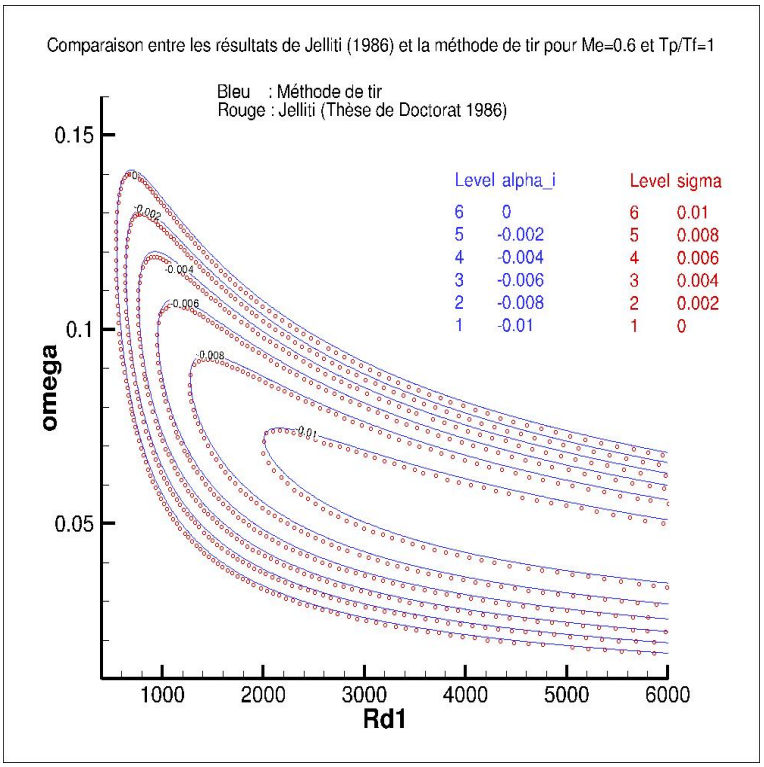


FIGURE F.1. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$

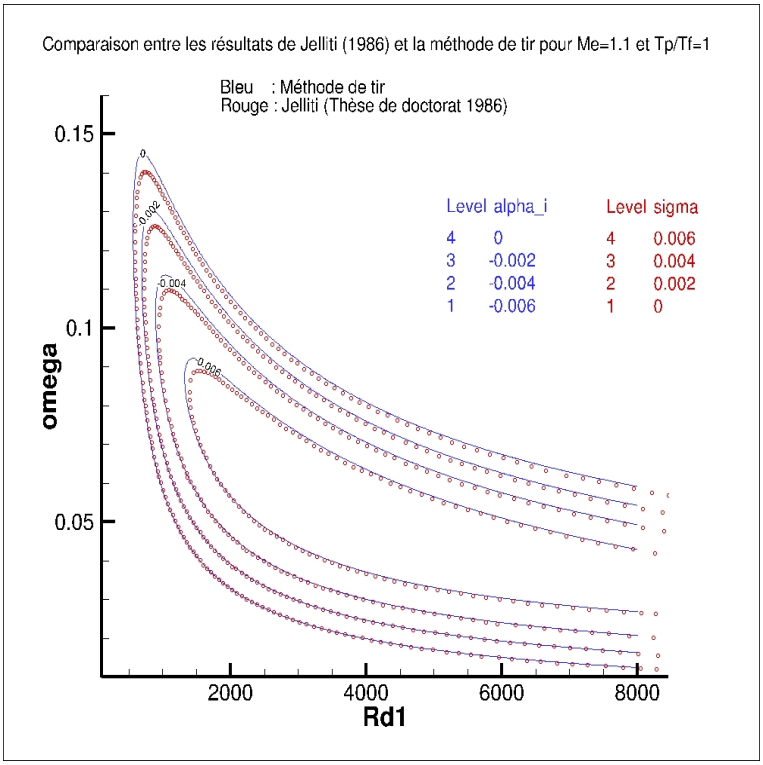


FIGURE F.2. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 1{,}1$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$

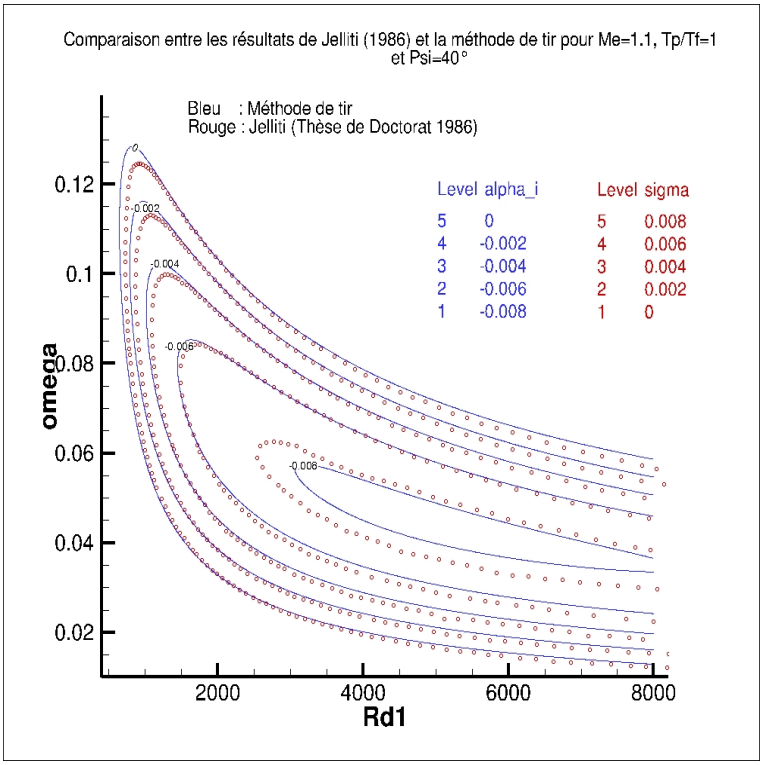


FIGURE F.3. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 1{,}1$ et $\psi_k = 40°$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$

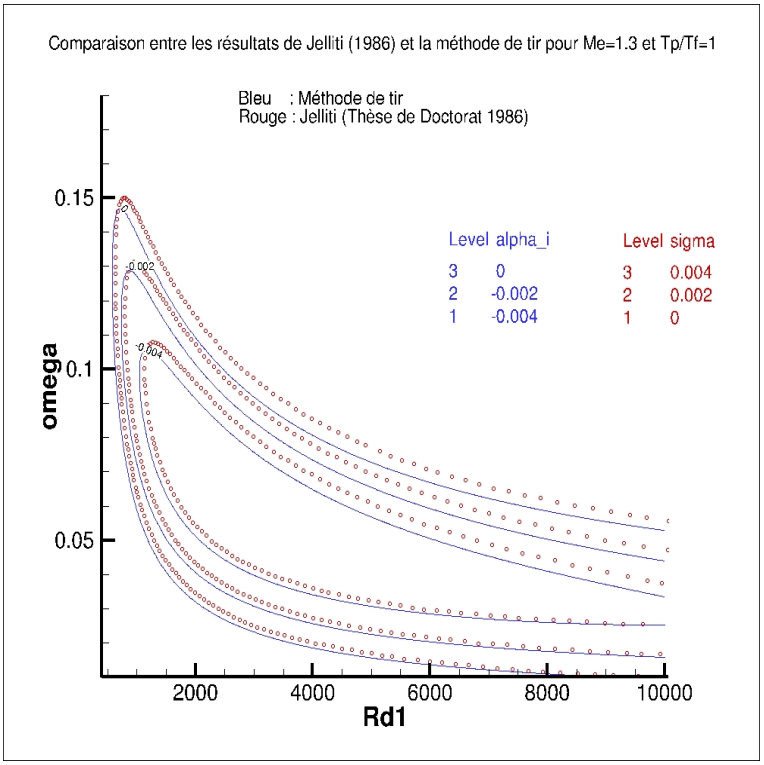


FIGURE F.4. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 1{,}3$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$

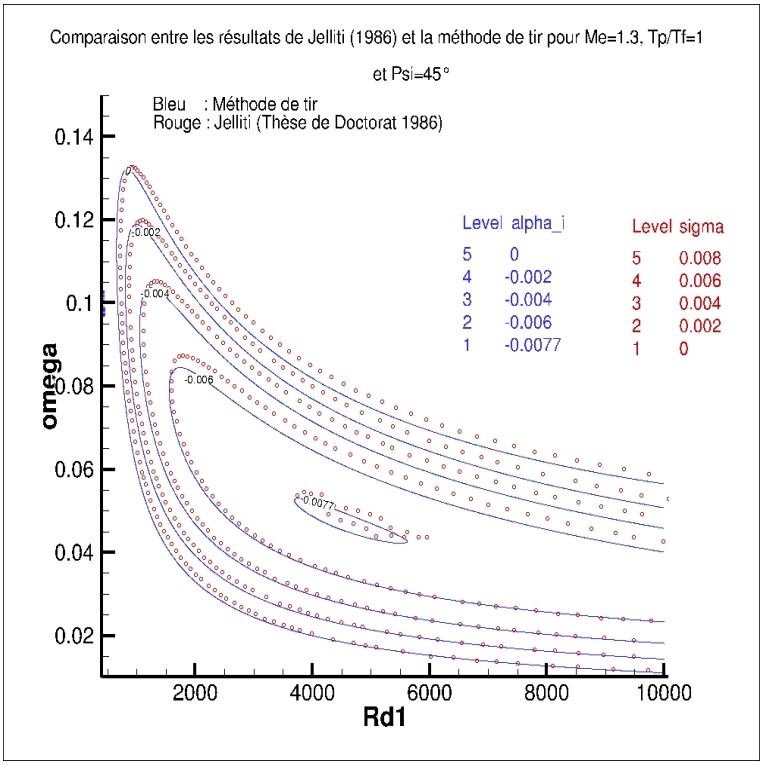


FIGURE F.5. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 1{,}3$ et $\psi_k = 45°$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$

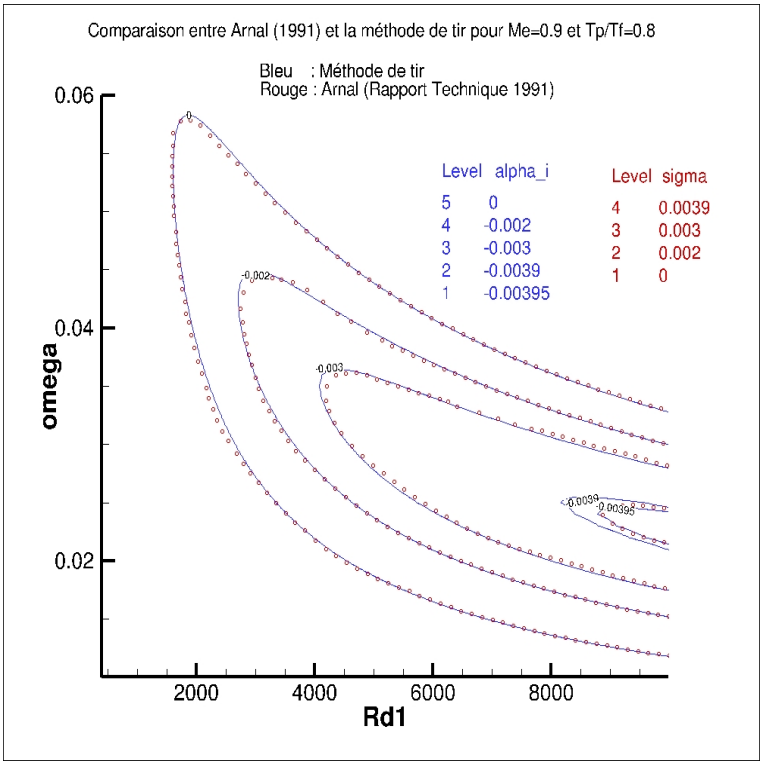


FIGURE F.6. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}9$ et $T_p/T_f = 0{,}8$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$

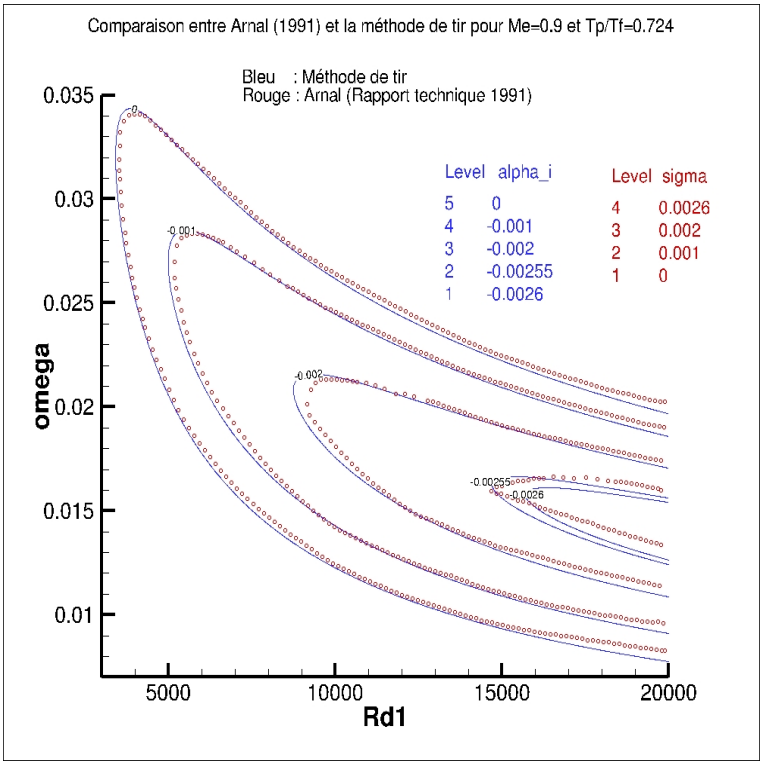


FIGURE F.7. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}9$ et $T_p/T_f = 0{,}724$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$

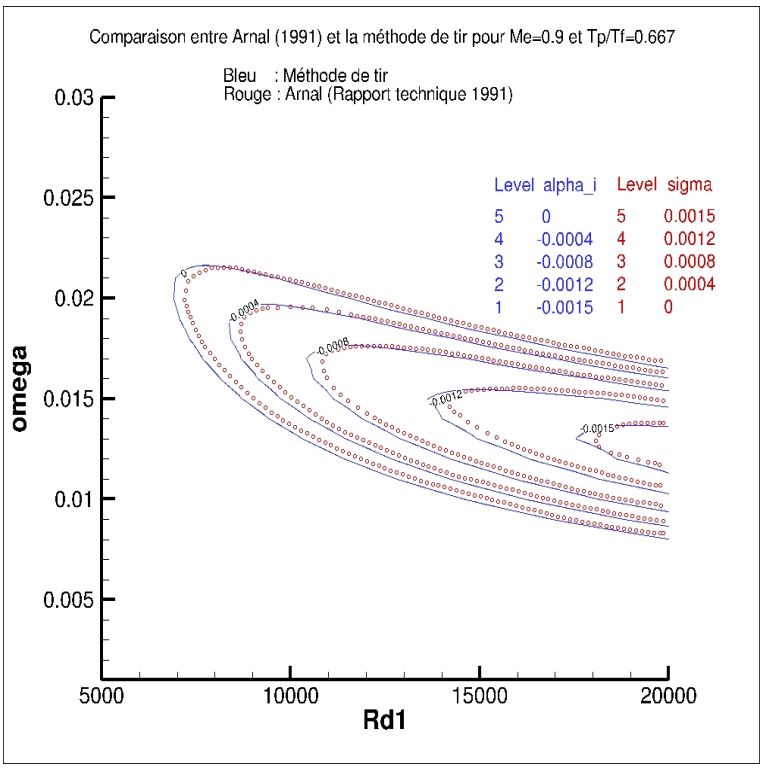


FIGURE F.8. – Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}9$ et $T_p/T_f = 0{,}667$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$

Annexe G

Détermination d'un profil avec survitesse dans un solveur RANS

Cette section est basée sur les travaux de Vivien Gillo réalisés durant son stage à l'ONERA lors du printemps 2020.

Il a été vu dans le chapitre 6 que pour des certaines conditions de gradient de pression et de température de paroi, un phénomène de survitesse apparaît au sein de la couche limite. Localement la vitesse U devient supérieure à la vitesse à l'extérieure de la couche limite U_e.
Il a été observé que ce phénomène impliquait un repliement de l'abaque et donc une perte de l'unicité du couple $(\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}, \mathrm{C_h Re}_\Delta)$ ce qui est problématique pour l'indexation de la base de données.

La base de données développée dans cette thèse ne prend pas en compte les effets de survitesse. Ces effets peuvent être pris en compte via une nouvelle base de données exclusivement dédiée à ce phénomène. L'objectif de cette section est d'être capable de déterminer si oui ou non, dans un solveur RANS, un profil de couche limite est un profil présentant une survitesse. Cette détermination se fera à l'aide d'un ou des paramètre(s).

Dans toute cette étude la survitesse sera caractérisée par son écart par rapport à la vitesse extérieure U_e. Ainsi on parlera d'une survitesse de 1% lorsque $\frac{max(U)-U_\mathrm{e}}{U_\mathrm{e}} = 1\%$. Un profil aura une survitesse si cet écart est supérieur ou égal à 1%.

G.1. Paramètre lié au profil de vitesse

L'apparition d'une survitesse entraîne des modifications sur les paramètres liés au profil de vitesse tel que le gradient de pression ou sur la forme du profil avec la présence d'un point d'inflexion. La présence d'une survitesse crée un point d'inflexion dans le profil de vitesse comme illustré sur la figure G.1.

Cependant cette caractéristique n'est pas suffisante pour caractériser la survitesse puisque pour des écoulements avec un rapport de température $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ modéré et des gradients de pression faibles, un point d'inflexion peut exister (figure G.2) sans présence de survitesse.

Un autre moyen doit être trouvé pour caractériser la présence d'une survitesse au sein de la couche limite.

G.2. Couplage paramètre de similitude - paramètre lié au profil de vitesse

L'idée de ce paragraphe est de coupler un paramètre de similitude et un paramètre du profil de vitesse afin de prévoir la survitesse. Le point d'inflexion n'étant pas un paramètre viable pour la détermination de la survitesse, il a été décidé d'utiliser le maximum du gradient de vitesse. Ce maximum est facilement accessible puisqu'il apparaît toujours proche de la paroi. Le paramètre de similitude utilisé est le paramètre $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$.

Le tracé du paramètre $\mathrm{C_f Re}_{\theta_{11}}$ en fonction du maximum du gradient de vitesse pour différents profils et pour des gammes de nombres de Mach M_e, de $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f}$ et de β_H larges présentent une

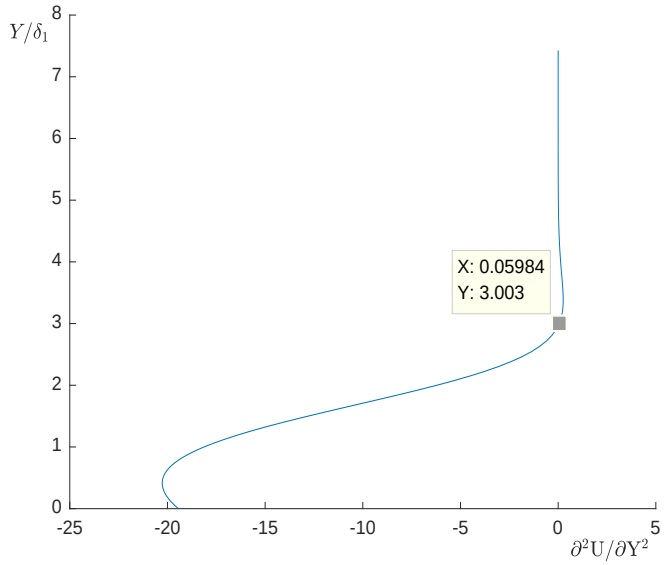


FIGURE G.1. – Dérivée seconde du profil de vitesse pour une survitesse de 1% avec $T_p/T_f = 1{,}5$, $M_e = 0{,}6$ et $\beta_H = 1{,}14$

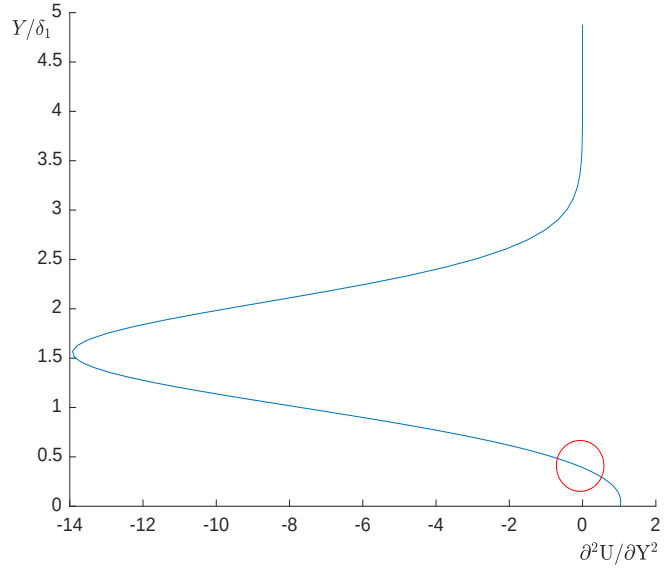


FIGURE G.2. – Profil de la dérivée seconde du profil de vitesse pour $T_p/T_f = 1{,}2$, $M_e = 0{,}6$ et $\beta_H = 0$. Apparition d'un point d'inflexion sans survitesse

nette séparation entre les profils avec et sans survitesse comme le montre la figure G.3. Cette séparation peut être utilisée comme critère de prévision de la survitesse.

Une approximation linéaire de la séparation permet d'obtenir une équation de droite comme l'illustre la figure G.4. Cette équation permet de prévoir le comportement du profil de vitesse

$$y = 0{,}890x - 0{,}620 \tag{G.1}$$

Pour déterminer si un profil donné présente une survitesse ($> 1\%$), il suffit de déterminer $C_f Re_{\theta_{11}}$ ainsi que le maximum du gradient à la paroi de ce profil. Ensuite, il faut déterminer de quel côté le point $(C_f Re_{\theta_{11}}, \max(grad))$ se situe par rapport à la droite.

Cette méthode a été utilisée sur l'ensemble des profils de similitude utilisés dans la figure précédente comme illustrée sur la figure G.5 Les triangles noirs représentent les points où les

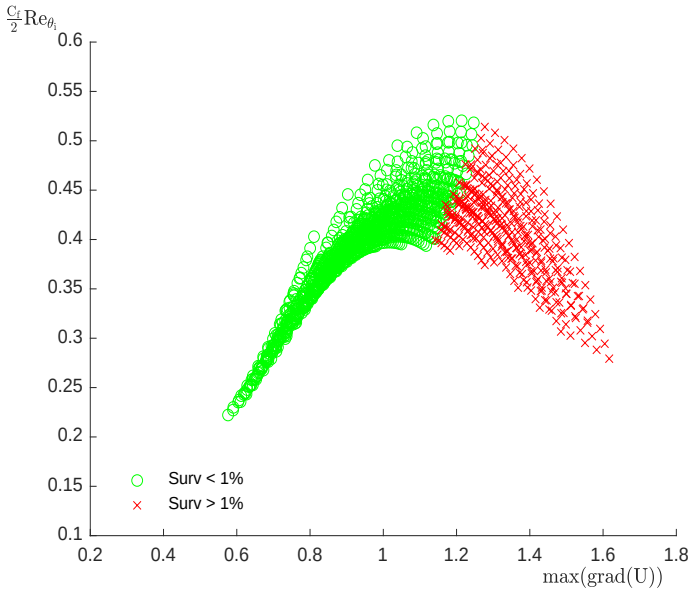


FIGURE G.3. – Tracé de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(gradU))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$

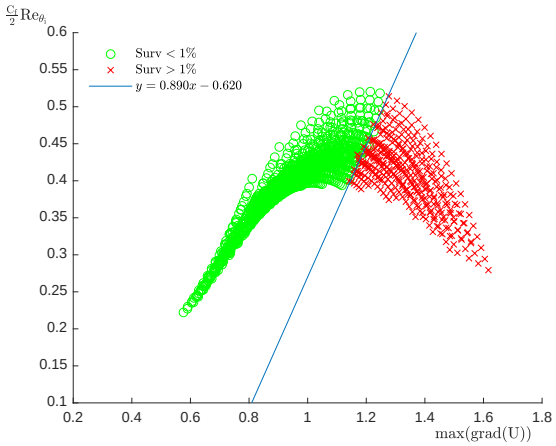


FIGURE G.4. – Approximation linéaire de la séparation de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$

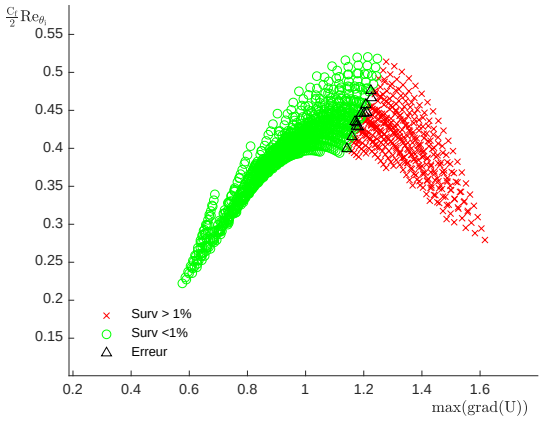


FIGURE G.5. – Tracé de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse

résultats de la méthode sont erronés. La proportion d'erreurs de prédiction d'une survitesse est minime. Cependant, il est possible de diminuer cette proportion en effectuant les mêmes tracés que la figure G.4 mais cette fois-ci pour un nombre de Mach fixé. Le nombre d'erreur diminue considérablement comme illustré par les figure G.6, G.7, G.8 et G.9.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut stocker les différentes équations de droites dans une base de données. Ensuite, à chaque station des interpolations entre les coefficients devront être réalisées ce qui complexifie un peu plus la structure du solveur.
C'est pourquoi dans un premier temps, l'approximation réalisée sur l'ensemble des nombres de Mach peut être utilisée.

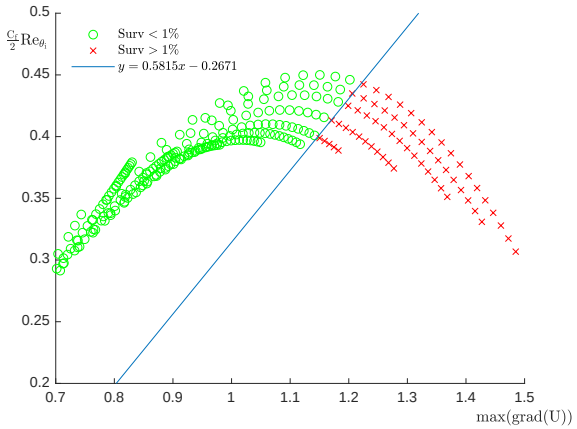


FIGURE G.6. – Approximation linéaire de la séparation de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}3$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$

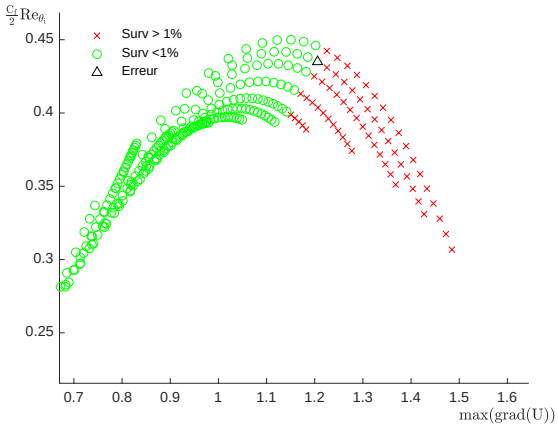


FIGURE G.7. – Tracé de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}3$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse

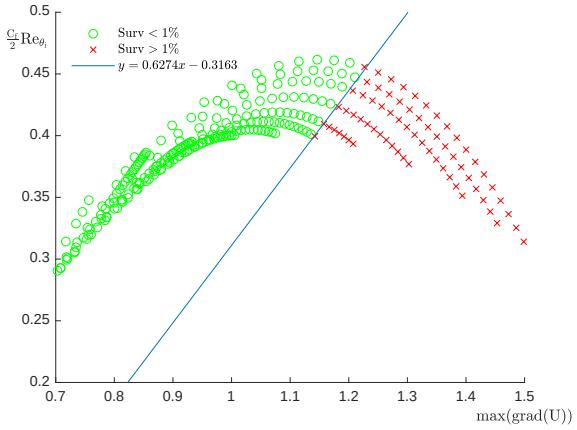


FIGURE G.8. – Approximation linéaire de la séparation de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$

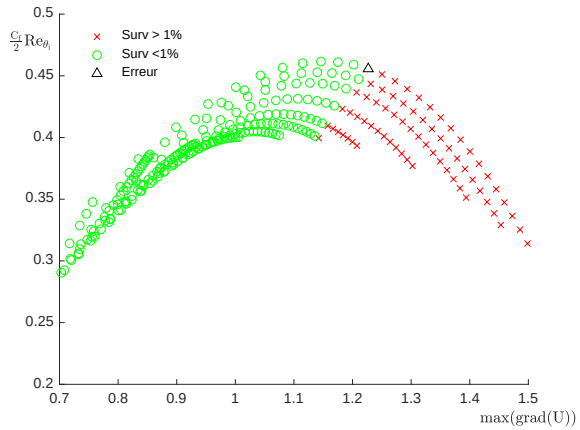


FIGURE G.9. – Tracé de $C_fRe_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse

Table (exhaustive) des matières

Remerciements iii
1. Introduction . . . vii

I. État de l'art 1

1. Couche limite et transition laminaire-turbulent 3
1.1. Hypothèses relatives à la couche limite . . . 4
1.2. Équations de Prandtl . . . 5
1.2.1. Couche limite incompressible . . . 5
1.2.2. Couche limite compressible . . . 7
1.3. Grandeurs caractéristiques de la couche limite . . . 8
1.3.1. Coefficient de frottement et épaisseurs de couche limite . . . 8
1.3.2. Interprétation physique des épaisseurs de couche limite . . . 9
1.4. Note sur la couche limite tridimensionnelle . . . 11
1.4.1. Repère aile et repère aérodynamique . . . 11
1.4.2. Équations de couche limite compressible tridimensionnelle instationnaire . . . 12
1.5. Équations de similitude avec prise en compte de la température de paroi . . . 13
1.6. Route vers la turbulence : le phénomène de transition . . . 15
1.6.1. Différents mécanismes de transition . . . 16
1.6.2. Les perturbations modales en transition naturelle . . . 18
1.6.3. Nature des instabilités . . . 19
1.6.3.1. Instabilités visqueuses . . . 20
1.6.3.2. Instabilités visqueuses-inflexionnelles . . . 21
1.6.3.3. Instabilités inflexionnelles . . . 22
1.6.4. Paramètres agissant sur la transition . . . 23
1.6.4.1. Modification de l'écoulement de base . . . 23
1.6.4.2. Modification de la réceptivité . . . 24
1.7. Cas de la couche limite avec paroi chaude . . . 24

2. Analyse de stabilité modale de la couche limite 27
2.1. Analyse de stabilité modale . . . 28
2.1.1. Équation de stabilité linéaire locale (LLS equations) . . . 28
2.1.2. Pertinence de l'utilisation de la stabilité linéaire locale . . . 35
2.1.3. Résolution des équations de stabilité linéaire locale . . . 35
2.2. Mise en place des calculs de stabilité . . . 36
2.2.1. Théorie de la stabilité temporelle . . . 36
2.2.2. Théorie de la stabilité spatiale . . . 36
2.2.3. Mise en données d'un calcul de stabilité . . . 37
2.2.4. Cas d'un écoulement tridimensionnel . . . 38
2.2.5. Stabilité : principaux théorèmes . . . 39
2.3. Prévision de la position de transition naturelle : différentes méthodes . . . 42
2.3.1. Méthode du e^N . . . 42
2.3.2. Méthodes simplifiées . . . 44
2.3.3. Utilisation de la méthode e^N dans un solveur RANS . . . 45

3. La méthode des paraboles pour les instabilités de type Tollmien-Schlichting 47
3.1. Modèle V : instabilités visqueuses en régime transsonique . . . 48
3.2. Modèle VI : instabilités visqueuses-inflexionnelles en régime supersonique . . . 49

II. Développement de la nouvelle base de données 53

4. Étude des instabilités longitudinales de la couche limite sur paroi chaude 55
4.1. Génération des profils de vitesse et de température de référence . . . 56
4.1.1. Résolutions des équations de similitude . . . 56
4.1.2. Construction de la base de profils de couche limite de référence . . . 57
4.2. Construction des diagrammes de stabilité . . . 58
4.2.1. Résolution d'un problème aux valeurs propres à l'aide de la méthode de tir 58
4.2.1.1. Méthode de tir en théorie spatiale . . . 58
4.2.1.2. Méthode de tir en théorie pseudo-temporelle . . . 62
4.2.1.3. Bilan des deux formulations . . . 64
4.2.2. Validation des diagrammes de stabilité sur paroi athermane . . . 65
4.2.2.1. Validation de la méthode de tir avec formulation pseudo-temporelle 65
4.2.2.2. Validation de la méthode de tir avec des valeurs de référence . . . 67
4.2.3. Diagrammes de stabilité sur paroi chaude . . . 67

5. Modélisation de l'évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales 73
5.1. Évolution des taux d'amplification des instabilités longitudinales sur paroi chaude 74
5.2. Construction de la nouvelle base de données . . . 75
5.2.1. Instabilités visqueuses . . . 75
5.2.2. Instabilités visqueuses-inflexionnelles . . . 79
5.2.2.1. Discussion sur la loi d'évolution de $R_{0\mathrm{v}}$ . . . 80
5.2.2.2. Discussion sur la loi d'évolution de σ_{Mv} . . . 80
5.2.3. Reconstruction des paraboles . . . 82
5.2.3.1. Modèle visqueux . . . 82
5.2.3.2. Modèle visqueux-inflexionnel . . . 83

6. Adaptation de la base de données à une approche RANS 85
6.1. La méthode des paraboles dans un calcul RANS . . . 85
6.2. Prise en compte des effets de gradient de pression sur paroi athermane . . . 86
6.2.1. Comparaison et validation sur différents maillages . . . 86
6.2.1.1. Comparaison et validation sur maillage raffiné . . . 86
6.2.1.2. Comparaison et validation sur maillage moyen . . . 90
6.2.1.3. Comparaison et validation sur maillage grossier . . . 92
6.2.2. Comparaison stabilité exacte et base de données . . . 95
6.2.2.1. Taux d'amplification . . . 95
6.2.2.2. Facteur N . . . 96
6.2.3. Analyse de sensibilité . . . 98
6.2.3.1. À partir des profils de similitude . . . 98
6.2.3.2. À partir du calcul RANS . . . 99
6.2.4. Conclusion . . . 101
6.3. Prise en compte des effets de température de paroi . . . 102
6.3.1. Détermination d'un paramètre de similitude pour les profils de température 102
6.3.2. Validation du paramètre $\mathrm{C_hRe_\Delta}$ . . . 104
6.3.3. Détermination d'un autre paramètre d'indexation . . . 104
6.4. Mise en évidence de l'unicité des paramètres indexant la base de données . . . 105
6.5. Note sur la construction de la base de données . . . 107

7. Étude de la capacité de la méthode des paraboles étendue à prévoir une position de transition 109
7.1. Validation à l'aide de données expérimentales . . . 110
7.1.1. Montage expérimental . . . 110
7.1.2. Mise en place du calcul numérique . . . 110
7.1.3. Cas avec paroi athermane . . . 111

7.1.4. Cas avec paroi chauffée . . . 113
7.1.4.1. $T_p = 320K$ . . . 113
7.1.4.2. $T_p = 340K$ . . . 114
7.2. Validation à l'aide de la stabilité exacte avec une paroi chauffée uniformément à 400K . . . 116
7.3. Cas particulier du chauffage localisé . . . 117
7.3.1. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_p = 340K$ . . . 117
7.3.2. Chauffage jusqu'à $x/c = 0{,}1$ avec $T_p = 400K$ . . . 118
7.3.3. Chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ . . . 119
7.4. Cas avec un chauffage localisé non uniforme . . . 122
7.5. Conclusion . . . 123

III. Conclusion **125**

8. Conclusion **127**
8.1. Discussion . . . 127
8.2. Bilan . . . 129
8.3. Perspectives . . . 129

A. Tri-diagonalisation du système d'équations de Levy-Lees **133**

B. Équation d'Orr-Sommerfeld **137**
B.1. Mise en place des équations aux petites perturbations pour un écoulement incompressible. Équation de stabilité linéaire locale . . . 137
B.2. Approche locale : équation d'Orr-Sommerfeld . . . 138

C. Équations de stabilité linéaire locale selon Mack [1] **141**

D. L'algorithme de Thomas **143**
D.1. Forme du système d'équations . . . 143
D.2. Résolution du système . . . 143

E. Formulation en ψ_k des coefficients des matrices A et B en théorie spatiale **145**

F. Validation de la méthode de tir **147**

G. Détermination d'un profil avec survitesse dans un solveur RANS **153**
G.1. Paramètre lié au profil de vitesse . . . 153
G.2. Couplage paramètre de similitude - paramètre lié au profil de vitesse . . . 153

Table (exhaustive) des matières **157**

Table des figures **161**

Nomenclature **167**

Bibliographie **171**

Table des figures

1.1. Allure des distributions de températures d'une couche limite avec flux de chaleur à la paroi. . . . 9
1.2. Interprétation de l'épaisseur de déplacement . . . 10
1.3. Interprétation de l'épaisseur de quantité de mouvement . . . 11
1.4. Définitions des repères liés à l'aile (x, z, y) et à la couche limite (ξ, η, y) . . . 12
1.5. Expérience de Reynolds . . . 16
1.6. Couche limite et transition sur plaque plane . . . 16
1.7. Scénarios de transition . . . 17
1.8. Visualisation d'ondes TS dans un tunnel hydraulique (Werlé, Onera 1980) . . . 18
1.9. Point d'inflexion dans le profil de vitesse transversale w . . . 19
1.10. Visualisation d'instabilités de type crossflow stationnaire obtenues à l'Onera par sublimation pariétale . . . 19
1.11. Profils de vitesse de couche limite . . . 20
1.12. Diagramme de stabilité pour des instabilités visqueuses . . . 21
1.13. Diagramme de stabilité pour des instabilités visqueuses-inflexionelles . . . 22
1.14. Diagramme de stabilité pour des instabilités inflexionelles . . . 22
1.15. Profil de vitesse (a) et profil de courbure (b) pour différentes température de paroi (Ozgen [30]) . . . 25
1.16. Courbe neutre ($\sigma^* = 0$) pour différentes températures de paroi (Ozgen [30] . . . 25

2.1. Diagrammes de stabilité pour différents nombres de Mach sur plaque plane d'après [37] . . . 36
2.2. Description de la direction de propagation en stabilité temporelle dans le repère fixe (x, y, z) . . . 37
2.3. Description des directions de propagation et d'amplification en stabilité spatiale dans le repère fixe (x, y, z) . . . 38
2.4. Projection des composantes de l'écoulement de base dans la direction de propagation de l'instabilité dans le repère (ξ, y, η) de couche limite . . . 40
2.5. Courbes de facteurs N pour différentes fréquences, méthode enveloppe. . . . 42

3.1. Courbe iso-F approchée par deux demi-paraboles pour les instabilités visqueuses . 48
3.2. Courbe iso-F approchée par quatre demi-paraboles pour les instabilités visqueuses-inflexionnelles . . . 50

4.1. Profils de vitesse et de température sur plaque plane pour $M_e = 0{,}6$ et sur paroi athermane $T_p/T_f = 1$. . . . 57
4.2. Comparaison des profils de vitesse et de température sur plaque plane ($\beta_H = 0$) pour $M_e = 0{,}001$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ entre *Similc2* et *3C3D*. . . . 57
4.3. Comparaison des profils de vitesse et de température avec gradient de pression ($\beta_H = -0{,}12$) pour $M_e = 0{,}6$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ entre *Similc2* et *3C3D*. . . . 58
4.4. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}001$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal [68] pour différents taux d'amplification $\sigma = -\alpha_i$. . . . 68
4.5. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}9$ entre la méthode de tir et les résultats de Vignau et Arnal [37] pour différents taux d'amplification $\sigma = -\alpha_i$. 68
4.6. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}001$ entre la méthode de tir avec une formulation incompressible et les résultats d'Arnal [68] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . 69
4.7. Diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ . . . 70
4.8. Diagrammes de stabilité pour $M_e = 0{,}3$ et différent rapport de température . . . 70
4.9. Diagrammes de stabilité pour $M_e = 0{,}3$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ . . . 71

5.1. Diagramme de stabilité pour $M_e = 0{,}6$, $\beta_H = 0$ et $T_p/T_f = 1{,}5$ 74
5.2. Diagramme de stabilité et évolution de $\sigma^* = f(\mathrm{Re}_{\delta_1})$ pour trois fréquences réduites 75
5.3. Modélisation à l'aide de demi-paraboles de $\sigma^* = f(\mathrm{Re}_{\delta_1})$ pour $F = 4{,}38.10^{-5}$ 75
5.4. Évolution de R_{1v} et R_{Mv} pour $M_e = 1{,}3$ et pour un gradient de pression positif d'après Reynaud [69] 76
5.5. Évolution de σ^* à partir d'un calcul de stabilité exacte et à partir de la modélisation de la méthode des paraboles en fonction de Re_{δ_1} pour $M_e = 0{,}3$, $T_p/T_f = 1$ et $F = 1{,}5.10^{-5}$ 77
5.6. Détermination des paramètres pour σ_{Mv} et R_{Mv} 78
5.7. Détermination des paramètres pour R_{0v} et R_{1v} 78
5.8. Courbe iso-F approchée par quatre demi-paraboles pour les instabilités visqueuses-inflexionnelles 79
5.9. Construction des arcs de paraboles en rouge pour $F = 1{,}56.10^{-4}$, $M_e = 0{,}3, T_p/T_f = 2{,}7$ et $\beta_H = 0$ 80
5.10. Évolution logarithmique du paramètre R_{0v} pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 2$ et $\beta_H = 0$ . . 81
5.11. Évolution "complète" du paramètre σ_{Mv} pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 1{,}1$ et $\beta_H = -0{,}1765$ 81
5.12. Comparaison entre un calcul de stabilité exacte, et la reconstruction des paraboles pour $M_e = 0{,}9, T_p/T_f = 1$ et $\beta_H = 0$ 82
5.13. Comparaison entre les coefficients d'Arnal et les nouveaux coefficients pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f = 1$ et $\beta_H = 0$ 83
5.14. Comparaison entre un calcul de stabilité exacte, et la reconstruction des paraboles pour $M_e = 0{,}001$, $T_p/T_f = 1{,}5$ et $\beta_H = 0$ 84

6.1. Comparaison du profil de vitesse donné par elsA sur le maillage fin et par 3C3D à $x/c = 37,24\%$ 87
6.2. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 2000$ Hz . . 89
6.3. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 3000$ Hz . . 89
6.4. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage raffiné et pour $f = 4000$ Hz . . 89
6.5. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 2000$ Hz . . 92
6.6. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 3000$ Hz . . 92
6.7. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour le maillage moyen et pour $f = 4000$ Hz . . 92
6.8. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 2000$ Hz 94
6.9. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 3000$ Hz 94
6.10. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les profils de similitude pour $f = 4000$ Hz 95
6.11. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage grossier et pour $f = 3000$ Hz 95
6.12. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage moyen et pour $f = 3000$ Hz 95
6.13. Comparaisons des taux d'amplification de référence et des taux d'amplification donnés par les méthodes des paraboles pour le maillage raffiné et pour $f = 3000$ Hz 96
6.14. Évolution de σ_{parab} le long du profil pour différentes qualités de maillage et pour $f = 3000$ Hz 96
6.15. Évolution de σ_{new} le long du profil pour différentes qualités de maillage et pour $f = 3000$ Hz 96

6.16. Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage grossier 97
6.17. Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage moyen 97
6.18. Comparaison entre le facteur N déterminé par la stabilité exacte et les deux indexations de la méthode des paraboles pour le maillage fin 97
6.19. Profils de vitesse déterminés à partir des erreurs relatives ε_{simi} sur le paramètre $C_f Re_{\theta_{11}}$ 98
6.20. Profils de vitesse déterminés à partir des erreurs relatives ε_{simi} sur H_i 98
6.21. Évolution de M_e le long de la corde et pour différents maillages 100
6.22. Évolution de H_i le long de la corde et pour différents maillages 100
6.23. Évolution de $C_f Re_{\theta_{11}}$ le long de la corde et pour différents maillages 100
6.24. Évolution de σ_P le long de la corde pour le maillage fin et grossier et pour $f = 3600$ Hz 101
6.25. Comparaisons des profils de couche limite elsA et de similitude à iso-H_i et iso-$C_f Re_{\theta_{11}}$ 102
6.26. Évolution de $C_h Re_\Delta$ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = 0$ et pour différents nombres de Mach M_e 104
6.27. Évolution de $C_h Re_\Delta$ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = 0{,}05$ et pour différents nombres de Mach M_e 104
6.28. Évolution de $C_h Re_\Delta$ en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = -0{,}05$ et pour différents nombres de MachM_e 104
6.29. Évolution de H_T en fonction de T_p/T_f pour $\beta_H = 0$ et pour $M_e = 0{,}9$ 105
6.30. Évolution de $C_h Re_\Delta$ en fonction de T_p/T_f pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H) 106
6.31. Évolution de $C_f Re_{\theta_{11}}$ en fonction de T_p/T_f pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H) 106
6.32. Évolution de $C_h Re_\Delta = f(C_f Re_{\theta_{11}})$ pour $M_e = 0{,}9$ et pour différents gradients de pression (variations de β_H) et différents rapports T_p/T_f 106
6.33. Évolution de $C_h Re_\Delta = f(C_f Re_{\theta_{11}})$ pour $M_e = 0{,}9$ après un balayage en β_H (ici $\beta_{H_{lim}} = 0{,}39$) 107
6.34. Profils de vitesse pour $\beta_H = 0{,}28 < \beta_{H_{lim}}$ pour $M_e = 0{,}9$ et différents rapports de température 108
6.35. Profils de vitesse pour $\beta_H = 1 > \beta_{H_{lim}}$ pour $M_e = 0{,}9$ et différents rapports de température 108

7.1. Montage expérimental du profil ONERAD avec peau chauffante dans la soufflerie F2 [70] 110
7.2. Maillage autour du profil ONERAD 110
7.3. Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA = 0\,^\circ$ 111
7.4. Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$ 111
7.5. Comparaison entre les distributions de K_p expérimentale et numérique pour $AoA_{exp} = -1\,^\circ$ et $AoA_{num} = -0{,}8\,^\circ$ 111
7.6. Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$. $T_p = 290$K 112
7.7. Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$. Paroi athermane 112
7.8. Comparaison entre les courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1\,^\circ$. Paroi athermane 112
7.9. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$ et $T_p = 320$K et rappel des conditions limites 113
7.10. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$ et $T_p = 320$K 114

7.11. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 320\mathrm{K}$ . . . 114
7.12. Positions de transition laminaire-turbulent pour $T_\mathrm{p} = 320K$, $U_0 = 80\ m.s^{-1}$ et les trois angles d'incidence. . . . 114
7.13. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ . . . 115
7.14. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}5\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ . . . 115
7.15. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -1\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ . . . 115
7.16. Positions de transition laminaire-turbulent pour $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$, $U_0 = 80\ m.s^{-1}$ et les trois angles d'incidence. . . . 116
7.17. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = -0{,}2\,^\circ$ et $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$ . . . 117
7.18. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes du facteur N pour $AoA = 0\,^\circ$ et un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ et rappel des conditions limites . . . 118
7.19. Profils de température à différentes positions longitudinales pour un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ . . . 119
7.20. Profil de température elsA à $x/c = 0{,}102$ et profils de similitude pour un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ . . . 119
7.21. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes pour $AoA = -0{,}2\,^\circ$ et un chauffage localisé avec $T_\mathrm{p} = 400\mathrm{K}$ . . . 120
7.22. Comparaison entre les différentes courbes enveloppes pour $AoA = 0\,^\circ$ et un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ et rappel des conditions limites . . . 121
7.23. Comparaison entre les courbes enveloppes pour $AoA = 0\,^\circ$, un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}04$ avec $T_\mathrm{p} = 340\mathrm{K}$ et une paroi athermane . . . 121
7.24. Profil ONERAD chauffé avec un rappel des conditions limites . . . 122
7.25. Comparaison entre les courbes enveloppes pour $AoA = -0{,}2\,^\circ$, un chauffage localisé jusqu'à $x/c = 0{,}25$ avec $\nabla T = 230K.m^{-1}$ . . . 123

A.1. Description du maillage pour la tri-diagonalisation de l'équation (1.58) . . . 133
A.2. Description du maillage pour la tri-diagonalisation de l'équation (1.59) . . . 135

F.1. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 0{,}6$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 147
F.2. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 1{,}1$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 148
F.3. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 1{,}1$ et $\psi_\mathrm{k} = 40°$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 148
F.4. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 1{,}3$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 149
F.5. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 1{,}3$ et $\psi_\mathrm{k} = 45°$ entre la méthode de tir et les résultats de Jelliti [65] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 149
F.6. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$ et $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 0{,}8$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 150
F.7. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$ et $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 0{,}724$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 150
F.8. Comparaison du diagramme de stabilité pour $M_\mathrm{e} = 0{,}9$ et $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 0{,}667$ entre la méthode de tir et les résultats d'Arnal et Vignau [37] avec $\sigma = -\alpha_i$ . . . 151

G.1. Dérivée seconde du profil de vitesse pour une survitesse de 1% avec $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1{,}5$, $M_\mathrm{e} = 0{,}6$ et $\beta_\mathrm{H} = 1{,}14$ . . . 154
G.2. Profil de la dérivée seconde du profil de vitesse pour $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{f} = 1{,}2$, $M_\mathrm{e} = 0{,}6$ et $\beta_\mathrm{H} = 0$. Apparition d'un point d'inflexion sans survitesse . . . 154

G.3. Tracé de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(gradU))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ 155
G.4. Approximation linéaire de la séparation de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ 155
G.5. Tracé de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e \in [0;1{,}3]$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse 155
G.6. Approximation linéaire de la séparation de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}3$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ 156
G.7. Tracé de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}3$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse 156
G.8. Approximation linéaire de la séparation de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ 156
G.9. Tracé de $C_f Re_{\theta_{11}} = f(\max(\text{grad}U))$ pour $M_e = 0{,}6$, $T_p/T_f \in [1;2]$ et $\beta_H \in [0;1{,}5]$ avec les erreurs de la méthode de détermination de survitesse 156

Nomenclature

Coefficients et paramètres aérodynamiques

K_p	Coefficient de pression 110

Couche limite

$C_f Re_{\theta_{11}}$	Paramètre de similitude pour le profil de vitesse 44
C_f	Coefficient de frottement 8
$C_h M$	Coefficient de flux de chaleur (nombre de Margoulis) 102
$C_h Re_\Delta$	Paramètre de similitude pour le profil de température 85
C_h	Coefficient de flux de chaleur 8
β_H	Paramètre de Hartree 14
M_e	Nombre de Mach à la frontière de la couche limite 8
P_e	Pression statique à la frontière de la couche limite 29
T_e	Température statique à la frontière de la couche limite 8
T_f	Température de frottement 7
T_{ie}	Température totale à la frontière de la couche limite 8
T_p	Température statique à la paroi 7
U_e	Vitesse longitudinale à la frontière de la couche limite dans le repère ligne de courant 4
V_e	Vitesse normale à la frontière de la couche limite dans le repère ligne de courant 11
W_e	Vitesse transversale à la frontière de la couche limite dans le repère aile 11
δ	Épaisseur de la couche limite dynamique 4
δ_{1i}	Épaisseur de déplacement incompressible de la couche limite dynamique 9
δ_1	Épaisseur de déplacement de la couche limite dynamique 8
Δ	Épaisseur d'enthalpie de la couche limite thermique 85
Δ	Épaisseur d'enthalpie de la couche limite 8
θ_{11i}	Épaisseur de quantité de mouvement incompressible de la couche limite dynamique 9
θ_{11}	Épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite dynamique 8
δ_T	Épaisseur de la couche limite thermique 7
H_i	Facteur de forme incompressible vii
Φ_p	Flux de chaleur à la paroi 8
h_f	Enthalpie de frottement 102
h_{ie}	Enthalpie totale à la frontière de la couche limite 8
h_p	Enthalpie statique à la paroi 102
κ_p	Conductivité thermique à la paroi 102
μ_e	Viscosité dynamique de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite 14
ν_e	Viscosité cinématique de l'écoulement à la frontière de la couche limite 19
ρ_e	Masse volumique de l'écoulement à l'extérieure de la couche limite 8
ρ_p	Masse volumique à la paroi 13
τ_p	Contrainte visqueuse à la paroi 7
u_e	Vitesse longitudinale à la frontière de la couche limite dans le repère ligne de courant 10
v_e	Vitesse normale à la frontière de la couche limite dans le repère ligne de courant 12
μ_p	Visqueuse dynamique à la paroi 13

Grandeurs liées à l'écoulement de base

$\overline{P}$	Pression moyenne de l'écoulement de base 5
$\overline{T^*}$	Température moyenne adimensionnée de l'écoulement de base 32

$\overline{T}$	Température moyenne de l'écoulement de base 29
$\overline{U^*}$	Vecteur vitesse longitudinal moyen adimensionné de l'écoulement de base 30
$\overline{U}$	Vecteur vitesse longitudinal moyen de l'écoulement de base 5
$\overline{V}$	Vecteur vitesse normal moyen de l'écoulement de base 5
$\overline{W^*}$	Vecteur vitesse transversal moyen adimensionné de l'écoulement de base 30
$\overline{W}$	Vecteur vitesse transversal moyen de l'écoulement de base 12
$\overline{\kappa^*}$	Conductivité thermique moyenne adimensionnée de l'écoulement de base 33
$\overline{\kappa}$	Conductivité thermique moyenne de l'écoulement de base 61
$\overline{\mu}$	Viscosité dynamique moyenne de l'écoulement de base 30
$\overline{\rho^*}$	Masse volumique moyenne adimensionnée de l'écoulement de base 30
$\overline{\rho}$	Masse volumique moyenne de l'écoulement de base 29
t^*	Adimensionnement de la coordonnée temporelle 5
x^*	Adimensionnement de la coordonnée longitudinale 5
y^*	Adimensionnement de la coordonnée normale 5
z^*	Adimensionnement de la coordonnée transversale 30

Grandeurs liées à l'étude de stabilité linéaire

$\mathbf{D}^2$	Matrice dérivation seconde 33
$\mathbf{D}$	Matrice dérivation première 33
Π^*	Perturbation de la pression adimensionnée de l'écoulement de base 33
u'^*	Perturbation du vecteur vitesse longitudinal adimensionnée de l'écoulement de base 30
u'	Perturbation du vecteur vitesse longitudinal de l'écoulement de base 29
V_g	Vitesse de groupe 41
v'^*	Perturbation du vecteur vitesse normal adimensionnée de l'écoulement de base 30
v'	Perturbation du vecteur vitesse normal de l'écoulement de base 29
w'^*	Perturbation du vecteur vitesse transversal adimensionnée de l'écoulement de base 30
w'	Perturbation du vecteur vitesse transversal de l'écoulement de base 29
α	Vecteur d'onde longitudinal 36
α_c^*	Adimensionnement de α_c33
α_i	Taux d'amplification longitudinal 36
α_r	Partie réelle du vecteur d'onde longitudinal 36
σ^*	Adimensionnement du taux d'amplification des perturbations 20
σ	Taux d'amplification des perturbations 24
β	Vecteur d'onde transversal 36
β_c^*	Adimensionnement de β_c33
β_i	Taux d'amplification transversal 36
β_r	Partie réelle du vecteur d'onde transversal 36
ϕ_A	Angle entre x et le vecteur d'onde k 41
ψ_A	Angle entre le vecteur d'onde k et la ligne de courant extérieure 41
θ	Angle entre x et la ligne de courant extérieure 11
ϕ_g	Angle entre x et la vitesse de groupe 39
ϕ_k	Angle entre x et le vecteur d'onde k 36
ψ_k	Angle entre la ligne de courant extérieure et le vecteur d'onde k vi
Π	Fluctuation de pression de l'écoulement de base 30
θ^*	Fluctuation de température adimensionnée de l'écoulement de base 32
θ	Fluctuation de température de l'écoulement de base 28
κ'	Perturbation de la conductivité thermique de l'écoulement de base 28
μ'	Perturbation de la viscosité dynamique de l'écoulement de base 28
ω	Pulsation de la perturbation 36
ω_c^*	Adimensionnement de ω_c33
ω_i	Taux d'amplification temporel 36

ω_r	Partie réelle de la pulsation 36
ρ'^*	Perturbation de la masse volumique adimensionnée de l'écoulement de base 30
ρ'	Perturbation de la masse volumique de l'écoulement de base 29

Lettres grecques

ε	Erreur de convergence 62
γ_{interm}	Intermittence 45

Méthode des paraboles

A_{Mi}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σMi) 50
A_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σ_{Mv}) 48
$A_{0\text{v}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{0\text{v}}$) 48
B_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σ_{Mv}) 81
C_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σ_{Mv}) 81
D_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σ_{Mv}) 81
$E_{1\text{i}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{1\text{i}}$) 50
$E_{1\text{v}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{1\text{v}}$) 50
E_{Mi}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de R_{Mi}) 50
E_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de R_{Mv}) 48
E_0	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{0\text{v}}$) 80
F_{Mi}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σMi) 50
F_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de σ_{Mv}) 48
$F_{0\text{v}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{0\text{v}}$) 48
$K_{1\text{i}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{1\text{i}}$) 50
$K_{1\text{v}}$	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{1\text{v}}$) 50
K_{Mi}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de R_{Mi}) 50
K_{Mv}	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de R_{Mv}) 48
K_0	Paramètre de la méthode des paraboles (calcul de $R_{0\text{v}}$) 80
R_{Mi}	Coefficient de la méthode des paraboles 49
R_{Mv}	Coefficient de la méthode des paraboles 48
$R_{1\text{i}}$	Coefficient de la méthode des paraboles 49
$R_{1\text{v}}$	Coefficient de la méthode des paraboles 48
$R_{0\text{i}}$	Coefficient de la méthode des paraboles 49
$R_{0\text{v}}$	Coefficient de la méthode des paraboles 48
R_{pi}	Coefficient de la méthode des paraboles 50
$\widetilde{R}$	Coefficient de la méthode des paraboles 50
$\sigma^*{}_{\text{P}}$	Taux d'amplification donné par la méthode des paraboles 20
σMi	Coefficient de la méthode des paraboles 49
σ_{Mv}	Coefficient de la méthode des paraboles 48
σ_{Ml}	Paramètre de la méthode des paraboles (limiteur de σ_{Mv}) 50
σ_{i}^*	Taux d'amplification donné par la méthode des paraboles 78
σ_{v}^*	Taux d'amplification donné par la méthode des paraboles 78

Méthode du facteur N

f	Fréquence physique des perturbations 19
N_{T}	Facteur N de transition 42
N_{env}	Enveloppe du facteur N 42
N	Facteur N 39
F	Fréquence réduite 19
Γ_{att}	Terme de forçage 45
s_{crit}	Abscisse curviligne critique 41
s	Abscisse curviligne 41

σ_{att}	Coefficient de raideur de forçage 45
x_T	Abscisse de transition 42

Nombres de Reynolds

Re_Δ	Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur d'enthalpie 85
Re_{δ_1}	Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement 19
$\text{Re}_{\theta_{11}}$	Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement 44
Re_c	Nombre de Reynolds basé sur la corde 86
Re_{crit}	Nombre de Reynolds critique 15
Re	Nombre de Reynolds 32

Variables de l'écoulement

C_p	Capacité calorifique à pression constante 7
C_v	Capacité calorifique à volume constant 28
M_∞	Nombre de Mach infini amont 86
M	Nombre de Mach 7
P_r	Nombre de Prandtl 7
P_∞	Pression statique infini amont 31
S_{suth}	Constante de Sutherland 23
$T_{i\infty}$	Température totale infini amont 86
T_i	Température totale 86
T_{suth}	Température de référence loi de Sutherland 23
T_u	Taux de turbulence infini amont 17
γ	Rapport des capacités calorifiques d'un gaz (C_p/C_v) 31
h_i	Enthalpie totale de l'écoulement 7
κ	Conductivité thermique de l'écoulement 28
μ_{ref}	Viscosité dynamique à la température de référence 23
ν	Viscosité cinématique 5
r_{gaz}	Constante spécifique d'un gaz parfait (division de la constante universelle des gaz parfait par la masse molaire du gaz) 28

Acronymes et sigles

ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales i
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes vii

Bibliographie

[1] L.M. Mack. Boundary-layer linear stabiliy theory. *AGARD report No.709*, 1984.

[2] EASA. Rapport environnement de l'aviation européenne. Technical report, EASA, 2019.

[3] D. Arnal. Boundary-layer transition : prediction based on linear theory. *AGARD report No.793*, 1993.

[4] G. Bégou. *Prévision de la transition laminaire-turbulent dans le code elsA par la méthode des paraboles*. PhD thesis, ISAE, 2017.

[5] J. Cousteix. *Aérodynamique : Couche limite laminaire*. Edition CEPADUES, 1988.

[6] K. Stewardson. Correlated incompressible and compressible boundary-layers. *Proc. Royal Society of London*, 200, 1949.

[7] L. Howarth. Concerning the effect compressibility on laminar boundary layers and their separation. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 194 :16–42, 1948.

[8] S. Levy. Effect of large temperature changes (including viscous heating) upon laminar boundary layers with variable free-stream velocity. *AIAA*, 1954.

[9] R. Michel. *Aérodynamique : Couches limites, frottement et transfert de chaleur : Chapitre : Transition de la couche limite*. ENSAE, 1972.

[10] J. Jiménez. Coherent structures in wall-bounded turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 842, 2018.

[11] M.V. Morkovin. On the many faces of transition. In *Viscous drag reduction*, pages 1–31. Springer, 1969.

[12] E. Reshotko. Paths to transition in wall layers. *AVT/VKI Lecture Series : Advances in Laminar-Turbulent Transition Modelling, VKI, Rhode-St.-Genese, Belgium, June*, pages 9–12, 2008.

[13] H.L. Reed. An analysis of wave interactions in swept-wing flows. In *Laminar-Turbulent Transition*, pages 471–478. Springer, 1985.

[14] H. Görtler. On the three-dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics, 1954.

[15] G. Hämmerlin, H Görtler, and W Tollmien. Zur instabilitätstheorie der ebenen staupunktsströmung. *50 jahre grenzschichtforschung*, pages 315–327, 1955.

[16] V.S. Kosorygin and N.P. Polyakov. Laminar boundary layers in turbulent flows. In *Laminar-Turbulent Transition*, pages 573–578. Springer, 1990.

[17] P.J. Schmid and D.S Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*, volume 142. Applied Mathematical Sciences, 2000.

[18] P. Andersson, M. Berggren, and D.S. Henningson. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Physics of Fluids*, 11(1) :134–150, 1999.

[19] P. Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 327 :101–115, 1996.

[20] G.B Schubauer and H.K Skramstad. Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate. Technical report, NACA, 1948.

[21] W.S. Saric, H.L. Reed, and E.B. White. Stability and transition of three-dimensional boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1) :413–440, 2003.

[22] J. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :57–72, 1879.

[23] L. Lees and C.C. Lin. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. Technical report, NACA, 1946.

[24] W.S. Saric, A.L. Carpenter, and H.L. Reed. Passive control of transition in three-dimensional boundary layers, with emphasis on discrete roughness elements. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 369(1940) :1352–1364, 2011.

[25] G.C. Lauchle and G.B. Gurney. Laminar boundary-layer transition on a heated underwater body. *J. Fluid Mech*, 144 :79–101, 1984.

[26] D. Arnal. Développement d'une méthode simplifiée de calcul des instabilités de couche limite en écoulement supersonique. Technical report, DERAT, 1995.

[27] D. Arnal. Etude numérique de l'effet d'un chauffage localisé sur le transition. In *32ème colloque d'aerodynamique appliquée : Optimisation et controle des ecoulements en aerodynamique*. AAAF, 1996.

[28] N. Szulga. *Étude expérimentale et numérique du contrôle de transition de couche limite par actionneurs à plasma froid surfacique*. PhD thesis, ISAE, 2016.

[29] B. Simon, D. Markus, and C. Tropea. Cancellation of Tollmien–Schlichting waves in direct vicinity of a plasma actuator. *AIAA Journal*, 56(5) :1760–1769, 2018.

[30] S. Özgen. Effect of heat transfert on stability and transition characteristics of boundary-layers. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 47, 2004.

[31] H.W. Liepmann and G.H. Fila. Investigations of effect of surface temperature and single roughness element on boundary-layer transition. Technical Report 890, NACA, 1947.

[32] D. Arnal and G. Casalis. Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36(2) :173–191, 2000.

[33] H.J. Obremski, M.V. Morkovin, and M. Landahl. A portofolio of stability characteristics of incompressible boundary layers. Technical Report AGARD report No. 134, NATO, 1969.

[34] E.G. Hauptmann. The influence of temperature dependent viscosity on laminar boundary-layer stability. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 11, 1967.

[35] H. Herwig and P. Schäfer. Influence of variables properties on the stability of two-dimensional boundary-layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 243, 1992.

[36] P. Schäfer, J. Severin, and H. Herwig. The effect of heat transfer on the stability of laminar boundary-layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38, 1995.

[37] F. Vignau and D. Arnal. Diagrammes de stabilité des profils de couche limite laminaire, en écoulement bidimensionnel compressible. Technical report, ONERA/CERT, 1991.

[38] T. Cebeci and H.H. Chen. A numerical method for predicting transition in three dimensionnal flows by spatial amplification theory. *Computational Fluid Dynamics Conference in Honolulu, Hawaï*, 1991.

[39] T. Cebeci and K. Stewartson. On stability and transition of three-dimensional flows. *AIAA Journal*, 18 :398–405, 1980.

[40] A.H. Nayfeh. Stability of three-dimensional boundary-layers. *AIAA Journal*, 18 :406–416, 1980.

[41] L.M. Mack. Stability of three-dimensional boundary-layers on swept wings at transonic speeds. In Springler-Verlag, editor, *Symposium Transsonicumm III, Göttingen.* 1988.

[42] F. Laburthe. *Problème de stabilité linéaire et prévision de la transition dans des configurations tridimensionnelles, incompressibles et compressibles.* PhD thesis, ENSAE, 1992.

[43] H. B. Squire. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 142(847) :621–628, 1933.

[44] N. Gregory, J.T. Stuart, and W.S. Walker. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 248(943) :155–199, 1955.

[45] D. Dunn and C. Lin. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 22(7) :455–477, 1955.

[46] M. Gaster. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(2) :222–224, 1962.

[47] J.L. Van Ingen. A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region. *Technische Hogeschool Delft, Vliegtuigbouwkunde, Rapport VTH-74*, 1956.

[48] A.M.O. Smith and N. Gamberoni. Transition, pressure gradient and stability theory, 1956.

[49] C. Gleyzes, J.R. Cousteix, and J.L. Bonnet. Theoretical and experimental study of low Reynolds number transitional separation bubbles. In *Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics, Notre Dame, IN*, pages 137–152, 1985.

[50] B.J. Abu-Ghannam and R. Shaw. Natural transition of boundary layers—the effects of turbulence, pressure gradient, and flow history. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 22(5) :213–228, 1980.

[51] D. Arnal, M. Habiballah, and E. Coustols. Laminar instability theory and transition criteria in two and three-dimensional flow. *La Recherche Aerospatiale (English Edition)(ISSN 0379-380X), no. 2, 1984, p. 45-63.*, 2 :45–63, 1984.

[52] D. Arnal, E. Coustols, and J. Jullien. Etude expérimentale et théorique de la transition sur une aile en flèche infinie. *La Recherche Aerospatiale*, 1984.

[53] J. Perraud and A. Durant. Stability-based Mach zero to four longitudinal transition prediction criterion. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 53, 2016.

[54] J.A. Masad and M.R. Malik. Transition correlation in subsonic flow over a flat plate. *AIAA Journal*, 31(10) :1953–1955, 1993.

[55] J.L. Van Ingen. The eN method for transition prediction. Historical review of work at TU Delft. In *38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, page 3830, 2008.

[56] M. Drela. Implicit implementation of the full eN transition criterion. In *21st AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 4066, 2003.

[57] H.W. Stock and W. Haase. Determination of lengths scales in algebraic turbulence models for Navier-Stokes methods. *AIAA Journal*, pages 5–14, 1989.

[58] J.R. Dagenhart. Amplified crossflow disturbances in the laminar boundary layer on swept wings with suction. Technical report, NASA, 1981.

[59] D. Arnal. Transition prediction in transonic flow. In *Symposium Transsonicum III*, pages 253–262. Springer, 1989.

[60] F. Menter, R.B. Langtry, S. Likki, Y. Suzen, P. Huang, and S. Völker. A correlation-based transition model using local variables - Part 1 : Model formulation. *Journal of Turbomachinery*, 2006.

[61] J. H. Choi and O. J. Kwon. Recent improvement of a correlation-based transition model for simulating three-dimensional boundary layers. *AIAA Journal*, 55(6) :2103–2108, 2017.

[62] C. Grabe, N. Shengyang, and A. Krumbein. Transport modeling for the prediction of crossflow transition. *AIAA Journal*, 56(8) :3167–3178, 2018.

[63] G. Bégou, H. Deniau, O. Vermeersch, and G. Casalis. Database approach for laminar-turbulent transition prediction : Navier-Stokes compatible reformulation. *AIAA Journal*, 2017.

[64] F. Vialle. Transition sur un ellipsoïde de révolution. Master's thesis, ENSAE, 1984.

[65] M. Jelliti. *Transition du régime laminaire au régime turbulent : effets de la tridimensionnalité et de la compressibilité*. PhD thesis, ENSAE, 1986.

[66] F. Vignau. *Etude théorique et expérimentale de la transition en écoulement bidimensionnel compressible*. PhD thesis, Toulouse, ENSAE, 1989.

[67] E. Piot. *Simulation numérique directe et analyse de stabilité de couches limites laminaires en présence de micro-rugosités*. PhD thesis, ISAE, 2008.

[68] D. Arnal. Diagrammes de stabilité des profils de couche limite auto semblables, en écoulement bidimensionnel incompressible, sans et avec courant de retour. Technical Report No 34/5018, ONERA/CERT, 1986.

[69] S. Reynaud. Propriété de stabilité des couches limites laminaires en régime transsonique, avec effets de gradients de pression et de température. Master's thesis, ENSMA, 1990.

[70] A. Séraudie, D. Arnal, and A.M. Rodde. Effet d'un chauffage de paroi sur la transition laminaire-turbulent (transition naturelle et transition déclenchée). Technical report, ONERA-DMPE, 2003.

[71] D. Arnal. Etude numérique de l'effet d'un chauffage localisé sur la transition. In *32ème Colloque d'Aérodynamique Appliquée : Optimisation et contrôle des écoulements en aérodynamique*, 1996.

[72] B. Lokman. *Modélisation bidimensionnelle de systèmes électrothermique de protection contre le givre*. PhD thesis, ISAE, 2014.

Prévision de la transition laminaire-turbulent dans le code elsA. Extension de la méthode des paraboles aux parois chauffées.

Mots cléf : Transition laminaire-turbulent, couche limite, facteur N, méthode des paraboles, elsA, base de données, instabilités de Tollmien-Schlichting, parois chaudes, RANS

Cette thèse propose une extension d'une méthode simplifiée de prévision de la transition laminaire-turbulent naturelle sur paroi chaude, la méthode des paraboles. Elle a été construite originalement pour des écoulements sur paroi athermane.
Lors d'une précédente thèse, elle a été implémentée dans le solveur RANS elsA. Cette méthode s'appuie sur une base de données pour fournir une expression analytique des taux d'amplification de perturbations modales de la couche limite. La prise en compte de la température de paroi impose la construction d'une nouvelle base de données.
Ces travaux proposent une méthodologie pour la construction de cette nouvelle base de données depuis les calculs de stabilité exacte jusqu'à la détermination de paramètres pertinents pour son indexation. Ce modèle permet ainsi de prévoir la position de transition lorsque les effets de température de paroi sont pris en compte.

Laminar-turbulent transition prediction into the solver elsA. Extension of the parabolas method to heated walls

Keywords : Laminar-turbulent transition, boundary-layer, N factor, parabolas method, elsA, database, Tollmien-Schlichting instabilities, heated walls, RANS

Contrary to transition criteria, the parabolas method allow a sharp analysis of the transition phenomenon. This method relies on a database, created with a stability study of generic boundary layer profiles, and constitutes a robust and accurate method to determine the transition position. At the present time, the parabolas method is limited to adiabatic and attached flows.
During a previous thesis, this method has been implemented into the RANS solver elsA. This method uses a database to give an estimation of the growth rates of modal perturbations growing in the boundary layer.
The aim of the thesis is to extend this method to heated walls. This extension will consist to create a new the database in fullfilling stability analysis of the boundary-layer profiles over a heated surface. Moreover, new parameters have to be found to index the new database.
The extension of the parabolas method can determine transition position when temperature effects are taken into account.