THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE D'ANGERS

ECOLE DOCTORALE N° 602

Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : « *Génie Civil* »

Par

« Nadare MATOIRI CHAIBATI »

« Méthode Probabiliste Générique de Qualification de la Durabilité/Fiabilité du Béton dans Son Environnement »

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 23/09/2020

Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes, Polytech Angers

Thèse N° :

Rapporteurs avant soutenance :

Laurence CURTIL Professeur Université Lyon1
Abdelkhalak EL HAMI Professeur INSA de Rouen

Composition du Jury :

Directeur de thèse

Abdessamad KOBI Professeur Université d'Angers
Président
Frederic DUPRAT Professeur INSA Toulouse
Co-directeur de thèse
David BIGAUD Professeur Université d'Angers
Laurence CURTIL Professeur Université Lyon1
Abdelkhalak EL HAMI Professeur INSA de Rouen
Ridha HAMBLI Professeur Université d'Orléans
Laurent IZORET Docteur ATILH

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur Abdessamad Kobi, professeur à l'université d'Angers qui est mon directeur de thèse ; il m'a permis de mener mes recherches au laboratoire LARIS de Polytech Angers et m'a toujours soutenu, aidé, conseillé et encouragé tout au long de la thèse. Son engagement dans la thèse m'a aidé à traverser les moments difficiles liés au travail d'un thésard ; cela m'a donné beaucoup de courage et d'énergie pour finir cette thèse. Je lui suis très reconnaissant de tout ce qu'il a fait pour moi du point de vue professionnel et personnel.

Je remercie aussi Monsieur David Bigaud, professeur à l'université d'Angers qui est codirecteur de la thèse ; il m'a beaucoup aidé dans cette thèse en m'apportant aussi son soutien, ses encouragements et ses conseils. Tout au long de la thèse, il a toujours été disponible pour toutes mes sollicitations. Son engagement dans cette thèse m'a permis de mener à bien mes travaux de recherche et d'aller jusqu'au bout. Je lui suis aussi très reconnaissant de tout ce qu'il m'a apporté dans le cadre professionnel et personnel durant toute la période de la thèse.

Je remercie Laurence Curtil, professeur à l'université Lyon 1 et Abdelkhalak EL HAMI, professeur des universités INSA de Rouen pour avoir accepté de rapporter mon travail et d'avoir permis ma soutenance.

Merci à Frédéric Duprat, professeur à INSA de Toulouse et à Ridha Hambli, professeur à l'université d'Orléans d'avoir examiné ma thèse et participé au comité de suivi de thèse.

Je tiens aussi à remercier Bruno Castanier, professeur à l'université d'Angers et responsable de l'équipe SFD (Sûreté de Fonctionnement et aide à la décision) ainsi que tous les membres pour leur aide, leur disponibilité et leur soutien. Je remercie tout particulièrement mes collègues de thèse qui ont déjà soutenu ; Khaoula Tidriri, Nabil Ben Said Amrani, Rodrigue Sohoin Khadim Diop et Ibrahim Alhouraish. Ils m'ont bien accueilli et aidé tout au long de la thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Laurent Izoret ; Directeur délégué Produits : Applications & Recherche de L'ATILH qui est l'initiateur de mon sujet de thèse. Je lui suis très reconnaissant pour tout ce qu'il a fait pour moi. En effet, avant d'être mon codirecteur de thèse à l'ATILH, il a été mon maître de stage. Travailler avec lui m'a transformé et m'a beaucoup apporté tant professionnellement que personnellement. Je lui suis très reconnaissant pour tout ce qu'il m'a apporté depuis que j'ai commencé à travailler avec lui.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Horacio Colina qui est mon codirecteur de thèse pour l'ATILH et qui m'a beaucoup aidé, conseillé et soutenu. Je lui suis très reconnaissant de tout ce qu'il m'a apporté dans le cadre professionnel et personnel.

Je remercie aussi tous les membres de l'ATILH qui m'ont beaucoup soutenu et aidé durant toute la période de la thèse.

Un merci à tous les membres de ma famille en commençant par mes parents, mes frères et sœurs qui m'ont toujours encouragé et soutenu dans tous mes projets. Je remercie aussi tous les amis et les connaissances qui m'ont soutenu dans mon projet de recherche.

RÉSUMÉ

L'évolution des techniques de construction, l'innovation et la prise en compte des normes environnementales poussent les acteurs du domaine de la construction à proposer des matériaux performants et innovants pour la construction des bâtiments et des différentes infrastructures dans le monde. Le matériau béton reste de nos jours le plus utilisé dans le domaine de la construction. La normalisation de la formulation des bétons se base généralement sur des règles prescriptives tenant compte du rapport Eau/Ciment, de la classe de résistance minimale, de la teneur minimale en ciment, teneur minimal en air, etc. Cette méthode prescriptive reste satisfaisante mais doit être complétée par une autre alternative permettant de prendre en compte l'utilisation de composition de béton non mentionnée dans la norme. Ainsi, l'approche performancielle de la durabilité du béton a été proposée. Le principe est de permettre la fabrication d'un béton avec une formule différente de celle de la norme tout en montrant qu'elle est aussi performante que celle de la norme. Cette démonstration de performance passe par l'utilisation des indicateurs de durabilité et des essais performanciels. Les résultats des essais réalisés sur la nouvelle formulation de béton pourront montrer si sa performance est égale ou supérieure à celle de la norme. Le problème se pose sur le nombre d'essais à réaliser afin de garantir la performance du béton. Dans cette thèse, une méthode générique de qualification de la Durabilité/Fiabilité du béton avec un plan d'essais optimisé est proposée pour différents types d'environnement. Cette méthode permet d'estimer la Durabilité/Fiabilité du béton dans son environnement avec une garantie donnée et une statistique des essais à réaliser. Le processus de Wiener est utilisé afin de modéliser les processus de dégradation dans le béton. Une application de la méthode est réalisée pour le cas d'un béton soumis à la carbonatation.

Mots-clés : durabilité, approche performantielle, béton, essais accélérés et sévérisés, processus de Wiener, optimisation.

ABSTRACT

The evolution of construction techniques, innovation and the environmental consideration standards are driving construction players to offer efficient and innovative materials for the construction of buildings and various infrastructures around the world. The material remains the most widely used in the construction industry today. Concrete standardization is generally based on prescriptive rules that take into account the Water/Cement ratio, the minimum resistance class, the minimum cement content, minimum air content, etc. This prescriptive method remains satisfactory but must be supplemented by another alternative to take into account the use of concrete composition not mentioned in the standard. Thus, the performance-based approach to concrete durability has been proposed. The aim is to allow the manufacture of concrete with a different formula than the standard while showing that it is as efficient as that of the standard. This performance demonstration involves the use of durability indicators and performance tests. The results of the tests carried out on the new concrete formulation will show whether its performance is equal to or above that of the standard. The problem arises in the number of tests to be carried out in order to guarantee the performance of the concrete. In this thesis, a generic method of qualifying the durability/Reliability of concrete with an optimized test plan is proposed for different types of environments. This method allows to estimate the durability/reliability of concrete in its environment with a given guarantee and a statistic of the tests to be carried out. The Wiener process is used to model degradation processes in concrete. An application of the method is carried out for the case of a concrete subject to carbonation.

keywords: durability, performance-based approach, concret, Accelerated tests , Wiener Model, optimization.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE 11

1. PERFORMANCE DURABLE ET CARACTERISATION PHYSIQUE DE LA DEGRADATION DES BETONS 17

1.1. Introduction 17
1.2. Durabilité du béton : Visions internationales, Européenne et Française 18
1.2.1. Visions internationales 18
1.2.2. Visions Européenne et Française 20
1.2.3. Nécessité d'une approche statistique du problème de qualification par les essais 25
1.3. Travaux précurseurs de l'approche performantielle 26
1.3.1. Evaluation de la performance par les approches performantielles 26
1.3.2. Approches probabilistes de l'évaluation de la performance 27
1.4. Phénomènes de dégradation pour les classes d'exposition 28
1.4.1. Carbonatation du béton 29
1.4.2. Pénétration des ions chlorures dans le béton 32
1.5. Les modèles prédictifs 35
1.5.1. Modèle de Papadakis 36
1.5.2. Modèle de Hyvert 37
1.6. Planification des essais destructifs et non destructifs 38
1.6.1. Essais destructifs 38
1.6.2. Essais non destructifs 39
1.7. Conclusion 41

2. ESTIMATION FIABILISTE DE LA DUREE DE VIE DES BETONS PAR LES ESSAIS 43

2.1. Introduction 43
2.2. Notions fondamentales de fiabilité 43
2.2.1. La fonction de fiabilité 43
2.2.2. Lois de probabilité utiles en fiabilité 46
2.2.3. Les différentes phases de la fiabilité d'un produit 50
2.3. Estimation fiabiliste de la durée de vie par les essais accélérés 51
2.3.1. Essais de vieillissement accélérés-ALT 52
2.3.2. Les essais de dégradation accélérés-ADT 53
2.4. Modélisation stochastique 58
2.4.1. Le Processus Gamma 59
2.4.2. Le Processus Inverse Gaussien 60
2.4.3. Le Processus de Wiener 62
2.4.4. Le Processus de dispersion exponentielle 64
2.5. Estimation Bayésienne 67
2.5.1. L'inférence bayésienne 67
2.5.2. Information *a priori* 68
2.6. Conclusion 71

3. LA METHODE GENERIQUE PROPOSEE 73

3.1. Introduction 73
3.2. Création/collecte et prétraitement des données 73
3.2.1. Données nécessaires au problème d'optimisation 73
3.2.2. Traitement des données : Transformation iso-probabiliste (TIP) 75
3.3. Problème d'optimisation du plan d'essais 78
3.3.1. Les paramètres des essais accélérés 79
3.3.2. Contraintes, fonction d'objectif et critères d'optimalité 81
3.3.3. Détermination de la taille de l'échantillon pour les essais 85
3.4. Conclusion 86

4. PLANIFICATION D'UN PLAN D'ESSAIS OPTIMISE POUR UN BETON SOUMIS A LA CARBONATATION 89

4.1. Introduction 89
4.2. Durée de vie du béton 90
4.2.1. La fonction d'accélération 90
4.2.2. Estimation des paramètres du processus de Wiener 91
4.2.3. Estimation déterministe et par intervalles de confiance de la durée de vie du béton 95
4.3. Application de la stratégie d'optimisation d'un plan d'essais accélérés avec deux niveaux de stress 99
4.3.1. Choix du meilleur plan d'essais : analyse des critères d'optimisation 99
4.3.2. Analyse des effets des stress 107
4.3.3. Effets de la contrainte de temps 109
4.3.4. Taille d'échantillon : variation du seuil de confiance et de la précision sur la durée de vie 110
4.4. Analyse de sensibilité 113
4.4.1. Analyse de sensibilité avec les paramètres du modèle de Hyvert 113
4.4.2. Analyse de sensibilité avec les paramètres du processus de Wiener 114
4.5. Plan d'essais accélérés optimisé avec trois niveaux de stress 116
4.6. Actualisation par approche bayésienne 118
4.6.1. Détermination des paramètres du processus de Wiener 118
4.6.2. Les différentes étapes de l'actualisation bayésienne 119
4.6.3. Application de l'approche bayésienne au processus de dégradation 121
4.7. Conclusion 124

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 127

BIBLIOGRAPHIE 129

ANNEXES 141

Annexe 1 : Exigence de durabilité ACI 318 et essais performantiels. 141
Annexe 2 : Annexe F -Recommandations sur les valeurs limites de composition du béton [NF EN 206/CN, 2014] 143

ANNEXE 3 : ALGORITHME DE RESOLUTION DU PLAN D'ESSAIS OPTIMAL AVCE CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 144

ANNEXE 4 : ALGORITHME DE RESOLUTION DU PLAN D'ESSAIS OPTIMAL SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 145

ANNEXE 5 : ALGORITHME DE RESOLUTION DU PLAN D'ESSAIS AVEC CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 146

ANNEXE 6 : ALGORITHME DE RESOLUTION DU PLAN D'ESSAIS SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 147

ANNEXE 7 ALGORITHME DU PLAN D'ESSAIS AVEC CONTRAINTES DE COUT ET ECHELLE DE TEMPS t (ESSAIS DESTRUCTIFS) 148

ANNEXE 8 EXPRESSION DE LA MATRICE DE FISHER $I\theta$ 149

Liste des figures

FIGURE 1.1. ILLUSTRATION DES APPROCHES PERFORMANTIELLES AVEC PRISE EN COMPTE DES INCERTITURES (1.1A. APPROCHE PAR COMPARAISON BETON A QUALIFIER VS BETON DE REFERENCE ; 1.1B. APPROCHE PAR COMPARAISON AVEC VALEUR SEUIL) [APPLET, 2012] 26
FIGURE 1.2. DISPOSITIF POUR REALISER L'ESSAI DE CARBONATATION ACCELEREE A 50% 31
[ALLAHYARI, 2016] 31
FIGURE 1.3. MISE EN EVIDENCE DE LA ZONE CARBONATEE D'UNE SECTION D'UNE EPROUVETTE DE BETON [ROZIERE, 2007] 31
FIGURE 1.4. ILLUSTRATION DE LA METHODE NT BUILD 492[NT BUILD 492, 1999] 34
FIGURE 1.5. ILLUSTRATION D'UN PLAN D'ESSAIS DANS LE CADRE DES ESSAIS DESTRUCTIFS 38
FIGURE 1.6. ILLUSTRATION D'UN PLAN D'ESSAIS DANS LE CADRE DES ESSAIS NON DESTRUCTIFS 40
FIGURE 2.1. RESUME D'ILLUSTRATION DE LA METHODE D'ESTIMATION DE LA DURABILITE DU BETON AVEC UN PLAN D'ESSAIS OPTIMISE 44
FIGURE 2.2. REPRESENTATION DE LA FONCTION DE FIABILITE 45
FIGURE 2.3. ILLUSTRATION DE LA PROPRIETE SANS MEMOIRE DE LA LOI EXPONENTIELLE [TEBBI, 2005] 46
FIGURE 2.4. DISTRIBUTION DE LA PERFORMANCE ET DE LA DUREE DE VIE D'UN PROCESSUS DE DEGRADATION 48
FIGURE 2.5. LES TROIS PHASES DE FIABILITE POUR UN PRODUIT [FATEMI, 2012] 51
FIGURE 2.6. ESTIMATION DE LA FIABILITE D'UN PRODUIT PAR UN ESSAI ACCELERE [TEBBI, 2005] .....**ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.**
FIGURE 2.7. EXEMPLES DE STRATEGIE D'APPLICATION DES STRESS SEVERISES 56
FIGURE 2.8. ESTIMATION DE L'INFORMATION A POSTERIORI PAR L'INFERENCE BAYESIENNE 68
FIGURE 3.1. AJUSTEMENT DE LA FONCTION DE DENSITE DE PROBABILITE DE LA LOI LOGNORMALE SUR LES DONNEES GENEREES PAR LE MODELE DE HYVERT. 77
FIGURE 3.2. ILLUSTRATION D'UN PLAN D'ESSAIS DESTRUCTIFS OPTIMISE AVEC TROIS NIVEAUX DE STRESS 80
FIGURE 3.3. ILLUSTRATION D'UN PLAN D'ESSAIS NON DESTRUCTIFS OPTIMISE AVEC TROIS NIVEAUX DE STRESS 80
FIGURE 3.4. ILLUSTRATION DE LA RELATION ENTRE $TMTTF, M, \varepsilon$ ET ϕ (SEUIL DE CONFIANCE). (A) ILLUSTRATION DE LA VARIATION DE ϕ (SEUIL DE CONFIANCE) AVEC UNE VALEUR CONSTANTE DE . (B) ILLUSTRATION DE LA VARIATION DE ε AVEC UNE VALEUR CONSTANTE DE ϕ. ($\phi 1 = 0{,}9, \varepsilon 1 = 10\%$, ETC. SONT CHOISIES POUR SEULEMENT POUR L'ILLUSTRATION) 85
FIGURE 4.1. PROFONDEUR DE CARBONATATION EN FONCTION DE LA PRESSION PARTIELLE DE CO_2 90
FIGURE 4.3. TRAJECTOIRES DES DEGRADATIONS ESTIMEES 97
FIGURE 4.4. REPRESENTATION DES EFFETS DES NIVEAUX DES STRESS SUR L'EXACTITUDE DE L'ESTIMATION 108

Liste des tableaux

TABLEAU 1.1. CLASSES ET ENVIRONNEMENTS D'EXPOSITION [NF EN 206/CN] 21
TABLEAU 1.2. VALEURS LIMITES PROPOSEES POUR LES INDICATEURS DE DURABILITE [AFGC, 2004] 24
TABLEAU 2.1. DENSITE, FONCTION DE REPARTITION, PARAMETRES DE LA LOI 49
TABLEAU 2.2. LOIS DE PROBABILITE ET LEURS CARACTERISTIQUES 50
TABLEAU 2.3. PRESENTATION DES MODELES D'ACCELERATION 57
TABLEAU 2.4. LES TROIS CAS SPECIFIQUES DU PROCESSUS DE DISPERSION EXPONENTIELLE TWEEDIE 65
TABLEAU 2.5. QUELQUES LOIS CONJUGUEES [FATEMI, 2012] 69
TABLEAU 3.1. VALEURS DES PARAMETRES DU MODELE DE HYVERT [HYVERT] 74
TABLEAU 4.1. NOTATIONS ET HYPOTHESES SUR LE CAS DES ESSAIS DESTRUCTIFS OU NON DESTRUCTIFS 92
TABLEAU 4.2. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES AVEC CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 101
TABLEAU 4.3. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 101
TABLEAU 4.4. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES AVEC CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 102
TABLEAU 4.5. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 102
TABLEAU 4.6. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES AVEC CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 105
TABLEAU 4.7. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 105
TABLEAU 4.8. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES AVEC CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 106
TABLEAU 4.9. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES SANS CONTRAINTES DE COUT (ESSAIS NON DESTRUCTIFS 106
TABLEAU 4.11. PLAN D'ESSAIS AVEC LA VARIATION DU STRESS $S2$ ($S1 = 300\ Pa = 0{,}3\%\ Patm$, (ESSAIS DESTRUCTIFS) 109
TABLEAU 4.12. VARIATION DE LA CONTRAINTE DE TEMPS TADT (ESSAIS DESTRUCTIFS) 110
TABLEAU 4.13. TAILLE DE L'ECHANTILLON EN FONCTION DE LA PRECISION (ESSAIS DESTRUCTIFS) 111
TABLEAU 4.14. TAILLE DE L'ECHANTILLON EN FONCTION DE LA PRECISION (ESSAIS NON DESTRUCTIFS) 112
TABLEAU 4.17. PLANS OPTIMAUX SOUS DIVERSES COMBINAISONS (ESSAIS DESTRUCTIFS AVEC CONTRAINTES DE COUT) 114
TABLEAU 4.18. PLANS OPTIMAUX SOUS DIVERSES COMBINAISONS (ESSAIS DESTRUCTIFS SANS CONTRAINTES DE COUT) 115
TABLEAU 4.19. PLANS OPTIMAUX SOUS DIVERSES COMBINAISONS :(ESSAIS NON DESTRUCTIFS AVEC CONTRAINTES DE COUT) ... 115
TABLEAU 4.20. PLANS OPTIMAUX SOUS DIVERSES COMBINAISONS (ESSAIS NON DESTRUCTIFS SANS CONTRAINTES DE COUT) 115
TABLEAU 4.21. PLANS D'ESSAIS OPTIMISES DES 3 SCENARIOS (SI1), (SI2) ET (SI3) 117
TABLEAU 4.22. PROFONDEURS DE CARBONATATION OBSERVEE AU PREMIER TEMPS DE MESURE 121
TABLEAU 4.23. PARAMETRES DU PROCESSUS DE WIENER AVEC ET SANS L'ACTUALISATION BAYESIENNE 123

GLOSSAIRE

ALT (Accelerated Life Test) : Essais de Vieillissement Accéléré

ADT (accelerated Degradation Test) : Essais de Dégradation Accélérée

CSADT (Constant Stress Accelerated Degradation Tests) : Essais de Dégradation Accélérés avec Stress Constant

Durabilité du béton : Aptitude d'un béton de formulation donnée à résister à des agressions externes (carbonatation, sulfates externes, gel- dégel, … Les caractéristiques de durabilité permettent de calculer la durée de vie du béton

Dépassivation : perte de la couche de protection contre la corrosion des armatures du béton

E/C : Eau/Ciment

Estimation bayésienne :

Entropie d'une variable aléatoire : quantité d'information nécessaire pour décrire une variable aléatoire.

Indicateur de durabilité : paramètre permettant d'estimer la résistance aux agressions

L'algorithme EM : L'algorithme espérance-maximisation

Méthode Générique : Méthode utilisable pour différentes situations

Modélisation stochastique : modélisation d'une variable aléatoire

Mouvement Brownien : processus stochastique décrivant le mouvement désordonné et aléatoire d'une particule dans un fluide ou un gaz

MLE (Maximum Likelihood Estimation): Estimateur du maximum de vraisemblance

Processus (DE) : processus de dispersion exponentielle

Processus (DET) : processus de dispersion exponentielle Tweedie

P-CSADT (Partial Constant Stress Accelerated Degradation Tests) : Essais de Dégradation accélérés Partiel avec stress constant

Stress : terme générique utilisé pour décrire le facteur accélérant la dégradation. Ce peut être une contrainte mécanique, une température, une humidité relative, une pression de CO2, etc.

SSADT (Step Stress Accelerated Degradation Tests) : Essais de Dégradation Accélérés avec Stress Échelonné

SSADT (Partial Step Stress Accelerated Degradation Tests) : Essais de Dégradation Accélérés avec Stress Échelonné Partiel

Introduction générale

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans un contexte de qualification de la durabilité du béton pour un environnement donné. La qualification de la durabilité du béton permet d'estimer sa durée de vie et ainsi valider son utilisation dans un projet de construction. L'utilisation d'un béton dont la durabilité est estimée pour une période d'une vingtaine d'années dans la construction d'un ouvrage dimensionné pour une durée de vie de 50 ans conduira systématiquement à des dégradations précoces entrainant des coûts d'entretien et/ou de réparation élevés, pouvant éventuellement conduire à la ruine prématurée de la partie d'ouvrage concernée. De ce fait, différentes normes permettant la production, la formulation et la mise en œuvre du béton ont été établies nationalement et internationalement. Ces normes dont la norme australienne AS 3600-2001 [AS3600 ,2001], la norme américaine ACI 318 (2008) [ACI 318 ,2008], la norme française [NF EN 206/CN, 2014], sont généralement prescriptives sur la base d'une exigence de moyens (la formulation du béton suit la composition prescrite dans la norme).

La formulation du béton est définie en fonction des classes d'exposition (voir la norme [NF EN 206/CN, 2014]) et pour une durabilité donnée. Cette approche reste satisfaisante selon les retours d'expériences. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte les nouvelles formulations de béton dont les compositions diffèrent de celles prescrites dans les normes. Ainsi, une alternative appelée "approche performantielle" a été mise en place [Applet, 2012], [Allahyari, 2016]. Cette approche permet l'utilisation d'une nouvelle formulation de béton en montrant qu'elle est au moins aussi performante que celle définie dans la norme. Cette démonstration de performance passe par l'utilisation des indicateurs de durabilité (exemples : porosité et perméabilité au gaz du béton) et des essais performantiels (exemple : essais accélérés de carbonatation du béton et essais de pénétration des ions chlorures).

Les résultats obtenus lors des essais sont exploités afin de qualifier la durabilité du béton. Les études menées lors des travaux du projet Applet [Applet, 2010] sur l'approche performantielle préconisent l'utilisation d'une démarche probabiliste. Cette démarche a pour but de qualifier la durabilité du béton dans son environnement avec un niveau de garantie (de confiance). Cela peut se traduire par la définition de la moyenne et/ou d'un fractile particulier d'une caractéristique mesurée lors des essais. La réalisation d'un nombre important d'essais dans le but d'appréhender la dispersion d'une caractéristique de durabilité reste problématique car certains essais font appel à des modes opératoires de

durées importantes. Dès lors, la question du nombre et de la durée nécessaires d'essais permettant de qualifier la durabilité du béton avec un niveau de garantie devra être posée. Une étude sur la recherche d'un nombre minimum d'essais pour la qualification d'une nouvelle composition de béton a été réalisée par Dachraoui [Dachraoui, 2013]. Cette étude a permis d'estimer un nombre minimum d'essais en faisant l'hypothèse que les caractéristiques de réponse aux essais de durabilité suivent une loi normale. Ce nombre d'essais, estimé à 12, s'il est satisfaisant d'un point de vue statistique l'est moins d'un point de vue pratique (nombre et durée des essais à réaliser) et d'un point de vue financier (coût des essais). Il est donc important de prendre en considération les distributions réelles des caractéristiques de durabilité, les problématiques de la durée et du coût des essais, et, de proposer une méthode de détermination dont le résultat soit un bon compromis "technico-économique", c'est-à-dire un nombre d'essais suffisant, pour une évaluation statistique avec un niveau de confiance acceptable, mais assez réduit pour respecter les contraintes financières et pratiques.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer une méthode générique permettant d'optimiser la campagne d'essais de qualification de la durabilité/fiabilité du béton soumis à différents environnements agressifs. Le caractère "générique" de la méthode est en partie lié au fait qu'elle soit applicable quel que soit le mécanisme de dégradation ; phénomène de corrosion des armatures par la carbonatation et la pénétration des ions chlorures mais aussi par des phénomènes comme le gel–dégel, l'attaque sulfatique, la lixiviation etc. La méthode sera générique également du fait qu'elle soit configurable pour des données de dégradation ne suivant pas obligatoirement une loi de distribution normale. L'optimisation s'entend ici comme la maîtrise de la taille d'échantillon nécessaire pour la réalisation des essais, du coût des essais et de leur durée. Cela conduit à se poser la question de la définition d'une stratégie d'essais accélérés en commençant par le type de plan d'essais de dégradation accélérés, avec niveau de contrainte constant qui sera dit CSADT pour Constant Stress Accelerated Degradation Test [Chen et al, 2016], ou, par échelon – dit SSADT pour Step Stress Accelerated Degradation Test [Wang et al, 2016]. Mais il s'agit également de définir (optimiser) le nombre et la valeur des niveaux de stress[1], la répartition des éprouvettes de béton pour chaque stress, la fréquence et le nombre de mesures pour chaque stress, etc. L'optimisation se fait sous des contraintes de temps d'essai, de nombre total d'éprouvettes disponibles et/ou de budget imposé au début de l'essai. L'usage des outils du domaine de la fiabilité comme les processus stochastiques et les fonctions de transfert permettent d'extrapoler les résultats obtenus aux stress accélérés vers le stress nominal (correspondant à ce qui se passe aux conditions normales

[1] *"Stress" étant le terme générique utilisé pour décrire le facteur accélérant la dégradation. Ce peut être une contrainte mécanique, une température, une humidité relative, une pression de CO_2, etc.*

d'environnement) afin d'estimer la durée de vie du béton sous ces mêmes conditions. La problématique d'optimisation est un sujet abordé dans plusieurs domaines de la recherche et notamment celle de la construction [Lepadatu et al, 2005].
Dans cette thèse l'attention est portée particulièrement sur le processus de Wiener [Wang, 2010], non monotone, adapté à la situation réelle des essais de dégradation sur le béton. Le processus de Wiener est à la fois utilisé dans le cas continu avec des données générées par un modèle physique et le cas discontinu avec des données obtenues par le biais d'expériences. Pour pouvoir appliquer le processus de Wiener en utilisant des données issues des expériences, des courbes continues fictives sont créées. La forme retenue du processus stochastique (aléatoire) impose que les données de dégradation recueillies lors des essais suivent une loi normale mais ce n'est pas forcément le cas et dans notre volonté de fournir une méthode générique, nous intégrerons une méthode de transformation iso-probabiliste en termes de prétraitement des données d'essais.
La méthode est généralisable car elle est applicable pour l'estimation de la durabilité des bétons susceptibles d'être endommagés par le phénomène de corrosion des armatures, par la carbonatation, par la pénétration des ions chlorures mais aussi par des phénomènes comme le gel –dégel, l'attaque sulfatique, la lixiviation etc.

Le manuscrit est structuré en quatre chapitres. Le chapitre 1 sera consacré à un état de l'art sur les approches actuelles de qualification des bétons. Les chapitres 2 et 3 développeront les éléments théoriques utilisés dans la thèse. Le quatrième et dernier chapitre sera dédié aux développements propres à la thèse et à leur application aux cas des essais destructifs et non destructifs de carbonatation du béton.
Comme évoqué, le premier chapitre de ce mémoire est une revue de l'état de l'art sur la formulation du béton suivant les normalisations Européenne et Française. L'objectif est de présenter le contexte du sujet en montrant l'importance de proposer une nouvelle méthode de qualification de la durabilité du béton. La présentation des approches prescriptive et performantielle sera détaillée. Les avantages et les inconvénients de l'approche prescriptive seront exposés afin de comprendre la nécessité de faire appel à l'approche performantielle pour la caractérisation de la durabilité du béton. Les deux concepts d'approches performantielles sont détaillés en vue de saisir le choix porté sur la méthode de conception performantielle afin de l'utiliser pour mettre en place la méthode de qualification de la durabilité du béton dans son environnement avec un plan d'essais accéléré optimisé. La problématique sur le nombre limité de données est abordée. La présentation des deux processus (carbonatation et pénétration des ions chlorures) conduisant à la corrosion des armatures est faite. Le chapitre se termine par une présentation de la stratégie de planification des essais accélérés destructifs et non destructifs [Nguyen, 2014].

Le deuxième chapitre est une revue des outils et des approches souvent utilisés dans le domaine de la fiabilité et de leur exploitation pour l'estimation statistique de la performance du béton. Un intérêt particulier sera porté aux processus stochastiques en montrant leur importance pour l'optimisation d'un plan d'essais accélérés. Le choix du processus de Wiener pour représenter les phénomènes de dégradation est expliqué. Enfin, une présentation de la méthode d'estimation bayésienne utilisée pour l'actualisation des plans d'essais à partir des observations ou données collectées sera faite. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment les processus stochastiques sont exploités dans le but de représenter les phénomènes de dégradation et leur utilité dans les plans d'essais accélérés afin de permettre l'estimation de la fiabilité d'un produit comme le béton. Le dernier volet de ce chapitre se focalise sur l'utilisation de l'information *a priori* sur les essais pour l'intégrer dans le processus d'optimisation des essais [Lim et Yum, 2011].

Le troisième chapitre comporte deux volets ; une première partie qui traite de la méthode de création / collecte et prétraitement des données développées pour aborder le problème d'optimisation. La problématique de l'absence de données peut être résolue par la génération de données fictives à partir du modèle de Hyvert [Hyvert, 2009]. Une méthode de transformation iso-probabiliste des données est présentée. Cette méthode consiste à faire correspondre des données qui évoluent suivant une loi de probabilité donnée en une loi de probabilité normale en conservant des caractéristiques statistiques comme la médiane et l'entropie, ou, l'entropie et le quartile. Avec cette méthode, la problématique liée à la prise en compte des lois de probabilité des caractéristiques de durabilité étudiées est traitée. Le deuxième volet aborde l'optimisation du plan d'essais. La présentation des différents paramètres à optimiser est faite ainsi que celle des contraintes liées aux essais. Les critères d'optimisation permettant de statuer sur le plan le plus optimal sont présentés. Le chapitre se termine par la présentation d'une stratégie d'optimisation qui a pour but d'analyser les différents paramètres du plan d'essais et de proposer le plan optimal. Dans ce chapitre, l'objectif est de montrer l'apport d'une stratégie d'optimisation sur l'organisation des essais et l'estimation des paramètres du plan d'essais.

Dans le chapitre quatre, une première partie consiste à estimer la durabilité du béton soumis au phénomène de carbonatation et de proposer le meilleur plan d'essais (destructif ou non destructif) permettant de la garantir. Il est question aussi de définir le critère d'optimisation le plus adapté permettant de choisir le meilleur plan d'essais optimisé. Une analyse des effets des stress et de la contrainte de temps sur le plan d'essais à deux stress est réalisée afin de déterminer le plan d'essais proposant la solution optimale. Ensuite, une méthode permettant de trouver le nombre d'éprouvettes à utiliser pour les essais en fonction d'une précision et d'un seuil de confiance sur l'intervalle d'encadrement (intervalle de confiance) de la durée de vie du béton sera développée. Afin de valider la robustesse de la méthode d'estimation des paramètres du processus de Wiener, une analyse de

sensibilité avec un plan d'essais avec 2 stress (P-CSADT **P-CSADT (Partial Constant Stress Accelerated Degradation Tests**) [Kim et al, 2017] est réalisée. Un plan d'essais avec trois stress est étudié dans le but de montrer l'influence du nombre de stress sur le plan d'essais optimisé. La dernière partie du chapitre 4 traite de la stratégie d'actualisation bayésienne d'un plan d'essais destructifs avec 2 stress. Elle permet de combiner la connaissance *a priori* de la dégradation du béton venant du modèle de Hyvert et une connaissance issue des données d'essais réels pour proposer un nouveau plan d'essais optimisé. En effet, en utilisant la connaissance a priori du modèle d'Hyvert, cela permet de réduire le nombre d'éprouvettes à utiliser lors des essais de carbonatation du béton.
Le manuscrit se termine sur une conclusion générale et une présentation des différentes perspectives envisageables à ce travail de thèse.

1. Performance durable et caractérisation physique de la dégradation des bétons

1.1. Introduction

Jusqu'aux années 70, la caractérisation du béton par les ingénieurs s'appuyait sur les seules propriétés mécaniques telles que : la résistance à la rupture, le module d'élasticité et le coefficient de fluage. A partir des années 80, l'utilisation de différents types d'adjuvants (les réducteurs d'eau, fluidifiants, retardateurs de prise, accélérateurs de prise, entraineur d'air, etc.), des additions minérales (fumées de silice, laitiers de haut-fourneau, métakaolins, additions calcaires, etc.), la maîtrise de la défloculation des grains de ciment et du mélange granulaire ouvre la voie à une variété de béton (BHP, BFUP, BAP, etc.) [Torrenti et Barre, 2016]. Les nouvelles propriétés prises en compte sont : la consistance et l'ouvrabilité du béton frais, les propriétés mécaniques, la durabilité et l'aspect esthétique. Avec les connaissances actuelles sur le matériau béton, ces propriétés des bétons sont déterminables à l'avance par la formulation. Celle-ci prend en compte différents aspects du projet en commençant par la méthode de conception, de construction, du type d'environnement, du choix des constituants, des différents types de dégradations susceptibles de le détériorer. Elle commence par l'optimisation granulaire que l'on affine avec celle de la pâte de ciment. Cette optimisation est possible en agissant principalement sur le rapport E/C (Eau/Ciment) et le type d'adjuvant utilisé. Les méthodes d'optimisation granulaire (méthode d'Abrams méthode de Valette, méthode de Baron-Lesage, méthode de Dreux-Gorisse., etc.) [Torrenti et Barre, 2016] sont utilisées dans le but d'améliorer la compacité du béton et obtenir un béton résistant face aux différentes agressions telles que la carbonatation, le gel-dégel, les attaques sulfatique etc.

La formulation du béton à elle seule ne constitue pas une garantie pour les propriétés du béton durci (exemples : durabilité, résistance en compression) attendues car elles dépendent de plusieurs facteurs liés à l'environnement, à la mise en œuvre, à la qualité des constituants, etc. et essentiellement à la réaction d'hydratation du ciment. Les performances du béton sont toutefois dépendantes du respect des prescriptions de formulation, en particulier le respect de la formule granulaire mais aussi du dosage en ciment et du rapport E/C effectif.

Pour limiter les malfaçons (la sinistralité), des normes prescriptives ont été mises en place au niveau européen (EN 206) pour encadrer la production, la mise en œuvre et la durabilité du béton. Ces normes prennent en compte les spécificités des différents pays et sont généralement prescriptives, s'appuyant sur la notion de dosage minimum en ciment, selon

la classe de résistance du ciment, de rapport Eau/Ciment maximal en fonction de la classe de résistance et l'exposition du béton, de sa composition et de la durée de vie de l'ouvrage. Pour prendre en compte l'évolution des formulations de béton et sortir de la contrainte d'exigence de moyen, une alternative appelée "approche performantielle de la durabilité du béton" a été introduite lors de la première version de la norme NF EN 206/CN [NF EN 206/CN, 2014] en 2005 intitulé "NF EN 206-1", et appliquée par les grandes entreprises de la construction en France comme en Europe [FNTP, 2009], [LCPC, 2010].

Comme son nom l'indique, l'approche performantielle vise à quantifier la performance du béton soumis à différents environnements agressifs. Cette performance est évaluée de deux manières : soit à l'aide d'essais de durabilité, soit à partir d'indicateurs de durabilité mesurant des propriétés générales, corrélées aux propriétés de transfert des bétons (K_{gaz}(perméabilité apparente aux gaz), K_{liq}(perméabilité à l'eau liquide), D_{cl}(coefficient de diffusion des chlorures) …) [Beushausen et al, 2019]. Certaines normes acceptent la fusion des deux approches : approche prescriptive et performantielle. C'est le cas de la norme australienne AS 3600-2001 [AS3600, 2001] /AS 1379 (2007) et de la norme Canadienne CSA A23.1/23.2 [CSA A23.1/23.2, 2009]. La norme américaine ACI 318 (2008) [ACI 318 ,2008] est essentiellement prescriptive car la composition du béton en fonction du rapport Eau / Liant et de la résistance minimale du béton est donnée selon les différentes classes d'exposition. Néanmoins, certaines exigences supplémentaires pour l'attaque sulfatique sont données en termes de performance en utilisant la norme ASTMC 1012/C1012M [ASTMC, 2018].

De nombreux chercheurs à travers le monde se sont emparés de cette démarche performantielle pour contribuer essentiellement à la caractérisation expérimentale d'indicateurs de durabilité. Nous pourrions citer parmi les contributions celles de Curtil [Curtil et al, 2008] et de Duprat [Duprat et al, 2014].

1.2. Durabilité du béton : Visions internationales, Européenne et Française

1.2.1. Visions internationales

La durabilité du béton dépend de sa formulation qui prend en compte les spécificités de l'environnement dans lequel il sera mis en œuvre. Ainsi, comme évoqué dans l'introduction, il existe différentes normes dans le monde permettant l'utilisation du matériau béton en garantissant sa durabilité. Dans cette partie, une brève description des normes utilisées aux États-Unis, au Canada, en Afrique du sud et en Australie est faite [Kessy and al, 2015]:

a) Etats-Unis

La durabilité du béton aux États-Unis est garantie par la norme ACI 318 (building Code Requirements for structural Concrete). Des études menées dans les années 2000 ont

permis de faire évoluer cette norme est d'intégrer une approche performantielle dans la formulation du béton. C'est ainsi que l'on retrouve dans la norme ACI 318 (2008), une approche performantielle pour évaluer la durabilité du béton soumis à l'attaque aux sulfates. Les études sur la mise en place de l'approche performantielle rentrent dans le cadre du projet nommé (P2P) (prescriptive to performance). Ce projet propose une approche performantielle basée sur un ensemble d'essais à réaliser pour chaque classe d'exposition de la norme AIC 318 (2008) [Hover et al, 2008] (Voir les tableaux 1, 2, 3 et 4 en annexe1).

b) Canada

La norme canadienne CSA A23.1/23.2 (2009) propose à la fois des exigences prescriptives et performantielles pour la production du béton. La norme définit les catégories et les classes d'exposition. Les catégories et classes d'exposition sont définies avec un maximum de E/L (Eau/ liant), une force compressive minimale, l'âge à l'essai, la teneur en air et le type de durcissement. Les exigences de performance proposent des tests de durabilité pour la perméabilité du chlorure, le gel et le dégel et l'attaque aux sulfates [Kessy and al, 2015].

c) Afrique du sud

La production de béton en Afrique du Sud est garantie par une norme prescriptive. La norme SANS 101000-2 « Utilisation structurelle du béton Partie-2 : Matériaux et exécution des travaux (Draft 2013) » définit quatre catégories de conditions d'exposition pour le béton : modérée, sévère, très sévère et extrême et cinq classes de résistance en compression du béton (20, 25, 30, 40, 50 MPa). Ces conditions d'exposition sont caractérisées par des exigences de profondeur d'enrobage pour chaque classe de résistance en compression du béton. Une approche performantielle basée sur des indices de durabilité (ID) a été développée par Alexander et Beaushausen [Alexander et Beaushausen, 2008]. On distingue : l'indice de sorptivité de l'eau (ISE), l'indice de conductivité du chlorure (ICC) et l'indice de perméabilité de l'oxygène (OPI).
Ces indices de durabilité sont utilisés dans des modèles prédictifs permettant d'estimer la performance du béton. Ainsi, pour le cas de la corrosion des armatures, l'indice (OPI) est utilisé dans un modèle de carbonatation du béton et (ICC) pour estimer le coefficient de diffusion des chlorures [Nganga et al, 2017].

d) Australie

En Australie, la norme AS 3600 (2001) définit les classes d'exposition du béton en fonction de la résistance en compression minimal et du type de cure. Les classes d'exposition sont

divisées en trois : la classe A représente la classe d'exposition la moins dommageable et la classe C la plus sévère. La composition du béton est définie dans la norme AS 1379 (2007) "specification and supply of concrete". On distingue deux catégories pour les bétons ; "normal class" et "special Class". Les bétons "normal class" (catégorie courante) sont définis par des critères tels que : l'affaissement, la taille maximale de l'agrégat, la résistance en compression, le pourcentage d'air entrainé, etc. Les bétons "special class" (catégorie spéciale) sont définis par des critères additionnels à ceux de la catégorie courante ou d'autres critères différents de ceux de la catégorie des bétons "normal class". Ces critères peuvent être donnés d'une manière prescriptive ou sous forme d'exigences performantielles.

1.2.2. Visions Européenne et Française

a) L'approche prescriptive

La norme EN 206 : 2013 définit les spécifications, les performances, la production et la conformité des bétons pour applications "en Europe dans des conditions climatiques et géographiques variées avec divers niveaux de protection et différentes traditions et expériences régionales bien établies". Lorsque les solutions préconisées par la norme EN 206 n'ont pu être trouvées, les articles concernés autorisent l'application de dispositions en vigueur sur le lieu d'utilisation du béton. C'est la raison d'être du "complément national" (CN) de la norme NF EN 206/CN. Il fixe la durée de vie des bâtiments à 50 ans et 100 ans pour les grands ouvrages de génie civil (pont, barrage, etc.) en respectant les règles de production, de mise en œuvre et de maintenance. En fonction de la nature de l'environnement auquel le béton est exposé, 18 classes d'exposition regroupées en six catégories sont définies. Elles sont données dans le tableau 1.1 ci-après.

La composition du béton est donnée selon les différentes classes d'exposition en fonction : du rapport Eau/Ciment maximal, de la classe de résistance minimale, la teneur minimale en ciment (Kg/m^3) et la teneur minimale en air (%) (Voir tableau F.1 Annexe 2).

L'approche prescriptive se focalise sur l'exigence de moyen pour la formulation du béton. La composition du béton est prescrite en avance en fonction de l'environnement (la classe ou des classes d'exposition). La durée de vie du béton est aussi limitée en fonction du type d'ouvrage à construire. Ainsi, pour permettre la construction de nouveaux ouvrages avec de nouvelles formules de béton utilisant des matériaux non répertoriés dans la norme et augmenter la durabilité du béton, l'alternative de l'approche performantielle de la durabilité du béton est proposée. Le principe de l'approche performantielle, décrite dans le paragraphe suivant, est de montrer que le béton dont la composition diffère de celle de la norme est aussi performant que le béton respectant les prescriptions normatives.

Classes d'exposition		Environnements d'exposition
Aucun risque de corrosion ou d'attaque	X0	Très sec avec une humidité très faible
Corrosion induite par carbonatation	XC1	Sec ou humide de manière permanente
	XC2	Humide et rarement sec
	XC3	Avec une humidité modérée
	XC4	Alternance d'humidité et de séchage
Attaque par le gel-dégel avec ou sans agent de déverglaçage	XF1	Saturation modérée en eau sans agent de déverglaçage
	XF2	Saturation modérée en eau avec agent de déverglaçage
	XF3	Forte saturation en eau sans agent de déverglaçage
	XF4	Forte saturation en eau avec agents de déverglaçage ou eau de mer
Corrosion par les chlorures provenant de l'eau de mer	XS1	Exposé à l'air véhiculant du sel marin, mais pas en contact direct avec l'eau de mer
	XS2	Immergé en permanence dans l'eau de mer
	XS3	Zones de marnage, zones soumises à des projections ou à des embruns
Les attaques chimiques	XA1	Environnement avec une faible agressivité chimique
	XA2	Environnement avec une agressivité chimique modérée
	XA3	Environnement avec une forte agressivité chimique
Corrosion par les chlorures différents de ceux de l'eau de mer	XD1	Avec une humidité modérée
	XD2	Environnement rarement sec et Humide
	XD3	Alternance entre humidité et séchage

Tableau 1.1. Classes et environnements d'exposition [NF EN 206/CN]

b) L'approche performantielle

- **Le concept de performance équivalente**

L'approche performantielle de la durabilité des bétons est permise en France par la norme FN EN 206/CN section (5.3.3). Des méthodes permettant l'application de l'approche performantielle ont été développées. Parmi celles-ci, on retrouve la méthode dite de performance équivalente. Elle est décrite dans les recommandations professionnelles provisoires : "Méthodologie d'application du concept de performance équivalente des bétons" [FNTP, 2009], La méthode permet de modifier la composition du béton prescrite dans la norme pour obtenir un nouveau béton nommé "béton à qualifier" et de le comparer

avec un "béton de référence". La formulation du béton de référence répond aux exigences suivantes (pour une classe d'exposition donnée) :

Le rapport Eau efficace /Liant équivalent maximal ≤ [Le rapport Eau efficace /Liant équivalent maximal de NF EN206/CN]-0.05 (1.1)

Liant équivalent > Liant équivalent (tableau NA.F.1) +5% (1.2)

ou

L'absorption d'eau < 0.5% L'absorption maximale (tableau NAF.2) (1.3)

La comparaison des deux bétons se fait à l'aide des indicateurs de durabilité et des essais performantiels. Selon l'étape du projet, on parle d'indicateur de durabilité ou de témoin de durée de vie. Avant la construction d'un ouvrage, on parle d'indicateur de durabilité pour caractériser le béton vis-à-vis d'une dégradation donnée et de témoin de durée de vie pour l'évaluation de la durée de vie d'un ouvrage.

A titre d'exemple, pour tester la performance d'un nouveau béton soumis à la classe d'exposition XC, correspondant à la corrosion des armatures par le phénomène de carbonatation du béton, on évalue la profondeur de pénétration du dioxyde de carbone (Prof. carbo) dans le béton en vérifiant la condition suivante :

$$Prof.carbo(béton\ \text{à}\ qualifier) \leq Prof.carbo(béton\ de\ référence) \quad (1.4)$$

Cette condition traduit le principe d'équivalence et, si elle est vérifiée, le béton à qualifier est considéré comme au moins aussi performant que le béton de référence pour la classe d'exposition XC. Cette traduction de l'équivalence entre le béton à qualifier et le béton de référence n'est pas satisfaisante dans la mesure où elle n'intègre pas la dispersion statistique des indicateurs de performance observée expérimentalement. Cette problématique est discutée dans la section : 1.2.3.

- **Comparaison d'un indicateur de durabilité avec une valeur seuil**

Les résultats des différents essais réalisés sur les bétons depuis de nombreuses années constituent une base de données exploitable. Le guide AFGC "conception des bétons pour une durée de vie donnée des ouvrage" [AFGC, 2004] permet de mettre en pratique la méthode des valeurs seuils en s'appuyant sur les indicateurs de durabilité. Il existe les indicateurs de durabilité généraux comme la porosité du béton ou sa perméabilité à l'eau et au gaz. Les indicateurs de durabilité généraux sont déterminés pour tout type de dégradation. Il y a aussi les indicateurs de durabilité spécifiques ; qui concernent un processus de dégradation spécifique comme la carbonatation du béton, l'attaque sulfatique, l'alcali-réaction etc.

Dans le tableau, extrait de la référence [AFGC, 2004], la durabilité des ouvrages en béton pour la classe XC (corrosion des armatures du béton induite par la carbonatation) et la classe XS (corrosion induite par les chlorures) est déterminée en utilisant les indicateurs de durabilité qui sont : la porosité, la perméabilité aux gaz, perméabilité à l'eau et le coefficient de diffusion apparent des chlorures (voir tableau 1.2 ci-dessous). Cette méthode est aussi détaillée dans le guide LCPC "Maîtrise de la durabilité des ouvrages d'art en béton application de l'approche performantielle" [LCPC, 2010].

A retenir

A l'échelle mondiale, on constate une intégration de l'approche performantielle pour la normalisation du béton. Certains pays comme les États-Unis, l'Afrique du sud et la France développent des projets complémentaires à l'approche prescriptive permettant d'appliquer une approche performantielle et d'autres pays comme le Canada ou l'Australie donnent des spécifications concernant l'approche prescriptive et performantielle dans la normalisation du béton. Au niveau européen, la norme EN 206 donne la possibilité d'utiliser l'approche performantielle en complément à l'approche prescriptive. Ainsi, les pays européens et plus particulièrement la France autorise l'application de l'approche performantielle et les projets (Exemple : le projet Applet [applet, 2012]) sont développés dans le but de permettre son application. La validation d'un béton par l'approche performantielle repose sur les mesures des indicateurs de durabilité issues des essais. Ces mesures varient en fonction de plusieurs facteurs tels que les erreurs de mesures, la variabilité liée au matériau béton, les conditions de réalisations des essais etc. Afin de prendre en compte la variabilité des indicateurs de durabilité, il est nécessaire d'adopter une approche statistique.

Indicateurs de durabilité sélectionnés et valeurs limites proposées (*) sur la base des tableaux 9 et 10 en fonction du type d'environnement (cf. tableau 11) et de la durée de vie exigée, dans le cas où l'enrobage satisfait aux valeurs réglementaires (26), (27). Peau est donnée en %, $D_{app(mig)}$ est donné en 10^{-12} $m^2.s^{-1}$, K_{gaz} (à S=0 et à $P_{entrée}$=0,2 MPa) est donnée en 10^{-18} m^2 et K_{liq} est donnée en 10^{-18} m^2. Les valeurs correspondent à des mesures réalisées selon les méthodes décrites dans ce guide sur des éprouvettes conservées dans l'eau pendant 3 mois après le coulage (moyennes sur au moins 3 éprouvettes).

	Type d'environnement	Durée de vie exigée / Catégorie d'ouvrage / Niveau d'exigence		<30 ans Niveau 1	De 30 à 50 ans Bâtiment Niveau 2	De 50 à 100 ans Bâtiment et ouvrages de génie civil Niveau 3	De 100 à 120 ans Grands ouvrages Niveau 4	> 120 ans Ouvrages dits exception-nels Niveau 5
Corrosion induite par carbonatation (e = 30 mm)	1	Sec et très sec (HR<65%) ou humide en permanence		• P_{eau} < 16	• P_{eau} < 16	• P_{eau} < 14 (6	• P_{eau} < 12 • K_{gaz} < 100	• P_{eau} < 9 • K_{gaz} < 10
	2	Humide (HR>80%)		• P_{eau} < 16	• P_{eau} < 16	• P_{eau} < 14 (6)	• P_{eau} < 12 • K_{gaz} < 100	• P_{eau} < 9 • K_{liq} < 0,01
	3	Modérément humide (65<HR<80%)		• P_{eau} < 15	• P_{eau} < 14 (5)	• P_{eau} < 12 (7) • K_{gaz} <100(8)	• P_{eau} < 9 • K_{gaz} < 10 (4)	• P_{eau} < 9 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01
	4	Cycles fréquents d'humidification séchage		• P_{eau} < 16	• P_{eau} <14 (6)	• P_{eau} < 12 (7) • K_{liq} < 0,1 (9)	• P_{eau} < 9 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$ <1 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01
Corrosion induite par les chlorures (e = 50 mm)	5	Exposition aux sels marins ou de déverglaçage	5.1 [Cl-] faible(1)	• P_{eau} < 16	• P_{eau} < 15	• P_{eau} < 14	• P_{eau} < 12 • $D_{app(mig}$ <20 • K_{liq} < 0,1(3)	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$<10 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01
			5.2 [Cl-] forte (2)	• P_{eau} < 14	• P_{eau} < 11	• P_{eau} < 11 • $D_{app(mig)}$ < 2 • K_{liq} < 0,1 (3)	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$ <1 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$ <1 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01
	6	Immersion dans l'eau contenant des chlorures		• P_{eau} < 15	• P_{eau} < 13	• P_{eau} < 13 • $D_{app(mig)}$ < 7	• P_{eau} < 12 • $D_{app(mig)}$ < 5	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$ < 1
	7	Zone de marnage		• P_{eau} < 14	• P_{eau} < 11	• P_{eau} < 11 • $D_{app(mig)}$ < 3 • K_{liq} < 0,1 (3)	• P_{eau} < 10 • $D_{app(mig)}$ <2 • K_{gaz} < 100 • K_{liq} < 0,05	• P_{eau} < 9 • $D_{app(mig)}$< 1 • K_{gaz} < 10 • K_{liq} < 0,01

Tableau 1.2. Valeurs limites proposées pour les indicateurs de durabilité [AFGC, 2004]

1.2.3. Nécessité d'une approche statistique du problème de qualification par les essais

La prise en compte de la variabilité des indicateurs de durabilité permet de les représenter par une loi de probabilité avec des caractéristiques tels que la moyenne, le coefficient de variation, le fractile à X% etc. Ainsi, on peut garantir l'atteinte d'un niveau de performance du béton avec un risque donné. Ainsi l'équation 1.4 traduisant le principe d'équivalence entre béton à qualifier et béton de référence sera transposée en termes probabilistes dans le cadre de nos travaux pour être reformulée :

$$Proba\{Prof.carbo(béton\ \text{à}\ qualifier) \leq Prof.carbo(béton\ de\ référence)\} \leq risque\ acceptable \quad (1.5)$$

Une fois les indicateurs de durabilité représentés par leurs distributions statistiques, l'application de l'approche performantielle de la durabilité du béton est possible ; notamment la méthode comparative béton de référence vs béton à qualifier, ou vs valeur seuil (voir section 1.2.2). Cette démarche a été proposée dans le Projet Applet [Applet, 2012].

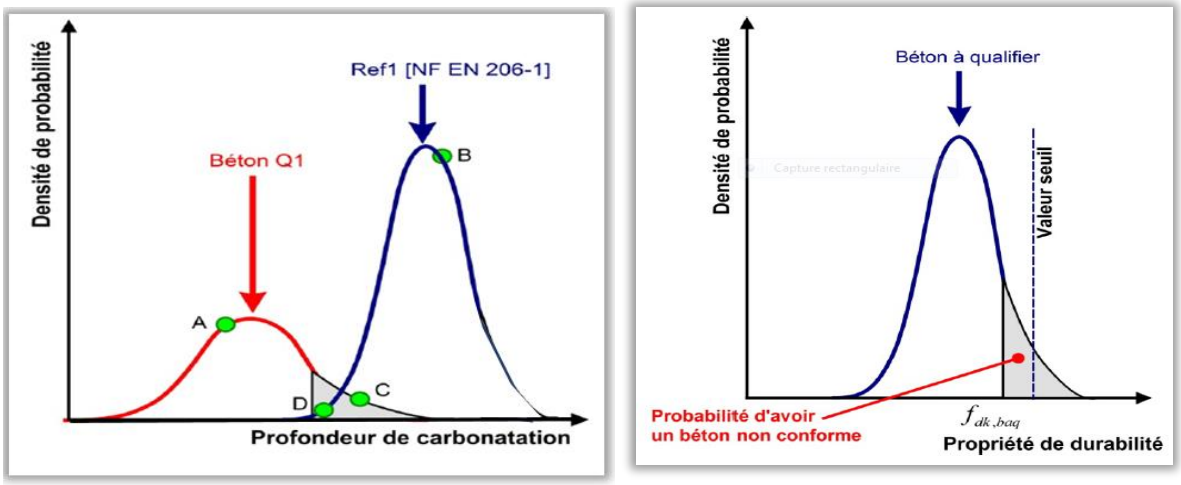
La figure 1.1a représente les lois de distribution des profondeurs de carbonatation du béton à qualifier (couleur rouge) et du béton de référence (couleur bleue). Le béton à qualifier est validé pour le cas de la résistance à la corrosion des armatures due à la carbonatation si sa profondeur de carbonatation est inférieure à celle du béton de référence. L'ensemble des bétons qui se situent dans la partie grise sont rejetés car considérés comme non conformes car la condition de l'équation (1.5) n'est pas vérifiée. Le point vert C qui se situent dans la partie grise de la figure 1.1a représente un béton considéré comme non conforme car il existe une probabilité non négligeable que la profondeur de carbonatation soit supérieure à celle observée dans le cas du béton de référence (par exemple au point D). Le point A représente quant à lui un béton considéré comme conforme pour le cas de la carbonatation du béton.

Dans la figure 1.1b, il est question de l'application de l'approche performantielle comparative entre un béton à qualifier et une valeur seuil. La propriété ou témoin de durabilité peut être, par exemple, la résistance à la compression. La valeur seuil serait alors un niveau de résistance à garantir. La valeur $f_{dk,baq}$ représente la valeur caractéristique de la résistance en compression en conception et correspondant à un fractile de sa loi de distribution [i.e équation (1.6)]

$$f_{dk,baq} = f_{dm,baq} + k\ \sigma_d, \quad (1.6)$$

où $f_{dm,baq}$ est la moyenne mesurée de la résistance à la compression, σ_d est l'écart-type et k, un coefficient d'écart à la moyenne, généralement associé à une valeur de probabilité

cible acceptable (par exemple la valeur k = 1,645 correspond à la probabilité Prob($f_d \geq f_{dm,baq} + 1{,}645\ \sigma_d$) = 5%)]. Si $f_{dk,baq}$ est supérieure à la valeur seuil alors le béton à qualifier ne pourra être considéré comme conforme au regard du niveau de risque acceptable.



1.1a *1.1b*

Figure 1.1. Illustration des approches performantielles avec prise en compte des incertitudes (1.1a. Approche par comparaison béton à qualifier vs béton de référence ; 1.1b. Approche par comparaison avec valeur seuil) [Applet, 2012]

Dans notre travail de recherche, il sera question de compléter l'approche probabiliste du projet Applet en proposant une optimisation de plans d'essais accélérés de suivi de la dégradation / performance de bétons fondée sur l'estimation robuste de la durée de vie. Cette méthode se réfère à l'approche performantielle comparative entre un béton à qualifier et une valeur seuil donnée (figure 1.1b).

Étant données les contraintes de temps et de coût pour les essais de durabilité du béton, la problématique à résoudre est celle de la définition du nombre et de la durée minimum d'essais à réaliser afin de déclarer une formulation de béton conforme par rapport à un environnement (classe d'exposition) donné.

1.3. Travaux précurseurs de l'approche performantielle

1.3.1. Evaluation de la performance par les approches performantielles

Parmi les travaux précurseurs de l'approche performantielle en France, nous pouvons citer ceux de Rozière [Rozière, 2007]. Ces travaux ont permis de faire un état de l'art sur les différents essais existants pour la carbonatation, la pénétration des ions chlorures, la lixiviation et les attaques sulfatiques externes et de proposer ces essais dans le cadre de l'application de l'approche performantielle. La méthode mise en avant est celle de la recherche de l'équivalence de performance en comparant un béton à qualifier et un béton de référence. Pour la partie réalisation des essais, il a été indiqué de faire une moyenne

sur trois éprouvettes de béton afin de caractériser l'indicateur de durabilité permettant de conclure sur la performance du béton.

Les travaux de Nicolas [Nicolas, 2011] rentrent dans le cadre de l'application de l'approche performantielle des bétons avec métakaolins obtenus par calcination flash. Différents essais tels que : l'essai de carbonatation accélérée, le gel/dégel, la caractérisation de la porosité, de la perméabilité au gaz, ont été réalisés afin d'obtenir les indicateurs de durabilité utiles pour l'approche performantielle. En appliquant la méthode de performance équivalente, les résultats montrent que les performances des bétons avec métakaolins obtenus par calcination flash ont globalement une performance équivalente aux bétons avec métakaolins "usuels".

Dans les travaux de sa thèse pour une meilleure caractérisation des indicateurs de durabilité avec l'approche performantielle, Allahyari [Allahyari, 2016] a étudié différentes formules de bétons. Une partie de ces formules correspond aux bétons dits de "référence" constitués de ciments courants et correspondant aux prescriptions de la norme NF EN 206 /CN et l'autre partie à des bétons avec ciment plus additions minérales appelés bétons à "qualifier". L'étude a porté sur la caractérisation des formules par les indicateurs de durabilité généraux (porosité à l'eau, la perméabilité aux gaz et le coefficient de diffusion des chlorures) avant de se consacrer à l'étude de leurs performances vis-à-vis du phénomène de carbonatation. Les trois méthodes de l'approche performantielle (le concept de performance équivalente, comparaison d'un indicateur de durabilité avec une valeur seuil, utilisation des modèles prédictifs) développées en France ont été utilisées afin de montrer l'équivalence de performance entre les bétons (section 1.2.2, sous-section b). Ces travaux ont montré l'importance de l'approche performantielle pour les nouvelles formules de béton et ouvrent des perspectives pour approfondir les connaissances sur l'utilisation des additions minérales.

1.3.2. Approches probabilistes de l'évaluation de la performance

Les travaux cités ci-dessus abordent l'approche performantielle sans tenir compte de l'aspect probabiliste sur la performance du béton. Les indicateurs de durabilités sont des paramètres qui varient en fonction des caractéristiques du béton et de son environnement. Il est donc indispensable de considérer le caractère aléatoire de la performance du béton vis-à-vis d'une dégradation donnée. Cette problématique de la variabilité des différents paramètres qui influent sur la durabilité a été prise en compte dans plusieurs travaux. On peut citer les travaux de Deby [Deby, 2008] basés sur la mise en place d'une approche probabiliste pour estimer la durabilité du béton en environnement marin. Cette approche permet d'estimer la durée de vie du béton à l'aide d'un indice de fiabilité β (l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind) [Hasofer et Lind, 1974] qui caractérise la probabilité d'initiation de

la corrosion des armatures. Elle prend en compte les variables aléatoires liées à la mise en œuvre du béton, au matériau et aux différentes mesures. La méthode s'articule autour d'un modèle déterministe de pénétration des ions chlorures dans le béton, l'identification des variables aléatoires avec leurs lois de probabilités et un réseau bayésien permettant d'actualiser les densités de probabilité des variables aléatoires. Dans la même démarche, Hyvert [Hyvert, 2009] a développé une approche probabiliste pour les bétons préfabriqués. Un modèle prédictif de carbonatation du béton a été développé et couplé avec un algorithme de probabilité afin d'estimer la durabilité du béton en utilisant l'indice de fiabilité.

Les concepts et méthodes utilisés dans le domaine de la fiabilité mécanique et électronique [Tebbi, 2005], [Laronde, 2014], [Beaumont, 2014] (méthode contrainte-résistance, estimation bayésienne, indice de fiabilité β , etc.) se démocratisent et sont repris et adaptés pour estimer la durabilité du béton. La majorité des travaux sur les approches probabilistes de la durabilité du béton se concentre sur la corrosion des armatures par la carbonatation et la pénétration des ions chlorures dans le béton, [Ngo, 2015], [Duprat et al, 2014], [Alexander et Beushausen, 2019], [Muigai et al, 2012], [Bastidas-Arteaga et al, 2013], [Zhang and Xiao, 2018], [Nganga and al, 2013].

Les approches probabilistes doivent aussi être massivement appliquées aux autres types de dégradations telles que le gel - dégel , les attaques sulfatiques, l'alcali- réaction etc., afin de pouvoir obtenir une réelle estimation de la durabilité des bétons soumis à ces dégradations. La caractérisation des indicateurs de durabilité par des lois de probabilité implique une prise en compte de la problématique sur le nombre d'essais possible à réaliser afin d'avoir une représentativité réelle des indicateurs de durabilité mesurés sur une formule de béton donnée.

1.4. Phénomènes de dégradation pour les classes d'exposition

Cette section présente principalement les dégradations sur le béton conduisant à la corrosion des armatures. La présentation concerne les processus de dégradation et les essais réalisés afin d'estimer la performance du béton.

La classe d'exposition XC concerne un environnement qui conduit à la corrosion des armatures par le processus de carbonatation du béton. Les classes XS et XD représentent respectivement un environnement dont la corrosion des armatures du béton se fait par les chlorures de l'eau de mer et ceux avec une autre origine (voir Annexe2 : Tableau F.1). La corrosion des armatures du béton par la carbonatation et la pénétration des ions chlorures est une des pathologies les plus répandues dans le domaine de la construction [AFGC,

2003]. Ainsi, une présentation des processus de dégradation sera faite afin de comprendre le phénomène et de proposer une application de la méthode d'optimisation des essais pour estimer la performance d'un béton appartenant à une des classes d'exposition (XC, XS et XD). Notre étude se limitera aux processus conduisant à la corrosion des armatures et non à l'étude propre du phénomène de corrosion [Mai-Nhu, 2013].

1.4.1. Carbonatation du béton

a) Le processus

La carbonatation du béton est un phénomène spontané (identifié depuis les travaux de Louis Vicat, [Vicat, 1818]) de captation du CO_2 atmosphérique par les chaux et le ciment. Sa cinétique est lente mais le phénomène, inexorable, s'initie à la surface et progresse à l'intérieur du béton. La carbonatation de la Portlandite en carbonates de calcium et des silicates de calcium hydratés (CSH) provoque par ailleurs une baisse du pH de la solution interstitielle du béton. Cette carbonatation en elle-même n'est pas un problème pour le béton car elle participe plutôt à l'augmentation de sa compacité et à la résistance en compression. Le problème lié à la carbonatation du béton armé est la corrosion des armatures qui entraine par la suite sa dégradation ainsi que la ruine des ouvrages. Le dioxyde de carbone dans le béton provoque la diminution du pH de 13 à 9 dans la solution interstitielle qui conduit à la dépassivation des armatures puis à leur corrosion. La carbonatation du béton affecte les produits d'hydratation du clinker comme la Portlandite $Ca(OH)_2$ et les CSH.

Les auteurs comme [Papadakis et al. 1991, Thiéry, 2005] montrent que la carbonatation se produit principalement avec la Portlandite $Ca(OH)_2$ qui réagit en présence du dioxyde de carbone pour faire apparaitre du carbonate de calcium ($CaCO_3$) dans le béton. Cette réaction simplifiée est décrite par l'équation suivante :

$$Ca(OH)_2 + CO_2, H_2O \rightarrow CaCO_3 + 2\,H_2O \tag{1.7}$$

En effet, il existe trois phases qui décrivent le phénomène de carbonatation du béton :

- Une phase de dissolution de CO_2 dans l'eau qui est illustrée par :

$$CO_{2(g)} + H_2O \leftrightarrow H_2CO_3 \tag{1.8}$$

- Une phase de réaction acido-basique impliquant les ions carbonatés

$$H_2CO_3 + OH^- \leftrightarrow HCO_3^- + H_2O \tag{1.9}$$

$$HCO_3^- + OH^- \leftrightarrow CO_3^{2-} + H_2O \tag{1.10}$$

$$OH^- + H_3O^+ + \leftrightarrow 2\,H_2O \tag{1.11}$$

- Une phase de carbonatation de la Portlandite représentée par les équations (1.12), (1.13) et des silicates de calcium hydratés C-S-H noté ($CaO.SiO_2.nH_2O$) par l'équation (1.14) :

$$Ca(OH)_2 \leftrightarrow Ca^{2+} + +2OH^- \quad (1.12)$$

$$Ca^{2+} + CO_3^{2-} + \leftrightarrow CaCO_3 \quad (1.13)$$

$$H_2CO_3 + CaO.SiO_2.nH_2O \leftrightarrow CaCO_3 + SiO_2.nH_2O + H_2O \quad (1.14)$$

Ce phénomène de carbonatation est lent. Pour le caractériser expérimentalement, il est nécessaire de l'accélérer en augmentant la quantité de dioxyde de carbone tel que le préconise la norme XP P18-458 [XP P18-458,2008] ou le mode opératoire AFPC-AFREM [AFPC, 1997].

b) Caractérisation expérimentale de la performance des bétons subissant la carbonatation

Afin de qualifier le béton dans un environnement correspondant à la classe d'exposition XC (corrosion induite par la carbonatation), un test de carbonatation accélérée est utilisé. En France, un test de carbonatation accélérée doit respecter la norme XP P18-458 [XP P18-458,2008] ou le mode opératoire AFPC-AFREM [AFPC, 1997]. Avant l'essai de carbonatation, un pré-conditionnement des échantillons est nécessaire. On commence par l'immersion des éprouvettes dans l'eau à (20±2) °C pendant (48 ±2) h pour finir par un séchage à une température de (45±5) °C sans l'influence de l'humidité extérieure pendant une durée de (14±1) jours. Les essais commencent une fois que les éprouvettes atteignent la température ambiante. Ainsi, les échantillons sont exposés dans une chambre climatique où l'humidité est de 65 ± 5% et la température est de 20 ± 2 °C. L'atmosphère est composée d'un mélange gazeux avec (50 ± 5) % de CO2, (voir figure 1.2).

Au niveau Européen, il existe la spécification technique CEN/TS 12390-12 [EN 12390-12, 2010], qui, avant les essais de carbonatation, au lieu d'un pré-conditionnement, propose de conserver les échantillons dans des conditions naturelles de laboratoire avec une humidité relative de 65 ± 5 % et une température de 20 ± 2 °C pendant 14 jours puis ils sont placés dans une enceinte avec une teneur en CO_2 de (4,0 ± 0,5) %, une température de (20 ± 2) °C et une humidité relative de (55 ± 5) % .

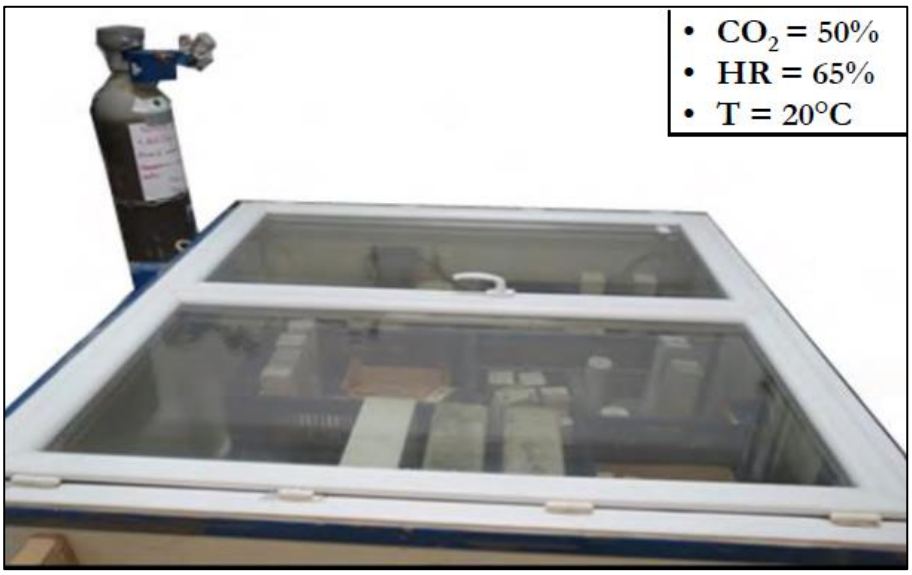


Figure 1.2. Dispositif pour réaliser l'essai de carbonatation accélérée à 50% [Allahyari, 2016]

Les mesures sur les éprouvettes de béton sont effectuées après 7, 14 et 28 jours de carbonatation. Les éprouvettes sont détruites et la zone carbonatée est mise en évidence en utilisant un indicateur de pH comme la phénolphtaléine qui est incolore sur les zones carbonatées (avec un pH autour de 9) et rose sur les zones saines (avec un pH autour de 13) (figure 1.3).

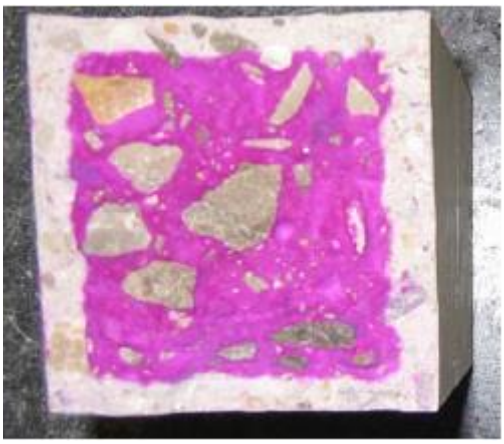


Figure 1.3. Mise en évidence de la zone carbonatée d'une section d'une éprouvette de béton [Roziere, 2007]

Les résultats obtenus sont utilisés comme indicateurs de la durabilité du béton permettant de prédire la durée de progression du dioxyde de carbone jusqu'au niveau des armatures et déclencher la corrosion à l'origine de la ruine des ouvrages en béton armé.

c) Critiques sur les essais de carbonatation

Trois types de protocoles d'essais de carbonatation accélérée ont été cités dans cette section : la norme XP P18-458 [XP P18-458,2008], le mode opératoire AFPC-AFREM [AFPC, 1997] et la spécification technique CEN/TS 12390-12 [EN 12390-12, 2010]. Les deux

premiers protocoles utilisent une teneur de CO_2 de (50 ± 5) % et le troisième, une teneur de (4,0 ± 0,5) % de CO_2. Tout d'abord, il est évident que pour avoir un essai de carbonatation représentatif des conditions réelles, l'essai de carbonatation naturelle est le plus approprié. Mais cet essai pose des problèmes en termes de temps et de mobilisation de moyens. Ainsi, le recours à des essais accélérés permet de les éviter mais introduit une interrogation sur la représentativité des essais accélérés. Si plusieurs travaux de recherche tendent à démontrer que la vitesse d'avancement du front de carbonatation et proportionnelle à la concentration en CO_2, [Nischer, 1984], [Parrott, 1987], [Sanjuan et Del Olmo, 2001], [Yoon et al, 2007], d'autres montrent que l'influence de la concentration en CO_2 et le degré de carbonatation du béton n'est pas bien clarifiée. En effet, il existe trois avis sur le sujet. Le premier tend à défendre qu'une augmentation de la concentration du CO_2 implique une augmentation du degré de carbonatation, [Matsushita et al, 2004], [Anstice et al, 2005], [Castellote et al, 2009]. Le deuxième avis clame le contraire [Groves et al, 1990], [Dheilly et Tudo, 1996], [Thiery, 2005]. Et, le troisième avis affirme qu'il n'y a pas de lien entre la concentration de CO_2 et le degré de carbonatation [Ji et al, 2010]. Dans notre travail de recherche, la première hypothèse est choisie comme cadre de notre approche : une étude prenant en compte la variation de la concentration du CO_2 permettra de voir son influence sur l'estimation de la durabilité d'un béton soumis à la carbonatation. Cette étude doit permettre de déterminer les taux de concentration de CO_2 pouvant être utilisés lors des essais de carbonatation afin d'obtenir une meilleure estimation de la durée de vie du béton dans son environnement. La profondeur de carbonatation du béton (l'indicateur de durabilité) est obtenue en faisant souvent la moyenne sur un nombre réduit d'éprouvettes de béton (voir section 1.4.1). La valeur obtenue doit être justifiée afin de ne pas rendre une conclusion erronée concernant la qualification ou non qualification du béton (voir section 1.2.3). Ainsi, la question de l'optimisation des essais devient indispensable pour permettre de qualifier la durabilité pour le processus de carbonatation avec un risque donné. Un autre phénomène qui conduit à la corrosion des armatures et qui peut être étudié est la pénétration des ions chlorures dans le béton en environnement marin par exemple.

1.4.2. Pénétration des ions chlorures dans le béton

a) Le processus

Une concentration critique des ions chlorures déclenche la dépassivation des armatures et conduit à la corrosion des armatures du béton [Nguyen, 2014], conséquence de l'apparition des fissures conduisant et la ruine des ouvrages qui subissent des attaques aux chlorures. La pénétration des ions chlorure a lieu lorsque le béton est exposé à l'eau de mer ou aux sels de déverglaçage. Les deux principaux mécanismes qui sont à l'origine du phénomène

sont l'absorption capillaire et la diffusion [Rozière, 2007], [Deby, 2008], [Soufi, 2013]. La diffusion se déroule en milieu saturé et découle d'un gradient de concentration en chlorures de la solution qui se trouve dans les pores entre la surface exposée et l'intérieur du béton. Le deuxième mécanisme permettant la pénétration des ions chlorures est l'absorption capillaire qui a lieu dans un béton sec ou partiellement saturé et imprégné par une solution saline.

Dans le béton, on distingue deux types d'ions chlorures :

- les chlorures libres, qui se déplacent dans la solution interstitielle du béton;
- les chlorures fixés, qui s'accrochent à la matrice cimentaire.

L'ensemble des chlorures libres et fixés constituent les chlorures totaux dans le béton. Il existe différents types d'essais permettant de classer les bétons vis-à-vis de la pénétration des ions chlorures qui participent à la corrosion des armatures.

b) Caractérisation expérimentale de la performance des bétons subissant la pénétration des ions chlorures

Comme le processus de carbonatation du béton, la pénétration des ions chlorures est un processus qui évolue lentement dans le béton. Il existe des essais dits de diffusion simple qui peuvent prendre plusieurs mois. La solution pour accélérer le processus est de réaliser des essais de migration sous champ électrique. Il existe deux types d'essais de migration sous champ électrique [GranDuBé, 2007]:

- les essais de migration en régime permanent ou stationnaire
- les essais de migration en régime transitoire.

Après la préparation des éprouvettes de béton par sciage et conditionnement, les essais de migration peuvent être réalisés.

- **Essai de migration en régime permanent ou stationnaire**

Les essais de migration en régime permanent permettent de calculer le coefficient de diffusion effectif D_{eff} (m^2/s) du béton. L'essai consiste à placer une éprouvette de béton saturé entre deux compartiments contenant chacun une solution. Les deux compartiments sont reliés entre eux à l'aide de deux électrodes. Le compartiment en amont contient la cathode et une solution avec des ions chlorures et le compartiment en aval contient l'anode et une solution sans ions chlorures. A l'aide d'un champ électrique, les ions chlorures migrent de la cathode vers l'anode. Une fois que le flux des ions devient stable, ce qui correspond au régime permanent ou stationnaire, le coefficient de diffusion effectif peut être calculé [Soufi, 2013].

- **Essai de migration en régime transitoire**

Le principe reste le même que celui avec l'essai de migration en régime permanent. La différence se retrouve sur l'exploitation qui se fait en régime transitoire. Au bout de 24 heures, la profondeur de pénétration des ions chlorures dans le béton est déterminée à l'aide d'une solution de nitrate d'argent qui réagit en montrant la partie où les ions chlorures sont présents (voir figure 1.4). La profondeur de béton est ainsi mesurée pour déduire un coefficient de diffusion apparent D_{app} (m2/s).

En réalisant les essais en régime transitoire, on réduit le temps, ainsi que le coût de mobilisation de personnes et des dispositifs pour les essais. Pour mettre en place une approche performantielle, l'essai en régime transitoire est le mieux adapté dans le cadre d'une approche comparative [Roziere, 2007]. Il existe différents types d'essais en régime transitoire. Parmi ces essais, on peut citer : l'essai Nordtest NT BUILD 443 [NT BUILD 443, 1995], les essais dits Rapid Chloride Permeability Tests (exemple ASTMC 1202-05 [ASTMC, 2005]) et l'essai NT BUILD 492 [NT BUILD 492, 1999], le mode opératoire GranDuBé [GranDuBé, 2007].

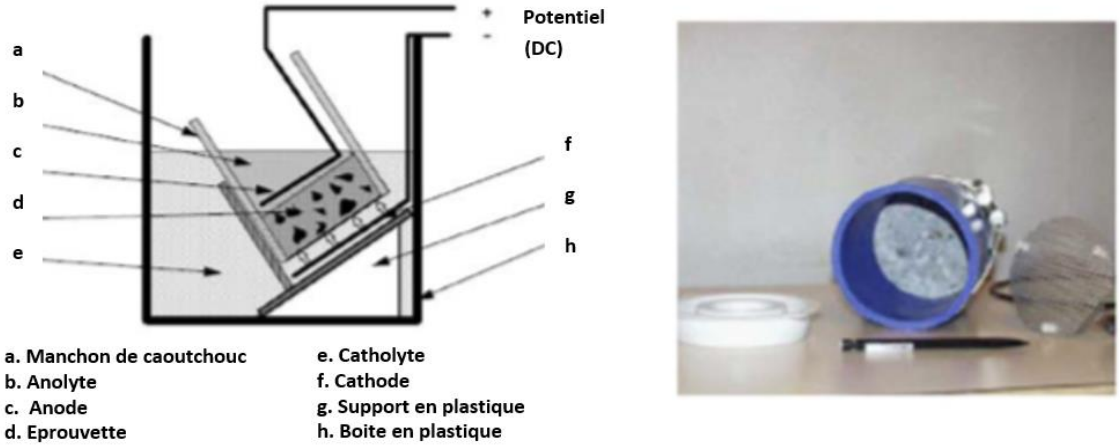


Figure 1.4. Dispositif d'essai de la méthode NT BUILD 492 (à droite) et son illustration (à gauche) [NT BUILD 492, 1999]

c) Critiques sur les essais de pénétration des ions chlorures

Les essais de caractérisation de la pénétration des ions chlorures dans le béton permettent de déterminer le coefficient de diffusion effectif D_{eff} et le coefficient de diffusion apparent D_{app}. Le coefficient de diffusion effectif mesuré en régime permanent caractérise le flux de chlorures libres dans le béton et néglige les interactions physico-chimiques entre des chlorures sur la matrice cimentaire tandis que le coefficient de diffusion apparent mesuré en régime transitoire les prend en compte. L'essai en régime permanent caractérise le comportement du matériau béton lors de la pénétration des ions chlorures alors que l'essai en régime transitoire met en évidence les interactions physico-chimiques

des ions chlorures dans la matrice cimentaire. Les deux essais sont complémentaires et permettent de caractériser le béton vis-à-vis du phénomène de pénétration des ions chlorures. Néanmoins, dans le cadre d'une application d'une approche performantielle du concept de performance équivalente où l'essai doit être représentatif, répétable, reproductible, sensible et rapide, l'essai en régime transitoire, notamment le mode opératoire NT BUILD 492 remplit les exigences demandées [Roziere, 2007]. Les conditions environnementales influent sur la pénétration des ions chlorures ; il faut alors tenir compte des conditions d'exposition du béton (conditions de cure, âge du béton taux de saturation aux chlorures et conditions limites).

Les études réalisées sur le sujet de la pénétration des ions chlorures dans le béton, [GranDuBé, 2007], [Roziere, 2007], [Deby, 2008], [Soufi, 2013] [Nguyen, 2014], ne prennent pas en compte d'une façon spécifique la problématique sur les données des essais. La variabilité des coefficients de diffusion apparente et effective est prise en compte dans les travaux de Deby [Deby, 2008] concernant la durabilité des bétons en environnement marin. Les coefficients de diffusion sont caractérisés par leurs lois de probabilité avec moyenne et écart-type. Toutefois comme avec les essais sur la carbonatation du béton, la question de l'optimisation des essais n'est pas abordée. Ainsi, les travaux de cette thèse sont orientés pour apporter une réponse sur l'optimisation des essais de durabilité.

1.5. Les modèles prédictifs

La connaissance des mécanismes de dégradation de certains processus a permis d'établir des modèles permettant de prédire différentes dégradations sur le béton. Ces modèles utilisent les indicateurs de durabilité comme paramètres d'entrée et donnent comme résultats les valeurs de témoins de durée de vie ou indicateurs de durabilité spécifiques. Seuls les modèles de carbonatation seront présentés ici, pour les modèles concernant la pénétration des ions chlorures ou l'alcali-réaction, nous pourrons nous référer aux travaux présentés dans le guide AFGC [AFGC, 2004], par Deby [Deby, 2008], Wang [Wang, 2012] ou Hyvert [Hyvert, 2009].

Dans sa thèse, intitulée "Contribution à l'approche probabiliste de la durabilité des structures en béton soumises à la carbonatation" Ngo [Ngo, 2015] a classé les modèles de carbonatation en deux catégories ; les modèles simplifiés et ceux dits "avancés". Les modèles simplifiés se caractérisent par un nombre de paramètres d'entrée réduits et faciles à obtenir ainsi qu'un formalisme mathématique simplifié. On peut citer les modèles développés par : Ying-Yu et Qui-Dong [Yin, 1987], Papadakis [Papadakis et al, 1991],

Bakker [Bakker, 1993], CEB code [CEB, 1997], Duracrete [Duracrete, 1999], Miragliotta [Miragliotta, 2000] et Hyvert [Hyvert, 2009].

Les modèles dits "avancés" ; ont une modélisation mathématique plus complexe et un nombre élevé de paramètres d'entrée du modèle. On peut citer les modèles : de Thiery [Thiery, 2005], de Bary [Bary et al, 2004], de Saetta [Saetta et al, 1995], de Mai-Nhu [Mai-Nhu, 2013], de Burkan-Isgor [Burkan-Isgor et al, 2002], modèle de carbonatation avec réseau de neurones [Paul et al, 2018], modèle de Metalssi et al [Metalssi et al, 2020] et le modèle de Mi et al. [Mi et al, 2019].

Parmi les modèles de carbonatation de la littérature, nous allons présenter dans ce paragraphe le modèle de Papadakis [Papadakis et al, 1991] et le modèle de hyvert [Hyvert, 2009], adapté afin de prendre en compte les différentes pressions de CO_2 dans la prédiction de la profondeur de carbonatation du béton.

1.5.1. Modèle de Papadakis

Le modèle de Papadakis est un des modèles de carbonatation le plus utilisé dans les applications de prédiction de la profondeur de carbonatation du béton [Papadakis et al, 1991], [Laing et al, 2002], [Thiery et al, 2012]. C'est un modèle reposant sur deux principales hypothèses ; la réaction de carbonatation est infiniment plus rapide que la diffusion du CO_2 dans le béton et que la quantité de CO_2 dissoute dans la solution interstitielle de la matrice cimentière est très inférieure à la quantité de matière carbonatable ($Ca(OH)_2$, C-S-H, C_2S et C_3S).

La profondeur de carbonatation du béton X (mm) est donnée en fonction du temps t, par l'équation suivante :

$$X(t) = \sqrt{\frac{2.D[C]t}{[CH]_0+3[CSH]_0+3[C_3S]_0+2[C_2S]_0}} \quad (1.15)$$

Où, D qui est le coefficient de diffusion effectif de CO_2 dans le béton (m^2/s), $[C]$ la concentration en CO_2 dans la phase gazeuse en contact avec le béton (mol/m^3), $[CH]_0$ et $[CSH]_0$ sont les concentrations initiales des hydrates (CH et CSH) (mol/m^3), $[C_3S]_0$ et $[C_2S]_0$ les concentrations initiales des anhydres C2S et C3S (mol/m^3).

Si on considère que seule la Portlandite $Ca(OH)_2$ réagit lors de la carbonatation du béton, on ne retrouvera dans l'équation (1.14) que la concentration $[CH]_0$. Ceci permet d'être plus sécuritaire pour la prévision des dommages qui seront causés par la carbonatation. Toutefois, le modèle ne possède pas de paramètres comme l'humidité relative et le degré de saturation des pores du béton. Dans ses travaux sur la carbonatation du béton, Thiery [Thiery et al, 2012] a proposé le modèle de Papadakis en le couplant avec le modèle de Bakker [Bakker, 1993] afin de prendre en compte les cycles d'humidification et séchage du béton. Le coefficient de diffusion effectif intègre les paramètres d'humidité et de

saturation du béton. Ainsi, il est important d'avoir plus d'information sur ce coefficient. Le modèle de Papadakis ayant été validé par des essais accélérés, n'est pas adapté pour prédire les profondeurs de carbonatation du béton pour des pressions partielles de CO_2 faibles (s'approchant de la pression partielle naturelle 0.03 % de pression atmosphérique). Pour pallier ce problème, Hyvert [Hyvert, 2009] a développé un modèle permettant de prendre en compte différentes pressions partielles de CO_2 pour prédire la profondeur de carbonatation du béton.

1.5.2. Modèle de Hyvert

Le modèle permet d'estimer la profondeur de carbonatation du béton pour une durée de vie donnée t (s) à l'aide des indicateurs de durabilité comme le coefficient de diffusion du CO_2 en zone carbonatée D_{CO2}^{o} (m^2/s) et la quantité de calcium dans le béton pour la Portlandite, l'éttringite et les aluminates notée Q1 (mol/l de matériau), la quantité de calcium dans les C-S-H du béton notée C2' (mol/l de matériau). Le modèle prend en compte d'autres paramètres tels que la pression de CO_2 à la surface du béton P_0 (Pa), la pression atmosphérique P_{atm} (Pa), k_e pour prendre en compte les conditions environnementales, k_p prenant en compte le process de fabrication du béton, R la constante des gaz parfaits (J/(K.mol)), T la température en kelvin et err1 étant l'erreur induite par l'utilisation de la formule empirique $f_{cm,28}$ (résistance en compression moyenne du béton en 28 jours) et la profondeur de carbonatation pour évaluer $\left(\frac{D_{CO2}^{o}}{Q1}\right)_{ref}$

$$X(t) = \sqrt{\frac{2.err1.\left(\frac{D_{CO2}^{o}}{Q1}\right)_{ref}.Q1.P_0.t.k_e.k_p}{R.T.\left(1+23.5\ C2'\ .\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{0.67}\right)\left(\frac{C2'}{0.67+1}.\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{0.67}+Q1\right)}} \quad (1.16)$$

La difficulté sur l'estimation de la profondeur de carbonatation réside dans l'estimation des lois des différents paramètres du modèle. Une meilleure estimation de la profondeur de carbonatation dépend d'une connaissance plus précise sur les paramètres qui constituent le modèle.

1.6. Planification des essais destructifs et non destructifs

La méthode développée dans notre travail de thèse repose principalement sur l'exploitation de données construites à base de modèles ou d'essais performantiels afin de caractériser un processus stochastique (voir Chapitre 2). Ce processus va modéliser la dégradation étudiée et permettre la prédiction de la durée de vie du béton. La mise en place d'un plan d'essais optimisé permettra d'obtenir une statistique sur les essais performantiels à réaliser. La plupart des essais performantiels normalisés sur le béton sont destructifs. Les mesures sont réalisées en détruisant les éprouvettes de béton qui ne peuvent plus être réutilisées pour d'autres mesures. Toutefois, il existe des techniques permettant de réaliser des mesures sans détruire les éprouvettes de béton. La stratégie d'estimation de la durabilité du béton par optimisation d'un plan d'essais accélérés doit distinguer les deux cas de figures : essais destructifs ou non destructifs.

1.6.1. Essais destructifs

Comme évoqué précédemment, les essais performantiels sur le béton sont souvent destructifs. Dans ce cas le plan d'essais optimisé consistera à trouver le nombre d'éprouvettes (n) optimales qui seront utilisées pour réaliser les mesures pour différents temps optimaux donnés (t) sous un stress (S) (voir figure 1.5). Plus précisément, dans cette figure, tjk désigne le j-ème temps de mesure au niveau de stress k, nijk désigne la n -ème éprouvette au temps de mesure j et au niveau k, TSk désigne le temps total des mesures pour le niveau k , fjk désigne la fréquence au niveau de stress k entre deux temps de mesures.

Le nombre total d'éprouvettes sera ici $N = \sum_{i,j,k} n_{ijk}$ et chaque éprouvette est testée une seule fois.

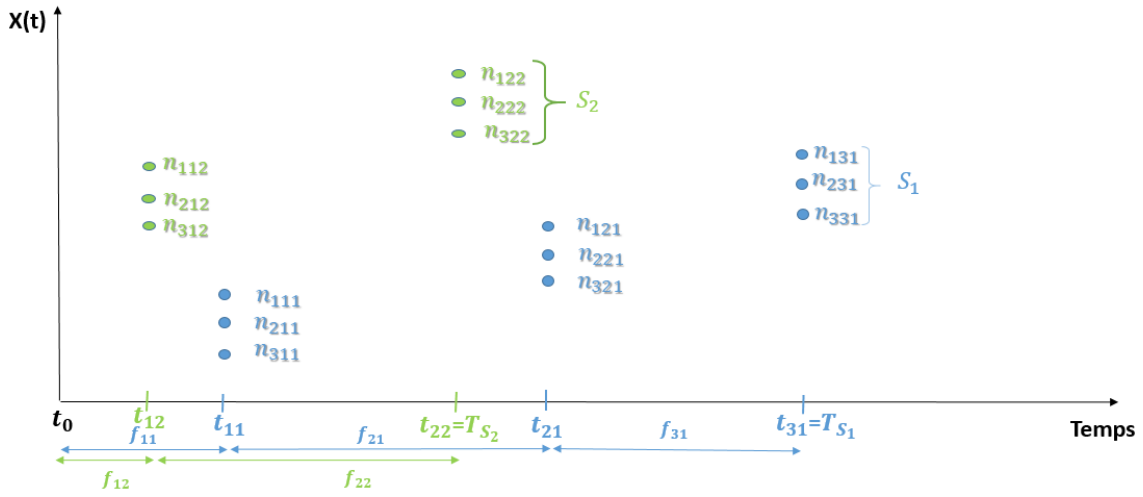


Figure 1.5. Illustration d'un plan d'essais dans le cadre des essais destructifs

Les mesures obtenues avec le plan d'essais destructifs vont servir à caractériser un processus stochastique afin d'estimer la durabilité du béton. Ces mesures peuvent aussi provenir des essais non destructifs.

1.6.2. Essais non destructifs

Avec le vieillissement des infrastructures et la nécessité d'apporter un diagnostic sur les pathologies développées par certains ouvrages afin de prédire leur durabilité, des techniques non destructives sont mises en place dans le but de faire des mesures sur les infrastructures en évitant les méthodes destructives et réduire aussi le coût économique lié aux essais. Dans ce cas, l'indicateur de durabilité recherché est obtenu par une combinaison de deux ou plusieurs paramètres mesurés par les essais non destructifs. Les travaux de recherche menés dans le domaine des essais non destructifs permettent d'avoir une connaissance plus détaillée sur les méthodes utilisées afin d'obtenir les indicateurs de durabilité.

Les méthodes non destructives ont été appliquées par Torres-Luque [Torres-Luque et al, 2014] pour mesurer la pénétration des ions chlorures et par [Capozzoli et Rizzo, 2017] pour différentes applications dans le domaine du génie civil. Dans ses travaux de recherche, Nguyen [Nguyen, 2014] étudie les méthodes de contrôle non destructif (CND) afin de mettre en évidence l'impact de la variabilité du matériau, de l'incertitude de mesures sur le diagnostic des ouvrages. Trois points ont été abordés : l'évaluation de la distribution spatiale des propriétés du béton, l'optimisation de la stratégie des mesures (localisation de la mesure, nombre de mesures, la précision et les techniques utilisées) et la déduction de l'indicateur de durabilité en donnant sa précision ainsi que sa fiabilité. Une étude pour montrer l'effet de la carbonatation sur certaines mesures telles que la résistivité électrique, vitesse ultrason et rebond a été réalisée. Toutefois, l'étude n'a pas permis de présenter un modèle pour déduire la profondeur de carbonatation du béton avec les paramètres mesurés par les essais non destructifs. La présentation de lois et de modèles permettant de déduire la profondeur de carbonatation est faite par Bonnet et Balayssac [Bonnet et Balayssac, 2018] dans une étude qui montre l'évaluation de la profondeur de carbonatation du béton par la combinaison de la méthode du résistivimètre de Wenner et du perméamètre de Torrent [Bonnet et Balayssac, 2018]. Les études montrent qu'il existe une sensibilité entre les résultats de l'essai de résistivité et de perméabilité avec la saturation du béton. Des lois permettant de modéliser la résistivité et la perméabilité en fonction de la carbonatation ont été présentées. Ces modèles ont montré, à travers une application leur capacité, à prédire la profondeur de carbonatation du béton.

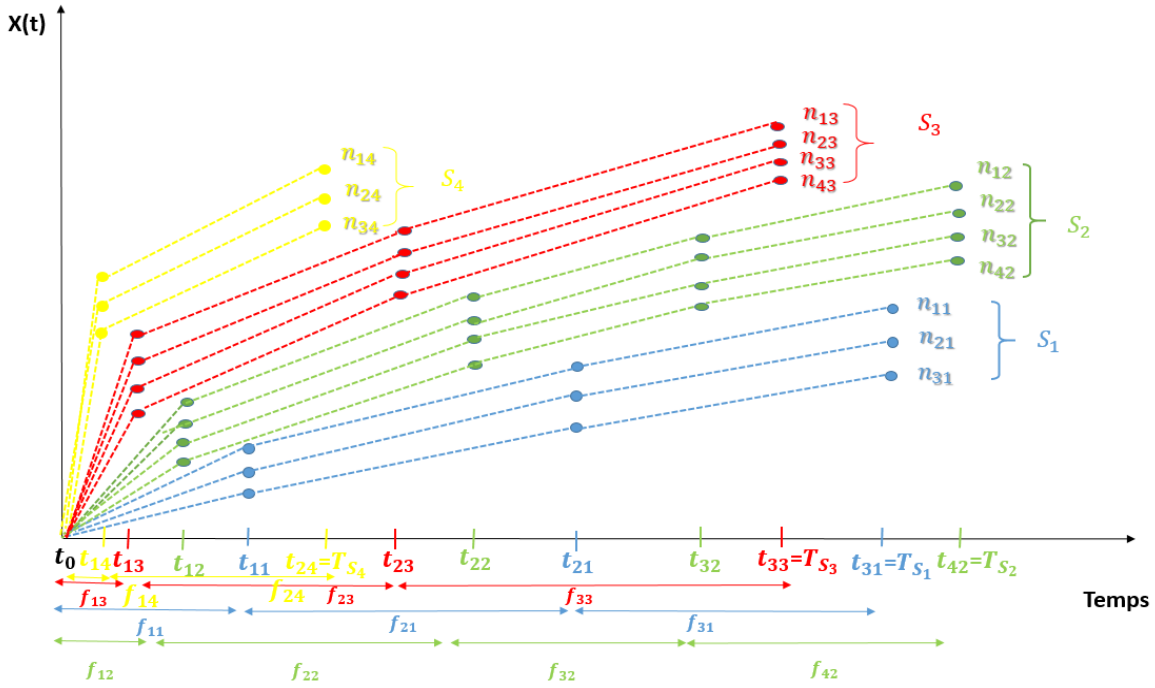


Figure 1.6. Illustration d'un plan d'essais dans le cadre des essais non destructifs

Dans ce travail de recherche, après avoir mis en place une méthode permettant d'estimer la durabilité du béton en utilisant un plan d'essais destructif optimisé, il sera aussi question d'appliquer cette méthode avec les essais non destructifs. La démarche consiste à utiliser un nombre optimal d'éprouvettes et à déterminer les temps optimaux pour lesquels seront réalisées les mesures (voir figure 1.6) ; tjk désigne le j-ème temps de mesure au niveau de stress k, nik désigne la i-ème éprouvette au niveau k, TSk désigne le temps total des mesures pour le niveau k , fjk désigne la fréquence au niveau de stress k entre deux temps de mesures. Le nombre total d'éprouvettes sera ici $\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{d} \mathrm{N_k}$ avec $\mathrm{N_k}$ le nombre total d'éprouvette au niveau de stress k.

Les essais non destructifs permettent d'éviter la destruction des éprouvettes de béton et contribuent à la réduction du nombre d'essais pour des contraintes de budget et de temps.

1.7. Conclusion

La connaissance des différentes dégradations à l'origine de la corrosion des armatures du béton (carbonatation et pénétration des ions chlorures) est très importante car elle permet de prévenir les dommages susceptibles d'apparaître dans les ouvrages en béton armé. Il est alors possible de prévoir des travaux d'entretien des ouvrages ainsi que leurs durées de vie. Ces prévisions peuvent se faire à partir des données des essais réalisés sur les formules de béton utilisées dans les ouvrages. Pour les bétons définis dans la norme EN 206, il suffit de vérifier si leur performance est comparable à la durée de vie prescrite dans la norme.

Pour les bétons dont les formulations dérogent à celles de la norme, il faut utiliser l'approche performantielle afin de montrer l'équivalence de performance. Estimer la performance du béton revient à déterminer non seulement ses caractéristiques de résistances mécaniques, mais aussi sa durabilité. Cela passe par l'utilisation des indicateurs de durabilité et des essais performantiels. La question de l'optimisation des essais de durabilité se pose compte tenu des coûts et délais qu'ils engendrent. Il faut aussi s'assurer d'avoir une stratégie d'essais permettant d'estimer la durabilité du béton avec une garantie donnée (niveau de confiance). L'utilisation des modèles de durée de vie alimentés par les données des essais permet aussi de prédire la durée de vie du béton. La question de l'utilisation d'un plan d'essais n'est pas évoquée dans la littérature des essais de durabilité du béton. Ainsi, la mise en place d'une méthode d'estimation de la durabilité du béton en utilisant un plan d'essais permettra d'apporter des réponses sur les problématiques déjà évoquées dans cette thèse.

Dans ce premier chapitre, l'approche dite traditionnelle ou prescriptive de la normalisation du béton a été exposée. Elle définit la composition du béton en fonction des classes d'exposition et de la durée d'utilisation de l'ouvrage. Cette approche qui reste satisfaisante, ne permet pas la validation de l'utilisation de nouveaux composants non-inscrits dans la norme ainsi que la quantification de la performance du béton. L'approche performantielle est proposée comme une alternative permettant d'utiliser d'autres matériaux pour la formulation d'un nouveau béton tout en montrant que ce dernier est au moins aussi performant que celui défini dans la norme. Les méthodes mises en place pour appliquer l'approche performantielle (concept de performance équivalente, comparaison d'un indicateur de durabilité avec une valeur seuil et les modèles prédictifs) utilisent les indicateurs de durabilité et les essais performantiels. Les travaux précurseurs de l'approche performantielle ont permis d'aborder la problématique sur le nombre limité de données et de montrer le manque de statistique des données dans le cadre de la garantie de performance et de travaux sur la définition de plans d'essais accélérés optimaux. La

présentation des processus conduisant à la corrosion des armatures du béton a été faite ainsi qu'une stratégie de planification des essais destructifs et non destructifs.

2. ESTIMATION FIABILISTE DE LA DUREE DE VIE DES BETONS PAR LES ESSAIS

2.1. Introduction

Un des constats faits dans le premier chapitre consiste en l'absence de grandes bases de données permettant un traitement statistique et fiabiliste de la performance du béton dans un environnement donné (exemples : environnement avec gel/dégel, pénétration des ions chlorures, carbonatation etc.). Ce constat ouvre la réflexion sur la mise en place d'une méthode permettant d'estimer la durabilité du béton (fiabilité) avec une garantie (un niveau de confiance) requise en utilisant un nombre limité d'essais couplés à des données simulées à partir des modèles (voir figure 2.1 ; qui résume d'une manière générale le déroulement de la méthode d'estimation de la durabilité du béton avec un plan d'essais optimisé) [Chen et al, 2016].

Dans l'objectif de mettre en place cette méthode, le présent chapitre a pour vocation de présenter les méthodes d'estimation fiabiliste de la performance de produits (systèmes, composants, matériaux). Un état de l'art lié à l'estimation de la durée de vie des matériaux en général et du béton en particulier sera associé à chaque notion théorique développée.

Une autre problématique évoquée dans le chapitre 1 est le coût de la réalisation d'un essai sur le matériau béton pour un phénomène donné dans les conditions normales d'utilisation. Le coût s'entendant ici en termes de temps, d'éprouvettes et de moyens mobilisés. Ainsi, la problématique de l'accélération des essais et de leur exploitation par modélisation stochastique est alors traitée dans ce chapitre.

2.2. Notions fondamentales de fiabilité

2.2.1. La fonction de fiabilité

La fiabilité peut être définie comme la capacité (ou aptitude) d'une entité à satisfaire à une ou plusieurs fonctions requises dans des conditions données et pendant une période donnée [NF EN 13306].

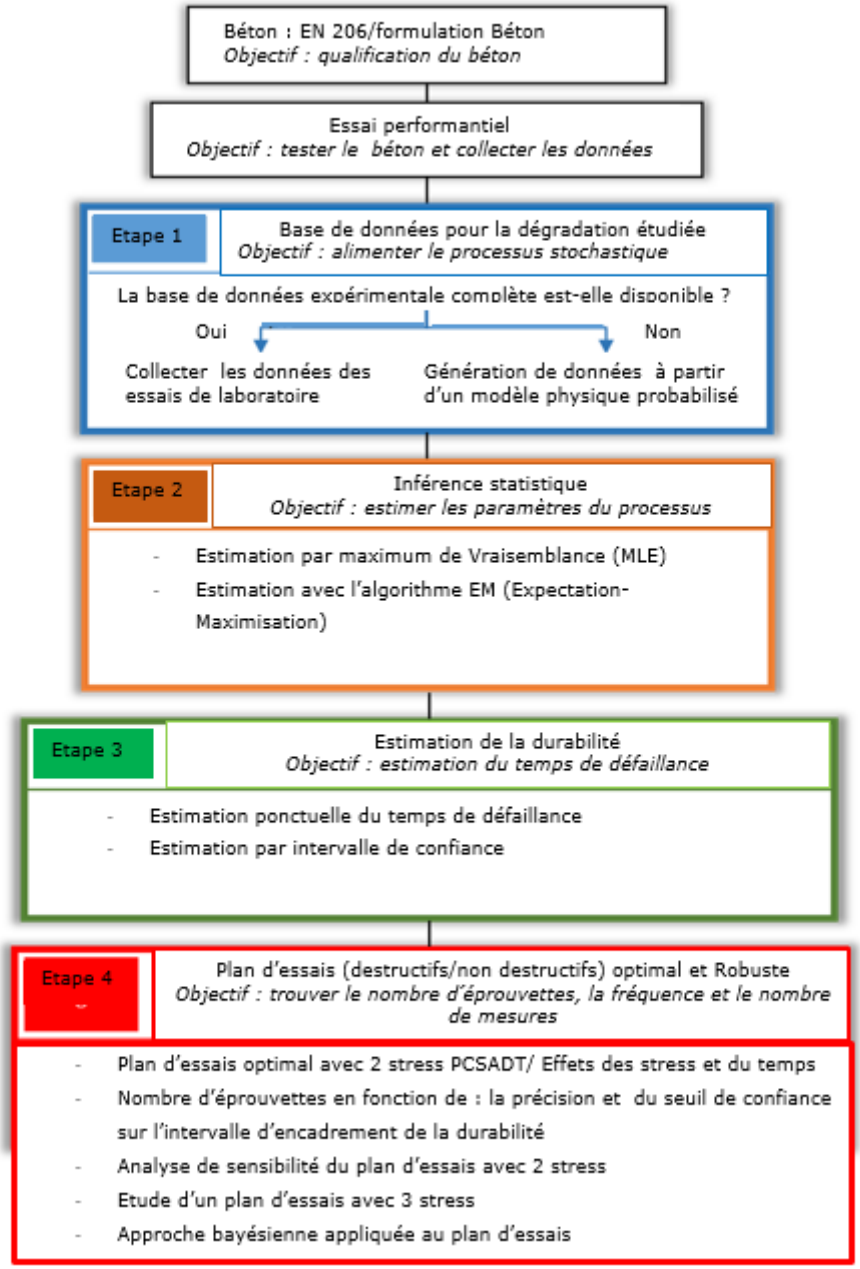


Figure 2.1 Résumé de la méthode d'estimation de la durabilité du béton avec un plan d'essais optimisé

Explicitement, elle peut s'exprimer comme la probabilité $R(t)$ que l'entité E réalise en continu ses fonctions jusqu'à l'instant t [Chapouille, 1980], [Mortureux, 2001].

$$R(t) = P(E\ non\ défaillante\ sur\ [0,t]) \tag{2.1}$$

Cette fonction $R(t)$ est connue sous le nom de fonction de fiabilité (figure 2.2) et peut être reformulée par :

$$R(t) = P(T > t) \tag{2.2}$$

où T est une variable aléatoire (v.a.) représentant l'instant de défaillance d'un produit.

La figure 2.2 représentant la fonction de fiabilité peut être exploitée de deux façons. Elle peut nous permettre d'estimer la probabilité de non-défaillance au bout d'un temps donné cible (ligne avec flèche bleue) ou, elle peut nous permettre d'estimer la durée de vie pour un niveau de risque accepté ou acceptable (ligne avec flèche rouge). Quand on évoque la fiabilité, on parle aussi de probabilité de défaillance (Fonction de répartition) que l'on note $F(t)$ et qui est définie par :

$$F(t) = P(T \leq t) \tag{2.3}$$

ou

$$F(t) = 1 - R(t) \tag{2.4}$$

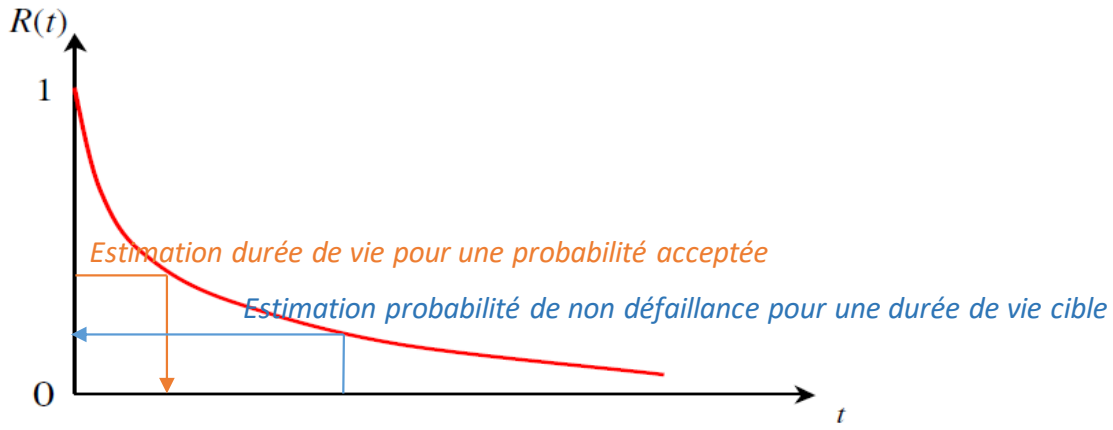


Figure 2.2. Représentation de la fonction de fiabilité

$F(t)$ est la fonction de répartition de variable aléatoire. La densité de probabilité de T notée $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{2.5}$$

$f(t)$ étant une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue [Fatemi, 2012], on peut définir $F(t)$ par :

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \tag{2.6}$$

2.2.2. Lois de probabilité utiles en fiabilité

Parmi les lois de probabilité usuelles du domaine de la fiabilité (on ne retiendra ici que celles qui sont exploitées dans notre travail de recherche), on peut citer (voir tableaux 2.1 et 2.2) :

- **La loi exponentielle :**

Cette loi est utilisée dans plusieurs domaines, elle décrit la durée de vie des produits subissant des défaillances brutales. Elle caractérise le temps qui s'écoule jusqu'à ce qu'un produit atteigne la défaillance ou l'intervalle de temps entre deux défaillances données. Elle est définie par le taux de défaillance λ [Villemeur, 1988] [Desroches, 2005], [Lyonnet, 2006]. Elle est aussi appelée "loi sans mémoires" [Leemis, 1994], [Bon, 1995]. Cette "perte de mémoire" est illustrée par le fait que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un produit qui a fonctionné pendant une durée de temps t sans tomber en panne est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau produit. A l'instant t, le produit qui n'est pas tombé en panne (figure 2.3 : courbe bleue) est considéré comme neuf avec une durée vie suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$$P(T \geq t + \Delta t \mid T \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = P(T \geq \Delta t) \quad t > 0, \Delta > 0) \tag{2.7}$$

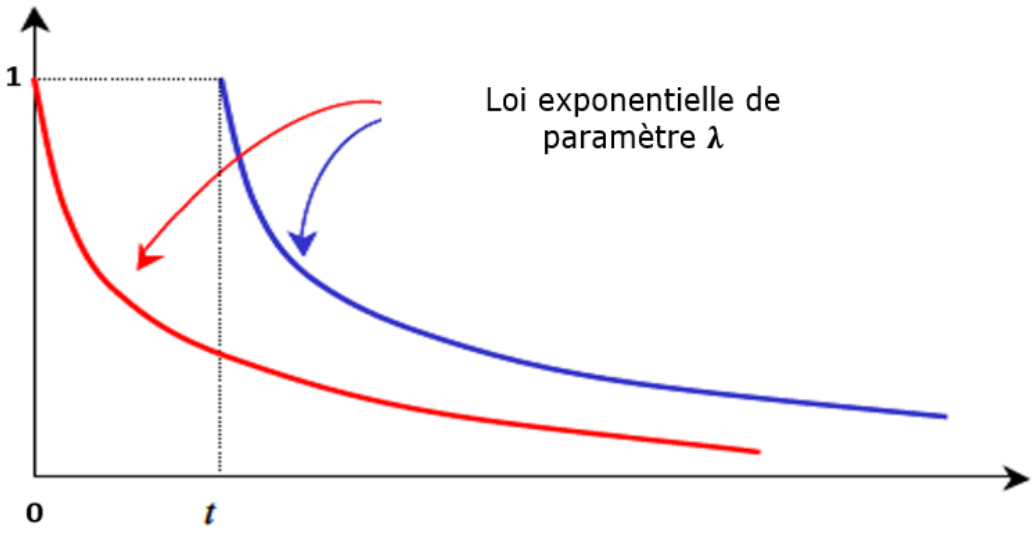


Figure 2.3. Illustration de la propriété sans mémoire de la loi exponentielle [Tebbi, 2005]

- **La loi Weibull**

Elle est utilisée dans différents domaines pour modéliser l'usure d'un produit. Elle modélise le comportement d'un produit selon trois phases de vie qui sont : la période de jeunesse, la période de vie utile et la période d'usure ou vieillissement. Elle est définie selon trois paramètres qui sont : β paramètre de forme ($\beta > 0$), η paramètre d'échelle (η>0) et θ paramètre de position ($\theta > 0$). Lorsque $\beta < 1$, le taux de défaillance décroit : le produit se trouve dans la phase de jeunesse. Pour $\beta = 1$, le taux de défaillance du produit reste

constant (indépendant du temps). Avec $\beta > 1$, le taux de défaillance croit : le produit se trouve dans la période d'usure ou de vieillissement.

- **La loi normale**

Appelée aussi loi gaussienne, elle permet de modéliser beaucoup de phénomènes en lien avec des variables aléatoires. En fiabilité, elle peut être utilisée pour modéliser une distribution de durée de vie ou une dégradation donnée. Elle est caractérisée par sa moyenne μ et sont écart-type σ.

- **La Loi log-normale**

Soit T une variable aléatoire continue et positive. T suit une loi log-normale si $\ln(T)$ suit une loi normale. Elle est caractérisée par les paramètres μ et σ qui sont respectivement la moyenne et écart-type de $\ln(T)$. Elle est utilisée pour modéliser la durée de vie des produits ou système.

- **La Loi inverse gaussienne**

Elle est définie par sa moyenne μ et son paramètre de forme λ. C'est une loi de probabilité caractérisée par une variable aléatoire continue strictement positive. La loi inverse gaussienne est une loi qui a un lien avec le mouvement brownien. Car la valeur du mouvement brownien à un temps fixé t suit une loi normale alors que le temps t évolue selon une loi inverse gaussienne.

- **Loi gamma**

Elle est la loi qui représente l'instant d'apparition d'un évènement dans un processus de Poisson. Elle a comme cas particuliers la loi khi-deux ou la loi exponentielle. Elle est caractérisée par les paramètres α et β strictement positifs. On la retrouve dans l'approche bayésienne ; c'est la loi conjuguée de la loi exponentielle [Tebbi, 2005].

- **Loi de Birnbaum Saunders**

Soit T une variable aléatoire continue qui représente les instants de défaillance sur un produit. La loi de Birnbaum-Saunders permet de modéliser les instants de défaillance induits par la propagation de fissures par fatigue [Birolini, 1997], [Owen et Padgett, 1998].

Les lois de distributions présentées ci-dessus sont utilisées dans le cadre des processus de dégradation (section 2.4) pour estimer la performance à un temps donné ou estimer une durée de vie avec une garantie donnée (à un percentile à 5% et un niveau de seuil acceptable $\mathbf{X_s}$, par exemple) (voir figure 2.4).

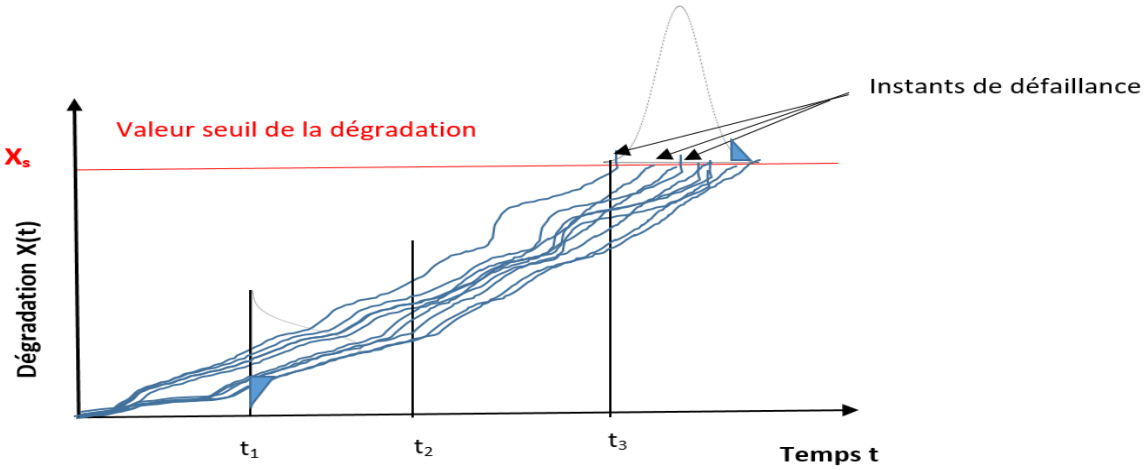


Figure 2.4. Distribution de la performance et de la durée de vie d'un processus de dégradation

Lois	***Densité***	***Fonction de répartition***	***Paramètre***
Loi Exponentielle	$\lambda e^{-\lambda t}$	$1 - e^{-\lambda t}$	λ >0 (intensité de la loi)
Loi Weibull	$\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\theta}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\theta}{\eta}\right)^{\beta}}$	$1 - e^{-\left(\frac{t-\theta}{\eta}\right)^{\beta}}$	$\beta > 0$ paramètre de forme, η>0 paramètre d'échelle, $\theta > 0$ paramètre de position
Loi Normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$	moyenne μ écart-type σ
Loi Log-normale	$\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)$ ϕ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite	moyenne μ écart-type σ
Loi Inverse Gaussienne	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}}$ $t > 0$	$\phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu} - 1\right)\right]$ $+ \phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu} + 1\right)\right] e^{2\lambda/\mu}$	moyenne $\mu > 0$ et λ >0 paramètre de forme
Loi Gamma	$\frac{\beta^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)}$, $t > 0$	$\frac{\Upsilon(\alpha, \beta t)}{\Gamma(\alpha)}$, $\Upsilon(\alpha, \beta t)$ est la fonction Gamma incomplète inférieure	α > 0 et β > 0
Loi Birnbaum Saunders	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha\beta}}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right] *$ $exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right], t > 0$	$\phi\left[\frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2}\right\}\right]$	α > 0 et β > 0

Tableau 2.1. Densité, Fonction de répartition, Paramètres de la loi

Lois	***Espérance***	***Variance***	***Entropie***	***Médiane***
Loi Exponentielle	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$1-\ln(\lambda)$	$\frac{\ln(2)}{\lambda}$
Loi Weibull	$\lambda\,\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$	$\lambda^2\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)-(\lambda\Gamma(1+\frac{1}{\beta}))^2$	$\gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}+\ln\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)$ γ la constante d'Euler	$(\lambda\ln 2)^{1/\beta}$
Loi Normale	μ	σ^2	$\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$	μ
Loi Log-normale	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)+\mu$	e^{μ}
Loi Inverse Gaussienne	μ	$\frac{\mu^3}{\lambda}$	-	-
Loi Gamma	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha-\ln(\beta)+\ln\Gamma(\alpha)+(1-\alpha)*\varphi(\alpha)$ φ étant la fonction polygamma	-

Tableau 2.2. Lois de probabilité et leurs caractéristiques

2.2.3. Les différentes phases de la fiabilité d'un produit

La fiabilité d'un produit constitue un paramètre important permettant de prendre une décision sur sa production, sa commercialisation et son utilisation. Longtemps réservée à des domaines sensibles comme l'aéronautique, elle s'est généralisée dans beaucoup de domaines et notamment celui de la construction. La fiabilité du matériau béton doit être estimée afin de permettre son utilisation dans les ouvrages auxquels il est destiné. Elle est liée aux types de dégradation que le béton va subir tout au long de sa durée d'utilisation (ou durée de vie). Pour le cas du béton armé, il existe plusieurs types de dégradation dont celles citées dans la section 1.5 (la carbonatation, la pénétration des ions chlorures), l'alcali-réaction, gel/dégel, etc.

Il existe trois types de fiabilité pour un produit tout au long de son cycle de vie : la fiabilité prévisionnelle, la fiabilité expérimentale et la fiabilité opérationnelle. La fiabilité dite prévisionnelle est estimée pendant la phase de conception du produit, l'expérimentale correspond à la phase des essais sur le produit et l'opérationnelle se fait pendant la période de mise en service du produit (Figure 2.5).

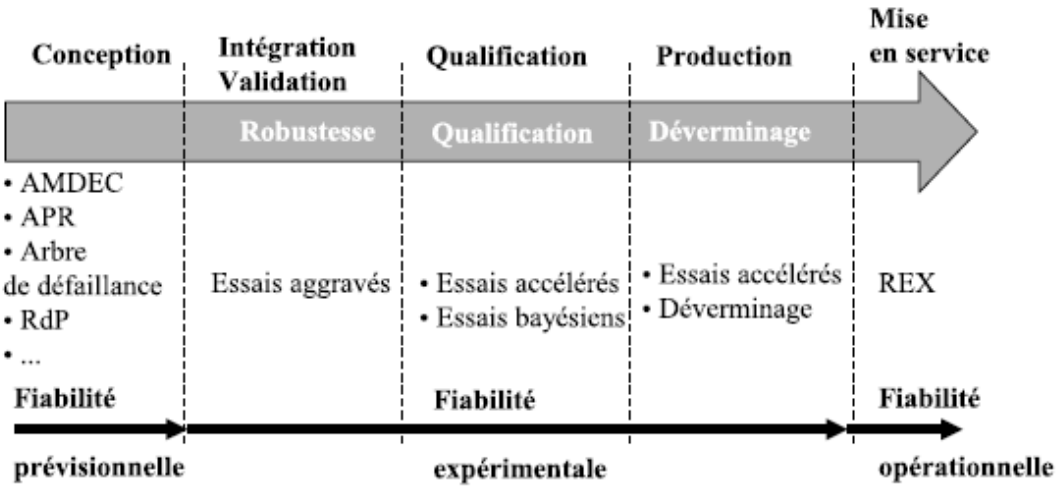


Figure 2.5. Les trois phases de fiabilité pour un produit [Fatemi, 2012]

Dans notre cas d'étude, nous nous intéresserons à l'estimation de la fiabilité expérimentale du béton. En effet, dans les conditions normales d'utilisation, il est difficile de voir apparaître rapidement une dégradation sur le béton qui peut conduire à un état de ruine ou de défaillance. Pour qualifier rapidement la durabilité du béton, les essais accélérés et bayésiens sont une solution car ils permettent de réduire le temps d'essais, le nombre d'échantillon et le coût financier des essais.

2.3. Estimation fiabiliste de la durée de vie par les essais accélérés

Dans l'objectif de réduire les temps d'essais, le recours aux essais accélérés est privilégié [Nelson, 1990]. Le choix du type d'essai accéléré est important dans la recherche de la fiabilité d'un produit. On distingue les essais accélérés qualitatifs utilisés pour la recherche du mode de défaillance du produit et les essais accélérés quantitatifs permettant d'estimer la durée de vie du produit. Une fois le mode de défaillance du produit connu, on choisit le type d'essai accéléré quantitatif adapté pour estimer sa fiabilité.

Certains produits atteignent rapidement la défaillance sous les conditions sévérisées et d'autres se dégradent progressivement jusqu'à atteindre la défaillance. Ainsi, les essais accélérés de type ALT (Accelerated Life Testing) [Qiao et al, 2018] sont utilisés pour les produits dont la défaillance se manifeste rapidement et ceux de type ADT (Accelerated Degradation Testing) [Tang et al ,2014] pour les produits dont la défaillance apparaît après une période de dégradation progressive. Ces derniers essais, ADT, peuvent être interrompus avant la défaillance ; on parlera alors d'essais censurés à droite, cette censure n'empêchant pas l'estimation des paramètres régissant le processus de dégradation.

Différents stress sont utilisés lors des essais accélérés impliquant la mise en place de plans d'essais accélérés. Les stress, ou encore facteurs d'accélération, peuvent être de natures mécanique (torsion, flexion, rotation, ...), électrique (tension, intensité du courant, l'électromagnétisme, …), climatique ou environnementale (température, taux de dioxyde de carbone, les cycles thermiques, …).

2.3.1. Essais de vieillissement accélérés-ALT

Les essais de vieillissement accélérés (en anglais ALT) permettent de tester un produit en sévérisant les conditions de son environnement d'utilisation normale pour atteindre rapidement la défaillance [Laronde, 2014]. Les instants de défaillance des produits testés obtenus sont utilisés afin de prédire la durée de vie du produit dans les conditions normales d'utilisation (figure 2.6).

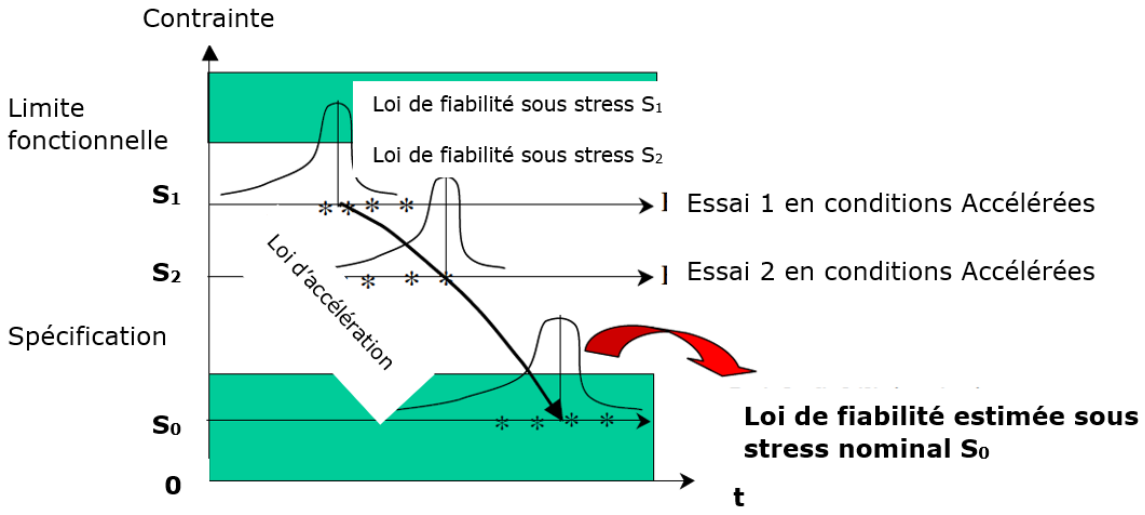


Figure 2.6. Estimation de la fiabilité d'un produit par un essai accéléré [Tebbi, 2005]

La prédiction de la durée de vie se fait en utilisant les fonctions d'accélération (ou fonctions de transferts) correspondant au type de produit et d'essai réalisé (voir section 2.3.2, sous-section b)). Selon le type de stress utilisé, on distingue différents types d'essais de vieillissement accélérés ; avec stress constant (en anglais, Constant Stress Accelerated Life Testing et connu sous l'acronyme CSALT), avec stress échelonné (en anglais, Step-Stress Accelerated Life Testing ou SSALT), avec stress progressif (Progressive Stress Accelerated Life Testing ou PSALT), etc. (voir section 2.3.3.1).

Les premières applications des essais ALT datent de nombreuses années car on retrouve dans la littérature des travaux de Nelson sur le sujet dès les années 70 [Nelson, 1971], [Nelson, 1972], de Basu et Ebrahimi [Basu et Ebrahimi, 1982] dans les années 80, de [Chaloner et Larntz, 1992] dans les années 90. Dans les années 2000, il y a eu une

multiplication de travaux dans plusieurs domaines. Dans le domaine de l'électronique, on peut citer des travaux sur l'estimation de la durée de vie : des diodes électroluminescentes par Edirisinghe et Rathnayake [Edirisinghe et Rathnayake, 2015], de Sun et Xie [Sun et Xie, 2009] et des semi-conducteurs à oxyde de métal ou transistors de Cai et al [Cai et al, 2019]. Dans le domaine de la mécanique, on trouve aussi une littérature abondante sur les essais ALT. On peut citer comme exemples les travaux réalisés par Zhang et al [Zhang et al, 2018] sur l'évaluation de la fiabilité des roulements à billes lubrifiés utilisés dans les engins spatiaux tels que les satellites.

Dans le domaine du matériau béton, qui nous concerne, il existe des travaux réalisés concernant l'estimation de la durée de vie des bétons dans un environnement avec des chlorures Zhang et Ba [Zhang et Ba, 2007]. Zhang et Ba [Zhang et Ba, 2010] ont aussi réalisé des essais accélérés sur béton dans une solution d'ions chlorures. Pour ces cas d'études, la durée de vie du béton est le temps qui s'écoule avant d'atteindre une valeur seuil de concentration d'ions chlorures. L'atteinte de cette valeur seuil coïncide avec le déclenchement de la dépassivation des armatures du béton conduisant au phénomène de corrosion. Le stress utilisé est la tension électrique permettant d'accélérer les ions chlorures contenus dans la solution expérimentale (voir chapitre 1 section 1.4.2). Trois éprouvettes de béton ont été utilisées pour réaliser l'expérience. Et pour estimer la durée de vie du béton dans les conditions normales d'environnement, un modèle d'accélération qui lie la tension appliquée et la durée d'atteinte de la concentration seuil dans le béton est utilisé. Pour finir, les auteurs ont montré une similarité entre les résultats de l'expérience et celui d'un modèle prédictif. Au-delà de la présentation des travaux sur les ALT dans les différents domaines, on constate qu'il y a peu d'application dans le domaine du béton et qu'il faut approfondir les études sur l'application des plans d'essais accélérés optimisés pour estimer la durabilité du béton dans son environnement.
Étant donné que le béton est soumis à des phénomènes de dégradation progressive dans son environnement, le choix des essais de type ADT (accelerated Degradation Testing) sont les plus adaptés dans l'évolution de sa fiabilité par rapport à une dégradation spécifique comme la carbonatation ou la pénétration des ions chlorures.

2.3.2. Les essais de dégradation accélérés-ADT

Les essais de dégradation accélérés permettent d'estimer la durabilité d'un produit à partir de la dégradation qui va causer la défaillance alors que les essais de vieillissement accélérés exploitent la valeur du temps de défaillance (ou durée de vie). En effet, Lors des essais ADT, on mesure la dégradation dans le temps, ce qui permet de suivre la dégradation ou la performance du produit en fonction du temps. On a alors deux

paramètres qui sont le temps et la dégradation. Pour les essais ALT, on n'a qu'un seul paramètre (le temps de défaillance du produit).

Comme évoqué, les essais de dégradation sont des essais qui dégradent progressivement le produit étudié jusqu'à ce qu'une valeur seuil de temps ou de performance fixée au préalable soit atteinte. Le suivi de la dégradation pendant l'essai permet de trouver un modèle mathématique qui traduit l'évolution de la dégradation en fonction du temps. Sur la base de ce modèle, il est possible d'utiliser les résultats des essais obtenus avant que la dégradation n'atteigne la valeur seuil pour déduire l'instant de défaillance. L'instant de défaillance T_{X_s} est défini comme étant l'instant où la dégradation atteint la valeur seuil de dégradation X_s (Voir figure 2.4 sous-section 2.2.2).

$$T_{X_s} = \{t \,/ X(t) \geq X_s\} \tag{2.8}$$

Les travaux sur les essais accélérés de dégradation appliqués au domaine du béton dans le but de caractériser sa performance et/ou d'estimer sa durabilité ne sont pas très nombreux dans la littérature. On peut toutefois citer les travaux récents de Gu et al [Gu et al, 2018] qui visent à exploiter les essais de dégradation accélérés pour suivre le taux de dégradation et la performance microstructurale de bétons à base de ciment ordinaire (Portland) et de bétons activés aux alcalis. Les essais de dégradation accélérés ont pour but d'évaluer la performance du béton par rapport à l'attaque à l'acide sulfatique. L'objectif de l'étude est de définir un essai de dégradation accéléré de dégradation représentatif et simple à utiliser. Gruyaert et al [Gruyaert et al, 2012] étudient l'influence des scories de haut fourneau sur la résistance du béton contre l'attaque des acides organiques ou des sulfates au moyen d'essais de dégradation accélérés. Une comparaison des résultats des essais entre le béton à base de ciment ordinaire (Portland) et du béton avec des scories de haut fourneau a montré que le béton avec les scories de haut fourneau résiste mieux face à l'attaque des acides organiques. Dans une autre étude, Piérad et al [Piérad et al, 2016] évaluent les paramètres de durabilité des bétons à ultra hautes performances (BUHP) avec des essais accélérés de carbonatation, de pénétration des ions chlorures et d'attaque sulfatique. Les indicateurs de durabilité obtenus ont été utilisés pour prédire la durée de vie du béton dans son environnement à l'aide de modèles prédictifs. Les résultats obtenus confirment une augmentation de la durabilité du béton ultra haute performance (BUHP) par rapport au béton à base de ciment Portland. Sanjuan et al [Sanjuan et al, 2003] ont travaillé sur les bétons soumis à l'essai de carbonatation naturel et l'essai de carbonatation accéléré. Leur but était de démontrer le potentiel des essais ADT. L'étude a montré que pour avoir un résultat cohérent, il est nécessaire de réaliser les essais accélérés pour une même formulation de béton. En effet, la microstructure de chaque type de béton

réagit différemment face à la pénétration de CO_2. Cette étude suggère de réajuster, du fait de changements des mécanismes de dégradation modifiant la microstructure, certains modèles prédictifs afin de pouvoir les utiliser pour prédire la carbonatation de nouvelles formules de béton. Cela peut se faire en conduisant des essais sur la nouvelle formule de béton dans le but de vérifier la compatibilité des résultats avec ceux prescrits dans le modèle.

A travers la littérature, on constate l'intérêt porté aux essais accélérés sur le béton afin d'en prédire leur durabilité ou de les classer en fonction de leur performance. Toutefois, dans les travaux sur les essais accélérés sur béton, la statistique sur le nombre d'essais n'est pas abordée. Or on sait que l'estimation de la durabilité du béton ou de sa performance est liée aux résultats des essais ; plus on a de données sur les essais, meilleure sera l'estimation de la durée de vie ou de la performance du béton. Pour résoudre ce problème, il est proposé dans cette thèse de définir un plan d'essais de dégradation accélérés (ADT) optimisé qui permettra de prédire, avec robustesse, la performance et la durabilité du béton.

Afin de réaliser les essais accélérés de dégradation, il faut au préalable définir le type de plan d'essais de dégradation accélérés (stress constant, progressif, échelonné, etc.) ainsi que les valeurs des niveaux de stress. Il faut ensuite s'assurer de la conservation du mécanisme d'endommagement du produit sous conditions accélérées et sous stress nominal. Enfin, il faut déterminer la répartition optimale des produits à tester pour chaque niveau de stress ou/et à chaque temps de mesure (selon que les contrôles soient respectivement destructifs ou non) et la loi d'accélération permettant d'estimer la fiabilité du produit dans les conditions normales d'utilisation.

a) Les différents types de plans d'essais accélérés

L'organisation d'un plan d'essais accélérés repose sur plusieurs paramètres qui doivent être définis avant le début des opérations ([Nelson, 1990], [Meeker et Escobar, 1998], [Vassilious et Mettas, 2001], [Hoang, 2003]) :

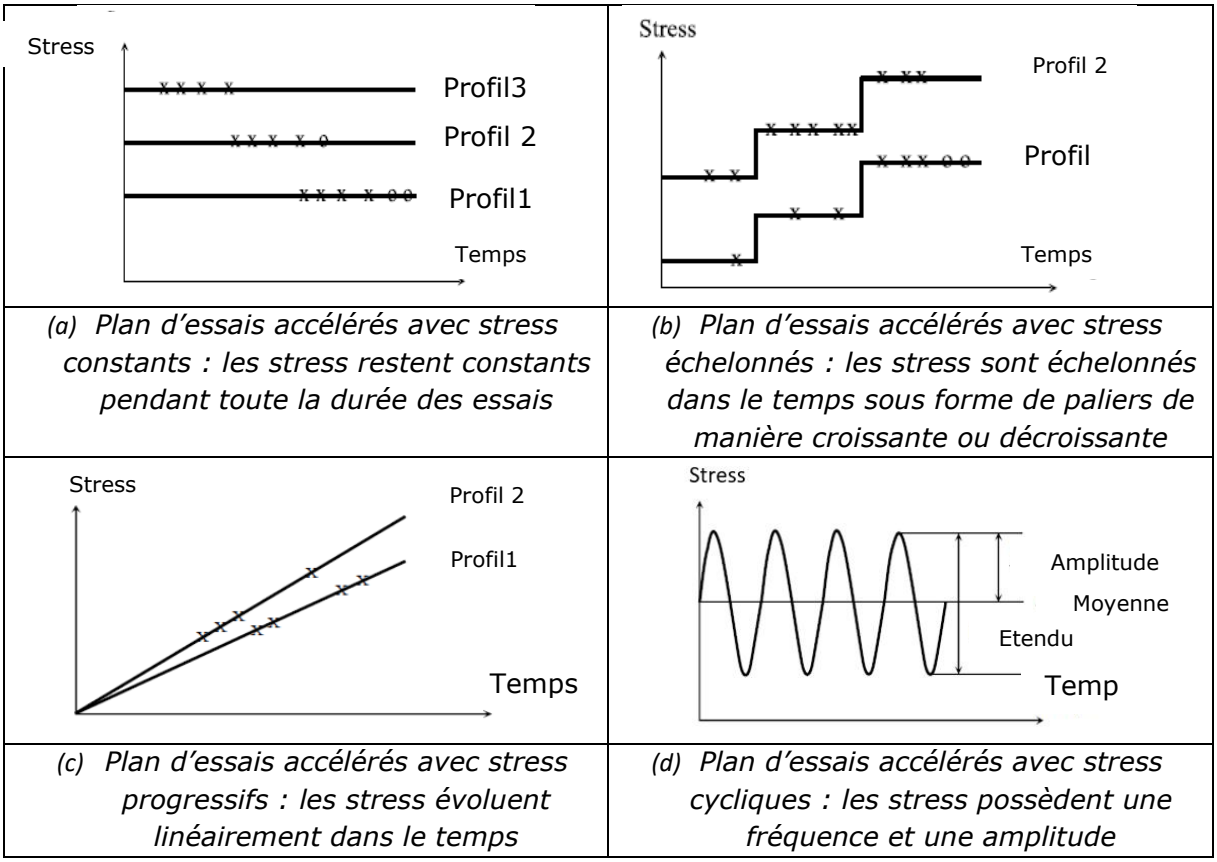
- **Les limites opérationnelles** :

Les limites opérationnelles du produit sont connues par avance ou fixées à partir des essais aggravés qui déterminent le niveau de stress à ne pas dépasser dans le but d'éviter un fonctionnement dégradé du produit ou le changement du mécanisme de défaillance. Ces limites peuvent également être déduites de protocoles d'essais décrits dans des normes.

- **Les stress d'accélération** :

Un stress est une condition ou un facteur qui permet d'accélérer la dégradation d'un produit. Il existe différents types de stress (mécanique, électronique, climatique, etc.) qui

peuvent évoluer différemment dans le temps de l'essai (Voir figures 2.7a – 2.7d). Les choix du type, du nombre et des niveaux de stress dépendent du produit et de l'essai à réaliser.



(a) Plan d'essais accélérés avec stress constants : les stress restent constants pendant toute la durée des essais

(b) Plan d'essais accélérés avec stress échelonnés : les stress sont échelonnés dans le temps sous forme de paliers de manière croissante ou décroissante

(c) Plan d'essais accélérés avec stress progressifs : les stress évoluent linéairement dans le temps

(d) Plan d'essais accélérés avec stress cycliques : les stress possèdent une fréquence et une amplitude

Figure 2.7. Exemples de stratégie d'application des stress sévérisés

- **Les modes et mécanismes de défaillance** :

Les mécanismes de dégradation d'un produit lors d'un essai accéléré doivent être représentatifs de ceux pouvant apparaitre dans des conditions normales d'utilisation du produit. Chaque mode de défaillance peut être provoqué par un ou plusieurs types de stress.

- **Le nombre de produits** :

Le nombre de produit utilisés lors de l'essai est réparti entre les différents niveaux de stress. Le nombre de produit et les valeurs des temps de mesure vont influer sur la qualité de l'estimation de la durée de vie.

- **Un modèle de vie accélérée** :

Après avoir fait le choix du plan d'essais accélérés qui correspond le mieux à la réalisation des essais, il faut aussi choisir le modèle de vie accéléré (ou fonction de transfert) qui permet d'extrapoler les résultats des essais accélérés pour estimer la fiabilité du produit dans les conditions normales d'utilisation. Ce modèle permet d'estimer la durée de vie d'un produit dans les conditions normales d'utilisation en utilisant les résultats issus des essais accélérés sous stress sévérisés. Il relie la durée de vie du produit obtenue à partir des essais accélérés à celle qu'il aurait dans les conditions normales d'utilisation.

b) Modèles d'accélération

Les modèles d'accélération sont utilisés dans les plans d'essais accélérés dans le but de traduire l'influence du stress sur le résultat de l'essai. Dans le cas des essais de vieillissement accélérés (ALT), le modèle d'accélération donne le temps de défaillance d'un produit sous condition nominale (stress S_{nom}) en fonction du facteur d'accélération (Fa) et du temps de défaillance T sous condition accélérée (stress accéléré S_k) :

$$T\ (S_{nom}) = Fa * T(\ S_k) \tag{2.9}$$

Avec $\mathrm{Fa} > 1$ si S_k accélère le processus de défaillance.

Les mêmes modèles d'accélération sont aussi utilisés pour le cas des essais de dégradation accélérés. Dans ce cas, le modèle d'accélération donne la dégradation d'un produit sous condition nominale en fonction du facteur d'accélération (Fa) et de la dégradation D sous condition accélérée (stress accélérésS_k) :

$$D\ (S_{nom}) = Fa * D(\ S_k) \tag{2.10}$$

De même, $\mathrm{Fa} > 1$ si S_k accélère le processus de dégradation.

Les fonctions d'accélération peuvent être utilisées également au sein de la fonction de fiabilité et dans ce cas on parlera de modèle de vie accéléré. Une présentation des modèles d'accélération les plus courants et leurs domaines d'utilisation est donnée dans le tableau 2.3 [Nelson ,1990].

Modèle d'accélération	***Expression du Modèle***	***Domaine d'utilisation***
Modèle d'Arrhenius	$\eta(S_k) = \xi_0 e^{-\vartheta/S_k}$	le stress d'accélération S_k est la température
Modèle puissance inverse	$\eta(S_k) = \frac{\xi_0}{S_k{}^{\vartheta}}$	le stress d'accélération S_k est une tension électrique
Modèle d'Eyring	$\eta(S_k, S_j) = \frac{\xi_0}{S_k} e^{\frac{B}{S_k}} e^{S_j(C+\frac{D}{S_k})}$	le stress d'accélération S_k est une température avec un autre stress donné S_j
Modèle exponentiel	$\eta(S_k) = \xi_0 e^{\vartheta S_k}$	le stress d'accélération S_k est un stress climatique

Tableau 2.3. Présentation des modèles d'accélération

Les modèles d'accélération sont utilisés avec les modèles de dégradation qui représentent l'évolution du phénomène de dégradation étudié. Dans cette thèse, notre étude porte sur les phénomènes de dégradation dans le béton. Ainsi, le choix du modèle de dégradation

est important dans la mise en place de la méthode d'estimation de la durabilité du béton avec un plan d'essais accélérés optimisé.

L'analyse des trajectoires de dégradations des produits permettent de choisir le modèle de dégradation qui convient au type de dégradation étudié. Ye et Xie [Ye et Xie, 2014] montrent que les modèles de dégradation peuvent être regroupés en trois classes de modèles qui sont : les modèles de processus stochastiques, les modèles généraux de trajectoires et les autres modèles de dégradation (modèles physiques, numériques).

La classe mise en avant dans cette thèse pour modéliser les phénomènes de dégradation est celle des processus stochastiques pour leur capacité à prendre en compte la dynamique de dégradation d'un système. En effet, la dégradation varie en fonction de plusieurs paramètres mais il y a aussi les erreurs de mesure qui sont à considérer. L'évolution de la dégradation est ainsi représentée par une variable aléatoire qui évolue en fonction du temps et les modèles stochastiques permettent de prendre en compte cette variabilité.

2.4. Modélisation stochastique

Soit $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité ; Ω l'ensemble de tous les évènements possibles d'une expérience aléatoire donnée, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ un sous ensemble de Ω et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité sur l'ensemble Ω. T un ensemble formé de variables aléatoires (représentant le temps). On définit un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ comme étant une famille de variables aléatoires X_t définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ indexée par T [Breton JC, 2019].

Selon la représentation de l'ensemble T, on distingue différents types de processus stochastiques :

- Si T est un ensemble continu, le processus devient un processus en temps continu.
- Si T est un ensemble discret, le processus devient un processus en temps discret.
- Si T est un ensemble multidimensionnel, le processus stochastique est appelé champ aléatoire.

Pour certains essais de dégradation, les mesures sont collectées via des essais non destructifs et il est possible de suivre d'une manière continue l'évolution de la dégradation. Pour les essais destructifs, les mesures de dégradation se font à différents temps donnés. Un processus stochastique qui modélise un essai non destructif est en temps continu et pour un essai destructif en temps discret. Le processus stochastique permet d'avoir la dégradation en fonction du temps. Ainsi, il est possible de déterminer le temps de défaillance avec la mesure de la dégradation en définissant la défaillance comme étant l'instant où la dégradation atteint une valeur seuil donnée (ou valeur limite de la dégradation) (voir figure 2.4).

Il existe différents processus stochastiques pour modéliser l'évolution de phénomènes aléatoires en fonction du temps. Dans les paragraphes suivants sont présentés les processus stochastiques les plus utilisés comme modèles de dégradation qui sont : le processus Gamma, le processus Inverse Gaussien, le processus de Wiener ainsi que le processus de dispersion exponentiel.

2.4.1. Le Processus Gamma

Le processus Gamma est un processus qui permet de modéliser une dégradation monotone. Il est considéré comme étant la limite d'un processus de Poisson composé dont le taux d'arrivée des sauts tend vers l'infini et la taille des sauts vers 0 de manière proportionnelle [Lawless et Crowder, 2004]. La plupart des dégradations sont présentées comme des conséquences résultantes de chocs issus de l'environnement extérieur au produit. Une modélisation de ces chocs par un processus de Poisson composé permet de placer le processus Gamma comme étant le meilleur processus pour modéliser les dégradations monotones [Singpurwalla, 1997].

Le processus Gamma est défini de la manière suivante :

$\forall\, t > 0$, $Y(t)$ est un processus Gamma $Ga(\alpha\Lambda(t),\beta)$ si :

- $Y(0) = 0$,
- Les accroissements $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ sont indépendants,
- L'accroissement $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ suit une loi Gamma $Ga\,(\alpha(\,\Lambda(\mathrm{t}+\Delta\, t) - \Lambda(\mathrm{t})),\beta\,)$
- La densité de probabilité est définie par :

$$f(Y) = \frac{\beta^{\alpha\,\Lambda(t)}}{\Gamma(\alpha\,\Lambda(t))}.Y^{\alpha\,\Lambda(t)-1}\,exp(-Y\beta) \tag{2.11}$$

$\forall\, t > 0$, l'espérance mathématique vaut :

$$\mathbb{E}\,[\,Y(t)] = \frac{\alpha\,\Lambda(t)}{\beta} \tag{2.12}$$

La variance vaut :

$$\mathbb{V}\,[Y(t)] = \frac{\alpha\,\Lambda(t)}{\beta^2} \tag{2.13}$$

Les paramètres α et β sont positifs avec β le paramètre d'échelle et α le paramètre de forme. $\Lambda(t)$ est une fonction monotone croissante avec $\Lambda(t=0) = 0$.

Si T_{Y_s} est le temps de défaillance du processus Gamma $Y(t)$, lorsque l'on atteint une valeur seuil Y_s, la fiabilité du produit est définie par :

$$P\big(\,T_{Y_s} >\, t\big) =\, P(\,Y(t) <\, Y_s) = \int_0^{Y_s} \frac{\beta^{\alpha\,\Lambda(t)}}{\Gamma(\alpha\,\Lambda(t))}.Y^{\alpha\,\Lambda(t)-1}\,exp(-Y\beta) = \frac{\Gamma(\alpha\,\Lambda(t),Y_S)}{\Gamma(\alpha\,\Lambda(t))} \tag{2.14}$$

La défaillance du produit par :

$$P\left(T_{Y_s} \leq t\right) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha\, \Lambda(t), Y_S)}{\Gamma(\alpha\, \Lambda(t))} \tag{2.15}$$

L'équation (2.15), $(t) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha\, \Lambda(\mathrm{t}), Y_s)}{\Gamma(\alpha\, \Lambda(\mathrm{t}))}$, représente la fonction de répartition de T_{Y_s}. La dérivée de $F(t)$ permet d'obtenir la densité de probabilité de T_{Y_s}. Étant donnée la complexité de la dérivée de $F(t)$, Park et Padgett [Park et Padgett, 2005] ont proposé une approximation en utilisant une distribution de Birnbaum Sanders :

$$F(t) \approx \phi\left[\frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{Z}{b}} - \sqrt{\frac{b}{Z}}\right)\right] \tag{2.16}$$

ϕ étant la fonction de répartition de la loi normale, $a = 1/\sqrt{Y_s}$, $b = Y_s/\alpha$ et $Z = \Lambda(\mathrm{t})$.

La densité de probabilité est donc donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2ab}}\left[\left(\frac{b}{z}\right)^{1/2} + \left(\frac{b}{z}\right)^{3/2}\right] exp\left[-\frac{(b-z)^2}{2a^2bz}\right] \tag{2.17}$$

Le paramètre d'échelle β peut être considéré comme une variable aléatoire. Selon Lawless et Crowder [Lawless et Crowder, 2004], pour un échantillon de produit, β évolue avec une distribution Gamma. Comme pour le processus de Wiener, les méthodes (Maximum de vraisemblance, la méthode des moments, …) sont utilisées pour l'estimation des paramètres du processus. Le problème des erreurs de mesures a été aussi étudié par les auteurs : Kallen et Van NoortwijK [Kallen et Van NoortwijK, 2005], Wei et Xu [Wei et Xu, 2014] et Pulcini [Pulcini, 2016].
Si le processus Gamma ne convient pas pour modéliser une dégradation monotone, il existe un autre processus appelé processus Inverse Gaussien.

2.4.2. Le Processus Inverse Gaussien

Le processus Inverse Gaussien est, comme le processus Gamma, la limite d'un processus de Poisson composé avec une distribution de la taille de sauts de dégradation entre deux temps consécutifs qui diffère. Ye et Chen [Ye et Chen, 2014] ont montré qu'il est pratique d'utiliser le processus Inverse Gaussien car il permet aussi de prendre en compte la variabilité qui peut exister dans un même échantillon. L'existence d'une relation entre le processus Inverse Gaussien et le processus de Wiener permet de retrouver les mêmes propriétés dans les deux processus. En effet, le temps de défaillance du processus de Wiener (voir sous-section c) évolue selon une loi Inverse Gaussienne.
$\forall\, t > 0$, $Y(t)$ est un processus Inverse Gaussien $IG(\mu\Lambda(t), \lambda\Lambda^2(t))$, si :

- $Y(0) = 0$,

- Les accroissements $Y(t+\Delta t)-Y(t)$ sont indépendants,
- L'accroissement $Y(t+\Delta t)-Y(t)$ suit une loi Inverse Gaussienne : $IG(\mu(\Lambda(\mathrm{t}+\Delta t)-\Lambda(\mathrm{t})),\lambda(\Lambda(\mathrm{t}+\Delta t)-\Lambda(\mathrm{t}))^2)$
- La densité de probabilité est définie par :

$$f(y)=\sqrt{\frac{\mu\Lambda(t)}{2\pi y^3}}.exp\left[-\frac{\lambda\Lambda^2(t)(y-\mu\Lambda(t))^2}{2\mu\Lambda(t)^2 y}\right], y>0 \tag{2.18}$$

- La fonction de répartition est :

$$F_y(t)=\Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda\Lambda^2(t)}{y}}\left(\frac{y}{\mu\Lambda(t)}-1\right)\right]+e^{2\lambda\Lambda(t)/\mu}\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda\Lambda^2(t)}{y}}\left(\frac{y}{\mu\Lambda(t)}+1\right)\right], y>0 \tag{2.19}$$

$\forall\, t>0$,

L'espérance *mathématique* vaut $\mathbb{E}\,[Y(t)]=\mu\Lambda(t)$ (2.20)

La variance $\mathbb{V}\,[Y(t)]=\frac{\mu^3\Lambda(t)}{\lambda}$ (2.21)

Si T_{Y_s} est le temps de défaillance du processus Inverse Gaussien $Y(t)$, lorsque l'on atteint une valeur seuil Y_s, la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P(T_{Y_s}<t)=P(Y(t)>Y_s)=1-F_{Y_s}(t) \tag{2.22}$$

$$P(T_{Y_s}<t)=F_{T_{Y_s}}(t)=\Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\left(\Lambda(t)-\frac{Y_s}{\mu}\right)\right]-e^{2\lambda\Lambda(t)/\mu}\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\left(\Lambda(t)+\frac{Y_s}{\mu}\right)\right] \tag{2.23}$$

Il a été démontré par Chhikara et Folks [Chhikara et Folks, 1989] que lorsque t croît, il entraine aussi $\lambda\Lambda(t)$, et, $Y(t)$ peut être approximé par une loi normale de moyenne $\mu\Lambda(t)$ et de variance $\mu^3\Lambda(\mathrm{t})/\lambda$. Ainsi, la fonction de répartition de T_{Y_s} est approximée par :

$$F_{T_{Y_s}}(t)\cong 1-\Phi\left[\frac{Y_s-\mu\Lambda(t)}{\sqrt{\mu^3\Lambda(t)/\lambda}}\right]=\Phi\left[\sqrt{\lambda/\mu}.\sqrt{\Lambda(t)}-\frac{Y_s\sqrt{\lambda/\mu^3}}{\sqrt{\Lambda(t)}}\right] \tag{2.24}$$

La densité de probabilité de probabilité de T_{Y_s} est obtenue en dérivant $F_{T_{Y_s}}(t)$, soit :

$$f_{T_{Y_s}}(t)=\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\,\phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\left(\Lambda(t)-\frac{Y_s}{\mu}\right)\right]\Lambda'(t)-2\frac{\lambda}{\mu}\Lambda'(t)e^{\frac{2\lambda\Lambda(t)}{\mu}}\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\left(\Lambda(t)+\frac{Y_s}{\mu}\right)\right]+$$
$$\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\Lambda'(t)e^{\frac{2\lambda\Lambda(t)}{\mu}}\phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{Y_s}}\left(\Lambda(t)-\frac{Y_s}{\mu}\right)\right] \tag{2.25}$$

ϕ est la densité de probabilité de la loi normale et $\Lambda'(t)$ la dérivée de $\Lambda(t)$ par rapport à t. Les méthodes utilisées pour estimer les paramètres du processus Inverse Gaussien sont : le maximum de vraisemblance, l'algorithme espérance-maximisation (algorithme EM) [Ye et Chen, 2014] et l'estimation bayésienne Peng et al [Peng et al, 2014]. Le processus

gamma et Inverse Gaussien sont deux processus monotones. Pour les dégradations non monotones, on peut envisager l'utilisation du processus de Wiener.

2.4.3. Le Processus de Wiener

Le processus de Wiener est un des processus stochastiques le plus utilisé pour modéliser les phénomènes de dégradation. C'est un processus à accroissement indépendants. Il permet de modéliser des trajectoires non monotones mais croissantes en moyenne. Grace à ses propriétés mathématiques, le processus de Wiener a été appliqué pour évaluer la dégradation des structures en béton [Zhang et al, 2019], [Qiao et al, 2018] et [Maruyama et al, 2013].

En considérant que la dégradation au temps $t = 0$ est nulle ($Y(t = 0) = 0$) ; une expression générale du processus de Wiener est donnée par :

$$Y(t) = \mu\, \Lambda(t) + \sigma_B B\big(\Lambda(t)\big) \tag{2.26}$$

En utilisant le processus de Wiener pour modéliser l'évolution d'un phénomène de dégradation lors d'un essai sur un produit qui est soumis à différents stress s_k , l'équation (2.26) s'écrit :

$$Y(t/s_k) = \mu_{s_k}\Lambda(t) + \sigma_B B\big(\Lambda(t)\big) \tag{2.27}$$

avec $X(t/s_k)$ qui représente la dégradation sous le stress s_k, μ_{s_k} est la fonction d'accélération du processus (Voir tableau 2.3).

Elle traduit l'effet du stress s_k sur la dégradation du produit. Elle représente aussi la moyenne du processus, σ_B son écart-type et $\Lambda(t)$ est une fonction du temps de la forme $\Lambda(t) = t^{\gamma}$ avec γ un paramètre à définir en fonction du processus de dégradation étudié. $B(t)$ est le mouvement brownien standard avec comme propriétés :

- $B(0) = 0$,
- Les accroissements $B(t + \Delta t) - B(t) \sim N(0, \Delta t)$ sont indépendants et stationnaires,
- B(t) suit une loi normale standard centrée d'écart-type $\sqrt{t}$ i.e $B(t) \sim N(0, t)$.

Si $\gamma = 1$, on a un processus de Wiener linéaire :

$$Y(t) = \mu_{s_k} t + \sigma_B B(t) \tag{2.28}$$

Pour le processus de Wiener non linéaire ($\gamma \neq 1$), on a :

- $Y(t)$ a des accroissements indépendants, ie pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n < \infty$, $Y_{t_2} - Y_{t_1}$, $Y_{t_3} - Y_{t_2}$,..., $Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$ sont indépendants

- Les accroissements de $Y(t)$ sont stationnaires : la loi de $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ dépend de la longueur de l'intervalle de temps $(t_{i+1} - t_i)$, la loi de $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ est une loi normale d'espérance 0 et de variance $(t_{i+1} - t_i)$,
- $\forall\, t > 0$, l'accroissement $Y(t + \Delta t) - Y(t)$ suit une loi normale $N\,(\mu(\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)), {\sigma_B}^2(\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)))$ avec pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi(\Lambda(t+\Delta t)-\Lambda(t))}}\, e^{\left(-\frac{(x-\mu(\Lambda(t+\Delta t)-\Lambda(t))}{2{\sigma_B}^2(\Lambda(t+\Delta t)-\Lambda(t))}\right)} \tag{2.29}$$

$\forall\, t > 0$,

L'espérance mathématique vaut $\mathbb{E}\,[Y(t)] = \mu\,\Lambda(t)$ (2.30)

La variance $\mathbb{V}\,[Y(t)] = {\sigma_B}^2\Lambda(t)$ (2.31)

En fixant une valeur seuil X_s à ne pas dépasser (voir section 2.3.2), le temps de défaillance T_{X_s} du produit pour le processus de Wiener suit une loi Inverse Gaussienne transformée $IG(\frac{X_s}{\mu}, \frac{{X_s}^2}{{\sigma_B}^2})$ dont la fonction de répartition est donnée par l'équation :

$$F_{T_{X_s}}(t) = \phi\left(\frac{\mu\,\Lambda(t)-X_s}{\sqrt{{\sigma_B}^2\Lambda(t)}}\right) + exp\left(\frac{2\mu X_s}{{\sigma_B}^2}\right)\phi\left(\frac{-\mu\,\Lambda(t)-X_s}{\sigma_B\sqrt{t}}\right), t\ >0 \tag{2.32}$$

Pour le cas d'un processus de Wiener linéaire, la densité de probabilité de T_{X_s} est donnée par l'équation :

$$f(t) = \frac{\partial F_{T_{X_s}(t)}}{\partial t} = \sqrt{\frac{{X_s}^2}{2\pi{\sigma_B}^2 t^3}}.exp\left(-\frac{(\mu\,\Lambda(t)-X_s)^2}{2{\sigma_B}^2 t}\right)\ t\ >0 \tag{2.33}$$

Dans ce cas, le MTTF (temps moyen de défaillance) est donné par la formule suivante :

$$\text{MTTF} = \mathbb{E}\,(T_{X_s}) = \mathbb{E}\,(\mathbb{E}(T_{X_s}/\mu)) = \frac{X_s}{\mu} \tag{2.34}$$

Le processus stochastique est considéré comme un processus qui prend en compte à la fois la variation de la dégradation mais aussi les erreurs de mesures. Certains auteurs comme Whitmore [Whitmore, 1995] montrent que ce processus modélise seulement la dégradation avec sa variabilité qui est liée à différents facteurs environnementaux.
Ainsi, pour prendre en compte les erreurs réalisées lors des mesures, un paramètre représentant l'erreur lors des mesures est ajouté et on obtient le processus de Wiener suivant :

$$Y(t) = \mu_{s_k}\, t + \sigma_B B(t) + \varepsilon \tag{2.35}$$

Les paramètres du processus de Wiener peuvent être considérés comme aléatoires. En effet d'un produit à un autre, μ_{s_k} et σ_B sont susceptibles de changer en fonction de facteurs inhérents au produit. Peng et Tseng [Peng et Tseng, 2009] ont proposé un processus de Wiener avec le paramètre μ_{s_k} distribué selon une loi normale et avec σ_B constant. Wang [Wang, 2010] montre que le paramètre σ_B peut-être spécifique à chaque produit et propose un processus de Wiener avec ${\sigma_B}^2$ distribué selon une loi gamma et μ_{s_k} avec une loi normale.

Dans nos travaux de recherche, le choix du modèle du processus stochastique pour représenter les différentes dégradations sur le béton s'est porté sur le processus de Wiener (équation 2.27). Ce choix est motivé par le souhait de développer une méthode générique reposant sur une formulation mathématique utilisable aisément pour les différents calculs nécessaires dans la mise en place de la méthode d'estimation de la durabilité par un plan d'essais optimisé.

Afin de prendre en compte la variabilité liée à l'utilisation de plusieurs éprouvettes pour les essais sur le béton, le modèle d'accélération μ_{s_k} est défini par :

$$\mu_{s_k} = \alpha\, exp\big(\beta\varphi(s_k)\big) \tag{2.36}$$

$\alpha \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$La fonction $\varphi(s_k)$ représente le modèle d'accélération qui peut prendre différentes formes. Par exemple :

- Si $\varphi(s_k) = \ln(s_k)$, μ_{s_k} suivra le modèle puissance inverse ;
- Si $(s_k) = -\frac{1}{s_k}$, μ_{s_k} suivra le modèle d'Arrhenius ;
- Et, si $\varphi(s_k) = s_k$, μ_{s_k} suivra le modèle exponentiel (Tableau 2.3).

Les erreurs de mesures sont intégrées dans la variable $Y(t/s_k)$ (équation 2.27).

Les paramètres du processus de Wiener sont estimés à partir des données des essais ou venant d'un modèle physique qui caractérise la dégradation étudiée. Il existe plusieurs méthodes pour l'estimation des paramètres dont la méthode des moments, le maximum de vraisemblance, l'algorithme EM etc.

Il existe un autre processus stochastique permettant de modéliser d'une manière générale toute sorte de phénomène de dégradation appelé processus de dispersion exponentielle.

2.4.4. Le Processus de dispersion exponentielle

Le processus de dispersion exponentielle (DE) est un processus stochastique généralisé avec comme cas particuliers : le processus de Wiener, le processus Gamma et le processus Inverse Gaussien. Comparé aux autres processus stochastiques, il offre la possibilité de modéliser de plus nombreux phénomènes de dégradation [Duan et Wang, 2018].

$\forall\, t > 0$, un processus stochastique $Y(t)$ est un processus de dispersion exponentielle $ED\ (\mu\Lambda(t), \lambda)$ si :

- $Y(0) = 0$,
- Les accroissements sont indépendants et stationnaires,
- L'accroissement $Y(t + \Delta t\ ) - Y(t)$ suit une loi de distribution DE : $ED(\mu(\ \Lambda(\mathrm{t} + \Delta\, t) - \Lambda(t)),\lambda)$, $\forall \Delta\, t\ > 0$
- La densité de probabilité est définie par :

$$f(y) = c(y|\ \lambda, t).\, exp\{\lambda[ym - \Lambda(t)\kappa(m)]\}, y > 0 \tag{2.37}$$

$\mathrm{c}(y|\ \lambda, t)$ est un terme de normalisation, $\mu > 0$ et $\lambda > 0$ sont deux paramètres qui représentent respectivement la moyenne et le paramètre de forme du processus de dispersion standard $ED\ (\mu, \lambda)$, $\kappa(.)$ une fonction définie par $\kappa'(m) = \mu$; $\kappa'(m)$ étant la dérivée de $\kappa(m)$ par rapport à m,

$\forall\, t > 0$,

L'espérance mathématique vaut $\mathbb{E}\ [Y(t)] = \mu\Lambda(t)$ (2.38)

La variance $\mathrm{V}\ [Y(t)] = \frac{V(\mu)\Lambda(t)}{\lambda}$ (2.39)

$\mathrm{V}(\mu)$ est appelée fonction variance unitaire.

Si on note $\mu = x(m)$, on a $m = x^{-1}(\mu)$ et $(\mu) = \kappa''\left(x^{-1}(\mu)\right)$. $\kappa''(m)$ est la dérivée seconde de $\kappa(m)$, par rapport à m.

Lorsque $\mathrm{V}(\mu) = \mu^p$ avec $p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ le processus de dispersion exponentielle est appelé processus de dispersion exponentielle Tweedie [Tweedie, 1984].

Si $p = 0, 2, 3$; le processus de dispersion exponentielle Tweedie devient respectivement le processus de Wiener, Gamma ou Inverse Gaussien (voir tableau 2.4).

Processus	Loi de probabilité	$\boldsymbol{p}$	Moyenne	Variance
DE Tweedie	$ED\ (\mu\Lambda(t), \lambda)$; $\mathrm{V}(\mu) = \mu^p$	-	$\mu\Lambda(t)$	$\mu^p\Lambda(t)/\lambda$
Wiener	$N\ (\mu\Lambda(\ t), \Lambda(t)/\lambda)$	0	$\mu\Lambda(t)$	$\Lambda(t)/\lambda$
Gamma	$Ga\ (\lambda\Lambda(\ t), \lambda/\mu)$	2	$\mu\Lambda(t)$	$\mu^2\Lambda(t)/\lambda$
Inverse Gaussienne	$IG\ (\mu\Lambda(\ t), \lambda\Lambda^2(\ t))$	3	$\mu\Lambda(t)$	$\mu^3\Lambda(t)/\lambda$

Tableau 2.4. Les trois cas spécifiques du processus de dispersion exponentielle Tweedie

Pour le processus de dispersion exponentielle Tweedie (DET), $\kappa(\theta)$ est obtenu avec l'équation suivante :

$$\frac{d\mu}{dm}|_{\ m=x^{-1}(\mu)} = \mu^p \tag{2.40}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} exp(m) & p = 1 \rightarrow \mu = \sqrt{exp(m)} \\ -ln(-m) & p = 2 \rightarrow \mu = {}^{1}/_{m} \\ \frac{[(1-p)m]^{\frac{p-2}{p-1}}}{2-p} & p \neq 1{,}2 \rightarrow \mu = [(1-p)m]^{\frac{1}{1-p}} \end{cases} \quad (2.41)$$

En ayant une forme analytique de $\kappa(\theta)$, il reste à trouver l'expression de $c(y|\ \lambda, t)$ (équation 2.37) afin d'obtenir une expression complète de la densité de probabilité. $c(y|\ \lambda, t)$ ne possède pas de forme analytique explicite sauf pour les valeurs particulières de p = 0, 1, 2 ou 3. Notons ici que quand $p = 1$, le processus DET devient un processus de Poisson [Jϕrgensen, 1987].

Dans cette optique, Daniels [Daniels, 1954] a mis en place une méthode d'approximation appelée "Saddle point approximation" (en anglais) ou méthode du point col (en français). Cette méthode donne une approximation de la fonction de probabilité d'une distribution donnée à partir de sa fonction génératrice des moments. La méthode du point de col appliquée à la densité de probabilité du processus DE donne le résultat suivant :

$$f(y) \cong \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t\, V\left(\frac{y}{t}\right)}}.exp\left[-\frac{\lambda t}{2} d\left(\frac{y}{t};\mu\right)\right] \quad (2.42)$$

Avec

$$d\left(\frac{y}{t};\mu\right) = 2\left|\tilde{m}\frac{y}{t} - \kappa(\tilde{m}) + \kappa(m) - m\frac{y}{t}\right| \quad (2.43)$$

et

$$\kappa'(\tilde{m}) = \frac{y}{t} \quad (2.44)$$

Pour le processus DET avec $V(\mu) = \mu^p$, on a l'approximation suivante :

$$f(y) \cong \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^{1-p} y^p}}.exp\left[-\frac{\lambda t}{2} d\left(\frac{y}{t};\mu\right)\right] \quad (2.45)$$

$$d\left(\frac{y}{t};\mu\right) == \begin{cases} 2\left[\frac{y}{t} ln\left(\frac{y}{\mu t}\right) - \left(\frac{y}{t} - \mu\right)\right], & p = 1 \\ 2\left[ln\left(\frac{\mu t}{y}\right) + \frac{y}{\mu t} - 1\right], & p = 2 \\ 2\left[\frac{\left(\frac{y}{t}\right)^{2-p}}{(1-p)(2-p)} - \frac{\frac{y}{t}\mu^{1-p}}{1-p} + \frac{\mu^{2-p}}{2-p}\right], & p \neq 1{,}2 \end{cases} \quad (2.46)$$

Si T_{Y_s} est le temps de défaillance du processus DET lorsque la valeur seuil Y_s est atteinte, alors la fonction de répartition $F_{T_{Y_s}}(t)$ et la densité de probabilité $f_{T_{Y_s}}(t)$ de T_{Y_s} sont définies par :

$$F_{T_{Y_s}}(t) \cong \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{\mu^p}}\left(\mu\sqrt{\Lambda(t)} - \frac{Y_s}{\sqrt{\Lambda(t)}}\right)\right] \quad (2.47)$$

$$f_{T_{Y_s}}(t) \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu^p \Lambda(t)}}\left(\mu + \frac{Y_s}{\Lambda(t)}\right)\ \phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{\mu^p}}\left(\mu\sqrt{\Lambda(t)} - \frac{Y_s}{\sqrt{\Lambda(t)}}\right)\right] \quad (2.48)$$

$\phi(\cdot)$ est la fonction de répartition et $\phi(\cdot)$ la densité de probabilité d'une distribution de Brinbaum-Saunders.

Les paramètres du processus (DE) et (DET) peuvent prendre en compte la variabilité d'un échantillon de produit lors d'un essai de dégradation et intégrer la loi d'accélération pour le cas des essais accélérés de dégradation. Les paramètres des processus stochastiques vu précédemment peuvent aussi être estimés par une approche bayésienne permettant de réduire la collecte des données issues des essais réalisés sur un produit dont on veut estimer sa fiabilité.

2.5. Estimation Bayésienne

L'estimation bayésienne est utilisée dans le cadre de la réduction de la taille d'échantillon afin d'apporter une information qui vient renfoncer ou préciser une estimation donnée [Robert, 1992]. Dans la recherche de la fiabilité du béton, il est possible d'apporter une information connue appelée information *a priori* afin de la combiner avec l'information obtenue par les essais réalisés avec un échantillon de taille réduite pour avoir plus de précision sur le résultat final (avoir des intervalles de confiance plus précises). Elle permet aussi d'intégrer au fur et à mesure de la connaissance sur les résultats des essais lors du développement d'un produit et de régler le cas où on observe zéro défaillance. La principale difficulté sur l'application de l'estimation bayésienne est la modélisation de l'information *a priori*. En effet, l'estimation bayésienne se base sur le théorème de Bayes qui permet d'obtenir une connaissance *a posteriori* à partir des résultats d'essais et de la connaissance *a priori* [Bernardo et Smith, 1994].

2.5.1. L'inférence bayésienne

Dans l'approche bayésienne, on parle de l'inférence bayésienne, qui permet de calculer ou de déduire la probabilité d'un événement en utilisant les connaissances issues d'autres évènements [Congdon, 2001]. L'inférence bayésienne utilise le théorème de Bayes qui est une conséquence immédiate des probabilités conditionnelles et des probabilités totales. On parle du calcul d'une probabilité *a posteriori* connaissant la vraisemblance d'un échantillon et une probabilité *a priori* [Pages et Gondran, 1980].

Pour une variable θ sur le domaine Ω avec une densité de probabilité $g(\theta)$ représentant l'information *a priori* (ou subjective), la vraisemblance $\mathrm{L}(y_i,..,y_n/\theta)$ avec $t_i(\mathrm{i} = 1...\mathrm{n})$ représentant les résultats d'un essai (ou information objective), l'information *a posteriori* $g(\theta/y_i)$ est obtenue en combinant l'information *a priori* avec la vraisemblance (voir figure 2.8).

Ainsi, le théorème de Bayes s'écrit dans le cas continu par :

$$g(\theta/y_i) = \frac{L\,(y_i,..,y_n/\theta)g(\theta)}{\int_\Omega L\,(y_i,..,y_n/\theta)g(\theta)d\theta} \tag{2.49}$$

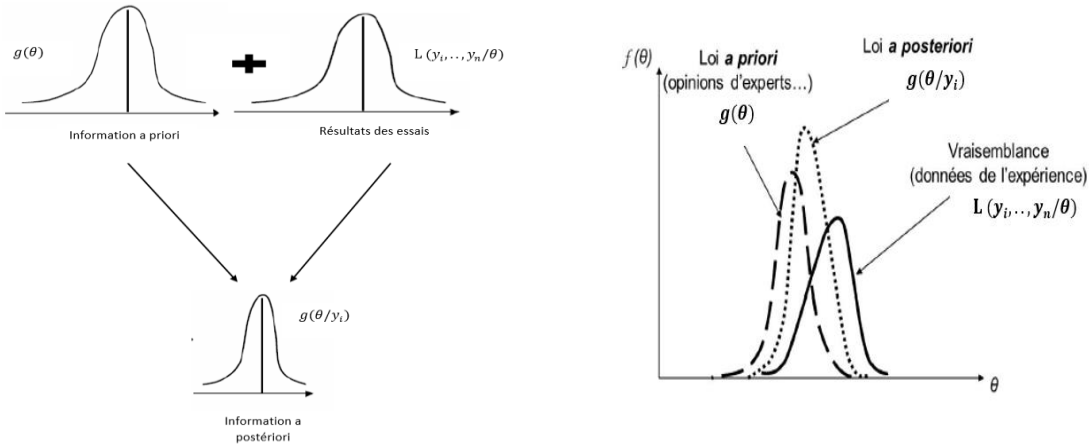


Figure 2.8. Estimation de l'information a posteriori par l'inférence Bayésienne

Dans le cas des essais accélérés sur le béton, θ représente le vecteur des paramètres du processus de dégradation étudié et $y_i(\mathrm{i} = 1...\mathrm{n})$ les résultats des essais. L'estimation *a posteriori* de θ peut se faire selon des méthodes comme le Maximum d'*a priori* (en anglais MAP) ou par une méthode classique utilisant les estimateurs ponctuels obtenus avec les moments d'ordre 1 des fonctions marginales associées aux différents paramètres et les intervalles de confiance avec l'estimation des variances par les moments d'ordre 2 [Fatemi, 2012].

L'application de l'approche bayésienne reste fondamentalement liée à la connaissance de l'information *a priori*. Cette information peut provenir du retour d'expérience des essais déjà réalisés sur un produit similaire, de l'avis d'un expert, des analyses des risques, des analyses prévisionnelles, etc.).

2.5.2. Information *a priori*

a) Choix de l'*a priori*

Avant de commencer à appliquer l'estimation bayésienne, il faut faire le choix de la distribution *a priori* à utiliser. Ce choix est basé sur la connaissance que l'on a sur les paramètres étudiés ainsi que les incertitudes qui les entourent. La connaissance disponible permet de définir la distribution de l'*a priori*. Lorsque l'on dispose d'une connaissance faible sur les paramètres, l'*a priori* suivra une distribution simple et peu informative. L'*a priori*, suivra une distribution uniforme, si toute valeur du paramètre a la même probabilité d'être choisie. Si l'on dispose d'une connaissance suffisante sur l'*a priori*, la distribution pourra

être une loi de distribution non uniforme plus complexe (loi normale, gamma etc.) [Beaumont, 2014].

L'usage des lois conjuguées (Tableau2.5) permet de calculer l'*a posteriori* avec un *a priori* et une vraisemblance dans la même famille de loi. Il est important de trouver la densité *a priori* qui permet de déterminer le pouvoir de décision qui sera confié aux données. Les lois conjuguées simplifient non seulement les calculs mais permettent de maximiser le pouvoir des données observées ; ce qui est important dans notre cas car nous visons la détermination du plus petit échantillon de données pour la meilleure estimation des paramètres du processus de dégradation.

Vraisemblance f(x/θ)	Information $g(\theta)$	Information a posteriori $g(\theta/\mathrm{x})$
Normale $N(\theta,\sigma^2)$	Normale $N(\mu,\tau^2)$	$N(\rho(\sigma^2\mu + r^2x), \rho\sigma^2r^2)$ $\rho^{-1} = \sigma^2 + r^2$
Poisson $P(\theta)$	Gamma $G(\alpha,\beta)$	$G(\alpha + x, \beta + 1)$
Gamma $G(v,\sigma^2)$	Gamma $G(\alpha,\beta)$	$G(\alpha + v, \beta + x)$
Binomiale $B(n,\theta)$	Bêta $Be(\alpha,\beta)$	$Be(\alpha + x, \beta + n - x)$
Négative Binominale $Neg(m,\theta)$	Bêta $Be(\alpha,\beta)$	$Be(\alpha + m, \beta + x)$
Multinominale $M_k(\theta_1,\dots,\theta_k)$	Dirichlet $D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$	$D(\alpha_1 + x_1,\dots,\alpha_k + x_k)$
Bêta $Be(\alpha,\beta)$	Exponentiel $exp(\lambda)$	$exp(\lambda - \log(1-x))$
Normale $N(\mu,1/\theta)$	Gamma $G(\alpha,\beta)$	$G(\alpha + 0.5, \beta + (\mu - x)^2/2)$

Tableau 2.5. Quelques lois conjuguées [Fatemi, 2012]

Après avoir trouvé les types de lois qui vont représenter la distribution *a priori*, il faut déterminer les paramètres des lois à partir des informations dont on dispose.

b) Recherche des paramètres de la loi *a priori*

L'hypothèse qui est faite est que les différents paramètres sont indépendants. La distribution *a priori*, s'écrit comme le produit des distributions *a priori* individuelles associées aux différents paramètres :

$$\mathrm{g}(\theta) = \prod_{i=1}^{q} g_i(\theta_i) \qquad (2.50)$$

Pour estimer les paramètres de lois, il existe plusieurs méthodes telles que : la méthode séquentielle, la méthode des échantillons équilibrés, la méthode des moments pondérés, la méthode des doubles moments, la méthode des fractiles, la méthode du maximum d'entropie, la méthode des moments [Suhner, 1994], [Finetti, 1974] et [Goldstein, 1999].

c) Le poids de l'*a priori*

L'information *a priori* est souvent donnée sous forme d'intervalle. Cependant, il est important de prendre en compte le poids de l'information *a priori* lors de l'estimation bayésienne des paramètres. En effet, on distinguer trois types d'*a priori* :

- **Peu informatif et cohérent**

Une information *a priori* est cohérente, si la moyenne théorique m_{th} est le centre de l'intervalle $[m_{min},m_{max}]$ qui représente l'information *a priori*. Peu informatif veut dire que la variance de l'intervalle est trop grande. Si l'estimation bayésienne donne une valeur de m proche de m_{th} avec un écart-type réduit ; on peut conclure que c'est la combinaison de l'information *a priori* et celle des données issues des essais qui sont à l'origine d'une telle estimation.

- **Très informatif et cohérent**

Par cohérent on entend à nouveau le fait que la moyenne théorique m_{th} est le centre de l'intervalle $[m_{min},m_{max}]$ qui représente l'information *a priori*. Le terme "très informatif" signifie que l'on a une variance faible. Si l'estimation bayésienne donne une moyenne très proche de la valeur théorique et un écart-type faible ; cela indique que l'information fournie par l'*a priori* est plus importante que celle que nous apportent les essais.

- **Très informatif et incohérent**

Avec un *a priori* très informatif et incohérent, l'intervalle qui représente l'information, $[m_{min},m_{max}]$ est très réduit, et décentré par rapport à la moyenne théorique m_{th}. Le fait d'avoir un *a priori* très informatif et incohérent avec un échantillon d'essais faible permet d'avoir une estimation bayésienne du paramètre m avec écart-type réduit et donc un intervalle de confiance serré. La valeur de l'estimation bayésienne de m sera décentrée, car l'intervalle de l'information *a priori* est décentré par rapport à la moyenne théorique m_{th}. On peut dire qu'il y a dégradation de la connaissance apportée par les essais en choisissant le mauvais *a priori*. Un mauvais *a priori* peut conduire à un *a posteriori* incorrect. La solution à ce problème est la pondération de l'*a priori* en calculant un facteur de compatibilité entre l'*a priori* et la vraisemblance [Usureau, 2001].

2.6. Conclusion

Une introduction sur le traitement statistique des essais de vieillissement qui permettent d'estimer la fiabilité d'un produit soumis aux conditions normales d'utilisation a été faite. La principale difficulté sur la mise en œuvre des essais de vieillissement est liée au temps nécessaire pour obtenir une défaillance au niveau du produit testé. Une autre alternative pour atteindre rapidement la défaillance et l'utilisation des essais accélérés réalisés dans des conditions sévérisées sous différents stress.

Les résultats des essais accélérés sont utilisés pour estimer la fiabilité réelle du produit dans les conditions normales d'usage. Cette extrapolation des résultats se fait à l'aide d'une fonction de transfert.

Étant donné que la détérioration du béton est une conséquence de phénomènes de dégradation progressifs comme la carbonatation, le choix de présenter les essais de dégradation accélérés a été fait. Une modélisation des phénomènes de dégradation par les processus stochastiques de Gamma, Inverse Gaussien, de Wiener ou à Dispersion Exponentielle est possible en prenant en compte les différentes caractéristiques du phénomène étudié. Avec le souci d'avoir un seul processus stochastique pour modéliser tout processus de dégradation sur le béton, le choix s'est porté sur le processus de Wiener car il permet de modéliser tout type de phénomène de dégradation (étant non monotone et restant croissant dans le temps). Il reste aisé à utiliser par rapport aux autres processus stochastiques.

Les essais accélérés impliquent l'utilisation de plans d'essais présentés dans ce chapitre ainsi que les modèles d'accélération permettant de modéliser la fiabilité du produit selon les différents stress utilisés. Le choix du plan d'essais doit prendre en compte les conditions de réalisation des essais ainsi que le mode de défaillance des produits testés en veillant à ce que l'on garde la même défaillance sous stress sévérisés et aux conditions normales d'utilisation.

L'objectif de notre travail est de proposer le meilleur plan d'essais permettant d'avoir une estimation de la fiabilité du béton. Cela est possible en optimisant le plan d'essais (chapitre 3). Dans cette optique, une estimation bayésienne des paramètres du modèle de dégradation permet d'apporter plus de précision sur l'estimation de la fiabilité.

3. LA METHODE GENERIQUE PROPOSEE

3.1. Introduction

Afin d'appliquer la méthode générique d'estimation de la durabilité du béton avec un plan d'essais de dégradation accélérés, il faut collecter des données issues d'essais réalisés au préalable avec au moins deux niveaux de stress différents. Une autre voie que la collecte de données issues de l'expérimentation est possible ; elle consiste en l'utilisation d'un modèle physique afin de générer des données pour des situations d'essai données. A partir des données des essais expérimentaux ou simulées, on pourra caractériser le processus de Wiener (qui a été choisi pour caractériser les phénomènes de dégradation sur le béton ; voir Chapitre 2 section 2.4.3) en estimant ses paramètres.

Le processus de Wiener caractérise une dégradation qui suit une loi de distribution statistique normale. Cependant les indicateurs de dégradation du béton mesurés à diverses échéances temporelles ne suivent pas systématiquement une loi normale. Une méthode de transformation iso-probabiliste, fondée sur la conservation de caractéristiques statistiques clefs, est nécessaire afin de pouvoir utiliser notre méthode générique qui présuppose la normalité statistique des données de dégradation.

3.2. Création/collecte et prétraitement des données

3.2.1. Données nécessaires au problème d'optimisation

Tel qu'évoqué précédemment, les données qui vont servir pour estimer les paramètres du processus de Wiener peuvent provenir des essais réels réalisés au laboratoire ou d'un modèle physique. Dans nos travaux, le cas d'étude choisi est celui de la dégradation par carbonatation du béton. Le modèle prédictif de Hyvert présenté au chapitre 1 (section 1.5.1) est choisi pour générer les données pour différentes pressions partielles de CO_2 sur le béton. Le choix du modèle de prédiction de Hyvert est motivé par le fait qu'il est capable de prédire les profondeurs de carbonatation pour des pressions partielles de CO_2 proches des pressions partielles de CO_2 atmosphérique (0.03% de pression atmosphérique) [Hyvert, 2009].

Le béton considéré est de type CEMI (52,5 R), pouvant être utilisé en préfabrication. Il est soumis à la classe d'exposition XC3 (voir chapitre 1 ; tableau 1.1). Le traitement thermique subi par le béton est composé des phases suivantes [Hyvert, 2009] :

- phase de prétraitement : palier à la température "ambiante" de 20 °C pendant 2 heures ;
- phase de montée en température : montée en température de 15 °C/heure pendant 2h40mn, Passage du palier à 20 °C au palier à 60 °C :
- phase de maintien à la température de palier : palier à 60 °C pendant 5 heures;

– phase de refroidissement : descente en température. On passe ainsi du palier à 60 °C à une température "ambiante" de 20 °C

Les caractéristiques du béton utilisé sont :

- Rapport Eau/Liant équivalent = 0,55
- Résistance moyenne =35 MPa
- Teneur en liant équivalent = 300 (kg/m^3)

Les valeurs des paramètres du modèle de Hyvert sont compilées dans le tableau 3.1.

Paramètres	Unités	Description	Moyenne	Ecart-type	Lois de distribution
$err1$	-	Erreur d'estimation de $\left(\frac{D^0_{CO_2}}{Q1}\right)_{ref}$	0,84	0,52	Lognormale
$D^0_{CO_2}$	m^2/s	Coefficient de diffusion du CO2 en zone carbonatée	114.10^{-7}	182.10^{-8}	Normale
$Q1$	mol/l	Quantité de portlandite Ca(OH)2	2,19	-	Déterministe
$f_{cm,28}$	MPa	Compressive strength of the concrete	35	2	Lognormale
P_0	Pa	CO_2 pressure on the concrete surface	30	-	Déterministe
K_e	-	Paramètre prenant en compte les conditions environnementales	1	0,1	Normale
K_p	-	Paramètre prenant en compte le traitement thermique	0,49	-	Déterministe
P_{atm}	Pa	Pression atmosphérique	105	-	Déterministe
T	K	Température en kelvin	293	-	Déterministe
R	J/K.mol	La constante de gaz parfait	8,31	-	Déterministe
C2'	mol/l	Quantité de CSH-silicate de calcium hydraté	2,34	-	Déterministe

Tableau 3.1. Valeurs des paramètres du modèle de Hyvert [Hyvert]

Afin de pouvoir utiliser par la suite (Chapitre 4) le processus de Wiener qui évolue avec une perturbation liée au mouvement brownien (chapitre 2 ; section 2.4.3), il a été ajouté une perturbation σ_B.~N(0,1) au modèle de Hyvert:

$$Y_{gén}(t) = X_{hyvert}(t) + \sigma_B . N(0,1) \quad (3.1)$$

Avec $Y_{gén}(t)$ représentant la profondeur de carbonatation générée par le modèle de Hyvert plus la perturbation aléatoire $\sigma_B . N(0,1)$.

Une fois les données générées, il convient de faire une transformation iso-probabiliste afin de pouvoir les utiliser dans le processus de Wiener dans le cas où la caractéristique étudiée ne suit pas une loi normale.

3.2.2. Traitement des données : Transformation iso-probabiliste (TIP)

Le choix du processus de Wiener pour représenter les dégradations sur le béton (voir chapitre 2 ; section 2.4.3) implique l'utilisation d'une méthode de transformation des données si la caractéristique étudiée (la dégradation à un temps donné) ne suit pas une loi normale. L'objectif de la méthode est de transformer les données de dégradation qui suivent une loi de distribution quelconque en des données statistiquement équivalentes, suivant une loi normale, par conservation de caractéristiques clefs des lois après transformation. Plusieurs options sont possibles, comme par exemples :

- la conservation de la médiane et de la variance des données de dégradation ;
- la conservation de la médiane et de l'entropie ;
- la conservation de la médiane et du quartile (supérieur ou inférieur) ;
- …

La conservation de la médiane est pertinente dans le cas où l'indicateur de performance à suivre est la moyenne (ou médiane pour une loi normale) des durées de vie, T_{MTTF}. Il faut comprendre ici que la valeur de cet indicateur ne sera pas modifiée par la transformation iso-probabiliste. Si l'indicateur de performance à suivre (à garantir) est un quartile alors une option permettant la conservation de cette caractéristique statistique sera à préférer. Si l'on privilégie la conservation de la qualité /quantité d'information associée aux données, on choisira une option fondée sur l'entropie conservée.

Dans la pratique, en prenant la seconde option de transformation iso-probabiliste présentée ci-dessus (option médiane et entropie conservées) comme cas d'illustration, on doit identifier la loi de distribution statistique des dégradations $Y_{gén,(ijk)}(t|s_k)$, qu'on notera F_{jk}, pour en déterminer sa médiane m_F et son entropie e_F. Ceci pour chaque temps t_{jk} sous un stress s_k donné. On détermine ensuite les paramètres de la loi normale statistiquement équivalente $N(\mu_N,\sigma_N)$ en égalant sa médiane m_N à m_F et son entropie e_N à e_F. Il en ressort :

$$m_N = \mu_N = m_F \tag{3.2}$$

$$e_N = ln\,(\sigma_N\sqrt{2\pi e}) = e_F \tag{3.3}$$

d'où

$$\sigma_N = \frac{exp\,(e_F)}{\sqrt{2\pi e}} \tag{3.4}$$

On pourra alors générer des valeurs de dégradations $\tilde{Y}_{gén,(ijk)}(t|s_k)$ à partir de la loi normale équivalente $N(\mu_N,\sigma_N)$. Valeurs qui seront utilisées pour caractériser le processus de Wiener. Après génération des données de profondeur de carbonatation du modèle de Hyvert et un ajustement des données avec l'application "Distribution Fitter" du logiciel Matlab™, on

constate que loi lognormale est la plus adaptée pour représenter la distribution de la profondeur de carbonatation (voir figures 3.1). $Y_{gén(\,ijk)}$ suit donc une loi lognormale de paramètres μ_L et σ_L.

La médiane, l'entropie, la variance et le quartile (supérieur ou inférieur) de la loi lognormale sont :

$$m_L = exp\,(\mu_L) \tag{3.5}$$

$$e_L = \frac{1}{2} + ln(2\pi\sigma_L^2) + \mu_L \tag{3.6}$$

$$V_L = (e^{{\sigma_L}^2} - 1)e^{2\mu+{\sigma_L}^2} \tag{3.7}$$

Quartile supérieur :

$$ln(q_L) = \mu_L + \alpha\sigma_L \tag{3.8}$$

Quartile inférieur :

$$ln(q_L) = \mu_L - \alpha\sigma_L \tag{3.9}$$

Avec $\alpha = \text{norminv}\,(\text{p}, 0, 1)$ qui renvoie l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1, évalué à la valeur de probabilité *p* (associée au percentile visé). En appliquant, pour illustration, la première option de transformation iso-probabiliste qui conserve la médiane et la variance, on aura :

$$m_L = m_N \tag{3.10}$$

Avec

$$\mu_N = exp\,(\mu_L) \text{ ou } \mu_L = ln\,(\mu_N) \tag{3.11}$$

$$V_L = V_N \tag{3.12}$$

$$\left(e^{{\sigma_L}^2} - 1\right)e^{2\mu+{\sigma_L}^2} = {\sigma_N}^2 \tag{3.13}$$

Pour la deuxième option de transformation iso-probabiliste qui conserve la médiane et l'entropie, on aura :

$$e_L = e_N \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln(2\pi\sigma_L^2) + \mu_L = ln\,(\sigma_N\sqrt{2\pi e}) \tag{3.15}$$

$$\sigma_N = \sigma_L exp\,(\mu_L) \text{ ou } \sigma_L = \frac{\sigma_N}{\mu_N} \tag{3.16}$$

Enfin, pour la troisième option de transformation iso-probabiliste qui conserve la médiane et quartile supérieur, on aura :

$$q_L = q_N \tag{3.17}$$

$$exp\ (\mu_L + \alpha\sigma_L) = q_N \tag{3.18}$$

$$\mu_L exp\ (\mu_L \alpha\sigma_L) = \mu_N + \alpha\sigma_N \tag{3.19}$$

$$\sigma_N = \frac{1}{2}\mu_N(exp(\alpha\sigma_L) - 1 \tag{3.20}$$

Ainsi, on obtient les paramètres de la loi normale à partir de celle de la loi lognormale et vice-versa.

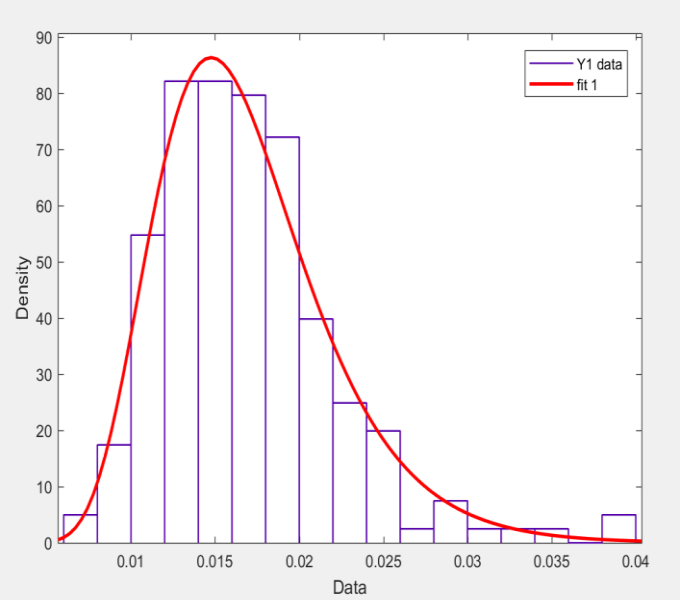


Figure 3.1. Ajustement de la fonction de densité de probabilité de la loi lognormale sur les données générées par le modèle de Hyvert.

Dans la suite, la méthode de transformation iso-probabiliste appliquée fondée sur la conservation de la médiane et de l'entropie sera choisie pour illustration. Ce choix est motivé par le fait que nous basons notre méthode d'optimisation sur l'estimation "robuste" de la moyenne / médiane des durées de vie T_{TMTTF} et que nous souhaitons conserver le niveau d'information contenues dans les données de dégradation générées (d'où la conservation de l'entropie).

A retenir

Deux possibilités se présentent pour la collecte des données ; soit par les essais réels sur le béton, soit par génération des données par le biais d'un modèle physique. Dans nos travaux, faute de données expérimentales en nombre suffisant et obtenues à partir d'essais conduits sur des niveaux de stress différenciés, les données proviennent du modèle de Hyvert pour l'application de la méthode de qualification de la durabilité du béton avec un plan d'essais optimisé, pour le cas de la carbonatation du béton. Une fois les données générées, une transformation iso-probabiliste doit être effectuée dans le cas où la caractéristique étudiée ne suit pas une loi normale (car le processus de Wiener choisi pour représenter l'évolution de la dégradation dans le béton présuppose la normalité des données de dégradation). La transformation iso-probabiliste permet de transformer la distribution des données différente de la loi normale en loi normale équivalente en conservant certaines caractéristiques statistiques clefs (médiane, variance, entropie, quartile (supérieur ou inférieur)). La méthode de transformation iso-probabiliste utilisée dans la suite de la thèse est celle qui conserve la médiane et l'entropie.

3.3. Problème d'optimisation du plan d'essais

Nous rappelons que l'objectif de la thèse est de développer une méthode générique de qualification de nouvelles formulations de béton en termes de fiabilité et durabilité. On l'a vu dans le chapitre précédent, la distribution statistique de la durée de vie (de service) d'un béton peut être obtenue par le biais des processus stochastiques. Le formalisme mathématique de ces processus implique plusieurs paramètres qu'il faut estimer avec le plus fort niveau de précision possible afin de déduire les durées de vie. On comprend aisément que plus le temps d'essai sera long, plus le nombre de points de mesure et le nombre d'éprouvettes testées seront importants, alors meilleure sera l'estimation des paramètres du processus stochastiques. Dans le même temps, le coût de l'essai augmente alors que des contraintes budgétaires (liées au nombre d'éprouvettes, de dispositifs expérimentaux immobilisés, …) existent. Il y a donc un compromis à trouver entre l'objectif d'améliorer la précision de l'estimation et celui de maîtriser les coûts expérimentaux. C'est ainsi que l'on peut poser le problème d'optimisation du plan d'essais accélérés, il est donc important de définir les différents paramètres et les contraintes liés aux essais. Différents critères d'optimalité, définis en fonction des paramètres du plan d'essais, existent ; ils seront détaillés également. Un choix sera à faire parmi ces critères ; nous viserons le critère d'optimisation donnant l'intervalle de confiance le moins large. Nous établirons également une relation entre le seuil de confiance et la précision de l'estimation, relation qui permettra dans une deuxième utilisation de calculer la taille des échantillons à tester.

3.3.1. Les paramètres des essais accélérés

Avant de détailler la méthode d'optimisation, nous présentons les différents paramètres qui caractérisent un plan d'essais de dégradation accélérés.

Le premier paramètre du plan d'essais de dégradation est le nombre de stress à utiliser. Dans l'optique de réduire les temps de calculs ayant un impact direct sur l'optimisation du plan d'essais, le nombre de stress maximal sera ici choisi égal à 2 ou 3.

D'autres paramètres caractéristiques (voir détails dans les paragraphes qui suivent) d'un plan d'essais accélérés ne seront pas fixés au préalable mais devront être déterminés avec l'objectif de répondre au problème d'optimisation posé. Ces paramètres diffèrent selon que les essais soient destructifs ou non.

a) Cas des essais destructifs

Pour les paramètres associés au stress, nous avons déjà utilisé S_k pour dénoter la valeur du stress de niveau k avec $0 \leq k \leq d$ et $d = 2$ ou 3. On notera également S_0 le stress correspondant aux conditions normales d'utilisation du béton, et, S_{max} le stress maximal qui ne pourra pas être dépassé lors des essais.

Parmi les paramètres caractéristiques à déterminer pour répondre au problème d'optimisation, on notera m_k le nombre de temps de mesures, t_{jk} le temps des mesures avec $1 \leq j \leq m_k$ et $f_{jk} = t_{jk} - t_{(j-1)k}$ la fréquence des mesures au niveau du stress S_k. Cette fréquence f_{jk} pourra être notée f_k si on impose que le temps entre chaque mesure (la fréquence, donc) soit constant (ie $f_{1k} = \cdots = f_{jk} = \cdots = f_{m_k k} = f_k$). T_{S_k} sera le temps total ou temps d'arrêt des mesures sous stress S_k.

On notera aussi n_{jk} le nombre d'éprouvettes à tester au temps t_{jk} et n_{ijk} le numéro de l'éprouvette avec $1 \leq i \leq n_{jk}$. On établira alors que $\sum_{i=1}^{n_{jk}} \sum_{j=1}^{m_k} n_{ijk} = N_k$ est le nombre d'éprouvettes pour le niveau du stress S_k et que $\sum_{k=1}^{d} N_k = N$ est le nombre total d'éprouvettes pour le plan d'essais optimisé. La figure 3.2 permet de visualiser les différents paramètres caractéristiques d'un essai destructif de dégradation accéléré sous trois différents niveaux de stress.

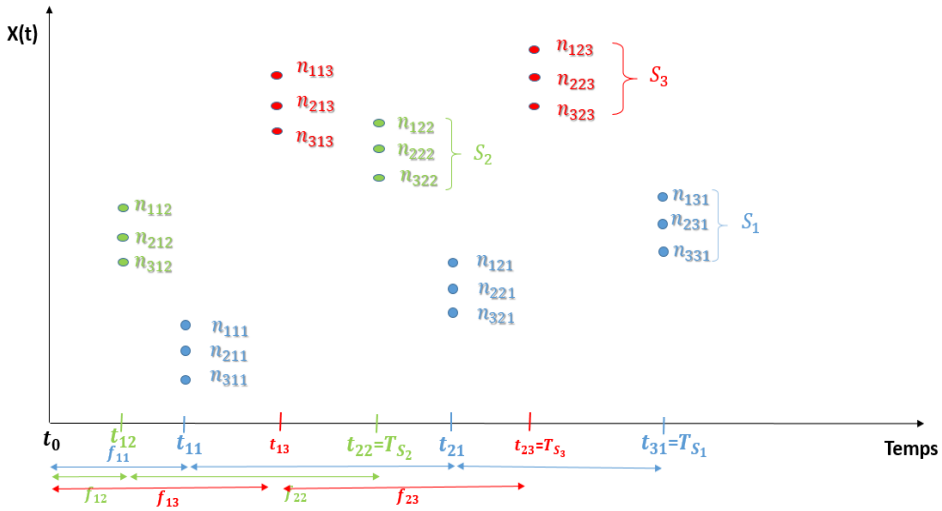


Figure 3.2. Illustration d'un plan d'essais destructifs optimisé avec trois niveaux de stress

b) Cas des essais non destructifs

Pour les essais non destructifs, on garde les mêmes paramètres et notations sauf pour le nombre d'éprouvettes à tester au niveau du stress S_k qui sera noté N_k et n_{ik} le numéro de l'éprouvette avec $1 \leq i \leq N_k$ sachant que les éprouvettes testées au temps t_{jk} seront les mêmes testées à $t_{j+1,k}$. $\sum_{k=1}^{d} N_k = N$ restera le nombre total d'éprouvettes (ou la taille d'échantillon) pour le plan d'essais optimisé.

La figure 3.3 permet de visualiser les différents paramètres caractéristiques d'un essai non destructif de dégradation accéléré sous trois différents niveaux de stress.

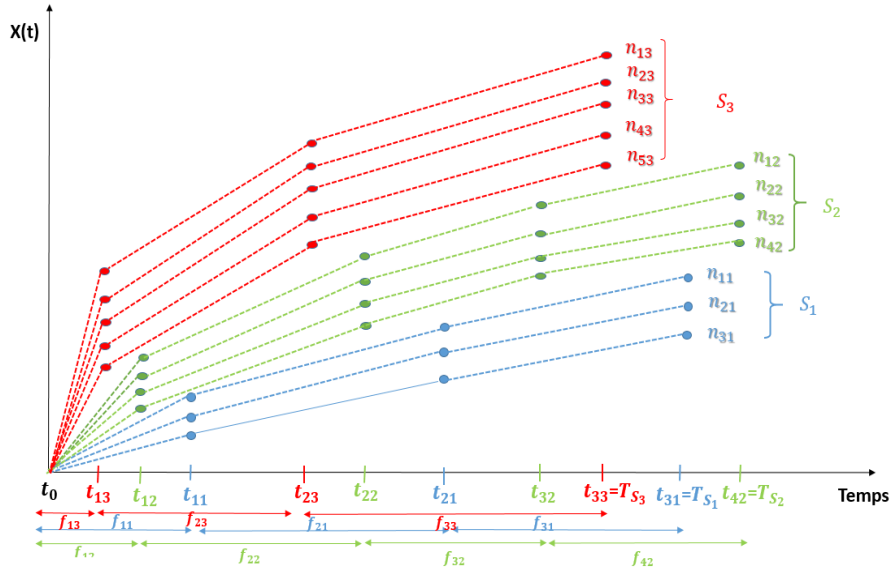


Figure 3.3. Illustration d'un plan d'essais non destructifs optimisé avec trois niveaux de stress

L'optimisation se fait en respectant certaines contraintes liées aux essais ou imposées par l'opérateur.

3.3.2. Contraintes, fonction d'objectif et critères d'optimalité

a) Contraintes d'optimisation

Plusieurs contraintes peuvent être fixées lors de l'optimisation du plan d'essais [Zhang et al, 2015], [Chen et al, 2016], [Wang et al, 2016]. Les principales contraintes sont :

- Le temps maximal prédéfini T_{ADT} à ne pas dépasser lors d'un essai : $\boldsymbol{T_{S_k} \leq T_{ADT}}$;
- La taille prédéfinie N_{ADT} que ne devra pas dépasser l'échantillonnage total : $\boldsymbol{N \leq N_{ADT}}$;
- Le budget global prédéfini C_{ADT} que ne devra pas dépasser la campagne d'essai : $\boldsymbol{TC \leq C_{ADT}}$, où TC est le coût total de la campagne d'essais.

Ce coût total TC est calculé :

- pour les essais destructifs, par :

$$TC(n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) = C_{op}.\sum_{k=1}^{d} f_k m_k + C_{mea}\sum_{k=1}^{d} n_k m_k + C_{sam}\sum_{k=1}^{d} n_k m_k \quad (3.21)$$

- pour les essais non destructifs, par :

$$TC(n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d) = C_{op}\sum_{k=1}^{d} f_k m_k + C_{mea}\sum_{k=1}^{d} n_k m_k + C_{sam}\sum_{k=1}^{d} n_k \quad (3.22)$$

Avec C_{op} le coût unitaire de fonctionnement par temps, C_{sam} le coût unitaire de chaque échantillon de test utilisé et C_{mea} le coût unitaire pour chaque mesure.

b) La fonction objectif

La fonction objectif permet de quantifier la qualité de l'estimation des paramètres du plan d'essai optimisé. Elle permettra de comparer différents types de plan d'essais optimisé afin de choisir le cas le plus favorable. La fonction objectif est dans notre approche liée à la matrice de Fisher qui sert de base au calcul des critères d'optimalité. Cette matrice donnant l''information de Fisher" est définie comme étant la variance du score [Dupuis, 2007], [Dauxois, 2012].

Le score d'une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ continue de loi de probabilité $\boldsymbol{P_\Theta}$ (avec $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\mu_\alpha}, \boldsymbol{\sigma_\alpha^2}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma_B}^2, \boldsymbol{\gamma})$, le vecteur des paramètres inconnus du processus stochastique) et de densité de probabilité $\boldsymbol{f_\Theta}$ est défini par :

$$\boldsymbol{S(X,\Theta)} = \frac{\boldsymbol{\partial ln\,(f(X,\Theta)}}{\boldsymbol{\partial \Theta}} = \left(\frac{\boldsymbol{\partial ln\,(f(X,\Theta)}}{\boldsymbol{\partial \Theta_1}}, \dots, \frac{\boldsymbol{\partial ln\,(f(X,\Theta)}}{\boldsymbol{\partial \Theta_d}}\right)^T \quad (3.22)$$

Le score est dit centré car $\boldsymbol{E\big(S(X,\Theta)\big) = 0}$. L'information de Fisher $\boldsymbol{I(\Theta)}$ qui est la variance du score est définie par :

$$\boldsymbol{I(\Theta) = Var\,(S(X,\Theta)) = E\left(\left(\frac{\partial ln\,(f(X,\Theta)}{\partial \Theta}\right)^2\right.} \quad (3.23)$$

Plus faible sera cette variance du score, "meilleure" sera qualifiée l'estimation des paramètres du processus stochastique). Plus de détails sur la matrice de Fisher seront

donnés dans le chapitre 4 consacré à l'application de la méthode d'estimation de la durabilité par un plan d'essais optimisé.

c) Critère d'optimisation

L'objectif du plan d'essais est d'estimer la fiabilité du béton à partir des résultats des essais de dégradation. L'utilisation d'un processus stochastique pour modéliser le phénomène de dégradation, d'un modèle de vie accélérée et le choix d'un type de stress donné (exemple : stress constant pour notre travail) permet d'estimer la durée de vie du béton (soit avec un quantile ou avec le T_{MTTF} : Mean Time To Failure). L'estimation de la durée de vie n'est possible que lorsque les paramètres du processus stochastique sont connus.
Il existe différents critères d'optimalité conditionnant la qualité de l'estimation des paramètres. Ils peuvent être regroupés en quatre catégories : critères d'optimalité fondés sur l'information, critères d'optimalité basés sur la distance, critères d'optimalité de conception composée, et les autres critères d'optimalité [Rady et al, 2009].

Les critères d'optimalités fondés sur l'information sont définis en fonction de la matrice d'information de Fisher. Il est aussi possible de distinguer parmi ces critères : ceux qui prennent en considération tous les paramètres du modèle (G-[2], D-, E-[3] et I-[4] optimalités) et ceux qui n'en utilisent qu'une partie (DA-[5], DS-[6], EA-[7], L-[8] et C-optimalités).

Les critères basés sur la distance sont des fonctions basées sur la distance $d(X, C)$ d'un point X à un ensemble $C \subset R^P$ avec R^P un espace euclidien de dimension P (qui correspond au nombre de paramètres du modèle) [Xu and al, 2013] :

$$\boldsymbol{d(X, C) = min_{y \in C} \| x - y \|} \tag{3.24}$$

avec $\| x - y \|$ la distance de dimension P dans l'espace euclidien.

Pour ce type de critères d'optimalité, on peut citer les U-[9] et S-[10] optimalités.

[2] *La G-optimalité s'appuie sur la minimisation de la variance maximale de toute valeur prédite dans l'espace expérimentale*
[3] *La E-optimalité s'appuie sur la recherche de l'expérience qui consiste à maximiser les plus petites valeurs propres de la matrice de Fisher ou minimiser les valeurs propres maximales de l'inverse de la matrice de Fisher.*
[4] *La I-optimalité s'appuie sur la minimisation de la variance de la réponse prédite par l'expérience.*
[5] *La DA-optimalité s'appuie sur la minimisation du logarithme de la matrice de Fisher ou la maximisation de l'opposé du logarithme de la matrice de Fisher dans le cas d'estimation d'un sous ensemble de paramètre du modèle étudié.*
[6] *La DS-optimalité s'appuie sur la minimisation du logarithme du déterminant d'une combinaison des éléments de partition de la matrice de Fisher dans le cas d'estimation d'un sous ensemble de paramètre du modèle étudié*
[7] *La EA-optimalité s'appuie sur la maximisation de la plus grande valeur propre de la matrice de Fisher dans le cas d'estimation d'un sous ensemble de paramètre du modèle étudié*
[8] *La L'optimalité s'appuie sur la maximisation de la trace de la matrice de Fisher dans le cas d'estimation d'un sous ensemble de paramètre du modèle étudié*
[9] *La U-optimalité s'appuie sur la minimisation de la distance entre un point candidat et un ensemble de points de l'expérience*
[10] *La S-optimalité s'appuie sur la maximisation de la moyenne de la distance harmonique d'un point donné à l'ensemble de tous les points de l'expérience*

Les critères de conception composée sont des combinaisons de critères d'optimalités. Parmi ces critères on a : la DT-optimalité (combinaison de la D et T-[11]optimalité) et CD-optimalité (combinaison de C et D optimalité).

La catégorie concernant "les autres critères d'optimalités" regroupe tous les critères d'optimalités qui ne rentrent pas dans les trois premières catégories. Par exemple ; la T-optimalité [Atkinson et Fedorov, 1975].

Il existe des liens entre les différents critères d'optimalités. Pour le cas des critères d'optimalités D et G ; la démonstration de l'existence de relation est introduite par le "théorème d'équivalence général" qui introduit la relation entre la D et G-optimalité concernant les modèles linéaires [Kiefer et Wolfowitz, 1960]. Pour plus d'explications se conférer à l'article écrit par Rady et al. [Rady et al, 2009]. Les critères d'optimisation pour les plans ADT (essais de dégradation accélérée) sont choisis en fonction de l'objectif visé au niveau de l'optimisation. Pour évaluer la précision des paramètres estimés ; on utilise souvent les critères d'optimalité qui sont : l'A-optimalité et la C-optimalité. Lorsque l'on cherche une précision sur les indexes de fiabilité (exemples : MTTF, p-quantile), on utilise un critère basé sur la précision comme la V-optimalité [Wang and al, 2017].

- **La D-optimalité**

La D-optimalité est un des critères d'optimalité le plus utilisé pour optimiser les plans d'essais accélérés (ALT/ADT). Il agit sur l'optimisation de la variance des paramètres du modèle. Il est basé sur la maximisation du déterminant de la matrice d'information de Fisher qui revient aussi à minimiser l'inverse du déterminant de la matrice d'information de Fisher. Le déterminant de la matrice d'information de Fisher est égal à l'inverse du déterminant de la matrice de variance covariance asymptotique.
L'étendue de la région de confiance commune à tous les paramètres du modèle est inversement proportionnelle à la racine carrée du déterminant de la matrice d'information de Fisher. Par conséquence, en maximisant le déterminant de la matrice d'information de Fisher, on obtient le plus petit ellipsoïde asymptotique de la région de confiance commune de type Wald qui est donc la meilleure précision commune des estimateurs des paramètres du modèle [Han, 2015]. Le problème d'optimisation est défini par la fonction d'objectif suivante :

[11] *La T-optimalité s'appuie sur*

$$\hat{\theta} = Argmin\,(det|I^{-1}(\theta)|\,, n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) = Argmax\ \ (det|I(\theta)|, n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) \quad (3.25)$$

$Sous\ la\ contrainte\ TC(n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) \le C_{ADT}\ ,\ N \le N_{ADT}$, et $T_{S_k} \le T_{ADT}$

avec θ vecteur des paramètres du processus.

- **La A-optimalité**

L'A-optimalité permet d'estimer la variance moyenne des paramètres du modèle en minimisant la trace de l'approximation du premier ordre de la matrice de variance-covariance des paramètres du modèle. Il correspond aussi à la somme des valeurs propres de l'inverse de la matrice d'information de Fisher. Le problème d'optimisation est défini par la fonction d'objectif suivante :

$$\hat{\theta} = Argmin[trace(I^{-1}(\theta)|\ n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d)] \quad (3.26)$$

$Sous\ la\ contrainte\ TC(n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) \le C_{ADT}\ ,\ N \le N_{ADT}$, et $T_{S_k} \le T_{ADT}$

- **La C-optimalité**

La C-optimalité introduit par Elfving [Elfving, 1952], permet de minimiser la variance asymptotique du q[ième] quantile $T_{q,0}$ de la distribution de la durée de vie dans les conditions normales d'utilisation estimée par le plan d'essais. Le plan d'essais optimal basé sur le critère de C-optimalité est défini par la fonction objectif suivante :

$$\hat{\theta} = Argmin[Avar(\ T_{q,0}|\ n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d)] = Argmin[H' I^{-1}(\theta) H] \quad (3.27)$$

$Sous\ la\ contrainte\ TC(n_1,\dots, n_d\ ,\ f_1,\dots, f_d, m_1,\dots, m_d) \le C_b\ ,\ N \le N_{ADT}$, et $T_{S_k} \le T_{ADT}$

avec $H = \frac{\partial T_{MTTF}}{\partial \theta}$ ou $\frac{\partial T_{q,0}}{\partial \theta}$ selon l'indicateur de performance suivi (ie dont on veut la meilleure estimation) et H' étant la transposée de H.

Au global, on retiendra que les critères d'optimalités permettent d'optimiser le plan d'essais accélérés en agissant sur la variance des paramètres du modèle de dégradation étudié. A un plan optimisé correspond une matrice de Fisher $I(\hat{\theta})$, à partir de laquelle il est possible de donner un intervalle de confiance de l'indicateur de durée de vie suivi T_{MTTF} (ou un quantile $T_{q,0}$). Cet intervalle de confiance est dépendant du nombre d'échantillons testés. Il est donc possible par raisonnement inverse de spécifier la taille d'échantillon pour un certain niveau donné de précision (ou d'étendue de l'intervalle de confiance) et de seuil de confiance. La figure 3.4 (côté droit) ; illustre l'encadrement de la durée de vie $\hat{T}_{MTTF,M}$ pour une valeur de ε fixe et la variation de ϕ et pour (le côté gauche) ; la variation de ε pour un seuil ϕ de probabilité fixe (voir figure 3.4).

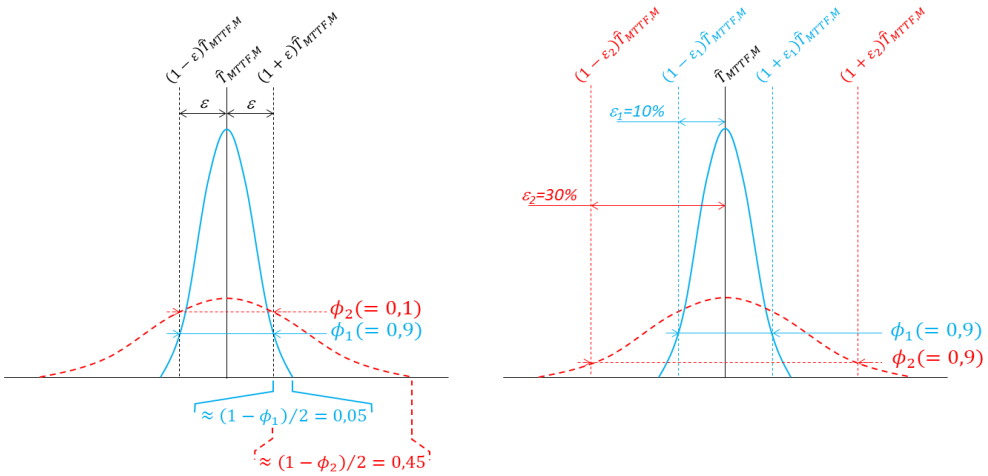


Figure 3.4. Illustration de la relation entre $\hat{T}_{MTTF,M}$, ε et ϕ (seuil de confiance).

3.3.3. Détermination de la taille de l'échantillon pour les essais

Dans l'optique de proposer un plan d'essais accélérés *a priori* à partir des résultats d'essais laboratoire ou venant d'un modèle prédictif, il est possible de définir par avance la taille d'échantillon N pour les essais en utilisant un critère d'encadrement de la durée de vie du produit étudié (dans notre cas le béton). Si on souhaite estimer le q^{ème} quantile de la distribution de durée de vie du béton dans les conditions normales d'utilisation selon le critère suivant (figure 3.4) :

$$P\{(1-\varepsilon)T_{q,0} \leq \hat{T}_{q,0} \leq (1+\varepsilon)T_{q,0}\} \geq \phi \tag{3.28}$$

où ε est une constante positive qui satisfait $0 < \varepsilon < 1$. Elle représente la précision de l'intervalle d'estimation de $T_{q,0}$ et ϕ est un seuil de confiance fixé et exprimé en terme de probabilité.

Si on fait l'hypothèse que $\widehat{T_{q,0}}$ suit approximativement une distribution normale de moyenne $T_{q,0}$ et de variance $(\widehat{T_{q,0}})$, l'équation (3.28) peut s'écrire de la manière suivante :

$$P\left\{(-Z_{(1+\phi)/2} \leq \frac{\hat{T}_{q,0}-T_{q,0}}{\sqrt{Avar(\hat{T}_{q,0})}} \leq Z_{(1+\phi)/2}\right\} \geq \phi \tag{3.29}$$

$Z_{(1+\phi)/2}$ est le $\left(\frac{1+\phi}{2}\right)^{ème}$ quantile d'une distribution normale standard.

En se référant à l'équation liant la matrice de Fisher à la variance asymptotique de l'indicateur $\hat{T}_{q,0}$, on peut donner une approximation de la taille d'échantillon N par l'équation suivante :

$$N \approx \frac{H' I^{-1}(\theta) H [Z_{(1+\phi)/2}]^2}{\varepsilon^2 {T_{q,0}}^2} \tag{3.30}$$

L'échantillon N devra être réparti entre les différents niveaux de stress du plan d'essais en respectant le/les critère(s) d'optimisation.

A retenir

L'optimisation du plan d'essais accéléré est une partie très importante car elle va permettre d'estimer la durée de vie du béton (fiabilité du béton) avec les paramètres d'optimisation les plus optimaux (stress (nombre et valeurs), nombre d'échantillon, mesures (fréquences et nombre)) en respectant les contraintes fixées lors des essais. L'optimisation se fait selon des critères tels que : les critères d'optimalités et l'estimation par intervalle de confiance avec un seuil de confiance et une précision donnée.

3.4. Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer comment les données des essais sont collectées. Deux possibilités se présentent : la collecte des données par les essais réels sur le béton et la génération des données par le biais d'un modèle prédictifs. Dans cette thèse, les données proviennent du modèle de Hyvert pour l'application de la méthode de qualification de la durabilité du béton avec un plan d'essais optimisé pour le cas de la carbonatation du béton. Une fois les données générées, une transformation iso-probabiliste doit être effectuée dans le cas où la caractéristique étudiée ne suit pas une loi normale. Car le processus de Wiener choisi pour représenter l'évolution de la dégradation dans le béton représente les données qui évoluent selon la loi normale. La transformation iso-probabiliste permet de transformer la distribution des données différente de la loi normale en loi normale en conservant les paramètres qui la caractérisent comme ; la médiane, la variance, l'entropie et le quartile (supérieur ou inférieur) etc. Les données générées par le modèle de Hyvert sont utilisées pour caractériser les paramètres du processus de Wiener (voir chapitre 4). Ensuite, il se pose le problème d'optimisation du plan d'essais qui permet d'estimer la durée de vie du béton (fiabilité du béton) avec les paramètres d'optimisation les plus optimaux (stress (nombre et valeurs), nombre d'échantillon, mesures (fréquences et nombre)) en respectant les contraintes fixées lors des essais. L'optimisation passe par la définition d'une fonction objectif liée à un critère d'optimalité donné (choisi en fonction de l'objectif visé avec l'optimisation ; voir section 3.3.2). Il faut aussi faire la distinction entre le cas des

essais destructifs/non destructifs ; car les résultats et la manière de procéder diffèrent selon le type d'essais. Le chapitre se termine par une méthode permettant de trouver le nombre d'éprouvettes à utiliser lors des essais en fonction d'un seuil de probabilité et d'une précision sur l'intervalle de confiance qui encadre la durée de vie du béton. Une application de la méthode de génération de données et de planification des essais destructifs/non destructifs sera faite dans le chapitre quatre.

4. Planification d'un plan d'essais optimisé pour un béton soumis à la carbonatation

4.1. Introduction

Pour rappel, notre objectif est d'estimer la durabilité, en termes de durée de vie garantie, d'un béton soumis à la carbonatation en s'appuyant sur un plan d'essais accélérés optimal. Dans ce chapitre, nous allons présenter dans un premier temps la méthode d'estimation de la durabilité proposée. Cette estimation sera donnée sous une forme déterministe mais également sous forme d'intervalles de confiance, déterminés par les méthodes du Percentile Bootstrap (PB) [Mandel et Betensky,2008] ou du Percentile Boostrap corrigé par Biais (PBCB) [Karlsson, 2009].

Dans une première étape du second temps, nous nous intéressons au cas de l'optimisation d'un plan d'essais accélérés à deux niveaux de stress ; l'objectif d'optimisation étant conditionné par la qualité de l'estimation. Des études particulières des effets des bornes inférieure et supérieure des niveaux de stress seront réalisées afin de conclure sur la configuration optimale de l'essai accéléré. Sera alors introduite une méthode de détermination du nombre d'essais nécessaires à réaliser en fonction de la précision et du seuil de confiance visés. Une analyse de sensibilité complétera cette étude d'un plan d'essais à deux niveaux de stress. Elle a pour objectif de saisir l'influence de la qualité des estimations sur le plan d'essais optimisé et de statuer sur la robustesse de la méthode.

Dans une seconde étape, l'influence de l'introduction d'un troisième niveau de stress est étudiée. L'analyse de cette influence portera sur l'amélioration de la qualité de l'estimation de la durabilité pour un même nombre d'échantillons testés ou un même temps d'essais (ou inversement, i.e. impact d'un troisième niveau de stress sur les tailles d'échantillons à tester ou les temps d'essai pour un même niveau de qualité de l'estimation).

Ce chapitre se termine par l'application de l'approche bayésienne utilisée ici pour enrichir la connaissance *a priori* de la dégradation extraite du modèle de Hyvert par combinaison avec celle des mesures observées de la dégradation lors des essais, et, *in fine*, d'actualiser au fur et à mesure des observations le plan d'essais optimal. Les données utilisées dans ce chapitre sont générées à partir du modèle de carbonatation de Hyvert dont les caractéristiques des paramètres (moyenne et écart-type) et leurs lois de distribution (log-normale, normale) sont définis dans le chapitre 3 ; sous-section 3.2.1, tableau 3.1.

4.2. Durée de vie du béton

4.2.1. La fonction d'accélération

Pour estimer les paramètres du processus de Wiener, il faut définir tout d'abord la forme de sa fonction d'accélération. Au regard de la forme retenue du processus :

$$Y(t/s_k) = \mu_{s_k}\Lambda(t) + \sigma_B B(\Lambda(t))$$
$$\mu_{s_k} = \alpha\, exp(\beta\varphi(S_k)) \qquad (4.1)$$

La fonction $\exp(\beta\varphi(S_k))$ est celle qui caractérise l'effet du niveau de stress S_k sur la vitesse de dégradation.

En faisant varier, à un temps donné fixe, le niveau de pression partielle de CO_2 dans le modèle de Hyvert, nous avons pu constater que la profondeur de carbonatation du béton suit une loi puissance $\mathrm{A}\, S^{\beta}$ (Figure 4.1). Ainsi on pourra établir que la fonction $\varphi(S_k) = \ln(S_k)$.

En transformant la valeur du niveau de stress S_k pour obtenir un stress standardisé s_k:

$$S_k = [ln(S_k) - ln(S_0)]/[ln(S_{max}) - ln(S_0)](\qquad (4.2)$$

Où S_0 correspond au niveau de stress en conditions normales d'environnement et S_{max} le stress maximal à ne pas dépasser pendant l'essai, on pourra écrire au final que $\mu_{s_k} = \alpha \exp(\beta s_k)$, et, comme la standardisation a conduit à ce que : $s_0 = 0 < \cdots < s_k < \cdots < s_{max} = 1$, alors, $\mu_{s_0} = \alpha < \cdots < \mu_{s_k} < \cdots < \mu_{s_{max}} = \alpha e^{\beta}$.

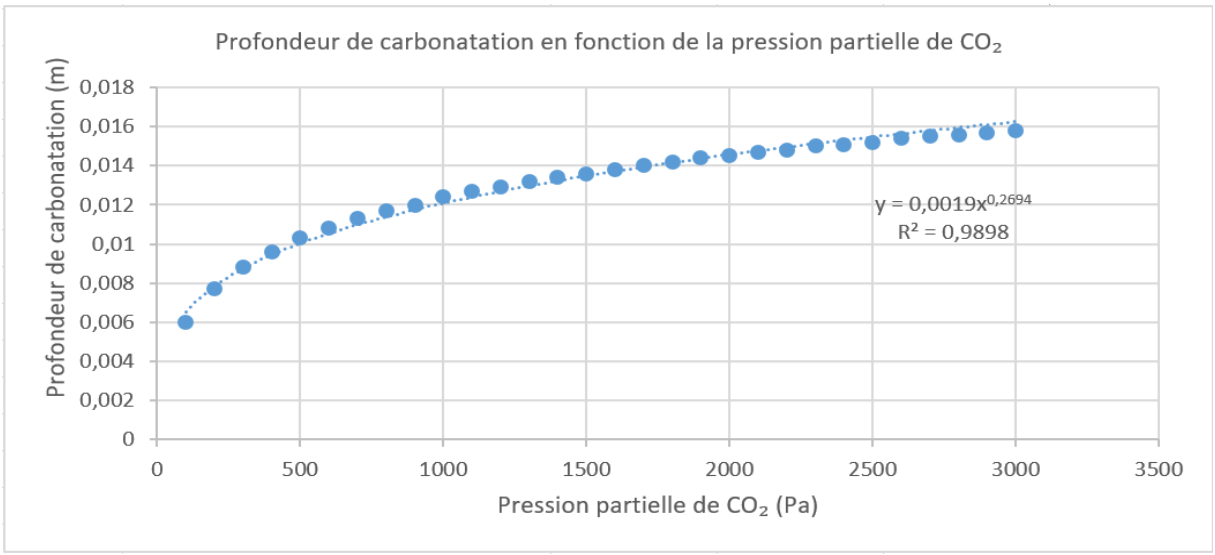


Figure 4.1. Profondeur de carbonatation en fonction de la pression partielle de CO_2

L'expression de la fonction d'accélération étant établie, il est possible d'estimer la durabilité du béton à partir des données caractéristiques du matériau béton et de son environnement. Tout d'abord nous allons nous concentrer sur l'estimation des paramètres du processus de Wiener.

4.2.2. Estimation des paramètres du processus de Wiener

a) Notations et hypothèses

Avant d'estimer les paramètres du processus de Wiener, certaines notations et hypothèses doivent être fixées. Tout d'abord, nous étudions dans nos travaux l'optimisation d'un essai de dégradation accéléré avec stress constant (CSADT).

Tel qu'évoqué au chapitre 1 et illustré au travers des figures 1.5 et 1.6, il est nécessaire de distinguer les cas des essais destructifs et non destructifs. Les notations et hypothèses formulées sont compilées dans le tableau ci-après (Tableau 4.1).

<table>
<tr><th>Cas des essais destructifs</th><th>Cas des essais non-destructifs</th></tr>
<tr><td colspan="2">– Le nombre total d'éprouvettes de béton disponibles pour l'essai est N ;
– Le nombre total de niveaux de stress sera égal à "d ", et chaque stress sera noté s_k , avec $k = 1,2,\cdots,d$.
– Le nombre de ces éprouvettes attribuées au niveau de stress s_k sera noté N_k ; ainsi : $\sum_{k=1}^{d} N_k = N$.
– Le nombre de temps de mesure pour le niveau de stress s_k est m_k ;
– Les temps de mesure seront notés t_{jk} (avec $j = 1,..,\ m_k$) ;</td></tr>
<tr><td>– Le nombre d'éprouvettes à tester (nombre de répétitions, en somme) pour chaque essai destructif au niveau de stress s_k et au temps t_{jk} sera noté n_{jk}, tel que : $\sum_{j=1}^{m_k} n_{jk} = N_k$ et $\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k} n_{jk} = N$;
– Chaque éprouvette testée sous stress s_k et au temps t_{jk} sera référencée n_{ijk} et sa dégradation Y_{ijk}, avec $i = 1,..,n_{jk}$, $j = 1,..,m_k$ et $k = 1,..,d$.
[si on fixe comme contrainte (mais ce n'est pas souhaitable si on vise une optimisation fine visant à ajustern_{jk}) d'avoir le même nombre de répétitions entre chaque temps de mesure t_{jk} alors on aura $n_{1k} = n_{jk} = \cdots = n_{m_k k} = n_k$ et $m_k n_k = N_k$] ;
– on donnera également des notations spécifiques aux proportions d'éprouvettes.
Ainsi la proportion d'éprouvettes testées au temps de mesure t_{ijk} au niveau de stress s_k sera notée $p_{jk} = n_{jk}/N_k$ avec $\sum_{j=1}^{m_k} p_{jk} = 1$. $\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k} p_{kj}.N_k = \sum_{k=1}^{d} p_k m_k = 1$.</td><td>– Le nombre d'éprouvettes à tester pour chaque essai destructif au niveau de stress s_k et au temps t_{jk}, sera noté n_k, tel que : $\sum_{k=1}^{d} n_k = N$.
– Chaque éprouvette testée sous stress s_k et au temps t_{jk} sera référencée n_{ik} et sa dégradation, Y_{ijk}, $= 1,..,n_{jk}$, $j = 1,..,m_k$ et $k = 1,..,d$.</td></tr>
</table>

- f_k représentera la fréquence des mesures dans l'échelle de temps $\Lambda(t_{jk}) = t_{jk}^{\gamma}$, telle que $\tau_{jk} = \Lambda(t_{jk}) = \mathrm{j}.f_k$ pour les éprouvettes de bétons au niveau de stress s_k. Les temps de mesure t_{ijk} seront inversement calculés à partir de $t_{jk} = \Lambda^{-1}(j.f_k) = j.{f_k}^{1/\gamma}$ avec $j = 1, \dots, m_k$ et $k = 1, .., d$.
- Pour chaque niveau de stress s_k, $k = 1, \dots, d$, la dégradation Y_{ijk} au niveau d'une éprouvette de béton ($i = 1, \dots, n_{jk}\ ou\ n_k$) suit une loi normale de moyenne $\alpha_{ik}e^{\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})$ et de variance $\sigma_B^2\Lambda(t_{jk})$.
- La dégradation initiale est considérée comme étant nulle, ainsi $Y(t = 0|s_k) = 0$.
- La défaillance est atteinte lorsque la dégradation Y_{ijk} atteint une valeur seuil Y_s.

Tableau 4.1. Notations et Hypothèses sur le cas des essais destructifs ou non destructifs

b) Estimation par maximum de vraisemblance

Les paramètres inconnus du processus de Wiener sont estimés à partir de données issues des essais réels ou simulés par un modèle physique. Les paramètres seront représentés dans la suite par le vecteur $\Theta = (\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2, \beta, {\sigma_B}^2, \gamma)$ avec $\alpha_{ik} \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$.

En fonction des hypothèses formulées ci-dessus (Tableau 4.1) et de α_{ijk} la valeur de α pour la $i^{\text{ème}}$ éprouvette de béton et le niveau de stress s_k au temps t_{ijk} ; la densité de probabilité conditionnelle de la dégradation y_{ijk} sachant Θ est définie par :

$$f(y_{ijk}|\ \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2\Lambda(t_{jk})}} exp\ (-\frac{\left(y_{ijk} - \alpha_{ik}e^{\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})\right)^2}{2\sigma_B^2\Lambda(t_{jk})}) \tag{4.3}$$

- **Cas des essais destructifs**

Pour le cas des essais destructifs, n_{jk} représente le nombre d'éprouvettes utilisées pour les essais à chaque temps de mesure pour le niveau de stress s_k. La fonction de vraisemblance de Θ, L_θ, est définie par :

$$L_\theta = L(y_{ijk}, \theta) = L(y_{ijk}, \alpha_{ik}, {\sigma_B}^2, \beta, \gamma) \tag{4.4a}$$

avec $\alpha_{ik} \propto N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$.

Comme les paramètres σ_B, β, γ sont constants, on peut considérer que la fonction vraisemblance de Θ est proportionnelle à celle de α_{ik}, et :

$$L_\theta \propto\ L(y_{ijk}, \alpha_{ik}) = \prod_{k=1}^{d}\prod_{j=1}^{m_k}\prod_{i=1}^{n_{kj}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_{ijk}, \alpha_{ik})d\alpha_{ik} \tag{4.4b}$$

Ou, encore, en considérant le théorème de Bayes :

$$L_\theta = \prod_{k=1}^{d}\prod_{j=1}^{m_k}\prod_{i=1}^{n_{jk}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_{ijk}|\alpha_{ik}) \times f(\alpha_{ik})d\ \alpha_{ik} \tag{4.4c}$$

Avec $f(y_{ijk}|\alpha_{ik}) \propto f(y_{ijk}|\ \Theta)$ de l'équation (4.3) et $f(\alpha_{ik}) \propto N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha)$.

On peut donc en déduire la fonction de logarithme de vraisemblance de Θ, ℓ_θ, définie par :

$$\ell_\theta = ln(L_\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}}\left(\frac{B_{2,ijk}^2}{\Lambda(t_{jk})B_{1,jk}} + ln\left(\Lambda(t_{jk})\right) + ln\,(B_{1,jk})\right) \quad (4.5)$$

avec $B_{1,\mathrm{jk}} = \sigma_B^2 + \sigma_\alpha^2 e^{2\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})$, et $B_{2,\mathrm{ijk}} = y_{ijk} - e^{\beta\varphi(s_k)}\mu_\alpha\Lambda(t_{jk})$.

- **Cas des essais non destructifs**

Pour les essais non destructifs, n_k représente le nombre d'éprouvettes utilisées tout au long de l'essai pour le niveau de stress s_k. La fonction de vraisemblance, L_θ, est définie par, de manière analogue au cas destructif :

$$L_\theta = \prod_{k=1}^{d}\prod_{j=1}^{m_k}\prod_{i=1}^{n_k}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_{ijk}|\alpha_{ik}) \times f(\alpha_{ik})d\,\alpha_{ik} \quad (4.6)$$

Ainsi, la fonction de logarithme de vraisemblance de Θ est définie par :

$$\ell_\theta = ln\,(L_\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\frac{B_{2,ijk}^2}{\Lambda(t_{kj})B_{1,jk}} + ln\left(\Lambda(t_{jk})\right) + ln(B_{1,jk})\right) \quad (4.7)$$

avec $B_{1,jk} = \sigma_B^2 + \sigma_\alpha^2 e^{2\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})$, et $B_{2,\mathrm{ijk}} = y_{ijk} - e^{\beta\varphi(s_k)}\mu_\alpha\Lambda(t_{jk})$.

L'estimation des paramètres du processus de Wiener représentés par $\Theta = (\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2, \beta, {\sigma_B}^2, \gamma)$, est faite en maximisant la fonction définie dans l'équation (4.5) ou (4.7) respectivement pour les essais destructifs et non destructifs.

D'une manière générale, il n'y a pas d'expressions explicites pour des paramètres inconnus. Bien que les valeurs puissent être obtenues numériquement, la fonction de logarithme de vraisemblance est très sensible au paramètre β, ce qui implique que les estimations changent d'une simulation à l'autre. Pour pallier ce problème, l'algorithme EM est utilisé pour obtenir des estimations au sens du vraisemblance des paramètres du vecteur $\Theta = (\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2, \beta, {\sigma_B}^2, \gamma)$.

c) Estimation par la méthode Espérance-Maximisation (EM)

L'algorithme EM est un algorithme itératif qui comprend l'étape d'évaluation de l'espérance mathématique (Étape-E) et l'étape de maximisation (Étape-M). L'étape E permet d'obtenir l'espérance mathématique de la fonction de logarithme de vraisemblance sachant l'estimation des valeurs des paramètres à l'itération précédente ; cette espérance conditionnelle sera notée Q. L'étape M maximise, quant à elle, la fonction Q pour mettre à jour les estimations des paramètres. L'algorithme EM est efficace pour estimer les paramètres de processus lorsque le calcul de l'espérance mathématique et la maximisation est aisé [Mclachlan et Krishnan, 2007]. Cette fois encore, il faut distinguer les cas destructifs et non destructifs.

- **Pour le cas des essais destructifs**

Étape E: calcul de la fonction Q, qui est l'espérance mathématique de ℓ_θ. On suppose que la valeur du vecteur des paramètres du processus de Wiener $\Theta^{(h)} = (\mu_\alpha^{(h)}, \sigma_\alpha^{2(h)}, \beta^{(h)}, \sigma_B^{2(h)}, \gamma^{(h)})$, pour la première itération, est obtenue à partir des données générées par le modèle de Hyvert.

Cette première estimation de $\Theta^{(h)}$ constitue le point de départ de l'itération. La fonction Q est définie par :

$$Q(\Theta|\ \Theta^{(h)}) = \mathbb{E}\left(\ell_{\theta,c}(y_{ijk}, \Theta^{(h+1)}|\Theta^{(h)})\right) = -\frac{1}{2}[N\ ln\ (\sigma_B^2) + \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k} n_{jk}\ ln\left(\Lambda(t_{jk})\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{{y_{ijk}}^2}{\sigma_B^2\Lambda(t_{jk})} + \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{e^{2\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})E({\alpha_{ik}}^2|\ y_{ijk})}{\sigma_B^2} - \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{2y_{ijk}e^{\beta\varphi(s_k)}E(\alpha_{ik}|\ y_{ijk})}{\sigma_B^2} +$$

$$N\ ln(\sigma_B^2) + \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{E({\alpha_{ik}}^2|\ y_{ijk})}{\sigma_B^2} - \frac{2\mu_\alpha}{\sigma_\alpha^2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}|\ y_{ijk}\right) + \frac{N{\mu_\alpha}^2}{\sigma_\alpha^2} \quad (4.8)$$

Étape M: Ici, il faut rechercher le vecteur $\Theta^{(h+1)}$ qui maximise la fonction Q. Cela revient à résoudre l'équation, $\Theta^{(h+1)} = argmax_\Theta Q(\Theta|\ \Theta^{(h)})$. Il faut donc trouver le vecteur $\Theta^{(h+1)}$ qui annule les premières dérivées partielles de Q par rapport à Θ , équations (4.9a) à (4.14).

$$\frac{\partial Q(\Theta|\ \Theta^{(h+1)})}{\partial \mu_\alpha} = -\frac{2}{\sigma_\alpha^2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}|\ y_{ijk}\right) + \frac{N2\mu_\alpha}{\sigma_\alpha^2} = 0 \quad (4.9a)$$

$$\hat{\mu}_\alpha^{(h+1)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}|y_{ijk}\right) \quad (4.9b)$$

$$\frac{\partial Q(\Theta|\ \Theta^{(h+1)})}{\partial \sigma_\alpha^2} = -\frac{1N}{2\sigma_\alpha^2} + \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{E({\alpha_{ik}}^2|\ y_{ijk})}{2\sigma_B^4} - \frac{\mu_\alpha}{\sigma_B^4}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}|\ y_{ijk}\right) + \frac{N{\mu_\alpha}^2}{\sigma_B^4} = 0 \quad (4.10a)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^{2(h+1)} = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}^2|y_{ijk}\right) - 2\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} E\left(\alpha_{ik}|\ y_{ijk}\right) + N\hat{\mu}_\alpha^{(h+1)^2}\right] \quad (4.10b)$$

$$\frac{\partial Q(\Theta|\ \Theta^{(h+1)})}{\partial \sigma_B^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{N}{\sigma_B^2} - \frac{1}{\sigma_B^4}\left(\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{{y_{ijk}}^2}{\Lambda(t_{jk})} + \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} e^{2\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})E\left(\alpha_{ik}^2|y_{ijk}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. 2\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}} y_{ijk}e^{\beta\varphi(s_k)}E(\alpha_{ik}|\ y_{ijk})\right)\right] = 0 \quad (4.11a)$$

$$\hat{\sigma}_B^{2(h+1)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{jk}}[\frac{y_{ijk}^2}{\Lambda(t_{jk})} + e^{2\beta\varphi(s_k)}\Lambda(t_{jk})E\left(\alpha_{ik}^2|y_{ijk}\right) - 2y_{ijk}e^{\beta\varphi(s_k)}E\left(\alpha_{ik}|y_{ijk}\right)] \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial Q(\Theta|\ \Theta^{(h+1)})}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{K=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{kj}}\left(\frac{y_{kji}^2}{\sigma_B^2\Lambda^2(t_{kj})} - \frac{1}{\Lambda(t_{kj})} - \frac{E({\alpha_{kji}}^2|\ y_{kji})e^{-2\beta\varphi(s_k)}}{\sigma_B^2}\right)\frac{\partial\Lambda(t_{kj})}{\partial\gamma}\right] = 0 \quad (4.13)$$

Et enfin, le paramètre β peut être obtenu ou approximé par :

$$\hat{\beta}_M = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{1}{s_k}\left[ln\left(\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{kj}} y_{kji}\, E\left(\alpha_{kji}\middle|y_{kji}\right)\right) - ln\left(\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n_{kj}} \Lambda(t_{kj}) E\left(\alpha_{kji}^2\middle|y_{kji}\right)\right)\right] \qquad (4.14)$$

En résumé, $\Theta^{(h+1)}$peut être obtenu par les étapes suivantes :

- Étape 1: définir la valeur initiale des paramètres $(\mu_\alpha^{(0)}, \sigma_\alpha^{2(0)}, \beta^{(0)}, \sigma_B^{2(0)}, \gamma^{(0)})$, et le nombre d'itérations N_{iter};
- Étape 2: on obtient $\hat{\mu}_\alpha^{(1)}$ avec l'équation (4.9b);
- Étape 3: on intègre $\hat{\mu}_\alpha^{(1)}$ dans l'équation (4.10b) pour obtenir $\hat{\sigma}_\alpha^{2(1)}$;
- Étape 4: $\hat{\beta}^{(1)}$ peut être obtenu avec l'équation (4.14),
- Étape 5: on intègre $\hat{\beta}^{(1)}$ dans l'équation (4.12b) pour obtenir$\hat{\sigma}_B^{2(1)}$.
- Étape 6: on intègre $\hat{\mu}_\alpha^{(1)}$ et $\hat{\sigma}_\alpha^{2(1)}$ dans l'équation (4.13) pour obtenir $\hat{\gamma}^{(1)}$
- Étape 7: on répète N_{iter} fois les étapes 2 à 6.

Après avoir présenté la méthode d'estimation des paramètres du processus de Wiener, nous allons l'utiliser dans la section suivante afin d'estimer la durée de vie du béton.

4.2.3. Estimation déterministe et par intervalles de confiance de la durée de vie du béton

Le béton utilisé pour illustrer notre méthode est de type CEM I (52,5 R), il est soumis à la classe d'exposition XC3 (voir chapitre 1 ; tableau 1.1). Pour l'essai de carbonatation du béton le stress (paramètre accélérant le phénomène de dégradation) est la pression partielle de CO_2 sur le béton. On choisit, pour générer les données, d'utiliser deux niveaux de stress : S_1=300 Pa (0,3% Patm[12]) et S_2=20000 Pa (20 % Patm). La pression partielle de CO_2 en conditions normales est de P_0 = 30 Pa (0,03% Patm). La norme française XP P18-458 [XP 18-458,2008] sur l'essai de carbonatation accélérée utilise une pression partielle de 50000 Pa (50%Patm).

En utilisant les valeurs du tableau 4.1 pour les paramètres du modèle de Hyvert, on génère des trajectoires de profondeurs de carbonatation pour chaque stress (S_1(rouge) et S_2 (violet)) (voir figure 4.2 pour 200 trajectoires générées pour chaque niveau de stress). La pression partielle de CO_2 étant plus élevée au niveau du stress S_2 , on constate d'une manière générale que pour un temps t donné, la profondeur de carbonatation est la plus grande ; ce qui est conforme aux attentes. Cependant, on constate aussi qu'il y a une superposition de certaines courbes rouges et violettes ; cela s'explique par une forte variabilité des trajectoires simulées par le modèle de Hyvert.

[12] Patm : pression atmosphérique

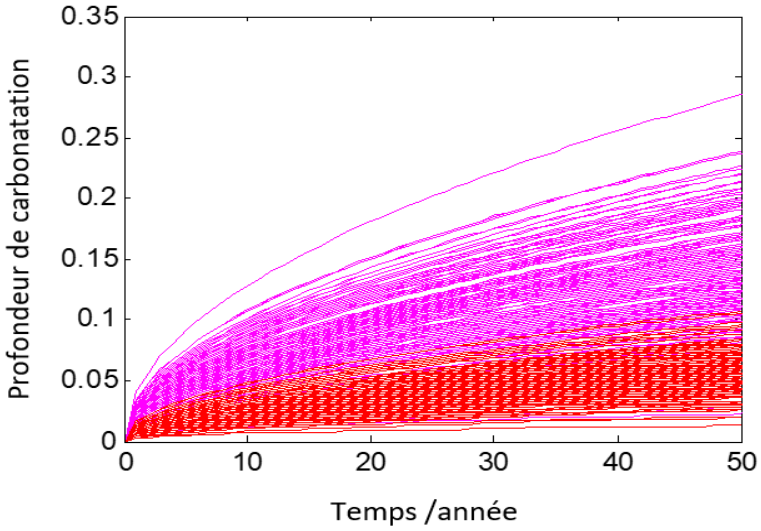


Figure 4.2. Génération de trajectoires de dégradation à partir du modèle de Hyvert probabilisé pour les stress (S_1 (rouge) et S_2 (violet))

C'est sur la base de ces données générées par le modèle de Hyvert que nous allons chercher à estimer les paramètres du processus de Wiener. Dans la mesure où le modèle fait apparaître que l'évolution de la profondeur de carbonatation dans le temps est de la forme $A\sqrt{t}$, nous choisissons de considérer que la fonction $\Lambda(t)$ (de l'équation 4.1) vaut $\sqrt{t}$. Ainsi le processus stochastique à caractériser est de la forme :

$$\begin{aligned} &Y(t/s_k) = \alpha e^{\beta s_k}\Lambda(t) + \sigma_B B(\Lambda(t)) \\ &\alpha \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2),\ \Lambda(t) = \sqrt{t} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Le vecteur initial des paramètres à estimer n'intègre alors plus que quatre éléments : $\Theta = (\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2, \beta, \sigma_B{}^2)$ puisque $\gamma = 0{,}5$. Le passage de cinq paramètres initiaux à quatre permettra bien sûr de diminuer les temps de calcul. Avec quatre paramètres à estimer, l'algorithme d'estimation (Voir c section 4.2.2, sous-section c) s'interrompra à l'étape 5. L'étape 6 est une répétition de N_{iter} fois des étapes 2 à 5.

Après calcul, l'application de la méthode EM pour l'estimation des paramètres du processus donne :

$$\hat{\mu}_\alpha = 0,0048358;\ \hat{\sigma}_\alpha = 0,0015086;\hat{\beta} = 1,6325;\hat{\sigma}_B = 0,0005178.$$

Sur la figure 4.3 sont superposées les trajectoires moyennes des dégradations estimées par le processus de Wiener avec celles générées par le modèle de Hyvert, pour les niveaux de stress S_1 et S_2. Le calage est très satisfaisant.

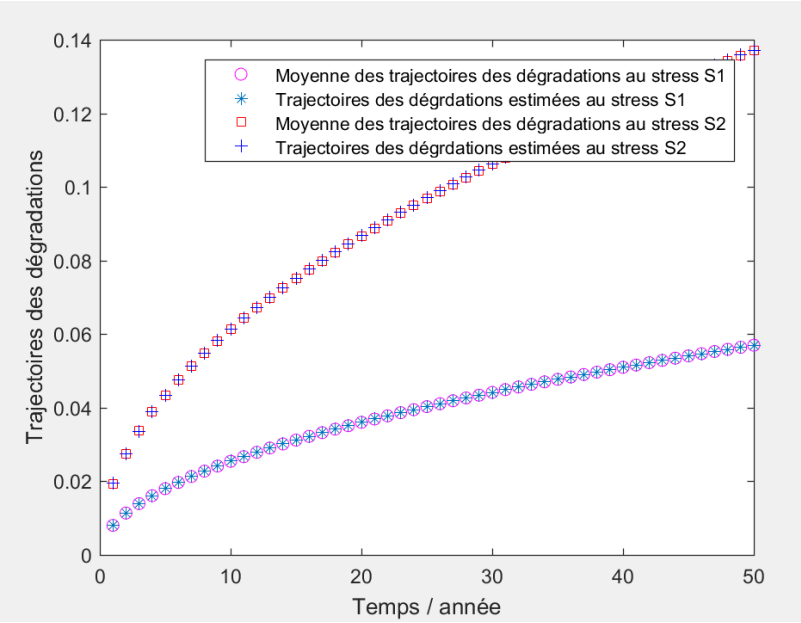


Figure 4.3. Trajectoires des dégradations estimées

- **Estimation déterministe de la durée de vie moyenne**

La durabilité du béton est définie comme étant l'instant où la profondeur de carbonatation atteint une valeur seuil fixée par avance notée ω :

$$T = inf\{t|Y(t/s_k) \geq \omega\} \tag{4.16}$$

Dans le cas de la carbonatation du béton ω est égale à l'enrobage du béton.

La densité de probabilité de la durabilité est définie par :

$$f_T(t) = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi(e^{2\hat{\beta}s_k}\Lambda^4(t)\hat{\sigma}_\alpha^2+\Lambda^3(t)\hat{\sigma}_B^2)}} exp\left\{-\frac{(\omega-\hat{\mu}_\alpha e^{\hat{\beta}s_k}\Lambda(t))^2}{2(e^{2\hat{\beta}s_k}\Lambda^2(t)\hat{\sigma}_\alpha^2+\Lambda(t)\hat{\sigma}_B^2)}\right\} \tag{4.17}$$

La durabilité est alors approximée par la relation suivante :

$$\hat{T}_{MTTF} \approx \frac{2\omega^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2}[D\left(\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\sqrt{2}\hat{\sigma}_\alpha}\right)]^2 \tag{4.18}$$

avec $D(z) = \exp(-z^2)\int_0^z \exp(u^2)du$ est l'intégrale de Dawson [McCabe,1974] pour le réel z.

Pour z très grand, $D(z) \approx 1/(2z)$.

Dans notre cas $z = \frac{\hat{\mu}_\alpha}{\sqrt{2}\hat{\sigma}_\alpha}$ est considéré grand, nous pouvons donc estimer que la durabilité estimée d'une manière déterministe est donnée par la relation :

$$\hat{T}_{MTTF} \approx \frac{\omega^2}{\hat{\mu}_\alpha^2}. \tag{4.19}$$

A titre d'exemple, dans notre cas, pour ω = 0,035 m, la durée de vie moyenne $\hat{T}_{MTTF}$ est estimée à 69,5 ans en utilisant l'équation (4.18).

- **Estimation par intervalle de confiance**

Une autre façon de présenter la durée de vie du béton est d'y associer un intervalle de confiance. Dans cette partie, deux méthodes ont été utilisées : la méthode du Percentile Bootstrap (PB) et la méthode du Percentile Boostrap corrigé par Biais (PBCB) [Wang, 2010]. Ces deux méthodes utilisent la technique du Bootstrap qui consiste à faire un ré-échantillonnage à partir d'un échantillon de départ. La distribution d'échantillonnage dans les différentes répliques est une approximation de la distribution d'échantillonnage réelle. Les deux méthodes sont utilisées ; afin de comparer les deux résultats. En effet, la méthode du Percentile Boostrap ne permet pas d'ajuster l'estimation par rapport au biais qu'il peut y avoir entre l'estimation et la vraie valeur alors que celle du percentile Boostrap corrigé par Biais le permet.

L'algorithme permettant de déterminer l'intervalle de confiance avec la méthode du Percentile Bootstrap (PB) et celle du Percentile Bootstrap corrigé par Biais (PBCB) est le suivant :

- Étape 1 : on génère n échantillons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de la distribution normale $N(\hat{\mu}_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha^2)$;
- Étape 2 : on substitue α_i au niveau de l'équation (4.1) et on utilise le fait que les accroissements soient indépendants pour générer n trajectoires de dégradation ;
- Étape 3 : on utilise les n trajectoires de dégradation pour estimer les paramètres du processus de Wiener. Si on note $\widehat{\Theta}_B$ l'estimation par bootstrap des paramètres, l'indice 'B' correspond au nombre de fois que le bootstrap est répété ;
- Étape 4 : on substitue l'estimation par bootstrap $\widehat{\Theta}_B$ dans l'équation (4.19) et on obtient l'estimation par bootstrap de la durabilité $\hat{T}_{MTTF,B} = T_{MTTF}(\widehat{\Theta}_B)$;
- Étape 5 : on recommence B fois les étapes 1 à 4 ;
- Étape 6 : on range $\hat{T}_{MTTF,B}$ du plus petit au plus grand ; $\hat{T}_{MTTF,B,(1)}, \hat{T}_{MTTF,B,(2)}, \dots, \hat{T}_{MTTF,B,(B)}$;
- Étape 7 : les intervalles de confiance au seuil de confiance de $100(1-\zeta)\%$ pour la méthode du Percentile Bootstrap (PB) et la méthode du Percentile Boostrap corrigé par Biais (PBCB) sont alors :

$$\begin{cases} PB & [\hat{T}_{MTTF,B,LPB}, \hat{T}_{MTTF,B,UPB}] = [\hat{T}_{MTTF,B,(\zeta/2)}, \hat{T}_{MTTF,B,(1-\zeta/2)}] \\ PBCB & [\hat{T}_{MTTF,B,LPCPB}, \hat{T}_{MTTF,B,UBCPB}] = [\hat{T}_{MTTF,B,(l)}, \hat{T}_{MTTF,B,(u)}] \end{cases} \quad (4.20)$$

avec $l = B \times \Phi(2\Phi^{-1}(p^*) + \Phi^{-1}(\zeta/2))$, $u = B \times \Phi(2\Phi^{-1}(p^*) + \Phi^{-1}(1-\zeta/2))$ et p^* la proportion des B valeurs de $\hat{T}_{MTTF,B}$ plus petites que $\hat{T}_{MTTF,M}$.

Dans notre exemple, l'estimation par intervalle de confiance avec un seuil de confiance ∅ = 0.95 et un risque (ou seuil de signification de l'intervalle) égale à 0.05 donne les intervalles de confiance IC = [59,5 ; 81,3] avec une étendue de 21.8 années pour la méthode du percentile Boostrap, et, [60 ; 81,4] par la méthode du percentile boostrap par biais avec une largeur de 21.4 années. Cette dernière est considérée comme l'intervalle ayant la plus grande précision sur l'estimation de la durabilité du béton et la méthode du percentile boostrap par biais sera conservée pour la suite de l'étude.

4.3. Application de la stratégie d'optimisation d'un plan d'essais accélérés avec deux niveaux de stress

Au-delà de la détermination de la durée de vie en condition normale, le formalisme associé au plan d'essais accéléré rend possible la recherche d'un plan optimal. Dans les paragraphes qui suivent nous allons montrer l'influence du choix des niveaux de stress sur la qualité de l'information extraite des données des essais, plus précisément sur la précision et la robustesse de l'estimation de la durée de vie.

4.3.1. Choix du meilleur plan d'essais : analyse des critères d'optimisation

Dans le présent paragraphe, nous comparons deux plans d'essais différents afin d'illustrer l'importance du choix des niveaux de stress dans le calcul précis d'une durée de vie. Plusieurs critères d'optimalité seront également confrontés pour en retenir le plus adapté. Le premier plan d'essais, noté SI1, est constitué d'un stress S_1=300 Pa (0,3% Patm) et d'un autre S_2=20000 Pa (20 % Patm). Pour le deuxième plan d'essais (SI2) ; le stress $S_1 = S_0$ =30 Pa (0,03% Patm) et $S_2 = S_{max}$=50000 Pa (50%Patm).

a) Paramètres et contraintes du plan d'essais

Le problème d'optimisation se pose en termes de maximisation de la qualité de l'estimation de la durée de vie ; c'est la fonction objectif (voir §3.2.2.). Les contraintes du problème s'expriment quant à elles en termes de coût total des essais à ne pas dépasser C_{ADT}, de temps maximal de la campagne d'essais T_{ADT} et/ou du nombre total d'échantillons disponibles pour les essais N_{ADT}. Dans les exemples à suivre, nous avons fixé arbitrairement C_{ADT} = 1100 unités de coût (UC), T_{ADT} = 12 mois et N_{ADT} = 60 éprouvettes.

Les autres paramètres du problème sont le coût unitaire de chaque mesure C_{mea} (fixé ici à 2 Unités de Coût (UC) /mesure), le coût unitaire de chaque échantillon C_{sam} (fixé à 15 UC/échantillon) et le coût d'utilisation des dispositifs d'essais par unité de temps C_{op} (fixé à 10 UC/ unité de temps), le temps pouvant être exprimé en jours, semaines, mois, …

Les coûts donnés ici le sont à titre d'exemple, pour montrer l'impact du coût dans le plan d'essais. Notons que pour les essais destructifs, on fixera un nombre minimal d'éprouvettes

de béton à tester pour chaque temps de mesure n_{min} =3 éprouvettes. Ainsi, si l'une des trois mesures échoue, il reste encore deux échantillons pour calculer la dégradation moyenne à ce moment d'essai.

L'algorithme d'optimisation permettant de trouver le meilleur plan optimisé en intégrant les contraintes de coût total des essais est donné à l'annexe 3. On retrouvera en annexe 4 le même algorithme sans les contraintes de coût.

Dans les tableaux qui suivent sont synthétisés les plans d'essais optimaux avec ou sans contraintes de coût pour les deux configurations d'essais destructifs ou non destructifs. Les plans optimaux obtenus à partir des trois critères d'optimalité (C-, D-, A-), présentés dans la section 3.2.2, sont confrontés dans ces tableaux.

Les plans optimaux sont présentés en termes de :

- Répartition des N_{ADT} échantillons initiaux entre les deux niveaux de stress, N_1 et N_2 (également explicités entre parenthèses en termes de proportions p_1 et p_2 de la population des N éprouvettes finalement testées) ;
- De fréquences f_1 et f_2 (en mois), de nombres (d'instants) de mesures m_1 et m_2 et de nombre d'éprouvettes f_1 et f_2 testées à chaque instant de mesure, aux niveaux S_1 et S_2 de stress ;
- De durée totale des essais (en mois), définie comme le maximum entre $f_1.m_1$ et $f_2.m_2$;
- Et, du coût final total de la campagne d'essais en unités de coût.

On donnera également dans ces tableaux :

- La valeur de l'indicateur d'optimalité au plan d'essais optimal (variance asymptotique minimale associée à la C-optimalité, le déterminant de la matrice de Fisher maximal pour la D-optimalité et la trace minimale de l'inverse de la matrice de Fisher pour l'A-optimalité) ;
- L'intervalle de confiance (à 95%) de l'estimation de la durée de vie, en années ;
- Enfin, la précision obtenue sur l'estimation dans la limite des contraintes d'optimisation.

Stress		S1=0,3% Patm, S2=20 % Patm			S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm		
Critères d'optimalité		C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité	C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité
$N_1(p_1)$		39(66%)	28(48%)	32(55%)	35(59%)	26(44%)	32(55%)
$N_2(p_2)$		20(34%)	30(52%)	26(45%)	24(44%)	33(56%)	26(45%)
N éprouvettes		59	58	58	59	59	58
f_1		1	1	1	1	1	1
f_2		3	3	1	2	2	1
m_1		3	2	8	5	2	8
m_2		2	3	2	2	3	2
n_1		13	14	4	7	13	4
n_2		10	10	13	12	11	13
Durée totale des essais		6 mois	9 mois	8 mois	5 mois	6 mois	8 mois
Coût (unité de coût)		1063 uc	1076 uc	1066 uc	1053 uc	1063 uc	1066 uc
Indicateur d'optimalité	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$	187,8	5,53e+32	2,26e-2	116,8	1,13e+34	6,8e-3
	$\det(I(\Theta))$	209,5	7,37e+32	2,11e-2	123,5	1,68e+34	7e-3
	$\mathrm{trace}(I^{-1}(\Theta))$	203,1	3,08e+32	2,01e-2	118,2	8,42e+33	6,7e-3
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)		[42,5; 96,3]	[41 ; 97,8]	[41,5; 97,4]	[48,2; 90,6]	[47,7; 91,2]	[48,1; 90,7]
Précision ε		38,9%	41,1%	40,5%	30,7%	31,6%	30,9%

Tableau 4.2. Plans d'essais optimisés avec contraintes de coût (essais destructifs)

Stress		S1=0,3% Patm, S2=20 % Patm			S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm		
Critères d'optimalité		C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité	C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité
$N_1(p_1)$		39(66%)	26(44%)	33(56%)	33(56%)	26(44.1%)	32(55.1%)
$N_2(p_2)$		20(34%)	33(56%)	26(44%)	26(44%)	33(55.9%)	26(44.9%)
N éprouvettes		59	59	59	59	59	59
f_1		1	1	1	1	1	1
f_2		6	4	1	6	4	1
m_1		3	2	11	11	2	11
m_2		2	3	2	2	3	2
n_1		13	13	3	3	13	3
n_2		10	11	13	13	11	13
Durée totale des essais		12 mois	12 mois	11 mois.	11 mois	12 mois	11 mois
Indicateur d'optimalité	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$	185,6	5,85e+32	2,26e-3	113	8,10e+33	6,5e-3
	$\det(I(\Theta))$	217,3	7,83e+32	2,11e-2	123,2	1,7e+34	7e-3
	$\mathrm{trace}(I^{-1}(\Theta))$	200,1	2,73e+32	1,95e-2	115,4	7,6e+33	6,5e-3
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)		[42,7; 96,1]	[40,5; 98,3]	[41,7; 97,1]	[48,6; 90,3]	[47,7; 91,2]	[48,4; 90,5]
Précision ε		38,7%	41,9%	40,2%	30,2%	31,6%	30,5%

Tableau 4.3. Plans d'essais optimisés sans contraintes de coût (essais destructifs)

Stress		S1=0,3% Patm, S2=20 % Patm			S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm		
Critères d'optimalité		C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité	C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité
$N_1(p_1)$		16(73%)	11(50%)	11(50%)	23(88%)	11(50%)	11(50%)
$N_2(p_2)$		6(27%)	11(50%)	11(50%)	3(12%)	11(50%)	11(50%)
N éprouvettes		22	22	22	26	22	22
f_1		1	1	1	1	1	1
f_2		1	1	1	1	1	1
m_1		12	12	8	12	12	12
m_2		12	12	2	2	12	12
Durée totale des essais		12 mois	12 mois	8 mois.	12 mois	12 mois	12 mois
Coût (unité de coût)		978 uc	978 uc	630 uc	1074 uc	978 uc	978 uc
Indicateur d'optimalité	$\mathrm{Avar}(\widehat{T}_{MTTF})$	38,1	1,18e+40	4,9e-3	17,2	4,64e+39	13,9e-3
	$\det(I(\Theta))$	44,1	1,50e+40	3,9e-3	24,1	4,50e+40	1,3e-3
	$\mathrm{trace}(I^{-1}(\Theta))$	93,3	1,08e+38	14,6e-3	24,1	4,50e+40	1,3e-3
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)		[57,3; 81,5]	[56,4 ; 82,4]	[50,5; 88,3]	[61,3; 77,6]	[59,8; 79]	[59,8; 79]
Précision ε		17,6%	18,9%	27,5%	11,8%	14%	14%

Tableau 4.4. Plans d'essais optimisés avec contraintes de coût (essais non destructifs)

Stress		S1=0,3% Patm, S2=20 % Patm			S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm		
Critères d'optimalité		C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité	C-optimalité	D-optimalité	A-optimalité
$N_1(p_1)$		44(75%)	29(49%)	30(51%)	56(95%)	29(49%)	30(51%)
$N_2(p_2)$		15(25%)	30(51%)	29(49%)	3(5%)	30(51%)	29(49%)
N éprouvettes		59	59	59	59	59	59
f_1		1	1	1	1	1	1
f_2		1	1	1	1	1	1
m_1		12	12	12	12	12	12
m_2		12	12	12	2	12	12
Durée totale des essais		12 mois	12 mois.	12 mois.	12 mois	12 mois	12 mois
Indicateur d'optimalité	$\mathrm{Avar}(\widehat{T}_{MTTF})$	14,2	5,87e+41	1,9e-3	7,5	1,74e+42	6,13e-4
	$\det(I(\Theta))$	16,6	7,78e+41	1,4e-3	9	2,32e+42	4,7e-4
	$\mathrm{trace}(I^{-1}(\Theta))$	16,3	7,78e+41	1,4e-3	8,9	2,32e+42	4,7e-4
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)		[62; 76,8]	[77,4 ; 61,4]	[77,3; 61,5]	[64; 74,8]	[63,5; 75,3]	[63,6; 75,3]
Précision ε		10,7%	11,6%	11,5%	7,8%	8,61%	8,5%

Tableau 4.5. Plans d'essais optimisés sans contraintes de coût (essais non destructifs)

En confrontant les résultats des tableaux 4.2 et 4.3, essais destructifs avec ou sans contrainte de coût total, on constate que cette contrainte financière étant "supprimée", c'est la contrainte sur le temps total d'essai qui contrôle la définition du plan optimal. La campagne d'essais pourra durer plus longtemps pour atteindre la limite fixée des 12 mois. Pour les essais destructifs, les éprouvettes sont testées une seule fois et, donc, la part du

coût total associée au nombre d'éprouvettes finalement testées, N, vaut $\mathrm{N} \times (\mathrm{C_{sam}} + \mathrm{C_{mea}})$. Le nombre N donné par la résolution du problème d'optimisation ne variant presque pas entre les deux situations (58 à 59 éprouvettes) avec ou sans contrainte de budget, le coût total ne variera qu'en fonction de la durée de la campagne d'essais. Le coût d'utilisation des dispositifs d'essais par unité de temps étant relativement faible, on observe au final une légère diminution du prix des essais partant de la situation (SI1) à (SI2) ; l'écart entre les moyennes est de 7,67 UC. Dans le même temps, la précision de l'estimation est améliorée de 9,1% en moyenne entre les deux situations pour le plan d'essais avec contraintes de coût (tableau 4.2) et de 9,5 % pour le plan d'essais sans contraintes de coût (tableau 4.3).

Pour ce qui concerne les essais non destructifs (tableaux 4.4 et 4.5), la confrontation des résultats entre situation avec et sans contrainte de budget amène à des conclusions qui différent un peu. Tout d'abord dans la mesure où la part du coût total des essais liée au nombre d'éprouvettes vaut cette fois ci $N \times C_{sam} + C_{mea}(N_1 \times m_1 + N_2 \times m_2)$ (les essais sont en effet répétés f_i x m_i fois, car non destructifs), alors, pour une contrainte de budget imposée, le nombre d'échantillons à tester va diminuer par rapport aux essais destructifs (on passe globalement de 59 éprouvettes à 22). Cette diminution du nombre d'éprouvettes ne réduisant toutefois pas la précision de l'estimation car au final le nombre d'essais non destructifs réalisés sera plus important que le nombre d'essais destructifs (par exemple, pour le scénario SI1, avec C-optimalité et contrainte de budget, 59 mesures destructives seront réalisées contre 312 mesures non destructives). Quand la contrainte sur le budget est "supprimée", le nombre d'essais non destructifs augmente car le nombre d'éprouvettes utilisées est de 59 et 708 mesures seront réalisées. Au final, pour les essais non destructifs, on passe de 276 mesures à 708 mesures quand on supprime la contrainte de budget.
Pour le cas des essais non destructifs avec contraintes de coût, la précision est améliorée et passe d'une moyenne de 21,33% à 13,26% entre la situation (SI1) et (SI2). Pour le cas des essais non destructifs sans contraintes de coût, la précision est aussi améliorée et passe d'une moyenne de 11,26% à 8,30% entre la situation (SI1) et (SI2).
On remarque qu'entre les situations (SI1) et (SI2) des tableaux (4.2 à 4.5), la précision sur l'estimation de l'intervalle de confiance de la durée de vie du béton est meilleure dans la situation (SI2). Pour les essais avec contraintes de coût, on observe aussi une diminution du temps des mesures pour la situation (SI2). L'objectif de notre travail étant de déterminer la durabilité du béton avec le plan d'essais qui est le plus optimal (en termes de nombre d'essais, de temps d'essais et de coût), nous choisissons de garder la situation (SI2) comme plan d'essais pour la suite du travail. On peut aussi conclure que le meilleur plan d'essais avec 2 stress est celui avec un stress minimal $S_{\min}$ proche ou égal aux

conditions normales d'environnement et un stress maximal proche ou égal au stress maximal $S_{\max}$.

Pour ce qui est de la confrontation des plans d'essais déterminés à partir des différentes variantes d'optimalité (C-, D- et A-), on peut constater pour chaque cas, avec ou sans contrainte de budget, essais destructifs ou non destructifs, que la solution du problème d'optimisation peut différer. Le critère d'optimalité à retenir dépend des indicateurs de robustesse sélectionnés. Dans notre démarche, nous considérons que le plan optimal est celui qui aboutit à l'intervalle de confiance le moins étendu (ou à la meilleure précision).

L'intervalle de confiance de la durée de vie (ou temps de défaillance) $\hat{T}_{MTTF}$ est calculée selon la formule :

$$[\hat{T}_{MTTF,M} - z_{(1-\phi)/2}\sqrt{Avar(\hat{T}_{MTTF,M})},\ \hat{T}_{MTTF,M} + z_{(1-\phi)/2}\sqrt{Avar(\hat{T}_{MTTF,M})}] \qquad (4.21)$$

La précision est obtenue à travers l'encadrement de $\hat{T}_{MTTF}$ par $(1-\varepsilon)T_{MTTF} \leq \hat{T}_{MTTF,M} \leq (1+\varepsilon)T_{MTTF}$. Le calcul de l'intervalle de confiance se fait avec un seuil de confiance $\phi = 0.95$. L'intervalle de confiance étant proportionnel à la variance asymptotique qui est directement inscrite dans le critère lié à la C-optimalité, c'est ce critère d'optimalité qui sera retenu comme le plus pertinent par la suite. Les tableaux 4.2 à 4.5 appuient cette affirmation.

b) Plan d'essais optimisé avec l'échelle de temps $\sqrt{t}$

Les fréquences de mesure des plans optimaux présentés dans les études précédentes sont considérées comme constantes. On sait toutefois que le processus de carbonatation n'est pas linéaire en fonction du temps. Les pentes du phénomène de dégradation sont plus fortes en début de processus pour diminuer par la suite. Il semblerait donc plus pertinent de concentrer les mesures dans les premiers temps d'essais pour saisir une plus grande quantité / qualité d'informations relatives au processus. Ainsi, nous proposons ici de rechercher les temps (ou fréquences) de mesures d'un plan optimal en utilisant l'échelle de temps transformée $\sqrt{t}$. Les résultats obtenus seront comparés à ceux déterminés avec l'échelle de temps normal. Dans les simulations qui suivent la contrainte de coût total de la campagne d'essais C_{ADT} est modifiée ; elle vaut 550 UC (contrainte de coût pouvant avoir un impact sur le plan d'essais). Les autres contraintes et paramètres du problème sont par contre conservés.

Stress	S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm (SI_2)
Critères	C-optimalité
$N_1(p_1)$	12(50%)
$N_2(p_2)$	12(50%)
N éprouvettes	24
f_1	1
f_2	1
m_1	9
m_2	4
n_1	4
n_2	6
Durée totale des essais	9 mois
Coût (unité de coût)	464 uc
Indicateur d'optimalité $\mathrm{Avar}(\widehat{T}_{MTTF})$	45,5
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)	[58,3 ; 80,5]
Précision	15,9%

Tableau 4.6. Plans d'essais optimisés avec contraintes de coût (essais destructifs)

Stress	S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm (SI_2)
Critères	C-optimalité
$N_1(p_1)$	33(56%)
$N_2(p_2)$	26(44%)
N éprouvettes	59
f_1	1
f_2	1
m_1	9
m_2	4
n_1	11
n_2	13
Durée totale des essais	9 mois
Indicateur d'optimalité $\mathrm{Avar}(\widehat{T}_{MTTF})$	18,4
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)	[62,3 ; 76,5]
Précision	10,18%

Tableau 4.7. Plans d'essais optimisés sans contraintes de coût (essais destructifs)

Stress	S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm (SI_2)
Critères	C-optimalité
$N_1(p_1)$	9(75%)
$N_2(p_2)$	3(25%)
N éprouvettes	12
f_1	1
f_2	1
m_1	9
m_2	9
Durée totale des essais	9 mois
Coût (unité de coût)	486 uc
Indicateur d'optimalité $\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})^1$	68,7
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)	[55,8 ; 83]
Précision	19,6%

Tableau 4.8. Plans d'essais optimisés avec contraintes de coût (essais non destructifs)

Stress	S1=0,03% Patm, S2=50 % Patm (SI_2)
Critères	C-optimalité
$N_1(p_1)$	56(95%)
$N_2(p_2)$	3(5%)
N éprouvettes	59
f_1	1
f_2	1
m_1	9
m_2	9
Durée totale des essais	9 mois
Indicateur d'optimalité $\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})^1$	21,4
Estimation de la durée avec intervalle de confiance (année)	[61,8 ; 77]
Précision	10,97%

Tableau 4.9. Plans d'essais optimisés sans contraintes de coût (essais non destructifs

En confrontant les résultats des tableaux 4.2 et 4.3, et ceux des tableaux 4.6 et 4.7 pour les essais destructifs avec contraintes de coût et concernant le critère de C-optimalité, on constate une diminution du nombre d'éprouvettes qui passe de 59 pour les essais avec l'échelle de temps t à 24 pour l'échelle de temps $\sqrt{t}$. Cela s'explique par le changement d'échelle permettant avec un nombre d'éprouvettes réduits d'avoir le maximum d'information sur le phénomène de carbonatation pour les premiers temps de mesures. Au niveau de la précision sur la durabilité, on passe de 30,7% pour l'échelle de temps t à 15,9% à l'échelle $\sqrt{t}$. Concernant le cas sans contraintes de coût, le nombre d'éprouvettes

est de 59, en revanche la précision est de 30,2% pour l'échelle de temps t et de 10,18% pour l'échelle de temps $\sqrt{t}$.

En confrontant les résultats des essais non destructifs, tableaux 4.4 et 4.5, et, tableaux 4.8 et 4.9, on constate qu'avec les contraintes de coût, le nombre d'éprouvettes passe de 26 pour l'échelle de temps t à 12 pour l'échelle de temps $\sqrt{t}$. Cependant la précision est meilleure pour l'échelle de temps t : 11,8% par rapport à celle de l'échelle $\sqrt{t}$: 19,6%. Pour les essais sans contraintes de coût, le nombre d'éprouvettes égal à 59 ne change pas. Concernant la précision ; elle est meilleure pour l'échelle de temps t :7,8% par rapport à celle de l'échelle de temps $\sqrt{t}$: 10,97%. Cela s'explique par le fait qu'avec l'échelle de temps t le temps de mesures est égal à 12 mois ; ce qui apporte 3 mesures de plus qui contribuent à améliorer la précision par rapport à l'échelle de temps $\sqrt{t}$ avec un temps de mesures égal à 9. Toutes fois, il est important de tenir compte aussi de l'impact de la modification de la contrainte de coût sur les résultats obtenus et qui contribue a avoir des résultats qui défèrent de ceux que l'on peut avoir avec une contrainte de coût égale pour la prise en compte ou non du changement d'échelle de temps.

4.3.2. Analyse des effets des stress

L'objectif de l'optimisation du plan d'essais est lié à la minimisation de la variance asymptotique de la durée de vie $\hat{T}_{MTTF}$. Le critère de C-optimalité reste le plus pertinent pour le choix du meilleur plan d'essais optimisé. Dans ce paragraphe une analyse des valeurs limites des niveaux de stress est réalisée.

Une première analyse consiste à étudier l'effet du niveau de stress le plus faible du plan d'essais. La limite supérieure du niveau de stress est fixée à S_2=20000=20 % Patm. La limite inférieure S_1=30 Pa =0,03% Patm à 300 Pa=0,3% Patm. Les paramètres de coût restent les mêmes que ceux définis au début du chapitre avec un changement de Cop (fixé à 8 UC/unité de temps). En utilisant un Cop=8 UC/unité de temps, permet de voir l'impact de ce paramètre au niveau du coût final (ou budget) allouer aux essais.
Le tableau 4.10 ainsi que la figure 4.4 montre que la valeur du critère de C-optimalité augmente à mesure que le stress inférieur augmente, et que le plan optimal change avec les différents niveaux de stress inférieurs. Ces observations confirment celles données dans la section précédente et nous amènent à conclure que le meilleur plan d'essais optimisé est obtenu avec le plus petit stress S_1=30 Pa =0,03% Patm.
D'un point de vue pratique, ces résultats nous permettent de conclure que l'utilisation d'un plan d'essais partiel à stress constant ("partiel", parce que le niveau de stress inférieur est celui appliqué à des conditions nominales ou de service) est plus appropriée.

Nous complétons l'analyse des valeurs limites des niveaux de stress par l'étude de l'effet du niveau de stress supérieur du plan d'essais. Le stress inférieur est fixé à S_1= 300 Pa=0,3% Patm et le stress supérieur S_2 varie de 20000 Pa =20 % Patm à 50000 Pa =50 % Patm.

Les résultats sont résumés dans le tableau 4.11. Nous observons que les valeurs du critère de C-optimalité diminuent à mesure que le stress supérieur augmente. Par rapport à la dernière rangée du tableau 4.11 (correspondant à S_1= 300 Pa=0,3% Patm), nous notons que la valeur du stress supérieur n'affecte pas les caractéristiques du plan optimal (f_1= 1, f_2= 4, m_1= 3, m_2= 2, n_1= 13, n_2= 10). Ces résultats avec ceux du tableau 4.10, confirment qu'un P-CSADT (Plan d'essais Accélérés à Stress Constant Partiel) avec le stress supérieur le plus élevé possible doit être choisi.

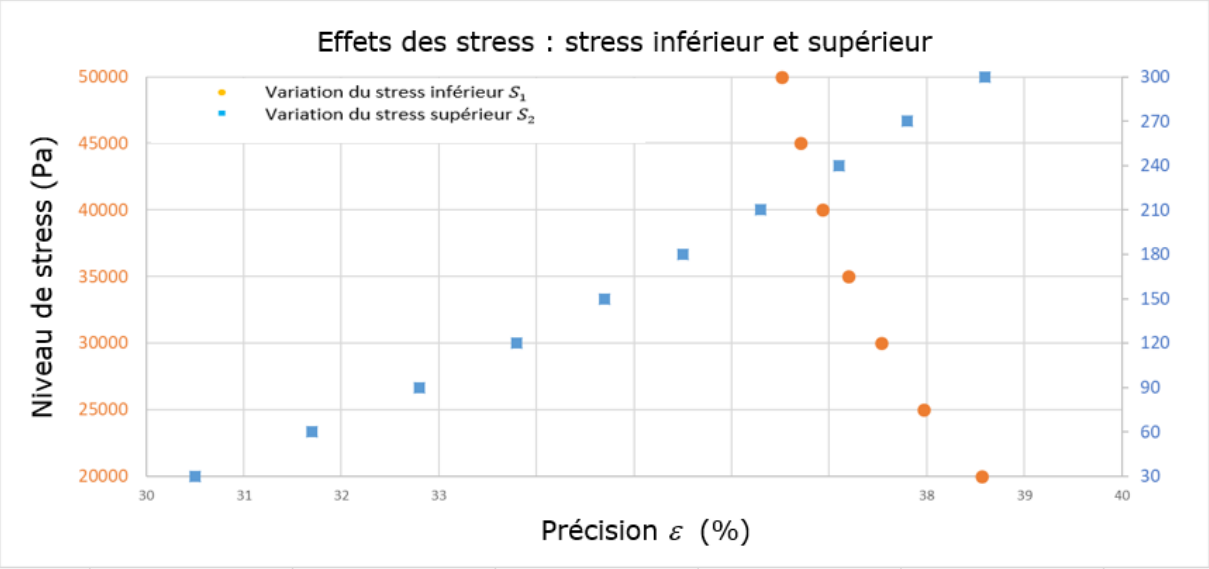


Figure 4.4. Représentation des effets des niveaux des stress sur l'exactitude de l'estimation

S_1(Pa)	$N_1(p_1\ \%)$	$N_2(p_2\ \%)$	N	f_1	f_2	m_1	m_2	n_1	n_2	Durée des essais (mois)	Coût (UC)	$Avar(\hat{T}_{MTTF})$	Précision
30	35(59.3)	24(40.7)	59	1	2	7	2	5	12	7	1091	117.2	30.5
60	35(59.3)	24(40.7)	59	1	3	5	2	7	12	6	1091	126.5	31.7
90	35(59.3)	24(40.7)	59	1	3	5	2	7	12	6	1091	135.2	32.8
120	35(59.3)	24(40.7)	59	1	3	5	2	7	12	6	1091	143.5	33.8
150	35(59.3)	24(40.7)	59	1	3	5	2	7	12	6	1091	151.5	34.7
180	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	158.7	35.5
210	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	165.7	36.3
240	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	172.8	37.1
270	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	179.8	37.8
300	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	186.8	38.6

Tableau 4.10. Plans d'essais avec la variation du stress S_1 ($S_2 = 50000\ Pa = 50\%\ Patm$) (essais destructifs)

S_2(Pa)	$N_1(p_1\ \%)$	$N_2(p_2\ \%)$	N	f_1	f_2	m_1	m_2	n_1	n_2	Durée des essais (mois)	Coût (UC)	$Avar(\hat{T}_{MTTF})$	Precisionε
20000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	186.8	38.6
25000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	181.1	38.0
30000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	177.02	37.5
35000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	173.9	37.2
40000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	171.3	36.9
45000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	169.3	36.7
50000	39(66.1)	20(33.9)	59	1	4	3	2	13	10	8	1091	167.5	36.5

Tableau 4.11. Plan d'essais avec la variation du stress S_2 ($S_1 = 300\ Pa = 0{,}3\%\ Patm$, (essais destructifs)

Après avoir montré l'influence des valeurs des stress sur le plan d'essais optimisé, il est important de voir aussi l'influence du temps d'essais sur le plan optimal.

4.3.3. Effets de la contrainte de temps

Les durées des essais obtenues dans la section précédente varient de 6 à 12 mois. Mais, même s'ils sont accélérés, ces essais pourraient être jugés trop longs en ce qui concerne les contraintes de temps industrielles. Dans cette section, nous étudions l'effet de la réduction du temps d'essai. Ce temps va varier de 4 à 24 semaines (S), les paramètres de coût et la contrainte de taille de l'échantillon (60 échantillons) sont les mêmes que ceux définis à la section précédente. Plus précisément, nous voulons voir si, pour une contrainte de temps de test plus courte, nous trouvons des résultats différents de ceux obtenus avec le plan d'essais optimisé (SI2) (S_1=0,03% Patm, S_2=50000 Pa=50 % Patm) et un temps d'essais $\mathbf{T_{ADT}}$ = 12 mois.

On observe dans le tableau 4.12 que si la durée $\mathbf{T_{ADT}}$ (S) diminue, le stress inférieur optimal n'est plus le niveau de stress nominal tel que suggéré pour une plus longue durée de test et P-CSADT (Plan d'essais Accélérés à Stress Constant Partiel) (SI2) n'est plus le plan optimal. En effet, sur un court laps de temps d'essai, les tests effectués dans des conditions nominales ne donnent pas suffisamment d'informations sur le processus de dégradation car ce dernier commence à peine à un faible niveau de stress pendant une courte période. C'est pourquoi il semble plus logique d'augmenter le niveau de stress afin de recueillir des informations plus importantes sur le processus de dégradation.

$\mathbf{T_{ADT}}$(S)	f_1	f_2	m_1	m_2	Durée des essais (mois)	n_1	n_2	N	S_1 (Pa)	S_2(Pa)	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$	Precision
4	1	1	4	4	4	7	7	56	600	50000	412.1	52.9
6	1	1	6	4	6	6	6	60	200	50000	401.0	52.6
8	1	1	8	6	8	5	3	58	100	50000	389.9	52.2
12	1	2	12	6	12	4	2	60	60	50000	367.7	51.4
16	1	2	12	6	16	4	2	60	30	50000	345.5	50.5
20	1	3	12	6	18	4	2	60	30	50000	323.3	49.3
24	1	4	12	6	24	4	2	60	30	50000	301.1	48.0

Tableau 4.12. Variation de la contrainte de temps TADT (essais destructifs)

Après avoir déterminé le meilleur plan d'essais optimisé, il est possible d'utiliser les paramètres de ce plan dans le but de trouver un nombre minimum d'essais à réaliser en prenant en compte un seuil de confiance et une précision sur l'encadrement de la durée de vie du béton.

4.3.4. Taille d'échantillon : variation du seuil de confiance et de la précision sur la durée de vie

Dans le chapitre 3, (sous-section 3.3.3) on explique comment on peut définir la taille d'échantillon N avec des critères d'encadrement de la durée de vie du béton estimée. Ces critères sont : une précision ε $(0 < \varepsilon < 1)$ et un seuil de confiance ϕ sur l'encadrement de la durée de vie.

En utilisant les résultats obtenus dans la sous-section 4.3.1, il est question de déterminer la taille d'échantillon en variant la précision ε $(0 < \varepsilon < 1)$ pour un seuil de confiance ϕ donné pour le cas des essais destructifs et non destructifs.

Pour le cas des essais destructifs ; en utilisant les résultats du tableau 4.2 pour le plan d'essais (SI2) (S_1=0,03% Patm, S_2=50000 Pa=50 % Patm), avec un seuil de confiance = $0{,}95$, on obtient les résultats du tableau 4.13.

	Critères d'optimisation	C-Optimalité	
	Stress	Stress 1	Stress 2
$\varepsilon = 0{,}1$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	323	221
	Éprouvettes	544	
$\varepsilon = 0{,}2$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	81	55
	Éprouvettes	61	
$\varepsilon = 0{,}3$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	36	25
	Éprouvettes	136	
$= 0{,}4$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	20	14
	Éprouvettes	34	
$\varepsilon = 0{,}5$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	13	9
	Éprouvettes	22	
$\varepsilon = 0{,}6$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	9	7
	Éprouvettes	16	
$\varepsilon = 0{,}7$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	7	5
	Éprouvettes	12	
$\varepsilon = 0{,}8$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	5	4
	Éprouvettes	9	
$\varepsilon = 0{,}9$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	4	3
	Éprouvettes	7	

Tableau 4.13. Taille de l'échantillon en fonction de la précision (essais destructifs)

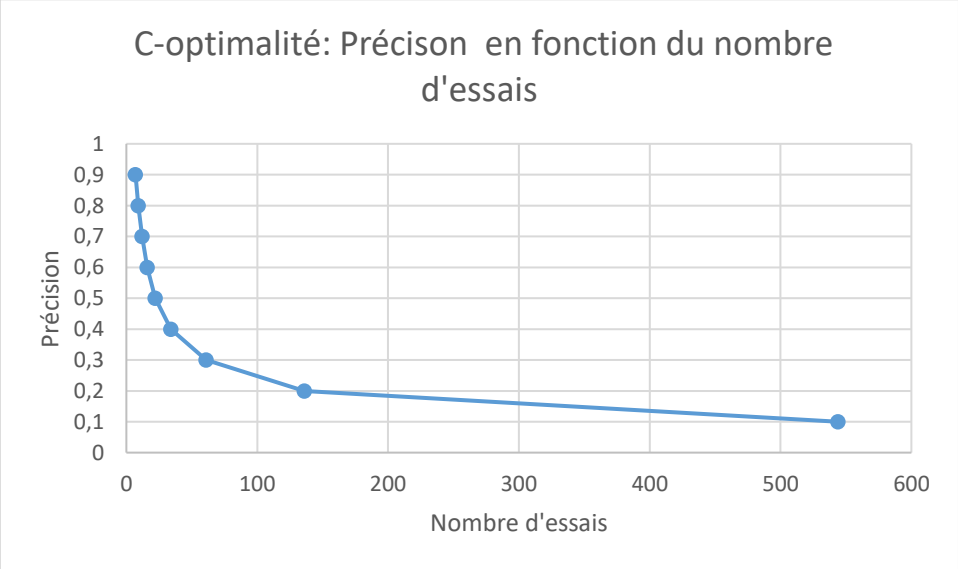


Figure 4.5. Évolution de la précision en fonction de la taille d'échantillon

Pour le cas des essais non destructifs ; en utilisant les résultats du tableau 4.4 pour le plan d'essais (SI2) (S_1=0,03% Patm, S_2=50000 Pa=50 % Patm), avec un seuil de confiance = $0{,}95$, on obtient les résultats du tableau 4.14.

	Critères d'optimisation	V-Optimalité	
	Stress	Stress 1	Stress 2
$\varepsilon = 0{,}1$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	31	2
	Éprouvettes	33	
$\varepsilon = 0{,}2$	$(N_1(p_1), N_2(p_2)$	8	1
	Éprouvettes	9	

Tableau 4.14. Taille de l'échantillon en fonction de la précision (essais non destructifs)

A retenir :

Pour le cas des essais destructifs, le tableau 4.13 et la figure 4.5 montrent que pour une précision $\varepsilon = 0{,}2$ la taille d'échantillon trouvée est égale à 136 éprouvettes. Cette quantité étant très élevée et pour des raisons pratiques, il est préférable de choisir une précision $\varepsilon = 0{,}6$ qui correspond à une taille d'échantillon égale à 16. Toutefois, il faut comprendre qu'avec une précision $\varepsilon = 0{,}2$, l'intervalle d'estimation de la durée de vie du béton ($[(1-\varepsilon)T_{MTTF}, (1-\varepsilon)T_{MTTF}]$) est très réduit ([55,6 ; 83,4] ans) par rapport à une précision $\varepsilon = 0{,}6$ avec un intervalle égal à ([27.8 ; 111,2] ans).

Pour le cas des essais non destructifs, on constate qu'avec une précision de $\varepsilon = 0{,}2$, la taille d'échantillon est égale à 9. Cela permet de conclure qu'avec les essais non destructifs, les mesures sont beaucoup plus précises ce qui entraine aussi une diminution de l'échantillon pour les essais (nombre d'éprouvettes).

Après avoir trouvé la taille d'échantillon pour la réalisation des essais, il est important de s'interroger sur la sensibilité des paramètres des modèles (Hyvert et Wiener) utilisées dans cette thèse.

4.4. Analyse de sensibilité

4.4.1. Analyse de sensibilité avec les paramètres du modèle de Hyvert

Dans cette partie nous allons étudier la sensibilité du modèle d'Hyvert en jouant sur la variabilité de ces paramètres. Parmi les paramètres du modèle, seulement trois (tableau 4.15) sont définies par leurs lois de distribution et caractéristiques (moyenne et écart-type). Le reste des paramètres sont déterministes (tableau 3.1). Ici, on reprend les deux stress utilisés pour générer les données (S_1=300 Pa (0,3% Patm[13]) et S_2=20000 Pa (20 % Patm). Les différentes combinaisons sont sur les variances des trois paramètres ; $(1+\varepsilon_1)err1, (1+\varepsilon_2)f_{cm,28}, (1+\varepsilon_4)K_e$ sont réalisées et les données générées permettant d'estimer les paramètres ($\mu_\alpha, \sigma_\alpha, \beta, \sigma_B$) du processus de Wiener.

Paramètres	Unités	Description	Moyenne	Ecart-type	Lois de distribution
$err1$	-	Erreur d'estimation de $\left(\frac{D^o_{CO2}}{Q1}\right)_{ref}$	0,84	0,52	Lognormale
$f_{cm,28}$	MPa	Compressive strength of the concrete	35	2	Lognormale
K_e	-	Paramètre prenant en compte les conditions environnementales	1	0,1	Normale

Tableau 4.15. Paramètres du modèle d'Hyvert définis par leurs lois de distribution

ε_1(%)	ε_2(%)	ε_3(%)	μ_α	$\hat{\sigma}_\alpha$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_B$
5%	5%	5%	0,0047328	0,0014339	1,6341	0,0005288
5%	0	0	0,0049846	0,0015645	1,5895	0,00052447
5%	-5%	-5%	0,0050472	0,0015046	1,5827	0,00055147
0	5%	0	0,0051059	0,0015516	1,5317	0,00052458
0	-5%	5%	0,0052518	0,0014578	1,4747	0,00051298
-5%	5%	-5%	0,0046737	0,001358	1,6563	0,00052619
-5%	0	5%	0,0048115	0,0014031	1,6542	0,00052477
-5%	-5%	0	0,0051151	0 ,0015486	1,5594	0,00053397
0	0	0	0,0048358	0,0015086	1,6325	0,0005178

Tableau 4.16. Estimations des paramètres du processus de Wiener avec les différentes combinaisons sur la variance des paramètres du modèle d'Hyvert

[13] Patm : pression atmosphérique

On remarque à travers les différentes combinaisons du tableau 4.16 que les résultats des paramètres du processus de Wiener changent en fonction de la variance des paramètres du modèle d'hyvert qui a permis de générer les données utilisées pour leur estimation.
Avec ces résultats, on constate qu'il y a une forte influence des variances des paramètres du modèle d'hyvert. Ainsi, il est important de prendre en compte l'importance des données d'entrée et la caractérisation des paramètres primordiaux des modèles. Pour régler ce problème, il faut s'assurer de la représentativité des données d'entrée utilisées pour mettre en place la méthode d'estimation de la durabilité du béton avec un plan d'essais optimisé. Après avoir réalisé l'analyse de sensibilité pourtant sur les données d'entrée avec les paramètres du modèle de Hyvert, on s'interroger sur la sensibilité du plan d'essais en fonctions des paramètres de $\widehat{\Theta}_M$ estimés à partir du processus de Wiener.

4.4.2. Analyse de sensibilité avec les paramètres du processus de Wiener

Intrinsèquement, les paramètres estimés $\widehat{\Theta}_M$ présentent un biais. Il est par conséquent, nécessaire d'étudier l'influence des paramètres estimés sur le plan d'essais optimisé. Ainsi, on note $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ les erreurs d'estimation des paramètres $\mu_\alpha, \sigma_\alpha, \beta, \sigma_B$. En utilisant le plan d'essais optimisé (S_1=0,03% Patm, S_2=50000 Pa=50 % Patm (SI2)) et différentes combinaisons de $(1+\varepsilon_1)\mu_\alpha, (1+\varepsilon_2)\sigma_\alpha, (1+\varepsilon_3)\beta, (1+\varepsilon_4)\sigma_B$, on obtient les résultats des tableaux 4.17-4.20. Les critères de coût utilisés sont : $(\mathrm{C_{ADT}} C_{mea}, C_{op}, C_d) = (1100,2,8,15)$.

ε_1(%)	ε_2(%)	ε_3(%)	ε_4(%)	f_1	f_2	m_1	m_2	Durée des essais	n_1	n_2	N	Coût (UC)	$\mathrm{Avar}(\widehat{T}_{\mathrm{MTTF}})$
5%	5%	5%	5%	1	1	8	3	8	4	9	59	1091	131.3
5%	0	0	0	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	116.8
5%	-5%	-5%	-5%	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	103.1
0	5%	0	-5%	1	1	8	3	8	4	9	59	1091	129.5
0	0	-5%	5%	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	116.7
0	-5%	5%	0	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	101.9
-5%	5%	-5%	0	1	1	8	3	8	4	9	59	1091	129.3
-5%	0	5%	-5%	1	1	8	3	8	4	9	59	1091	113.6
-5%	-5%	0	5%	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	101.6
0	0	0	0	1	2	7	2	7	5	12	59	1091	1157

Tableau 4.17. Plans optimaux sous diverses combinaisons (essais destructifs avec contraintes de coût)

ε_1(%)	ε_2(%)	ε_3(%)	ε_4(%)	f_1	f_2	m_1	m_2	Durée des essais	n_1	n_2	N	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$
5%	5%	5%	5%	1	6	11	2	11	3	13	59	128.4243
5%	0	0	0	1	6	11	2	11	3	13	59	114.3587
5%	-5%	-5%	-5%	1	6	11	2	11	3	13	59	101.5573
0	5%	0	-5%	1	6	11	2	11	3	13	59	126.537
0	0	-5%	5%	1	6	11	2	11	3	13	59	112.6959
0	-5%	5%	0	1	6	11	2	11	3	13	59	100.4417
-5%	5%	-5%	0	1	6	11	2	11	3	13	59	125.8657
-5%	0	5%	-5%	1	6	11	2	11	3	13	59	111.1584
-5%	-5%	0	5%	1	6	11	2	11	3	13	59	99.8346
0	0	0	0	1	6	11	2	11	3	13	59	113.0957

Tableau 4.18. Plans optimaux sous diverses combinaisons (essais destructifs sans contraintes de coût)

ε_1(%)	ε_2(%)	ε_3(%)	ε_4(%)	f_1	f_2	m_1	m_2	Durée des essais	N	Coût (UC)	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$
5%	5%	5%	5%	1	1	12	4	12	26	1094	19.3
5%	0	0	0	1	1	12	4	12	26	1094	16.9
5%	-5%	-5%	-5%	1	1	12	4	12	26	1094	14.8
0	5%	0	-5%	1	1	12	4	12	26	1094	19.1
0	0	-5%	5%	1	1	12	4	12	26	1094	17.0
0	-5%	5%	0	1	1	12	4	12	26	1094	14.9
-5%	5%	-5%	0	1	1	12	4	12	26	1094	19.2
-5%	0	5%	-5%	1	1	12	4	12	26	1094	16.9
-5%	-5%	0	5%	1	1	12	4	12	26	1094	14.1
0	0	0	0	1	1	12	4	12	26	1094	16.9

Tableau 4.19. Plans optimaux sous diverses combinaisons :(essais non destructifs avec contraintes de coût)

ε_1(%)	ε_2(%)	ε_3(%)	ε_4(%)	f_1	f_2	m_1	m_2	Durée des essais	N	$\mathrm{Avar}(\hat{T}_{MTTF})$
5%	5%	5%	5%	1	1	12	12	12	59	7.8723
5%	0	0	0	1	1	12	12	12	59	6.9328
5%	-5%	-5%	-5%	1	1	12	12	12	59	6.0772
0	5%	0	-5%	1	1	12	12	12	59	7.8056
0	0	-5%	5%	1	1	12	12	12	59	6.9555
0	-5%	5%	0	1	1	12	12	12	59	6.098
-5%	5%	-5%	0	1	1	12	12	12	59	7.8266
-5%	0	5%	-5%	1	1	12	12	12	59	6.8913
-5%	-5%	0	5%	1	1	12	12	12	59	6.12
0	0	0	0	1	1	12	12	12	59	6.9262

Tableau 4.20. Plans optimaux sous diverses combinaisons (essais non destructifs sans contraintes de coût)

On constate sur l'ensemble des résultats obtenus dans les tableaux 4.17-4.20 que les différentes combinaisons donnent les mêmes résultats pour un plan d'essais optimisé. (S_1=0,03% Patm, S_2=50000 Pa=50 % Patm (SI2)). On peut alors conclure que le plan d'essais optimisé (SI2) reste robuste pour les différentes situations présentées dans les tableaux 4.18 à 4.20 et pour le cas des plans optimaux concernant les essais destructifs avec contraintes de coût (tableau 4.17) ; on constate que pour la colonne de la fréquence f_1, on a la même valeur égale à 1 pour toutes les combinaisons et pour les autres paramètres (f_2, m_1, m_2 durée des essais, n_1 et n_2), il y a un changement de valeurs selon les combinaisons. Ainsi, afin d'avoir un plan d'essais optimisé stable, il faut des valeurs précises des paramètres à estimer $\widehat{\Theta}_M$.

Ayant montré la robustesse du plan d'essais optimisé (SI2), nous allons voir l'apport d'un troisième stress sur le plan d'essais optimisé. Quel est le constat qui nous amène à proposer un troisième stress ?

4.5. Plan d'essais accélérés optimisé avec trois niveaux de stress

Jusqu'à maintenant nous avons travaillé avec un plan d'essais avec deux stress. Dans cette sous-section, nous allons comparer les résultats d'un plan d'essais optimisé avec deux stress et celui avec trois stress afin de voir l'impact du nombre de stress sur le plan d'essais optimisé. Pour cela, trois scénarii sont proposés :

- (SI1) (S_1=300Pa=0,3% Patm, S_2=20000 Pa=20 % Patm, S_3=40000 Pa=40% Patm),
- (SI2) (S_1=30Pa=0,03% Patm, S_2=25000 Pa=25 % Patm, S_3=50000 Pa=50 % Patm).
- (SI3) (S_1=30Pa=0,03% Patm, S_2=$\varnothing$, S_3=50000 Pa=50 % Patm),

Le cas (SI3) est la référence P-CSADT à deux niveaux. Les contraintes de coût, de temps et de nombre d'éprouvettes sont : $(\mathrm{C}_{\mathrm{ADT}}, C_{mea}, C_{op}, C_d) = (1100, 2, 8, 15)$.

Stress	SI1 (S1=300 Pa, S2=20000 Pa, S3=40000 Pa)	SI2 (S1=30 Pa, S2=25000 Pa, S3=50000 Pa)	SI3 (S1=30 Pa, S2=∅, S3=50000 Pa)
$N_1(p_1)$	35 (59.3%)	35 (59.3%)	39 (66.1%)
$N_2(p_2)$	6 (10.2%)	6 (10.2%)	∅
$N_3(p_3)$	18 (30.5%)	18 (30.5%)	20 (33.9%)
f_1	1	1	1
f_2	1	1	∅
f_3	2	1	4
m_1	5	7	3
m_2	2	2	∅
m_3	2	3	2
Durée des essais	5 mois	7 mois	8 mois
n_1	7	5	13
n_2	3	3	∅
n_3	9	6	10
N	59	59	59
Coût	1091	1099	1091
$Avar(\hat{T}_{MTTF})$	98.9	58.1	115.7
Precision	28,2 %	22.4 %	30.4 %

Tableau 4.21. Plans d'essais optimisés des 3 scénarios (SI1), (SI2) et (SI3)

Il est évident qu'un scénario à trois niveaux est meilleur qu'un scénario à deux niveaux et que plus la plage entre les limites inférieures et supérieures est grande, meilleure est la précision.

À titre d'illustration, entre le scénario à deux niveaux SI3 et le meilleur scénario à trois niveaux SI2, la précision est améliorée d'environ 36%. Il convient également de noter que la durée du test est également légèrement réduite pour les scénarios à trois niveaux. Mais, une question reste sur le choix de la valeur intermédiaire du stress. En effet, il reste à déterminer le stress intermédiaire qui permet d'obtenir le plan d'essais le plus optimal. Pour cela, La limite inférieure et la limite supérieure sont constantes et fixées à S1=$S_{min} = 30$ Pa et S3=$S_{max} = 50000$ Pa, respectivement. On fait varier le stress intermédiaire S2=S_{int} de 30 Pa à 50000 Pa. Les solutions optimales sont résumées dans le tableau 4.21. Seules les valeurs $Avar(\hat{T}_{MTTF})$ et de précision sont montrées ici. En effet, toutes les caractéristiques des plans optimaux (f1, etc., coût) restent constantes avec l'évolution de la valeur de S2. La figure 4.6 complète cette analyse. Nous voyons qu'une valeur optimale du niveau de stress intermédiaire peut être trouvée. Cette valeur optimale est d'environ 10000 Pa. Ici, on obtient une précision d'environ 19 %, soit une amélioration d'environ 60 % (avec le même coût, la taille de l'échantillon et la durée du test) et de 18 % par rapport aux scénarios initiaux SI3 (P-CSADT à deux niveaux) et SI2 (P-CSADT à trois niveaux avec

le niveau de stress intermédiaire équivalence aux limites inférieure à 30 Pa et supérieure à 50000 Pa.

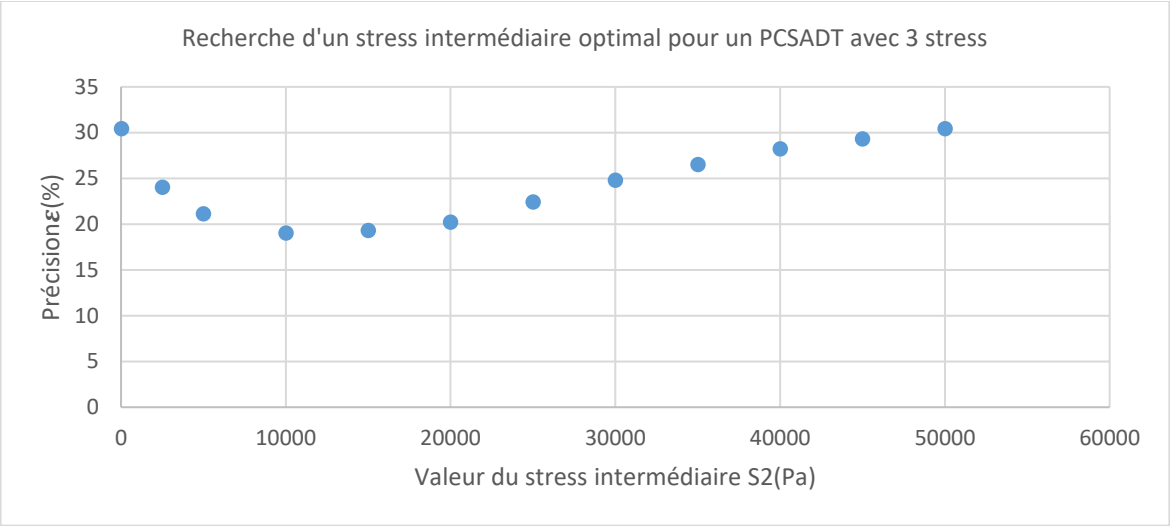


Figure 4.6. Évolution de la précision en fonction du stress intermédiaire S2

Après avoir montré l'amélioration du plan d'essais optimisé avec trois niveaux de stress, nous allons utiliser l'actualisation par approche bayésienne dans le but de réduire les données des essais. Cela sera possible avec l'information *a priori* que l'on peut avoir sur les mesures des essais de carbonatation à partir du modèle de Hyvert.

4.6. Actualisation par approche bayésienne

4.6.1. Détermination des paramètres du processus de Wiener

Cette section décrit les étapes permettant d'obtenir les paramètres qui sont utilisés dans l'actualisation bayésienne du processus de dégradation étudié (carbonatation du béton) :

- la première étape consiste à générer N fois un échantillon (n paquets de trajectoires) de dégradation à partir du modèle de carbonatation de Hyvert; l'objectif est de pouvoir estimer par la suite pour chacun des échantillons les paramètres $(\hat{\mu}_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_B)$ du processus stochastique (voir sous-section 4.2.3). Ces paramètres seront différents pour chaque échantillon. On obtiendra un processus par échantillonnage dont les paramètres sont estimés à partir des échantillons.
- la deuxième étape est consacrée à la transformation iso-probabiliste des distributions des N échantillons en leurs équivalentes "normales",
- la troisième étape sert à estimer pour chaque échantillon les paramètres $(\hat{\mu}_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_B)$ du processus stochastique (processus de Wiener dans notre cas),
- la quatrième étape permet de générer de nouvelles valeurs de dégradation à partir des N échantillons avec le processus de Wiener. Pour cette étape, on utilise les

résultats du plan d'essais optimisé (S1=0,3% Patm, S2=20 % Patm (SI1)/C-optimalité) (voir tableau 4.2, section 4.3.1).

C'est à la fin de cette étape que l'on obtient les lois de distributions *a priori* des paramètres ($\hat{\mu}_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_B$) du processus de Wiener. Les lois de distribution *a priori* des paramètres comme la moyenne μ[14] et la variance s^2 des dégradations sont utilisées dans la partie actualisation bayésienne du processus de dégradation.

4.6.2. Les différentes étapes de l'actualisation bayésienne

L'actualisation bayésienne consiste à faire un tirage des valeurs non observées notées $ynobs$ depuis la distribution *a posteriori* conditionnée aux observations y qui correspondent aux valeurs observées expérimentalement. La formule sur laquelle on s'appuie est la suivante [Gelman et al., 2013]. :

$$p(ynobs|\ y\ ) = \iint p(ynobs|\ \mu, s^2) * p(\mu, s^2|\ y) d\mu ds^2 \tag{4.22}$$

$p(\mu, s^2|\ y)$ est la densité conjointe *a posteriori* ; elle est obtenue par la formule:

$$p(\mu, s^2|\ y) = p(s^2|\ y) * p(\mu|\ s^2, y) \tag{4.23}$$

ou

$$p(\mu, s^2|\ \ y) = p(y|\ \mu, s^2) * p(\mu, s^2) \tag{4.24}$$

$p(\mu, s^2)$ est la loi conjointe *a priori* définie par :

$$p(\mu, s^2) = p(\mu|\ s^2) * p(s^2) \tag{4.25}$$

Afin de pouvoir utiliser l'équation (4.22) et appliquer l'enrichissement bayésien sur les données d'observation, certaines hypothèses doivent être faites :

- on considère que l'*a priori* de s^2 suit une loi s-Inv-Khi^2 (n_0, s_0^2), avec s_0^2 la variance des données générées par le modèle au pas de temps considéré et de degré de liberté n0.
- on considère également que l'*a priori* de μ conditionné par s^2 suit une loi GEV (zeta, mu_0, $sigma_0$)(loi de valeur extrême généralisée), mu_0 étant le paramètre de position des données générées par le processus de Wiener au pas de temps considéré,
- on considère aussi que y (ou ynobs) suit une loi normale $N(\mu, s^2)$.

[14] *Il faut bien comprendre ici que nous souhaitons obtenir la loi de distribution des moyennes des dégradations. La formalisation de l'a priori se fait bien par la détermination de la moyenne de la moyenne et la variance de la moyenne. Comme on cherchera la moyenne de la variance et la variance de la variance.*

En résumé, on veut générer des nouvelles valeurs non observées $ynobs$ et également la loi de distribution $p(ynobs|\ y)$. Des informations intermédiaires comme la représentation de la loi conjointe *a priori* $p(\mu, s^2)$ et de la loi conjointe a posteriori $p(\mu, s^2|\ y)$ doivent être données.

En pratique, pour la loi conjointe *a priori* $p(\mu, s^2)$:

- on crée une grille de valeurs de μ et s^2,
- pour chaque valeur de μ et s^2, on calcule les probabilités $p(s^2) = Inv - Khi^2(n0, S0^2)$ et $p(\mu|\ s^2) = N\ (mu0, s^2|\ \mathrm{k0})$ afin d'obtenir l'équation (4.25).

Pour la loi conjointe *a posteriori* $p(\mu, s^2|\ y)$:

- à partir de la grille créée précédemment pour chaque valeur de μ et s^2 , on calcule les probabilités $p(s^2|\ y) = Inv - Khi^2(nn, sn^2)$et $p(\mu|\ s^2, y) = N\ (mun, sn^2|\ \mathrm{kn})$ pour obtenir $p(\mu, s^2|\ y) = p(\mu|\ s^2, y) * p(s^2|\ y)$.

Afin de tracer la loi prédictive *a posteriori* des données non observées $p(ynobs|\ y\ )$: on s'appuie également sur la grille créée initialement pour laquelle on connait la valeur de $p(\mu, s^2|\ y)$ pour chaque valeur de μ et s^2 :

- on crée une séquence de valeurs non observées $ynobs$,
- pour chaque valeur de $ynobs$, on calcule $p(ynobs|\ \mu, s^2, y) = N\ (ynobs, \mu, s^2|\ y)$, pour tous les points de la grille (μ, s^2) et on détermine $p(ynobs|\ y)$, équation (4.22):

Pour l'échantillonnage de valeurs non observées ynobs :

- A partir de $s^2|\ y$ de la loi S-Inv-Khi² (nn, sn²) et $\mu|\ s^2, y$ de la loi normale tronquée positive $Ntc\ (mun, s^2|\ \mathrm{y/kn})$, on déduit $ynobs|\ y == N\ (\mu|\ s^2\ , \mathrm{y}\ , s^2|\ y)$.

Avec un ensemble de mesures de profondeurs de carbonatation faites pour un plan d'essais avec deux niveaux de stress et les informations *a priori* des paramètres (μ, s^2) obtenus à l'aide de données générées par le modèle de Hyvert, il est possible de faire une actualisation bayésienne permettant de prédire les nouvelles observations de profondeur de carbonatation sachant les mesures déjà observées.

4.6.3. Application de l'approche bayésienne au processus de dégradation

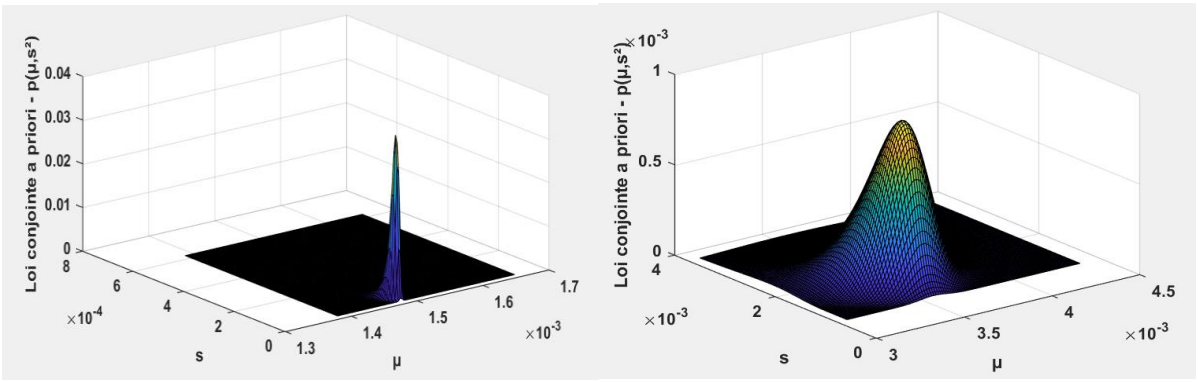
Une application de l'approche bayésienne au niveau du plan d'essais permettant d'estimer la durabilité du béton soumis à la carbonatation est présentée dans cette section. Le plan d'essais choisi est celui avec deux stress (S_1 et S_2). L'approche bayésienne devra itérativement être appliquée temps de mesure après temps de mesure. L'illustration faite ci-après concerne l'application de la démarche au premier temps de mesure t_1. On suppose que les profondeurs de carbonatation du tableau 4.22 ont été observées au temps t_1 pour un nombre d'éprouvette égal à 13 pour le stress S_1 et 10 pour le stress S_2.

Éprouvettes de béton et numérotation	Profondeur de carbonatation du béton observées pour les stress S_1=0,3% Patm, S_2 =20 %Patm au premier temps de mesure t1	
Éprouvettes	S_1	S_2
n_1	0.0010	0.0022
n_2	0.0012	0.0026
n_3	0.0020	0.0038
n_4	0.0014	0.0044
n_5	0.0011	0.0042
n_6	0.0020	0.0040
n_7	0.0015	0.0027
n_8	0.0016	0.0044
n_9	0.0018	0.0046
n_{10}	0.0020	0.0058
n_{11}	0.0017	-
n_{12}	0.0014	-
n_{13}	0.0022	-

Tableau 4.22. Profondeurs de carbonatation observée au premier temps de mesure

En utilisant les statistiques des données observées (de vraisemblance) $yobs$ (variance et moyenne) pour chacun des stress (S_1 et S_2) ainsi que les statistiques des données obtenues *a priori* avec le modèle de Hyvert; $p(\mu|\ s^2) = N\ (mu0, s^2|\ \mathrm{k0})$ ($mu0$ = moyenne de $y\ (S_1, S_2)$, écart-type de $y\ (S_1, S_2)$, $\mathrm{k0} =$ N (nombre de répétition)) et $p(s^2) = Inv - Khi^2(n0, S0^2)$ au premier temps de mesure t_1 et en appliquant les différentes étapes de l'actualisation bayésienne, nous allons générer d'une manière aléatoire les valeurs non observées $ynobs$ (échantillonnage de valeurs non observées) des mesures de carbonatation du béton.

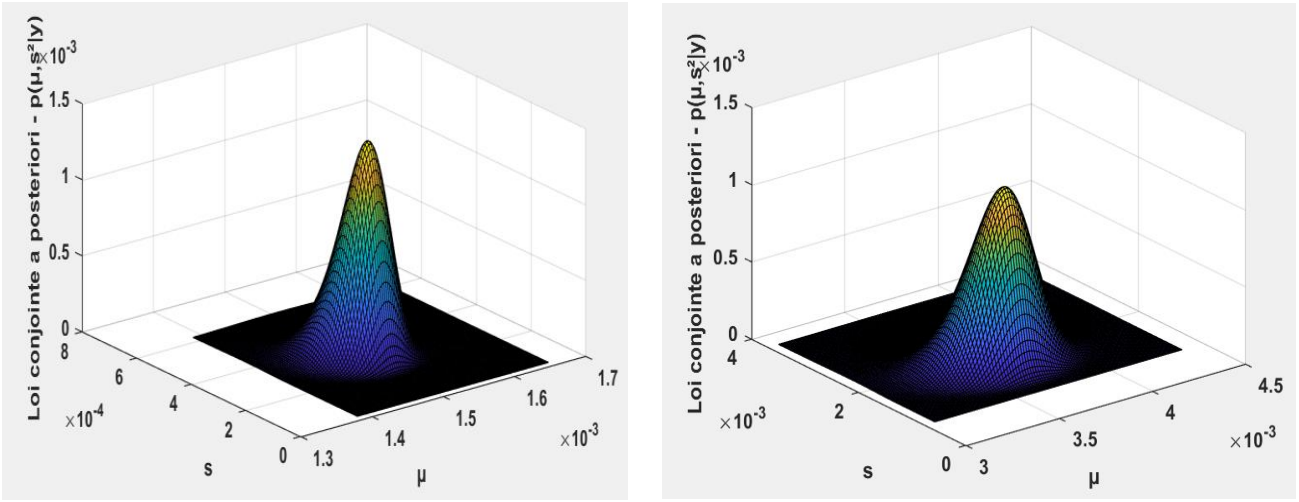
En suivant la démarche de la section 4.6.2, voici les différentes représentations de la loi conjointe *a priori*, *a posteriori* et représentation de la loi prédictive *a posteriori* des données non observées. La figure 4.7 montre une représentation de la loi conjointe *a priori* de la moyenne μ des dégradations au temps t_1 pour les stress S_1 (4.7a) et S_2 (4.7b).



4.7a *4.7b*

Figure 4.7. Représentation de la loi conjointe a priori pour le stress pour le stress S_1 (4.7a) et stress S_2 (4.7b)

La figure 4.8 montre une représentation de la loi conjointe *a posteriori* de la moyenne μ des dégradations au temps t_1 pour le stress S_1 (4.8a) et stress S_2 (4.8b).

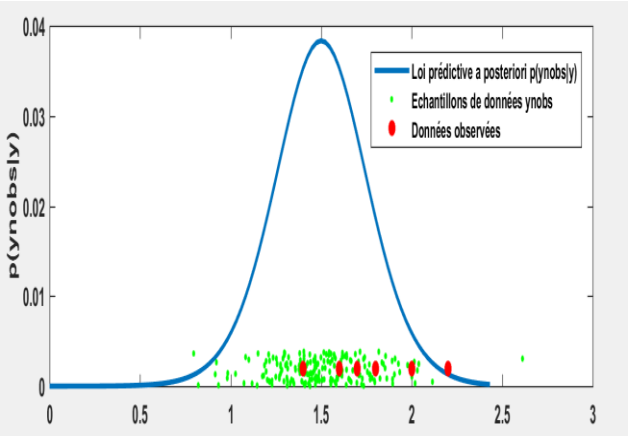


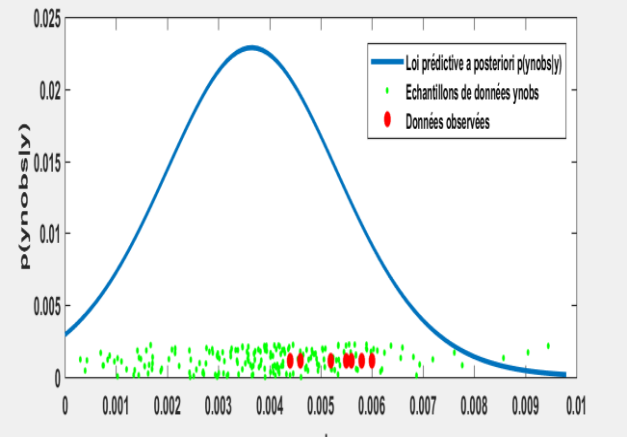
4.8a *4.8b*

Figure 4.8. Représentation de la loi conjointe a posteriori pour le stress pour le stress S_1 (4.8a) et stress S_2 (4.8b)

Une fois la loi conjointe *a posteriori* obtenue, la détermination de la loi prédictive *a posteriori* de la dégradation ainsi que l'échantillonnage des valeurs non observées $ynobs$ sont rendus possibles.

La figure 4.9 représente la loi prédictive *a posteriori* des données non observées pour le stress pour le stress S_1 (4.8a) et stress S_2 (4.8b)





4.9a *4.9b*

Figure 4.9. Représentation de la loi prédictive a posteriori des données non observées et échantillonnage des données non observées pour le stress pour le stress S_1 (4.9a) et stress S_2 (4.9b)

La dernière étape de la méthode consiste à tirer un échantillonnage des données non observées. Cet échantillonnage correspond aux observations prédites par l'approche bayésienne ; dans notre cas, ce sont les profondeurs de carbonatation des éprouvettes de béton pour le premier temps de mesure t_1 lors des essais. La détermination des paramètres du processus de Wiener permet de voir l'impact de l'actualisation bayésienne sur les données.

La loi GEV est celle qui est choisie pour représenter les distributions des quatre paramètres actualisés ($\hat{\mu}_\alpha, \hat{\sigma}_\alpha, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_B$). Dans le tableau 4.23, on peut voir les moyennes et écart type des paramètres du processus de Wiener pour les deux cas avec ou sans actualisation bayésienne. On remarque que pour la partie avec actualisation bayésienne le coefficient de variation des paramètres est plus réduit par rapport à la partie sans actualisation bayésienne.

Estimation des paramètres du processus de	Avec l'actualisation bayésienne			Sans l'actualisation bayésienne		
Paramètre du processus	Moyenne	Ecart-type	Coefficient de	Moyenne	Ecart-type	Coefficient de
$\hat{\mu}_\alpha$	9,9819^{e}-	2,7833^{e}-	0,0279	9,1330^{e}-	3,0811^{e}-	0,0337
$\hat{\sigma}_\alpha$	6,4479^{e}-	3,0738^{e}-	0,0477	4,4704^{e}-	3,1186^{e}-	0,0698
$\hat{\beta}$	1,4090	0,0346	0,0246	1,5596	0,0447	0,0287
$\hat{\sigma}_B$	0,0028	7,0792^{e}-	0,0253	0,0020	1,1550^{e}-	0,0578

Tableau 4.23. Paramètres du processus de Wiener avec et sans l'actualisation bayésienne

Cela permet de comprendre qu'avec l'actualisation bayésienne, la précision sur les paramètres du processus de Wiener est améliorée. Ainsi, le processus de carbonatation est précisément caractérisé après actualisation bayésienne. On comprend bien que l'actualisation bayésienne peut permettre de diminuer le nombre d'essais ou à nombre d'essais constant apporter plus de précision sur l'estimation de la durée de vie du béton. Ce travail est à mettre dans les perspectives de la thèse.

4.7. Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter l'application de la stratégie d'optimisation d'un plan d'essais optimisé pour un béton soumis à la carbonatation pour le cas des essais destructifs et non destructifs. La méthode commence par l'estimation des paramètres du processus de Wiener à partir des données obtenues par le modèle de Hyvert. L'estimation des paramètres se fait par la méthode de l'algorithme EM. Une fois les paramètres obtenus, une estimation déterministe et par intervalle de confiance de la durée de vie du béton est donnée. L'estimation déterministe de la durabilité est obtenue par le calcul du $\widehat{T}_{\mathrm{MTTF}}$ qui est le temp moyen de défaillance du béton. Pour l'estimation par l'intervalle de confiance, la méthode du Percentile Bootstrap (PB) et la méthode du Percentile Bootstrap corrigé par Biais (PBCB) ont été utilisées. La comparaison de ces deux méthodes a permis de garder la méthode du percentile Bootstrap par biais car, elle est celle qui donne l'intervalle de confiance le plus réduit. Notons, que l'amélioration de la précision de l'estimation de la durée de vie est aussi obtenue par l'actualisation bayésienne en utilisant une information *a priori* provenant du modèle de Hyvert combinée avec certains résultats issus des essais réalisés sur le béton.

Une fois la durabilité du béton déterminée, la stratégie d'optimisation d'un plan d'essais accélérés avec deux niveaux de stress est présentée. Deux plans d'essais SI1 constitué d'un stress S_1=300 Pa (0,3% Patm) et d'un autre S_2=20000 Pa (20 % Patm), et SI2 ; avec $S_1 = S_0$ =30 Pa (0,03% Patm) et $S_2 = S_{max}$=50000 Pa (50%Patm) sont analysés afin d'en retenir le meilleur. Les résultats obtenus sont regroupés selon les essais destructifs ou non destructifs, et, avec ou sans contraintes de coût. Concernant les essais destructifs, on remarque qu'avec les contraintes de coût, le temps des essais est réduit par rapport au plan d'essais sans contraintes de coût. Avec un temps d'essais beaucoup plus long, la précision est améliorée. Le coût varie en fonction du temps des essais.

Pour le cas des essais non destructifs, les contraintes de coût permettent de diminuer le nombre d'éprouvettes total lors des essais mais la précision sur l'intervalle de confiance représentant la durée de vie du béton est meilleure pour le plan d'essais non destructifs sans les contraintes de coût, avec un nombre d'éprouvettes qui est supérieur à celui du plan d'essais avec contraintes de coût.

En comparant les résultats des situations (SI1) et (SI2), on remarque une diminution du temps des essais pour la situation (SI2) pour les essais avec contraintes de coût mais aussi une amélioration de la précision sur l'intervalle de confiance représentant la durée de vie du béton. Le choix s'est porté alors sur la situation (SI2) pour la réalisation d'un plan d'essais avec deux stress. Parmi les trois critères d'optimalité (C-, D- et A-), nous avons choisi de garder la C-optimalité car c'est celle qui donne la meilleure précision sur l'intervalle de confiance de la durée de vie du béton.

Pour le plan d'essais destructifs utilisant l'échelle de temps transformée $\sqrt{t}$ avec contraintes de coût, on observe une diminution du nombre d'éprouvettes par rapport à l'échelle de temps t et une meilleure précision sur l'intervalle de confiance de la durée de vie du béton. Pour le cas sans contraintes de coût, le nombre d'éprouvettes ne diminue pas par rapport à l'échelle de temps t mais la précision est améliorée. En revanche pour les essais non destructifs, on remarque la même situation concernant la diminution du nombre d'éprouvettes entre l'utilisation des contraintes de coût mais pour la précision, la situation s'inverse ; elle est meilleure pour l'échelle de temps t.

L'analyse des effets des stress sur le plan d'essais a montré que le meilleur plan d'essais optimisé est un Plan d'essais Accélérés à Stress Constant Partiel (PCSADT). L'effet de la contrainte de temps sur le plan (PCSADT) montre que plus le temps d'essais est élevé meilleure est la précision sur l'estimation de l'intervalle de confiance de la durabilité du béton.

A partir des résultats issus du plan (PCSADT) ; la détermination de la taille d'échantillon en fonction d'un seuil de confiance et de la précision sur l'intervalle de confiance de la durée de vie du béton a été réalisée. On remarque qu'avec un seuil de confiance $\phi = 0{,}95$ La taille d'échantillon varie en fonction de la précision. Plus la précision est petite, plus la taille d'échantillon augmente.

La réalisation d'une analyse de sensibilité à partir des paramètres du processus de Wiener a permis de montrer la robustesse du plan (PCSADT). La réalisation d'un plan d'essais optimisé avec trois stress permet de voir que l'ajout d'un niveau de stress entraine une amélioration de la précision sur l'estimation de la durée de vie du béton.

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse est de proposer une méthode permettant de qualifier la durabilité du béton avec un nombre d'essais optimisé. Cela part d'un constant qu'il n'existe pas un nombre conventionnel d'essais désignés dans le cadre de la qualification de la durabilité du béton dans son environnement. Par contre, certains auteurs proposent souvent d'utiliser 3 essais. L'indicateur de durabilité est le critère utilisé pour évaluer la durée de vie du béton pour un environnement donné.

Compte tenu de la variabilité de la mesure de l'indicateur de durabilité liée aux paramètres intrinsèques au béton, à l'environnement et à la réalisation des essais, un nombre d'essais reste très difficile à justifier dans la détermination de l'indicateur de durabilité qui permet la qualification du béton.

Après avoir exposé le contexte de l'étude et présenté un panorama des travaux existants dans la littérature dans le but de trouver une méthode fiable permettant la qualification du béton, nous avons proposé une méthode générique de qualification de la durabilité du béton en utilisant un plan d'essais optimisé résumée par la figure 2.1 du chapitre 2.

Le plan d'essais proposé donne le nombre d'essais à réaliser afin de maîtriser la durabilité du béton dans son environnement. Le choix du plan a été porté sur un CSADT (Plan d'essais Accélérés à Stress Constant) avec différentes contraintes telles que ; le coût (budget), le temps d'essais et le nombre d'éprouvettes disponibles. Le plan d'essais est couplé au processus de Wiener (mathématiquement tractable) pour modéliser l'évolution du processus de carbonatation du béton associé à un modèle prédictif de Hyvert pour générer les données.

Une méthode de traitement des données appelée transformation iso-probabiliste permet de transformer les données de dégradation qui suivent une loi de distribution quelconque en des données statistiquement équivalentes, suivant une loi normale, par conservation de caractéristiques clefs des lois après transformation. Ces données ont permis d'estimer les paramètres du processus de Wiener avec la méthode l'algorithme EM. Une fois les paramètres estimés, le calcul de la durabilité du béton a été fait avec une méthode déterministe et une méthode d'estimation par intervalle de confiance à l'aide de la méthode du Percentile Bootstrap corrigé par Biais.

L'application d'une stratégie d'optimisation d'un plan d'essais avec deux stress a permis de conclure qu'un plan PCSADT (Plan d'essais Accélérés à Stress Constant Partiel) est plus adapté pour réaliser les essais et que les essais non destructifs apportent plus de précision sur la durabilité du béton.

La détermination de la taille d'échantillon dépend du niveau de confiance et de précision que l'on souhaite avoir sur l'estimation de la durabilité du béton. Ainsi, pour répondre à la question sur le nombre d'essais optimal pour qualifier la durabilité du béton ; cela va dépendre de la qualité de l'estimation de la durabilité. Pour être beaucoup plus précis sur l'estimation de la durabilité du béton, cela implique un nombre d'essai beaucoup plus important. Il faut alors définir la précision et le seuil de confiance que l'on souhaite avoir afin d'obtenir le nombre d'essais optimal.

Dans le but d'améliorer la précision sur la durée de vie du béton ; un plan d'essais optimisé avec trois niveaux de stress a été présenté ainsi qu'une stratégie d'actualisation des paramètres du modèle de Wiener par approche bayésienne. Ces deux stratégies ont montré une nette amélioration de la précision de la durée de vie du béton.

Dans les perspectives de ces travaux, une application de la stratégie d'actualisation bayésienne sur plusieurs temps de mesure est nécessaire pour bien appréhender l'apport de l'information a priori sur le processus de carbonatation du béton.

Par ailleurs, nous avons adopté le plan PCSADT pour déterminer le nombre d'essais nécessaire à réaliser pour qualifier le béton ; il faut aussi explorer PSSADT (Partial Step-Stress Accelerated Degradation Test) afin de comparer les résultats des deux types de plan et voir celui qui est le plus adapté pour les essais et aussi en terme de précision sur l'estimation de la durabilité du béton.

Les données utilisées afin d'obtenir le plan d'essais optimal provienne du modèle prédictif de carbonatation d'Hyvert ; il serait intéressant de réaliser des essais réels sur le béton avec les recommandations issues de ce travail de recherche pour ensuite les réinjectés dans le processus de Wiener et réestimer la durée de vie du béton.

Bien évidemment, une des perspectives est la validation de notre méthode par des essais réels afin d'y apporter des améliorations et de pouvoir la standardiser. Le travail d'actualisation bayésienne doit être finaliser afin de constater l'amélioration sur la diminution du nombre d'essais et la précision sur l'estimation de la durée de vie du béton.

Bibliographie

- **[ACI 318 ,2008]** ACI 318 (2008), Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. Farming Hills, MI: ACI.
- **[AFGC, 2003]** AFGC (2003), Réhabilitation du béton armé dégradé par la corrosion- Documents scientifiques et techniques.
- **[AFGC, 2004]** AFGC (2004), Conception des bétons pour une durée de vie donnée des ouvrage, Maîtrise de la durabilité vis-à-vis de la corrosion des armatures et de l'alcali-réaction, Etat de l'art et Guide pour la mise en œuvre d'une approche performantielle et prédictive sur la base d'indicateurs de durabilité.
- **[AFPC-AFREM, 1997]** AFPC-AFREM (1997), Mode opératoire recommandé, essai de carbonatation accéléré, mesure de l'épaisseur de béton carbonaté, dans Compte-rendu des journées techniques AFPC-AFREM Durabilité des bétons, "méthodes recommandées pour la mesure des grandeurs associées à la durabilité", Toulouse, pp :153-158.
- **[Alexander et Beaushausen, 2008]** Alexander M.G, Beushausen H, (2008), The South African durability index tests in an international comparison, Journal of the South African Institution of Civil Engineers.
- **[Alexander et Beushausen, 2019]** Alexander M, Beushausen H (2019), Durability, service life prediction, and modelling for reinforced concrete structures – review and critique, Cement and Concrete Research Vol 122, pp : 17-29.
- **[Allahyari, 2016]** Allahyari I (2016), Approche performantielle des bétons : Vers une meilleure caractérisation des indicateurs de durabilité, Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- **[Anstice et al, 2005]** Anstice DJ, Page C L, Page M M (2005), The pore solution phase of carbonated cement pastes, Cement and Concrete Research, Vol 35, No 2, pp: 377-383.
- **[Applet, 2012]** Applet (2012), Durée de vie des ouvrages en béton armé. Approche prédictive, performantielle et probabiliste. Recommandations du projet ANR-APPLET-IFSTTAR.
- **[AS 3600, 2001]** AS 3600 (2001), Concrete Structure.Sydney: Standard Australia.
- **[ASTMC, 2005]** ASTM C 1202-05 (2005), Standard test method for electrical indication of concrete's ability to resist chloride ion penetration.
- **[ASTMC, 2018]** ASTM C1012/C1012M, Standard test method for length change of hydraulic-cement mortars exposed to sulfate solution.

- **[Atkinson et Fedorov, 1975]** Atkinson A et Fedorov V (1975), Optimal design: experiments for discriminating between several models, Vol 62, No2, pp:289-303.
- **[Bastidas-Arteaga et al, 2013]** Bastidas-Arteaga E, Schoefs F, Stewart MG, Wang X, Influence of global warning on durability of corroding RC structures: A probabilistic approach, Engineering Structures, Vol 51, pp 259–266.
- **[Basu and Ebrahimi, 1982]** Basu A and Ebrahimi N (1982), Nonparametric Accelerated, Life Testing, IEEE Transactions on Reliability 31, pp: 432–435.
- **[Beaumont, 2014]** Beaumont P (2014), Optimisation des plans d'essais accélérés Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol. Thèse de l'Université d'Angers.
- **[Bernardo et Smith, 1994]** Bernardo J et Smith A. (1994), Bayesian Theory, Wiley.
- **[Beushausen et al, 2019]** Beushausen H, Torrent R, Alexander MG, (2009), Performance- based approaches for concrete durability: State of the art and future research needs, Cement and Concrete Research,Vol 119, pp: 11-20.
- **[Birolini, 1997]** Birolini A, (1997), Quality and reliability of technical systems. Ed Springer.
- **[Bonnet et Balayssac, 2018]** Bonnet S, Balayssac J.P (2018), Combination of the Wenner resistivimeter and Torrent permeameter methods for assessing carbonation depth and saturation level of concrete, Construction and Building Materials, Vol 188, pp: 1149–1165.
- **[Breton JC, 2019]** Breton JC (2019), Processus stochastiques, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1.
- **[Cai and al, 2019]** Cai X, Tian Y, Ning W (2019), Change-point analysis of the failure mechanisms based on accelerated life tests, Reliability Engineering and System Safety, Vol188, pp:515-522.
- **[Capozzoli et Rizzo, 2017]** Capozzoli L, Rizzo E (2017), Ground-Penetrating Radar and Complementary Non-Destructive Testing Techniques in Civil Engineering Combined NDT techniques in civil engineering applications: Laboratory and real test, Construction and Building Materials, Vol 154, pp: 1139–1150.
- **[Castellote et al, 2009]** Castellote M, Fernandez L, Andrade C, Alonso C, Chemical changes and phase analysis of OPC pastes carbonated at different CO2 concentrations, Materials and Structures,Vol 42, pp: 515-525.
- **[Chaloner and Larntz, 1992]** Chaloner K and Larntz K (1992), Bayesian Design for Accelerated Life Testing, Journal of Statistical Planning and Inference, Vol 33,No2, pp : 245–259.

- **[Chapouille, 1980]** Chapouille P (1980). Fiabilité. Maintenabilité.Techniques de l'ingénieur. L'Entreprise industrielle. 1980, Vol 3, Num T4300, pp T4300.1-T4300.40.
- **[Chen et al, 2016]** Chen Z, Li S, Pan E (2016), Optimal Constant-Stress Accelerated Degradation Test Plans Using Nonlinear Generalized Wiener Process, Mathematical Problems in Engineering.
- **[Chhikara et Folks, 1989]** Chhikara R, Folks L (1989), The Inverse Gaussian Distribution : Theory, Methodology and Applications, New York, NY : Marcel Dekker.
- **[Congdon, 2001]** Congdon P (2001), Bayesian statistical modelling, Wiley.
- **[CSA A23.1/23.2, 2009]** CSA A23.1/23.2 (2009), Concrete Materials and Methods of Concrete Construction/Test Methods and standard Practices for Concrete. Toronto, Canada: CSA.A.
- **[Curtil et al, 2008]** Curtil L, Marouane S, Hamelin P (2008), Composites realized by hand lay-up process in a civil engineering environment: initial properties and durability, Materials and Structures, Vol 41, pp :831–851.
- **[Daniels, 1954]** Daniels H E (1954), Saddlepoint approximations in statistics, Ann. Math. Statist., vol 25, no 4, pp: 631–650.
- **[Dauxois, 2012]** Dauxois J Y, CTU, Master Enseignement des Mathématiques Statistique Inférentielle, Université de Franche-Comté.
- **[Deby, 2008]** Deby F(2008), Approche probabiliste de la durabilité des bétons en environnement marin, Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- **[Dheilly et Tudo, 1996]** Dheilly R, Tudo J (1996), Etude du systeme CaO - H2O - CO2 - CaO - H2O -CO2 pour un stockage optimal de la chaux, Ciments, Betons, Platres, Chaux, No 820, pp : 161-164.
- **[Duan et Wang, 2018]** Duan F, Wang G (2018) Exponential-Dispersion Degradation Process Models With Random Effects and Covariates, IEEE Transactions on Reliability, Vol 67, No 3 , pp: 1128 – 1142.
- **[Duprat et al, 2014]** Duprat F, Vu N.T, Sellier A, Accelerated carbonation tests for the probabilistic prediction of the durability of concrete structures, Construction and Building Materials Vol 66, pp: 597–605.
- **[Dupuis, 2007]** Dupuis J, cours de statistique inférentielle, Université Paul Sabatier (Toulouse III) Laboratoire de Statistique et Probabilités UMR CNRS C5583.
- **[Edirisinghe and Rathnayake, 2015]** Edirisinghe M, Rathnayake P (2015), Arrhenius Accelerated Life Test for Luminary Life of High Bright Light Emitting Diodes, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol 49, pp : 48-59.
- **[Elfving, 1952]** Elfving G (1952), Optimum allocation in linear regression theory, Annals of Mathematical Statistics, Vol 23, No 2, pp: 255–262.

- **[EN 12390-12, 2010]** EN 12390-12 (2010), Essai pour béton durci - Détermination de la résistance potentielle à la carbonatation du béton - Méthode de carbonatation accélérée.
- **[Fatemi, 2012]** Fatemi S.Z (2012), Planification des essais accélérés : optimisation, robustesse et analyse, Thèse de Doctorat de l'Université d'Angers.
- **[Fedorov, 1972]** Fedorov V (1972), Theory of optimal experiments, Academic Press, New York.
- **[Finetti, 1974]** Finetti B D (1974), Theory of probability: a critical introductory treatment. Wiley.
- **[FNTP, 2009]** FNTP (2009), Recommandations professionnelles provisoires FNTP, FFB, CERIB, FIB, Méthodologie d'application du concept de performance équivalente des bétons.
- **[Gelman et al, 2013]** Gelman A, Carlin JB, Stern HS, Dunson DB, Vehtari ,(2013), Bayesian data analysis, Third Edition.
- **[Goldstein, 1999]** Goldstein, M. (1999). Bayes linear analysis. In Encyclopaedia of Statistical Sciences, update vol 3 (ed. Kotz S et al.), pp: 29–34. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- **[GranDubé, 2007]** GranDuBé (2007), Grandeurs associées à la Durabilité des Bétons,Presses De L'école Nationale Des Ponts Et Chaussées , Livres ponts et chaussées.
- **[Groves et al, 1990]** Groves GW, D.I. Rodway D I, Richardson IG (1990), The carbonation of hardened cement pastes, Advances in Cement Research, Vol 3, pp: 117-125.
- **[Gruyaert et al, 2012]** Gruyaert E, Van den Heede P, Maes M, De Belie N (2012), Investigation of the influence of blast-furnace slag on the resistance of concreteagainst organic acid or sulphate attack by means of accelerated degradation tests, Cement and Concrete Research, Vol 42, pp : 173–185.
- **[Gu and al, 2018]** Gu L, Visintin P, Bennett T (2018), Evaluation of accelerated degradation test methods for cementitious composites subject to sulfuric acid attack; application to conventional and alkali-activated concretes, Cement and Concrete Composites Vol 87, pp : 187-204.
- **[Han, 2015]** Han D (2015), Time and constrained optimal designs of constant-stress and step-stress accelerated life tests, Reliability Engineering & System Safety.
- **[Hasofer et Lind, 1974]** Hasofer A M et Lind N C (1974), An exact and invariant firstorder reliability format. Journal of Engineering Mechanics, Vol 100, pp: 111-121.
- **[Hoang, 2003]** Hoang P (2003), Handbook of reliability engineering. Ed Springer.

- **[Hong et Ye, 2017]** Hong L, Ye Z (2017), When is acceleration unnecessary in a degradation test? Statistica Sinica, Vol. 27, No. 3, pp: 1461–1483.
- **[Hover et al, 2008]** Hover K.C., Bickley J, Hooton R.D, (2008), Guide to specifying concrete performance, RMC research and education foundation.
- **[Izoret, 2017]** From hydraulic lime to Portland cement: Vicat's scientific approach. Union. Edition 2017.
- **[Ji et al. 2010]** Ji YS, Yuan YS, Shen J L, Ma YQ, Lai SP (2010), Comparison of concrete carbonation process under natural condition and high CO2 concentration environments, Journal of Wuhan University of Technology-Mater.Sci.Ed., Vol 25, pp: 515-522.
- **[Jϕrgensen, 1987]** Jørgensen B (1997), Theory of Dispersion Models, London: Chapman & Hall.
- **[Kallen et NoortwijK, 2005],** Kallen MJ, Van Noortwij JM (2005) Optimal maintenance decisions under imperfect inspection, Reliability engineering & system safety.
- **[Karlsson, 2009]** Karlsson A (2009), Bootstrap methods for bias correction and confidence interval estimation for nonlinear quantile regression of longitudinal data, Journal of Statistical computation and Simulation, Vol 79, No 10, pp: 1205-1218.
- **[Kessy and al, 2015]** Kessy J.G, Alexander M.G, Beaushausen H (2015), Concrete durability standards: International trends and the South African context, Journal of the South African Institution of Civil Engineers, Vol 57, No1, pp: 47-58.
- **[Kiefer et Wolfowitz, 1960]** Kiefer J, Wolfowitz J (1960), The equivalence of two extremum problem, Canadian Journal of Mathematics, Vol 12, pp : 363 –366.
- **[kim et al, 2017]** KIM YS, Sung SI (2017), Partical lifetime estimation strategy based on partially step-stress-accelerated degradation tests, SAGE Journals**.**
- **[Laing et al, 2002]** Liang M.T, Qu W, Liang C.H, (2002), Mathematical Modeling and Prediction of concrete carbonation and its applications, Journal of Marine Science and Technology, Vol. 10, No. 2, pp. 128-135.
- **[Laronde, 2014]** Laronde R (2O14), Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables - Application à un système photovoltaïque. Thèse de l'Université d'Angers.
- **[Lawless et Crowder, 2004]**. Lawless J, Crowder M (2004), Covariates and Random Effects in a Gamma Process Model with Application to Degradation and Failure, Lifetime Data Analysis, Springer.
- **[Lepadatu et al, 2005]** Lepadatu D, Hambli R, Kobi A, Barreau A (2005), Optimisation of springback in bending processes using FEM simulation and response surface method, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol 27, No 40, pp:40-47.

- **[LCPC, 2010]** LCPC (2010), Maîtrise de la durabilité des ouvrages d'arts en béton, Application de l'approche performantielle, Recommandations provisoires.
- **[Lim et Yum, 2011]** H Lim, Yum BJ (2011), Optimal design of accelerated degradation tests based on Wiener process models, Journal of Applied Statistics. Vol38, No 2, pp : 309-325.
- **[Madsen et al, 1986]** Madsen H O, Krenk S et Lind N C (1986), Methods of structural Safety, Prentice – Hall.
- **[Mai-Nhu, 2013]** Mai-Nhu J, (2013), Corrosion des armatures du béton: couplage carbonatation-chlorures en présence de cycles hydriques. Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- **[Mandel et Betensky,2008]** Mandel M, Bentensky RA (2008), Simultaneous confidence intervals based on the percentile Bootstrap approach, Computational statistics & data analysis, Vol 52, No4, pp :2158-2165.
- **[Maruyama et al, 2013]** Maruyama O, Sutoh A, Kanekiyo H (2013), A stochastic Model for Describing Temporal Variation of Damage Accumulation in tunnel lining Concrete, Proceedings of the Thirteenth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction.
- **[Matsushita et al, 2004]** F. Matsushita F, Aono Y, Shibata S, Microstructure changes in autoclaved aerated concrete during carbonation under working and accelerated conditions, Journal of Advanced Concrete Technology, Vol 2, No 1, pp 121-129.
- **[McCabe,1974]** McCabe JH (1974), A Continued Fraction Expansion, with a Truncation Error Estimate, for Dawson's Integral, MATHEMATICS OF COMPUTATION, Vol 28, No 127, pp: 811-816.
- **[Mclachlan et Krishnan, 2007]** Mclachlan G J, Krishnan T (2007), The EM Algorithm and Extensions. New York, NY, USA: Wiley.
- **[Meeker and Escobar, 1998]** Meeker, W. and Escobar, L (1998). Accelerated degradation tests: modelling and analysis, Technometrics, Vol 40, No 2, pp: 89-99.
- **[Metalssi et al , 2020]** Metalssi OO, Aït-Mokhtar A, Turcry P (2020), A proposed modelling of coupling carbonation-porosity-moisture transfer in concrete based on mass balance equilibrium, Construction and Building Materials, Vol 230, Article,116997.
- **[Mi et al, 2019],** Mi R, Pan G, shen Q(2019), Carbonation modelling for cement-based materials considering influences of aggregate and interfacial transition zone, Construction and Building Materials,Vol 229,Article 116925.
- **[Mortureux, 2001]** Mortureux Y (2001), La sûreté de fonctionnement : méthodes pour maîtriser les risques, Techniques de l'ingénieur.

- **[Muigai et al, 2012]** Muigai R, Moyo P, Alexander M, Durability design of reinforced concrete structures: a comparison of the use of durability indexes in the deemed-to-satisfy approach and the full-probabilistic approach, Materials and Structures, Vol 45, pp :1233–1244.
- **[Nelson, 1971]** Nelson W (1971), Analysis of accelerated life test data-Part I : The Arrhenius model and graphical methods, IEEE Transactions on Electrical Insulation.
- **[Nelson, 1972]** Nelson W (1972), Graphical analysis of accelerated life test data with the inverse power law model, IEEE Transactions on Reliability.
- **[Nelson, 1990]** Nelson W (1990), Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis. Ed. Wiley Series in Probability and Statistics.
- **[NF EN 13306, 2018]** Norme NF EN 13306 (2018), Maintenance- Terminologie de la maintenance.
- **[NF EN 206/CN, 2014]** NF EN 206 (2014), Béton, Spécification, performances, production et conformité.
- **[Nganga and al, 2013]** Nganga G, Alexander M, Beushausen H,(2013), Practical implementation of the durability index performance-based design approach, Construction and Building Materials, Vol 45 ,pp 251–261.
- **[Nganga et al, 2017]** Nganga G W, Beushausen H, Alexander, M G, (2017), Practical implications of durability index performance-based specifications: current experience, Concrete Beton, Vol 150, pp 18-22.
- **[Ngo, 2015]** Ngo VD (2015), Contribution à l'approche probabiliste de la durabilité des structures en béton soumise à la carbonatation, Thèse de l'Université de Toulouse-INSA de Toulouse.
- **[Nguyen, 2014]** Nguyen NT (2014), Évaluation non destructive des structures en béton armé : étude de la variabilité spatiale et de la combinaison des techniques, Thèse de l'Université de Bordeaux.
- **[Nguyen, 2014]** Nguyen P T (2014), Étude multiphysique du transfert de chlorures dans les bétons insaturés : prédiction de l'initiation de la corrosion des aciers. Thèse de l'Université de la Rochelle.
- **[Nicolas, 2011]** Nicolas R.S (2011), Approche performantille des bétons avec métakaolins obtenus par calcination flash, Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- **[Nischer, 1984]** Nischer P (1984), Effect of environment and concrete quality on carbonation, Betonwerk und Fertigteil-Technik, Vol 50 No 11, pp 752-757.
- **[NT BUILD 443, 1995]** Nordtest Method NT Build 443 (1995), Essai d'immersion pour la détermination du coefficient de diffusion des chlorures en régime non stationnaire par mesure du profil de pénétration.

- **[NT BUILD 492, 1999]** Nordtest Method NT Build 492 (1999), Concrete, mortar and cement-based repair materials: Chloride migration coefficient from non-steady-state migration experiments.
- **[Owen and Padgett, 1998]** Owen W. J and Padgett, W. J (1998), Accelerated test models for system strength based on birnbaum-saunders distributions, Lifetime Data Analysis, Vol 5 pp:133–147.
- **[Pages et Gondran, 1980]** Pages A et Gondran M. (1980), Fiabilité des systèmes. Eyrolles.
- **[Papadakis et al, 1991]** Papadakis V, Vayenas C, Fardis M (1991), Fundamental modeling and experimental investigation of concrete carbonation, Materials Journal, Vol. 88, No 4, pp.363-373.
- **[Park et Padgett, 2005]** Park C, Padgett WJ (2005), Accelerated Degradation Models for Failure Based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes, Lifetime Data Analysis-Springer, Vol 11, No 4, pp : 511–527.
- **[Parrott, 1987]** Parrott L J (1987), A review of carbonation in reinforced concrete, British Cement Association ,67 p.
- **[Paul et al, 2018]** Paul SC, Panda B, Huang Y, Garg A, Peng X (2018), An empirical model design for evaluation and estimation of carbonation depth in concrete, Measurement, Vol 124, pp 205-210.
- **[Peng et al, 2014]** Peng W, Li YF, Yang YJ, Huang HZ, Zuo MJ, Inverse Gaussian process models for degradation analysis: a Bayesian perspective, Reliability Engineering & System Safety 2014; Vol 130, pp:175-189.
- **[Peng et Tseng, 2009]** Peng CY, Tseng ST (2009), Mis-specification analysis of linear degradation models - IEEE Transactions on Reliability, Vol 58, No 3, pp : 444-455.
- **[Piérad et al, 2016]** Piérard J, Dooms B, Cauberg N (2016), Evaluation of Durability Parameters of UHPC Using Accelerated Lab Tests, Belgian Building Research Institute (BBRI), Limelette, Belgium.
- **[Pierre Druilhet, 2004]** Druilhet P (2004), Conditions for optimality in experimental designs, Linear Algebra and its Applications, Vol 388, pp: 147–157.
- **[Pulcini, 2016]** Pulcini G(2016), A perturbed gamma process with statistically dependent measurement errors, Reliability Engineering & System Safety, Vol A52, pp : 296-306
- **[Qiao et al, 2018]** Qiao H, Zhu B, Feng Q, Desire N (2018), Accelerated Life Testing of Reinforced Concrete Based on Performance Degradation and Reliability Modeling, Journal of Materials in civil engineering, Vol 30, No5.
- **[Rady et al, 2009]** Rady EA, El-Monsef MMEA, Seyam MM (2009), Relationships among Several Optimality Criteria, InterStat.

- **[Robert, 1992]** Robert C (1992), L'analyse statistique bayésienne, Edition ECONOMICA.
- **[Roziere, 2007]** Roziere E (2007), Etude de la durabilité des bétons par une approche performantielle, Thèse de l'Ecole Centrale de Nantes.
- **[Sagnol G, 2010]** Sagnol G (2010), Optimal design of experiments with application to the inference of traffic matrices in large networks: second order cone programming and submodularity, Thèse de l'École nationale supérieure des mines de Paris.
- **[Sanjuan et al, 2003]** Sanjuan MA, Andrade C, Cheyrezy M (2003), Concrete carbonation test in natural and accelerated conditions, Advances in Cement Research ,Vol 15, No 4, pp : 171-180.
- **[Sanjuan et Del Olmo, 2001]** Sanjuan M A, Del Olmo C (2001), Carbonation resistance of one industrial mortar used as a concrete coating, Building and Environment, Vol 36 No8, pp 949-953.
- **[Shah et Sinha, 1989]** Shah KR, Sinha B(1989), Theory of Optimal Designs, Lecture Notes in Statistics ,Edited by Berger J, Fienberg S, Gani J, Krickeberg K, and Singer B, 54 Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo. Hong Kong
- **[Silvey, 1980]** Silvey S D (1980), Optimal design, Chapman and Hall, London.
- **[Singpurwalla, 1997]** Singpurwalla N (1997), Gamma Processes and their Generalizations: An Overview, Engineering probabilistic design and maintenance for Flood Protection pp: 67-75 , EDITED BY Rober COOKE, Max MENDEL and Han VRIJLlNG ,Published by Kluwer Academic Publishers.
- **[Soufi, 2013]** Soufi A (2013), Etude de la durabilité des systèmes béton armé: mortiers de réparation en milieu marin, Thèse de l'Université de la Rochelle.
- **[Suhner, 1994]** Suhner M (1994), Utilisation de l'analyse bayésienne pour optimiser la démarche de Fiabilité. These de l'Universite de Nancy.
- **[Sun and Xie, 2009]** Sun X, Xie J (2009) Accelerated Life Test Design for the Reliability Assessment of LEDs, Electronic Product Reliability and Environnemental.
- **[Tang et al ,2014]** Tang S, Guo X, Yu C , Xue H, Zhou Z (2014), Accelerated degradation tests modeling based on the nonlinear wiener process with random effects, Mathematical Problems in Engineering.
- **[Tebbi, 2005]** Tebbi O (2005), Estimation Des Lois De Fiabilité en Mécanique par les Essais Accélérés, Thèse de doctorat de l'Université d'Angers.
- **[Thiery et al, 2012]** Thiery M, Cremona C, Bony VB, (2012), Application of the reliability theory to the assessment of carbonation-induced corrosion risk of rebars, European Journal of Environmental and Civil Engineering, Vol 16, pp:273-287.

- **[Thiery, 2005]** Thiery M (2005), Modelisation de la carbonatation atmospherique des materiaux cimentaires - Prise en compte des effets cinetiques et des modifications microstructurales et hydriques, These de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees de Paris.
- **[Torrenti et Barre, 2016]** Torrenti J M, Barre F (2016). Fissuration du béton armé Technique de l'ingénieur Pathologie générale-Pathologie du béton.
- **[Torrenti et Schwartzentruber, 2014]** Torrenti J M, Schwartzentruber L A, (2014). Le grand livre des bétons. Connaissances et pratiques - Avancées environnementales - Réglementation et cadre normatif. Edition Le Moniteur.
- **[Torres-Luque et al, 2014]** Torres-Luque M, Bastidas-Arteaga E, Schoefs F, Sánchez-Silva M, Osma J.F (2014), Non-destructive methods for measuring chloride ingress into concrete: State-of-the-art and future challenges, Construction and Building Materials, Vol 68, pp: 68–81.
- **[Tweedie, 1984]** Tweedie M C K (1984), An Index Which Distinguishes Between Some Important Exponential Families, in Statistics: Applications and New Directions. Proceedings of the Indian Statistical Institute Golden Jubilee International Conference, eds. Ghosh JK and Roy J, Calcutta: Indian Statistical Institute, pp: 579–604.
- **[Unicem, 2019]** Union nationale des industries de carrières et matériaux de construction (Unicem), L'industrie française du béton prêt à l'emploi. Edition 2019.
- **[Usureau, 2001]** Usureau, E. (2001). Application des methodes bayessiennes pour l'optimisation des couts de developpement des produits nouveaux. Master's thesis, Institut des Sciences et Techniques de l'Ingenieur d'Angers.
- **[Vassilious and Mettas, 2001]** Vassilious, A. and Mettas A (2001), Understanding Accelerated lifetesting analysis. In IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA.
- **[Vicat, 1818]** Vicat L J (1818), Recherches expérimentales sur les chaux de construction, les bétons et les mortiers ordinaires. Goujon.
- **[Wang and al, 2017]** Wang H, Zhao Y, Ma X, Wang H (2017), Optimal design of constant-stress accelerated degradation tests using the M-optimality criterion, Reliability Engineering & System Safety. Vol 164, pp : 45-54.
- **[Wang et al, 2016]** Wang H, Wang G, Duan F (2016), Planning of step-stress accelerated degradation test based on the inverse Gaussian process , Reliability Engineering and System Safety, Vol 154, pp : 97–105.
- **[Wang et Xu, 2010]** Wang X, Xu D (2010), An inverse Gaussian process model for degradation data, Technometrics, Vol 52, No 2, pp: 188-197.

- **[Wang, 2010]** Wang X (2010), Wiener processes with random effects for degradation data, Journal of Multivariates analysis, Vol 101, No 2, pp: 340-351.
- **[Wang, 2012]** Wang X (2012), Modélisation du transport multi-espèces dans les matériaux cimentaires saturés ou non saturés et éventuellement carbonatés, Thèse de l'Université Paris-Est.
- **[Wei et Xu, 2014]** Wei Q, Xu D (2014), Remaining Useful Life Estimation Based on Gamma Process Considered with Measurement Error, 10th International Conference on Reliability Maintainability and Safety (ICRMS).
- **[Whitmore, 1995]** Whitmore GA (1995), Estimating Degradation By a Wiener Diffusion Process Subject to Measurement Error, Lifetime Data Analysis, Vol 1, No 3, pp: 307–319.
- **[XP 18-458,2008]** XP P 18-458(2008), Essai pour béton durci – Essai de carbonatation accélérée - Mesure de l'épaisseur de béton carbonaté.
- **[Xu and al, 2013]** Xu G, Hughes-Oliver JM , Brooks JD , Yeatts JL & Baynes RE(2013),Selection of appropriate training and validation set chemicals for modelling dermal permeability by U-optimal design , SAR and QSAR in Environmental Research- Taylor & Francis, Vol 24, No 2, pp : 135-156.
- **[Ye and Xie, 2014]** Ye ZS, Xie M (2014), Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products, Applied Stochastic Models in Business and Industry, Wiley Online Library.
- **[Ye et Chen, 2014]** Ye ZS, Y, Chen N, The inverse Gaussian process as a degradation model, journal Technometrics, Vol 56, No 3, pp: 302-311.
- **[Yoon et al, 2007]** Yoon IS, Copuroğlu O, Park KB(2007), Effect of global climatic change on carbonation progress of concrete, Atmospheric Environment, Vol 41,pp :7274-7285.
- **[Zhang and al, 2018]** Zhang C, Pan L, Wang S, Wang X and Tomovic M(2018), An accelerated life test model for solid lubricated bearings used in space based on time-varying dependence analysis of different failure modes, Acta Astronautica,Vol 95, pp: 30-36.
- **[Zhang and Xiao, 2018]** Zhang K, Xiao J, (2018), Time-dependent reliability analysis on carbonation behavior of recycled aggregate concrete based on gamma process. Construction and Building Materials, Vol 158, pp: 378-388.
- **[Zhang et al, 2015]** Zhang C, Lu X, Tan Y, Wang Y (2015), Reliability demonstration methodology for products with Gamma Process by optimal accelerated degradation testing, Reliability Engineering & System Safety, Vol 142, pp : 369-377.
- **[Zhang et al, 2019]** Zhang Z, Zhou M, Fang M (2019), First-passage probability analysis of Wiener process using different methods and its applications in the

evaluation of structural durability degradation, European Journal of Environmental and Civil Engineering.

- **[Zhang et Ba, 2007]**, Accelerated Life Test and service life prediction of concrete, Journal of the Chinese Ceramic Society.
- **[Zhang et Ba, 2011]**, Zhang WM, Ba HJ (2011), Accelerated Life Test of Concrete in Chloride Environment, Journal of materials in civil Engineering, Vol 23, No3.

Annexes

Annexe 1 : Exigence de durabilité ACI 318 et essais performantiels.

<table>
<tr><th>Classe d'exposition</th><th>Sous-classes</th><th>Max E/L*</th><th>Min f_c MPa#</th><th colspan="2">Exigences supplémentaires</th></tr>
<tr><td rowspan="4">F Gel/dégel</td><td>F0: Négligeable; béton non exposé au gel/ dégel</td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="8"></td></tr>
<tr><td>F1: Modéré; exposition occasionnelle à l'humidité</td><td>0.45</td><td>31</td></tr>
<tr><td>F2: Sévère; en contact permanent avec l'humidité</td><td>0.45</td><td>31</td></tr>
<tr><td>F3: Très sévère; en exposition continue avec de l'humidité et des produits chimiques de dégivrage</td><td>0.45</td><td>31</td></tr>
<tr><td rowspan="4">S Sulfate</td><td>S0: Négligeable;
SO_4< 0.10%(sol)
SO_4<150 mg/l(eau)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>S1: Moderate;
0.10%≤SO_4≤0.20%(sol)
150≤SO_4≤1500 mg/l (eau)</td><td>0.50</td><td>28</td></tr>
<tr><td>S2 : Severe;
0.20%≤SO_4≤2.00%(sol)
1500≤SO_4≤10000 ppm (eau)</td><td>0.45</td><td>31</td></tr>
<tr><td>S3 : Very severe;
SO_4>2.00%(soil)
SO_4>10000 mg/l (eau)</td><td>0.45</td><td>31</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C corrosion</td><td rowspan="2">C0 : Négligeable; béton sec et protégé de l'humidité</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Teneur maximale en chlorure soluble dans l'eau (Cl^-) en béton, pourcentage par poids de ciment.</td></tr>
<tr><td>Béton armé</td><td>Béton précontraint</td></tr>
<tr><td>C1 : Modéré; béton exposé à l'humidité et une source externe de chlorures</td><td></td><td></td><td>1.00</td><td>0.06</td></tr>
<tr><td>C2 : Sévère; béton exposé à l'humidité et une source externe de chlorures</td><td>0.40</td><td>35</td><td>0.30</td><td>0.06</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P Exigeant à faible teneur en Perméabilité</td><td>P0 : béton où une faible perméabilité à l'eau n'est pas nécessaire</td><td></td><td></td><td colspan="2">0.15 Enrobage de béton</td><td>0.06 Enrobage de béton</td></tr>
<tr><td>P1 : Béton nécessitant une faible perméabilité à l'eau</td><td>0.50</td><td>28</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td colspan="6">Notes :
1.* 'L' est pris partout pour se référer à la teneur totale en matériaux cimentaires, c'est-à-dire la teneur en liant.
2. # Sauf indication contraire, les exigences relatives à la résistance minimale f_c doivent être basées sur des essais de 28 jours de cylindres.</td></tr>
</table>

Tableau 1. Exigences de durabilités recommandées dans ACI 318 (2008)

Classe d'exposition	Essais Performantiels	Essai performantiel (ASTM C1202)[30]
F0	Non requis	Non requis
F1	Facteur de durabilité ≥ 80% ASTM C 666 [27]procedure A ou perte de masse≤1.0 kg/m2 (ASTMC 672)[28] , ou Facteur d'espacement≤0.008 in. Teneur en air ≥3.0% (ASTM C 457) [29]	2000
F2	Facteur de durabilité ≥ 85% ASTM C 666 [27]procedure A ou perte de masse≤1.0 kg/m2 (ASTMC 672)[28] , ou Facteur d'espacement≤0.008 in. Teneur en air ≥3.0% (ASTM C 457) [29]	2000
F3	Facteur de durabilité ≥ 90% ASTM C 666 [27]procedure A ou perte de masse≤1.0 kg/m2 (ASTMC 672)[28] , ou Facteur d'espacement≤0.008 in. Teneur en air ≥3.0% (ASTM C 457) [29]	2000

Tableau 2. Essais Performantiels pour l'exposition au gel/ au dégel [Hover et al, 2008]

Classe d'exposition	Essais Performantiels (ASTM C 1012 maximum expansion) [31]			Essai performantiel (ASTM C1202) [30]
	6 –months	12-months	18-months	
S0				
S1	0.10 %			2500
S2	0.05%	0.10%	0.10%	2000
S3			0.10%	2000

Tableau 3. Essais Performantiel pour l'exposition au sulfate [Hover et al, 2008]

Exposure Class		Essai Performantiel (ASTM C1202) [30]
Protection contre la corrosion des armatures	Faible perméabilité	
C0	P0	
C1		
	P1	2500
C2		1500

Tableau 4. Essais Performantiels pour la corrosion des armatures et une faible perméabilité [Hover et al, 2008]

Annexe 2 : Annexe F -Recommandations sur les valeurs limites de composition du béton [NF EN 206/CN, 2014]

Tableau F.1 — Recommandations relatives aux valeurs limites pour la composition et les propriétés du béton

	Classes d'exposition																	
	Aucun risque de corrosion ni d'attaque	Corrosion par carbonatation				Corrosion par les chlorures						Attaque par le gel-dégel				Environnements chimiques agressifs		
						Eau de mer			Chlorures autres que ceux de l'eau de mer									
	X0	XC1	XC2	XC3	XC4	XS1	XS2	XS3	XD1	XD2	XD3	XF1	XF2	XF3	XF4	XA1	XA2	XA3
e/c maximal [c]	–	0,65	0,60	0,55	0,50	0,50	0,45	0,45	0,55	0,55	0,45	0,55	0,55	0,50	0,45	0,55	0,50	0,45
Classe de résistance minimale	C12/15	C20/25	C25/30	C30/37	C30/37	C30/37	C35/45	C35/45	C30/37	C30/37	C35/45	C30/37	C25/30	C30/37	C30/37	C30/37	C30/37	C35/45
Teneur minimale en ciment [c] (kg/m^3)	–	260	280	280	300	300	320	340	300	300	320	300	300	320	340	300	320	360
Teneur minimale en air (%)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4,0[a]	4,0[a]	4,0[a]	–	–	–
Autres exigences	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	Granulats selon l'EN 12620, présentant une résistance au gel-dégel suffisante				–	Ciment résistant aux sulfates [b]	

[a] Lorsque le béton ne contient pas d'air entraîné volontairement, il convient de soumettre à essai la performance du béton selon une méthode d'essai appropriée et de la comparer à un béton pour lequel la résistance au gel-dégel pour la classe d'exposition concernée est établie.

[b] Lorsque la présence de sulfates conduit à des classes d'exposition XA2 et XA3, il est essentiel d'utiliser un ciment résistant aux sulfates conforme à l'EN 197-1 ou à des normes nationales complémentaires.

[c] Lorsque le concept de coefficient k est appliqué, le rapport maximal e/c et la teneur minimale en ciment sont modifiés conformément à 5.2.5.2.

Annexe 3 : Algorithme de résolution du plan d'essais optimal avec contraintes de coût (essais destructifs)

1. $n_{max} = min(\lfloor (\boldsymbol{C_{ADT}} - 2dC_{op})/(2d(C_{mea} + C_{sam})) \rfloor, \lfloor N_A/(2d) \rfloor)$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, et n_{max} est la valeur la plus grande de n_k quand f_k =1 et $m_k = 2 \; \forall \; k$
2. for $n_1 = n_{min} : n_{max}$
3. … …
4. for $n_d = n_{min} : n_{max}$

   … …
5. $f_{max} = min\left(\left\lfloor \frac{(\boldsymbol{C_{ADT}} - 2(C_{mea}+C_{sam})\sum_{k=1}^{d} n_k)}{2dC_{op}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_A}{2} \right\rfloor\right)$, avec f_{max} la valeur la plus grande de f_k quand n_k est fixé et $m_k = 2 \; \forall \; k$;
6. for $f_1 = 1 : f_{max}$ do
7. … …
8. for $f_d = 1 : f_{max}$ do
9. for $m_1 = 2 : \lfloor t_A/f_1 \rfloor$ do
10. … …
11. for $m_d = 2 : \lfloor t_A/f_d \rfloor$ do
12. if $TC \leq C_b, \sum_{k=1}^{d} n_k m_k \leq N_A$ then
13. if $det\,(I(\Theta)) \geq I_{max}$ (D-optimality) then
14. $Plan_D = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$;
15. end
16. if $Avar(\hat{T}_{MTTF}) \leq Avar_{min}$ (V-optimality) then
17. $Plan_V = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
18. end
19. if $trace(I^{-1}(\Theta)) \leq trace_{min}(I^{-1}(\Theta))$ (A-optimality) then
20. $Plan_A = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
21. end
22. end
23. end
24. end
25. end
26. end
27. end
28. end

Annexe 4 : Algorithme de résolution du plan d'essais optimal sans contraintes de coût (essais destructifs)

1. $n_{max} = (\lfloor N_A/(2d) \rfloor)$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, et n_{max} est la valeur la plus grande de n_k quand f_k =1 et $m_k = 2 \; \forall \; k$
2. for $n_1 = n_{min} : n_{max}$
3. ……
4. for $n_d = n_{min} : n_{max}$

   ……
5. $f_{max} = \left(\left\lfloor \frac{t_A}{2} \right\rfloor\right)$, avec f_{max} la valeur la plus grande de f_k et $m_k = 2 \; \forall \; k$;
6. for $f_1 = 1 : f_{max}$ do
7. ……
8. for $f_d = 1 : f_{max}$ do
9. for $m_1 = 2 : \lfloor t_A/f_1 \rfloor$ do
10. ……
11. for $m_d = 2 : \lfloor t_A/f_d \rfloor$ do
12. if $\sum_{k=1}^{d} n_k m_k \leq N_A$ then
13. if $det\,(I(\Theta)) \geq I_{max}$ (D-optimality) then
14. $Plan_D = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$;
15. end
16. if $Avar(\hat{T}_{MTTF}) \leq Avar_{min}$ (V-optimality) then
17. $Plan_V = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
18. end
19. if $trace(I^{-1}(\Theta)) \leq trace_{min}(I^{-1}(\Theta))$ (A-optimality) then
20. $Plan_A = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
21. end
22. end
23. end
24. end
25. end
26. end
27. end
28. end

Annexe 5 : Algorithme de résolution du plan d'essais avec contraintes de coût (essais non destructifs)

1. $n_{max} = min\left(\left\lfloor (\boldsymbol{C_{ADT}} - 2dC_{op})/(d(2C_{mea} + C_{sam}))\right\rfloor, N_A - d + 1\right)$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, et n_{max} est la valeur la plus grande de n_k quand f_k =1 et $m_k = 2\ \forall\ k$
2. for $n_1 = n_{min} : n_{max}$
3. … …
4. for $n_d = n_{min} : n_{max}$

… …

5. $f_{max} = min\left(\left\lfloor \frac{(\boldsymbol{C_{ADT}} - (2C_{mea} + C_{sam})\sum_{k=1}^{d} n_k)}{2dC_{op}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_A}{2} \right\rfloor\right)$, avec f_{max} la valeur la plus grande de f_k quand n_k est fixé et $m_k = 2\ \forall\ k$;
6. for $f_1 = 1 : f_{max}$ do
7. … …
8. for $f_d = 1 : f_{max}$ do
9. for $m_1 = 2 : \lfloor t_A / f_1 \rfloor$ do
10. … …
11. for $m_d = 2 : \lfloor t_A / f_d \rfloor$ do
12. if $TC \leq C_b, \sum_{k=1}^{d} n_k m_k \leq N_A$ then
13. if $det\ (I(\Theta)) \geq I_{max}$ (D-optimality) then
14. $Plan_D = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$;
15. end
16. if $Avar(\hat{T}_{MTTF}) \leq Avar_{min}$ (V-optimality) then
17. $Plan_V = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
18. end
19. if $trace(I^{-1}(\Theta)) \leq trace_{min}(I^{-1}(\Theta))$ (A-optimality) then
20. $Plan_A = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
21. end
22. end
23. end
24. end
25. end
26. end
27. end
28. end

Annexe 6 : Algorithme de résolution du plan d'essais sans contraintes de coût (essais non destructifs)

1. $n_{max} = min(, N_A - d + 1)$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, et n_{max} est la valeur la plus grande de n_k quand f_k =1 et $m_k = 2 \forall k$
2. for $n_1 = n_{min} : n_{max}$
3. ……
4. for $n_d = n_{min} : n_{max}$

   ……
5. $f_{max} = min\left(, \left\lfloor \frac{t_A}{2} \right\rfloor\right)$, avec f_{max} la valeur la plus grande de f_k quand n_k est fixé et $m_k = 2 \forall k$;
6. for $f_1 = 1 : f_{max}$ do
7. ……
8. for $f_d = 1 : f_{max}$ do
9. for $m_1 = 2 : \lfloor t_A / f_1 \rfloor$ do
10. ……
11. for $m_d = 2 : \lfloor t_A / f_d \rfloor$ do
12. if $\sum_{k=1}^{d} n_k m_k \leq N_A$ then
13. if $det\,(I(\Theta)) \geq I_{max}$ (D-optimality) then
14. $Plan_D = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$;
15. end
16. if $Avar(\hat{T}_{MTTF}) \leq Avar_{min}$ (V-optimality) then
17. $Plan_V = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
18. end
19. if $trace(I^{-1}(\Theta)) \leq trace_{min}(I^{-1}(\Theta))$ (A-optimality) then
20. $Plan_A = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$
21. end
22. end
23. end
24. end
25. end
26. end
27. end
28. end

Annexe 7 Algorithme du plan d'essais avec contraintes de coût et échelle de temps$\sqrt{t}$ (essais destructifs)

1.. $n_{max} = min\left(\left\lfloor (\boldsymbol{C_{ADT}} - 4dC_{op})/(2d(C_{mea} + C_{sam}))\right\rfloor, \lfloor N_A/(2d)\rfloor\right)$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, et n_{max} est la valeur la plus grande de n_k quand f_k =1 et $m_k = 2\ \forall\ k$

2. for $n_1 = n_{min}: n_{max}$

3. …….

4. for $n_d = n_{min}: n_{max}$

……

5. $f_{max} = min\left(\left\lfloor\left\lfloor \frac{(\boldsymbol{C_{ADT}} - 2(C_{mea}+C_{sam})\sum_{k=1}^{d} n_k)}{dC_{op}4}\right\rfloor^{0.5}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{\sqrt{t_A}}{2}\right\rfloor\right)$, avec f_{max} la valeur la plus grande de f_k quand n_k est fixé et $m_k = 2\ \forall\ k$;

6. for $f_1 = 1: f_{max}$ do

7. ……

8. for $f_d = 1: f_{max}$ do

9. for$m_1 = 2: \lfloor\sqrt{t_A}/f_1\rfloor$ do

10. ……

11. for $m_d = 2: \lfloor\sqrt{t_A}/f_d\rfloor$ do

12. if $TC \leq C_b, \sum_{k=1}^{d} n_k m_k \leq N_A$ then

13. if $det\ (I(\Theta)) \geq I_{max}$ (D-optimality) then

14. $Plan_D = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$;

15. end

16. if $Avar(\hat{T}_{MTTF}) \leq Avar_{min}$ (V-optimality) then

17. $Plan_V = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$

18. end

19. if $trace(I^{-1}(\Theta)) \leq trace_{min}(I^{-1}(\Theta))$ (A-optimality) then

20. $Plan_A = (n_1, \dots, n_d, f_1, \dots, f_d, m_1, \dots, m_d)$

21. end

22. end

23. end

24. end

25. end

26. end

27. end

28. end

Annexe 8 Expression de la matrice de Fisher $I(\Theta)$

$$I(\Theta)=\begin{bmatrix} E(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\mu_\alpha)^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\sigma_\alpha^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\beta}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\sigma_B^2}) \\ E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_\alpha^2\partial\mu_\alpha}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\sigma_\alpha^2)^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_\alpha^2\partial\beta}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_\alpha^2\partial\sigma_B^2}) \\ E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\mu_\alpha}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\sigma_\alpha^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\sigma_B^2}) \\ E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_B^2\partial\mu_\alpha}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_B^2\partial\sigma_\alpha^2}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_B^2\partial\beta}) & E(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\sigma_B^2)^2}) \end{bmatrix},$$

avec $E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\mu_\alpha)^2}\right)=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{B_{1kj}}$,

$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\sigma_\alpha^2}\right)=0, E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\sigma_B^2}\right)=0,$

$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_\alpha\partial\beta}\right)=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}\mu_\alpha s_k e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{B_{1kj}}$,

$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\sigma_\alpha^2)^2}\right)=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}}{2}(\frac{e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{B_{1kj}})^2$,

$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_\alpha^2\partial\beta}\right)=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}s_k\sigma_\alpha^2 e^{4\beta s_k}\tau_{kj}^2}{B_{1kj}^2}$,

$E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_\alpha^2\partial\sigma_B^2})=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{2B_{1kj}^2}$,

$E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2})=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}p_{kj}(2s_k^2+\frac{2s_k^2\sigma_B^4}{B_{1kj}^2}+\frac{s_k^2\mu_\alpha^2 e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{B_{1kj}}-\frac{4s_k^2\sigma_B^2}{B_{1kj}})$,

$E(-\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\sigma_B^2})=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}s_k\sigma_\alpha^2 e^{2\beta s_k}\tau_{kj}}{B_{1kj}^2}$, and

$$E(-\frac{\partial^2 l}{\partial(\sigma_B^2)^2})=N\sum_{k=1}^{d}\sum_{j}^{m_k}\frac{p_{kj}}{2B_{1kj}^2}$$

Titre : Méthode Probabiliste Générique de Qualification de la Durabilité/Fiabilité du Béton dans Son Environnement

Mots clés : durabilité, approche performantielle, béton, essais accélérés et sévérisés, processus de Wiener, optimisation.

Résumé : L'évolution des techniques de construction, l'innovation et la prise en compte des normes environnementales poussent les acteurs du domaine de la construction à proposer des matériaux performants et innovants pour la construction des bâtiments et des différentes infrastructures dans le monde. Le matériau béton reste de nos jours le plus utilisé dans le domaine de la construction. La normalisation de la formulation des bétons se base généralement sur des règles prescriptives tenant compte du rapport Eau/Ciment, de la classe de résistance minimale, de la teneur minimale en ciment, teneur minimal en air, etc. Cette méthode prescriptive reste satisfaisante mais doit être complétée par une autre alternative permettant de prendre en compte l'utilisation de composition de béton non mentionnée dans la norme. Ainsi, l'approche performancielle de la durabilité du béton a été proposée. Le principe est de permettre la fabrication d'un béton avec une formule différente de celle de la norme tout en montrant qu'elle est aussi performante que celle de la norme. Cette démonstration de performance passe par l'utilisation des indicateurs de durabilité et des essais performanciels. Les résultats des essais réalisés sur la nouvelle formulation de béton pourront montrer si sa performance est égale ou supérieure à celle de la norme. Le problème se pose sur le nombre d'essais à réaliser afin de garantir la performance du béton. Dans cette thèse, une méthode générique de qualification de la Durabilité/Fiabilité du béton avec un plan d'essais optimisé est proposée pour différents types d'environnement. Cette méthode permet d'estimer la Durabilité/Fiabilité du béton dans son environnement avec une garantie donnée et une statistique des essais à réaliser. Le processus de Wiener est utilisé afin de modéliser les processus de dégradation dans le béton. Une application de la méthode est réalisée pour le cas d'un béton soumis à la carbonatation.

Title : Generic probabilistic method for Qualifying the Durability/Reliability of Concrete in Its Environment

Keywords : Durability, performance-based approach, Concret, Accelerated tests, Wiener Model, optimization.

Abstract : The evolution of construction techniques, innovation and the environmental consideration standards are driving construction players to offer efficient and innovative materials for the construction of buildings and various infrastructures around the world. The material remains the most widely used in the construction industry today. Concrete standardization is generally based on prescriptive rules that take into account the Water/Cement ratio, the minimum resistance class, the minimum cement content, minimum air content, etc. This prescriptive method remains satisfactory but must be supplemented by another alternative to take into account the use of concrete composition not mentioned in the standard. Thus, the performance-based approach to concrete durability has been proposed. The aim is to allow the manufacture of concrete with a different formula than the standard while showing that it is as efficient as that of the standard. This performance demonstration involves the use of durability indicators and performance tests. The results of the tests carried out on the new concrete formulation will show whether its performance is equal to or above that of the standard. The problem arises in the number of tests to be carried out in order to guarantee the performance of the concrete. In this thesis, a generic method of qualifying the durability/Reliability of concrete with an optimized test plan is proposed for different types of environments. This method allows to estimate the durability/reliability of concrete in its environment with a given guarantee and a statistic of the tests to be carried out. The Wiener process is used to model degradation processes in concrete. An application of the method is carried out for the case of a concrete subject to carbonation.