

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par

Isabelle SANTOS

Le 25 février 2019

Fonctions de navigation stochastiques : application à la planification robuste de trajectoires d'avions

---

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
Laboratoire de Recherche ENAC

Thèse dirigée par
Stéphane PUECHMOREL et Guillaume DUFOUR

Jury

M. Eric FERON, Rapporteur
Mme Juliette LEBLOND, Rapporteure
M. Jean-Baptiste CAILLAU, Examinateur
M. Pierre MARÉCHAL, Examinateur
Mme Claudia NEGULESCU, Examinatrice
M. Stéphane PUECHMOREL, Directeur de thèse

Résumé

Contexte Avec l'augmentation continue du trafic aérien, une refonte des méthodes de planification pour les trajectoires des avions est nécessaire. De nombreuses pistes, telles que les fonctions de navigation, ont été proposées, mais dans le domaine de la gestion du trafic aérien, toute nouvelle méthode doit démontrer sa fiabilité avant de pouvoir être déployée.

Objectifs Implémenter des outils permettant de démontrer la robustesse des trajectoires obtenues avec les fonctions de navigation harmoniques aux aléas liés au vent qui ont pour effet de déplacer longitudinalement les avions.

Méthodes La variation de Hadamard permet de déterminer la variation de la solution d'une équation différentielle sous une perturbation des bords du domaine. La mise en œuvre de cette formule de variation nécessite l'implémentation d'une méthode efficace pour le calcul numérique de la fonction de Green.

Résultats Nous avons montré dans cette thèse qu'il est possible d'obtenir la fonction de Green, ainsi que ses dérivées, de façon semi-analytique. De plus, les valeurs obtenues par cette méthode pour la fonction de Green peuvent être utilisées dans le calcul de la variation de Hadamard.

Conclusions L'utilisation de cette fonction de Green semi-analytique pour le calcul de la variation de Hadamard permet de prendre en compte des incertitudes sur la position des obstacles. Des pistes d'amélioration de cette méthode basée sur la fonction de Hadamard sont également proposées, notamment pour optimiser le temps de calcul de la variation et pour améliorer la précision des résultats.

Mots-clés : fonctions de navigation harmoniques, variation de Hadamard, planification de trajectoires d'avions, fonction de Green, méthode semi-analytique

Abstract

Context As air traffic continues to increase, new aircraft trajectory plannification methods need to be implemented. Navigation functions have been implemented to this end, but their reliability in an uncertain environment is yet to be demonstrated.

Aims Implementing new tools based on the Hadamard variational formula to take into account the uncertainties on the longitudinal position of aircraft when computing the navigation function.

Methods The Hadamard variation makes it possible to assess the effect of a domain boundary variation on the trajectories computed using harmonic navigation functions. Using this variational formula requires the developpment of an efficient method to numerically compute the Green's function.

Results We demonstrate in this thesis that it is possible to numerically determine the Green's function and its derivatives with a semi-analytical method. Furthermore, the Green's function determined in this manner can be used to compute the Hadamard variational formula.

Conclusions This semi-analytical Green's function can be used to compute the Hadamard variational formula and makes it possible to account for uncertainties on the position of obstacles. We also give some leads on how to improve this method based on the Hadamard variational formula, most notably on how to reduce computation time and improve accuracy.

Keywords : navigation function, Hadamard variation formula, aircraft trajectory planning, semi-analytical methods

Table des matières

Résumé i

Abstract iii

Table des matières v

Table des figures ix

Remerciements xiii

Introduction 1
Problématique . . . 1
Structure de la thèse . . . 2

1. Contexte opérationnel et modélisation 3
1.1. Cadre opérationel . . . 3
1.1.1. Structuration du trafic . . . 3
1.1.2. Planification du trafic . . . 6
1.1.3. Conflits aériens . . . 7
1.2. Opérations basées sur la trajectoire . . . 8
1.2.1. Concept de trajectoire 4D . . . 9
1.2.2. Concept de secteur free-route . . . 9
1.3. Éléments de météorologie . . . 10
1.4. Modélisation du problème . . . 12

2. Fonctions de navigation harmoniques 15
2.1. Introduction . . . 15
2.2. Fonctions de navigation . . . 16
2.2.1. Définitions . . . 16
2.2.2. Propriétés . . . 17
2.2.3. Limites . . . 18
2.3. Potentiels harmoniques . . . 18
2.3.1. Définitions et propriétés . . . 18
2.3.2. Calcul de la fonction de navigation harmonique . . . 19
2.3.3. Application au domaine de l'ATM . . . 20
2.3.4. Fonction de navigation harmonique soumise à une perturbation du domaine . . . 20

2.4. Perspectives 23
2.4.1. Extension aux mouvements coordonnés 23
2.4.2. Potentiels biharmoniques 25
2.5. Conclusion 28

3. Approximation semi-analytique de la fonction de Green 29
3.1. Définitions et propriétés 29
3.1.1. Fonction de Green : définition 29
3.1.2. Limites des méthodes canoniques de résolution 30
3.2. Calcul de la fonction de Green sur un monde sphérique 31
3.2.1. La fonction de Green issue de transformations conformes 31
3.2.2. Notations 32
3.2.3. Fonction harmonique extérieure à des disques 33
3.2.4. Fonction de Green et dérivées 35
3.2.5. Limites de la méthode 36
3.3. Résultats 36
3.3.1. Convergence de la méthode 37
3.3.2. Complexité en temps de l'algorithme 42
3.3.3. Exemples d'applications 43
3.4. Conclusion 44

4. Variations de Hadamard 47
4.1. Introduction 47
4.2. Variation de Hadamard 48
4.2.1. Définitions 48
4.3. Résultats 50
4.3.1. Variation de la fonction de Green 51
4.3.2. Variation des trajectoires construites avec une fonction de navigation harmonique 53
4.4. Application aux déplacements aléatoires 54
4.5. Conclusion et perspectives 55

Conclusion générale 57
Contribution 57
Perspectives 57
Deuxième variation de Hadamard 57
Extension aux fonctions de navigation biharmoniques 58
Parallélisation de l'algorithme 58
Alternatives à la méthode de calcul de la fonction de Green 58
Réponse aux variations du bord 58
Conflits à plus de deux avions 59

A. Méthode des éléments finis pour le calcul de la fonction de Green **61**
A.1. Définition et algorithmes 61
A.1.1. Forme variationnelle 62
A.1.2. Maillage du domaine 62
A.1.3. Bases de fonctions 63
A.1.4. Matrice de rigidité 65
A.1.5. Second membre de la forme variationnelle 65
A.2. Limites 66
A.3. Conclusion 66

B. Résumé grand public **67**

Bibliographie **69**

Production de la thèse **77**

Acronymes **79**

Table des figures

1.1. Profil d'un vol avec les différentes phases de vol 4
1.2. Poste de contrôle sur l'écran duquel figure un secteur aérien et des couloirs aériens qui le traversent. 6
1.3. Cylindre de protection d'un avion en route 7
1.4. Secteur free-route de Maastricht dans lequel 142 nouvelles routes directes ont été définies 11
1.5. Représentation (non à l'échelle) de l'espace aérien avec un autre trafic. En vert, la destination de l'avion considéré. En bleu, les limites interdites. 13
1.6. Un monde sphérique du plan borné par un cercle extérieur de centre c_1 et trois cercles intérieurs de rayons respectifs c_2, c_3 et c_4. 14

2.1. Fonctions de navigation passant à droite ou à gauche d'un obstacle pour des petits déplacements de celui-ci. Le cadre orange sur la figure de gauche représente les bords de la figure de droite. 21

3.1. Transformation conforme du monde sphérique Ω 33
3.2. Situations exceptionnelles 37
3.3. $\log \varepsilon$, avec ε telle que définie dans l'équation 3.30 évaluée en $x = -2$. . . 38
3.4. Domaine sur lequel la solution harmonique est reconstruite et pour lequel une solution analytique de l'équation harmonique existe. 39
3.5. $\log \epsilon_1$ en fonction de n_c pour un nombre donné de termes N dans la série de Laurent, pour deux façons de calculer la fonction harmonique 41
3.6. Temps d'exécution normé de l'algorithme en fonction du nombre n_c de points par cercle pour différents nombres N de termes dans la série de Laurent 42
3.7. Approximation g de la fonction de Green sur le disque unité avec un obstacle de rayon 0.1 et de centre $-0.2-0.5i$ et avec un disque destination de rayon 0.2 et de centre $0.5i$ 44
3.8. Fonctions de navigations calculés au départ des points $40-40i$, $35-55i$, $50-25i$, $-80-40i$ and $-80+50i$ 45

4.1. Variation $\delta\rho$ du domaine Ω en un point x du bord 47
4.2. Réponse à une dilatation du disque intérieur. 52
4.3. Réponse à une translation du disque intérieur. 52

4.4. Trajectoires obtenues pour différentes positions de l'obstacle. La trajectoire correspondant à une position centrale de l'obstacle est donnée en rouge. L'échelle de couleurs indique le rapport entre l'amplitude $\delta\rho$ de la translation du disque obstacle et le diamètre de celui-ci. 53

A.1. Maillage sur un monde sphérique 63

À mon arrière-grand-mère Maria
qui ne savait ni lire, ni écrire

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Stéphane Puechmorel et Guillaume Dufour, mes directeurs de thèse, pour leurs conseils avisés et l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de ces trois ans.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Éric Feron et Juliette Leblond, mes rapporteurs, pour avoir accepté de lire ce mémoire.

Je souhaite remercier tous les collègues du laboratoire pour leur accueil et l'ambiance au quotidien, et particulièrement Serge Roux pour les pauses café et les conversations absurdes.

Un grand merci à Anne-Flore, Antoine, Aurélien, Baptiste, Chloé, Julie, Julien, Julien et Squeeek pour la correction des fautes d'orthographe et des erreurs d'inattention, ainsi que pour les reformulations.

À Julie, merci de m'avoir soutenue et supportée ces derniers mois.

Merci aussi au personnel de la cantine de l'ENAC pour leur gentillesse chaque jour. S'ils ne m'avaient pas nourrie pendant ces trois années, mon travail de thèse aurait été beaucoup plus difficile.

Merci au lecteur intéressé par mes travaux.

Introduction

Problématique

Le trafic aérien augmente de près de 5% par an à l'échelle mondiale, et pourrait, d'après les prévisions d'Eurocontrol [23], continuer d'augmenter ainsi dans les années à venir. Or l'espace aérien arrive déjà à saturation avec les méthodes de gestion actuelles. Cette limite de capacité de l'espace aérien génère déjà des retards sur les vols, et ce problème s'accentue avec l'augmentation du trafic.

Dans ce contexte, deux programmes, Single European Sky ATM Research (SESAR) en Europe et NextGen aux États-Unis ont été initiés. Ils visent à fournir des systèmes performants de gestion du trafic aérien afin de moderniser les systèmes actuels pour permettre à l'économie du transport aérien de poursuivre son développement. En exploitant les technologies telles que le Global Positioning System (GPS) ou l'Automatic Dependent Surveillance-Broadcast (ADS-B), le programme SESAR a pour ambition une diminution de moitié des coûts dus au contrôle aérien, une réduction de 10 % de l'impact sur l'environnement, une division du risque d'accident par 10 et un triplement de la capacité de l'espace aérien.

Une des pistes de modernisation proposées par SESAR et NextGen est de supprimer le réseau de couloirs aériens que les avions doivent suivre à l'heure actuelle. Ces routes rendent le trafic prévisible, ce qui permet aux contrôleurs d'anticiper les conflits aériens (situations dans lesquelles la distance entre deux avions est inférieure à la distance minimum de sécurité). En revanche, cette façon d'organiser le trafic rend l'utilisation de l'espace aérien inégale, puisqu'elle condense le trafic dans les couloirs aériens, et ne permet pas forcément aux avions de suivre les chemins les plus directs.

En s'affranchissant de ces couloirs, tout l'espace aérien pourrait être utilisé, augmentant ainsi la capacité du ciel. On parle alors de trajectoires *free-routes*. Celles-ci permettent également aux avions de suivre des trajectoires potentiellement plus économes en temps et en carburant. Dans le futur, nous pouvons nous attendre à voir des trajectoires planifiées en 4D (quatre dimensions), sans couloirs aériens prédéfinis, et de sorte que les conflits soient évités par construction.

Cependant, ce changement de paradigme rendrait le trafic impossible à gérer pour les contrôleurs aériens s'il n'était pas accompagné d'outils pour réduire la probabilité d'occurrence d'un conflit. Il devient alors nécessaire de planifier des trajectoires sans conflits à l'avance, afin de ne pas surcharger le travail du contrôleur tout en garantissant une sécurité maximale.

Des pistes prometteuses, telles que les fonctions de navigation, sont proposées pour s'affranchir des couloirs aériens, en proposant, à l'horizon stratégique, des trajectoires

plus directes aux avions et aux compagnies aériennes. Mais tous les outils déployés pour permettre cette transition devront avoir un niveau de fiabilité démontré. En particulier, l'influence du vent sur les trajectoires proposées devra être pris en compte. De nombreuses pistes ont été étudiées pour planifier de telles routes plusieurs jours à l'avance. Cependant, aucun algorithme connu ne permet de planifier des trajectoires de sorte que celles-ci soient robustes face à un vent de face ou un vent arrière incertain.

Les champs de potentiel artificiels, tels que d'abord utilisés dans [44], permettent à un mobile d'atteindre une destination tout en évitant les obstacles dans un environnement complexe. Cette méthode a été étendue à des environnements dynamiques, pour la planification de trajectoires multiples dans [45], avec de la coordination entre les mobiles dans [82], ou encore avec des obstacles mobiles dans [31].

Les fonctions de navigation ont été définies comme étant un cas particulier des champs de potentiel artificiels et utilisées pour la planification de trajectoires de robots [19, 69] avant d'être étendues pour générer des trajectoires d'avions. Les trajectoires ainsi générées respectent les contraintes spécifiques au trafic aérien concernant le rayon de courbure et la vitesse. De plus, une preuve d'évitement peut être obtenue.

Les fonctions de navigation ont également été utilisées pour planifier des trajectoires sous des contraintes liées au vent pour la navigation de voiliers [66]. Des études plus récentes des fonctions de navigation ont cherché à les appliquer au guidage en temps-réel de vaisseaux spatiaux [1] ou à la planification dans un environnement incertain [37].

Cependant, les fonctions de navigation, telles qu'elles ont été étudiées dans le cadre de la planification de trajectoires d'avions reposent sur l'hypothèse d'un environnement déterministe. L'objectif de cette thèse est de présenter une méthode pour s'assurer de la robustesse des trajectoires aux aléas météorologiques, en considérant notamment l'impact du vent sur les déplacements des avions.

Structure de la thèse

Dans un premier chapitre, nous traitons du contexte opérationnel dans lequel se placent ces travaux de thèse, en termes de contraintes spécifiques au trafic aérien et de nouveaux outils mis en œuvre pour mieux gérer le trafic aérien. Le second chapitre présente plus spécifiquement la méthode globale de planification de trajectoires d'avions étudiée, à savoir les fonctions de navigation harmoniques.

Les deux chapitres suivants contiennent les travaux effectués sur la planification de trajectoires. Le troisième chapitre, qui constitue le cœur de cette thèse, détaille la méthode de calcul développée pour obtenir semi-analytiquement un outil de calcul : la fonction de Green. Nous montrons dans le quatrième chapitre l'utilisation de cette fonction de Green dans l'obtention de la variation de Hadamard, c'est-à-dire des variations de la solution harmonique en fonction des variations du bord du domaine. Chacun de ces chapitres contient, en plus de ses matériels et méthodes, ses propres résultats et sa propre conclusion. Enfin, le dernier chapitre constitue une conclusion générale de ce document.

1. Contexte opérationnel et modélisation

Dans ce chapitre, nous expliquerons le contexte opérationnel de cette thèse, en détaillant notamment les contraintes de la gestion du trafic aérien. Puis nous décrirons l'importance des free-routes dans la modernisation des moyens de gestion du trafic aérien et nous donnerons quelques points de météorologie. Enfin, nous verrons comment tous ces éléments s'intègrent à la problématique étudiée et comment les modéliser.

1.1. Cadre opérationel

La gestion du trafic aérien ou Air Traffic Management (ATM) désigne le système global permettant de garantir la bonne marche du trafic aérien. Son principal objectif est d'assurer la sécurité des vols et l'efficacité de leur organisation. De nombreux outils pour atteindre cet objectif ont été déployés autour du contrôleur aérien. Parmi ceux-ci se trouve la structuration du trafic aérien. Cette structuration se fait par le biais de couloirs et de secteurs aériens qui sont assignés à un contrôleur, comme illustré en figure 1.2. Nous les définirons plus précisément avant de détailler les méthodes actuelles utilisées pour la planification du trafic, en introduisant les notions de conflit aérien et de résolution de conflit.

1.1.1. Structuration du trafic

Phases de vol

En matière d'ATM, un vol est compris entre le moment où il quitte la porte d'embarquement d'un aéroport de départ et le moment où il rejoint une porte d'embarquement sur un autre aéroport. Un vol se découpe en cinq grandes phases : le roulage de la porte au seuil de piste, le décollage et la montée initiale, la croisière, la descente depuis l'altitude de croisière et l'atterrissage, et enfin le roulage au sol pour rejoindre une porte. Les différentes phases d'un vol sont illustrées en figure 1.1.

Au cours d'un vol, un avion sera géré par plusieurs types de contrôleurs différents. Lors du roulage avant le décollage et après l'atterissage, l'avion est pris en charge par un contrôleur sol. Après le décollage, un autre contrôleur gère la montée initiale jusqu'à ce que l'avion quitte la Terminal Manoeuvring Area (TMA). Pendant la phase de croisière, celle qui intéresse notre étude, l'avion peut passer par plusieurs secteurs, chacun contrôlé par une équipe différente. Cette phase de croisière peut durer entre quelques minutes

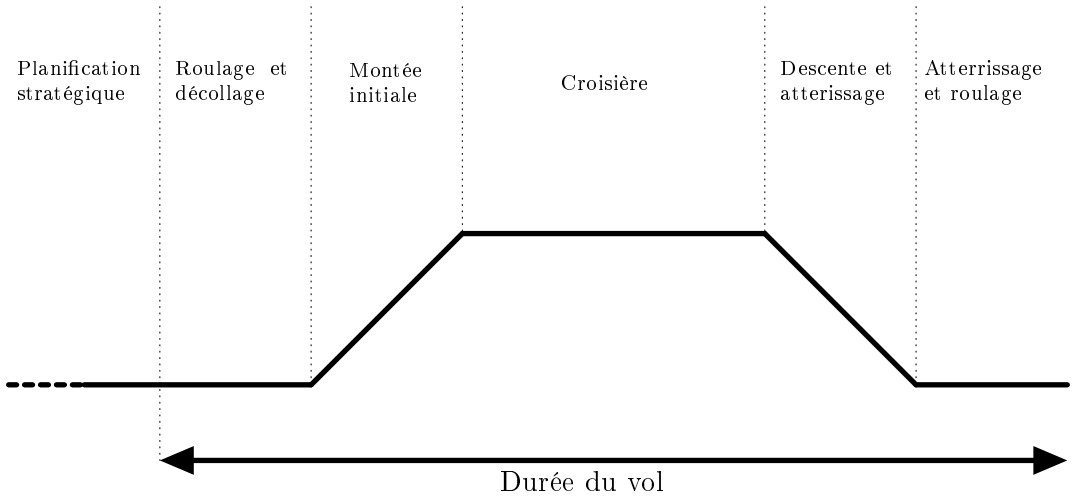


FIGURE 1.1. – Profil d'un vol avec les différentes phases de vol

et plusieurs heures, en fonction de la distance totale parcourue par l'avion. Pour un avion équipé de turboréacteurs, celle-ci se déroule typiquement à 35 000 pieds (ft). À proximité de l'aéroport d'arrivée, l'avion passe aux mains du contrôle d'approche, qui gère la descente dans la TMA et l'approche.

Les trajectoires 4D et les secteurs free-route qui seront détaillés dans la section 1.2 ne peuvent être appliqués qu'à la phase de croisière en-route, du fait des différences de densité de trafic dans les différentes zones et des changements d'altitude des avions. Nous ne traiterons donc dans la suite que de la phase de croisière, et les trajectoires considérées auront comme points de départ et d'arrivée le début et la fin de cette phase.

Couloirs aériens

À l'heure actuelle, les trajectoires des avions en croisière suivent des couloirs aériens. Chaque tronçon de couloir est défini entre deux balises au sol ou par des points de navigation En Route (désignés par cinq lettres) définis par leurs cordonnées géographiques. C'est à partir de ces tronçons et de ces balises que sont définis les plans de vol. Pour qu'un avion puisse effectuer un trajet entre deux aéroports, il doit auparavant déposer un plan de vol pour informer les services de la navigation aérienne et demander leur accord. Dans le plan de vol, la route prévue par l'avion est décrite en indiquant l'heure de passage au-dessus des différentes balises de radionavigation.

Grâce aux nouvelles technologies telles que les Global Navigation Systems by Satellite (GNSS) ou les centrales inertielles (INS et IRS), ces balises ne sont plus le seul moyen pour les avions en régime de vol aux instruments, ou Instrument Flight Rules (IFR), de connaître leur position dans l'espace. Il n'est donc plus indispensable pour les avions de suivre ces couloirs, puisqu'ils ne sont plus tributaires de ces seules balises pour se localiser.

Les couloirs aériens ne couvrent pas l'intégralité de l'espace aérien. Du fait de l'organisation du trafic le long de ces couloirs, des portions de l'espace sont donc sous-exploitées.

Il serait alors intéressant de s'affranchir de cette contrainte, pour exploiter une portion du ciel plus grande, et globalement augmenter la capacité de l'espace aérien. Les GNSS et les centrales inertielles devraient donc aider à l'augmentation de trafic aérien.

Cependant, même avec les moyens de navigation modernes, les couloirs aériens gardent leur utilité. En effet, les avions, en suivant ces couloirs, sont organisés en flux et ont ainsi une trajectoire prévisible. Cette prédictibilité est ce qui permet actuellement d'éviter la création de nouveaux conflits lorsqu'un contrôleur donne une instruction de changement de cap à un avion. De plus, les conflits aériens se produisent principalement aux intersections entre plusieurs couloirs. Cette organisation du trafic le long de couloirs permet aux contrôleurs d'anticiper et d'éviter les conflits.

Secteurs de contrôle

Un contrôleur aérien ne peut pas gérer un trop grand nombre de vols simultanés en toute sécurité. Afin de répartir la charge de travail entre plusieurs contrôleurs, l'espace aérien est lui-même divisé en secteurs. Dans chacun de ces secteurs, une paire de contrôleurs y est en charge du contrôle des avions le traversant. Chaque paire de contrôleurs doit également assurer la coordination avec les contrôleurs voisins lorsqu'un avion passe d'un secteur à l'autre. En pratique, les contrôleurs voient le secteur dont ils ont la charge sur un poste de contrôle semblable à celui illustré en figure 1.2. Sur l'écran de ce poste de contrôle, les avions sont représentés sous la forme d'un vecteur, avec une étiquette indiquant entre autres la vitesse et le niveau de vol.

La division de l'espace aérien en secteurs de contrôle permet la répartition de la charge de travail entre plusieurs contrôleurs. Lorsque le trafic dans un secteur est trop chargé pour être géré par un seul contrôleur, celui-ci peut-être divisé en deux secteurs.

En pratique, les secteurs sont divisés en secteurs plus petits, ou bien regroupés en secteurs plus grands par un chef de salle en fonction du nombre d'avions en l'air et du nombre d'avions prévus. Lorsqu'un secteur de contrôle contient plus d'une quinzaine d'avions, le chef de salle peut décider de dégrouper le secteur, c'est-à-dire de diviser ce secteur en deux plus petits secteurs et d'ouvrir un poste de contrôle supplémentaire. En fonction de la complexité du trafic dans un secteur, la décision de dégrouper le secteur peut même arriver avec un nombre d'avions plus faibles, pour éviter l'épuisement des contrôleurs.

Cependant, plus les secteurs sont petits, plus le temps passé par les contrôleurs à gérer la coordination entre les secteurs est grand. Il n'est donc pas possible de réduire la taille des secteurs en deça d'un certain seuil.

Par ailleurs, il est notable que cette structuration en secteurs et en couloirs amène des contraintes et, de ce fait, impose une limite sur la capacité de l'espace aérien. En effet, les couloirs aériens limitent l'espace dans lequel les avions peuvent voler, et la sectorisation de l'espace aérien limite le nombre d'avions pouvant voler à un instant donné. Or de nouvelles technologies permettent aujourd'hui d'envisager une transformation de la gestion du trafic aérien.

En outre, cette structuration de l'espace aérien atteint déjà ses limites en Europe, et provoque des retards sur les vols. D'après les estimations d'Eurocontrol, trois retards sur

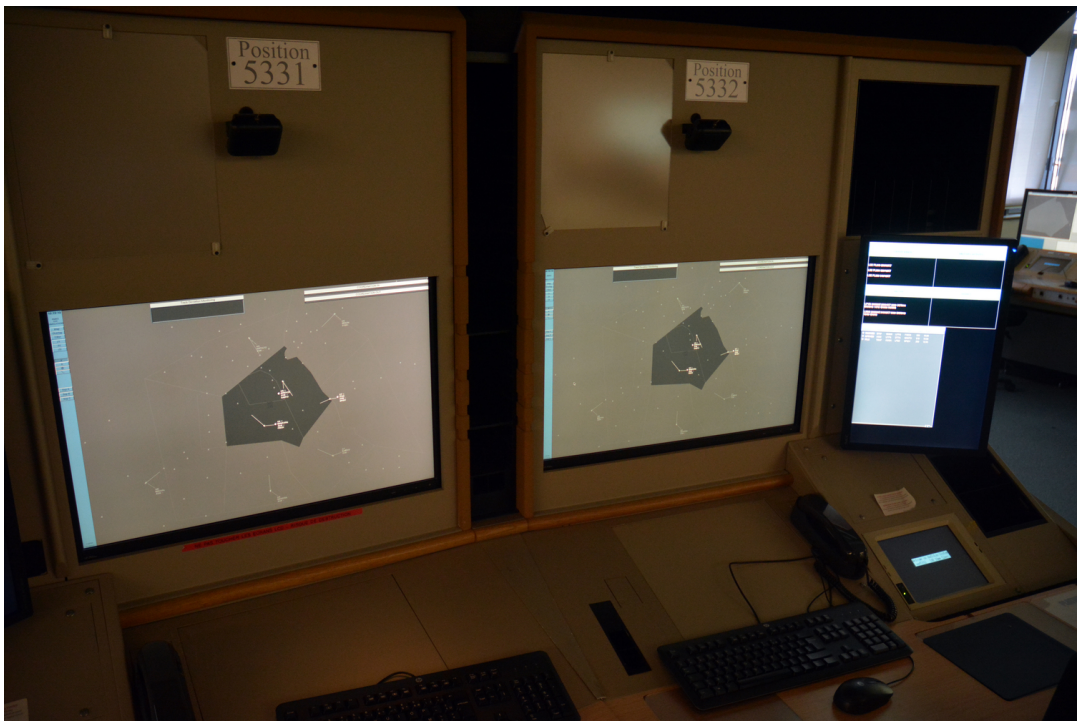


FIGURE 1.2. – Poste de contrôle sur l'écran duquel figure un secteur aérien et des couloirs aériens qui le traversent.

quatre sont dûs à l'incapacité du système à absorber le trafic. Les méthodes actuelles de gestion du trafic ne permettent donc pas une exploitation optimale de l'espace aérien.

1.1.2. Planification du trafic

Le trafic est organisé par le biais de plusieurs horizons de planification. Celui sur lequel portent nos méthodes est l'horizon stratégique.

La planification stratégique est une planification à long terme, par laquelle le trafic est structuré de manière macroscopique. Il s'agit notamment de définir les schémas d'orientation du trafic, qui fixent les volumes et les flux de manière à optimiser la capacité de l'espace aérien tout en maintenant une sécurité maximale. Pour l'Europe, cette planification est réalisée entre six mois et une semaine en amont de chaque journée par le Network Manager Operations Centre (NMOC), anciennement nommé Central Flow Management Unit (CFMU). Cet organisme est situé à Bruxelles en Belgique et un backup se situe en France à Brétigny-sur-Orge. Le NMOC organise le trafic à long et à moyen terme, jusqu'à la veille d'une journée de trafic.

Pendant la phase de planification stratégique, les objectifs en matière de capacité de l'espace aérien sont fixés, et des changements des réseaux de routes peuvent être effectués afin de décongestionner certaines zones. Les plans de vol des avions peuvent être amenés à changer plusieurs fois pendant cette période. C'est aussi au cours de cette phase de planification que les événements majeurs tels que les événements sportifs ou

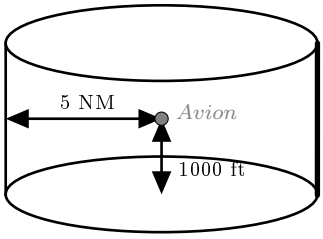


FIGURE 1.3. – Cylindre de protection d'un avion en route

les entraînements militaires et leur impact sur le trafic sont pris en compte.

Outre l'horizon de planification stratégique, il existe trois autres échelles de temps auxquelles le trafic est considéré

— pré-tactique : dans les six jours précédant un vol et jusqu'au jour même, des mesures globales de gestion de flux sont prises en fonction des prévisions de trafic, des prévisions météorologiques, mais aussi de données statistiques issues des années précédentes ;

— tactique : au cours du vol, cette planification correspond au travail effectué par les contrôleurs qui détectent et résolvent les conflits, et qui assurent le passage des avions de leur secteur à un secteur voisin ;

— d'urgence : cet horizon n'intervient qu'en cas de défaillance des trois horizons de planification précédents et comprend notamment le filet de sauvegarde qui déclenche une alarme sur l'écran radar du contrôleur lorsque deux avions entrent en conflit. Si cette alarme est insuffisante, alors le Traffic Collision Avoidance System (TCAS), qui est un système embarqué à bord des avions, se déclenche une minute avant une collision imminente pour résoudre un conflit dans le plan vertical.

1.1.3. Conflits aériens

La sécurité est assurée par l'utilisation de *normes de séparation* qui prennent en compte les incertitudes des appareils de mesure de la position des avions. Une norme de séparation est la distance minimale qui doit être maintenue à tout moment entre chaque paire d'avions. À cause de l'imprécision des radars utilisés pour la surveillance du trafic, certaines distances de sécurité doivent être conservées entre les avions afin de garantir qu'aucune collision ne se produise. Les règles imposées actuellement tiennent compte des moyens techniques mis à la disposition des contrôleurs, afin de garantir la sûreté du système aérien.

Lors de la phase en-route, qui est la phase de vol concernée par notre étude, cette séparation est de 5 Milles Nautiques (Nautical Miles, ou NM) dans le plan horizontal, et de 1000 ft (pieds) dans le plan vertical. Ces deux distances construisent un cylindre dit *de protection* autour de chaque avion, tel qu'illustré en figure 1.3. Si un autre avion entre dans ce cylindre, les deux avions sont dits *en conflit*. Dans ce cas, l'incertitude sur

leurs positions empêche de garantir la sécurité des avions, mais sans qu'une collision ne se produise effectivement.

Le travail des contrôleurs est d'empêcher tout conflit. Dans le cas où deux avions entreraient en conflit s'ils continuaient à suivre leur plan de vol, le contrôleur choisit l'un des deux avions et le fait dévier temporairement de sa route pour résoudre le conflit.

Puisque le trafic est organisé en flux par les couloirs aériens, les contrôleurs peuvent anticiper les conflits susceptibles de se produire dans les 20 minutes suivantes, et intervenir de façon préventive avant qu'un conflit ne survienne. Pour cela, les contrôleurs peuvent donner aux pilotes des instructions concernant le cap, l'altitude ou la vitesse de l'avion. En pratique, des changements de vitesse ou d'altitude ne sont donnés que s'il est impossible de résoudre le conflit avec seulement des changements de cap.

Les changements de vitesse requièrent une action des pilotes sur les moteurs, ce qui en fait une manœuvre lente. De plus, c'est une manœuvre coûteuse puisqu'il est préférable pour un avion de voler à une vitesse nominale pour des raisons de performance et de maintenance. En outre, c'est une action de portée limitée, puisqu'un avion peut voler efficacement dans un intervalle de $[-6\%, +3\%]$ autour de sa vitesse nominale. Enfin, au niveau de l'écran radar, la vitesse n'est indiquée que par une étiquette associée au plot radar. Ainsi, il est moins aisé pour le contrôleur de visualiser la séparation réalisée au moyen d'un changement de vitesse que celle réalisée au moyen d'un changement de cap. Pour ces raisons, les changements de vitesse sont peu utilisés lors de la phase en-route.

Les changements d'altitude ne sont pas souvent utilisés par les contrôleurs non plus. De même que pour le changement de vitesse, le changement d'altitude requiert une action des pilotes sur les moteurs. En outre, avant de demander un changement d'altitude, le contrôleur doit d'abord vérifier que l'avion n'entrera en conflit avec aucun des avions du niveau de vol supérieur ou inférieur. Enfin, du point de vue de la mécanique du vol, un avion aura des performances optimales à un niveau de vol précis pour une vitesse et une masse données. En fonction de ses performances et de sa masse, il pourra même être impossible à un avion en croisière de monter d'un niveau de vol. Un changement d'altitude sera donc coûteux en matière de carburant consommé et d'émissions polluantes.

En revanche, les changements de cap ne nécessitent aucun changement des paramètres moteur. De plus, les résultats de ces changements de cap sont plus faciles à visualiser sur l'écran radar pour le contrôleur que les changements de vitesse ou d'altitude. Par conséquent, le changement de cap est le moyen de contrôle le plus fréquemment utilisé par les contrôleurs. Par ailleurs, les changements de cap sont les plus adaptés pour les secteurs free-route, puisqu'ils permettent de rediriger le trafic vers les portions inutilisées d'un secteur.

1.2. Opérations basées sur la trajectoire

Le concept d'opérations basées sur la trajectoire ou Trajectory Based Operations (TBO) est une des propositions de SESAR et consiste à placer la trajectoire des avions au centre du système d'Air Traffic Control (ATC) [41]. Ce concept a pour objectif d'améliorer la capacité de l'espace aérien, l'efficacité et la prévisibilité des vols et de réduire les

temps de vol, grâce à une meilleure coordination des trajectoires. Dans ce contexte, une trajectoire d'avion ne serait plus gérée secteur par secteur, ou par tronçon de couloir aérien, mais plutôt dans sa globalité, du décollage à l'atterrissage. De cette façon, certains problèmes potentiels pourront être détectés en amont, et leurs effets sur l'ensemble du trafic pourront être mitigés.

Les TBO permettront également aux compagnies aériennes de réaliser des économies, en autorisant les avions à suivre leur route préférentielle au niveau de vol souhaité, réduisant ainsi la consommation de carburant et le temps de vol. Par ailleurs, en évitant l'envoi d'avions dans les circuits d'attente (ou hippodromes) autour des aéroports, les TBO permettent la réduction d'émissions polluantes.

Les opérations basées sur la trajectoire reposent sur plusieurs composants : les trajectoires 4D négociées entre plusieurs acteurs du système, les *merging points* ou points de convergence des avions permettant leur séquencement, et une contrainte temporelle imposée à un avion à son arrivée au point de convergence. Nous nous intéressons dans notre contexte aux trajectoires en-route. C'est donc la notion de trajectoires 4D, ainsi que le concept qui en découle de secteur free-route, qui feront l'objet des paragraphes suivants.

1.2.1. Concept de trajectoire 4D

Le terme trajectoire 4D vient du fait que l'on souhaite déterminer les trajectoires des avions dans l'espace en trois dimensions, et qu'une contrainte de temps est ajoutée à certains points de passage, ce qui représente une quatrième dimension. La mise en œuvre des trajectoires 4D permettra aux avions de s'affranchir des couloirs aériens et ainsi de suivre des trajectoires plus proches de la trajectoire optimale. Cette liberté en matière de chemin s'accompagne d'une contrainte en matière de temps de passage au dessus de certains points de convergence : les *merging points*.

Dans un premier temps, une version simplifiée des trajectoires 4D a d'abord pu être mise en œuvre. Il s'agissait d'imposer un temps d'arrivée précis à tous les avions, afin d'assurer le meilleur séquencement possible des avions à l'approche d'un aéroport. Ceci peut être fait sans difficulté technique, puisque l'équipement adéquat existe déjà sur certains aéroports et dans les avions. Cette étape initiale a été testée une première fois entre Toulouse, Copenhague et Stockholm en 2012.

Dans un second temps, des trajectoires *Full 4D* pourront être implémentées. Les avions ne seront alors plus contraints par les couloirs aériens. En revanche, les conflits pourront avoir lieu dans tout l'espace aérien et plus seulement aux intersections entre les couloirs. C'est cette seconde étape qui présente le plus de difficultés, puisqu'elle nécessite la mise en œuvre de secteurs free-route.

1.2.2. Concept de secteur free-route

Un secteur aérien free-route est un secteur en-route dans lequel les utilisateurs peuvent librement définir leur point d'entrée et leur point de sortie du secteur, sans être contraints

par des points prédéfinis. Ces secteurs restent contrôlés par des contrôleurs aériens et soumis à des restrictions (zones d'exclusion militaire par exemple).

Les secteurs free-route ont pour principal objectif d'augmenter la capacité du système ATM. Ces secteurs permettent également de diminuer la consommation de carburant par vol donc de réduire les coûts pour les compagnies aériennes. L'utilisation de trajectoires free-route pourrait également permettre de réduire l'impact environnemental du trafic aérien, en réduisant la quantité d'émissions polluantes par vol, si ce n'est que l'augmentation prévue du volume du trafic aérien est significativement plus importante que la réduction d'émission de gaz à effet de serre réalisable.

Le concept de free-route est déployé depuis de nombreuses années dans l'espace aérien de Maastricht dans le cadre du Free Route Airspace Maastricht (FRAM), ce qui a permis de démontrer sa faisabilité, mais aussi de pointer quelques unes de ses limites. En pratique, les contrôleurs aériens de Maastricht donnent la possibilité aux avions de suivre une ligne droite vers leur destination lorsque les conditions de trafic le permettent. Ainsi, 142 nouvelles routes directes y ont été introduites.

En revanche, le concept de secteur free-route est limité par les outils et techniques de contrôle actuels. L'exemple de Maastricht, illustré en figure 1.4 a montré qu'un secteur free-route n'est pas envisageable sans outils additionnels dans un secteur contenant un trafic dense et complexe. Il semble en effet impossible de demander aux contrôleurs aériens de visualiser des trajectoires courbes et d'anticiper les risques de conflit dans des situations où les avions changeraient de direction en permanence. Il est ainsi nécessaire, afin de déployer ces nouvelles méthodes, d'automatiser partiellement certains aspects du système.

Par ailleurs, ce concept de free-route n'est applicable qu'à la phase en-route d'un vol. Un secteur free-route tire son intérêt de l'utilisation des espaces laissés vides entre les couloirs aériens dans un secteur traditionnel, alors que dans un secteur d'approche, plus chargé, il y a beaucoup moins d'espace inutilisé. En outre, dans un secteur en-route, l'altitude des avions est constante par morceaux, tandis que dans un secteur d'approche, les avions changent d'altitude en permanence. Ainsi, pour éviter les conflits, les contrôleurs des secteurs en-route doivent considérer les avions volant à un même niveau dans un plan 2D, tandis que dans un secteur d'approche, introduire le concept de free-route reviendrait à demander aux contrôleurs de suivre en permanence un ensemble de trajectoires 3D. Pour ces raisons, il n'est pas envisageable de mettre en œuvre des secteurs d'approche free-route. Nous ne nous intéresserons donc pas ici à cette phase de vol, et c'est à l'en-route que fera référence la suite de ces travaux.

1.3. Éléments de météorologie

Cette section présente les éléments climatiques ayant un impact sur la trajectoire d'un avion en vol. Pour améliorer le trafic aérien, la connaissance de ces paramètres météorologiques est indispensable. Les trajectoires d'avion sont souvent planifiées pour réduire la consommation de carburant ou le temps de vol. Lorsque ces vols ont lieu dans un environnement avec du vent, la robustesse de ces trajectoires doit également être

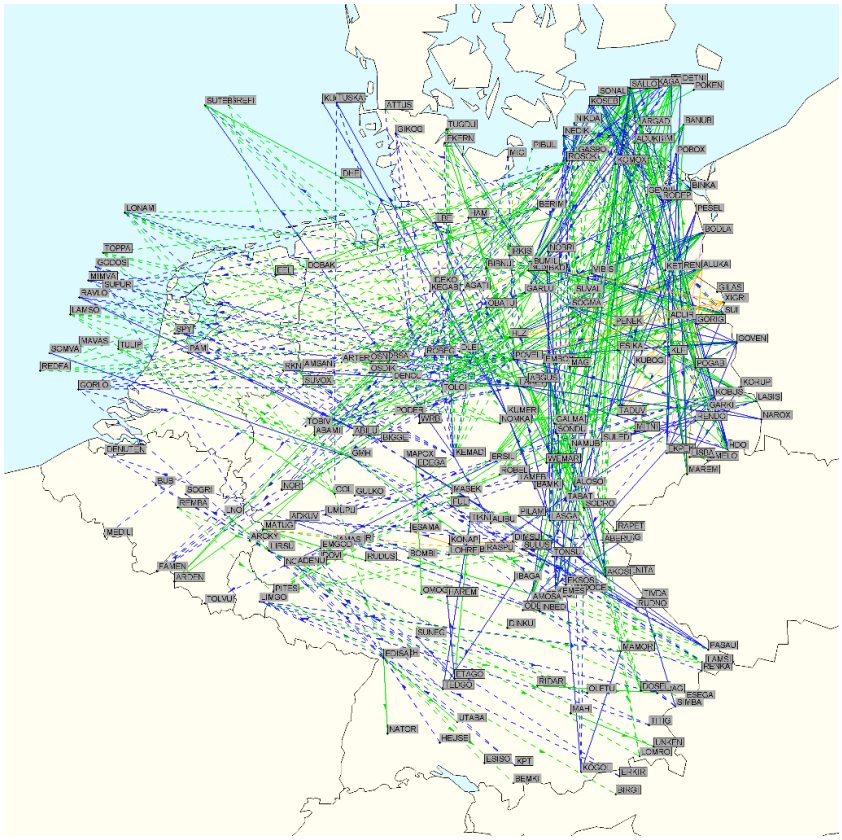


FIGURE 1.4. – Secteur free-route de Maastricht dans lequel 142 nouvelles routes directes ont été définies

prise en compte. En pratique, les compagnies aériennes peuvent préférer une trajectoire moins efficace en matière de consommation de carburant, mais plus robuste.

Le vent est défini comme le déplacement d'une masse d'air. Du point de vue d'un observateur terrestre, si un avion se déplace dans une masse d'air en mouvement, sa vitesse par rapport au sol dépend à la fois de sa vitesse propre et de la vitesse de déplacement de la masse d'air. Si les déplacements de la masse d'air et de l'avion sont en sens opposés, la vitesse par rapport au sol de l'avion sera plus faible que si la masse d'air se déplace dans le même sens que l'avion. En d'autres termes, le vent provoque un déplacement longitudinal de l'avion sur sa trajectoire. Or la vitesse et la direction du vent ne peuvent pas être anticipées à l'horizon stratégique. Les cartes WINTEM qui indiquent les prévisions de vent (WINd) et de température (TEMperature) ne sont disponibles qu'à l'horizon tactique ou pré-tactique et n'indiquent que des moyennes sur des zones étendues.

Le vent est ainsi une source d'incertitude sur la trajectoire des avions. Cette incertitude a une composante latérale et une composante longitudinale. Cependant, l'erreur latérale est aisément compensée par les systèmes de gestion de vol ou Flight Management System (FMS) en ajustant le cap. En revanche, l'erreur longitudinale, c'est-à-dire la composante projetée sur la trajectoire, ne peut être réduite que par un ajustement de la vitesse air de l'avion. Or modifier la vitesse requiert une action sur les moteurs, ce qui est coûteux pour la compagnie aérienne exploitant l'avion. Il est donc intéressant de prendre en compte l'erreur longitudinale lors de la planification plutôt que lors du vol.

Le vent suit un champ d'incertitude gaussien. L'erreur longitudinale peut donc être modélisée par une gaussienne avec un certain biais et un certain écart-type. Concernant la simulation de la perturbation induite par le vent, le lecteur intéressé est dirigé vers [68].

1.4. Modélisation du problème

Dans ces travaux, nous nous intéressons à la robustesse de la planification à l'horizon stratégique des trajectoires 4D pour la phase de vol en-route à l'échelle continentale. L'objectif à terme est de garantir la robustesse des trajectoires planifiées à l'horizon stratégique face aux aléas météorologiques. Pour cela, il sera nécessaire d'évaluer la sensibilité des trajectoires à des variations de l'environnement.

Dans le cadre de cette étude, nous nous restreignons à la planification de la trajectoire d'un seul avion dans le plan. L'espace considéré est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ dans lequel :

- les autres avions sont représentés comme des obstacles par des disques de rayon 5 NM ;
- le secteur de contrôle est représenté par un disque de 100NM ; et
- la région de destination de l'avion pour lequel la trajectoire est planifiée est représentée par un disque de rayon 1 NM.

Un tel domaine est représenté dans la figure 1.5.

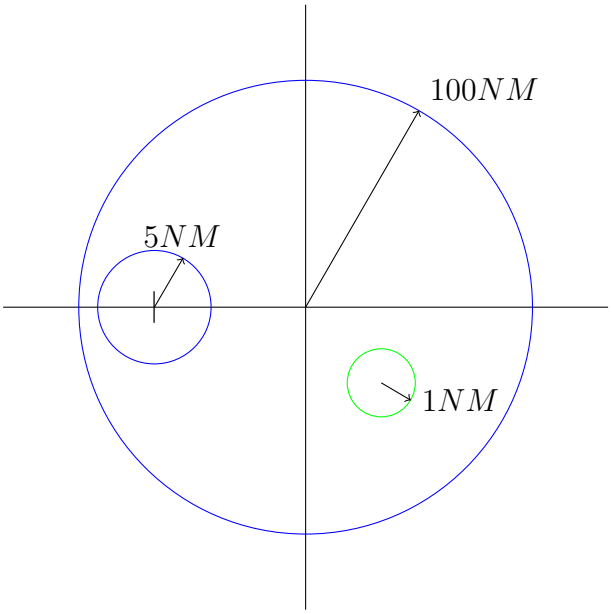


FIGURE 1.5. – Représentation (non à l'échelle) de l'espace aérien avec un autre trafic. En vert, la destination de l'avion considéré. En bleu, les limites interdites.

Nous cherchons alors à définir des trajectoires dans un monde sphérique [1]. Dans notre cas particulier, la problématique consiste alors à résoudre l'équation laplacienne sur un disque privé de deux disques plus petits.

Pour représenter les aléas dus au vent sur la vitesse et donc la position des autres avions, nous considérons une incertitude sur la position de ces disques obstacles. Cette incertitude sur les bords du domaine se traduit par une incertitude sur les valeurs prises par la fonction de navigation. Nous examinons alors la variation de la fonction de navigation en fonction des perturbations du bord du domaine.

Plutôt que d'essayer de résoudre l'équation harmonique pour un grand nombre de domaines et d'appliquer une méthode de type Monte Carlo ou d'utiliser des fonctions de base radiales, nous avons choisi d'étudier les résultats obtenus avec les variations de Hadamard. Nous détaillerons dans les chapitres suivants les étapes pour obtenir ces variations.

1. Un monde sphérique est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ dont tous les bords sont des sphères disjointes de dimension $n-1$, tel qu'illustré en figure 1.6.

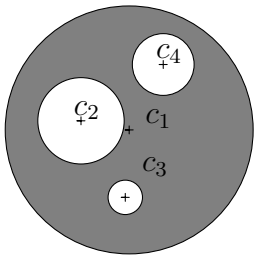


FIGURE 1.6. – Un monde sphérique du plan borné par un cercle extérieur de centre c_1 et trois cercles intérieurs de rayons respectifs c_2, c_3 et c_4.

2. Fonctions de navigation harmoniques

2.1. Introduction

La question de la génération de trajectoires pour n mobiles s'est d'abord posée dans le cadre de la robotique [64, 60, 44]. La planification de trajectoires optimales est un domaine de recherche dynamique avec de nombreux contextes d'application. D'un contexte à l'autre, les besoins et les contraintes varient. Pour cette raison, de nombreuses méthodes prenant en compte les spécificités du problème à résoudre ont été développées afin de répondre au problème de planification de trajectoires. Un comparatif des différentes méthodes de planification de trajectoires appliquées aux trajectoires d'avions est détaillé dans [35, Chapitre 3]. Parmi les différentes méthodes de planification, nous nous intéressons ici en particulier aux fonctions de navigation harmoniques puisqu'elles permettent de générer des trajectoires pour un grand nombre d'avions de façon coordonnée, tout en garantissant la génération de trajectoires volables et en permettant la prise en compte d'obstacles mobiles.

Une fonction de navigation est un champ de potentiel avec certaines propriétés particulières. Cette méthode de planification de trajectoires a d'abord été introduite par [69] dans le cadre de la robotique, suite aux travaux de Koditschek [46] dans lesquels les limites des méthodes de champs de potentiel pour la navigation sont exposées. Elle a ensuite été étendue à d'autres domaines que celui de la robotique, tels que la planification de trajectoires pour des voiliers [66] ou des drones [34]. Les fonctions de navigation ont aussi pu être étendues au cas d'environnements incertains, dans lesquels les obstacles sont découverts par le robot lors de son déplacement [22, 83, 60, 58].

Une fonction de navigation est un champ de potentiel particulier défini sur une variété bornée, uniformément maximal sur le bord de leur domaine de définition et sans minimum local dans le domaine. Une fois cette fonction de navigation construite, les trajectoires des mobiles sont générées en effectuant une descente de gradient sur ce potentiel. Les fonctions de navigation permettent ainsi de garantir que le mobile atteindra sa destination presque sûrement.

Plusieurs familles de fonctions de navigation peuvent être définies. Selon la façon dont le potentiel est construit sur le domaine, les trajectoires générées auront des propriétés différentes. Pour chaque application, une fonction de navigation différente peut être trouvée pour répondre aux contraintes du monde réel. Nous avons ici choisi de considérer plus particulièrement les fonctions de navigation harmoniques, que nous définissons ci-dessous.

Dans la suite de ce chapitre, nous définirons les notions de fonction de navigation et de champ de potentiel harmonique, avant de discuter de leur application au domaine de la gestion du trafic aérien, et des extensions qui peuvent être faites à la théorie des potentiels de navigation harmonique pour mieux répondre aux contraintes du trafic aérien.

2.2. Fonctions de navigation

L'idée sur laquelle reposent les fonctions de navigation est celle de plonger une particule dans un champ de force imaginaire généré par les obstacles et la destination, et de suivre le mouvement de cette particule. La destination crée un potentiel attractif qui tire la particule vers elle. À l'inverse, les obstacles créent un potentiel répulsif qui éloigne la particule. La direction suivie par la particule est la résultante de ces forces qui lui sont appliquées.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons la définition et quelques propriétés des fonctions de navigation, avant de présenter leur extension au contexte qui nous intéresse et d'énoncer leurs limites.

2.2.1. Définitions

Afin de pouvoir détailler la notion de fonction de navigation, nous devons introduire quelques définitions préliminaires.

Définition 1. *Une fonction est dite* analytique *sur un ouvert connexe si elle y est égale à son développement en série entière.*

Définition 2. *Une fonction est dite* polaire *sur un espace lisse connexe et compact $\mathcal{F}$ en q_d si elle admet un et un seul minimum sur $\mathcal{F}$ en q_d.*

Définition 3. *Une fonction est dite* admissible *si elle est uniformément maximale sur le bord de l'espace sur lequel elle est définie.*

Définition 4. *Une fonction est dite* de Morse *si ses points critiques sont non-dégénérés.*

Après avoir défini ces quelques termes, nous pouvons introduire la notion de fonction de navigation dont la définition est la suivante.

Définition 5. *Considérons E^n, un espace euclidien de dimension n. Une fonction $\phi : E^n \to [0,1]$ est dite* de navigation *sur un espace lisse, connexe et compact $\mathcal{F} \subset E^n$ si elle est*

1. *analytique sur l'intérieur de $\mathcal{F}$ et prolongeable aux bords ;*
2. *polaire sur $\mathcal{F}$ avec un minimum en un point intérieur $q_d \in \mathring{\mathcal{F}}$;*
3. *admissible sur $\mathcal{F}$;*
4. *de Morse sur $\mathcal{F}$.*

En pratique, la fonction potentielle doit prendre sa valeur minimale à la destination et sa valeur maximale sur les autres frontières du domaine afin de garantir que le mobile dont nous traçons la trajectoire s'éloignera toujours des obstacles et se rapprochera toujours de la destination. Dans notre cas, nous fixons la valeur du potentiel sur les bords obstacles à 1 et la valeur du potentiel sur le bord destination à 0.

Une fois la fonction de navigation connue, les trajectoires sont calculées à partir du gradient de cette fonction, en réalisant une descente de gradient [12]. De cette façon des trajectoires arrivant à la destination et qui évitent les obstacles sont obtenues.

2.2.2. Propriétés

Tout d'abord, une fonction de navigation telle que définie en 5 existe. Nous avons ensuite le théorème suivant :

Theorème 6. *Pour tout espace connexe, compact et régulier, et pour tout point q_d intérieur de cet espace, il existe une fonction de navigation régulière avec un unique minimum en q_d.*

Nous sommes donc assurés sur un domaine bien défini d'obtenir une fonction de navigation. Dans notre cas d'application, nous modélisons le domaine par un monde sphérique avec une destination intérieure au domaine. Les fonctions de navigation y sont donc bien définies.

Par ailleurs, le caractère de Morse de la fonction de navigation permet de s'assurer de quelques propriétés intéressantes sur les trajectoires construites par une descente de gradient :

Theorème 7.
1. *toute trajectoire au départ d'un point de $\mathcal{F}$ reste dans $\mathcal{F}$;*
2. *toute trajectoire approche un extremum de la fonction potentielle de manière stable ;*
3. *il existe un sous-espace ouvert dense de $\mathcal{F}$ tel que toutes les trajectoires au départ de ce sous-espace tendent asymptotiquement vers les minima locaux de la fonction de navigation.*

La propriété *1* indique que les trajectoires générées avec la fonction de navigation ne quittent pas le domaine sur lequel est défini la fonction de navigation. Cela permet de garantir qu'aucun avion ne sortira du secteur de contrôle, évitant ainsi les problèmes de coordination entre secteurs. Cette propriété indique également qu'un avion ne franchira pas de bord obstacle, garantissant ainsi l'évitement de conflits.

La propriété *2* décrit le fait que le mobile atteint la destination de façon stable, c'est-à-dire que le mobile ne quittera pas la destination après l'avoir atteinte.

Enfin, la propriété *3* permet de garantir presque-sûrement que la trajectoire au départ d'un point du domaine convergera vers la destination. Nous avons donc une garantie d'arrivée à destination des avions pour les trajectoires construites avec une fonction de navigation.

Pour une démonstration complète de ces résultats, le lecteur est dirigé vers [47].

2.2.3. Limites

Selon la méthode choisie pour construire le champ de potentiel, les défauts de la fonction de navigation pourront être différents. Bien que les fonctions de navigation soient un outil adapté pour la planification de trajectoires pour un grand nombre de mobiles, elles ne permettent pas de produire des trajectoires à vitesse constante tout en permettant de garantir l'arrivée des avions à destination. Or les avions peuvent voler à une vitesse dans un intervalle de $[-6\%, +3\%]$ autour d'une vitesse nominale [6].

De plus, dans [49], les auteurs notent que les champs de potentiel ne permettent pas le passage entre des obstacles proches, génèrent des oscillations dans les passages étroits et provoquent des oscillations avant le contournement d'un obstacle. Ces champs de potentiels génèrent également des trajectoires avec des virages serrés, qui ne peuvent donc pas être appliqués à des avions, qui ont des rayons de virage limités.

Mais le plus gros défaut des champs de potentiel reste l'existence de minima locaux dans la fonction potentiel utilisée pour construire le champ de potentiel. Avec les fonctions de navigation exhibées par [44], certaines trajectoires passent près d'un minimum local de potentiel et ne peuvent alors plus atteindre la destination. Ces minima locaux deviennent des puits attracteurs locaux dans lesquels le mobile peut se retrouver bloqué.

Il est donc apparu le besoin de créer de nouvelles fonctions de navigation. Plusieurs axes ont été étudiés pour contourner cette difficulté. Par exemple, dans [8] la méthode des fonctions de navigation a été couplée avec une méthode stochastique pour s'extraire des minima locaux lorsque le mobile en atteint un. Une autre solution pour répondre à ce problème a été proposée par [56] et consiste à déformer le champ de potentiel lorsqu'un mobile cesse de se déplacer, afin de faire rebrousser chemin au mobile. Cependant, ces méthodes peuvent générer des trajectoires comportant des virages serrés, donc non-exploitables pour des avions de ligne.

C'est également pour éviter le problème des minima locaux que les fonctions de navigation basées sur un champ de potentiel harmonique ont été proposées [16]. Ce sont ces potentiels que nous étudions dans les paragraphes suivants.

2.3. Potentiels harmoniques

Un potentiel harmonique est une fonction deux fois continûment dérivable qui satisfait l'équation de Laplace. Les fonctions de navigation ont d'abord suscité peu d'intérêt dans le domaine de la planification de trajectoires. L'analyse comparative entre les fonctions harmoniques et les champs de potentiel réalisée dans [24] propose d'utiliser un potentiel harmonique comme fonction de navigation pour résoudre le problème des minima locaux. Dans les paragraphes suivants, nous en présentons la définition et nous montrons la façon dont ces fonctions peuvent être utilisées pour la planification de trajectoires d'avions.

2.3.1. Définitions et propriétés

Définition 8. *On appelle* potentiel harmonique *une fonction deux fois continûment dérivable qui satisfait l'équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de*

Dirichlet, c'est-à-dire une solution ϕ sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ de l'équation

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & sur\ U \\ \phi = f & sur\ \partial U \end{cases} \tag{2.1}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien

$$\Delta = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{2.2}$$

et où $f : \partial U \to \mathbb{R}$ est une application continue.

Dans nos travaux, considérons des trajectoires du plan. Nous avons donc utilisé $n = 2$ avec les notations de la définition 8 et $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Dans le cas de l'utilisation d'une fonction harmonique comme fonction de navigation, l'application f utilisée dans la condition aux limites de Dirichlet sera l'application constante par morceaux égale à 0 sur le bord destination et égale à 1 sur les autres bords. Comme démontré dans [69], le potentiel harmonique ainsi défini est une fonction de navigation. En effet, aucun point intérieur ne peut être un extremum local donc ce potentiel est polaire. De plus, il est admissible par construction et de Morse sur U.

Puisqu'un potentiel harmonique ne peut pas avoir d'extremum sur l'intérieur du domaine, l'utilisation d'un tel potentiel comme fonction harmonique permet de garantir que le mobile ne se trouvera pas bloqué dans un minimum local. Les trajectoires obtenues par ce type de fonction de navigation atteignent donc toutes la destination. Ces trajectoires sont également plus lisses que celles obtenues à partir du champ de potentiel de [44], ce qui les rend plus applicables à la planification de trajectoires pour des avions. Par ailleurs, ces trajectoires sont robustes au bruit. En effet, la probabilité de heurter un obstacle reste faible en présence de bruit [22, 76].

2.3.2. Calcul de la fonction de navigation harmonique

Un potentiel peut être calculé selon deux approches différentes. L'approche explicite d'abord, dans laquelle le potentiel est connu sous une forme analytique. C'est ainsi qu'est construit le potentiel dans les travaux de Khatib [44]. Cependant, il n'est pas toujours possible de déterminer un potentiel analytique qui permette d'obtenir des trajectoires avec les propriétés voulues. Il peut alors être plus avantageux d'utiliser l'approche implicite, dans laquelle le potentiel est décrit par une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) avec des conditions aux limites sur les frontières de l'espace. Le potentiel peut alors être obtenu numériquement en résolvant l'EDP qui le décrit. C'est avec l'approche implicite que nous définissons dans ces travaux les fonctions de navigation.

Pour calculer la fonction de navigation harmonique, les méthodes couramment utilisées sont celles des différences finies ou des éléments finis. Des détails supplémentaires sur la méthode des éléments finis sont donnés dans l'annexe A.

Cependant, les champs de potentiel harmonique sont coûteux à calculer de cette manière, et doivent être recalculés pour chaque modification des bords du domaine. C'est pour éviter la répétition de cette opération coûteuse que nous nous intéressons à des

méthodes basées sur le calcul de la fonction de Green du Laplacien, telles que décrites dans les chapitres suivants.

2.3.3. Application au domaine de l'ATM

Les fonctions de navigation ont été appliquées à de nombreux domaines. La première application des champs de potentiel à la planification de trajectoires d'avions apparaît dans [82]. Les champs de potentiel ont également été utilisés pour éviter les conflits entre des avions suivant leurs plans de vol [21], ou pour planifier des trajectoires sans conflit entre deux ou trois avions [32]. Cependant, dans ce dernier cas, les auteurs concluent que la complexité temporelle en fonction du nombre d'avions de la construction du champ de potentiel est trop importante. Par ailleurs, dans le cas d'un environnement dynamique, la génération de nouvelles trajectoires face à un changement peut être coûteux en matière de calculs [83].

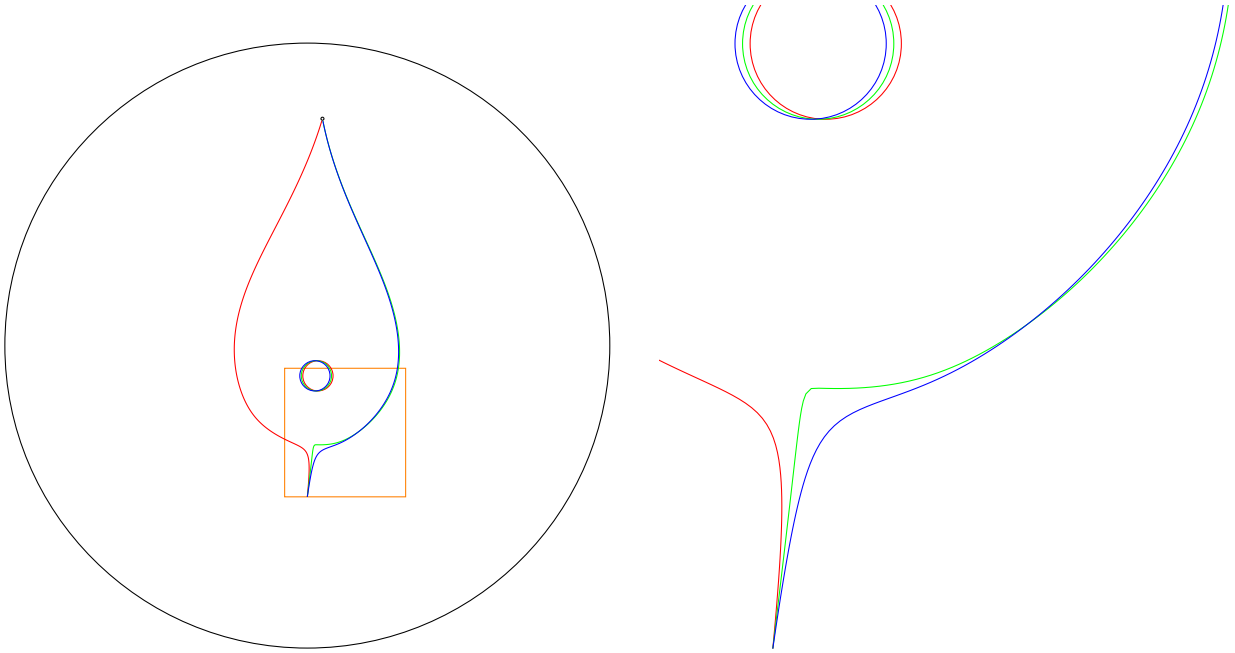
2.3.4. Fonction de navigation harmonique soumise à une perturbation du domaine

Lorsque les bords du domaine de définition sont soumis à des perturbations, le champ de potentiel construit sur ce domaine varie également, et peut générer des trajectoires très différentes. Dans les exemples suivants, les fonctions de navigation sont calculées avec la méthode détaillée dans le chapitre 3 pour reconstruire la solution harmonique sur un monde sphérique. Les trajectoires sont ensuite obtenues par une méthode de type descente de gradient.

En figure 2.1, trois positions d'obstacles sont représentées avec trois couleurs différentes, ainsi que les trajectoires associées pour un même point de départ et un même disque destination. La figure 2.1b est une vue agrandie des trajectoires proches du point de départ, correspondant au cadre tracé dans la figure 2.1a. Nous utilisons dans cet exemple des ordres de grandeur conformes au cadre opérationnel du trafic aérien, avec un disque extérieur représentant le secteur de rayon 100 NM et un obstacle représentant la norme de séparation minimale entre deux avions de rayon 5 NM.

Dans le cas illustré en figure 2.1, où un obstacle qui se situe entre le mobile et la destination se déplace, la trajectoire du mobile peut subir d'importantes variations pour des perturbations infinitésimales de l'obstacle, passant à droite ou à gauche de l'obstacle. La trajectoire bleue et la trajectoire verte évitent leur obstacle avec sensiblement la même marge, lorsque l'obstacle est au travers gauche du mobile. Cependant, au départ des trajectoires, la trajectoire verte se rapproche plus de l'obstacle que la trajectoire bleue. La distance entre la trajectoire bleue et la trajectoire verte est, de plus, localement plus grande que la distance entre l'obstacle bleu et l'obstacle vert.

En outre, l'avion de la trajectoire rouge voit l'obstacle sur son travers droit plutôt que sur son travers gauche comme pour les avions des trajectoires bleue et verte. Entre la trajectoire bleue et la trajectoire verte, la différence est moins grande qu'entre la trajectoire verte et la trajectoire rouge, mais est quand même plus grande que la perturbation de



(a) Vue globale des trajectoires pour trois positions de l'obstacle

(b) Trajectoires à proximité du point de départ

FIGURE 2.1. – Fonctions de navigation passant à droite ou à gauche d'un obstacle pour des petits déplacements de celui-ci. Le cadre orange sur la figure de gauche représente les bords de la figure de droite.

l'obstacle. Ainsi, nous constatons que le décalage de la trajectoire peut être plus grand que le décalage de l'obstacle.

Nous voyons donc ici l'importance de prendre en compte les perturbations des bords du domaine dans le calcul de trajectoires avec la méthode des fonctions de navigation.

Un calcul plus précis de la divergence entre deux trajectoires issues d'un même point mais soumises à des champs perturbés peut se faire à l'aide de l'équation variationnelle du système dynamique associé. On supposera que la perturbation de domaine peut s'obtenir à partir du flot Θ d'un champ de vecteurs X défini sur la variété $\mathcal{M}$ contenant le domaine de navigation U :

$$\begin{cases} \Delta\phi_s = 0 & \text{sur } \Theta(s, U) \\ \phi = f_s & \text{sur } \Theta(s, \partial U) \end{cases} \tag{2.3}$$

Le flot Θ vérifiant $\Theta(0, x) = x, x \in \mathcal{M}$, on remarque ϕ_0 est la solution du problème initial. Dans le cas des fonctions de navigations, les conditions aux limites sont fixes et on aura donc $f_t = f$ pour tout t.

Une ligne intégrale γ_s du champ de navigation d'origine x_0 pour une valeur fixée de s est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \gamma_s'(t) = \nabla\phi_s(\gamma_s(t)) \\ \gamma_s(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

On définit ainsi une famille paramétrée de trajectoires, qui est dérivable en fonction du paramètre de perturbation s. L'équation variationnelle [20] permet de calculer $\partial_s\gamma_s$ en $s = 0$, noté de façon synthétique $\partial_s\gamma$:

$$\begin{cases} \partial_t\partial_s\gamma(t) - \nabla\partial_x\phi(\gamma_s(t))\partial_s\gamma(t) = \nabla\partial_s\phi(\gamma(t)) \\ \partial_s\gamma(0) = v \end{cases} \tag{2.5}$$

où le vecteur v est quelconque. Il s'agit d'une équation linéaire en $\partial_s\gamma$, il est donc possible de se limiter à des vecteurs initiaux de la base canonique. La matrice Jacobienne J en fonction de t de l'application dérivée de γ par rapport à s est donc solution de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t J(t) - \nabla\partial_x\phi(\gamma_s(t))J(t) = \nabla\partial_s\phi(\gamma(t)) \\ J(0) = Id \end{cases} \tag{2.6}$$

le cas particulier où il n'y a pas de variation de domaine conduit à une équation homogène qui traduit la sensibilité aux conditions initiales. Elle peut être utilisée pour déterminer les exposants de Lyapunov du système de base. En présence de variations de domaine, l'équation possède un second membre et ses caractéristiques sont différentes. Il est toujours possible de déterminer des exposants de Lyapunov, ainsi que d'obtenir leur variation au premier ordre.

Ces exposants sont utilisés en particulier pour caractériser la complexité du trafic aérien de façon intrinsèque [18], en traduisant de façon quantifiable la sensibilité aux

conditions initiales. Leur calcul numérique est cependant assez délicat, car ils reposent sur une mise à jour de la décomposition QR de J^tJ, qui est naturellement instable. L'implantation pratique a cependant été réalisée par les auteurs de [18], permettant la production de cartes de complexité en un temps de calcul acceptable pour des espaces aériens de la taille de la France.

On notera que l'équation 2.6 ne nécessite que la connaissance de $\partial_s\phi$ pour être appliquée, les autres quantités pouvant être calculées à partir du champ de navigation initial. Il est donc particulièrement important de pouvoir estimer $\partial_s\phi$ à partir du champ de déplacement $\partial_t\Theta(t,x)|_{t=0} = X(x)$, ce qui est l'objet du chapitre 4.

Dans un contexte stochastique, le champ de déplacement est aléatoire et s'écrit comme $X(\omega, x)$ où ω est élément d'un espace probabilisé (Ω, τ, P). La perturbation de la solution $\partial_s\gamma$ devient elle-même une variable aléatoire sur le même espace probabilisé. Une étude complète des équations différentielles ou aux dérivées partielles aléatoires est présentée dans [5]. Pour l'application visée dans le présent travail, le cadre sera celui des petites perturbations et d'un champ de déplacement s'écrivant comme la somme d'un champ déterministe et d'une perturbation Gaussienne.

2.4. Perspectives

2.4.1. Extension aux mouvements coordonnés

Planification pour plusieurs mobiles

Différentes méthodes permettant de générer des trajectoires pour plusieurs mobiles apparaissent dans la littérature.

Les méthodes par séquencement, telles qu'utilisées dans [84], consistent à générer une trajectoire optimale pour le premier mobile, puis à créer chaque trajectoire suivante en fonction des trajectoires déjà générées. Cette méthode est celle qui ressemble le plus au travail effectué par les contrôleurs aériens, puisqu'il est bien plus aisé de dévier un avion à la fois lorsqu'un risque de conflit apparaît. Elle convient donc bien aux situations d'urgence, mais les solutions produites peuvent être inéquitables, puisque certaines trajectoires sont optimisées avant d'autres.

Les méthodes itératives constituent une amélioration par rapport aux méthodes par séquencement, en alternant une phase de calcul de trajectoires optimales sous contraintes et une phase de résolution des conflits observés [33]. À l'étape d'optimisation, certaines contraintes sont constituées par les zones où sont apparus des conflits lors de l'étape précédente. Ces méthodes sont plus équitables que les méthodes par séquencement, puisqu'elle dévient tous les avions concernés par un conflit. En revanche, il n'est pas garanti que la méthode d'optimisation converge vers une solution satisfaisante.

Les méthodes utilisant des systèmes multi-agents génèrent des solutions globales au problème à partir d'un ensemble de règles appliquées à chaque mobile, comme dans [13]. Ces méthodes sont adaptées aux environnements incertains, mais ne donnent pas de garantie théorique concernant l'émergence du comportement global souhaité à partir des règles appliquées aux agents.

L'expression *mouvements coordonnés* est utilisée dans la planification de trajectoires lorsque le processus de planification prend en compte toutes les trajectoires d'un ensemble de mobiles. C'est avec une méthode de mouvements coordonnés que nous envisageons l'extension de nos travaux à la planification de trajectoires pour de multiples avions. Les travaux de Rimon et Koditschek ont été étendus à la navigation sans collision de plusieurs mobiles par Loizou et Kyriakopoulos [54]. Ici, plutôt que de construire la fonction de navigation de chaque mobile sur l'espace de travail de celui-ci, la fonction de navigation est construite sur l'espace de configuration, défini ci-dessous.

Adapter ainsi les fonctions de navigation permet la planification centralisée des trajectoires de plusieurs mobiles. Le mouvement coordonné de plusieurs trajectoires peut être obtenu en passant par l'espace de configuration. Dans les paragraphes suivants, nous définissons la notion d'espace de configuration, puis nous présentons succinctement la manière dont les fonctions de navigation harmoniques pourraient être étendues aux mouvement coordonnés.

Espace de configuration

L'espace en deux ou trois dimensions dans lequel le ou les mobiles peuvent évoluer est appelé *espace de travail*. L'espace de configuration est une repésentation de l'espace de travail qui tient compte de l'ensemble des positions admissibles que peuvent occuper les mobiles. C'est l'ensemble des positions possibles que ce système peut atteindre, représenté dans un espace à kn dimensions, où $k \in \{2, 3\}$ est le nombre de dimensions de l'espace de travail et $n \in \mathbb{N}$ est le nombre de mobiles.

Cette notion d'espace de configuration a d'abord été introduite dans [55] afin de représenter un objet mobile dont la forme évolue du fait du déplacement de ses composants les uns par rapport aux autres. Cet espace permet ainsi de traiter tous les degrés de liberté d'un robot manipulateur, mais peut également être utilisé pour représenter toutes les positions possibles d'un ensemble de mobiles. C'est l'ensemble des états, ou configurations, que peut prendre le système global.

Dans le cas d'une particule unique se déplaçant dans $\mathbb{R}^k$, l'espace de configuration et l'espace de travail sont confondus. Dans le cas de deux particules se déplaçant dans $\mathbb{R}^k$, l'espace de configuration est l'espace R^{2k} privé des diagonales dans lesquelles les deux particules occupent la même position.

Pour un robot manipulateur, la planification de trajectoires consiste à trouver une série de mouvements qui permet de passer d'une configuration à une autre. Dans l'espace de travail, il faudrait planifier plusieurs trajectoires pour plusieurs points de référence, avec des contraintes entre ces trajectoires, et même si chaque point de référence évite tous les obstacles, il n'est pas a priori garanti que le robot dans son ensemble évite les obstacles, ni qu'il puisse réaliser le mouvement. L'espace de travail n'est ainsi pas nécessairement le plus adapté pour représenter ces mouvements, et il peut être intéressant de passer par l'espace de configuration.

Chaque degré de liberté du robot manipulateur constitue une dimension de l'espace de configuration. Chaque configuration du robot est figurée par un point de cet espace, et les configurations inatteignables à cause de la géométrie du robot en lui-même ou

à cause d'objets extérieurs y sont des obstacles dans l'espace de configuration. Chaque point dans l'espace de configuration donne une position du robot dans l'espace de travail. Une trajectoire dans l'espace de configuration donnera ainsi une suite de mouvements dans l'espace de travail. Avec cette méthodologie, les fonctions de navigation ont pu être appliquées aux robots manipulateurs [78, 60, 44].

Pour un ensemble de n mobiles évoluant dans le plan, l'espace de configuration est l'espace $\mathbb{R}^{2n}$. Les obstacles de l'espace de configuration sont alors les diagonales de l'espace dans lesquelles deux mobiles sont au même endroit, en plus des configurations dans lesquelles un mobile est en collision avec un obstacle de l'espace de travail. Toutes les trajectoires construites dans ce sous-domaine de l'espace de configuration seront sans conflits. La planification dans l'espace de configuration permet alors de prendre en compte l'ensemble des mobiles simultanément, dans un seul espace de dimension plus élevée.

2.4.2. Potentiels biharmoniques

Définition des fonctions de navigation biharmoniques

Les potentiels biharmoniques ont été proposés comme fonction de navigation pour pallier certaines limites des potentiels harmoniques dans ce domaine. On appelle biharmonique une fonction f sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ du plan qui satisfait l'équation

$$\begin{cases} \Delta^2(f(x,y)) = 0 \\ \Delta u = 1 \text{ à la destination} \\ \Delta u = 0 \text{ à la frontière des obstacles} \end{cases} \tag{2.7}$$

où Δ^2 est l'opérateur Bilaplacien, ou biharmonique. Dans un domaine du plan $\mathbb{R}^2$, on a

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{2.8}$$

En physique, cette équation est utilisée pour représenter la déformation d'une plaque élastique soumise à des contraintes mécaniques [79]. Cette équation est utilisée en particulier pour modéliser les vibrations de plaques. Par analogie avec la mécanique des structures, le domaine est considéré comme une plaque d'un matériau élastique percé de trous représentant les obstacles et la destination. Un ballon est placé dans le trou correspondant à la destination, puis gonflé. Cette opération déforme le matériau, et ces déformations se propagent dans toute la plaque.

La résolution de ce système donne un champ de tenseurs. En chaque point du domaine, une matrice de dimension 2×2 est obtenue. Pour obtenir une fonction de navigation et générer des trajectoires, le vecteur propre associé à la valeur propre minimale du tenseur est calculé en chaque point, donnant ainsi un champ de navigation d'amplitude constante. Pour arriver à la destination, il suffit alors de suivre, depuis n'importe quel point de la plaque, le champ de contraintes.

En pratique, le système de l'équation (2.7) peut être résolu par une méthode des éléments finis. La matrice des contraintes est ensuite obtenue par la méthode des différences finies. Puis les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice sont obtenus par des méthodes standards. Les vecteurs propres d'une matrice n'étant définis qu'à une constante près, il est nécessaire de redresser le champ de vecteurs ainsi obtenu. Un algorithme pour ce faire garantissant la continuité du champ est proposé dans [36]. Une fonction de navigation ainsi construite existe pour tout espace connexe, et garantit l'arrivée à la destination sans entrer en collision avec un des obstacles.

Il est important de noter que les fonctions biharmoniques ne sont pas a priori des fonctions de navigation. En effet, la solution du problème défini dans l'équation (2.7) n'est pas de Morse. L'arrivée à la destination avec évitement des obstacles n'est donc plus garantie par le cadre des fonctions de navigation. En revanche, il est possible, à partir de la théorie de la singularité des applications différentielles [35] de montrer que la solution de l'équation (2.7) est non-dégénérée en ses points critiques. L'évitement des obstacles pour le champ de navigation est donc garanti, ainsi que l'arrivée à destination du mobile. Dans la suite, nous utiliserons le terme « fonction de navigation biharmonique » par abus de langage, puisque ces potentiels donnent les mêmes garanties qui nous intéressent dans notre cas d'application.

Application aux trajectoires d'avion

Les trajectoires générées par le biais des fonctions de navigation biharmoniques sont des trajectoires à vitesse constante, car le champ de navigation est d'amplitude constante. Or, comme expliqué dans le chapitre 1, les avions ne peuvent voler qu'à des vitesses très proches d'une vitesse nominale. Les potentiels biharmoniques sont donc particulièrement bien adaptés à la planification de trajectoires d'avion. Les fonctions biharmoniques ont d'abord été proposées pour la planification de trajectoires par [58] pour répondre à certaines difficultés liées aux fonctions de navigation harmoniques.

Comme il a été observé dans [59], les trajectoires générées par les fonctions de navigation harmoniques passent près des obstacles, ce qui ne permet pas une bonne robustesse des trajectoires obtenues par ce moyen. Les fonctions de navigation biharmoniques, au contraire, génèrent des trajectoires qui laissent une plus grande marge par rapport aux obstacles.

De plus, une fonction de navigation harmonique peut être évanescente loin de la destination. Cette propriété peut rendre difficile le calcul numérique de la trajectoire. Puisque les fonctions de navigation biharmoniques sont à amplitude constante, elles ne présentent pas ce défaut, et il est toujours possible de calculer une trajectoire avec une fonction de navigation biharmonique.

Les fonctions de navigation biharmoniques sont en outre bien adaptées pour la planification dans des espaces de dimension élevée. Il est donc possible d'envisager l'extension de ces fonctions de navigation aux mouvements coordonnés. Une telle extension a été proposée dans [35].

Les fonctions de navigation biharmoniques souffrent cependant de limitations. Le champ généré par cette méthode présente des zones dans lesquelles les vecteurs du champ

convergent. Lorsqu'une trajectoire passe au travers d'une telle zone, elle est susceptible d'osciller plusieurs fois autour de cette zone avant de redevenir lisse et de rejoindre la destination. Néanmoins, ce phénomène ne se produit que si le point de départ de la trajectoire est proche d'un obstacle.

Les trajectoires obtenues avec les fonctions de navigation harmoniques ne peuvent pas être utilisées seules pour la planification de trajectoires d'avion, du fait des limites exposées dans les paragraphes précédents. Les fonctions de navigation biharmoniques sont une réponse à ces limites. Cependant, bien que les fonctions de navigation biharmoniques permettent d'éviter quelques écueuils des fonctions de navigation harmoniques, il pourra être préférable, dans certains cas, d'utiliser des potentiels harmoniques. En effet, les potentiels harmoniques permettent souvent d'obtenir des trajectoires un peu plus courtes.

Il a ainsi été proposé d'utiliser les fonctions de navigation biharmoniques dans les cas où les fonctions de navigation obtenues par d'autres méthodes ne permettent pas d'obtenir des trajectoires satisfaisantes. Dans les cas où les trajectoires obtenues avec des potentiels harmoniques passent trop près des obstacles, ou dans les cas où le point de départ est suffisamment loin pour que le potentiel harmonique soit évanescent, il devient intéressant d'utiliser plutôt un potentiel biharmonique pour construire la fonction de navigation.

Extension aux obstacles dynamiques

Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette thèse à la situation d'un environnement dynamique, dans lequel la position des obstacles est incertaine.

Puisque les fonctions de navigation biharmoniques sont particulièrement bien adaptées à la génération de trajectoires d'avion, il serait intéressant, dans un objectif de certification des algorithmes, d'étudier leur robustesse aux variations de bord de domaine. La méthode de calcul proposée pour la fonction de navigation biharmonique et résumée dans les sections précédentes dépend de la méthode des éléments finis. Pour chaque configuration du domaine, il est alors nécessaire de calculer un nouveau maillage du domaine et afin de résoudre le problème biharmonique. Dans le cadre d'un environnement dynamique, cette méthode n'est pas a priori bien adaptée, puisque la fonction de navigation biharmonique ainsi que le maillage du domaine doivent être recalculés pour chaque perturbation des bords du domaine.

Les déplacements des obstacles, c'est-à-dire les variations des bords du domaine, pourront être pris en compte avec la méthode détaillée par la suite dans le chapitre 4 en utilisant la variation de Hadamard pour la solution du bilaplacien [38]. Cette étude des variations de la solution biharmonique soumise à une perturbation des bords du domaine pourra faire l'objet de travaux futurs.

2.5. Conclusion

Les fonctions de navigation harmoniques sont intéressantes pour notre cas d'étude, puisqu'elles permettent de planifier des trajectoires avec les garanties théoriques suivantes :

— arrivée de chaque avion à sa destination ;
— trajectoires sans conflit ;
— trajectoires compatibles avec les contraintes de vol (vitesse constante et rayons de virage) ;
— temps de calcul compatibles avec la planification à l'horizon stratégique.

En revanche, cette méthode souffre d'une limite forte pour son déploiement dans un contexte opérationel, puisqu'elle suppose un caractère déterministe pour les trajectoires des avions. Ainsi, les trajectoires obtenues par la méthode des fonctions de navigation harmoniques ou biharmoniques ne sont pas robustes aux aléas, et ne peuvent donc pas être utilisées directement. Dans les chapitres suivants, nous montrerons quelques pistes pour rendre possible la certification d'une méthode de planification des trajectoires basée sur les fonctions de navigation harmoniques.

Nos travaux portent sur la réalisation d'une solution au problème de planification qui soit robuste vis-à-vis des incertitudes et sur la mise au point d'outils pour quantifier cette robustesse. En partant des fonctions de navigation harmoniques, nous nous intéressons au cas où les conditions aux limites sont stochastiques. En particulier, nous cherchons ici à déterminer les variations de la fonction de navigation harmonique vis-à-vis des variations du bord du domaine.

Plutôt que d'essayer de résoudre l'équation harmonique pour un grand nombre de domaines et d'appliquer une méthode de type Monte Carlo [25, 8] ou d'utiliser des fonctions de base radiales [14], nous avons choisi d'étudier les résultats obtenus avec les *variations de Hadamard*. C'est dans cette optique que nous détaillons dans le chapitre suivant une méthode de calcul de la fonction de Green, indispensable à la mise en œuvre de la variation de Hadamard.

Dans la suite de cette thèse, nous ne traiterons que le cas des fonctions de navigation harmoniques. Cependant, les fonctions de navigation biharmoniques sont pensées pour être un complément utile pour la planification de trajectoires d'avion. Des travaux futurs pourront s'intéresser à l'extension des fonctions de navigation stochastiques au cas des potentiels biharmoniques.

3. Approximation semi-analytique de la fonction de Green

La fonction de Green est la réponse d'un opérateur différentiel linéaire à une impulsion de Dirac. Elle permet de calculer la solution de problèmes avec cet opérateur différentiel en fonction des conditions aux limites. Nous présentons cette fonction dans ce chapitre, ainsi que la méthode employée pour la calculer et les résultats ainsi obtenus.

3.1. Définitions et propriétés

3.1.1. Fonction de Green : définition

Considérons l'équation suivante

$$-\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = f \text{ sur } \partial\Omega \tag{3.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée. On appelle ce problème le *problème harmonique*. Si le bord $\partial\Omega$ du domaine est suffisamment lisse, alors l'équation (3.1) admet une et une seule solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

On appelle *fonction de Green* d'un opérateur différentiel linéaire $\mathcal{L}$ la solution G de l'équation

$$\mathcal{L}G(x,y) = \delta_x(y) \tag{3.2}$$

où δ_s est la distribution de Dirac centrée au point s. Contrairement à l'équation (3.1), le terme de droite dans l'équation (3.2) n'est pas L^2.

Puisque la distribution de Dirac est l'élément neutre pour la convolution, la connaissance de la fonction de Green de l'opérateur $\mathcal{L}$ permet de résoudre par simple calcul toutes les équations de la forme

$$\mathcal{L}u(x,y) = f \tag{3.3}$$

avec $f \in L^2$.

Par ailleurs, la dérivée normale de la fonction de Green permet de reconstruire la valeur de u sur tout le domaine à partir de la valeur de u sur le bord du domaine

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\ \frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\ \mathrm{d}\sigma(y) \tag{3.4}$$

La détermination de la fonction de Green est un problème qui intervient dans de nombreux domaines, tels que l'étude des phénomènes de rayonnement. La fonction de Green peut être utilisée pour simplifier le calcul du spectre rayonné dans la diffusion de

Compton [48], ou encore pour décrire la propagation de rayonnements cosmiques dans le milieu intergalactique [11] dans le cas de petites longueurs de diffusion sans passer par le calcul d'un grand nombre de transformées de Fourier. Des hypothèses sur la géométrie des problèmes, telles que la symétrie sphérique du Soleil en hélioséismologie [27], peuvent permettre d'accéder directement à la fonction de Green. Dans le contexte qui nous intéresse, de telles hypothèses simplificatrices ne sont cependant pas possibles.

Sur des domaines simples, tels que le disque en deux dimensions, il est possible de calculer analytiquement la fonction de Green en exploitant les symétries du domaine. Il existe notamment des évaluations numériques de la fonction de Green pour certains problèmes. Par exemple, pour l'opérateur de Helmholtz sur des structures périodiques [43], pour l'équation de la diffusion de la chaleur en une dimension [9], pour le problème elliptique [10], ou encore pour le problème externe de Neumann [70]. Sur des domaines plus complexes, il est souvent nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'approximation.

Dans la suite, vu notre contexte d'application, nous considérons la fonction de Green de l'opérateur Laplacien sur le monde sphérique noté Ω décrit en figure 1.6. Introduisons quelques notations. Ce domaine $\Omega \in \mathbb{R}$ est une partie bornée du plan, ayant pour bord $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{J} \mathcal{C}_i$ de sorte que les $\mathcal{C}_i$ soient J cercles disjoints. Par convention, $\mathcal{C}_1$ est extérieur aux autres cercles. Pour chaque i, notons c_i et r_i respectivement le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_i$. Dans ce cas, le bord $\partial\Omega$ du domaine est Lipschitz-continu, et le domaine Ω est un domaine de Lipschitz.

Nous notons dans la suite $G : (x, y) \in \bar{\Omega} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_s & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

où δ_s est la distribution de Dirac centrée en $s \in \Omega$. Bien qu'il s'agisse de l'opérateur Laplacien dans le terme de gauche, le terme de droite n'est pas L^2. La fonction de Green ne partage donc pas a priori les propriétés d'une fonction harmonique. Cependant l'intégrabilité de la fonction de Green pour les opérateurs elliptiques, dont le Laplacien fait partie, sur des domaines de Lipschitz est démontrée dans [57]. Cette propriété nous permet d'écrire à partir de l'équation (3.5), et comme montré dans [63] que la solution u de l'équation (3.1) peut s'écrire sous la forme

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) \, \mathrm{d}y \tag{3.6}$$

La détermination des valeurs prises par la fonction de Green est non triviale, et il n'existe pas de méthode générale de calcul. Le calcul de la fonction de Green doit se faire au cas par cas pour chaque opérateur différentiel linéaire et pour chaque domaine. Il peut être nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'approximation.

3.1.2. Limites des méthodes canoniques de résolution

La fonction de Green peut s'exprimer sous la forme d'une solution à une EDP, énoncée dans l'équation (3.5). Une des méthodes les plus courantes pour la résolution des EDP

est la méthode des éléments finis. Or dans cette équation, le terme de droite est une distribution, et n'est pas H^{-1}. Ce problème sort alors du cadre variationnel standard. Par conséquent, les résultats classiques de convergence de cette méthode ne sont plus garantis. En particulier, nous n'avons a priori ni la convergence à l'ordre 1 en norme $H^1(\Omega)$ ni la convergence à l'ordre 2 en norme $L^2(\Omega)$.

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été mises en œuvre pour contourner cette limitation et appliquer la méthode des éléments finis au calcul de la fonction de Green. En raffinant de façon adaptée le maillage autour du point singulier pour la fonction de Green du Laplacien, Apel [4] obtient une convergence de l'erreur L^2 du même ordre que dans le cas standard pour un domaine Ω convexe.

Une méthode de soustraction a été exposée dans [81] pour le problème de Poisson. Le principe de la méthode consiste à obtenir d'une part la solution fondamentale, dans laquelle est contenue la singularité, et d'autre part la solution d'un problème auxiliaire régulier. Cette méthode a été étendue au problème de Stokes dans [51].

Dans [40], l'application de la méthode de Galerkin discrète avec un maillage quasi-uniforme a été proposée pour la fonction de Green du Laplacien.

3.2. Calcul de la fonction de Green sur un monde sphérique

Bien qu'il existe une méthode analytique pour déterminer la fonction de Green sur le domaine qui nous intéresse, et de façon plus générale sur les domaines connexes, celle-ci requiert le calcul de la fonction de Schottky-Klein, ce qui est difficile à implémenter en pratique [17]. Par ailleurs, les méthodes d'approximation numériques telles que la méthode des éléments finis ne permettent pas d'obtenir la fonction de Green. En effet, le terme de droite dans l'équation 3.2 n'est pas H^1. Nous utilisons plutôt une méthode semi-analytique pour approcher la fonction de Green qui passe par la détermination d'une transformation conforme et de la série de Laurent d'une fonction harmonique. Dans un premier temps, nous présenterons quelques résultats généraux permettant d'obtenir la fonction de Green par l'intermédiaire d'une transformation conforme. Puis nous introduirons dans les paragraphes suivants quelques notations avant de détailler la méthode que nous proposons pour le calcul de la fonction de Green. Enfin, nous exposerons les limites de notre méthode.

3.2.1. La fonction de Green issue de transformations conformes

Nous définissons d'abord dans cette section quelques notions préliminaires qui nous permettront ensuite de déterminer la fonction de Green sur un monde sphérique.

Définition 9. *Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un domaine du plan complexe. On appelle solution fondamentale du Laplacien une application $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout élément $z_0 \in \Omega$, l'application $z \mapsto G(z, z_0)$ soit une fonction harmonique sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et*

$$\lim_{z \to z_0} G(z, z_0) = +\infty \tag{3.7}$$

Il est énoncé dans [39] que deux solutions G_1 et G_2 sont isomorphes entre-elles.

Theorème 10. *Soit G une solution fondamentale de l'équation de Laplace sur un domaine Ω. Alors il existe une fonction $h : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui est harmonique en sa première variable et une constante réelle $\lambda > 0$ telles que pour tout couple $(z, z_0) \in \Omega \times \Omega$ avec $z \neq z_0$, alors*

$$G(z, z_0) = \lambda \log \frac{1}{|z - z_0|} + h(z, z_0) \tag{3.8}$$

Ainsi, pour λ et h donnés, G est définie de façon unique par la condition aux limites prise par G sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. En particulier, le choix $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ et une condition aux limites nulle permet d'obtenir la fonction de Green du Laplacien, qui s'écrit

$$h(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z - z_0|}, \quad z \in \partial\Omega \tag{3.9}$$

Nous avons alors le théorème suivant

Theorème 11. *Soit G la fonction de Green du Laplacien sur le domaine Ω. Alors pour tout $z_0 \in \Omega$, on a*

$$\Delta_z G(\cdot, z_0) = \delta_{z_0} \tag{3.10}$$

Définir la fonction h à partir du système d'équations (3.9) est difficile d'un point de vue numérique. En effet, cela requiert la résolution d'une équation de Laplace avec un point singulier sur l'intérieur du domaine. Cette équation devient de plus en plus difficile à résoudre lorsque le point singulier s'approche du bord du domaine.

Dans le cas où Ω est un monde sphérique et afin de transformer ce problème comportant des difficultés géométriques en un problème plus aisé à résoudre, nous choisissons une transformation conforme qui rejette le point singulier à l'infini. Nous nous débarassons ainsi du point singulier et simplifions le problème.

Dans les paragraphes suivants, après avoir introduit quelques notations, nous présentons une méthode pour approcher G dans le cas qui nous intéresse.

3.2.2. Notations

Soit Ω un monde sphérique tel que défini précédemment, décrit par un disque extérieur et par $J - 1 \in \mathbb{N}$ cercles intérieurs. Soit de plus $z_0 \in \Omega$ un point intérieur de ce domaine. Nous cherchons à obtenir la fonction de Green en ce point que nous notons g_{z_0}

$$g_{z_0} = G(\cdot, z_0) : z \in \bar{\Omega} \mapsto G(z, z_0) \tag{3.11}$$

Il est mal-aisé de résoudre numériquement la fonction de Green, puisqu'il se trouve un point singulier à l'intérieur du domaine. Afin de d'éliminer ce problème, nous choisissons une transformation conforme du domaine qui rejette le point singulier à l'infini. Soit la transformation conforme

$$T_{z_0} : z \mapsto \frac{1}{z - z_0} \tag{3.12}$$

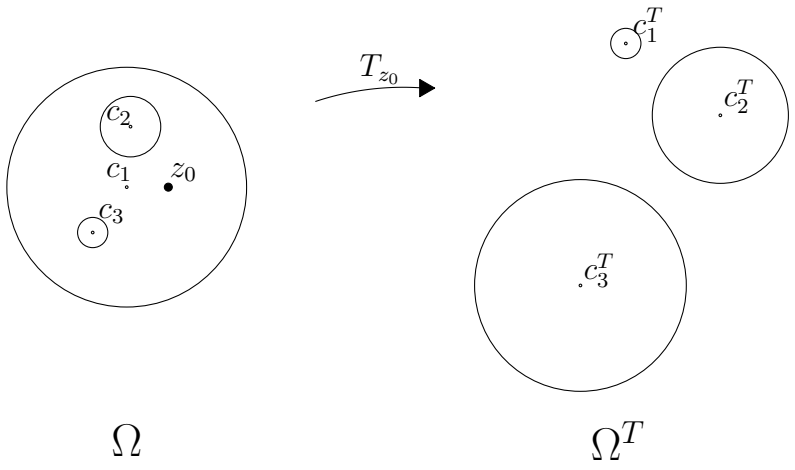


FIGURE 3.1. – Transformation conforme du monde sphérique Ω

Dans ce cas, et pourvu que z_0 soit un point intérieur du domaine Ω, l'image $\Omega^{T_{z_0}}$ du domaine Ω par la transformation T_{z_0} est une région non-bornée, illustrée en figure 3.1, délimitée par J cercles disjoints de centres $c_j^{T_{z_0}}$ et de rayons $r_j^{T_{z_0}}$ tels que

$$c_j^{T_{z_0}} = \frac{\overline{c_j - z_0}}{|c_j - z_0|^2 - r_j^2} \tag{3.13}$$

et

$$r_j^{T_{z_0}} = \frac{r_j}{\big||c_j - z_0|^2 - r_j^2\big|} \tag{3.14}$$

Soit H_{z_0} la composée de ces deux fonctions, définie à l'extérieur de J cercles disjoints

$$H_{z_0} = G(\cdot, z_0) \circ T_{z_0} : z \in \Omega^{T_{z_0}} \mapsto G(T_{z_0}(z), z_0) \tag{3.15}$$

On a alors une fonction harmonique qui est nulle sur le bord de son domaine de définition et telle que $H_{z_0}(z) \sim \log|z|$ lorsque $|z| \to \infty$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, nous n'écrirons pas l'indice z_0 et nous noterons cette fonction H pour plus de lisibilité. Nous ferons de même pour la transformation T. Nous ne connaissons pas de méthode analytique pour déterminer H pour un nombre quelconque de disques obstacles. Dans les paragraphes suivants, une méthode d'approximation semi-analytique de cette fonction H est présentée.

3.2.3. Fonction harmonique extérieure à des disques

Nous utilisons la série de Laurent [50] de la fonction H

$$H : z \mapsto \alpha + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \log|z - c_j^T| + \Re\Big(\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{jk} - i\delta_{jk})(z - c_j^T)^{-k}\Big) \tag{3.16}$$

avec la condition

$$\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 1 \tag{3.17}$$

et où α, β_j, γ_{jk} et δ_{jk} sont des scalaires que nous cherchons à déterminer. On remarque que

$$\Delta\big[\log|z-c|\big] = 0 \tag{3.18}$$

et que

$$\Delta\big[\log(z-c)^{-k}\big] = 0 \tag{3.19}$$

La fonction introduite dans l'équation (3.16) est donc bien harmonique. Par ailleurs, on a $H(z) \sim \log|z|$ lorsque $|z| \to \infty$ et $\forall z \in \partial\Omega^T$, $H(z) = 0$.

Dans l'équation 3.16, la série $\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{jk} - i\delta_{jk})(z - c_j^T)^{-k}$ peut être approchée par ses $N \in \mathbb{N}$ premiers termes. Nous considérons alors l'approximation h de la fonction H

$$h : z \mapsto \alpha + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \log|z - c_j^T| + \Re\Big(\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N-1}(\gamma_{jk} - i\delta_{jk})(z - c_j^T)^{-k}\Big) \tag{3.20}$$

Les valeurs des coefficients de h sont déterminées par une méthode de collocation, qui découle de celle présentée dans [80]. Dans le domaine transformé Ω^T, des points de collocation sont répartis sur les cercles délimitant le bord du domaine. Une méthode des moindres carrés permet alors de trouver les coefficients de l'équation (3.20) qui donnent la condition aux limites attendue.

Par ailleurs, on introduit C, le vecteur de taille n des valeurs de g aux images réciproques des points de collocation

$$C = \big(g(T^{-1}(z_1)) \dots g(T^{-1}(z_n))\big) \tag{3.21}$$

En pratique, n points de collocation notés z_i, $i \in [\![1, n]\!]$ sont répartis sur chaque cercle c_j délimitant le domaine. Les coefficients sont ensuite choisis de sorte à minimiser la somme des carrés de la fonction harmonique évaluée aux points de collocation $h(z_i)$. Alors, l'obtention des coefficients de h est équivalente à la résolution du problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\begin{cases} \min ||AX - C||^2 \\ \text{s.c. } v^T X = 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

où X et v sont deux vecteurs de longueur $(1 + J + 2NJ)$ tels que

$$\begin{aligned} X =& \big(\alpha, \beta_1, \dots \beta_J, \gamma_{11}, \delta_{11}, \dots \ \delta_{JN}\big) \\ v =& \big(0 \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{J} \underbrace{0 \quad \dots \quad \dots \quad 0}_{2NJ}\big) \end{aligned} \tag{3.23}$$

et où A est une matrice de taille n par $(1 + J + 2NJ)$.

Le problème posé dans l'équation (3.22) peut être transformé en un système d'équations linéaires en utilisant les multiplicateurs de Lagrange [53]. On cherche alors à déterminer

$$\min ||AX - C||^2 + \lambda'(v^T X - p) \tag{3.24}$$

avec λ' le multiplicateur de Lagrange. En dérivant ce problème on obtient alors le système linéraire

$$\begin{cases} 2A^T AX + \lambda' v = 2A^T C \\ v^T X = p \end{cases} \tag{3.25}$$

qui peut être résolu avec les méthodes classiques.

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction de Green est nulle sur les bords du domaine. Il en va de même pour la fonction harmonique h sur les bords du domaine transformé. Nous pouvons donc simplifier l'équation (3.25) en remplaçant le vecteur C par le vecteur nul. On a enfin le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2A^T AX + \lambda' v = 0 \\ v^T X = p \end{cases} \tag{3.26}$$

Si suffisamment de points de collocation sont définis, i.e. pour n assez grand, ce problème a une et une seule solution X. En d'autres termes, on peut définir les coefficients de l'approximation h de façon unique pour un domaine Ω donné.

3.2.4. Fonction de Green et dérivées

À partir de la fonction h définie dans les paragraphes précédents, nous approchons $G(\cdot, z_0)$, la fonction de Green en z_0, avec la fonction g définie telle que

$$g = h \circ T_{z_0}^{-1} \tag{3.27}$$

Notons que cette expression présente l'avantage d'être aisément dérivable à un ordre quelconque, puisque c'est la composition de fonctions usuelles. Cette propriété nous intéresse, puisque dans la suite, nous utiliserons les dérivées de g pour évaluer la variation de Hadamard.

Vu l'équation (3.20), on en déduit les dérivées de h

$$\begin{aligned} \forall z \in \bar{\Omega^T}, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z) &= \sum_{j=1}^{J} \beta_j \frac{x - x_j}{|z - c_j^T|^2} - \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{N-1} \Re\Big(k(\gamma_{jk} - i\delta_{jk})(z - c_j^T)^{-k-1} \Big) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(z) &= \sum_{j=1}^{J} \beta_j \frac{y - y_j}{|z - c_j^T|^2} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{N-1} \Im\Big(k(\gamma_{jk} - i\delta_{jk})(z - c_j^T)^{-k-1} \Big) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Les dérivées de g sont alors obtenues à partir des équations (3.12), (3.27) et (3.28). Une fois la fonction h obtenue, la détermination de ces dérivées ne demande pas de temps supplémentaire, puisqu'aucun coefficient supplémentaire n'a besoin d'être calculé.

3.2.5. Limites de la méthode

Plusieurs cas de figure illustrés en figure 3.2 ne peuvent pas être traités directement par cette méthode.

Point d'inversion sur le bord Dans le cas illustré en figure 3.2a où le point z_0 est sur un des bords du domaine et non pas sur l'intérieur, la transformation T_{z_0} transforme le cercle sur lequel se trouve z_0 en une droite. Le domaine transformé est alors un demi-plan privé de $J-1$ disques.

Cependant, la fonction de Green G est définie sur $\bar{\Omega}\times\Omega$ et non pas sur $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$. Il n'est donc pas nécessaire d'obtenir g_{z_0} pour des points $z_0 \in \partial\Omega$ du bord.

Cercles concentriques Dans le cas illustré en figure 3.2b où un des disques intérieurs est concentrique avec le disque extérieur, le système décrit dans l'équation (3.26) est singulier. La méthode ne permet pas dans ce cas d'obtenir les coefficients nécessaires à la détermination de la fonction de Green. Ce cas de figure n'est pas inenvisageable dans le domaine du trafic aérien, cependant le problème rencontré dans ce cas peut être aisément contourné.

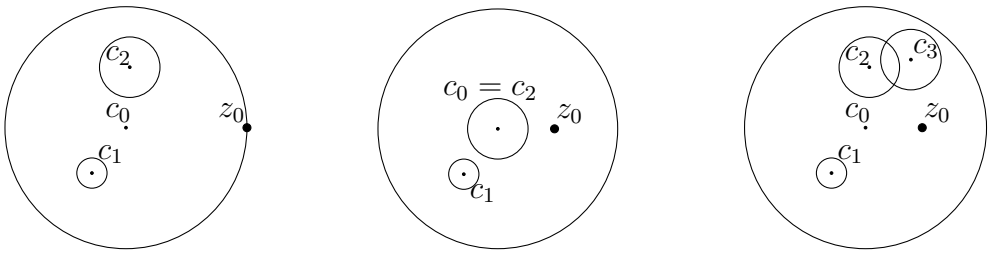
En effet, la distance entre les centres de deux cercles peut être aussi petite que voulue tant qu'elle n'est pas nulle, ce qui suffit à notre application. En pratique, pour approcher le cas où il existe $j \neq 1$ tel que $c_j = c_1$, nous pouvons remplacer c_j par $c'_j = c_j + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Comme nous le détaillons dans la section suivante, les déplacements des obstacles en deça d'un certain seuil ont un effet négligeable sur la fonction de navigation. Il suffit alors de prendre ε inférieur à ce seuil.

Cercles non-disjoints Dans le cas où illustré en figure 3.2c où il y aurait des cercles se recouvrant, il ne serait plus possible de mettre en œuvre notre méthode de calcul de la fonction de Green. En effet, le domaine transformé ne serait alors plus le domaine privé de disques disjoints, et le calcul de h ne pourrait pas se faire de la même façon.

Cependant, cette configuration correspond, dans le contexte opérationel, au cas où deux avions sont déjà en conflit. Or nous cherchons à construire des trajectoires sans conflits en partant d'une situation avant qu'un conflit ne se produise. Nous ne nous intéressons donc pas au cas de cercles non-disjoints dans ces travaux.

3.3. Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus pour l'approximation semi-analytique de la fonction de Green par la méthode décrite ci-dessus, et nous vérifions que les fonctions résultantes vérifient bien certaines propriétés attendues de convergence. De plus, nous justifions le choix des paramètres effectué dans l'équation (3.20), à la lumière de l'erreur sur la solution et du temps de calcul. Enfin, nous discutons de la pertinence de cette méthode d'approximation semi-analytique dans le cadre de l'application qui



(a) Point d'inversion sur le bord (b) Cercles concentriques (c) Cercles non-disjoints

FIGURE 3.2. – Situations exceptionnelles

nous intéresse, celui du calcul de la fonction de navigation soumise à des variations du bord du domaine.

Cet algorithme a été implémenté sous Python 2.7, sur un poste de bureau avec un CPU Intel Core i7-4710MQ, 2.50GHz, 8 cœurs.

3.3.1. Convergence de la méthode

Reconstruction de la solution harmonique pour des conditions aux limites constantes

Connaissant la fonction de Green sur un domaine $\bar{\Omega} \times \Omega$, la solution harmonique sur Ω peut être obtenue pour n'importe quelles conditions aux limites de Dirichlet. En particulier, si on considère une condition aux limites constante égale à 1, on trouve que pour tout $x \in \Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y)\ \mathrm{d}y = 1 \tag{3.29}$$

Nous nous plaçons sur un monde sphérique comportant deux cercles intérieurs de centres $2i$ et $-1 - 2i$ et de rayons 1. et 0.5 respectivement. Ce domaine est borné par un cercle extérieur de rayon 5. et de centre l'origine. Pour estimer la fonction de Green, nous construisons la fonction g telle que définie dans l'équation 3.27. Puis nous évaluons la qualité de l'approximation en comparant l'intégrale de la dérivée normale de celle-ci à 1. Pour cela, nous utilisons l'expression suivante de l'erreur, évaluée en un point $x \in \Omega$ intérieur au domaine :

$$\varepsilon(x) = \left| 1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}(x, y)\ \mathrm{d}y \right| \tag{3.30}$$

En pratique, l'intégrale est obtenue avec la fonction *quad* issue de la bibliothèque Python *scipy* [42]. Celle-ci est basée sur la bibliothèque Fortran nommée QUADPACK [67].

En figure 3.3 est représenté le logarithme de l'erreur ε telle que définie dans l'équation 3.30. Il est donné en fonction du nombre n_c de points de collocation par cercle pour différents nombres N de termes dans la série de Laurent utilisée pour calculer la fonction harmonique h sur le domaine transformé. Nous avons choisi dans cette figure

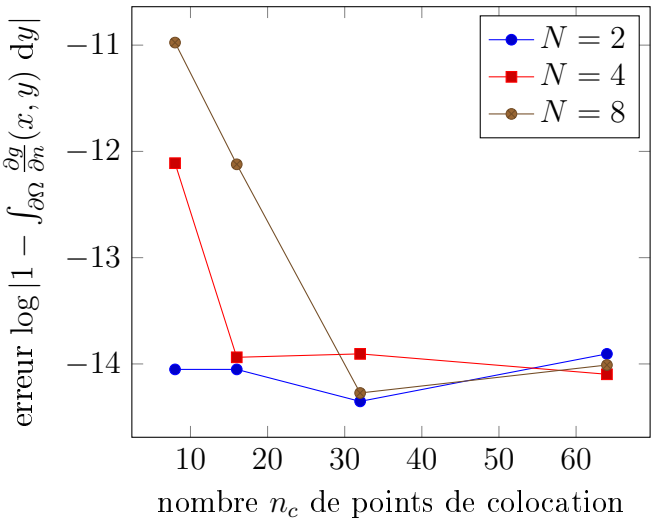


FIGURE 3.3. – $\log \varepsilon$, avec ε telle que définie dans l'équation 3.30 évaluée en $x = -2$.

un point intérieur $x = -2$, mais nous obtenons des courbes analogues aux autres points du domaine.

Dans l'ensemble, comme on le voit en figure 3.3 pour $N = 2$, $N = 4$ ou $N = 8$, le logarithme de l'erreur suit une courbe décroissante en fonction du nombre de points de collocation n_c. Aux faibles valeurs de n_c et pour des plus grandes valeurs de N, l'erreur est plus grande. La distance entre $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}(x,y)\,\mathrm{d}y$ et 1 décroit jusqu'à atteindre un plateau vers 10^{-14}, lorsque $n_c > 2N$. Ainsi, l'erreur décroit dans chaque cas jusqu'à atteindre l'erreur machine.

Pour des valeurs de n_c supérieures à $2N$, il n'y a plus de diminution significative de l'erreur, puisque le problème est alors sur-contraint, comme il est possible de le voir dans l'équation (3.22). En effet, $1+J+2(N-1)J$ coefficients y sont déduits de Jn_c équations.

Dans les paragraphes suivants, nous pousserons l'évaluation de la qualité de la fonction de Green en intégrant sa dérivée normale sur le bord pour des conditions aux limites non-constantes. Nous obtiendrons ainsi la solution du Laplacien pour des conditions aux limites de Dirichlet non-constantes, semblable à la solution que nous cherchons à obtenir comme fonction de navigation.

Reconstruction de la solution harmonique pour des conditions aux limites non-constantes

Comme nous en avons discuté dans la section 3.1.2, il n'est pas toujours aisé, voir même possible, de déterminer de façon analytique la fonction de Green. Or, nous souhaitons connaitre l'erreur produite avec notre méthode par rapport à la solution exacte. Pour évaluer la précision des résultats obtenus avec notre méthode de calcul de la fonction de Green pour reconstruire la solution harmonique, nous nous plaçons alors dans un cas de figure où une solution exacte est connue. Cette solution exacte nous servira alors de

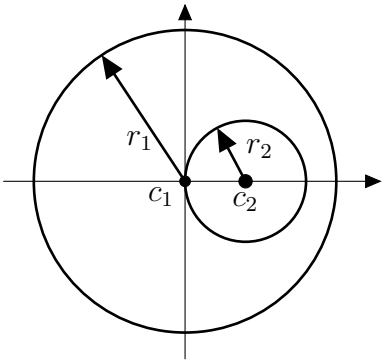


FIGURE 3.4. – Domaine sur lequel la solution harmonique est reconstruite et pour lequel une solution analytique de l'équation harmonique existe.

point de comparaison pour discuter la pertinence de notre méthode.

Sur certains mondes sphériques particuliers, une solution analytique à l'équation (3.1) peut être trouvée. Nous nous plaçons ici sur la couronne décentrée telle que le cercle extérieur soit le cercle unité de centre $c_1 = 0$ et de rayon $c_2 = 1$, et que le cercle intérieur soit le cercle de centre $c_2 = 2/5$ et de rayon $r_2 = 2/5$, tel qu'illustré en figure 3.4.

Solution analytique de référence Considérons le cas où le domaine est une couronne centrée. Nous nous intéressons à la fonction solution du problème harmonique énoncé dans l'équation (3.1), telle que la fonction soit constante égale à $a \in \mathbb{R}$ sur le bord intérieur de la couronne, et constante égale à $b \in \mathbb{R}$ sur le bord extérieur de la couronne. Or la solution au problème harmonique avec des conditions aux limites de Dirichlet constantes par cercle est une fonction de la forme $z \mapsto A + B \log z$, où A et B sont deux constantes choisies pour vérifier la condition aux limites. Avec les notations proposées, il est aisé de trouver que $A = \dfrac{b-a}{\log 2}$ et que $B = b$.

Il existe une transformation de Möbius [62] qui transforme la couronne centrée en le domaine décrit dans la figure 3.4. Dans notre cas, celle-ci s'écrit sous la forme

$$T : z \mapsto \frac{2z-1}{z-2} \tag{3.31}$$

On en déduit alors l'expression de la solution harmonique, notée u_e, sur le domaine illustré en figure 3.4

$$u_e : z \mapsto \frac{b-a}{\log 2} \log \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| + b \tag{3.32}$$

Cette solution analytique peut ensuite être comparée à la solution reconstruite à partir de la fonction de Green sur la couronne décentrée.

Comparaison avec la solution reconstruite Nous cherchons ici à comparer la solution analytique décrite ci-dessus à la solution reconstruite à partir de la fonction de Green calculée par notre méthode. Nous comparerons également l'erreur obtenue avec notre

méthode à l'erreur obtenue avec une méthode classique de résolution d'équations aux dérivées partielles : la méthode des éléments finis.

Pour comparer la solution analytique u_e de l'équation (3.32) et la solution reconstruite u_g de l'équation (3.29) sur la couronne décentrée, nous utilisons l'expression suivante de l'erreur

$$\epsilon_1 = ||u_e - u_g||_1 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |u_e(z_i) - u_g(z_i)| \tag{3.33}$$

Nous plaçons les points z_i d'évaluation des fonctions définis dans l'équation 3.33 sur une grille cartésienne suffisamment fine pour que les résultats aient convergé. Les résultats obtenus de cette façon sont présentés en figure 3.5.

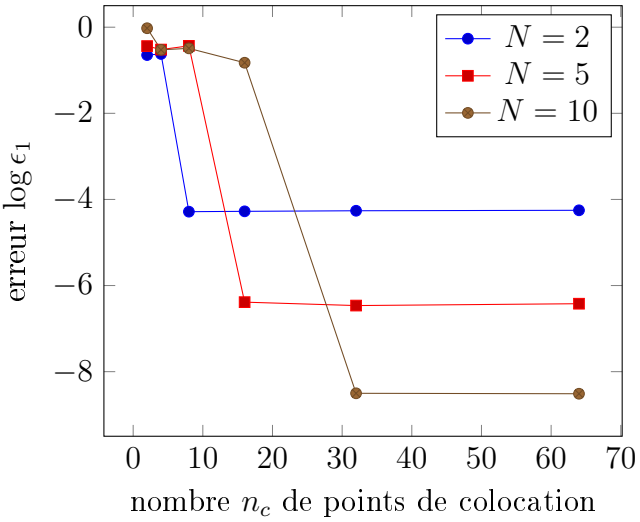
Le logarithme de la distance entre la solution analytique et la solution reconstruite à partir de la fonction de Green est donné en figure 3.5a. L'erreur ϵ_1 décroit lorsque le nombre n_c de points de collocation augmente, jusqu'à atteindre un plateau. Plus le nombre N de termes dans la série de Laurent est grand, plus le plateau est atteint pour des grands nombres n_c de points de collocation. Mais pour des grands nombres N de termes, le plateau atteint par ϵ_1 est également plus bas.

La solution par la méthode des éléments finis est obtenue par l'intermédiaire de la bibliothèque FEniCS [2] pour Python. Nous avons ici choisi d'utiliser des éléments de Lagrange d'ordre 2 pour approcher la solution. Le maillage du domaine avec lequel cette méthode des éléments finis est effectuée est calculé avec le logiciel Triangle [75]. Le maillage a été calculé de sorte à ce qu'il y ait une borne inférieure sur les angles des éléments triangulaires, et de sorte à ce qu'il y ait peu de différence entre les aires des différents éléments.

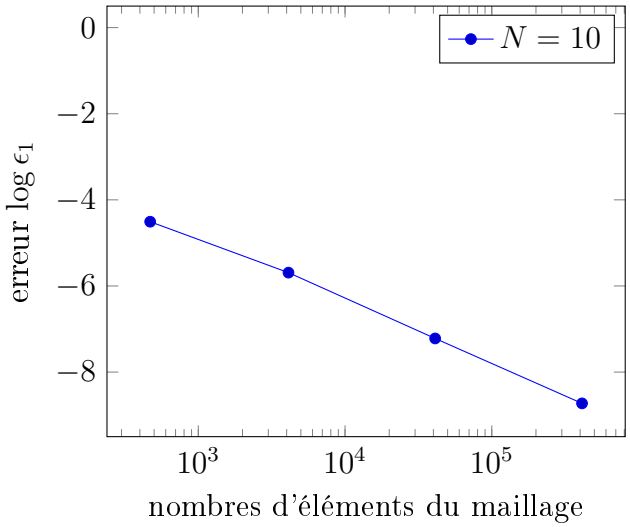
En figure 3.5b se trouve à titre de comparaison l'écart entre la solution analytique et la solution harmonique obtenue avec la méthode des éléments finis [71]. Ici, il est intéressant de constater que l'erreur sur la solution harmonique reconstruite avec la fonction de Green est comparable à celle obtenue par la méthode des éléments finis, qui est la méthode canonique pour résoudre cette catégorie de problèmes.

Nous avons ici comparé la précision de la solution harmonique obtenue avec la reconstruction à partir de la fonction de Green et celle obtenue avec la méthode des éléments finis. Nous avons notamment montré que dans le cas où une solution analytique est connue, la solution harmonique reconstruite avec la fonction de Green converge pour de faibles valeurs des paramètres N et n_c. Cependant, il est important de noter que les temps de calcul de ces deux méthodes pour obtenir la solution harmonique ne sont pas comparables. En effet, il est beaucoup plus coûteux de reconstruire la solution harmonique en calculant la fonction de Green que de mettre en œuvre la méthode des éléments finis sur le problème harmonique.

Cependant, la fonction de Green donne simultanément la solution du problème harmonique pour toutes les conditions limites possibles. Ainsi, notre méthode n'est pas adéquate pour résoudre une unique fonction de navigation. Ce n'est que dans l'optique de calculer un nombre important de fonctions de navigation distinctes que notre méthode est intéressante. Or c'est précisément à cette problématique que nous sommes confrontés pour prendre en compte les variations du domaine. Cette méthode de calcul semble donc



(a) $\log \epsilon_1$ pour la comparaison entre la reconstruction à partir de la fonction de Green et la solution analytique



(b) $\log \epsilon_1$ pour la comparaison entre la solution obtenue par la méthode des éléments finis et la solution analytique

FIGURE 3.5. – $\log \epsilon_1$ en fonction de n_c pour un nombre donné de termes N dans la série de Laurent, pour deux façons de calculer la fonction harmonique

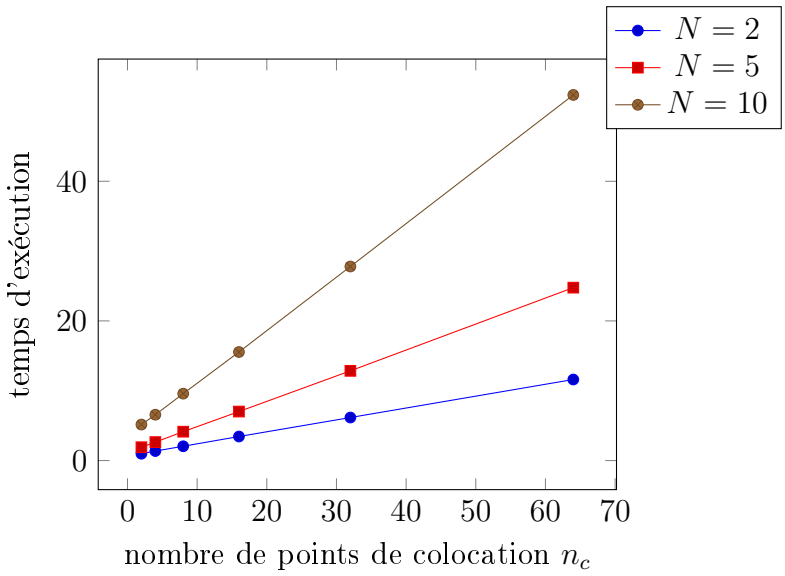


FIGURE 3.6. – Temps d'exécution normé de l'algorithme en fonction du nombre n_c de points par cercle pour différents nombres N de termes dans la série de Laurent

appropriée pour notre cas d'application.

Dans les paragraphes suivants, nous examinons plus en détail la complexité de l'algorithme que nous proposons.

3.3.2. Complexité en temps de l'algorithme

Dans cette section, nous nous proposons d'examiner la complexité de l'algorithme que nous avons détaillé dans la section 3.2. Nous emploierons ici les notations précédemment définies. Pour évaluer la complexité de l'algorithme, nous considérons le temps d'exécution de l'approximation g de la fonction de Green avec une coordonnée fixée. Les temps de calcul obtenus sont normés par rapport au temps d'exécution pour la configuration où le nombre de points de collocation $n_c = 2$ et le nombre de termes dans la série de Laurent $N = 2$. Le temps d'exécution pour cette configuration de base est de l'ordre de une milliseconde. Les résultats ainsi obtenus sont présentés en figure 3.6 pour différents couples de valeurs (n_c, N). Les valeurs indiquées sur l'axe des ordonnées sont sans dimension, puisqu'il s'agit du rapport entre le temps d'exécution de la configuration (N, n_c) indiquée et le temps d'exécution de la configuration de base.

Comme il peut être constaté dans la figure 3.6, le temps de calcul de la fonction de Green augmente rapidement avec le nombre N de termes dans la série de Laurent. De même, le temps de calcul augmente avec le nombre n_c de points de collocation. Cela étant dit, et comme il a été vu dans les sections précédentes, la solution converge rapidement pour la fonction de Green, et des bons résultats peuvent être obtenus pour de faibles valeurs de N. De plus, l'erreur en fonction du nombre de points de collocation atteint un plateau pour $n_c > 2N$. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un nombre n_c de points

de collocation élevé. Nous pouvons donc obtenir des temps de calcul raisonnables sans sacrifier la précision de la méthode.

Ces durées assez faibles doivent néanmoins être mises en perspective avec le fait que pour reconstruire la fonction harmonique, il est nécessaire d'évaluer la fonction de Green en plusieurs centaines de points.

Dans les paragraphes suivants, nous montrons quelques exemples d'application de notre méthode, pour illustrer son utilisation dans le contexte de la planification de trajectoires d'avion.

3.3.3. Exemples d'applications

Afin de montrer les possibilités d'application de notre méthode, nous présentons dans les paragraphes qui suivent les résultats obtenus sur la fonction de Green pour un monde sphérique avec un obstacle, ainsi que quelques illustrations de notre méthode appliquées au problème des fonctions de navigation pour la planification de trajectoires.

Fonction de Green sur un monde sphérique

Pour rappel, la notation $g_z = G(\cdot, z)$, désigne la fonction de Green dont on fait varier la première coordonnée avec la deuxième coordonnée fixée, pour tout point z strictement intérieur au domaine. C'est la solution de l'opérateur Laplacien en réponse à un Dirac centré au point z.

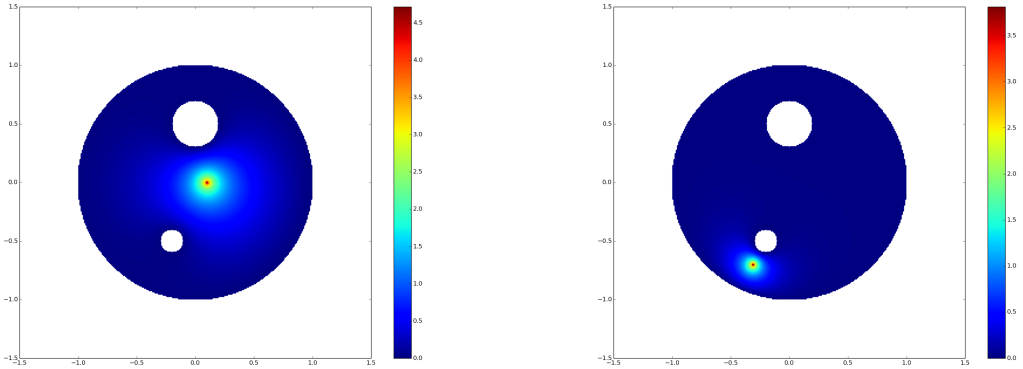
Nous présentons en figure 3.7 l'allure de la fonction de Green g_{z_0} avec la deuxième coordonnée z_0 fixée sur un monde sphérique comportant un obstacle. L'allure de la courbe est donnée pour différentes valeurs de la deuxième coordonnée. La fonction g_{z_0} est évanescente sur tout le domaine (en bleu), sauf au voisinage de la valeur prise par la deuxième coordonnée (en vert et rouge) qui est le point singulier de la fonction. Dans cet exemple, dix termes sont utilisés pour chaque série de Laurent et trente points de collocation sont placés sur chaque bord du domaine à des intervalles réguliers.

Des mondes sphériques avec des obstacles supplémentaires peuvent être traités sans difficulté supplémentaire.

Calcul de fonctions de navigation

Afin de démontrer l'applicabilité de notre méthode à la planification de trajectoires, nous avons effectué des calculs de fonctions de navigation à partir de la fonction de Green, et nous avons généré des trajectoires par descente de gradient sur ces fonctions de navigation. Les trajectoires ainsi obtenues sont présentées en figure 3.8. Les dimensions du domaine sont similaires à celle du contexte opérationel présenté au chapitre 1. Le bord externe est un cercle de rayon 100 NM. Les disques obstacles ont chacun un rayon de 5 NM. Le disque destination d'un rayon de 1 NM est proche du centre du domaine.

Les trajectoires sont tracées avec une méthode de descente de gradient [26] avec un pas constant. Nous trouvons bien que les trajectoires générées convergent vers le disque destination. Cette méthode présente l'avantage d'éviter que le mobile ne passe trop près



(a) Point singulier $z_0 = 0.1$ (b) Point singulier $z_0 = -0.3 - 0.7i$

FIGURE 3.7. – Approximation g de la fonction de Green sur le disque unité avec un obstacle de rayon 0.1 et de centre $-0.2-0.5i$ et avec un disque destination de rayon 0.2 et de centre $0.5i$

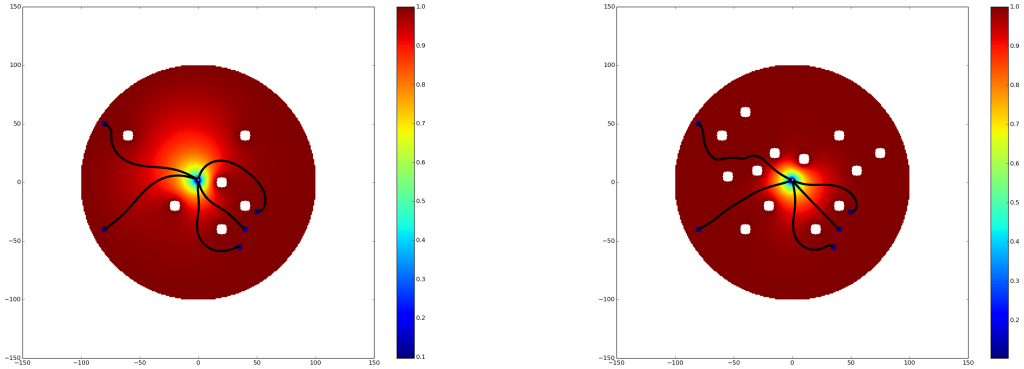
des obstacles. Elle permet également de calculer une trajectoire à partir de presque tous les points du domaine. En effet, l'ensemble des points à partir desquels aucune trajectoire n'est construite est de mesure nulle.

Dans la figure 3.8, le potentiel harmonique reconstruit à partir de la fonction de Green obtenue par notre méthode est représenté en couleur. Les hautes valeurs de potentiel sont en rouge, autour des obstacles et loin de la destination. Les basses valeurs de potentiel sont en bleu, au voisinage du disque destination. Les trajectoires générées avec une descente de gradient figurent en noir.

Nous illustrons d'ailleurs ici une des limites déjà évoquées dans le chapitre 2 des potentiels harmoniques pour le calcul des fonctions de navigation. Le gradient du potentiel est très faible loin de la destination, et plus encore lorsque beaucoup d'obstacles sont présents. En effet, il est possible de constater de larges nappes rouges où le potentiel harmonique varie peu près du bord extérieur du domaine. Si ce gradient devenait inférieur aux erreurs numériques, il ne serait alors plus possible de déterminer la direction dans laquelle aller pour rejoindre la destination. Néanmoins, cette difficulté est inhérente aux potentiels harmoniques, et ne dépend pas de la méthode utilisée pour calculer la fonction de navigation harmonique.

3.4. Conclusion

Dans le cas général, le calcul de la fonction de Green est non trivial. Nous avons exposé ici une méthode pour exprimer la fonction de Green afin de calculer des fonctions de navigation pour les trajectoires d'avion. Quel que soit le nombre d'obstacles sur le domaine, il est toujours possible d'obtenir la fonction de Green, et donc des trajectoires avec une garantie d'évitement des conflits sur cet espace.



(a) 6 obstacles (b) 12 obstacles

FIGURE 3.8. – Fonctions de navigations calculés au départ des points $40-40i$, $35-55i$, $50-25i$, $-80-40i$ and $-80+50i$

De plus, les fonctions de navigation obtenues par la méthode exposée ici sont comparables à celles obtenues par des méthodes canoniques de résolution d'équations aux dérivées partielles en terme de précision par rapport à une solution analytique de référence.

Cette méthode présente néanmoins quelques inconvénients qui peuvent rendre son utilisation difficile. Pour obtenir le potentiel harmonique à partir de la fonction de Green, il est nécessaire de calculer un grand nombre de fonctions de Green, puisqu'une intégrale sur le bord du domaine est effectuée. Cette méthode n'est donc pas adaptée au calcul d'un unique potentiel de navigation. En revanche, nous pouvons utiliser l'approximation semi-analytique de la fonction de Green ainsi obtenue dans le calcul de la variation de Hadamard, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Dans la suite de ce document, c'est la méthode de calcul que nous avons explorée dans le présent chapitre qui sera utilisée pour approcher la fonction de Green du Laplacien sur un monde sphérique.

4. Variations de Hadamard

4.1. Introduction

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, nous nous intéressons à la planification de trajectoires lorsque la position des avions est incertaine. Dans notre modélisation, cela revient à déplacer le centre des disques obstacles représentant les autres avions. Seule la translation d'un des bords intérieurs a un sens opérationnel pour le trafic aérien. Cependant, afin d'illustrer la robustesse de la méthode développée ici, nous étudierons la translation et la dilatation d'un bord intérieur.

C'est dans cette optique que ce chapitre est consacré au comportement de la solution de l'équation harmonique avec des conditions aux limites de Dirichlet sur un monde sphérique face à une perturbation d'un des bords intérieurs du domaine. Nous nous intéressons pour cela à une méthode en particulier permettant de décrire les variations de cette solution harmonique : la formule variationnelle de Hadamard, ou *variation de Hadamard*.

L'idée au cœur de la variation de Hadamard a été proposée par Hadamard dans [38]. Elle a été par la suite explorée plus en détails dans [61] et repose sur la notion suivante : soit $\delta\rho$ un « petit » champ de déplacement que nous appliquons au domaine Ω. Les transformations $(I + \delta\rho)$ sont des homéomorphismes « proches » de l'identité. Dans la suite, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la perturbation utilisée, nous noterons l'image de Ω par la perturbation $\Omega^* = (I + \delta\rho)(\Omega)$.

Nous considérons la fonction de Green du Laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet sur un monde sphérique. La variation de la fonction de Green en fonction d'une perturbation du bord du domaine telle qu'illustrée en figure 4.1 est appelée la *variation de Hadamard*. Quelques applications de cette formule de variation de Hadamard peuvent

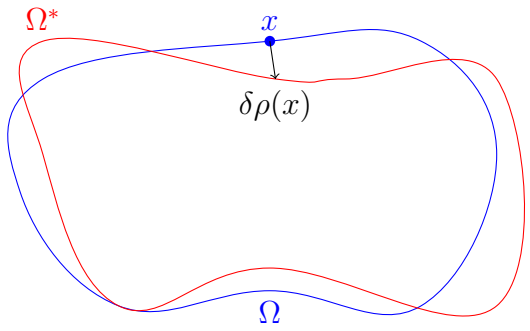


FIGURE 4.1. – Variation $\delta\rho$ du domaine Ω en un point x du bord

être trouvées dans [3] ou dans [28]. Concernant la fonction de Green du Laplacien, l'expression de la variation a été donnée très tôt, puisqu'elle apparaît dans les travaux de Hadamard [38]. L'expression de la formule de variation de Hadamard du premier ordre [77] est la suivante

$$\delta G(x,y) = \int_{\partial\Omega} \delta\rho(w) \frac{\partial G}{\partial n}(w,x) \frac{\partial G}{\partial n}(w,y) \, \mathrm{d}\sigma(w) \tag{4.1}$$

Une démonstration de cette expression peut être trouvée dans [29, 30].

En pratique, nous nous placerons sur une couronne décentrée et nous ferons varier uniquement le disque intérieur. Nous aurons donc $\delta\rho = 0$ sur le cercle extérieur. Comme décrit dans le chapitre 2, ce sont les petits déplacements du disque obstacle qui nous intéressent particulièrement. Ces petits déplacements des obstacles perturbent les trajectoires obtenues avec la méthode des fonctions de navigation tel qu'illustré en figure 2.1, où les trajectoires pour des déplacements du disque obstacles sont représentées. Nous présenterons également par souci de complétude les résultats obtenus pour des dilatations du disque.

Après avoir défini dans une première section quelques notations et les notions utiles pour ce chapitre, nous utiliserons dans la seconde section la fonction de Green telle que calculée au chapitre 3 pour étudier la réponse de la solution harmonique à une variation du domaine sur des exemples qui ont trait aux fonction de navigation.

4.2. Variation de Hadamard

4.2.1. Définitions

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété de Riemann orientable suffisamment lisse de dimension d et soit $\{\gamma_i\}_{i=1\ldots N}$ un ensemble fini de sous-variétés lisses de dimension $d-1$ de sorte que $\mathcal{M}$ soit partitionné par deux variétés $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$ de dimension d et ayant un bord commun $\gamma = \cup_{i=1\ldots N}\gamma_i$. La variété $\mathcal{M}^+$ est supposée suffisamment compacte. Enfin, soit X un champ de vecteurs lisse sur $\mathcal{M}$ et de flux $\phi(t,x)$ transverse presque partout à γ.

Le flux de X est noté $\phi\colon]-\epsilon,\epsilon[\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, avec $\partial_t\phi(0,x) = X(x)$. À t fixé, la fonction $x \mapsto \phi(t,x)$ sera notée ϕ_t. Le flux ϕ représente une déformation admissible de la variété à bord $\mathcal{M}^+ \cup \gamma$. D'après [65], la déformation du bord en $t \in]-\epsilon,\epsilon[$ est $\gamma_t = \phi(t,\gamma)$ et le problème perturbé est

$$\begin{cases} \Delta u_t = 0 \text{ in } \phi\left(t, \mathcal{M}^+\right) & \text{(4.2a)} \\ u_t|_{\gamma_t} = f_t & \text{(4.2b)} \end{cases}$$

L'objectif principal ici est d'obtenir une expression de la variation de la fonction de Green. Par conséquent, nous reformulons le problème énoncé dans l'équation (4.2a) afin d'avoir une distribution dans le terme de droite. De même, la condition aux limites de l'équation (4.2b) sera simplifiée pour être nulle

$$u_t|_{\gamma_t} = 0 \tag{4.3}$$

Enfin, le problème énoncé avec une distribution est

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_t^+} \Delta u_t v\omega = T(v) \\ &u|_{\gamma_t} = f_t \end{aligned} \tag{4.4}$$

où ω est la forme volume riemannienne, et le terme de droite T est une distribution. Sachant que $\Delta u_t = \mathrm{div}\nabla u_t$, il est possible d'en déduire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_t^+} \Delta u_t v\omega &= \int_{\mathcal{M}_t^+} v d(i_{\nabla u_t}\omega) \\ &= -\int_{\mathcal{M}_t^+} g\left(\nabla u_t, \nabla v\right)\omega + \int_{\gamma_t} v\nabla u_t|_N \sigma \end{aligned} \tag{4.5}$$

où N est le vecteur normal à γ, avec la composante du vecteur normal indiquée par l'indice N, et où $\sigma = i_N\omega$

Étant donné qu'une fonction de test v sur le domaine perturbé est l'image par ϕ_t^* d'une fonction de test $\phi_t^{-1*}v$, alors le problème perturbé de l'équation (4.5) peut être reformulé de sorte à n'utiliser que des intégrales sur $\mathcal{M}^+$:

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathcal{M}^+} \phi_t^* g\left(\nabla u_t, \nabla v\right)\phi_t^*\omega + \int_\gamma \phi_t^* v\phi_t^*\nabla u_t|_N \phi_t^*\sigma = \phi_t^* T(v) \\ &\phi_t^* v \in \mathcal{D}\left(\mathcal{M}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dans le terme de gauche de l'équation (4.6), en remplaçant la dérivée de la première intégrale par rapport à t en $t = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}^+} X\left(g\left(\nabla u, \nabla v\right)\right)\omega + \int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla \dot{u}, \nabla v\right)\omega + \int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla u, \nabla v\right)\mathrm{div}\, X\omega \\ &v \in \mathcal{D}\left(\mathcal{M}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Vu la formule de Cartan

$$\mathrm{div}(X)\omega = d(i_X\omega) \tag{4.8}$$

il vient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla u, \nabla v\right)\mathrm{div}\, X\omega = \int_{\mathcal{M}^+} d\left(g\left(\nabla u, \nabla v\right) i_X\omega\right) - \int_{\mathcal{M}^+} d\left(g\left(\nabla u, \nabla v\right)\right) \wedge i_X\omega \\ &= \int_\gamma g\left(\nabla u, \nabla v\right) X_N\sigma - \int_{\mathcal{M}^+} X\left(g\left(\nabla u, \nabla v\right)\right)\omega \end{aligned} \tag{4.9}$$

En combinant ce résultat avec celui de l'équation (4.7), la dérivée devient

$$\int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla \dot{u}, \nabla v\right)\omega - \int_\gamma g\left(\nabla u, \nabla v\right) X_N\sigma \tag{4.10}$$

De plus, la dérivée par rapport à t du terme de bord évaluée en $t = 0$

$$\int_{\gamma_t} v \nabla u_t|_N \sigma = \int_\gamma \phi_t^* v \nabla \phi_t^*|_N \phi_t^* \sigma \tag{4.11}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\int_\gamma v \nabla \dot{u}|_N - X\left(v \nabla u|_N\right) \sigma \tag{4.12}$$

Avec la conditions aux limites nulle $u|_\gamma = 0$, le premier terme disparaît. Cependant, notons qu'elle peut être conservée pour obtenir une formule de variation plus générale.

En assemblant ces différents éléments, il est possible d'écrire

$$-\int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla \dot{u}, \nabla v\right) \omega + \int_\gamma g\left(\nabla u, \nabla v\right) X_N \sigma + \int_\gamma v \nabla \dot{u}|_N - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla u|_N X_N \sigma \tag{4.13}$$

En remplaçant v dans l'équation (4.13) par la solution du problème dual

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}^+} u \Delta \tilde{G}_x \omega = \delta_x \\ &\nabla v|_\gamma = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

et en utilisant

$$\int_{\mathcal{M}^+} u \Delta \omega = -\int_{\mathcal{M}^+} g\left(\nabla \dot{u}, \nabla v\right) \omega \tag{4.15}$$

d'où la dérivée de la solution

$$\dot{u} = \int_\gamma \tilde{G}_x \nabla \dot{u}|_N \sigma - \int_\gamma \frac{\partial \tilde{G}_x}{\partial n} \nabla u|_N X_N \sigma \tag{4.16}$$

Enfin, si u est la fonction de Green du problème initial, alors la formule de variation de Hadamard en découle [77] :

$$\delta G(x, y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(w, x) \frac{\partial G}{\partial n}(w, y) X_N \sigma \tag{4.17}$$

C'est cette expression que nous implémentons dans la section suivante.

4.3. Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus avec l'équation (4.17) sur un domaine sphérique soumis à une perturbation d'un des disques intérieurs de la forme

$$\delta\rho = \delta r + \vec{\delta c} \cdot \vec{n} \tag{4.18}$$

où δr est une petite variation du rayon du disque intérieur et $\vec{\delta c} \cdot \vec{n}$ est une petite translation du disque intérieur projetée sur le vecteur normal du bord du domaine.

Cette perturbation $\delta\rho$ peut être évaluée en tout point du disque perturbé. Nous prenons $\delta\rho = 0$ ailleurs sur le bord du domaine, c'est-à-dire sur le disque extérieur.

Dans le cas d'une dilatation ou d'une contraction du disque intérieur, nous aurons $\delta\rho$ constant sur tout le bord intérieur, égal à la variation du rayon du disque. Dans le cas d'une translation du disque intérieur, $\delta\rho$ sera égal en chaque point du bord intérieur à la projection du vecteur translation du disque sur la normale au bord en ce point.

Dans les paragraphes suivants, nous verrons la variation de Hadamard de la fonction de Green lorsque $\delta\rho = \delta r$ et lorsque $\delta\rho = \vec{\delta c} \cdot \vec{n}$. Cette méthode a été implémentée dans les mêmes conditions (langage, processeur,...) qu'au chapitre 3.

4.3.1. Variation de la fonction de Green

Soit Ω une couronne décentrée. Nous considérons ici une perturbation du disque intérieur qui constitue un des bords du domaine. Nous considérons la fonction de Green notée G définie sur $\bar{\Omega} \times \Omega$, et calculée numériquement à partir de l'équation (3.27). Sauf mention contraire, nous utilisons ici les notations introduites au chapitre 3. Vu l'étude sur la convergence de l'approximation de la fonction de Green menée au chapitre 3, nous utilisons $n_c = 30$ points de collocation par disque et $N = 10$ termes par série de Laurent.

Nous considérons des petites perturbations du domaine, notées $\delta\rho$. Puisque nous nous intéressons à des translations ou à des dilatations du disque intérieur, l'expression de $\delta\rho$ est aisément obtenue. Le domaine perturbé est noté Ω^*.

Nous notons δG la variation de Hadamard de la fonction de Green telle que définie dans l'équation (4.17). La fonction de Green sur le domaine perturbé obtenue avec la formule de variation de Hadamard est notée $\tilde{G} = G + \delta G$. La fonction de Green sur le domaine perturbé obtenue directement à partir de l'équation (3.27) est notée G^*. Enfin, nous comparons la variation obtenue par la formule de variation de Hadamard δG avec la variation réelle de la fonction de Green obtenue par différence $G^* - \tilde{G}$. Pour comparer ces deux grandeurs, nous utilisons l'expression suivante de l'erreur

$$\varepsilon_g = \left|\left| \frac{|(G^* - G) - \delta G|}{|\delta\rho|} \right|\right|_1 \tag{4.19}$$

où la norme $||\cdot||_1$ est calculée sur $\bar{\Omega} \times \Omega$ en discrétisant le domaine avec une grille cartésienne, de façon analogue à ce qui a été fait avec l'erreur exprimée dans l'équation (3.33). Cette erreur est représentée en figure 4.2 pour des petites perturbations $\delta\rho = \delta r$ et en figure 4.3 pour $\delta\rho = \vec{\delta c} \cdot \vec{n}$.

L'erreur relative entre la variation de Hadamard de la fonction de Green et la variation réelle de la fonction de Green pour une perturbation du centre du disque intérieur est représentée en figure 4.2. L'erreur relative entre la variation de Hadamard de la fonction de Green et la variation réelle de la fonction de Green pour une perturbation du centre du disque intérieur est représentée en figure 4.3.

Nous pouvons constater en figures 4.2 et 4.3 que l'erreur décroit avec le pas de la perturbation puis atteint un plateau. Ce plateau correspond au régime non-linéaire de l'approximation.

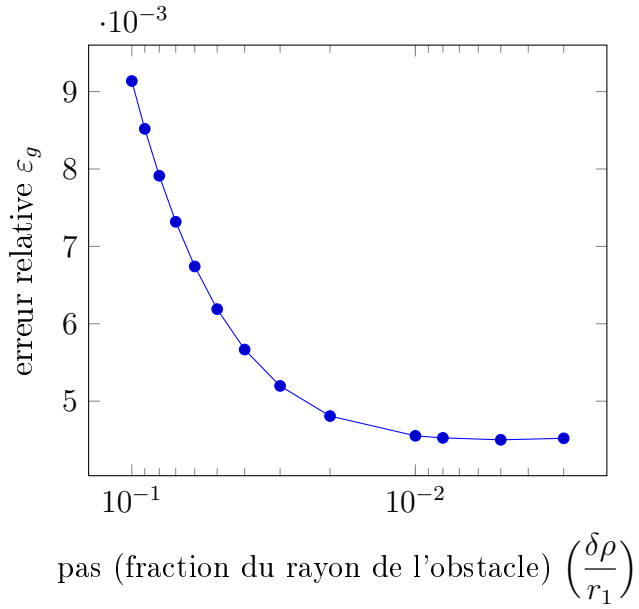


FIGURE 4.2. – Réponse à une dilatation du disque intérieur.

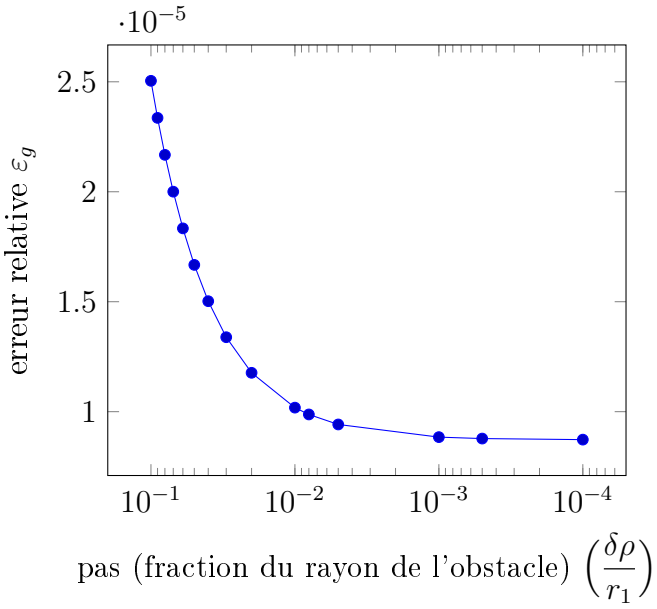


FIGURE 4.3. – Réponse à une translation du disque intérieur.

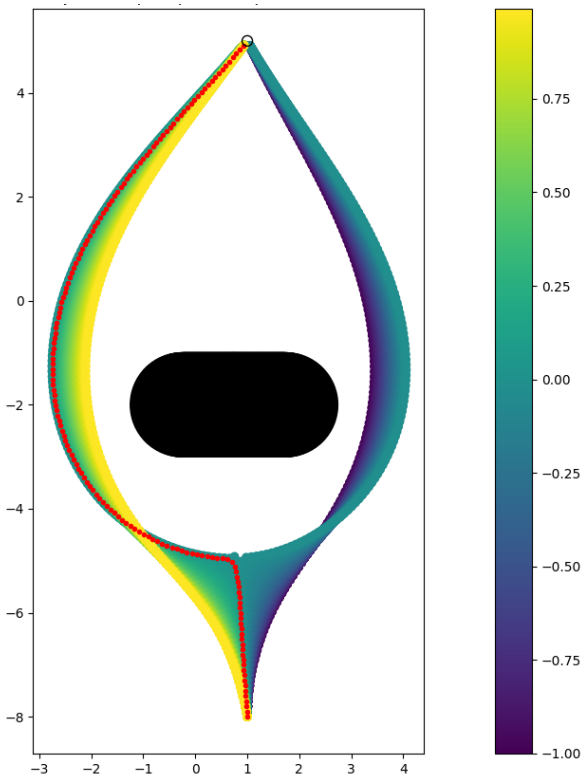


FIGURE 4.4. – Trajectoires obtenues pour différentes positions de l'obstacle. La trajectoire correspondant à une position centrale de l'obstacle est donnée en rouge. L'échelle de couleurs indique le rapport entre l'amplitude $\delta\rho$ de la translation du disque obstacle et le diamètre de celui-ci.

Ayant examiné la variation de la solution harmonique, nous allons considérer dans les paragraphes suivants la variation des trajectoires générées avec la fonction de navigation harmonique perturbée.

4.3.2. Variation des trajectoires construites avec une fonction de navigation harmonique

Sur un domaine tel que décrit en figure 1.5, nous calculons la solution harmonique u à partir de la fonction de Green avec l'expression explicitée en 3.4. Pour plusieurs perturbations $\delta\rho$ de la position du disque obstacle, nous calculons la variation de Hadamard δu de la solution harmonique. Enfin, nous utilisons la méthode de descente de gradient sur le potentiel $u + \delta u$ à partir d'un point intérieur au domaine pour générer les trajectoires représentées en figure 4.4.

La trajectoire calculée pour la solution harmonique non perturbée u est donnée par la courbe rouge dans la figure 4.4. Nous pouvons constater que dans ce cas de figure, si l'obstacle se déplace légèrement vers la droite ($\delta\rho > 0$), alors la trajectoire se décale vers la droite (courbes jaunes). En revanche, si l'obstacle se déplace légèrement vers la gauche

($\delta\rho < 0$), alors la trajectoire passe de l'autre côté de l'obstacle (courbes violettes).

4.4. Application aux déplacements aléatoires

La variation de Hadamard permet une approximation au premier ordre de la solution d'un système perturbé. Dans le cas où le déplacement du bord est dû à l'action d'un champ de vecteurs aléatoire, la même formule va permettre d'approcher la distribution de probabilité du champ perturbé par un champ gaussien. Dans toute cette section, on suppose que le déplacement infinitésimal sur le bord $\partial\Omega$ du domaine considéré est la trace d'un champ gaussien X, défini sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$. X est défini comme une application de $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, p) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\omega \in \mathcal{E} \to X(\omega, x)$ soit une variable aléatoire dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. X étant supposé gaussien, il est entièrement déterminé par sa fonction moyenne, $\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et covariance $C\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to SPD(2)$ où $SPD(n)$ désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives de dimension n. Toute combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes étant une variable aléatoire gaussienne, on en déduit que la composante normale du champ X sur le bord $\partial\Omega$ est un processus gaussien X_N à valeurs réelles, de fonction moyenne $\tilde{\mu}\colon y \in \partial\Omega \mapsto (\mu(y), n(y))$ où $n(y)$ est la normale à $\partial\Omega$ en y. La fonction de covariance est quant à elle donnée par $\tilde{C}(y, z) = (n(y), C(x, y)n(y))$. La formule de variation de Hadamard appliquée à X_N définit un champ scalaire aléatoire δu par :

$$\delta u(\omega, x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \frac{\partial u(y)}{\partial n} X_N(\omega, y) d\sigma(y) \tag{4.20}$$

où $\omega \in E, x \in \mathbb{R}^2$. Ce champ est encore Gaussien, de fonction moyenne :

$$\nu(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \frac{\partial u(y)}{\partial n} \tilde{\mu}(y) d\sigma(y) \tag{4.21}$$

et de fonction de covariance :

$$K(x, y) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, z)}{\partial n} \frac{\partial G(y, t)}{\partial n} \frac{\partial u(z)}{\partial n} \frac{\partial u(t)}{\partial n} \tilde{C}(z, t) d\sigma(z) d\sigma(t) - \nu(x)\nu(y) \tag{4.22}$$

L'évaluation de ces fonctions doit se faire par intégration numérique. La difficulté principale est l'implémentation efficace de la double intégration nécessaire pour la fonction de covariance. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas étudié de façon exhaustive les possibilités de simplification du calcul afin de limiter le coût d'évaluation. Néanmoins, il est à noter que dans les applications pratiques la connaissance de la fonction de covariance complète n'est que rarement nécessaire, la variance $V(x) = K(x, x)$ étant l'information la plus importante. Son calcul s'effectue sur une grille spatiale de la forme $x_{ij} = (a + i\delta_1, b + j\delta_2), i = 1 \dots N, j = 1 \dots M$ où (a, b) sont les coordonnées du point inférieur de la grille et δ_1, δ_2 les pas selon les coordonnées. En raison de l'indépendance des calculs en fonction des points de grille, il est possible de distribuer les évaluations sur différents nœuds de calcul, réduisant ainsi le temps d'exécution d'un facteur approximativement égal au nombre de machines disponibles.

4.5. Conclusion et perspectives

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre 2, nos travaux pourraient être étendus au cas des fonctions de navigation biharmoniques. Nous pouvons donc nous intéresser à la variation de Hadamard de la fonction de Green associée à l'opérateur biharmonique. Cette fonction de Green $G(x, .)$ en un point x intérieur au domaine représente la flexion normale qu'éprouverait en chaque point une plaque élastique mince, homogène et isotrope, encastrée sur tout son contour et soumise à une force normale unique appliquée en x [38].

Nous avons ainsi montré que la méthode de calcul exposée dans le chapitre 3 pour la fonction de Green donne des résultats numériques applicables au calcul de la variation de Hadamard. Ces résultats sont prometteurs pour les perspectives de déploiement des fonctions de navigation dans la planification des trajectoires d'avions dans un contexte opérationnel réel.

Conclusion générale

Contribution

Afin de prendre en compte la croissance du trafic aérien dans le ciel européen, les systèmes de gestion du trafic aérien se tournent vers des modes d'opération basés sur les trajectoires, afin d'augmenter l'efficacité et de maximiser l'utilisation de l'espace aérien. Un des éléments clés dans cette réorganisation du trafic est la réduction en amont du nombre de conflits potentiels. Les fonctions de navigation répondent à cette problématique, mais avant de pouvoir être déployée à l'échelle européenne, toute méthode de planification de trajectoires doit démontrer sa fiabilité. Pour cela, il est nécessaire d'implémenter de nouveaux outils.

Nous avons proposé dans nos travaux d'utiliser la variation de Hadamard pour quantifier les variations des fonctions de navigation harmoniques lorsqu'il existe une incertitude sur la position des avions. Cependant, le calcul numérique de la formule de variation d'Hadamard nécéssite une étape intermédiaire : le calcul de la fonction de Green et de ses dérivées.

Cette thèse s'est concentrée sur la méthode pour obtenir la fonction de Green, elle-même nécessaire au calcul des variations de Hadamard de la fonction de navigation. Nous avons exhibé dans ces travaux une méthode de calcul de la fonction de Green et nous avons montré qu'elle peut en effet être utilisée pour la variation de Hadamard de la solution harmonique sur un monde sphérique. Cette solution présente l'avantage d'être semi-analytique et s'écrit sous la forme d'une somme de fonctions usuelles qu'il est aisé de dériver à tout ordre.

L'implémentation de cette méthode, que nous n'avions pas envisagé en début de thèse a permis, non seulement de faciliter le calcul de la variation de Hadamard, mais aussi d'ouvrir de nouvelles perspectives pour des travaux futurs.

Perspectives

Les travaux menés au cours de cette thèse ont ouvert de nombreuses perspectives. Voici dans les paragraphes qui suivent quelques pistes qu'il serait intéressant d'explorer.

Deuxième variation de Hadamard

Nous avons montré que notre méthode de calcul de la fonction de Green permet d'obtenir la première variation de Hadamard. Les variations d'Hadamard d'ordre supérieur font intervenir les dérivées successives de la fonction de Green. Or cette méthode

semi-analytique donne toutes les dérivées de la fonction de Green sans difficulté supplémentaire. Il serait donc intéressant d'étendre l'étude menée dans le chapitre 4 à la deuxième variation d'Hadamard.

Extension aux fonctions de navigation biharmoniques

Des travaux antérieurs ont établi que les fonctions de navigation biharmoniques étaient un complément indispensable aux fonctions de navigation harmoniques dans le cas de la planification de trajectoires d'avions.

Dans cette thèse, nous ne nous sommes intéressés qu'aux potentiels harmoniques. Afin de pouvoir appliquer les fonctions de navigation au contexte opérationnel réel de la gestion du trafic aérien, il sera donc nécessaire d'étendre l'étude des variations au cas de la fonction de navigation biharmonique.

Parallélisation de l'algorithme

Le calcul de la variation de Hadamard passe par l'évaluation numérique d'une intégrale sur le bord du domaine. Cela rend nécessaire le calcul de la fonction de Green en de nombreux points du domaine. Or les calculs de la fonction de Green en deux points distincts du domaine sont indépendants. Il serait donc possible d'effectuer ce calcul en de nombreux points différents de façon simultanée en exploitant les capacités d'une carte graphique.

Il s'agirait alors de discrétiser le monde sphérique choisi, et d'évaluer la fonction de Green en chaque couple de points de ce domaine discrétisé. Le calcul en chaque couple de points renvoie une valeur réelle. Une fois ces valeurs obtenues, l'intégrale d'un produit de nombres réels sur un cercle est aisément obtenue avec les routines de calcul standards.

Alternatives à la méthode de calcul de la fonction de Green

Nous avons montré dans cette thése qu'une méthode semi-analytique de calcul de la fonction de Green peut être utilisée pour mettre en œuvre la variation de Hadamard. Les résultats et les performances de cette méthode de calcul pourraient être comparés à ceux d'autres méthodes de calcul de la fonction de Green telles que

— l'expression utilisant la fonction de Schottky-Klein ;
— la méthode des éléments finis avec un maillage adaptatif ;
— une extension de la méthode de soustraction décrite par [52].

Une étude comparative de ces différentes méthodes pourra notamment être menée.

Réponse aux variations du bord

La méthode de Monte Carlo a été envisagée pour la planification de trajectoires d'avions robustes aux aléas. Les résultats de cette méthode pourront être comparés à ceux obtenus lors de cette thèse.

Conflits à plus de deux avions

Les cas tests développés dans cette thèse concernent la trajectoire d'un unique avion. Cependant, les fonctions de navigation peuvent être étendues aux mouvement coordonnés. Il sera donc important d'étendre l'étude menée ici au cas où les trajectoires de plusieurs avions doivent être déterminées.

A. Méthode des éléments finis pour le calcul de la fonction de Green

Une méthode préssentie pour le calcul numérique de la fonction de Green de l'opérateur Lapacien a été la Méthode des Éléments Finis (MEF). La fonction de Green peut être définie par une équation aux dérivées partielles, et n'a pas de forme générale connue. En particulier, pour la fonction de Green du Laplacien sur un monde sphérique du plan, bien qu'une solution analytique existe [17], cette solution dépend de fonctions difficiles à évaluer numériquement. Or la MEF est une méthode communément utilisée pour résoudre numériquement des problèmes aux dérivées partielles pour lesquels aucune solution analytique n'est connue.

Plusieurs mois en début de thèse ont été consacrés à la mise en œuvre de cette méthode pour le calcul de la fonction de Green du Laplacien. Aucun résultat exploitable n'a été obtenu par cette piste, comme peuvent le prédire certains travaux de 2016 [52].

Nous présentons dans ce chapitre l'exploration de la piste des éléments finis et les limites de cette méthode pour la configuration qui nous intéresse, ainsi que les conclusions tirées.

A.1. Définition et algorithmes

La méthode des éléments finis consiste dans le principe à transformer une équation sur un opérateur différentiel $\mathcal{D}$ avec un second membre $f \in \mathcal{H}^1$ que nous cherchons à résoudre pour une fonction u, en problème linéaire sur une matrice A que nous cherchons à résoudre pour X.

$$\mathcal{D}u = f \qquad \rightarrow \qquad AX = L \tag{A.1}$$

Cette transformation du problème différentiel en un problème matriciel se fait en passant par la forme variationnelle du problème, puis en discrétisant l'équation par rapport à un maillage du domaine, et enfin en choisissant une base de fonctions avec laquelle approcher la solution. Nous traiterons ici le cas de l'opérateur différentiel laplacien, avec des conditions au bord de Dirichlet non-homogènes, tel que défini dans le chapitre 2. Pour rappel, nous nous intéressons ici au problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = f, \text{ sur } \Omega \\ u = u_0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{A.2}$$

A.1.1. Forme variationnelle

Nous cherchons dans un premier temps la *forme variationnelle* de ce problème. Afin de transformer le problème issu de l'équation (3.1) en problème variationnel, l'équation harmonique est multipliée par une fonction v appelée *fonction-test*

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \tag{A.3}$$

par intégration par parties sur le domaine Ω cette équation devient

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}s \tag{A.4}$$

Puisque $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, il est possible de déduire des équations (A.3) et (A.4) la forme suivante

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f.v \, \mathrm{d}x \tag{A.5}$$

C'est la forme variationnelle du problème harmonique de l'équation (3.1) que nous discrétisons en choisissant une certaine base de fonctions permettant d'approcher l'ensemble V des fonctions-test sur un maillage donné du domaine. La précision de l'approximation dépend à la fois de la taille et de la forme des éléments, et de l'ordre des fonctions de base utilisées.

A.1.2. Maillage du domaine

Le domaine de définition $\Omega \in \mathbb{R}^2$ des fonctions considérées est discrétisé à l'aide d'un maillage. Ce dernier est décrit par ses nœuds, ses arêtes et ses éléments. Un maillage peut avoir une structure régulière, ou quelconque. Dans le cas d'un maillage sur un monde sphérique, nous nous intéressons aux maillages non-réguliers. Un maillage triangulaire du domaine est utilisé pour approcher la solution par morceaux. L'intégrale d'une fonction f sur le domaine Ω peut être approchée par la somme des intégrales sur chaque élément K du maillage

$$\int_\Omega f(x) dx = \sum_K \int_K f(x) dx \tag{A.6}$$

La solution calculée dépend de la taille et de la forme des éléments du maillage. Plus les éléments triangulaires seront petits, plus la solution calculée sera proche de la solution exacte. En effet, l'erreur décroit en $\mathcal{O}(h)$ où h est l'aire maximale des triangles du maillage [73]. En revanche, le temps de calcul augmente quadratiquement par rapport au nombre d'éléments qui composent le maillage. Il est donc nécessaire en pratique de trouver un compromis pour la taille des éléments.

De plus, la qualité de la solution obtenue avec la méthode des éléments finis se dégrade lorsque les triangles qui composent le maillage s'approchent de 180 degrés [74] et un maillage contenant des triangles trop aplatis mènera à des erreurs d'arrondis dans la

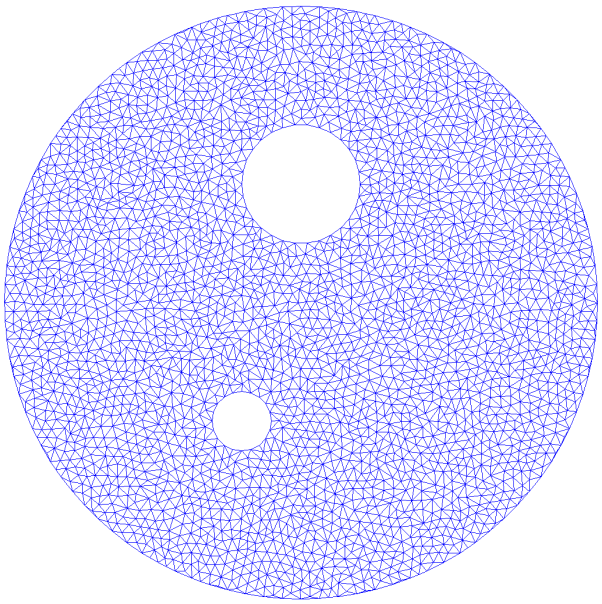


FIGURE A.1. – Maillage sur un monde sphérique

méthode des éléments finis. En pratique, nous pouvons imposer des bornes sur les angles des triangles du maillage.

Enfin, des erreurs d'interpolations peuvent apparaitre lorsqu'un élément du maillage a deux arêtes sur le bord du domaine. De tels éléments de maillage peuvent aisément être divisés en deux éléments sans dégrader par ailleurs la qualité de maillage dans le cas où le bord du domaine ne comporte pas d'angles aigus.

Pour un domaine de type monde sphérique, il n'est pas possible a priori de produire un maillage régulier. En pratique, nous avons réalisé le maillage du domaine qui nous intéresse avec le logiciel Triangle [75], en précisant des bornes sur l'aire des éléments de maillage, ainsi que sur leurs angles. Le type de maillage obtenu est illustré en figure A.1.

A.1.3. Bases de fonctions

Afin de transformer la forme variationnelle décrite dans l'équation (A.3) du problème en équation linéaire, les fonctions intervenant dans la forme variationnelle sont approchées sur le maillage par une somme de fonctions de base. La discrétisation des fonctions sur le domaine passe par la définition des coordonnées barycentriques et du choix d'une base de fonctions particulière. Ce choix de base de fonction conditionnera la qualité de l'approximation obtenue avec la méthode des éléments finis, ainsi que le temps de calcul nécessaire.

Considérons un élément de maillage ayant pour nœuds $a_i = (x_i, y_i)$ pour $i \in [\![1, N_s]\!]$. Les fonctions de base sur cette maille sont les N_s fonctions ϕ_i telles que

$$\phi_i(a_j) = \delta_{ij} \tag{A.7}$$

où la fonction δ_{ij} est la fonction de Kronecker, définie comme étant égale à 1 si ses

deux variables i et j sont égales, et à 0 sinon. La fonction de base sur une maille est ainsi définie de manière unique en fonction des valeurs prises par la fonction aux trois sommets.

Soient trois fonctions $\lambda_i : (x, y) \mapsto \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$ appelées coordonnées barycentriques. Ces fonctions sont de sorte que tout point $X = (x, y)$ puisse s'écrire de façon unique sous la forme

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x, y) a_i \\ \text{avec } \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x, y) = 1 \end{gathered} \tag{A.8}$$

Les coordonnées barycentriques sont alors déterminées en resolvant le système

$$\begin{cases} x = \sum \lambda_i(x, y) \cdot x_i \\ y = \sum \lambda_i(x, y) \cdot y_i \\ \sum \lambda_i(x, y) = 1 \end{cases} \tag{A.9}$$

duquel sont déduites les expressions suivantes des coordonnées barycentriques

$$\begin{aligned} \lambda_1 : (x, y) &\mapsto \frac{1}{2|K|}(x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y) \\ \lambda_2 : (x, y) &\mapsto \frac{1}{2|K|}(x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y) \\ \lambda_3 : (x, y) &\mapsto \frac{1}{2|K|}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y) \end{aligned} \tag{A.10}$$

avec la notation $|K|$ qui désigne l'aire de l'élément triangulaire de maillage ayant pour sommets a_1, a_2 et a_3. De ces expressions, le gradient des λ_i qui apparaît dans la forme variationnelle est aisément déduit.

L'ensemble des polynômes de Lagrange d'un degré donné peuvent être utilisés comme base de fonctions. Nous ne nous sommes intéressés dans ces travaux qu'aux polynômes de Lagrange d'ordre 1 ou d'ordre 2, dont les ensembles sont notés respectivement P_1 et P_2.

Dans le cas où les fonctions de base que nous notons λ_i sont les polynômes de Lagrange d'ordre 1, considérons une fonction notée v_K telle que $v_K(x_i, y_i) = v_i$ sur une maille K et $v_K(x, y) = 0$ à l'extérieur de K. Il est alors possible d'écrire v_K de façon unique sous la forme

$$v_K = \sum_i v_i \lambda_i \tag{A.11}$$

avec λ_i, et v_i, la valeur prise par la fonction f au nœud i de l'élément K.

Une fonction $f \in L^2(\Omega)$ quelconque peut être approchée par une somme de fonctions de base sur chaque élément K.

$$f = \sum_K v_K \tag{A.12}$$

Pour les éléments de type P_2, ce ne sont non plus trois, mais six nœuds qui sont utilisés par élément de maillage. Les trois nœuds additionnels par élément sont placés aux centres des arrêtes du maillage. Dans le cas où les fonction de base utilisées sont P_2, il est plus aisé pour les calculs d'effectuer une bijection entre chaque élément de maillage et un élément de référence sur lequel sont définies les fonctions de base. Six fonctions de base sont ainsi définies sur l'élément de référence, et il suffit d'effectuer un changement de variables pour chaque élément du maillage

$$\int_K f = \int_{\bar{K}} (f \circ F_K) \cdot |\det J_{F_K}| \tag{A.13}$$

où F_K est la transformation permettant de passer de l'élément fini de référence vers un élément K du maillage. La méthode est par ailleurs semblable à celle déployée pour les éléments P_1.

A.1.4. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité du problème est la matrice A dans l'équation (A.1). Cette matrice est décomposée selon le maillage du domaine en écrivant coefficient de la matrice comme étant la somme des contributions de chaque élément du maillage. Dans le cas où des éléments de type P_1 sont utilisés, cela revient à écrire pour chaque élément K de maillage une matrice (3×3)

$$A^K = \left(a_{ij}^K\right)_{ij} = \left(\int_K \nabla\lambda_i \nabla\lambda_j\right)_{ij} = |K| \nabla\lambda_i \nabla\lambda_j \tag{A.14}$$

où $|K|$ représente toujours l'aire de l'élément K, puisque les gradients des coordonnées barycentriques exposées dans l'équation (A.10) sont constants par élément triangulaire.

La matrice de rigidité globale A est ensuite assemblée de sorte que chaque coefficient a_{pq} de la matrice A correspondant à deux nœuds d'indices p et q soit la somme des coefficients des matrices A^K correspondant à ces nœuds-là.

$$a_{pq} = \sum_K a_{pq}^K \tag{A.15}$$

Afin de prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet, un terme de pénalisation est ajouté aux coefficients de la matrice de rigidité A correspondant à une paire de nœuds sur le bord du domaine. Ce terme de pénalisation est proportionnel à la distance entre les deux nœuds du bord et à un coefficient p de pénalisation qui peut être choisi empiriquement.

A.1.5. Second membre de la forme variationnelle

Le second membre du problème matriciel de l'équation (A.1) est construit avec une méthode analogue à celle utilisée pour la matrice de rigidité. La matrice globale L est construite en sommant les contributions élémentaires sur le maillage. Pour l'élément

K de type P_1, si la valeur de f est connue aux sommets des éléments de maillage, la contribution élémentaire au second membre $L^{K(1)}$ peut être exprimé de façon analytique.

$$L^{K(1)} = \frac{|K|}{6} \begin{pmatrix} f(M_{12}) + f(M_{31}) \\ f(M_{23}) + f(M_{12}) \\ f(M_{31} + f(M_{23}) \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

en notant M_{ij} le milieu du bord ij.

A.2. Limites

La fonction de Green n'est pas H^1. La convergence de la solution obtenue par la méthode des éléments finis est par conséquent sous-optimale, a priori.

Considérant les spécificités du potentiel harmonique sur un monde sphérique, nous avons choisi de développer une toute autre méthode de calcul pour déterminer les valeurs de la fonction de Green du Laplacien. La géométrie du domaine considéré permet de ramener le problème de calcul de la fonction de Green à un problème plus simple, comme nous l'avons montré dans le chapitre 3.

Cependant, il aurait été envisageable d'étudier d'autres extensions de la méthode des éléments finis. En effet, bien que la convergence sur l'ensemble du domaine soit mauvaise, il a été montré qu'une convergence quasi-optimale autour de la singularité peut-être obtenue avec des maillages adaptatifs qui se resserrent au voisinage du point singulier [15, 7, 73].

A.3. Conclusion

La méthode des éléments finis a d'abord semblé être une méthode prometteuse pour calculer la fonction de Green. Cependant, son implémentation dans le cas d'un second terme présentant un point singulier n'est pas triviale. L'extension de cette méthode à la fonction que nous cherchons à calculer et de ses dérivées pourrait faire l'objet d'une thèse à part entière. Nous avons choisis dans ces travaux d'utiliser plutôt une méthode semi-analytique détaillée dans le corps de cette thèse.

B. Résumé grand public

À l'heure actuelle, les avions de ligne suivent des routes matérialisées par des traits sur la carte et que l'on appelle *couloirs aériens*. À chaque intersection entre deux couloirs, un contrôleur veille pour dire aux avions d'aller un peu à droite ou un peu à gauche afin de les empêcher de trop se rapprocher les uns des autres.

Il y a deux problèmes avec le système de couloirs aériens. D'une part, l'espace aérien arrive à saturation tandis qu'une portion du ciel reste sous-exploitée. En effet, les couloirs sont définis une fois pour toutes et les avions ne volent pas entre ces couloirs. D'autre part, il n'existe pas toujours de route directe reliant le point de départ et le point d'arrivée d'un avion. Celui-ci peut alors être obligé de faire un détour.

Malgré ces défauts, s'affranchir des couloirs aériens n'est pas chose aisée. Si tous les avions peuvent voler n'importe où, le travail des contrôleurs est rendu impossible. En effet, chaque instruction que donne le contrôleur pour éviter à deux avions de trop se rapprocher peut générer des problèmes plus loin.

Une solution pourrait être de planifier les trajectoires de tous les avions à l'avance afin de réduire le nombre de fois où le contrôleur doit intervenir. Pour faire cela, il existe un outil mathématique : les *fonctions de navigation*, qui permettent de planifier des trajectoires optimales pour autant d'avions que nécessaire. Cependant, cet outil ne fonctionne que s'il est possible de savoir à l'avance exactement où chaque avion sera à chaque instant.

En pratique, les avions sont souvent retardés, ou bien en avance par rapport à leurs horaires prévus. Avant de pouvoir utiliser les fonctions de navigation dans un contexte réel, il faut d'abord s'assurer que les avions ne se frôlent pas, en dépit des horaires incertains. Nous cherchons dans cette thèse à développer des outils qui permettraient de calculer des fonctions de navigation dans le cas où les horaires de passage des avions sont incertains.

Bibliographie

[1] *Near-optimal real-time spacecraft guidance and control using harmonic potential functions and a modified RRT*, 2017.

[2] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The FEniCS project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.

[3] K Aomoto. Formule variationelle d'Hadamard et modèle des variétés différentiables plongées. *Journal of Functional Analysis*, 34(3) :493–523, 1979.

[4] Thomas Apel, Olaf Benedix, Dieter Sirch, and Boris Vexler. A priori mesh grading for an elliptic problem with Dirac right-hand side. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(3) :992–1005, 2011.

[5] L. Arnold. *Random Dynamical Systems.* Monographs in Mathematics. Springer, 1998.

[6] ATM Economics Conference, Belgrade, Serbia. *Fuel consumption assessment for speed variation concepts during the cruise phase*, 2009.

[7] Ivo Babuška. Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4) :322–333, 1971.

[8] Jérôme Barraquand and Jean-Claude Latombe. A Monte-Carlo algorithm for path planning with many degrees of freedom. In *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, pages 1712–1717. IEEE, 1990.

[9] James Vere Beck, Kevin David Cole, A Haji-Sheikh, and B Litkouhi. *Heat conduction using Green's functions.* Hemisphere Publishing Corporation London, 1992.

[10] Silvia Bertoluzza, Astrid Decoene, Loïc Lacouture, and Sébastien Martin. Local error estimates of the finite element method for an elliptic problem with a Dirac source term. *arXiv preprint arXiv :1505.03032*, 2015.

[11] Mathieu Boudaud, Sandy Aupetit, Sami Caroff, Antje Putze, Genevieve Belanger, Yoann Genolini, Corrine Goy, Vincent Poireau, Vivian Poulin, S Rosier, et al. A new look at the cosmic ray positron fraction. *Astronomy & Astrophysics*, 575 :A67, 2015.

[12] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

[13] Romaric Breil, Daniel Delahaye, Laurent Lapasset, and Eric Féron. Multi-agent Systems to Help Managing Air Traffic Structure. *Journal of Aerospace Operations*, September 2017.

[14] Martin D Buhmann. *Radial basis functions : theory and implementations*, volume 12. Cambridge university press, 2003.

[15] Eduardo Casas. L 2 estimates for the finite element method for the Dirichlet problem with singular data. *Numerische Mathematik*, 47(4) :627–632, 1985.

[16] Christopher I Connolly, JB Burns, and R Weiss. Path planning using Laplace's equation. In *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, pages 2102–2106. IEEE, 1990.

[17] DG Crowdy, EH Kropf, CC Green, and MMS Nasser. The Schottky–Klein prime function : a theoretical and computational tool for applications. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 81(3) :589–628, 2016.

[18] Daniel Delahaye and Stephane Puechmorel. Air traffic complexity based on dynamical systems. In *Proceedings of the 49th CDC conference*. IEEE, 2010.

[19] Dimos V Dimarogonas, Kostas J Kyriakopoulos, and Dimitris Theodorakatos. Totally distributed motion control of sphere world multi-agent systems using decentralized navigation functions. In *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, pages 2430–2435. IEEE, 2006.

[20] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Lie Groups*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[21] Vu N Duong and Karim Zeghal. Conflict resolution advisory for autonomous airborne separation in low-density airspace. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2429–2434. IEEE, 1997.

[22] Edson Prestes e Silva, Marco AP Idiart, Marcelo Trevisan, and Paulo M Engel. Autonomous learning architecture for environmental mapping. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 39(3) :243–263, 2004.

[23] Eurocontrol. *EUROCONTROL SEVEN-YEAR FORECAST*, 2016.

[24] Gedson Faria, Roseli A Francelin Romero, Edson Prestes, and Marco Aurélio Pires Idiart. Comparing harmonic functions and potential fields in the trajectory control of mobile robots. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2004 IEEE Conference on*, volume 2, pages 762–767. IEEE, 2004.

[25] George Fishman. *Monte Carlo : concepts, algorithms, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[26] Roger Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, 2013.

[27] Damien Fournier, Chris S Hanson, Laurent Gizon, and Hélène Barucq. Sensitivity kernels for time-distance helioseismology. *Astronomy & Astrophysics*, 2018.

[28] Daisuke Fujiwara, Masao Tanikawa, Shûichi Yukita, et al. The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation, i. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 54(4) :87–91, 1978.

[29] Paul R Garabedian and Menahem Schiffer. Convexity of domain functionals. *Journal d'Analyse Mathématique*, 2(2) :281–368, 1952.

[30] PR Garabedian. Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain. *Journal of Mathematics and Mechanics*, pages 241–271, 1960.

[31] Shuzhi Sam Ge and Yun J Cui. Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method. *Autonomous robots*, 13(3) :207–222, 2002.

[32] Ronojoy Ghosh and Claire Tomlin. Maneuver design for multiple aircraft conflict resolution. In *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, number 6 in 1, pages 672–676. IEEE, 2000.

[33] Brunilde Girardet, Laurent Lapasset, Daniel Delahaye, Chistophe Rabut, and Yohann Brenier. Generating optimal aircraft trajectories with respect to weather conditions. In *ISIATM 2013, 2nd International Conference on Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management*, 2013.

[34] Chad Goerzen, Zhaodan Kong, and Bernard Mettler. A survey of motion planning algorithms from the perspective of autonomous UAV guidance. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 57(1-4) :65, 2010.

[35] Laureline Guys. *Planification de Trajectoires d'Avions sans Conflit : Fonctions Biharmoniques et Fonction de Navigation Harmonique*. Theses, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, October 2014.

[36] Laureline Guys, Stéphane Puechmorel, Laurent Lapasset, Luca Amodei, and Pierre Maréchal. Génération automatique de trajectoires aériennes sans conflit à l'aide de fonctions biharmoniques. In *ROADEF 2012, 13ème congrès annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision*, 2012.

[37] Shlomi Hacohen, Shraga Shoval, and Nir Shvalb. Applying probability navigation function in dynamic uncertain environments. *Robotics and Autonomous Systems*, 87 :237–246, 2017.

[38] Jacques Hadamard. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, volume 33. Imprimerie nationale, 1908.

[39] Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis, Vol. 3.* John Wiley and Sons, 1993.

[40] Paul Houston and Thomas P Wihler. Discontinuous Galerkin methods for problems with Dirac delta source. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2011.

[41] International Congress of the aeronautical sciences. *A COMPARISON OF 4D-TRAJECTORY OPERATIONS ENVISIONED FOR NEXTGEN AND SESAR, SOME PRELIMINARY FINDINGS*, 2012.

[42] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. SciPy : Open source scientific tools for Python, 2001–. [Online ; accessed August 2018].

[43] Kirk E Jordan, Gerard R Richter, and Ping Sheng. An efficient numerical evaluation of the Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures. *Journal of Computational Physics*, 63(1) :222–235, 1986.

[44] Oussama Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The international journal of robotics research*, 5(1) :90–98, 1986.

[45] Dong Hun Kim, Hua Wang, and Seiichi Shin. Decentralized control of autonomous swarm systems using artificial potential functions : Analytical design guidelines. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 45(4) :369–394, 2006.

[46] Daniel Koditschek. Exact robot navigation by means of potential functions : Some topological considerations. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1–6. IEEE, 1987.

[47] Daniel E Koditschek and Elon Rimon. Robot navigation functions on manifolds with boundary. *Advances in applied mathematics*, 11(4) :412–442, 1990.

[48] Eduard P Kontar, Alec L MacKinnon, Richard A Schwartz, and John C Brown. Compton backscattered and primary X-rays from solar flares : angle dependent Green's function correction for photospheric albedo. *Astronomy & Astrophysics*, 446(3) :1157–1163, 2006.

[49] Yoram Koren and Johann Borenstein. Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation. In *Robotics and Automation, 1991. Proceedings., 1991 IEEE International Conference on*, pages 1398–1404. IEEE, 1991.

[50] Steven G Krantz. *Handbook of complex variables.* Springer Science & Business Media, 2012.

[51] Loïc Lacouture. A numerical method to solve the Stokes problem with a punctual force in source term. *Comptes Rendus Mécanique*, March 2015.

[52] Loïc Lacouture. *Modelling and simulation of the movement of thin structures in a viscous fluid : application to the muco-ciliary transport.* PhD thesis, Université Paris-Saclay, June 2016.

[53] Joseph Louis Lagrange. *Mécanique analytique*, volume 1. Mallet-Bachelier, 1853.

[54] Savvas G Loizou and Kostas J Kyriakopoulos. Closed loop navigation for multiple holonomic vehicles. In *Intelligent Robots and Systems, 2002. IEEE/RSJ International Conference on*, volume 3, pages 2861–2866. IEEE, 2002.

[55] Tomás Lozano-Pérez and Michael A Wesley. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Communications of the ACM*, 22(10) :560–570, 1979.

[56] MH Mabrouk and CR McInnes. Solving the potential field local minimum problem using internal agent states. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(12) :1050–1060, 2008.

[57] Fumi-Yuki Maeda and Noriaki Suzuki. The integrability of superharmonic functions on Lipschitz domains. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(3) :270–278, 1989.

[58] Ahmad A Masoud and Samer A Masoud. Evolutionary action maps for navigating a robot in an unknown, multidimensional, stationary environment. ii. implementation and results. In *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2090–2096. IEEE, 1997.

[59] Ahmad A Masoud, Samer A Masoud, and Mohamed M Bayoumi. Robot navigation using a pressure generated mechanical stress field :" the biharmonic potential approach". In *Robotics and Automation, 1994. Proceedings., 1994 IEEE International Conference on*, pages 124–129. IEEE, 1994.

[60] Fumio Miyazaki, Suguru Arimoto, Morikazu Takegaki, and Yoichiro Maeda. Sensory feedback based on the artificial potential for robot manipulators. *IFAC Proceedings Volumes*, 17(2) :2381–2386, 1984.

[61] François Murat and Jacques Simon. Etude de problèmes d'optimal design. In *IFIP Technical Conference on Optimization Techniques*, pages 54–62. Springer, 1975.

[62] Tristan Needham. *Visual complex analysis.* Oxford University Press, 1998.

[63] Rolf Nevanlinna, Heinrich Behnke, and Hans Grauert. *Analytic functions*, volume 3. Springer, 1970.

[64] VV Pavlov and AN Voronin. The method of potential functions for coding constraints of the external space in an intelligent mobile robot. *Soviet Automatic Control*, 17(6) :45–51, 1984.

[65] Jaak Peetre. On Hadamard's variational formula. *Journal of Differential Equations*, 36(3) :335–346, jun 1980.

[66] Clément Pêtrès, Miguel-Angel Romero-Ramirez, and Frédéric Plumet. Reactive path planning for autonomous sailboat. In *Advanced Robotics (ICAR), 2011 15th International Conference on*, pages 112–117. IEEE, 2011.

[67] Robert Piessens, Elise de Doncker-Kapenga, Christoph W Überhuber, and David K Kahaner. *QUADPACK : a subroutine package for automatic integration*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2012.

[68] Stéphane Puechmorel, Guillaume Dufour, and Romain Fèvre. Simulation of random events for air traffic applications. *Aerospace*, 5(2) :53, 2018.

[69] Elon Rimon and Daniel E Koditschek. Exact robot navigation using cost functions : the case of distinct spherical boundaries in e/sup n. In *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, pages 1791–1796. IEEE, 1988.

[70] MA Sadybekov, BT Torebek, and B Kh Turmetov. Representation of the Green's function of the exterior Neumann problem for the Laplace operator. *Siberian Mathematical Journal*, 58(1) :153–158, 2017.

[71] J-H SAIAC. *Méthode des éléments finis. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. 2006.

[72] Isabelle Santos, Stéphane Puechmorel, and Guillaume Dufour. First order Hadamard variation of the harmonic navigation function on a sphere world. *Mathematical and Computational Applications*, 23, 2018.

[73] Ridgway Scott. Finite element convergence for singular data. *Numerische Mathematik*, 21(4) :317–327, 1973.

[74] J Shewchuk. What is a good linear finite element ? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures (preprint). *University of California at Berkeley*, 73, 2002.

[75] Jonathan Richard Shewchuk. Triangle : Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors, *Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering*, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag, May 1996. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.

[76] Edson Prestes Silva Júnior. *Navegação exploratória baseada em problemas de valores de contorno.* PhD thesis, 2003.

[77] Takashi Suzuki and Takuya Tsuchiya. First and second Hadamard variational formulae of the Green function for general domain perturbations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 68(4) :1389–1419, 2016.

[78] Herbert G Tanner, Savvas G Loizou, and Kostas J Kyriakopoulos. Nonholonomic navigation and control of cooperating mobile manipulators. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 19(1) :53–64, 2003.

[79] Stephen P Timoshenko and James Norman Goodier. Théorie de l'élasticité. 1961.

[80] Lloyd N Trefethen. Ten digit algorithms. *Mitchell Lecture, June*, 2005.

[81] Carsten H Wolters, Harald Köstler, Christian Möller, Jochen Härdtlein, Lars Grasedyck, and Wolfgang Hackbusch. Numerical mathematics of the subtraction method for the modeling of a current dipole in EEG source reconstruction using finite element head models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1) :24–45, 2007.

[82] Karim Zeghal. *Vers une théorie de la coordination d'actions. Application à la navigation aérienne.* PhD thesis, 1994.

[83] John S Zelek. A framework for mobile robot concurrent path planning and execution in incomplete and uncertain environments. In *AIPS-98 Workshop on Integrating Planning, Scheduling & Execution in Dynamic & Uncertain Environments*, 1998.

[84] Taixiong Zheng and Xiangyang Zhao. A novel approach for multiple mobile robot path planning in dynamic unknown environment. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2006 IEEE Conference on*, pages 1–5. IEEE, 2006.

Production de la thèse

Article dans une revue internationale

Isabelle Santos, Stéphane Puechmorel, and Guillaume Dufour. First order Hadamard variation of the harmonic navigation function on a sphere world. *Mathematical and Computational Applications*, 23, 2018

Acronymes

ADS-B Automatic Dependent Surveillance-Broadcast.
ATC Air Traffic Control.
ATM Air Traffic Management.

CFMU Central Flow Management Unit.

EDP Équation aux Dérivées Partielles.

FMS Flight Management System.
FRAM Free Route Airspace Maastricht.

GNSS Global Navigation Systems by Satellite.
GPS Global Positioning System.

IFR Instrument Flight Rules.

MEF Méthode des Éléments Finis.

NM Mille Nautique.
NMOC Network Manager Operations Centre.

SESAR Single European Sky ATM Research.

TBO Trajectory Based Operations.
TCAS Traffic Collision Avoidance System.
TMA Terminal Manoeuvring Area.