



université
PARIS-SACLAY

École doctorale
de mathématiques
Hadamard (EDMH)



NNT : 2019SACLE010

THÈSE DE DOCTORAT

de

l'Université Evry Val d'Essonne Université Paris-Saclay
et l'Université de Sfax

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574) et Ecole Doctorale
Des Sciences Fondamentales à la Faculté des Sciences de Sfax

*Établissement d'inscription : l'Université Evry Val d'Essonne et Faculté des Sciences de
Sfax*

*Laboratoire d'accueil : Informatique, Bio-informatique et Systèmes Complexes
(IBISC) et Algèbre, Géométrie et Théorie Spectrale (AGTS)*

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

ISSAM BARTOULI

Cohomologie et déformation des champs de vecteurs sur
une variété de dimension 1

Date de soutenance : 20 juin 2019

Après avis des rapporteurs : ABDENACER MAKHLOUF l'Université de Haute Alsace
FERIDRICH WAGEMANN l'Université de Nantes 2

Jury de soutenance :

Abdenacer MAKHLOUF	l'Université de Haute Alsace :Président
Feridrich WAGEMANN	l'Université de Nantes 2 : Rapporteur
Jean LERBET	l'Université Evry Val d'Essonne Paris-Saclay : directeur de thèse
Boujemaa AGREBAOUI	l'Université de Sfax :Examineur
Boris KOLEV	Ecole normale supérieure paris saclay :Examineur
Imed BASDOURI	l'Université de Sfax :Codirecteur de thèse
Khaled TOUNSI	l'Université de Sfax :Examineur

Table des matières

1	Préliminaires	10
1.1	Cohomologie des algèbres de Lie	10
1.1.1	Algèbre de Lie	10
1.1.2	Homomorphismes et représentations	11
1.1.3	Module	12
1.1.4	Cohomologie des algèbres de Lie	12
1.1.5	L'espace de cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, V))$	13
1.1.6	L'espace de cohomologie $H^2(\mathfrak{g})$	14
1.1.7	L'espace $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$	14
1.2	Déformation des modules	15
1.2.1	Déformation formelle	15
1.2.2	Déformation infinitésimale et cohomologie	16
1.3	Espace de densités tensorielles	17
1.4	Espace d'opérateurs différentiels	18
1.5	Algèbres d'opérateurs différentiels et pseudodifférentiels	19
2	Cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$	22
2.1	Introduction	22
2.2	Définitions et Notations	23
2.2.1	Cohomologie	23
2.2.2	L'espace des opérateurs différentiels bilinéaires en tant que $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module.	24
2.3	Cohomologie de $\text{Vect}(\mathbb{R})$	24
2.3.1	Théorème	24
3	Déformation $\hbar$-relative des opérateurs pseudodifférentiels	39
3.1	Introduction	39
3.2	Géométrie de l'espace S^1	40
3.2.1	L'espace des densités tensorielles sur S^1	40
3.2.2	Plongement naturel	40
3.2.3	Algèbre de Lie de Poisson des symboles formels	41
3.2.4	Opérateurs pseudodifférentiels sur S^1	42

3.3	Énoncé du problème : déformations $\mathfrak{h}$ –triviales du plongement naturel	43
3.3.1	Déformation $\mathfrak{h}$ –triviale de $Vect(S^1)$ dans P	43
3.3.2	Déformation $\mathfrak{h}$ –triviale de $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$	44
3.3.3	Déformation $\mathfrak{h}$ –triviale de $Vect(S^1)$ dans $\mathcal{P}$	44
3.3.4	Déformations $\mathfrak{h}$ -triviales infinitésimales et premier espace de cohomologie relatif	45
3.4	Déformation $\mathfrak{aff}(1)$ -Trivial du $Vect(S^1)$ dans P	46
3.4.1	Cohomologie $\mathfrak{aff}(1)$ -relative sur P	46
3.4.2	Conditions d'intégrabilité de second ordre	46
3.4.3	Conditions d'intégrabilité du troisième et du quatrième ordre	49
3.5	Déformation $\mathfrak{aff}(1)$ –triviale du $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$	52
3.5.1	Cohomologie $\mathfrak{aff}(1)$ –relative sur $\Psi\mathcal{DO}$	52
3.5.2	Déformations infinitésimales	52
3.5.3	La condition d'intégrabilité	52
3.5.4	Introduction du paramètre h	53
3.6	Déformation $\mathfrak{sl}(2)$ –triviale du $Vect(S^1)$	58
3.7	Conclusion	60
3.8	Perspectives	62

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont permis de réaliser ce travail ou qui y ont pris part de près ou de loin.

Je remercie dans un premier temps toute l'équipe pédagogique de l'Université de Sfax et l'Université d'Evry Val d'Essonne- Université Paris-Saclay, mes deux directeurs de thèse, Messieurs LERBET Jean et BASDOURI Imed qui m'ont beaucoup aidé tout au long de cette thèse.

Je tiens à remercier les rapporteurs Messieurs MAKHLOUF Abdenacer et WAGEMANN Fridrich d'avoir accepté de lire ce rapport et m'adresser leurs remarques qui ont contribué à l'améliorer. J'exprime ma gratitude à Messieurs AGREBAOUI Boujemaa , KOLEV Boris et TOUNSI Khaled, qui ont accepté d'être examinateurs de ce travail.

J'offre cette thèse à ma mère et mon père et toute ma famille qui m'ont soutenu tout au long de ma vie et mon parcours académique. Je remercie également tous mes amis, notamment Sami DALHOUMI.

Introduction

L'espace des densités tensorielles de poids λ sur $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_\lambda = \left\{ f(dx)^\lambda, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \right\}, \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

est un $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module, où $\text{Vect}(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$ qui agit par la dérivée de Lie :

$$L_F^\lambda \frac{d}{dx} (f(dx)^\lambda) = (Ff' + \lambda fF')(dx)^\lambda, \quad (0.0.1)$$

où $f' = \frac{df}{dx}$ et $F' = \frac{dF}{dx}$. Tout opérateur différentiel A sur $\mathbb{R}$ agissant de $\mathcal{F}_\lambda$ vers $\mathcal{F}_\mu$ peut être considéré comme une application linéaire $f(dx)^\lambda \mapsto (Af)(dx)^\mu$ de $\mathcal{F}_\lambda$ dans $\mathcal{F}_\mu$. L'espace de ces opérateurs, noté $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$, est un $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module, où l'action est donnée par :

$$L_X^{\lambda,\mu}(A) = L_X^\mu \circ A - A \circ L_X^\lambda. \quad (0.0.2)$$

Un opérateur différentiel bilinéaire A agissant de $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu$ dans $\mathcal{F}_\mu$ est donné par $f dx^\lambda \otimes g dx^\nu \mapsto A(f \otimes g) dx^\mu$ pour tout $(\lambda, \nu, \mu) \in \mathbb{R}^3$. L'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ agit alors sur l'espace $\text{Hom}_{\text{diff}}(\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu, \mathcal{F}_\mu) = \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$ de ces opérateurs différentiels par :

$$X_h \cdot A = L_{X_h}^\mu \circ A - A \circ L_{X_h}^{(\lambda,\nu)}, \quad (0.0.3)$$

où $L_{X_h}^{(\lambda,\nu)}$ est la dérivée de Lie sur $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu$ définie par la règle de Leibniz

$$L_{X_h}^{(\lambda,\nu)}(f \otimes g) = L_{X_h}^\lambda(f) \otimes g + f \otimes L_{X_h}^\nu(g).$$

Par ailleurs, l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{sl}(2)$ peut être réalisée comme sous algèbre de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ de la manière suivante : c'est la sous algèbre engendrée par $\left\{ \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x^2 \frac{d}{dx} \right\}$. Ainsi, $\mathcal{F}_\lambda$, $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ et $\mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$ sont aussi des $\mathfrak{sl}(2)$ -modules.

Une déformation formelle de la structure de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module $\mathcal{D}$ est un homomorphisme $\mathcal{L}$ d'algèbres de Lie de la forme :

$$\mathcal{L}_X = L_X + \rho_X$$

où $X \in \text{Vect}(\mathbb{R})$ et ρ_X est une série formelle en un certain nombre de paramètres $t_1, \dots, t_k$, à coefficients dans $\mathcal{D}_\delta^m$ et à terme constant nul. Pour un réel δ et un entier $m > 0$ arbitraires, on considère l'espace $\mathcal{D}_\delta^m$ des opérateurs différentiels sur l'espaces des symboles $\mathcal{S}_\delta^m = \bigoplus_{j=0}^m \mathcal{F}_{\delta-j}$, c'est à dire que l'on a

$$\mathcal{D}_\delta^m = \bigoplus_{\delta-m \leq \lambda, \mu \leq \delta} \mathcal{D}_{\lambda, \mu},$$

où $\delta - \lambda$ et $\delta - \mu$ sont des entiers. Autrement dit ρ_X s'écrit :

$$\rho_X = \sum_{i=1}^k t_i C_i(X) + \sum_{i,j} t_i t_j \rho_{i,j}(X) + \dots$$

L'application $X \mapsto L_X + \sum_{i=1}^k t_i C_i(X)$ est appelée déformation infinitésimale. La relation $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ impose bien sûr des conditions sur les paramètres t_i et sur les applications $C_i, \rho_{i,j} \dots$. En particulier, les C_i doivent être des 1-cocycles :

$$\delta C_i(X, Y) := C_i([X, Y]) - X.C_i(Y) + Y.C_i(X) = 0.$$

Plus précisément, l'espace de cohomologie $H^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_\delta^m)$ détermine et classe les déformations infinitésimales alors que les obstructions à l'intégrabilité d'une déformation infinitésimale se trouvent dans l'espace de cohomologie $H^2(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_\delta^m)$.

L'une des toutes premières théories des déformations à été édifée pour des structures complexes, par M. Kodaira et D. C. Spencer en 1958 [43]. Plus tard, un programme de déformation à été initié en 1975 par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer [16]. Le but de ce programme est de construire des déformations formelles du crochet de Poisson afin d'obtenir un nouveau formalisme qui traite la quantification de la mécanique classique. Ce programme était le point de départ d'une longue série des travaux à travers ce qu'on appelle la théorie du "produit-star".

Dans cette thèse, on s'intéresse à deux thèmes de recherche qui sont très étroitement liés. Le premier thème est l'étude de la structure du module $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les densités tensorielles. Le deuxième thème concerne l'étude des déformations $\mathfrak{h}$ -triviales de l'intégration standard de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs lisses sur le cercle, dans l'algèbre de Lie des fonctions sur le fibré cotangent T^*S^1 . On classe les déformations de cette action qui deviennent triviales une fois limitées à $\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(1)$ ou $\mathfrak{sl}(2)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité des déformations infinitésimales sont alors données.

Le manuscrit est constitué de trois chapitres et d'une conclusion.

• **Chapitre 1** : Il s'agit d'un chapitre introductif, dans lequel on trouvera les notions de base de la théorie de la déformation et de la cohomologie nécessaires à l'exposé de notre travail.

• **Chapitre 2** : " Cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$ "[15].

Dans ce chapitre, on considère la structure de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ module sur l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les espaces de densités. On calcule la première espace cohomologie différentielle d'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ à coefficients dans le module $\mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 0.0.1. (i) Si $\mu - \lambda - \nu = 0$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

(ii) Si $\mu - \lambda - \nu = 1$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Si $\mu - \lambda - \nu = 2$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R} & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, -1), (0, \nu), (\lambda, 0), (\lambda, -1 - \lambda), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iv) Si $\mu - \lambda - \nu = 3$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = (-2, 0), (0, -2), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(v) Si $\mu - \lambda - \nu = 4$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \mathbb{R}^2 \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

(vi) Si $\mu - \lambda - \nu = 5$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), (0, -4), (-4, 0), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) \neq (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -2), (-1, -\frac{3}{2}), (-1, -2), \\ & (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -2), \\ & (-2, -\frac{1}{2}), (-1, -1), (-2, -1), (-2, -\frac{3}{2}) \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(vii) Si $\mu - \lambda - \nu = 6$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = \left(\frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}, 0\right), \left(0, \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}\right), \\ & \left(\frac{\sqrt{19}-5}{2}, \frac{-\sqrt{19}-5}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{19}-5}{2}, \frac{\sqrt{19}-5}{2}\right), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) \neq \left(-\frac{1}{2}, -2\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -1\right), \left(-1, -2\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -1\right), \left(-1, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \\ & \left(-\frac{3}{2}, -2\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, -1\right), \\ & \left(-2, -2\right), \left(-2, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -2\right), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(viii) Si $\mu - \lambda - \nu = 7$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = \left(\frac{-5-\sqrt{19}}{2}, \frac{-5-\sqrt{19}}{2}\right), \left(\frac{-5+\sqrt{19}}{2}, \frac{-5+\sqrt{19}}{2}\right), \\ & (0, \nu), (\lambda, 0), (\lambda, -6-\lambda), (\sqrt{19}-1, \frac{-\sqrt{19}-5}{2}), \\ & \left(\frac{-\sqrt{19}-5}{2}, \sqrt{19}-1\right), (-\sqrt{19}-1, \frac{\sqrt{19}-5}{2}), \\ & \left(\frac{\sqrt{19}-5}{2}, -\sqrt{19}-1\right), \\ \mathbb{R} & \text{si } (\lambda, \nu) \neq \left(-\frac{1}{2}, -3\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{5}{2}\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -3\right), \left(-1, -3\right), \left(-3, -1\right), \left(-1, -2\right), \\ & \left(-2, -1\right), \left(-2, -3\right), \left(-3, -2\right), \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \\ & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -2\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, -2\right), \left(-2, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -2\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ix) Si $\mu - \lambda - \nu \geq 8$ avec λ et ν alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 0.$$

• **Chapitre 3 :** " Déformation $\mathfrak{h}$ - relative des opérateurs pseudodifférentiels " [14].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la déformation $\mathfrak{h}$ -triviale du plongement naturel de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\text{Vect}(S^1)$ dans l'espace des opérateurs pseudodifférentiels $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ sur le cercle S^1 où $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(1)$ ou $\mathfrak{sl}(2)$.

On sait que l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs sur S^1 agit naturellement par la dérivée de Lie sur $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ et que cette action $X \mapsto \rho(X)$, définit une structure de $\text{Vect}(S^1)$ -module sur $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$. On cherche alors à définir un morphisme d'algèbre de Lie de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\text{End}(\Psi\mathcal{DO}(S^1))$;

$$\varrho_X = \rho_X + \Phi_X$$

où Φ_X est une série formelle en un certain nombre de paramètres $t_1, \dots, t_k$, à coefficients dans $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$.

Autrement dit Φ_X s'écrit :

$$\Phi_X = \sum_{i=1}^k t_i C_i(X) + \sum_{i,j} t_i t_j \rho_{i,j}(X) + \dots$$

L'application

$$X \mapsto \rho_X + \sum_{i=1}^k t_i C_i(X)$$

est appelée la déformation infinitésimale du $Vect(S^1)$ -module sur $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$. L'étude des déformations de ce morphisme est étroitement liée au premier et au deuxième groupe de cohomologie $H^1(Vect(S^1), \mathfrak{h}, \Psi\mathcal{DO}(S^1))$ et $H^2(Vect(S^1), \mathfrak{h}, \Psi\mathcal{DO}(S^1))$. De la condition d'homomorphisme :

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)],$$

on déduit d'une part que les C_i sont des 1-cocycles, et d'autre part que deux déformations infinitésimales sont équivalentes si et seulement si elles diffèrent d'un cobord. Ainsi, le premier groupe de cohomologie $H^1(Vect(S^1), \mathfrak{h}, \Psi\mathcal{DO}(S^1))$ caractérise et classe les déformations infinitésimales. D'autre part, pour obtenir une déformation formelle à partir d'une déformation infinitésimale, des obstructions peuvent apparaître et la résolution de ces obstructions a lieu dans $H^2(Vect(S^1), \mathfrak{h}, \Psi\mathcal{DO}(S^1))$.

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Proposition 0.0.1. *Toute déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale de $Vect(S^1)$ à valeurs dans $\mathcal{P}$ est équivalente à :*

$$f\partial \mapsto f\xi + c_1 f'' \xi^{-1} + c_2 f''' \xi^{-2}, \quad (0.0.4)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sont des paramètres

Théorème 0.0.2. *Les conditions du troisième ordre sont nécessaires et suffisantes pour permettre l'intégrabilité de la déformation infinitésimale (0.0.4). De plus, toute déformation formelle $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale de la dérivé de Lie ρ_X sur l'espace des symboles $\mathcal{P}$ est équivalente à un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

Proposition 0.0.2. *Toute déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale de $Vect(S^1)$ à valeurs dans $\mathcal{P}$ est équivalente à (0.0.4).*

Théorème 0.0.3. *Une déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale (0.0.4) correspond à une déformation polynomiale du plongement naturel $Vect(S^1) \rightarrow \mathcal{P}$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$8c_1^3 + 9c_2^2 = 0.$$

Proposition 0.0.3. *Toute déformation $\text{aff}(1)$ –triviale infinitésimale du plongement naturel de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$ est équivalente à :*

$$\tilde{\pi} : f\partial \mapsto f\xi + c_2\Theta_2(f\partial) + c_3\Theta_3(f\partial), \quad (0.0.5)$$

où $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sont des paramètres et θ_2 et θ_3 sont des cocycles .

Théorème 0.0.4. *La déformation infinitésimale (0.0.5) est intégrable à une déformation polynomiale si et seulement si la relation suivante (cubique) est satisfaite :*

$$8c_2^3 + 9c_3^2 + 8c_2^2 + 18c_2c_3 = 0. \quad (0.0.6)$$

Proposition 0.0.4. *Cette relation*

$$8c_2^3 + 9c_3^2 + h(18c_2c_3) + h^2 8c_2^2 = 0 \quad (0.0.7)$$

est une condition d'intégrabilité nécessaire pour l'intégrabilité de la déformation infinitésimale (0.0.5) dans $\Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les principales notions qui nous seront utiles pour la suite. Dans les sections 1 et 2, nous présentons brièvement la cohomologie des algèbres de Lie et les déformations de leurs module $\mathcal{D}_{\lambda;\mu}$. Dans la section, 3 on rappelle la cohomologie de l'algèbre de Lie $Vect(S^1)$ à coefficients dans l'espace des densités tensorielles $\mathcal{F}_\lambda$. La section 4 est consacrée à la cohomologie de $Vect(S^1)$ dans $\mathcal{D}_{\lambda;\mu}$. Enfin, la section 5 est consacrée à l'algèbre de Lie sur les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels $\Psi\mathcal{DO}$

1.1 Cohomologie des algèbres de Lie

1.1.1 Algèbre de Lie

On appelle algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathfrak{g}$, muni d'une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, appelé crochet de Lie ou commutateur, vérifiant l'identité de Jacobi :

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0,$$

pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

On dit qu'un sous espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre de Lie, si pour tous x, y dans $\mathfrak{h}$, on a $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux sous algèbres de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ alors $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ désigne la sous algèbre de Lie engendrée par l'ensemble $\{[x, y], x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}$. (Une telle sous algèbre existe, c'est l'intersection de toutes les sous algèbres contenant cet ensemble).

Une sous algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dite un idéal de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, c'est à dire que

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}.$$

Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie, c'est à dire que le crochet de Lie passe au quotient.

Si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie alors on définit une algèbre de Lie somme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]).$$

Les algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont considérées comme deux idéaux de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$:

$$\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \{0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_2 \simeq \{0\} \oplus \mathfrak{g}_2.$$

- Exemples 1.1.1.** 1) Une algèbre de Lie n'est pas associative, mais toute algèbre associative peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[x, y] = xy - yx$. Ainsi l'ensemble $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une algèbre de Lie : $[A, B] = AB - BA$ pour tous $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.
- 2) Si V est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{End}(V)$, l'espace des endomorphismes de V , est une algèbre de Lie : $[u, v] = u \circ v - v \circ u$ pour tous $u, v \in \text{End}(V)$.
- 3) $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : {}^t M + M = 0\}$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.
- 4) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr} M = 0\}$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.
- 5) $\text{Vect}(\mathbb{R}^n) = \{\sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{d}{dx^i} : X^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ est une algèbre de Lie.
- 6) L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ peut être réalisée comme sous algèbre de Lie de $\text{Vect}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.2 Homomorphismes et représentations

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie. Une application

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

est dite un homomorphisme d'algèbres de Lie si ϕ est un homomorphisme d'espaces vectoriels vérifiant

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)].$$

Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V est un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

$\mathfrak{gl}(V)$ étant muni de la structure d'algèbre de Lie définie par $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. On note alors (ρ, V) une telle représentation et on dit que V est un $\mathfrak{g}$ -module.

Exemples 1.1.2. 1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, l'homomorphisme

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

défini par : $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$, pour tous x, y de $\mathfrak{g}$, est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans lui-même, appelée la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

2) L'homomorphisme $\rho : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$\rho(A)(x) = Ax$$

est une représentation de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$, appelée la représentation naturelle.

1.1.3 Module

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, un espace vectoriel V (sur le même corps que $\mathfrak{g}$) est un module sur $\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{g}$ -module s'il existe une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans $V : \rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$. On notera gv au lieu de $\rho(g)(v)$.

Exemples 1.1.3. 1) Si $\rho = 0$ on dit que (ρ, V) un $\mathfrak{g}$ -module trivial.
 2) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, munie de la représentation adjointe, est un $\mathfrak{g}$ -module.
 3) Si V et W sont deux $\mathfrak{g}$ -modules alors les espaces vectoriels suivants sont des $\mathfrak{g}$ -modules :
 i) $V \oplus W$, $g(v \oplus w) := gv \oplus gw$.
 ii) $V \otimes W$, $g(v \otimes w) := gv \otimes w + v \otimes gw$
 iii) $\text{Hom}(V, W)$, $(g\varphi)(v) := g(\varphi(v)) - \varphi(gv)$ pour tout $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$.

1.1.4 Cohomologie des algèbres de Lie

Définition 1.1.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V un $\mathfrak{g}$ -module. On appelle une q -cochaîne de l'algèbre $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V toute application q -linéaire antisymétrique de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V . L'espace des q -cochaines est noté $C^q(\mathfrak{g}, V)$. Ainsi $C^q(\mathfrak{g}, V) = \text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, V)$, ce qui confère à $C^q(\mathfrak{g}, V)$ une structure de $\mathfrak{g}$ -module. La différentielle de Chevalley-Eilemberg

$$\delta = \delta_q : C^q(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{g}, V)$$

est définie par la formule

$$\begin{aligned} \delta c(g_1, \dots, g_{q+1}) &= \sum_{1 \leq s < t \leq q+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t], g_1, \dots, \widehat{g}_s, \dots, \widehat{g}_t, \dots, g_{q+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq s \leq q+1} (-1)^s g_s c(g_1, \dots, \widehat{g}_s, \dots, g_{q+1}) \end{aligned}$$

où $c \in C^q(\mathfrak{g}, V)$ et $g_1, \dots, g_{q+1} \in \mathfrak{g}$ (la notation $\widehat{g}_i$ indique que le i ème terme est omis). Nous convenons que pour $q < 0$, $C^q(\mathfrak{g}, V) = 0$ et $\delta_q = 0$. On vérifie alors que $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ et que $\text{Im} \delta_{q-1} \subset \ker \delta_q$.

Nous avons donc un complexe :

$$0 \rightarrow C^0(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \dots \rightarrow C^{q-1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_{q-1}} C^q(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \dots$$

Notons $H^q(\mathfrak{g}, V) = \ker \delta_q / \text{Im} \delta_{q-1}$ l'espace quotient. Cet espace est appelé l'espace de q -cohomologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V . On note classiquement :

$Z^q(\mathfrak{g}, V) = \ker \delta_q$: l'espace des q -cocycles

$B^q(\mathfrak{g}, V) = \text{Im} \delta_{q-1}$: l'espace des q -cobords.

Si $V = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est considéré comme module trivial, le second terme du membre de droite de la formule ci-dessus s'annule, et on note les cohomologies, dans ce cas, $H^q(\mathfrak{g})$.

Remarque 1.1.1. La cohomologie est dite différentielle lorsque les cochaines sont des opérateurs différentiels.

Exemple 1.1.1. Soit $\Omega(M)$ l'ensemble des formes différentielles sur une variété M , et d la différentielle extérieure sur $\Omega(M)$ à savoir la seule antidérivation de $\Omega(M)$ de carrée nulle et dont la restriction à $C^\infty(M)$ coïncide avec la différentielle des fonctions. Si ω est une p -forme et si $X_0, \dots, X_p$ sont des champs de vecteurs, alors la forme explicite de d est donnée par :

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Ainsi une forme différentielle de degré p peut être interprétée comme une p -cochaîne de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(M)$ à coefficients dans le $\text{Vect}(M)$ -module $C^\infty(M)$. Le complexe de De Rham dont les cocycles sont les formes fermées et dont les cobords sont les formes exactes peut être vu donc comme un sous-complexe du complexe $C^*(\text{Vect}(M), C^\infty(M))$.

1.1.5 L'espace de cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, V))$

Extension des modules

Définition 1.1.2. Soient V et W deux $\mathfrak{g}$ -modules. On appelle extension de V par W toute suite exacte de $\mathfrak{g}$ -modules V, W et R

$$0 \rightarrow V \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow 0$$

Deux extensions de V par W définies par deux $\mathfrak{g}$ -modules R et R_1 sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules ψ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & R & \rightarrow & W \rightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \psi & & \downarrow id \\ 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & R_1 & \rightarrow & W \rightarrow 0 \end{array}$$

L'espace de cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, V))$

Soit W un supplémentaire à V dans R , toute extension est de la forme :

$$g(v, w) = (gv + c(g)w, gw), \quad (1.1.1)$$

où $c : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(W, V)$ est une application linéaire.

On vérifie que la formule (1.1.1) définit une structure de module sur R si et seulement si c est un cocycle : $\delta(c)(x, y) := g \cdot c(y) - y \cdot c(x) - c([x, y]) = 0$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$. De plus, on vérifie que toute application ψ qui fait commuter le diagramme ci-dessus a la forme :

$$\psi(v, w) = (v + \varphi(w), w),$$

où $\varphi \in C^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, V)) = \text{Hom}(W, V)$.

Enfin, on montre par un calcul direct que l'extension définie par le cocycle c est équivalente à l'extension définie par le cocycle c_1 via ψ si et seulement si c_1 est de la forme $c_1 = c + d\varphi$. La classe de cohomologie du cocycle c correspond alors à la classe de la suite exacte :

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{v \mapsto (v, 0)} V \oplus W \xrightarrow{(v, w) \mapsto w} W \rightarrow 0,$$

où la structure de $\mathfrak{g}$ -module sur $V \oplus W$ est donnée par la formule (1.1.1). L'espace de cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, V))$ est donc interprété comme l'ensemble des classes des extensions de V par W .

1.1.6 L'espace de cohomologie $H^2(\mathfrak{g})$

L'espace $H^2(\mathfrak{g})$ peut s'interpréter comme ensemble des classes des extensions centrales de dimension 1 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Rappelons que l'extension centrale de dimension 1 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

d'algèbres de Lie, pour laquelle l'image par l'homomorphisme $\mathbb{K} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ est contenue dans le centre de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$.

A un cocycle $c \in C^2(\mathfrak{g})$ correspond l'extension :

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

où le commutateur dans l'algèbre $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}$ est défini par la formule :

$$[(\lambda, g), (\mu, h)] = (c(g, h), [g, h])$$

On peut vérifier que l'identité de Jacobi pour ce commutateur est équivalente au fait que c est un cocycle et que deux cocycles cohomologues définissent deux extensions équivalentes et réciproquement. Si le cocycle c est un cobord alors l'extension est triviale.

1.1.7 L'espace $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$

L'espace $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ peut être interprété comme l'ensemble des classes des déformations infinitésimales de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En effet, par définition, une série (formelle)

$$(X, Y) \rightarrow \Phi_\lambda(X, Y) := [X, Y] + \lambda f_1(X, Y) + \lambda^2 f_2(X, Y) + \dots \quad (1.1.2)$$

est une déformation du crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ si Φ_λ est un crochet de Lie pour chaque λ , c'est-à-dire qu'il s'agit d'une forme bilinéaire antisymétrique en X, Y et vérifiant l'identité de Jacobi. Si on pose simplement

$$[X, Y]_\lambda = [X, Y] + \lambda c(X, Y), \quad (1.1.3)$$

c étant une 2-cochaîne avec les valeurs dans $\mathfrak{g}$ et λ étant un scalaire, alors ce crochet satisfait l'identité de Jacobi modulo des termes d'ordre $O(\lambda^2)$ si et seulement si c est un 2-cocycle.

Si $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, alors toute déformation formelle de $\mathfrak{g}$ est triviale.

1.2 Déformation des modules

La théorie des déformations des modules sur les algèbres de Lie a été considérée pour la première fois dans les travaux de Nijenhuis-Richardson [57]. Quant à Claude Roger et Valentin Ovsienko, ils ont étudié dans ([54], [55]) les déformations formelles et multiparamétrées que l'on considère ici.

1.2.1 Déformation formelle

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (V, ρ) un $\mathfrak{g}$ -module, où V est un espace vectoriel et $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ un homomorphisme. Une déformation formelle multiparamétrée du morphisme ρ est une série formelle :

$$\rho(t) = \rho + \sum_{1 \leq m} \varphi_m(t), \quad (1.2.1)$$

où $t = (t_1, \dots, t_p)$ et chaque $\varphi_m(t)$ est un polynôme homogène en t , de degré m , à coefficients dans $\text{End}(V)$. Les t_i ($i = 1, \dots, p$) sont appelés les paramètres de la déformation. L'expression $\rho(t)$ doit vérifier la condition d'homomorphisme :

$$\rho(t)[x, y] = [\rho(t)(x), \rho(t)(y)], \quad (1.2.2)$$

où le crochet à droite est défini sur $\text{End}(V) \otimes \mathbb{C}[[t]]$ par extension $\mathbb{C}[[t]]$ -linéaire de $\text{End}(V)$.

Pour classifier les déformations on définit la notion d'équivalence de déformations.

Déformations équivalentes

Une déformation $\rho'(t)$ est dite équivalente à la déformation $\rho(t)$ si $\rho'(t)$ s'écrit : $\rho'(t) = I(t) \circ \rho(t)$, où $I(t)$ est un automorphisme de $\text{End}(V) \otimes \mathbb{C}[[t]]$ de la forme :

$$I(t) = \exp \left(\sum_{1 \leq i \leq p} t_i \text{ad} A_i + \sum_{1 \leq i, j \leq p} t_i t_j \text{ad} A_{ij} + \dots \right),$$

où $A_i, A_{ij}, \dots$ sont des éléments de $\text{End}(V)$.

Remarque 1.2.1. On peut d'une façon analogue définir une déformation d'une algèbre de Lie. Une manière de voir cela consiste à reprendre les définitions ci-dessus en considérant toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ comme $\mathfrak{g}$ -module via la représentation adjointe. Pour plus de détails sur la théorie de déformation des algèbres de Lie nous invitons le lecteur à consulter ([6], [7], [8], [10], [17], [58]).

Equation de Maurer-Cartan

Soit a une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\text{End}(V)$, la différentielle de Chevalley-Eilemberg de a s'écrit :

$$\delta a(x, y) = a[x, y] - [\rho(x), a(y)] + [\rho(y), a(x)].$$

Le crochet de Nijenhuis-Richardson [57] de deux applications linéaires a et b de $\mathfrak{g}$ dans $\text{End}(V)$ est une application bilinéaire définie sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par :

$$\llbracket a, b \rrbracket(x, y) = -[a(x), b(y)] + [a(y), b(x)].$$

Posons $\varphi(t) = \rho(t) - \rho$. On vérifie facilement que l'équation (1.2.2) s'écrit sous la forme

$$\delta\varphi(t) + \frac{1}{2}\llbracket\varphi(t), \varphi(t)\rrbracket = 0, \quad (1.2.3)$$

c'est l'équation de Maurer-Cartan (appelée aussi équation de déformation [44]).

Nous donnons maintenant un aperçu des résultats fondamentaux de la théorie des déformations et son lien avec la théorie de la cohomologie.

1.2.2 Déformation infinitésimale et cohomologie

Si on tronque l'expression (1.2.1) à l'ordre 1, on obtient

$$\psi_1(t) = \rho + \varphi_1(t) = \rho + t_1 c_1 + \cdots + t_p c_p.$$

$\psi_1(t)$ est appelé déformation infinitésimale.

Une déformation infinitésimale de $\mathfrak{g}$ -module V est dite intégrable s'il existe une déformation formelle telle que $\psi_1(t)$ soit sa partie infinitésimale.

Reprenons l'expression (1.2.1) et considérons les déformations infinitésimales :

$$\psi_1(t) = \rho + t_1 c_1 + \cdots + t_p c_p.$$

On déduit facilement de l'équation (1.2.3) que chaque application linéaire $c_i : \mathfrak{g} \mapsto \text{End}(V)$ est un 1-cocycle. De plus si $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ sont deux déformations équivalentes, alors les cocycles correspondant aux déformations infinitésimales sont cohomologues. Une déformation infinitésimale est donc définie, à équivalence près, par les classes des cohomologies $[c_1], \dots, [c_p]$ dans $H^1(\mathfrak{g}, \text{End}(V))$, en particulier, si $H^1(\mathfrak{g}, \text{End}(V)) = 0$, alors toute déformation infinitésimale $\psi_1(t) = \rho + t_1 c_1 + \cdots + t_p c_p$ de ρ est triviale c'est à dire $\psi_1(t)$ est équivalente à ρ (on peut montrer aussi, par récurrence, que dans ce cas toute déformation formelle est triviale).

Obstruction

Dans le cas où $H^1(\mathfrak{g}, \text{End}(V)) \neq \{0\}$, l'une des questions qui se pose est d'étendre la déformation infinitésimale en une déformation formelle. L'obstruction pour l'existence d'une déformation formelle (1.2.1) appartient au second groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g}, \text{End}(V))$. Ceci est une conséquence de l'équation (1.2.3).

Lemme 1.2.1. Le terme d'ordre 2 dans (1.2.3) est

$$\delta\varphi_2(t) = -\frac{1}{2}[\![\varphi_1(t), \varphi_1(t)]\!].$$

Le second membre $[\![\varphi_1(t), \varphi_1(t)]\!]$ est un 2-cocycle. Sa classe de cohomologie est donc une obstruction pour l'existence d'un terme d'ordre 2 dont les coefficients polynomiaux sont des polynômes homogènes d'ordre 2 en t . Pour l'existence de φ_2 , il est nécessaire et suffisant que ces obstructions s'annulent. En particulier, si $H^2(\mathfrak{g}, \text{End}(V)) = 0$, on montre de même par récurrence qu'on peut prolonger toute déformation infinitésimale en une déformation formelle.

1.3 Espace de densités tensorielles

Considérons l'action à 1-paramètre $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur $C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par :

$$L_F^\lambda \frac{d}{dx}(f) = Ff' + \lambda F'f, \quad (1.3.1)$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La structure de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module sur $C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par (1.3.1) est notée par $\mathcal{F}_\lambda$:

$$\mathcal{F}_\lambda = \left\{ f(dx)^\lambda, f \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\}$$

De même, on définit l'espace des densités tensorielles sur S^1 .

Proposition 1.3.1. [35, 59] *Le premier espace de cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$ à coefficients dans l'espace de densités tensorielles $\mathcal{F}_\lambda$ a la structure suivante :*

$$H^1(\text{Vect}(S^1), \mathcal{F}_\lambda) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{si } \lambda = 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } \lambda = 1 \text{ ou } 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est engendré par les classes de 1-cocycles non triviaux suivants :

$$\begin{aligned} \beta_0\left(F \frac{d}{dx}\right) &= F \text{ et } \beta_1\left(F \frac{d}{dx}\right) = F', \text{ si } \lambda = 0, \\ \beta_2\left(F \frac{d}{dx}\right) &= F'', \text{ si } \lambda = 1 \\ \beta_3\left(F \frac{d}{dx}\right) &= F''', \text{ si } \lambda = 2. \end{aligned}$$

On va maintenant introduire la notion d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}$ en donnant un résultat important qui est la base des résultats présentés dans le chapitre 2.

1.4 Espace d'opérateurs différentiels

Soit $\mathcal{D}^k$ l'espace des opérateurs différentiels linéaires d'ordre k sur $\mathbb{R}$

$$A : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),$$

$$A = a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} + \cdots + a_0(x).$$

On définit une famille à deux paramètres d'action de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}^k$ en considérant les arguments et les images des opérateurs différentiels comme des *densités tensorielles* de degrés arbitraires :

$$A : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ le $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module des opérateurs différentiels linéaires : $A : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$. L'action de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ est définie par :

$$L_X^{\lambda,\mu}(A) = L_X^\mu \circ A - A \circ L_X^\lambda. \quad (1.4.1)$$

La structure de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module sur $\mathcal{D}_\delta^m$ est définie par (1.4.1) avec le poids approprié sur chaque composante.

On se restreint aux fonctions polynomiales et on continue à désigner par $\mathcal{F}_\lambda$ l'espace des densités tensorielles polynomiales de poids λ et par $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ le $\text{Vect}_P(\mathbb{R})$ -module des opérateurs différentiels linéaires $A : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$, où $\text{Vect}(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}$.

Le premier espace de cohomologie $H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\lambda+k})$ est calculé par Feigin et Fuks dans [29] et le résultat est le suivant :

Théorème 1.4.1.

Le premier espace de cohomologie de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ a la structure suivante :

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda,\lambda+k}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, 2, 3, 4, \text{ pour tout } \lambda \\ \mathbb{R}^2, & \text{si } \lambda = 0, k = 1, \\ \mathbb{R}, & \text{si } \lambda = 0, -4, k = 5 \\ \mathbb{R}, & \text{si } \lambda = a_1, a_2, k = 6 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a_1 = -\frac{5+\sqrt{19}}{2}$ et $a_2 = -\frac{5-\sqrt{19}}{2}$.

L'espace $H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \mathcal{D}_{\lambda, \lambda+k})$ de cohomologie relative différentielle est calculé par Bouarroudj et Ovsienko dans [22] et le resultat est le suivant :

Théorème 1.4.2.

Le premier espace de cohomologie relative $H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \mathcal{D}_{\lambda, \lambda+k})$ a la structure suivante :

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}_P(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \mathcal{D}_{\lambda, \lambda+k}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si} \begin{cases} k=2 & \text{et } \lambda \neq -\frac{1}{2}, \\ k=3 & \text{et } \lambda \neq -1, \\ k=4 & \text{et } \lambda \neq -\frac{3}{2}, \\ k=5 & \text{et } \lambda = 0, -4, \\ k=6 & \text{et } \lambda = a_1, a_2 \end{cases} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $a_1 = -\frac{5+\sqrt{19}}{2}$ et $a_2 = -\frac{5-\sqrt{19}}{2}$.

Théorème 1.4.3.

Le deuxième espace de cohomologie de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda, \lambda+k}$ a la structure suivante : [29, 18].

$$H_{\text{diff}}^2(\text{Vect}_P(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \lambda+k}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si} \begin{cases} k=1, \lambda=0, \\ k=2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ pour tout } \lambda, \\ k=12, 13, 14 \text{ et } \lambda = \frac{1-k}{2} \text{ ou } \frac{1-k}{2} \pm \frac{\sqrt{12k-23}}{2}, \end{cases} \\ \mathbb{R}^2, & \text{si} \begin{cases} k=5, \lambda=0, -4, \text{ ou } k=6, \lambda=a_1, a_2, \end{cases} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 1.4.4.

L'espace $H_{\text{diff}}^2(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \mathcal{D}_{\lambda, \mu})$ de cohomologie relative différentielle a été calculé par Bouarroudj [21] et le résultat est le suivant :

$$H_{\text{diff}}^2(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \mathcal{D}_{\lambda, \mu}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si} \begin{cases} (\lambda, \mu) = (0, 5), (-2, 3), (-4, 1), (-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}) \\ \text{et } (-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}), \\ \mu - \lambda = k = 7, 8, 9, 10, 11 \text{ pour tout } \lambda \neq \frac{1-k}{2}, \\ \mu - \lambda = k = 12, 13, 14 \text{ et } \lambda = \frac{1-k}{2} \pm \frac{\sqrt{12k-23}}{2}, \\ \mu - \lambda = k = 15 \text{ et } \lambda = \frac{1-k}{2}, \end{cases} \\ \mathbb{R}^2, & \text{si} \begin{cases} \mu - \lambda = k = 7, \dots 14, \text{ pour } \lambda = \frac{1-k}{2}, \end{cases} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.5 Algèbres d'opérateurs différentiels et pseudodifférentiels

On va maintenant introduire la notion d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}$ en donnant un résultat important qui est la base des résultats présentés dans le chapitre 3.

Un opérateur différentiel s'écrit

$$\mathcal{A} = \sum_{p=0}^N a_p \partial^p,$$

où les a_p sont dans $C^\infty(S^1)$. L'action de $\mathcal{A}$ sur $C^\infty(S^1)$ est alors définie naturellement par

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{p=0}^N a_p f^{(p)},$$

et N est appelé l'ordre de $\mathcal{A}$. Le produit de deux opérateurs se définit alors tout simplement par leur composition, la formule algébrique s'obtient par application de la formule de Leibnitz : $\partial a = a\partial + a'$. On déduit par récurrence

$$\partial^p a = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{(k)} \partial^{(p-k)}.$$

On obtient ainsi une algèbre associative et unitaire, appelée algèbre des opérateurs différentiels sur le cercle, et noté $\mathcal{OD}(S^1)$. On peut aussi la munir de sa structure d'algèbre de Lie obtenue par antisymétrisation $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. On peut ensuite essayer d'inverser formellement le symbole ∂ en ajoutant des termes "intégraux" en ∂^{-1} ; il faut alors déterminer la valeur du produit $\partial^{-1}a$; cette valeur nous est imposée par la règle $\partial(\partial^{-1}a) = a$ et on déduit alors par récurrence

$$\partial^{-1}a = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a^{(p)} \partial^{-p-1},$$

et des formules analogues pour $\partial^{-k}a$. Il y a donc une différence de taille avec le cas des opérateurs d'ordre positif : on ne peut éviter ici d'avoir une infinité de termes d'ordre négatif. Un symbole d'opérateur pseudodifférentiel sera donc une série de la forme

$$A = \sum_{p=-\infty}^N a_p \partial^p.$$

Une telle série peut être considérée comme une fonction de deux variables (x, ∂) formelle en la seconde variable, dont on pourra calculer les dérivées partielles par rapport à x et à ∂ . La composition des opérateurs différentiels s'étend alors aux symboles d'opérateurs pseudodifférentiels suivant la formule :

$$A \circ B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p A}{\partial(\partial^p)} \frac{\partial^p B}{\partial x^p}$$

On obtient ainsi une algèbre associative et unitaire notée $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ et appelée algèbre des symboles d'opérateurs pseudodifférentiels sur S^1 .

La beauté de cette algèbre réside dans l'existence d'une trace, ce qui est assez rare en dimension infinie. On définit le résidu du symbole A par $Res(A) = a_{-1}$ et la trace par $Tr(A) = \int_{S^1} a_{-1}(x) dx$.

Théorème 1.5.1. [56] *Pour tous A et B dans $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$, on a $Tr(A \circ B) = Tr(B \circ A)$.*

Remarque 1.5.1. L'application $(A, B) \rightarrow Tr(A \circ B)$ définit une forme bilinéaire symétrique, invariante et non dégénérée dans $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$.

On va maintenant donner quelques résultats cohomologiques sur $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ à appliquer pour l'extension de la construction.

Proposition 1.5.1. *(Khesin et Kravchenko [45]) Le premier espace de cohomologie adjoint $H^1(\Psi\mathcal{DO}(S^1), \Psi\mathcal{DO}(S^1))$ est de dimension 2. Il est engendré par les classes des 1-cocycles suivants :*

$$\delta_1(a\partial^p) = [\log \partial, a\partial^p] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a^{(k)} \partial^{p-k}$$

$$\delta_2(a\partial^p) = [x, a\partial^p] = -pa\partial^{p-1} \text{ si } p \neq 0, 0 \text{ sinon.}$$

Notons que pour tous les opérateurs pseudodifférentiels A , $Tr(\delta_i(A)) = 0$ pour $i = 1, 2$. Alors, puisque $A \rightarrow \delta_i(A)$ est une dérivation de la loi $\circ$, on a $Tr(\delta_i(A)B) + Tr(A\delta_i(B)) = 0$. Ainsi que $c_i(A, B) = Tr(\delta_i(A)B)$ on obtient une 2-cochaîne sur l'algèbre de Lie $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ à valeurs scalaires.

Proposition 1.5.2. *[45, 55, 56] c_1 et c_2 déterminent deux classes de cohomologie non triviales indépendantes dans $H^2(\Psi\mathcal{DO}(S^1), \mathbb{C})$.*

Chapitre 2

Cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$

2.1 Introduction

Soit M une variété et $Vect(M)$ l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur M . L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier la cohomologie de $Vect(M)$ à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur l'espace des densités tensorielles. Cette cohomologie est en réalité une généralisation naturelle de la cohomologie de Feigin-Fuchs ([29]). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathfrak{g}$ -modules. Il est connu que les extensions non triviales de $\mathfrak{g}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \cdot \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

sont classifiées par le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{M}))$ et sont données par l'action (1.1.1).

Chaque opérateur différentiel bilinéaire A de $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes C^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ donne ainsi un morphisme de $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu$ à $\mathcal{F}_\mu$, pour tout $(\lambda, \nu, \mu) \in \mathbb{R}^3$, par $f dx^\lambda \otimes g dx^\nu \mapsto A(f \otimes g) dx^\mu$. L'algèbre de Lie $Vect(\mathbb{R})$ agit sur l'espace $\text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu, \mathcal{F}_\mu) = \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}$ de ces opérateurs différentiels par :

$$X \frac{d}{dx} . A = L_{X \frac{d}{dx}}^\mu \circ A - A \circ L_{X \frac{d}{dx}}^{(\lambda, \nu)}, \quad (2.1.1)$$

où, $L_{X \frac{d}{dx}}^{(\lambda, \nu)}$ est la dérivée de Lie sur $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu$ définie par la règle de Leibniz

$$L_{X \frac{d}{dx}}^{(\lambda, \nu)}(f \otimes g) = L_{X \frac{d}{dx}}^\lambda(f) \otimes g + f \otimes L_{X \frac{d}{dx}}^\nu(g).$$

Selon Nijenhuis-Richardson [51], l'espace $H^1(\mathfrak{g}; \text{End}(V))$ classe les déformations infinitésimales d'un $\mathfrak{g}$ -module V et les obstructions à l'intégrabilité d'une déformation infinitésimale donnée de V sont des éléments de $H^2(\mathfrak{g}; \text{End}(V))$ tandis que les espaces $H^1(\mathfrak{g}; L(\otimes_s^n V, V))$ apparaissent naturellement dans le problème de la normalisation des représentations non

linéaires de $\mathfrak{g}$ et V . Pour être plus précis, soit

$$T : \mathfrak{g} \rightarrow \sum_{n \geq 0} L(\otimes_s^n V, V), X \mapsto T_X = \sum T_X^n,$$

une représentation non linéaire de $\mathfrak{g}$ dans V c'est-à-dire vérifiant $T_{[X,Y]} = [T_X, T_Y]$. Dans [9], il est prouvé que la représentation T est normalisée si T_X^n est dans un supplémentaire de $B^1(\mathfrak{g}; L(\otimes_s^n V, V))$ à $Z^1(\mathfrak{g}; L(\otimes_s^n V, V))$.

En fait, si A est un opérateur différentiel sur la droite, A peut être vu comme un homomorphisme de $\mathcal{F}_\lambda$ à $\mathcal{F}_\mu$. Si A est d'ordre n , on peut définir son symbole comme un élément de $\mathcal{S}_\delta = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{F}_{\delta-k}$ pour $\delta = \mu - \lambda$. Si n tend vers ∞ , l'espace $\mathcal{S}_\delta = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_{\delta-k}$, apparaît comme espace des symboles pour tous les opérateurs différentiels. L'espace $H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), L(\otimes_s^2 \mathcal{S}_\delta, \mathcal{S}_\delta))$ peut être décomposé comme une somme d'espaces $H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$. Ainsi, le calcul des espaces $H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ est la première étape pour normaliser toute représentation non linéaire de $Vect(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_\delta$.

Pour l'espace des densités de poids $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\lambda$ vu comme module sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $Vect(\mathbb{R})$, la classification des extensions non triviales

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_\mu \rightarrow . \rightarrow \mathcal{F}_\lambda \rightarrow 0$$

suit les travaux de Feigin et Fuchs qui ont calculé dans [29] le groupe de cohomologie $H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu))$. Ovsienko et Bouarroudj ont calculé dans [22] le relatif correspondant pour $\mathfrak{sl}(2) : H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu))$. Ensuite, Bouarroudj [20] a calculé le groupe de cohomologie relatif correspondant à l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires :

$$H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2); \text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu, \mathcal{F}_\mu)).$$

Dans ce chapitre, on va calculer le premier groupe de cohomologie différentielle $H^1_{\text{diff}}(Vect(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ où $\mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}$ est l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires de $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu$ dans $\mathcal{F}_\mu$.

2.2 Définitions et Notations

Dans cette section, on rappelle les principales définitions et faits liés à la géométrie de l'espace $\mathbb{R}$. Nous rappelons également certains concepts fondamentaux de la théorie de la cohomologie.

2.2.1 Cohomologie

Rappelons tout d'abord quelques concepts fondamentaux de la théorie de la cohomologie (voir, par exemple, [26, 28, 27, 34]). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie agissant sur un espace vectoriel V . L'espace de n -cochaines de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V est le $\mathfrak{g}$ -module

$$C^n(\mathfrak{g}, V) := \text{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V).$$

L'opérateur cobord $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ est une g -application satisfaisant $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$. Le noyau δ_n , noté $Z^n(\mathfrak{g}, V)$, est appelé l'espace des n -cocycles. L'image de δ_{n-1} , noté $B^n(\mathfrak{g}, V)$ est appelé l'espace des n -cobords. Par définition, l'espace n -cohomologie est l'espace quotient

$$H^n(\mathfrak{g}, V) = Z^n(\mathfrak{g}, V) / B^n(\mathfrak{g}, V).$$

On aura seulement besoin de la formule δ_n (qui sera simplement notée δ) en degrés 0, 1 et 2 : pour $\Xi \in C^0(\mathfrak{g}, V) = V$, $\delta\Xi(x) := x \cdot \Xi$, et $\Lambda \in C^1(\mathfrak{g}, V)$,

$$\delta(\Lambda)(x, y) := g \cdot \Lambda(y) - y \cdot \Lambda(x) - \Lambda([x, y]) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}, \quad (2.2.1)$$

2.2.2 L'espace des opérateurs différentiels bilinéaires en tant que $Vect(\mathbb{R})$ -module.

L'espace des opérateurs différentiels bilinéaires en tant que $Vect(\mathbb{R})$ -module, noté

$$\mathcal{D}_{\underline{\lambda}, \mu} := \text{Hom}_{\text{diff}}(\mathcal{F}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{F}_{\lambda_2}, \mathcal{F}_{\mu}).$$

l'action $Vect(\mathbb{R})$ est

$$L_{X \frac{d}{dx}}^{\underline{\lambda}, \mu}(A) = L_{X \frac{d}{dx}}^{\mu} \circ A - A \circ L_{X \frac{d}{dx}}^{\underline{\lambda}}, \quad (2.2.2)$$

où $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $L_{X \frac{d}{dx}}^{(\lambda_1, \lambda_2)}$ est la dérivée de Lie sur $\mathcal{F}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{F}_{\lambda_2}$ défini epar par la règle de Leibniz :

$$L_{X \frac{d}{dx}}^{\underline{\lambda}}(f_1 dx^{\lambda_1} \otimes f_2 dx^{\lambda_2}) = L_{X \frac{d}{dx}}^{\lambda_1}(f_1) \otimes f_2 dx^{\lambda_2} + f_1 dx^{\lambda_1} \otimes L_{X \frac{d}{dx}}^{\lambda_2}(f_2 dx^{\lambda_2}).$$

2.3 Cohomologie de $Vect(\mathbb{R})$

Dans cette section, on va calculer la cohomologie différentielle de l'algèbre de Lie $Vect(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels bilinéaires $\mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}$.

2.3.1 Théorème

Théorème 2.3.1. (i) Si $\mu - \lambda - \nu = 0$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(Vect(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

(ii) Si $\mu - \lambda - \nu = 1$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(Vect(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Si $\mu - \lambda - \nu = 2$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R} & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, -1), (0, \nu), (\lambda, 0), (\lambda, -1 - \lambda), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iv) Si $\mu - \lambda - \nu = 3$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = (-2, 0), (0, -2), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(v) Si $\mu - \lambda - \nu = 4$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \mathbb{R}^2 \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

(vi) Si $\mu - \lambda - \nu = 5$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (0, 0), (0, -4), (-4, 0), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) \neq (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -2), (-1, -\frac{3}{2}), (-1, -2), \\ & (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -2), \\ & (-2, -\frac{1}{2}), (-1, -1), (-2, -1), (-2, -\frac{3}{2}) \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(vii) Si $\mu - \lambda - \nu = 6$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } (\lambda, \nu) = (\frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}, 0), (0, \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}), \\ & (\frac{\sqrt{19}-5}{2}, \frac{-\sqrt{19}-5}{2}), (-\frac{\sqrt{19}-5}{2}, \frac{\sqrt{19}-5}{2}), \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) \neq (-\frac{1}{2}, -2), (-2, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}), \\ & (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}), (-1, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (-1, -2), \\ & (-\frac{5}{2}, -1), (-1, -\frac{5}{2}), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-2, -\frac{3}{2}), \\ & (-\frac{3}{2}, -2), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), (-2, -1), \\ & (-2, -2), (-2, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -2), \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(viii) Si $\mu - \lambda - \nu = 7$, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } (\lambda, \nu) = \left(\frac{-5-\sqrt{19}}{2}, \frac{-5-\sqrt{19}}{2}\right), \left(\frac{-5+\sqrt{19}}{2}, \frac{-5+\sqrt{19}}{2}\right), \\ & (0, \nu), (\lambda, 0), (\lambda, -6 - \lambda), (\sqrt{19} - 1, \frac{-\sqrt{19}-5}{2}), \\ & \left(\frac{-\sqrt{19}-5}{2}, \sqrt{19} - 1\right), (-\sqrt{19} - 1, \frac{\sqrt{19}-5}{2}), \\ & \left(\frac{\sqrt{19}-5}{2}, -\sqrt{19} - 1\right), \\ \mathbb{R} & \text{si } (\lambda, \nu) \neq \left(-\frac{1}{2}, -3\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{5}{2}\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -3\right), (-1, -3), (-3, -1), (-1, -2), \\ & (-2, -1), (-2, -3), (-3, -2), \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \\ & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -2\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \\ & \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), (-2, -2), \left(-2, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -2\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ix) Sinon, alors

$$H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 0.$$

Remarque 2.3.1. Les valeurs $-\frac{2}{3}$ peuvent être déduites du travail de Grozman [39] et les valeurs contenant $\sqrt{19}$ du travail de Feigin-Fuchs [29].

Preuve 2.3.1. Pour prouver le théorème, nous procédons par les trois étapes suivantes :

- On étudie tout d’abord la dimension de l’espace des opérateurs qui satisfont à la condition de 1-cocycle.
- On étudie ensuite tous les 1-cocycles triviaux : les opérateurs de la forme $L_Y \frac{d}{dx} A_k^{\lambda, \nu}$ où $A_k^{\lambda, \nu}$ est un opérateur bilinéaire donné par (2.3.2)
- Enfin, en tenant compte des parties 1 et 2 et en fonction de λ et ν -la dimension du groupe de cohomologie $H_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ sera égale à $\dim(\text{opérateurs qui sont 1-cocycles}) - \dim(\text{opérateurs de la forme } L_Y \frac{d}{dx} A_k^{\lambda, \nu})$.

Nous aurons aussi besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. Soit $Y \frac{d}{dx}$ un champ vectoriel dans $\text{Vect}(\mathbb{R})$ et soit $c : \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}_\mu$ un opérateur différentiel bilinéaire défini comme suit. Pour tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et pour tout $g \in \mathcal{F}_\nu$:

$$c(f, g) = \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} f^{(j)} g^{(l)} \quad (2.3.1)$$

où $c_{i,j,l}$ sont des constantes. Alors, pour tout $X \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
L_{X \frac{d}{dx}}^{\lambda, \nu; \mu} c(f, g) &= \sum_{i+j+l=k+2} c_{i,j,l} X Y^{(i)} f^{(j)} g^{(l)} + \sum_{i+j+l=k+1} (\mu - \lambda - \nu - j - l) c_{i,j,l} X' Y^{(i)} f^{(j)} g^{(l)} \\
&- \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} \left(\sum_{s=2}^j C_j^s X^{(s)} f^{(j-s+1)} \right) g^{(l)} \\
&- \lambda \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} \left(\sum_{s=1}^j C_j^s X^{(s+1)} f^{(j-s)} \right) g^{(l)} \\
&- \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} f^{(j)} \left(\sum_{t=2}^l C_l^t X^{(t)} g^{(l-t+1)} \right) \\
&- \nu \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} f^{(j)} \left(\sum_{t=1}^l C_l^t X^{(t+1)} g^{(l-t)} \right)
\end{aligned}$$

Preuve 2.3.2. En utilisant (2.2.2).

Lemme 2.3.2. Soit $A_k^{\lambda, \nu} : \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}_\mu$ un opérateur différentiel bilinéaire défini comme suit. Pour tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et pour tout $g \in \mathcal{F}_\nu$:

$$A_k^{\lambda, \nu}(f, g) = \sum_{i+j=k} a_{i,j} f^{(i)} g^{(j)} \quad (2.3.2)$$

où $c_{i,j}$ sont des constantes. Alors, pour tout $X \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
L_{Y \frac{d}{dx}}^{\lambda, \nu; \mu} A_k^{\lambda, \nu}(f, g) &= \sum_{i+j=k} (\mu - \lambda - \nu - i - j) a_{i,j} Y' f^{(i)} g^{(j)} \\
&- \sum_{i+j=k} a_{i,j} \left(\sum_{s=2}^i (C_i^s + \lambda C_i^{s-1}) Y^{(s)} f^{(i-s+1)} \right) g^{(l)} \\
&- \sum_{i+j=k} a_{i,j} f^{(i)} \left(\sum_{t=2}^j (C_j^t + \nu C_j^{t-1}) Y^{(t)} g^{(j-t+1)} \right)
\end{aligned}$$

Preuve 2.3.3. En utilisant (2.2.2).

Tout 1-cocycle sur $\text{Vect}(\mathbb{R})$ devrait se mettre sous la forme générale suivante :

$$c(f, g) = \sum_{i+j+l=k+1} c_{i,j,l} Y^{(i)} f^{(j)} g^{(l)}, \quad (2.3.3)$$

où $c_{i,j,l}$ sont des constantes. Le fait que ce soit un 1-cocycle implique que

$$c_{0,j,l} = 0,$$

La condition de 1-cocycle se lit comme suit : pour tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$, pour tout $g \in \mathcal{F}_\nu$ et pour tout $X \frac{d}{dx}, Y \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(\mathbb{R})$, nous avons

$$c\left([X \frac{d}{dx}, Y \frac{d}{dx}], f, g\right) - L_{X \frac{d}{dx}}^{\lambda, \nu; \mu} c(Y \frac{d}{dx}, f, g) + L_{Y \frac{d}{dx}}^{\lambda, \nu; \mu} c(X \frac{d}{dx}, f, g) = 0.$$

(i) Si $\mu - \lambda - \nu = 0$,

La condition de 1-cocycle implique

$$c(f, g) = c_{1,0,0} Y' fg.$$

En utilisant (2.3.2), on montre que $c(f, g) = c_{1,0,0} Y' fg$ est non trivial.

(ii) Si $\mu - \lambda - \nu = 1$

$$c(f, g) = c_{1,1,0} Y' f' g + c_{1,0,1} Y' f g' + c_{2,0,0} Y'' fg.$$

De nouveau, la condition 1-cocycle ci-dessus est la suivante

$$\mu - \lambda - \nu = 1 \quad \text{et} \quad c_{1,1,0} \lambda + c_{1,0,1} \nu = 0.$$

Étudions maintenant la trivialité de ce 1-cocycle. En utilisant (2.3.2), on montre que

$$L_Y A_1^{\lambda, \nu} = -(a_{1,0} \lambda + a_{0,1} \nu) Y'' fg$$

1. Si $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, alors

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3,$$

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 0.$$

2. Si $\lambda = 0$ et $\nu \neq 0$, alors $c_{1,1,0} = 0$, $\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$ et

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 1,$$

avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par

$$\Lambda = -a_{0,1} \nu Y'' fg.$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda \neq 0 \text{ et } \nu = 0)$ et $(\lambda, \nu) \neq (0, 0)$.

(iii) Si $\mu - \lambda - \nu = 2$,

$$\begin{aligned} c(f, g) &= c_{1,2,0} Y' f'' g + c_{1,1,1} Y' f' g' + c_{1,0,2} Y' f g'' \\ &+ c_{2,1,0} Y'' f' g + c_{2,0,1} Y'' f g' + c_{3,0,0} Y''' fg. \end{aligned}$$

La condition 1-cocycle ci-dessus s'écrit :

$$\mu - \lambda - \nu = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_{1,2,0}(1 + 2\lambda) + c_{1,1,1}\nu = 0, \\ c_{1,2,0}\lambda + c_{1,0,2}\nu = 0, \\ c_{1,1,1}\lambda + c_{1,0,2}(1 + 2\nu) = 0. \end{cases}$$

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle. En utilisant (2.3.2), on montre que

$$L_Y \frac{d}{dx} A_2^{\lambda, \nu} = -(a_{2,0}(1 + 2\lambda) + a_{1,1}\nu) Y'' f' g - (a_{1,1}\lambda + a_{0,2}(1 + 2\nu)) Y'' f g' - (a_{2,0}\lambda + a_{0,2}\nu) Y''' fg.$$

1. Si $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, alors $c_{1,2,0} = c_{1,0,2} = 0$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 4,$$

$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\Lambda_1 = -a_{2,0} Y'' f' g,$$

$$\Lambda_2 = -a_{0,2} Y'' f g'.$$

2. Si $(\lambda, \nu) = (0, -1)$, alors $c_{1,2,0} = c_{1,0,2} = 0$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 4,$$

$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\Lambda_1 = -a_{2,0} Y'' f' g,$$

$$\Lambda_2 = a_{1,1} Y'' f' g,$$

$$\Lambda_3 = -a_{0,2} (Y'' f g' + Y''' f g).$$

3. Pour les autres cas de λ et ν , alors $c_{1,2,0} = c_{1,1,1} = c_{1,0,2} = 0$.

Ainsi, le 1-cocycle est trivial.

(iv) Si $\mu - \lambda - \nu = 3$,

$$\begin{aligned} c(f, g) &= c_{1,0,3} Y' f g''' + c_{1,1,2} Y' f' g'' + c_{1,2,1} Y' f'' g' + c_{1,3,0} Y' f''' g + c_{2,0,2} Y'' f g'' \\ &+ c_{2,1,1} Y'' f' g' + c_{2,2,0} Y'' f'' g + c_{3,1,0} Y''' f' g + c_{3,0,1} Y''' f g' + c_{4,0,0} Y^{(4)} f g \end{aligned}$$

La condition de 1-cocycle ci-dessus implique :

$\mu - \lambda - \nu = 3$ et

$$\begin{aligned} c_{1,0,3}(3 + 3\nu) + c_{1,1,2}\lambda &= 0, & c_{1,0,3}(1 + 3\nu) + c_{1,2,1}\lambda &= 0, \\ c_{1,0,3}\nu + c_{1,3,0}\lambda &= 0, & c_{1,1,2}(1 + 2\nu) + c_{1,2,1}(1 + 2\lambda) &= 0, \\ c_{1,1,2}\nu + c_{1,3,0}(1 + 3\lambda) &= 0, & c_{1,2,1}\nu + c_{1,3,0}(3 + 3\lambda) &= 0, \\ c_{2,0,2}\nu + c_{2,2,0}\lambda &= 0, & c_{3,0,1}\nu + c_{3,1,0}\lambda + 2c_{4,0,0} &= 0. \end{aligned}$$

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle :

$$\begin{aligned} L_{Y \frac{d}{dx}} A_3^{\lambda, \nu} &= - (a_{0,3}(3 + 3\nu) + a_{1,2}\lambda) Y'' f g'' - (a_{1,2}(1 + 2\nu) + a_{2,1}(1 + 2\lambda)) Y'' f' g' \\ &- (a_{2,1}\nu + a_{3,0}(3 + 3\lambda)) Y'' f'' g - (a_{1,2}\nu + a_{3,0}(1 + 3\lambda)) Y''' f' g \\ &- (a_{0,3}(1 + 3\nu) + a_{2,1}\lambda) Y''' f g' - (a_{0,3}\nu + a_{3,0}\lambda) Y^{(4)} f g. \end{aligned}$$

1. Si $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, alors $c_{1,0,3} = c_{1,3,0} = c_{4,0,0} = 0$ et $c_{1,1,2} = -c_{1,2,1}$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 6$$

et $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\Lambda_1 = -a_{0,3}(3Y'' f g'' + Y''' f g'),$$

$$\Lambda_2 = -a_{1,2} Y'' f' g',$$

$$\Lambda_3 = -a_{2,1} Y'' f' g'.$$

2. Si $(\lambda, \nu) = (-2, 0)$, alors $c_{1,0,3} = c_{2,0,2} = 0$, $c_{1,3,0} = 2c_{1,1,2}$ et $c_{4,0,0} = c_{3,1,0}$ donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 5$$

$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -a_{0,3}(3Y''fg'' + Y'''fg'), \\ \Lambda_2 &= -a_{1,2}(-2Y''fg'' + Y''f'g'), \\ \Lambda_3 &= a_{2,1}(3Y''f'g' + 2Y'''fg').\end{aligned}$$

Ces résultats sont encore valables pour $(0, -2)$ et $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Si λ et ν ne sont pas comme ci-dessus, alors $c_{1,0,3} = c_{1,1,2} = c_{1,2,1} = c_{1,3,0} = 0$, $c_{2,0,2} = -\frac{\lambda}{\nu}c_{2,2,0}$ et $c_{4,0,0} = \frac{1}{2} - \nu c_{3,0,1} - \lambda c_{3,1,0}$ donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 4$$

et $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\Lambda_1 = a_{0,3}\left(-\frac{(1+2\nu)(3+3\nu)}{\lambda}Y''f'g' - \frac{\nu(3+3\nu)}{\lambda}Y'''f'g + (1+3\nu)Y'''fg' + \nu Y^{(4)}fg\right),$$

$$\Lambda_2 = a_{2,1}\left(-\lambda Y''fg'' + 2(\lambda - \nu)Y''f'g' + \nu Y''f''g - \nu Y'''f'g + \lambda Y'''fg'\right),$$

$$\Lambda_3 = -a_{3,0}\left(-\frac{\lambda(3+3\lambda)}{\nu}Y''fg'' - \frac{(1+2\nu)(3+3\lambda)}{\nu}Y''f'g' + (3+3\lambda)Y''f''g + (1+3\lambda)Y'''f'g + \lambda Y^{(4)}fg\right).$$

(v) Si $\mu - \lambda - \nu = 4$,

$$\begin{aligned}c(f, g) &= c_{1,4,0}Y'f^{(4)}g + c_{1,3,1}Y'f'''g' + c_{1,2,2}Y'f''g'' + c_{1,1,3}Y'f'g''' + c_{1,0,4}Y'fg^{(4)} \\ &+ c_{2,3,0}Y''f'''g + c_{2,2,1}Y''f''g' + c_{2,1,2}Y''f'g'' + c_{2,0,3}Y''fg''' + c_{3,2,0}Y'''f''g \\ &+ c_{3,1,1}Y'''f'g' + c_{3,0,2}Y'''fg'' + c_{4,1,0}Y^{(4)}f'g + c_{4,0,1}Y^{(4)}fg' + c_{5,0,0}Y^{(5)}fg.\end{aligned}$$

La condition de 1-cocycle implique :

$$\mu - \lambda - \nu = 4 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}c_{1,4,0}(6+4\lambda) + c_{1,3,1}\nu &= 0, & c_{1,4,0}(4+6\lambda) + c_{1,2,2}\nu &= 0, \\ c_{1,4,0}(1+4\lambda) + c_{1,1,3}\nu &= 0, & c_{1,4,0}\lambda + c_{1,0,4}\nu &= 0, \\ c_{1,3,1}(3+3\lambda) + c_{1,2,2}(1+2\nu) &= 0, & c_{1,3,1}(1+3\lambda) + c_{1,1,3}(1+3\nu) &= 0, \\ c_{1,3,1}\lambda + c_{1,0,4}(1+4\nu) &= 0, & c_{1,2,2}(1+2\lambda) + c_{1,1,3}(3+3\nu) &= 0, \\ c_{1,2,2}\lambda + c_{1,0,4}(4+6\nu) &= 0, & c_{1,1,3}\lambda + c_{1,0,4}(6+4\nu) &= 0, \\ c_{2,3,0}(1+3\lambda) + c_{2,1,2}\nu &= 0, & c_{2,3,0}\lambda + c_{2,0,3}\nu &= 0, \\ c_{2,2,1}\lambda + c_{2,0,3}(1+3\nu) &= 0, & c_{3,2,0}(1+2\lambda) + c_{3,1,1}\nu + 2c_{4,1,0} &= 0, \\ c_{3,1,1}\lambda + c_{3,0,2}(1+2\nu) + 2c_{4,0,1} &= 0, & c_{4,1,0}\lambda + c_{4,0,1}\nu + 5c_{5,0,0} &= 0.\end{aligned}$$

L'espace des solutions du système ci-dessus est de dimension 5 pour $(\lambda, \nu) = (0, 0), (\lambda, 0), (0, \nu)$ et de dimension 4 autrement.

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle. On montre que

$$\begin{aligned} L_Y \frac{d}{dx} A_4^{\lambda, \nu} = & - (a_{4,0}(6+4\lambda) + a_{3,1}\nu)Y''f'''g - (a_{3,1}(3+3\lambda) + a_{2,2}(1+2\nu))Y''f''g' \\ & - (a_{2,2}(1+2\lambda) + a_{1,3}(3+3\nu))Y''f'g'' - (a_{1,3}\lambda + a_{0,4}(6+4\nu))Y''fg''' \\ & - (a_{4,0}(4+6\lambda) + a_{2,2}\nu)Y'''f''g - (a_{3,1}(1+3\lambda) + a_{1,3}(1+3\nu))Y'''f'g' \\ & - (a_{2,2}\lambda + a_{0,4}(4+6\nu))Y'''fg'' - (a_{4,0}(1+4\lambda) + a_{1,3}\nu)Y^{(4)}f'g \\ & - (a_{3,1}\lambda + a_{0,4}(1+4\nu))Y^{(4)}fg' - (a_{4,0}\lambda + a_{0,4}\nu)Y^{(4)}fg \end{aligned}$$

1. Si $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, alors $c_{1,4,0} = c_{1,3,1} = c_{1,2,2} = c_{1,1,3} = c_{1,0,4} = c_{2,3,0} = c_{2,0,3} = c_{5,0,0} = 0$, $c_{3,2,0} = -2c_{4,1,0}$ et $c_{3,0,2} = -2c_{4,0,1}$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 5$$

et $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -a_{3,1}(3Y''f''g' + Y'''f'g'), \\ \Lambda_2 &= -a_{2,2}(Y''f''g' + Y''f'g''), \\ \Lambda_3 &= -a_{1,3}(3Y''f'g'' + Y'''f'g'). \end{aligned}$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (\lambda, 0), (0, \nu)$.

2. Pour les autres valeurs de λ et ν , alors l'espace $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ est de dimension 2.

Par exemple, si $(\lambda, \nu) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, alors $c_{1,4,0} = c_{1,3,1} = c_{1,2,2} = c_{1,1,3} = c_{1,0,4} = 0$, $c_{2,2,1} = -c_{2,0,3}$, $c_{2,1,2} = c_{2,0,3}$, $c_{4,1,0} = \frac{1}{4}c_{3,1,1}$, $c_{4,0,1} = \frac{1}{4}c_{3,1,1}$ et $c_{5,0,0} = \frac{1}{2,0}c_{3,1,1}$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 4$$

et $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= a_{4,0}(-3Y''f'''g - 3Y''f''g' + 3Y''f'g'' + 3Y''fg''' - Y'''f''g + Y'''fg'' - Y^{(4)}f'g), \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2}a_{3,1}(Y'''f''g + Y'''fg''). \end{aligned}$$

(vi) Si $\mu - \lambda - \nu = 5$,

$$\begin{aligned} c(f, g) &= c_{1,5,0}Y'f^{(5)}g + c_{1,4,1}Y'f^{(4)}g' + c_{1,3,2}Y'f'''g'' + c_{1,2,3}Y'f''g''' + c_{1,1,4}Y'f'g^{(4)} \\ &+ c_{1,0,5}Y'fg^{(5)} + c_{2,4,0}Y''f^{(4)}g + c_{2,3,1}Y''f'''g' + c_{2,2,2}Y''f''g'' + c_{2,1,3}Y''f'g''' \\ &+ c_{2,0,4}Y''fg^{(4)} + c_{3,3,0}Y'''f'''g + c_{3,2,1}Y'''f''g' + c_{3,1,2}Y'''f'g'' + c_{3,0,3}Y'''fg''' \\ &+ c_{4,2,0}Y^{(4)}f''g + c_{4,1,1}Y^{(4)}f'g' + c_{4,0,2}Y^{(4)}fg'' + c_{5,1,0}Y^{(5)}f'g \\ &+ c_{5,0,1}Y^{(5)}fg' + c_{6,0,0}Y^{(6)}fg. \end{aligned}$$

Utilisant la condition de 1-cocycle on obtient :

$$\mu - \lambda - \nu = 5 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,5,0}(10+5\lambda) + c_{1,4,1}\nu &= 0, & c_{1,5,0}(10+10\lambda) + c_{1,3,2}\nu &= 0, \\
c_{1,5,0}(5+10\lambda) + c_{1,2,3}\nu &= 0, & c_{1,5,0}(1+5\lambda) + c_{1,1,4}\nu &= 0, \\
c_{1,5,0}\lambda + c_{1,0,5}\nu &= 0, & c_{1,4,1}(6+4\lambda) + c_{1,3,2}(1+2\nu) &= 0, \\
c_{1,4,1}(4+6\lambda) + c_{1,2,3}(1+3\nu) &= 0, & c_{1,4,1}(1+4\lambda) + c_{1,1,4}(1+4\nu) &= 0, \\
c_{1,4,1}\lambda + c_{1,0,5}(1+5\nu) &= 0, & c_{1,3,2}(3+3\lambda) + c_{1,2,3}(3+3\nu) &= 0, \\
c_{1,3,2}(1+3\lambda) + c_{1,1,4}(4+6\nu) &= 0, & c_{1,3,2}\lambda + c_{1,0,5}(5+10\nu) &= 0, \\
c_{1,2,3}(1+2\lambda) + c_{1,1,4}(6+4\nu) &= 0, & c_{1,2,3}\lambda + c_{1,0,5}(10+10\nu) &= 0, \\
c_{1,1,4}\lambda + c_{1,0,5}(10+5\nu) &= 0, & & \\
c_{2,4,0}(4+6\lambda) + c_{2,2,2}\nu &= 0, & c_{2,4,0}(1+4\lambda) + c_{2,1,3}\nu &= 0, \\
c_{2,4,0}\lambda + c_{2,0,4}\nu &= 0, & c_{2,3,1}(1+3\lambda) + c_{2,1,3}(1+3\nu) &= 0, \\
c_{2,3,1}\lambda + c_{2,0,4}(1+4\nu) &= 0, & c_{2,3,1}\lambda + c_{2,0,4}(4+6\nu) &= 0, \\
(c_{4,2,0} - c_{3,3,0})\lambda + (c_{4,0,2} - c_{3,0,3})\nu + 5c_{6,0,0} &= 0, & c_{3,3,0}(3+3\lambda) + c_{3,2,1}\nu + 2c_{4,2,0} &= 0, \\
c_{3,2,1}(1+2\lambda) + c_{3,1,2}(1+2\nu) + 2c_{4,1,1} &= 0, & c_{3,1,2}\lambda + c_{3,0,3}(3+3\nu) + 2c_{4,0,2} &= 0, \\
c_{4,2,0}(1+2\lambda) + c_{4,1,1}\nu + 5c_{5,1,0} &= 0, & & \\
c_{4,1,1}\lambda + c_{4,0,2}(1+2\nu) + 5c_{5,0,1} &= 0, & c_{5,1,0}\lambda + c_{5,0,1}\nu + 9c_{6,0,0} &= 0.
\end{aligned}$$

L'espace des solutions du système ci-dessus est de dimension 6 pour $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, de dimension 5 pour $(\lambda, \nu) = (0, -2), (-2, 0), (0, -4), (-4, 0)$, de dimension 4 pour $(\lambda, \nu) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (-2, -2), (0, \nu), (\lambda, 0)$, et de dimension 3 sinon.

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle :

$$\begin{aligned}
L_Y \frac{d}{dx} A_5^{\lambda, \nu} = & - (a_{5,0}(10+5\lambda) + a_{4,1}\nu)Y''f^{(4)}g - (a_{4,1}(6+4\lambda) + a_{3,2}(1+2\nu))Y''f'''g' \\
& - (a_{3,2}(3+3\lambda) + a_{2,3}(3+3\nu))Y''f''g'' - (a_{2,3}(1+2\lambda) + a_{1,4}(6+4\nu))Y''f'g''' \\
& - (a_{1,4}\lambda + a_{0,5}(10+5\nu))Y''fg^{(4)} - (a_{5,0}(10+10\lambda) + a_{3,2}\nu)Y'''f'''g \\
& - (a_{4,1}(4+6\lambda) + a_{2,3}(1+3\nu))Y'''f''g' - (a_{3,2}(1+3\lambda) + a_{1,4}(4+6\nu))Y'''f'g'' \\
& - (a_{2,3}\lambda + a_{0,5}(10+10\nu))Y'''fg''' - (a_{5,0}(5+10\lambda) + a_{2,3}\nu)Y^{(4)}f''g \\
& - (a_{4,1}(1+4\lambda) + a_{1,4}(1+4\nu))Y^{(4)}f'g' - (a_{3,2}\lambda + a_{0,5}(5+10\nu))Y^{(4)}fg'' \\
& - (a_{5,0}(1+5\lambda) + a_{1,4}\nu)Y^{(5)}f'g - (a_{4,1}\lambda + a_{0,5}(1+5\nu))Y^{(5)}fg' \\
& - (a_{5,0}\lambda + a_{0,5}\nu)Y^{(6)}fg.
\end{aligned}$$

1. Si $(\lambda, \nu) = (0, 0)$, alors $c_{1,5,0} = c_{1,4,1} = c_{1,3,2} = c_{1,2,3} = c_{1,1,4} = c_{1,0,5} = c_{2,4,0} = c_{2,0,4} = c_{6,0,0} = 0$, $c_{2,3,1} = -c_{2,1,3}$, $c_{3,3,0} = -\frac{1,0}{3}c_{5,1,0}$, $c_{3,2,1} = -c_{3,1,2} - 2c_{4,1,1}$, $c_{3,0,3} = -\frac{1,0}{3}c_{5,0,1}$, $c_{4,2,0} = -5c_{5,1,0}$, $c_{4,0,2} = -5c_{5,0,1}$, donc

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 6$$

et $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 3$, avec $B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ engendré par :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -a_{4,1}(-6Y''f'''g' + 6Y''f'g''' - 4Y'''f''g' + 4Y'''f'g''), \\
\Lambda_2 &= -a_{3,2}(-Y''f'''g' - 3Y''f''g'' + Y''f'g''' - \frac{1}{3}Y'''f'g'' + \frac{1}{6}Y^{(4)}f'g'), \\
\Lambda_3 &= -a_{2,3}(-3Y''f''g'' - Y'''f''g' + \frac{2}{3}Y'''f'g'' + \frac{1}{6}Y^{(4)}f'g').
\end{aligned}$$

2. Si $(\lambda, \nu) = (0, -4)$, alors les constantes $a_{2,3}$ et $a_{1,4}$ sont arbitraires. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{0,5} &= 0, \\ a_{5,0} &= \frac{1,4,2}{45} a_{2,3} - \frac{158}{9} a_{1,4}, \\ a_{4,1} &= \frac{62}{9} a_{2,3} - \frac{3,0,5}{9} a_{1,4}, \\ a_{3,2} &= \frac{1,3}{3} a_{2,3} - \frac{4,0}{3} a_{1,4}. \end{aligned}$$

Donc

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2.$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (-4, 0)$.

3. Si $(\lambda, \nu) = (0, -2)$, alors les constantes $a_{2,3}$, $a_{1,4}$ et $a_{0,5}$ sont arbitraires. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{5,0} &= \frac{3}{5} a_{2,3} - a_{1,4}, \\ a_{4,1} &= -2a_{2,3} - 3a_{1,4}, \\ a_{3,2} &= \frac{7}{3} a_{2,3} - \frac{8}{3} a_{1,4}, \\ a_{0,5} &. \end{aligned}$$

Donc

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (-2, 0)$.

4. Si $(\lambda, \nu) = (0, \nu)$, alors les constantes $a_{2,3}$ et $a_{1,4}$ sont arbitraires. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{0,5} &= 0, \quad a_{3,2} = \frac{1-3\nu}{3} a_{2,3} + \frac{24+16\nu}{3} a_{1,4}, \\ a_{4,1} &= \frac{3\nu^2-4\nu-2}{9} a_{2,3} + \frac{(17\nu+7)(2\nu+3)}{9} a_{1,4}, \\ a_{5,0} &= \frac{-3\nu^2-5\nu+2}{90} a_{2,3} + \frac{(-\nu+7)(2\nu+3)}{90} a_{1,4}, \end{aligned}$$

Poursuite

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (\lambda, 0)$.

5. Si $(\lambda, \nu) = (-1, -1)$, alors les constantes $a_{2,3}$ et $a_{0,5}$ sont arbitraires. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{5,0} &= \frac{1}{1,0} a_{3,2} \\ a_{4,1} &= \frac{1}{2} a_{3,2} \\ a_{2,3} &= 10a_{0,5} \\ a_{1,4} &= 5a_{0,5} \end{aligned}$$

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -2), (-1, -\frac{3}{2}), (-1, -2), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -2), (-2, -\frac{1}{2}), (-2, -1), (-2, -\frac{3}{2})$.

6. Si λ et ν ne sont pas comme ci-dessus, alors l'espace $\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu})$ est de dimension 1.

Par exemple, si $(\lambda, \nu) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, la constante $a_{2,3}$ est arbitraire. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{5,0} &= a_{4,1} = a_{1,4} = a_{0,5} = 0, \\ a_{3,2} &= -a_{2,3}. \end{aligned}$$

(vii) Si $\mu - \lambda - \nu = 6$,

$$\begin{aligned} c(f, g) &= c_{1,6,0}Y'f^{(6)}g + c_{1,5,1}Y'f^{(5)}g' + c_{1,4,2}Y'f^{(4)}g'' + c_{1,3,3}Y'f'''g''' + c_{1,2,4}Y'f''g^{(4)} \\ &+ c_{1,1,5}Y'f'g^{(5)} + c_{1,0,6}Y'fg^{(6)} + c_{2,5,0}Y''f^{(5)}g + c_{2,4,1}Y''f^{(4)}g' + c_{2,3,2}Y''f'''g'' \\ &+ c_{2,2,3}Y''f''g''' + c_{2,1,4}Y''f'g^{(4)} + c_{2,0,5}Y''fg^{(5)} + c_{3,4,0}Y'''f^{(4)}g + c_{3,3,1}Y'''f'''g' \\ &+ c_{3,2,2}Y'''f''g'' + c_{3,1,3}Y'''f'g''' + c_{3,0,4}Y'''fg^{(4)} + c_{4,3,0}Y^{(4)}f'''g + c_{4,2,1}Y^{(4)}f''g' \\ &+ c_{4,1,2}Y^{(4)}fg'' + c_{4,0,3}Y^{(4)}fg''' + c_{5,2,0}Y^{(5)}f''g + c_{5,1,1}Y^{(5)}f'g' + c_{5,0,2}Y^{(5)}fg'' \\ &+ c_{6,1,0}Y^{(6)}f'g + c_{6,0,1}Y^{(6)}fg' + c_{7,0,0}Y^{(7)}fg. \end{aligned}$$

La condition de 1-cocycle implique :

$\mu - \lambda - \nu = 6$ et

$$\begin{aligned} c_{1,6,0}(15 + 6\lambda) + c_{1,5,1}\nu &= 0, \\ c_{1,6,0}(15 + 20\lambda) + c_{1,3,3}\nu &= 0, \\ c_{1,6,0}(1 + 6\lambda) + c_{1,1,5}\nu &= 0, \\ c_{1,5,1}(10 + 5\lambda) + c_{1,4,2}(1 + 2\nu) &= 0, \\ c_{1,5,1}(5 + 10\lambda) + c_{1,2,4}(1 + 4\nu) &= 0, \\ c_{1,5,1}\lambda + c_{1,0,6}(1 + 6\nu) &= 0, \\ c_{1,4,2}(4 + 6\lambda) + c_{1,2,4}(4 + 6\nu) &= 0, \\ c_{1,4,2}\lambda + c_{1,0,6}(6 + 15\nu) &= 0, \\ c_{1,3,3}(1 + 3\lambda) + c_{1,1,5}(10 + 10\nu) &= 0, \\ c_{1,2,4}(1 + 2\lambda) + c_{1,1,5}(10 + 5\nu) &= 0, \\ c_{1,1,5}\lambda + c_{1,0,6}(15 + 6\nu) &= 0, \\ c_{2,5,0}(5 + 10\lambda) + c_{2,2,3}\nu &= 0, \\ c_{2,5,0}\lambda + c_{2,0,5}\nu &= 0, \\ c_{2,4,1}(1 + 4\lambda) + c_{2,1,4}(1 + 4\nu) &= 0, \\ c_{2,3,2}(1 + 3\lambda) + c_{2,1,4}(4 + 6\nu) &= 0, \\ c_{2,2,3}\lambda + c_{2,0,5}(10 + 10\nu) &= 0, \\ c_{3,3,1}(3 + 3\lambda) + c_{3,2,2}(1 + 2\nu) + 2c_{4,2,1} &= 0, \\ c_{3,2,2}(1 + 2\lambda) + c_{3,1,3}(3 + 3\nu) + 2c_{4,1,2} &= 0, \\ c_{4,3,0}(1 + 3\lambda) - c_{3,4,0}(1 + 4\lambda) + (c_{4,1,2} - c_{3,1,3})\nu \\ + 5c_{6,1,0} &= 0, \\ (c_{3,3,1} - c_{4,2,1})\lambda - c_{3,0,4}(1 + 4\nu) + c_{4,0,3}(1 + 3\nu) \\ + 5c_{6,0,1} &= 0, \\ c_{4,2,1}(1 + 2\lambda) + c_{4,1,2}(1 + 2\nu) + 5c_{5,1,1} &= 0, \\ c_{5,2,0}\lambda + c_{5,0,2}\nu - c_{3,4,0}\lambda - c_{3,0,4}\nu + 14c_{7,0,0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{1,6,0}(20 + 15\lambda) + c_{1,4,2}\nu &= 0, \\ c_{1,6,0}(6 + 15\lambda) + c_{1,2,4}\nu &= 0, \\ c_{1,6,0}\lambda + c_{1,0,6}\nu &= 0, \\ c_{1,5,1}(10 + 10\lambda) + c_{1,3,3}(1 + 3\nu) &= 0, \\ c_{1,5,1}(1 + 5\lambda) + c_{1,1,5}(1 + 5\nu) &= 0, \\ c_{1,4,2}(6 + 4\lambda) + c_{1,3,3}(3 + 3\nu) &= 0, \\ c_{1,4,2}(1 + 4\lambda) + c_{1,1,5}(5 + 10\nu) &= 0, \\ c_{1,3,3}(3 + 3\lambda) + c_{1,2,4}(6 + 4\nu) &= 0, \\ c_{1,3,3}\lambda + c_{1,0,6}(15 + 20\nu) &= 0, \\ c_{1,2,4}\lambda + c_{1,0,6}(20 + 15\nu) &= 0, \\ c_{2,5,0}(10 + 10\lambda) + c_{2,3,2}\nu &= 0, \\ c_{2,5,0}(1 + 5\lambda) + c_{2,1,4}\nu &= 0, \\ c_{2,4,1}(4 + 6\lambda) + c_{2,2,3}(1 + 3\nu) &= 0, \\ c_{2,4,1}\lambda + c_{2,0,5}(1 + 5\nu) &= 0, \\ c_{2,3,2}\lambda + c_{2,0,5}(5 + 10\nu) &= 0, \\ c_{3,4,0}(6 + 4\lambda) + c_{3,3,1}\nu + 2c_{4,3,0} &= 0, \\ c_{6,1,0}\lambda + c_{6,0,1}\nu + 14c_{7,0,0} &= 0, \\ c_{3,1,3}\lambda + c_{3,0,4}(6 + 4\nu) + 2c_{4,0,3} &= 0, \\ c_{4,3,0}(3 + 3\lambda) + c_{4,2,1}\nu + 5c_{4,0,3} &= 0, \\ c_{4,1,2}\lambda + c_{4,0,3}(3 + 3\nu) + 5c_{5,0,2} &= 0, \\ c_{5,2,0}(1 + 2\lambda) + c_{5,1,1}\nu + 9c_{6,1,0} &= 0, \\ c_{5,1,1}\lambda + c_{5,0,2}(1 + 2\nu) + 9c_{6,0,1} &= 0. \end{aligned}$$

L'espace des solutions du système ci-dessus est de dimension 4 pour $(\lambda, \nu) = (0, 0), (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, 0), (0, -\frac{5}{2}), (0, \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}), (\frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}, 0), (\frac{-5 + \sqrt{19}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{19}}{2}), (\frac{-5 - \sqrt{19}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{19}}{2})$, et de dimension 3 sinon.

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle. On montre que

$$\begin{aligned}
L_Y \frac{d}{dx} A_6^{\lambda, \nu} = & - (a_{6,0}(15 + 6\lambda) + a_{5,1}\nu)Y''f^{(5)}g - (a_{5,1}(10 + 5\lambda) + a_{4,2}(1 + 2\nu))Y''f^{(4)}g' \\
& - (a_{4,2}(6 + 4\lambda) + a_{3,3}(3 + 3\nu))Y''f'''g'' - (a_{3,3}(3 + 3\lambda) + a_{2,4}(6 + 4\nu))Y''f''g''' \\
& - (a_{2,4}(6 + 4\lambda) + a_{1,5}(10 + 5\nu))Y''f'g^{(4)} - (a_{1,5}\lambda + a_{0,6}(15 + 6\nu))Y''fg^{(5)} \\
& - (a_{6,0}(20 + 15\lambda) + a_{4,2}\nu)Y'''f^{(4)}g - (a_{5,1}(10 + 10\lambda) + a_{3,3}(1 + 3\nu))Y'''f'''g' \\
& - (a_{4,2}(4 + 6\lambda) + a_{2,4}(4 + 6\nu))Y'''f''g'' - (a_{3,3}(1 + 3\lambda) + a_{1,5}(10 + 10\nu))Y'''f'g''' \\
& - (a_{2,4}\lambda + a_{0,6}(20 + 15\nu))Y'''fg^{(4)} - (a_{3,3}(15 + 20\lambda) + a_{6,0}\nu)Y^{(4)}f'''g \\
& - (a_{5,1}(5 + 10\lambda) + a_{2,4}(1 + 4\nu))Y^{(4)}f''g' - (a_{1,5}(1 + 4\lambda) + a_{4,2}(5 + 10\nu))Y^{(4)}f'g'' \\
& - (a_{3,3}\lambda + a_{0,6}(15 + 20\nu))Y^{(4)}fg''' - (a_{2,4}(6 + 15\lambda) + a_{6,0}\nu)Y^{(5)}f''g \\
& - (a_{1,5}(1 + 5\lambda) + a_{5,1}(1 + 5\nu))Y^{(5)}f'g' - (a_{4,2}\lambda + a_{0,6}(6 + 15\nu))Y^{(5)}fg'' \\
& - (a_{1,5}(1 + 6\lambda) + a_{6,0}\nu)Y^{(6)}f'g - (a_{5,1}\lambda + a_{0,6}(1 + 6\nu))Y^{(6)}fg' \\
& - (a_{6,0}\lambda + a_{0,6}\nu)Y^{(7)}fg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1. \text{ Si } (\lambda, \nu) = (0, \frac{-5 - \sqrt{19}}{2}), \text{ alors } c_{1,6,0} = c_{1,5,1} = c_{1,4,2} = c_{1,3,3} = c_{1,2,4} = c_{1,1,5} = c_{1,0,6} = \\
c_{2,5,0} = c_{2,4,1} = c_{2,3,2} = c_{2,2,3} = c_{2,1,4} = c_{2,0,5} = 0, \\
c_{3,4,0} = (\frac{101+23\sqrt{19}}{1,0})c_{3,1,3} - \frac{5+\sqrt{19}}{1,5}c_{4,2,1} + \frac{25+6\sqrt{19}}{1,5}c_{4,1,2}, \\
c_{6,1,0} = (\frac{38+9\sqrt{19}}{100})c_{3,1,3} - \frac{5+\sqrt{19}}{5,0}c_{4,2,1} + \frac{40+9\sqrt{19}}{75}c_{4,1,2}, \\
c_{5,2,0} = -(\frac{9(38+9\sqrt{19})}{100})c_{3,1,3} + \frac{2(5+\sqrt{19})}{2,5}c_{4,2,1} - \frac{9(5+\sqrt{19})}{5,0}c_{4,1,2}, \\
c_{5,2,0} = \frac{3(38+9\sqrt{19})}{2,0}c_{3,1,3} + \frac{(5+\sqrt{19})}{3,0}c_{4,2,1} + \frac{3(5+\sqrt{19})}{1,0}c_{4,1,2}, \\
c_{7,0,0} = \frac{1}{840}(3 + \sqrt{19})(4 + \sqrt{19})(5 + \sqrt{19})c_{4,0,3}, \\
c_{3,3,1} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{19})(4 + \sqrt{19})c_{3,1,3} - \frac{2}{3}c_{4,2,1} + \frac{2(4+\sqrt{19})}{3}c_{4,1,2}, \\
c_{3,2,2} = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{19})c_{3,1,3} + 2c_{4,1,2}, \quad c_{5,1,1} = -\frac{1}{5}c_{4,2,1} - \frac{1}{5}(-4 - \sqrt{19})c_{4,1,2}, \\
c_{6,0,1} = \frac{1}{3,0}(3 + \sqrt{19})(4 + \sqrt{19})c_{4,0,3}, \quad c_{5,0,2} = \frac{3}{1,0}(3 + \sqrt{19})c_{4,0,3}, \\
c_{3,0,4} = \frac{1}{(2+\sqrt{19})}c_{4,0,3}, \text{ donc}
\end{aligned}$$

$$\dim Z_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 4$$

et

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 1,$$

$$\text{où } a_{0,6} = 0, \quad a_{1,5} = -\frac{4}{45}(-35 + 8\sqrt{19})a_{5,1}, \quad a_{2,4} = 2(-13 + 3\sqrt{19})a_{5,1}, \quad a_{3,3} = -\frac{4}{3}(-31 + 7\sqrt{19})a_{5,1}, \quad a_{4,2} = \frac{1,0}{3}(-4 + \sqrt{19})a_{5,1}, \quad a_{6,0} = -\frac{1}{3,0}(5 + \sqrt{19})a_{5,1}.$$

Ces résultats sont encore valables pour $(\lambda, \nu) = (0, \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}), (\frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}, 0), (\frac{-5 + \sqrt{19}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{19}}{2}), (\frac{-5 - \sqrt{19}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{19}}{2})$.

2. Si $(\lambda, \nu) = (-1, -1)$, alors les constantes $a_{2,3}$ et $a_{0,5}$ sont arbitraires. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{6,0} &= a_{0,6} = 0, \\ a_{5,1} &= \left(\frac{1}{4}a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{2,4}\right), \\ a_{4,2} &= (-a_{3,3} - a_{2,4}), \\ a_{1,5} &= \left(\frac{3}{4,0}a_{3,3} + \frac{1}{2,0}a_{2,4}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2.$$

Les résultats sont vérifiés pour $(\lambda, \nu) = (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, 0), (0, -\frac{5}{2})$.

3. Si $(\lambda, \nu) = (-1, -1)$, alors les constantes $a_{3,3}$ et $a_{2,4}$ sont arbitraires. D'autre part, $a_{1,5} = 6a_{0,6}$, $a_{2,4} = \frac{5}{2}a_{5,1}$, $a_{3,3} = \frac{1,0}{3}a_{5,1}$, $a_{4,2} = \frac{5}{2}a_{5,1}$, $a_{6,0} = \frac{1}{6}a_{5,1}$. Par suite

$$\dim B_{\text{diff}}^1(\text{Vect}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_{\lambda, \nu; \mu}) = 2$$

Les résultats sont vérifiés pour $(\lambda, \nu) = (-2, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}), (-1, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (-1, -2), (-2, -1), (-\frac{5}{2}, -1), (-1, -\frac{5}{2}), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-2, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -2), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), (-2, -2), (-2, -\frac{5}{2})$ et $(-\frac{5}{2}, -2)$.

4. Si $(\lambda, \nu) = (0, -\frac{1}{4})$, alors la constante $a_{0,6}$ est arbitraire. D'autre part

$$\begin{aligned} a_{0,6} &= 0, & a_{6,0} &= \frac{1}{6,0}a_{5,1}, & a_{5,1} &= -\frac{1}{2,0}a_{4,2}, \\ a_{4,2} &= -\frac{3}{8}a_{3,3} & a_{3,3} &= -\frac{5}{3}a_{2,4}, & a_{2,4} &= -\frac{35}{4}a_{1,5} \end{aligned}$$

Les résultats sont valables sinon.

(viii) Si $\mu - \lambda - \nu = 7$,

$$\begin{aligned} c(f, g) &= c_{1,7,0}Y'f^{(7)}g + c_{1,6,1}Y'f^{(6)}g' + c_{1,5,2}Y'f^{(5)}g'' + c_{1,4,3}Y'f^{(4)}g''' + c_{1,3,4}Y'f'''g^{(4)} \\ &+ c_{1,2,5}Y'f''g^{(5)} + c_{1,1,6}Y'f'g^{(6)} + c_{1,0,7}Y'fg^{(7)} + c_{2,6,0}Y''f^{(6)}g + c_{2,5,1}Y''f^{(5)}g' \\ &+ c_{2,4,2}Y''f^{(4)}g'' + c_{2,3,3}Y''f'''g''' + c_{2,2,4}Y''f''g^{(4)} + c_{2,1,5}Y''f'g^{(5)} + c_{2,0,6}Y''fg^{(6)} \\ &+ c_{3,5,0}Y'''f^{(5)}g + c_{3,4,1}Y'''f^{(4)}g' + c_{3,3,2}Y'''f'''g'' + c_{3,2,3}Y'''f''g''' + c_{3,1,4}Y'''f'g^{(4)} \\ &+ c_{3,0,5}Y'''fg^{(5)} + c_{4,4,0}Y^{(4)}f^{(4)}g + c_{4,3,1}Y^{(4)}f'''g' + c_{4,2,2}Y^{(4)}f''g'' + c_{4,1,3}Y^{(4)}fg''' \\ &+ c_{4,0,4}Y^{(4)}fg''' + c_{5,3,0}Y^{(5)}f''g + c_{5,2,1}Y^{(5)}f'g' + c_{5,1,2}Y^{(5)}fg'' + c_{5,0,3}Y^{(5)}fg''' \\ &+ c_{6,2,0}Y^{(6)}f''g + c_{6,1,1}Y^{(6)}f'g' + c_{6,0,2}Y^{(6)}fg'' \\ &+ c_{7,1,0}Y^{(7)}f'g + c_{7,0,1}Y^{(7)}fg' + c_{8,0,0}Y^{(8)}fg. \end{aligned}$$

La condition de 1-cocycle ci-dessus s'écrit : $\mu - \lambda - \nu = 6$ et

$$\begin{aligned}
c_{1,7,0}(21 + 7\lambda) + c_{1,6,1}\nu &= 0, & c_{1,7,0}(35 + 21\lambda) + c_{1,5,2}\nu &= 0, \\
c_{1,7,0}(35 + 355\lambda) + c_{1,4,3}\nu &= 0, & c_{1,7,0}(21 + 35\lambda) + c_{1,3,4}\nu &= 0, \\
c_{1,7,0}(7 + 21\lambda) + c_{1,2,5}\nu &= 0, & c_{1,7,0}(1 + 7\lambda) + c_{1,1,6}\nu &= 0, \\
c_{1,7,0}\lambda + c_{1,0,7}\nu &= 0, & c_{1,6,1}(15 + 6\lambda) + c_{1,5,2}(1 + 2\nu) &= 0, \\
c_{1,6,1}(20 + 15\lambda) + c_{1,4,3}(1 + 3\nu) &= 0, & c_{1,6,1}(15 + 20\lambda) + c_{1,3,4}(1 + 4\nu) &= 0, \\
c_{1,6,1}(6 + 15\lambda) + c_{1,2,5}(1 + 5\nu) &= 0, & c_{1,6,1}(1 + 6\lambda) + c_{1,1,6}(1 + 6\nu) &= 0, \\
c_{1,6,1}\lambda + c_{1,0,7}(1 + 7\nu) &= 0, & c_{1,5,2}(10 + 5\lambda) + c_{1,4,3}(3 + 3\nu) &= 0, \\
c_{1,5,2}(10 + 10\lambda) + c_{1,3,4}(4 + 6\nu) &= 0, & c_{1,5,2}(5 + 10\lambda) + c_{1,2,5}(5 + 10\nu) &= 0, \\
c_{1,5,2}(1 + 5\lambda) + c_{1,1,6}(6 + 15\nu) &= 0, & c_{1,5,2}\lambda + c_{1,0,7}(7 + 21\nu) &= 0, \\
c_{1,4,3}(6 + 4\lambda) + c_{1,3,4}(6 + 4\nu) &= 0, & c_{1,4,3}(4 + 6\lambda) + c_{1,2,5}(10 + 10\nu) &= 0, \\
c_{1,4,3}(1 + 4\lambda) + c_{1,1,6}(15 + 20\nu) &= 0, & c_{1,4,3}\lambda + c_{1,0,7}(21 + 35\nu) &= 0, \\
c_{1,3,4}(3 + 3\lambda) + c_{1,2,5}(10 + 5\nu) &= 0, & c_{1,3,4}(1 + 3\lambda) + c_{1,1,6}(20 + 15\nu) &= 0, \\
c_{1,3,4}\lambda + c_{1,0,7}(35 + 35\nu) &= 0, & c_{1,2,5}(1 + 2\lambda) + c_{1,1,6}(15 + 6\nu) &= 0, \\
c_{1,2,5}\lambda + c_{1,0,7}(35 + 21\nu) &= 0, & c_{1,1,6}\lambda + c_{1,0,7}(21 + 7\nu) &= 0,
\end{aligned}$$

$$c_{1,7,0} = c_{1,6,1} = c_{1,5,2} = c_{1,4,3} = c_{1,3,4} = c_{1,2,5} = c_{1,1,6} = c_{1,0,7} = 0, \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

$$\begin{aligned}
c_{2,6,0}(20 + 15\lambda) + c_{2,4,2}\nu &= 0, & c_{2,6,0}(15 + 20\lambda) + c_{2,3,3}\nu &= 0, \\
c_{2,6,0}(6 + 15\lambda) + c_{2,2,4}\nu &= 0, & c_{2,6,0}(1 + 6\lambda) + c_{2,1,5}\nu &= 0, \\
c_{2,6,0}\lambda + c_{2,0,6}\nu &= 0, & c_{2,5,1}(10 + 10\lambda) + c_{2,3,3}(1 + 3\nu) &= 0, \\
c_{2,5,1}(5 + 10\lambda) + c_{2,2,4}(1 + 4\nu) &= 0, & c_{2,5,1}(1 + 5\lambda) + c_{2,1,5}(1 + 5\nu) &= 0, \\
c_{2,5,1}\lambda + c_{2,0,6}(1 + 6\nu) &= 0, & c_{2,4,2}(4 + 6\lambda) + c_{2,2,4}(4 + 6\nu) &= 0, \\
c_{2,4,2}(1 + 4\lambda) + c_{2,1,5}(5 + 10\nu) &= 0, & c_{2,4,2}\lambda + c_{2,0,6}(6 + 15\nu) &= 0, \\
c_{2,3,3}(1 + 3\lambda) + c_{2,1,5}(10 + 10\nu) &= 0, & c_{2,3,3}\lambda + c_{2,0,6}(15 + 20\nu) &= 0, \\
c_{2,2,4}\lambda + c_{2,0,6}(20 + 15\nu) &= 0, & &
\end{aligned}$$

$$c_{2,6,0} = c_{2,5,1} = c_{2,4,2} = c_{2,3,3} = c_{2,2,4} = c_{2,1,5} = c_{2,0,6} = 0, \quad \text{pour tout } \lambda \text{ et } \nu.$$

$$\begin{aligned}
c_{3,5,0}(10 + 5\lambda) + c_{3,4,1}\nu + 2c_{4,4,0} &= 0, & c_{3,5,0}(5 + 10\lambda) + c_{3,2,3}\nu &= 0, \\
c_{3,5,0}(1 + 5\lambda) + c_{3,1,4}\nu &= 0, & c_{3,5,0}\lambda + c_{3,0,5}\nu &= 0, \\
c_{3,4,1}(6 + 4\lambda) + c_{3,3,2}(1 + 2\nu) + 2c_{4,3,1} &= 0, & c_{3,4,1}(1 + 4\lambda) + c_{3,1,4}(1 + 4\nu) &= 0, \\
c_{3,4,1}\lambda + c_{3,0,5}(1 + 5\nu) &= 0, & c_{3,3,2}(3 + 3\lambda) + c_{3,2,3}(3 + 3\nu) + 2c_{4,2,2} &= 0, \\
c_{3,3,2}\lambda + c_{3,0,5}(5 + 10\nu) &= 0, & c_{3,2,3}(1 + 2\lambda) + c_{3,1,4}(6 + 4\nu) + 2c_{4,1,3} &= 0, \\
c_{3,1,4}\lambda + c_{3,0,5}(10 + 5\nu) + 2c_{4,0,4} &= 0, & & \\
c_{4,4,0}(6 + 4\lambda) + c_{4,3,1}\nu + 5c_{5,3,0} &= 0, & c_{4,4,0}(4 + 6\lambda) + c_{4,2,2}\nu + 5c_{6,2,0} &= 0, \\
c_{4,4,0}\lambda + c_{4,1,3}\nu &= 0, & c_{4,3,1}(3 + 3\lambda) + c_{4,2,2}(1 + 2\nu) + 5c_{5,2,1} &= 0, \\
c_{4,3,1}(1 + 3\lambda) + c_{4,1,3}(1 + 3\nu) + 5c_{6,1,1} &= 0, & c_{4,2,2}(1 + 2\lambda) + c_{4,1,3}(3 + 3\nu) + 5c_{5,1,2} &= 0, \\
c_{4,2,2}\lambda + c_{4,0,4}(4 + 6\nu) + 5c_{6,0,2} &= 0, & c_{4,1,3}\lambda + c_{4,0,4}(6 + 4\nu) + 5c_{5,0,3} &= 0, \\
c_{5,3,0}\lambda + c_{5,0,3}\nu + 14c_{8,0,0} &= 0, & c_{5,3,0}(3 + 3\lambda) + c_{5,2,1}\nu + 9c_{6,2,0} &= 0, \\
c_{5,3,0}(1 + 3\lambda) + c_{5,1,2}\nu + 14c_{7,1,0} &= 0, & c_{5,2,1}(1 + 2\lambda) + c_{5,1,2}(1 + 2\nu) + 9c_{6,1,1} &= 0, \\
c_{5,2,1}\lambda + c_{5,0,3}(1 + 3\nu) + 14c_{7,0,1} &= 0, & c_{5,1,2}\lambda + c_{5,0,3}(3 + 3\nu) + 9c_{6,0,2} &= 0, \\
c_{6,2,0}(1 + 2\lambda) + c_{6,1,1}\nu + 14c_{7,1,0} &= 0, & c_{6,2,0}\lambda + c_{6,0,2}\nu + 28c_{8,0,0} &= 0, \\
c_{6,1,1}\lambda + c_{6,0,2}(1 + 2\nu) + 14c_{7,0,1} &= 0, & c_{7,1,0}\lambda + c_{7,0,1}\nu + 20c_{8,0,0} &= 0.
\end{aligned}$$

Étudions la trivialité de ce 1-cocycle :

$$\begin{aligned}
L_{Y \frac{d}{dx}} A_7^{\lambda, \nu} = & - (a_{7,0}(21 + 7\lambda) + a_{6,1}\nu)Y''f^{(6)}g - (a_{6,1}(15 + 6\lambda) + a_{5,2}(1 + 2\nu))Y''f^{(5)}g' \\
& - (a_{5,2}(10 + 5\lambda) + a_{4,3}(3 + 3\nu))Y''f^{(4)}g'' - (a_{4,3}(6 + 4\lambda) + a_{3,4}(6 + 4\nu))Y''f'''g''' \\
& - (a_{3,4}(3 + 3\lambda) + a_{2,5}(10 + 5\nu))Y''f''g^{(4)} - (a_{2,5}(1 + 2\lambda) + a_{1,6}(15 + 6\nu))Y''f'g^{(5)} \\
& - (a_{1,6}\lambda + a_{0,7}(21 + 7\nu))Y''fg^{(6)} - (a_{7,0}(35 + 21\lambda) + a_{5,2}\nu)Y'''f^{(5)}g \\
& - (a_{6,1}(20 + 15\lambda) + a_{4,3}(1 + 3\nu))Y'''f^{(4)}g' - (a_{5,2}(10 + 10\lambda) + a_{3,4}(4 + 6\nu))Y'''f'''g'' \\
& - (a_{4,3}(4 + 6\lambda) + a_{2,5}(10 + 10\nu))Y'''f''g''' - (a_{3,4}(1 + 3\lambda) + a_{1,6}(20 + 15\nu))Y'''f'g^{(4)} \\
& - (a_{2,5}\lambda + a_{0,7}(35 + 21\nu))Y'''fg^{(5)} - (a_{7,0}(35 + 35\lambda) + a_{4,3}\nu)Y^{(4)}f(4)g \\
& - (a_{6,1}(15 + 20\lambda) + a_{3,4}(1 + 4\nu))Y^{(4)}f'''g' - (a_{5,2}(5 + 10\lambda) + a_{2,5}(5 + 10\nu))Y^{(4)}f''g'' \\
& - (a_{4,3}(1 + 4\lambda) + a_{1,6}(15 + 20\nu))Y^{(4)}f'g''' - (a_{3,4}\lambda + a_{0,7}(35 + 35\nu))Y^{(4)}fg^{(4)} \\
& - (a_{7,0}(21 + 35\lambda) + a_{3,4}\nu)Y^{(5)}f'''g - (a_{6,1}(6 + 15\lambda) + a_{2,5}(1 + 5\nu))Y^{(5)}f''g' \\
& - (a_{5,2}(1 + 5\lambda) + a_{1,6}(6 + 15\nu))Y^{(5)}f'g'' - (a_{4,3}\lambda + a_{0,7}(21 + 35\nu))Y^{(5)}fg''' \\
& - (a_{7,0}(7 + 21\lambda) + a_{2,5}\nu)Y^{(6)}f''g - (a_{6,1}(1 + 6\lambda) + a_{1,6}(1 + 6\nu))Y^{(6)}f'g' \\
& - (a_{5,2}\lambda + a_{0,7}(7 + 21\nu))Y^{(6)}fg'' - (a_{7,0}(1 + 7\lambda) + a_{1,6}\nu)Y^{(7)}f'g \\
& - (a_{6,1}(1 + 7\lambda) + a_{0,7}\nu)Y^{(7)}fg' - (a_{7,0}\lambda + a_{0,7}\nu)Y^{(8)}fg
\end{aligned}$$

La preuve est la même que dans la section précédente. Nous soulignons simplement que l'espace des solutions du 1-cocycle est de dimension 4 pour $(\lambda, \nu) = (0, -3), (-3, 0)$ et $(-3, -3)$, de dimension 3 pour $(\lambda, \nu) = (\frac{-5+\sqrt{19}}{2}, \frac{-5+\sqrt{19}}{2}), (-2, -2), (0, \nu), (\lambda, 0), (\lambda, -6 - \lambda), (\sqrt{19}-1, \frac{-\sqrt{19}-5}{2}), (\frac{-\sqrt{19}-5}{2}, \sqrt{19}-1), (-\sqrt{19}-1, \frac{\sqrt{19}-5}{2}), (\frac{\sqrt{19}-5}{2}, -\sqrt{19}-1), (-3, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -3), (-\frac{1}{2}, -3), (-3, -\frac{1}{2}), (-2, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -2), (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$, et dimension 2 sinon.

(ix) Si $k \geq 8$

Pour $k \geq 8$, le nombre de variables générant un 1-cocycle est inférieur au nombre d'équations. Par exemple, la condition 1-cocycle pour $k = 8$ implique 45 variables pour 90 équations. Pour λ et ν , le nombre d'équations générées générera un espace unidimensionnel, ce qui donnera une classe de cohomologie unique. Cette classe de cohomologie est en effet triviale car l'expression $L_{X \frac{d}{dx}} A_k^{\lambda, \nu}$ est aussi un 1-cocycle.

Chapitre 3

Déformation $\mathfrak{h}$ –relative des opérateurs pseudodifférentiels

3.1 Introduction

La théorie de la déformation joue un rôle crucial dans toutes les branches des mathématiques et de la physique. En physique, la théorie mathématique des déformations s'est révélée être un outil puissant pour modéliser la réalité physique. Nous étudions quelques questions liées aux déformations de certains $\mathfrak{g}$ -modules. Bien sûr, si $M = \text{End}(V)$ où V est un $\mathfrak{g}$ -module, alors, selon Nijenhuis-Richardson, l'espace $H^1(\mathfrak{g}; \text{End}(V))$ classe les déformations infinitésimales d'un $\mathfrak{g}$ -module V et les obstacles à l'intégrabilité d'une déformation infinitésimale donnée de V sont des éléments de $H^2(\mathfrak{g}; \text{End}(V))$.

Plus généralement, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors la cohomologie $\mathfrak{h}$ -relative $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \text{End}(V))$ mesure les déformations infinitésimales $\mathfrak{h}$ -triviales qui deviennent triviales une fois que l'action est limitée à $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}$ - *triviales déformations*), tandis que les obstacles à l'extension d'une déformation infinitésimale $\mathfrak{h}$ -triviale à une déformation formelle sont liés à $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \text{End}(V))$.

Les déformations des algèbres de Lie avec base et les déformations verselles ont déjà été considérées par Fialowski en 1986 [31]. En 1988, Fialowski [32] a ajouté des déformations dont la base est une algèbre locale complète. De plus, dans [32], la notion de déformation miniverselle (ou verselle formelle) a été introduite en général. En cohomologie, sous certaines conditions cohomologiques, il existe une déformation verselle. Plus tard, Fialowski et Fuchs, utilisant ce cadre, donnèrent une construction pour une déformation verselle.

Maintenant, introduisons quelques concepts fondamentaux et quelques notations. L'espace des densités pondérés en poids μ sur $\mathbb{R}$ (ou μ -densités en abrégé), est l'espace des sections du faisceau de lignes $(T^*S^1)^{\otimes \mu}$. L'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs $X_h = h \frac{d}{dx}$ où $h \in C^\infty(S^1)$ agit par la *dérivée de Lie*. Alternativement, cette action peut être écrite comme suit :

$$X_g \cdot (f dx^\mu) = L_{X_g}^\mu(f) dx^\mu \quad \text{avec} \quad L_{X_g}^\mu(f) = g f' + \mu g' f,$$

où f', h' sont $\frac{df}{dx}, \frac{dh}{dx}$.

On considère les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ et $\mathfrak{aff}(1)$ qui peuvent être considérées comme des sous-algèbres de Lie de $\text{Vect}(S^1)$:

$$\mathfrak{sl}(2) = \text{Span}(X_1, X_x, X_{x^2}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{aff}(1) = \text{Span}(X_1, X_x).$$

Bien sûr, $\mathfrak{aff}(1)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}(2)$. On obtient également des familles de dimensions infinies $\mathfrak{sl}(2)$ -modules et $\mathfrak{aff}(1)$ -modules toujours notées $\mathcal{F}_\lambda$.

L'étude des déformations multiparamétriques du plongement standard π de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs lisses sur S^1 dans l'algèbre de Lie des symboles pseudo-différentiels $\Psi\mathcal{DO}$ définis par $\pi(f(x)\partial_x) = f(x)\xi$ a été réalisée par Ovsienko et Roger [54, 55]. Ils ont essentiellement étudié les déformations polynomiales de la forme suivante

$$\pi(c) = \pi + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k(c) \xi^k,$$

où $\pi_k(c) : \text{Vect}(S^1) \rightarrow C^\infty_\mathbb{C}(S^1)$ satisfait $\pi_k(0) = 0$ et $\pi_k \equiv 0$ pour k suffisamment grand. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas des $\mathfrak{h}$ -triviales déformations, où $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2)$ ou $\mathfrak{aff}(1)$. Plus précisément, nous investiguons le résultat de la cohomologie $\mathfrak{h}$ -relative afin de déduire la condition d'intégrabilité pour la déformation infinitésimale.

3.2 Géométrie de l'espace S^1

3.2.1 L'espace des densités tensorielles sur S^1

L'algèbre de Lie, $\text{Vect}(S^1)$, des champs de vecteurs sur S^1 agit naturellement, par la dérivée de Lie, sur l'espace

$$\mathcal{F}_\lambda = \left\{ f dx^\lambda : f \in C^\infty(S^1) \right\},$$

des densités pondérées de degré λ . La dérivée de Lie L_X^λ de l'espace $\mathcal{F}_\lambda$ le long du champ de vecteur $X \frac{d}{dx}$ est définie par

$$L_X^\lambda = X \partial_x + \lambda X', \tag{3.2.1}$$

où $X, f \in C^\infty(S^1)$ et $X' := \frac{dX}{dx}$. Plus précisément, pour tous $f dx^\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$, on a

$$L_X^\lambda(f dx^\lambda) = (X f' + \lambda f X') dx^\lambda$$

3.2.2 Plongement naturel

L'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs sur une variété S^1 a un plongement naturel dans l'algèbre de Lie de Poisson des fonctions sur T^*S^1 . Il est défini par l'action standard de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le fibré cotangent selon la formule explicite suivante :

$$\pi(X_f) = f \xi. \tag{3.2.2}$$

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier les déformations $\mathfrak{aff}(1)$ -triviales de ce plongement standard (3.2.2).

3.2.3 Algèbre de Lie de Poisson des symboles formels

Déformations à l'intérieur de $C^\infty(T^*S^1)$

Considérons l'algèbre de Lie de Poisson des fonctions lisses sur T^*S^1 . Dans ce cas, le problème de la déformation du plongement (3.2.2) a une solution élémentaire. Le plongement de $Vect(S^1)$ dans $C^\infty(T^*S^1)$ (3.2.2) a une déformation non triviale unique (bien connue). En effet, étant donnée une forme volume arbitraire sur S^1 , l'expression :

$$\pi_\lambda(X) = X\xi + \lambda \operatorname{div} X,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ définit un plongement de $Vect(S^1)$ dans $C^\infty(T^*S^1)$. L'application linéaire : $X \rightarrow \operatorname{div} X$ est le 1-cocycle non trivial unique sur $Vect(S^1)$ avec les valeurs $C^\infty(S^1) \subset C^\infty(T^*S^1)$.

Définition : Deux algèbres de Lie de Poisson de symboles formels

Considérons dans ce qui suit l'algèbre de Lie de Poisson sur le fibré cotangent avec section nulle enlevée, $\dot{T}^*S^1 = T^*S^1 \setminus S^1$:

- (i) L'algèbre de Lie P des fonctions sur $\dot{T}^*S^1$;
- (ii) L'algèbre de Lie $\mathcal{P}$ de la série formelle de Laurent sur $\dot{T}^*S^1$.

Les algèbres de Lie P et $\mathcal{P}$ peuvent être interprétées comme les limites classiques de l'algèbre des symboles formels des opérateurs pseudo-différentiels sur S^1 . Dans les deux cas, le crochet de Poisson est défini par la formule habituelle ;

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \xi}. \quad (3.2.3)$$

En tant qu'espaces vectoriels, les algèbres de Lie P et $\mathcal{P}$ ont la forme suivante :

$$P = C^\infty(S^1) \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = C^\infty(S^1) \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$$

où $\mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$ est l'espace des séries de Laurent en une indéterminée formelle. Les éléments des deux algèbres : P et $\mathcal{P}$ peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$F(x, \xi, \xi^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi^k f_k(x)$$

où les coefficients $f_k(x)$ sont des fonctions périodiques : $f_k(x + 2\pi i) = f_k(x)$. Dans le cas de l'algèbre P , on suppose que les coefficients $f_k \equiv 0$, pour $|k|$ suffisamment grand ; pour $\mathcal{P}$ la condition est : $f_k \equiv 0$ si k est suffisamment grand.

Lemme 3.2.1. [55] *L'algèbre de Lie $\mathcal{P}$ en tant que $Vect(S^1)$ -module est décomposée comme suit :*

$$\mathcal{P} = \oplus_{m \geq 0} \mathcal{F}_m \oplus \prod_{m < 0} \mathcal{F}_m. \quad (3.2.4)$$

Théorème 3.2.1. (*Ovsienko-Roger [55]*)

L'espace $H^1(\text{Vect}(S^1), \mathcal{P})$ a la structure suivante :

$$H^1(\text{Vect}(S^1), \mathcal{P}) = \mathbb{R}^4.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie sont les suivants :

$$\begin{cases} c_0(f\partial) = f \\ C_0(f\partial) = f' \\ C_1(f\partial) = f''\xi^{-1} \\ C_2(f\partial) = f'''\xi^{-2}. \end{cases}$$

3.2.4 Opérateurs pseudodifférentiels sur S^1

À chaque opérateur pseudodifférentiel F sur S^1 on associe son symbole [25, 55]. Soit $\Psi\mathcal{DO}$ l'espace des symboles pseudodifférentiels sur S^1 [54, 55]. L'ordre de $\Psi\mathcal{DO}$ est défini comme étant

$$\text{ord}(F) = \{\sup k \in \mathbb{Z} | f_k(x) \neq 0\} \text{ pour tout } F(x, \xi, \xi^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi^k f_k(x) \in \Psi\mathcal{DO},$$

où $f_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $f_k = 0$ pour k suffisamment grand. Au moyen des deux dérivations naturelles sur $\Psi\mathcal{DO}$

$$\partial_\xi : \sum_k f_k \xi^k \mapsto \sum_k k f_k \xi^{k-1} \text{ et } \partial_x : \sum_k f_k \xi^k \mapsto \sum_k f'_k \xi^k \quad (3.2.5)$$

on définit un crochet de Poisson naturel :

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial \xi} \text{ pour tout } F, G \in \Psi\mathcal{DO}. \quad (3.2.6)$$

Sur l'espace des symboles pseudodifférentiels, une structure d'algèbre associative est définie par la règle [54]

$$F \circ G = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} : \frac{\partial^k F}{\partial \xi^k} \frac{\partial^k G}{\partial x^k} : \quad (3.2.7)$$

où $: \cdot : \cdot :$ représente " l'ordre normal " défini par

$$: f(x) \xi^k g(x) \xi^\ell := f(x) g(x) \xi^{k+\ell}. \quad (3.2.8)$$

C'est une généralisation naturelle du produit de Wick. Comme d'habitude, nous pouvons également définir le crochet de Lie associée au $\circ$ -produit par $[F, G] = F \circ G - G \circ F$. Nous désignons alors l'algèbre de Lie avec cette structure par $\Psi\mathcal{DO}_L$ pour la distinguer de la structure d'algèbre de Lie de Poisson.

On considère alors la famille des lois associatives sur $\Psi\mathcal{DO}$ en fonction d'un paramètre $h \in]0, 1]$:

$$A \circ_h B = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} (\partial_\xi^n A) (\partial_x^n B).$$

On note $\Psi\mathcal{DO}_h$ l'algèbre associative des opérateurs pseudodifférentiels sur S^1 équipée de la multiplication $\circ_h$. Il est clair que toutes les algèbres associatives $\Psi\mathcal{DO}_h$ sont isomorphes entre elles. Pour le commutateur $[A, B]_h := A \circ_h B - B \circ_h A$, on a :

$$[A, B]_h = \{A, B\} + O(h),$$

et donc $\lim_{h \rightarrow 0} [A, B]_h = \{A, B\}$ où nous identifions $\mathcal{P}$ avec $\Psi\mathcal{DO}$ comme espaces vectoriels. De ce fait, l'algèbre de Lie $\Psi\mathcal{DO}$ se contracte avec l'algèbre de Lie de Poisson $\mathcal{P}$.

Théorème 3.2.2. (*Ovsienko-Roger[54]*)

L'espace $H^1(\text{Vect}(S^1), \Psi\mathcal{DO})$ a la structure suivante :

$$H^1(\text{Vect}(S^1), \Psi\mathcal{DO}) = \mathbb{R}^4.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie sont les suivants :

$$\begin{cases} \Theta_0(f\partial) = f \\ \Theta_1(f\partial) = f' \\ \Theta_2(f\partial) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2(n-3)}{n} f^{(n)} \xi^{-n+1} \\ \Theta_3(f\partial) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3(n-1)}{n+1} f^{(n+1)} \xi^{-n}. \end{cases}$$

Dans [54, 55], Ovsienko et Roger classifient les déformations non triviales du plongement standard de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ dans l'algèbre de Lie des fonctions du fibré cotangent T^*S^1 respectant le crochet de Poisson et l'algèbre de Lie $\Psi\mathcal{DO}$ des symboles pseudodifférentiels sur S^1 .

Supposons maintenant que $\mathfrak{h}$ soit une sous-algèbre de $\text{Vect}(S^1)$. Nous classifions alors toutes les déformations $\mathfrak{h}$ -triviales du plongement naturel.

3.3 Énoncé du problème : déformations $\mathfrak{h}$ -triviales du plongement naturel

3.3.1 Déformation $\mathfrak{h}$ -triviale de $\text{Vect}(S^1)$ dans P .

Nous classifions toutes les déformations $\mathfrak{h}$ -triviales du plongement naturel 3.2.2 de $\text{Vect}(S^1)$ dans P . Cela signifie que nous étudions les applications linéaires $\mathfrak{h}$ -triviales

$$\pi^c : \text{Vect}(S^1) \rightarrow P[[c]]$$

dans l'algèbre de Lie des séries à un paramètre formel c . Une telle application a la forme suivante :

$$\pi^c = \pi + c\pi_1 + c^2\pi_2 + \dots$$

où $\pi_k : \text{Vect}(S^1) \rightarrow P$ sont des applications $\mathfrak{h}$ -triviales linéaires telles que la condition d'homomorphisme formel soit satisfaite.

3.3.2 Déformation $\mathfrak{h}$ –triviale de $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$.

L'objet principal de cette partie est d'étudier les déformations $\mathfrak{h}$ – triviales du plongement canonique

$$\rho_0 : Vect(S^1) \rightarrow \Psi\mathcal{DO} \quad (3.3.1)$$

$$\rho_0(X_F) = F\xi$$

3.3.3 Déformation $\mathfrak{h}$ –triviale de $Vect(S^1)$ dans $\mathcal{P}$.

Nous classifions toutes les déformations $\mathfrak{h}$ –triviales du plongement naturel (3.2.2) de $Vect(S^1)$ dans $\mathcal{P}$. En d'autres termes, nous considérons les homomorphismes de la forme suivante :

$$\pi = \pi + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k(c) \xi^k$$

où $c = c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sont des paramètres de déformation, chaque application linéaire $\pi_k(c) : Vect(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1)$ étant polynomiale dans c , $\pi_k(0) = 0$ et $\pi_k \equiv 0$ si $k > 0$ est suffisamment grand.

Théorie de la déformation

La théorie de la déformation des homomorphismes d'algèbres de Lie a d'abord été considérée avec un paramètre [33, 50]. Récemment, les déformations multiparamétriques des algèbres de Lie et de leurs modules ont été intensivement étudiées [1, 5, 13, 12, 31, 32, 54, 55]. Rappelons les bases de cette théorie.

Soit $\rho_0 : Vect(S^1) \rightarrow \Psi\mathcal{DO}$ un plongement d'algèbres Lie. Une *formelle déformation $\mathfrak{h}$ -triviale* de ρ_0 est une série formelle

$$\rho(t) = \rho_0 + \sum_{i=1}^m t_i \rho_i + \sum_{i,j=1}^m t_i t_j \rho_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (3.3.2)$$

où les $\rho_i, \rho_{ij}^{(2)}, \dots$ sont des applications linéaires de $Vect(S^1)$ vers $\Psi\mathcal{DO}$ avec $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_m]]$, etc., de sorte que l'application

$$\rho(t) : Vect(S^1) \rightarrow \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_m]] \otimes \Psi\mathcal{DO}, \quad (3.3.3)$$

satisfait la condition d'homomorphisme à n'importe quel ordre dans $t = (t_1, \dots, t_m)$. Deux déformations $\mathfrak{h}$ -triviales formelles ρ et $\tilde{\rho}$ sont dites *équivalentes* si $\tilde{\rho} = I_t \circ \rho$ pour un automorphisme interne

$$I_t : \mathbb{C}[[t]] \otimes \Psi\mathcal{DO} \rightarrow \mathbb{C}[[t]] \otimes \Psi\mathcal{DO}$$

de la forme

$$I_t = \exp\left(\sum_{i=1}^m t_i \operatorname{ad}_{F_i} + \sum_{i,j} t_i t_j \operatorname{ad}_{F_{i,j}} + \dots\right) \text{ pour certains } F_i, F_{i,j}, \dots, F_{i_1 \dots i_k} \in \Psi\mathcal{DO}. \quad (3.3.4)$$

Dans de nombreux cas, nous devons plutôt considérer les déformations polynomiales $\mathfrak{h}$ -triviales des séries formelles : la série formelle peut parfois être tronquée et le paramètre formel remplacé par des coefficients complexes. Plus précisément, selon [54, 55], *une déformation polynomiale $\mathfrak{h}$ -triviale* de plongement naturel (3.3.1) est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\rho(c) : \text{Vect}(S^1) \rightarrow \Psi\mathcal{DO}$ de la forme suivante :

$$\rho(c) = \rho_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k(c), \quad (3.3.5)$$

où $\rho_k(c) : \text{Vect}(S^1) \rightarrow \mathcal{P}$ sont des applications linéaires avec $\mathcal{P}$ comme dans (3.2.4), polynôme en le paramètre $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ et tel que $\rho_k \equiv 0$ pour k suffisamment grand. La théorie des déformations polynomiales $\mathfrak{h}$ -triviales semble être plus riche que celle des déformations formelles. Le problème d'équivalence pour les déformations polynomiales $\mathfrak{h}$ -triviales présente des aspects intéressants supplémentaires liés aux transformations des paramètres.

3.3.4 Déformations $\mathfrak{h}$ -triviales infinitésimales et premier espace de cohomologie relatif

Les déformations (3.6.1) et (3.3.5), termes modulo le second ordre en t et c , respectivement, sont appelées infinitésimales. Les déformations $\mathfrak{h}$ -triviales infinitésimales d'un homomorphisme d'algèbre de Lie ρ de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{b}$ sont classées par la première cohomologie $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b})$, où $\mathfrak{b}$ est un $\mathfrak{g}$ -module à travers ρ et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Plus précisément, les termes des premiers ordres ρ_i dans (3.6.1) et $\frac{\partial \rho(c)}{\partial c_i} \big|_{c=0}$ dans (3.3.5) sont des 1-cocycles. Deux déformations $\mathfrak{h}$ -triviales infinitésimales sont dites *équivalentes* si les cocycles correspondants sont cohomologues. Inversement, étant donné un homomorphisme d'algèbre de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$, un $\rho_1 \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ définit à 1-cocycle arbitraire une déformation infinitésimale de ρ . Les obstacles à l'existence d'une déformation $\mathfrak{h}$ -triviale (3.6.1) se trouvent dans $H^2(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{h}, \Psi\mathcal{DO})$. En effet,

$$\varphi_t = \rho - \rho_0, \quad \rho^{(1)} = \sum t_i \rho_i, \quad \rho^{(2)} = \sum t_i t_j \rho_{ij}^{(2)}, \dots,$$

on peut réécrire la relation (3.6.1) de la manière suivante :

$$[\varphi_t(x), \rho_0(y)] + [\rho_0(x), \varphi_t(y)] - \varphi_t([x, y]) + \sum_{i,j>0} [\rho^{(i)}(x), \rho^{(j)}(y)] = 0. \quad (3.3.6)$$

Les trois premiers termes sont $(\delta\varphi_t)(x, y)$, où δ représente le cobord. Pour les applications linéaires arbitraires $\gamma_1, \gamma_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$, considérons le *cup-product* standard :

$$[\gamma_1, \gamma_2](x, y) = [\gamma_1(x), \gamma_2(y)] + [\gamma_2(x), \gamma_1(y)]. \quad (3.3.7)$$

La relation (3.3.6) devient maintenant équivalente à :

$$\delta\varphi_t = -\frac{1}{2}[\varphi_t, \varphi_t]. \quad (3.3.8)$$

En développant (3.3.8) dans les séries de puissances en t , on obtient l'équation suivante pour $\rho^{(k)}$:

$$\delta\rho^{(k)} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} \llbracket \rho^{(i)}, \rho^{(j)} \rrbracket. \quad (3.3.9)$$

La partie droite de (3.3.9) est un 2-cocycle dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré k en t , la classe de cohomologie de ce cocycle est un obstacle à l'existence des solutions. La première relation non triviale $\delta\rho^{(2)} = -\frac{1}{2}\llbracket \rho^{(1)}, \rho^{(1)} \rrbracket$ donne le premier obstacle à l'intégration d'une déformation infinitésimale $\mathfrak{h}$ -trivial. Ainsi, en considérant le coefficient de $t_i t_j$, on obtient

$$\delta\rho_{i,j}^{(2)} = -\frac{1}{2}\llbracket \rho_i, \rho_j \rrbracket.$$

Cette relation est précisément la condition pour que le 2-cocycle $\llbracket \rho_i, \rho_j \rrbracket$ soit un cobord.

3.4 Déformation $\mathfrak{aff}(1)$ -Trivial du $Vect(S^1)$ dans P

3.4.1 Cohomologie $\mathfrak{aff}(1)$ -relative sur P

Corollaire 3.4.1.

$$H^1(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), P) = H^1(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), \mathcal{P}) = \mathbb{R}^2.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie relatifs sont les suivants :

$$\begin{cases} C_1(f\partial) = f''\xi^{-1} \\ C_2(f\partial) = f'''\xi^{-2}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

3.4.2 Conditions d'intégrabilité de second ordre

Proposition 3.4.1. *Toute déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale de $Vect(S^1)$ à valeurs dans P est équivalent à :*

$$f\partial \mapsto f\xi + c_1 f''\xi^{-1} + c_2 f'''\xi^{-2}, \quad (3.4.2)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sont des paramètres

Dans cette section, on obtient les conditions d'intégrabilité pour la déformation initiale (3.4.2). Supposons que la déformation initiale (3.4.2) puisse être intégrée à une déformation formelle.

$$\varrho_X = \rho_X + \rho_X^{(1)} + \rho_X^{(2)} + \rho_X^{(3)} + \dots, \quad (3.4.3)$$

où $\rho_X^{(1)}$ est donné par (3.4.1) et $\rho_X^{(2)}$ est un polynôme quadratique en c_i dont les coefficients sont des éléments de P disparaissant sur $\mathfrak{aff}(1)$.

On calcule les conditions pour le second ordre, c'est-à-dire pour les termes $\rho^{(2)}$.

La condition d'homomorphisme

$$[\varrho_X, \varrho_Y] = \varrho_{[X,Y]},$$

donne pour les termes du second ordre l'équation suivante (Maurer - Cartan)

$$\partial\rho^{(2)} = -\frac{1}{2}\llbracket\rho^{(1)}, \rho^{(1)}\rrbracket. \quad (3.4.4)$$

Le côté droit de (3.4.4) est un cup-produit de $\mathbf{aff}(1)$ -relative 1-cocycles, donc c'est automatiquement un $\mathbf{aff}(1)$ -relatif 2-cocycle. Plus précisément, l'équation (3.4.4) peut être exprimée comme suit

$$\partial\rho^{(2)} = -\frac{1}{2}\llbracket\sum_{i=1}^2 c_i C_i, \sum_{i=1}^2 c_i C_i\rrbracket \quad (3.4.5)$$

On considère donc les $\mathbf{aff}(1)$ -relatif 2-cocycles $\Omega_{i,j} \in Z_{\text{diff}}^2(\text{Vect}(S^1), \mathbf{aff}(1), P)$ définis par

$$\Omega_{i,j} = \llbracket C_i, C_j \rrbracket.$$

Il est facile de voir que $\Omega_{i,i} = 0$ pour $i = 1, 2$. La condition d'intégrabilité du second ordre est déterminée par le fait que toute application $\Omega_{i,i}$ à 2-cocycles pour $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, doit être un 2-cobord $\mathbf{aff}(1)$ -relatif. Plus précisément, $\Omega_{i,j}$ doit coïncider, jusqu'à un facteur scalaire, avec ∂b , où $b : \text{Vect}(S^1) \rightarrow P$, $\mathbf{aff}(1)$ -invariant. On a alors besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Soit $b \in C^1(\text{Vect}(S^1), \mathbf{aff}(1), P)$ défini par : pour $X \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(S^1)$*

$$b(X_f) = \alpha_6 f^{(6)} \xi^{-3} + \alpha_5 f^{(5)} \xi^{-4} \quad (3.4.6)$$

où les coefficients α_6 et α_5 sont constants. Puis l'application $\partial b : \text{Vect}(S^1) \times \text{Vect}(S^1) \rightarrow P$ est donnée par

$$\begin{aligned} \partial b(X_f, Y_g)(f, g) &= \alpha_6(2(f'g^{(6)} - f^{(6)}g') - 9(f^{(2)}g^{(5)} - f^{(5)}g^{(2)}) + 5(f^{(3)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(3)}))\xi^{-3} - \\ &\quad 5\alpha_5(f^{(2)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(2)})\xi^{-4}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Preuve 3.4.1. *En utilisant le crochet de Poisson, on trouve le résultat suivant.*

Soit $b(X_f) : \text{Vect}(S^1) \rightarrow P$

$$b(X_f) = \alpha_6 f^{(6)} \xi^{-3} + \alpha_5 f^{(5)} \xi^{-4}$$

On a

$$\partial b(X_f, X_g) = L_{X_f} b(X_g) - L_{X_g} b(X_f) - b([X_f, X_g]) \text{ tel que}$$

$$L_{X_f} b(X_g) = \{f\xi, \alpha_6 g^{(6)} \xi^{-3} + \alpha_5 g^{(5)} \xi^{-4}\} = (\alpha_6 f g^{(7)} + 3\alpha_5 f' g^{(6)}) \xi^{-3} + (\alpha_6 f g^{(6)} + 4\alpha_5 f' g^{(5)}) \xi^{-4}$$

et

$$L_{X_g} b(X_f) = \{g\xi, \alpha_6 f^{(6)} \xi^{-3} + \alpha_5 f^{(5)} \xi^{-4}\} = (\alpha_6 f g^{(7)} + 3\alpha_5 f' g^{(6)}) \xi^{-3} + (\alpha_6 f g^{(6)} + 4\alpha_5 f' g^{(5)}) \xi^{-4}$$

et

$$b([X_f, X_g]) = b(X_{fg' - f'g}) = \alpha_6 (fg' - f'g)^{(6)} \xi^{-3} + \alpha_5 (fg' - f'g)^{(5)} \xi^{-4}$$

En déduit que

$$\partial b(X_f, Y_g)(f, g) = \alpha_6(2(f'g^{(6)} - f^{(6)}g') - 9(f^{(2)}g^{(5)} - f^{(5)}g^{(2)}) + 5(f^{(3)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(3)}))\xi^{-3} - 5\alpha_5(f^{(2)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(2)})\xi^{-4}.$$

On divise ces conditions en deux familles que l'on détaille dans les deux propositions suivantes. Considérons d'abord les fonctions suivantes en la variable c où c est la famille de paramètres c_i

$$\begin{aligned}\omega_{i,i}(c) &= c_i^2, \quad \text{si } i \in \{1, 2\}, \\ \omega_{1,2}(c) &= c_1c_2.\end{aligned}$$

Ces fonctions $\omega_{i,j}(c)$, $i, j = 1, 2$, apparaîtront sous forme de coefficients pour certaines applications de P et seront utilisées dans les expressions des conditions d'intégrabilité. Plus précisément, on montre que le second terme $\rho^{(2)}$ est de la forme $\rho^{(2)} = \sum \omega_{i,j}(c)b_{ij}$.

Proposition 3.4.2. 1) Si $i \in \{1, 2\}$, $\Omega_{i,i}(f\partial, g\partial) = 0$.

2) L'application $\Omega_{1,2}(f\partial, g\partial) = \omega_{1,2}(f^{(4)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(4)})\xi^{-4}$, a est un 2-cocycle $\mathfrak{aff}(1)$ -relative trivial.

Preuve 3.4.2. 1) Si $i \in \{1, 2\}$, on a

$$\Omega_{i,i} = c_i^2 \llbracket C_i, C_i \rrbracket,$$

Par un calcul direct, on montre que

$$\llbracket C_i, C_i \rrbracket(f\partial, g\partial) = \{C_i, C_i\}(f\partial, g\partial) + \{C_i, C_i\}(f\partial, g\partial) = 0.$$

2) Notons que par la suite, certaines valeurs singulières du paramètre $i \neq j$ apparaissent car les $\llbracket C_i, C_j \rrbracket(f\partial, g\partial)$ $\mathfrak{aff}(1)$ -relatifs 2-cocycles n'existent que pour $i \neq j$.

(i) Par un calcul direct, on montre que

$$\llbracket C_1, C_2 \rrbracket(f\partial, g\partial) = \{C_1, C_2\}(f\partial, g\partial) + \{C_2, C_1\}(f\partial, g\partial) = \omega_{1,2}(f^{(4)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(4)})\xi^{-4}.$$

(ii) On exhibe des réels α et β tels que :

$$\alpha\Omega_{1,2} = \beta\partial b. \tag{3.4.8}$$

Par un calcul direct, on montre que

$$\Omega_{1,2} = \omega_{1,2}(c)\partial b,$$

Par conséquent, il n'y a aucune condition sur $\Omega_{1,2}$.

Notre résultat principal dans cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *Il n'existe aucune condition d'intégrabilité pour l'intégrabilité du second ordre de la déformation infinitésimale $\mathbf{aff}(1)$ -triviale (3.4.2).*

Preuve 3.4.3. *Ces conditions sont nécessaires, comme le montre la proposition (3.4.2). Maintenant, dans ces conditions, le second terme $\rho^{(2)}$ de la déformation infinitésimale $\mathbf{aff}(1)$ -triviale (3.4.2) est une solution de l'équation de Maurer-Cartan (3.4.5). Cette solution est définie à 1-cobord près et il a été montré [33, 1] que différents choix de solutions de l'équation de Maurer-Cartan correspondent à des déformations équivalentes. Ainsi, on peut toujours choisir*

$$\rho^{(2)} = \frac{1}{2}\omega_{1,2}(c)b(X_f) = \frac{1}{2}\omega_{1,2}(c)f^{(5)}\xi^{-4}.$$

3.4.3 Conditions d'intégrabilité du troisième et du quatrième ordre

Calcul de l'équation du troisième ordre de Maurer - Cartan

On va maintenant reconsidérer la déformation formelle (3.4.3) qui est une série de puissances formelles dans les paramètres c_i avec des coefficients dans P . On suppose que les conditions d'intégrabilité du second ordre sont satisfaites. Ainsi, les termes de troisième ordre de (3.4.3) sont des solutions de l'équation (Maurer-Cartan)

$$\partial\rho^{(3)} = -\frac{1}{2} \sum_{i+j=3} \llbracket \rho^{(i)}, \rho^{(j)} \rrbracket. \quad (3.4.9)$$

Comme dans la section précédente, on peut écrire

$$\partial\rho^{(3)} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \Xi_i, \quad (3.4.10)$$

où Ξ_i sont des applications de $\text{Vect}(S^1)^{\otimes 2}$ dans P .

Le terme du troisième ordre $\rho^{(3)}$ de la déformation formelle $\mathbf{aff}(1)$ -triviale (3.4.3) est une solution de (3.4.10). Ainsi, les 2-cochaines Ξ_i doivent satisfaire $\Xi_i = \partial b$, puis les conditions d'intégrabilité du troisième ordre en sont déduites.

On calcule successivement les Ξ_i pour $i = 1, 2$ et on résout $\Xi_i = \partial b$ pour obtenir le troisième ordre correspondant des conditions d'intégrabilité.

On doit noter que les applications Ξ_i sont des 2-cochaines, mais qu'elles ne sont pas nécessairement des 2-cocycles car elles ne sont pas des cup-produits de 1-cocycles comme les applications $\Omega_{i,j}$. En effet, $\rho^{(2)}$ n'est pas nécessairement un 1-cocycle.

Conditions d'intégrabilité du troisième ordre

Proposition 3.4.3. *On a les conditions d'intégrabilité du troisième ordre suivantes de la déformation infinitésimale (3.4.2)*

$$\begin{aligned} c_1\omega_{1,2}(c) &= c_1^2c_2 = 0, \\ c_2\omega_{1,2}(c) &= c_1c_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

On a besoin des lemmes suivants .

Lemme 3.4.2. Soit $b_6 \in C^1(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), P)$ défini par :
pour $f \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(S^1)$

$$b_6(X_f) = \alpha_{8,5} f^{(8)} \xi^{-5} + \alpha_{7,6} f^{(7)} \xi^{-6} \quad (3.4.12)$$

où les coefficients $\alpha_{7,6}$ et $\alpha_{8,5}$ sont constants. Puis l'application $\partial b_6 : \text{Vect}(S^1)^{\otimes 2} \rightarrow P$ est donnée par

$$\begin{aligned} \partial b_6(X_f, X_g)(f, g) &= 2\alpha_{8,5}((f^{(8)}g' - f'g^{(8)}) + 10(f^{(7)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(7)}))\xi^{-5} \\ &+ 14\alpha_{8,5}(2(f^{(6)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(6)}) + (f^{(5)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(5)}))\xi^{-5} \\ &+ 14\alpha_{7,6}((f^{(6)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(6)}) + (f^{(5)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(5)}))\xi^{-6}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Preuve 3.4.4. En utilise le crochet de Poisson.

Soit $b_6(X_f) : \text{Vect}(S^1) \rightarrow P$

$$b_6(X_f) = \alpha_{8,5} f^{(8)} \xi^{-5} + \alpha_{7,6} f^{(7)} \xi^{-6}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial b_6(X_f, X_g)(f, g) &= L_{X_f} b_6(X_g) - L_{X_g} b_6(X_f) - b_6([X_f, X_g]) \text{ tel que} \\ L_{X_f} b_6(X_g) &= \{f\xi, \alpha_{8,5}g^{(8)}\xi^{-5} + \alpha_{7,6}g^{(7)}\xi^{-6}\} = (\alpha_{8,5}fg^{(9)} + 5\alpha_{8,5}f'g^{(8)})\xi^{-5} + (\alpha_{7,6}fg^{(8)} + \\ &6\alpha_{7,6}f'g^{(7)})\xi^{-6} \text{ et} \\ L_{X_g} b_6(X_f) &= \{g\xi, \alpha_{8,5}f^{(8)}\xi^{-5} + \alpha_{7,6}f^{(7)}\xi^{-6}\} \text{ et} \\ b_6([X_f, X_g]) &= b_6(X_{fg'-f'g}) = \alpha_{8,5}(fg' - f'g)^{(8)}\xi^{-5} + \alpha_{7,6}(fg' - f'g)^{(7)}\xi^{-6} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$b_6(X_f, X_g) = 2\alpha_{8,5}((f^{(8)}g' - f'g^{(8)}) + 10(f^{(7)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(7)}))\xi^{-5} + 14\alpha_{8,5}(2(f^{(6)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(6)}) + (f^{(5)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(5)}))\xi^{-5} + 14\alpha_{7,6}((f^{(6)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(6)}) + (f^{(5)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(5)}))\xi^{-6}.$$

Lemme 3.4.3. Soit $b_7 \in C^1(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), P)$ défini par :
pour $f \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(S^1)$

$$b_7(X_f) = \alpha_{9,6} f^{(9)} \xi^{-6} + \alpha_{8,7} f^{(8)} \xi^{-7} \quad (3.4.14)$$

où les coefficients $\alpha_{9,6}$ et $\alpha_{8,7}$ sont constants.

Alors $\partial b_7 \in C^2(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), P)$ a la forme générale suivante :

pour $f \frac{d}{dx}, g \frac{d}{dx} \in \text{Vect}(S^1)$

$$\begin{aligned} \partial b_7(X, Y)(f) &= 2\alpha_{9,6}(f^{(9)}g' - f'g^{(9)})\xi^{-6} + 27\alpha_{9,6}(f^{(8)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(8)})\xi^{-6} + \\ &38\alpha_{9,6}(f^{(7)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(7)})\xi^{-6} + 42\alpha_{9,6}(f^{(6)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(6)})\xi^{-6} + \\ &20\alpha_{8,7}(f^{(7)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(7)})\xi^{-7} + 28\alpha_{8,7}(f^{(6)}g^{(3)} - f^{(3)}g^{(6)})\xi^{-7} + \\ &14\alpha_{8,7}(f^{(5)}g^{(4)} - f^{(4)}g^{(5)})\xi^{-7}. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Preuve 3.4.5. On a

$$\Xi_1 = c_1 \omega_{1,2}(c) \llbracket C_1, b \rrbracket$$

et

$$\Xi_2 = c_2 \omega_{1,2}(c) \llbracket C_2, b \rrbracket.$$

Par un calcul direct, on montre que les 2-cochaines

$\Xi_1 = c_1^2 c_2 ((f^{(6)} g^{(2)} - f^{(2)} g^{(6)}) + 4(f^{(3)} g^{(5)} - f^{(5)} g^{(3)})) \xi^{-6}$ et ∂b_6 sont linéairement indépendantes.

De la même manière, $\Xi_2 = c_1 c_2^2 ((f^{(6)} g^{(3)} - f^{(3)} g^{(6)}) + 4(f^{(4)} g^{(5)} - f^{(5)} g^{(4)})) \xi^{-7}$ et ∂b_7 sont linéairement indépendantes.

Ainsi

$$c_1^2 c_2 = 0,$$

$$c_1 c_2^2 = 0.$$

On calcule ces 2-cochaines puis on vérifie les conditions d'intégrabilité correspondantes.

Conditions d'intégrabilité d'ordre quatre

Le résultat est le suivant :

Proposition 3.4.4. *Il n'y a pas de conditions d'intégrabilité pour les conditions d'intégrabilité du quatrième ordre de la déformation infinitésimale (3.4.2).*

Preuve 3.4.6. Ces conditions proviennent du fait que le quatrième terme $\rho^{(4)}$ doit satisfaire :

$$\partial \rho^{(4)} = -\frac{1}{2} \llbracket \rho^{(2)}, \rho^{(2)} \rrbracket.$$

En effet, on peut toujours réduire $\rho^{(3)}$ par équivalence.

Le théorème suivant est notre résultat principal.

Théorème 3.4.2. *Les conditions du troisième ordre (3.4.11) sont nécessaires et suffisantes pour permettre l'intégrabilité complète de la déformation infinitésimale (3.4.2). De plus, toute déformation formelle $\mathbf{aff}(1)$ -triviale de la dérivée de Lie ρ_X sur l'espace des symboles P est équivalente à un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

Preuve 3.4.7. Clairement, toutes ces conditions sont nécessaires. Prouvons alors qu'elles sont également suffisantes.

Comme dans la preuve du théorème 3.4.1, la solution $\rho^{(3)}$ de l'équation de Maurer-Cartan (3.4.9) est définie jusqu'à un 1-cobord et on peut donc toujours réduire $\rho^{(3)}$ à zéro par équivalence. De plus, par récurrence, les termes d'ordre le plus élevé, $\rho^{(m)}$, satisfont l'équation $\rho^{(m)} = 0$ et peuvent également être réduits à l'application identiquement nulle. Ceci termine la preuve du théorème 3.4.2.

3.5 Déformation $\mathfrak{aff}(1)$ –triviale du $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$

3.5.1 Cohomologie $\mathfrak{aff}(1)$ –relative sur $\Psi\mathcal{DO}$

Corollaire 3.5.1.

$$H^1(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), \Psi\mathcal{DO}) = \mathbb{R}^2.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie relatifs sont les suivants :

$$\begin{cases} \Theta_2(f\partial) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2(n-3)}{n} f^{(n)} \xi^{-n+1} \\ \Theta_3(f\partial) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3(n-1)}{n+1} f^{(n+1)} \xi^{-n}. \end{cases}$$

3.5.2 Déformations infinitésimales

Proposition 3.5.1. *Toute déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ –triviale du plongement naturel de $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$ est équivalent à :*

$$\tilde{\pi} : f\partial \mapsto f\xi + c_2\Theta_2(f\partial) + c_3\Theta_3(f\partial), \quad (3.5.1)$$

où $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sont des paramètres.

3.5.3 La condition d'intégrabilité

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 3.5.1. *La déformation infinitésimale (3.5.1) est intégrable en une d'formation polynomiale si et seulement si la relation suivante (cubique) est satisfaite :*

$$8c_2^3 + 9c_3^2 + 8c_2^2 + 18c_2c_3 = 0. \quad (3.5.2)$$

On montre d'abord que la condition (3.2.2) est nécessaire à l'intégrabilité des déformations infinitésimales.

Remarque 3.5.1. *Dans une interprétation cohomologique, les obstacles à l'intégrabilité d'une déformation infinitésimale (3.5.1) qui ne satisfait pas la condition (3.5.2) correspondent à une classe non triviale de $H^2(\text{Vect}(S^1), \mathfrak{aff}(1), \mathcal{F}_5)$.*

Preuve 3.5.1. *La déformation infinitésimale (3.5.1) est clairement de la forme :*

$$\tilde{\pi}(f\partial) = f\xi + c_2 f'' \xi^{-1} + c_3 f''' \xi^{-2} + \dots, \quad (3.5.3)$$

où $\dots$ désigne les termes dans $\xi^{-3}, \xi^{-4}, \dots$. Pour calculer les obstacles à l'intégration de la déformation infinitésimale (3.5.1), il faut ajouter les premiers termes non triviaux et imposer la condition d'homomorphisme.

Alors

$$\bar{\pi}(f\partial) = f\xi + c_2 f'' \xi^{-1} + c_2 f''' \xi^{-2} + \Pi_4(c) f^{(iv)} \xi^{-3} + \Pi_5(c) f^{(v)} \xi^{-4}, \quad (3.5.4)$$

où $\Pi_4(c)$ et $\Pi_5(c)$ sont des polynômes en $c = (c_2, c_3)$. On trouve

$$2\Pi_4(c) = -c_2^2 - 3c_3 - c_2, \quad (3.5.5)$$

$$5\Pi_5(c) = -c_2c_3 + c_2^2 - 6\Pi_4(c) + c_2. \quad (3.5.6)$$

Allons un peu plus loin et développons la déformation jusqu'à ξ^{-6} , c'est-à-dire

$$\bar{\pi}(f\partial) = \bar{\pi}(f\partial) + \Pi_6(c)f^{(vi)}\xi^{-5}$$

La condition d'homomorphisme conduit alors à une relation non-triviale pour les paramètres :

$$10(c_2c_3 - c_2^2 - c_2 - 10\Pi_5 - c_2 - c_2\Pi_4) = 18(3c_2\Pi_4 + 3c_2c_3 - 2c_3^2 + 10\Pi_4 + 5c_3).$$

En substituant les expressions (3.5.5) et (3.5.6) à Π_4 et Π_5 , on obtient la formule (3.5.2).

On a donc montré que cette condition est nécessaire à l'intégrabilité des déformations infinitésimales.

Ceci termine la preuve du théorème (3.5.1).

3.5.4 Introduction du paramètre h

Contraction de l'algèbre de Lie $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$

La contraction a été inventée par E. Wigner et I. Inonu dans les années cinquante, puis a été ensuite développée par certains physiciens.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, considérons un groupe à un paramètre $\Phi_t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ d'endomorphismes linéaires, tels que Φ_t soit un isomorphisme pour $t \neq 0$, que $\Phi_1 = id$ et que Φ_0 soit singulier. On définit le crochet $[\ , \]_t$ sur $\mathfrak{g}$ par la formule

$$[X, Y]_t = \Phi_t^{-1}[\Phi_t(X), \Phi_t(Y)].$$

Pour $t = 1$, c'est le crochet de $\mathfrak{g}$, et il est isomorphe à $[\ , \]_t$ pour $\mathfrak{g}$ si $t \neq 0$. Supposons que pour tout X et Y , la limite $[X, Y]_0 = \lim_{t \rightarrow 0} [X, Y]_t$ existe, alors $[\ , \]_0$ est un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ non isomorphe au précédent car Φ_0 est singulier. L'algèbre $\mathfrak{g}$ g fournie avec le crochet $[\ , \]_0$ s'appelle l'algèbre de Lie contractée de $\mathfrak{g}$ par Φ_t .

On considère maintenant l'application $\Phi_h : \Psi\mathcal{DO}(S^1) \longrightarrow \Psi\mathcal{DO}(S^1)$ défini par $\Phi_h(a\partial^p) = ah^p\partial^p$. Un calcul simple montre que

$$\Phi_h^{-1}([\Phi_h(A), \Phi_h(B)]) = h\left(\frac{\partial A}{\partial \partial} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial \partial} \frac{\partial A}{\partial x}\right) + hO(h).$$

La limite existe et on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[A, B]_h = \{A, B\}$ pour $h \rightarrow 0$. $\{A, B\}$ signifie ici le crochet de Poisson sur les symboles (x, ∂) , vus cette fois en fonction de deux variables. On a donc utilisé la contraction de l'algèbre de Lie $\Psi\mathcal{DO}(S^1)$ sur l'algèbre de Poisson $P = C^\infty(S^1)[\partial, \partial^{-1}]$ équipée du crochet canonique.

Contraction des déformations $\mathfrak{h}$ -triviales

À partir d'une déformation $\mathfrak{h}$ -triviale de l'un des types (3.3.5) ou (3.6.1) , on peut la modifier pour qu'elle devienne une déformation à valeurs dans l'algèbre déformée $\Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$. Plus précisément, si on définit $\pi_t^h = \Phi_h^{-1} \circ \tilde{\pi}_t$, alors on a

$$\pi_t^h([F, G]) = \Phi_h^{-1}([\tilde{\pi}_t(F), \tilde{\pi}_t(G)]) = [\pi_t(F), \pi_t(G)]_h,$$

et ainsi $\pi_t^h : Vect(S^1) \rightarrow \Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$ est une déformation $\mathfrak{h}$ -triviale (formelle) du plongement naturel .

Paramétrisation : la condition d'intégrabilité

On peut maintenant modifier la relation pour obtenir une déformation dans $\Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$ et le scalaire h apparaît alors avec des puissances différentes selon le poids dans les termes successifs dans la formule (3.5.2). On obtient finalement

Proposition 3.5.2. *Cette relation*

$$8c_2^3 + 9c_3^2 + h(18c_2c_3) + h^2 8c_2^2 = 0 \tag{3.5.7}$$

est une condition d'intégrabilité nécessaire pour les déformations infinitésimales (3.5.1) dans $\Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$. La condition d'intégrabilité est représentée géométriquement sur la figure 1

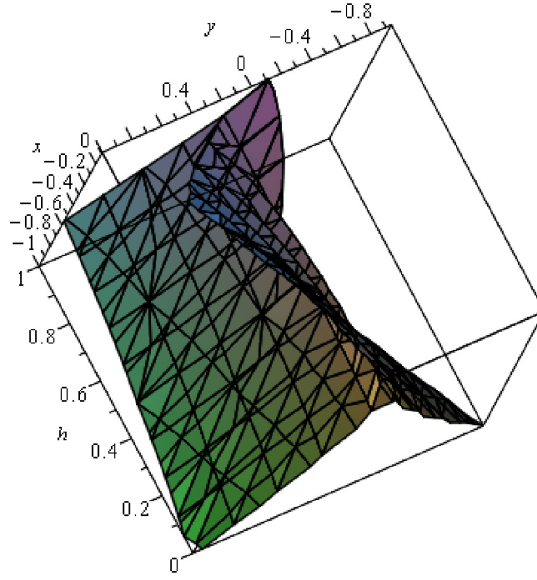


FIGURE 3.1 – La condition d'intégrabilité de $\Psi\mathcal{DO}_h(S^1)$

Proposition 3.5.3. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$, les constantes*

$$c_2 = -\frac{\sigma(\sigma + h)}{2}, \quad (3.5.8)$$

$$c_3 = \frac{\sigma^2(h - \sigma)}{2} + \frac{\sigma(h - \sigma)(2h - \sigma)}{6}, \quad (3.5.9)$$

doivent satisfaire la relation (3.5.7).

Réciproquement, tout couple c_2, c_3 satisfaisant la relation (3.5.7) est de la forme (3.5.8) et (3.5.9) un certain) $\sigma \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.5.4. *Toute déformation $\mathfrak{aff}(1)$ –triviale du plongement naturel de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\mathcal{P}$ est équivalente à :*

$$f\partial \mapsto f\xi + c_1 f''\xi^{-1} + c_2 f'''\xi^{-2}, \quad (3.5.10)$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$) des paramètres.

Théorème 3.5.2. *Une déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ –triviale 3.5.10 correspond à une déformation polynomiale du plongement naturel $\text{Vect}(S^1) \rightarrow \mathcal{P}$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$8c_1^3 + 9c_2^2 = 0.$$

La condition d'intégrabilité est représentée sur la figure 2.

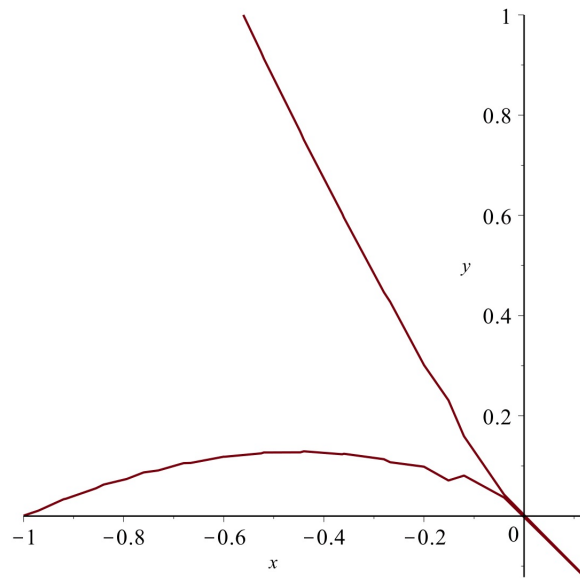


FIGURE 3.2 – La condition d'intégrabilité de $\mathcal{P}$

Preuve 3.5.2. *Pour $h = 0$ (3.5.7), on obtient le polynôme que l'on a obtenu dans le cas semi-classique (Poisson).*

3.6 Déformation $\mathfrak{sl}(2)$ –triviale du $Vect(S^1)$

Dans cette section, on s'intéresse au cas de la déformation $\mathfrak{sl}(2)$ –triviale. Soit $\rho_0 : Vect(S^1) \rightarrow \Psi\mathcal{DO}$ un plongement d'algèbres de Lie. Une *déformation formelle* de ρ_0 est une série formelle

$$\rho(t) = \rho_0 + \sum_{i=1}^m t_i \Theta_i + \sum_{i,j=1}^m t_i t_j \rho_{ij}^{(2)} + \cdots, \quad (3.6.1)$$

où $\Theta_i, \rho_{ij}^{(2)}, \dots$ sont des applications linéaires $\mathfrak{sl}(2)$ –relatives de $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$ telles que l'application

$$\rho(t) : Vect(S^1) \rightarrow \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_m]] \otimes \Psi\mathcal{DO}, \quad (3.6.2)$$

satisfait la condition d'homomorphisme.

Corollaire 3.6.1.

$$H^1(Vect(S^1), \mathfrak{sl}(2), \Psi\mathcal{DO}) = \mathbb{R}.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie relative sont les suivants :

$$\Theta_3(f\partial) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3(n-1)}{n+1} f^{(n+1)} \xi^{-n}.$$

Il est clair que le même résultat est valable pour $\mathcal{P}$:

$$H^1(Vect(S^1), \mathfrak{sl}(2), \mathcal{P}) = \mathbb{R}.$$

Les cocycles non triviaux générant les groupes de cohomologie relative sont les suivants :

$$C_2(f\partial) = f''' \xi^{-2}.$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant

Théorème 3.6.1. 1. Toute déformation formelle $\mathfrak{sl}(2)$ –triviale du plongement naturel de $Vect(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$ est équivalente à sa partie infinitésimale :

$$f\partial \mapsto f\xi + c_3 \Theta_3(f\partial), \quad (3.6.3)$$

où $c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est le paramètre

2. toute déformation formelle $\mathfrak{sl}(2)$ –triviale de l'inclusion standard de $Vect(S^1)$ dans $\mathcal{P}$ est équivalente à sa partie infinitésimale :

$$f\partial \mapsto f\xi + c_3 C_3(f\partial), \quad (3.6.4)$$

où $c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est le paramètre

Preuve 3.6.1. *On considère une déformation formelle de plongement (3.6.1) :*

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + c_3 \Theta_3 + \sum_{m \geq 2} c^m \rho^{(m)}$$

Par un calcul direct, on vérifie que $[\Theta_3, \Theta_3] = 0$.

La solution $\rho_{i,j}^{(2)}$ de (3.3.9) est définie jusqu'aux 1-cocycles et il a été montré dans [1, 5, 29, 31, 32, 33, 50, 54, 55] que différents choix de solutions de (3.3.9) correspondent à des déformations équivalentes. Ainsi, on peut toujours éliminer les $\rho_{i,j}^{(2)}$. Puis, par récurrence, les termes d'ordre le plus élevé vérifient l'équation $\delta \rho_{i,j}^{(m)} = 0$ et peuvent également être supprimés.

Comme précédemment, le résultat concernant la déformation du plongement naturel de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\mathcal{P}$ provient du fait que nous avons par un calcul direct $[C_3, C_3] = 0$.

Conclusion et remarques complémentaires

3.7 Conclusion

Ce mémoire de thèse présente l'ensemble de mes travaux de recherche. Le thème général de ces travaux se situe au carrefour de deux domaines fondamentaux des mathématiques : la déformation et la cohomologie. La théorie de la déformation des modules est étroitement liée à la théorie de la cohomologie.

Dans la première partie, on considère la structure du module $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur les espaces des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les espaces de densités tensorielles. On a calculé la première cohomologie différentielle des champs de vecteurs d'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'espace $\mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$ des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les densités tensorielles. Cette cohomologie est en réalité une généralisation naturelle de la cohomologie de Gelfand-Fuchs ([29]). On a calculé la première cohomologie de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ des champs de vecteurs sur les coefficients dans les espaces des opérateurs de différentiels bilinéaires agissant sur les espaces de densités tensorielles.

Le résultat principal est le théorème 2.3.1. Nous présentons plusieurs 1-cocycles intéressants sur $\text{Vect}(\mathbb{R})$ qui correspondent à de nouvelles extensions de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -modules. On voit apparaître en particulier une liste de valeurs exceptionnelles de densités tensorielles, pour lesquelles l'espace de cohomologie est particulièrement riche et peut conduire à d'autres applications non seulement dans la théorie des $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -modules, mais également dans des questions concernant les systèmes intégrables, ou même pour des questions de physique.

Ce travail a fait l'objet d'un article "Cohomology of $\text{Vect}(\mathbb{R})$ acting on the space of bilinear differential operators" publié dans **Journal of Geometry and Physics** 2018 .

Plus précisément, on peut remarquer que :

- L'intérêt des opérateurs différentiels bilinéaires sur la ligne réelle agissant sur les espaces de densités tensorielles est dû au papier classique de Grozman.
- L'apparition des valeurs $\frac{-2}{3}$ (voir le théorème 2.3.1, cas (iii)) est clairement liée aux valeurs exceptionnelles trouvées par Grozman.
- De même, pour les valeurs impliquant $\sqrt{19}$, cf. Les parties (vii) à (viii) du théorème sont celles de Feigin-Fuchs (Func. Anal. Appl. 14 (1980), 201-212).

La deuxième partie de la thèse est l'étude des déformations $\mathfrak{h}$ -triviales du plongement naturel de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs sur le cercle S^1 dans l'algèbre de Lie des fonctions sur le fibré cotangent T^*S^1 . On a donc considéré d'abord l'action de $\text{Vect}(S^1)$ par la dérivée de Lie sur l'espace des opérateurs différentiels $\text{Vect}(S^1)$ et on a classifié les déformations de cette action qui deviennent triviales lorsqu'elles sont restreintes à $\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(1)$ ou $\mathfrak{sl}(2)$. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité des déformations infinitésimales ont été obtenues. Elles ont fait l'objet d'un article de revue publié dans la revue **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**.

Les résultats importants suivants sont à noter :

- Il n'y a pas de condition d'intégrabilité pour l'intégrabilité du second ordre de la déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale de

$$f\partial \mapsto f\xi + c_1 f'' \xi^{-1} + c_2 f''' \xi^{-2},$$

- Les conditions du troisième ordre sont nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité complète de la déformation infinitésimale. De plus, toute déformation $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale formelle de la dérivée de Lie ρ_X sur l'espace des symboles P est équivalente à un polynôme de degré inférieur ou égal à 2

– **La condition d'intégrabilité**

La déformation infinitésimale correspond à une déformation polynomiale, si et seulement si la relation suivante (quartique) est satisfaite :

$$8c_2^3 + 9c_3^2 + 8c_2^2 + 18c_2c_3 = 0$$

- Une déformation infinitésimale $\mathfrak{aff}(1)$ -triviale correspond à une déformation polynomiale de l'inclusion standard $\text{Vect}(S^1) \rightarrow \mathcal{P}$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$8c_1^3 + 9c_2^2 = 0$$

- 1. Toute déformation formelle $\mathfrak{sl}(2)$ -triviale de l'inclusion standard de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\Psi\mathcal{DO}$ est équivalente à sa partie infinitésimale :

$$f\partial \mapsto f\xi + c_3 \Theta_3(f\partial),$$

où $c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est le paramètre

- 2. toute déformation formelle $\mathfrak{sl}(2)$ -triviale de l'inclusion standard de $\text{Vect}(S^1)$ dans $\mathcal{P}$ est équivalente à sa partie infinitésimale :

$$f\partial \mapsto f\xi + c_3 C_3(f\partial),$$

où $c_3 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est le paramètre.

3.8 Perspectives

Suite à ces résultats, nous proposons deux voies possibles d'approfondissement et/ou d'extension.

1- La première voie que nous proposons concerne le passage du bilinaire au n -linéaire. Plus précisément, soit $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, on considère la structure du module $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur les espaces des opérateurs différentiels n -linéaires agissant sur les espaces de densités tensorielles. Il nous semblerait intéressant de calculer la première cohomologie différentielle des champs de vecteurs d'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'espace $\mathcal{D}_{\bar{\lambda},\mu}$ des opérateurs différentiels n -linéaires agissant sur les densités tensorielles avec comme principale question de déterminer l'espace $\mathcal{D}_{\bar{\lambda},\mu}$, où $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$?

2- La deuxième perspective possible concerne l'extension aux superalgèbres et supervariétés.

Soit $\mathbb{K}^{1|1}$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le superspace des coordonnées (x, θ) , où θ est l'indéterminée impaire, muni de sa structure de contact standard donnée par la 1-forme $\alpha = dx + \theta d\theta$ et soit $\mathfrak{F}_\lambda$ l'espace des densités tensorielles de poids λ sur $\mathbb{K}^{1|1}$. Considérons le super espace $\mathcal{K}(1)$ des champs de vecteurs de contact sur $\mathbb{K}^{1|1}$, c'est à dire la super algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes sur $\mathbb{K}^{1|1}$ par rapport à la 1-forme α :

$$\mathcal{K}(1) = \{X \in \text{Vect}(1|1) | L_X(\alpha) = F\alpha \text{ pour } F_X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{K}^{1|1}) \}.$$

Le $\mathcal{K}(1)$ -module adjoint, est isomorphe à $\mathfrak{F}_\lambda$. L'espace $\mathfrak{D}_{\lambda,\nu,\mu}$ des opérateurs différentiels bilinéaires $A : \mathfrak{F}_\lambda \otimes \mathfrak{F}_\nu \rightarrow \mathfrak{F}_\mu$ est muni d'une manière naturelle d'une structure de module sur la superalgèbre de Lie $\mathcal{K}(1)$ des champs de vecteurs de contact sur $\mathbb{K}^{1|1}$.

Il nous semblerait intéressant de résoudre le problème suivant à savoir de calculer l'espace

$$H_{\text{diff}}^1(\mathcal{K}(1), \mathfrak{D}_{\lambda,\nu,\mu})?$$

Bibliographie

- [1] B. Agrebaoui, F. Ammar, P. Lecomte, V. Ovsienko, *Multi-parameter deformations of the module of symbols of differential operators*, Internat. Mathem. Research Notices, 2002, N. 16, 847–869.
- [2] B. Agrebaoui, F. Ammar, B.P. Lecomte *On the Cohomologie of the space of differentials operators acting on skew-symmetric tensor fields or on forms, as moduls of the Lie algebrea of vector fields*. Differential Geometry and its Applications 20 (2004). 241-249.
- [3] B. Agrebaoui, I. Basdouri, M. Boujelbene *On the second cohomology of the Lie superalgebra of contact vector fields on $S^{1|1}$* , Preprint.
- [4] B. Agrebaoui, N. Ben Fraj, *On the cohomology of the Lie superalgebra of contact vector fields on $S^{1|1}$* , Belletin de la Société Royale des Sciences de Liège, vol.72, 6, 2004, pp.365-375.
- [5] B. Agrebaoui, M. Ben Ammar, N. Ben Fraj, and V. Ovsienko : *Deformation of modules of differential forms*. NonLinear Mathematical Physics, vol. 10(2003)num. 2, 148-156.
- [6] F. Ammar, Cohomologies et deformation, Habilitation universitaire de l'université de Sfax pour le Sud (2001).
- [7] F. Ammar, Deformation of current Lie algebra with type euclidian group, Tokyo. J.Math vol. 23 n 2 , 2000.
- [8] F. Ammar, Déformation de l'algèbre des courants associée au groupe de Poincaré, Publications du Mathématiques, 44 (2000), 193-204.
- [9] D Arnal , M Ben Ammar and M Selmi, *Normalisation dune représentation non linéaire dune algèbre de Lie*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 5e série, tome 9, no3, (1988), p 355-579.
- [10] F. Ammar, D. Arnal, Déformation d'algèbre de Weyl, Bull Académie des Sciences de Belgique.
- [11] I. Basdouri, M. Ben Ammar, *Cohomology of $\mathfrak{osp}(1|2)$ Acting on Linear Differential Operators on the Supercercle $S^{1|1}$* , LMP.
- [12] I. Basdouri, M. Ben Ammar, N. Ben Fraj, M. Boujelbene and K. Kammoun *Cohomology of the Lie Superalgebra of Contact Vector Fields on $\mathbb{R}^{1|1}$ and Deformations of the Superspace of Symbols* . math.RT/0702645.

- [13] I. Basdouri, M. Ben Ammar, B. Dali and S. Omri, *Deformation of $Vect_p(\mathbb{R})$ -Modules of Symbols*. math.RT/0702664.
- [14] I.Basdouri, **I.Bartouli**, and J.Lerbet, , Deforming $\mathfrak{h}$ –Trivial the Lie algebra $Vect(S^1)$ inside the Lie algebra of pseudodifferential operators $\Psi\mathcal{DO}$, **Int. J. of Geometric Methods in Modern Physics**, **World Scientific Publishing**, 14 (6), 2017
- [15] **I.Bartouli**,A.Darbali , M.Chraygui, and J.Lerbet.J Cohomlogy of $Vect(\mathbb{R})$ Acting OF $Vect(\mathbb{R})$ on the space of bilinear differetial operators ,**Journal of Geometry and Physics**, **2018**, **Springer** .
- [16] F. Bayen, M. Flato, M. Lichnerowicz, D. Sternheimer : Deformation and quantization, Annals of physics 111(1978) pp 61-151.
- [17] M. Ben Ammar, Déformations d’algèbres de Weyl, C.R.A.S Paris.
- [18] M. Ben Ammar, M. Boujelbene, $\mathfrak{sl}(2)$ –Trivial Deformation of $Vect_P(\mathbb{R})$ -Modules of Symbols. Preprint.
- [19] N. Ben Fraj and S. Omri : *Deforming the Lie Superalgebra of Contact Vector Fields on $S^{1|1}$ inside the Lie Superalgebra of Superpseudodifferential operators on $S^{1|1}$* , J. Nonlinear Mathematical Physics, vol. 13, 1, 2006, pp. 19-33.
- [20] S. Bouarroudj, *Cohomology of the vector fields Lie algebras on $\mathbb{RP}^1$ acting on bilinear differential operators*. arxiv :math/0409227v1, IJGMMP.
- [21] S. Bouarroudj, *On $\mathfrak{sl}(2)$ -relative cohomology of the Lie algebra of vector fields and differential operators*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume 14, Number 1 (2007).
- [22] S. Bouarroudj, V. Ovsienko, *Three cocycles on $Diff(S^1)$ generalizing the Schwarsian derivative*, Internat. Math. Res. Notices, No. 1998, 25–39.
- [23] S.J Cheng and V.G.Kac "A New $N = 6$ Superalgebras , "Commun-Math. Phys. 186, 219-231 (1997).
- [24] P. Cohen, Yu. I. Manin, D.Zagier, Automorphic pseudodifferential operators, Algebraic aspects of integrable systems, 17-47, Progr. Non linear Differential Equations App., 26 Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [25] C. Conley *Conformal symbols and the action of contact vector fields over the superline*. J. Reine Angew. Math. 633 (2009), 115.
- [26] G. Dito, M. Flato and D. Sternheimer Nambu mechanics, n -ary operations and their quantization, pp. 43-66 in : D. Sternheimer, J. Rawnsley and S. Gutt (eds.), Deformation Theory and Symplectic Geometry, Mathematical Physics Studies 20, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1997.
- [27] G. Dito and D. Sternheimer *Deformation quantization : genesis, developments and metamorphoses*.
- [28] G. Dito , M. Flato , Sternheimer D. and Takhtajan L. *Deformation Quantization and Nambu Mechanics*, Comm. Math. Phys. 183 (1997) 1-22.

- [29] B. L. Feigin D.B. Fuks, *Homology of the Lie algebras of vector fields on the line*, Func. Anal. Appl., 14 (1980) 201-212.
- [30] B. L. Feigen an D. A. Leites, "New Lie superalgebras of string theory", in : Teoretik Gruppovy v fizike, Tom 1, Nauka, Moscow,(1983) pp. 269–278.
- [31] A. Fialowski, *Deformations of Lie algebras.*, Math. USSR-Sb. **55** (1986), 467-473.
- [32] A. Fialowski, *An example of formal deformations of Lie algebras , Deformation Theory of Algebras and Structures and Appl.*, Kluwer (1988), 375-401.
- [33] A. Fialowski, D. B. Fuchs, *Construction of miniversal deformations of Lie algebras J.* Func. Anal. **161 :1** (1999) 76–110.
- [34] D. B. Fuchs, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau, New York, 1987.
- [35] D. B. Fuchs, *Cohomologies of infinite-dimensional Lie algebras*, Plenum Publ. New-York 1986.
- [36] H. Gargoubi, *Sur la géométrie de l'espace des opérateurs différentiels linéaires sur $\mathbb{R}$* , Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. Vol. 69, 1, 2000, 21–47.
- [37] H. Gargoubi, N. Mellouli and V. Ovsienko *Differential Operators on Supercircle : Conformally Equivariant Quantization and Symbol Calculus*, Letters in Mathematical Physics (2007) **79** :51 65.
- [38] P. Gordan, *Invariantentheorie*, teubner, Leipzig, 1887.
- [39] P. Ya. Grozman, *Classification of bilinear invariant operators over tensor fields*, Functional Anal. App. 14 :2 (1980), 127-128.
- [40] P.Ya. Grosman, Invariant bilinear differential operators. airXiv : math.RT/0509562.
- [41] P. Grozman, D. Leites, and I.Shchepochkina, "Lie Superalgebras of string theories "Hep-th/ 9702120.
- [42] V. G Kac and J. W. Van de Leur, "On classification of superconformal algebra," in strings -88, edited by S. J. Gates et al (World Scientific.Singapore, 1989), pp. 77-106.
- [43] M. Kodaira and D. Spencer : Annals of Maths. 67(1958) pp 328-466.
- [44] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifold, Preprint q-alg /9709010 (1997).
- [45] O. S. Kravchenko and B. A. Khesin, Physics Institue, Academy of Sciences of the USSR. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, vol.25, N. 2, pp. 83-85(1991).
- [46] P. B. A. Lecomte, *On the cohomology of $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{R})$ acting on differential operators and $\mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{R})$ -equivariant symbols*, Indag. Math. NS. 11 (1), (2000), 95 – –114.
- [47] P. Lecomte, V. Ovsienko, *Cohomology of the vector fields Lie algebra and modules of differential operators on a smooth manifold*, Compositio Mathematica **124 :1** (2000) 95–110.
- [48] D. A. Leites, Supermanifold Theory, Karelia Branch of Acad. Sci. Petrozavodsk, 1983(en russe).

- [49] Yu. I. Manin and A.O Radul, A Supersymmetric Extension of the Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy, Commun. Math. Phys. 98 (1985), 65-77.
- [50] A. Nijenhuis, P. W. Richardson jr, Deformations of homomorphisms of Lie groups and Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 175-179
- [51] A. Nijenhuis A.R. Richardson, *Cohomology and Deformations in Graded Lie Algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 1-29.
- [52] A. Nijenhuis, R. W. Richardson Jr., *Deformations of homomorphisms of Lie groups and Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 175–179.
- [53] V.Tu Ovsienko, C. Roger, *Extension of Virasoro group and Virasoro algebra by modules of tensor densities on S^1* . Funct.Anal.Appl.31,4(1996).
- [54] V. Ovsienko & C. Roger, *Deforming the Lie algebra of vector fields on S^1 inside the Lie algebra of pseudodifferential operators on S^1* , AMS Transl. Ser. 2, (Adv. Math. Sci.) vol. 194 (1999) 211–227.
- [55] V. Ovsienko, C. Roger, *Deforming the Lie algebra of vector fields on S^1 inside the Poisson algebra on T^*S^1* , Comm. Math. Phys., **198** (1998) 97–110.
- [56] A.O.Radul, *Lie algebras of differential operators, their central extensions and W-algebras*, funct. Anal. Appl., **25** (1991) 25–39.
- [57] R. W. Richardson, Deformations of subalgebras of Lie algebras, J. Diff. Geom.3 (1969)289-308.
- [58] C. Roger, Deformation and cohomology of algebra of currents. Banach centre Publication (1990).
- [59] F. Wagemann *Algèbres de Lie de dimension infinie-cohomologie et déformations*. HAL Id : tel-00397780.

Titre : Cohomologie et déformation des champs de vecteurs sur une variété de dimension 1

Mots Clefs : Algèbre de Lie , Déformation, Cohomologie

Résumé : On considère la structure du module $\text{Vect}(\mathbb{R})$ sur les espaces des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les espaces de densités. On calcule la première cohomologie différentielle des champs de vecteurs d'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{R})$ avec des coefficients dans l'espace $\mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$ des opérateurs différentiels bilinéaires agissant sur les densités pondérées. On considère l'action de $\text{Vect}(\mathbb{R})$ par la dérivée de Lie sur les espaces d'opérateurs pseudodifférentiels $\Psi\mathcal{DO}$. On étudie les déformations $\mathfrak{h}$ -triviales de l'intégration standard de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(\mathbb{S}^1)$ de champs de vecteurs lisses sur le cercle, dans l'algèbre de Lie de fonctions sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{S}^1$. On classe les déformations de cette action qui deviennent triviales une fois limitées à $\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(1)$ ou $\mathfrak{sl}(2)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité des déformations infinitésimales sont données.

Title : Cohomology and formation of vector fields on a variety of dimensions 1

Keys words : Lie Algebra ,Deformation, Cohomology

Abstract : We consider the $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -module structure on the spaces of bilinear differential operators acting on the spaces of weighted densities. We compute the first differential cohomology of the vector fields Lie algebra $\text{Vect}(\mathbb{R})$ with coefficients in space $\mathcal{D}_{\lambda,\nu;\mu}$ of bilinear differential operators acting on weighted densities. we consider the action of $\text{Vect}(S^1)$ by Lie derivative on the spaces of pseudodifferential operators $\Psi\mathcal{DO}$. We study the $\mathfrak{h}$ -Trivial deformations of the standard embedding of the Lie algebra $\text{Vect}(S^1)$ of smooth vector fields on the circle, into the Lie algebra of functions on the cotangent bundle T^*S^1 . We classify the deformations of this action that become trivial once restricted to $\mathfrak{h}$ where $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(1)$ or $\mathfrak{sl}(2)$. Necessary and sufficient conditions for integrability of infinitesimal deformations are given.