Université Fédérale
Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Co-tutelle : Polytechnique Montréal

Présentée et soutenue par :
Mohamed Amin BEN LASSOUED

le mercredi 11 décembre 2019

Titre :

Localisation et concentration d'énergie vibratoire dans une structure composite de type sandwich

---

École doctorale et discipline ou spécialité :
ED MEGeP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

Unité de recherche :
Institut Clément Ader

Directeur(s) de Thèse :

M. Guilhem MICHON (directeur de thèse)
Mme Annie ROSS (co-directrice de thèse)

Jury :
M. Aurélian VADÉAN Professeur Polytechnique Montréal - Président
M. Manuel COLLET Directeur de Recherche LTDS Lyon - Examinateur
M. Simon JONCAS Professeur ÉTS Université du Québec - Rapporteur
M. Guilhem MICHON Directeur de Recherche ISAE-SUPAERO - Directeur de thèse
M. Morvan OUISSE Professeur ENSMM Besançon - Rapporteur
Mme Annie ROSS Professeure Polytechnique Montréal - Co-directrice de thèse

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

ET

Institut Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace

affiliée à l'Université de Toulouse

Localisation et concentration d'énergie vibratoire dans une structure composite de type sandwich

MOHAMED AMIN BEN LASSOUED

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de Philosophiae Doctor

Génie mécanique

Décembre 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

ET

Institut Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace

affiliée à l'Université de Toulouse

Cette thèse intitulée :

Localisation et concentration d'énergie vibratoire dans une structure composite de type sandwich

présentée par **Mohamed Amin BEN LASSOUED**

en vue de l'obtention du diplôme de Philosophae Doctor

a été dûment acceptée pour une thèse par le jury d'examen constitué de :

Aurélian VADEAN, président

Annie ROSS, membre et directrice de recherche

Guilhem MICHON, membre et directeur de recherche

Simon JONCAS, membre

Manuel COLLET, membre

Morvan OUISSE, membre externe

DÉDICACE

À ma famille

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Annie et Guilhem, pour leur présence et leur implication durant ces quatre années de thèse. C'est un immense privilège d'avoir à la fois la liberté dans l'exploration de mon sujet et un soutient solide dans la réalisation des travaux. Je remercie Annie Ross pour son temps précieux et les discussions enrichissantes dans les plans académique et personnel. Son enseignement m'a appris que la rigueur est le moyen le plus efficace pour avancer. Je remercie Guilhem Michon pour ses conseils précieux qui m'ont permis d'avancer avec plus de certitude dans la compréhension des aspects théoriques et expérimentaux de ma thèse.

Je tiens à remercier les équipes de l'ICA et du LAVA pour leur accueil chaleureux et qui, malgré les périodes de séjour dans chaque pays, m'ont toujours fait sentir que j'avais une place. Je remercie aussi Ahmed Abbad pour son aide dans la partie expérimentale, ses encouragements et sa bonne humeur. Je remercie toute l'équipe de l'INRIA de Nancy notamment Jonàs Martinez qui ont ouvert leur porte et qui ont collaboré à la réussite de notre projet.

Que serait la thèse sans toutes les personnes merveilleuses que j'ai rencontrées tout le long de ces quatre années, tous les doctorants et personnes qui font leur maîtrise ou leur stage à Polytechnique et à l'ISAE. J'ai beaucoup aimé partager les cafés, repas et discussion avec toutes ces nouveaux amis que je ne citerai pas tous de peur d'en oublier.

Merci enfin à ma famille : Asma, Mongi, Salma, Fatma, et Farah. Merci pour tous leurs efforts leurs conseils, pour leur soutien avant pendant et après cette thèse, pour leur écoute leur intérêt et leur confiance. Merci pour les moments passés ensemble, et pour les moments avenir.

RÉSUMÉ

Le contrôle des vibrations est une étape déterminante dans la conception d'une partie significative des systèmes mécaniques. Le domaine le plus concerné est celui du transport, en particulier, la filière aéronautique où les contraintes de performances sont de plus en plus exigeantes. L'efficacité énergétique des aéronefs a été optimisée à travers l'exploitation de matériaux rigides et de faible densité de type sandwich notamment, au détriment des performances vibratoires de l'ensemble de la structure. Ce changement de normes dans l'industrie incite au développement de nouvelles approches pour le contrôle des vibrations.

Les solutions actuelles pour le contrôle vibratoire sont limitées dans leurs utilisations par leurs bandes de fréquences optimales. L'objectif de cette thèse est de confiner les vibrations de différentes fréquences sur des positions distinctes de la structure en bio-mimant le phénomène de tonotopie responsable du mécanisme de l'audition dans l'oreille interne. Ce phénomène servira en définitive à l'optimisation de la dissipation et de la conversion d'énergie vibratoire en plaçant les dispositifs de contrôle sur les positions où leurs efficacité est maximale.

Le phénomène de la tonotopie est d'abord examiné dans plusieurs domaines. L'étude du mécanisme de l'audition dans l'oreille interne met en évidence la nécessité d'avoir un gradient de propriété dans la structure pour avoir une tonotopie. En parallèle, l'étude des systèmes mécaniques désaccordés montre que le phénomène de « *Turning Point* » peut engendrer un confinement de vibrations. En effet, en divisant la structure en deux parties : une propagative et une non-propagative, le *Turning Point* constitue le mécanisme fondamental dans la localisation des vibrations.

Dans le but d'explorer la réalisabilité de la tonotopie dans des structures industrialisable, des modèles de plus en plus complexes sont utilisés. Afin de limiter la complexité et parvenir à une bonne maitrise du phénomène, la présente étude est réalisée sur des poutres uniquement. Un modèle analytique d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de raideur longitudinal est d'abord développé. Il confirme qualitativement la possibilité d'obtenir une tonotopie à l'aide d'un « Turning Point » dont la position le long de la structure dépend de la fréquence. Un deuxième modèle d'un ensemble d'oscillateurs couplés est ensuite développé pour une estimation plus quantitative de la tonotopie. Ce modèle montre l'effet de la variation séparée

des différents paramètres (masse, raideur, couplage, amortissement) sur la localisation des vibrations. Il montre aussi l'effet combiné des diverses variations.

La création du gradient de propriété constitue un des verrous technologiques les plus importants dans cette thèse. L'impression 3D est identifiée comme le moyen le plus adapté pour la réalisation du matériau d'âme. Une structure en cellules de Voronoï, semblable aux mousses, est choisie comme brique élémentaire de notre matériau. Ce choix est motivé par les caractéristiques de la structure permettant l'obtention d'un gradient continu et de large amplitude. Des échantillons de différentes densités de ce matériau sont testés mécaniquement en statique et en dynamique afin de reconstituer le gradient effectif du matériau imprimé qui va être utilisé dans un modèle en éléments finis.

Le matériau à gradient de propriété est ensuite intégré en tant qu'âme dans une structure sandwich. Dans cette configuration, la structure présente un phénomène semblable à un Trou Noir Acoustique où les vibrations sont localisées à l'extrémité de la structure.

Enfin, le matériau à gradient est utilisé comme une âme d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure. Cette structure démontre la réalisabilité du phénomène de tonotopie recherché.

ABSTRACT

Vibration control is a decisive step in the design of many mechanical systems. The transport sector is the most concerned area, especially in aeronautics where performance constraints are more and more demanding. Considerable aircraft energy optimization has been achieved through an increasing use of rigid and low density materials such as sandwiches . However, this is achieved at the expense of the entire vibration performance of the structure. This shift in the industry's standards encourages the development of new approaches for vibration control.

Common solutions for vibration control are limited in the wideness of their optimal frequency bands. Given that limitation, the aim of this thesis is to confine the vibrations of different frequencies on different positions of the structure, which shall be possible by means of bio-mimicking the phenomenon of tonotopy responsible for the mechanism of hearing in the inner ear. This phenomenon will ultimately serve to optimize dissipation and vibrational energy conversion by placing the control devices on positions with corresponding frequencies.

First, the phenomenon of tonotopy is examined in several areas. Studies exploring the hearing mechanism in the inner ear highlight the need to have a property gradient in the longitudinal direction of the structure in order to produce tonotopy. Simultaneously, studies on detuned mechanical systems demonstrate that the phenomenon of "Turning Point" can lead to confined vibration. Indeed, by dividing the structure into two parts: one propagative and one non-propagative, the Turning Point constitutes the fundamental mechanism in the localization of vibration.

In this thesis, exploring the feasibility of tonotopy in industrializable structures is carried out using a set of increasingly complex models. In order to limit the complexity and to have good control of the phenomenon, the present study is done on beams only. An analytical model based on a monolayer sandwich beam is first developed. It qualitatively confirms the possibility of having a tonotopy using a "Turning Point" that translates along the structure as a function of frequency. A second model based on a set of coupled oscillators is then developed in order to have a more quantitative estimate of tonotopy. It shows the effect of separately varying the different parameters (mass, stiffness, coupling, damping) on the localization of the vibrations, as well as the effect of combined parameter variations.

The creation of the property gradient is one of the most important technological barriers in this thesis. 3D printing is identified as the most suitable way to create the gradient. A Voronoï cell structure, similar to foams, is chosen as the elemental brick of our material since it guarantees continuous gradient and wide amplitude. Samples of different densities of this material are tested statically and dynamically to reconstruct the effective gradient of the printed material that will be used in a finite element model.

The gradient property material is then integrated as a core in a sandwich structure. In this configuration, the structure shows an acoustic black hole-like phenomenon whereby vibration is localized at the end of the structure.

Finally, the gradient material is used as a core a monolayer sandwich beam clamped on its lower skin with a homogeneous upper skin. This structure demonstrates the feasibility of the desired tonotopic phenomenon.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE III

REMERCIEMENTS IV

RÉSUMÉ V

ABSTRACT VII

TABLE DES MATIÈRES IX

LISTE DES TABLEAUX XII

LISTE DES FIGURES XIII

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS XXI

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES XXII

LISTE DES ANNEXES XXIV

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

1.1 Contexte de l'étude 1

1.2 Objectif 1

1.3 Organisation de la thèse 2

1.3.1 Revue de littérature 3

1.3.2 Étude de la localisation dans un système à gradient 3

1.3.3 Réalisation de la tonotopie 4

1.4 Discussion 4

CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART 5

2.1 La cochlée et les mécanismes de l'audition 5

2.1.1 Anatomie et physiologie de la cochlée 5

2.1.2 Modèle analytique simplifié de la cochlée 8

2.2 Localisation dans les systèmes mécaniques 12

2.2.1 Localisation dans les systèmes désaccordés 14

2.2.2 Passage d'un modèle discret à un modèle continu 20

2.2.3 Turning Point 22

2.2.4 Trou Noir Acoustique 27

2.3 Matériau architecturés et matériaux à gradient de propriété 30

2.4 Conclusion 33

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE 34

CHAPITRE 4 LOCALISATION DANS LES SYSTÈMES MÉCANIQUES 38

4.1 Poutres et gradient de propriété 38

4.1.1 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable : mise en évidence du *Turning Point* 39

4.1.2 Localisation dans les systèmes continus à gradient de propriété 45

4.1.3 Amortissement visqueux dans une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à propriétés variables 51

4.1.4 Les cas du cisaillement et des poutres sandwich 53

4.2 Localisation dans les systèmes discrets 56

4.2.1 Localisation dans les systèmes discrets non amortis 57

4.2.2 Localisation dans les systèmes discrets amortis 70

4.3 Conclusion 78

CHAPITRE 5 MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS 80

5.1 Création des FGM en collaboration avec l'INRIA-Nancy 81

5.2 Caractérisation du matériau architecturé imprimé en 3D 83

5.2.1 Comportement en compression 85

5.2.2 Comportement en cisaillement 90

5.2.3 Facteur de forme 93

5.2.4 Évolution du module de stockage en fonction de la fréquence 95

5.3 Conclusion 98

CHAPITRE 6 CONFINEMENT EXPÉRIMENTAL DE L'ÉNERGIE VIBRATOIRE 101

6.1 Réalisation d'un pseudo-Trou Noir Acoustique 101

6.1.1 Dispositif expérimental 101

6.1.2 Modélisation par éléments finis 102

6.1.3 Résultats 103

6.1.4 Conclusion 106

6.2 Réalisation de la tonotopie 107

6.2.1 Dispositif expérimental et modélisation 107

6.2.2 Résultats expérimentaux 108

6.2.3 Analyse numérique de la tonotopie 113

6.2.4 Conclusion 117

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNERALE 118

7.1 Synthèse des travaux 118

7.2 Perspectives 121

CHAPITRE 8 CONCLUSION 123

RÉFÉRENCES 124

ANNEXES 133

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4-1 Propriété de la poutre avec une raideur à la base. 42

Tableau 5-1 Paramètre de caractérisation de la Figure 5.9 88

Tableau 5-2 Contraintes dynamiques obtenue lors de la caractérisation en cisaillement dans la Figure 5.15 92

Tableau 5-3 Facteur de correction viscoélastique par rapport à une valeur de caractérisée expérimentalement de 47MPa à 100Hz 98

Tableau 6-1 Coefficients d'amplification entre le premier ventre de vibration et et l'amplitude des vibrations à l'extrémité de la poutre 106

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Schématisation de l'objectif global du projet. 2

Figure 2.1 Anatomie de l'oreille [2] 6

Figure 2.2 Représentation de la cochlée déroulée. La tonotopie correspond à une localisation de la déformée en fonction de la fréquence [3]. 7

Figure 2.3 Schéma d'une onde localisée dans la cochlée, (a) vue en perspective, (b) vue de coupe. 10

Figure 2.4 Schéma de l'évolution du nombre d'onde et de la vitesse de groupe pour un modèle simplifié de la cochlée. 12

Figure 2.5(a) Modèle structural d'une roue aubagée d'une turbomachine, (b) Mode conventionnel contre mode fortement localisé dans une structure périodique (accordée) et quasi-périodique (désaccordée) [15]. 14

Figure 2.6 Pendules couplés désaccordés [22]. 15

Figure 2.7 Valeurs propres adimensionnelles pour deux pendules (a) fortement couplés R=0.5, (b) faiblement couplés R=0.025 [22]. 16

Figure 2.8 Deux représentations équivalentes d'un système à N oscillateurs couplés [25]. 17

Figure 2.9 Facteur de localisation pour X=10%, (a) et R=1, (b) et R=0.01, méthode de perturbation classique (-) et simulation Monte-Carlo (+) [25]. 19

Figure 2.10 Facteur de localisation à la fréquence médiane en fonction du ratio désaccordage-facteur de couplage, simulation Monte-Carlo (-), méthode de perturbation classique (- - -) et méthode de perturbation modifiée (-- - --) [25]. 20

Figure 2.11 Poutre avec un défaut brusque [28]. 23

Figure 2.12 Forme du défaut et déformées modales de la barre figure 2.11 avec $\beta=5\cdot10^{-5}$ [28]. 24

Figure 2.13 Modes localisés pour une poutre de longueur infinie avec un défaut parabolique (a) n=1; (b) n=2; (c)=3 [28]. 27

Figure 2.14Schéma d'un profil de TNA à l'extrémité d'une poutre [32]. 28

Figure 2.15 TNA à deux degrés de liberté pour des ondes de flexion dans une plaque [36].....29

Figure 2.16 Deux procédures permettant d'obtenir un gradient : (a) Variation graduel de la densité (b) Changement de la microstructure [38]. 31

Figure 2.17 Matériau avec un gradient d'élasticité a) microstructure optimisée b) Vue de coupe montrant la structure interne [39].....31

Figure 2.18 Structure de Voronoï : Gauche, avec un calcul de distance euclidienne. Droite, avec un calcul de distance polygonal adapté pour les contraintes de fabrication [42].....32

Figure 2.19 Comparaison entre une structure à gradient de propriété rhombique (gauche) et Voronoï polyédrique (droite) [42].....33

Figure 3.1 Deux poutres utilisées pour l'étude analytique. En haut, une poutre homogène avec une base à gradient de propriétés et en bas, une poutre avec un gradient de propriétés. 35

Figure 3.2 Modèle discret de 100 oscillateurs couplés. 36

Figure 3.3 Schéma d'une structure de Voronoï bidimensionelle à gradient de propriétés [42]. ...36

Figure 3.4 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés en configuration encastrée-libre. 37

Figure 4.1 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable. ..40

Figure 4.2 Évolutions (a) de la vitesse de groupe et (b) du nombre d'onde en fonction de x pour différentes valeurs de fréquence incidente. 43

Figure 4.3 Évolution de l'amplitude de la courbe enveloppe en fonction de x pour une fréquence de 200Hz. 44

Figure 4.4 Modèle éléments finies simplifiée présentant une tonotopie, (a) mode à 707Hz, (b) mode à 941Hz. 44

Figure 4.5 Évolution des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction des propriétés variable dans une barre.....46

Figure 4.6 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une barre avec une raideur de contrainte longitudinale variable. 48

Figure 4.7 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une poutre avec une variation de propriété. 49

Figure 4.8 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable. 50

Figure 4.9 Évolution des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable et un amortissement visqueux constant $C = 0.001\ vert;\ C = 0.01 bleu; C = 0.1(rouge)$. Les courbes en traits discontinus représentent la projection des nombres d'onde sur le plan complexe. 52

Figure 4.10 Nombres d'onde adimensionnels $K1,2 = k1,2rg$ en fonction de la fréquence adimensionnelle $\Omega = \omega rg/cS$ pour des sections régulières et des $R = 0.01, 0.1, 0.5\ et\ 1$ [45] 54

Figure 4.11 Nombre d'onde pour une poutre sandwich ___, $\kappa 1$; ----,$\kappa 2$ (evanescent); -.-.-., $\kappa 2$ (propagatif); ...., $\kappa 3$. Les lignes parallèles sont des asymptotes pour les nombres d'onde [49]. 56

Figure 4.12 Deux représentations de chaînes d'oscillateurs: a) Configuration avec un déplacement longitudinal. b) Configuration avec un déplacement transversal 57

Figure 4.13 Évolution des vecteurs propres pour un système avec une variation de raideur faible. Le confinement du premier type est présenté par le 4ème (a) et le 12ème (b) modes. Le 50ème mode (c) ne présente pas de confinement d'énergie. Le confinement du deuxième type est représenté par le 88ème (d) et le 96ème (e) modes. (f) illustre la cascade des tous les modes du système. Les paramètres utilisés pour cette extraction modale sont : $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$ 59

Figure 4.14 Évolution des valeurs propres montrant les modes auxquels ont lieu les points d'inflexion. Pour une configuration où $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$ 60

Figure 4.15 Évolution de la dérivée des valeurs propres montrant les modes auquel a lieu les points d'inflexion (modes n°20 n°51 et n°82). Pour une configuration où $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$ 61

Figure 4.16 Confinement du premier et deuxième type dans une chaîne d'oscillateurs avec un gradient de la masse représentés respectivement par le 8ème (a) et le 92ème (b) modes; $\Delta m = 0.01; \Delta k = 0; \Delta kc = 0$ 62

Figure 4.17 Vecteurs propres pour des chaînes d'oscillateurs pour différent gradient de propriétés 63

Figure 4.18 Confinements du premier et du deuxième type présents simultanément sur les 50ème modes pour des systèmes avec (a) $\Delta m = 0; \Delta k = 0.04; \Delta kc = 0; \kappa = 4$; (b) $\Delta m = 0; \Delta k = 0.3; \Delta kc = 0; \kappa = 30$ 65

Figure 4.19 Évolution des valeurs propres et de leurs dérivées en fonction de κ 66

Figure 4.20 Évolution des vecteurs propres avec une variation linéaire de la raideur et une variation parabolique de la masse. Les modes tonotopiques sont illustrés par le 20ème (a) et le 21ème (b) mode. Le mode 70 (c) est un mode de transition ou les deux branches tonotopiques fusionnent. Le 88ème (d) et 96ème (e) modes illustrent les modes non tonotopiques. Les paramètres utilisés pour ce système sont $\Delta m = 0.5;\ \Delta k = 0.5; \Delta kc = 0$ 68

Figure 4.21 Évolutions de la valeur propre d'un ensemble d'oscillateurs en fonction de κ 69

Figure 4.22 Système de n oscillateurs amortis 70

Figure 4.23 Le 5ème (bleu) et le 55ème (brun) modes complexes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.01$ 72

Figure 4.24 La partie réelle et la valeur absolue du 5ème (bleu) et du 55ème (brun) mode d'une structure: $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.01$. 73

Figure 4.25 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.02; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.0001$. 74

Figure 4.26 Valeurs absolues des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.02; \Delta kc = 0;\ c = 2.02; cc = 0.0001$. 75

Figure 4.27 (a) Lieux des racines (bleu) $\Delta k = 0.08;\ c = 0.1; cc = 0.0001$; (rouge) $\Delta k = 0.08;\ c = 0.1; cc = 0.001$ (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.001$. 76

Figure 4.28 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.02$ 77

Figure 4.29 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; cc = 0.01$ 78

Figure 5.1 Poutre sandwich avec une âme en biseau de raideur variable 81

Figure 5.2 Structure de Voronoï à cellules ouvertes avec un gradient de propriétés [41] 81

Figure 5.3 Le diagramme Voronoï d'un jeu de points sous différent types de mesure de distance [42]. 82

Figure 5.4 Création d'une structure en cellules de Voronoï. (a) Conception avec l'interface du logiciel IceSL 2.2.1 (b) Fabrication avec une imprimante Ultimaker S5 83

Figure 5.5 Les spécimens de différents taux de remplissage utilisés pour la caractérisation en compression, accompagné d'un spécimen plein fabriqué en impression3D (à gauche). 84

Figure 5.6 Évolution de la masse volumique en fonction du remplissage. 85

Figure 5.7 Dispositif de caractérisation statique et dynamique en compression 85

Figure 5.8 Coubes de contraintes-déformations des spécimens avec des remplissages de 10, 25, 50, 75 et 100% 86

Figure 5.9 Évolution du module d'Young autour d'une contrainte de 0.5MPa, en fonction du remplissage. (Le module d'Young d'un spécimen massif en PLA est de 2 GPa) 87

Figure 5.10 Évolution du module de stockage en fonction de la fréquence pour des remplissages de 10, 25, 50, 75 et 100%. (Les paramètres de ces essais sont indiqués dans le Tableau 5-1) 88

Figure 5.11 Évolution du module de stockage en fonction du remplissage pour une caractérisation en compression dans le sens de compression (bleu) et perpendiculaire au sens de l'impression (rouge). (Le module de stockage d'un spécimen massif en PLA est de 1.8 GPa) 89

Figure 5.12 Évolution du module de stockage en fonction de la densité 90

Figure 5.13 Dispositif de caractérisation en double cisaillement 90

Figure 5.14 Effet de l'amplitude dynamique sur le module de stockage en cisaillement pour un remplissage de 25%. (le déplacement imposé est en mm et la contrainte mesurée est en MPa) 91

Figure 5.15 Évolution du module de stockage en cisaillement en fonction du remplissage déterminé expérimentalement (bleu) et calculé (gris) à partir de la caractérisation en compression 92

Figure 5.16 Deux spécimens pleins avec des dimensions de 20×20×20 et 10×10×30 et des facteurs de forme relatifs de 0.25 et 0.083 93

Figure 5.17 Évolution du module d'Young en fonction du remplissage pour deux facteurs de forme. Le ratio entre les deux paramètres est tracé en gris. 94

Figure 5.18 Évolution du module d'Young pour différents remplissages en fonction de la fréquence par caractérisation directe avec une machine Metravib. Pour des spécimens de dimensions 10×10×30. 95

Figure 5.19 Dispositif expérimental pour la caractérisation inverse des propriétés viscoélastiques du matériau architecturé à 10% de remplissage 96

Figure 5.20 Le mode n°8 obtenue numériquement pour un module de stockage de 47MPa.....96

Figure 5.21 Fréquence modale obtenue numériquement des modules de stockage de 47, 94, 141 et 188MPa et les fréquences modales de références obtenues expérimentalement. 97

Figure 5.22 Modules de stockage interpolés en fonction des fréquences (bleu). Interpolation des propriétés élastiques (noir). 97

Figure 5.23 Schéma des différentes propriétés du matériau architecturé et leurs causes. 100

Figure 6.1 Poutre sandwich encastré-libre avec une âme FGM. 101

Figure 6.2 Modèle par éléments finis avec le détail de l'âme à gradient de propriétés.....102

Figure 6.3 Évolution spatiale linéarisé du module d'Young et de la densité intégré dans le modèle numérique. 103

Figure 6.4 Réponse en fréquence moyennée d'une poutre sandwich avec un gradient de propriété. (bleu) expérimentale (vert) numérique.....104

Figure 6.5 Comparaison schématique entre un comportement de vibration classique et un comportement en Trou Noir Acoustique.....104

Figure 6.6 Déformées modales d'une poutre sandwich avec une âme en FGM (a) expérimentale (b) en éléments finis et (c) d'une poutre sandwich en éléments finis avec une âme à propriétés constantes 105

Figure 6.7 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable .107

Figure 6.8 Équivalence entre la position relative et la densité.....108

Figure 6.9 Évolution quadratique du module d'Young en fonction de la position relative sur la poutre.....108

Figure 6.10 Réponse en fréquence moyennée d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété. 109

Figure 6.11 Évolution des modes tonotopiques pour une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété. Pour une excitation sur le bord le moins rigide (rond Rouge). 110

Figure 6.12 Carte tonotopique de l'essai présenté dans la Figure 6.11 111

Figure 6.13 Évolution des modes tonotopiques pour une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété. (a) Excitation sur le bord le moins rigide (même que 5.11). (b) excitation sur le bout le plus rigide. Le rond rouge indique la position l'excitation.....112

Figure 6.14 Comparaisons entre les fréquences modales pour des excitations sur la partie la moins rigide (bleu) et la plus rigide (rouge) 113

Figure 6.15 Comparaison entre les déformées modales tonotopiques de différentes configurations. Trois gradients du module d'Young sont implémentés (a) gradient linéarisé (Figure 6.3), (b) gradient linéarisé avec correction viscoélastique (c) gradient quadratique (Figure 6.8). 116

Figure 7.1 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés avec des pivots qui forçant la vibration symétrique des peaux.....122

Figure 7.2 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés dont le cisaillement est diminué. 122

Figure 7.3 Composantes de la contrainte appliquée sur l'âme et les peaux de la structure [68]. 135

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ddl degré de liberté

FDM Fused Deposition Modeling

FGM Functionally Graded Material

NES Nonlinear Energy Sink

PLA Polylactic acid

TNA Trou Noir Acoustique

TP Turning Point

WKB Approximation de Wentzel Kramers et Brillouin

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

$a(x,t)$	Aire déplacé par le déplacement de la membrane basilaire (m^2)
g	Accélération due à la gravité ($m \cdot s^{-2}$)
$j(x,t)$	Flux volumique dans une section de la cochlée ($m^3 \cdot s^{-1}$)
k	Nombre d'onde (m^{-1})
k_i	Raideur d'un ressort ($N \cdot m^{-1}$)
l	Longueur du pendule (m)
m	Masse ponctuelle (kg)
$m(x)$	Densité effective de la membrane ($kg \cdot m^{-3}$)
$p(x,t)$	Différence de pression de part et d'autre de la membrane basilaire (Pa)a
$u(x,t)$	Solution en déplacement de l'équation différentielle
A	Surface de la section d'une poutre (m^2)
$A(x,t)$	Enveloppe de la fonction d'onde
$Ai(z)$	Fonction d'Airy du premier type
$B(x)$	Forme du défaut
$Bi(z)$	Fonction d'Airy du second type
$D(z)$	Coefficients d'amortissement linéique
E	Module d'Young (MPa)
E'	Module de stockage

F	Force externe (N)
L	Longueur d'une poutre (mm)
$M(z)$	Masse linéique des oscillateurs (kg·m^{-1})
R	Rapport de couplage
Rt	Coefficient d'amplification de la vibration au bord de la poutre
$S(x)$	Raideurs linéique des ressorts (N·m^{-2})
T	Tension longitudinale appliquée à la structure (N)
$\zeta(y)$	Déformée latérale de la membrane
$\theta(x,t)$	Eikonal
$\kappa(x)$	Fonction de raideur
λ	Valeur propre
ρ	Densité du fluide dans la cochlée (kg·m^{-3})
$\sigma(x)$	Masse linéique du fluide dans la cochlée (kg·m^{-1})
$\vartheta(x)$	Raideur de la membrane basilaire (N·m^{-1})
$\Delta(\lambda)$	Position de la singularité
Ω	Fréquence d'excitation (Hz)

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Modélisation des poutres sandwich 133

Annexe B Matrice masse et raideur 137

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte de l'étude

Dans le cadre du développement des structures aéronautiques et dans le but de réaliser des aéronefs plus performants, l'utilisation des matériaux composites devient de plus en plus courante. Ceci est dû au ratio de masse volumique par rapport à la raideur statique faible des matériaux. L'utilisation de ces nouveaux matériaux aura deux avantages pour l'industrie aéronautique. La première est économique; la masse réduite dû à l'utilisation des composites permettra de réduire les coûts en carburant ou d'augmenter la charge efficace de l'appareil. La deuxième est écologique; elle est liée à la réduction des émissions en gaz polluant par passager. Cependant, l'introduction de ce type de matériaux réduit les sources de dissipation d'énergie. En effet, les nouvelles possibilités en termes de fabrication, données par les matériaux composites, ont permis la construction de structures complexes en monobloc. Ceci conduit à la réduction des surfaces de liaison, une des sources principales de la dissipation d'énergie dans les structures. Cette perte en énergie dissipée se traduit par une augmentation des niveaux vibratoires et acoustiques dans l'aéronef. Or, le confort vibratoire et l'atteinte des nouvelles normes environnementales en termes de niveau sonore sont des défis de taille. Les solutions actuellement appliquées impliquent l'ajout de masse (matériaux amortissants, filtres, oscillateurs accordés …) ce qui va à l'encontre de l'objectif principal de l'utilisation des matériaux composites.

1.2 Objectif

Dans ce contexte, ce projet adopte une nouvelle approche pour explorer des méthodes de conception antivibratoires passives qui limitent l'ajout de masse. L'utilisation du phénomène de localisation des vibrations sera au centre de cette approche. Pour cela, une étude détaillée des systèmes présentant ce phénomène est effectuée. Ces systèmes présentent tous une propriété commune, l'inhomogénéité. Cette inhomogénéité se manifeste par la variation spatiale, brusque ou graduelle, d'une ou plusieurs caractéristiques du système.

L'idée globale du projet est de créer des poutres sandwich avec une âme présentant des propriétés variables sur la longueur (Figure 1.1). Ces poutres auront comme caractéristique de pouvoir localiser différentes fréquences d'excitation sur différentes positions dans un phénomène appelé

tonotopie. Les vibrations ainsi localisées seront réparties sur différentes positions en fonction de leur fréquence tel qu'illustré à la Figure 1.1 (a). Ceci facilitera par la suite leur conversion en énergie électrique par l'ajout d'oscillateurs secondaire désignés pour chaque fréquence Figure 1.1 (b). Le reste de l'énergie sera dissipé par l'âme dans un troisième temps, Figure 1.1 (c).

L'objectif principal de cette thèse est de réaliser l'étape de localisation (Figure 1.1 (a)). Plus précisément, il est question de créer une structure de section constante, dont les dimensions s'approchent d'une échelle utilisable industriellement, dans laquelle un gradient de propriétés permet l'obtention d'un phénomène de tonotopie. Ceci est effectué par la création et caractérisation d'un *Functionally Graded Material* (FGM) imprimé en 3D, basé sur des structures de Voronoï à géométrie variable.

Bien que les structures sandwiches sont utilisées en aéronautique principalement sous la forme de plaques ou de coques, nous nous concentrerons dans cette thèse à valider le concept de tonotopie sur des poutres sandwiches. Ceci permettra d'appréhender plus simplement ce phénomène en ayant une meilleure maitrise par des approches complémentaires analytique, numérique et expérimentale.

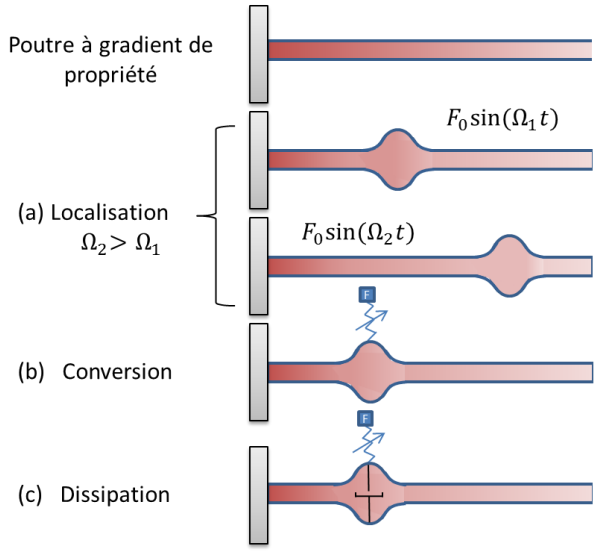


Figure 1.1 Schématisation de l'objectif global du projet.

1.3 Organisation de la thèse

La thèse est divisée en trois grandes parties suivies d'une discussion et d'une conclusion.

1.3.1 Revue de littérature

Ce chapitre sera consacré à la présentation du phénomène de localisation dans les différentes branches de la littérature. Il est entamé par la bio-inspiration au cœur du projet, le mécanisme de l'audition. L'anatomie et la physiologie de l'oreille interne et notamment d'un organe appelé cochlée sont présentées. Ceci va amener à la discussion d'un modèle simplifié de la cochlée et ainsi déterminer les mécanismes fondamentaux de la tonotopie.

Une deuxième partie de la revue de littérature est consacrée à l'étude de localisation dans les systèmes mécaniques discrets et continus. Le *Turning Point*, un phénomène vibratoire où une solution d'onde propagative se transforme en solution non propagative, est relié au phénomène de localisation. Un autre phénomène appelé trous noir acoustique est aussi présenté. Il permettra de montrer qu'une variation de paramètre n'est pas suffisante pour avoir une tonotopie. Ensuite, la conception et la fabrication avec la technologie de l'impression 3D des matériaux à gradient de propriété sont présentées. Enfin une revue de littérature sur le comportement dynamique des poutres sandwich avec et sans gradients de propriétés est discuté pour déterminer leur pertinence dans le cadre de notre approche.

Cela conduira à un bref chapitre où sont exposés les objectifs spécifiques poursuivis dans cette thèse, ainsi que le méthodologie développée compte tenu de l'état de l'art.

1.3.2 Étude de la localisation dans un système à gradient

Le quatrième chapitre aura comme objectif d'améliorer la compréhension et la modélisation du phénomène de tonotopie. Un modèle de poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété sera utilisé pour mettre en évidence la possibilité d'avoir un *Turning Point* dans cette configuration. L'utilisation d'une méthode de résolution adaptée telle que la méthode WKB « Wentzel Kramers Brillouin » sur ce type de système permet de mettre en évidence quelques conditions nécessaires à la réalisation de la tonotopie comme la variation non identique de la masse et de la raideur. Une étude effectuée sur un système d'oscillateurs couplés permettra de relier les phénomènes de la localisation, la tonotopie et le *Turning Point* qui a lieu dans les différents systèmes vus dans la revue de littérature. L'apparition d'un deuxième type de *Turning Point* sera discutée. Les différentes localisations, fortes et faibles, sont observées ainsi que quelques

localisations où le confinement spatial des vibrations n'engendre pas une tonotopie. Enfin une dernière partie sera consacrée à l'étude de l'effet de l'amortissement sur la localisation.

1.3.3 Réalisation de la tonotopie

La première étape pour la réalisation de la tonotopie est la fabrication d'un matériau à gradient de propriété ou « *Functionally Graded Material* » (FGM). Ce matériau a été développé en collaboration avec l'équipe de l'INRIA de Nancy. Il consiste en un matériau architecturé imprimé en 3D avec une technologie à dépôt de fil. La structure de ce matériau est constituée à partir d'un schéma en cellule de Voronoï, semblable celui des mousses. La taille des porosités de cette structure varie le long de la structure pour donner le gradient de structure voulu. Ces matériaux sont ensuite caractérisés mécaniquement. Cette caractérisation a un but qualitatif et permet de valider la présence d'un gradient de propriétés et d'en estimer l'amplitude. Ces résultats sont ensuite injectés dans un modèle numérique en éléments finis pour la conception des poutres d'essai. Un ensemble d'essais est réalisé avec différentes configurations de poutres permettra finalement de visualiser la tonotopie.

1.4 Discussion

Les différentes parties de la thèse sont discutées, et les relations entre ces travaux et la littérature sont mises en valeur. Plusieurs choix effectués dans cette thèse sont discutés et justifiés. Enfin, un ensemble de pistes alternatives et de perspectives sont proposées.

CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART

Le mot « localisation » traduit littéralement de l'anglais « *localization* » peut prêter à confusion. En effet, ce mot en pourrait correspondre à la recherche d'une position, comme dans la localisation d'un défaut dans une structure. Dans cette thèse, ce mot sera utilisé dans le sens de confinement. Il fera référence au phénomène de concentration et du confinement de l'énergie vibratoire dans une région particulière de la structure contrairement à sa répartition habituelle le long de la structure.

D'autres phénomènes reliés à la localisation peuvent être trouvés dans la littérature de domaines très variés. Le plus évident est celui de la localisation dans les semi-conducteurs dans la physique des solides. Le parallèle entre ce phénomène et la localisation mécanique a été établi par Hodge [1] dans l'un des premiers articles qui parlent de la localisation dans les systèmes mécaniques. Un autre phénomène vibratoire peut être liée à la localisation, appelé tonotopie. Il s'agit du mécanisme fondamental de l'audition. La tonotopie consiste en une localisation de différentes fréquences de vibration sur différentes positions d'une structure.

Dans ce contexte et dans le but d'utiliser le phénomène de localisation pour un contrôle passif des vibrations, une revue de littérature est effectuée. Dans ce chapitre ces approches assez diverses pour étudier le phénomène vont être reliées. L'accent est aussi mis sur les concepts les plus importants pour lier cette littérature (le *Turning Point*, le désaccordage, l'inhomogénéité, le *mode veering*, le *loci veering*…) ainsi que les méthodes utilisées pour étudier ces systèmes et leur pertinence pour notre application.

2.1 La cochlée et les mécanismes de l'audition

Le mécanisme de l'audition est le point de départ de cette étude. Dans le but de pouvoir s'en inspirer, une étude brève de l'anatomie et de la physiologie de la cochlée s'avère nécessaire. L'explication du fonctionnement de cet organe ne fait pas l'unanimité. En effet, il est toujours un domaine actif dans les sciences biomédicales. Cependant, notre but n'est pas de faire une réplique du mécanisme de l'audition, mais simplement de s'en inspirer pour le contrôle passif des vibrations.

2.1.1 Anatomie et physiologie de la cochlée

Le son perceptible par l'oreille consiste en une variation de pression qui se propage dans l'air. Pour être interprété par le cerveau, ce son passe par plusieurs étapes. Il est canalisé par l'oreille externe

pour arriver jusqu'au tympan. Cette onde de pression va ensuite être transmise à l'oreille moyenne où elle va faire vibrer trois petits os (le marteau, l'enclume et l'étrier), Figure 2.1. L'onde acoustique transformée en vibration le déplacement est ensuite injectée dans l'oreille interne responsable de la transduction des vibrations en signaux neuronaux.

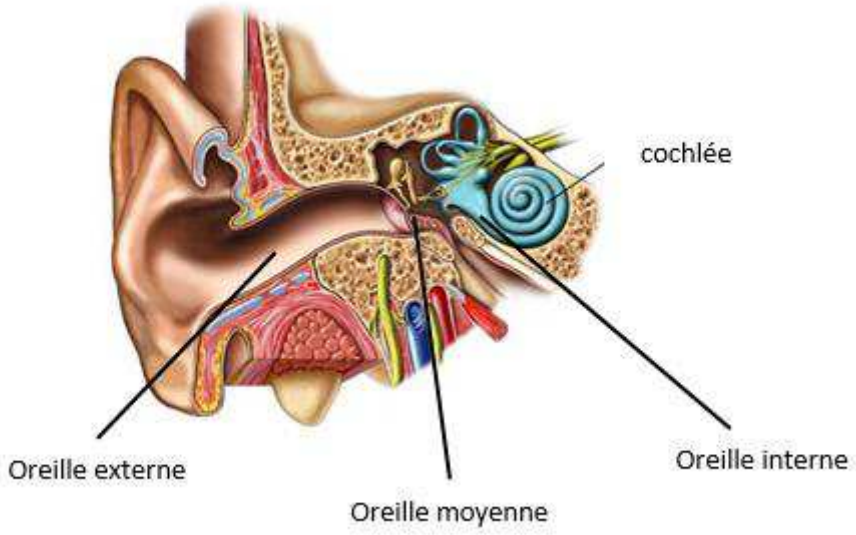


Figure 2.1 Anatomie de l'oreille [2]

L'oreille interne est composée de deux éléments aux fonctions différentes : le système vestibulaire et la cochlée. Le système vestibulaire est responsable de la perception et de l'orientation spatiale. La cochlée, est responsable de l'audition. Cet organe permet de ressentir l'environnement sonore, ce qui paraît anodin, mais qui résulte en réalité d'un processus complexe. Le son parcourt la chaîne de transmission déjà citée avant d'être convertie en signaux neuronaux interprétables par le cerveau. Dans cette chaîne, la cochlée a comme rôle de séparer spatialement les fréquences sonores reçues par la fenêtre ovale par l'intermédiaire de l'étrier. Ceci excite différents nerfs auditifs situés sur la membrane basilaire et envoie des signaux neuronaux différents pour chaque fréquence incidente. Ce phénomène de séparation spatiale des différentes fréquences est appelé *tonotopie*. Ce phénomène est central pour ce projet et sera discuté plus en détail par la suite.

Une représentation graphique simplifiée de cet organe est présentée à la Figure 2.2. La cochlée a la forme d'un cône séparé en deux canaux par une membrane basilaire de largeur variable. Il est important de noter que la cochlée est en réalité enroulée sur elle-même, mais cette géométrie

particulière n'influe pas sur le comportement mécanique étudié et sert uniquement à limiter l'encombrement [3].

La première théorie essayant d'expliquer le principe de fonctionnement de la cochlée provient de Helmholtz et Ellis (1895) [4]. Ces derniers décrivent l'oreille comme une série d'oscillateurs mécaniques dont les fréquences propres sont réparties sur une large gamme de fréquences, négligent cependant les effets du fluide ; mais ce premier modèle a permis de poser les bases de la mécanique de la cochlée. Dans ses expériences sur des cochlées, Von Békésy a observé des ondes se propageant le long de la membrane basilaire [5] toujours de la base vers l'apex (dans le sens des z croissants, Figure 2.2, donc de la partie la plus rigide vers la partie la moins rigide de la membrane basilaire. Ceci est expliqué par la présence de fluide qui couple l'ensemble de la structure. Le même auteur met ce phénomène en évidence à l'aide d'un système de pendules couplés [6].

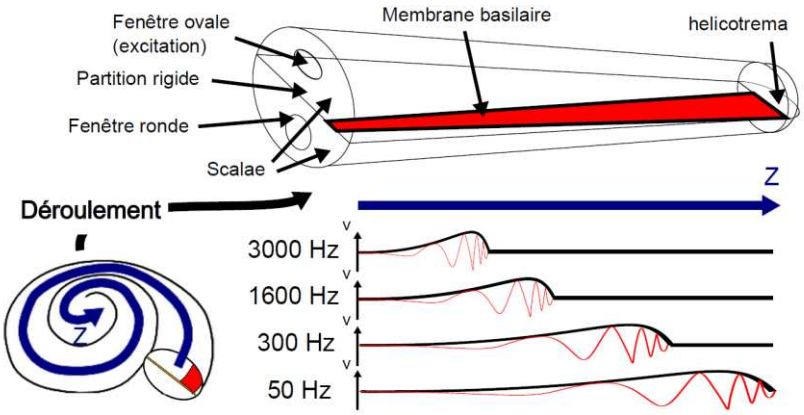


Figure 2.2 Représentation de la cochlée déroulée. La tonotopie correspond à une localisation de la déformée en fonction de la fréquence [3].

L'onde acoustique transmise par l'étrier, organe de l'oreille moyenne, modifie la pression dans le fluide au niveau de la fenêtre ovale. Cette variation de pression est représentée par Lighthill [7] comme deux ondes se propageant dans la cochlée. L'onde prédominante correspond à une différence de pression entre deux canaux (Figure 2.2) qui provoque la flexion de la membrane basilaire. Lorsque la vibration incidente est tonale, l'amplitude des vibrations atteint un maximum dans un endroit précis, appelé *place caractéristique*. Cette place caractéristique est proche de la base pour les hautes fréquences (20 kHz) et de l'apex pour les basses fréquences (20Hz), tel qu'illustré à la Figure 2.2. La relation qui établit la correspondance entre la fréquence d'excitation et le lieu de la place caractéristique est appelée *tonotopie*. Cette tonotopie provient de

l'inhomogénéité de la membrane basilaire qui est plus raide à la base et plus souple à l'apex ainsi que du couplage entre la structure et le fluide. La vibration est ensuite transformée en un signal neuronal à travers un organe complexe, appelé organe de Corti, qui se situe sur la membrane basilaire. Bien que non pris en compte dans la plupart des modèles mécaniques de la cochlée, l'importance de la géométrie et de la physiologie de cet organe est de plus en plus mise en avant [8] [9].

Dans le but de mieux comprendre le fonctionnement de la cochlée plusieurs modèles ont été développés. Les premiers modèles simplifiés utilisent la méthode asymptotique de Wentzel-Kramers-Brillouin ou (WKB) [10] [11]. Cette méthode a été développée initialement pour l'étude de la dynamique du plasma ionisé. Elle a été choisie puisqu'elle permet une approche utilisant la physique de la propagation d'onde. Dans cette approche la cochlée est présentée comme un guide d'onde dont les propriétés varient lentement en fonction de la position. Une onde couplant la flexion de la structure et la variation de la pression dans le fluide se propage le long de ce guide. La relation de dispersion a été d'abord utilisée pour déterminer le nombre d'onde en tout point du guide d'onde, et l'équation de transport détermine ensuite l'amplitude de vibration. En utilisant le premier mode de propagation uniquement, la comparaison des résultats avec des mesures expérimentales est relativement satisfaisante en amont de la place caractéristique, mais une erreur importante est générée en aval de ce point entre les modèles analytique et numérique. Foucaud [10] a proposé de calculer tous les modes de propagation puis de les utiliser dans une solution sous la forme d'une somme finie de ces modes. Ces calculs permettent de prendre en compte l'influence habituellement négligée des modes évanescents. Un modèle plus simple sera étudié dans le quatrième chapitre dans le but de comprendre les différents phénomènes derrière la localisation des vibrations.

2.1.2 Modèle analytique simplifié de la cochlée

Le premier phénomène cité comme responsable de la tonotopie dans la cochlée, est le *critical layer*. Développé par Peterson et Bogert (1950) [12], il est un des moyens les plus faciles pour comprendre le comportement passif unidimensionnel dans la cochlée [13]. Il est parfois appelé *critical layer resonance* et expliqué par une onde pouvant se propager d'un seul côté de cette couche. La couche se présente sous la forme d'un plan perpendiculaire à l'axe longitudinale de la membrane basilaire (Figure 2.3), on peut aussi parler de position de localisation vue

l'unidimensionnalité spatiale des équations qui vont être utilisés, mais pour être en accord avec la littérature et pour rappeler qu'on modélise un phénomène qui se trouve dans un fluide on parlera dans cette section de couche critique. L'onde se propage vers cette couche en ralentissant; elle prend théoriquement un temps infini pour l'atteindre. Sa densité d'énergie augmente inversement à sa vitesse de groupe. Les effets d'amortissement sont par la suite responsables de la dissipation de toute l'énergie dans la zone de la couche critique, aucune réflexion n'a donc lieu.

Dans cette partie, la cochlée est considérée comme un tube rigide séparé en deux par une membrane flexible sur toute la longueur. Le fluide est considéré comme incompressible, ce qui nous permet de considérer l'équilibre instantané entre les pressions dans les canaux supérieur et inférieur [7]. Le développement mathématique présenté par la suite est développé plus en détails dans l'article de MacKay [13] ou il met en doute la validité du phénomène de critical layer pour expliquer la tonotopie dans la cochlée.

Le flux volumique dans les deux moitiés du tube est d'amplitude égale, de sens opposé et de valeur $\pm j(x,t)$. Il est admis que la pression est constante sur une même section transversale. L'aire déplacée par la membrane lors de son déplacement est $\pm a(x,t)$ et la différence de pression à travers la membrane est $p(x,t)$. La membrane se déforme latéralement avec une forme modale $\zeta(y)$ qui peut dépendre de la position *x*. L'aire *a* est donc liée au déplacement suivant *z* à une position y_0 par la relation (2.1), Figure 2.3.

$$a = \frac{z_0}{\zeta(y_0)} \int \zeta(y) dy \tag{2.1}$$

La conservation de masse dans le fluide donne la relation suivante

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial x} \tag{2.2}$$

et la conservation de moment sans effet de viscosité donne

$$\sigma \frac{dj}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.3}$$

où $\sigma(x)$ représente la masse linéique du fluide et peut être calculée par l'équation (2.4), avec $C_i(x)$ est l'aire à l'équilibre du demi-tube *i* et ρ et la densité du fluide.

$$\sigma(x) = \frac{\rho}{C_1} + \frac{\rho}{C_2} \tag{2.4}$$

En combinant les équations (2.2) et (2.3) on obtient la relation suivante

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.5}$$

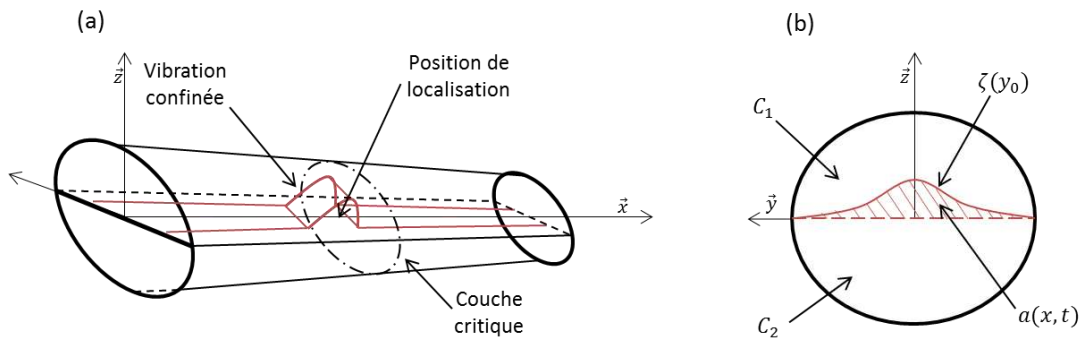


Figure 2.3 Schéma d'une onde localisée dans la cochlée, (a) vue en perspective, (b) vue de coupe.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'équilibre dynamique de la membrane. La raideur de la membrane sera notée $\vartheta(x)$ et elle correspond à la différence de pression nécessaire pour un déplacement unitaire de a dans un plan transversal passant par x. La densité effective de la membrane est noté $m(x)$. Pour une déformée latérale ζ et une masse surfacique $\mu(x,y)$ dans le plans (x,y), $m(x)$ est donné par la relation présentée par Lighthill [7]

$$m(x) = \frac{\int \mu\zeta^2 dy}{(\int \zeta dy)^2}. \tag{2.6}$$

L'équation d'équilibre dynamique de la membrane est alors donnée par l'équation

$$m\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -p - \lambda a. \tag{2.7}$$

Maintenant, on peut extraire l'équation de l'équilibre dynamique de la différence de pression entre les deux demi-tubes qui est donné par la combinaison des équations (2.5) et (2.7). La séparation de variables classiques est effectuée en prenant la partie temporelle de la forme $e^{i\omega t}$.

$$\left(\frac{\vartheta}{\omega^2} - m\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} + p = 0 \tag{2.8}$$

La relation de dispersion (2.9) est ensuite extraite en appliquant l'hypothèse de faible variation des différentes propriétés de la membrane et du fluide et en supposant p de la forme e^{ikx}.

$$(\vartheta - m\omega^2)k^2 - \sigma\omega^2 = 0 \tag{2.9}$$

L'effet du fluide sur une membrane peut être considéré comme une masse ajoutée. Ceci est expliqué par le fait que le terme $\sigma\omega^2$ apporté par le fluide est proportionnel à ω^2. Cette masse ajoutée est a densité supposée de σ/k^2.

À partir de l'équation (2.9) on peut exprimer le nombre d'onde en fonction des différents paramètres du système.

$$k^2 = \frac{\sigma\omega^2}{\vartheta - m\omega^2} \tag{2.10}$$

Techniquement, il est très difficile d'avoir des valeurs fiables des paramètres de la cochlée, mais les variations de $m(x)\ et\ \sigma(x)$ sont généralement supposées très faibles devant la variation de la raideur $\vartheta(x)$ [3]. Le nombre d'onde (Figure 2.4) varie donc tout le long de la membrane pour devenir infini quand x s'approche de la place caractéristique où

$$\vartheta(x) = m(x)\omega^2 \tag{2.11}$$

Au-delà de cette position le nombre d'onde devient imaginaire, la solution décroit (ou augmente) donc exponentiellement en fonction de x. À partir de l'équation (2.9), il paraît évident que la position de la couche critique dépend de la fréquence ω.

Cette dépendance entre la position et la fréquence constitue la première partie de la définition de la tonotopie. L'amplification des vibrations dans cette position est plus facile à visualiser en calculant la vitesse de groupe de l'onde V_g, cette vitesse est déterminée dans [13].

$$V_g(x) = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{(\vartheta(x) - m\omega^2)^{3/2}}{\vartheta(x)\sigma^{1/2}} \tag{31}$$

Contrairement au nombre d'onde, et pour des x croissant, la vitesse de groupe diminue en s'approchant de la couche critique. Ceci se traduit par un ralentissement du flux d'énergie jusqu'à l'arrêt ce qui engendre une amplification des vibrations dans cette position. C'est cette diminution de la vitesse de propagation qui est au centre du phénomène de localisation et qui sera répliquée par la suite pour l'obtention de la tonotopie dans une structure mécanique à gradient de propriété.

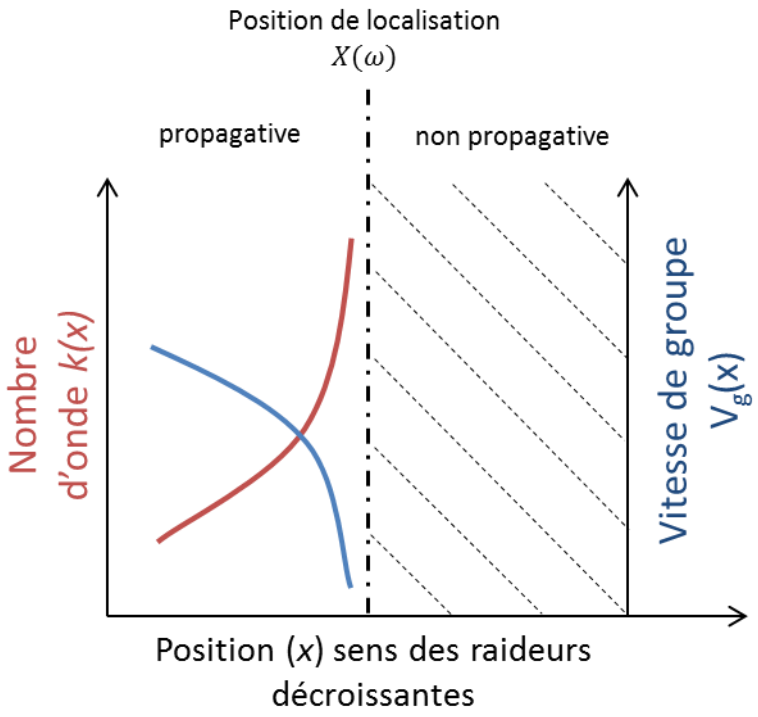


Figure 2.4 Schéma de l'évolution du nombre d'onde et de la vitesse de groupe pour un modèle simplifié de la cochlée.

2.2 Localisation dans les systèmes mécaniques

La littérature disponible concernant les systèmes mécaniques se concentre sur le fait que la localisation est principalement un inconvénient surtout pour les systèmes désaccordés. Ces systèmes sont constitués d'un ensemble d'oscillateurs qui diffèrent légèrement entre eux avec une variation de propriété aléatoire, contrairement à un système où tous les oscillateurs sont identiques, dit système accordé. Le fait que ce désaccordage soit aléatoire dans la littérature et graduel dans les système tonotopique que nous voulons implémenter constitue un élément de difficulté pour notre étude. En voulant interpréter la localisation dans une perspective tonotopique, une relecture de certains articles est nécessaire. En effet, plusieurs des calculs et résultats dans les études

précédentes sont utiles à la compréhension de notre problématique si on les comprend hors du contexte industriel pour lequel ils étaient développés. Un ensemble de ces articles sera discuté en détail pour extraire les éléments les plus pertinents pour la suite de ce manuscrit.

Dans les systèmes mécaniques, la localisation dans un système vibratoire se traduit par le confinement spatial de l'énergie injectée dans ce système près de la source d'excitation. Une excitation externe ne peut donc pas se propager sur une distance indéfinie [1].

La localisation a été initialement découverte dans le domaine de la physique du solide, un domaine qui traite de la conduction des électrons dans les matériaux. La théorie de la localisation a été le sujet d'un domaine de recherche actif pendant 40 ans. Cette théorie a permis de comprendre le mécanisme qui transforme un conducteur électrique en un semi-conducteur en ajoutant une imperfection au cristal. L'imperfection introduite produit une localisation qui, dans la physique de l'état solide, se traduit par une diminution brute du vecteur d'état; la particule est donc 'piégée' dans un petit espace [14]. Une des idées qui vient à l'esprit est qu'il suffit de transférer les connaissances acquises dans ce domaine à la dynamique des structures pour comprendre les phénomènes de localisation à cette échelle. Cependant, plusieurs difficultés empêchent cette transition [15]. La première est que les opérateurs rencontrés en mécanique ne sont pas aussi simples que les opérateurs des équations de Schrödinger. La deuxième est que les conditions aux limites ne sont pas du type Strum-Liouville, qui stipule l'existence de solutions finies, dans les extrémités d'un intervalle borné. En plus, une approche qui essaie de transposer les phénomènes de localisation d'un domaine à un autre est futile puisque plusieurs principes physiques fondamentaux sont totalement différents. Les mécaniciens sont aussi contraints à manipuler des systèmes de dimension finie pour des cas pratiques, alors que l'hypothèse des systèmes infinis est généralement admise dans la physique de l'état solide.

Dans le domaine des vibrations et de la dynamique des structures, le phénomène de localisation a été initialement formalisé par Hodges [1]. Il l'a mis en évidence à l'aide de structures simples comme une série de pendules couplés de longueurs différentes et des poutres multi-portées. Des manifestations de phénomènes similaires peuvent aussi être trouvées dans les travaux de Mead [16] [17] lorsqu'il a étudié la propagation d'onde dans des structures périodiques. Mais ce sont les articles de Pierre et Dowell [18] et Pierre [19] qui ont permis de comprendre plus en détail le comportement des structures discrètes irrégulières en explicitant le rôle du couplage.

Sur le plan pratique, le phénomène de localisation a été utilisé pour étudier les systèmes présentant une incertitude dans les paramètres [20] [21]. L'un des systèmes les plus étudiés par cette méthode est la roue aubagée désaccordée (Figure 2.5). Dans ces roues une petite imperfection dans les propriétés ou une légère asymétrie des aubes peut engendrer un phénomène de localisation. Cette localisation peut avoir des conséquences graves sur la durée de vie du système. En effet, l'aube sur laquelle la vibration se localise risque de se détériorer beaucoup plus rapidement que dans les prédictions ne tenant pas compte de la localisation.

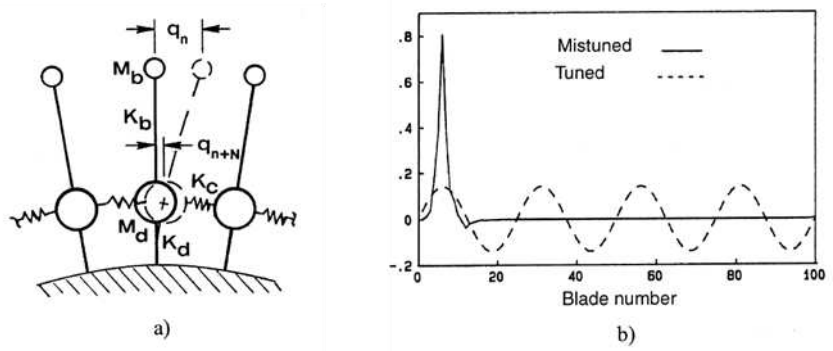


Figure 2.5(a) Modèle structural d'une roue aubagée d'une turbomachine, (b) Mode conventionnel contre mode fortement localisé dans une structure périodique (accordée) et quasi-périodique (désaccordée) [15].

Dans la suite de ce chapitre, plusieurs phénomènes qui peuvent produire une localisation dans les systèmes vibratoires sont discutés. La première partie discute la localisation dans des systèmes simples constitués de deux puis de plusieurs pendules couplés. On va pouvoir déterminer les paramètres qui favorisent la localisation dans chaque système. Ensuite une transition entre les systèmes discrétisés et continus est effectuée. Elle permettra la présentation de la méthode WKB ainsi que le '*Turning Point*', l'un des phénomènes responsables de la localisation. Enfin, une dernière partie sera consacrée à l'explication du Trou Noir Acoustique.

2.2.1 Localisation dans les systèmes désaccordés

Dans le but d'étudier la localisation, les premiers articles se sont appliqués à étudier des systèmes discrétisés simples. Les systèmes les plus utilisés sont des systèmes de pendules couplés ou des systèmes masses-ressorts. L'objectif de ces articles était d'identifier les différents paramètres du système responsable de la localisation et de relier l'effet de chacun de ces paramètres sur le degré de localisation. Un autre objectif était d'identifier les avantages et les inconvénients de chaque

approche de résolution. L'approche de résolution la plus utilisée est l'approche modale car elle est plus facile à implémenter surtout pour les systèmes discrets; en plus elle a l'avantage de tenir compte directement des conditions aux limites. La deuxième approche utilisée est celle de la propagation d'onde. Elle est plus difficile à implémenter et moins visuelle, mais elle permet de traiter les systèmes continus ou à grand nombre de degrés de liberté (ddl).

2.2.1.1 Doubles pendules couplés désaccordés

Pour illustrer le phénomène de localisation et les différents paramètres qui le gouvernent, un système simple à deux pendules couplés et désaccordés, est présenté dans la Figure 2.6. Où m représente la masse de l'oscillateur θ_1 et θ_2 représentent les déplacements angulaires l et la longueur des cordes et Δl la longueur supplémentaire représentant le désaccordage.

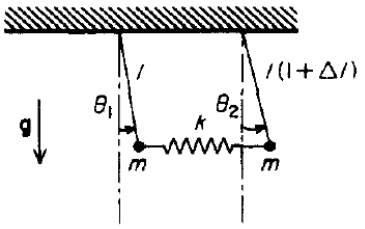


Figure 2.6 Pendules couplés désaccordés [22].

Pierre [22] a mis en évidence la relation entre la localisation et deux paramètres: le couplage $R^2 = (k_c/m)/(g/l)$ et le désaccordage Δl. On remarque que le couplage correspond au rapport entre les fréquences propres des deux sous-systèmes constituant le double pendule. Le terme (k_c/m) représente le carré de la fréquence propre du système masse ressort et le terme (g/l) correspond au carré de la fréquence propre du système pendule simple. Si la déviation de longueur adimensionnelle $\Delta l = 0$ le système est dit ordonné ou accordé, sinon il est désaccordé. La Figure 2.7 représente les *locis* de deux valeurs propres en fonction de la déviation. Les modes propres sont tracés pour trois valeurs de Δl (-0.04, 0 et 0.04), les deux traits sur chaque petit schéma représentent l'amplitude de déplacement de chaque pendule dans le mode. La Figure 2.7 (a) est tracée pour un couplage fort $R = 0.5$. On remarque qu'une légère déviation du désaccordage a très peu d'effet sur les fréquences et les modes propres et que les valeurs propres (λ) des deux modes sont éloignées. La Figure 2.7 (b) présente les *locis* du même système pour un couplage $R = 0.025$. Les modes de ce système sont fortement localisés. On remarque également que le système

faiblement couplé passe par un état qui ressemble à celui du système fortement couplé pour $\Delta l = 0$.

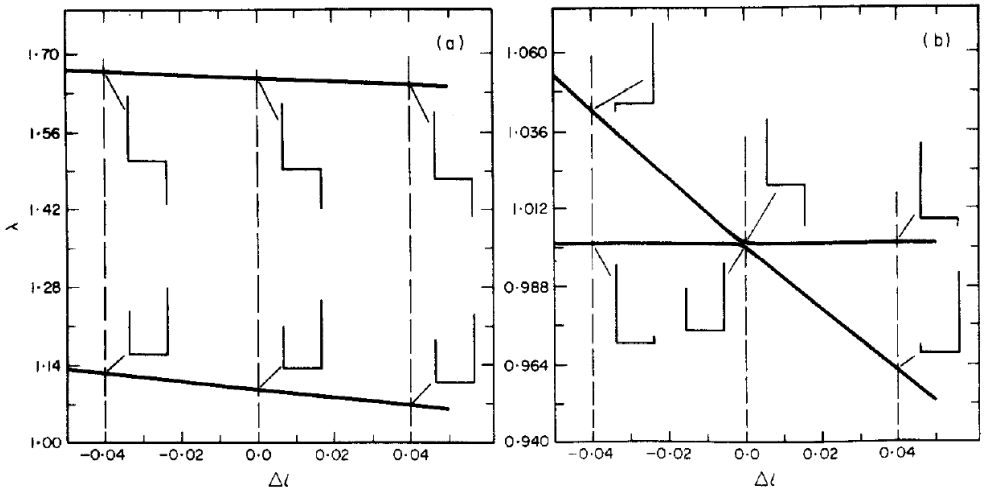


Figure 2.7 Valeurs propres adimensionnelles pour deux pendules (a) fortement couplés R=0.5, (b) faiblement couplés R=0.025 [22].

Pierre fait aussi le rapprochement entre le phénomène de localisation et le phénomène de *curve veering*. Ce phénomène se manifeste par le rapprochement de deux ou plusieurs *locis;* mais au lieu de se croiser, les deux courbes se repoussent. Le *curve veering* a été observé par Leissa (1974) [23] puis confirmé par Perkins et Mote [24]. Cela a fait un débat quant à savoir si le phénomène est réel ou s'il est le résultat de simplifications mathématiques due à une approche de perturbation. Pour Pierre, l'absence de croisement dans les courbes est due à l'absence de valeur propre double dans le système. Il démontre dans la suite de son article la relation simultanée entre la présence de localisation forte et le *curve veering.* Mais dans cette étude la valeur du couplage *R* n'est pas discutée. Pour chaque système l'auteur prend deux valeurs dont une permet d'avoir la localisation. Aucune valeur seuil, permettant d'avoir la localisation, n'est déterminée ni pour le couplage ni pour le désaccordage. La relation entre ces deux paramètres et l'apparition d'une localisation forte ou faible sera discutée dans la suite en étudiant un système à N ddl.

2.2.1.2 Système à N dll couplés désaccordés

La plupart des études du phénomène de localisation se sont focalisées sur les systèmes à N ddl. En effet, il est plus pertinent d'étudier ce type de système puisque leurs caractères périodiques les rendent plus susceptibles de présenter des imperfections. Les roues aubagées où un grand nombre

d'éléments rend une reproductibilité parfaite entre les aubes est quasi-impossible en est un parfait exemple. Les premières études concernant les systèmes à N ddl se sont concentrées à développer des méthodes de calcul fiables pour visualiser la localisation. Parmi les méthodes les plus utilisées, on trouve les méthodes basées sur des approches de perturbation [18]. Dans cette étude, il est montré qu'un bon choix du paramètre de perturbation est crucial pour la détection de la localisation.

Une investigation statistique d'un système non amorti à N oscillateurs couplés [25] permet d'étudier plus en détail le degré de localisation. Pour cette investigation, Pierre a choisi un système générique de N ddl désaccordés de raideur k_i et couplés par une raideur k_c. Le système est excité sur son premier oscillateur par une force sinusoïdale d'amplitude F et de fréquence Ω (Figure 2.8).

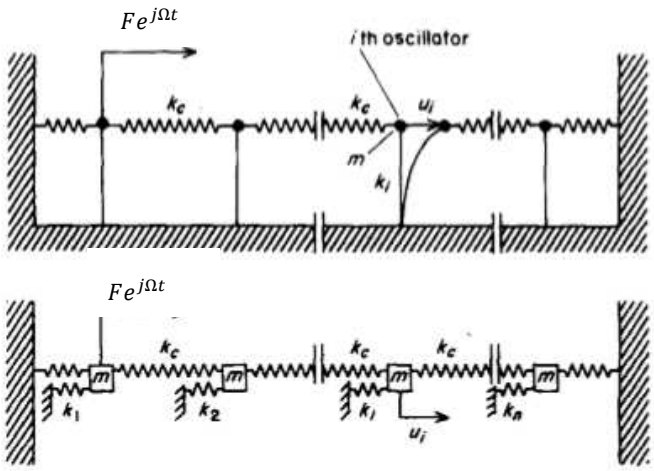


Figure 2.8 Deux représentations équivalentes d'un système à N oscillateurs couplés [25].

Pour étudier la localisation, Pierre utilise un facteur de localisation γ_N initialement proposé par Herbert et Jones [26]. Ce facteur de décroissance exponentielle spatiale est obtenu en écrivant l'amplitude d'oscillation du N^{ème} élément sous la forme (2.12). Dans cette équation, $\bar{F} = F/k$ est la force appliquée, $R = k_c/k$ est le facteur de couplage et $\bar{\omega} = \omega/\sqrt{k/m}$ est la fréquence propre nominale d'un oscillateur et $\bar{\omega}_r$ est la fréquence propre de l'oscillateur r.

$$|u_N/\bar{F}| = \exp(-\gamma_N N) \tag{2.12}$$

$$\gamma_N = -\frac{N-1}{N}\ln R + \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\ln(\bar{\omega}_r^2 - \bar{\omega}^2) \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) extraite à partir d'une résolution modale du système montre que le facteur de localisation est inversement proportionnel au couplage R et proportionnel au désaccordage représenté par le terme de différence entre la fréquence propre désaccordée et la fréquence propre nominale $\overline{\omega}_r^2 - \overline{\omega}^2$.

De nouvelles caractéristiques du phénomène de localisation sont mises en évidence dans cet article et sont la *localisation forte* et la *localisation faible*. Tandis qu'un système accordé laisse parfaitement passer les vibrations à l'oscillateur N pour une bande de fréquence d'excitation donnée, les vibrations sont toujours atténuées pour un système désaccordé. Mais cette atténuation ne se présente pas toujours de la même façon. En traçant le facteur de localisation, on remarque dans les Figure 2.9 (a) et (b) que pour deux couples couplage-désaccordage différents, le comportement du système change complètement et passe d'un passe-bande avec atténuation (Figure 2.9 a) à une isolation complète (Figure 2.9 b). L'auteur a aussi comparé l'efficacité de deux méthodes de perturbation par rapport à une simulation de type Monte-Carlo. Il a montré que la méthode de perturbation classique était adaptée pour le cas de la localisation faible et qu'une méthode de perturbation modifiée était plus adaptée pour le cas de la localisation forte.

Le type de localisation dépend donc du rapport entre le désaccordage et le facteur de couplage. L'évolution du facteur de localisation en fonction de ce rapport (Figure 2.10) montre la présence d'un point d'inflexion. Ce point caractérise la transition entre la localisation forte et faible.

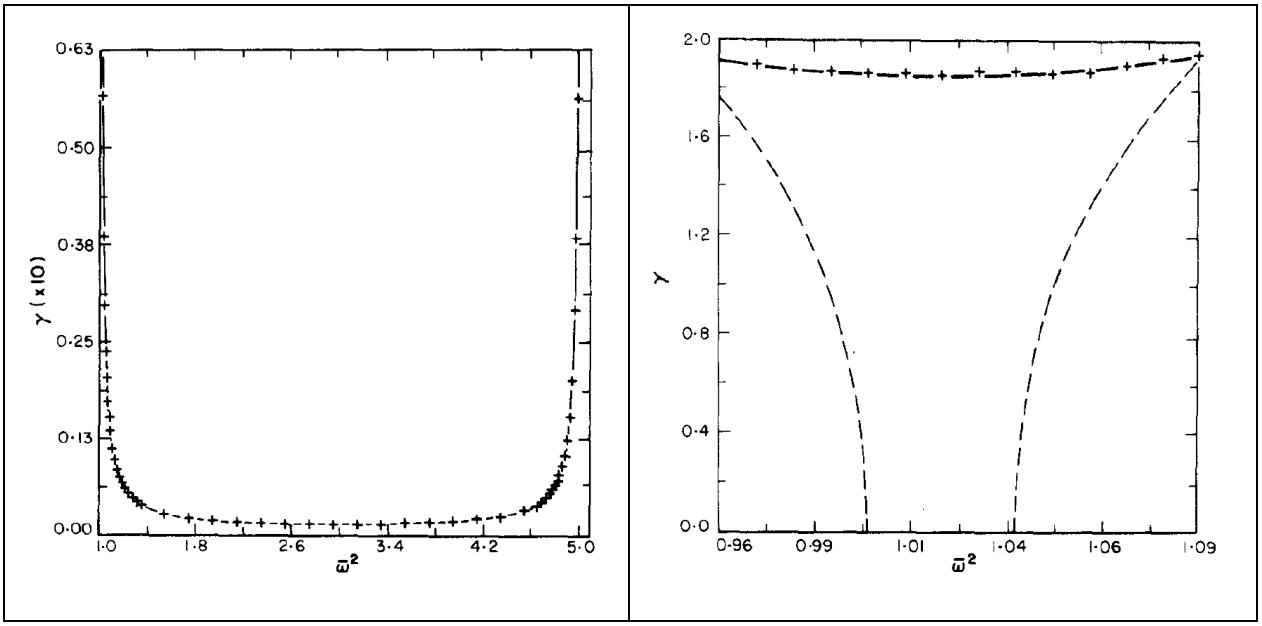


Figure 2.9 Facteur de localisation pour X=10%, (a) et R=1, (b) et R=0.01, méthode de perturbation classique (-) et simulation Monte-Carlo (+) [25].

La localisation faible a donc lieu dans les systèmes présentant un couplage fort et un désaccordage faible. Pour ces systèmes, l'atténuation d'un pendule à l'autre est faible; on aura donc besoin de structures très longues pour atténuer un peu l'amplitude des vibrations. Les conditions aux limites auront aussi des effets significatifs sur la localisation faible. En plus, la présence d'un amortissement même faible aura un effet d'atténuation des amplitudes aussi important que l'effet de localisation. C'est pour cela que, contrairement à la physique des solides où les cristaux peuvent être considérés comme infinis, en mécanique, il n'est pas très intéressant de se trouver dans cette situation. Il faut donc se placer dans une situation de localisation forte où une atténuation forte peut se produire sur des petites distances.

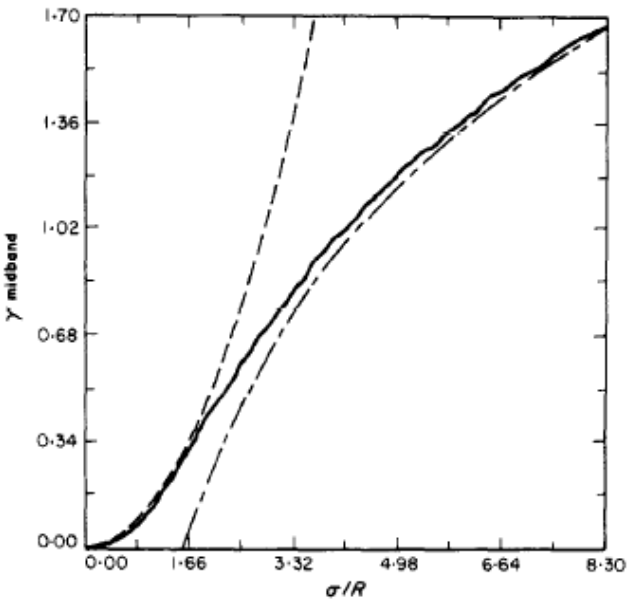


Figure 2.10 Facteur de localisation à la fréquence médiane en fonction du ratio désaccordage-facteur de couplage, simulation Monte-Carlo (-), méthode de perturbation classique (- - -) et méthode de perturbation modifiée (-- - --) [25].

2.2.2 Passage d'un modèle discret à un modèle continu

Comme présenté dans les parties précédentes, la littérature est riche en articles qui traitent de la localisation des vibrations dans les systèmes discrétisés. Les systèmes continus comme les poutres multi-portées [22] sont généralement discrétisés avec la méthode des éléments finis ou la méthode de Galerkin. Pour les systèmes mécaniques, deux articles traitent des systèmes continus en utilisant une approche purement analytique. Scott [27] a étudié le problème d'une onde dispersive unidimensionnelle dans un milieu aléatoire en utilisant une approche stochastique. Mais l'article le plus proche de notre problématique est celui de Luongo [28]. Ce dernier a utilisé un modèle simple pour expliquer la localisation, et sa relation avec le phénomène de *Turning Point*, dans un système continu en utilisant une approche ondulatoire avec la méthode WKB.

2.2.2.1 Méthode WKB (Wentzel-Kramers-Brilloin)

La méthode WKB ou l'approximation WKB est une méthode qui permet de trouver une solution approximative d'une équation différentielle linéaire avec un coefficient variable spatialement. Elle a été développée pour le domaine de la mécanique quantique en 1926. Elle a ensuite été utilisée

dans plusieurs domaines, notamment en mécanique pour résoudre les équations dérivées du système présentant une inhomogénéité.

La méthode ondulatoire classique utilise une solution *u(x,t)* sous la forme (2.14) où ω représente la vitesse angulaire et k représente le nombre d'onde.

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - kx)} \tag{2.14}$$

Cette équation n'est pas valable lorsqu'un des coefficients de l'équation différentielle à résoudre n'est pas constant. Dans ce cas on utilise la solution WKB (2.15). Cette solution est présentée par Whitham [29] sans référence à la méthode WKB.

$$u(x,t) = A(x,t)e^{i\theta(x,t)} \tag{2.15}$$

Dans laquelle $k = \partial\theta/\partial x,\ \omega = \partial\theta/\partial t$ et A_0 sont toutes des quantités d'ordre 1 et toute dérivation réduit l'ordre des termes. Cette hypothèse ne peut être effectuée que lorsqu'on suppose que le système étudié est très faiblement inhomogène. Les dérivés spatiales et temporelles sont remplacées respectivement par les indices *x* et *t* afin de simplifier la lecture des équations. La faible inhomogénéité ou la variation lente du guide d'onde se traduire par la relation (2.16).

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x} \ll \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} A(x) \tag{2.16}$$

Cela revient à faire l'hypothèse que dans une longueur d'onde, les caractéristiques du guide d'onde varient si peu qu'elles sont considérées comme constantes [3]. La forme de la solution (2.15) est généralement simplifiée en (2.17) en supposant que ω est constante et que $A\ et\ k$ ne dépendent pas du temps [13].

$$u(x,t) = A(x)e^{i(\omega t - \int_0^x k(\eta)d\eta)} \tag{2.17}$$

La méthode WKB peut se trouver sous la forme d'une approche de perturbation plus classique comme présenté dans plusieurs chapitres du livre de Nayfeh [30]. Elle sert à résoudre des équations différentielles du type (2.18) en expansion asymptotique

$$\frac{du}{dx} + \varepsilon^2(1 - x^2)u = 0 \tag{2.18}$$

avec $\varepsilon \gg 1$. L'expansion est alors de la forme

$$u(x) = e^{\varepsilon\Phi(x;\lambda)} \tag{2.19}$$

où

$$\Phi = \Phi_0(x) + \varepsilon^{-1}\Phi_1(x) \tag{2.20}$$

La solution dans ces équations change de forme entre les régions $|x| < 1\ et\ |x| > 1$ où l'équation différentielle change de convexité dans un phénomène appelé *Turning Point,* expliqué dans la section suivante.

2.2.3 Turning Point

Pour expliquer la localisation dans les systèmes continus, Luongo [28] a utilisé l'exemple d'une poutre en vibration longitudinale, Figure 2.11. La raideur longitudinale comprend un défaut γ sur la partie n°1 de largeur 2η. Ce système peut aussi être vu comme une poutre en vibration longitudinale de longueur *l*, de raideur axiale *EA* et de masse par unité de longueur *m*, contrainte par une raideur longitudinale k_0. Cette raideur devient nulle dans la zone du défaut. Vu la symétrie du système, seule la moitié est étudiée. Les équations de mouvement des deux parties avec des déplacements respectifs u_1 et u_2 sont extraites :

$$\beta u_1'' + (\lambda - 1 + \gamma)u_1 = 0 \qquad pour\ \ 0 \leq x < \eta \tag{2.21}$$

$$\beta u_2'' + (\lambda - 1)u_2 = 0 \qquad pour\ \ \eta \leq x < 1/2 \tag{2.22}$$

Où $\beta = EA/k_0 l^2$ est la raideur longitudinale du système et $\lambda = m\omega^2/k_0$ est sa fréquence normalisée. Ici le système peut se trouver dans un des trois cas suivant :

a) $\lambda > 1$; $u_1(x)\ et\ u_2(x)$ sont périodiques avec des périodes différentes. La déformée des deux parties de la poutre est sinusoïdale avec des fréquences spatiales différentes. Si on regardait la structure comme un guide d'onde on dirait que le nombre d'onde varie après le défaut.
b) $1 - \gamma < \lambda < 1$; $u_1(x)$ est périodique et $u_2(x)$ est exponentiel. Le mode est localisé près du défaut. Ce changement à lieu à $x = \eta$. Ce point est appelé « *Turning Point* ». Dans ce

cas, la réponse de la structure dans la zone (1) (Figure 2.12, modes 1et 2) est périodique sur une petite distance 2η. La réponse la zone (2), plus étendue, est exponentielle avec une amplitude maximale du côté du défaut. Ceci est un cas extrême qui explique le fait que le *Turning Point* soit considéré comme une localisation.

c) $\lambda < 1 - \gamma$ Dans ce cas, les deux solutions sont exponentielles et l'étude de ce cas n'est pas pertinente d'un point de vue vibratoire.

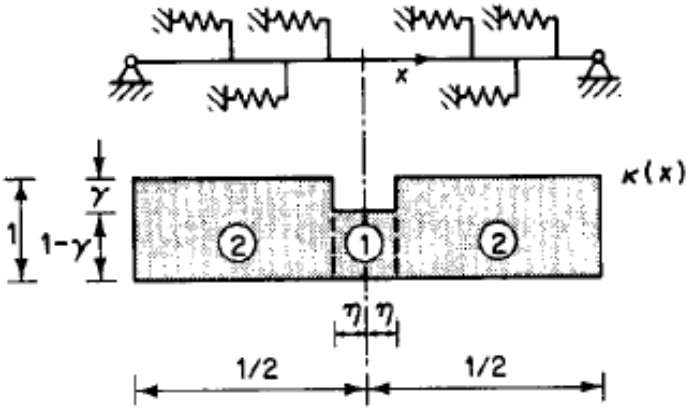


Figure 2.11 Poutre avec un défaut brusque [28].

Le phénomène de localisation dans les systèmes mécaniques est donc lié à un changement du type de solution. En effet, dans le cas où la solution est périodique dans la zone du défaut (1) et exponentielle dans la zone (2), l'énergie de vibration est principalement confinée dans le défaut comme le montre la Figure 2.12. Les points en gras sur les deux premiers modes correspondent à les transitions entre une solution periodique dans le défaut et exponentielle à l'exterieure. Il est aussi montré qu'un niveau minimum de désordre (ou désaccordage) doit être présent dans le système pour pouvoir localiser un certain nombre de fonctions propres. L'apparition de la notion de valeur propre et de fonction propre est liée à la prise en compte des conditions aux limites. Celles-ci sont responsables de l'apparition d'une discontinuité dans les fréquences localisées, par l'apparition des modes propres, et par la disparition presque totale de la localisation dans le cas où le défaut est faible.

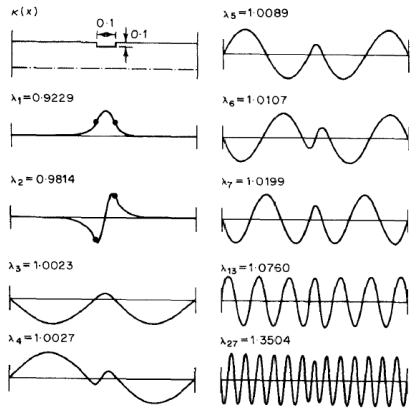


Figure 2.12 Forme du défaut et déformées modales de la barre figure 2.11 avec$\beta=5\cdot10^{-5}$ [28].

2.2.3.1 Application WKB (Luongo 1992)

Luongo [28] a aussi étudié le comportement d'une poutre similaire à celle de la Figure 2.11, mais cette fois avec un défaut graduel qui se trouve au début de la structure à $x = 0$. Dans l'approche classique décrite à la section 2.2.3, ceci correspond à un désaccordage graduel le long d'une partie du système. L'étude de cet exemple va nous permettre de comprendre la démarche de résolution en utilisant la méthode WKB [30]. Vue la simplicité relative du système, il est possible d'étudier l'évolution de la réponse dans la zone de singularité du *Turning Point*.

Dans ce cas, l'équation différentielle de la poutre contrainte devient (2.23) :

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \big(\lambda - \kappa(x)\big)u = 0 \tag{2.23}$$

où

$$\beta = \frac{EA}{k_0 l^2}, \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{k_0}, \quad \kappa(x) = \frac{k(x)}{k_0}$$

où k_0 est la valeur nominale de la raideur des ressorts longitudinaux et *k(x)* est la raideur du ressort dans le défaut. La raideur axiale étant faible par hypothèse, on a $\beta \ll 1$; elle correspond dans notre approche à la valeur de couplage. Cette hypothèse va nous permettre d'appliquer la méthode WKB. La fonction de raideur est $\kappa(x) = 1 + \gamma B(x)$ où B est la forme du défaut et γ est son amplitude très faible devant l'unité.

À partir de l'équation (2.23), il est clair que le *Turning Point* se trouve au point $x = \Delta(\lambda)$ où la fonction $\lambda - \kappa(x)$ est nulle. Quand $0 \leq x < \Delta(\lambda)$ la solution est oscillatoire, et quand $\Delta(\lambda) < x < \infty$ la solution est exponentielle. Suite à l'application d'une technique de perturbation, on obtient les solutions suivantes :

$$u_1(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda - \kappa(x)}}\right][a_1 \cos \Psi_1(x) + b_1 \sin \Psi_1(x)] \quad pour\ 0 \leq x < \Delta(\lambda)$$

$$u_2(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\kappa(x) - \lambda}}\right][a_2 \exp \Psi_2(x) + b_2 \exp \Psi_2(x)] \quad pour\ \Delta(\lambda) < x < \infty \tag{2.24}$$

Où

$$\Psi_1(x) = \beta^{-1/2} \int_x^{\Delta(\lambda)} \sqrt{\lambda - \kappa(x)} dx$$

$$\Psi_2(x) = \beta^{-1/2} \int_{\Delta(\lambda)}^{x} \sqrt{\kappa(x) - \lambda} dx \tag{2.25}$$

Les équations (2.24) sont valables uniquement lorsque x est loin du point de singularité Δ. Pour cette raison, elle est appelée solution externe et notée $u_o(x)$. L'idée de base de la méthode WKB est de déterminer une troisième solution valide dans la zone de transition et de relier ensuite toute les solutions. Cette troisième solution sera appelée solution interne et notée $u_i(x)$.

Près du point $x = \Delta$, la fonction $\lambda - \kappa(x)$ peut être remplacée par son expansion en série de Taylor de premier ordre. L'équation (2.11) devient alors l'équation (2.26).

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\Delta - \kappa)\kappa'(\Delta)u = 0 \tag{2.26}$$

En effectuant le changement de variable (2.27) cette équation devient de la forme (2.28)

$$z = \beta^{-1/3}[\kappa'(\Delta)]^{1/3}(x - \Delta) \tag{2.27}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} - zu = 0 \tag{2.28}$$

L'équation (2.28) est l'équation d'Airy dont la solution générale est

$$u_3(z) = a_3 Ai(z) + b_3 Bi(z) \tag{2.29}$$

Les fonctions Ai(z) et Bi(z) sont les fonctions d'Airy du premier et du second type.

Afin d'obtenir une solution unique pour tout le domaine d'étude, il faut donc rattacher les solutions externes $u_o(x)$ et la solution interne $u_i(x)$ en fixant quatre des six constantes arbitraires. Cette opération est effectuée en appliquant le phénomène de rattachement qui stipule que la limite supérieure de la solution interne doit être égale à la limite inférieure de la solution interne.

Les deux dernières constantes arbitraires sont définies en considérant les conditions aux limites. Le déplacement à l'infini est supposé nul, $u_2(\infty) = 0$, et en imposant $u_1'(0) = 0$ (mode symétrique) ou $u_1(0) = 0$ (mode antisymétrique) et prenant en considération que le défaut est parabolique, $\kappa'(0) = 0$, on obtient donc à partir de l'équation (2.27) la relation suivante

$$\Psi_1(0) = \pi(n - 1/2)/2 \tag{2.30}$$

En injectant l'équation (2.20) dans l'équation (2.25) on peut déterminer les fréquences d'oscillation λ des modes localisés.

Une illustration de la solution du problème est présentée dans la Figure 2.13. Cette figure est obtenue pour un défaut de la forme $\kappa(x) = 1 - \gamma(1 - x^2)$. Elle montre les amplitudes des trois premiers modes en fonction du ratio x/Δ. Dans chaque mode, l'auteur présente les solutions externes, la solution interne et la solution finale u_c obtenue après rattachement.

En définitive, la méthode WKB permet de résoudre les équations d'un système avec gradient de propriété (inhomogène), mais cette méthode admet des hypothèses fortes. La plus importante est qu'elle suppose que le gradient de l'inhomogénéité est faible; en plus, une condition aux limites est appliquée à l'infini, ce qui ne modélise pas fidèlement la réalité. Dans ce modèle il est implicitement admis que le *Turning Point* se situe suffisamment loin de l'origine pour que les conditions aux limites à $x = 0$ ne soient applicables que pour la solution externe. L'effet de toutes

ces hypothèses doit être pris en compte lors de l'interprétation des résultats obtenus par cette méthode.

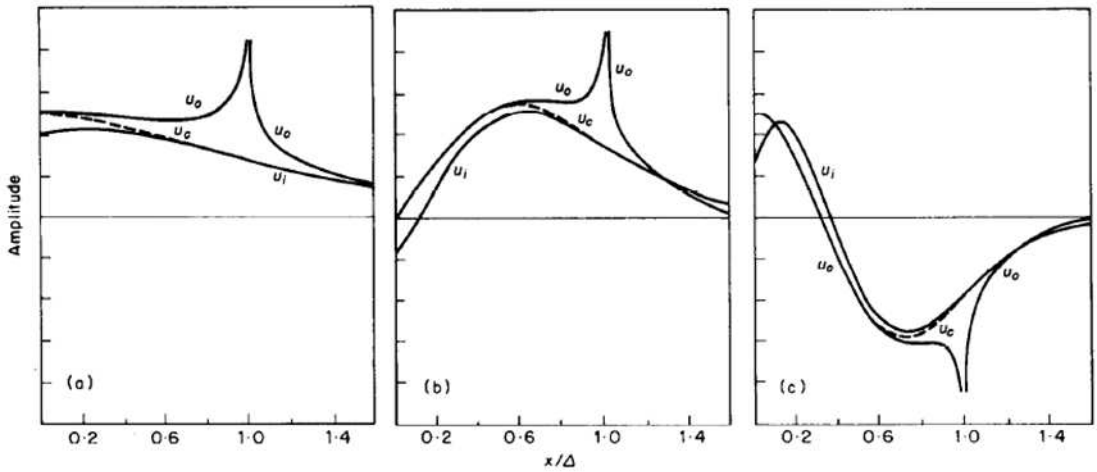


Figure 2.13 Modes localisés pour une poutre de longueur infinie avec un défaut parabolique (a) n=1; (b) n=2; (c)=3 [28].

2.2.4 Trou Noir Acoustique

Bien qu'ils ne présentent pas de phénomènes de tonotopie, les trous noirs acoustiques présentent un potentiel d'utilisation important dans notre application. Leurs utilisations dans l'atténuation des vibrations les rendent intéressants pour la deuxième phase du projet qui consiste à collecter et à dissiper l'énergie localisée. En plus, le fait qu'ils présentent une inhomogénéité sans présenter de tonotopie rend leur compréhension indispensable pour la maîtrise de ce phénomène.

Comme son nom l'indique, le Trou Noir Acoustique (TNA) est inspiré des trous noirs célestes qui empêchent tout photon qui entre dans leur horizon de s'échapper. L'analogie concerne un phénomène en particulier, c'est-à-dire l'aptitude du système à ralentir une onde jusqu'à l'arrêt total au bout de la structure. Ceci constitue la différence principale avec le phénomène de tonotopie où l'onde s'arrête au milieu de la structure. Les TNA ont été introduits par Mironov (1988) [31] lors de ses travaux sur la propagation d'onde dans des plaques en flexion dont l'épaisseur varie jusqu'à zéro dans un intervalle fini. La condition sur la vitesse de variation pour l'obtention du TNA peut être satisfaite par un profil en loi de puissance *h(x)* de la forme.

$$h(x) = \epsilon x^m \tag{2.31}$$

avec $m \geq 2$ (Figure 2.14) et ϵ un coefficient constant. Cependant, un inconvénient rend l'utilisation de ce phénomène difficile dans la pratique, en effet, une structure dont l'épaisseur est réduite à zéro est techniquement irréalisable [32]. L'onde incidente atteindra donc le bord et il y aura donc toujours une onde réfléchie.

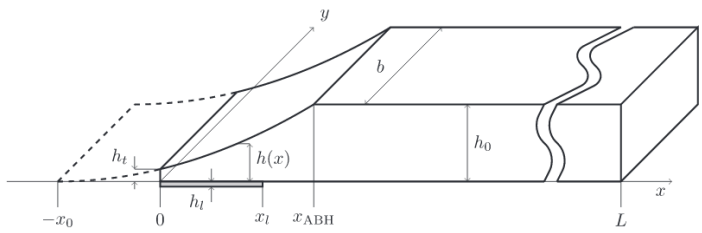


Figure 2.14Schéma d'un profil de TNA à l'extrémité d'une poutre [32].

Krylov [33] a repris l'idée du TNA, il a considéré la propagation dans une poutre de section variable dont l'équation du mouvement est :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[D(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] - \omega^2\rho h(x)u = 0 \tag{2.32}$$

où u est le déplacement normal de la surface centrale de la poutre et $D(x) = Eh^3(x)/12(1-\nu^2)$ la raideur de flexion locale. Dans cette étude, Kyrlov a supposé que l'épaisseur locale de la plaque a la forme $h(x) = 2x\tan(\theta/2) \approx \theta x$, donc la raideur de flexion devient $D(x) = ah^3(x) \approx a\theta^3x^3$. L'équation (2.32) peut donc être réduite en tenant compte de $D(x)$. Il a ensuite cherché à résoudre cette équation en utilisant la représentation de la « *geometricalacoustics* » avec une solution de la forme (2.33) où $A(x)$ et $S(x)$ sont l'amplitude et l'eikonal faiblement variable du domaine, et $k_R = \omega/c_R$ est le nombre d'onde de Rayleigh. L'utilisation de $k_R$vient d'une condition de validité de la solution (2.33). Elle stipule que cette condition n'est valable que pour des longueurs d'onde $\lambda_R < h(x)$ avec $\lambda_R = 2\pi/k_R$.

$$u(x) = A(x)\exp(ik_RS(x)) \tag{2.33}$$

En remplaçant l'équation (2.32) dans (2.33) et en résolvant la partie réelle de l'équation et en éliminant les termes avec des dérivés d'ordre supérieur ou égal à deux des fonctions faiblement variables $A(x)$ et $S(x)$, on obtient une équation qui contient uniquement l'eikonal.

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = \frac{\omega^2\rho}{a\theta^2x^2k_R^2} = \frac{k_a^2(x)}{k_R^2} = n_a^2(x) \tag{2.34}$$

On s'intéresse uniquement à la partie positive de la racine de la solution. On retrouve $k_a(x)$ le nombre d'onde local et $n_a(x)$ l'indice de réfraction. En résolvant la partie imaginaire de l'équation, Krylov obtient la forme de l'amplitude $A(x) = B/x$ avec B une constante arbitraire. La vitesse de groupe de cette onde est ensuite calculée (2.35). On remarque que quand x tend vers zéro le nombre d'onde et l'amplitude tendent vers l'infini alors que la vitesse de groupe tend vers zéro, d'où l'arrêt hypothétique de l'onde.

$$V_g(x) = 2\sqrt{(\omega\theta x)}\sqrt[4]{a/\rho} \tag{2.35}$$

Kyrlov [34] a aussi montré qu'en couvrant la partie fuselée d'une poutre avec une couche de matériaux amortissant, on obtient une expression analytique de la réflexion de l'onde qui est beaucoup plus atténuée que celle obtenue avec une extrémité libre. Enfin, plusieurs travaux sur des TNA circulaires (Figure 2.15) ont été proposés par Gautier *et al* [35] et développés numériquement et expérimentalement par Kyrlov [36]. Ce type de TNA a été utilisé par Zhao *et al* [37]pour la récolte de l'énergie vibratoire dans des transducteurs piézoélectriques (*energy harvesting*).

Figure 2.15 TNA à deux degrés de liberté pour des ondes de flexion dans une plaque [36].

Le TNA est donc un phénomène qui permet de ralentir une onde se propageant vers la partie mince d'une plaque d'épaisseur variable. Le nombre d'onde ainsi que l'amplitude tendront vers l'infini quand x tend vers zéro. Avec un profil qui respecte la condition de la méthode WKB, tout

amortissement structural sera théoriquement capable de dissiper entièrement l'onde incidente, empêchant ainsi sa réflexion [31]. La fabrication d'un bord d'épaisseur nulle étant irréalisable en pratique, les TNA ne sont donc efficaces que lorsqu'on leur colle une couche de matériaux amortissants. Un élément dissipateur permet d'évacuer l'énergie vibratoire dans la zone du TNA, tel qu'illustré à la Figure 2.14 dans la zone $0 \leq x \leq x_l$.

Le Trou Noir Acoustique prouve qu'avoir un guide d'onde inhomogène ne suffit pas à avoir une tonotopie. On peut l'observer à l'équation d'équilibre dynamique (2.32) où aucun des termes inhomogènes ne peut constituer un point de singularité. Sans un tel point de singularité, on ne peut obtenir de changement de forme de la solution, ni par l'effet du *Turning Point* ni par l'effet de couche critique.

2.3 Matériau architecturés et matériaux à gradient de propriété

Le principal inconvénient auquel nous faisons face pour la reproduction de la tonotopie observée dans la cochlée est la variation géométrique de la membrane basilaire. Imposer cette contrainte de variation géométrique dans un contexte industriel n'est pas concevable dans la majeure partie des applications. Une approche alternative est donc développée dans cette thèse. Elle se base sur une technologie d'impression 3D qui permet de fabriquer des matériaux structurés avec des géométries maîtrisées. Le principe de base pour avoir un gradient de propriété est d'avoir un matériau structuré avec une géométrie régulière et périodique dans laquelle un ou plusieurs paramètres vont varie dans l'espace. Deux techniques pour y parvenir sont illustrées à la Figure 2.16. La première considère une géométrie unique de maille et une variation de l'épaisseur des poutres qui constitue deux mailles successives. La deuxième crée le gradient en changeant la forme des mailles consécutives pour avoir des raideurs de plus en plus élevées.

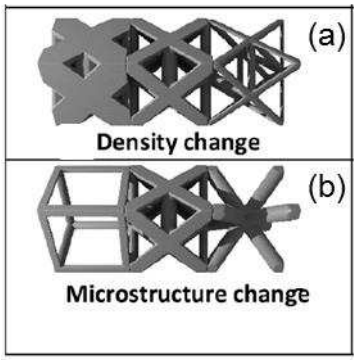


Figure 2.16 Deux procédures permettant d'obtenir un gradient : (a) Variation graduel de la densité (b) Changement de la microstructure [38].

Une combinaison de ces deux approches peut être effectuée afin d'avoir FGM (*Functionally Graded Material)* avec un gradient plus élevé. Une méthode d'optimisation doit être utilisée pour la création de ce type de matériau. La Figure 2.17 montre un matériau développé par Radman *et al* [39] en utilisant cette méthode. La combinaison des deux approches permet certes d'avoir une variation plus importante et plus graduelle des propriétés, mais ne permet pas de s'affranchir de la périodicité dans le matériau.

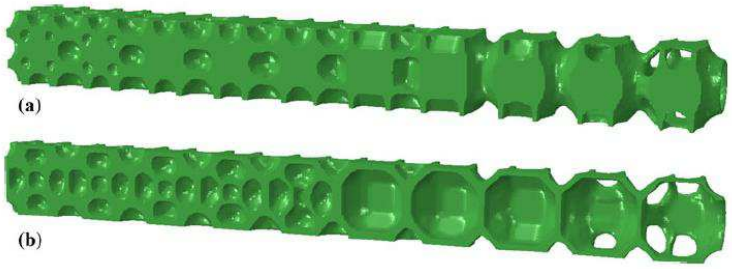


Figure 2.17 Matériau avec un gradient d'élasticité a) microstructure optimisée b) Vue de coupe montrant la structure interne [39].

Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés a émergé dans les années 80 au Japon pour des applications thermiques. Une grande partie des approches utilisées dans le développement de ce type de matériau se sont inspirées de matériaux existant dans la nature. Le gradient est réalisé avec deux principales approches : une variation de prépondérance entre deux phases solides d'un matériau [40] ou l'évolution de la porosité dans un matériau donné.

Une autre approche plus 'organique' peut être utilisée pour avoir un matériau avec un gradient de propriété sans périodicité. Cette approche est basée sur une architecture en cellule de Voronoï Figure 2.18. Elle consiste à mailler stochastiquement un espace avec un nombre de point donné et tracer les médianes entre chaque paire de points [41].

Plusieurs méthodes d'impression 3D existent. Chacune de ces méthodes présente des avantages et des inconvénients différents [42]. Une structure de Voronoï classique est imprimable par stéréolytographie, qui consiste à solidifier avec un laser une résine de polymère liquide [42]. Trois inconvénients sont rencontrés si cette méthode est utilisée :

1) Les cellules de Voronoï utilisées doivent être ouvertes pour pouvoir évacuer la résine liquide.

2) Les cellules doivent être suffisamment grandes pour évacuer la résine liquide, ce qui limite l'amplitude du gradient imprimable.

3) Les structures à cellules ouvertes peuvent ne pas donner une résistance suffisante pour une application mécanique.

La méthode de modélisation par dépôt de fil fondu (ou FDM Fused Deposition Modelling) a l'avantage d'être facile à appréhender, moins coûteuse et permet plus de flexibilité que les autres méthodes. En effet, cette technologie consiste à déposer des couches de polymères successivement en allant du bas vers le haut, en utilisant une buse qui extrude un fil de polymères. Les structures fabriquées avec des imprimantes à dépôt de fil doivent répondre à deux contraintes géométriques : la continuité et la portance. La continuité n'est pas un problème dans les structures de Voronoï. La portance, quant à elle, n'est pas assurée puisque les angles peuvent varier de 0 à 180°. Une méthode de génération de structures de Voronoï modifiées qui réponde à cette contrainte a été développée par Martinez [42]. Elle se base sur un calcul de distance non euclidienne polygonal pour fixer la géométrie des parois des cellules de la structure. Un exemple de cette architecture modifiée est présenté dans la Figure 2.18; cette simplification en 2D de l'architecture montre bien que les angles des parois ne dépassent jamais les 45° par rapport à la verticale, ce qui assure le respect de la contrainte de portance.

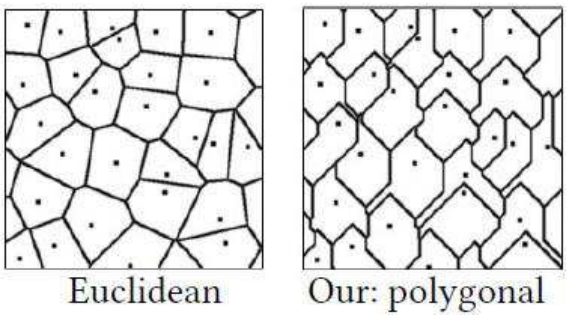


Figure 2.18 Structure de Voronoï : Gauche, avec un calcul de distance euclidienne. Droite, avec un calcul de distance polygonal adapté pour les contraintes de fabrication [42].

Un matériau à gradient de propriété basé sur une structure en cellule de Voronoï donne un gradient plus régulier rapport à une structure périodique classique, Figure 2.19. Dans le but de réaliser une tonotopie, cette propriété donne à l'architecture en cellule de Voroni un avantage important. En effet, une structure qui présente une certaine périodicité peut avoir un comportement vibratoire de localisation autre que le phénomène que nous souhaitons implémenter. L'interférence entre ces

deux phénomènes peut engendrer des problématiques d'interprétation ou de visualisation de la tonotopie. Pour cela des FGM avec une architecture en cellules de Voronoï modifiée sont utilisés dans de la partie expérimentale dans le 5ème et 6ème chapitre de cette thèse.

Figure 2.19 Comparaison entre une structure à gradient de propriété rhombique (gauche) et Voronoï polyédrique (droite) [42].

2.4 Conclusion

La revue de littérature effectuée dans ce chapitre permet une compréhension du mécanisme de l'audition nécessaire pour reproduire la tonotopie. En effet pour avoir une localisation de vibration dans la structure, il faut avoir une structure à gradient de propriété capable de ralentir la vitesse de propagation de l'énergie vibratoire jusqu'à l'arrêt à une position différente pour chaque fréquence. L'étude de la localisation dans les systèmes mécaniques montre qu'un gradient de propriété n'est pas suffisant pour avoir un phénomène de tonotopie. Il faut donc avoir une structure avec une géométrie semblable à un ensemble d'oscillateurs couplés désaccordés. Même cette architecture n'est pas une condition suffisante pour l'obtention d'une localisation. Une combinaison de paramètres maîtrisés du système est nécessaire à la réalisation de la tonotopie dans une structure mécanique. Trouver des réponses à ces lacunes est essentiel pour la conception de système tonotopique. Des modèles analytiques et numériques sont développés dans Chapitre 4 pour répondre à ces questions.

Plusieurs technologies et architectures ont été proposées pour la réalisation d'une âme à gradient de propriétés d'une poutre sandwich. Le caractère stochastique d'une architecture en cellule de Voronoï lui donne l'aptitude de produire des gradients propriété assez grands sans une contrainte de périodicité qui peut nuire à obtention du phénomène vibratoire voulu.

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE

La revue de la littérature permet de confirmer que :

a) Peu d'études ont été réalisées sur des systèmes mécaniques continus présentant une tonotopie. Elles portent principalement sur le comportement de la cochlée, dans laquelle un couplage fluide et un gradient de section permettent l'apparition du phénomène. Cependant, il est peu réaliste d'implémenter ces deux facteurs dans les structures aéronautiques.
b) La présence d'un gradient de propriétés mécaniques, notamment la masse volumique et le module d'Young, est nécessaire pour réaliser une tonotopie. Cependant, cette condition n'est pas suffisante. Par exemple, les TNA sont des systèmes à gradient qui localisent toutes les vibrations à l'extrémité de la structure, plutôt que de les distribuer en fonction de la fréquence.
c) Pour les systèmes d'oscillateurs couplés, seul le désaccordage est étudié, c'est-à-dire une variation aléatoire des propriétés. Un désaccordage et un couplage faible favorisent la localisation. Cependant, on ne sait pas que seraient les effets de ces grandeurs sur la tonotopie. Si, par exemple, l'amplitude d'un gradient de propriétés a la même influence sur la localisation que l'amplitude du désaccordage. Ou si une variation sur la masse ou sur la raideur du couplage est suffisante pour avoir une localisation. Et finalement, si une variation simultanée favorise ou pénalise la tonotopie.

Il se pose donc les questions suivantes pour la présente recherche :

1. Pourquoi des systèmes présentent un comportement de type TNA alors que d'autres présentent une tonotopie ?
2. Quelles valeurs des différents paramètres favorisent l'apparition de la tonotopie ?
3. Comment peut-on transposer les connaissances des systèmes désaccordés à des systèmes à gradient de propriété ?

Vu le caractère innovant de la thèse, nous avons été amenés à travailler avec une méthodologie par itération. Les parties qui sont présentées dans cette section ne se sont pas déroulées successivement. Elles se sont alimentées mutuellement dans de grandes boucles de compréhension, de conception

et de fabrication de poutres pour la réalisation d'une structure qui produit un phénomène de tonotopie.

Combler les lacunes de la littérature est indispensable à la conception de structures capables de produire la tonotopie. Pour avoir les réponses aux questions posées ci-dessus, nous nous sommes basés sur deux types de modèles.

a) Les modèles continus simplifiés d'une poutre à gradient de propriétés et d'une poutre homogène avec une base à gradient de propriétés sont développés (Figure 3.1). La simplicité de ces modèles permet d'avoir des solutions analytiques exactes de l'évolution du nombre d'onde ainsi que de la vitesse de groupe le long de la structure. Ces données nous donnent une compréhension plus tangible des mécanismes fondamentaux de la localisation et permettront de répondre à la première lacune détectée dans la littérature, à savoir l'identification de la différence entre le mécanisme du TNA et celui de la tonotopie.

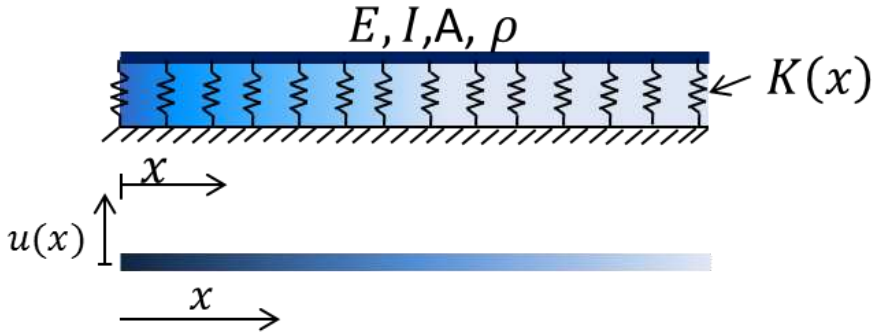


Figure 3.1 Deux poutres utilisées pour l'étude analytique. En haut, une poutre homogène avec une base à gradient de propriétés et en bas, une poutre avec un gradient de propriétés.

b) Un modèle discret de 100 oscillateurs couplés (Figure 3.2) est étudiéFigure 3.2 Modèle discret de 100 oscillateurs couplés. Ce modèle a deux avantages par rapport au modèle continu : Il est plus proche des modèles d'oscillateurs désaccordés présent dans la littérature. En plus, il prend en compte les conditions aux limites et les singularités directement. Une extraction modale sur cette structure permet d'étudier l'influence de chaque paramètre sur la localisation. Ainsi, différents gradients seront injectés dans les différents paramètres (raideur, masse et couplage) pour tester leur effet sur la tonotopie. Ce modèle permet aussi de faire le lien entre des notions bien développées dans l'étude des

systèmes désaccordés (comme la localisation forte et faible) et notre système à gradient. Enfin, ce modèle discret permet d'étudier les effets de l'amortissement sur la tonotopie, une autre question non résolue dans la littérature. Alors qu'on sait que l'amortissement peut faire disparaître d'autres phénomènes vibratoires.

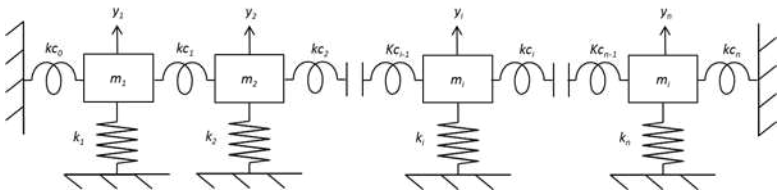


Figure 3.2 Modèle discret de 100 oscillateurs couplés.

La tonotopie est réalisée de façon expérimentale avec prise en compte de toutes les consignes de conception développées dans les parties précédentes. Cette phase critique vise à démontrer que le phénomène n'est pas purement théorique, et qu'il existe donc un potentiel d'application pratique.

a) Une approche pour la conception et la fabrication d'un matériau architecturé à gradient de propriétés est proposée. Ce matériau servant d'âme dans les poutres sandwiches sera imprimé en 3D en se basant sur des structures en cellules de Voronoï (Figure 3.3).

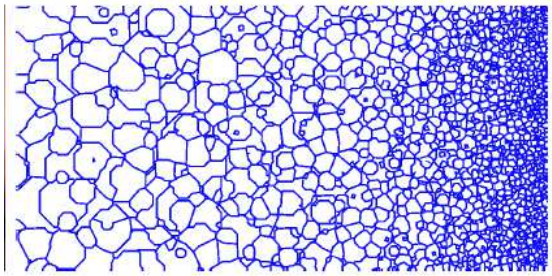


Figure 3.3 Schéma d'une structure de Voronoï bidimensionelle à gradient de propriétés [42].

b) Une première approche est proposée pour la caractérisation du matériau architecturé. L'étude de ce type de matériau non traditionnel constitue un défi intéressant, en raison de plusieurs particularités qui seront précisées plus loin. Pour cette raison, nous nous contenterons dans cette thèse d'une caractérisation plutôt qualitative visant à valider la

présence d'un gradient de Module d'Young et de masse volumique et d'en estimer l'amplitude. Ces propriétés sont équivalentes à la masse et à la raideur; elles sont donc les plus importantes dans l'étude des systèmes en vibration. Cette évaluation préliminaire des propriétés constituera une base pour des travaux futurs sur la caractérisation qualitative de ces matériaux.

c) Une stratégie de conception est mise en œuvre pour la modélisation et la réalisation de poutres sandwich avec des âmes à gradient de propriétés dans le but de visualiser les phénomènes de localisation. Des poutres de différentes configurations sont excitées de façon contrôlée à l'aide d'un pot vibrant, et leur réponse transversale est mesurée à l'aide d'un vibromètre-laser. Une poutre avec une base à gradient de propriétés est étudiée pour vérifier que les comportements observés sur des chaines d'oscillateurs couplés sont transposables à un système continu expérimental. Une autre poutre, en configuration encastrée-libre cette fois (Figure 3.4), permet d'élargir le champ d'application à des structures plus courantes.

Figure 3.4 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés en configuration encastrée-libre.

CHAPITRE 4 LOCALISATION DANS LES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Les trois types de systèmes évoqués dans la revue de littérature, soit la cochlée, les oscillateurs désaccordés faiblement couplés et les systèmes continus avec un défaut de Luongo, ne permettent qu'une compréhension relative de la localisation. En effet, dans les deux premiers cas, le but était de produire une localisation déjà présente dans un système physique. En essayant de reproduire ce phénomène sur une structure de taille réelle, Foucaud [43] a remarqué que le fait de modéliser la membrane basilaire par une membrane ou une poutre, au lieu de la modélisation classique en structure à réaction locale, réduisait l'amplification dans le guide d'onde. Dans ce chapitre il sera démontré que la modélisation poutre génère une augmentation de couplage non prise en compte par les modèles classiques de la cochlée. Or, nous avons vu que la force du couplage a une influence directe sur l'apparition de la localisation. D'ailleurs, cet effet a bien été modélisé dans le cas des oscillateurs désaccordés. Ainsi, pour des systèmes avec une incertitude dans les paramètres, une localisation est bien établie et elle dépend du ratio entre le désaccordage et le couplage. Il y a même des indications reliant cette localisation au phénomène du *Turning Point*.

L'objectif de ce chapitre sera de compléter la compréhension de la localisation et plus précisément de la tonotopie établie par deux approches; une utilisant des systèmes continus et l'autre utilisant des systèmes discrets. Au lieu de le voir comme un phénomène subi, la localisation sera appréhendée comme un phénomène voulu. Les différents paramètres qui peuvent l'influencer seront étudiés, premièrement dans un système continu avec une résolution analytique, ensuite avec un système discret. Les conclusions de ce chapitre permettront une approche plus déterministe lors de la conception des systèmes de contrôle passif des vibrations.

4.1 Poutres et gradient de propriété

La configuration constituée d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable (Figure 4.1) est détaillée dans l'étude des systèmes continus à gradient de propriété. Cette configuration est la jonction entre les travaux de Luongo [28] et la poutre sandwich avec une âme à gradient de propriété sur laquelle la tonotopie doit être implémentée. Là où le système dans la Figure 2.11 est une barre avec un déplacement longitudinal le système présenté dans ce chapitre à un déplacement transversal. Avec cette modélisation, seule la moitié supérieure de la poutre sandwich sera modélisée ce qui implique que seuls les modes symétriques sont

considérés. Cette représentation peut être considérée comme une condition de symétrie qui a comme axe la fibre moyenne sur une poutre sandwich. Ces poutres sont généralement utilisées sous une configuration encastrée-libre. Cependant, pour visualiser la tonotopie, qui est l'objectif scientifique de la thèse, nous allons nous intéresser à cette configuration. Une grande partie de cette section 4.1 est en effet consacrée à l'étude des raisons qui font qu'il existe des systèmes à gradient de propriétés qui ne montrent pas un phénomène de tonotopie

Les travaux présentés dans la revue de littérature sont réalisés pour des vibrations longitudinales avec des équations différentielles du mouvement d'ordre deux. Dans cette partie de la thèse, une poutre en flexion avec une équation d'ordre 4 est traitée. Les implications de cette différence sur la localisation sont analysées. Notons qu'une étude est présente sur ce type de système dans la littérature, mais elle ne fait aucun rapprochement entre ce système et la localisation. Cette structure est aussi équivalente à la moitié d'une poutre sandwich. Elle permet d'étudier les modes symétriques où, dans une structure sandwich classique, les peaux se déplacent transversalement dans des sens opposés.

Par la suite, un résumé de différentes structures continues avec un gradient de propriété sera établi. Les systèmes étudiés sont constitués de barres avec et sans contraintes de raideur externes, des poutres Bernoulli avec et sans raideur à la base, une poutre Timoshenko et une poutre sandwich. Ce résumé permettra de conclure sur la possibilité d'avoir une localisation de type tonotopie ou de type TNA dans chaque système.

Enfin, l'effet de l'amortissement visqueux de l'âme de raideur variable est étudié.

4.1.1 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable : mise en évidence du *Turning Point*

Dans cette section, l'étude est réalisée sur une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable, Figure 4.1. La peau est homogène et a une formulation de Bernoulli, qui ne prend en compte que les efforts de flexion dans la poutre. Cette simplification est aussi proposée pour des raisons de difficulté de résolution et permet d'avoir des solutions analytiques intelligibles. En effet, seul le comportement de propagation d'onde de flexion sera étudié dans cette partie. Les conditions aux limites ne sont pas prises en compte. Le système est donc considéré comme un guide d'onde.

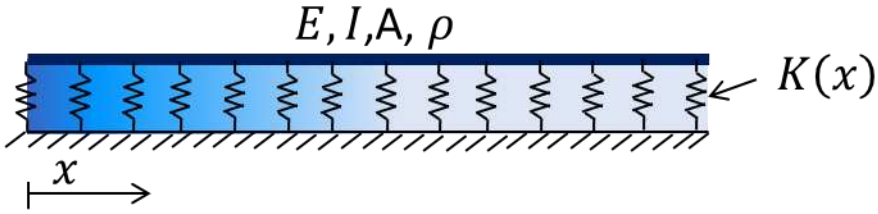


Figure 4.1 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable.

L'équation de mouvement du système est extraite des travaux de Graff sur la propagation d'ondes dans les solides élastiques [44] :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha(x)u + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{4}{EI}\big(K(x)\big) \;\; et \;\; \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\rho A}{EI}$$

où *K(x)* est une fonction croissante de la base. *E, I, A* et *ρ* sont respectivement le module d'Young, le moment quadratique, l'aire de la section et la densité de la poutre homogène. Dans le but d'étudier le comportement de l'onde régie par cette équation, la méthode d'expansions en série asymptotique [29] est utilisée. Pour ce faire, la variation des propriétés du guide d'onde est supposée faible dans l'intervalle d'une longueur d'onde. La solution injectée dans l'équation différentielle partielle (4.1) est:

$$u(x,t) \approx e^{i\theta(x,t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) \tag{4.2}$$

où $k = \partial\theta/\partial x,\ \omega = \partial\theta/\partial t$ et A_0 sont toutes des quantités d'ordre 1 et toute dérivation réduit l'ordre des termes. Les dérivés spatiales et temporelles seront remplacées respectivement par les indices *x* et *t* afin de simplifier la lecture des équations. Après l'injection de la solution et le réarrangement des termes, les équations suivantes sont obtenues dans un ordre de grandeur décroissant :

$$\varepsilon^0 \qquad \left(k^4 + \alpha(x) - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)A_0 = 0 \tag{4.3}$$

$$\varepsilon^1 \qquad i[(-\omega_t/\omega_0^2 - 6k^2k_x)A_0 - 4k^3A_{0x} + 2\omega/\omega_0^2 A_{0t}] = 0 \tag{4.4}$$

ε^2 $$-4k_{xx}kA_0 - 12k_xkA_{0x} - 6k^2A_{0xx} - 3Ak_x^2 + 1/\omega_0^2A_{0tt} = 0 \quad (4.5)$$

ε^3 $$i(A_0k_{xxx} + 4A_{0x}k_{xx} + 6A_{0xx}k_x + 4A_{0xxx}k) = 0 \quad (4.6)$$

ε^4 $$A_{0xxxx} = 0 \quad (4.7)$$

Nombre d'onde et vitesse de groupe :

En résolvant l'équation (4.3) on extrait le nombre d'onde *k* est obtenu pour $\omega(x,t) = cte = \omega$

$$k(x,t) = \pm\sqrt[4]{-\alpha(x) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \qquad k(x,t) = \pm i\sqrt[4]{-\alpha(x) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (4.8)$$

Une deuxième résolution sur Maple © a donné deux autres solutions, l'une avec $\omega = 0$ et une autre avec une de nouvelles équations différentielles entre *k* et *ω* encore plus complexe. La suite porte uniquement sur le comportement des nombres d'onde se propageant vers les *x* positifs et où *ω* et *k* sont indépendantes du temps. Pour chaque fréquence *ω* le nombre d'onde k s'annule pour une position donnée x. Cette position représente la place caractéristique où a lieu le *Turning Point*. Cette position est unique si $\alpha(x)$ est bijective.

La relation de dispersion peut s'écrire sous la forme (4.9). Quand *k* est nul, cette relation donne une relation directe entre chaque fréquence, ainsi que la position où elle va se localiser.

$$\omega = \omega_0\sqrt{k^4 + \alpha(x)} \quad (4.9)$$

La vitesse de groupe (4.10) constitue la vitesse de propagation de l'énergie dans le guide d'onde. Elle peut être calculée en dérivant l'équation (4.9) par rapport à *k*.

$$Vg(x) = \frac{2\omega_0k^3}{\sqrt{(k^4 + \alpha(x))}} \quad (4.10)$$

Vg tend vers zéro pour un nombre d'onde *k* qui tend vers zéro. Ceci correspond à un ralentissement jusqu'à l'arrêt de l'onde incidente au niveau du « *Turning Point* ». À cette position, l'onde va se réfléchir, engendrant une amplification des vibrations, ce qui conforte l'idée d'une localisation dans cette position.

Prenons l'exemple d'une configuration qui permet de localiser une onde de fréquence $\omega/2\pi = 100Hz$ à une position $x = X_{100} = 10mm$. Pour cela l'hypothèse d'une évolution linéaire du coefficient inhomogène $\alpha(x)$ est prise. Elle a la forme suivante :

$$\alpha(x) = ax + b \tag{4.11}$$

avec

$$a = \frac{\rho A \left(\frac{100}{2\pi}\right)}{4X_{100}} \quad et \quad b = 0$$

La poutre choisie est en aluminium avec des dimensions qui respectent les hypothèses de Bernoulli. La raideur nulle au début de l'âme n'a pas une influence sur le résultat qu'on cherche à voir plus loin dans la structure. Les valeurs utilisées sont listées dans le Tableau 4-1.

Tableau 4-1 Propriété de la poutre avec une raideur à la base.

Grandeur	valeur
Densité	2700 kg/m^3
Module d'Young	70 GPa
Largeur	10mm
Hauteur	2mm

Avec ces valeurs, il est possible de tracer la vitesse de groupe et le nombre d'onde. La Figure 4.2 illustre ceci pour trois fréquences, soit 100, 200 et 300 Hz (Figure 4.2 a). Pour cette configuration, le *Turning Point* a lieu à des positions de plus en plus avancées, où les valeurs de la vitesse de groupe et du nombre d'onde deviennent nulles, pour des fréquences de plus en plus élevées.

Avec ce modèle simplifié, il est possible de reproduire le phénomène de tonotopie avec un mécanisme différent de celui vu dans la cochlée. En effet, ici le nombre d'onde diminue en s'approchant de la place caractéristique du côté propagatif, alors qu'il augmentait dans le cas de la cochlée. Dans les deux cas, la vitesse de groupe ralentit jusqu'à l'arrêt sur la place caractéristique ce qui rend le phénomène obtenu plus proche du cas de la barre contrainte par des ressorts longitudinaux (section 2.2.3, Figure 2.12).

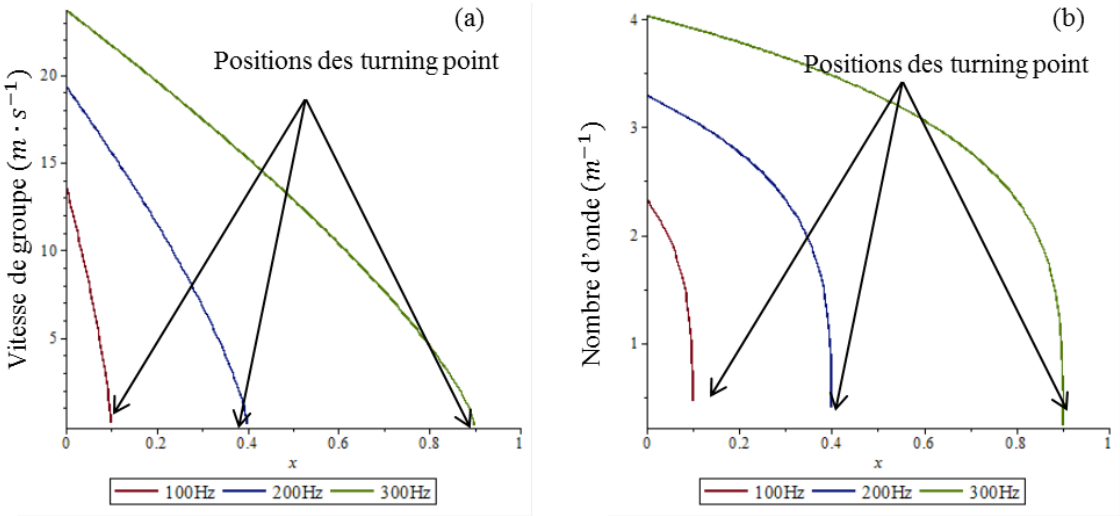


Figure 4.2 Évolutions (a) de la vitesse de groupe et (b) du nombre d'onde en fonction de *x* pour différentes valeurs de fréquence incidente.

La résolution de l'équation du second ordre (4.4) permet d'obtenir une équation pour la courbe enveloppe A(x,t). La résolution est faite en prenant l'hypothèse que l'enveloppe et la fréquence ne dépendent pas du temps. La résolution de cette équation sous Maple donne l'expression (4.12).

$$A(x) = \frac{c}{(\alpha(x) - \omega^2/\omega_0^2\,)^{3/8}} \tag{4.12}$$

La constante *c* dépend des conditions aux limites. Cette expression de l'enveloppe affirme l'hypothèse de l'amplification des vibrations proche du TP (*Turning Point*). L'expression de A(x) suggère une amplification jusqu'à l'infini en approchant le TP qui constitue un point de singularité (Figure 4.3). Une solution adaptée à cette possibilité doit être réalisée pour connaître le comportement exact du système dans cette zone. Une telle solution est décrite dans la revue de littérature (2.2.3.1) concernant la barre contrainte longitudinalement de Luongo [28]. Elle est basée sur l'utilisation des fonctions d'Airy qui donnent une solution analytique à des équations différentielles linéaires avec un coefficient inhomogène d'ordre deux. Une telle solution analytique n'existe pas pour l'ordre quatre il est donc difficile de trouver une solution exacte pour le cas d'une poutre dans le point de singularité.

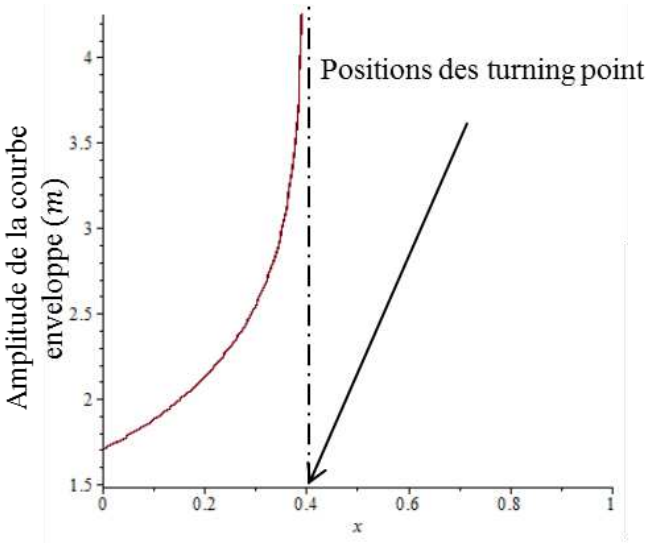


Figure 4.3 Évolution de l'amplitude de la courbe enveloppe en fonction de *x* pour une fréquence de 200Hz.

Ce modèle a pu être validé à l'aide d'une modélisation par éléments finis sur ABAQUS où les poutres sont prises avec une formulation Bernoulli sur des éléments ressorts de raideurs variables. La poutre d'une longueur de 1 mètre possède les propriétés indiquées dans le Tableau 4-1. L'âme est constituée de 100 ressorts de raideurs allant de 1 à 124 N/mm. Une extraction modale est effectuée et deux modes sont illustrés dans la Figure 4.4.

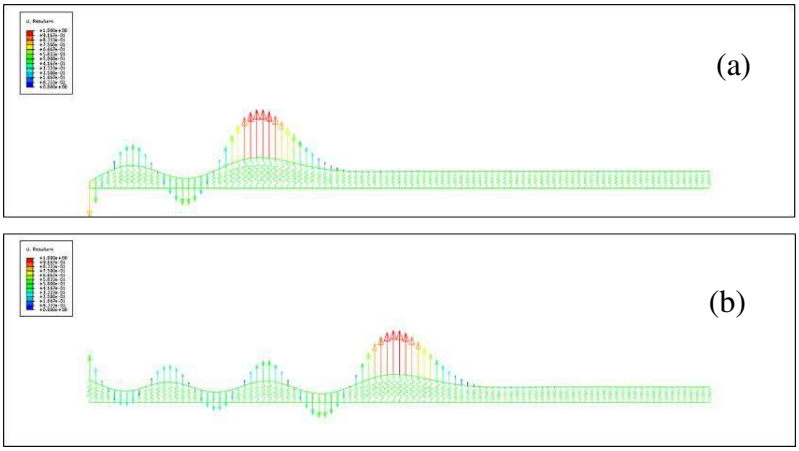


Figure 4.4 Modèle éléments finies simplifiée présentant une tonotopie, (a) mode à 707Hz, (b) mode à 941Hz.

On remarque que chacun des modes est divisé en deux parties : l'une où l'amplitude est sinusoïdale et l'autre où l'amplitude est exponentiellement décroissante. Entre ces deux parties se trouve une amplitude maximale des vibrations. La position de l'amplitude maximale change de position en fonction de la fréquence propre dans un phénomène semblable à la tonotopie. Cette approche à l'avantage de tenir compte de l'effet des conditions aux limites, en plus de valider la présence du phénomène.

La prise en compte de la réflexion à l'extrémité n'a pas un grand effet sur la réponse du système. Cette affirmation est valable pour les modes localisés dont la solution diminue exponentiellement (côté droit de la structure dans la Figure 4.4). Puisque dans ces modes la réflexion a lieu au milieu de la structure. La réflexion du côté la solution est sinusoïdale a, quant à elle, une importance significative sur la réponse du système. Les conditions à la limite de ce cote vont définir les fréquences qui seront résonantes. Ceci a lieu quand une extrémité libre coïncide avec un ventre, ou quand une extrémité encastrée coïncide avec un nœud de vibration. Il est aussi important de noter qu'une résolution en série de Fourrier n'est pas pertinente dans ce cas pour les mêmes raisons. En effet, dans le cas classique des vibrations de poutres homogènes, la déformée d'un mode coïncide avec l'un des termes de la série puisque, pour les deux, la longueur d'onde est constante le long du système. Dans le cas inhomogène, le nombre d'onde change d'une forme sinusoïdale à une forme exponentielle au niveau du TP au milieu de la structure. Même si la décomposition en série de Fourrier reste une base dans l'espace des fonctions et qu'un nombre suffisamment élevé de termes donnerait une réponse temporelle satisfaisante, elle n'est pas pertinente dans une étude phénoménologique comme celle présentée dans cette section.

4.1.2 Localisation dans les systèmes continus à gradient de propriété

Dans cette section, la capacité à confiner les vibrations est évaluée pour différentes structures continues à gradient de propriété. La méthode de guide d'onde à propriété variable utilisée dans la section (4.1.1) est reprise pour étudier une barre, dans laquelle les vibrations se propagent longitudinalement, avec et sans contraintes en raideur longitudinale, ainsi qu'une poutre encastrée sur la peau inférieure avec et sans l'âme de raideur transversale. Une extrapolation des conclusions obtenues dans ces systèmes est ensuite utilisée pour étudier la possibilité d'avoir une tonotopie dans des poutres de type Timoshenko et de type sandwich.

En comparant l'évolution des nombres d'onde et les vitesses de groupe, l'apparition ou non d'un *Turning Point* pourra être distinguée. La partie qui peut varier dans un système est notée $\alpha(x)$. Cette variable peut changer en fonction des paramètres disponibles dans une configuration donnée. Les fréquences propres des systèmes libres et supposés infinis sont prises égales à l'unité. La fonction de variation $\alpha(x)$ est toujours une fonction linéaire avec une pente égale à un.

4.1.2.1 Propagation d'onde dans une barre

L'équation du mouvement de ce système avec un déplacement u est établie dans l'équation (4.13) où E est le module d'Young et ρ la densité.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0; \tag{4.13}$$

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\,\omega = \alpha(x)\omega \tag{4.14}$$

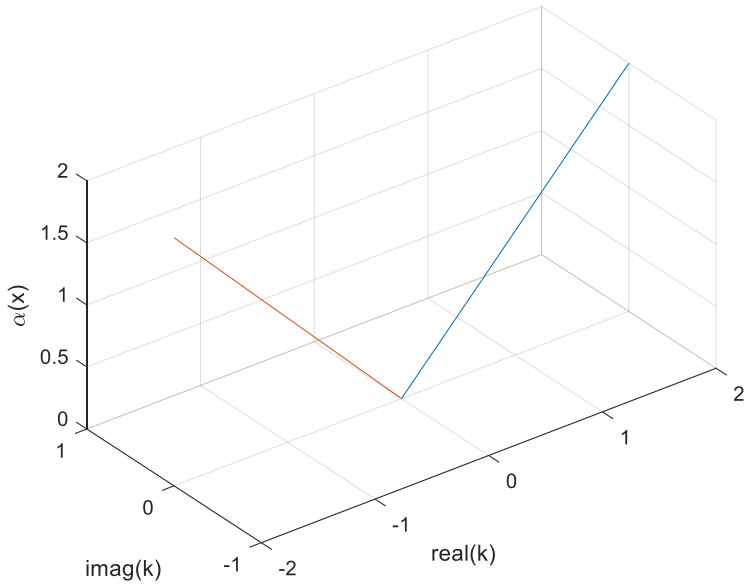


Figure 4.5 Évolution des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction des propriétés variable dans une barre.

Les variations spatiales de propriété possibles sur ce système peuvent se faire sur E sur ρ, ou sur les deux. La variabilité $\alpha(x)$ dans ce système correspond à l'inverse d'une fréquence propre. À

partir de l'équation (4.13) une relation entre le nombre d'onde et le paramètre variable est établie. Cette relation est représentée par la Figure 4.5. Cette figure représente deux solutions réelles opposées de l'équation (4.14). Elle montre l'évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction de (x) . Dans cette configuration, le nombre d'onde ne s'annule que pour $\alpha(x)$ qui tend vers zéro. Cette observation ressemble au comportement d'un TNA. Ceci est conforté par l'évolution de la vitesse de groupe (4.15). Dans ce système assez simple la vitesse de groupe est égale à l'inverse de $\alpha(x)$, équivalente à la fréquence propre. Cette onde ne s'arrête donc que pour une densité très élevée ou un module d'Young très faible à l'extrémité de la structure.

$$Vg(x) = \sqrt{\frac{E(x)}{\rho(x)}} = \frac{1}{\alpha(x)} \tag{4.15}$$

4.1.2.2 Propagation d'onde dans une barre avec raideur longitudinale (section 2.2.3.1).

Même si ce modèle a été développé dans le deuxième chapitre, un nouveau développement cohérent avec les notations et les notions de ce chapitre est proposé. Il est brièvement expliqué dans trois équations. La première (4.16) représente l'équation de mouvement du système. Le nombre d'onde (4.17) est extrait à partir de (4.16). Dans cette configuration la partie variable $\alpha(x)$ est due à une variation de la raideur de contrainte axiale *K(x)*.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K(x)}{EA}u + \frac{\rho}{E}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0; \tag{4.16}$$

$$k^2(x) = \frac{\rho}{E}\omega^2 - \frac{K(x)}{EA} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \alpha(x) \tag{4.17}$$

$$Vg(x) = \frac{k}{\sqrt{\frac{\rho}{E}(k^2 + \alpha(x))}}; \lim_{\substack{x\to\Delta;\\ k\to 0}} Vg = 0 \tag{4.18}$$

La Figure 4.6 montre l'évolution des lieux de racine de ce système en fonction du paramètre spatialement variable. Dans cette configuration, un TP existe. Les deux solutions réelles propagatives deviennent imaginaires donnant lieu à une évanescence complète de l'onde au-delà de ce point particulier. Mathématiquement, cette transition est due au signe de la quantité sous le

radical de l'équation de la vitesse de groupe (4.18). Quand cette quantité passe sous zéro, les branches des racines font un quart de tour dans le plan complexe.

Pour une variation de la contrainte longitudinale, la vitesse de groupe (4.18) peut s'annuler au milieu de la structure. Cet arrêt de l'énergie de l'onde se fait sans avoir besoin de recourir à des propriétés extrêmes (c.-à-d. tendant vers zéro ou l'infini).

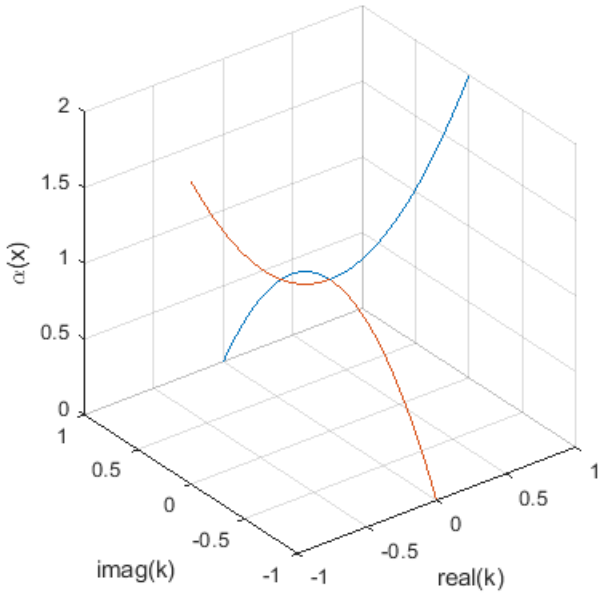


Figure 4.6 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une barre avec une raideur de contrainte longitudinale variable.

4.1.2.3 Propagation d'onde dans une poutre

Les équations de mouvement, du nombre d'onde et de la vitesse de groupe de ce système sont respectivement développées dans les équations :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0 \tag{4.19}$$

$$k^4(x) = \frac{\rho A}{EI}\,\omega^2 = \alpha(x)\omega^2 \tag{4.20}$$

$$Vg(x) = \frac{2k^3}{\sqrt{k^4 \cdot \alpha(x)}} \tag{4.21}$$

Cette configuration ne présente pas de TP (Figure 4.7). Comme dans le cas d'une barre, le coefficient variable est l'inverse de la fréquence propre du système. Les différentes branches des racines de k n'atteignent zéro que pour $\alpha(x)$ tendant vers zéro. Quand k tend vers zéro, la limite de la vitesse de groupe ne peut pas être directement calculée et va dépendre de la prédominance entre $\alpha(x)$ et k d'où les différentes hypothèses sur la variation du profile des poutres, nécessaire à la réalisation d'un TNA.

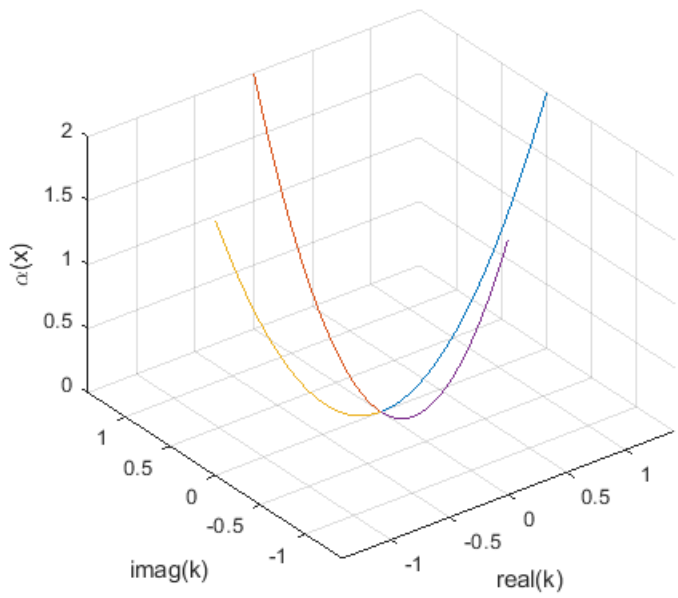


Figure 4.7 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une poutre avec une variation de propriété.

4.1.2.4 Propagation d'onde dans une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme variable

Ce cas a été discuté en détail dans la section précédente. Les équations les plus pertinentes pour la comparaison avec les autres systèmes sont réécrites dans les équations (4.22), (4.23) et (4.24).

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{4K(x)}{EI} u + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0 \tag{4.22}$$

$$k^4(x) = \frac{\rho A}{EI}\ \omega^2 - \frac{4K(x)}{EI} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \alpha(x) \tag{4.23}$$

$$Vg(x) = \frac{2k^3}{\sqrt{\beta(k^4 + \alpha(x))}} \tag{4.24}$$

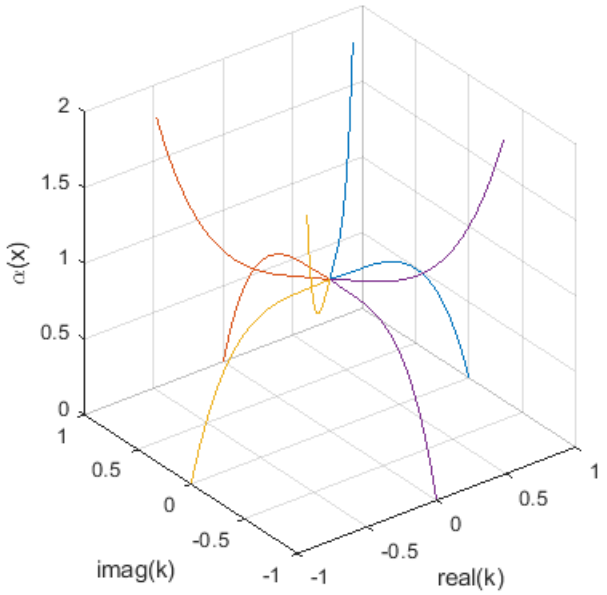


Figure 4.8 Évolution de la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde en fonction $\alpha(x)$ d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable.

Comme déjà discuté ce système présente une tonotopie où l'onde décélère jusqu'à l'arrêt au TP. Cette onde propagative est due à la présence de solutions réelles pures du nombre d'onde avant le TP; présenté par la partie des $\alpha(x) < 1$ de la Figure 4.8. Au-delà de cette position, les solutions de l'équation (4.8) deviennent complexes, ce qui permet la propagation partielle de l'onde, et montre que l'énergie est en mesure de passer à la partie « non propagative ». Cette caractéristique n'est pas valable dans le cas d'une barre avec une contrainte de raideur longitudinale où les solutions réelles pures deviennent imaginaires pures.

Dans l'étude effectuée dans cette section nous avons montré qu'un gradient de propriété n'est pas une condition suffisante pour avoir une tonotopie. Ce gradient peut conduire à un TNA où à une tonotopie en fonction de son architecture. Cette condition sur l'architecture va être discutée dans la section 4.2.

4.1.3 Amortissement visqueux dans une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à propriétés variables

L'amortissement reste toujours une question délicate dans l'étude des systèmes vibratoires à cause de son caractère multi échelle. En effet, dans des vibrations à une échelle industrielle de l'ordre du mètre, les amortissements peuvent être dus aux frottements entre les aspérités des surfaces, où les dislocations dans la microstructure des matériaux. Deux formes sont couramment utilisées dans la littérature : l'amortissement visqueux et structural. Leur avantage, outre le fait qu'elles offrent une compréhension assez intuitive, est qu'elles maintiennent la linéarité des équations de mouvement. La différence entre les deux est que l'amortissement structural est proportionnel à l'amplitude de déplacement, et l'amortissement visqueux est proportionnel sa vitesse.

Dans cette section, un amortissement visqueux représenté par *c(x)* est appliqué sur la poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de propriétés variables déjà étudiée dans la section 4.1.1 et intégré dans l'équation du mouvement de ce système (4.25).

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{4K(x)}{EI} u + \frac{c(x)}{EI}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0 \tag{4.25}$$

L'équation de dispersion (4.26) du système amorti est dérivée de l'équation du mouvement en utilisant la même perturbation spatiale utilisée dans le cas sans amortissement. Dans cette configuration, *C(x)=c(x)/EI* et le nombre d'onde est toujours complexe.

$$k^4(x) = \frac{\rho A}{EI}\,\omega^2 - \frac{4K(x)}{EI} - i \cdot C(x)\omega \tag{4.26}$$

Les solutions de l'équation de dispersion sont tracées dans la Figure 4.9. Un TP persiste dans les systèmes amortis. En effet, dans ces systèmes le nombre d'onde n'est jamais complètement nul. Au lieu d'être réel pour la partie propagative, le nombre d'onde est, au départ, complexe avec une partie réelle prépondérante. La partie imaginaire augmente après le TP. Elle devient prépondérante,

l'onde est donc plus amortie. L'amortissement a comme effet de rendre plus diffuse la zone d'amplitude maximale, avec une tendance de propagation plus importante après le TP. La position hypothétique du TP reste la même; une variation dans la position effective de la position de l'amplitude maximale peut en fait observée mais cela sera discuté plus en détail dans la section (4.2.2).

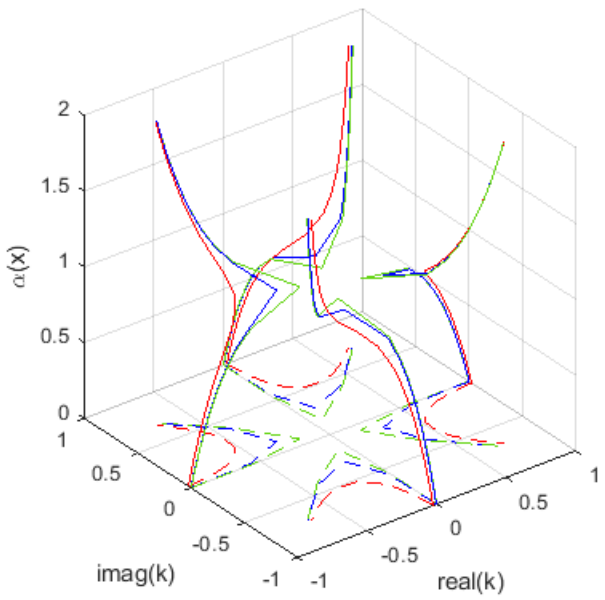


Figure 4.9 Évolution des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable et un amortissement visqueux constant $C = 0.001\ (vert);\ C = 0.01(bleu); C = 0.1(rouge)$. Les courbes en traits discontinus représentent la projection des nombres d'onde sur le plan complexe.

$$A(x) = c_1(\alpha(x) - \beta\omega^2 - i \cdot C(x)\omega)^{3/8} \tag{4.27}$$

$$Vg(x) = \frac{4k^3}{\sqrt{-C(x)^2 + 4\beta k^4 + 4\beta\alpha(x)}} \tag{4.28}$$

L'équation de l'enveloppe de l'amplitude (4.27) obtenue est complexe donc plus difficile à commenter que celle de la configuration sans amortissement, mais elle indique qu'un extremum des vibrations existe toujours pour chaque position et des fréquences distinctes. Cette analyse

s'applique aussi pour l'équation de la vitesse de groupe (4.28) qui devient complexe elle aussi et qui passe par un minimum à la position du TP sans toutefois devenir complètement nulle.

4.1.4 Les cas du cisaillement et des poutres sandwich

Deux autres configurations de poutre sont d'intérêt dans le cas de l'étude de localisation des vibrations. La formulation de Timoshenko, d'une part, tient compte du cisaillement dans la poutre. D'autre part, une configuration de poutre sandwich avec deux peaux et une âme est d'intérêt pour la partie expérimentale qui va suivre. Un développement analytique avec des paramètres variables, comme celui de la section 4.1.2, ne donne pas des expressions interprétables. Pour cela nous avons choisi de considérer les solutions de nombre d'onde disponibles dans la littérature et tenter de voir si ces équations permettent faire apparaitre un TP et une tonotopie. L'annexe A contient plusieurs notions de base pour appréhender ces deux types de poutre.

4.1.4.1 Poutre Timoshenko :

La prise en compte du cisaillement est une importante question qui se pose généralement lors du traitement des poutres. Ceci est d'autant plus important quand un problème de propagation d'onde est traité. Dans le cadre de cette étude de localisation des vibrations, l'équation de dispersion (4.29) d'une poutre Timoshenko et sa solution (4.30) sont prises dans la littérature [45]. Même si le modèle est développé pour des paramètres constants, une variation légère des paramètres comme celle développé dans la section 4.1.2, sera considérée valable. L'équation à résoudre est donc :

$$c_L^2 c_S^2 k_G (1 - i\omega\mu)^2 k^4 - (c_L^2 + k_G c_S^2)(1 - i\omega\mu) k^2 \omega^2 - \omega^2 \frac{k_G c_S^2}{r_g^2 (1 - i\omega\mu)} + \omega^4 = 0 \qquad (4.29)$$

où ρ est la densité, E le module d'Young, G le module de cisaillement et k_G est le coefficient de cisaillement [46]. $c_L = \sqrt{E/\rho}$ et $c_S = \sqrt{G/\rho}$ sont respectivement les célérités d'ondes longitudinales et de cisaillement. Cette poutre a une section avec une aire A et un rayon de giration $r_g = \sqrt{I/A}$ où I est le moment d'inertie. L'équation de dispersion est gouvernée par deux paramètres Ω et R tel que défini par Mead [47]

$$\Omega = \frac{\omega r_g}{c_S}; R = \frac{G}{E} = \frac{c_S^2}{c_L^2};$$

La constante d'amortissement adimensionnelle M :

$$M = \frac{\mu c_S}{r_g}$$

Le nombre d'onde dans ce système est k :

$$k = kr_g = \pm\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{k_G}+R\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{k_G}-R\right)^2+\frac{4R}{\alpha\Omega^2}}} \tag{4.30}$$

$$\alpha = 1 - i\Omega$$

Les termes positifs de l'équation (4.31) sont tracés dans la Figure 4.10. Le nombre d'onde de cisaillement, tracé en rouge, est intéressant dans le cas de la localisation puisqu'il présente une fréquence de coupure $\Omega_{cr} = \sqrt{k_G}$. Cette coupure vient de la possibilité de rendre nul le nombre d'onde grâce au signe « - » sous la racine. Avant cette fréquence l'onde de cisaillement est évanescente et elle devient propagative juste après. Il est possible de contrôler cette fréquence en changeant spatialement k_G et ainsi avoir un phénomène de type tonotopie. L'onde transversale est plus problématique puisque son expression ne contient que des termes positifs. Il est donc impossible de l'annuler ailleurs qu'à une extrémité de la structure, ce qui ramène la réflexion vers les cas des poutres classique où seul un TNA est possible.

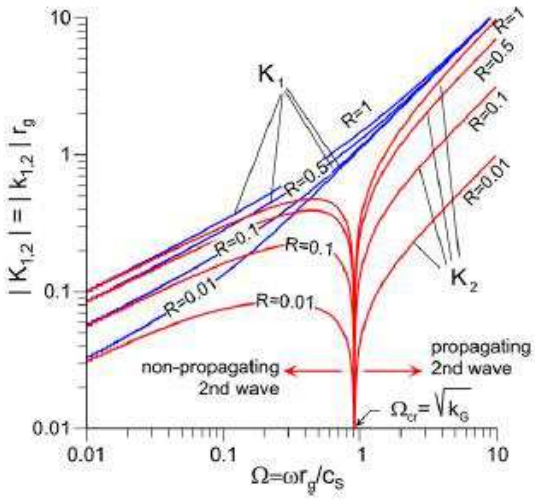


Figure 4.10 Nombres d'onde adimensionnels $K_{1,2} = k_{1,2}r_g$ en fonction de la fréquence adimensionnelle $\Omega = \omega r_g/c_S$ pour des sections régulières et des $R = 0.01, 0.1, 0.5\ et\ 1$ [45]

En définitive, même si une fréquence de coupure existe dans les modèles de poutre avec cisaillement, il est impossible d'avoir une tonotopie liées à un *Turning Point* puisqu'il existe toujours une solution propagative.

4.1.4.2 Une poutre sandwich.

Une des modélisations les plus pertinentes pour ce type de poutre et qui donnent une expression analytique de la dispersion est celle de Nillson et Nillson [48]. Dans ce modèle, on suppose que les peaux vibrent en phase et avec la même amplitude. La flexion, le cisaillement et la rotation dans les poutres sont prisent en considération. Le modèle d'ordre 6 développé dans ces travaux donne l'équation de dispersion (4.31); six solutions opposées deux à deux existent pour cette équation.

$$2D_2k^6 - \frac{2D_2}{D_1}I_pk_x^4\omega^2 - \left(\mu + \frac{2D_2}{D_1}\mu + \frac{I_pG_eH}{D_1}\right)k^2\omega^2 + G_eH\left(k^4 - \frac{\mu}{D_1}\omega^2\right) + \frac{I_p\mu}{D_1}\omega^4 = 0 \tag{4.31}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G_eH}{I_p}}$$

Où D_1 est la raideur de de flexion homogénéisée de la poutre par unité de largeur, D_2 est la raideur de flexion des peaux et I_{rho} est la masse par unité de surface. La raideur de cisaillement effective de l'âme est G_e et H est son épaisseur.

Les trois solutions positives ($\kappa_1,\ \kappa_2, et\ \kappa_3$) de l'équation de dispersion sont tracées dans la Figure 4.11. La plus basse des deux droites parallèles dans cette figure correspond à une flexion pure de l'ensemble de la poutre. La droite parallèle la plus haute correspond à un nombre d'onde de flexion pure d'une peau. Ceci implique que le premier mode passe d'une flexion pure de l'âme pour les basses fréquences à un cisaillement pur pour les hautes fréquences. Les courbes pointillée (κ_3) et hachurée (première partie de κ_2) correspondent à des solutions imaginaires donc évanescentes. La longueur d'onde κ_2 correspond à une onde de rotation qui devient propagative (courbe en tiret-point) à partir d'une fréquence de coupuref_p.

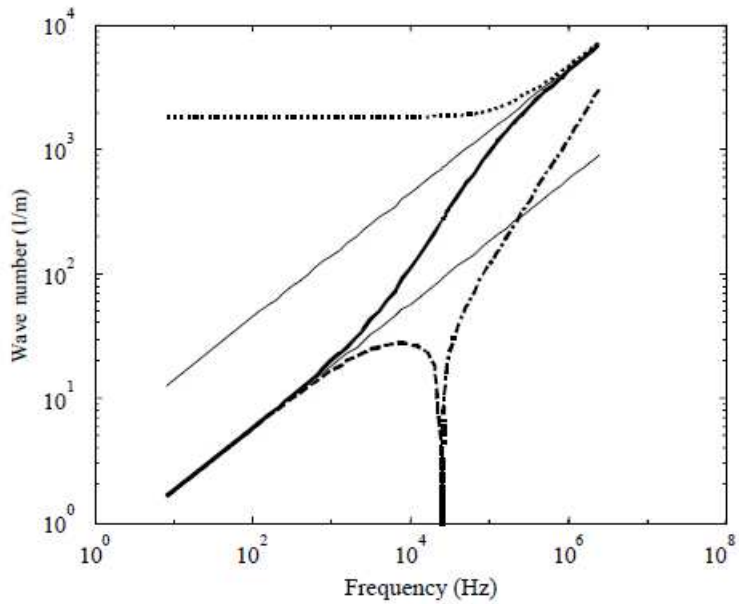


Figure 4.11 Nombre d'onde pour une poutre sandwich ___, κ_1; ----,κ_2 (evanescent); -.-.-., κ_2 (propagatif); ...., κ_3. Les lignes parallèles sont des asymptotes pour les nombres d'onde [49].

Cette fréquence de coupure f_p pourrait faire appaitre un TP en faisant varier un de ses paramètres spatialement. Le problème est que la première onde (κ_3) reste propagative sur toutes les fréquences, ce qui empêche une localisation totale des vibrations.

4.2 Localisation dans les systèmes discrets

Au lieu de prendre la poutre (ou la peau) comme système principal et l'âme comme une raideur supplémentaire, il est possible de faire l'inverse et considérer la raideur de l'âme comme un système principal et la poutre comme une contrainte de couplage sur ce système. Pour cela, un ensemble de *n* oscillateurs couplés est étudié dans cette section dans le but de mieux comprendre la localisation dans les systèmes à gradient de propriété. Étudier un système discret a plusieurs avantages par rapport aux systèmes continus. En effet, il est plus facile et plus rapide à implémenter, reconfigurer et faire des calculs. Cette facilité permet de réaliser un nombre considérable d'itérations qui vont aider à développer une compréhension de l'effet du gradient de chaque paramètre de la structure sur la localisation.

4.2.1 Localisation dans les systèmes discrets non amortis

Le système utilisé dans cette section (4.2) est une chaîne de *n* oscillateurs couplés. La configuration présentée dans la Figure 4.12 (a) est l'illustration généralement utilisée dans la littérature [25] tandis que la configuration dans la Figure 4.12 (b) correspond à un déplacement transversal. Cette dernière configuration est utilisée dans la suite de la thèse pour une meilleure visualisation des vibrations et pour la ressemblance qu'elle a avec le système de poutre sur un support élastique étudié dans la section précédente.

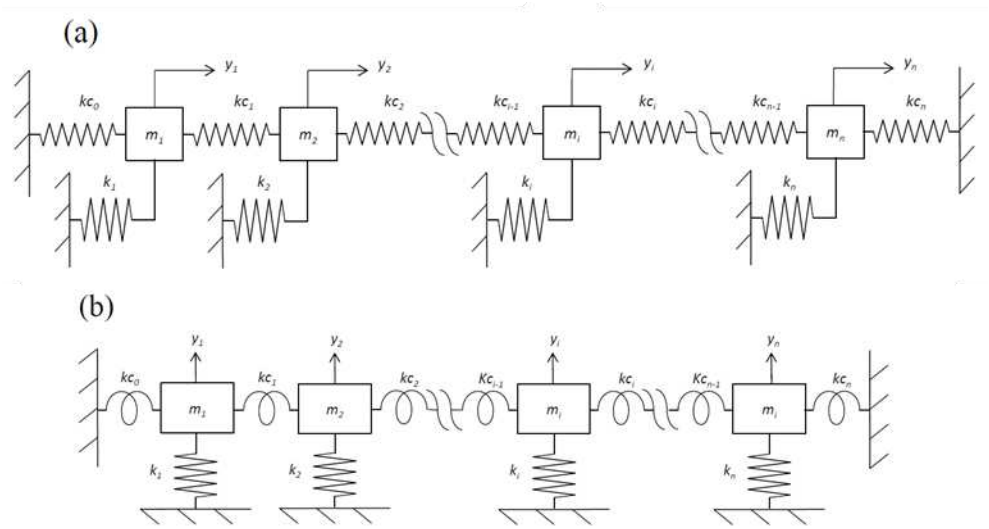


Figure 4.12 Deux représentations de chaînes d'oscillateurs: a) Configuration avec un déplacement longitudinal. b) Configuration avec un déplacement transversal

Le système est composé de *n=100* oscillateurs de masse m_i et de raideur k_i couplés pas des ressorts linéaires de raideur kc_i. La valeur du couplage, notée *R*, est caractérisée par le ratio entre les fréquences propres des deux sous-systèmes (l'âme et le couplage) $R^2 = \omega_c^2/\omega_b^2 = k_c/k_0$. Vu que le système doit être faiblement couplé pour avoir une localisation des modes, les différentes raideurs vont être implémentées tel que la valeur de *R* reste relativement faible. Un autre facteur aussi important pour l'obtention d'une localisation dans les systèmes mécanique est le désaccordage, ou l'incertitude dans les paramètres.

En s'inspirant de la cochlée, le désaccordage aléatoire sera remplacé par un gradient de propriété d'une amplitude $\Delta\alpha$ où α peut être soit la raideur de la base, la masse ou la raideur du couplage. Dans cette étude les gradients sont contrôlés et ont une variation linéaire tel qu'indiqué dans

l'équation (4.32). L'amplitude $\Delta\alpha$ est définie dans l'équation (4.33) par le taux de variation dans la valeur du paramètre entre le premier et le dernier oscillateur. La raideur du premier ressort de couplage est $kc_0 = 0.01$ et celle du premier ressort de la fondation (l'âme) est $k_0 = 1$, ce qui correspond à un ratio de couplage $R^2 = 1\%$. La première masse m_0 est aussi égale à l'unité.

$$\alpha_i = \alpha_0 + i \cdot \Delta\alpha \cdot \alpha_0/n \tag{4.32}$$

$$\Delta\alpha = (\alpha_n - \alpha_0)/\alpha_0 \tag{4.33}$$

$$(K - \lambda M)Y = 0 \tag{4.34}$$

Dans la suite, un gradient est appliqué consécutivement sur chacun des paramètres du système. Puis un gradient est appliqué simultanément sur la masse et la raideur. Ceci permet de visualiser les différents motifs de localisation. Le comportement du système sera étudié en utilisant une extraction modale des valeurs propres λ et vecteurs propre Y du système en utilisant l'équation (4.34) où $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{K}$ sont les matrices de masse et de raideur du système. Le développement de ces matrices est présenté dans l'annexe (B).

4.2.1.1 Variation de la raideur de la base

Dans une chaîne d'oscillateurs couplés, un premier motif de localisation peut avoir lieu avec une variation faible de la raideur. La valeur de la raideur du dernier oscillateur k_n est 1% plus élevé que celle du premier oscillateur k_j. Les vecteurs propres de ce système sont présentés dans la Figure 4.13 où cinq modes sont sélectionnés dans les graphiques (a) à (e) pour expliquer le motif de localisation représenté par la cascade de tous les modes de la structure, tel que présenté dans la Figure 4.13 (f). Deux types de localisation sont respectivement identifiés dans les Figure 4.13 (a et b) et les Figure 4.13 (d et e). Ils seront détaillés dans la section 4.2.1.2.

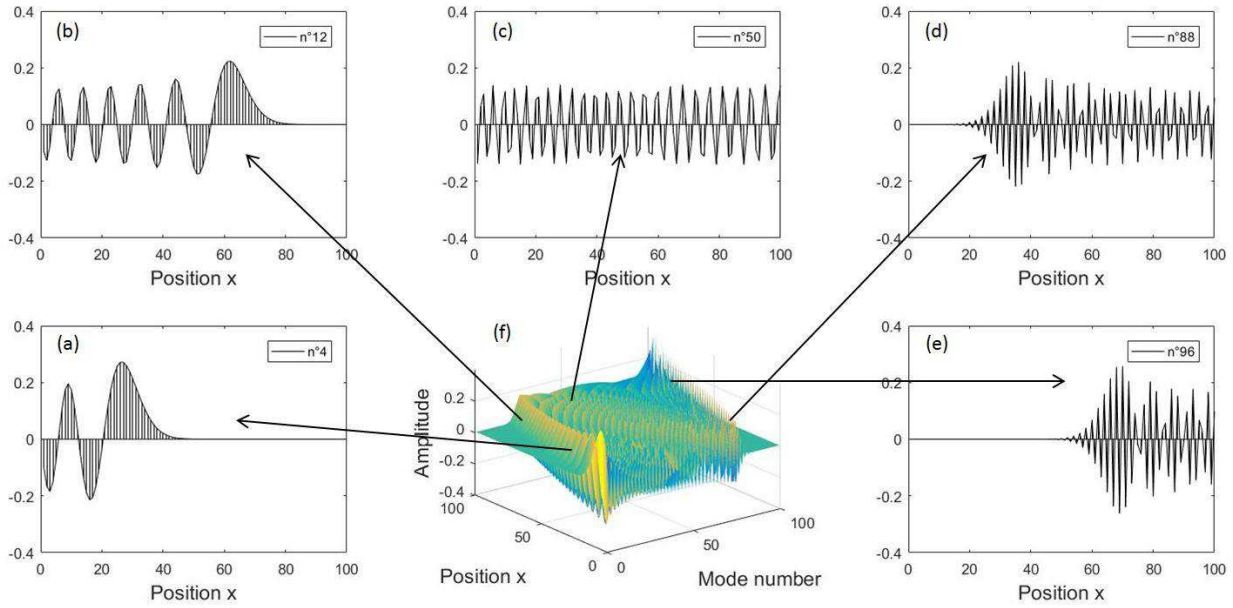


Figure 4.13 Évolution des vecteurs propres pour un système avec une variation de raideur faible. Le confinement du premier type est présenté par le 4ème (a) et le 12ème (b) modes. Le 50ème mode (c) ne présente pas de confinement d'énergie. Le confinement du deuxième type est représenté par le 88ème (d) et le 96ème (e) modes. (f) illustre la cascade des tous les modes du système. Les paramètres utilisés pour cette extraction modale sont : $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$

Le confinement du premier type, Figure 4.13 (a et b), représente les modes où la structure est divisée en deux parties. Dans ce cas, les oscillateurs dans la partie gauche de la structure suivent un mouvement sinusoïdal avec une amplitude qui augmente jusqu'à un maximum où a lieux un *Turning Point*. À droite de ce point, l'amplitude du mouvement de la structure décroît exponentiellement. Ce *Turning Point* est semblable à celui déjà vu dans section précédente avec la poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable.

Ce phénomène est considéré comme la seule cause de la localisation des vibrations dans les structures. Comme cela a été présenté dans la cochlée, si la localisation est regardée d'un point de vu de propagatif, le *Turning Point* peut être vu comme un front d'onde qui se propage dans la structure en fonction de la fréquence et non pas en fonction du temps.

Dans cette étude, un nouveau type de confinement de l'énergie vibratoire a été identifié pour les valeurs propres les plus élevées. Ce confinement que nous allons appeler « confinement du deuxième type », présenté dans la Figure 4.13 (e et f), a une allure semblable à celle du premier type. Cependant, deux principales différences peuvent être identifiées entre les types un et deux.

La première est le changement de position entre la partie oscillatoire et la partie exponentielle. La deuxième différence est plus importante, elle est directement liée au fait que le système étudié est un système discret. En effet, en regardant de plus près la zone où l'amplitude est maximale sur les deux types de confinement, on remarque que les oscillateurs sont en phase pour le premier type (e.g Figure 4.13 (b)) et sont en opposition de phase pour le deuxième type (e.g Figure 4.13 (d)). Même si ces deux types ont été observés dans quelques articles [28] [50] [51], la distinction entre ces deux confinements n'a jamais été établie. En effet quand les systèmes étudiés sont continus la localisation est expliquée par le premier type et quand les systèmes étudiés sont discrétisés la localisation est expliquée par le deuxième type. Ceci peut être expliqué par le fait que le premier type de confinement ne peut apparaître dans les systèmes discrets qu'à partir d'un nombre important d'oscillateurs puisqu'il nécessite un mouvement d'ensemble, alors qu'une partie de la littérature sur la localisation se focalise sur un nombre limité d'oscillateurs pour pouvoir résoudre le système d'équations analytiquement [22] [52].

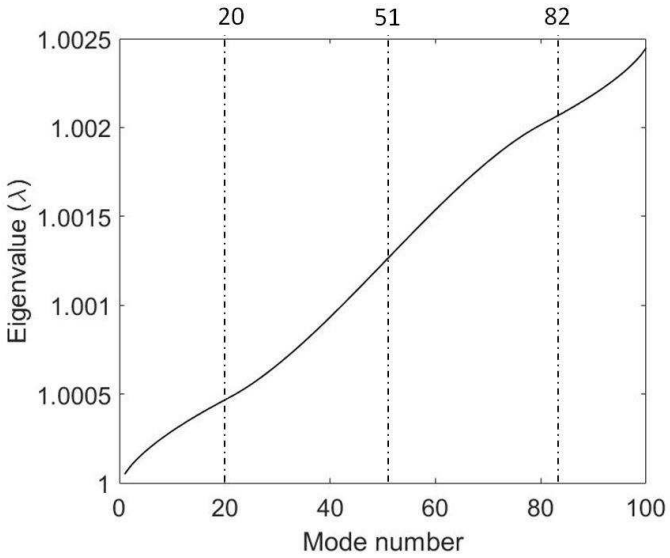


Figure 4.14 Évolution des valeurs propres montrant les modes auxquels ont lieu les points d'inflexion. Pour une configuration où $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$

Le phénomène de tonotopie est visible sur cette configuration. En effet, comme défini précédemment, l'onde se propage jusqu'à une certaine position pour une fréquence donnée. Les 22 premiers modes dans la Figure 4.13 (f) subissent ce phénomène, cela peut se voir plus clairement en observant l'évolution de la position de l'amplitude maximale en fonction du numéro du mode. Entre le 23ème et le 83ème mode, ce phénomène de localisation disparaît, laissant lieu à une bande

passante. Le phénomène de tonotopie réapparaît à partir du 84ème mode avec une localisation du deuxième type. L'évolution de la position de l'amplitude maximale suit le même sens que celle des premiers modes, mais les parties propagative et évanescente changent de position. La présence de ces trois parties est ce qui va définir le premier motif de localisation.

La répartition des trois zones caractéristiques qui identifient ce premier motif de localisation peut être distinguée en regardant l'évolution des valeurs propres du système. Cette évolution est tracée dans la Figure 4.14 où les valeurs sont arrangées dans un ordre croissant. Trois points d'inflexion peuvent y être distingués. Ces points sont plus faciles à trouver sur la courbe de la dérivée seconde des valeurs propres. En effet, on observe les trois zéros à la Figure 4.15. Le premier et le dernier point d'inflexion ont lieu sur les modes où il y a une transition entre la zone tonotopie et les zones sans localisation. Le deuxième point d'inflexion indique simplement le mode médian de la structure. La différence entre ces points est que les points en relation avec la localisation se trouvent sur des zones croissantes de la dérivée seconde (i.e dérivée 3e positive). Cette relation, entre la convexité des valeurs propres, est étroitement liée au « *loci veering* » [22] [52]. Cependant, dans le cas classique, un mode *veering* correspond à un changement d'ordre des modes en faisant varier un paramètre de la structure alors que dans notre cas la variation de paramètre est directement implémentée dans la structure.

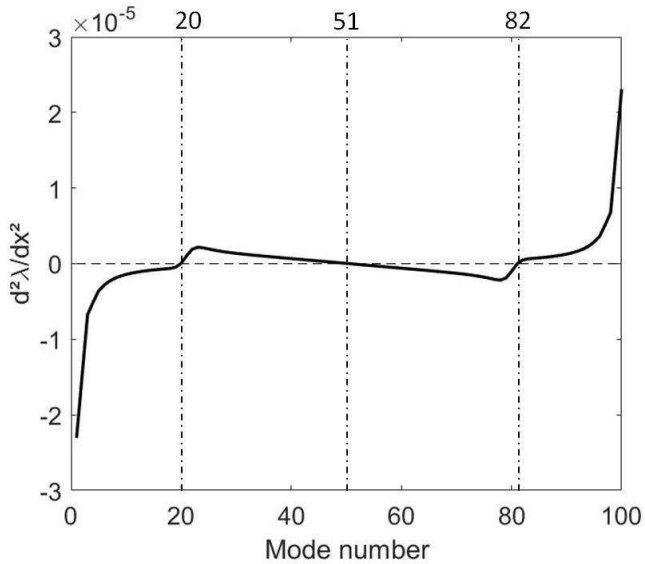


Figure 4.15 Évolution de la dérivée des valeurs propres montrant les modes auquel a lieu les points d'inflexion (modes n°20 n°51 et n°82). Pour une configuration où $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$

4.2.1.2 Variation de la masse et de la raideur de couplage

La majorité des articles dans la littérature ont étudié uniquement variation de la raideur dans les systèmes désaccordés. Dans cette partie, l'effet de la variation de la masse et du couplage sera étudié. Au-delà des raisons pédagogiques, cette étude est nécessaire parce qu'en créant un FGM (*Functionally Graded Material*), il est pratiquement impossible avoir une variation de raideur sans d'avoir une variation de la masse.

Dans un premier temps, un système avec une variation de masse $\Delta m = 0.01$ est implémenté. Ce système a les mêmes propriétés quantitatives et qualitatives du système étudié dans la section 4.2.1.1. La différence entre un système avec une variation de masse et un système avec une variation de raideur se résume dans l'emplacement des zones propagative et évanescente et le sens d'évolution du front d'onde en fonction des fréquences propres. Ceci est visible en comparant le 8ème mode de cette structure à la Figure 4.16 (a) et les modes dans la Figure 4.13 (a et b) du système avec une variation de la raideur. En comparant les Figure 4.16 (b) et Figure 4.13 (a et b), une symétrie similaire peut être observée pour le confinement du deuxième type. La symétrie est encore plus claire en comparant la Figure 4.17 (b) et la Figure 4.17 (a) qui montrent respectivement la cascade des modes d'un système avec gradient d'amplitude $\Delta m = 0.01$ et $\Delta k = 0.01$.

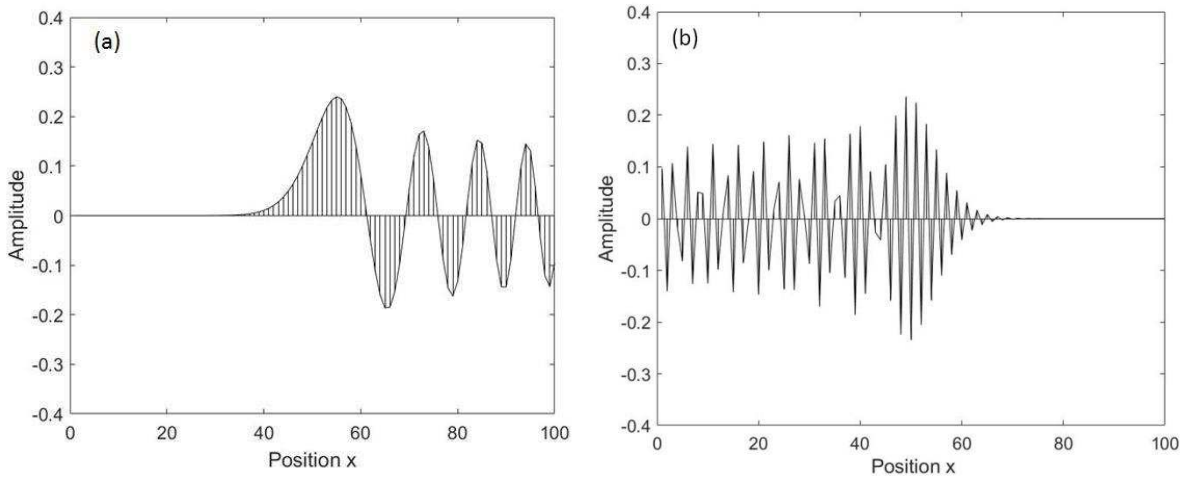
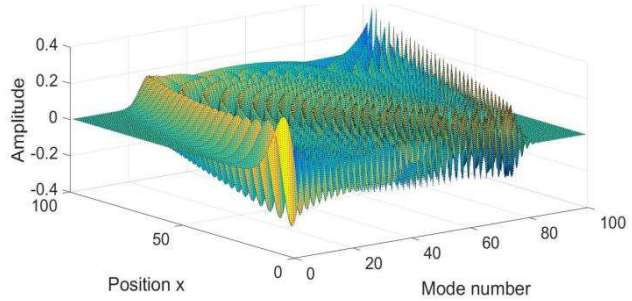
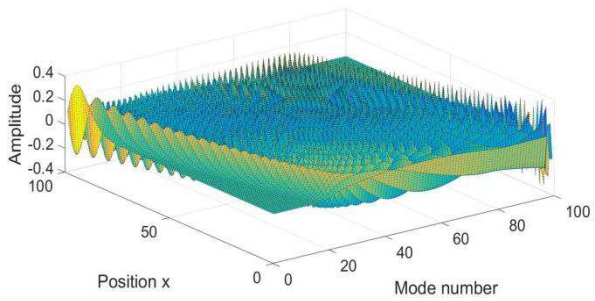


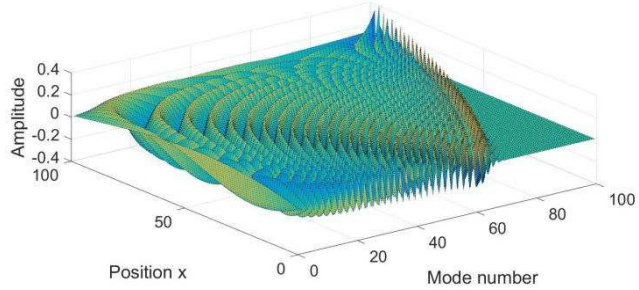
Figure 4.16 Confinement du premier et deuxième type dans une chaîne d'oscillateurs avec un gradient de la masse représentés respectivement par le 8ème (a) et le 92ème (b) modes; $\Delta m = 0.01; \Delta k = 0; \Delta kc = 0$



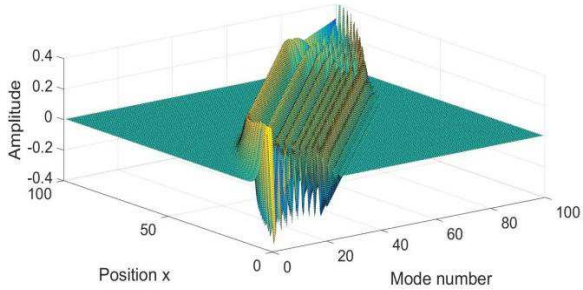
(a) Variation faible de la raideur $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0, \kappa = 1$ (même figure 3.13 (f))



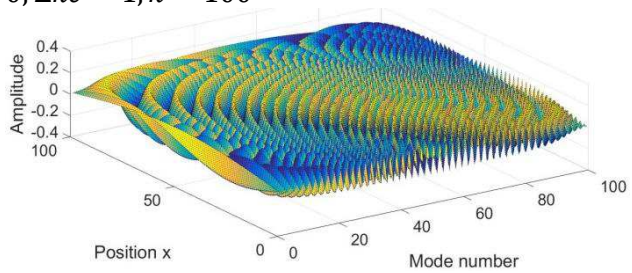
(b) Variation faible de la masse $\Delta m = 0.01; \Delta k = 0; \Delta kc = 0, \kappa = 1$



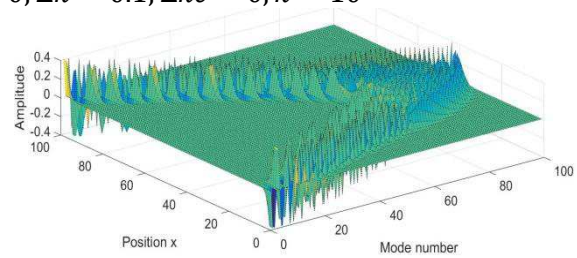
(c) Variation du couplage $\Delta m = 0; \Delta k = 0; \Delta kc = 1, \kappa = 100$



(d) Variation forte de la raideur $\Delta m = 0; \Delta k = 0.1; \Delta kc = 0, \kappa = 10$



(e) Variation identique de la masse et de la raideur $\Delta m = 0.01; \Delta k = 0.01; \Delta kc = 0$



(f) Variation linéaire de la raideur et quadratique de la masse de $\Delta m = 0.5; \Delta k = 0.5; \Delta kc = 0$

Figure 4.17 Vecteurs propres pour des chaînes d'oscillateurs pour différent gradient de propriétés

La Figure 4.17 (c) montre la cascade des modes d'un système avec un gradient linéaire de la raideur de couplage d'amplitude $\Delta kc = 1$. Pour cette variation, même si une légère asymétrie est observée dans les premiers modes, aucun phénomène de *Turning Point* n'est détecté. Seul le confinement du deuxième type est observé. Cette configuration présente un troisième type de localisation où tous les premiers modes sont propagatifs et seuls les modes avec des valeurs propres élevées sont localisés. Ceci est interprété à partir de la Figure 4.17 (c) en regardant la zone où la déformation est nulle. Ces zones où les modes présentent une décroissance exponentielle sont des clés de lecture qui aident à différentier les motifs de localisation. Par exemple, là où dans deux configurations

précédentes, soit les Figure 4.17 (a) et (b), il y a deux zones symétriques de déformations nulles dans le cas d'une variation du couplage cette zone existe seulement pour les hautes fréquences.

4.2.1.3 L'influence de l'amplitude du gradient

L'importance de l'amplitude du désaccordage sur le phénomène de la localisation est bien établie dans la littérature [22] [53]. Le paramètre le plus précis pour quantifier l'effet du désaccordage sur la localisation est le ratio entre l'amplitude du désaccordage sur le ratio de couplage. Pour les systèmes à gradient de propriété, le ratio est défini par $\kappa = \Delta\alpha/R^2$. Ce paramètre a déjà été lié à l'apparition des localisation forte et faible [25]. Dans le cas des chaînes d'oscillateurs couplés à gradient de propriété, κ va permettre de distinguer les deux motifs de localisation. Le premier motif a lieu pour les faibles valeurs ($\kappa < 4$). Ces les motifs de localisation observés dans les Figure 4.17 (a et b) où on distingue trois types de modes : des modes avec un confinement du premier type; des modes sans confinement et des modes avec un confinement du deuxième type.

Le deuxième nouveau motif de localisation a lieu pour des amplitudes de gradient élevées ($\kappa > 4$), où les deux types de confinement (donc les deux *Turning Point*) ont lieu sur le même mode (Figure 4.18). Cette figure représente : (a) le 50ème mode d'une structure avec des amplitudes de variation de raideurs $\Delta k = 0.04$ ($\kappa = 4$) et (b) le 50ème mode d'une structure avec des amplitudes de variation de raideurs $\Delta k = 0.3$ ($\kappa = 30$). La Figure 4.18 (a) représente la transition entre le motif de localisation forte (Figure 4.17 (a)) et celui de localisation faible (Figure 4.17 (d)). Ce mode présente le système avec le plus petit Δk qui n'a aucun mode totalement propagatif. En effet, c'est le premier mode qui présente deux *Turning Points*. La Figure 4.17 (b) représente quant à elle une illustration d'un mode appartenant à une localisation forte. Les deux *Turning Points* correspondant aux deux types de confinement sont rapprochés pour ce type de système, ce qui crée un déplacement encore plus confiné sur une faible zone avec un déplacement nul sur le reste de la structure.

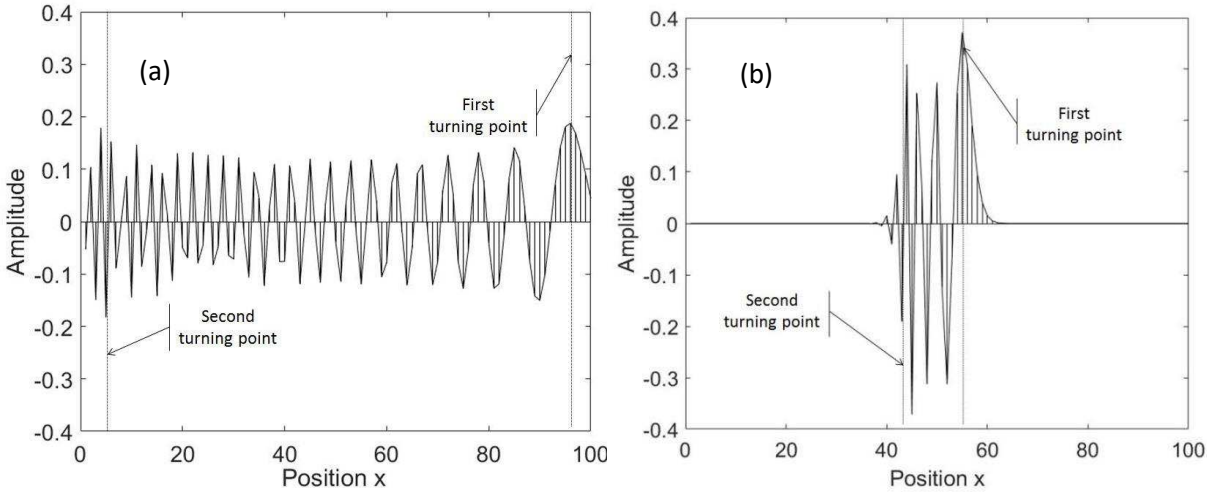
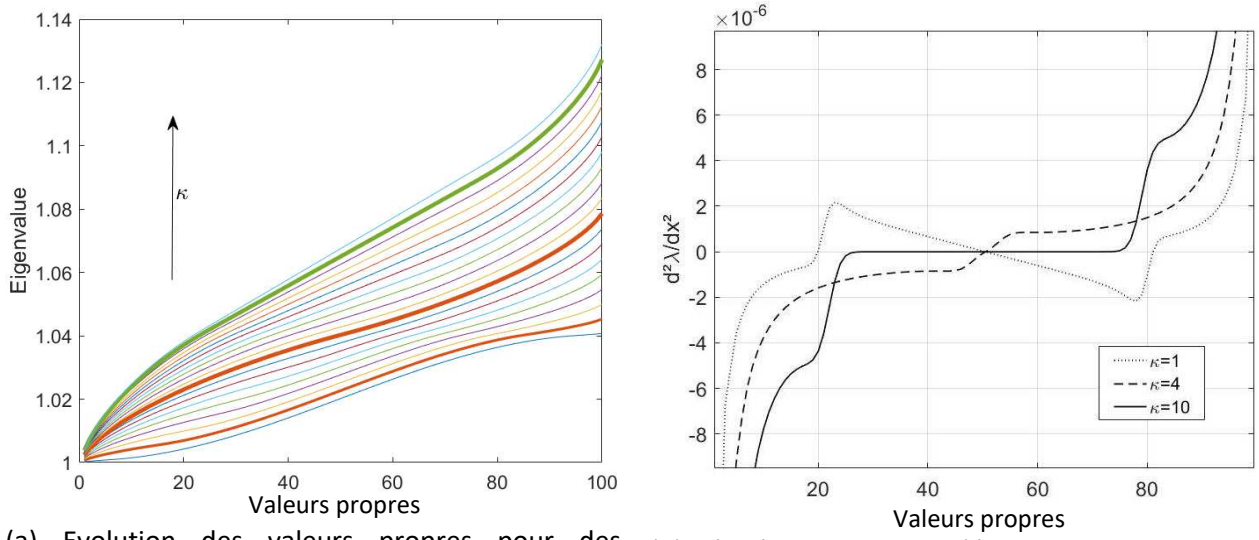


Figure 4.18 Confinements du premier et du deuxième type présents simultanément sur les 50ème modes pour des systèmes avec (a) $\Delta m = 0; \Delta k = 0.04; \Delta kc = 0; \kappa = 4$; (b) $\Delta m = 0; \Delta k = 0.3; \Delta kc = 0; \kappa = 30$

La Figure 4.17 (d) illustre bien les trois zones qui constituent ce type de localisation forte : une première zone avec des modes présentant un confinement du premier type avec un comportement tonotopique illustré par la 'propagation' de la position du *Turning Point* en fonction des valeurs propres. La deuxième zone est quant à elle constituée de modes comportant deux types de confinement avec un comportement tonotopique illustré par la 'propagation' simultanée de la position des deux TP en fonction des valeurs propres. La dernière zone est symétrique à la première, mais avec un confinement du deuxième type au lieu du premier.



(a) Evolution des valeurs propres pour des systèmes avec κ variant entre 0.1 et 10 avec un pas de 0.5 $\Delta m = 0, \Delta k = 0.01 \rightarrow 0.1,\ \Delta kc = 0$

(b) Dérivées secondes de l'évolution des valeurs propre de trois systèmes ; $\Delta m = 0; (\ldots)\Delta k = 0.01, (--)\Delta k = 0.04, (-)\Delta k = 0.1; \Delta kc = 0$

Figure 4.19 Évolution des valeurs propres et de leurs dérivées en fonction de κ

La différentiation entre ces deux motifs de localisations, forte et faible, et la transition entre les deux peuvent être visualisées en suivant l'évolution des valeurs propres. La Figure 4.19 (a) montre cette évolution pour des valeurs de $1 < \kappa < 10$ les courbes en gras correspondent respectivement à $\kappa = 1, \kappa = 4\ et\ \kappa = 10$. Les dérivées secondes de ces courbes sont tracées dans la Figure 4.19 (b). Pour la première valeur de κ les trois points d'inflexion décrits dans la section 4.2.1.1 sont observés. Pour des κ croissant le premier et le dernier point d'inflexion se rapproche du mode médian. Ces deux points se rejoignent sur le 50ème mode pour $\kappa = 4$, ceci est plus évident à distinguer en observant la dérivée seconde qui s'annule en un seul point (Figure 4.19 (b)). Pour des valeurs de κ encore plus élevées ce point d'inflexion s'étend sur une plage de valeur correspondant à une évolution monotone des valeurs propres et un plateau de dérivée seconde nulle. Ce palier correspond à la zone présentant des modes avec les deux TP pour le motif de localisation forte.

4.2.1.4 Évolution simultanée de la masse et de la raideur

Une variation simultanée de la masse et de la raideur donne de nouveaux motifs de localisation. Le premier a lieu quand la masse et la raideur varient avec un gradient linéaire et la même amplitude. La cascade de modes de ce type de système et tracée dans la Figure 4.17 (e) où $\Delta m = \Delta k = 0.01$

avec un gradient linéaire. Dans cette configuration, le confinement du premier type disparaît complètement. Il laisse lieu à des déformées modales plus classiques. Pour les valeurs propres plus élevées, un confinement du deuxième type persiste, mais seulement pour des amplitudes de gradient élevé. Ce confinement ressemble à celui où le couplage varie. Vu la grande amplitude du gradient, ce type de localisation particulier peut être dû à un défaut numérique causé par la grande disparité des valeurs dans les matrices. Pour un système avec un gradient de masse et de raideur linéaire, mais avec d'amplitudes différentes l'effet des deux gradients se soustrait. Par exemple, si un système a un $\Delta k = 0.03$ et $\Delta m = 0.02$ il sera équivalent à un système $\Delta k = 0.01$ et $\Delta m = 0$. Cette observation est d'une importance capitale pour la réalisation de la tonotopie dans une structure réelle. Elle montre qu'une variation quelconque de paramètre n'est pas une condition suffisante pour avoir une tonotopie.

Le dernier motif de localisation observé a lieu pour des gradients de différentes vitesses. Un système avec des gradients d'amplitude $\Delta k = 0.5$ et $\Delta m = 0.5$ avec une variation linéaire de la raideur et une variation parabolique de la masse est prise comme exemple. La cascade des modes de ce système est tracée dans la Figure 4.17 (f). Il est clair que ce motif de localisation est assez différent des motifs étudiés précédemment; pour cela une description détaillée est présentée dans la Figure 4.20. Deux zones de localisation ont lieu pour ce motif de localisation. La première a lieu entre le premier et 70ème mode; dans cette zone deux branches de modes fortement localisés (Figure 4.21 (a et b)) sont observées. Les modes dans ces branches présentent les deux types de confinement. Il y a généralement une alternance entre les modes localisés dans les branches hautes et basse, mais il arrive parfois de trouver deux modes consécutifs sur la même partie de la structure. Les modes localisés sur chaque branche suivent une évolution tonotopique dans des sens opposés. Ils se rapprochent jusqu'à ce qu'ils fusionnent au 70ème mode (Figure 4.21 (c)). Ensuite, une deuxième zone est observée où les modes ont deux confinements du deuxième type. Ces modes sont de plus en plus confinés et ils ne présentent pas de phénomène de tonotopie, (Figure 4.21 (c,d et e)).

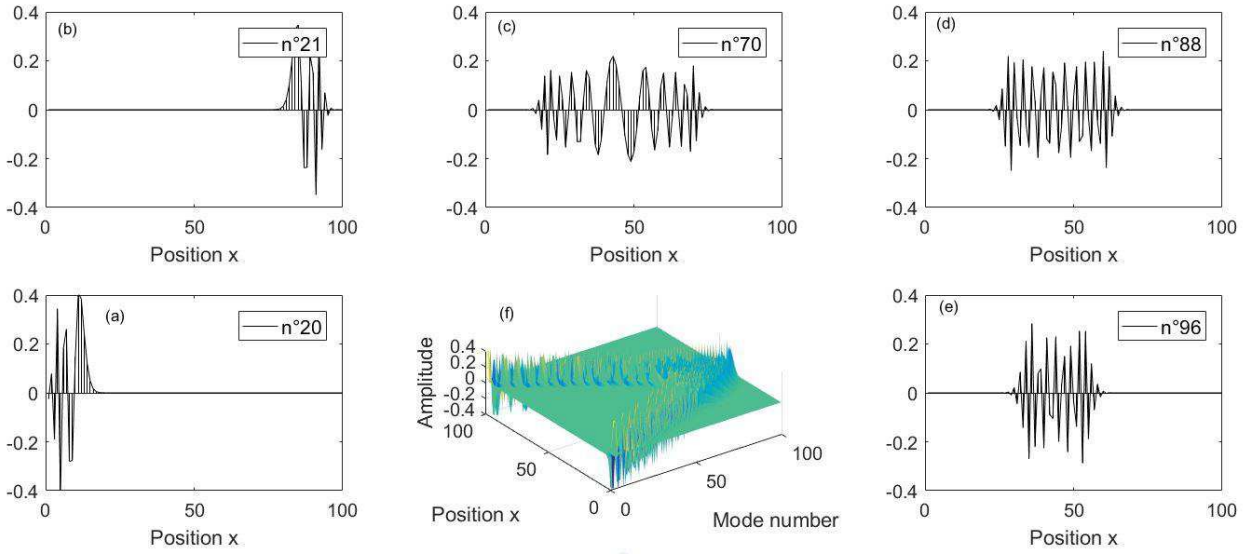


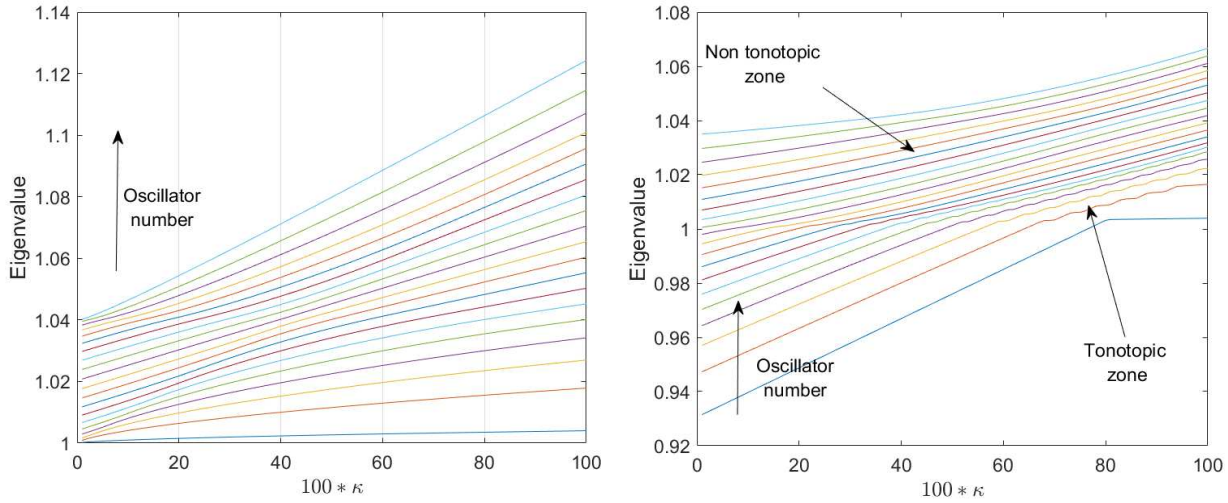
Figure 4.20 Évolution des vecteurs propres avec une variation linéaire de la raideur et une variation parabolique de la masse. Les modes tonotopiques sont illustrés par le 20ème (a) et le 21ème (b) mode. Le mode 70 (c) est un mode de transition ou les deux branches tonotopiques fusionnent. Le 88ème (d) et 96ème (e) modes illustrent les modes non tonotopiques. Les paramètres utilisés pour ce système sont $\Delta m = 0.5;\ \Delta k = 0.5; \Delta kc = 0$

4.2.1.5 Discussion

La localisation dans une chaîne d'oscillateurs a été étudiée dans le but de bien comprendre l'influence de chaque gradient de propriété sur la localisation. Les différents gradients et combinaisons de gradients donnent lieu à différents motifs de localisation. Un motif de localisation résume le comportement vibratoire global du système. Il est représenté par la cascade de tous les modes. Deux briques élémentaires de la localisation ont été identifiées : le confinement du premier et du deuxième type. Ils représentent deux manifestations différentes du TP. Le premier consiste en un TP classique comme déjà étudié dans la revue de littérature et comme décrit par Luongo [28]. Un deuxième type de confinement a été identifié, il a lieu généralement pour les hautes fréquences. Il diffère du premier par le déphasage important entre les oscillateurs dans la zone où il se produit.

En fonction de la combinaison de paramètres, une variation de la raideur de l'âme peut donner lieu à des motifs de localisation différents. Cette combinaison de paramètres se résume dans le paramètre κ, inspiré des travaux de Pierre [25] traitant de la localisation forte et faible. Dans un motif de localisation fort, aucun mode de localisation n'est totalement sinusoïdal. Tous les modes

présentent un des deux TP. Une excitation sur une extrémité du système est atténuée exponentiellement avant d'atteindre la deuxième extrémité. Le motif de localisation faible présente quelques modes avec un TP et des modes sans TP. La différentiation entre ces deux motifs peut être faite en utilisant le phénomène de *loci veering*. Dans la Figure 4.22 (a), l'évolution de la valeur propre d'un ensemble d'oscillateurs est tracée en fonction de κ. Le *curve veering* a lieu pour des oscillateurs de plus en plus proches jusqu'à $\kappa = 4$; au-delà de cette valeur, tous les *loci* divergent. Cette valeur présente donc bien la transition entre un motif de localisation forte et faible pour un gradient linéaire et ceci quel que soit les paramètres du système.



(a) Evolution des valeurs propres de 20 oscillateurs équiréparti en fonction de κ pour des propriétés $\Delta m = 0; \Delta k = 0.01 \rightarrow 0.1, \Delta kc = 0$

(b) Evolution des valeurs propres de 20 oscillateurs équiréparti en fonction de κ pour des propriétés $\Delta m = \Delta k = 0.1 \rightarrow 50;\ \ \Delta kc = 0$

Figure 4.21 Évolutions de la valeur propre d'un ensemble d'oscillateurs en fonction de κ

Une variation de la masse a un effet opposé par rapport à une variation de la raideur. Les motifs qui en découlent sont donc symétriques. Les variations simultanées de ces deux variables s'annulent.

Un dernier motif intéressant est obtenu lors de la variation de la masse et de la raideur avec des gradients de vitesses différentes, linéaires pour la raideur et non linéaire pour la masse. Le comportement de cet ensemble de systèmes peut être observé en suivant leurs *loci* en fonction de κ. La Figure 4.21 (b) montre l'évolution des valeurs propres de plusieurs oscillateurs pour des amplitudes de gradient $\Delta m = \Delta k = 0.01 \rightarrow 50$. La zone avec des *loci* en zigzag correspond aux

deux branches tonotopiques observées dans le motif de localisation, Figure 4.17 (f). Cette zone s'étend sur la zone non tonotopique pour des valeurs de κ croissante.

Il est aussi important de noter que même si le nombre d'oscillateurs n'a pas d'effet qualitatif, pour deux systèmes avec le même gradient, mais avec un nombre de ddl différent, les amplitudes et le nombre d'onde dans les modes varient. Ceci rend la différentiation entre les deux types de confinement plus difficile, pour les systèmes avec un nombre faible de ddl.

4.2.2 Localisation dans les systèmes discrets amortis

L'intégration de l'amortissement dans le but d'avoir une compréhension physique parfaite des phénomènes sous-jacents est une tâche inatteignable; au moins pour des modèles simplifiés. Cette difficulté est due à la différence d'échelle entre les processus physiques qui génèrent les vibrations et ceux qui génèrent l'amortissement. Les vibrations sont dues à un échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle à une échelle macro de la structure, tandis que la dissipation de l'énergie se fait avec d'autres processus microscopiques sur les surfaces de contact ou encore à l'échelle moléculaire ou cristallographique des matériaux.

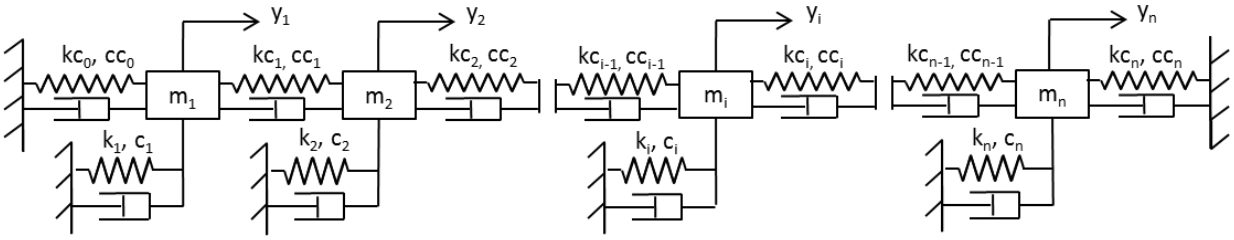


Figure 4.22 Système de n oscillateurs amortis

L'effet de l'amortissement sur la localisation est étudié dans cette section. Bien que considéré dans certains d'articles [54], une compréhension liée à la notion de TP n'est pas établie. Cette section est dédiée à l'étude des effets que peut avoir différents types d'amortissement sur la localisation. Le système utilisé est semblable à celui de la section 4.2.1 avec un ajout d'amortisseurs visqueux en parallèle avec les ressorts de fondation (l'âme) et ceux du couplage, notés respectivement c et c_c, (Figure 4.22). Même si elle ne respecte pas les principes de causalité, cette méthode de modélisation reste la plus adaptée à l'étude des effets physiques d'amortissement [55] [56] [57].

La méthode de l'espace d'état (*state-space*) utilisée pour intégrer l'amortissement visqueux dans le modèle discret. Cette méthode consiste à transformer les n équations couplées de second ordre

de l'équation. (4.35) en un ensemble de *2n* équations couplées du premier ordre tel qu'à l'équation (4.36).

Équation du mouvement:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \tag{4.35}$$

Réduction de l'ordre du système

$$\begin{pmatrix} C & M \\ M & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Le système est donc sous la forme

$$\begin{gathered} B\dot{r} + Ar = S(t) \\ avec\ B = \begin{pmatrix} C & M \\ M & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4.37}$$

La solution propre se décompose en deux parties : une qui correspond aux déplacements et une qui correspond aux vitesses. Les premiers n éléments du vecteur propre correspondent aux déplacements des oscillateurs. Comme dans le cas sans amortissement, la solution temporelle peut être reconstituée à partir de la solution modale.

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i X_i e^{\lambda_i t} + b_i^* X_i^* e^{\lambda_i^* t} \tag{4.38}$$

où X_i est le ième vecteur propre (ou mode complexe), λ_i la valeur propre complexe et b_i est une constante à déterminer à partir de la valeur initiale. La visualisation d'un mode complexe est différente des modes classiques. La Figure 4.23 montre deux modes amortis dans un espace complexe. La particularité de ces modes est que la phase entre deux oscillateurs change au cours du temps. Les modes peuvent être visualisés en les projetant sur le plan des réels (Figure 4.24) et en créant un déphasage global avec la partie imaginaire du mode propre. Le mode peut être perçu comme l'ensemble des projections sur un plan réel des modes dans la Figure 4.23 en faisant tourner le mode sur l'axe des abscisses avec une vitesse angulaire correspondant à la fréquence propre du mode. Cette variation de déphasage est un obstacle dans le cas de cette étude puisque l'amplitude maximale, qui distingue la localisation, ne se trouve pas toujours une à position fixe.

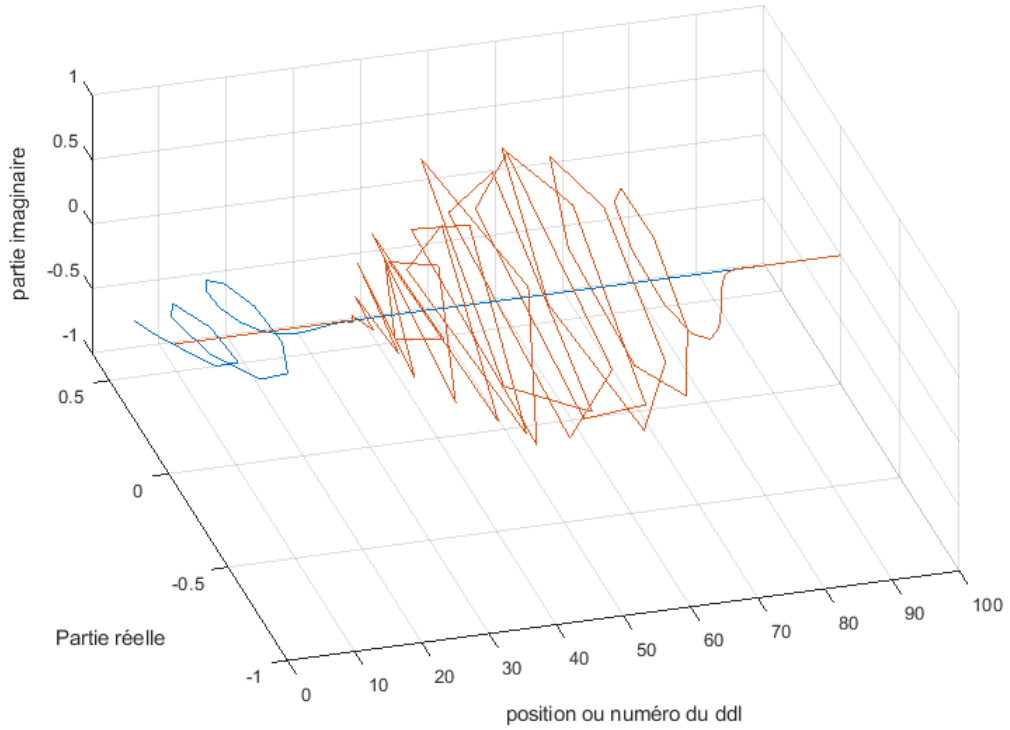


Figure 4.23 Le 5ème (bleu) et le 55ème (brun) modes complexes d'un système $\Delta m = 0$; $\Delta k = 0.08$; $\Delta kc = 0$; $c = 0.1$; $c_c = 0.01$.

Pour des considérations respectant la visualisation et dans un but d'identifier les maximums absolus, une représentation en valeur absolue est choisie pour l'étude du système d'oscillateur. En effet, un vecteur propre peut s'écrire sous forme d'un module et d'un déphasage.

$$X_i = [X_{i1}, X_{i2} \dots X_{in}]^T; X_{ij} = |X_{ij}| e^{i\Phi_{ij}}$$

La Figure 4.24 (b) montre la forme que peut représenter le module d'un mode, où les oscillations sont amoindries, mais où l'amplitude maximale peut être suivie.

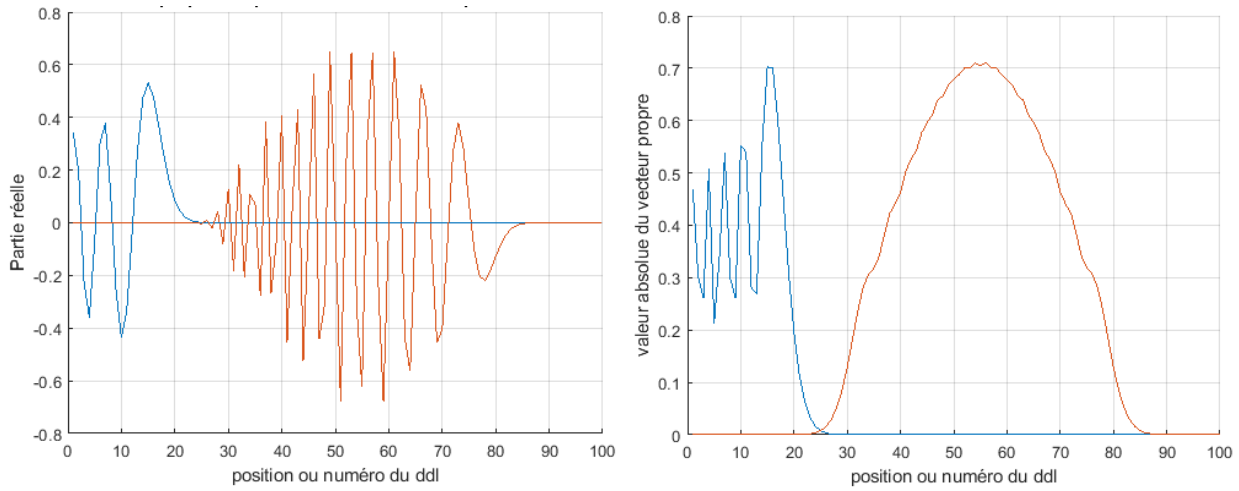


Figure 4.24 La partie réelle et la valeur absolue du 5ème (bleu) et du 55ème (brun) mode d'une structure: $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; c_c = 0.01$.

La valeur propre complexe peut s'écrire en parties réelle et imaginaire.

$$\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$$

La partie imaginaire β_i correspond à la fréquence propre tandis que la partie réelle α_i correspond à l'amortissement. En écrivant le coefficient b_i de l'équation (4.40) en coordonnées polaires $b_i = |b_i|e^{i\Psi_i}$, le déplacement du j ème oscillateur peut alors s'écrire

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^{N} 2|b_i X_i| e^{-\alpha_i t} \cos(\beta_n\, t + (\Phi_{ij} + \Psi_i))$$

Le comportement modal d'un système peut être évalué en suivant trois variables $|X_{ij}|, \alpha_i, \beta_i$. La Figure 4.25 illustre ces trois variables. La Figure 4.25 (a) montre l'évolution des lieux des racines d'un système avec un gradient de raideur faible et un amortissement faible. Cette configuration du système correspond à une localisation faible comme celle vue dans la section 4.2.1.1. La Figure 4.25 (b) montre l'évolution de la valeur absolue de la partie des vecteurs propres correspondante aux déplacements. Elle est légèrement différente du motif de localisation faible présenté dans la Figure 4.17 (a), mais elle montre clairement les trois zones qui distinguent ce motif : la zone avec le premier le TP du premier type, la zone sans TP et la zone avec le TP du second type. La différence entre ces trois comportements peut aussi être observée sur l'évolution des lieux des racines, mais cette observation n'est pas la même que celle observée dans le cas des

points d'inflexion dans la section 4.2.1.1. Elle est liée à un comportement différent de l'amortissement sur les modes localisés et les modes non localisés. L'approche concernant l'évolution des fréquences propre et l'apparition des points d'inflexion vue dans la section 4.2.1.1 reste valable en étudiant la partie imaginaire d'un système avec amortissement visqueux.

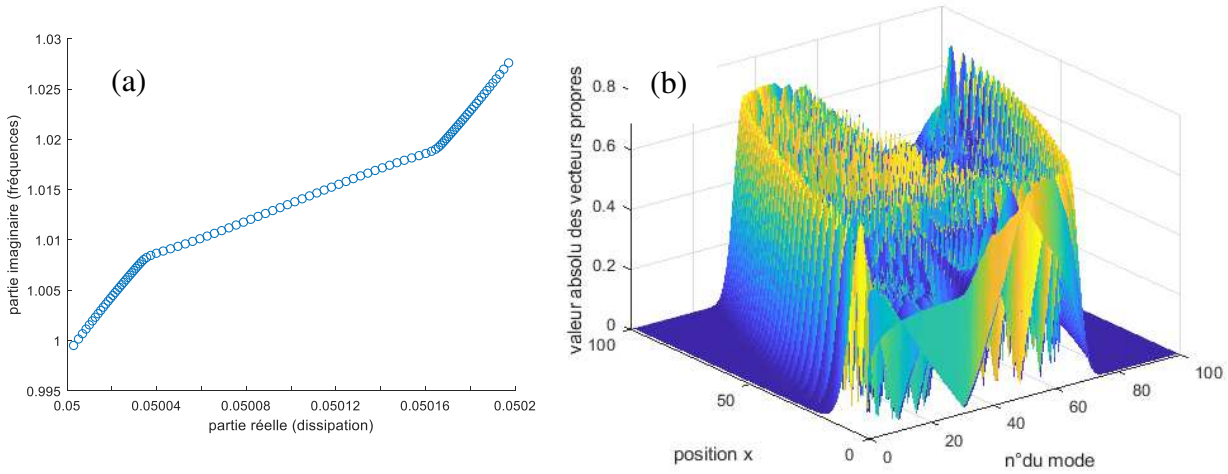


Figure 4.25 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.02; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; c_c = 0.0001.$

Le premier paramètre d'amortissement étudié est celui relié à la raideur de l'âme c. Il est plus facile à étudier à cause de la similarité entre son comportement et le comportement d'un système à 1 ddl [58] car il se base sur la notion d'amortissement critique. L'étude d'un système simple se fait en déterminant ses valeurs propres, ce qui se traduit par la résolution de l'équation (4.39).

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{4.39}$$

Les racines de cette équation caractéristique sont

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \tag{4.40}$$

La solution de ces racines peut être catégorisée dans un des cas suivant :

1. Un système critique : Il y a une valeur critique double si $c^2 - 4mk = 0$. Dans ce cas $c = 2\sqrt{mk}$ est appelé constante d'amortissement critique.

2. Un système suramorti : Si $> c_{critique} = 2\sqrt{mk}$, deux racines réelles existent, mais le système ne présente pas d'oscillation.

3. Un système sous-amorti : Si $c < c_{critique} = 2\sqrt{mk}$, deux racines complexes existent et le système présente des oscillations

Ce même comportement est observé lors de l'étude d'une chaîne d'oscillateur. Cela est visible en comparant les Figure 4.25 (b) et Figure 4.26, qui ont des amortissements respectifs de 0.1 et de 2.02. Ces systèmes ont un amortissement critique $2 < c_{critique} = 2\sqrt{mk} < 2.02$ à cause de la variation de la raideur. Ce calcul ne tient pas compte de l'effet du couplage qui aura comme effet d'augmenter la raideur du système d'où l'augmentation de la valeur de l'amortissement critique. La Figure 4.26 montre qu'au-delà d'une certaine valeur de l'amortissement les modes ne sont plus oscillatoires. Ceci implique que l'amortissement peut faire disparaître la localisation en dissipant les vibrations, ce qui présente un résultat assez intuitif. Cette conclusion reste valable pour les systèmes avec un motif de localisation forte.

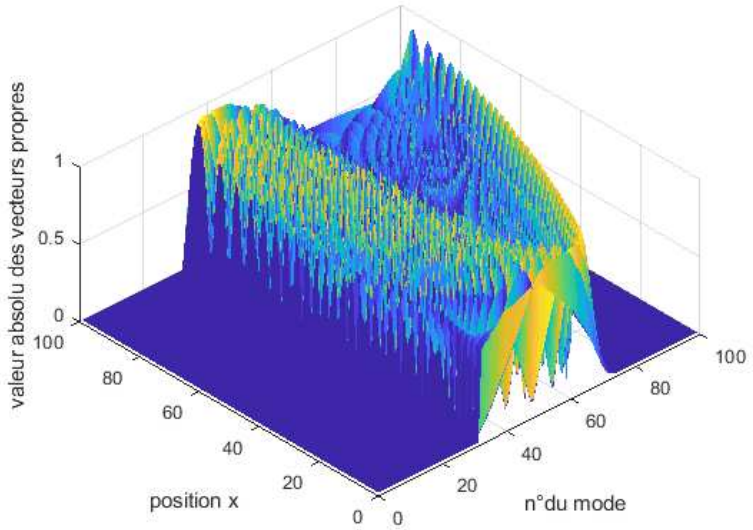


Figure 4.26 Valeurs absolues des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.02; \Delta kc = 0;$ $c = 2.02; c_c = 0.0001.$

Le système présente un comportement plus complexe lors de l'intégration d'un amortissement sur le couplage. Le premier cas étudié est celui d'un système avec un motif de localisation fort et un amortissement sous critique $c_c = 0.001 < 2\sqrt{mk_c} = 0.002$. Le comportement de ce système est

présenté dans la Figure 4.27. La première partie de cette figure montre l'évolution des lieux des racines en rouge et la compare à un système avec un amortissement dix fois plus faible $c_c = 0.0001$ (en bleu). Ce changement de valeur d'amortissement n'a pas beaucoup d'influence sur les fréquences propres. Il montre que le système est simplement plus amorti. Il est aussi à noter que contrairement aux systèmes faiblement localisés, les lieux des racines d'un système fortement localisé présentent un palier de parties réelles constantes. Ce palier correspond aux modes avec les TP des deux types en simultané. La Figure 4.27 présente l'évolution de la valeur absolue des modes du système avec un amortissement sous critique. Contrairement aux systèmes très faiblement amortis ou non amortis (Figure 4.17 (d)) les modes présentant les deux TP ne sont plus localisés sur les extrémités, mais au milieu de la partie oscillante du mode. Ceci est aussi visible dans le 55ème mode (brun) de la Figure 4.24 où les TP ne peuvent plus être distingués par un déplacement maximal.

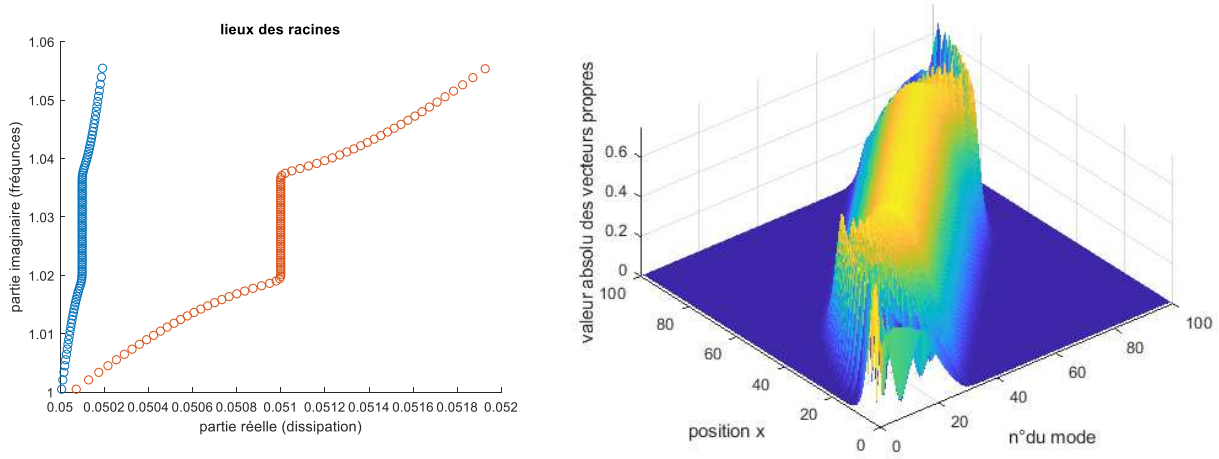


Figure 4.27 (a) Lieux des racines (bleu) $\Delta k = 0.08;\ c = 0.1; c_c = 0.0001;$ (rouge) $\Delta k = 0.08;\ c = 0.1; c_c = 0.001$ (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0;\ \Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; c_c = 0.001.$

Les deux derniers cas de figure sont les systèmes fortement et faiblement localisés avec un régime sur-amorti en couplage. La Figure 4.29 présente le cas de la localisation faible avec un amortissement $c_c = 0.02 > 2\sqrt{mk_c} = 0.002$. La première différence entre ce système et le système sous amorti est observable sur l'évolution des lieux de racines (Figure 4.28 (a)). Deux nouvelles branches apparaissent sur la courbe du système sur amortie (courbe jaune) qui n'étaient

pas présentes dans les systèmes sous-amortis (courbes bleu et rouge). Ces branches correspondent à une prolongation et une intercalation des modes avec un TP dans la plage de fréquences des modes sans TP. La Figure 4.28 montre aussi que tous les modes sont devenus fortement localisés, dans le sens propagatif. En effet si le système est excité par une extrémité, l'onde ne peut pas être transmise à l'autre extrémité. Cette affirmation concerne à la fois les modes avec un TP qui était excitable depuis une extrémité et qui, théoriquement, permettent de voir la tonotopie et les modes sans TP. Ceci implique qu'un amortissement visqueux relativement faible sur le couplage peut empêcher l'apparition de la tonotopie ou rend sa visualisation expérimentale difficile.

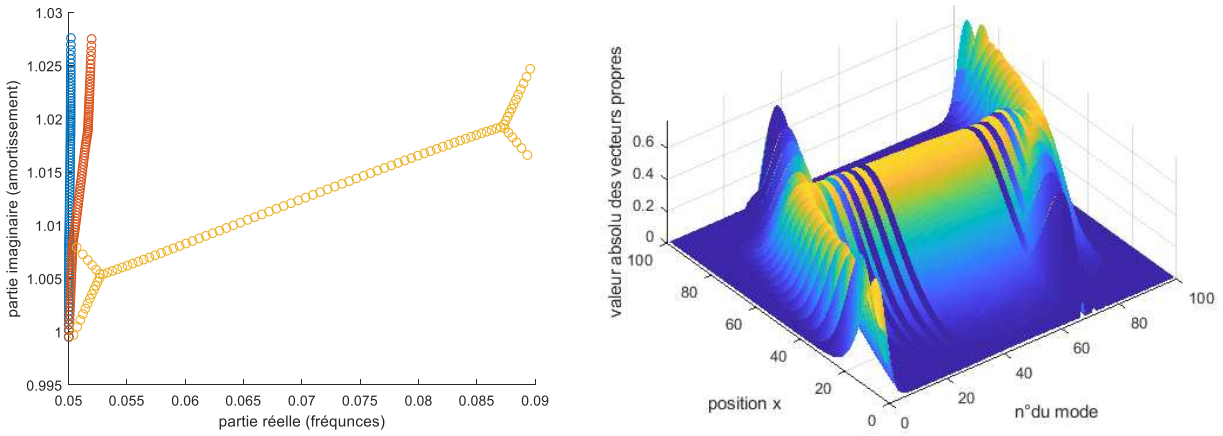


Figure 4.28 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0$; $\Delta k = 0.08; \Delta kc = 0$; $c = 0.1; c_c = 0.02$.

Le dernier cas étudié est celui d'un système fortement localisé avec un régime sur amorti. L'état de ce système est présenté à la Figure 4.29. Autres que les nouvelles branches observées pour le cas de la localisation faible, quatre nouvelles sous-branches apparaissent dans la bande de fréquences des modes ayant deux TP. Le comportement du système dans cette bande de fréquence devient non monotone dans le sens où il y a plusieurs familles de modes tonotopiques qui interfèrent les unes avec les autres, ce qui rend leur distinction difficile.

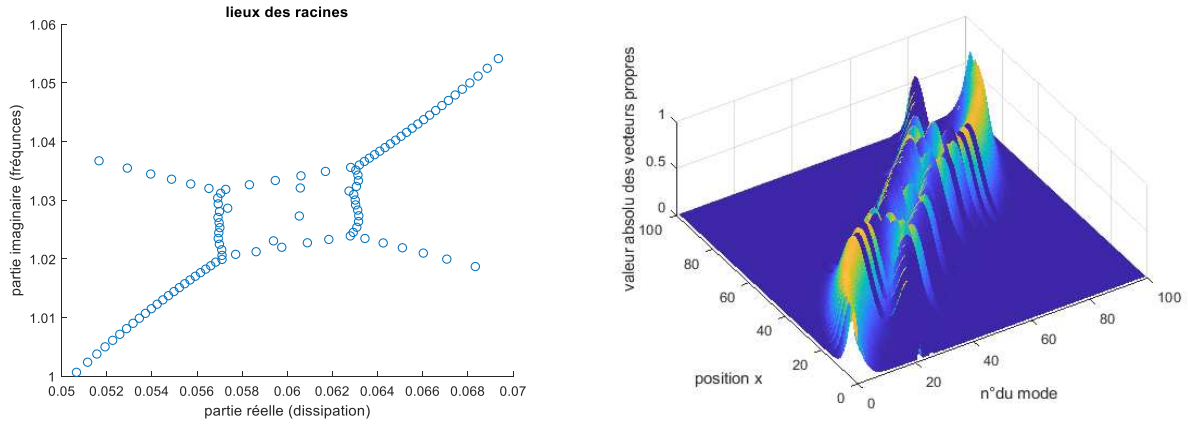


Figure 4.29 (a) Lieux des racines (b) Valeur absolue des modes d'un système $\Delta m = 0$; $\Delta k = 0.08; \Delta kc = 0;\ c = 0.1; c_c = 0.01$.

4.3 Conclusion

Les systèmes à gradient de propriétés étudiés dans ce chapitre montrent que le *Turning Point* est au cœur de la réalisation d'un système tonotopique. Un gradient de propriété n'est pas synonyme de l'apparition d'un TP. Dans le cas des poutres de type Timoshenko ou sandwich classiques, où plusieurs types d'ondes peuvent exister, un gradient de propriété ne peut localiser qu'une onde qui présente une fréquence de coupure. Ceci n'est pas suffisant pour réaliser les objectifs de nos travaux. Le système le plus adapté pour réaliser une tonotopie est la poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à propriétés variable. Même si cette configuration n'est pas utilisée en tant que telle en industrie, la validation du concept de tonotopie sur cette structure est en soi une avancée scientifique. Elle ouvrira de nouvelles perspectives pour le contrôle des vibrations.

Pour les systèmes pouvant présenter une tonotopie, les effets d'un gradient de masse et d'un gradient de raideur peuvent être opposés. Une évolution simultanée de ces deux paramètres peut faire disparaître la localisation.

Un amortissement faible étalera la position de l'amplitude maximale des vibrations et peut rendre sa position variable. Un amortissement élevé peut isoler la partie oscillante de la structure de ces deux bords rendant ainsi la réponse d'un système avec des paramètres de localisation faible semblable à celle d'un système dont la localisation est forte.

Ces résultats donnent des indications sur la réalisation de la tonotopie dans des systèmes plus complexes :

- Les gradients de masse et de raideur doivent être différents,
- Plus l'amplitude du gradient est forte, plus la localisation est visible
- Le couplage doit être présent mais faible,
- Le gradient doit être implémenté sur la masse ou la raideur de la fondation (l'âme) et non sur le couplage,
- L'amortissement doit être minimisé pour une observation plus nette de la tonotopie.

CHAPITRE 5 MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS

L'objectif principal de la thèse est de réaliser la tonotopie sur une structure de type sandwich avec une échelle utilisable industriellement et sans variation de la géométrie de la structure utilisée. Le premier verrou technologique est la réalisation d'un matériau à gradient de propriété. La conception et la caractérisation d'un matériau seront traitées dans ce chapitre. Ceci est effectué par la création et caractérisation d'un FGM (*Functionally Graded Material*) imprimé en 3D, basé sur des structures de Voronoï à géométrie variable.

Pour réaliser une tonotopie, il faut avoir un gradient de propriété. Comme expliqué dans l'introduction, le gradient de propriété, peut se faire de plusieurs manières. Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients. La méthode non-additive implique un mélange de deux phases solides avec un gradient spatial de prépondérance. Cette méthode étant la plus difficile à implémenter et limitante dans la sélection des matériaux qui peuvent être utilisés, elle a donc été écartée. Une deuxième méthode utilisant un gradient en biseau de deux mousses de densité différentes a été envisagée, Figure 5.1. Une tentative d'utiliser ces matériaux a été effectuée, mais ni la localisation ni la tonotopie n'ont été détectées. Ceci peut être dû soit à un amortissement trop important soit à la forte discontinuité dans l'interface entre les deux matériaux formant le biseau. La troisième alternative est d'utiliser un matériau imprimé en 3D avec une structure en treillis. La variation de propriété dans ce type de structure peut se faire de deux manières, une variation de l'épaisseur des poutres ou une variation de la géométrie de la maille élémentaire de la structure. À cause de son caractère périodique, cette méthode peut générer des résonances internes qui interféreraient avec les phénomènes vibratoires que l'on désire observer. Elle ne permet pas d'avoir un gradient lisse des propriétés. Pour la suite des travaux expérimentaux, une structure stochastique imprimable en 3D a été choisie. La création ainsi que la caractérisation de ce type de matériau sont décrites ci-dessous.

Plusieurs approches de réalisation de ce matériau ont été entreprises. La méthode disponible était de concevoir la structure du matériau dans un logiciel de design et de passer ce modèle par un logiciel de tranchage pour le conditionner à l'impression 3D. Cette méthode chronophage ne permet pas une itération rapide. Au cours de la thèse, une équipe spécialisée dans la génération de structure géométrique pour l'impression 3D (de l'INRIA de Nancy) a réussi à développer un algorithme capable de générer les structures de Voronoï, avec un gradient de propriété et

directement imprimable en 3D. On a donc choisi de collaborer avec eux pour la conception du matériau en FGM.

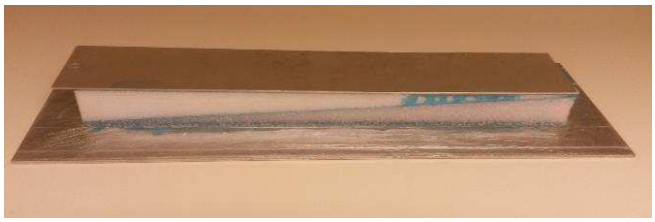


Figure 5.1 Poutre sandwich avec une âme en biseau de raideur variable

5.1 Création des FGM en collaboration avec l'INRIA-Nancy

La structure élémentaire de Voronoï est une décomposition de l'espace en région adjacentes, déterminée par les distances à un ensemble de points. Ici les parois des cellules sont définies par les plans médians entre deux points voisins. Comme expliqué dans la section 2.3, les structures en Voronoï permettent d'avoir des matériaux avec des gradients régulier avec une forte variation des paramètres. Plusieurs approches sont possibles pour réaliser des FGM à base de cellules de Voronoï. La stéréolithographie (Figure 5.2), qui consiste à solidifier une couche de résine à l'aide d'un laser orientable. Ceci donne des structures à cellules ouvertes de faible raideur, soit entre 45 kPa et 1.25 kPa [41]. Ces valeurs sont très faibles pour les applications qui concernent cette étude. En plus, les propriétés des structures créées par ce type d'impression changent avec le temps. Cette technologie d'impression est donc écartée.

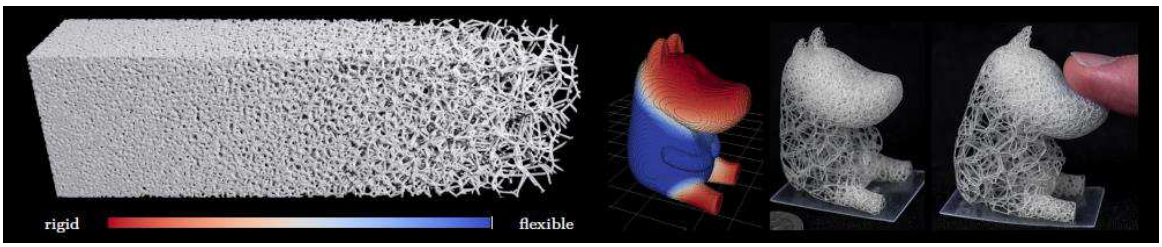


Figure 5.2 Structure de Voronoï à cellules ouvertes avec un gradient de propriétés [41]

La méthode retenue consiste à créer une structure de Voronoï avec des cellules fermées, offrant une plus grande raideur. Les cavités fermées impliquent l'utilisation d'une technologie d'impression FDM (*Fused Deposition Modeling*). Elle consiste à déposer un filament polymère en fusion sur un plateau puis d'empiler les couches les unes sur les autres pour crée des géométries en 3D. Cette technologie implique une contrainte géométrique importante. En effet, la pente minimale

que peut avoir une paroi est de 45°. Cette condition assure la portance des couches successives imprimées de bas en haut. Cette condition n'est pas assurée par l'architecture en Voronoï classique. Martinez *et al* [42] ont réussi à contourner cette contrainte en remplaçant le calcul classique de distance euclidienne par une distance de type cône. Une distance euclidienne peut être calculée en supposant qu'un point de distance 1 par rapport à un point de référence se trouve sur une sphère centré sur ce point et de diamètre unitaire. Pour une distance conique, un point de distance 1 par rapport un point de référence se trouve sur un cône autour de ce point. Cette méthode a permis l'obtention d'une structure Voronoï dont les parois des cellules n'ont pas des pentes inférieures à 45° par rapport à l'horizontale, (Figure 5.3).

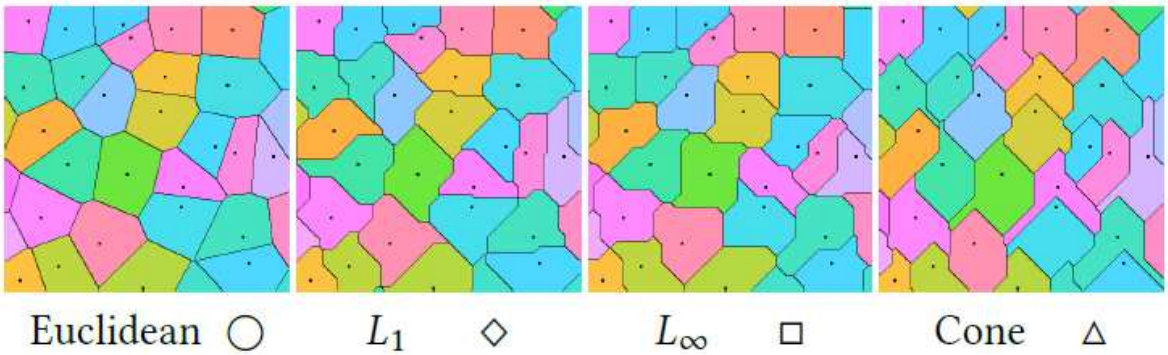


Figure 5.3 Le diagramme Voronoï d'un jeu de points sous différent types de mesure de distance [42].

Cette méthode a deux avantages supplémentaires. Elle permet l'impression de cellules avec des parois d'une épaisseur proche du diamètre de la buse d'impression, qui est lui-même très faible. Des cellules très petites et donc des gradients élevés. La génération de la structure se fait couche par couche et le chemin de la buse est directement optimisé pour avoir un maximum de continuité des trajectoires. Cette méthode réduit significativement le temps de création des structures et permet d'avoir une bonne qualité d'impression.

La structure en Voronoï à cellules fermées est utilisée dans la suite de la thèse pour générer les âmes avec et sans gradient pour les poutres sandwich. Ces structures sont générées en utilisant le logiciel IceSL sous la version 2.2.1 (Figure 5.4 (a)). Les paramètres utilisés dans la création de matériaux sont les suivants :

- Type de remplissage : polyfoam
- Angle de surplomb : 45.0

- Nombre de côtés de la base du cône : 12
- Répartition des pentes : 0.5
- Niveau d'anisotropie : 1.0
- Direction d'anisotropie : 360.0
- Taille initiale des cellules : 6 mm

La définition des paramètres est disponible dans [42]. Le seul paramètre qui nous intéresse est la taille initiale des cellules. Il correspond à la taille moyenne, en mm, des plus grandes cellules. Ce paramètre est choisi de telle sorte qu'un volume élémentaire de $20 \times 20 \times 20$ soit homogène en incluant plus de 3 cellules complètes sur chaque côté. La densité est ensuite contrôlée dans le logiciel en utilisant un curseur appelé « taux de remplissage ». Ce taux va de 0 à 100%, où 0% correspond à des cellules de taille moyenne égale à la taille initiale et 100% correspond à des cellules de taille moyenne de l'ordre de 1 millimètre.

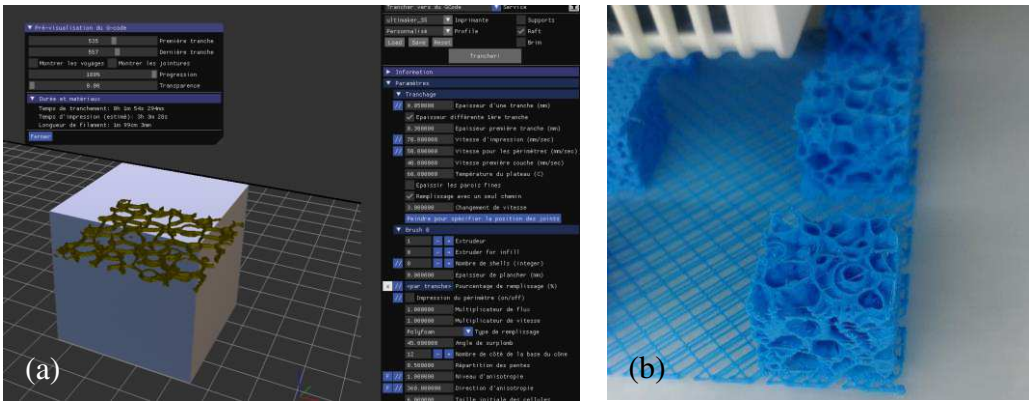


Figure 5.4 Création d'une structure en cellules de Voronoï. (a) Conception avec l'interface du logiciel IceSL 2.2.1 (b) Fabrication avec une imprimante Ultimaker S5

5.2 Caractérisation du matériau architecturé imprimé en 3D

La matière utilisée pour l'impression est le PLA (acide polylactique), qui est facile à utiliser en impression 3D. Elle a aussi l'avantage de ne pas être toxique contrairement aux autres matières qui offrent les mêmes caractéristiques. Dans le but de prédire le comportement du système qui va créer la tonotopie, il est nécessaire de connaitre les propriétés des matériaux à cellules de Voronoï qui sont à la base de la structure à gradient de propriété. Ils doivent donc être caractérisés. On pourrait être tenté de caractériser la matière de base, le PLA, et d'en déduire le comportement du matériau

architecturé. Toutefois, l'impression 3D ne s'est attaquée à la fabrication de pièces fonctionnelles que très récemment et pour l'heure, les connaissances scientifiques sont insuffisantes pour permettre une telle projection. Pour cette raison, des spécimens de différentes densités sont imprimés afin d'en mesurer les propriétés mécaniques (Figure 5.5).

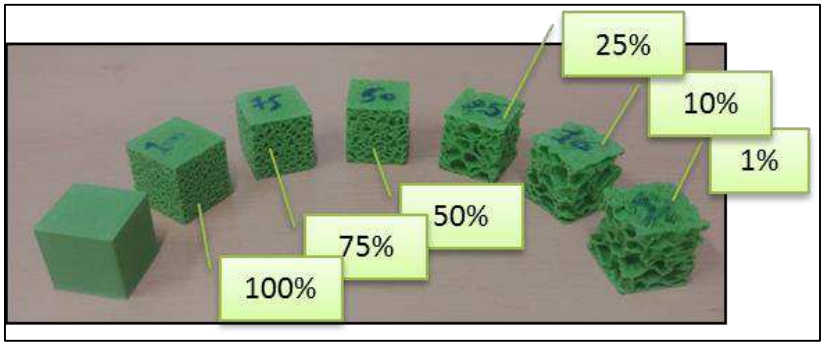


Figure 5.5 Les spécimens de différents taux de remplissage utilisés pour la caractérisation en compression, accompagné d'un spécimen plein fabriqué en impression3D (à gauche).

L'objectif de cette section n'est pas de caractériser finement ces matériaux. Ici, nous allons vérifier :

- que le gradient obtenu par ce matériau est adapté à la réalisation de la tonotopie,
- qu'il y a une évolution non identique de la densité et du module de stockage, et
- que l'ordre de grandeur de l'amplitude du gradient est suffisant pour permettre l'observation de la tonotopie.

Le paramètre contrôlé est le taux de remplissage, proposé par le logiciel. L'équivalence entre le taux de remplissage et la densité du matériau architecturé (Figure 5.6) peut servir à contrôler directement le gradient en densité.

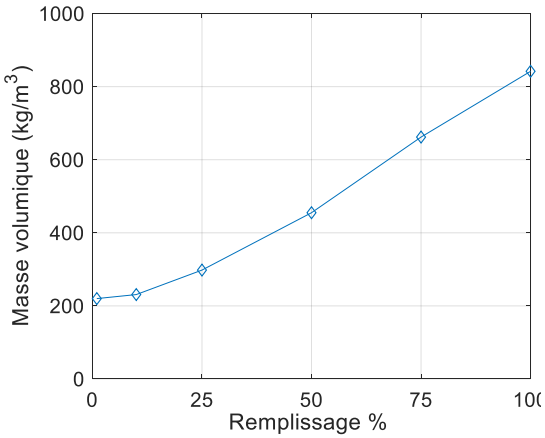


Figure 5.6 Évolution de la masse volumique en fonction du remplissage.

5.2.1 Comportement en compression

Les premiers essais pour la caractérisation sont faits en compression. Une machine Bose Electroforce 3330 a été utilisée (Figure 5.7) avec un capteur de force d'une capacité de 500N. Les spécimens sont centrés sur le plateau sans adhésif. Un ensemble de tests en statique et en dynamique sont effectués sur chaque spécimen pour déterminer ses propriétés mécaniques.

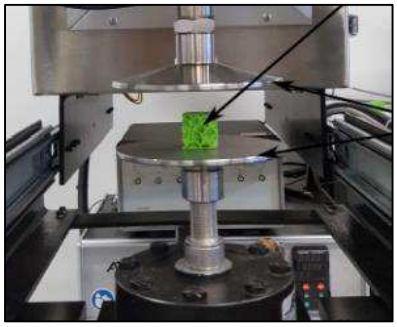


Figure 5.7 Dispositif de caractérisation statique et dynamique en compression

Des essais statiques sont réalisés sur chaque spécimen. La vitesse de déplacement imposé et de 1mm/min. Les courbes contrainte-déformation de ces essais sont tracées dans la Figure 5.8. On s'est arrêtés à ces niveaux de déformations puisqu'ils sont les niveaux qui vont nous intéresser lors des essais vibratoires dans le Chapitre 6.

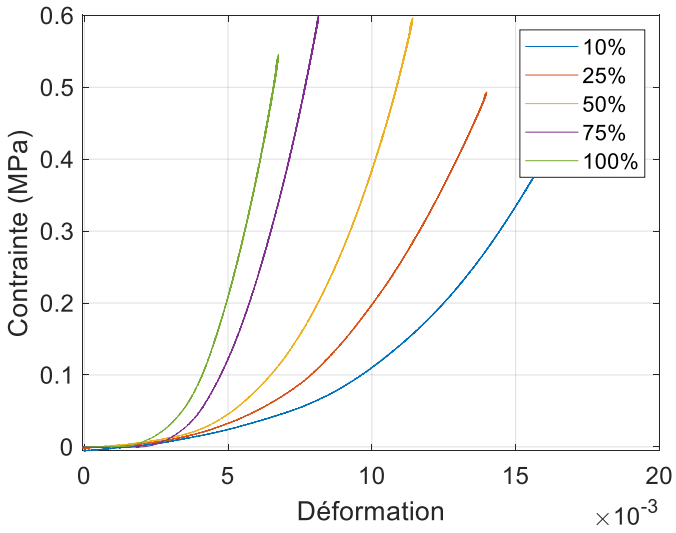


Figure 5.8 Coubes de contraintes-déformations des spécimens avec des remplissages de 10, 25, 50, 75 et 100%.

Tous les spécimens testés présentent un comportement non linéaire. Ce comportement est accentué pour les spécimens de fortes densités. La valeur du module d'Young des différents spécimens est déterminée en estimant la valeur de la dérivée de la courbe de tendance sur la plage de contrainte souhaitée.

L'évolution du module d'Young en fonction du taux de remplissage est tracée dans la Figure 5.9. La courbe rouge et la courbe bleue correspondent à un test effectué dans le sens de l'impression des spécimens et dans le sens perpendiculaire, respectivement. La différence de rigidité entre les deux directions implique que le matériau imprimé en 3D est orthotrope. Cette caractéristique est causée par deux facteurs, soit le procédé d'impression en couche par couche et le respect de la condition de portance qui déforme la structure de Voronoï, habituellement isotrope.

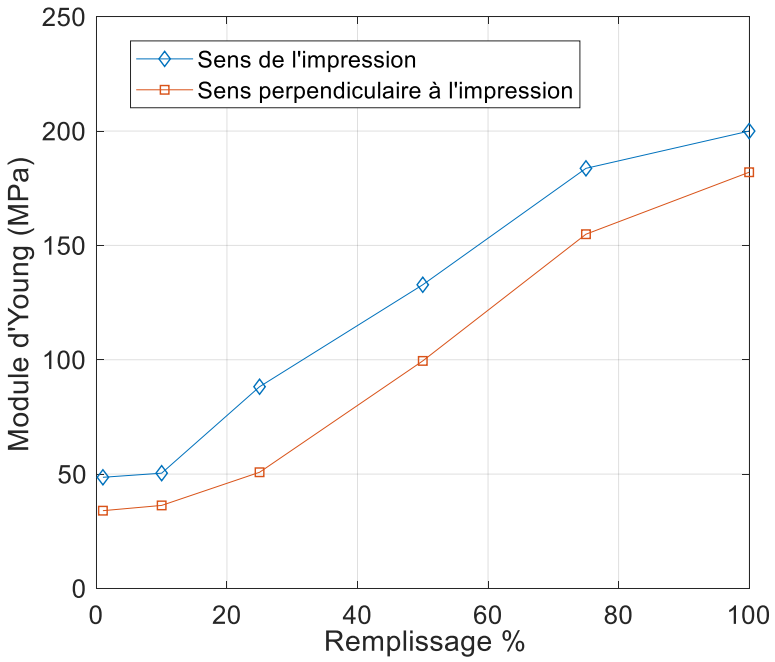


Figure 5.9 Évolution du module d'Young autour d'une contrainte de 0.5MPa, en fonction du remplissage. (Le module d'Young d'un spécimen massif en PLA est de 2 GPa)

Des essais dynamiques sont ensuite réalisés pour déterminer le module de stockage E' et le taux d'amortissement $\tan(\delta)$, où δ est le déphasage entre de la force et le déplacement. Les essais sont faits pour un intervalle de fréquence de sollicitation de 10 à 100Hz combiné à une contrainte statique, tel qu'exprimé dans l'équation (4.1).

$$\sigma_{imposée} = \sigma_{statique} + \sigma_{dynamique} \cdot \sin(\Omega t) \tag{4.1}$$

Dans un but de caractériser les différents remplissages sous les mêmes conditions. La contrainte statique en compression est choisie autour de 0.3MPa et la contrainte dynamique autour de 0.15MPa. Il est important de noter que le contrôle de la contrainte statique se fait automatiquement par la machine qui essaye de viser cette valeur entre les essais dynamiques pour chaque fréquence. La consigne de la contrainte dynamique est, quant à elle, injectée en tant que déplacement imposé.

Les valeurs du module de stockage en fonction des fréquences d'excitation sont tracées dans la Figure 5.10. Les essais sont effectués pour les remplissages de 1, 10, 25, 50, 75, 100%. Les résultats des essais avec un remplissage de 1% ne sont pas tracés puisqu'ils coïncident avec ceux du spécimen à 10% de remplissage. Ceci a été remarqué sur l'ensemble des essais; ce qui signifie que

le logiciel de conception sature sur un remplissage autour des 10% et ne peut pas atteindre des propriétés moins élevées. Les contraintes statiques et les contraintes dynamiques sont présentées dans le Tableau 5-1.

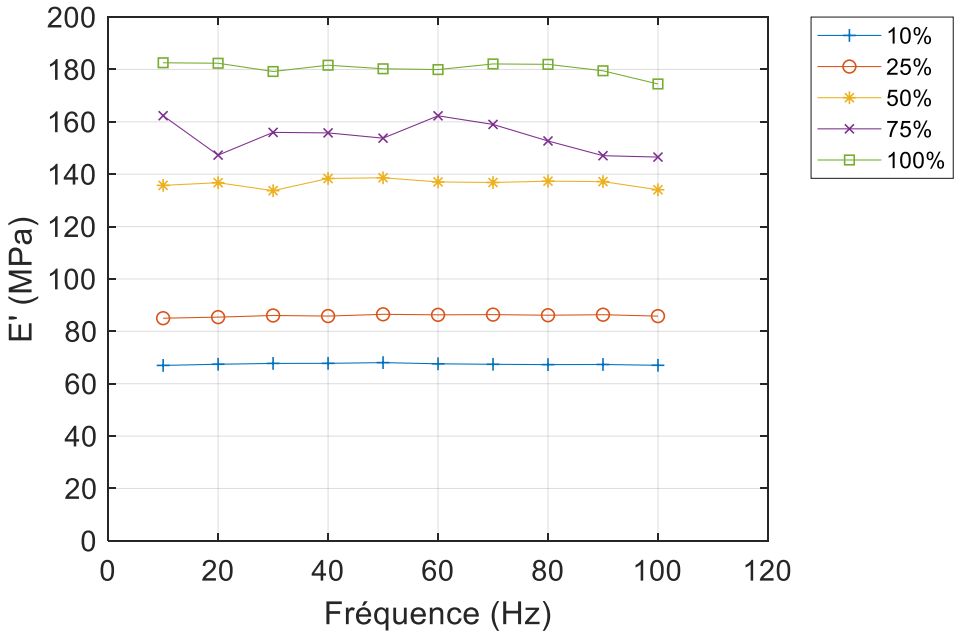


Figure 5.10 Évolution du module de stockage en fonction de la fréquence pour des remplissages de 10, 25, 50, 75 et 100%. (Les paramètres de ces essais sont indiqués dans le Tableau 5-1)

Tableau 5-1 Paramètre de caractérisation de la Figure 5.9

Remplissage	10%	25%	50%	75%_5	100%
Contrainte statique	-0,31	-0,38	-0,38	-0,25	-0,26
Contrainte dynamique	0,1	0,14	0,14	0,11	0,14

La Figure 5.10 montre aussi que sur cette plage de caractérisation, la valeur du module d'Young ne change pas significativement pour avoir une conséquence sur le gradient de propriété. Les résultats obtenus sont résumés dans la figure 4.10. Elle montre l'évolution du module de stockage en fonction du remplissage. La courbe en bleu indique les propriétés du matériau quand il est comprimé dans le sens de l'impression. En fait, tout matériau imprimé en 3D avec une technologie FDM présente une anisotropie due à la déposition des couches successives suivant une direction.

En plus, le fait de respecter les conditions de portance lors de la génération des cellules de Voronoï rend la structure fondamentalement anisotropique. Les propriétés des spécimens dans le sens perpendiculaire au sens de l'impression sont tracées dans la Figure 5.11 en rouge.

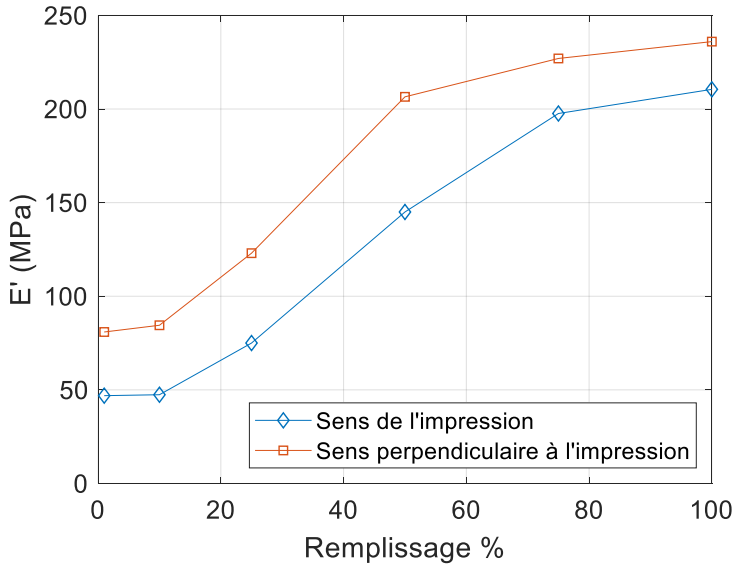


Figure 5.11 Évolution du module de stockage en fonction du remplissage pour une caractérisation en compression dans le sens de compression (bleu) et perpendiculaire au sens de l'impression (rouge). (Le module de stockage d'un spécimen massif en PLA est de 1.8 GPa)

La Figure 5.12 montre l'évolution du module de stockage en fonction de la densité. Le ratio entre la densité minimale et maximale est de 3.6. Ce ratio est de 4.4 pour le module de stockage. Le fait que l'évolution ne soit pas linéaire favorise la réalisation de tonotopie, tel qu'il a été observé à la section 4.2.

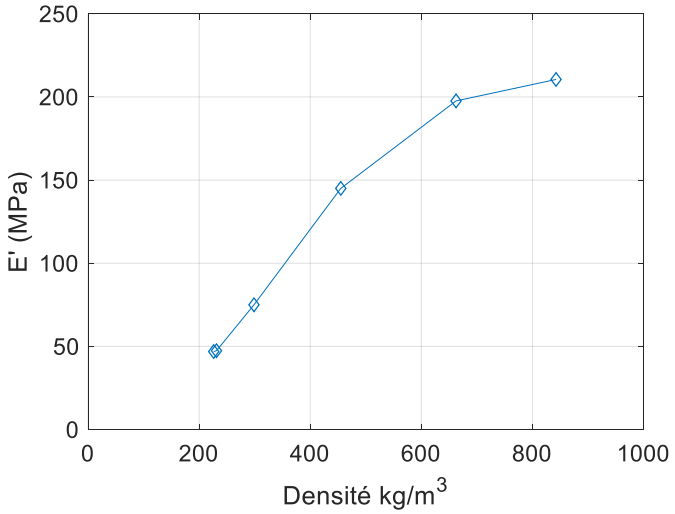


Figure 5.12 Évolution du module de stockage en fonction de la densité

5.2.2 Comportement en cisaillement

Un dispositif expérimental est spécialement conçu pour la caractérisation en cisaillement du matériau architecturé tel que montré dans la Figure 5.13. Deux cubes en structure de Voronoï sont imprimés directement avec ses supports aux extrémités qui se fixent sur le capteur. Le vérin de la machine est fixé sur un bloc plein entre les deux blocs de sollicitation.

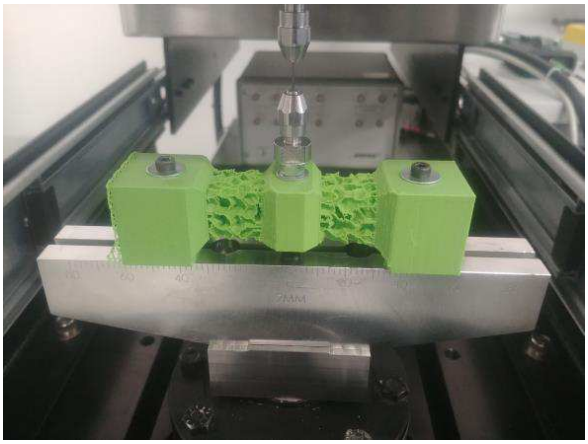


Figure 5.13 Dispositif de caractérisation en double cisaillement

Les premiers essais effectués sur ce dispositif ont pour but de déterminer la sensibilité des propriétés du matériau vis-à-vis de l'amplitude de l'excitation. Aucune charge statique n'est appliquée dans ce cas. La Figure 5.14 montre l'évolution du module de stockage en cisaillement d'un spécimen avec un remplissage de 25%, pour quatre essais avec une amplitude de déplacement

allant de 0.1 à 0.4mm. Les contraintes observées varient de 0.3 à 0.89MPa pour une variation non proportionnelle du module de cisaillement de 57.8 à 60.8 MPa. En effet, pour des amplitudes d'excitation croissantes, les modules de cisaillement croissent puis décroissent, ce qui signifie que la variation de propriété observée constitue une incertitude sur les mesures. Pour cet essai, la valeur moyenne du module est de 59.3MPa avec une erreur de 3%.

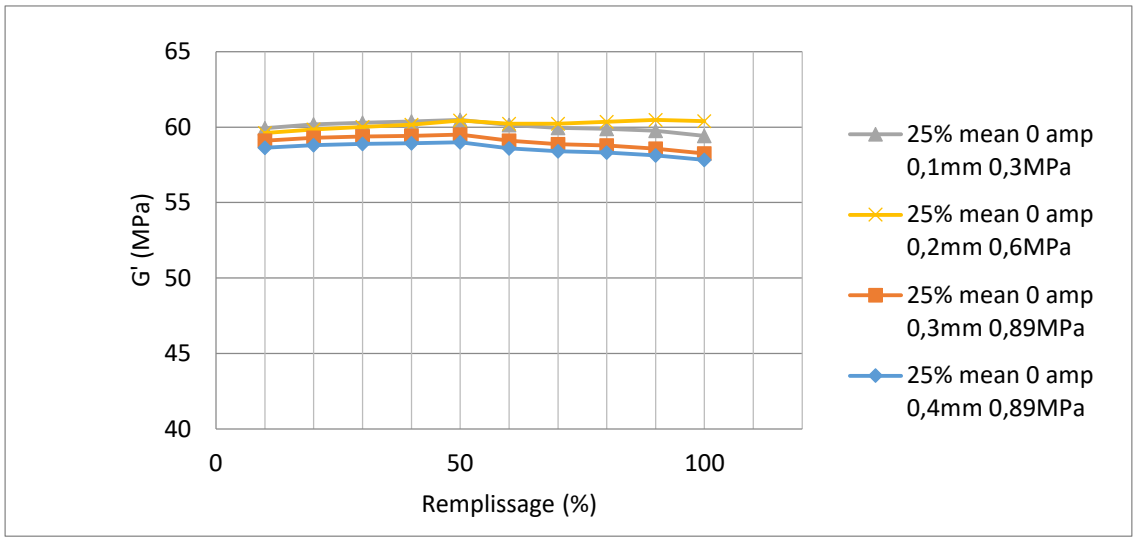


Figure 5.14 Effet de l'amplitude dynamique sur le module de stockage en cisaillement pour un remplissage de 25%. (le déplacement imposé est en mm et la contrainte mesurée est en MPa)

Des essais de cisaillement sont effectués sur des spécimens de remplissage 10, 25, 50, 75 et 100%. L'amplitude des contraintes dynamiques est indiquée dans le Tableau 5-2. Les résultats sont tracés en bleu dans la Figure 5.15. Le module de cisaillement est linéaire par rapport au remplissage. Les propriétés de cisaillement ont aussi été calculées à partir des propriétés en compression en utilisant la loi de Hooke (courbe gris).

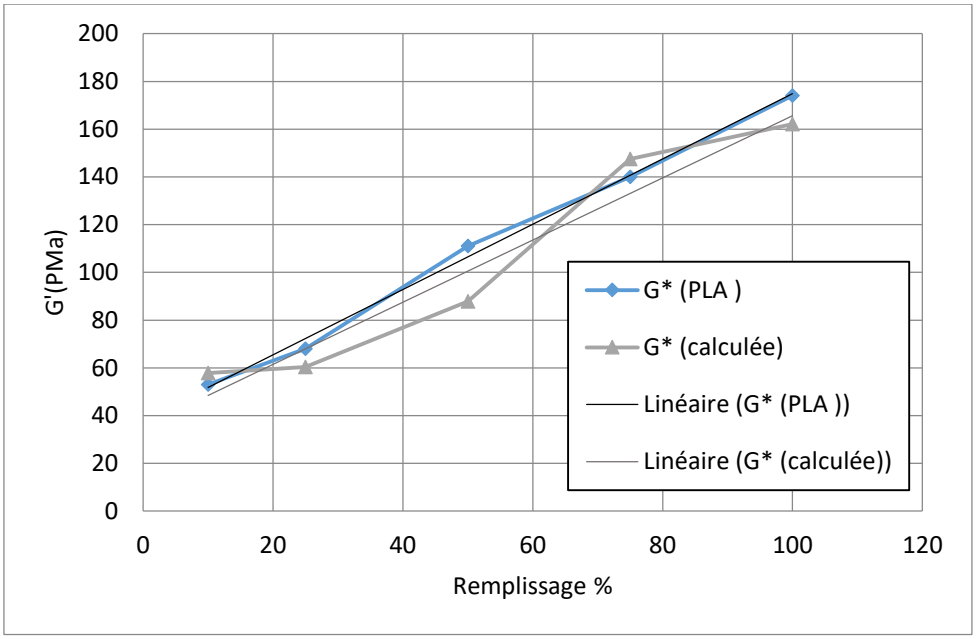


Figure 5.15 Évolution du module de stockage en cisaillement en fonction du remplissage déterminé expérimentalement (bleu) et calculé (gris) à partir de la caractérisation en compression

La comparaison entre les valeurs calculées à partir des essais de compression perpendiculaires au sens de l'impression et les valeurs expérimentales du cisaillement permettent de remonter au coefficient de Poisson. Ceci est fait en comparant les modules de stockage en cisaillement caractérisés avec les modules de stockage en cisaillement calculés à partir des modules de stockage en compression. Ce coefficient est égal à 0.3. La comparaison entre les deux courbes dans la Figure 5.15 permet aussi de constater que les essais en compression souffrent de dispersion due à la non-linéarité du matériau et aux limitations de la machine utilisée.

Tableau 5-2 Contraintes dynamiques obtenue lors de la caractérisation en cisaillement dans la Figure 5.15

Remplissage	10%	25%	50%	75%	100%
Contrainte dynamique MPa	0,5	0,6	1,1	0,99	0,55

5.2.3 Facteur de forme

Des différences considérables entre les modules d'Young ont été obtenues dans les différents essais (traction, compression, spécimen cubique, spécimen parallélépipédique...) et entre ces caractérisations et la littérature. Le module d'Young d'un spécimen cubique est de 230 MPa alors que le module d'Young est de 1.8 GPa pour un spécimen de 10×10×30 mm pour des spécimens massifs imprimés en 3D (Figure 5.16). Le facteur de forme est calculé à partir de la relation (4.2) [59].

$$F_f = \frac{longueur \ \times largeur}{2 \times épaisseur \times (longueur \ \times largeur)} \tag{4.2}$$

Pour un spécimen en compression, la rigidité (ou le module d'Young correspondant) dépend de la surface libre sur les côtés du spécimen par rapport à son volume. Par exemple, en comprimant un cylindre et un cube de même volume et sous une charge identique, la déformation est plus importante pour le cube. Ceci est dû au fait que le cube offre plus de surface sur laquelle l'effet « baril » peut avoir lieu. Ainsi, pour un matériau donné, les contraintes internes en compression augmentent en fonction du volume et la déformation augmente en fonction de la surface.

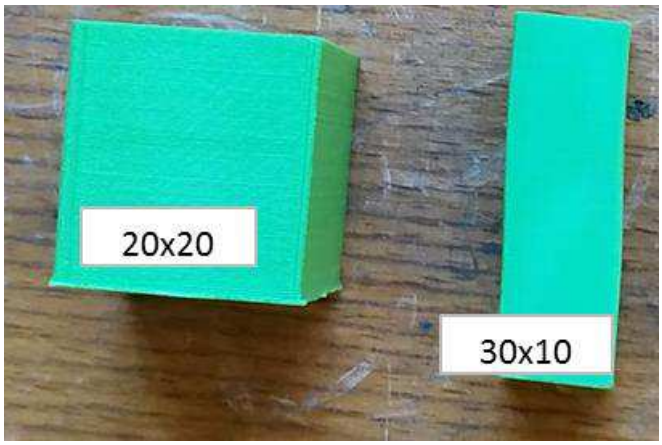


Figure 5.16 Deux spécimens pleins avec des dimensions de 20×20×20 et 10×10×30 et des facteurs de forme relatifs de 0.25 et 0.083

Cette relation entre le facteur de forme et le module d'Young est établie dans les spécifications du polyuréthane [59]. Cette tendance s'inverse pour les facteurs de forme faibles, probablement à cause d'un effet de flambement.

La Figure 5.17 montre l'évolution des propriétés des spécimens avec deux facteurs de forme, ainsi que le ratio entre les deux valeurs. On remarque que le facteur de forme n'a pas beaucoup d'importance pour les faibles remplissages, mais que le ratio est supérieur à 2 pour les spécimens à 100% de remplissage.

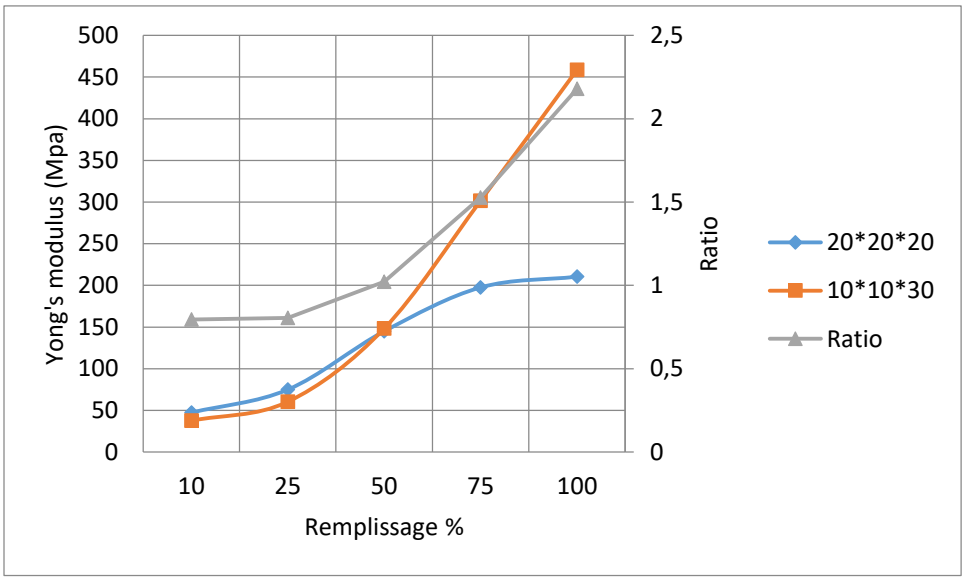


Figure 5.17 Évolution du module d'Young en fonction du remplissage pour deux facteurs de forme. Le ratio entre les deux paramètres est tracé en gris.

Tout ce qui a été énoncé dans le paragraphe ci-dessus est valable pour des structures rigides, dont la forme ne change pas significativement au cours d'une compression. Cependant, les parois de notre matériau architecturé peuvent être flexible (un peu comme celles de mousses). En effet, le matériau architecturé peut se déformer à l'intérieur de son volume. Cette compréhension explique le grand écart trouvé entre les propriétés du matériau moulé (*bulk* -1.8 GPa) et d'un spécimen architecturé (de 200MPa 450 MPa pour un remplissage de 100%).

Pour expliquer, le comportement observé à la Figure 5.17 le scénario suivant peut être proposé: le facteur de forme n'a pas d'effet significatif sur les spécimens de faibles densités (10, 25 et 50%) et prend de plus en plus d'importance pour les spécimens plus denses. Pour les remplissages élevés, les cellules sont plus petites pour des parois d'épaisseur constante; cela peut influencer la répartition des contraintes dans la structure changeant ainsi le comportement global du matériau.

La réflexion sur la relation entre le facteur de forme et le module d'Young n'est valable que dans le cas des spécimens de 75 et 100% de remplissage; ce qui prouve que nos matériaux architecturés ont deux comportements structuraux différents.

Pour les spécimens en plein imprimé comme pour les spécimens de hautes densités l'effet du facteur de force s'inverse. En effet, pour un bulk de 20×20×20 (facteur de forme 1/4) on a un module d'Young de 380MPa alors que le module d'Young est de 1.8GPa pour un spécimen de 10×10×30 (facteur de forme 1/12) en principe avec une surface extérieure plus importante.

5.2.4 Évolution du module de stockage en fonction de la fréquence

Les matériaux architecturés seront utilisés au chapitre suivant dans des poutres en vibration dont on estime les premières fréquences naturelle entre 1500 et 4500 Hz. Le PLA utilisé pour l'impression des spécimens est viscoélastiques; son comportement peut donc changer considérablement en fonction de la fréquence d'excitation. Des spécimens de dimensions $15 \times 15 \times 30$ sont caractérisés sur une machine Metravib capable d'atteindre des fréquences d'excitation de 1000 Hz.

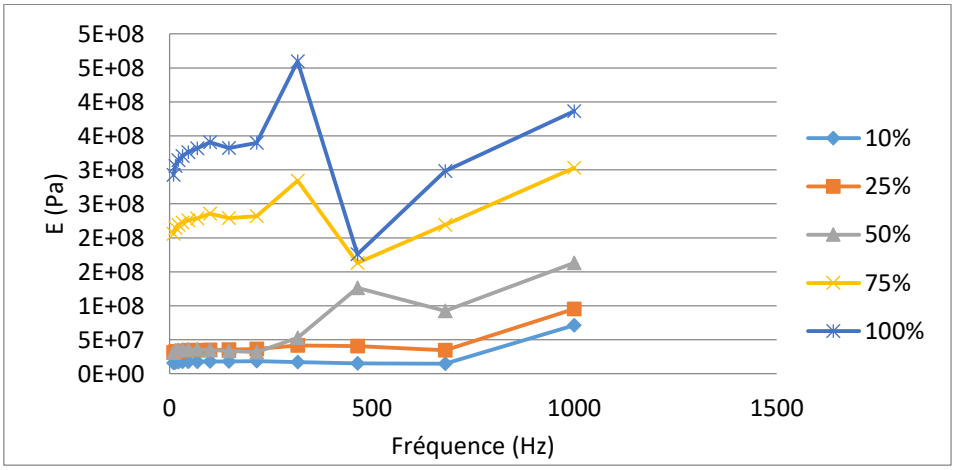


Figure 5.18 Évolution du module d'Young pour différents remplissages en fonction de la fréquence par caractérisation directe avec une machine Metravib. Pour des spécimens de dimensions 10×10×30.

Ces résultats sont tracés dans la Figure 5.18. Les courbes montrent deux phases une partie, entre 10 et 600 Hz où le module de stockage est à peu près constant en fonction de la fréquence. À partir de 600 Hz le matériau se rigidifie pour des fréquences de plus en plus élevées. La variation forte

de propriété entre 300 et 600 Hz pour les spécimens de remplissage 50, 75 et100% est due à une résonance liée au couplage entre la raideur du spécimen et de la machine. Toutefois, les résultats obtenus pour l'amortissement restent stable, $\tan(\delta) = 0.03$ dans la bande de fréquence entre 10 et 20 Hz et ceci pour tous les spécimens.

Une deuxième méthode a été utilisée pour caractériser le matériau architecturé en haute fréquence. Cette méthode inverse consiste à caler un modèle numérique sur des résultats expérimentaux. Le spécimen expérimental est montré dans la Figure 5.19. Il a la forme d'une poutre sandwich avec une des peaux qui est encastrée. L'âme de cette poutre est de $20 \times 40 \times 290$ mm. Elle est uniforme et a un remplissage de 10%. La peau supérieure est une plaque d'aluminium de 1.5 mm d'épaisseur. Cette poutre est excitée sur un des bords et sa surface est balayée avec un vibromètre laser. Les fréquences déformées modales sont ensuite extraites pour constituer la cible du modèle numérique, Figure 5.20.

Figure 5.19 Dispositif expérimental pour la caractérisation inverse des propriétés viscoélastiques du matériau architecturé à 10% de remplissage

Des extractions modales sont effectuées sur ce modèle pour des modules de stockage de l'âme égale à 47, 94, 141 et 188MPa. En effet, 47 MPa est la valeur obtenue lors de la caractérisation de ce matériau à 100Hz et les valeurs suivantes sont ses multiples. Les déformés modales, comme celle de la Figure 5.20 sont comparés avec les déformés expérimentales. Les fréquences correspondantes à chaque déformée modale sont présentées dans la Figure 5.21.

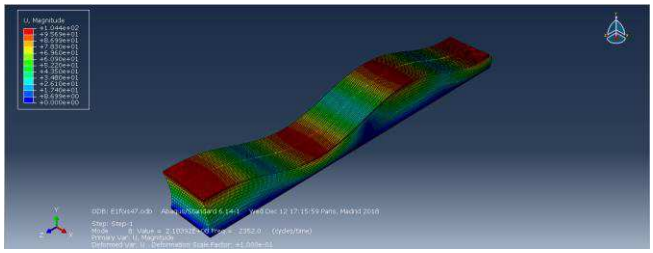


Figure 5.20 Le mode n°8 obtenue numériquement pour un module de stockage de 47MPa.

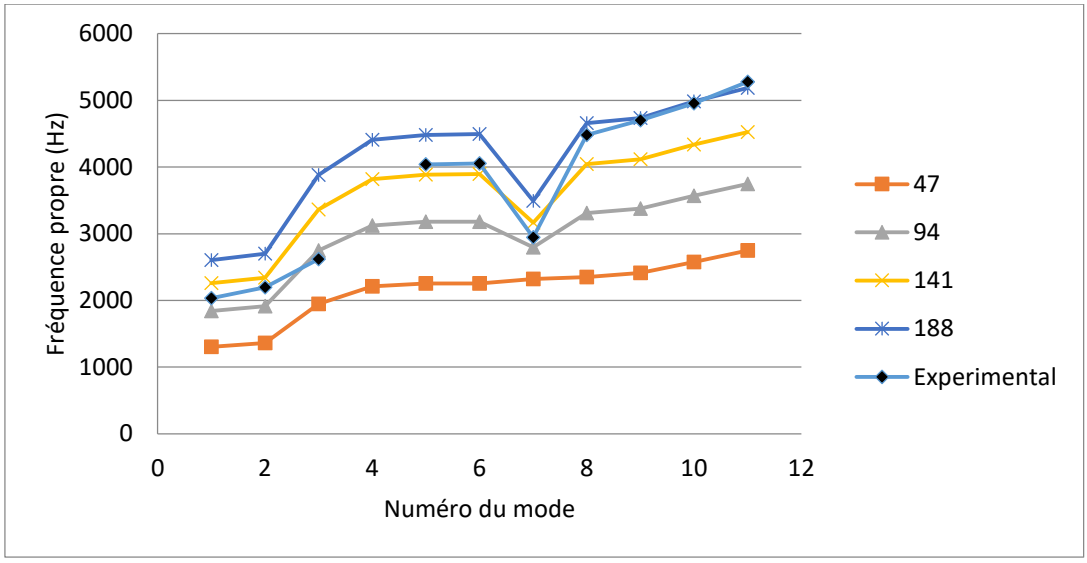


Figure 5.21 Fréquence modale obtenue numériquement des modules de stockage de 47, 94, 141 et 188MPa et les fréquences modales de références obtenues expérimentalement.

Pour tous les modes identifiés expérimentalement, les valeurs du module de stockage effectif sont calculées par interpolation à partir des modules de stockage numérique les plus proches. Les modules de stockage effectif sont ensuite tracés en fonction des fréquences modales à la Figure 5.22.

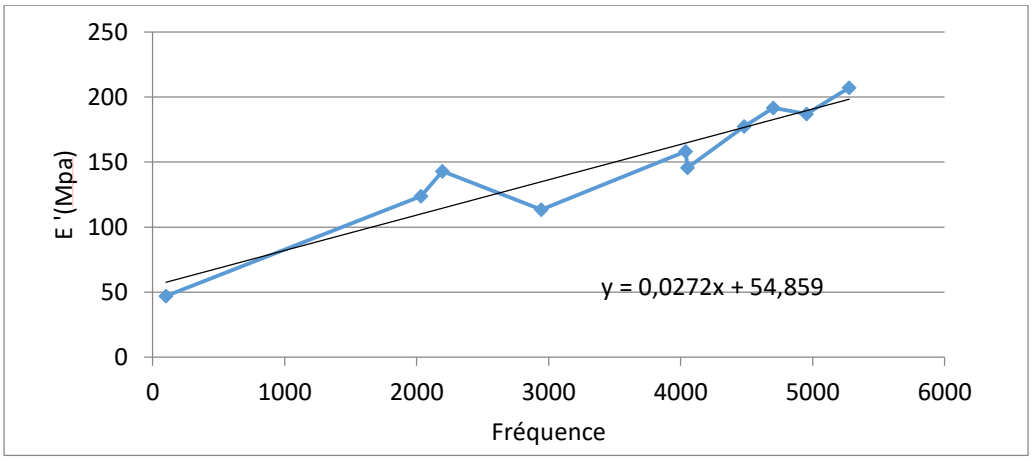


Figure 5.22 Modules de stockage interpolés en fonction des fréquences (bleu). Interpolation des propriétés élastiques (noir).

Une courbe de tendance est tracée à partir des résultats obtenus par caractérisation inverse dans la figure précédente. À partir de ces résultats, on peut calculer un facteur de rigidification entre la valeur du module de stockage à une fréquence donnée et la valeur du module de stockage obtenue

par caractérisation directe à 100 Hz. Les estimations de ce facteur obtenues à partir de la courbe de tendance (Figure 5.22) sont indiquées dans la deuxième colonne du Tableau 5-3.

Tableau 5-3 Facteur de correction viscoélastique par rapport à une valeur de caractérisée expérimentalement de 47MPa à 100Hz

Fréquences	Facteur de rigidification interpolé
100	1,23
1000	1,77
2000	2,37
3000	2,97
4000	3,57

5.3 Conclusion

Une caractérisation mécanique détaillée inédite a été effectué sur les matériaux architecturés. Ce domaine de recherche est assez récent il n'existe donc pas de normes établit. Plusieurs types de caractérisation ont été réalisés. Malgré les dispersions observées, les résultats obtenues restent cohérents et ouvrent des pistes vers une caractérisation plus rigoureuse.

Les caractérisations en statique et en dynamique effectuées ont permis d'obtenir des résultats pertinents pour la suite. Le module d'Young ainsi que le module de stockage sont croissant en fonction du remplissage et donc de la densité.

L'amortissement tan(δ) est égale à 0.03 pour tous remplissage. Le coefficient de Poisson est aussi déterminé à partir d'une comparaison entre les propriétés de compression et de cisaillement. Il a une valeur de 0.3 pour tous les remplissages dans la suite de la thèse.

Le facteur de forme du spécimen a une grande influence sur le comportement des matériaux architecturé.

Une caractérisation inverse a permis de remonter au module d'Young d'un remplissage de 10% pour des fréquences allant jusqu'à 5000 Hz. Cette méthode de caractérisation semble fiable et mérite d'avantage de développement dans des travaux futurs.

Les valeurs obtenues vont être utilisées pour modéliser une structure avec un comportement tonotopique. Ces résultats ont aussi montrés que la densité et le module d'Young n'évoluent pas avec la même vitesse en fonction du taux de remplissage ce qui constitue une condition essentielle à la réalisation de la tonotopie.

En définitive, on peut résumer le comportement du matériau en cellule de Voronoï dans la Figure 5.23 :

- Le matériau en cellule de Voronoï est non linéaire puisqu'il est architecturé. Notamment, les cellules aux bords d'un spécimen ne sont pas complètes et leur comportement est différent de celles au milieu.
- Les propriétés du matériau sont dépendantes de la fréquence car la matière utilisée pour l'impression est un polymère.
- Le matériau est anisotrope puisqu'il est fabriqué par impression 3D. En effet, cette technologie se base sur l'empilement de couches 2D suivant un axe unique. Les propriétés suivant cet axe seront donc différentes de celles suivant les deux autres axes.
- Enfin, le module de stockage des spécimens dépend fortement de leur facteur de forme. Cette dépendance est liée au remplissage tel qu'expliqué à la section 5.2.3.

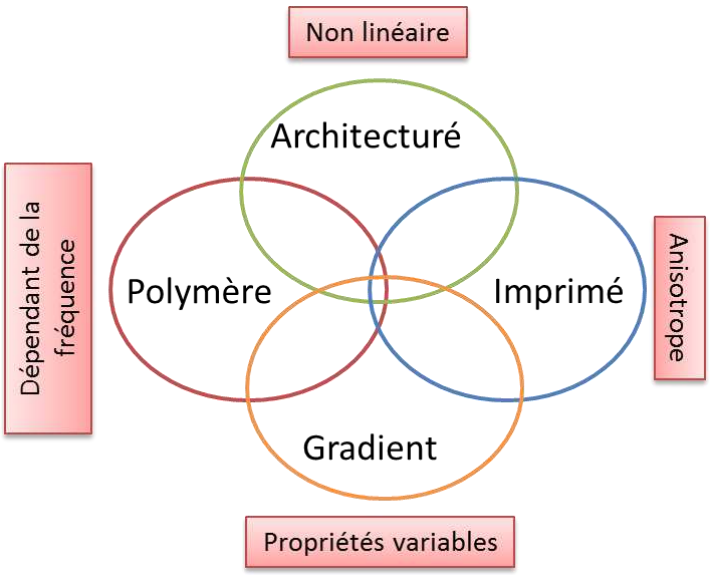


Figure 5.23 Schéma des différentes propriétés du matériau architecturé et leurs causes.

CHAPITRE 6 CONFINEMENT EXPÉRIMENTAL DE L'ÉNERGIE VIBRATOIRE

L'objectif de ce chapitre est de réaliser expérimentalement et à l'aide de matériaux à gradient de propriété, un confinement de l'énergie vibratoire. La première partie concerne la réalisation d'un phénomène de type Trou Noir Acoustique (TNA) sur une poutre sandwich avec une âme en FGM. La seconde partie met en évidence le concept de tonotopie numériquement puis expérimentalement. Une dernière partie concerne une étude de sensibilité de la tonotopie.

6.1 Réalisation d'un pseudo-Trou Noir Acoustique

6.1.1 Dispositif expérimental

Dans la suite de l'étude plusieurs poutres sandwich avec des âmes à gradient de propriété ont été réalisées. Dans cette section, nous allons nous intéresser à la configuration encastrée libre. La poutre sandwich de référence utilisée a une âme de 290 mm de longueur. Cette âme est faite en PLA avec une architecture en cellule Voronoï, dont le taux de remplissage varie de façon continue de 10 à 100% de remplissage. Elle a une largeur et une épaisseur de 40 mm et 20 mm respectivement. Elle est encastrée sur 50 mm de la partie la plus raide (Figure 6.1). Les peaux ont une épaisseur de 1.5 mm et sont en acier, afin de maximiser le rapport densité /raideur. La rigidité en flexion de la poutre correspond à la raideur de couplage telle que définie dans le chapitre 4; ce paramètre doit être minimisé pour avoir une localisation plus visible.

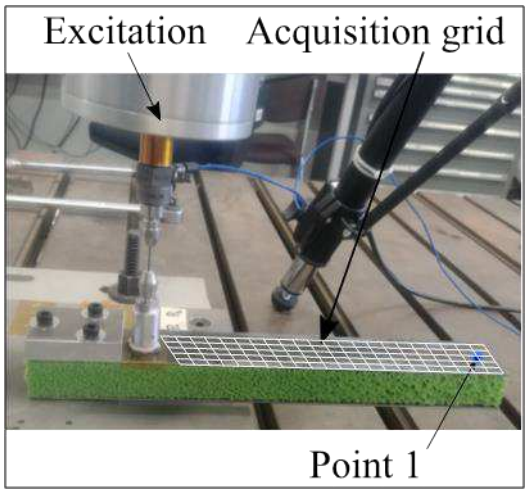


Figure 6.1 Poutre sandwich encastré-libre avec une âme FGM.

La structure est excitée à l'aide d'un pot vibrant électrodynamique de 10N utilisée à 80% de sa puissance maximale. La forme du signal dynamique injecté est un sinus glissant de type *chirp* allant de 0.1 à 10 kHz sur une période de 2.5 secondes. Cette excitation est répétée pendant qu'un vibromètre laser balaye la vitesse transversale sur une grille de 92 points sur la surface supérieure de la poutre sandwich. La fréquence d'acquisition du système est de 16 kS/s.

6.1.2 Modélisation par éléments finis

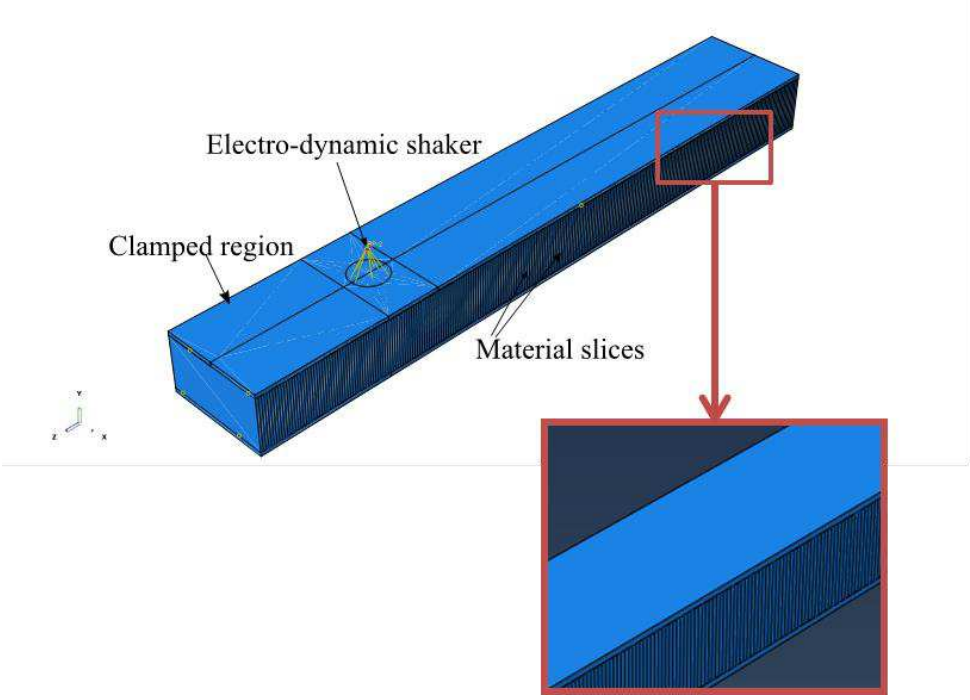


Figure 6.2 Modèle par éléments finis avec le détail de l'âme à gradient de propriétés

Un modèle par éléments finis a été développé sous le logiciel ABAQUS (Figure 6.2). Pour tenir compte du gradient de propriété, l'âme a été modélisée à l'aide d'une succession de parallélépipèdes de 1 mm d'épaisseur. Les éléments C3D8R cubiques dans l'âme ont une intégration linéaire tandis que les éléments dans les peaux ont une intégration quadratique. Ce choix permet une meilleure modélisation de la flexion dans les peaux même en ayant seulement deux éléments suivant l'épaisseur. Le modèle compte 68032 éléments, dont 50000 sont dans l'âme. Les propriétés utilisées pour modéliser l'âme sont représentées par une linéarisation des données expérimentales obtenus au chapitre précédent, tel qu'illustré à la Figure 6.3. L'encastrement est modélisé en considérant un déplacement nul des nœuds à la surface des peaux sur une distance de 50 mm. La partie mobile du pot vibrant a aussi été modélisé par une masse de 20g et une raideur

de 576 N/m [60]. Une extraction modale réelle suivie d'une analyse de la réponse harmonique sont effectuées pour déterminer le comportement vibratoire du système.

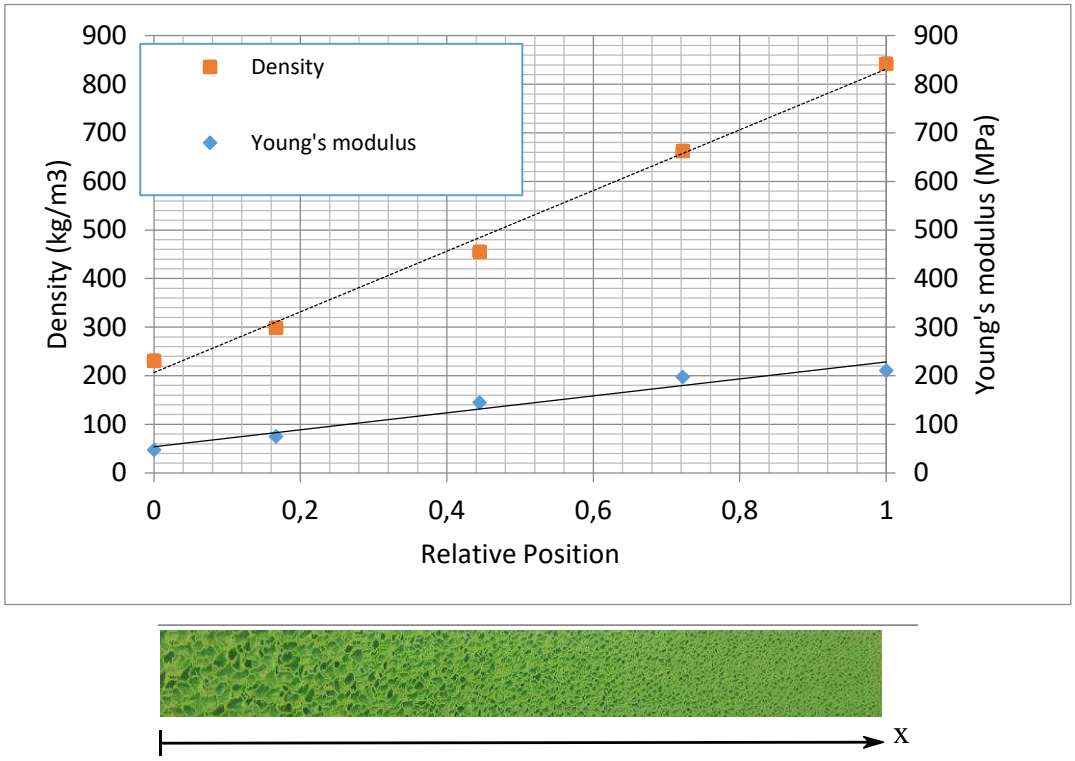


Figure 6.3 Évolution spatiale linéarisé du module d'Young et de la densité intégré dans le modèle numérique.

6.1.3 Résultats

La fonction de réponse en fréquence (FRF) expérimentale de la poutre décrite ci-dessus est présentée à la Figure 6.4. Ce graphique est établi en calculant la moyenne des FRF mesurées sur les 92 points la grille d'acquisition pour la partie expérimentale (coube bleu). La FRF numérique est calculé en moyennant tous les nœuds libres sur la surface supérieure de la poutre en éléments finis. La figure ci-dessous montre une cohérence entre les modes numérique les modes expérimentaux. Les deux premiers modes coïncident puis un décalage prend place pour des fréquences de plus en plus élevées. Ce décalage est dû en parti à al rigidification du matériau pour les hautes fréquences. Les magnitudes des vibrations dans cette figure confirment la pertinence de valeur d'amortissement structural de 3% intégré dans la structure.

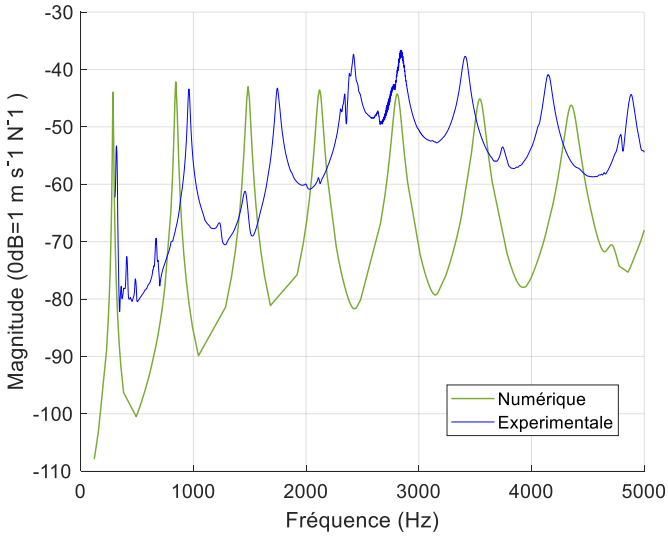


Figure 6.4 Réponse en fréquence moyennée d'une poutre sandwich avec un gradient de propriété. (bleu) expérimentale (vert) numérique

La Figure 6.5 schématise la différence entre un mode classique et un mode en TNA. La particularité du TNA est que la zone d'amplification est toujours à l'extrémité la moins rigide de la poutre, peu importe la fréquence. Pour pouvoir établir la présence d'un TNA nous allons nous concentrer sur l'amplification des vibrations en bout de la poutre par rapport à l'amplitude du ventre situé près de l'encastrement. Soit *Rt* le ratio entre l'amplitude des vibrations à l'extrémité libre de la poutre et l'amplitude des vibrations sur le premier ventre des vibrations. Plus *Rt* est important, plus le phénomène de Trou Noir Acoustique est confirmé.

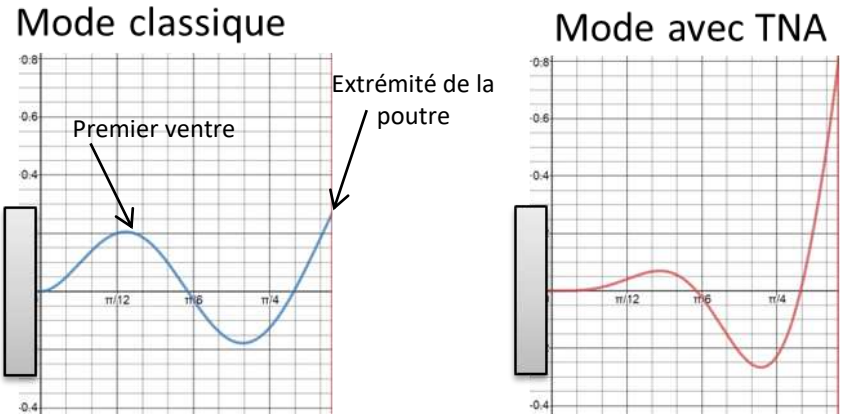


Figure 6.5 Comparaison schématique entre un comportement de vibration classique et un comportement en Trou Noir Acoustique

La Figure 6.6 présente trois modes d'une configuration expérimentale et deux numériques. Dans la configuration expérimentale, on observe que l'extrémité libre vibre avec une amplitude plus élevé que le ventre près de l'extrémité (Figure 6.6 (a)). Ceci implique une présence possible d'un TNA. Pour soutenir cette observation deux modèle numériques de poutre sandwich vont être comparé : un avec une âme en FGM et un avec une âme uniforme. L'âme uniforme a un module d'Young et une densité égale aux propriétés les moins élevés de l'âme en FGM. Les résultats obtenue à partir de ces modèle sont illustré respectivement dans la Figure 6.6 b et la (Figure 6.6 c).

Le Tableau 6-1 résume l'évolution de *Rt* pour différents modes obtenus par la modélisation en éléments finis. Dans le premier mode présenté à la Figure 6.6 (b etc), le ratio *Rt* est respectivement de 1,33 et 1,09 pour la poutre avec une âme en FGM et la poutre avec une âme uniforme. Cela implique que nous avons un phénomène semblable à un TNA dans les poutres avec une âme en FGM. Ceci est également observé dans la deuxième déformé modale dans la Figure 6.6 (b et c), où *Rt* est de 1,7 pour la poutre avec FGM et de 1,49 pour la poutre uniforme. Ce ratio devient de plus en plus proche pour des modes de plus en plus élevés.

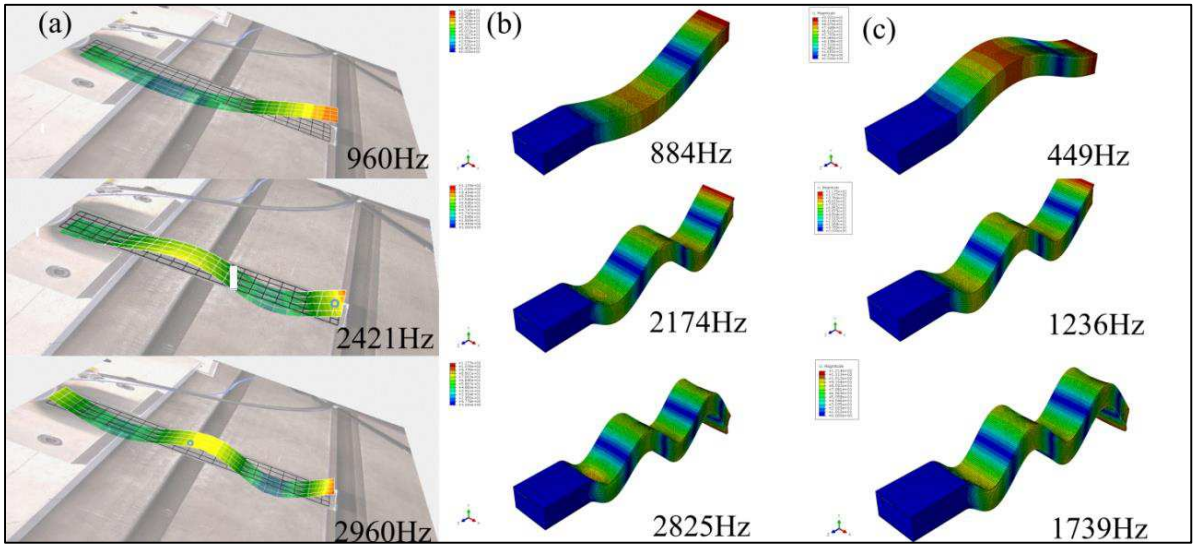


Figure 6.6 Déformées modales d'une poutre sandwich avec une âme en FGM (a) expérimentale (b) en éléments finis et (c) d'une poutre sandwich en éléments finis avec une âme à propriétés constantes

Tableau 6-1 Coefficients d'amplification entre le premier ventre de vibration et et l'amplitude des vibrations à l'extrémité de la poutre

Mode n°	Rt d'une poutre expérimentale avec une âme en FGM	Rt d'une poutre en élément finis avec une âme en FGM	Rt d'une poutre en élément finis avec une âme uniforme
4	1.7	1.33	1.09
5	1.87	1.7	1.49

La Figure 6.6 (a) montre les déformées expérimentales des modes correspondants à ceux étudiés numériquement. On observe une amplification des vibrations qui correspondent à des *Rt* de 1.7, 1.87 et 1.89. Ce qui renforce l'hypothèse de la présence d'un pseudo TNA, qui n'est valide que pour une bande de fréquence réduite.

6.1.4 Conclusion

La mise en œuvre d'un phénomène de type trou noir dans une structure à géométrie fixe et à gradient de propriétés a été expérimentalement démontrée. Le gradient de propriété est rendu possible par l'utilisation d'un matériau architecturé imprimé en 3D. La géométrie de Voronoï avec des cellules de tailles variable permet des évolutions relativement douces du module d'Young et de la densité. L'utilisation d'une poutre sandwich avec une âme FGM permet la visualisation du phénomène recherché.

L'implémentation d'un FGM avec des propriétés plus contrôlées permettra une meilleure implémentation du TNA. Une évolution en loi de puissance, inspirée de la littérature des TNA, et un comportement non linéaire maitrisé sont indispensables pour faire évoluer le concept développé dans cette section. Cette technologie peut être utilisée comme une nouvelle approche pour un contrôle passif des vibrations.

Cependant, notre objectif principal est d'obtenir la tonotopie. Une étude numérique nous a permis de déterminer que ce phénomène peut être observé numériquement pour des modes ou les peaux vibrent de façon antisymétrique ; ceci est difficilement observable expérimentalement en raison des fréquences très élevés de tels modes. La présente configuration est donc mal adaptée à la tonotopie, et cela conduit à la configuration présentée dans section suivante.

6.2 Réalisation de la tonotopie

Les modèles étudiés dans le chapitre 4 montrent la nécessité d'avoir une structure de géométrie semblable à celle d'un ensemble d'oscillateurs accordé pour avoir la tonotopie. Ceci est conforté par les résultats de la section précédente qui montrent qu'une poutre sandwich avec une âme en FGM présente un phénomène de TNA et non une tonotopie. Le premier modèle analytique montre la possibilité d'avoir la tonotopie avec une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme variable. Mais ce modèle ne tient pas compte des conditions aux limites. Les hypothèses faites pour la modélisation de l'âme des deux modèles présentés dans le chapitre 4 ne tiennent compte que de la compression, et pas du cisaillement. Dans cette section, une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable, analogue à la moitié d'une poutre sandwich classique, est étudiée expérimentalement puis numériquement avec un modèle par éléments finis.

6.2.1 Dispositif expérimental et modélisation

La modélisation et le dispositif expérimental dans cette section sont une variante de la modélisation et l'expérimentation faite dans la section précédente. En effet, au lieu que la poutre soit encastrée sur une extrémité, la poutre sandwich dans cette section est encastrée sur toute la peau inférieure par une plaque d'aluminium de 15 mm d'épaisseur (Figure 6.7). Ici, l'âme de ce dispositif a 20 mm de largeur 45 mm, d'épaisseur et 290 mm de longueur.

Figure 6.7 Poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable

Le modèle par éléments finis est développé en utilisant le logiciel commercial 'ABAQUS'. Un modèle 3D de poutre sandwich avec deux peaux en acier de 1.5 mm d'épaisseur avec un module

d'Young de 210 GPa et une densité de 7800 kg/m^3. Le gradient de densité de l'âme est celui présenté dans la Figure 6.8. Deux gradients de module d'Young sont implémentés; l'un est linéaire tel indiqué dans la Figure 6.3, et l'autre quadratique et présenté dans la Figure 6.9.

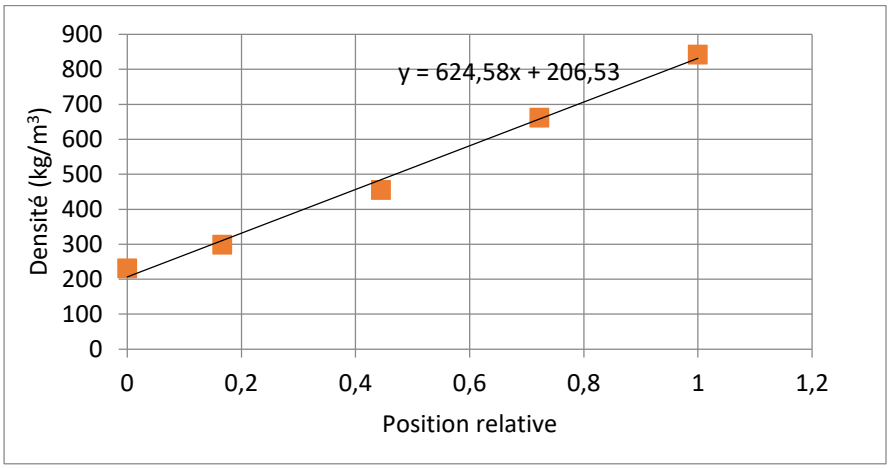


Figure 6.8 Équivalence entre la position relative et la densité.

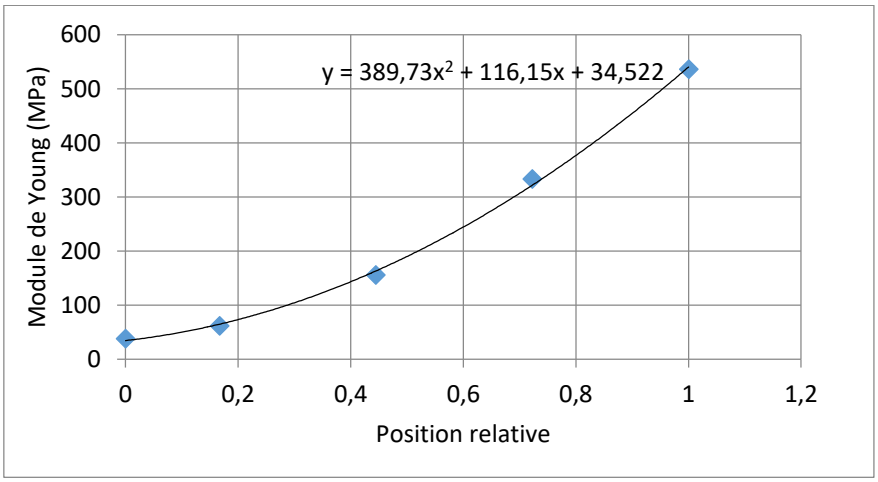


Figure 6.9 Évolution quadratique du module d'Young en fonction de la position relative sur la poutre

6.2.2 Résultats expérimentaux

6.2.2.1 Réalisation de la Tonotopie

Les résultats de cette expérience sont illustrés par les FRF de la poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme de raideur variable dans la bande de fréquences allant de 1000 Hz à 7000 Hz (Figure 6.10). Les déformées modales correspondant à cette bande de fréquence sont

tracées dans la Figure 6.11 (a). Cette figure montre l'occurrence d'un comportement tonotopique. Pour des fréquences d'excitation croissantes, l'amplitude maximale de vibration se produit à des positions croissantes, et donc pour une rigidité croissante le long de l'axe de la poutre. Le premier mode d'intérêt dans cette figure se produit à la fréquence 2732Hz. Ce mode est localisé sous le pot vibrant, il n'est donc pas très visible sur la FRF. Le second mode se produit à 3226 Hz. Dans ce mode, la vibration présente deux ventres. L'amplitude maximale se produit néanmoins plus loin du point d'excitation. La déformée de ce mode montre que toute l'énergie vibratoire est localisée dans la partie la moins raide de la structure.

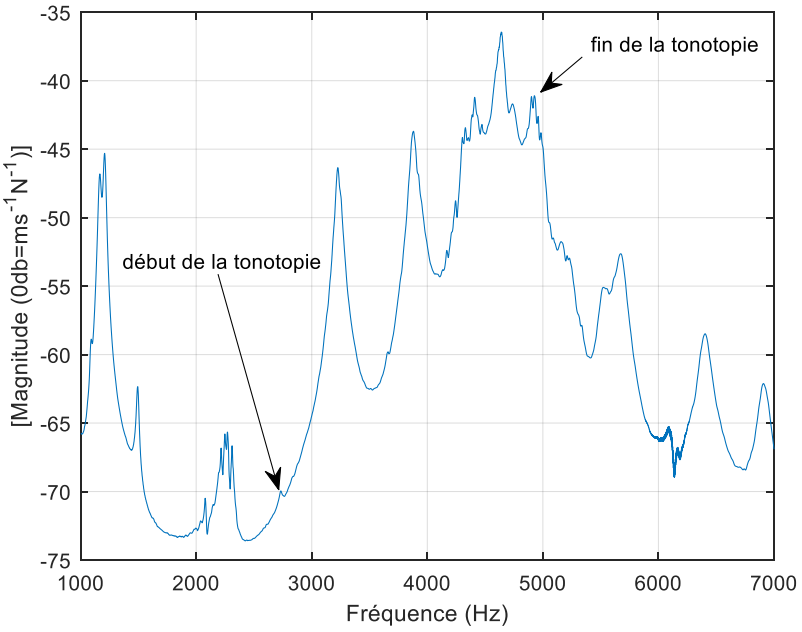


Figure 6.10 Réponse en fréquence moyennée d'une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété.

La déformée du quatrième mode, se produisant à 4410 Hz. Elle montre plus clairement les phénomènes de *Turning Point*. Ce phénomène se caractérise par le fait qu'il divise la structure en deux parties. La première partie de la structure présente une onde sinusoïdale complète qui s'amplifie jusqu'à atteindre son amplitude maximale au point de transition ou de retournement. Dans la deuxième partie de la structure, les ondes stationnaires se transforment en ondes évanescences. Les modes suivants dans la Figure 6.11 (a) présentent le même phénomène avec un TP suivant une évolution tonotopique.

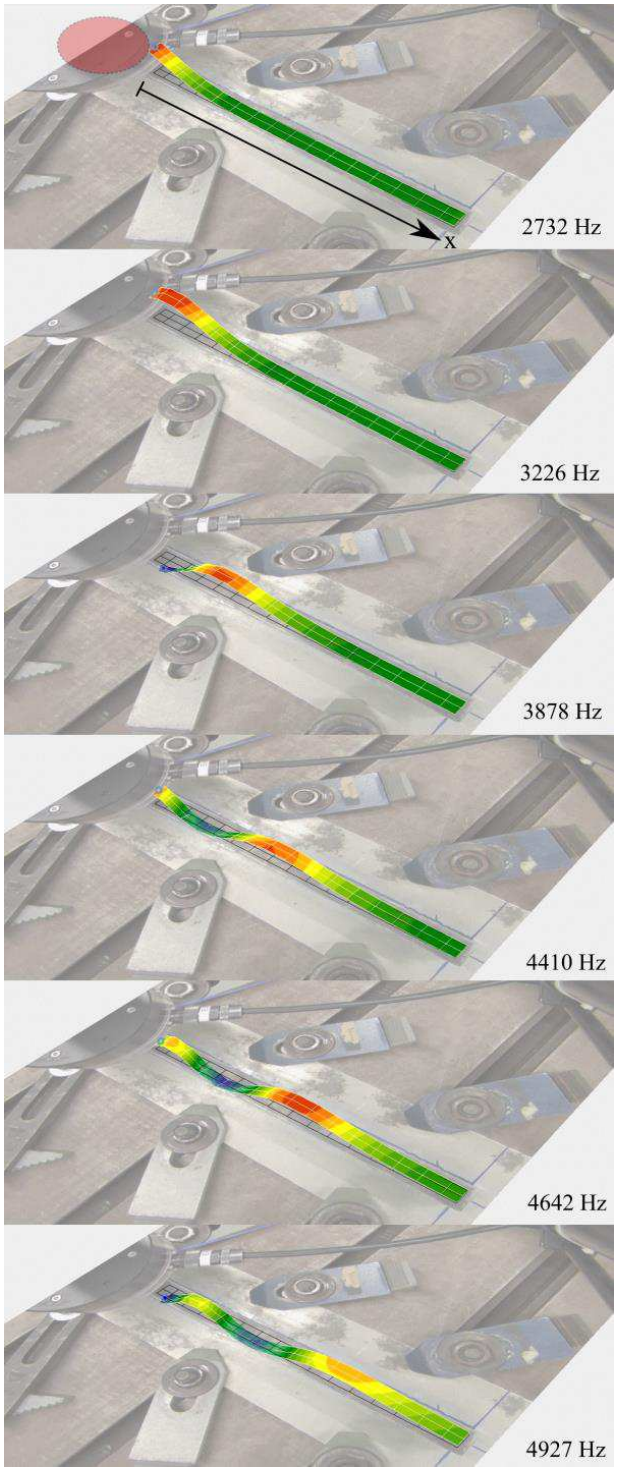


Figure 6.11 Évolution des modes tonotopiques pour une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété. Pour une excitation sur le bord le moins rigide (rond Rouge).

Pour les modes au-delà des fréquences tonotopique, une analogie peut être faite avec les poutres uniformes. En effet, chaque nouveau mode correspond à l'apparition d'une nouvelle demi-période spatiale. Dans notre cas cette analogie se fait sur la zone propagative de la poutre. En théorie, la tonotopie matérialisée par l'évolution spatiale de la position du TP en fonction de la fréquence se fait de façon continue sur la structure. Mais en réalité, la tonotopie se manifeste de façon discrétisée avec des modes. Comme dans le cas de poutre uniforme, les fréquences propre se forment à la présence d'une onde stationnaire tonotopique entre le bout de la structure et le TP.

L'évolution de la position de ce *Turning Point* avec des fréquences croissantes représente des phénomènes de tonotopie similaires à ceux présents dans l'oreille interne qui, pour la première fois, ont été mis en œuvre dans une structure continue sans variation géométrique.

Une carte de la relation entre la fréquence d'excitation et la position relative du TP est tracée dans la Figure 6.12.

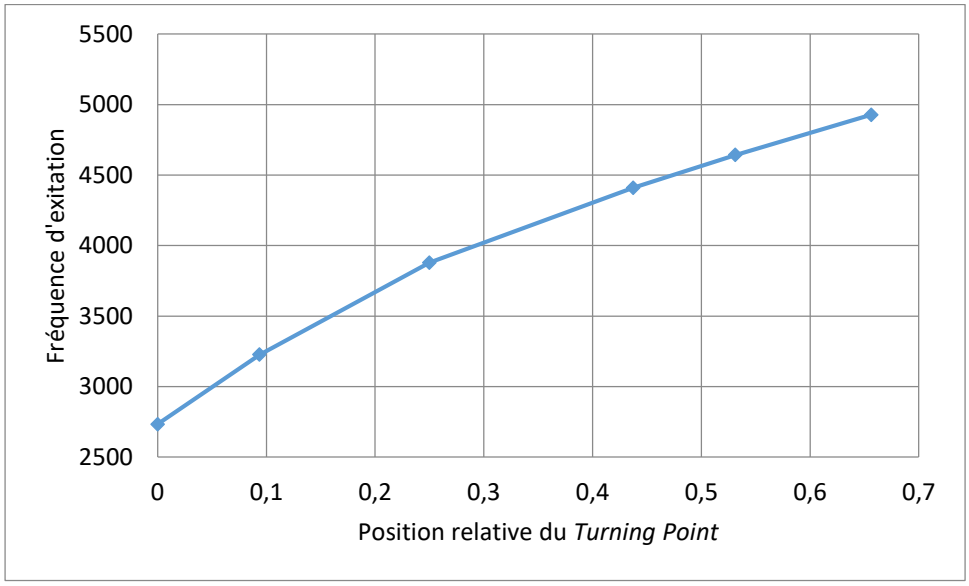


Figure 6.12 Carte tonotopique de l'essai présenté dans la Figure 6.11

6.2.2.2 Influence de la position d'excitation

Une caractéristique intéressante peut être extraite de la Figure 6.13 où les résultats obtenues dans la section précédente sont comparés avec un essai effectué sur la même poutre mais où l'excitation s'est faite sur la partie la plus rigide de la structure. Le cercle rouge dans cette figure indique la position du pot vibrant, tandis que la flèche de direction *x* indique l'évolution croissante du module

d'Young. Cette figure montre que la direction de l'évolution spatio-fréquentielle du TP ne change pas lorsque l'excitation est injectée sur le bout raide de la poutre. L'évolution du TP suit toujours la direction des modules d'Young croissant.

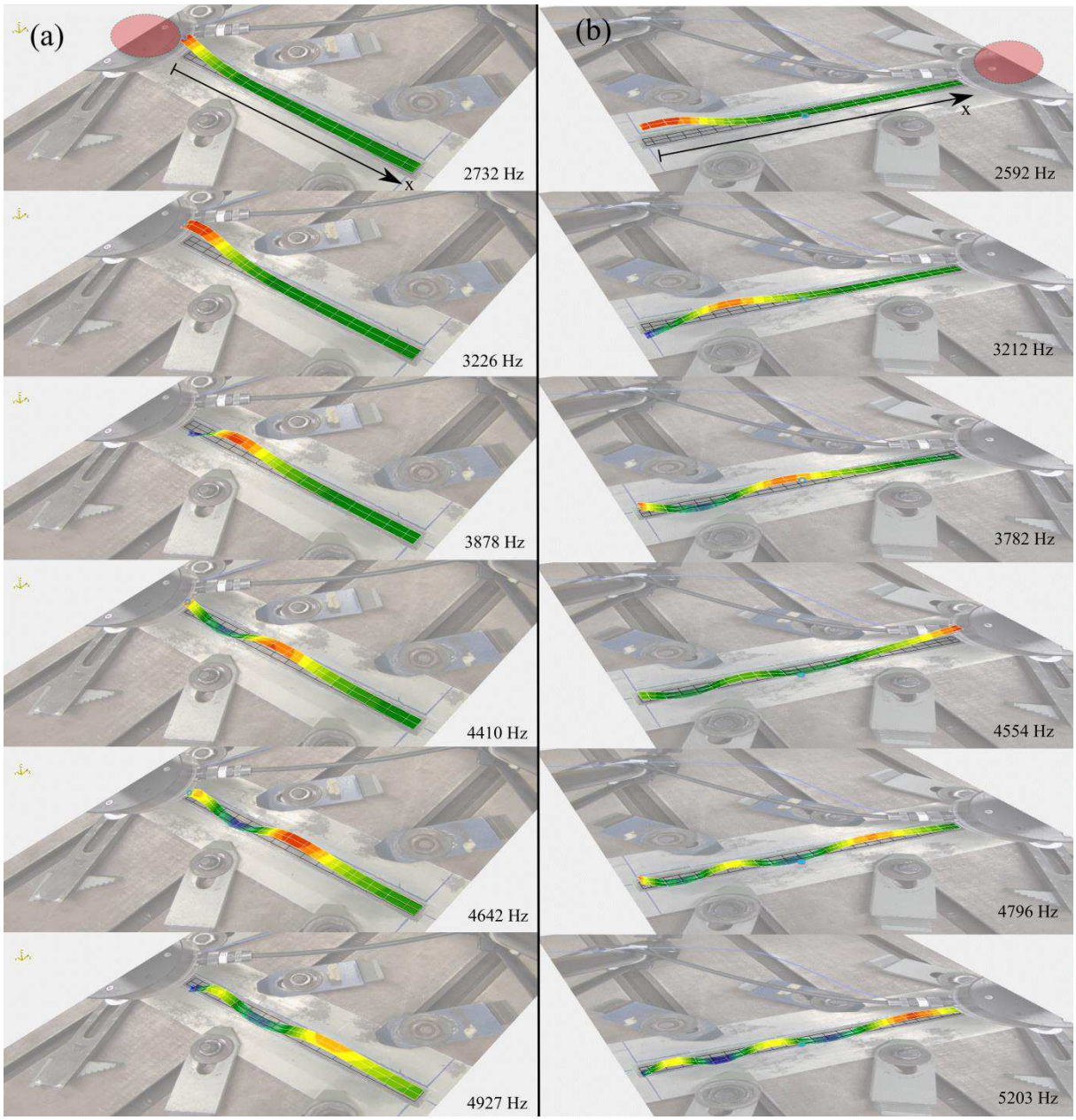


Figure 6.13 Évolution des modes tonotopiques pour une poutre sandwich encastrée sur la peau inférieure avec une âme à gradient de propriété. (a) Excitation sur le bord le moins rigide (même que 5.11). (b) excitation sur le bout le plus rigide. Le rond rouge indique la position l'excitation.

Dans le cas de l'excitation sur le bout rigide (Figure 6.13b), les vibrations ont lieu loin du point d'excitation. Cette observation peut être non conventionnelle, et on ne peut écarter la ressemblance avec le *'quantum tunelling'* dans lequel l'onde traverse une région non propagative pour réapparaître à une autre position propagative. Mais cette hypothèse peut être remplacée dans ce contexte par le fait que la solution analytique de cette partie de la structure n'est pas purement imaginaire en raison de la présence de la racine carrée quadratique, ce qui signifie que la vibration n'est que partiellement atténuée (chapitre 4.1).

Les fréquences propres de ces deux essais sont tracées dans la Figure 6.14. Une différence mineure peut également être notée dans ces fréquences quand l'excitation est effectuée sur l'un ou l'autre deux bords. Cela s'explique par le fait que le système est légèrement différent en raison de la dimension du lien entre le pot vibrant et la structure non symétrique.

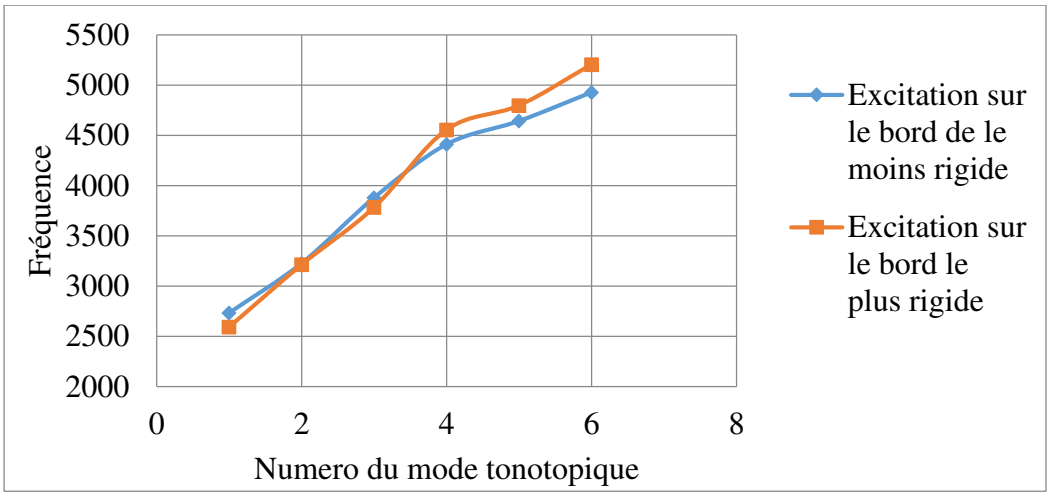


Figure 6.14 Comparaisons entre les fréquences modales pour des excitations sur la partie la moins rigide (bleu) et la plus rigide (rouge)

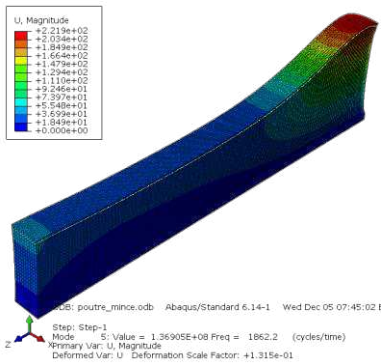
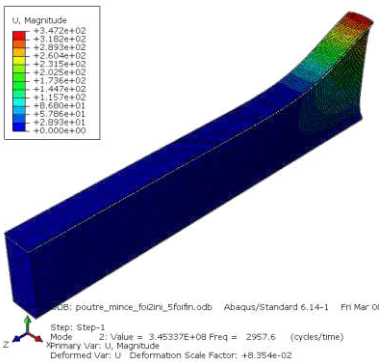
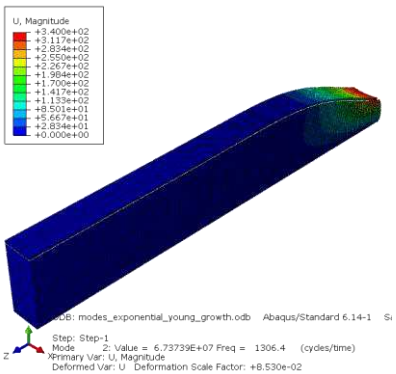
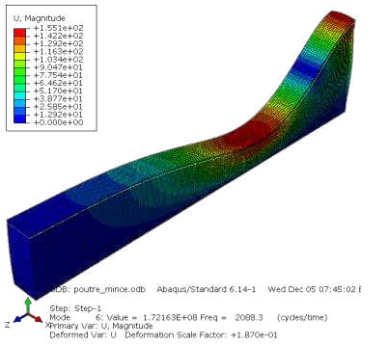
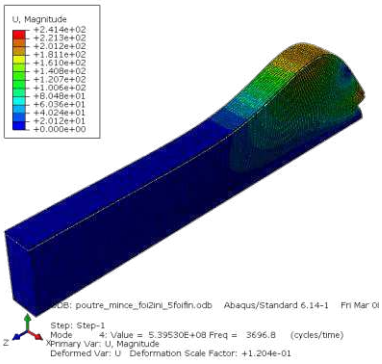
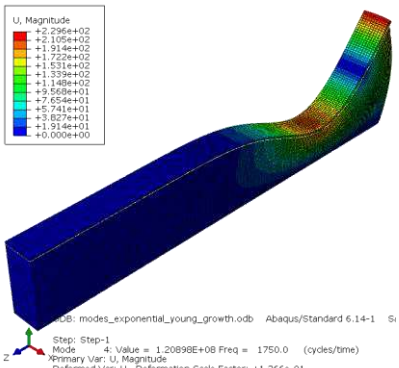
6.2.3 Analyse numérique de la tonotopie

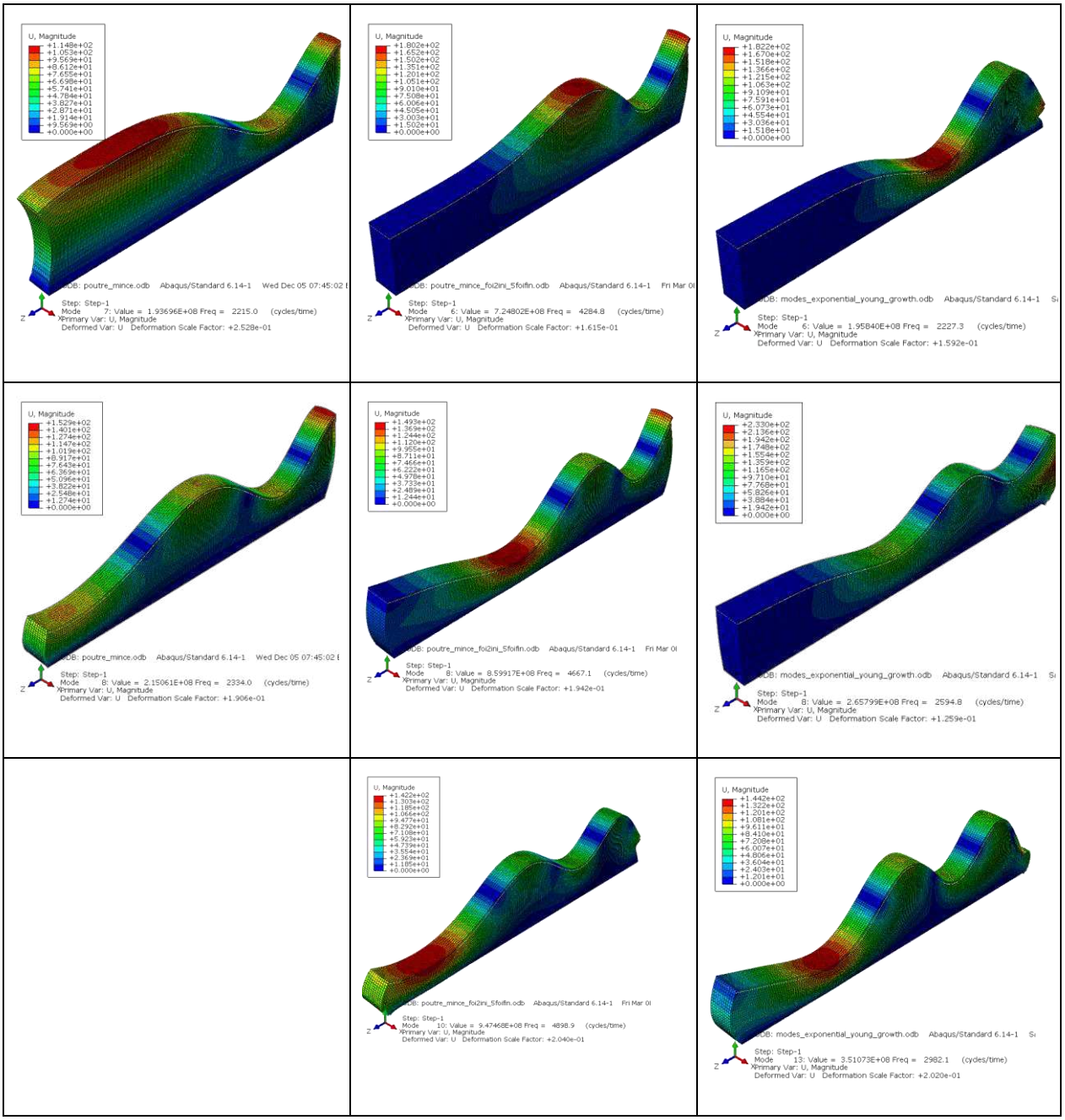
La comparaison entre la tonotopie obtenue numériquement et expérimentalement peut se faire suivant deux critères, soit des déformées modales et les fréquences modales.

La Figure 6.15 montre tous les modes tonotopiques de trois configurations. Le gradient du module d'Young utilisé pour générer les résultats de la première colonne est linéaire. Il correspond au gradient présenté dans la Figure 6.3 et ceci pour les mêmes dimensions utilisées dans la partie expérimentale. On remarque la présence de 4 modes tonotopiques. La troisième colonne présente

les résultats correspondant à un gradient quadratique (Figure 6.8). Cette configuration présente 6 modes tonotopiques.

Cette différence est due à de l'interdépendance entre plusieurs variables qui sont : la fréquence, le nombre des modes tonotopique et les propriétés du gradient du matériau. Ceci rend la caractérisation inverse sur une structure mécanique presque impossible. En effet, si on fixe la forme du gradient et on fait varier les propriétés du matériau par un facteur de correction, on peut faire correspondre les fréquences, mais le nombre de modes sera changé.

(a) Gradient linéaire (Figure 6.3)	(b) Gradient linéaire avec correction viscoélastique	(c) Gradient Quadratique (Figure 6.8)
		
		


U, Magnitude
+1.148e+02
+1.053e+02
+9.569e+01
+8.612e+01
+7.655e+01
+6.698e+01
+5.741e+01
+4.784e+01
+3.827e+01
+2.871e+01
+1.914e+01
+9.569e+00
+0.000e+00
ODB: poutre_mince.odb Abaqus/Standard 6.14-1 Wed Dec 05 07:45:02
Step: Step-1
Mode 7: Value = 1.93696E+08 Freq = 2215.0 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +2.528e-01
U, Magnitude
+1.802e+02
+1.652e+02
+1.502e+02
+1.351e+02
+1.201e+02
+1.051e+02
+9.010e+01
+7.508e+01
+6.006e+01
+4.505e+01
+3.003e+01
+1.502e+01
+0.000e+00
ODB: poutre_mince_foi2ini_5foiffin.odb Abaqus/Standard 6.14-1 Fri Mar 0
Step: Step-1
Mode 6: Value = 7.24802E+08 Freq = 4284.8 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.615e-01
U, Magnitude
+1.822e+02
+1.670e+02
+1.518e+02
+1.366e+02
+1.215e+02
+1.063e+02
+9.109e+01
+7.591e+01
+6.073e+01
+4.554e+01
+3.036e+01
+1.518e+01
+0.000e+00
ODB: modes_exponential_young_growth.odb Abaqus/Standard 6.14-1
Step: Step-1
Mode 6: Value = 1.95840E+08 Freq = 2227.3 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.592e-01
U, Magnitude
+1.529e+02
+1.401e+02
+1.274e+02
+1.147e+02
+1.019e+02
+8.917e+01
+7.643e+01
+6.369e+01
+5.096e+01
+3.822e+01
+2.548e+01
+1.274e+01
+0.000e+00
ODB: poutre_mince.odb Abaqus/Standard 6.14-1 Wed Dec 05 07:45:02
Step: Step-1
Mode 8: Value = 2.15061E+08 Freq = 2334.0 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.906e-01
U, Magnitude
+1.493e+02
+1.369e+02
+1.244e+02
+1.120e+02
+9.955e+01
+8.711e+01
+7.466e+01
+6.222e+01
+4.978e+01
+3.733e+01
+2.489e+01
+1.244e+01
+0.000e+00
ODB: poutre_mince_foi2ini_5foiffin.odb Abaqus/Standard 6.14-1 Fri Mar 0
Step: Step-1
Mode 8: Value = 8.59917E+08 Freq = 4667.1 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.942e-01
U, Magnitude
+2.330e+02
+2.136e+02
+1.942e+02
+1.748e+02
+1.554e+02
+1.359e+02
+1.165e+02
+9.710e+01
+7.768e+01
+5.826e+01
+3.884e+01
+1.942e+01
+0.000e+00
ODB: modes_exponential_young_growth.odb Abaqus/Standard 6.14-1
Step: Step-1
Mode 8: Value = 2.65799E+08 Freq = 2594.8 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.259e-01
U, Magnitude
+1.422e+02
+1.303e+02
+1.185e+02
+1.066e+02
+9.477e+01
+8.292e+01
+7.108e+01
+5.923e+01
+4.739e+01
+3.554e+01
+2.369e+01
+1.185e+01
+0.000e+00
ODB: poutre_mince_foi2ini_5foiffin.odb Abaqus/Standard 6.14-1 Fri Mar 0
Step: Step-1
Mode 10: Value = 9.47468E+08 Freq = 4898.9 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +2.040e-01
U, Magnitude
+1.442e+02
+1.322e+02
+1.201e+02
+1.081e+02
+9.611e+01
+8.410e+01
+7.208e+01
+6.007e+01
+4.806e+01
+3.604e+01
+2.403e+01
+1.201e+01
+0.000e+00
ODB: modes_exponential_young_growth.odb Abaqus/Standard 6.14-1
Step: Step-1
Mode 13: Value = 3.51073E+08 Freq = 2982.1 (cycles/time)
Primary Var: U, Magnitude
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +2.020e-01

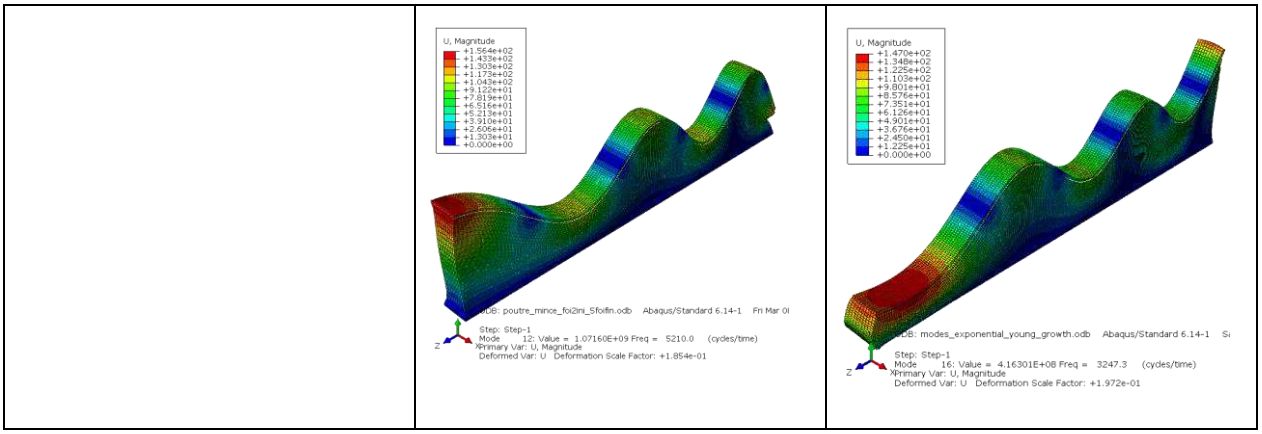


Figure 6.15 Comparaison entre les déformées modales tonotopiques de différentes configurations. Trois gradients du module d'Young sont implémentés (a) gradient linéarisé (Figure 6.3), (b) gradient linéarisé avec correction viscoélastique (c) gradient quadratique (Figure 6.8).

L'interdépendance entre les propriétés, les positions et la fréquence explique la difficulté d'intégrer la rigidification fréquentielle du matériau architecturé. En effet, la fréquence dépend de la position donc il faut corriger les propriétés d'une partie du matériau en fonction de la fréquence qu'on croit localiser sur cette position ce qui implique avoir un avis sur les résultats d'un calcul. Une tentative d'intégrer la rigidification est effectuée dans la suite de cette section.

Ici les résultats expérimentaux ont été utilisés pour faire une correspondance entre les positions de localisation et la fréquence. Le premier TP a lieu à 2500Hz sur le bout le moins rigide et le dernier à 5000Hz sur le bout le plus rigide (Figure 6.9). À partir du Tableau 5-3 ces fréquences correspondent à des facteurs de correction de 2 et 5. Ceci est fait avec l'hypothèse supposant que toutes les densités ont le même comportement rigidification. Les corrections sont ensuite intégrées linéairement le long du gradient du module d'Young. Le module d'Young de l'extrémité la moins rigide est donc multiplié par 2 et celui de la partie la plus rigide est multiplié par 5.

Les résultats du gradient linéaire avec la correction pour la rigidification sont tracés dans les Figure 6.15 (b). Le nombre de déformées modales dans cette situation est égal à celui obtenu expérimentalement (Figure 6.11) mais les déformés modales et la position des TP ne correspondent pas. Les résultats de la correction en rigidification du gradient quadratique sont aussi éloignés des valeurs expérimentales. Cette différence est due aux difficultés rencontrées dans la caractérisation du matériau architecturé dans le chapitre 5. En effet, tel qu'expliqué à la section 5.3, le matériau

en cellule de Voronoï est non linéaire puisqu'il est architecturé. Ses propriétés sont dépendantes de la fréquence car la matière utilisée pour l'impression est un polymère. Le matériau est anisotrope puisqu'il est imprimé en 3D. Enfin, le module de stockage des spécimens dépend fortement de leur facteur de forme.

6.2.4 Conclusion

L'implémentation de la tonotopie dans une structure à géométrie fixe et à gradient de propriétés mécaniques, sous forme de FGM, a été démontrée expérimentalement. Dans la même logique que celle utilisé dans la section précédente, le choix du schéma de Voronoï avec des cellules moyennes variable permet des évolutions relativement douces du module d'Young et de la densité.

Pour une fréquence donnée, la tonotopie obtenue localise les vibrations dans la même position indépendamment de la position d'excitation. Cela permet d'utiliser cette technologie comme une nouvelle approche pour un contrôle passif optimisé des vibrations.

La prédiction qualitative du phénomène est satisfaisante. Cependant, vu les grandes variabilités dans la caractérisation du matériau à gradient de propriété, aucune configuration de gradient numérique n'a pu être quantitativement comparée avec les résultats expérimentaux.

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNERALE

7.1 Synthèse des travaux

L'objectif initial de ce travail de recherche était la reproduction du phénomène de tonotopie présent dans la partie auditive de l'oreille interne. Ce phénomène confine les vibrations de différentes fréquences sur des positions définies d'une structure. Cette propriété est intéressante dans le cadre d'un contrôle passif et/ou actif des vibrations, où des dispositifs syntonisés peuvent être placés de façon stratégique en fonction de la fréquence d'excitation. Une reproduction de la tonotopie avait été faite par Foucaud en 2012 [3], qui a répliqué la géométrie simplifiée de la cochlée en utilisant un banc d'essai constitué d'une plaque de largeur variable immergée dans l'eau. Le but de cette thèse était de comprendre les mécanismes fondamentaux de la tonotopie afin de les mette en œuvre dans une structure simple sans couplage fluide ou multiphysique ni de variations géométriques, afin de permettre des applications dans le domaine de la dynamique des structures légères.

Les théories les plus intéressantes qui expliquent le phénomène de la tonotopie sont celles de la « *traveling wave* », de la « *critical layer* » et du « *mode conversion* ». Toutes les méthodes utilisent l'approximation WKB pour résoudre numériquement des équations différentielles partielles avec des coefficients inhomogènes. Les modèles simplifiés du mécanisme de la tonotopie dans la cochlée se basent sur la variation de la masse apparente du fluide, qui est couplée à une variation de la longueur d'onde elle-même créée par la variation de raideur. Ce mécanisme n'est pas pertinent pour notre application puisqu'il nécessite un couplage fluide-structure fort.

Une reproduction simplifiée de la maquette de Foucaud nous a permis de réaliser deux constatations :

- La tonotopie peut avoir lieu sans la présence d'un fluide,
- La tonotopie est plus visible lorsque l'excitation est appliquée du côté le plus large (et donc le mois raide) de la structure, à l'opposé de ce qui est admis dans la littérature de la cochlée.

Ceci nous a incité à chercher s'il y a d'autres mécanismes qui peuvent expliquer la localisation des vibrations et la tonotopie.

L'étude de la localisation dans les systèmes mécaniques a montré que les vibrations peuvent être confinées. En effet, ce phénomène est bien documenté dans les systèmes discrets comme les roues aubagées dans lesquelles des petites variations des paramètres entre les aubes créent un changement drastique dans le comportement du système. Ce phénomène de confinement est lié au *Turning Point* (TP) [28]. Il est possible de le réaliser dans une barre contrainte longitudinalement avec une raideur présentant un défaut, en utilisant la méthode WKB.

Un autre type de système mécanique, appelé Trou Noir Acoustique (TNA), présente une localisation des vibrations. Il est généralement implémenté sur une poutre avec une extrémité d'épaisseur variable. Théoriquement, si l'épaisseur de cette extrémité suit un profil décroissant en loi de puissance, alors toute l'énergie vibratoire qui entre dans cette zone reste confinée à l'extrémité et ne sera pas réfléchie.

Plusieurs modèles analytiques ont été développés pour mieux comprendre ces phénomènes de localisation dans les systèmes mécaniques. Le premier modèle est continu; il est constitué d'un guide d'ondes sous la forme d'une poutre posée horizontalement sur une base de raideur variable. Il a permis de montrer théoriquement qu'il était possible d'avoir un phénomène de tonotopie basé sur un TP qui évolue le long d'une structure de raideur variable. Ceci n'était pas trivial puisqu'il existe des articles qui traitent de système de poutres avec une base variable sans toutefois remarquer la localisation [61]. Ce modèle n'a pas été développé plus loin puisqu'aucune solution analytique n'est disponible pour les systèmes d'ordre 4.

Plusieurs autres modèles de guides d'ondes ont été étudiés. Ils montrent que la variation de paramètres n'est pas une condition suffisante pour avoir une tonotopie. En effet, les systèmes de type poutre (même en sandwich) ou de type barre avec une variation d'un ou plusieurs de leurs paramètres ont un comportement de type TNA.

Les systèmes tonotopiques ont en commun d'avoir une géométrie qui peut se modéliser par un ensemble d'oscillateurs couplés. Un modèle discret présentant cette géométrie a été développé. Ce modèle permet d'utiliser les connaissances disponibles dans la littérature des systèmes désaccordés [25]. L'utilisation du ratio de couplage permet d'estimer de façon un peu plus quantitative l'influence de chaque paramètre sur la tonotopie. Une distinction claire, supportée par une compréhension théorique, a été établie pour expliquer la transition entre les localisations forte et faible. Ceci a été possible par la différentiation entre deux types de TP, ce qui constitue une avancée

dans l'étude des systèmes désaccordés. Ce modèle montre aussi que pour avoir une tonotopie, les gradients de masse et de raideur doivent être différents car ces gradients ont un effet contraire l'un à l'autre. D'autres mécanismes comme la non-linéarité peuvent aussi conduire à une localisation, mais n'ont pas été implémentés dans cette étude.

L'hypothèse d'un amortissement visqueux dans le modèle a été prise dans toute la partie reliée à l'étude qualitative. Cette hypothèse permet d'avoir des résultats phénoménologiques plus complexes [56] [55] là où l'amortissement structural ne permet qu'un déphasage des modes. Les effets de cet amortissement peuvent être résumés comme suit :

- s'il est faible, l'amortissement a comme effet d'élargir la zone du confinement. Dans le cas de la tonotopie, l'apparition de mode complexe se traduit par une variation au cours du temps de la position du TP pour une fréquence d'excitation donnée.
- s'il est élevé, il peut faire disparaître complètement le phénomène de tonotopie.

Un des verrous technologiques les plus difficiles dans cette thèse a été la réalisation d'un matériau à gradient de propriété. Plusieurs solutions ont été proposées, testées et discutées. La solution la plus adaptée est celle développée et maitrisée par Martinez *et al* [42]. Elle se base sur une structure stochastique de Voronoï qui permet d'avoir des matériaux avec un gradient continu. J'ai donc initié une collaboration entre mes deux laboratoires de rattachement et l'INRIA-Nancy au cours de la troisième année de thèse, pour profiter des compétences pointues des trois laboratoires dans la réalisation de ce projet. L'INRIA nous a donné accès à son logiciel de conception de structure en Voronoï optimisée pour l'impression 3D avec une technologie FDM. Elle permet de réaliser de nombreux prototypes très rapidement en évitant les problèmes techniques reliés à la méthode de développement, la mémoire des machines et le temps de calcul des trajectoires des buses d'impression.

Il est important de rappeler qu'une caractérisation très précise des propriétés mécaniques est indispensable pour pouvoir identifier fidèlement le gradient de propriétés mécaniques des matériaux. La caractérisation du matériau mis en œuvre était un défi considérable. En effet, ce matériau se trouve à l'intersection entre trois catégories : les matières polymères, les matériaux architecturés et les matériaux imprimés. La littérature dans la première catégorie est abondante.

Elle a été la référence qui nous a guidés pour concevoir les différents tests de caractérisation vis-à-vis des matériaux architecturés imprimés en 3D. La grande difficulté est liée à la partie structurale où il n'y a toujours pas de consensus ou de norme de caractérisation. Les premières caractérisations en statique ont montré que le matériau est non-linéaire. Les tests dynamiques par DMA ont montré qu'il est très difficile de caractériser avec précision ce type de matériaux. L'un des obstacles est que les spécimens doivent être suffisamment grands pour que leur volume soit architecturalement représentatif, ce qui augmente leur raideur et les positionne en dehors des gammes admissibles des machines DMA. D'autres difficultés se sont révélées lors de l'étude de l'effet du facteur de forme et du sens d'impression des spécimens sur leur module d'Young.

Un matériau architecturé en PLA imprimé en 3D a été implémenté en tant qu'âme dans une structure sandwich. Comme le suggéraient les modèles réalisés au cours de la thèse, cette configuration a donné lieu expérimentalement à un phénomène de TNA. Le modèle en éléments finis montre que seuls les modes où les peaux du sandwich se déplacent de façon antisymétrique présentent une tonotopie. Pour mieux observer ces modes de vibrations, un banc d'essai d'une poutre avec une la peau inférieure encastrée et une âme de propriétés variables a été réalisé. Cette configuration a permis l'observation du phénomène de tonotopie avec le TP situé à l'endroit prévu par les modèles analytiques. L'excitation par l'une ou l'autre des deux extrémités de la poutre donne une tonotopie; ceci vient appuyer l'explication stipulant que la localisation observée est due à un phénomène de TP. Cette observation étant inédite, il est difficile de trouver des comparaisons avec d'autres publications puisque ces derniers utilisent en majorité une variation géométrique [62] [63] [64].

7.2 Perspectives

Le phénomène de tonotopie a été réalisé sur une structure sandwich encastrée sur la peau inférieure et dont l'âme a un gradient de propriété. Cette découverte ouvre la porte vers de nouvelles perspectives dans le domaine du contrôle passif et actif des structures. En pratique, ce phénomène permet le confinement des différentes fréquences de vibration sur des positions distinctes de la structure, rendant la transformation et la dissipation de ces vibrations possible grâce à des transducteurs syntonisés. Le travail sur la transformation optimisée des vibrations localisées par la tonotopie a déjà été entamé par les équipes du LAVA et de l'ICA. Il a pour but de récupérer de l'énergie vibratoire à l'aide d'oscillateurs non-linéaires de type NES (*Nonlinear Energy Sink*) via

une conversion électro-mécanique par des patchs piézoélectriques optimisés pour chaque intervalle de fréquences confinées par tonotopie. Le fait que la tonotopie ne dépende pas de la position de l'excitation nous permet d'envisager des applications plus variées où les structures vont transférer les réponses dynamiques indésirables dans des zones éloignées du système.

Il est aussi possible d'imaginer des structures sandwich avec des âmes qui forcent les vibrations symétriques des peaux activant ainsi la tonotopie dans des poutres sandwich en configuration encastrée-libre. Ceci peut être implémenté en intégrant des pivots dans l'âme (Figure 7.1) qui forcent un déplacement simultané et symétrique des peaux.

Figure 7.1 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés avec des pivots qui forçant la vibration symétrique des peaux.

Pour réduire les fréquences des vibrations pour lesquelles la localisation est observée, on peut imaginer des poutres sandwiches avec des âmes à gradient de propriétés qui ont un cisaillement diminué (Figure 7.2). Ces structures permettront la localisation dans une gamme de fréquences d'intérêt pour l'industrie en vue du contrôle des vibrations.

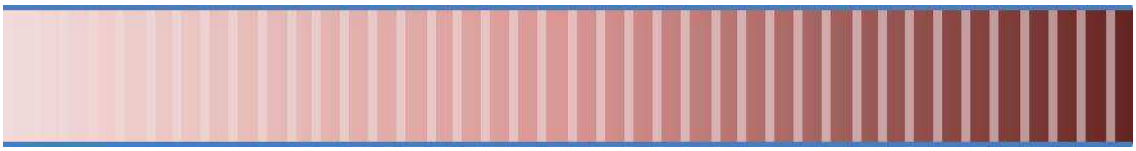


Figure 7.2 Poutre sandwich avec une âme à gradient de propriétés dont le cisaillement est diminué.

CHAPITRE 8 CONCLUSION

La revue de littérature a mis en évidence que des phénomènes de localisation de vibration sont présents dans des disciplines éloignées allant de la biomécanique du mécanisme de l'audition, jusqu'à la localisation des vibrations dans les aubes des turbines et passant par les trous noirs acoustiques dans le domaine de contrôle passif des vibrations. Ce rapprochement inédit nous a permis de concevoir que ces phénomènes sont liés et qu'ils sont fondamentalement dus à une variation spatiale des propriétés de la structure.

En traitant des diverses possibilités au sein d'une même structure, nous avons réussi à synthétiser les différents comportements que peut voir les systèmes mécaniques à gradient de propriétés notamment la tonotopie et le TNA. À l'aide de plusieurs modèles analytiques, il a été montré que les systèmes mécaniques présentent l'un ou l'autre de ces phénomènes en fonction de leur capacité à produire un *Turning Point*. On a pu montrer pour la première fois que la localisation dans les systèmes mécaniques discrets est due à deux types de TP différents. Cette nouvelle compréhension constitue un nouveau maillon entre l'étude des systèmes à gradient et des systèmes à variation stochastique en permettant, à l'avenir, de transposer les résultats d'un domaine à l'autre.

La caractérisation du matériau architecturé en cellule de Voronoï et imprimé en 3D a montré qu'il est possible de créer un matériau avec un gradient de propriété d'un facteur 3 entre le début et la fin de la structure. Grâce à cette caractérisation, il a été montré que la relation entre le facteur de forme et le module d'Young changeait drastiquement pour des spécimens avec différents taux de remplissage. Cette caractérisation inédite est l'une des étapes les plus délicates de la thèse. Elle ouvre des perspectives dans le domaine porteur de l'impression 3D de pièces fonctionnelles. Un travail important reste à faire dans ce domaine pour la caractérisation fine qui permettra une optimisation des solutions industrielle.

Un phénomène de type TNA dans une poutre sandwich avec une âme à gradient de propriété a été mis en évidence. Ce phénomène est aussi inédit dans une structure à géométrie fixe. Il peut évoluer dans le futur en améliorant la forme et l'amplitude des gradients. Il peut aussi être implémenté dans des plaques en s'inspirant des TNA circulaires présents dans la littérature.

La réalisation matérielle du phénomène de tonotopie dans une structure à géométrie fixe est sans doute le résultat le plus important de cette thèse.

RÉFÉRENCES

[1] C. H. Hodge, «Confinement of vibration by structural irregularity,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 82, n° 13, pp. 411-424, 1982.

[2] thirdage, «www.thridage.com,» 01 06 2016. [En ligne]. Disponible: http://www.thridage.com/healthgate.

[3] S. Foucaud, «Propagation des ondes dans un guide inhomogène: application à la cochelée,» *Thèse de doctorat, ISAE, Toulouse, France* 2012.

[4] E. A. Helmholtz H, On the sensation of tone as aphysical basis for the theory of music, 1895.

[5] G. Von Békésy, «Paradoxal direction of wave travel along the cochlea partition,» *JASA,* vol. 27, 1955.

[6] G. Von Békésy, «Simplified Model To demonstrate the energy flow and formation of travelling waves similar to those found in cochlea,» *PNASUSA,* vol. 42, n° 112, pp. 930-944, 1956.

[7] J. Lighthill, «Energy-flow in the cochlea,» *Journal of Fluid mechanics,* vol. 106, pp. 149-213, 1981.

[8] C. R. S. Lamb J. S., «Dual travelling waves in an inner ear model with two degrees of freedom,» *Phys. Rev. Lett,* vol. 107, n° 18, pp. 149-213, 2011.

[9] M. Van der Heijden, «Frequency selectivity without resonance in a fluid waveguide,» *PNAS,* vol. 111, n° 140, pp. 14548-14552, 2014.

[10] S. Foucaud, G. Michon, Y. Gourinat, A. Pelat et F. Gautier, «Artificial cochlea and acoustic black hole travelling waves observation: Model and experimental results,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 333, pp. 3428-3439, 2014.

[11] E. De Bors et M. Viergever, «Validity of the Liouville-Green (or WKB) method for cochlea mechanics,» *Hearing Research,* vol. 8, pp. 131-155, 1982.

[12] L. C. Peterson et B. P. Borgert, «A dynamical theory of the cohclea,» *The Journal of the Acoustical Society of America ,* vol. 22, pp. 369-381, 1950.

[13] R. S. MacKay, «Mode convertion in the cochlea? Linear analysis,» *Transaction of Mathematics and Its Application,* vol. 1, n° 11, p. tnx002, 2017.

[14] P. W. Anderson, «Absence of diffusion in certain random lattices,» *Physical review,* vol. 109, n° 15, pp. 1492-1505, 1957.

[15] O. O. Bendiksen, «Localisation phenomena in structural dynamics,» *Chaos, Solution and Fractals,* vol. 11, n° 110, pp. 1621-1660, 2000.

[16] D. J. Mead, «Wave propagation and narural mode in periodic systems: II. Multi-coupled system, with and without damping,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 104, n° 11, pp. 19-39, 1975.

[17] D. J. Mead, «A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Application to periodic Timoshenko beams and stiffened plates,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 104, n° 11, pp. 9-27, 1986.

[18] C. Pierre et E. H. Dowell, «Localization of vibrations by structural irregularity,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 114, pp. 549-654, 1987.

[19] C. Pierre, «Localized free and forced vibrations of nearly periodic distordred structures,» *AiAA Journal,* 1987.

[20] R. A. Ibrahim, «Structural dynamics with uncertainties,» *Applied Mechanics Reviews,* vol. 40, n° 13, pp. 309-328, 1987.

[21] C. S. Manohar et R. A. Ibrahim, «Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations: 1987-1998,» *Applied Mechanical Reviews,* vol. 52, n° 15, pp. 177-197, 1999.

[22] C. Pierre, «Mode localisation and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 126, n° 13, pp. 485-502, 1988.

[23] W. Leissa, «On a curve veering aberration,» *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP,* vol. 25, n° 11, pp. 99-111, 1974.

[24] N. C. Perkins et C. D. Mote, «Comments on curve veering in eigenvalue problems,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 106, n° 13, pp. 451-463, 1986.

[25] C. Pierre, «Weak and strong vibration locanisation in disordered structures: a statistical investigation,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 139, n° 11, pp. 111-132, 1990.

[26] D. C. Hebrbert et R. Jones, «Localized states in disordred systems,» *Journal of Physics C: Solide State Physics,* vol. 4, pp. 1145-1161, 1971.

[27] J. Scott et J. H. W. Woodhouse, «Vibration of an elastic strip with varying curvature,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences,* vol. 339, n° 11655, pp. 587-625, 1992.

[28] A. Luongo, «Mode localization by structural imperfections in one-dimensional continuous systems,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 155, n° 12, pp. 249-271, 1992.

[29] G. B. Witham, Linear and nonlinear waves, Modern Book Incorporated, 1975.

[30] A. H. Nayfeh et D. T. Mook, Nonlinear Oscilation, John Wiley and Sons, 2008.

[31] M. M. A., «Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly in a finite interval,» *Akust. Zh. ,* vol. 34, pp. 546-547, 1988.

[32] D. V., P. A., G. F. et C. Touzé, «Amortissement de vibrations de poutres par effet Trou Noir : caractérisation expérimentale et modèles numériques,» Acoustique et Techniques :

trimestriel d'information des professionnels de l'acoustique, Neuilly-sur-Seine : Centre d'information et de documentation sur le bruit, 2016.

[33] K. V. V., «Conditions for validity of geometrical-acoustics approximation in application to waves in an acute-angle solid wedge,» *Soviet Physics - Acoustics,* vol. 35, n° 12, pp. 176-180, 1989.

[34] V. V. Krylov et F. J. B. S. Tilman, «Acoustic 'black hole' for flexural waves as effective vibration dampers,» *Journal Of Sound and Vibration,* vol. 274, pp. 605-619, 2004.

[35] F. Gautier, J. Cuenca, V. Krylov et Simon, «Experimental investigation of the acoustic black hole effect for vibrations dumping in elliptical plates,» chez *Proceedings of Acoustics 08*, Paris, 2008.

[36] V. V. Krylov et E. Bowyer, «Acoustic 'black hole': a new approach to vibration damping in light-weight structures,» *Krylov V. V., Bowyer E.P,* vol. 35, n° 11, pp. 184-191, 2013.

[37] L. Zhao, F. Semperlotti et S. Conlon, «Enhanced vibration based energy harvesting using embedded acoustic black hole,» chez *Proc. Of SPIE Vol. 9061*, 2014.

[38] J. Favre, P. Lohmuller, B. Poitrowski, S. Kenzari, P. Laheurte et F. Meraghni, «A continuous crystallographic approach to generate cubic lattices and its effect on relative stiffness of architectured materials,» *Additive Manufacturing,* vol. 21, pp. 359-368, 2018.

[39] A. Radman et X. X. Y. M. Huang, «Topology optimization of functionally graded cellular material,» *J. Mater Sci.,* vol. 48, pp. 1503-1510, 2013.

[40] H. Kondo, A. Yokoyama, M. Omori, A. Ohkubo, T. Hirai, F. Watari, M. Uo et a. T. Kawasaki, «Fabrication of Titanium Nitride/Apatite Functionally Graded Implants by Spark Plasma Sintering,» *Materials Transactions,* vol. 45, n° 111, pp. 3156-3162, 2004.

[41] J. Martinez, J. Dumas et S. Levebre, «Procedural Voronoi Foam for Additive Manufacturing,» *ACM Trans Graph ,* vol. 35, n° 14, p. 44, 2016.

[42] J. Martinez, S. Hornus, H. Song et S. Lefebvre, «Polyhedral Voronoi diagrams for additive manufacturing,» *ACM Trans. Graph,* vol. 37, n° 14, p. 129, 2018.

[43] S. Foucaud, «Propagation d'onde dans un guide inhomogène: application à la cochlée,» Toulouse, 2012.

[44] K. F. Graff, Wave motion in elatic solids, Oxford: Oxford university press, 1975.

[45] M. Ebrahimian et M. Todorovska, «Wave Propagation in a Timoshenko Beam Building Model,» *Journal of Engineering Mechanics,* vol. 140, p. 04014018, 2013.

[46] S. P. Timoshenko, «On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars,» *Philos. Mag.,* vol. 245, n° 141, pp. 74-746, 1921.

[47] D. J. Mead, «Wave propagation in Timoshenko beams,» *Strojnicky Casopis,* vol. 36, pp. 556-584, 1985.

[48] D. Backström et A. C. Nilsson, «Modelling the vibration of sandwich beams ysing frequency-dependent parameters,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 300, pp. 586-611, 2007.

[49] N. A. Nilsson E, «A prediction and measurement of some dynamic properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 251, n° 13, pp. 409-430, 2002.

[50] P. Egger et L. Caracolia, «Analytical and experimental investigation on amultiple-mass-element pendulum impact damper for vibration mitigation,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 353, pp. 38-57, 2015.

[51] K. Vijayan et J. Woodhouse, «Shock amplifacation, curve veering and the role of damping,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 333, pp. 1379-1389, 2014.

[52] N. G. Stephen, «On veering of eigenvalue loci,» *Journal of Vibration and Acoustics,* vol. 131, n° 15, p. 054501, 2009.

[53] W. Xie et S. T. Ariaratnam, «Vibration mode localization in disordred cyclic structures, i: single substructure mode,,» *Journal Sound and Vibration,* vol. 189, pp. 625-645, 1996.

[54] G. Ottarsson et C. Pierre, «On the effect of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks,» *Americal institute of aeronautics and astronautics,* vol. 1494, pp. 3070-3078, 1995.

[55] A. Sondipon, «Damping models for structural vibration,» Cambridge, 2000.

[56] S. Neumark, «Concept of complex stiffness applied to problrms of oscillations with viscous and hystetetic damping,» Aeronautical research council reports and memoranda, 1957.

[57] S. W. Shaw et C. Pierre, «Normal modes for non-linear vibratory systems,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 164, n° 11, pp. 85-124, 1993.

[58] J. P. I. William, Mechanical Vibration, Jhon Wiley & Sons, Inc, 2007.

[59] «www.acrotechinc.com,» acrotechinc INC, 2019. [En ligne]. Disponible: https://www.acrotechinc.com/shape-factor-modulus-of-elasticity/. [Accès le 29 09 2019].

[60] «Amortissement non-linéaire des structures sandwichs à matériau d'âme en fibres enchevêtrées,» Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), Toulouse, 2014.

[61] M. A. Foyouzat, M. Mofid et J. ,. E. Akin, «On the dynamic response of beam on elastic foundations with variable modulus,» *Acta Mech,* vol. 227, pp. 549-564, 2016.

[62] Y. Chen, H. Liu, M. Reilly, H. Bae et M. Yu, «Enhanced acoustic sensing through wave compression and pressure amplification in anisotropic metamaterials,» *Nature Communications,* p. 5:5247, 2014.

[63] A. Colombi, V. Ageeva, R. J. Smith, A. Clare et R. Patel, «Enhanced sensing and conversion of ultrasonic Rayleigh waves by elastic metasurfaces,» *Nature scientific reports,* 2017.

[64] Z. Liuxian et Z. Shengxi, «Compact Acoustic Rainbow Trapping in a Bioinspired Spiral Array of Graded Locally Resonant Metamaterials,» *Sensors,* vol. 19, n° 14, p. 788, 2019.

[65] D. Zenkert, The Handbook of Sandwich Construction, Engineering Materials Advisory Services Ltd, 1997.

[66] M. Maheri et R. Adams, «On The Flexural Vibration Of Timoshenko Beams, And The Applicability Of The Analysis To A Sandwich Configuration» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 209, n° 13, pp. 419-442, 1998.

[67] D. Mead et Markus, «The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 10, pp. 163-175, 1969.

[68] A. Nilsson, «wave propagation in and sound transmission through sandwich plates,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 138, pp. 73-94, 1990.

[69] Y. Frostig et M. Baruch, «Free vibration of sandwich beams with transversarly flexible core: a high order approoach,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 176, n° 12, pp. 195-208, 1994.

[70] V. S. Sokolinsky et S. R. Nutt, «Boundary condition effects in free vibrations of higher-order soft sndwich beams,» *AIAA Jounal,* vol. 40, n° 16, pp. 1221-1227, 2002.

[71] S. Kapuria, M. Bhattacharyya et A. Kumar, «Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation,» *Composite Structures,* vol. 82, pp. 390-402, 2008.

[72] A. E. Alshorbagy, M. Eltaher et F. Mahmoud, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite,» *Applied Mathematical Modelling,* vol. 35, pp. 412-425, 2011.

[73] M. Aydogdu et V. Taskin, «Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges,» *Materials and Design,* vol. 28, pp. 1651-1656, 2007.

[74] M. Simsek, «Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions,» *Composite Structures,* vol. 149, pp. 304-314, 2016.

[75] L. Li, X. Li et Y. Hu, «Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material made of functionally graded material,» *International Journal of Engineering Science,* vol. 102, pp. 77-92, 2016.

[76] J. Murin et V. K. M. Aminbaghai, «Exact solution of the bending vibration problem of FGM beam ith variation of material properties,» *Engineering Structures,* vol. 32, pp. 1631-1640, 2010.

[77] S. Mohantya, R. Dashb et T. Routb, «Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation,» *Nuclear Engineering and Design,* vol. 241, pp. 2698-2715, 2011.

[78] T.-K. Nguyen, T. T.-P. Nguyen, T. P. Vo et H.-T. Thai, «Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory,» *Composites Part B,* vol. 76, pp. 273-285, 2015.

[79] N. A. Apete, *Sandwich Panels with Functionally Graded Core,* University of Florida, 2005.

[80] M. R. Doddamani et S. M. Kulkarni, «Flexural Behavior of Functionally Graded Sandwich Composite,» chez *Finite Element Analysis - Applications in Mechanical Engineering*, Farzad Ebrahimi, IntechOpen, 2012.

[81] T. Gold, «Hearing II. The physical basis of the action of the cochea.,» *Proceeding of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences,* vol. 135, pp. 492-498, 1948.

[82] B. A. Johnstone B., «Basilar membrane vibration examined with the mössbauer technique,» *Science,* vol. 158, n° 13799, pp. 389-90, 1967.

[83] W. Rhode, «Observations of the vibration of the basilar membrane in squirrel monkeys using the mössbauer technique,» *The Journal of the Acoustical Society of America ,* vol. 49, pp. 12-18, 1971.

[84] J. S. Lamb et R. S. Chadwik, «Phase of Shear Vibrations within Cochlear Partition Leads to Activation of the Cochlear Amplifier,» *PLoS One,* vol. 9, n° 12, p. e85969, 2014.

[85] P. Butaud, «Contribution à l'utilisation des polymères à mémoire de forme pour les structure à amortissement contrôlé,» école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques, Franche-comté, 2015.

[86] P. R. Cunningham, R. G. White et G. Aglietti, «Th effect of various design parameters on the free vibration of doubly curved composite sandwich panel,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 230, n° 13, pp. 617-648, 2000.

[87] X. L. Liu, «Behaviour of derivatives of eigenvalues and eigenvectors in curve veering and mode localization and their relation to close eigenvalues,» *Journal of Sound and Vibration,* vol. 256, n° 13, pp. 551-564, 2002.

[88] G. B. Witham, Linear and non linear waves, John Wiley & Sons, 1974.

ANNEXE A MODÉLISATION DES POUTRES SANDWICH

L'objectif premier de cette étude est de réaliser une poutre sandwich qui peut produire la tonotopie. La solution de la fabrication d'une âme est largement contrainte par le fait qu'il faut utiliser une technologie permettant l'obtention d'un matériau à gradient de propriété. La revue de littérature sur les poutres sandwich est donc focalisée sur leurs modélisations et la compatibilité des hypothèses utilisées avec la possibilité d'observer la tonotopie.

Une grande partie des principes de modélisation pour les poutres sandwichs est semblable à celle des poutres classiques. N'étant pas homogènes sur l'épaisseur, les propriétés de ces poutres sont déterminées en sommant les différentes couches [49]. Leurs propriétés homogénéisées peuvent alors être définies comme suit :

La raideur en flexion par unité de largeur de la poutre

$$D_1 = E_f \frac{h_f^3}{6} + E_f \frac{h_f^3 d^2}{2} + E_c \frac{h_c^3}{12} \tag{2.36}$$

La raideur en flexion par unité de largeur d'une peau

$$D_2 = E_f \frac{h_f^3}{12} \tag{2.37}$$

Le moment d'inertie par unité de largeur

$$I_\rho = \rho_f \frac{h_f^3}{6} + \rho_f \frac{h_f^3 d^2}{2} + \rho_c \frac{h_c^3}{12} \tag{2.38}$$

La masse par unité de surface

$$\mu = 2h_f \rho_f + h_c \rho_c \tag{2.39}$$

Où $h_f et\ E_f$ sont l'épaisseur et le module d'Young des peaux, et $h_c$et E_c sont l'épaisseur et le module d'Young de l'âme. Ces données peuvent être appliquées directement à un modèle de type Timoshenko [65]; [66]. Dans ce cas, il suffit de remplacer le terme EI par D_1 et le terme de cisaillement de toute la section par un terme de cisaillement de l'âme seulement.

Cependant, de nombreux modèles ont été développés spécifiquement pour les poutres sandwichs. Mead et marcus [67] ont développé un modèle d'ordre 6 (et non d'ordre 4 comme Timoshenko) qui distingue le comportement des peaux et de l'âme en décrivant notamment le cisaillement dans l'âme introduit par le mouvement des peaux. Ces auteurs définissent les hypothèses utilisées dans la majorité de la littérature sur les poutres sandwich :

1. Les peaux sont homogènes et se comportent comme des poutres d'Euler-Bernoulli.
2. Le déplacement transverse est le même pour les trois couches.
3. Le cisaillement est constant suivant l'épaisseur de l'âme.

Le modèle ultérieur de Nilsson [49]aussi d'ordre 6, permet de prendre en compte les effets de l'inertie de rotation, et le fait qu'il soit un modèle énergétique le rend plus facile à manipuler. Le principe de Hamilton est ensuite appliqué aux énergies extraites par ce modèle et permet d'obtenir les équations aux dérivés partielles (EDP) couplées de la poutre. La forme du déplacement transverse est alors :

$$W(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 e^{-bx} + C_4 e^{-b(x-l)} + C_5 e^{-cx} + C_5 e^{-c(x-l)} \qquad (2.40)$$

En remplaçant cette forme dans l'équation de mouvement de la poutre et en appliquant les conditions aux limites, on peut déterminer les différentes constantes. Il est aussi à noter que Backström et Nilsson [48]ont développé un modèle de Timoshenko modifié qui tient compte des matériaux dont les propriétés dépondent des fréquences.

D'autres modèles ont essayé de diminuer le nombre d'hypothèses de départ pour pouvoir tenir compte de la souplesse de l'âme. Le premier est développé par Nilsson [68] dans lequel il a extrait le nombre d'onde et le facteur d'atténuation d'une poutre sandwich dont les degrés de libertés sont détaillés dans la Figure 8.1. Les déplacements transversaux des peaux inférieures et supérieures ne sont pas identiques comme dans les modèles précédents. La relation entre les ddl des peaux sont liées par les contraintes normales et tangentielles dans l'âme. Ce type de modèle présente un avantage majeur: en effet, il permet de tenir compte des modes symétriques et antisymétriques des peaux. Ceci sera un paramètre capital pour la reproduction d'un phénomène de tonotopie.

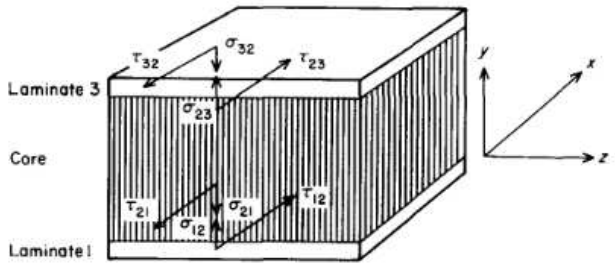


Figure 8.1 Composantes de la contrainte appliquée sur l'âme et les peaux de la structure [68].

Un modèle similaire appelé *the higher-order sandwich panel theory (HSAPT)* a été développé par Frostig et Baruch [69] et amélioré par Sokolinsky *et al* [70]. Les hypothèses prises en compte dans ce modèle sont :

1. Les peaux sont modélisées comme étant des poutres d'Euler-Bernoulli.
2. L'âme flexible est considérée comme un milieu élastique à deux degrés de liberté où sa hauteur varie en fonction du chargement et sa section n'est pas toujours plane. Les contraintes longitudinales sont négligées.
3. Les interfaces entre les peaux et l'âme sont infiniment rigides et donnent une continuité parfaite des déformations.

Douze équations aux dérivées partielles sont dérivées à partir d'une approche énergétique, puis résolues numériquement avec la méthode de discrétisation en différences finies.

Les modèles présentés dans cette section donnent deux possibilités. Soit travailler avec des modèles qui peuvent donner des solutions analytiques et faire des hypothèses fortes sur les déplacements de la structure, soit avoir une structure plus réaliste et résoudre les équations numériquement. Le premier type de modèle ne nous permet pas de visualiser le phénomène de tonotopie puisqu'il ne tient pas compte des modes symétriques, alors que le deuxième a le potentiel de les capter. Toutefois, une résolution numérique des équations ne permettrait d'identifier qu'empiriquement les paramètres qui causent la tonotopie. Cette étude empirique sera difficile puisqu'il n'existe aucune référence permettant d'avoir un point de départ.

Plusieurs modèles statiques et vibratoires de poutres à gradient de propriété ont été proposés dans la littérature [71] [72] [73] [74]. Ces modèles répondant aux mêmes enjeux que les poutres classiques notamment tenir compte des efforts de cisaillement avec des variantes du modèle de Timoshenko [75]. Quelques articles traitant des poutres sandwich avec des âmes à gradient de

propriété existent [76], mais la plupart concernent des gradients sur l'épaisseur des poutres [77] [78] [79] [80].

Aucun des articles, cités précédemment, ne constate une localisation des vibrations ou des déformations. En effet, la présence d'un gradient de propriété n'est pas suffisante pour obtenir une localisation. La direction de ce gradient, l'aptitude du modèle à tenir compte des modes symétriques, la méthode de résolution ainsi que le nombre de modes pris dans le calcul sont autant de critères déterminants pour avoir une tonotopie dans une poutre sandwich.

ANNEXE B MATRICE MASSE ET RAIDEUR

$$K = \begin{bmatrix} k_0 + \frac{\Delta k.k_0}{n} + 2kc + \frac{\Delta c.c_0}{n} & -kc - \frac{\Delta kc.kc_0}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ -kc - \frac{\Delta kc.kc_0}{n} & k_0 + \frac{2\Delta k.k_0}{n} + 2kc + \frac{(3).\Delta c.c_0}{n} & -kc - \frac{2\Delta kc.kc_0}{n} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -kc - \frac{(i-1)\Delta kc.kc_0}{n} & k_0 + \frac{i.\Delta k.k_0}{n} + 2kc + \frac{(2i-1).\Delta c.c_0}{n} & -kc - \frac{i.\Delta kc.kc_0}{n} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -kc - \frac{(n-2)\Delta kc.kc_0}{n} & k_0 + \frac{(n-1)\Delta k.k_0}{n} + 2kc + \frac{(4n-3).dc}{n} & -kc - \frac{(n-1)\Delta kc.kc_0}{n} \\ 0 & \cdots & 0 & -kc - \frac{(i-1)\Delta kc.kc_0}{n} & k_0 + \Delta k.k_0 + 2kc + \frac{(2n-1).\Delta kc.kc_0}{n} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_0 + \frac{\Delta m.m_0}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_0 + \frac{2\Delta m.m_0}{n} & 0 & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & m_0 + \frac{i.\Delta m.m_0}{n} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_0 + \Delta m.m_0 \end{bmatrix}$$