

UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE
U.F.R. ECONOMIE et GESTION (THEMA)

UNIVERSITE DE SFAX (FSEG)

**OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE
EN PRESENCE DE BIAIS COMPORTEMENTAUX**

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES de GESTION

(arrêté du 30 mars 1992)

Présentée et soutenue publiquement le 22 Mars 2019

par

Emna TRIKI

JURY

Directeurs de thèse : **Monsieur Jean-Luc Prigent**
Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise

Madame Mouna Abbas Boujelbene
MCF HDR à FSEG SFAX

Rapporteurs : **Monsieur Ephraïm Clark**
Professeur à l'Université Middlesex

Monsieur Kamel Naoui
Professeur à l'Université de La Manouba (ISC)

Monsieur Olivier Scaillet
Professeur à HEC Genève

Examineurs : **Monsieur Makram Bellalah**
MCF HDR à l'Université d'Amiens

Madame Annie Bellier
MCF HDR à l'Université de Cergy-Pontoise

Je dédie cette thèse à ma mère, mon père et mon mari.

Remerciements

Voici venu le temps de conclure ces trois années de thèse et c'est l'occasion pour moi d'adresser à travers ces quelques lignes mes remerciements à tous ceux qui ont de près ou de loin, directement ou indirectement, contribué à la réalisation de cette thèse.

J'aimerais tout d'abord remercier mes deux directeurs de thèse, Monsieur le professeur Jean Luc Prigent et Madame Mouna Boujelben, pour m'avoir dirigé durant ces trois années. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je suis très honorée de les avoir eu comme encadrants. Je tiens à les remercier pour leurs brillantes intuitions, leur patience, leur disponibilité, leur soutien et surtout leurs conseils judicieux qui ont contribué à améliorer ma réflexion. Je leur suis également reconnaissante pour le temps conséquent qu'ils m'ont accordé et leurs qualités pédagogiques et scientifiques. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

Je remercie Monsieur Ephraïm Clark, Monsieur Olivier Scaillet et Monsieur Kamel Naoui de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Je tiens à exprimer mes vifs et sincères remerciements à tous les membres du jury pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse et juger ce travail : Madame Annie Bellier et Monsieur Makram Bellalah.

J'adresse également toute ma gratitude à toute ma famille, tous mes ami(e)s et à toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Je remercie du fond du cœur mon père Ahmed et ma mère Sonia pour leur soutien, leur patience et leurs conseils. Leur amour, leur affection et leur tendresse m'ont toujours soutenu et accompagné dans les moments les plus agréables et les plus difficiles de ma vie malgré la distance et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui. Leur encouragement m'a toujours guidé à réaliser mes rêves et en particulier cette thèse. Merci pour avoir contribué à faire de moi ce que je suis aujourd'hui.

Je remercie profondément mon mari, Aymen Labidi pour tous ses encouragements, son soutien, son aide et sa patience. La thèse a été parfois un moment très difficile, mais il a toujours su me soutenir et être compréhensif.

Je remercie ma sœur Zineb et mon frère Mehdi qui ont été toujours à mes côtés et qui m'ont tant aidé et encouragé à réaliser ce travail.

Je remercie ma nièce Sirine, malgré son jeune âge, pour son amour et son affection qui m'ont toujours soutenu pendant les moments les plus difficiles de ma thèse. Je tiens à remercier également mon beau-frère Karim Ben Ayed pour son soutien.

Enfin, je remercie mes beaux-parents qui ont toujours su me soutenir psychologiquement durant ces trois dernières années.

Résumé

La finance comportementale est une science qui remet en question les principes de la finance classique à savoir la rationalité des investisseurs et l'efficacité du marché financier. Elle consiste à mieux intégrer la psychologie à la finance et expliquer les anomalies du marché financier causées par le comportement humain réel. Ces anomalies sont essentiellement liées à des biais psychologiques. Ces biais ont favorisé l'émergence de plusieurs théories d'utilités alternatives à la théorie de l'utilité classique à savoir: les théories d'ambiguïté, du regret et de déception. Ces théories ont été appliquées dans le cadre de la gestion de portefeuille standard et structuré y compris dans le cas multidimensionnel. Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé des modèles mathématiques d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion structurée dans le cas multidimensionnel en prenant en compte l'aversion à l'ambiguïté, au regret et à la déception. D'abord, nous avons déterminé le profil du portefeuille structuré optimal en présence de l'aversion à l'ambiguïté dans le cas multidimensionnel. Dans ce cadre, nous avons montré comment l'aversion au risque de l'investisseur et son aversion à l'ambiguïté au niveau des distributions des probabilités impactent le profil du portefeuille optimal en prenant en compte la corrélation entre les rendements des actifs. Nous avons montré aussi que lorsque les actifs risqués sont indépendants, la solution optimale correspond à la minimisation de la valeur absolue du ratio de Sharpe de chaque actif risqué. Ensuite, nous avons établi un modèle qui permet de montrer comment le sentiment du regret/réjouissance peut impacter la valeur du portefeuille optimal. Dans ce cas, nous avons résolu le problème le plus général du positionnement optimal du portefeuille, en proposant une extension des résultats antérieurs de Leland (1980); Brennan et Solanki (1981) et Prigent (2006, 2007) au cas de la théorie du regret afin de déterminer l'impact de l'aversion au risque et au regret sur le choix du portefeuille optimal. Les résultats de notre étude ont montré que le sentiment de regret/réjouissance a un impact significatif sur l'allocation optimale dans le cadre de la gestion structurée. Enfin, nous avons étudié l'effet de l'aversion à la déception potentielle sur les pondérations des actifs risqués au sein du portefeuille optimal structuré dans le cas multidimensionnel en se basant sur le modèle fondamental de la théorie de la déception de Loomes et Sugden (1986). Nous avons examiné l'allocation du portefeuille optimal, dans le cas buy-and-hold, en maximisant la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception dans les cadres binomial et Lognormal. Enfin, nous avons développé un modèle d'optimisation de portefeuille structuré afin de déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal en maximisant la fonction l'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception dans le cas multidimensionnel.

Abstract

Behavioral finance is a science that challenges the traditional finance principles, namely investor rationality and financial market efficiency. It consists in better integrating psychology into finance and explaining the anomalies in the financial market due to human behaviour. These anomalies are mainly related to psychological biases. These biases favored the emergence of several utility theories as an alternative to the classical utility theory, namely: ambiguity, regret and disappointment theory. These theories were applied in the context of standard and structured portfolio management, in the multidimensional case. As part of this thesis, we developed portfolio optimization mathematical models within the structured management framework in the multidimensional case taking into account ambiguity, regret and disappointment aversion. First, we identified and examined the optimal structured portfolio profile in the presence of ambiguity aversion in the multidimensional case. In this context, we have shown how investor risk aversion and ambiguity aversion in probability distributions affect the optimal portfolio profile taking into account the risky assets returns correlation. We have also shown when risky assets are independent, the optimal solution is to minimize the Sharpe ratio absolute value of each risky asset. We then established a model showing how the regret/ rejoicing feeling can affect the optimal portfolio value. In this case, we solved a general optimal portfolio positioning problem, by proposing an extension to the previous Leland (1980); Brennan and Solanki (1981) and Prigent (2006, 2007) results in the case of the regret theory in order to determine the risk and regret aversion impact on the optimal portfolio choice. Our study results showed the regret/ rejoicing feeling has a significant impact on the optimal allocation in the context of structured management. Finally, we studied the potential deception aversion effect on risky asset weights within the optimal structured portfolio in the multidimensional case using Loomes and Sugden's (1986) fundamental deception theory model. We examined the optimal portfolio allocation, in the buy-and-hold case, by maximizing the investor's expected utility function in the presence of disappointment aversion in both binomial and Lognormal frameworks. Finally, we developed a structured portfolio optimization model in order to determine the optimal portfolio payment function by maximizing the investor expected utility function in the presence of disappointment aversion in the multidimensional case.

Table des matières

Table des figures	3
Liste des tableaux	5
1. Introduction générale	6
partie 1. De la théorie moderne à la théorie comportementale de la gestion de portefeuille	19
Introduction	20
Chapitre 1. Généralités sur les théories de la prise de décision	22
1. La théorie de l'utilité espérée	22
2. Des approches alternatives à la théorie de l'utilité espérée : Utilité non-espérée	25
3. Conclusion	51
Chapitre 2. Gestion de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale	52
1. Introduction	52
2. Présentation de l'échantillon	54
3. Estimation et annualisation des données	54
4. L'approche du portefeuille moderne « moyenne-variance »	55
5. La gestion de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale	60
6. Conclusion	101
Annexe (Markowitz, 1952)	102
Annexe	106
partie 2. La gestion structurée dans le cadre de la finance comportementale	108
Introduction	109
Chapitre 3. Les principes de la gestion structurée	111
1. Généralités sur la gestion structurée	111
2. Les stratégies d'assurance de portefeuille	118
3. Positionnement optimal du portefeuille	121
4. Le modèle de Leland (1980)	125
5. Le portefeuille optimal structuré selon la théorie des perspectives cumulées (CPT)	128
6. Conclusion	132
Chapitre 4. Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à l'ambiguïté	133
1. Introduction	133
2. Le positionnement optimal sous l'ambiguïté	134
3. Exemple fondamental	144
4. Illustration empirique des portefeuilles optimaux	154
5. Conclusion	157
Chapitre 5. Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion au regret	158
1. Introduction	158

2. Le modèle de Mhiri et Prigent (2010)	159
3. Portefeuille optimal général avec une fonction d'utilité regret/réjouissance	161
4. Exemple fondamental	169
5. Conclusion	178
Chapitre 6. Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à la déception	181
1. Introduction	181
2. Modélisation	184
3. Portefeuille optimal en présence d'aversion à la déception (cas discret)	185
4. Portefeuille structuré optimal en présence d'aversion à la déception	190
5. Conclusion	192
6. Annexe	193
Bibliographie	197
Conclusion Générale	207

Table des figures

1	Fonction d'utilité de Friedman et Savage (1948)	24
2	Fonction d'utilité de Markowitz (1952b)	25
3	Processus de prise de décision selon la théorie des perspectives	26
4	Fonction d'utilité de Kahneman et Tversky (1979)	27
5	Fonction de pondération pour les gains et les pertes	29
6	Fonction d'évaluation de la CPT	29
7	Fonction de transformation des probabilités	30
1	Niveau d'aversion au risque de l'individu	57
2	Ensemble de portefeuilles possibles	59
3	Frontière efficiente de Markowitz (1952)	59
4	La frontière efficiente classique et la frontière efficiente robuste	79
5	Composition du portefeuille efficient classique	80
6	Composition du portefeuille efficient robuste en fonction du temps	81
7	Composition du portefeuille efficient classique en fonction du temps	81
8	Variation de la fonction d'utilité en fonction de x	84
9	Variation de la fonction d'utilité en fonction de x et du paramètre d'aversion au risque	86
10	Variation de la fonction d'utilité en fonction de λ	88
11	Variation de la fonction d'utilité en fonction du paramètre d'ambiguïté et du paramètre d'aversion au risque	89
12	Variation de la fonction d'utilité en fonction des paramètres d'ambiguïté x et de λ	92
1	Les profils optimaux sans contrainte	123
2	Les profils optimaux avec contrainte	124
1	Les fonctions de paiement des portefeuilles optimaux pour le cas buy-and-hold - Ambiguïté au niveau des tendances	138
2	Les fonctions de paiement des portefeuilles optimaux pour le cas buy-and-hold - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités	139
3	Le profil du portefeuille optimal	155
4	Les profils du portefeuille optimal - Ambiguïté au niveau des tendances	156
1	Le signe de la dérivée (cas 1)	177
2	La fonction de paiement du portefeuille optimal avec regret	178
3	Profil du portefeuille optimal pour l'utilité avec regret \réjouissance ($a=1$)	179
4	Comparaison des profils du portefeuille optimal pour l'utilité avec et sans regret \réjouissance ($a=1$)	179
5	Profil du portefeuille optimal pour l'utilité avec regret \réjouissance ($a=10$)	180

6	Comparaison des profils du portefeuille optimal pour l'utilité avec et sans regret\réjouissance (a=10)	180
1	La fonction D	185
2	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué	188
3	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité pu (gamma=5)	188
4	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u (gamma=5)	189
5	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué (gamma=2)	193
6	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité pu (gamma=2)	194
7	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u (gamma=2)	194
8	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué (gamma=10)	195
9	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité pu (gamma=10)	195
10	Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u (gamma=10)	196

Liste des tableaux

1	Ratio de Sharpe des trois titres	57
2	Les pondérations des titres dans le portefeuille efficient	58
3	Les caractéristiques du portefeuille efficient	60
4	Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste	85
5	Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste	89
6	Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste	91
7	La valeur du portefeuille efficient robuste	92
1	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances (2008)	136
2	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances (2016)	137
3	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités (2008)	138
4	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités (2016)	138
5	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau de la corrélation (2008)	139
6	Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau de la corrélation (2016)	140
7	Les multiples optimaux - Ambiguïté au niveau des tendances	155
8	Les multiples optimaux - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités	156
1	Le poids optimal en fonction de l'espérance de rendement en présence de déception	190
2	Le poids optimal en fonction de la volatilité en présence de déception	190

1. Introduction générale

L'une des préoccupations les plus importantes des investisseurs est de choisir la meilleure opportunité d'investissement possible afin de maximiser la valeur de leurs investissements. Cependant, comme montré par Markowitz (1952), dans un environnement incertain et risqué, la décision concernant la composition optimale du portefeuille est un processus compliqué. Le risque et l'incertitude sont parfois des termes substituables, mais leur signification n'est pas toujours facilement comprise. Knight (1921) a proposé dans son traité «Risk, Uncertainty and Profit» une distinction fondamentale entre le risque (la probabilité de survenance d'un événement est connue) et l'incertitude (la probabilité de survenance d'un événement est inconnue). La prise de décision en situation de risque et d'incertitude a été et continue d'être un sujet très important qui a fait l'objet de nombreuses études tant empiriques (comportement effectif des individus) que théoriques (axiomatiques de la théorie de la décision), afin de développer des modèles de décision rationnelle et/ou tenant compte de l'attitude réelle face au risque des individus. L'optimisation de portefeuille présente une décision très importante pour les investisseurs. L'idée du «portefeuille optimal» vient de la théorie de portefeuille moderne, introduite par Markowitz (1952). Cette théorie est appelée l'approche «moyenne-variance» et suppose que l'investisseur, averse au risque, choisit son portefeuille en prenant en compte la moyenne et la variance des rendements des actifs. Selon cette approche, l'investisseur agit d'une manière rationnelle et prend toujours des décisions dans le but de maximiser le rendement de son portefeuille pour un niveau de risque donné. La solution de ce programme d'optimisation de portefeuille consiste à déterminer la pondération optimale associée à chaque actif valable dans le portefeuille. Cette approche permet de formaliser l'effet de diversification au sein du portefeuille efficient et offre à l'investisseur un outil pour identifier le portefeuille efficient sur la frontière efficiente dans le plan (Risque ; Rendement espéré).

Le choix du portefeuille optimal traditionnel est fondé sur le principe de la rationalité de l'investisseur et de son aversion au risque, qui représentent la base de la théorie de la prise de décision classique, basée sur la théorie fondamentale de l'utilité espérée (von Neumann et Morgenstern, 1944). Cette dernière a été développée en se basant sur la théorie d'utilité de Bernoulli (1738), qui correspond à une attitude d'aversion vis à vis du risque (fonction d'utilité concave) et a fait l'objet d'innombrables recherches notamment en finance et en particulier dans le cadre de l'allocation d'actifs financiers. En effet, la théorie de l'utilité espérée repose sur l'hypothèse d'un «homo-œconomicus», dont le comportement est régi par l'intérêt personnel et la prise de décision rationnelle. Elle suppose que chaque preneur de décision possède l'information et les ressources nécessaires pour trouver la solution qui sera la meilleure (en un sens à préciser). Cependant, malgré sa popularité initiale chez les théoriciens, cette théorie ne reflète pas toujours la réalité des comportements des investisseurs vis à vis des fluctuations aléatoires des marchés financiers. Au cours des dernières décennies, les points de vue sur ces comportements réels ont subi une mutation. Les expériences comportementales menées au sein de laboratoires sont devenues une composante importante de la recherche en économie et les résultats expérimentaux ont montré que les postulats fondamentaux de la théorie économique classique devaient être modifiés. En effet, avec l'évolution des marchés financiers au fil des années, l'importance du risque est devenue de plus en plus prégnante, en particulier après la crise financière «des subprimes» en 2008, à la suite de laquelle les marchés financiers mondiaux ont été confrontés à une succession de chocs financiers rapides et violents. Ainsi, la mondialisation des marchés financiers, l'intégration financière, l'amélioration de la technologie au niveau des systèmes de négociation et des systèmes d'échange ont poussé les marchés à devenir beaucoup plus complexes tout en entraînant de nouvelles sources de risque. La croissance de la mondialisation des marchés a rendu l'environnement plus volatile, ce qui a conduit les entreprises, les institutions financières et les investisseurs à être exposés à davantage d'incertitude en plus des risques financiers classiques (voir en particulier les problèmes de contagion des risques). Ces conséquences néfastes que les marchés financiers ont connues, suite à la succession des crises et des chocs financiers, ont changé les comportements des investisseurs et ont mis en cause la théorie de la finance classique, basée sur l'hypothèse de la rationalité du choix de l'investisseur et notamment l'axiome dit «axiome d'indépendance». Ce changement a donné naissance à un nouveau courant de

recherche, dans le monde de l'économie, au début des années 2000, appelé «économie comportementale», qui permet de prendre en compte l'importance des émotions et des sentiments dans le choix de l'individu. L'économie comportementale, qui est considérée comme une combinaison entre la psychologie et l'économie, est basée en particulier sur la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979). En terme d'application, elle débouche tout naturellement sur la finance comportementale.

La recherche dans le cadre de la finance comportementale a pris de l'ampleur à partir des années 2000 puisque les chercheurs de la finance traditionnelle étaient incapables d'expliquer plusieurs phénomènes empiriques, à savoir par exemple les bulles financières au Japon, Taiwan, Etats-Unis... Elle est considérée comme une nouvelle approche qui a émergé pour répondre aux difficultés rencontrées par le paradigme traditionnel de l'utilité espérée au niveau des marchés financiers. Elle se présente comme une composante de l'économie comportementale et permet d'expliquer les faits réels mieux que la finance classique. En effet, elle explore le comportement des individus, d'une manière directe ou indirecte, en examinant les différentes attitudes des agents, leurs désirs, leurs erreurs, leurs préférences et leurs comportements par des tests expérimentaux. Ainsi, elle est définie comme l'étude de la façon dont la psychologie influence le comportement des individus, au niveau individuel ou collectif, sur les marchés financiers (Sewell, 2010). Quant à Statman (2014), il a défini la finance comportementale comme un paradigme qui intègre certaines parties de la finance classique et en substitue certaines autres. Elle constitue un point de liaison entre la théorie et la pratique, tout en adoptant la rigueur scientifique introduite par la finance standard. Statman (2014) a constaté entre autre que les choix financiers sont influencés par la culture, les responsabilités sociales et les sentiments de chaque agent. Il souligne également que la finance comportementale est en train de se construire comme une structure solide dans le domaine de la finance. Ce courant de recherche relativement nouveau a vu le jour sous l'impulsion des psychologues cognitifs qui ont étudié les jugements des individus dans le cadre de la prise de décision et des économistes expérimentaux qui ont testé des modèles de décision en matière économique. Ils ont montré que les biais cognitifs (à savoir : la comptabilité mentale, l'aversion aux pertes, l'excès de confiance...) et les heuristiques sont très importants dans le processus de prise de décision. Cette nouvelle science est considérée comme une critique du paradigme de la finance classique qui est essentiellement basée sur la rationalité du choix de l'individu et l'efficacité des informations au niveau des prix. En 2002, le prix Nobel d'économie a été décerné conjointement à l'économiste Vernon Smith et au spécialiste en psychologie cognitive «Daniel Kahneman». Ce dernier est considéré comme le pionnier de l'économie comportementale, en particulier de la finance comportementale, pour ses apports de recherche en psychologie empirique à la science de l'économie, et en particulier au domaine de la prise de décision. En effet, il a traité les biais cognitifs et émotionnels qui engendrent les anomalies qui surviennent sur le marché boursier et a développé la théorie des perspectives qui est considérée comme une des bases de la finance comportementale. En effet, la théorie des perspectives a été développée par Kahneman et Tversky en 1979. Elle a été affinée par la suite par Kahneman et Tversky (1992) pour devenir la théorie des perspectives cumulées (CPT). Cette théorie est devenue un modèle standard qui repose entre autre sur la fonction de pondération des probabilités. Elle permet de prendre en compte plusieurs observations expérimentales incompatibles avec la théorie de l'utilité espérée classique. En 2017, Richard Thaler a été couronné par le prix Nobel d'économie pour ses contributions à l'économie comportementale. Ses recherches empiriques et théoriques sont déterminantes dans la création d'un domaine en pleine expansion.

Depuis les années 60, des études expérimentales ont montré que les biais cognitifs et les heuristiques jouent un rôle très important dans le processus de prise de décision de l'individu. Dans ce contexte, le modèle de l'utilité espérée classique a connu plusieurs critiques suite au développement de la recherche en psychologie au niveau des jugements et de la prise de décision. En effet, plusieurs études empiriques ont montré que la théorie de l'utilité espérée classique n'arrive pas à donner une bonne description du comportement de l'individu en présence du risque et de l'incertitude. Cette théorie a fait l'objet de plusieurs remises en cause. Dans ce cadre, Allais (1953) a constaté, dans le cadre de son paradoxe, que les individus sont prêts à payer une prime de risque pour avoir l'alternative sûre et éviter la prise de risque. Ainsi, le paradoxe d'Ellsberg (1961) illustre le fait que les individus préfèrent parier dans

un scénario où les probabilités d'occurrence des différentes alternatives possibles sont connues. Ces deux paradoxes ont violé l'axiome d'indépendance qui est un des fondements de la théorie de l'utilité espérée. Friedman et Savage (1948) ont développé une fonction d'utilité modélisant le comportement des individus dans le cadre incertain. Ils ont constaté que la plupart des investisseurs sont à la fois averses et preneurs de risque. A son tour, Markowitz (1952b) a introduit la théorie «customary wealth theory» pour faire face à l'implication irréaliste du cadre de Friedman et Savage (1948). Il a modifié la fonction d'utilité de Friedman et Savage (1948) en déplaçant un des points d'inflexions de leur fonction d'utilité à une richesse habituelle (richesse actuelle). Ces chercheurs ont remis en question la théorie conventionnelle de prise de décision et leurs preuves expérimentales ont violé les axiomes de la théorie de l'utilité espérée. Ils ont constaté que plusieurs facteurs sont susceptibles d'influencer les choix des individus réels sont négligés ou mal spécifiés par la théorie de l'utilité espérée. En outre, plusieurs autres chercheurs ont présenté des approches alternatives à cette théorie, liées soit à la déformation des probabilités, soit à la déformation de la fonction d'utilité (plus nécessairement toujours concave), afin d'améliorer le processus de prise de décision dans le cadre de la gestion de portefeuille, à savoir : la théorie de l'utilité pondérée (Chew et MacCrimmon, 1979; Chew, 1983); la théorie de l'utilité dépendante du rang (Quiggin, 1982; Segal, 1987; Yaari, 1987); l'utilité espérée implicite (Chew, 1982; Dekel, 1986) et la théorie des perspectives cumulées (CPT) (Kahneman et Tversky, 1992). Ces approches sont devenues rapidement populaires dans le cadre de la finance comportementale.

La théorie des perspectives cumulées, développée par Kahneman et Tversky (1992), est considérée comme une approche pionnière de la finance comportementale. Cette théorie montre que les comportements des individus contredisent les principes de la théorie d'utilité espérée, qui suppose que l'individu est uniformément averse au risque et qu'il est capable d'évaluer les probabilités d'une manière objective, dans un cadre incertain. En effet, Kahneman et Tversky (1992) ont trouvé que les individus surpondèrent ou sous-pondèrent les vraies probabilités et que les pertes ont un effet psychologique plus important sur les investisseurs que les gains d'un même montant : les investisseurs sont averses au risque face aux gains et des preneurs de risque face aux pertes. Cette théorie est considérée comme le point de départ de plusieurs travaux en psychologie dans le cadre de la gestion de portefeuille statique (Benartzi et Thaler, 1995; Gomes, 2005; Barberis et Huang, 2008; Gurevich et al., 2009; Bernard et Ghossoud, 2010; Xue et Xun, 2011; Hens et Mayer, 2014; Ababio et al., 2018; Daris et Kaucic, 2016) et dans le cadre de la gestion de portefeuille structurée (Jin et Zhou, 2008; Branger et Vrecko, 2009; Bertrand et Prigent, 2012; Sung et al., 2011; Ben Ameur et Prigent, 2010; Deng et Pirvu, 2017). Cependant, plusieurs autres approches psychologiques ont marqué ce domaine par des études expérimentales et des recherches approfondies dans le cadre de la prise de décision et la gestion de portefeuille standard et structurée. Parmi ces approches, nous avons choisi de travailler sur trois théories qui ont largement influencé le domaine d'allocation d'actifs, à savoir : la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de la déception.

Le processus de prise de décision ne comprend pas seulement la tâche d'optimisation, mais un ensemble de tâches, à savoir : la sélection du modèle (stochastique); la collecte des données; l'estimation paramétrique, semi-paramétrique ou non paramétrique du modèle; le choix du critère d'optimisation approprié et finalement la détermination de la solution numérique du problème d'optimisation. La précision de la dernière tâche dépend de la qualité de la chaîne des sous-tâches précédentes. Depuis le paradoxe d'Ellsberg (1961), l'économie s'est enrichie de plusieurs modèles de prise de décision dans le cadre incertain. Certains modèles ont intégré l'ambiguïté dans la prise de décision et ont proposé d'intégrer l'attitude de l'individu face à l'ambiguïté dans la fonction d'utilité. D'après Ellsberg (1961), le terme «ambiguïté» renvoie souvent à l'ambiguïté des probabilités dans un cadre économique, et typiquement à une incertitude au niveau des valeurs des paramètres financiers au niveau de la pratique. En effet, dans le cadre de prise de décision, il y a plusieurs situations où l'information dont l'investisseur dispose peut être vague, imprécise ou ambiguë. Ellsberg (1961) a intégré la notion de l'ambiguïté dans le cadre de l'économie. En effet, la manière intellectuelle selon laquelle l'ambiguïté est traitée influence considérablement la décision de l'individu. Dans ce cadre, plusieurs modèles économiques qui prennent en compte l'ambiguïté au niveau des paramètres ont été appliqués à la gestion

de portefeuille standard et l'assurance de portefeuille. D'après ses résultats expérimentaux, Ellsberg (1961) a constaté que les preneurs de décision préfèrent parier sur des événements non ambigus, c'est-à-dire qu'ils préfèrent les options qui présentent des probabilités claires par rapport aux options dont les probabilités sont vagues. Ce comportement est interprété comme une «aversion à l'ambiguïté». En effet, un individu averse à l'ambiguïté déteste l'incertitude et ajuste son comportement en faveur des événements à probabilités connues, même à des coûts importants. Ce type de comportement a été pris en considération dans plusieurs études dans le cadre de prise de décision et la gestion de portefeuille. Plus tard, Schmeidler (1989) et Gilboa et Schmeidler (1989) ont remis en question la mesure de probabilité subjective (l'indice d'ambiguïté). Ces chercheurs ont établi le fondement formel de la théorie de l'ambiguïté dans le cadre de la prise de décision avec «l'approche des préférences multiples» (Hassen et Sargent, 2001) et «l'approche des préférences de multiples priors» (Gilboa et Schmeidler, 1989). Ainsi, Maccheroni et al. (2006) ont présenté une approche qui englobe les deux modèles précédents. Tous ces modèles ont été la base de développement de plusieurs modèles comportementaux dans le cadre de l'optimisation de portefeuille en présence de l'ambiguïté.

Mise à part l'ambiguïté, qui peut affecter d'une manière considérable le choix de l'individu, ce dernier peut éprouver des sentiments à l'égard de la décision elle-même (peur, anxiété...) et des sentiments qu'il peut éprouver postérieurement ("soulagement" suite à un bon résultat ou "tristesse" suite à un mauvais résultat). En effet, le preneur de décision peut comparer le rendement de l'alternative choisie avec ceux des autres options non choisies. Cette comparaison peut générer des sentiments défavorables, appelés «le regret» (Bell, 1982; Loomes et Sugden, 1982). Le regret est l'émotion qui a reçu le plus d'attention de la part des théoriciens vu que la plupart des gens peuvent facilement se rappeler des situations dans lesquelles une mauvaise décision a conduit à un regret douloureux. Bell (1982) et Loomes et Sugden (1982) ont défini le regret comme une conséquence de prise de décision dans un cadre risqué et ont indiqué que ce sentiment peut survenir lorsque les personnes semblent, après la prise de décision, avoir pris la mauvaise décision, même si la décision semblait être la bonne au moment où elle a été prise. Bell (1982) et Fishburn (1982) ont établi la théorie du regret, qui a été développée par la suite par Loomes et Sugden (1982, 1986) et axiomatisée par Quiggin (1994). A partir des débuts des années 90, plusieurs psychologues et économistes ont étudié le rôle du sentiment du regret dans le cadre de prise de décision (Simonson, 1992; Larrick, 1993; Boles et Larrick, 1995; Zeelenberg, 1999; Connolly et Zeelenberg, 2002; Inman et Zeelenberg, 2002; Buther et Connolly, 2006; Pieters et Zeelenberg, 2007). Ainsi, une large littérature a montré que le sentiment du regret a un impact sur le choix d'investissement de l'individu (Gilovich et Medvec, 1995; Zeelenberg et al., 1998, 2000; Camille et al., 2004; Coricelli et al., 2005).

Malgré l'importance du sentiment du regret au moment de la prise de décision, l'individu est susceptible d'être influencé par un autre sentiment dans un cadre risqué et incertain, appelé le sentiment de «déception». Comme la théorie du regret, la théorie de déception est une théorie descriptive du choix en présence du risque et d'incertitude. Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986) ont montré que la déception est une réaction psychologique éprouvée par l'individu juste après avoir fait un mauvais choix : l'individu éprouve de la déception (ou de "l'allégresse") si le rendement de la stratégie choisie par l'individu est inférieur (ou supérieur) à son espérance. Ils ont établi des modèles de prise de décision basés sur la théorie de la déception. Bell (1985) est le premier à avoir développé un modèle de la théorie de la déception, dans lequel l'individu cherche à minimiser sa déception. Son modèle est basé sur l'exemple de Kahneman et Tversky (1979). Dans leur modèle, Loomes et Sugden (1986) ont gardé certains éléments compatibles avec la théorie du regret. Plus tard, Gul (1991) a développé un modèle de prise de décision basé sur l'aversion à la déception, appelé : «théorie de l'aversion à la déception». En outre, Grant et Kajii (1998) ont présenté un modèle de prise de décision qui est considéré comme un miroir du modèle de Gul (1991). Leur modèle est une axiomatisation des préférences de l'utilité dépendante du rang de Quiggin (1982). Ainsi Cillo et Deliquié (2006) ont développé un modèle lié à la théorie dépendante du rang. Chauveau et Nalpas (2002) ont établi un modèle axiomatique comparable

à celui de Loomes et Sugden (1986), appelé la théorie d'utilité pondérée de la déception (disappointment weighted utility theory). Cette théorie a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans le cadre de la gestion de portefeuille.

L'approche moyenne-variance présente un modèle d'allocation d'actifs qui a fortement marqué la théorie de la gestion de portefeuille moderne. Malgré son importance théorique, ce modèle rencontre un certain doute chez les investisseurs. En effet, le rendement espéré et la matrice variance-covariance d'actifs utilisés par l'investisseur dans le modèle d'optimisation classique doivent être déterminés empiriquement. Cependant, cette théorie ne représente pas la réalité du marché et permet de produire une certaine inefficience au niveau des portefeuilles. Cette inefficience est liée à la mesure du risque qui est représentée par le risque des rendements. Plusieurs chercheurs ont largement critiqué la théorie de portefeuille moderne et ont présenté des approches alternatives qui sont basées sur de nouvelles mesures de risque autre que la variance du rendement du portefeuille ou qui permettent de prendre en compte le comportement réel de l'investisseur afin de présenter une image plus proche de la réalité. En effet, plusieurs études expérimentales ont montré que le modèle d'optimisation de portefeuille de Markowitz (1952) reste un modèle un peu trop théorique vu qu'il suppose que l'investisseur est toujours averse au risque. Ces études ont montré que le comportement de l'investisseur est susceptible d'être affecté par plusieurs autres biais, à savoir : la comptabilité mentale, l'aversion à l'ambiguïté, l'aversion au regret et l'aversion à la déception. Ces derniers biais ont été pris en compte dans le cadre de l'optimisation de portefeuille standard par plusieurs chercheurs.

L'estimation et la prévision des paramètres financiers restent toujours très difficiles. Or la performance et la composition des portefeuilles optimaux obtenus selon l'approche moyenne-variance sont très sensibles aux variations des paramètres principaux du modèle (le rendement espéré et la matrice de variance-covariance). Afin de prendre en compte l'ambiguïté au niveau des paramètres financiers dans le cadre d'optimisation du portefeuille standard, Soyster (1973) a développé le modèle d'optimisation robuste. Ce dernier peut être déterminé mathématiquement selon une programmation quadratique convexe. Cependant, les travaux des chercheurs concernant l'optimisation robuste ont stagné pendant plusieurs années. Les recherches dans ce domaine ont été reprises à la fin des années 1990 et début des années 2000 avec Ben-Tal et Nemirovski (1998, 1999) ; Rustem et al. (2000) ; Halldorsson et Tütüncü (2003) et Koenig et Tütüncü (2004).

Dans le cadre de l'optimisation de portefeuille en incertain, Koenig et Tütüncü (2004) ont traité le problème d'optimisation robuste «maxmin», basé sur une incertitude au niveau du vecteur de rendement espéré et de la matrice variance-covariance, en utilisant le théorème du point-selle. Ils ont constaté que le portefeuille efficient robuste est plus pertinent et plus stable au cours du temps et qu'il est composé d'un nombre plus petit de classes d'actifs que le portefeuille efficient classique. Fei (2007) a déterminé le portefeuille optimal de l'investisseur en prenant en compte l'anticipation de l'investisseur et l'ambiguïté. Il a montré que l'anticipation et l'ambiguïté affectent le choix du portefeuille optimal de l'investisseur. Plus récemment, Liu et Zeng (2015) supposent que l'ambiguïté porte sur la corrélation entre les rendements de deux actifs risqués et ont constaté que l'anti diversification prend place dans ce cadre. En outre, Biagini et Pinar (2015) ont déterminé le profil du portefeuille optimal dans un contexte où l'ambiguïté porte sur les rendements et les volatilités des actifs en se basant sur une approche robuste de type «maxmin». Leurs résultats ont montré que l'investisseur considère que la matrice variance-covariance est située dans un ensemble compact et plausible pour une réalisation donnée de la volatilité et que toutes les tendances prennent des valeurs dans un ensemble ellipsoïdal. Un peu plus tard, Kaya (2017) a traité le problème de l'optimisation de portefeuille lorsque les paramètres d'entrée sont incertains. Il a décrit comment cette ambiguïté peut être modélisée de façon probabiliste et comment elle peut être traitée dans le cadre d'allocation d'actifs. De plus, Pflug et Pohl (2018) ont examiné les formulations du problème de sélection du portefeuille robuste sous l'angle de l'ambiguïté. Ils ont montré qu'en présence de l'ambiguïté au niveau des distributions marginales, la composition du portefeuille devient optimale telle que l'incertitude relative à la structure de dépendance estimée augmente. Enfin, Shigeta (2018) a étudié la performance du portefeuille optimal robuste en présence de multiples a priori sur les paramètres en se basant sur les préférences moyenne-variance. Ses résultats

révèlent deux propriétés : le portefeuille optimal robuste tend à être efficient lorsque le nombre d'actifs est élevé et il présente moins de fluctuations que les portefeuilles efficaces à moyenne-variance.

En outre, dans le cadre de l'allocation d'actifs, l'investisseur prend en compte le fait qu'il peut regretter d'avoir pris une telle décision d'investissement qui se révèle non optimale a posteriori. Par exemple, si le rendement d'un actif risqué s'avère très élevé, l'investisseur peut regretter de ne pas avoir alloué la totalité de sa richesse sur l'actif risqué. Dans le cas inverse, si le rendement de l'actif risqué s'avère très faible ou négatif, l'investisseur peut regretter d'avoir alloué même une petite partie de sa richesse dans cet actif. Il est donc judicieux de développer une approche d'optimisation de portefeuille avec regret pour prendre en compte le regret de l'investisseur. Toutefois, les approches proposées pour l'optimisation de portefeuille avec regret sont principalement basées sur l'optimisation stochastique. Ceci suppose que les données incertaines et donc stochastiques reposent sur la détermination exacte des probabilités sous-jacentes. Dans le cadre de la gestion de portefeuille statique, une large littérature a été développée (Muermann et al., 2006; Wang et Boutlier, 2003; Li et al., 2012; Ji et al., 2014; Simoes et al., 2017). Solnik (2007) a appliqué la théorie du regret dans le contexte de l'optimisation du portefeuille international. Il a analysé les préférences des individus, qui sont à la fois averses au risque et au regret, pour les actions domestiques. Il a constaté que les individus considèrent les actifs étrangers comme un potentiel à la hausse (Statman, 1999) et qu'ils éprouvent du regret si les actifs étrangers présentent des résultats plus faibles que ceux des actifs domestiques. Plus tard, Ji et al. (2014) ont généralisé l'approche d'optimisation du portefeuille selon le regret en minimisant la somme pondérée de la différence entre le rendement du portefeuille de l'investisseur et la somme de rendement de chaque portefeuille possible. Leur approche permet de respecter le principe de la diversification de l'investissement. Simoes et al. (2017) ont proposé un problème d'optimisation robuste absolue, qui permet de minimiser la volatilité maximale du portefeuille choisi dans le pire scénario. Ils supposent que les investisseurs ont leurs propres objectifs et ont ajouté une autre contrainte à la fonction objective de l'investisseur. Ils ont constaté que leur méthode permet d'avoir un portefeuille plus diversifié que les deux autres méthodes classiques (la méthode d'optimisation du portefeuille robuste absolue et la méthode d'optimisation du portefeuille de la minimisation de la volatilité).

Vu l'importance du sentiment de la déception dans le cadre de prise de décision de l'individu, la théorie de la déception a fait l'objet de plusieurs travaux dans le cadre de la gestion de portefeuille standard. Dans ce contexte, plusieurs chercheurs (Akerlof et Dickeurs, 1982; Caplin et Leahy, 2001; Brunnermeier et Parker, 2005; Gollier, 2005) ont introduit le sentiment de déception dans le cadre de la prise de décision. Dans ce contexte, Gollier et Muermann (2006) ont proposé un modèle qui est une combinaison entre la théorie de la déception de Bell (1985) et la notion de déception d'Akerlof et Dickeurs (1982). Ils ont appliqué leur critère de décision simple au problème de choix du portefeuille standard. Ils ont montré que l'individu est plus réticent à prendre des risques comparé au modèle de l'utilité espérée et ont constaté que les individus ayant une émotion anticipée et une déception ex-post sélectionnent un portefeuille moins risqué que celui issu de l'utilité espérée. Leur modèle permet d'expliquer l'énigme de la prime de risque. Plus tard, Jouini et al. (2013) ont revisité le modèle de Gollier et Muermann (2010). Dans leur modèle, Jouini et al. (2013) supposent que la déception et l'allégresse sont mesurées par un point de référence qui représente la fonction de paiement du portefeuille espéré anticipé. Leur modèle est cohérent avec le modèle de déception dont l'équivalent certain est le point de référence (Gul, 1991) et le modèle de la déception dont le point de référence est représenté par la fonction de paiement du portefeuille espéré (Bell, 1985; Loomes et Sugden, 1986). Jouini et al. (2013) ont montré qu'une croissance au niveau du risque permet à l'agent de former une meilleure fonction de paiement de portefeuille espérée optimale en termes de rapport entre l'allégresse et la déception. Ils ont montré que l'individu prend des positions non nulles sur les actifs risqués dont la moyenne du rendement est nulle. Dans ce cadre, la présence du risque permet d'avoir une gamme de fonctions de paiement de portefeuille espérées plus large qui permet d'avoir une satisfaction plus importante soit une déception plus faible permettant de compenser l'aversion au risque. Plus tard, Huang et al. (2012) ont étudié l'impact des préférences de Gul (1991) concernant l'aversion à la déception sur l'allocation du portefeuille dans un contexte dynamique en mettant à jour l'équivalent

certain d'une manière endogène. Ils ont mis particulièrement l'accent sur les effets de la prévision des rendements et de l'incertitude au niveau des paramètres sur l'allocation de portefeuille à long terme. Ils ont constaté que les effets horizontaux persistent et que les actions apparaissent progressivement au sein du portefeuille d'une manière plus attrayante à long terme qu'à court terme.

Les modèles d'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale ont pu être appliqués dans la pratique vu la relative simplicité de mise en oeuvre. Ces modèles statiques peuvent cependant être considérés comme un peu simplistes. En effet, de par leur nature même, ils connaissent plusieurs limites ne permettant pas notamment de prendre en compte l'information dynamique des marchés et de ce fait, ne répondant pas suffisamment aux besoins des investisseurs qui sont devenus très sophistiqués. Afin de pallier le problème posé par cette complexité au niveau des choix des investisseurs, les établissements financiers ont eu recours à la gestion de portefeuille structurée, l'assurance de portefeuille en particulier qui offre la possibilité de construire un portefeuille structuré contenant des produits dérivés permettant de protéger le capital investi. Aujourd'hui, les investisseurs font face à un marché caractérisé par un niveau assez élevé d'incertitude. Les produits structurés peuvent constituer un outil efficace pour investir dans toutes les classes d'actifs, y compris les marchés fragmentés ou difficiles d'accès, avec un niveau de protection adapté. Ils représentent une alternative originale et efficace aux investissements financiers habituels et offrent des solutions qui peuvent être adaptées aux besoins de chaque investisseur. Les produits structurés sont émis par les établissements financiers afin de s'adapter aux profils particuliers des investisseurs et pour répondre à leurs besoins spécifiques qui ne peuvent être satisfaits par les instruments financiers standards. En effet, ces produits permettent de fournir à l'investisseur des fonds avec de meilleurs profils, qui ne sont pas toujours directement disponibles sur le marché financier. Ils lui permettent aussi d'améliorer l'utilité de l'allocation de son portefeuille, de lui fournir un degré de protection du capital et de se couvrir contre les pertes potentielles. En outre, ils permettent à l'investisseur de profiter des hausses des actifs risqués, tout en n'étant exposés que partiellement aux baisses de marché.

Les produits structurés sont émis par des banques ou compagnies d'assurance et s'adressent à des investisseurs privés ou institutionnels. Ils sont commercialisés par l'intermédiaire des fonds de placement communs et des fonds d'assurance-vie. Ils peuvent être négociés sur une bourse organisée ou vendus directement par leur banque émettrice, qui cotera les cours acheteur et vendeur. Ces produits sont des combinaisons de produits dérivés et d'actifs financiers sous-jacents (Breuer et Perst, 2007). Ce type de produit est généralement une combinaison des titres à revenu fixe pour protéger le capital, et des options, des contrats à terme et d'autres dérivés, qui sont souvent basés sur les indices du marché, permettant de profiter de la croissance potentielle du marché. La composante dérivée est souvent une option (de vente ou d'achat) qui permet de fournir un certain profil de portefeuille spécifique à l'échéance. Ce type de produit permet d'avoir des positions complexes basés sur des options sans la nécessité d'accès au marché spécifique de ces options. Ils permettent d'investir dans une vaste gamme d'actifs sous-jacents (actions, taux d'intérêt, devises, indices, matières premières, etc.) et offrent des possibilités de rachat. Il existe une grande variété de ces produits, car un grand nombre de sous-jacents et d'options peuvent être introduits. La demande des produits structurés a rapidement augmenté dans le monde entier. Ils sont devenus assez populaires aux Etats-Unis dans les années 1980 et, par la suite, ils ont été introduits en Europe au milieu des années 1990. Un produit structuré est une sorte d'investissement à durée déterminée dont le versement dépend de la performance du sous-jacent. Il permet de bloquer l'argent pour une période déterminée et peut être conçu dans le but de procurer un certain revenu, une croissance ou les deux en même temps. Les produits structurés sont sophistiqués et peuvent présenter plus de risques qu'il ne semble. Ils peuvent donc fournir des solutions adaptées à une stratégie spécifique dans toutes les configurations du marché. Ils constituent un outil utile pour la gestion de portefeuille et le contrôle des risques. Cette sophistication est nécessaire pour répondre aux besoins spécifiques des investisseurs qui ont chacun leur propre profil d'investissement et leur propre connaissance du marché.

Pendant les périodes de baisse des marchés financiers et des fortes volatilités, la demande en faveur des produits structurés croît, et en particulier ceux qui comportent une clause de protection du

capital. C'est le but de l'assurance de portefeuille qui est conçue comme un instrument utilisé pour se protéger contre le risque de perte. En effet, l'assurance de portefeuille donne à l'investisseur la capacité de limiter le risque de la baisse tout en permettant une certaine participation aux marchés à la hausse. Elle permet à l'investisseur de récupérer, à l'échéance, un pourcentage donné de son capital initial, notamment en cas de chute des marchés. La valeur du portefeuille est déterminée en fonction de l'indice de référence. Alors, les principaux avantages des produits structurés dépendent du type du sous-jacent utilisé. Le profil du portefeuille optimal peut être déterminé à partir du problème du positionnement optimal du produit structuré et dépend essentiellement de l'aversion au risque de l'investisseur. Dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, chaque investisseur rationnel maximise son utilité espérée. Arrow (1977) a montré que l'assuré est neutre au risque et que la stratégie d'assurance optimale fournit une couverture complète. Des extensions concernant les stratégies d'assurance basées sur l'assouplissement des primes en présence d'une contrainte budgétaire supplémentaire ont été menées par Blazenko (1985), Cummins et Mahul (2004), Gollier (1987), Kaluszka (2005) et Zhou et Wu (2008). Toutefois, les investisseurs institutionnels par exemple peuvent exiger des contrats d'assurance plus complexes. Les deux principales stratégies d'assurance de portefeuille standard sont l'assurance de portefeuilles proportionnels constants (CPPI) et l'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI). Ces deux méthodes d'assurance sont les plus populaires.

La prise de décision face au risque et à l'incertitude dans le cadre de la gestion de portefeuille a fait l'objet de nombreuses études et demeure un sujet très important. La théorie de l'utilité espérée est un modèle standard pour analyser les décisions des investisseurs dans un cadre incertain. Elle présente l'hypothèse classique pour modéliser les choix des investisseurs et a été largement considérée par les économistes financiers comme une base solide de l'optimisation du portefeuille depuis l'article fondateur de Merton (1969) et ses nombreuses extensions dans le cadre du temps continu (voir par exemple Karatzas et al., 1986 ; Cox et Huang, 1989 ; Karatzas et Shreve, 1998 ; Campbell et Viceira, 2002 ; Prigent, 2007). L'optimisation de portefeuille, basée sur l'utilité espérée, dans le cadre dynamique a fait l'objet de plusieurs recherches. Cependant, malgré leur popularité, ces approches ne sont toujours cohérentes avec le comportement humain réel. Afin de mieux expliquer le comportement des assurés, plusieurs modèles de prise de décision, qui permettent de prendre en compte la psychologie des investisseurs, ont été proposés. Ces modèles sont basés sur des théories psychologiques, à savoir : les probabilités subjectives pondérées (RDEU, CPT), la comptabilité mentale, la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception.

Dans le cadre de l'optimisation du portefeuille structuré, Branger et Vrecko (2009) ont constaté que l'aversion aux pertes et la pondération des probabilités sont les deux caractéristiques de la CPT qui permettent d'expliquer l'attrait de l'investisseur pour les stratégies d'assurance de portefeuille. Ils ont montré que, lorsqu'une seule caractéristique de la CPT existe, l'assurance de portefeuille reste toujours attractive pour l'investisseur ayant une fonction d'utilité de type CPT, mais l'utilité dans la partie des gains, due à l'assurance de portefeuille, décroît significativement. De plus, Jin et Zhou (2008) ont examiné le problème d'optimisation de portefeuille assuré, où la valeur du portefeuille est donnée en fonction d'un Benchmark et ont étudié des situations où les probabilités sont modifiées. Leur solution est intéressante du fait que les gains et les pertes sont déterminés par le fait que le prix de l'actif risqué est au-dessus ou au-dessous du point de référence et du fait que le portefeuille optimal de l'investisseur est une combinaison de deux options digitales. En se basant sur les travaux de Jin et Zhou (2008), Ben Ameur et Prigent (2010) ont déterminé le positionnement optimal du portefeuille dans le cadre de la CPT. Ils ont constaté que la fonction de paiement du portefeuille optimal correspond à un portefeuille composé de 2 options digitales, dont la partie non constante correspond à la partie des gains et la partie constante correspond à la partie des pertes. Afin de déterminer le positionnement optimal du portefeuille dans le cadre de la RDEU, Ben Ameur et Prigent (2010) ont étendu les résultats de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2007). Leurs études expérimentales ont montré que la composition du portefeuille optimal dépend largement de l'aversion au risque de l'investisseur et de la volatilité de l'actif risqué : plus le paramètre d'aversion au risque et le paramètre de la volatilité sont élevés, plus le montant investi sur les actifs risqué est faible.

En pratique, l'ambiguïté est due typiquement à une certaine incertitude au niveau des valeurs des paramètres financiers et des probabilités dans le cadre économique (Ellsberg, 1961). La détermination du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté a été essentiellement conduite dans le cadre de la gestion standard de portefeuille «robuste». L'optimisation du portefeuille en présence de l'ambiguïté est également un sujet important dans le cadre de la gestion de portefeuille structuré, quoique très peu traité dans la littérature. Liu (2008) par exemple a intégré explicitement l'ambiguïté dans ses analyses et a étudié le portefeuille dynamique en temps continu, quand l'investisseur possède des informations incomplètes concernant la variation des rendements d'actifs au cours du temps. Il a examiné comment l'ambiguïté et les paramètres d'incertitude affectent la demande de couverture et la stratégie de sélection du portefeuille optimale. Les stratégies de couverture du portefeuille qu'il a proposées sont définies dans le cadre du temps continu. En ce qui concerne les stratégies statiques basées sur le positionnement initial en dérivés financiers, l'ambiguïté peut également être prise en compte. L'aversion au risque et l'aversion à l'ambiguïté caractérisent alors le profil du portefeuille optimal de l'investisseur qui peut également tenir compte de contraintes d'assurance et est basé fondamentalement sur des options. Ben Ameur et Prigent (2013) ont ainsi étudié le profil du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté en utilisant l'approche de Maccheroni et al. (2006). Ils ont notamment examiné le cas de la maximisation de l'utilité espérée de type CRRA avec un indice d'ambiguïté basé sur la log-entropie dans le cadre du positionnement du portefeuille optimal statique de Leland (1980) et de Brennan et Solanki (1981). De ce fait, l'étude du profil et du positionnement du portefeuille optimal dans un cadre multidimensionnel (plusieurs actifs risqués) présente une problématique qui n'a pas été traitée dans la littérature existante. Récemment, An et al. (2017) ont examiné la sélection des portefeuilles en présence des coûts de transaction et de l'ambiguïté concernant la prévision des rendements. Ils ont constaté que les investisseurs peu averses à l'ambiguïté s'orientent vers un portefeuille qui accorde moins de poids aux facteurs de prévision de rendement très volatils.

Mise à part la théorie de l'ambiguïté, qui présente un impact très important sur les choix des investisseurs dans le cadre de la gestion standard et structurée, la théorie du regret peut jouer également un rôle important dans le cadre de la gestion de portefeuille. En effet, le regret a un impact significatif au niveau de l'optimisation du portefeuille puisque l'investisseur est préoccupé par la performance des autres stratégies d'investissement possibles. La théorie du regret fait référence au regret ou à la réjouissance qu'un individu peut ressentir lorsqu'il obtient un résultat x au lieu d'un résultat y . Plus récemment, Solnik (2007) et Michenaud et Solnik (2008) ont étudié les décisions d'allocation d'actifs en présence du regret afin de déterminer le choix optimal de la couverture de change dans le cadre de l'optimisation de portefeuille statique. Solnik (2007) a montré que l'aversion au regret pousse l'investisseur à investir dans des actifs étrangers afin de réduire le regret potentiel. Dans leur article, Mhiri et Prigent (2010) ont étendu les résultats de Solnik (2007) et ont déterminé le rendement du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence du regret. Leur modèle est une extension du modèle d'allocation d'actifs de Leland (1980); Brennan et Solanki (1981); Carr et Madan (2001) et Prigent (2006). Mhiri et Prigent (2010) ont souligné l'impact du sentiment du regret/réjouissance sur la composition du portefeuille international. Diecidue et al. (2012); Nasiry et Popescu (2012) et Viefers et Strack (2014) se sont concentrés sur les applications dynamiques de la théorie du regret. Plusieurs chercheurs ont également développé des études qui utilisent soit la théorie du regret elle-même (Bell, 1982 et Loomes et Sugden, 1982) soit des extensions de la théorie du regret (voir par exemple Braun et Muermann, 2004; Barberis et al., 2006; Gollier et Salanié, 2006; Muermann et al., 2006; Michenaud et Solnik, 2008; Qin, 2015). Barberis et al. (2006) ont utilisé le concept du regret pour expliquer l'énigme de la participation au marché boursier. Braun et Muermann (2004) ont examiné les implications du regret sur la demande d'assurance. Ils ont montré qu'une personne aversive au regret se couvre différemment de la personne qui cherche à maximiser sa fonction d'utilité espérée standard. Ils ont montré que le regret permet à l'individu d'éviter les décisions extrêmes. En effet, ils ont constaté que le regret pousse l'individu à acheter plus (moins) de couverture d'assurance si l'assurance est relativement chère (bon marché) et à acheter plus (moins) d'actifs risqués si la prime de risque est relativement élevée (faible). Enfin, Qin (2015) a développé un modèle de la

théorie du regret et a examiné les effets du regret sur le comportement des investisseurs. Son modèle diffère de ceux des études précédentes dans la mesure où il prend en compte non seulement «le regret de l'action» (le regret d'avoir fait un mauvais investissement) mais aussi «le regret de l'inaction» (regret d'avoir raté une bonne opportunité).

En ce qui concerne la théorie de la déception, nous notons qu'elle a été appliquée en particulier au problème de la détermination des règles optimales de partage de risques entre les particuliers et les compagnies d'assurance. Depuis Borch (1962), de nombreux chercheurs ont étudié ce problème à partir des résultats d'Arrow (1974) (cf. Kaluszka et Okolewski, 2008). Ils portent sur l'optimalité de l'assurance déductible basée sur la théorie de l'utilité espérée en généralisant la contrainte de la prime comme une combinaison convexe de la valeur espérée et de l'indemnité de l'assurance. Huang et al. (2012) ont étudié l'optimalité du contrat d'assurance optimal sous l'angle de la théorie de la déception. Ils ont montré que lorsque les individus anticipent une déception, il existe deux types de contrat d'assurance optimal. Le premier type de contrat comprend une franchise et une coassurance au-dessus de la franchise. Ils ont constaté que le coût marginal égal à zéro est juste une condition suffisante, mais non nécessaire, pour qu'une franchise zéro soit exigible. Le second type n'a pas de franchise et l'assurance optimale commence avec une couverture complète pour les petits sinistres et comprend une coassurance au-dessus d'une valeur supérieure de la couverture complète. Les deux types de contrats optimaux pourraient impliquer une coassurance. Le taux de coassurance sera généralement augmentée (non affectée, diminuée) par la déception si la fonction de déception marginale augmente (constante, décroît). Ainsi Cheung et al. (2015) ont réexaminé les problèmes de prise de décision d'assurance optimale étudiés par Kaluszka et Okolewski (2008) et ont étudié la forme de la garantie d'assurance optimale sous les différentes théories de la déception (Bell, 1985 ; Loomes et Sugden, 1986 ; Gul, 1991 ; Cillo et Delquié, 2006). Ils ont montré que la garantie d'assurance reste optimale avec tous les modèles de la théorie de la déception. Quant à Artstein-Avidan et Dillenberger (2015), ils ont montré que les personnes déçues sont plus susceptibles d'acheter des contrats d'assurance dynamiques (par exemple, une assurance périodique). Cela s'explique par le fait que les investisseurs particuliers sont prêts à payer, en plus de la prime de risque, un bonus pour éviter d'être exposés à la résolution progressive de l'incertitude. Ainsi, Artstein-Avidan et Dillenberger (2015) ont montré que lorsque le coefficient d'aversion à la déception est très élevé, la prime payée pour la résolution progressive des situations de déception converge vers 0. Ceci présente un niveau qui permet à l'individu de maximiser son utilité espérée. Pour cette raison, il existe une valeur du coefficient d'aversion à la déception qui permet de maximiser la prime de résolution progressive.

Le problème d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion structurée en présence de l'aversion à la déception a été quant à lui relativement peu traité par les chercheurs. Notons cependant que, dans le cadre de l'assurance de portefeuille fondée sur la théorie de la déception, Lien et Wang (2001) ont examiné l'effet de l'aversion à la déception sur la stratégie de couverture avec des contrats à terme. Ils ont intégré une fonction de type CRRA dans le cadre de la théorie de l'aversion à la déception de Gul (1991) et ont montré que l'investisseur averse à la déception choisit une position à terme plus proche de la couverture avec une variance minimale qu'un investisseur moins averse à la déception. Ils ont également constaté que plus l'aversion au risque ou à la déception est élevée, plus le point de référence est bas et que le point de référence d'un individu déçu tend à être inférieur à celui d'un individu averse aux pertes. Par conséquent, l'investisseur averse à la déception a un comportement conservateur.

Notre travail de recherche s'inscrit dans le cadre général de la finance comportementale et tout particulièrement dans celui de l'optimisation de portefeuille basée sur des critères de décision allant au-delà de l'utilité espérée standard. En effet, cette thèse a en particulier pour objectif de traiter la problématique suivante : Quel est le positionnement du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté, notamment dans le cas multidimensionnel ? Quel est l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion à l'ambiguïté sur le profil du portefeuille optimal ? Comment le sentiment du regret/réjouissance peut-il changer la valeur du portefeuille optimal par rapport au cas de l'utilité espérée standard ? Quel est l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur l'allocation optimale du portefeuille structuré ? Enfin, quel est l'impact de l'aversion à la déception sur les pondérations optimales des actifs risqués au sein du portefeuille optimal standard et structuré ?

Pour répondre à ces questions, notre thèse est organisée en deux grandes parties :

- La première partie comporte deux chapitres et porte sur le passage de la théorie moderne à la théorie comportementale de la gestion de portefeuille. Le premier chapitre de cette partie est un chapitre introductif théorique où nous donnons un aperçu général sur les théories de la prise de décision en situation d'incertitude et sur les théories de gestion de portefeuille statique tant dans le cas de la finance classique que dans celui de la finance comportementale. En ce qui concerne les théories de la prise de décision, nous rappelons les principaux concepts et théories sur lesquels porte notre thèse. Nous présentons d'abord la théorie de l'utilité espérée classique de von Neumann et Morgenstern (1944) et ses axiomes. Nous exposons ensuite les critiques de la théorie de prise de décision classique à travers différents paradoxes (Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961 ; Friedman et Savage, 1948 ; Markowitz, 1952b) qui ont remis en cause la théorie de l'utilité espérée. Dans la deuxième section de ce chapitre, nous définissons chacune des approches alternatives à la théorie de l'utilité espérée, en particulier la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky (1979) qui a été par la suite étendue à la théorie des perspectives cumulées (CPT) par Kahneman et Tversky (1992). Cette théorie constitue une des bases fondamentales de la finance comportementale. En outre, nous décrivons de manière très précise les trois théories de la prise de décision qui sont à la base des articles portant sur la gestion de portefeuille élaborés dans le cadre de cette thèse, à savoir : la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de la déception.

Le deuxième chapitre de la première partie porte sur l'optimisation du portefeuille dans le cadre de la gestion de portefeuille statique dans la finance classique et la finance comportementale. Dans un premier temps, nous présentons le modèle de la gestion de portefeuille moderne, établi par Markowitz (1952), appelé l'approche «moyenne-variance». Nous appliquons les données de notre échantillon, qui porte sur les rendements estimés et annualisés de trois indices (*S&P500*, *Euro Stoxx 50* et *SSE Composite*) sur une période de 10 ans (du 1^{er} décembre 2007 jusqu'au 31 janvier 2018), sur les résultats de l'approche moyenne-variance en utilisant Matlab. Ceci nous permet d'établir la frontière efficiente et les caractéristiques (le rendement espéré, le risque et les pondérations des indices) du portefeuille efficient pour un niveau d'aversion au risque bien déterminé. Dans un second temps, nous étudions l'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale. Nous présentons un modèle d'optimisation de portefeuille selon la CPT (Bernard et Ghossoub, 2010). Nous étudions ensuite l'optimisation de portefeuille selon la comptabilité mentale, en nous basant sur le critère de type «Safety-First» (Roy, 1952). Cette théorie a été développée par la suite par Telser (1955) et Arzac et Bawa (1977). Nous présentons aussi la théorie SP/A (Lopes, 1987), basée sur le critère Safety-First, et la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000), qui est la combinaison de la théorie SP/A et de la théorie des perspectives cumulées. En outre, nous déterminons le positionnement optimal du portefeuille standard selon la comptabilité mentale en introduisant le modèle de Das et al. (2010). Ce modèle est une combinaison de la théorie moyenne-variance et de la théorie comportementale du portefeuille. Par la suite, nous déterminons le portefeuille optimal standard selon la théorie de l'ambiguïté en nous basant sur le problème d'optimisation robuste de Koeing et Tütüncü (2004), et nous comparons le portefeuille efficient classique et le portefeuille efficient robuste. Nous établissons par la suite un modèle d'optimisation de portefeuille robuste pour

trois cas différents : l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espéré des actifs ; l'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance des rendements des actifs et enfin l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espéré et la matrice variance-covariance des actifs. Pour chacun de ces trois cas, nous illustrons numériquement les solutions en appliquant notre échantillon et en prenant en compte l'aversion au risque de l'individu afin de déterminer les caractéristiques du portefeuille efficient robuste. Enfin, nous présentons certains modèles d'optimisation de portefeuille standard selon la théorie du regret et la théorie de déception.

- La deuxième partie de notre thèse porte sur la gestion de portefeuille structuré dans le cadre de la finance comportementale. Cette partie comporte quatre chapitres, permettant chacun d'étudier l'optimisation de portefeuille structuré dans un cadre bien déterminé. Le premier chapitre de cette partie est un chapitre théorique qui porte sur les généralités de la gestion structurée. Nous y présentons les principes essentiels de la gestion structurée et les différents enjeux autour des produits structurés. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons les deux stratégies d'assurance de portefeuille principales à savoir : la méthode OBPI ("Option Based Portfolio Insurance") de Leland et Rubinstein (1976) et la méthode CPPI ("Constant Proportion Portfolio Insurance") de Perold (1986). La troisième partie de ce chapitre est consacrée à la détermination du positionnement optimal du portefeuille selon la théorie de l'utilité espérée standard dans le cas sans contrainte (Brennan et Solanki, 1981) et dans le cas avec contrainte (Bertrand et Prigent, 2012). Dans la dernière partie de ce chapitre, nous déterminons le positionnement du portefeuille optimal selon la théorie des perspectives cumulées d'une part, et la fonction d'utilité de type RDEU d'autre part. Pour le cas de l'optimisation de portefeuille structuré selon la théorie des perspectives cumulées, nous passons en revue la littérature sur ce thème et présentons entre autres le modèle de Bertrand et Prigent (2012). Enfin, nous présentons le modèle de Ben Ameur et Prigent (2010) qui porte sur l'optimisation de portefeuille selon la fonction d'utilité du type RDEU.

Le deuxième chapitre de cette partie est consacré à l'optimisation de portefeuille en présence de l'ambiguïté¹. Dans ce chapitre, nous examinons le positionnement du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté dans le cas multidimensionnel. Nous montrons en particulier comment l'aversion à l'ambiguïté et les corrélations des actifs risqués impactent le profil optimal du portefeuille. Nous étendons le modèle de Ben Ameur et Prigent (2013) au cas multidimensionnel en tenant compte des corrélations entre les actifs. Nous étudions par la suite un exemple introductif permettant de déterminer le positionnement du portefeuille structuré en tenant compte de l'ambiguïté et en investissant essentiellement sur deux actifs risqués et sur leurs options de vente correspondantes dans le cadre buy-and-hold, dans trois cas différents : le cas où l'ambiguïté porte uniquement au niveau des tendances ; le cas où l'ambiguïté porte sur la tendance et de la volatilité des actifs et le cas où l'ambiguïté porte sur les corrélations entre les rendements des actifs. Cet exemple permet d'illustrer numériquement le résultat général qui met l'accent sur le rôle de l'aversion au risque et de l'aversion à l'ambiguïté. Ensuite, nous traitons le problème d'optimisation général afin de déterminer le profil et les caractéristiques du portefeuille optimal. Dans ce contexte, nous détaillons la modélisation du marché financier et le calcul de la probabilité neutre au risque. Par la suite, nous illustrons les résultats antérieurs pour une utilité espérée classique et une utilité avec une aversion à l'ambiguïté en nous basant sur le critère maxmin de Gilboa et Schmeidler (1989) dans un premier temps, et sur les préférences avec des a priori multiples de Hansen et Sargent (2001). La dernière partie est consacrée à des illustrations empiriques basées à la fois sur l'indice *S&P 500* et l'indice *Eurostoxx 50* pour deux périodes, à savoir «la crise financière 2008», et «une période standard», à savoir 2016. Dans cette partie, nous déterminons le profil du portefeuille optimal dans trois cas différents (ambiguïté au niveau des tendances ; ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités ; ambiguïté au niveau de la corrélation), en absence et en présence de l'entropie.

¹Ce chapitre a donné lieu à la rédaction d'un papier, intitulé "Optimal Portfolio Positioning under Ambiguity : Multidimensional Case", soumis pour publication.

Le troisième chapitre de la deuxième partie de la thèse porte sur le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion au regret². Dans ce chapitre, nous déterminons la solution optimale dans le cadre de la gestion de portefeuille structurée selon la théorie du regret pour un cas multidimensionnel. Nous montrons ainsi comment le sentiment du regret/réjouissance est susceptible de modifier la valeur du portefeuille optimal par rapport au cas de l'utilité espérée standard. Nous présentons dans un premier temps le modèle de Mhiri et Prigent (2007) qui permet de déterminer le profil du portefeuille optimal structuré selon la théorie du regret d'une manière générale dans le cadre unidimensionnel. Ensuite, nous déterminons le profil du portefeuille optimal général avec une fonction d'utilité du type regret/réjouissance dans le cas multidimensionnel, en proposant une extension des résultats antérieurs de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981) et Prigent (2006, 2007). Ainsi, nous présentons le profil et les caractéristiques du portefeuille optimal ainsi que le profil du portefeuille optimal assuré. La dernière partie de ce chapitre est dédiée à un exemple numérique qui permet d'illustrer numériquement les résultats théoriques de la section précédente dans le cas multidimensionnel. Dans ce cadre, nous présentons le marché financier sur lequel notre étude porte et la probabilité neutre au risque. Nous établissons ainsi un modèle permettant de déterminer le portefeuille optimal avec une fonction d'utilité espérée standard, d'une part, et la fonction d'utilité regret/réjouissance, d'autre part. Cet exemple permet d'illustrer le rôle de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur le choix du portefeuille optimal.

Le dernier chapitre de la thèse porte sur le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à la déception³. Dans ce chapitre, nous présentons d'abord le modèle fondamental de la déception de Loomes et Sugden (1986), qui est la base de notre étude. Ensuite, nous explorons le cas discret. En effet, nous déterminons l'allocation du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception. Pour ceci, nous étudions un exemple numérique pour le cas binomial (deux actifs risqués) et le cas Lognormal. Ensuite, nous développons un modèle, dans le cadre de la gestion structurée, permettant de déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction de l'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception pour le cas multidimensionnel. Notre modèle est une extension des résultats antérieurs portant sur la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec déception. Nos résultats théoriques sont finalement illustrés par un exemple numérique en fin de ce chapitre.

²Ce chapitre a donné lieu à la rédaction d'un papier, intitulé "Optimal Portfolio Positioning within Regret Theory : Multidimensional Case", soumis pour publication.

³Ce chapitre a donné lieu à la rédaction d'un papier, intitulé "Optimal Portfolio Positioning within Disappointment Theory : Multidimensional Case", soumis pour publication.

Première partie

De la théorie moderne à la théorie comportementale de la gestion de portefeuille

Introduction

La théorie du choix du consommateur dans des situations de risque et d'incertitude fait partie du domaine de la microéconomie. Le risque et l'incertitude sont parfois des termes substituables, mais leur signification n'est pas toujours facilement comprise. Knight (1921) a proposé dans son traité «Risk, Uncertainty and Profit» une distinction fondamentale entre le risque (la probabilité de survenance d'un événement connue) et l'incertitude (la probabilité de survenance d'un événement inconnue). La prise de décision en situation de risque et d'incertitude a été et continue d'être un sujet d'étude très important qui a fait l'objet de nombreux travaux empiriques afin de développer des modèles de décision compatibles avec les comportements observés. De nombreux modèles de prise de décisions qui s'appuient sur la rationalité probabiliste de l'individu existent dans la littérature. Fermat et Pascal sont les premiers à avoir introduit les notions de probabilité et d'espérance mathématique au milieu du XVII^e siècle. Leurs découvertes ont permis de rationaliser certains choix. Cependant, elles n'ont pas permis de rendre compte de certains comportements. Ce domaine a été exploré par la suite par Bernoulli (1738), qui a initié le concept d'utilité espérée permettant de mieux représenter certains comportements. Cette théorie, qui est basée sur le calcul des probabilités et qui correspond à une attitude uniforme vis à vis du risque (fonction d'utilité concave), a été développée par une axiomatisation des choix par von Neumann et Morgenstern en 1944.

Le modèle le plus utilisé pour expliquer les choix risqués et incertains est en effet celui de l'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern (1944). La théorie d'utilité espérée est un cadre standard pour analyser les décisions des individus dans un univers incertain. Cette théorie est basée sur l'hypothèse d'un «homo-œconomicus», dont le comportement est régi par l'intérêt personnel et la prise de décision rationnelle. Elle permet de formaliser l'attitude de l'individu vis-à-vis du risque et prend en compte l'aversion au risque de l'individu à travers une fonction d'utilité, traduite par la concavité de cette fonction. Plus l'aversion au risque de l'individu est élevée, plus la concavité de cette fonction est prononcée. Cependant, si la fonction d'utilité est linéaire l'individu est neutre au risque et si elle est convexe, l'individu est réputé aimer le risque. Ce modèle est très utilisé par les économistes depuis des décennies. Cependant, malgré sa popularité, cette théorie présente certains problèmes qui la rendent incohérente avec le comportement humain réel.

La théorie d'utilité espérée a alors été remise en cause par plusieurs chercheurs (à savoir : Friedman et Savage, 1948 ; Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961 ; Markowitz, 1952b) qui ont prouvé que les axiomes de la théorie d'utilité espérée (axiome d'indépendance) ne sont pas cohérents avec le comportement humain réel. En effet, Friedman et Savage (1948) n'étaient pas d'accord avec cette attitude uniforme vis-à-vis du risque et ont souligné que la majorité des investisseurs achètent simultanément une assurance et une loterie. Ils ont proposé une fonction d'utilité avec une partie concave (achat d'assurance) et une partie convexe (achat de loterie). Ainsi, Markowitz (1952b) a montré que lorsque l'individu est confronté à des gains, il manifeste un comportement inverse à celui face aux pertes. Il a souligné que la courbe chute d'une manière très rapide, dans la partie des pertes, et augmente d'une manière relativement moins rapide dans la partie des gains. En outre, la théorie d'utilité espérée a connu plusieurs critiques suite au développement de la recherche en psychologie, au niveau des jugements et de la prise de décision. En effet, plusieurs preuves expérimentales, à savoir celles de Kahneman et Tversky (1979, 1992), ont violé les axiomes conventionnels d'utilité espérée. Ces violations ont montré que certains facteurs, qui sont susceptibles d'influencer les choix des individus, sont négligés ou mal spécifiés par la théorie d'utilité espérée. Ceci a favorisé l'apparition de nouvelles approches alternatives à la théorie de prise de décision classique permettant d'améliorer le processus de prise de décision en se basant notamment sur la déformation des probabilités objectives, à savoir : la théorie d'utilité dépendante du rang (Quiggin, 1982 ; Segal, 1987 ; Yaari, 1987) ; la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979) ; la théorie des perspectives cumulées (CPT) (Tversky et Kahneman, 1992)... La théorie des perspectives cumulées est une théorie alternative de la théorie d'utilité espérée. C'est une des théories les plus importantes pour décrire le processus de prise de décision en avenir risqué et incertain. Cette théorie est une théorie fondatrice de la finance comportementale. En effet, l'émergence de la finance

comportementale a montré que le comportement des investisseurs est non conforme au principe de la maximisation d'utilité espérée et que la théorie des perspectives rend compte de certains aspects émotionnels et cognitifs des individus.

Au cours des dernières décennies, avec l'évolution des marchés financiers, la notion du risque est devenue de plus en plus importante au fil des années, en particulier après la crise financière «des subprimes» en 2008, à la suite de laquelle les marchés financiers mondiaux ont été confrontés à une succession de chocs financiers rapides et violents. Les conséquences néfastes que les marchés financiers ont connu, suite à cette crise, ont changé les comportements des investisseurs et ont mis en cause la théorie de la finance classique, basée sur l'hypothèse de la rationalité du choix de l'investisseur. Ce changement a donné naissance à un nouveau courant de recherche, dans le monde de l'économie, début des années 2000, appelée «économie comportementale», dont la finance comportementale est une composante. Cette nouvelle science permet de prendre en compte l'importance des émotions et des sentiments de l'individu dans ses choix. Elle est considérée comme une combinaison entre la psychologie et l'économie. Elle est basée essentiellement sur la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979). Cette dernière a été développée par la suite par Kahneman et Tversky (1992) pour donner naissance à «la théorie des perspectives cumulées». Elle est considérée comme une approche pionnière de la finance comportementale. Kahneman et Tversky (1992) ont montré que les comportements des individus contredisent les principes de la théorie d'utilité espérée, qui suppose que l'individu est uniformément averse au risque et qu'il est capable d'évaluer les probabilités d'une manière objective, quand il fait face à des incertitudes. La théorie des perspectives cumulées suppose que les individus surpondèrent ou sous-pondèrent les vraies probabilités et que les pertes ont un effet psychologique plus important sur les investisseurs que les gains d'un même montant.

La recherche dans le cadre de la finance comportementale a pris de l'ampleur à partir des années 2000. Ce nouveau courant de recherche a vu le jour avec des psychologues cognitifs qui ont étudié les jugements des individus dans le cadre de la prise de décision et des économistes expérimentaux qui ont testé des modèles économiques en laboratoire. Ils ont montré que les biais cognitifs (à savoir : la comptabilité mentale, l'aversion aux pertes, l'excès de confiance. . .) et les heuristiques sont très importants dans le processus de prise de décision. Cependant, plusieurs autres approches psychologiques ont marqué ce domaine par des études expérimentales et des recherches approfondies dans le cadre de la prise de décision. Parmi ces approches, nous avons choisi de travailler sur trois théories qui ont largement influencé les choix des investisseurs dans le cadre d'allocation d'actifs, à savoir : la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception.

Cette partie est composée de deux chapitres. Le premier chapitre porte sur les théories de la prise de décision. Dans ce chapitre, nous étudions dans un premier temps la théorie de la prise de décision classique, appelée «la théorie d'utilité espérée» de von Neumann et Morgenstern (1944) et dans un second temps, nous présentons certaines théories de la prise de décision dans le cadre de la finance comportementale, à savoir : la théorie des perspectives cumulées, la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception. Quant au deuxième chapitre de cette partie, il porte sur l'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance moderne et dans le cadre de la finance comportementale. Dans ce chapitre, nous déterminons le portefeuille efficient selon l'approche moderne et selon les approches comportementales.

Généralités sur les théories de la prise de décision

1. La théorie de l'utilité espérée

Bernoulli (1738) a introduit la notion de l'utilité espérée afin de résoudre le paradoxe de St. Petersburg (1713), qui suppose que l'investisseur est prêt à investir des sommes très importantes pour participer à un jeu de hasard. Ceci semble être irréaliste pour Bernoulli (1738), qui a proposé de transformer les gains monétaires en une fonction d'utilité qui permet de mieux représenter la satisfaction de l'individu. Cette fonction d'utilité est une fonction croissante et concave. Dans ses travaux, Bernoulli (1738) a utilisé la fonction logarithmique du type :

$$U(x) = \alpha \log(x).$$

D'une manière générale, selon Bernoulli (1738), l'évaluation d'une loterie par l'investisseur prend la forme suivante :

$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)U(x_i). \quad (1.1)$$

où X est une loterie, $p(x_i)$ est la probabilité d'occurrence du résultat $x_i \in X$ et $U : X \rightarrow R$ est la fonction d'utilité. Cette représentation permet d'évaluer la loterie X au moyen de l'espérance d'utilité des résultats engendrés par cette loterie.

1.1. Présentation de la théorie de l'utilité espérée. En 1944, von Neumann et Morgenstern (VNM) ont développé, dans leur ouvrage «Theory of Games and Economic Behaviour», la théorie de l'utilité espérée, qui a pour objectif premier de représenter les préférences de l'investisseur sous la forme d'une fonctionnelle à valeurs dans les réels (on parle alors de représentation cardinale des préférences). Cette dernière doit satisfaire certaines propriétés bien définies liées à l'axiomatique portant sur les préférences. Cette théorie permet de modéliser le comportement de l'individu dans des situations risquées et incertaines.

Considérons une loterie $X \in L$ à n résultats définie par le vecteur $X = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$; où L est l'ensemble de loteries possibles; x_i représente le paiement de l'événement i ; p_i est la probabilité d'occurrence de l'événement i tels que $\forall 1 \leq i \leq n, p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$. La formalisation du comportement de l'investisseur rationnel repose sur un ensemble d'axiomes qui portent sur la relation binaire de préférence \succsim :

AXIOM 1. Axiome de comparabilité (dit encore de complétude) : L'individu peut toujours établir une comparaison entre les loteries disponibles : soit $X_1 \in L$ et $X_2 \in L$; l'investisseur peut préférer X_1 à X_2 ($X_1 \succ X_2$); préférer X_2 à X_1 ($X_2 \succ X_1$) ou être indifférent entre X_1 et X_2 ($X_1 \sim X_2$);

AXIOM 2. Axiome de transitivité (ou de cohérence) : Soit $X_1 \in L; X_2 \in L$ et $X_3 \in L$ trois loteries. Alors si $X_1 \succ X_2$ et $X_2 \succ X_3$, on a nécessairement $X_1 \succ X_3$;

AXIOM 3. Axiome de continuité : Soit $X_1 \in L, X_2 \in L$ et $X_3 \in L$ trois loteries telles que $X_1 \succ X_2$ et $X_2 \succ X_3$. Alors il existe un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que : $X_2 \sim \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_3$. Cet axiome entraîne l'existence d'une fonction d'utilité $U : L \rightarrow R$ qui permet de vérifier : $X_1 \succ X_2 \iff U(X_1) \geq U(X_2)$. Cet axiome permet de déduire que des petites modifications au niveau des probabilités de survenance des événements ne changent pas l'ordre de préférence de l'individu.

AXIOME 4. Axiome d'indépendance : Soit $X_1 \in L$, $X_2 \in L$ et $X_3 \in L$ trois loteries et $\alpha \in [0, 1]$, tel que $X_1 \succsim X_2$. Alors on a toujours $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_3 \succsim \alpha X_2 + (1-\alpha)X_3$. Ceci montre que l'introduction d'une nouvelle loterie à un ensemble de loteries existant n'influence pas les préférences de l'individu.

En se basant sur les axiomes cités ci-dessus, von Neumann et Morgenstern (1944) ont établi un théorème qui permet de caractériser le principe de l'utilité espérée.

THÉORÈME 1. Soit une relation de préférence \succsim , appliquée sur l'ensemble L , qui satisfait les axiomes de continuité et d'indépendance. Alors cette relation de préférence peut être représentée par une fonction linéaire par rapport aux probabilités d'occurrence des événements risqués, telle qu'il existe une fonction d'utilité $U : L \rightarrow \mathbb{R}$, pour toutes les loteries $X_1 = \{(x_1, p_1^1), \dots, (x_n, p_n^1)\}$ et $X_2 = \{(x_1, p_1^2), \dots, (x_n, p_n^2)\}$, on a :

$$X_1 \succsim X_2 \iff \sum_{i=1}^m U(x_i)p_i^1 \geq \sum_{i=1}^m U(x_i)p_i^2.$$

A partir de ce théorème, VNM (1944) ont montré que l'utilité de chaque loterie peut être représentée par une fonction d'utilité linéaire par rapport aux probabilités d'occurrence des événements, sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)U(x_i).$$

Ainsi, cette théorie montre que l'individu rationnel choisit la loterie qui lui présente l'utilité espérée la plus élevée.

1.2. Les critiques de la théorie d'utilité espérée standard. La théorie d'utilité espérée standard a été largement utilisée par de nombreux chercheurs dans le cadre de la prise de décision. Cependant, cette théorie a fait l'objet de plusieurs remises en cause. En effet, de nombreux auteurs comme Allais (1953) et Ellsberg (1961) ont montré que le comportement des agents est non-conforme aux axiomes de cette théorie, et tout particulièrement l'axiome d'indépendance.

1.2.1. Le paradoxe d'Allais (1953). Dans son article de 1953, Allais a mis en évidence expérimentalement des situations dans lesquelles les individus ne font pas des choix cohérents avec ce qu'ils devraient faire si leurs préférences vérifiaient les axiomes de base du théorème de von Neumann et Morgenstern (1944). En effet, Allais (1953) a montré la violation de l'axiome d'indépendance de la théorie d'utilité espérée. Allais (1953) a montré que le comportement réel des individus n'est pas cohérent avec la théorie de l'utilité espérée. Il s'agit d'une violation de l'axiome d'indépendance. Ceci est dû au principe de regret qui n'est pas cohérent avec le principe de la théorie de l'utilité espérée (Loomes et Sudgen, 1982). D'après ses expériences expérimentales, Allais (1953) a constaté que les individus sont prêts à payer une prime de risque pour avoir l'alternative sûre et éviter la prise de risque. Il a démontré que lorsque les différences entre les probabilités des gains et des pertes associées aux différentes loteries possibles sont faibles, les individus ont tendance à ignorer les probabilités et à baser leurs choix sur l'utilité espérée.

1.2.2. Le paradoxe d'Ellsberg (1961). Ellsberg contredit les théoriciens des choix rationnels en montrant que les individus ne réagissent pas de la même façon face à des probabilités objectives et subjectives. En effet, certaines personnes ont tendance à éviter les situations ambiguës et préfèrent les situations non ambiguës. En outre, en 1961, Ellsberg a défini le comportement d'aversion à l'ambiguïté. D'après ses expériences expérimentales, Ellsberg (1961) a montré que les individus refusent les situations ambiguës. En d'autres termes, il a constaté que les individus préfèrent parier dans un scénario où les probabilités d'occurrence des différentes alternatives possibles sont connues. Ainsi, plusieurs chercheurs ont remis en question la théorie de l'utilité espérée classique et ont présenté plusieurs approches alternatives liées soit à la déformation des probabilités, soit à la déformation de l'utilité espérée.

1.2.3. *Le paradoxe de Friedman et Savage (1948)*. Friedman et Savage (1948) ont développé une fonction d'utilité modélisant le comportement des individus dans le cadre incertain. D'après leurs études expérimentales, ils ont constaté qu'il y a une dichotomie entre les individus qui achètent des assurances et les individus qui achètent des loteries. En effet, la plupart des individus achètent simultanément une assurance et une loterie. Ceci permet de constater que la plupart des investisseurs sont à la fois averses et preneurs de risque. Friedman et Savage (1948) ont proposé une courbe d'utilité qui décrit les attitudes des individus vis-à-vis du risque dans les différents groupes socio-économiques. Cette courbe décrit le comportement des investisseurs qui achètent une assurance et qui participent à un jeu de hasard simultanément. La courbe ¹est composée de 3 parties : 2 courbes concaves et une courbe convexe, de telle sorte que la courbe convexe fait la liaison entre les deux courbes concaves. Cette courbe d'utilité est tracée dans l'espace (richesse, utilité) comme suit :

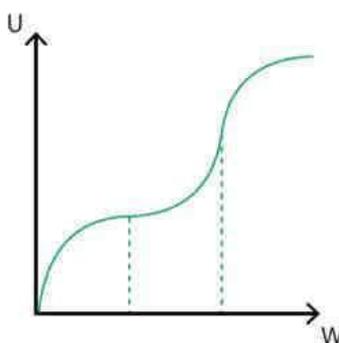


FIG. 1. Fonction d'utilité de Friedman et Savage (1948)

Chaque partie de la courbe correspond à une classe socio-économique donnée : la première partie de cette courbe est réservée pour les investisseurs à faible richesse ; la deuxième partie de la courbe est réservée aux individus qui possèdent une richesse intermédiaire et la troisième partie représente les individus à richesse élevée. Cependant, Friedman et Savage (1948) ont constaté beaucoup de différences entre les personnes, même dans le même groupe socio-économique. Certains sont des preneurs de risque, tandis que des autres évitent le risque. Friedman et Savage (1948) ont affirmé que la courbe décrit les attitudes de la majorité des groupes et que les individus dans le groupe à richesse moyenne sont prêts à prendre des risques pour améliorer leur richesse actuelle. Cependant, l'individu à faible richesse (aversion au risque) ne veut pas prendre de risque et préfère garder le niveau de sa richesse initiale. Ces investisseurs se contentent d'acheter des assurances pour se protéger contre les pertes potentielles.

1.2.4. *Customary Wealth Theory de Markowitz (1952b)*. Markowitz, étudiant de Milton Friedman, a critiqué la fonction d'utilité de Friedman et Savage (1948). Il a proposé une fonction d'utilité avec trois points de référence, basée sur un niveau de référence au lieu des valeurs absolues. Cette fonction d'utilité² est illustrée par la figure 2.

Cette courbe d'utilité est monotone, croissante et bornée, d'abord concave, ensuite convexe, après concave et enfin convexe, tel que $|U(-W)| > U(W)$ pour $x > 0$. Le deuxième point de référence $x = 0$ constitue l'origine du repère et représente le niveau de la richesse à l'instant 0. Les valeurs de richesse supérieures à la richesse actuelle présentent la partie des gains. Tandis que la partie où les valeurs de la richesse sont inférieures à la valeur de la richesse actuelle, présente la partie des pertes. A partir de ses études empiriques, Markowitz (1952b) a constaté que l'individu n'a pas la même attitude

¹Extrait du site <http://www.policonomics.com/critiques-to-expected-utility-theory/>

²Voir : Markowitz H. (1952b). The Utility of Wealth. *Journal of Political Economy*, 2, 60, 154.

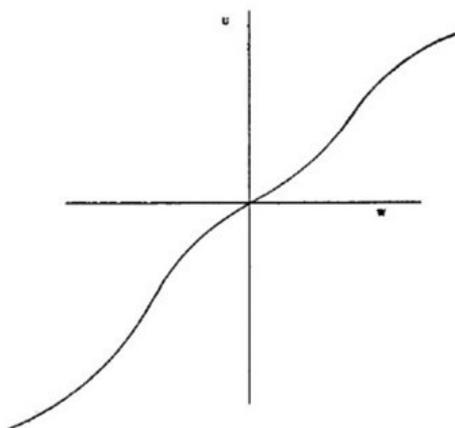


FIG. 2. Fonction d'utilité de Markowitz (1952b)

vis-à-vis des gains et des pertes. Quant au premier point d'inflexion, il est situé dans la partie des pertes. Ce point d'inflexion permet de lier la partie de la courbe concave avec la courbe convexe. En effet, l'individu ne prend le risque qu'à partir d'un certain niveau de pertes. Pour des faibles valeurs de perte, l'individu est averse au risque et ne veut pas prendre le risque (la courbe concave dans la partie des pertes). Cependant, cet individu est prêt à prendre du risque pour de grandes valeurs de perte (courbe convexe dans la partie des pertes). En outre, Markowitz (1952b) a démontré que lorsque l'individu est confronté à des gains, il manifeste un comportement inverse à celui face aux pertes. En effet, l'individu est prêt à prendre un risque pour un niveau de gain bien déterminé. Au-delà de ce niveau, l'individu ne veut plus prendre le risque. En d'autres termes, l'individu est prêt à prendre un risque pour de faibles valeurs de gains. Cette attitude est représentée par la courbe convexe dans la partie des gains. Tandis que pour les grandes valeurs de gains, l'individu est averse au risque. Cette aversion au risque est représentée par la courbe concave dans la partie des gains. La liaison entre ces deux courbes, convexe et concave, est faite par le troisième point d'inflexion. Markowitz (1952b) a souligné que la courbe chute d'une manière très rapide, dans la partie des pertes, et augmente d'une manière relativement moins rapide dans la partie des gains. Ceci peut s'expliquer par les différentes attitudes que l'individu manifeste vis-à-vis des pertes et des gains.

2. Des approches alternatives à la théorie de l'utilité espérée : Utilité non-espérée

Jusqu'aux années 1970, les économistes se sont concentrés sur la rationalité des homo-economicus. En effet, la théorie de l'utilité espérée était la plus importante utilisée dans le cadre de choix en présence du risque et de l'incertitude. Cependant, depuis sa création, cette théorie était toujours assujettie à des développements théoriques et empiriques qui ont conduit à la violation des axiomes, notamment l'axiome d'indépendance (les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg) et à l'apparition de nouvelles approches alternatives. Bien que la fonction de l'utilité espérée aide les individus à comprendre le monde réel, il est important de rappeler que cette fonction n'est qu'une simplification de celui-ci. En effet, plusieurs économistes et psychologues ont montré que les comportements des individus ne sont pas nécessairement conformes à la théorie de l'utilité espérée et que la théorie de l'utilité espérée ne reflète pas complètement la façon dont les individus interagissent dans le monde réel. Ainsi, plusieurs preuves expérimentales dont celle de Kahneman et Tversky (1979) ont violé les axiomes conventionnels de l'utilité espérée. Ces violations indiquent que plusieurs facteurs qui sont susceptibles d'influencer les choix des individus sont négligés ou mal spécifiés par la théorie conventionnelle. Dans ce contexte, de nouvelles approches ont été développées pour améliorer le processus de prise de décision en se basant notamment sur la déformation des probabilités objectives, à savoir : la théorie de l'utilité pondérée (Chew et MacCrimmon, 1979; Chew, 1983); la théorie de l'utilité dépendante du rang (Quiggin, 1982; Segal, 1987; Yaari, 1987); l'utilité espérée implicite (Chew, 1982; Dekel, 1986); la théorie des

perspectives (Kahneman et Tversky, 1979) ; la théorie des perspectives cumulées (CPT) (Kahneman et Tversky, 1992) et la théorie SP/A (Lopes, 1987).

2.1. La théorie des perspectives (Prospect theory) (Kahneman et Tversky, 1979). La théorie des perspectives est une théorie alternative à la théorie de l'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern (1944). Elle est une des premières à avoir intégré le comportement irrationnel de l'individu d'une manière empirique. Cette théorie est l'une des plus importantes pour décrire le processus de prise de décision en avenir incertain. La théorie des perspectives est une théorie fondatrice de la finance comportementale. Dans le cadre de la théorie des perspectives, Kahneman et Tversky (1979) ont déterminé la satisfaction de l'individu par la variation du rendement final par rapport à un point de référence et non pas par une richesse finale. Les phases de la prise de la décision suggérées par Kahneman et Tversky sont résumées dans la figure ci-dessous³ :



FIG. 3. Processus de prise de décision selon la théorie des perspectives

Kahneman et Tversky (1979) supposent que le processus de choix est divisé en deux phases : une phase d'édition et une phase d'évaluation. La phase d'édition permet d'organiser et de reformuler les différentes alternatives afin de simplifier l'évaluation de la phase ultérieure. Cette phase consiste à appliquer des opérations qui permettent de transformer les probabilités des rendements associées aux différentes perspectives. La première opération de cette phase est le codage : l'investisseur définit le résultat comme un gain ou une perte en se basant sur un point de référence. La deuxième opération est la combinaison : cette étape consiste à simplifier les perspectives en combinant les probabilités associées au même résultat. La troisième opération est la séparation : il s'agit de séparer les composantes non risquées des perspectives des composantes risquées. Dans la deuxième phase, les perspectives éditées seront évaluées et la perspective qui présente la plus grande valeur sera retenue. En effet, Kahneman et Tversky (1979) ont développé un modèle spécifique à l'évaluation et au choix des perspectives éditées.

En outre, Kahneman et Tversky (1979) ont proposé une fonction de valeur définie par les variations de la richesse finale par rapport au point de référence. Ils supposent que la fonction de valeur est normalement concave pour les variations de richesse supérieures au point de référence ($V''(x) < 0$ pour $x > 0$) et convexe pour les variations de richesse inférieures au point de référence ($V''(x) > 0$ pour $x < 0$), c'est-à-dire que l'investisseur est averse au risque dans la partie des gains et preneur de risque dans la partie des pertes. Ces deux hypothèses, concernant la forme de la fonction de valeur, sont basées sur les réactions des investisseurs vis-à-vis des gains et des pertes dans un cadre risqué.

³Source : Asgary A., Levy J. (2009). A review of the implications of prospect theory for natural hazards and disaster planning. *International Journal of Environmental Research*, 3, 3, 383.

En outre, Kahneman et Tversky (1979) ont constaté que «la douleur sentimentale» provoquée par la perte pour un montant donné est beaucoup plus importante que le sentiment de joie évoqué par le gain d'un même montant. Ceci permet d'expliquer l'asymétrie au niveau des perceptions des gains et des pertes. En d'autres termes, ils ont montré que la fonction de valeur est plus accentuée dans la partie des pertes (plus profonde). Graphiquement, cette courbe⁴ prend la forme en «S», ce qui traduit une aversion aux choix risqués dans la zone des gains et une recherche des choix risqués dans la zone des pertes. Elle est représentée par le graphique 4 :

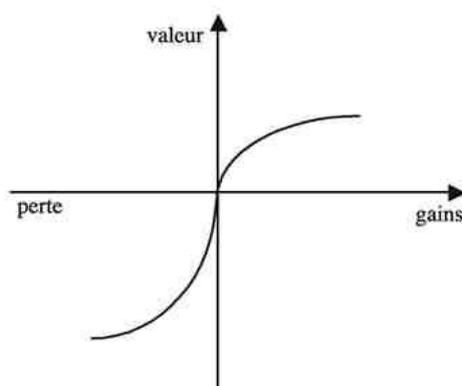


FIG. 4. Fonction d'utilité de Kahneman et Tversky (1979)

2.1.1. *La fonction de pondération.* Dans le cadre d'utilité non linéaire, les probabilités sont remplacées par des poids. Soit une loterie X à n résultats, telle que : $(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$. Cette loterie peut être évaluée selon :

$$\sum_{i=1}^n U(x_i)q_i,$$

où q_i représente le poids du rendement i et U est la fonction d'utilité. Dans ce cadre, les poids accordés aux différents résultats sont tous positifs et leur somme est égale à 1. Le poids q_i dépend de la probabilité p_i et peut s'écrire sous la forme suivante : $q_i = w(p_i)$ où w est une fonction de pondération des probabilités. Ceci permet d'écrire finalement la valeur de la loterie comme suit :

$$\sum_{i=1}^n U(x_i)w(p_i).$$

Cette fonction correspond à la fonction d'utilité espérée standard quand $w(p_i) = p_i$. Plusieurs fonctions de pondération ont été proposées. D'après leur expérience, Kahneman et Tversky (1979) ont constaté que les résultats dont la valeur est identique, mais n'ont pas le même rang, n'auront pas le même poids : les poids accordés aux valeurs extrêmes sont plus importants que ceux accordés aux valeurs intermédiaires.

2.1.2. *La théorie des perspectives cumulées (Cumulative Prospect Theory : CPT).* Le développement de la théorie des perspectives a suscité l'intérêt de plusieurs praticiens et chercheurs pour appliquer cette théorie dans plusieurs domaines. Toutefois, cette théorie a été critiquée suite à la présence de deux problèmes. Elle n'est pas applicable pour des perspectives ayant un grand nombre de réalisations. En plus, elle ne satisfait pas toujours la dominance stochastique. Pour résoudre ces

⁴Extrait du site <http://www.cairn.info/l-incertitude-dans-les-theories-economiques-9782707138514-page-56.htm>

problèmes, Kahneman et Tversky ont développé en 1992 une nouvelle version de la théorie des perspectives qui s'applique à n'importe quel nombre de perspectives risquées ou incertaines : c'est la théorie des perspectives cumulées (CPT).

Kahneman et Tversky (1992) ont mené des études empiriques focalisées sur l'attitude de l'investisseur face au risque. Ils ont constaté que : (1) l'individu évalue une loterie par rapport aux variations de sa richesse et non pas par rapport au niveau absolu de la richesse atteinte ; (2) la perte d'un montant a un effet psychologique sur le bien-être des individus plus que le gain d'un montant équivalent ; (3) l'individu a tendance à surpondérer les événements dont la probabilité de réalisation est faible et à sous-pondérer les événements dont la probabilité de survenance est moyenne ; (4) l'individu est un preneur de risque dans la partie des pertes et est averse au risque dans la partie des gains⁵. Ces résultats ont permis à Kahneman et Tversky (1992) d'instaurer la CPT. Cette théorie est notamment basée sur la transformation des probabilités des résultats selon le modèle de l'utilité espérée dépendante du rang (RDEU) de Quiggin (1982) et l'utilisation des fonctions cumulées différentes pour les gains et les pertes.

Soit une loterie X à n résultats positifs et négatifs. Cette loterie est définie par :

$$X = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n).$$

Supposant que cette loterie génère m résultats négatifs et $(n - m)$ résultats positifs, tel que :

$$x_1 < \dots < x_m = 0 < x_{m+1} \dots < x_n.$$

Ces deux types de résultats sont traités asymétriquement dans le cadre de la CPT. La fonction d'évaluation d'un individu dans le cadre de la CPT est donnée par :

$$V(x) = V(x^+) + V(x^-),$$

où $x^+ = \max(x, 0)$; $x^- = \max(-x, 0)$; $V(x^+) = \sum_{i=m+1}^n \pi^+ V(x_i)$ et $V(x^-) = \sum_{i=1}^m \pi^- V(x_i)$.

La fonction de valeur V est similaire à la fonction d'utilité dans le cadre de la théorie d'utilité espérée ; π_i^+ et π_i^- présentent les poids des résultats positifs et négatifs respectivement. La fonction V est concave du côté des gains et convexe du côté des pertes. Dans ce cadre, les poids sont déterminés par rapport aux fonctions des pondérations w^+ et w^- , tels que :

$$\pi_n^+ = w^+(p_n) \text{ et } \pi_i^+ = w^+\left(\sum_{j=i}^n p_j\right) - w^+\left(\sum_{j=i+1}^n p_j\right) \text{ pour } m \leq i < n;$$

$$\pi_1^- = w^-(p_1) \text{ et } \pi_i^- = w^-\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) - w^-\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) \text{ pour } 2 \leq i < m.$$

La fonction de pondération w vérifie $w^+(1) = w^-(1) = 1$ et $w^+(0) = w^-(0) = 0$.

Un exemple fondamental de fonction de pondération, définie séparément pour les gains et les pertes, est donné par :

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}} \text{ et } w^-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{1/\delta}}.$$

Il est illustré par la figure 5⁶.

⁵Broihanne M.-H., Merli M., Roger P. (2004). Finance comportementale. *Economica, Gestion*, 105.

⁶Voir : Kahneman D., Tversky A. (1992). Advances in Prospect Theory : Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 313.

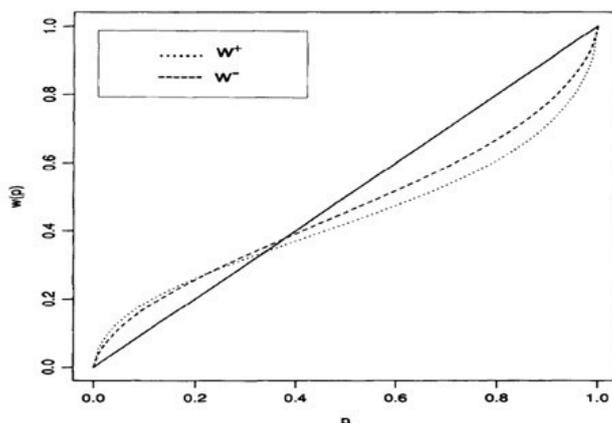


FIG. 5. Fonction de pondération pour les gains et les pertes

La fonction d'évaluation de la CPT peut prendre plusieurs formes. Parmi ces formes, la forme la plus utilisée est la suivante

$$v(x_i) = \begin{cases} (x_i - x^*)^\alpha & \text{si } x_i \geq x^* \\ -\lambda(x^* - x_i)^\beta & \text{sinon} \end{cases},$$

où x^* est le niveau de la richesse de référence. Pour les applications en finance, la valeur de x^* est généralement égale au taux du rendement sans risque et λ représente l'indice d'aversion aux pertes qui est supérieur à 1. Afin de simplifier cette équation, des études récentes ont supposé que $\lambda = \beta = 1$. Cette simplification permet à la fonction $v(x)$ de devenir une fonction linéaire par morceaux (Barberis et al., 2001). Pour des valeurs données des poids π_i , la valeur des perspectives cumulées est donnée par :

$$CPV = \sum_{i=1}^n \pi_i \cdot v(x_i).$$

La fonction d'évaluation de la CPT est illustrée par la figure 6.

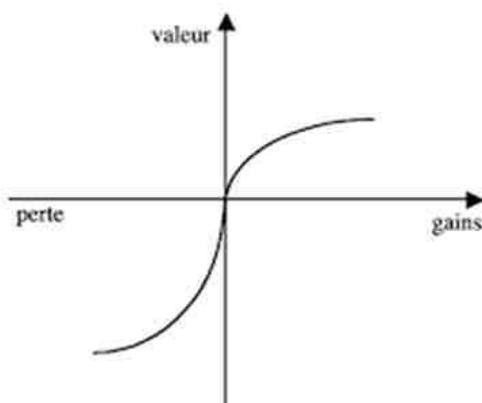


FIG. 6. Fonction d'évaluation de la CPT

La fonction CPT est concave dans la partie des gains ($x \geq x^*$) et convexe dans la partie des pertes ($x < x^*$). Cependant, la pente de la courbe de la partie des pertes est plus forte que celle de la courbe concave. Cette théorie a été largement utilisée dans le cadre de la gestion du portefeuille comportemental (Shefrin et Statman, 2000; Berkelaar et al., 2004; Jin et Zhou, 2008; Hens et Rieger, 2009; Sung et al., 2011; Dichtl et Drobetz, 2011).

2.1.3. *La théorie d'utilité espérée dépendante du rang (RDEU).* Quiggin (1982) a introduit la théorie d'utilité espérée dépendante du rang (RDEU). La dépendance du rang suppose que le poids accordé par un individu à un résultat donné dépend de la probabilité du résultat et de son attrait par rapport aux autres résultats. Comme les autres théories de l'utilité non-espérée, la théorie RDEU permet d'avoir des pondérations des probabilités non linéaires. D'après ses expériences, Quiggin (1982) a constaté que le poids accordé à la valeur extrême est supérieure au poids accordé à une valeur intermédiaire pour une même valeur de probabilité initiale. Pour ceci, Quiggin (1982) suggère de déformer la fonction de répartition des probabilités F telle que :

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i).$$

La théorie d'utilité espérée dépendante du rang s'appuie sur une fonction de pondération w telle que : $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (Quiggin, 1982). Par conséquent, le poids accordé au résultat x_i peut être donné par π_i tel que :

$$\pi_i = w\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) - w\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) \text{ avec } i \geq 2.$$

Pour une loterie X à n résultats tels que $x_1 < \dots < x_n$, la fonction *RDEU* est définie par :

$$V(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n) = \sum_{i=1}^n U(x_i) \pi_i \text{ avec } i \geq 2,$$

avec $\pi_i = w\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) - w\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) = w(F(x_i)) - w(F(x_{i-1}))$.

Dans ce contexte, Quiggin (1982) a souligné que les poids accordés à une probabilité d'événement ne dépendent pas que de la probabilité de cet événement mais de toutes les autres probabilités accordées aux autres événements. Ceci permet de constater alors que deux événements ayant la même probabilité peuvent avoir des pondérations différentes et que la théorie RDEU suggère que les préférences sont transitives et qu'elles respectent la caractéristique de la dominance stochastique d'ordre 1 si les fonctions w et U sont croissantes et monotones. Le graphique 7⁷ permet de comparer la fonction d'utilité de Kahneman et Tversky (1979) et la fonction de pondération proposée par Quiggin (1982).

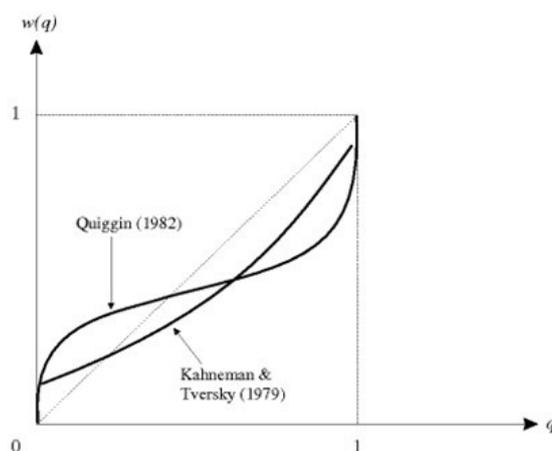


FIG. 7. Fonction de transformation des probabilités

⁷Voir : Blondel S. (2003). Généralisation de l'espérance d'utilité : le cas des jeux de loterie en France. *Economie et prévision*, 159, 105-112.

La fonction de transformation des probabilités de Quiggin (1982) est sous la forme de S-inversé. Cette fonction intercepte la bissectrice. Lorsque $\Pi(p^*) = p^*$ (intersection entre la fonction de transformation et la bissectrice), la probabilité n'est pas déformée. Selon RDEU, les investisseurs sont pessimistes pour des valeurs de probabilités au-dessous de p^* (courbe concave) et optimistes pour des probabilités au-dessus de p^* (courbe convexe). Ces individus ont tendance à sur-pondérer les résultats défavorables, dont les probabilités de survenance sont faibles, et à sous-pondérer les résultats favorables dont les probabilités sont élevées.

2.2. La théorie de l'ambiguïté.

2.2.1. *Définition du concept de l'ambiguïté.* Le concept de l'ambiguïté fait référence à un manque de précision ou de clarté d'un énoncé ou d'informations dans une situation précise. Il renvoie à la diversité des interprétations possibles d'un mot, d'une expression ou d'une situation. Ce concept a été introduit par Ellsberg (1961) dans un article critiquant la théorie de l'utilité subjective espérée de Savage (1954). Dans le cadre de la prise de décision économique, il y a plusieurs situations où l'information dont nous disposons pour prendre une décision est vague, imprécise ou ambiguë. En effet, les preneurs de décision sont souvent confrontés à un environnement économique complexe où il est difficile d'évaluer les probabilités des résultats. Ils peuvent avoir des doutes sur leurs propres hypothèses et sur les règles qui régissent leur monde et guident leurs décisions. Ces individus peuvent connaître la nature de leurs modèles, mais ne peuvent pas posséder suffisamment d'informations pour déterminer la pertinence et la précision de chaque modèle.

Depuis Ellsberg (1961), le terme «ambiguïté» renvoie souvent à l'ambiguïté des probabilités dans un cadre économique. En pratique, l'ambiguïté porte typiquement sur l'incertitude au niveau des valeurs des paramètres financiers. Le sujet d'imprécision des informations nécessaires à la prise de décision a été discuté par Ellsberg (1961) qui a mis en évidence le concept de l'ambiguïté en se basant sur l'expérience suivante : un individu fait face à deux urnes : une urne «risquée» contenant 50 boules rouges et 50 boules noires, et une urne «ambiguë» contenant également 100 boules de ces 2 couleurs mais avec des proportions inconnues de boules rouges et de boules noires. On suppose que cet individu gagne s'il tire une boule de couleur spécifique et qu'il peut choisir l'urne dans laquelle il effectue son tirage. Dans l'urne «risquée», la probabilité de tirer une boule noire est connue : elle est de 0,5. Alors que dans l'autre urne, la probabilité de tirer une boule noire est inconnue : elle appartient à l'intervalle $[0, 1]$. Les résultats de cette expérience montrent que les gens préfèrent parier sur une urne dans laquelle les proportions de boules rouges et de boules noires sont connues que de parier sur une urne dans laquelle les proportions de boules rouges et de boules noires sont inconnues. En effet, lorsque les gens font face à un choix entre deux options, la majorité choisit celle dont la loi de probabilité est connue.

Des études expérimentales liées à la prise de décision en situation ambiguë ont montré deux approches différentes de l'ambiguïté. La première est l'approche objective suggérant que l'ambiguïté provient de la qualité et de la quantité d'informations fournies au preneur de la décision. Ces informations peuvent être insuffisantes et imprécises. Selon cette approche, l'ambiguïté est modélisée à partir d'une distribution de second ordre. Ceci montre que pour un état de nature précis, le décideur n'a pas une seule probabilité, mais plutôt un ensemble de probabilités. La seconde approche est l'approche subjective. Elle suppose que les compétences (le savoir, les connaissances...) du preneur de décision constituent une variable déterminante dans sa perception de l'ambiguïté d'une situation donnée. De plus, cette approche suppose que le preneur de décision préfère parier sur des événements pour lesquels il se sent compétent. Dans ce cas, même si la situation est imprécise, l'aversion à l'ambiguïté de l'individu peut disparaître lorsqu'il pense qu'il est assez compétent pour prendre une décision. En outre, une situation ambiguë correspond à une situation où le décideur peut établir une liste des événements susceptibles de survenir mais dont la probabilité de survenance de chaque événement est imprécise. En effet, le preneur de décision n'a qu'une connaissance imparfaite de l'événement en question ou un manque de données statiques. Il s'agit alors d'un événement à une probabilité ambiguë. De ce fait, le décideur ne peut émettre que des jugements de probabilité imprécis concernant cet événement. Dans

son article de référence, Ellsberg (1961)⁸ a défini une situation ambiguë par : «*Situation in which so many probability judgments an individual can bring to bear upon a particular problem are either "vague" or "unsure" that his confidence in a particular assignment of probabilities, as opposed to some other of a set of "reasonable" distributions, is very low. We may define this as a situation of high ambiguity. The general proposition to be explored below is that it is precisely in situations of this sort that self-consistent behavior violating the Savage axioms may commonly occur. Ambiguity is a subjective variable, but it should be possible to identify "objectively" some situations likely to present high ambiguity, by noting situations where available information is scanty or obviously unreliable or highly conflicting; or where expressed expectations of different individuals differ widely; or where expressed confidence in estimates tends to be very low.*».

Dans le cadre financier, l'investisseur prend la décision au niveau du choix de ses actions sous la forme d'une fonction de paiement associée à chaque événement aléatoire. Sa fonction d'utilité espérée subjective peut être définie par cette expression :

$$V(f) = \int_S U(f(s))d\mu(s),$$

avec s est un état quelconque de S ; f est un acte à choisir; $f(s)$ est le paiement associé à l'état s par l'acte f ; U est la fonction d'utilité standard définie sur les paiements et $\mu(s)$ est la probabilité subjective de l'état s .

Dans le cadre de l'approche subjective, les individus se différencient non seulement par leurs fonctions d'utilité mais aussi par leurs probabilités subjectives μ qu'ils associent aux différents états de nature. Dans ce contexte, deux approches ont été introduites. La première approche est celle de Savage (1954) et porte sur la fonction d'utilité subjective définie sur l'ensemble des choix des individus et sur un ensemble d'états infini. Cette approche vérifie la représentation précédente de la fonction d'utilité. Cependant, la seconde approche, développée par Anscombe et Aumann (1963), repose sur un nombre de choix possible plus important et un nombre d'états plus restreint. Leur modèle peut être exprimé par :

$$V(l) = \int_S \left(\int_X U(x)dl_S(x) \right) d\mu(s),$$

avec l est la loterie de type «course de cheval» et $S(x)$ désigne la loterie résultant de l'état s .

2.2.2. Définition de l'aversion à l'ambiguïté. Ellsberg (1961) a montré que les individus révèlent un comportement qui est communément interprété comme une «aversion à l'ambiguïté». En d'autres termes, ses expériences ont montré que les agents préfèrent parier sur des événements non ambigus, c'est-à-dire qu'ils choisissent l'option qui présente le minimum d'éléments inconnus. En effet, un individu aversé à l'ambiguïté tend à éviter l'incertitude et à ajuster son comportement en faveur des risques à probabilité connue, même à des coûts importants. En effet, les individus sont toujours prêts à investir des montants significatifs d'argent pour éviter les processus ambigus en faveur des processus de risque normativement équivalents (Becker et Brownson, 1964; Keren et Gerritsen, 1999; Chow et Sarin, 2001). Dans le cadre économique, l'aversion à l'ambiguïté a été employée pour expliquer des phénomènes tels que : l'énigme de la prime de risque (Maenhout, 2004; Collard et al., 2011; Gollier, 2011; Ju et Miao, 2012) et l'énigme de la participation au marché boursier (Dow et Werland, 1992; Easley et O'Hana, 2009). En outre, Alary et al. (2013) et Snow (2011) ont montré que l'aversion à l'ambiguïté influence le choix de l'assurance optimale. Ces différentes contributions théoriques présument une attitude universellement négative à l'égard de l'ambiguïté.

L'aversion à l'ambiguïté peut être modélisée à partir d'une distribution de probabilité de second ordre (Second Order Probability Distribution). Ceci signifie que l'événement en question n'est pas caractérisé par une seule probabilité mais par un ensemble de valeurs. De plus, on sait bien que la

⁸Ellsberg D. (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, 75, 4, 660-661.

probabilité de survenance d'un événement ambigu est une variable aléatoire et que sa probabilité est donc aussi aléatoire dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle $[0, 1]$ (elle suit une loi de probabilité). Dans ce cadre, une probabilité aléatoire est attribuée à chacune des valeurs possibles d'un événement précis. C'est pour cette raison qu'on parle de la distribution de probabilité de second ordre. La puissance de l'aversion à l'ambiguïté dépend du niveau de la connaissance de la probabilité du gain et du savoir si les alternatives ambiguës sont présentées seule ou juxtaposés. Ainsi, un travail de psychologie expérimentale a réussi à montrer que l'aversion à l'ambiguïté était sensiblement plus marquée lorsqu'il s'agit d'un conflit au niveau des informations plutôt qu'une lacune d'informations et lorsque le conflit émane de sources différentes (Smithson, 1989).

2.2.3. *Les modèles fondamentaux de la théorie de l'ambiguïté.* L'expérience mentale d'Ellsberg (1961) a donné naissance à plusieurs modèles intégrant l'attitude de l'individu face à l'ambiguïté. Parmi les modèles les plus développés, nous pouvons citer les modèles introduits par Schmeidler (1989) et Gilboa et Schmeidler (1989). Ces travaux ont établi le fondement formel de la notion d'ambiguïté en modifiant la théorie de l'utilité espérée subjective de Savage (1954).

Approche de Gilboa et Schmeidler (1989). Parallèlement à la généralisation du modèle de l'utilité espérée, dans un contexte incertain, Schmeidler (1989) a proposé une généralisation du modèle de «l'utilité espérée subjective» de Savage (1954). Cette généralisation est appelée : «Choquet Expected Utility» (CEU). L'idée de cette théorie consiste à modéliser les comportements observés dans l'expérience d'Ellsberg (1961). Les axiomes de cette approche exigent que les préférences soient établies selon la loterie de type «roulette»⁹. Ceci présente une limite considérable. Cependant, Gilboa (1987) a présenté un axiome dépourvu de cette limite. Il a présenté un modèle dans lequel les probabilités objectives sont absentes et les actes sont établis selon des loteries de type «course à cheval»¹⁰. La preuve de Savage (1954) peut être utilisée pour établir des probabilités additives pour des événements non ambigus. Schmeidler (1989) considère que les croyances subjectives sur les probabilités des événements sont représentées par des probabilités non additives. Face à une situation ambiguë, Gilboa et Schmeidler (1989) ont montré que l'individu n'a pas une seule croyance (une distribution subjective unique), mais plutôt un ensemble de croyances (distribution subjective de second ordre). Ils ont introduit «l'approche avec multiples priors». Cette approche suppose qu'en présence d'ambiguïté, le preneur de décision ne peut pas déterminer une seule probabilité pour un état de nature. En effet, il fait face à un ensemble de probabilités possibles sur lequel il doit faire son choix. Dans ce cadre, Gilboa et Schmeidler (1989) ont développé l'approche «maxmin de l'utilité espérée». Selon cette approche, le preneur de décision possède un ensemble de lois de probabilités et utilisent le critère «maxmin de l'utilité espérée» pour évaluer les décisions par rapport à un ensemble de croyances initial. Ce modèle repose sur deux axiomes :

Axiome 1 : Axiome d'indépendance certaine

Soient X et Y de F_0 , et Z est une décision constante de F_0 . Pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$X \succ Y; \alpha X + (1 - \alpha)Z \succ \alpha Y + (1 - \alpha)Z.$$

Axiome 2 : Axiome de l'aversion à l'incertitude

Soient X et Y de F_0 , et $\alpha \in]0, 1[$:

$$X \succ Y; \alpha X + (1 - \alpha)Y \succ X.$$

Sous l'axiome de préordre total, l'axiome de monotonie et l'axiome de continuité, il existe un ensemble de mesures de probabilité P fermé et convexe. Gilboa et Schmeidler (1989) ont établi cette

⁹Une loterie de type « roulette » peut être définie comme étant une situation risquée dans laquelle les probabilités objectives des événements incertains sont connues.

¹⁰Il existe des situations dans lesquelles les probabilités associées à chaque événement incertain sont inconnues.

représentation :

$$X \succcurlyeq Y,$$

$$\Leftrightarrow \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(X) d\mathbb{P} \geq \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(Y) d\mathbb{P}.$$

Le décideur agit comme s'il avait un ensemble de croyances à priori. Afin d'évaluer l'utilité d'un acte donné, il calcule l'espérance d'utilité de cet événement pour toutes les probabilités qu'il considère et il en prend le minimum.

Selon la théorie de la décision en situation d'incertitude, le preneur de décision doit former un modèle statistique reliant les résultats des différentes décisions. Par la suite, il doit sélectionner la répartition optimale du modèle. Mais lorsque le décideur ne fait pas confiance au modèle de décision établi, les deux grands macro-économistes Hansen et Sargent (2001) ont proposé une nouvelle technique : la technique du «contrôle robuste» des modèles. Cette technique permet aux décideurs de reconnaître leurs erreurs de spécification commises au niveau de la modélisation économique. Hansen et Sargent (2001) considèrent que le modèle économique, représentant les préférences des décideurs, n'est qu'une approximation du vrai modèle. L'interprétation de l'incertitude au niveau du modèle est expliquée par l'ambiguïté au niveau des informations présentées au décideur. Plus précisément, le preneur de décision ne possède pas d'informations précises et complètes sur la vraie nature de l'économie.

Approche de Maccheroni et al. (2006). Maccheroni et al. (2006) ont développé une approche qui permet de déterminer les préférences d'un individu, sous l'ambiguïté, par l'introduction de la fonction d'utilité U ainsi que l'indice de l'ambiguïté C défini sur l'ensemble des probabilités des événements aléatoires.

Soient X et Y deux variables aléatoires représentant des résultats de choix possibles. Ces résultats présentent des valeurs comprises dans cet intervalle $[-M, M]$, tel que :

$$X \succcurlyeq Y,$$

$$\Leftrightarrow \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(X) d\mathbb{P} + C(\mathbb{P}) \geq \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(Y) d\mathbb{P} + C(\mathbb{P}),$$

où Δ désigne un ensemble convexe, U correspond à la modélisation de l'attitude de l'individu face au risque, C représente l'attitude de l'individu vis-à-vis de l'ambiguïté.

Cette présentation englobe le modèle «maxmin de l'utilité espérée» de Gilboa et Shmeidler (1989) et le modèle de préférences multiples de Hansen et Sargent (2001). En effet, le modèle «maxmin de l'utilité espérée» de Gilboa et Shmeidler (1989) vérifie cette représentation dans le cas où l'indice de l'ambiguïté est nul : $C = 0$. Tandis que l'approche de Hansen et Sargent (2001) correspond au cas où $C(\mathbb{P}) = \theta R(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, tel que :

$$X \succcurlyeq Y,$$

$$\text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(X) d\mathbb{P} + \theta R(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \geq \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} \int U(Y) d\mathbb{P} + \theta R(\mathbb{P}, \mathbb{Q}),$$

où $R(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ est l'entropie relative par rapport à une probabilité donnée \mathbb{Q} . Le paramètre θ désigne le poids individuel donné à la possibilité d'avoir un manque d'information.

Le modèle des préférences de type moyenne-variance, proposé par Markowitz (1952) et Tobin (1958), considère que la fonction d'utilité est donnée par $U(x) = x$ et que l'indice d'ambiguïté est défini par :

$$C(x) = -\frac{\phi}{2} \text{var}(x),$$

où ϕ représente le degré d'aversion au risque de l'investisseur. Ce résultat théorique constitue une étape importante dans l'établissement des modèles dans le cadre de la théorie de la décision. Il permet d'évaluer les portefeuilles risqués des individus rationnels dans un environnement incertain.

2.3. La théorie du regret. Dans le cadre de la prise de décision, l'individu peut se retrouver dans une situation où il doit faire un choix entre plusieurs alternatives. Dans ce cadre, l'individu peut comparer les conséquences de l'alternative choisie avec celles des options non choisies. Dans le cadre de la littérature neuroscientifique, la comparaison défavorable entre le rendement obtenu par l'individu et ceux des autres options possibles peut générer des signaux d'erreur, appelés «le regret» par Bell (1982) et Loomes et Sugden (1982); «les traditions psychologiques» par Zeelenberg et al. (2000) et «erreurs fictives» par Lohrenz et al. (2007). En effet, l'individu manifeste du regret et de la déception en réponse à un résultat défavorable. Zeelenberg et al. (1998) supposent que chacun de ces sentiments est lié à un processus de pensée contrefactuel dans lequel le résultat obtenu par le preneur de décision est comparé aux autres résultats qui auraient pu se produire. Selon Kahneman et Miller (1986) et Boles et Messick (1995), la pensée contrefactuelle influence les réactions sentimentales de l'individu en termes de valence et d'intensité. Sur le plan neurologique, Camille et al. (2004) ont montré que le sentiment du regret est associé à un sentiment de responsabilité et peut avoir un rôle important dans l'apprentissage de l'individu. Le rôle du regret a été largement étudié dans le cadre de la prise de décision par Larrick (1993), Boles et Larrick (1995), Zeelenberg (1999), Connolly et Zeelenberg (2002) et Connolly et Butcher (2006).

2.3.1. Présentation du concept du regret. En économie, le modèle de l'utilité espérée classique de VNM (1944) est considéré comme un Benchmark pour présenter les préférences en présence du risque. A la fin des années 1970, un grand changement a eu lieu au niveau du processus de prise de décision en présence du risque. En effet, plusieurs modèles ont été introduits pour faire face à quelques défaillances de la théorie de l'utilité espérée classique. Kahneman et Tversky (1979) ont introduit le premier modèle de décision qui s'écarte de la théorie d'utilité espérée rationnelle des homo-economicus dans un cadre risqué. Cependant, ce modèle présente certains problèmes théoriques. Ces derniers ont conduit Quiggin (1982) à introduire la théorie de l'utilité dépendante du rang et Machina (1982) à renforcer l'utilité non-espérée en fournissant des généralités constructives sur les résultats optimaux. Ces travaux ont permis de maintenir l'hypothèse de transitivité de la théorie d'utilité espérée classique. Contrairement à ces théories, une nouvelle théorie a vu le jour en 1982 et a violé l'axiome de transitivité de la théorie de l'utilité espérée classique : c'est la théorie du regret (Fishburn, 1982; Bell, 1982; Loomes et Sugden, 1982). En effet, l'intransitivité implique un détachement de toutes les théories classiques. La théorie du regret est une théorie alternative à la théorie de Kahneman et Tversky (1979) qui permet de prendre en considération le sentiment du regret introduit par Loomes et Sugden (1982). Ainsi, Graham et al. (1982) ont suggéré un facteur significatif susceptible d'influencer le choix de l'individu. Ce facteur est lié à la capacité de l'individu d'anticiper le sentiment du regret et de la réjouissance.

Le regret est un sentiment de douleur et de colère ressenti par l'investisseur lorsqu'il se rend compte qu'il a pris la mauvaise décision alors qu'il avait la possibilité de choisir d'autres alternatives. Ainsi, Zeelenberg (1999b) et Roese (2005) ont montré que le regret signifie qu'on aurait pu faire mieux en choisissant une autre option. En effet, l'investisseur éprouve du regret lorsque le rendement de son investissement est moins performant que ceux des autres investissements possibles. Shefrin et Statman (1985) ont défini le regret comme étant un sentiment associé à une prise de conscience plutôt qu'une décision différente aurait pu être plus réussie que celle choisie. Bell (1982) a défini le regret comme¹¹ «*the difference in value between the assets actually received and the highest level of assets produced by other alternatives*». Quant à la réjouissance, elle est définie par Loomes et Sugden (1982) comme le plaisir additionnel de connaître à posteriori la meilleure décision sélectionnée par l'investisseur. Kahneman et Tversky (1982) ont montré que le regret est plus fort lorsqu'un rendement défavorable résulte d'une action que d'inaction. Une large littérature neurobiologique et des expériences psychologiques ont montré que le regret influence la prise de décision de l'individu en présence de l'incertitude. Bell (1982) et Fishburn (1982) ont proposé la théorie du regret dans le cadre économique incertain. Cette théorie a été développée par la suite par Loomes et Sugden (1982) et axiomatisée par Sugden et Quiggin (1994).

¹¹Bell D. (1982). Regret in decisionmaking under uncertainty. *Operation Research*, 5, 30, 963.

La théorie du regret suppose que l'investisseur est irrationnel et que sa décision d'investissement est basée non seulement sur le rendement espéré du portefeuille mais aussi sur le risque anticipé. En effet, l'investisseur essaie d'anticiper son regret et de le prendre en considération dans son processus d'investissement. D'une manière générale, l'investisseur prend sa décision d'investissement en maximisant la valeur espérée de sa fonction d'utilité modifiée. Dans ce cadre, le risque de l'investisseur est défini selon deux dimensions : le risque lié à la variance des rendements des actifs et le risque du regret. Au niveau psychologique, Shimanoff (1984) a constaté que le regret est le sentiment le plus fréquent et Landman (1993) a montré que le regret est une expérience commune voire universelle. Ainsi, Singh et Sikarwar (2015) ont constaté que le regret est le sentiment le plus observé au niveau individuel dans le cadre d'investissement. Bell (1982); Loomes et Sugden (1982); Sugden (1982) et Zeelenberg (1999) ont montré que la psychologie de l'investisseur est le processus de décision préliminaire. Ainsi, Zeelenberg (1999) a constaté que l'anticipation du regret et la prise en compte de ce sentiment dans le processus de prise de décision en présence de l'incertitude permettent au preneur de décision, dans certaines circonstances, de prendre des décisions plus attentives. Ainsi, Pieters et Zeelenberg (2007) ont examiné le regret que l'individu éprouve lorsqu'il se comporte d'une manière imprévue. Ces études ont montré qu'une telle incohérence, souvent difficile à justifier, amplifie le sentiment du regret chez l'individu, indépendamment des résultats de son comportement. De plus, Coricelli et al. (2009) ont testé l'activité mentale de l'individu et ont montré que la présence du regret conduit à l'aversion au regret au moment de la prise de décision d'investissement.

2.3.2. *Présentation de l'aversion au regret.* L'aversion au regret est la tendance à éviter de prendre des décisions en raison de la contrainte d'éprouver des douleurs psychologiques dues au regret. Singh et Sikarwar (2015) ont montré que l'aversion au regret joue un rôle très important dans le processus de prise de décision et influence, d'une manière directe, le choix de l'individu. Bell (1982) et Loomes et Sugden (1982) ont montré que l'aversion au regret motive l'individu à faire des choix qui l'aide à ne pas ressentir le sentiment du regret dans le futur. Diecidue et Somasundaram (2015) ont montré que l'aversion au regret est un phénomène robuste et dominant et que la théorie du regret est un modèle qui permet de présenter les préférences sous l'incertitude. Ainsi, ils ont étudié les attitudes des preneurs de décision face au risque sous la théorie du regret et ont montré que leurs réactions affectent leurs attitudes face au regret. En règle générale, la littérature en psychologie (Josephs et al., 1992; Larrick, 1993; Boles et Larrick, 1995; Baron et Ritov, 1995; Ritov, 1996; Zeelenberg et al., 1996) a montré que les gens sont généralement averses au regret et que leur retour d'expérience des options non choisies augmentent leur aversion au regret. Cependant, les résultats de Diecidue et Somasundaram (2015) montrent que la plupart des sujets ne sont pas averses au regret quand il y a un retour d'expérience sur les rendements. Boles et Larrick (1995) et Zeelenberg (1999) ont montré que la découverte des résultats des options non choisies permet d'accroître l'aversion au regret du preneur de décision et que l'individu aversé au regret doit être à la fois aversé au risque et preneur du risque.

Bell (1983) est le premier à avoir modélisé la prime de risque sous la théorie du regret. Il a montré que la prime de risque est la somme de ces deux composantes : «la prime de résolution» (le prix que l'individu paie pour éviter de découvrir la vraie valeur de l'alternative non choisie) et «la prime de regret» (le prix que l'individu paie en supplément pour éviter le regret). La prime de risque est utilisée comme une mesure de l'aversion au regret (Wakker, 2010). Cependant, Bell (1982, 1983) n'a pas établi une méthode empirique permettant de mesurer ces deux composantes de la prime de risque. Dans ce cas, Diecidue et Somasundaram (2015) ont fourni une expression analytique pour la prime de risque et la prime de regret. Ces deux expressions permettent de caractériser les attitudes face au risque sous la théorie du regret et les prédictions concernant les attitudes au risque des preneurs de décision aversés au regret.

2.3.3. *Les modèles fondamentaux de la théorie du regret.*

Théorie du regret de Bell (1982). Dans son article, Bell (1982) a constaté qu'après avoir pris une décision dans un cadre incertain, le preneur de décision peut se rendre compte qu'il y avait une autre

alternative plus intéressante que celle qu'il a choisie. Dans ce cadre, il a présenté une théorie du regret dans laquelle le regret est mesuré par la différence entre la valeur des actifs obtenue et la valeur la plus élevée des autres alternatives. Cette différence peut avoir des valeurs positives et négatives du regret. Ainsi, il a trouvé que la minimisation du maximum du regret n'est pas le seul critère de décision. Il a traité le regret comme une préoccupation secondaire pour le preneur de décision et a établi un lien entre le regret et la fonction d'utilité de l'individu.

Bell (1982) a défini $v(x)$ comme une fonction de valeurs qui capte les valeurs incrémentales tel que : une valeur incrémentale de $a\$$ à $b\$$ est plus importante qu'une valeur incrémentée de $c\$$ à $d\$$ si $v(b) - v(a) > v(d) - v(c)$. Il a identifié $v(x) - v(y)$ comme une mesure de regret. Afin d'établir la fonction d'utilité qui permet de prendre en compte le regret, Bell (1982) a établi 3 hypothèses :

Hypothèse 1 : Si les positions potentielles de l'actif final de toutes les alternatives possibles sont croissantes (ou décroissantes) selon des montants les valeurs incrémentales égales, alors l'alternative préférée ne change pas. En effet, si la valeur de chaque résultat final de toutes les alternatives possibles est augmentée par une constante, alors les valeurs du regret ne changent pas. Si cette hypothèse est appliquée à la fonction d'utilité espérée $u(x)$, cette dernière sera égale à $v(x)$ ou avoir une transformation exponentielle de $v(x)$. Ceci peut être illustré par :

$$U(x, y) - u(y, x) = g(v(x) - v(y)) \exp(-cv(x)),$$

où c est une constante et g est une fonction.

Pour des raisons de simplification, Bell (1982) a établi une deuxième hypothèse qui permet de considérer la constante c nulle.

Hypothèse 2 : Si la valeur incrémentale de x_1 à x_2 est égale à celle de x_2 à x_3 , alors le preneur de décision est indifférent d'avoir x_2 d'une manière sûre ou d'avoir la loterie qui permet d'avoir x_1 pour 50% et x_3 pour 50%.

Les deux hypothèses 1 et 2 impliquent :

$$u(x, y) - u(y, x) = g(v(x) - v(y)).$$

Bell (1982) a développé une troisième hypothèse pour séparer $u(x, y)$ de $u(y, x)$ en utilisant les préférences de l'individu. Il a présenté cette hypothèse comme une extension de la première hypothèse.

Hypothèse 3 : Le preneur de décision préfère sélectionner l'alternative L_1 plutôt que l'alternative L_2 que de choisir L_3 plutôt que L_4 . Cette déclaration reste invariante sous la modification qui suppose que tous les rendements de toutes les alternatives sont croissants (décroissants) pour une valeur incrémentale égale. Les hypothèses 2 et 3 impliquent :

$$U(x, y) = v(x) + f(v(x) - v(y)),$$

où f est une fonction. Cette fonction d'utilité a été appliquée sur 4 types de comportement différents (coexistence d'une assurance et d'une loterie ; effet de réflexion ; l'assurance probabiliste et l'inversion des préférences « intransitivité »). Les résultats montrent que tous ces types de comportement sont cohérents avec le désir d'éviter le regret après la prise de décision. Il a également montré que le regret permet d'expliquer le comportement du preneur de décision tant que la fonction f est concave et croissante.

La fonction de regret/réjouissance (Loomes et Sugden, 1982, 1986). La théorie du regret a été employée pour expliquer les résultats des expériences qui permettent de violer la théorie de l'utilité espérée classique et qui montrent certaines puissances prédictives dans les expériences désignées à tester les effets de l'existence du sentiment du regret. Cette théorie est basée sur la notion du choix par paires et a été développée par Bell (1982), Fishburn (1983) et Loomes et Sugden (1982, 1983, 1987). Loomes et Sugden (1982) ont proposé une fonction de regret/réjouissance. Ils supposent qu'une fonction d'utilité sans choix $C(\cdot)$ est associée à chaque individu. Cette fonction d'utilité représente la fonction d'utilité de l'individu associée aux conséquences x que l'individu a éprouvées sans les choisir (une force naturelle, le gouvernement, ...). Contrairement au concept de l'utilité espérée, qui

correspond aux préférences de l'individu, la fonction d'utilité sans choix est définie indépendamment des choix de l'individu. La fonction d'utilité sans choix correspond aux expériences de plaisir associées à la satisfaction et au désir de l'individu.

Dans le cadre de la théorie de décision, l'individu doit choisir entre plusieurs actions. Chaque action A associe des conséquences à un état particulier. En effet, chaque action représente n conséquences et chaque conséquence est associée à un état. Notant par x_{ij} la conséquence de la $i^{\text{ème}}$ action et du $j^{\text{ème}}$ état. Cette dernière est interprétée comme un décrement ou un incrément de la richesse mesurée par un niveau de richesse arbitraire. Supposant que l'investisseur doit choisir entre deux actions A_1 et A_2 dans une situation incertaine. L'investisseur choisit A_1 , et ensuite l'état j se produit. Alors, il y a une conséquence x_{1j} . Plus tard, l'investisseur découvre que, s'il avait choisi A_2 (qui présente une conséquence x_{2j} plus favorable et plus intéressante que la conséquence de son choix), il aurait pu gagner davantage. Dans ce cas, l'investisseur se sent mal et bouleversé et peut regretter son choix. Il va réfléchir sur quel point il aurait dû mieux faire s'il avait choisi la deuxième action. Cette réflexion réduit la satisfaction de l'investisseur. Cependant, si l'investisseur comprend que la conséquence de son choix x_{1j} est plus intéressante que celle de l'autre action, l'investisseur va se sentir heureux et satisfait : c'est le phénomène de la réjouissance. Cette connaissance va permettre à l'investisseur de se sentir convaincu d'avoir fait le meilleur choix. Donc, Loomes et Sugden (1982) ont constaté que la satisfaction psychologique de l'individu ne dépend pas que de la conséquence de son choix, mais aussi des conséquences des autres alternatives possibles. Ils ont montré que l'investisseur peut se sentir mal s'il perd une certaine somme d'argent suite à son propre choix, dans une situation où il avait la possibilité de gagner avec les autres alternatives. Cependant, l'individu ne se sent pas mal s'il perd dans une situation où il n'avait pas d'autre possibilité pour gagner.

Supposant maintenant que l'investisseur doit choisir entre deux actions : A_i et A_k . Il choisit l'action A_i et le $j^{\text{ème}}$ état se produit. La conséquence actuelle du choix de l'investisseur est x_{ij} est survenue, quand il aurait dû avoir x_{kj} . Notant $C(x_{ij})$ par c_{ij} . L'individu éprouve une utilité modifiée donnée par :

$$m_{ij}^k = M(c_{ij}, c_{ik}).$$

La fonction $M(\cdot)$ désigne l'indice de valeur réelle pour chaque couple d'indices de l'utilité sans choix. La différence entre m_{ij}^k et c_{ij} est interprétée comme un incrément ou un décrement de l'utilité correspondante au regret ou à la réjouissance. La formulation du regret et de la réjouissance ne dépend que de l'utilité sans choix qui dépend du choix de l'investisseur et des autres alternatives possibles. Loomes et Sugden (1982) ont établi cette hypothèse : si $c_{ij} = c_{kj}$ alors, $m_{ij}^k = c_{ij}$. Cela signifie que le plaisir que l'investisseur éprouve avec son choix est égal au plaisir que l'investisseur peut éprouver par le choix des autres possibilités. Dans ce cas, il n'y a ni regret ni réjouissance.

La théorie du regret suppose que l'investisseur choisit entre 2 actions de façon qu'il maximise l'espérance mathématique de son utilité espérée modifiée. L'utilité espérée modifiée E_i^k associée à l'action A_i est évaluée par rapport à l'action A_k , tel qu'elle est définie par :

$$E_i^k = \sum_{j=1}^n p_j m_{ij}^k.$$

L'investisseur peut préférer A_i à A_k ; A_k à A_i ou être indifférent par rapport aux deux actions si la valeur de E_i^k est respectivement supérieure, inférieure ou égale à E_i^k . Supposant que le degré de regret ou de réjouissance qu'éprouve l'individu dépend de la différence entre l'utilité sans choix présente et l'utilité sans choix qui aurait dû être. Ceci permet de définir la fonction de regret-réjouissance $R(\cdot)$ qui désigne l'indice de valeur réelle pour chaque incrément ou décrement possible de l'utilité sans choix, tel que :

$$m_{ij}^k = c_{ij} + R(c_{ij} - c_{kj}),$$

avec $R(0) = 0$ et R est une fonction décroissante. Pour toute ε , si $R(\varepsilon) = 0$, la théorie du regret coïncide avec la théorie d'utilité espérée standard.

Loomes et Sugden (1982) ont constaté que l'action A_i est préférable à l'action A_k , si et seulement si :

$$\sum_{j=1}^n p_j [c_{ij} - c_{kj} + R(c_{ij} - c_{kj}) - R(c_{kj} - c_{ij})] \geq 0.$$

Notant par : $Q(\varepsilon) = \varepsilon + R(\varepsilon) - R(-\varepsilon)$. Loomes et Sugden (1982) ont montré que :

$$A_i \succ A_k \text{ si et seulement si : } \sum_{j=1}^n p_j [Q(c_{ij} - c_{kj})] \geq 0, \quad (2.1)$$

avec Q est une fonction croissante, telle que : $Q(\varepsilon) = -Q(-\varepsilon)$ pour toute ε . Ainsi, Loomes et Sugden (1982) ont suggéré 3 caractéristiques liées à la fonction Q :

Caractéristique 1 : Q est une fonction linéaire : $R''(\varepsilon) = R''(-\varepsilon)$. Ceci découle de l'équation 2.1 dans le cas où l'individu se comporte de façon qu'il maximise l'utilité espérée sans choix. Alors, la théorie du regret induit aux mêmes prédictions de l'utilité sans choix et de la théorie de l'utilité espérée.

Caractéristique 2 : Q est une fonction concave pour toute valeur positive de ε : pour toute $\varepsilon > 0$; $R''(\varepsilon) < R''(-\varepsilon)$.

Caractéristique 3 : Q est une fonction convexe pour toute valeur négative de ε : pour toute $\varepsilon < 0$; $R''(\varepsilon) > R''(-\varepsilon)$.

Plus tard, Loomes et Sugden (1986) ont proposé une fonction de regret/réjouissance pour une paire de loteries : $L_x = [(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)]$ et $L_y = [(y_1, p_1), \dots, (y_n, p_n)]$, tels que x représente le rendement de la loterie L_x et y représente le rendement de la loterie L_y . La différence entre les rendements de ces deux loteries est mesurée par le regret ou la réjouissance, avec $r(x, y) = U(x) - U(y)$. Cette expression est négative si l'individu éprouve du regret et positive si l'individu éprouve de la réjouissance. Bell (1985) et Loomes et Sugden (1987) ont introduit la fonction d'utilité modifiée de x en présence de y sous cette forme :

$$V(x, y) = U(x) + f(U(x) - U(y)),$$

où :

- $V(x, y)$ est la fonction d'utilité modifiée pour atteindre x , sachant que y aurait pu être réalisé ;
- $U(x)$ est la fonction d'utilité classique de VNM : fonction de valeurs ou fonction d'utilité sans choix : C'est l'utilité que l'investisseur peut obtenir à partir d'un investissement donné sans avoir un autre choix d'investissement. La fonction de valeurs est supposée monotone croissante et concave (aversion au risque). Alors, sa valeur espérée reflète le rendement et le risque du portefeuille global ;
- La différence $(U(x) - U(y))$ représente la valeur de gain ou de perte suite à un investissement qui produit x comme résultat au lieu d'un investissement qui produit y comme résultat ;
- $f(\cdot)$ est la fonction de regret : elle est monotone croissante et concave décroissante, avec $f(0) = 0$. La concavité de la fonction de regret ($f'' < 0$) implique l'aversion au regret ;
- L'argument de $f(\cdot)$ peut être positif si on choisit un résultat meilleur que ceux des autres alternatives.

L'espérance de la fonction d'utilité modifiée de la loterie L_x en présence de la loterie L_y est donnée par :

$$E\left[\sum_{i=1}^n V(x_i, y_i) p_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^n (U(x_i) + f(U(x_i) - U(y_i))) p_i\right].$$

La loterie L_x est préférée à la loterie L_y si :

$$E\left[\sum_{i=1}^n V(x_i, y_i) p_i\right] \geq E\left[\sum_{i=1}^n V(y_i, x_i) p_i\right].$$

Ceci est équivalent à cette expression :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (U(x_i) + f(U(x_i) - U(y_i)))p_i\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (U(y_i) + f(U(y_i) - U(x_i)))p_i\right].$$

Cette expression est équivalente à :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (U(x_i) - U(y_i) + f(U(x_i) - U(y_i)) - f(U(y_i) - U(x_i)))p_i\right] \geq 0.$$

Loomes et Sugden (1987) ont établi une condition équivalente à cette expression :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (Q(x_i) - U(y_i))p_i\right] \geq 0,$$

où Q est une fonction impaire, croissante et convexe sur \mathbb{R}^+ ; Q est définie par : $Q(z) = z + f(z) - f(-z)$ et $Q(0) = 0$.

Le modèle de Sugden (1993). Parallèlement au développement de la théorie du regret (Bell, 1982 et Loomes et Sugden, 1982), Fishburn (1982) a développé deux théories axiomatiques : la théorie de l'utilité asymétrique bilinéaire SSB (Skew-symmetric bilinear) qui est équivalente à la théorie du regret avec le choix par paire pour des actes stochastiquement indépendants ; et la théorie de l'utilité asymétrique additive SSA (Skew-symmetric additive) qui est équivalente à la théorie du regret pour tous les choix par paire. Dans le cadre du choix par pair, Sugden (1993) a étendu le travail de Fishburn (1982) et a présenté un ensemble d'axiomes qui implique une axiomatisation de la théorie du regret. La théorie de SSA est considérée similaire à la théorie de l'utilité espérée de Savage (1954), la seule différence entre les deux approches est que Fishburn (1982) a éliminé l'axiome de transitivité de Savage qui exige que les préférences soient transitives pour tous les actes. Si une personne doit choisir entre deux actes f et g et choisit f , et l'événement E se produit, alors elle obtient le rendement f_E et g_E si elle avait choisi g . La théorie de l'utilité de SSA suppose que les préférences par rapport aux actes sont représentées par cette relation :

$$f \succ g \Leftrightarrow \sum_E \pi(E) \Psi(f_E, g_E) \geq 0,$$

où $\Psi(x, y)$ est une fonction asymétrique en x et y , tel que : $\Psi(x, y) = -\Psi(y, x)$; E est un événement de répartition à composantes constantes et $\pi(E)$ est une mesure de probabilité de l'événement E .

Dans le cadre du choix entre 2 actes, les préférences de la théorie du regret peuvent être les mêmes que celles de la théorie de l'utilité de SSA. L'unique différence réside au niveau de l'interprétation de l'expression des préférences. Dans le cadre de la théorie du regret, $\Psi(f_E, g_E)$ est interprétée comme des termes de « désir-satisfaction ». L'intuition psychologique selon la théorie du regret suppose que la satisfaction de la personne dépend de g_E aussi bien que de f_E . La fonction $M(f_E, g_E)$ représente l'utilité (la satisfaction) de l'individu s'il choisit f et rejette g . La théorie du regret suppose que la préférence de l'individu entre f et g est déterminée par l'ampleur de l'espérance mathématique de $M(f_E, g_E)$, et de $M(g_E, f_E)$. Sugden (1993) a défini les préférences de l'individu par :

$$\Psi(f_E, g_E) = M(f_E, g_E) - M(g_E, f_E).$$

Par la suite, Sugden (1993) a généralisé la théorie du regret à un ensemble d'événements finis contenant n'importe quel nombre d'actes. La généralisation de la théorie du regret est partie de l'idée que le classement des préférences de 2 actes varie selon la nature de l'ensemble possible. Ceci peut être illustré par la fonction $\Psi(x, y, Z)$ qui est une fonction asymétrique en x et y et est représentée par :

$$\Psi(x, y, Z) = M(x, Z) - M(y, Z),$$

où Z est un ensemble de conséquences (résultats). La fonction $M(x, Z)$ peut être interprétée d'une manière naturelle comme l'utilité de Bernoulli. En effet, elle peut être interprétée comme l'utilité d'avoir choisi l'alternative x et d'avoir raté les autres conséquences dans l'ensemble Z .

Quiggin (1994) a montré qu'une autre hypothèse s'ajoute à celles déjà existantes au niveau de la théorie du regret. Il s'agit de l'hypothèse qui suppose que les choix des individus ne doivent pas être influencés par les alternatives disponibles. Cette hypothèse suppose que les individus dont les choix sont influencés par des alternatives dominées peuvent être manipulés par «money pump»¹². Sinon, le regret peut être déterminé indépendamment du meilleur rendement dans un état de nature donné. Dans son article, Solnik (2007) a présenté les différences qui résident entre la théorie du regret et la théorie de l'utilité espérée classique. En effet, il existe une grande différence entre la théorie du regret et la théorie de l'utilité espérée classique. Cette différence suppose que l'utilité modifiée de la théorie du regret prend en compte les rendements de tous les investissements possibles et qui auraient pu être choisis par l'agent. Quant à la théorie d'utilité classique, elle ne prend en compte que la valeur du rendement de l'investissement choisi actuellement par l'individu. La théorie du regret rajoute une fonction de regret qui résulte de la comparaison du rendement de l'investissement choisi avec les rendements des autres alternatives des investissements possibles. La maximisation de la fonction d'utilité classique est limitée à l'optimisation du couple rendement espéré et risque, où le risque mesure la volatilité du rendement du portefeuille global. Dans la théorie du regret ceci se traduit par l'optimisation du rendement espéré avec deux attributs de risque : la volatilité du portefeuille et le regret. Plus tard, Bleichrodt et al. (2010) ont proposé une méthode permettant de mesurer quantitativement la théorie du regret. Ils ont utilisé la méthode de compromis¹³ afin de mesurer l'utilité sous la théorie du regret. Ils ont montré que cette méthode est non seulement robuste pour les probabilités pondérées, mais aussi pour la violation de la transitivité. Ainsi, ils ont montré que la théorie du regret peut être mesurée par des techniques de mesure quantitatives sans paramètre, dans le sens où elle n'impose aucune hypothèse concernant la forme des fonctionnelles de la théorie du regret (la fonction d'utilité U et la fonction du regret Q).

En outre, Bleichrodt et al. (2010) ont introduit des tests pour valoriser leur méthode et s'assurer qu'elle permet de mesurer l'aversion au regret. Leur méthode confirme l'hypothèse de l'aversion au regret (la fonction de regret Q est convexe) au niveau de l'individu et du groupe et permet de présenter une mesure quantitative de la théorie du regret en absence de la transitivité. Bleichrodt et Wakker (2015) ont justifié l'importance théorique de la théorie du regret de Loomes et Sugden (1982). En se basant sur la condition équivalente de la théorie du regret, ils ont déterminé la déviation théorique de la théorie du regret par rapport à la théorie de l'utilité espérée et ont indiqué que le principe de la chose sûre de Savage (1954) est préservé dans la théorie du regret. La théorie du regret et la théorie de l'utilité espérée supposent que les préférences ne sont pas affectées par un changement commun au niveau des résultats. Ensuite, Bleichrodt et Wakker (2015) ont présenté des déviations empiriques de la théorie du regret par rapport à la théorie de l'utilité espérée, qui résident au niveau de la violation de l'axiome d'équivalence. Contrairement à la théorie de l'utilité espérée, dans laquelle les actions doivent être équivalentes, Bleichrodt et Wakker (2015) ont constaté que les actions ne sont pas équivalentes selon la théorie du regret. Ainsi, ils ont constaté que la théorie du regret permet d'expliquer l'inversion des préférences¹⁴. Un peu plus tard, Diecidue et Somasundaram (2017) ont constaté que la seule différence entre la théorie du regret et la théorie de l'utilité espérée réside au niveau de l'abondance de l'axiome de la transitivité. En se basant sur la méthode de Bleichrodt et Wakker (2015), Diecidue et Somasundaram (2017) ont présenté un nouveau fondement comportemental de la théorie du regret en séparant la fonction d'utilité de celle du regret afin de rendre la théorie du regret plus opérationnelle. Leur fondement montre que le regret transitif coïncide avec l'utilité espérée et dérive de la théorie du regret avec un nouvel axiome de la dominance-transitivité tout en affaiblissant l'axiome de la transitivité de la théorie de l'utilité espérée.

¹²Dans la théorie économique, l'argument de money pump est une expérience de pensée qui montre que le comportement rationnel nécessite des préférences transitives (si une personne préfère A à B et B à C , alors elle préfère C à A).

¹³La méthode de compromis a été développée par Wakker et Deneffe (1996). Elle permet de mesurer l'utilité espérée sous la théorie des perspectives

¹⁴L'inversion des préférences remet en question les théories qui cherchent à expliquer le comportement économique en termes des théories de choix rationnelles.

2.4. La théorie de déception. Les émotions sont toujours des conséquences de certaines décisions prises par les individus. En effet, les individus éprouvent des émotions positives (ou négatives) lorsque les résultats de leurs décisions sont favorables (ou défavorables). Plusieurs psychologues (Mellers, 2000; Zeelenberg et al., 2000) ont montré que les émotions anticipatives, à savoir : le regret et la déception, sont très importantes. Schimmak et Diener (1997) ont montré que la déception est un sentiment très intense et très fréquent et qu'il est l'un des sentiments négatifs le plus fréquent et le plus fort.

2.4.1. *Présentation du concept de la déception.* Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986) ont défini la déception comme une réaction psychologique vis-à-vis d'un rendement qui ne correspond pas aux anticipations et aux espérances antérieures de l'individu. Face à une perspective incertaine, Loomes et Sugden (1986) ont supposé que l'individu forme une certaine espérance antérieure concernant le rendement futur de cette perspective. Une fois que l'incertitude est résolue, Bell (1985) a montré que l'individu éprouve de la déception (ou de l'allégresse) si le rendement de l'option choisie par l'individu est inférieur (ou supérieure) à son espérance. Il a montré que la satisfaction de l'individu dépend de son anticipation antérieure et que plus la disparité est importante, plus la déception de l'individu est grande. En d'autres termes, plus l'anticipation de l'individu est élevée, plus sa déception est importante. Bell (1985) a montré que les individus averses à la déception ont une vision pessimiste de leur futur et qu'ils sont prêts à payer une prime pour éviter la déception potentielle. Ainsi, il a montré que les preneurs de décision sont sensibles à la manière avec laquelle la loterie a été résolue. Par intuition, la déception est associée à un sentiment douloureux et l'allégresse est associée à un sentiment de plaisir, de joie et d'euphorie. Elle est définie comme une proportion directe de la différence entre le rendement espéré et le rendement obtenu. Cette définition a été soutenue par plusieurs psychologues à savoir : Van Dijk et van der Pligt (1996); Zeelenberg et al. (2002); Van Dijk et al. (2003).

2.4.2. *Présentation de la théorie de déception (Comparaison entre la théorie du regret et la théorie de déception).* Comme la théorie du regret, la théorie de déception est une théorie descriptive du choix en présence du risque et présente une théorie alternative à la théorie de l'utilité espérée. Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986) supposent que le regret et la déception sont deux réactions psychologiques éprouvées par le preneur de décision juste après avoir fait un mauvais choix. La théorie de déception repose sur le même principe que celui de la théorie du regret. Cependant, la théorie de déception suppose que le preneur de décision compare le rendement obtenu avec ses espérances au lieu de comparer le résultat obtenu avec celui qui aurait pu être obtenu.

Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986) ont établi des modèles de prise de décision basés sur la théorie de déception. Ils ont montré que ce sentiment n'est qu'une conséquence d'une mauvaise décision. Ils ont constaté que l'individu anticipe sa déception et l'intègre dans son processus de prise de décision et que les décisions d'investissement sont basées sur l'aversion à la déception. Loomes et Sugden (1986) ont gardé dans leur modèle certains éléments compatibles avec la théorie du regret. Plus tard, Inman et al. (1997) ont proposé un modèle de prise de décision dans lequel le regret et la déception influencent en même temps les préférences et la satisfaction du preneur de décision. Dans leur article, Loomes et Sugden (1987b) ont tenté de tester les prédictions des deux modèles de choix : la théorie du regret et la théorie de déception. Ils ont conçu une expérience permettant de déterminer les contributions de ces deux théories dans l'explication des modèles de prise de décision qui violent la théorie de l'utilité espérée. Leurs résultats sont généralement en accord avec les principes de la théorie de déception, et un peu plus ambigus au niveau de la théorie du regret. En effet, certaines preuves ont clairement mis en évidence l'effet du regret, certaines autres n'ont suggéré aucun effet; et certains comportements observés ont montré un effet significatif et opposé à celui éprouvé par la théorie du regret. En outre, Loomes et Sugden (1987) ont établi des expériences permettant de résoudre l'ambiguïté obtenue par les expériences précédentes et a examiné dans quelle mesure ses preuves permettent de clarifier la relation entre la déception et le regret. Les résultats obtenus par Loomes et Sugden (1987) montrent que l'effet du regret est clairement observable et statistiquement significatif et que l'effet de la déception semble

être plutôt beaucoup plus faible. Ils ont constaté que le comportement observé soutient fortement la théorie du regret, et beaucoup moins la théorie de déception. Cette conjonction avec les résultats de Loomes et Sugden (1987b) permet d'avoir un modèle comportemental plus riche.

2.4.3. Les modèles fondamentaux de la théorie de déception.

Le modèle de Bell (1985). Bell (1985) a proposé un modèle de prise de décision basé sur la théorie de déception, appelé «le modèle de déception simple». Ce modèle repose sur la réaction psychologique éprouvée par l'individu en comparant le rendement de l'option choisie par l'individu avec ses espérances antérieures dans un cadre incertain. Bell (1985) a déterminé l'implication d'une telle émotion sur le comportement du preneur de décision qui cherche à minimiser sa déception. Il s'est appuyé sur les résultats de Kahneman et Tversky (1979) pour illustrer le principe de la substitution et pour montrer que la déception permet de fournir une explication à certaines violations observées (Machina, 1983).

Dans son modèle, Bell (1985) suppose que l'individu fait face à une loterie qui génère x dollars avec une probabilité p et y dollars avec une probabilité $(1 - p)$. L'anticipation de l'individu pour la loterie (x, p, y) , peut être exprimée par :

$$px + (1 - p)y,$$

où le rendement x est plus préféré que le rendement y et p est la probabilité de gain. Si le rendement y se produit, la déception du preneur de décision est exprimée par :

$$\text{Déception} = d(px + (1 - p)y - y) = dp(x - y),$$

avec $d \geq 0$ est une constante qui reflète le degré d'influence d'une unité de déception sur la psychologie de l'individu. Dans ce cas, la déception de l'individu est proportionnelle à la différence entre le rendement obtenu par l'individu et la valeur du rendement espéré. Si le rendement x se produit, l'individu va éprouver de l'allégresse qui est proportionnelle à la différence entre l'espérance de l'individu et le rendement obtenu. Cette allégresse est exprimée par :

$$\text{Allégresse} = e(x - px - (1 - p)y) = e(1 - p)(x - y),$$

où $e \geq 0$ est une constante qui reflète le degré d'influence d'une unité d'allégresse sur l'individu. Les deux expressions de l'allégresse et de la déception sont identiques sauf que les constantes e et d qui reflètent le compromis entre la monnaie et le bien-être de l'individu sont différentes.

Bell (1985) suppose que les préférences de l'individu vis-à-vis de la monnaie et de la déception ou de l'allégresse sont linéaires et additives :

$$\text{Utilité} = \text{fonction de paiement économique} + \text{satisfaction psychologique}.$$

Dans ce cadre, la satisfaction psychologique est positive pour exprimer l'allégresse et négative pour exprimer la déception. Bell (1985) a proposé 3 cas différents :

- Si $p = 0$: Il n'y a pas de chance de gagner et la perte est anticipée dans ce cas. Alors, la valeur de la déception est nulle et l'individu ne sera jamais déçu.
- Si $p = 1$: L'individu anticipe le gain. Alors, l'allégresse est nulle.
- Si $d = e$: L'allégresse et la déception sont égales et correspondent au niveau de préférences de l'individu. Elles s'annulent quand l'individu perd ses espérances, tel que :

$$p(\text{allégresse}) + (1 - p)(-\text{déception}) = p(e(1 - p)(x - y)) + (1 - p)(-dp(x - y)) = 0.$$

Dans ce cas, la déception et l'allégresse n'influencent pas le choix de l'individu.

Selon Bell (1985), la préférence du preneur de décision dépend du profit économique de l'option choisie et de sa satisfaction psychologique. La relation de préférence est additive. Ceci permet de constater que le modèle de déception simple peut avoir 3 expressions :

$$\begin{aligned} & (px + (1 - p)y) + (e - d)p(1 - p)(x - y), \\ & = (px + (1 - p)y) + (d - e)p(1 - p)(x - y), \end{aligned}$$

$$= y + \pi(p)(x - y),$$

où $\pi(p) = p - (d - e)p(1 - p)$ représente le poids de la décision et $(d - e)$ mesure l'influence relative de la déception et de l'allégresse sur les préférences de l'individu.

Bell (1985) suppose que la déception a un effet plus important sur l'individu que l'allégresse. En d'autres termes, l'individu souffre plus lorsqu'il éprouve de la déception et est moins influencé par l'allégresse quand elle prend place. En outre, ce chercheur a montré que son modèle permet d'expliquer le paradoxe d'Ellsberg (1961), l'effet du rapport commun et des autres comportements vis-à-vis du risque. Il suppose que l'équivalent certain de la loterie (x, p, y) est donné par :

$$px + (1 - p)y + (e - d)p(1 - p)(x - y).$$

Cet équivalent certain est cohérent avec l'explication qui suppose que l'individu a une valeur marginale décroissante et cherche à maximiser sa fonction d'utilité espérée $u(x)$. Cette fonction d'utilité est implicitement définie par :

$$u(p + (e - d)p(1 - p)) = p,$$

et explicitement par :

$$U(x) = (k - 1) + \frac{\sqrt{(1 - k)^2 + 4kx}}{2k},$$

où $k = d - e$. Cette fonction est croissante si $e - d > -1$ et concave si $d > e$.

En utilisant l'expression de l'équivalent certain, la quantité $(d - e)p(1 - p)(x - y)$ peut être interprétée comme une mesure de risque de la loterie. Cette mesure est similaire à la mesure de risque classique «la variance» :

$$\lambda p(1 - p)(x - y)^2,$$

où λ est une constante. Dans ce cas, la variance est une mesure de risque naturelle si l'individu cherche à diminuer les effets de la décroissance de la valeur marginale selon la relation de Pratt (1964) :

$$Eu(x) = u(0) + E(x)u'(0) + \frac{1}{2}E(x - E(x))^2u''(0).$$

Le modèle de Loomes et Sugden (1986). Loomes et Sugden (1986) ont établi un modèle de choix en présence de l'incertitude qui permet de générer une large classe de prédiction qui sont cohérentes avec les comportements des individus observés. Leur modèle revendique la violation du principe de la chose sûre et l'axiome des probabilités composées et propose une explication pour ces violations dans un cadre incertain. Dans leur modèle, Loomes et Sugden (1986) supposent que l'individu fait face à une loterie A_i avec n conséquences dont la probabilité de survenance du $j^{\text{ième}}$ état est donnée par p_j , tel que $0 \leq p_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Le rendement de la $i^{\text{ème}}$ action sous l'état j est notée par x_{ij} . Ainsi, ils supposent que chaque individu possède une fonction d'utilité classique $C(\cdot)$ qui permet d'attribuer un indice d'utilité pour chaque rendement. Cette fonction est notée par : c_{ij} .

Loomes et Sugden (1986) supposent que l'individu fait face à une loterie à une seule étape. La valeur de l'utilité espérée classique de cette loterie est donnée par :

$$\sum_{j=1}^n p_j c_{ij} = \bar{c}_i.$$

Dans ce cadre, la déception et l'allégresse sont représentées par une seule fonction de valeur réelle différentiable, tel que $D(\cdot)$ attribue un incrément ou un décrétement pour chaque valeur possible de la différence entre l'utilité du $j^{\text{ième}}$ état et l'espérance antérieure de l'individu : $c_{ij} - \bar{c}_i$. Cet incrément ou

décroissement permet de modifier l'utilité obtenue sous l'état j . Cette utilité modifiée est exprimée par : $c_{ij} + D(c_{ij} - \bar{c}_i)$ et l'utilité espérée de l'action i est donnée par :

$$E_i = \sum_{j=1}^n p_j [c_{ij} + D(c_{ij} - \bar{c}_i)].$$

Loomes et Sugden (1986) supposent que l'individu anticipe antérieurement sa déception ou son allégresse et cherche à maximiser sa fonction d'utilité modifiée. Ils supposent ainsi qu'un indice de valeur réelle E_i est attribué pour chaque action A_i , tel que : $A_i \succcurlyeq A_k \leftrightarrow E_i \succcurlyeq E_k$. Ils ont imposé certaines restrictions au niveau de la fonction $D(\cdot)$ afin de déterminer le sentiment de l'individu : Quand la fonction $D(\cdot)$ est linéaire, la fonction d'utilité de l'individu est cohérente à la fonction d'utilité classique et le comportement de cet individu est cohérent avec la théorie de l'utilité espérée classique. Cependant, quand la fonction $D(\cdot)$ prend une autre forme, il s'agit de la violation de la théorie de l'utilité espérée classique. Ainsi, Loomes et Sugden (1986) supposent que la fonction $D(c_{ij} - \bar{c}_i)$ est convexe pour des valeurs positives de $(c_{ij} - \bar{c}_i)$ et concave pour des valeurs négatives de $(c_{ij} - \bar{c}_i)$. Dans ce cas, l'intensité de la déception et de l'allégresse augmente en fonction de cette marge. Ils ont imposé des hypothèses concernant les deux fonctions $D(\cdot)$ et $C(\cdot)$. Ils supposent que la fonction $D(\cdot)$ est linéaire et qu'il n'y a pas un argument pour lequel la déception est plus intense que l'allégresse ou vice versa : $D(c_{ij} - \bar{c}_i) = -D(\bar{c}_i - c_{ij})$, pour tous c_{ij} et \bar{c}_i .

En outre, Loomes et Sugden (1986) ont montré que la théorie de la déception ne permet pas de violer le principe de la chose sûre de Savage (1954). Dans ce cas, ces chercheurs supposent qu'un individu fait face à 2 loteries A_1 et A_2 avec 3 événements dont la probabilité de survenance du premier, du deuxième et du troisième événement sont respectivement données par : λp , $(1 - \lambda)p$ et $(1 - p)$. Ces deux loteries présentent la même espérance antérieure \bar{c} et le même rendement au 3^{ième} état c^* . Ils suggèrent que :

$$A_1 \succcurlyeq A_2 \Leftrightarrow D(\lambda c - c) \succcurlyeq \lambda D(c - c) + (1 - \lambda)D(-c),$$

où λc est le rendement de la loterie A_1 au premier et au deuxième état ; le rendement de la loterie A_2 au premier état est donné par c et au deuxième état est nul. Le rendement commun entre les deux loteries c^* n'influence pas l'équation précédente. Il existe une valeur θ , pour laquelle c^* peut-être au-dessous de θ et :

$$\frac{(-\lambda c p)}{(1 - p)} < \theta < \frac{c(1 - \lambda p)}{(1 - p)}; A_1 \succcurlyeq A_2 \Leftrightarrow c^* \succcurlyeq \theta.$$

Il y aura un moment où $A_1 \succ A_2$ passe à $A_1 \prec A_2$. Ceci présente la violation du principe de la chose sûre de Savage (1954). Ce résultat reste vrai si $D(\varepsilon)$ est différente de $-D(-\varepsilon)$ pour tout ε . Cependant, si $D(\varepsilon) = -D(-\varepsilon)$, alors la valeur de θ peut-être plus précise et sa relation avec λ et p peut être déterminée d'une manière plus claire. Lorsque la fonction $C(\cdot)$ est concave, la disparité entre les valeurs espérées et le rendement réel peut être plus importante. En outre, le modèle de violation de l'utilité espérée classique est observé lorsque la disparité au niveau de la valeur espérée est importante.

Loomes et Sugden (1986) ont trouvé que l'utilité espérée modifiée d'une loterie à une seule étape dépend de la nature des rendements de la loterie et de leurs probabilités. Ainsi, les modèles proposés par Samuelson (1950) ; Allais (1953) ; Chew et MacCrimmon (1979) ; Machina (1982) ; Fishburn (1983) et Bell (1985) ont proposé des préférences qui ne satisfont pas l'axiome d'indépendance. Machina (1982) a montré que les modèles de Chew et MacCrimmon (1979) et Fishburn (1983) impliquent un éventail de courbes d'indifférences définies sur les distributions de probabilités (Samuelson, 1950). Cependant, les axiomes de la théorie de l'utilité espérée classique supposent que les courbes d'indifférences présentent la même pente. Machina (1982) a proposé une caractéristique paramétrique à l'ensemble des courbes d'indifférence et a défini une courbe d'utilité locale $U(x, F)$ où x est une conséquence et F est la fonction de distribution cumulative des conséquences. Le modèle de Loomes et Sugden (1986) rentre dans le cadre du modèle de Machina (1983) et permet d'étendre ce que Machina a proposé concernant les préférences fonctionnelles à travers les distributions de probabilités des loteries à une seule étape.

La fonction d'utilité locale est définie par :

$$U(x_{ij}, F) = c_{ij} \left[1 - \sum_{j=1}^n p_j D'(c_{ij} - \bar{c}_i) \right] + D(c_{ij} - \bar{c}_i).$$

Cette expression montre que l'hypothèse de Loomes et Sugden (1986) qui supposent que $D(\cdot)$ est une fonction croissante et que $0 \leq D'(c_{ij} - \bar{c}_i) < 1$ pour tous $(c_{ij} - \bar{c}_i)$ et est satisfaite pour $U'(x_{ij} - F) > 0$ et pour la dominance stochastique de premier ordre.

Malgré leur pertinence psychologique, certains chercheurs ont trouvé que les modèles de Bell (1985) et de Loomes et Sugden (1986) présentent certaines limites et qu'ils sont irrationnels et normativement inacceptables. Entre-temps, plusieurs modèles de la théorie de déception ont été développés tels que les mesures de la déception diffèrent d'un modèle à un autre : Gul (1991) a défini l'équivalent certain d'une loterie comme le point de référence de son modèle pour mesurer la déception et l'allégresse; Grant et Kajii (1998) ont défini le meilleur rendement comme un point de référence; Diecidue et van de Ven (2006) ont défini le point de référence par le niveau d'aspiration de l'individu; Cillo et Delquié (2006) ont représenté le point de référence par les autres rendements possibles de la loterie et Chauveau et Nalpas (2009) ont défini l'utilité espérée de la loterie comme le point de référence. De plus, Jia et al. (2001) ont généralisé l'approche de Bell (1985) et ont déformé sa valeur espérée. Enfin, Grant et Kajii (1998) ont adopté un modèle de l'utilité espérée dépendante du rang de Quiggin (1982) pour développer leur modèle basé sur la théorie de déception.

Le modèle de la théorie de déception de Jia et al. (2001). Jia et al. (2001) ont proposé des extensions de la théorie de déception de Bell (1985) en utilisant un modèle de déception linéaire afin de prédire le comportement de l'individu et de résoudre le paradoxe d'Allais et de la théorie de déception de Loomes et Sugden (1986) en se basant sur leur théorie «risk-value»¹⁵. Ils ont introduit des formes fonctionnelles explicites pour modéliser l'effet du sentiment de la déception sur le choix de l'individu dans un cadre risqué. Jia et Dyer (1995) ont montré que les modèles risk-value sont flexibles pour modéliser les préférences de l'individu et pour modéliser le comportement observé de l'individu dans un cadre risqué et que l'utilisation de la structure de risk-value permet d'avoir une nouvelle vision sur les conséquences de la déception sur les modèles de prise de décision.

Dans leur modèle, Jia et al. (2001) supposent que la fonction d'utilité de l'investisseur est linéaire par morceau est exprimée par :

$$U_0(x) = \begin{cases} ex & \text{si } x \geq 0 \\ dx & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

où e et d sont deux constantes. Quand la déception domine l'allégresse ($d > e$), le comportement de l'individu averse aux pertes peut être modélisé en utilisant la fonction d'utilité par morceaux. Dans ce cas, l'expression de $U_0(x)$ implique une aversion au risque pour les loteries avec des gains et des pertes. La mesure du risque standard de la fonction de l'utilité linéaire est donnée par :

$$R(x) = dE^- [|x - \bar{x}|] - eE^+ [|x - \bar{x}|],$$

où $E^- [|x - \bar{x}|] = \sum_{x_i < \bar{x}} p_i |x_i - \bar{x}|$ est la perte espérée de la loterie; $E^+ [|x - \bar{x}|] = \sum_{x_i \geq \bar{x}} p_i |x_i - \bar{x}|$ est le gain espéré relatif à la moyenne et p_i est la probabilité associée à x_i .

Selon Bell (1985), $dE^- [|x - \bar{x}|]$ est une mesure de la déception espérée; $eE^+ [|x - \bar{x}|]$ est une mesure d'allégresse espérée et $R(x)$ représente la satisfaction psychologique de l'individu. Lorsque la mesure

¹⁵En se basant sur les axiomes de l'utilité espérée et la condition d'indépendance, la forme basique du modèle risk-value est donnée par :

$$f(x - x) = v(x) - \phi(x)(R(x) - R(0)),$$

où x est une variable aléatoire qui représente la loterie; \bar{x} est la moyenne de la loterie; $x - \bar{x}$ est la variable du risque standard avec 0 est la valeur espérée; $v(\bar{x})$ est une fonction croissante de la valeur subjective de la moyenne \bar{x} ; $\phi(\bar{x}) > 0$ est le facteur d'arbitrage qui dépend de la moyenne \bar{x} ; $R(x) = -E(U_0(x)) = -E(U_0(x - \bar{x}))$ est une mesure de risque standard (Jia et Dyer, 1996); $R(0) = -U_0(x)$ est une constante et $U_0(\cdot)$ est une fonction d'utilité de VNMM.

de risque est linéaire et le facteur d'arbitrage est constant dans le modèle risk-value, Jia et al. (2001) ont établi une forme plus simplifiée du modèle risk-value basée sur une mesure de risque standard :

$$f(\bar{x}, x) = \bar{x} - \{dE^- [|x - \bar{x}|] - eE^+ [|x - \bar{x}|\]\}.$$

Ce modèle est appelé «le modèle de déception généralisé». Ce modèle est cohérent au modèle de Bell (1985) à travers ces 2 hypothèses :

·La déception et l'allégresse sont proportionnelles à la différence entre le rendement et le rendement espéré ;

·L'individu est neutre au risque s'il n'y a ni effet de déception ni effet d'allégresse.

Le modèle de Jia et al. (2001) est cohérent au modèle de Bell (1985) lorsque l'individu fait face à une loterie à deux rendements. D'où, le modèle de Bell est un cas particulier du modèle risk-value. Le modèle de déception généralisé est cohérent au modèle d'utilité en escalier linéaire quand les loteries possèdent 0 comme une valeur espérée. Ainsi, le modèle de déception peut être transformé en une forme alternative du modèle de l'utilité pondérée (Karmarkar, 1978 ; Kaheman et Tversky, 1979 ; Chew et McCrimmon, 1979).

Soient les rendements d'une loterie donnés par :

$$x_{m+n} > \dots > x_k \dots > x_{m+1} > \bar{x} > x_m > \dots > x_j \dots > x_1,$$

où x_j représente le rendement associé à la déception et x_k représente les rendements associés à l'allégresse. Par conséquent, Jia et al. (2001) ont établi une représentation alternative à leur modèle général :

$$f(\bar{x}, x) = \sum_{j=1}^m \pi^+(p_j)x_j + \sum_{k=m+1}^{m+n} \pi^-(p_k)x_k,$$

où $\pi^+(p_j) = (1 + \lambda \sum_{k=m+1}^{m+n} p_k)p_j$ et $\pi^-(p_k) = (1 - \lambda \sum_{j=1}^m p_j)p_k$, tel que : $\lambda = d - e$.

Ce modèle montre comment les pondérations de la décision non linéaire peuvent être interprétées en termes de déception et d'allégresse. Si $\lambda > 0$ (aversion au risque), alors les probabilités associées aux rendements qui génèrent la déception seront surpondérées ($\pi^+(p_j) > p_j$) et les probabilités associées à l'allégresse seront sous-pondérées ($\pi^-(p_k) < p_k$).

Par la suite, Jia et al. (2001) ont développé un modèle de déception non linéaire, tel que la déception et l'allégresse ne sont pas linéairement proportionnelles à la différence entre la valeur du rendement espéré et le rendement. Ils ont développé un modèle de déception dont la fonction d'utilité est une fonction de puissance en escaliers (Fishburn et Kochberger, 1979 ; Tversky et Kahneman, 1992). Dans ce contexte la fonction d'utilité est donnée par :

$$u(x) = \left\{ \begin{array}{l} ex^{\theta_1} \text{ quand } x \geq 0 \\ -dx^{\theta_2} \text{ quand } x < 0 \end{array} \right\},$$

où e, d, θ_1 et θ_2 sont des constantes. La mesure de risque de ce modèle est donnée par :

$$R(x) = dE^- [|x - \bar{x}|^{\theta_2}] - eE^+ [|x - \bar{x}|^{\theta_1}],$$

où $E^- [|x - \bar{x}|^{\theta_2}] = \sum_{x_i < \bar{x}} p_i |x_i - \bar{x}|^{\theta_2}$ et $E^+ [|x - \bar{x}|^{\theta_1}] = \sum_{x_i \geq \bar{x}} p_i |x_i - \bar{x}|^{\theta_1}$.

Ce modèle et le modèle de Bell (1985) permettent d'avoir une aversion au risque constante (Jia et Dyer, 1996). Ces modèles ne sont pas cohérents aux comportements caractérisés par une aversion au risque décroissante. Le modèle de déception de Jia et al. (2001) correspond au comportement caractérisé par une aversion au risque décroissante :

$$f(\bar{x}, x) = \bar{x} - \phi(\bar{x})\{dE^- [|x - \bar{x}|^{\theta_2}] - eE^+ [|x - \bar{x}|^{\theta_1}]\},$$

où $\phi(\bar{x}) > 0$ est une fonction décroissante, tel que : $\phi(\bar{x}) = e^{-a\bar{x}}$ où $a > 0$. Quand $\theta_1 = \theta_2 = 1$, ce modèle est réduit au modèle de déception avec une utilité linéaire par morceaux.

Le modèle de Jia et al. (2001) permet d'avoir une forme fonctionnelle et explicite du modèle de Loomes et Sugden (1986). Leur modèle permet d'avoir un traitement asymétrique entre la déception et l'allégresse. Contrairement au modèle de Loomes et Sugden (1986) basé sur une aversion au risque

constante, le modèle de Jia et al. (2001) répond à un comportement dont l'aversion au risque est décroissante.

Le modèle de l'aversion à la déception de Gul (1991). Gul (1991) a développé un modèle de prise de décision alternatif à la théorie de l'utilité espérée classique en imposant certaines restrictions au niveau de l'axiome d'indépendance. Dans son modèle, Gul (1991) a remplacé l'axiome d'indépendance par un axiome alternatif qui intègre explicitement des explications intuitives. Il a caractérisé les préférences qui décrivent le comportement de l'individu par une fonction de valeurs réelles μ définie par un ensemble de prix et un nombre réel $\beta > -1$. Il a montré que la théorie de l'utilité espérée classique VNM est un cas particulier de son modèle, lorsque $\beta = 0$. Il a décrit les préférences par une aversion à la déception ($\beta \geq 0$) et une aversion à la déception stricte ($\beta > 0$). Il a montré aussi qu'il existe un seul paramètre positif β pour lequel le comportement des individus est cohérent au paradoxe d'Allais (1953). Ainsi, il a déterminé la relation entre l'aversion au risque et l'aversion à la déception et a montré que l'aversion au risque implique l'aversion à la déception. Les mesures de l'aversion au risque d'Arrow-Pratt peuvent être généralisées d'une manière directe dans son modèle.

Soient $b > w$ et $x = [b, w]$ un ensemble de prix. \mathcal{L} est l'ensemble des loteries définies sur ces prix et $p \in \mathcal{L}$ est le support de la loterie P . Soient $B(P)$ et $W(P)$ des ensembles de loteries avec un support respectivement plus élevé et plus faible que p . Supposant que (α, q, r) désigne «la décomposition de la déception et de l'allégresse» de P si et seulement si $q \in B(p), r \in W(p)$ et $\alpha q + (1 - \alpha)r = p$, tels que $\alpha \in [0, 1]$; $p, q \in L$ et $\alpha p + (1 - \alpha)q$ est la loterie $r \in L$. Pour tout $x \in X$, $r(x) = \alpha p(x) + (1 - \alpha)q(x)$ et $x \in X$ désigne une loterie P , tel que $P(x) = 1$.

Le modèle de «la de la décomposition de la déception et de l'allégresse» est construit comme suit : les rendements de la loterie sont divisés en 2 parties : les prix qui sont préférables à l'équivalent certain de la loterie (allégresse) et les prix qui sont moins attractifs à l'équivalent certain (déception). Les prix d'allégresse sont divisés par une probabilité α et permettent d'avoir q et les prix de la déception sont divisés par $(1 - \alpha)$ et permettent d'obtenir r . Alors :

$$\alpha q + (1 - \alpha)r = P.$$

Supposant que $e(p)$ désigne l'allégresse et $d(p)$ désigne la déception, pour la loterie P , tels que : $e(p) = \sum_{x>p} p(x)$ et $d(p) = \sum_{x<p} p(x)$. Si la loterie P n'a pas un équivalent certain avec une probabilité positive, alors : $e(p) + d(p) = 1$.

Gul (1991) a proposé certains axiomes pour son modèle :

Axiome 1 : La relation de préférence est complète et transitive.

Axiome 2 : La continuité : $\forall p \in \mathcal{L}$, les ensembles $\{q \in L/q \succcurlyeq p\}$ et $\{q \in \mathcal{L}/p \succcurlyeq q\}$ sont fermés. Cet axiome implique que la fonction de l'équivalent certain : $\mathcal{L} \rightarrow [w, b]$ tel que $CE(P) \sim p$ est bien défini.

Axiome 3 : Une faible indépendance : Cet axiome est une restriction de l'axiome d'indépendance et détermine l'explication intuitive de Gul (1991) pour le paradoxe d'Allais (1953) :

$p_1 \succcurlyeq p_2, a \in [0, 1], Z \in X$ impliquent que $ap_1 + (1 - a)Z \succcurlyeq ap_2 + (1 - a)Z$, où il existe $(\lambda, q_i, r_i) \in D(p_i)$ tels que : $q_i \in B(ap_i + (1 - a)Z)$ et $r_i \in W(ap_i + (1 - a)Z)$, avec : $i = 1, 2$. Les probabilités de la déception des loteries P_1 et P_2 ont les mêmes et le prix P_i d'allégresse (déception) ne passe pas à un prix de déception (allégresse) de $aP_i + (1 - a)x$. Ceci présente une explication intuitive du paradoxe d'Allais (1953).

Axiome 4 : La symétrie : Pour $i = 1, 2$; $(\alpha, p_i, r_i) \in D$ implique $\alpha p_1 + (1 - \alpha)w \succcurlyeq \alpha p_2 + (1 - \alpha)w$ si, et seulement si, $\alpha b + (1 - \alpha)p_1 \succcurlyeq \alpha b + (1 - \alpha)p_2$.

Soient (u, β) les paramètres de préférence satisfaisant les axiomes 1 et 4. Ces paramètres sont définis par :

$$\phi(x, v) = \left\{ \begin{array}{l} u(x); \text{ pour tout } x, \text{ telque : } u(x) \leq v \\ \frac{u(x) + \beta v}{1 + \beta}; \text{ pour tout } x, \text{ telque : } u(x) > v \end{array} \right\}.$$

Ceci permet d'obtenir $\sum_x \phi(x, v)p(x) = v$ si et seulement si la fonction d'utilité $V = v(p)$. Alors, ϕ est la fonction d'utilité locale pour les préférences (μ, β) (Deckel, 1986). Les propriétés de cette fonction sont données par :

- Les prix d'allégresse et les prix de déception sont évalués par 2 fonctions d'utilité différentes ;
- L'asymétrie de l'axiome 4 garantit que ces fonctions d'utilité présentent les mêmes préférences ;
- La fonction des prix d'allégresse $\frac{v(x)+\beta(v)}{1+\beta}$ est une transformation positive affine de la fonction d'utilité des prix de la déception $u(x)$.

Gul (1991) a établi la relation entre l'aversion au risque et l'aversion à la déception et a développé une mesure d'aversion au risque pour les préférences qui satisfont les axiomes 1 et 4. L'individu ayant (u, β) est averse au risque si et seulement si $\beta \geq 0$ et sa fonction d'utilité locale u est concave (Dekel, 1986). Ceci montre que l'aversion au risque implique l'aversion à la déception et la concavité ou la convexité de la fonction u détermine l'attitude de l'individu vis-à-vis du risque.

Le modèle de déception Cillo et Deliquié (2006). Cillo et Deliquié (2006) ont développé un modèle de déception dans lequel l'allégresse et la déception surviennent à partir de la comparaison entre le rendement reçu par l'individu et les autres rendements de la loterie et non pas avec la valeur espérée par l'individu. Leur approche offre une structure plus riche que les modèles de la théorie de déception antérieurs et conduit à la formation d'une fonction d'utilité dépendante du rang. Cette approche est obtenue par la déviation par rapport à la théorie de l'utilité espérée normative classique et offre un raisonnement psychologique très clair par rapport à la transformation des probabilités subjectives. Plusieurs modèles de déception antérieurs à celui de Cillo et Deliquié (2006) ont utilisé la valeur espérée ou l'équivalent certain de la loterie comme un point de référence permettant de mesurer la déception (Bell, 1985 ; Loomes et Sugden, 1986 ; Gul, 1991 ; Jia et al, 2001). Cependant, Cillo et Deliquié (2006) ont proposé une autre approche qui suppose que la déception et l'allégresse ne sont pas mesurées par la valeur espérée de la loterie mais plutôt en comparant le rendement obtenu par l'individu avec le rendement qui aurait pu être obtenu. Ils ont trouvé qu'il est plus naturel que l'individu compare son profit avec le profit qui aurait pu se produire. En effet, ils ont constaté que même si la valeur du rendement reçu par l'individu est supérieure à la valeur espérée, l'individu peut ressentir une certaine déception car il avait la possibilité d'avoir un rendement plus important.

Cillo et Deliquié (2006) supposent que l'intensité de la déception de recevoir un rendement x_i au lieu d'un autre rendement supérieur x_k , tel que $k < i$, augmente en proportion avec la différence entre les deux rendements ($x_k - x_i$) et avec la probabilité p_k de l'option non choisie. En outre, si l'un de ces termes est nul, l'individu n'éprouve pas de déception. Dans ce cadre, la déception de recevoir x_i au lieu de x_k est donnée par :

$$\text{déception} = p_k(x_k - x_i).$$

Cette expression est non négative et est croissante avec x_k et p_k . Pour tous les rendements supérieurs à x_i , la déception potentielle ressentie en recevant x_i est mesurée par :

$$\sum_{k=1}^{i-1} p_k(x_k - x_i).$$

Dans la même logique, pour tous les rendements inférieurs au rendement reçu par l'individu, l'allégresse totale ressentie par un individu est donnée par :

$$\sum_{k=i+1}^n p_k(x_i - x_k).$$

Par conséquent, l'utilité d'un rendement incorporant l'allégresse et la déception en même temps est définie par :

$$u(x_i) = x_i - D\left(\sum_{k=1}^{i-1} p_k(x_k - x_i)\right) + E\left(\sum_{k=i+1}^n p_k(x_i - x_k)\right),$$

où $D(\cdot)$ et $E(\cdot)$ sont des fonctions positivement évaluées, non décroissantes et déterminants les effets de la déception et de l'allégresse respectivement.

L'utilité totale de la loterie est donnée par :

$$u(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - D\left(\sum_{k<1} p_k(x_k - x_i)\right) + E\left(\sum_{k>i} p_k(x_i - x_k)\right)).$$

Le modèle de Cillo et Deliquié (2006) permet d'expliquer le paradoxe d'Allais (1953) et certains effets liés à l'incertitude, à savoir le problème traité par Kahneman et Tversky (1979). Ce modèle offre plus de flexibilité et est naturellement lié à la théorie dépendante du rang dans certains contextes. En effet, la transformation des probabilités cumulatives de la théorie dépendante du rang est toujours interprétée comme des cas d'optimisme ou pessimisme.

Le modèle de déception de Chauveau et Nalpas (2009). Chauveau et Nalpas (2009) ont analysé les conséquences de l'introduction des individus averses à la déception au marché financier. Ils ont montré qu'une personne averse à la déception est toujours pessimiste. Ils ont établi un modèle de prise de décision basé sur l'aversion à la déception dans un cadre risqué. Leur modèle est considéré comme un modèle axiomatique du modèle de Loomes et Sugden (1986). Chauveau et Nalpas (2009) ont défini la déception comme la différence entre la valeur de l'utilité espérée antérieure et la valeur de l'utilité espérée ex-post, tel que : $E_L(u(w)) - u(w)$. Face à une loterie L , la satisfaction de l'individu dépend de 2 éléments : l'utilité du rendement espérée et la déception. Dans ce cadre, Chauveau et Nalpas (2002) supposent que la satisfaction de l'individu est la somme de la valeur espérée de la fonction d'utilité cardinale $E_L(u(w))$, dans laquelle la déformation des probabilités dépend de l'intensité de la déception, et de la fonction de la déception. Cette satisfaction est exprimée par :

$$U(L) = E_L(u(w)) - D[E_L(u(w)) - u(w)].$$

Dans leur modèle, Chauveau et Nalpas (2002) supposent que le preneur de décision averse à la déception est pessimiste dans le sens où la distribution des probabilités transformées est stochastiquement dominée par les probabilités originales. Ils ont présenté 2 concepts permettant de décrire le comportement de l'individu : l'aversion au risque d'Arrow-Pratt et l'aversion à la déception. En outre, ils ont défini l'utilité espérée de la loterie comme le point de référence pour mesurer la déception et l'allégresse. Ils ont développé la notion du prix de la déception nulle (zero disappointment prize) «ZDP» et l'ont définie comme un point de référence qui permet de diviser le support de la loterie en 2 parties : déception et allégresse. ZDP est la valeur du rendement de la loterie neutre qui n'implique ni une déception ni une allégresse pour un agent ayant choisi de parier avec une loterie L . Ce prix est noté par Z_L et est établi par :

$$ED(Z_L) = D(u(Z_L) - E_L[u(\tilde{w})]) = 0.$$

Ceci permet d'avoir cette relation :

$$u(Z_L) - E_L[u(\tilde{w})] = 0 \Leftrightarrow D(u(Z_L) - E_L[u(\tilde{w})]) = 0.$$

Cette expression est équivalente à :

$$Z_L = u^{-1}[E_L(u(\tilde{w}))] = 0,$$

où ED représente l'intensité de la déception ou de l'allégresse ressentie par l'individu et dépend de la différence entre l'utilité élémentaire $u(w)$ et sa valeur espérée $E_L[u(\tilde{w})]$, tels que : $ED(w) = D(u(w) - E_L[u(\tilde{w})])$; u est une fonction strictement croissante et $D(\cdot)$ satisfait $D(0) = 0$ et $\frac{dD}{dg(\cdot)} > 0$.

Dans l'approche de Chauveau et Nalpas (2009), l'équivalent certain ne coïncide pas avec le ZDP. La relation entre ces deux termes est donnée par :

$$CE(L) = u^{-1}(U(L)) = u^{-1}(E_L[U(L(\tilde{w}))]) \leftrightarrow u(CE(L)) = u(Z_L) - E_L(ED(\tilde{w})).$$

Chauveau et Nalpas (2009) supposent que l'équivalent certain de la loterie est au-dessus (ou au-dessous) du ZDP si l'allégresse (ou la déception) se produit. Ceci présente la différence fondamentale entre le modèle de Chauveau et Nalpas et celui de Gul (1991).

3. Conclusion

Dans ce chapitre théorique, nous avons présenté des généralités sur les modèles de prise de décision. Nous avons examiné la théorie de prise de décision classique (la théorie de l'utilité espérée) en déterminant ses origines et ses axiomes. Cette théorie est très importante et a pris de l'ampleur dans la littérature économique. Cependant, cette théorie a été remise en cause par plusieurs chercheurs vu que ses axiomes ne sont pas cohérents avec le comportement humain réel. Dans ce contexte, nous avons étudié les critiques de la théorie de l'utilité espérée (Paradoxe d'Allais, paradoxe d'Ellsberg, paradoxe de Friedman et Savage et la Customary Wealth theory de Markowitz). Par la suite, nous avons présenté les principales approches alternatives à cette théorie de décision (les théories de l'utilité non-espérée), à savoir : la théorie des perspectives cumulées (CPT), la théorie dépendante du rang (RDEU), la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception. Ces trois dernières théories ont été largement appliquées dans le cadre de la gestion de portefeuille statique. Ceci fera l'objet de notre deuxième chapitre.

CHAPITRE 2

Gestion de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale

1. Introduction

L'économie traditionnelle permet de présenter des résultats et des recommandations dont les valeurs dépendent de la capacité des individus à collecter et à traiter les informations d'une manière optimale. Cette discipline repose sur la rationalité des acteurs. Depuis les années 1960, la psychologie sociale, la psychologie cognitive et les études expérimentales ont démontré l'importance des biais cognitifs¹ et des heuristiques² dans le processus de prise de décision. Ceci a nécessité l'introduction d'une nouvelle économie permettant de prendre en compte le rôle des émotions dans la prise de décision, appelée : «Économie comportementale». Le prix Nobel d'économie a couronné Daniel Kahneman en 2002 pour ses travaux pionniers conjointement avec Vernon Smith. Ce sont les travaux fondateurs de la théorie des perspectives, qui est la base de la finance comportementale. Kahneman (2002) a montré que les individus ne sont pas rationnels même s'ils sont raisonnables dans leurs choix et leurs décisions. En effet, les décisions sont prises à partir des erreurs de jugement et de calcul qui révèlent des heuristiques déficientes.

L'économie comportementale, est définie comme une combinaison de la psychologie et de l'économie, se base sur les anomalies économiques dues à des biais comportementaux, qui peuvent être individuels ou collectifs, cognitifs ou émotionnels. Elle permet d'expliquer l'irrationalité au niveau des comportements. En d'autres termes, elle permet d'étudier ce qui se passe dans un marché où les individus affichent des complications et des limitations au niveau de leurs comportements (Mullainathan et Thaler, 2000). Kahneman et Tversky (1974) ont développé certaines recherches qui dominent les jugements et la prise de décision et ont montré que les individus utilisent des heuristiques cognitives qui permettent de réduire la complexité au niveau des jugements probabilistes. Ils trouvent que ces heuristiques sont très utilisées et qu'elles entraînent parfois des erreurs très graves. Une large littérature s'est développée autour des biais cognitifs, à savoir : le conservatisme, la surconfiance, l'aversion aux pertes et la comptabilité mentale ; et des heuristiques, à savoir : la représentativité heuristique et l'ancrage mental (Kahneman et Tversky, 1979). Ces biais comportementaux interviennent au moment de la prise de décision en présence de l'incertitude.

La finance comportementale, qui est une composante de l'économie comportementale, est une nouvelle approche qui a émergé pour répondre aux difficultés rencontrées par le paradigme traditionnel au niveau des marchés financiers. En effet, les approches comportementales sont étudiées sur la manière dont les individus se comportent en se basant sur des preuves expérimentales. Ces approches permettent d'expliquer les faits réels mieux que la finance classique. La finance comportementale permet d'explorer le comportement des individus, d'une manière directe ou indirecte, en examinant leurs différents esprits, leurs désirs, leurs erreurs, leurs préférences et leurs comportements par des tests

¹Les biais cognitifs ont été introduits par Kahneman et Tversky en 1971. Un biais cognitif est une limitation de la pensée humaine ou une faille dans le jugement qui proviennent à partir d'erreurs de mémoire, d'attributions sociales, et d'erreurs de calcul (telles que les erreurs statistiques).

²Le concept «heuristique» a été introduit par Simon en 1955. Ce dernier trouve que les heuristiques sont des stratégies adaptatives utilisées par les individus pour faire face à leurs capacités de traiter des informations très limitées. En effet, une heuristique est un raccourci mental qui aide les individus à prendre des décisions et faire des jugements rapidement sans passer beaucoup de temps à étudier et à analyser les informations.

expérimentaux. Sewell (2010) a montré que la finance comportementale est l'étude qui porte sur l'influence de la psychologie sur le comportement des agents financiers et sur son effet ultérieur sur le marché. Ainsi, la finance comportementale est considérée comme l'étude qui porte sur la façon selon laquelle la psychologie influence le comportement des individus, au niveau individuel ou collectif, sur les marchés financiers.

Contrairement à la finance traditionnelle qui suppose que les opportunités d'arbitrage ne doivent pas exister, plusieurs chercheurs ont proposé des preuves qui affirment le contraire. En effet, Shleifer et Vishny (1997) ont montré qu'il existe des situations où les opportunités d'arbitrage existent mais ne disparaissent pas rapidement, ce sont «les limites d'arbitrage». Ce sont des situations où les limites d'arbitrage ne peuvent pas être expliquées par la finance classique, mais peuvent être expliquées en utilisant la psychologie sociale. Les limites d'arbitrage supposent que les arbitragistes ne peuvent pas profiter des perturbations du marché financier causées par la rationalité des investisseurs (Barberis et Thaler, 2002). En outre, Barberis et Thaler (2002) ont montré que la finance comportementale est basée sur deux blocs : les limites d'arbitrage, qui cherchent à expliquer l'existence des opportunités d'arbitrage, et la psychologie, qui permet de détecter toutes les déviations observées sur le marché. Ils supposent que les arbitragistes coexistent avec les investisseurs irrationnels sur le marché. La finance comportementale substitue les individus rationnels dans la finance classique par des personnes normales, qui ne sont pas des individus irrationnels, mais qui ont un excès de confiance ou de recul (biais cognitif), ou montrent un excès de peur ou d'espoir. Ainsi, la finance comportementale remplace la théorie moderne du portefeuille «moyenne-variance» (Markowitz, 1952) par la théorie comportementale du portefeuille, et le modèle d'évaluation des actifs financiers classique CAPM et tous les modèles dont le rendement espéré est déterminé par le risque, par un modèle comportemental d'évaluation du prix des actifs financiers. Thaler (1999) a pensé que la finance comportementale va prendre fin au cours de l'année 1999. Il trouve que la finance comportementale prend fin dès qu'une révolution contradictoire à l'établissement de la théorie de l'économie comportementale prend place. Cependant, après la crise des Subprimes 2008, la finance comportementale et les limites d'arbitrage sont devenus des méthodes potentielles permettant d'évaluer les différentes régulations dans la sphère financière (Herschberg, 2012).

Dans ce chapitre, nous examinons le problème d'optimisation de portefeuille dans un cadre statique dans le cadre de la finance moderne d'une part et dans le cadre de la finance comportementale d'autre part. Dans un premier temps, nous présentons le modèle de la gestion de portefeuille moderne «moyenne-variance» de Markowitz (1952). Nous appliquons les données de notre échantillon, qui porte sur les rendements estimés et annualisés de trois indices (*S&P 500*, *Euro Stoxx 50* et *SSE Composite*) sur une période de 10 ans (du 1^{er} décembre 2007 jusqu'au 31 janvier 2018), sur les résultats de l'approche moyenne-variance en utilisant Matlab. Ceci nous permet d'établir la frontière efficiente et les caractéristiques (le rendement espéré, le risque et les pondérations des indices) du portefeuille efficient pour un niveau d'aversion au risque bien déterminé. Dans un second temps, nous étudions l'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale. D'abord, nous présentons un modèle d'optimisation de portefeuille selon la fonction CPT (Bernard et Ghossoub, 2010). Ensuite, nous étudions l'optimisation de portefeuille selon la comptabilité mentale, en nous basant sur le critère de type «Safety-First» (Roy, 1952). Nous présentons également la théorie SP/A (Lopes, 1987) et la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000), qui est la combinaison de la théorie SP/A et de la théorie des perspectives cumulées (CPT). Nous examinons par la suite le positionnement optimal du portefeuille standard selon la comptabilité mentale en introduisant le modèle de Das et Statman (2010). En outre, nous déterminons le portefeuille optimal standard selon la théorie de l'ambiguïté en nous basant sur le problème d'optimisation robuste de Koeing et Tütüncü (2004). Dans cette partie, nous présentons théoriquement le problème d'optimisation robuste et nous comparons le portefeuille efficient classique et le portefeuille efficient robuste. Ensuite, nous établissons un modèle d'optimisation de portefeuille robuste pour trois cas différents : l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espéré des actifs ; l'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance des rendements des actifs et enfin l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements

espéré et la matrice variance-covariance des actifs. Nous appliquons les données de notre échantillon sur les résultats antérieurs, en prenant en compte l'aversion au risque de l'individu, afin de déterminer les caractéristiques du portefeuille efficient robuste pour chaque cas. Enfin, nous présentons certains modèles d'optimisation de portefeuille standard selon la théorie du regret et la théorie de déception.

2. Présentation de l'échantillon

Dans cette partie empirique, notre étude porte sur les cours mensuels de 3 indices boursiers : *S&P 500* ; *Eurostoxx 50* et *SSE Composite* sur une période de 10 ans, allant du 1^{er} décembre 2007 jusqu'au 31 janvier 2018. Ceci nous permet d'avoir 121 observations pour chacun de ces indices.

D'abord, l'indice boursier *S&P 500* (Standard & Poor's 500 index), fondé en 1957, est un indice de la capitalisation boursière des 500 plus grandes sociétés américaines, cotées en bourse, en termes de valeur du marché. Il est composé et pondéré par l'indice S&P Dow Jones. Vu sa diversité, l'indice *S&P 500* est l'un des indices de référence les plus courants pour les marchés boursiers américains. Il est considéré comme un indicateur de l'économie américaine.

Ensuite, l'indice *Euro Stoxx 50*, fondé en 1998, est un indice boursier pondéré en fonction de la capitalisation boursière des 50 grandes sociétés européennes opérant dans la zone euro. Il regroupe 50 sociétés les plus représentatives au sein des marchés européens et qui sont composées de 18 secteurs économiques différents. Les composants de l'indice *Euro Stoxx 50* sont sélectionnés en se basant sur un certain nombre de critères. Ainsi, ils sont pondérés en fonction de la capitalisation boursière flottante. L'indice *Euro Stoxx 50* est considéré comme l'indice de référence des marchés européens.

Enfin, le *SSE Composite Index* (Shanghai Stock Exchange Composite Index), fondé en 1990, est un indice boursier qui est composé de toutes les actions de classes *A* et *B* cotées à la bourse de Shanghai, en Chine. Il est considéré comme l'indice représentatif de la bourse de Shanghai. Cet indice est un bon moyen permettant d'obtenir une vue d'ensemble de la performance des sociétés cotées sur la bourse de Shanghai.

3. Estimation et annualisation des données

En utilisant les prix des 3 indices (121 prix pour chaque indice), nous avons calculé les rendements mensuels de chaque indice en utilisant cette formule :

$$R_i = \ln\left(\frac{S_{it}}{S_{it(t-1)}}\right); \quad i = 1, 2, 3;$$

où S_{it} représente le prix de l'indice i à l'instant t . Ce calcul nous permet d'avoir 120 rendements pour chaque titre.

Les prix de trois indices boursiers (*S&P 500* ; *Euro Stoxx 50* et *SSE Composite*) suivent le mouvement Brownien géométrique, tel que :

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dw_t^i \text{ pour } i = 1, 2, 3;$$

où μ_i est la tendance de l'indice i et σ_i est son écart-type. Dans ce cadre, les rendements de ces indices à la maturité T sont donnés par :

$$R_T^i = \exp\left[\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T + \sigma_i w_T^i\right].$$

Notons par : $\alpha_m(i) = \mu_m(i) - \frac{1}{2}\sigma_m^2(i)$, avec : $\mu_m(i)$ et σ_i^2 sont respectivement la tendance mensuelle de l'indice i et la variance mensuelle de l'indice i .

L'écart-type de l'indice i est donné par :

$$\sigma_{annuel}(i) = \sqrt{12}\sigma_m(i),$$

et la tendance de l'indice i est donnée par :

$$\mu_{annuel}(i) = 12 \times \alpha_m(i) + \frac{1}{2}\sigma_{annuel}^2(i).$$

Enfin, le rendement espéré des indices sur un horizon d'un an est donné par :

$$E(R_p) = \exp(\mu_{\text{annuel}}(i)),$$

et la variance des indices sur un horizon d'un an est donnée par :

$$\text{Var}(R_p) = \exp(2\mu_{\text{annuel}}(i)(\exp(\sigma_{\text{annuel}}^2(i) - 1))).$$

4. L'approche du portefeuille moderne « moyenne-variance »

Dans cette partie, nous présentons d'abord le modèle «moyenne-variance» de Markowitz (1952). Ensuite, nous déterminons l'ensemble des portefeuilles possibles selon la méthode moyenne-variance. Par la suite, nous établissons la frontière efficiente de Markowitz (1952) et le portefeuille efficient, à partir des données historiques de notre échantillon.

4.1. Présentation de l'approche « moyenne-variance ». D'une manière générale, le problème de l'investisseur consiste à déterminer l'allocation d'actifs optimale. Markowitz (1952) a montré que l'investisseur cherche à optimiser son choix de portefeuille en tenant compte non seulement du rendement espéré de son placement, mais aussi du risque de son portefeuille (la variance). A cette fin, il a développé la théorie du portefeuille moderne, appelée : l'approche «moyenne-variance». Cette théorie est basée sur la façon dont l'investisseur peut construire un portefeuille efficient permettant soit de maximiser le rendement espéré de l'investissement pour un niveau de risque donné, soit de minimiser le risque pour un niveau de rendement espéré donné. Ceci peut être illustré à travers ces deux programmes d'optimisation équivalents :

$$\begin{aligned} & \max_w \mathbb{E}[R_P], \\ \text{S.c. } & \text{Var}(R_P) = \sigma^2. \end{aligned}$$

Et d'une manière équivalente :

$$\begin{aligned} & \min_w \text{Var}(R_P), \\ \text{S.c. } & \mathbb{E}[R_P] = \bar{R}, \end{aligned}$$

où R_P représente le rendement du portefeuille, σ^2 est le niveau du risque fixe et \bar{R} est le niveau du rendement espéré fixe.

La résolution du programme d'optimisation ci-dessus permet d'avoir l'ensemble des portefeuilles efficients. L'ensemble de ces portefeuilles permet d'établir une hyperbole, appelée : «la frontière efficiente». Cette frontière est représentée par des portefeuilles dont la composition permet d'optimiser le couple (le rendement espéré et le risque). Ces portefeuilles permettent d'avoir un rendement espéré maximal pour un niveau de risque donné ou un niveau de risque minimal pour un niveau du rendement espéré donné. Afin de déterminer l'ensemble des portefeuilles possibles, il suffit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_w w' \Sigma w, \\ \text{S.c. } & w' \bar{R} = \mathbb{E}[R_P], \\ & w' e = 1, \end{aligned}$$

où w représente le vecteur de pondérations des titres dans le portefeuille.

La résolution de ce programme consiste à trouver le vecteur de poids w qui minimise la variance du portefeuille pour un rendement espéré donné tout en respectant le fait que la somme des poids des titres dans le portefeuille soit égale à 1. L'ensemble des portefeuilles satisfaisant ce programme d'optimisation permettent d'établir la frontière efficiente. Parmi l'ensemble des portefeuilles possibles, l'investisseur rationnel au sens moyenne-variance va choisir le portefeuille efficient en prenant en compte sa fonction d'utilité et son aversion au risque. En effet, le portefeuille efficient est obtenu par la maximisation de l'espérance de la fonction d'utilité de l'investisseur. Dans ce cadre, la fonction d'utilité est supposée

quadratique, dont l'utilité espérée est exprimée en fonction du rendement espéré et de la variance du portefeuille. Donc, le problème consiste à maximiser cette fonction :

$$V(R_P) = \mathbb{E}(R_P) - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P),$$

avec ϕ est un paramètre représentant le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

Dans ce contexte, le programme d'optimisation permettant d'obtenir le portefeuille efficient est donné par :

$$\begin{aligned} \max_w \mathbb{E}(R_P) - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P), \\ \text{S.c. } w'e = 1. \\ \iff \\ \max_w w'\bar{R} - \frac{\phi}{2}w'\Sigma w, \\ \text{S.c. } w'e = 1. \end{aligned}$$

4.2. La détermination de l'ensemble de portefeuilles possibles et la frontière efficiente.

Afin de déterminer l'ensemble de portefeuilles possibles, nous résolvons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \max_w w'\bar{R} - \frac{\phi}{2}w'\Sigma w, \\ \text{S.c. } w'e = 1 \text{ et } w \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\bar{R} = E(R_P)$ est le vecteur des taux de rendements espérés annuels des indices et $\Sigma = Var(R_P)$ est la matrice variance-covariance annuelle des rendements des indices. En utilisant les données mensuelles historiques de notre échantillon, le vecteur des rendements espérés mensuels et la matrice variance-covariance mensuelle des 3 indices sont donnés respectivement par :

$$\bar{R}_m = \begin{pmatrix} 0,0012 \\ -0,002 \\ -0,001 \end{pmatrix},$$

et

$$\Sigma_m = \begin{pmatrix} 0,0042 & 0,001 & 0,0002 \\ 0,001 & 0,0039 & 0,0018 \\ 0,0002 & 0,0018 & 0,0067 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que les taux de rendements espérés des deux titres (titre 2 : *Eurostoxx* 50 et titre 3 : *SSE Composite*) sont négatifs. Un tel résultat nous permet de sortir du cadre classique. En effet, ce résultat peut être expliqué par le fait qu'une bonne partie des données de notre échantillon porte sur la période de la crise de 2008. Ceci semble être plus pertinent et nous permet d'avoir un comportement d'investisseur plus réaliste. L'estimation et l'annualisation des données de notre échantillon nous ont permis d'avoir des nouvelles valeurs pour le vecteur des rendements espérés annuels \bar{R} et de la matrice variance-covariance annuelle Σ qui sont respectivement donnés par :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 1,0149 \\ 0,9758 \\ 0,9886 \end{pmatrix},$$

et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0043 & 0,001 & 0,0002 \\ 0,001 & 0,0037 & 0,0023 \\ 0,0002 & 0,0023 & 0,0066 \end{pmatrix}.$$

Notre étude porte sur les valeurs annuelles du vecteur des rendements espérés et de la matrice variance-covariance. Afin de mesurer la rentabilité de chacun des titres de notre échantillon en fonction de son niveau de risque, nous avons utilisé la mesure de rentabilité «ratio de Sharpe» exprimé par :

$$S_i = \frac{R_i - r}{\sigma_i} \text{ avec } i = 1, 2, 3;$$

où S_i est le ratio de Sharpe du titre i ; R_i est le rendement du titre i ; r est le taux sans risque et σ_i est la volatilité du titre i . Pour un taux sans risque $r = 2\%$, les résultats du ratio de Sharpe pour les 3 titres sont donnés à travers le tableau suivant :

TAB. 1. Ratio de Sharpe des trois titres

	Titre 1 (<i>S&P 500</i>)	Titre 2 (<i>Euro Stoxx 50</i>)	Titre 3 (<i>SSE Composite</i>)
Ratio de Sharpe	-0,2918	-0,3541	-0,2563

Les résultats du tableau 1 montrent que les trois titres de notre échantillon présentent des ratios de Sharpe négatifs. Nous remarquons que le titre 1 présente le ratio de Sharpe le plus important, suivi par le titre 3 et par la suite du titre 2. Ceci montre que le titre 1 de notre échantillon est plus performant que les deux autres.

Afin de déterminer la pondération du portefeuille optimal, nous déterminons le degré d'aversion au risque de l'investisseur ϕ qui permet d'avoir le vecteur de pondérations du portefeuille optimal. Pour ceci, nous nous basons sur l'étude de Palma et al. (2009)³ portant sur l'estimation du coefficient d'aversion au risque des femmes et des hommes. Leurs résultats sont illustrés dans le graphique 1 :

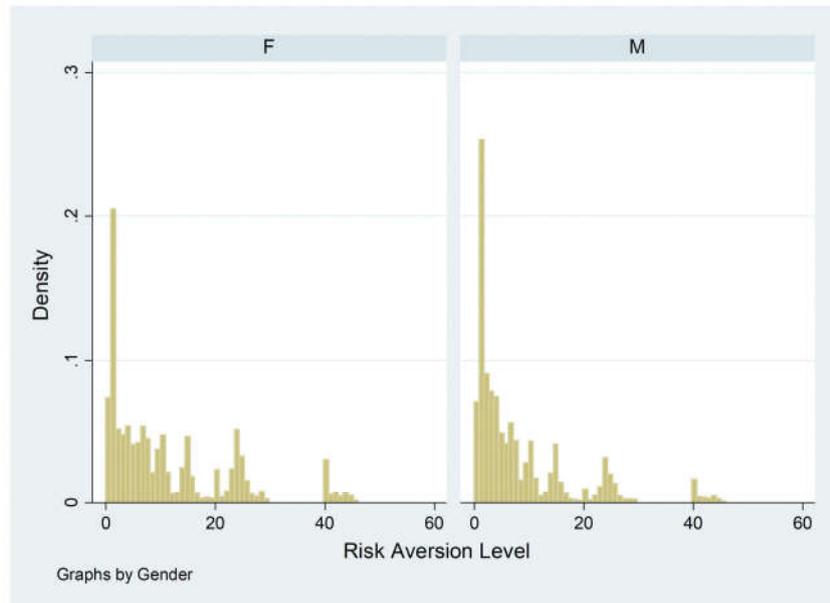


FIG. 1. Niveau d'aversion au risque de l'individu

Le graphique 1 montre que la majorité de l'échantillon étudié (femmes et hommes) possède une aversion au risque comprise entre 1 et 10. En effet, Palma et al. (2009) ont constaté que moins de 21% (25, 5%) des femmes (des hommes) ont une aversion au risque inférieure à 2 et près de 10% (6%) ont une aversion au risque supérieure à 25. Ces résultats nous ont permis de prendre des différentes valeurs du coefficient d'aversion au risque de l'investisseur ϕ entre 1 et 10, tel que ϕ prend les valeurs suivantes 1, 2, 5 et 10. Nous appliquons le modèle 4.1 sur notre échantillon en prenant en compte plusieurs valeurs

³Palma A., Picard N., Prigent J.-L. (2009). Prise en compte de l'attitude face au risque dans le cadre de la directive MiFID. *Cahier de recherche, 2009-35*.

du coefficient d'aversion au risque ($\phi = 1, 2, 5, 10$). Le tableau 2 ci-dessous montre les pondérations des 3 indices de notre échantillon pour les différentes valeurs de l'aversion au risque :

TAB. 2. Les pondérations des titres dans le portefeuille efficient

ϕ	Rendement espéré	Risque	Titre 1 (S&P 500)	Titre 2 (Eurostoxx 50)	Titre 3 (SSE Composite)
$\phi = 1$	1,0149	0,0043	0,9999	0	0
$\phi = 2$	1,0149	0,0043	0,9999	0	0
$\phi = 5$	1,0149	0,0043	0,9998	0	0,0002
$\phi = 10$	1,0111	0,0034	0,8567	0,0001	0,1432

Les résultats du tableau 2 montrent que lorsque le coefficient d'aversion au risque ϕ est égal à 1,2 et 5 permet d'avoir des résultats dégénérés. En effet, la prise en compte de la contrainte de positivité au niveau des pondérations ($w \geq 0$) nous permet d'éviter les situations de vente à découvert (short selling). Ceci explique les résultats dégénérés. Cependant, lorsque le coefficient d'aversion au risque ϕ est égale à 10, nous obtenons un portefeuille efficient non dégénéré. Ces résultats nous permettent de fixer le coefficient d'aversion au risque à $\phi = 10$ pour le reste de cette partie.

A partir du tableau 2, nous remarquons que pour des faibles valeurs de ϕ ($\phi = 1, 2$), l'investisseur investit la totalité de sa richesse sur le titre 1 (*S&P 500*), qui est le seul actif de notre échantillon à avoir un taux de rendement espéré positif et qui représente le niveau de risque relativement faible. Pour un niveau d'aversion au risque un peu plus élevé ($\phi = 5$), nous remarquons que l'investisseur investit presque la totalité de sa richesse sur le titre 1 (0,9998) et une très petite partie (0,0002) sur le titre 3 (*SSE Composite*), qui représente le niveau de risque le plus élevé dans notre échantillon et taux de rendement espéré négatif mais qui est plus intéressant que celui du titre 2 (*Euro Stoxx 50*). Ainsi, nous constatons que les niveaux du rendement espéré et du risque des portefeuilles efficients restent constants pour ces trois cas ($\phi = 1, 2, 5$).

Pour un niveau d'aversion au risque plus élevé, ($\phi = 10$), nous remarquons que l'investisseur répartit sa richesse sur les trois titres de la manière suivante : une grande partie de la richesse (85,67%) est investie sur le titre 1 (*S&P 500*), qui présente le rendement espéré le plus élevé parmi les titres de notre échantillon et le risque relativement faible par rapport à ceux des autres titres ; 0,01% de la richesse de l'individu est investie sur le titre 2 (*Euro Stoxx 50*), qui est le titre le moins risqué mais qui représente un niveau de rendement espéré le plus faible ; et finalement 14,32% de la richesse est investie sur le titre 3 (*SSE Composite*) qui est l'actif le plus risqué mais qui représente un niveau de rendement espéré négatif mais un peu plus intéressant que celui du deuxième titre. Nous constatons que pour un niveau d'aversion au risque élevé, l'investisseur averse au risque ne prend plus le risque d'investir sur un seul actif et répartit sa richesse sur l'ensemble des titres disponibles. Tous ces résultats concernant les pondérations des titres au sein des portefeuilles efficients semblent logiques puisque le titre 1 présente le ratio de Sharpe le plus élevé par rapport aux deux autres titres. Nous remarquons aussi que plus le coefficient d'aversion au risque est élevé, plus les niveaux du rendement espéré et du risque du portefeuille efficient sont faibles. Ainsi, nous constatons que plus le coefficient d'aversion est élevé, plus la proportion investie sur le premier titre (*S&P 500*) est faible et plus la proportion investie sur le troisième titre est élevée (le titre le plus risqué).

Maintenant, nous supposons que le coefficient d'aversion au risque de l'investisseur est de $\phi = 10$, la résolution du programme d'optimisation de Markowitz (1952) nous a fourni l'ensemble de portefeuilles possibles qui est de 5146 portefeuilles. Ce résultat peut être illustré, dans le plan écart-type et le rendement espéré, dans le graphique 2.

Ces résultats nous permettent de déterminer la matrice qui correspond aux pondérations des 3 titres dans les 5146 portefeuilles possibles. En combinant les 3 indices, dans le but de constituer un

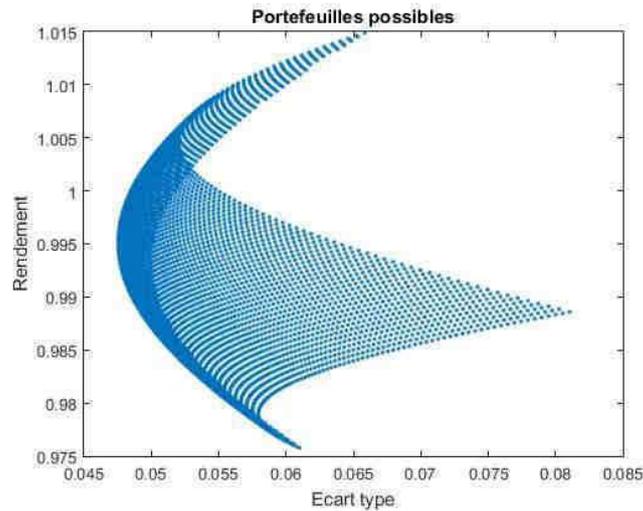


FIG. 2. Ensemble de portefeuilles possibles

portefeuille efficient, l'approche «moyenne-variance» génère plusieurs portefeuilles en faisant varier la part de chaque titre dans le portefeuille. Ceci permet d'avoir la combinaison optimale du portefeuille qui correspond à un niveau de rendement maximal pour un niveau de risque donné. L'ensemble de ces portefeuilles permet de constituer la frontière efficiente. Cette frontière est illustrée dans le graphique suivant :

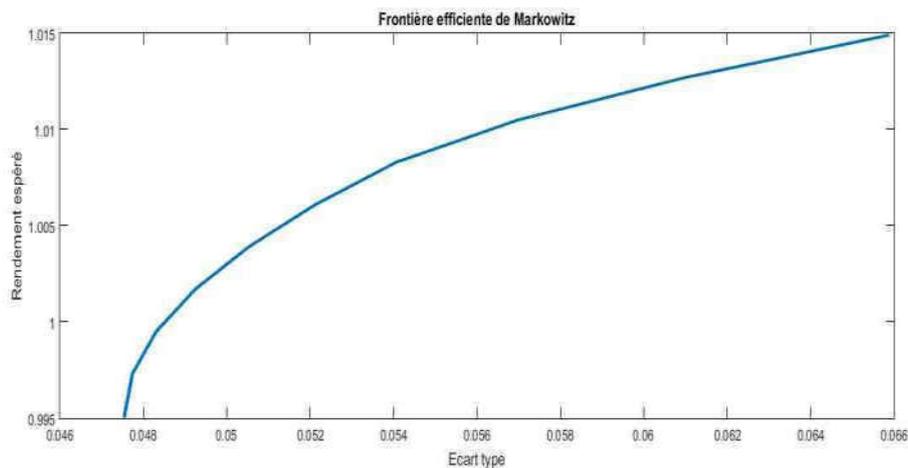


FIG. 3. Frontière efficiente de Markowitz (1952)

A partir du graphique 3, nous remarquons que la frontière efficiente obtenue par le modèle «moyenne-variance», dans lequel la contrainte de positivité est prise en compte et la contrainte de positivité n'est pas prise en compte, est située au-dessous de la frontière de Markowitz (1952).

4.3. La détermination du portefeuille efficient avec $\phi = 10$. En prenant en compte son aversion au risque ($\phi = 10$), l'investisseur doit choisir un portefeuille parmi ceux qui forment la frontière efficiente. Pour cette fin, l'investisseur doit résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_w \left[w' \bar{R} - \frac{\phi}{2} w' \Sigma w \right].$$

Pour un taux sans risque fixé à 2%, la résolution de ce programme de maximisation nous a fourni le vecteur de pondérations des titres au sein du portefeuille efficient w^* , qui est égal à :

$$w^* = \begin{pmatrix} 0,8567 \\ 0,0001 \\ 0,1432 \end{pmatrix}.$$

Les résultats montrent que le portefeuille efficient de cet investisseur est parfaitement diversifié. En théorie, l'approche «moyenne-variance» est basée principalement sur le principe de la diversification. La diversification est utilisée pour diminuer ou augmenter le niveau du risque que l'investisseur souhaite prendre.

Le tableau 3 présente les caractéristiques du portefeuille efficient pour cet investisseur ($\phi = 10$) :

TAB. 3. Les caractéristiques du portefeuille efficient

	Rendement espéré	Risque	Nombre de titres
Portefeuille efficient	1,0111	0,0034	3

A partir du tableau 3, nous constatons que le portefeuille efficient est composé par les 3 indices de notre échantillon et caractérisé par un rendement espéré élevé et un niveau de risque relativement faible.

5. La gestion de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale

Plusieurs études ont montré des limites pour la gestion de portefeuille moderne à savoir : (1) Le manque de diversification : les investisseurs possèdent un petit nombre d'actifs (Berber et Odean, 2000) ; (2) La diversification naïve : les investisseurs ont tendance à investir leurs richesses uniformément sur l'ensemble des actifs (Benartzi et Thaler, 2001) ; (3) Le biais local : l'investisseur préfère investir dans les actifs locaux plutôt que dans les actifs étrangers (French et Poterba, 1991) ; (4) La disponibilité : les investisseurs ont tendance à prédire la probabilité d'un rendement en se basant sur le montant du rendement de chaque actif qui vient facilement à l'esprit (Kahneman et Tversky, 1973) ; (5) Emotions et cognitif : les erreurs qui découlent de la façon selon laquelle les gens pensent (Bower et Wright, 1992) et (6) Le rassemblement : décrire comment les investisseurs se comportent au sein d'un groupe sans aucune planification (voir travaux de Schiller, prix Nobel d'économie en 2013). La théorie de portefeuille moderne ne peut pas expliquer ces anomalies car elle suppose que l'investisseur est rationnel et possède l'information complète et que les préférences des investisseurs sont très bien définies. Cependant, la théorie de portefeuille comportementale est une violation de la théorie de portefeuille «moyenne-variance» et permet d'expliquer le comportement de l'investisseur. Shefrin (2002) a défini la théorie de portefeuille comportementale comme une application de la psychologie à la finance comportementale. Dans ce cadre, nous déterminons les différents travaux en gestion de portefeuille standard pour un investisseur individuel selon les différentes approches comportementales, alternatives à la théorie de l'utilité espérée, présentées dans la première partie.

5.1. Optimisation de portefeuille selon la théorie des perspectives cumulées (CPT).

Bernard et Ghossoub (2010) ont développé un modèle d'optimisation de portefeuille pour un investisseur dont la fonction de valeurs est du type CPT dans une économie à une seule période. Leur modèle se place dans un marché avec un actif risqué dont le rendement stochastique est noté par \tilde{x} et un actif sans risque dont le taux sans risque est donné par r . Ces chercheurs ont présenté deux cas : le premier cas où les ventes à découvert sont interdites ($\varepsilon > 0$) et le deuxième cas où les ventes à découvert sont autorisées. La richesse finale de l'investisseur à la fin de la période est donnée par :

$$W = (W_0 - \varepsilon)(1 + r) + \varepsilon(1 + \tilde{x}) = W_0(1 + r) + \varepsilon(\tilde{x} - r).$$

Soit $\tilde{y} = \tilde{x} - r$ le rendement excédentaire de l'actif risqué par rapport au taux sans risque et $W_{ref} = W_0(1 + r)$ le niveau de la richesse de référence à la fin de la période. Alors, la richesse finale de l'investisseur peut être réécrite par :

$$W = W_{ref} + \varepsilon\tilde{y}.$$

La déviation de la richesse finale par rapport au niveau de référence est donnée par :

$$D(\varepsilon) = W - W_{ref} = \varepsilon\tilde{y}.$$

où D est une variable aléatoire qui peut prendre des valeurs positives ou négatives par rapport à la valeur du point de référence.

Soient S_D la fonction de distribution décumulative de D ; F_D la fonction de distribution cumulative de D et T sa fonction de pondération. Afin de déterminer le portefeuille optimal de l'investisseur, Bernard et Ghossoub (2010) ont utilisé la fonction objective suivante :

$$V_{CPT(D)} = \int_0^{+\infty} T^+(S_D(x))du^+(x) + \int_{-\infty}^0 T^-(F_D(x))du^-(x).$$

Cette fonction est la somme de 2 intégrales de Choquet. Elle peut être réécrite sous cette forme :

$$\begin{aligned} V_{CPT(D)} &= \int_0^{+\infty} T^+(S_{u^+(D^+)}(x))du^+(x) + \int_0^{+\infty} T^-(S_{u^-(D^-)}(x))du^-(x) \\ &= \int_0^{+\infty} T^+(S_D(x))du^+(x) + \int_0^{+\infty} T^-(S_D(x))du^-(x) \\ &= \int_0^{+\infty} T^+(1 - F_X(x))du^+(x) + \int_0^{+\infty} T^-(F_X(-x))du^-(x), \end{aligned}$$

où $D^+ = \max(D, 0)$ et $D^- = \min(D, 0)$, tels que $D = \varepsilon\tilde{y}$ et $\varepsilon > 0$.

Soient $S_{D(x)} = S_{\tilde{y}}(\frac{x}{y})$ et $F_{D(x)} = F_{\tilde{y}}(\frac{x}{y})$. Comme $u^+(x) = x^\alpha$, alors :

$$\int_0^{+\infty} T^+(S_D(x))du^+(x) = \int_0^{+\infty} T^+(S_{\tilde{y}}(\frac{x}{y}))\alpha x^{\alpha-1}dx.$$

Soit $y = \frac{x}{\varepsilon}$, alors $x = y\varepsilon$ et $dx = \varepsilon dy$ donnent :

$$\int_0^{+\infty} T^+(S_D(x))du^+(x) = \int_0^{+\infty} T^+(S_{\tilde{y}}(y))\alpha x^{(\alpha-1)}\varepsilon^{(\alpha-1)}\varepsilon dy = \varepsilon^\alpha \int_0^{+\infty} T^+(S_{\tilde{y}}(y))du^+(y).$$

De même, supposant que $u^-(x) = \lambda x^\beta$, alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} T^-(F_D(-x))du^-(x) &= \int_0^{+\infty} T^-(F_{\tilde{y}}(-\frac{x}{\varepsilon}))\lambda x^{(\beta-1)}dx \\ &= \int_0^{+\infty} T^-(F_{\tilde{y}}(-y))\lambda\beta\varepsilon^{(\beta-1)}y^{(\beta-1)}dy = \varepsilon^\beta \int_0^{+\infty} T^-(F_{\tilde{y}}(-y))du^-(y). \end{aligned}$$

D'où, la fonction objective de l'investisseur à la fin de la période est donnée par cette expression :

$$V_{CPT}(D) = \varepsilon^\alpha \int_0^{+\infty} T^+(S_{\tilde{y}}(y)) du^+(y) - \varepsilon^\beta \int_0^{+\infty} T^-(F_{\tilde{y}}(-y)) du^-(y).$$

Le problème du choix du portefeuille optimal consiste à déterminer les montants optimaux alloués dans l'actif risqué et l'actif sans risque. Dans ce cadre, le problème d'optimisation est donné par :

$$\max_{\varepsilon \geq 0} V_{CPT}(D(\varepsilon)).$$

Ce programme peut être réécrit sous cette forme :

$$\max_{\varepsilon \geq 0} (G(\tilde{y})\varepsilon^\alpha - L(\tilde{y})\varepsilon^\beta),$$

où $G(\tilde{y}) = \int_0^{+\infty} T^+(S_{\tilde{y}}(y)) du^-(y)$ et $L(\tilde{y}) = \int_0^{+\infty} T^-(F_{\tilde{y}}(-y)) du^-(y)$. $G(\tilde{y})$ et $L(\tilde{y})$ sont deux quantités positives et ne dépendent pas de l'allocation du portefeuille ε .

Soit le ratio de la CPT : $\Omega(\tilde{y}) = \frac{G(\tilde{y})}{L(\tilde{y})} = \frac{\int_0^{+\infty} T^+(S_{u^+(\tilde{y}^+)}(y)) dy}{\int_0^{+\infty} T^+(S_{u^-(\tilde{y}^-)}(y)) dy}$. Ce ratio joue un rôle important dans

la détermination du montant alloué dans l'actif risqué. Il peut être réécrit par :

$$\Omega(\tilde{y}) = \frac{\int_0^{+\infty} T^+(S_{u^+(\tilde{y}^+)}(y)) dy}{\int_0^{+\infty} T^+(S_{u^-(\tilde{y}^-)}(y)) dy},$$

où $\tilde{y} = \tilde{y}^+ - \tilde{y}^-$. Ceci montre que $G(\tilde{y})$ dépend de la distribution des gains et $L(\tilde{y})$ dépend de la distribution des pertes.

Cas 1 : Les ventes à découvert sont autorisées

Soit ε^* la solution optimale du programme d'optimisation suivant :

$$\max_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} (G(\tilde{y})\varepsilon^\alpha - L(\tilde{y})\varepsilon^\beta).$$

Si $\beta = \alpha$, alors 3 cas peuvent être considérés :

- Si $V_{CPT}(\tilde{y}) = 0$: aucune allocation dans l'actif risqué n'est pas optimale. La fonction objective est constante et est égale à 0.

- Si $V_{CPT}(\tilde{y}) > 0$: emprunter un montant infini pour l'investir dans l'actif risqué est la solution optimale. La fonction objective est égale à $+\infty$.

- Si $V_{CPT}(\tilde{y}) < 0$: le montant optimal à investir dans l'actif risqué est nul : $\varepsilon^* = 0$.

Si $\beta < \alpha$, l'allocation optimale dans l'actif risqué est donnée par :

$$\varepsilon^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)} \Omega(\tilde{y})^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)}.$$

Alors le montant optimal investi dans l'actif risqué ne dépend pas de la richesse initiale de l'investisseur W_0 mais dépend des caractéristiques de la distribution du rendement excédentaire de l'actif risqué par rapport au taux sans risque. En d'autres termes, la solution optimale dépend de la déviation de la richesse finale par rapport au point de référence.

Cas 2 : Les ventes à découvert sont interdites

Soit $\varepsilon^* \in [0, W_0]$ la solution optimale du programme d'optimisation suivant :

$$\max_{\varepsilon^* \in [0, W_0]} (G(\tilde{y})\varepsilon^\alpha - L(\tilde{y})\varepsilon^\beta).$$

Si $\beta = \alpha$, alors 3 cas peuvent être considérés :

- Si $V_{CPT}(\tilde{y}) = 0$: aucune allocation dans l'actif risqué n'est optimale. La fonction objective est constante et est égale à 0.
 - Si $V_{CPT}(\tilde{y}) > 0$: investir W_0 dans l'actif risqué est la solution optimale.
 - Si $V_{CPT}(\tilde{y}) < 0$: le montant optimal à investir dans l'actif risqué est nul ($\varepsilon^* = 0$).
- Si $\alpha < \beta$, l'allocation optimale dans l'actif risqué est donnée par :

$$\varepsilon^* = \min\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)} \Omega(\tilde{y})^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)}, W_0\right).$$

Afin de déterminer le portefeuille optimal dans les deux cas précédents, le cas où $\alpha < \beta$ est pris en compte. Dans ce cas, le ratio de la CPT est borné par :

$$\Omega_{max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) W_0^{(\beta-\alpha)}.$$

Alors, l'allocation optimale de l'investisseur dans l'actif risqué est donnée par :

$$\varepsilon^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)} \Omega(\tilde{y})^{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)}.$$

Bernard et Ghossoub (2010) ont montré que plus le ratio de la CPT est élevé, plus le montant optimal alloué dans l'actif risqué est élevé :

$$\Omega(\tilde{y}_1) \geq \Omega(\tilde{y}_2) \Rightarrow \varepsilon^*(\tilde{y}_1) \geq \varepsilon^*(\tilde{y}_2).$$

Alors, l'allocation optimale dans l'actif risqué dépend du ratio de la CPT $\Omega(\tilde{y})$, qui mesure le potentiel à la hausse de l'actif risqué. Il peut être interprété comme un ratio de mesure de performance et comme une forme généralisée du ratio Oméga (Keating et Shadwick, 2002) ou comme une forme généralisée du ratio Rendement/Risque de Bernardo et Ledoit (2000). La seule différence réside dans le fait que le ratio de la CPT dépend non seulement de la distribution du risque \tilde{y} , mais aussi de la probabilité pondérée qui résulte des préférences de l'investisseur. Alors, le ratio de la CPT $\Omega(\tilde{y})$ est une mesure de performance subjective.

Les résultats de Bernard et Ghossoub (2010) dépendent du point de référence (statut quo) et du montant investi dans l'actif risqué. Ces chercheurs ont constaté que la CPT présente un modèle plus performant que la théorie de l'utilité espérée standard pour expliquer la décision de prise de décision d'un investisseur. Ainsi, ils ont signalé la sensibilité excessive des résultats aux hypothèses des différents paramètres. Ils ont constaté que l'investisseur dont la fonction de valeurs est du type CPT peut soudainement passer son investissement, qui est entièrement alloué dans l'actif risqué, à un investissement entièrement alloué dans l'actif sans risque, pour un simple changement au niveau des paramètres.

5.2. Optimisation de portefeuille selon la comptabilité mentale.

5.2.1. *Optimisation de portefeuille selon le critère Safety-First.* La théorie Safety-First est considérée comme une approche alternative à celle de Markowitz (1952). Cette théorie repose sur l'idée que l'individu cherche à maintenir un niveau de richesse minimal «seuil de subsistance», noté par s . Ce seuil présente le niveau de la richesse finale minimale que l'investisseur doit atteindre. Roy (1952) est le premier chercheur qui a proposé un modèle de choix de portefeuille basé essentiellement sur la théorie de Safety-First.

Supposant que W est une variable aléatoire et représente la richesse finale. Dans le cadre de la théorie Safety-First, le risque est mesuré par la probabilité que la richesse finale se trouve au-dessus du seuil de subsistance s : $p(W \leq s)$. Dans cette approche, l'investisseur cherche à minimiser la probabilité que sa richesse finale soit au-dessous du seuil s , tel que :

$$\text{Min } p(W \leq s).$$

Ce problème d'optimisation permet d'avoir 2 cas : le premier cas où le seuil s est atteint et le deuxième cas où le seuil s n'est pas atteint.

Par la suite, le modèle Safety-First a été développé par Telser (1955). Ce dernier a développé un modèle caractérisé à la fois par le seuil de subsistance s et par la probabilité de faillite acceptable

par l'investisseur α (la probabilité que la richesse finale de l'investisseur soit au deçà du seuil s). Son modèle suppose que l'investisseur doit déterminer un portefeuille qui satisfait cette contrainte :

$$p(W \leq s) \leq \alpha.$$

Cependant, le modèle Safety-First reste incomplet puisqu'il ne permet pas à l'investisseur de choisir le portefeuille optimal parmi deux portefeuilles équivalents et satisfaisant la contrainte Safety-First. En effet, l'investisseur peut être indifférent entre 2 portefeuilles satisfaisant la contrainte Safety-First. Cependant, ce modèle ne permet pas de préciser à l'investisseur la détermination de l'allocation de sa richesse restante, après avoir déterminé un portefeuille qui lui permet d'avoir une richesse finale minimale. Sur cette base, Arzac et Bawa (1977) ont introduit un nouveau critère «le rendement espéré». Ce critère permet à l'investisseur de faire son choix adéquat. Dans ce cas, l'investisseur choisit le portefeuille qui présente $E(W) = \mu$ le plus élevé, parmi l'ensemble des portefeuilles possibles.

D'abord, l'investisseur cherche à satisfaire la contrainte Safety-First, de façon que la probabilité de la richesse finale de l'investisseur soit au-dessus du seuil s et n'excède pas la probabilité α . Ensuite, l'investisseur sélectionne le portefeuille qui présente la rentabilité espérée la plus élevée parmi l'ensemble des portefeuilles qui satisfassent la contrainte Safety-First. Dans le modèle d'Arzac et Bawa (1977), la mesure du risque est définie par le critère «Downside Risk» (la probabilité que la richesse finale soit en deçà du seuil s). Arzac et Bawa (1977) ont étendu le modèle de Telser (1955) en permettant à la probabilité α de varier. Dans ce cadre, l'investisseur maximise la fonction objective V définie par le rendement espéré $E(W)$ et la probabilité α . Le choix du couple $(E(W), \alpha)$ est déterminé à travers le cadre de l'utilité espérée, où la fonction d'utilité est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(W) = W \quad \text{si } p(W \leq s) \leq \alpha \\ u(W) = W - c \text{ si } p(W \leq s) \geq \alpha \end{array} \right\},$$

où $c > 0$. Dans ce cas, la fonction d'utilité prend cette forme : $E(W) - c.p(W \leq s)$. Markowitz (1959) a souligné que cette forme fonctionnelle est la seule forme cohérente avec le principe de l'utilité espérée et avec la version de Safety-First de Telser (1955).

5.2.2. *La théorie SP/A (Security potential aspiration theory)*. Lopes (1987) a établi une théorie de choix en incertain, appelée la théorie SP/A. Cette théorie permet de modéliser les sentiments qui déterminent le choix des investisseurs. Elle peut être considérée comme une extension du modèle de portefeuille «Safety-First» proposé par Arzac et Bawa (1977).

Dans le cadre de cette théorie, S désigne «la sécurité» (le souci d'assurer une richesse minimale), P désigne «le potentiel» (la volonté d'atteindre une certaine richesse supérieure au niveau actuel) et A désigne «l'aspiration» (le niveau de la richesse que l'investisseur souhaite atteindre). En effet, la notion de «sécurité», proposée par Lopes (1987), est analogue au principe de Safety-First. Ainsi, la notion d'«aspiration» est liée à un objectif et permet de généraliser le concept de Safety-first qui consiste à atteindre une certaine valeur de la richesse (comme le seuil de substitution s). Tandis que la notion du «potentiel» est liée à la volonté d'atteindre un niveau de rendement très élevé.

Dans les modèles de Arzac et Bawa (1977) et Telser (1955), le risque est mesuré par la possibilité que la richesse finale soit au-dessous d'un niveau minimum de rendement s . Ces auteurs mesurent la probabilité de sécurité par : $D(x) = p(W \geq s)$; où $D(x)$ présente une probabilité dé-cumulative. Soit X une loterie avec n états $x_i (i = 1, \dots, n)$, n probabilités p_i et une richesse finale W . Lopes (1987) suppose que la richesse espérée $E(W) = \sum p_i x_i$ peut être réécrite par : $E(W) = \sum D_i (x_i - x_{(i-1)})$, où $i = 1, \dots, n$ et $x_0 = 0$. Selon cette expression, l'investisseur reçoit la richesse x_1 avec certitude et une probabilité $D_1 = 1$ (car x_1 est la richesse minimale atteignable), l'incrément $(x_2 - x_1)$ avec la probabilité D_2 , l'incrément $(x_3 - x_2)$ avec la probabilité D_3 , et ainsi de suite. Lopes (1987) a calculé $E(x)$ en utilisant la fonction de pondération, tel que : $h_s(D) = D_s^{1+q}$. Quand $q_s > 0$, cette fonction accorde une importance à la valeur la plus élevée de D . Alors, D domine au niveau stochastique $h_s(D)$.

Lopes (1987) suppose que le comportement des investisseurs est guidé à la fois par l'espoir et par la crainte : le sentiment de peur sous-tend la sécurité et l'espoir sous-tend le potentiel. Formellement,

la peur affecte l'attitude de l'investisseur vis-à-vis des rendements risqués à travers la nouvelle pondération des probabilités cumulatives. Ainsi, l'espoir accorde les pondérations les plus élevées attachées aux rendements les plus élevés, pour les plus faibles valeurs de D . Lopes (1987) suppose que $h_s(D)$ est équivalente à $h_p(D)$, quand p désigne le potentiel, tel que $h_p(D)$ prend cette forme :

$$h_p(D) = 1 - (1 - D)^{(1+q_p)}.$$

Lopes (1987) suppose que la peur et l'espoir permettent de modifier la fonction de pondération dé-cumulative. Il a montré que la forme finale de cette fonction de transformation dé-cumulative est une combinaison convexe entre h_s et h_p . La fonction de transformation $h(D)$ prend cette forme :

$$h(D) = \delta h_s(D) + (1 - \delta)h_p(D),$$

avec $\delta \in [0, 1]$ caractérise le comportement de l'investisseur. Si δ est proche de 1, le comportement de l'investisseur est caractérisé essentiellement par la peur, et si δ est proche de 0, le comportement de l'investisseur est guidé essentiellement par l'espoir.

Lopes (1987) suppose que la richesse finale est caractérisée par 2 variables : la première variable est $E_h(W)$, qui présente la valeur de la richesse espérée de W sous la fonction de transformation dé-cumulative $h(D)$; la deuxième variable est $D(A)$, qui présente la probabilité que la richesse finale soit égale ou supérieure à A . Ces deux variables sont analogues aux deux arguments utilisés dans le modèle Safety-First : $E(W)$ et $p(x \geq s)$. Il suppose que son modèle repose sur la théorie d'utilité espérée. La fonction d'utilité utilisée pour évaluer les rendements est une fonction croissante monotone : $U(E_h(W), D(A))$. Cette structure est conforme au modèle proposé par Arzac et Bawa (1977), dans lequel les investisseurs ne maximisent pas $E(W)$ sous la contrainte de probabilité, mais ils maximisent la fonction $V(E(W), \alpha)$. Rieger (2010) considère que la théorie SP/A est une combinaison des deux expressions SP et A :

$$SP = \sum_{i=1}^n (h(D_i) - h(D_{i+1}))U(x_i) \text{ et } A = p(W \geq s),$$

où U est une fonction d'utilité concave; W est le rendement de la loterie et s est le niveau d'aspiration de l'investisseur.

Soit h la fonction de pondération des probabilités. On note par SPA la fonction d'utilité correspondante à cette théorie :

$$\begin{aligned} SPA &= \left[\sum_{i=1}^n (h(D_i) - h(D_{i+1}))U(x_i) \right] + h(p(W \geq s)), \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (h(D_i) - h(D_{i+1}))U(x_i) \right] + h(D_{\min\{i:x_i \geq s\}}), \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (h(D_i) - h(D_{i+1}))U(x_i) \right] + \sum_{\{i:x_i \geq s\}} (h(D_i) - h(D_{i+1})), \\ &= \sum_{i=1}^n (h(D_i) - h(D_{i+1}))(U(x_i) + a(x_i)), \end{aligned}$$

avec :

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ 1 & \text{si } x \geq s \end{cases}.$$

Le modèle d'optimisation de la théorie SP/A peut être considéré comme une adaptation au modèle Safety-First d'Arzac et Bawa (1977). La seule différence entre ces deux modèles réside au niveau de l'interprétation des variables : le seuil de substitution s est remplacé dans la théorie de Lopes (1987) par un niveau d'aspiration retenu A ; la probabilité cumulative α est substituée par une probabilité dé-cumulative $(1 - \alpha)$ et $E(W)$ est remplacée par $E_h(W)$. Le modèle SP/A devient analogue au modèle d'Arzac et Bawa (1977) quand $q_s = q_p = 0$. Lopes (1987) a constaté que le bien-être de l'investisseur

est une fonction croissante de $E_h(W)$ et $D(A)$. Ceci constitue la base de la théorie comportementale du portefeuille, proposée par Shefrin et Statman (2000).

5.2.3. *La théorie comportementale du portefeuille : Behavioral Portfolio Theory (BPT)*. En 2000, Shefrin et Statman ont proposé la théorie comportementale du portefeuille (BPT). Cette théorie permet de prendre en compte les sentiments des investisseurs au niveau du choix du portefeuille optimal. La BPT est basée sur l'approche Safety-First de Roy (1952) et intègre certaines caractéristiques comportementales, économiques et financières. Cette théorie combine deux théories de choix en présence de l'incertitude : la théorie SP/A (Lopes, 1987) et la théorie des perspectives cumulées (Kahneman et Tversky, 1992).

Dans leur modèle, Shefrin et Statman (2000) supposent que l'investisseur cherche à maximiser le rendement espéré du portefeuille en gardant la probabilité de faillite au-dessous d'un niveau donné α . Leur modèle est donné par :

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}(R), \\ \text{s.c. } P(W < s) < \alpha, \end{aligned}$$

où R représente le rendement du portefeuille ; s représente le seuil de subsistance ; α est le niveau de faillite admissible et W représente la richesse finale.

Shefrin et Statman (2000) ont présenté la BPT en deux versions : la première version est BPT à un seul compte mental (BPT-SA), où l'investisseur intègre son portefeuille dans un seul compte mental, et la deuxième version est BPT à plusieurs comptes mentaux (BPT-MA) où l'investisseur intègre son portefeuille dans plusieurs comptes mentaux.

L'approche BPT-SA. Dans un premier temps, Shefrin et Statman (2000) ont développé la version de BPT-SA dans laquelle les covariances entre les actifs financiers ne sont pas nulles. Cette approche est basée sur la théorie SP/A. L'investisseur considère son portefeuille comme un seul portefeuille à un seul compte mental. Dans ce cadre, la sélection du portefeuille optimal dans le cadre de BPT-SA est similaire à celle de l'approche moyenne-variance sur plusieurs points. En effet, l'investisseur préfère le portefeuille qui présente le rendement espéré le plus élevé et le risque $P(W \leq A)$ le plus faible. Par conséquent, la frontière efficiente BPT-SA est obtenue par la maximisation du rendement espéré du portefeuille $E_h(W)$ pour une valeur fixe de $P(W \leq A)$. Cette frontière est tracée dans l'espace $(E_h(W), P(W \leq A))$.

Soit un investisseur qui possède une richesse initiale W_0 . Cet investisseur souhaite maximiser sa richesse espérée à la date finale selon l'approche Safety-First sous la condition que la valeur de l'ensemble des actifs achetés à l'instant 0 n'excède pas W_0 . Afin de déterminer la frontière efficiente de BPT-SA, l'investisseur doit maximiser $E_h(W)$ en respectant la contrainte de Safety-First :

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}_h(W) = \sum_{i=1}^n v_i W_i, \\ \text{s.c. } P(W \leq A) \leq \alpha, \end{aligned}$$

où v_i est le prix de l'état i , W_i est la richesse à l'état i .

Pour toute solution W_1, \dots, W_n , la solution de ce programme suggère un sous-ensemble T incluant le $n^{\text{ième}}$ état S_n , tel que :

- $W_i = 0$ si $i \notin T$;
- $W_i = A$ si $i \in T \setminus \{S_n\}$;
- $W_n = \frac{W_0 - \sum_{i=1}^n v_i v_i}{v_n}$ excède A quand $W_0 > v_n A$.

Cette solution caractérise la solution de l'approche BPT-SA. Shefrin et Statman (2000) ont montré que les portefeuilles optimaux de BPT-SA prennent 3 valeurs : 0, A et une valeur qui excède A quand W_n excède A . En outre, ils ont constaté que ces portefeuilles optimaux ne coïncident pas avec ceux

de l'approche moyenne-variance à cause de l'absence de la contrainte de non-négativité dans BPT-SA. Ils ont montré que le portefeuille optimal n'existe pas pour de très grandes valeurs de A et α .

A partir de leurs expériences expérimentales, Shefrin et Statman (2000) ont constaté que lorsque le niveau d'aspiration de l'investisseur est faible, son portefeuille ressemble à une combinaison d'une loterie, qui paie A ou 0 dans tous les états, et d'une loterie qui paie $W_n - A$ à l'état S_n et 0 dans les autres états. Ainsi, ils ont constaté que lorsque son niveau d'aspiration est élevé, l'investisseur a un seul portefeuille optimal. La fonction de paiement de ce portefeuille ressemble au paiement d'une loterie. Ainsi, Shefrin et Statman (2000) ont montré que l'investisseur, ayant un niveau d'aspiration élevé, prend beaucoup plus de risque que l'investisseur à un faible niveau d'aspiration pour atteindre ses objectifs et que le portefeuille de cet investisseur se limite à un seul pari. Ils ont constaté que le comportement de l'investisseur à un niveau d'aspiration élevé correspond à celui d'un investisseur peu averse au risque : il prend beaucoup de risque et parie sur un seul actif dont le rendement espéré est très faible et la variance est très élevée par rapport aux autres actifs financiers présents sur le marché. D'une manière analogue, Lopes (1987) a constaté, dans le cadre de sa théorie SP\A, que la crainte d'avoir une richesse au deçà du seuil de rendement s conduit l'investisseur à investir dans un actif sans risque pour garantir l'atteinte du seuil s et la richesse A , et d'investir le reste de sa richesse dans un actif risqué afin d'avoir une richesse supérieure à A .

L'approche BPT-MA. Dans un second temps, Shefrin et Statman (2000) ont développé le cas de BPT-MA, où l'investisseur intègre son portefeuille dans plusieurs comptes mentaux et où les covariances entre ces différents comptes sont négligées. En effet, la BPT-MA est basée sur la comptabilité mentale et la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979) permettant aux investisseurs de prendre des décisions en se basant sur les gains et les pertes déterminés relativement à un point de référence.

L'approche BPT-MA suppose que l'investisseur considère son portefeuille comme une pyramide à plusieurs couches où chaque couche est associée à un objectif particulier. Ainsi, l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque change d'une couche à une autre. D'une manière générale, la majorité des investisseurs combinent le désir d'avoir un niveau d'aspiration faible avec le désir d'avoir un niveau d'aspiration élevé. Shefrin et Statman (2000) ont constaté que le portefeuille qui combine entre un niveau d'aspiration faible et un niveau d'aspiration élevé prend la forme d'une pyramide dont la première couche de la base est «downside protection» et désignée pour éviter la pauvreté et la couche au sommet est «upside potential» et désignée pour permettre à l'investisseur d'atteindre une certaine richesse. Ceci correspond au comportement d'un investisseur qui achète simultanément une assurance et une loterie.

Shefrin et Statman (2000) ont développé un modèle à deux comptes mentaux : le premier compte est «downside protection» et le deuxième est «upside potential». Dans le cadre de l'approche BPT-MA, ils ont montré que l'investisseur balance entre les deux comptes mentaux et cherche à maximiser son utilité espérée. La fonction d'utilité de cet investisseur correspond à celle de la théorie «Safety-First» :

$$U = (1 + K_{dr}U_r)K_{ds}U_s,$$

avec :

· U_r : est la fonction d'utilité associé au compte à un niveau d'aspiration élevé, avec :

$$U_r = P_r^{1-\beta} E_h(W_r)^\beta.$$

· U_s : est la fonction d'utilité associé au compte à un niveau d'aspiration faible, avec :

$$U_s = P_s^{1-\delta} E_h(W_s)^\delta,$$

où β et δ sont deux paramètres de pondération non négative ; K_{dr} est le poids accordé pour le compte mental à un niveau d'aspiration élevé et K_{ds} est le poids accordé pour le compte mental à un niveau d'aspiration faible.

Shefrin et Statman (2000) ont montré que si l'investisseur n'investit pas dans le compte mental à faible niveau d'aspiration «downside protection», son utilité est nulle. Mais, si l'investisseur n'investit pas dans le compte à un niveau aspiration élevé «upside potential», son utilité ne s'annule pas. Donc, l'investisseur a intérêt à commencer à investir sa richesse dans le compte à faible niveau d'aspiration «downside protection» pour garantir un minimum de richesse. Dans le cas où les ventes à découvert sont autorisées, l'investisseur peut avoir une position de compensation entre les deux comptes mentaux : il est dans la position courte pour certains actifs dans le compte «upside potential» et dans une position longue pour certains autres actifs dans le compte «downside protection». Shefrin et Statman (2000) ont constaté que les titres optimaux pour les investisseurs, dans le cadre de la BPT, ressemblent à une combinaison de loteries et d'obligations. Pour un niveau d'aspiration élevé «upside potential», les actifs utilisés sont des actifs de type loterie. Tandis que les actifs utilisés par l'investisseur à un niveau d'aspiration faible «downside protection», sont des obligations.

Comparaison entre le portefeuille optimal selon la CPT et le portefeuille efficient classique. Dans leurs travaux, Shefrin et Statman (2000) ont montré que le portefeuille optimal obtenu selon la BPT ne coïncide pas avec le portefeuille optimal de l'approche moyenne-variance. Toutefois, ce résultat a été critiqué par plusieurs études cherchant à comparer l'allocation d'actifs générée par la BPT avec les modèles générés par la théorie de portefeuille moderne.

Levy et Levy (2004) ont comparé le modèle du choix du portefeuille basé sur la CPT avec celui basé sur l'approche moyenne-variance et ont constaté que les ensembles des portefeuilles efficients coïncident généralement dans les deux modèles. Ceci suggère que le modèle moyenne-variance peut être utilisé pour construire un ensemble de portefeuilles optimaux selon la CPT. De plus, ils ont montré que cette stratégie n'est valable que pour les rendements normalement distribués. Pirvu et Schulze (2012) ont généralisé le résultat de Levy et Levy (2004) pour une classe d'actifs risqués dont la distribution est elliptiquement symétrique. Ils ont aussi présenté des solutions analytiques équivalentes à la maximisation de la fonction objective de la CPT tout au long de la frontière efficiente de l'approche moyenne-variance, quand les ventes à découvert sont autorisées. Quant à Hens et Mayer (2012), ils ont comparé les portefeuilles obtenus par l'optimisation de portefeuille selon la théorie des perspectives originales et selon la théorie des perspectives cumulées (CPT) avec les portefeuilles optimaux obtenus par la maximisation l'approche moyenne-variance. Ils ont montré que l'allocation des actifs générée par la CPT diffère considérablement de celle de l'approche moyenne-variance quand les rendements des actifs ne sont pas normalement distribués.

Contrairement à Levy et Levy (2004) et Pirvu et Scuelze (2012), Hens et Mayer (2012) ont interdit les ventes à découvert dans leur modèle et ont proposé une approche d'optimisation de portefeuille numérique, basée sur la fonction objective de la CPT. Ils ont utilisé le même algorithme que celui de Levy et Levy (2004) pour résoudre le problème d'optimisation de portefeuille selon la CPT. Leur méthode consiste à générer des portefeuilles efficients selon l'approche moyenne-variance et à calculer par la suite la valeur de la fonction objective pour chaque portefeuille efficient. Enfin, l'investisseur choisit le portefeuille efficient qui présente la valeur objective la plus élevée. Hens et Mayer (2012) ont montré que la maximisation de la fonction objective de la CPT tout au long de la frontière efficiente de l'approche moyenne-variance permet d'avoir une bonne approximation de la solution du problème d'optimisation de la CPT. Ils ont constaté que le portefeuille optimal obtenu selon la théorie des perspectives originales diffère significativement de celui obtenu à partir de la CPT. Cette différence devient minime quand les rendements des actifs sont normalement distribués. Ainsi, ils ont constaté que lorsque les rendements sont distribués selon la loi normale, le modèle de la théorie des perspectives et celui de la théorie des perspectives cumulées diffèrent significativement des analyses de l'approche moderne.

Afin de répondre aux anomalies des modèles de Levy et Levy (2004) et Hens et Mayer (2012), Pfiffelmann et al. (2016) ont déterminé la localisation du portefeuille optimal BPT_{CPT} par rapport à la frontière efficiente moyenne-variance. Le portefeuille optimal BPT_{CPT} est un portefeuille qui fait partie de l'ensemble des portefeuilles qui satisfait la contrainte Safety-First ($P(W < A) < \alpha$) et qui

maximise $E_{\bar{\pi}}(v(W)) = v'\bar{\pi}$ Le programme d'optimisation de l'investisseur est donné par :

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}_{\bar{\pi}}(v(W)), \\ & \text{s.c. } P(W < A) < \alpha, \end{aligned}$$

où v est la fonction de valeurs qui permet de transformer les rendements en utilité et définie selon le point de référence k . Pour le portefeuille i , le vecteur de rendements modifiés est défini par :

$$v_i = \begin{pmatrix} v(y_{i,1}) \\ \vdots \\ v(y_{i,n}) \end{pmatrix}.$$

Les gains et les pertes vont être traités d'une manière différente dans la fonction de valeurs. Le vecteur des poids modifiés est donné par :

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} \bar{\pi}^- \\ \vdots \\ \bar{\pi}_l^- \\ \vdots \\ \bar{\pi}_k^+ \\ \vdots \\ \bar{\pi}_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\pi}^- = W^-(p_1) \\ \vdots \\ \bar{\pi}_l^- = W^-\left(\sum_{j=1}^l p_j\right) - W^-\left(\sum_{j=1}^{l-1} p_j\right) \\ \vdots \\ \bar{\pi}_k^+ = W^+\left(\sum_{j=k}^n p_j\right) - W^+\left(\sum_{j=k+1}^n p_j\right) \\ \vdots \\ \bar{\pi}_n^+ = W^+(p_n) \end{pmatrix},$$

avec W est la fonction de pondération de Tversky et Kahneman (1992).

Les résultats obtenus par Pfiffelmann et al. (2016) montrent que le portefeuille optimal BPT_{CPT} est situé sur la frontière efficiente moyenne-variance dans 70 % des cas. Ces résultats ne changent pas lorsque les ventes à découvert sont autorisées. Ce résultat répond aux études récentes de Levy et Levy (2004) qui soulignent la coïncidence des deux modèles. Le portefeuille optimal BPT_{CPT} présente un Skewness positif durant toute la période d'étude. En effet, les investisseurs souhaitent devenir riches d'une manière importante et sont prêts à prendre le risque pour augmenter les gains potentiels (Lopes, 1987). Le concept d'espoir conduit les investisseurs à parier et à préférer les portefeuilles positivement asymétriques dans l'espoir d'obtenir un rendement plus élevé. Enfin, Pfiffelmann et al. (2016) ont montré que lorsque le portefeuille optimal BPT_{CPT} est efficient, il ne sera pas choisi par les investisseurs qui suivent l'approche moyenne-variance car il est déjà associé à un niveau de risque élevé et un niveau de rendement espéré élevé. Les portefeuilles BPT_{CPT} sont choisis par les investisseurs qui sont attirés par l'asymétrie positive des rendements et qui cherchent à prendre le risque quand les gains potentiels sont élevés.

5.2.4. *Le modèle d'optimisation de portefeuille selon la comptabilité mentale de Das et al. (2010).* L'approche d'optimisation selon la comptabilité mentale a été introduite par Das et al. (2010). Dans le cadre de leur approche, l'investisseur commence par l'allocation de sa richesse dans les différentes couches des comptes mentaux. Ensuite, l'investisseur spécifie la probabilité souhaitée pour atteindre le seuil de chaque objectif. Une fois que l'investisseur a déterminé le seuil et la probabilité que le rendement du portefeuille n'excède pas le seuil de rendement défini, le problème se transforme en un problème d'optimisation de type moyenne-variance (Markowitz, 1952) avec un coefficient d'aversion au risque. Alors, chaque compte mental est optimisé comme un sous portefeuille selon l'approche moyenne-variance avec un coefficient d'aversion au risque et chaque objectif est atteint par une combinaison des actifs. Le portefeuille global est la somme des sous-portefeuilles des différents comptes mentaux.

Das et al. (2010) ont constaté que le problème d'optimisation du portefeuille, qui consiste à maximiser le rendement espéré du portefeuille sous la condition que le rendement du portefeuille atteint le

seuil du rendement pour une probabilité donnée, est mathématiquement équivalent au problème d'optimisation moyenne-variance et au critère d'optimisation Safety-First de Telser (1955). Ainsi, ils ont montré que les modèles moyenne-variance, MA (l'approche de la comptabilité mentale) et VaR sont connectés et que la VaR fournit une approche analytique permettant de déterminer les portefeuilles possibles dans le cadre du modèle MA. Il est facile de tracer la frontière efficiente selon l'approche moyenne-variance, mais il est difficile de déterminer le coefficient d'aversion au risque d'une manière très précise. En effet, les investisseurs sont meilleurs à la détermination de leur attitude face au risque pour les sous-portefeuilles de cette approche que pour un portefeuille global.

Dans le cadre du modèle MA, l'investisseur peut spécifier que le rendement de son portefeuille ne doit pas être au-dessous d'un seuil s avec une probabilité supérieure à α . Ceci est équivalent au modèle d'optimisation de portefeuille de Telser (1955). Quand les rendements des actifs sont normalement distribués, ce problème est lié à la VaR, tel que : $VaR_\alpha = s$. Das et al. (2010) ont montré que la résolution du problème MA est analogue à la résolution du problème moyenne-variance avec un coefficient d'aversion au risque implicite. Soit s le seuil de rendement du portefeuille P et α la probabilité maximale que le rendement du portefeuille n'atteint pas le seuil s , tel que :

$$P(W < s) < \alpha.$$

Das et al. (2010) ont déterminé la solution du coefficient d'aversion au risque implicite et la pondération optimale $w(\gamma)$ quand le rendement du portefeuille est normalement distribué :

$$s \leq w(\gamma)' \mu + \Phi^{-1}(\alpha)(w(\gamma))' \Sigma w(\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

où $w(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} [\mu - (\frac{1' \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{1' \Sigma^{-1} 1}) 1] \in \mathbb{R}^n$.

La solution de ce problème consiste à déterminer le coefficient d'aversion au risque implicite de l'investisseur en substituant $w(\gamma)$ par son expression dans l'équation de s . Lorsque l'investisseur arrive à déterminer ses préférences dans le cadre de la comptabilité mentale pour chaque compte à travers le seuil du rendement s et la probabilité α , il peut déterminer implicitement sa préférence au risque γ pour chaque compte mental comme une fonction $\gamma(\mu, \Sigma, s, \alpha)$.

La contribution principale de Das et al. (2010) consiste à créer des portefeuilles à partir de l'analyse de l'approche moyenne-variance et de l'approche de la comptabilité mentale, lorsque la vente à terme est autorisée. Das et al. (2010) ont constaté que lorsque le coefficient d'aversion au risque de l'investisseur γ décline, l'investisseur investit moins dans les actifs sans risque et plus dans les actifs risqués. En effet, quand le coefficient d'aversion au risque diminue considérablement, l'investisseur exploite son portefeuille en prenant une position courte sur les actifs sans risque et une position longue sur les actifs risqués. Le portefeuille global adéquat est le portefeuille qui reste sans endettement. Das et al. (2010) ont trouvé la solution pour le portefeuille global en supposant que l'investisseur alloue sa richesse selon la règle 60 : 20 : 20 (60% de sa richesse est investie pour la retraite, 20% de sa richesse dans l'éducation et 20% dans la partie qui lui permet de devenir riche). Ils ont constaté aussi que lorsque les pondérations du portefeuille ne sont pas linéairement proportionnelles à γ , le coefficient d'aversion au risque implicite de l'investisseur du portefeuille global est différent du coefficient d'aversion au risque moyen des 3 sous-portefeuilles.

La frontière efficiente MA est obtenue par la résolution des équations de s et $w(\gamma)$ pour des différents niveaux de α . Pour chaque valeur de s , l'investisseur obtient une frontière efficiente MA différente. Alors, les 3 comptes mentaux sont situés dans 3 frontières efficientes MA différentes, car ces comptes sont optimisés pour différentes valeurs du seuil s . Das et al. (2010) ont montré que le portefeuille global, qui est une combinaison des sous-portefeuilles optimaux, est toujours situé sur la frontière efficiente MA, car la combinaison des portefeuilles appartenant à la frontière efficiente est un portefeuille qui appartient à cette frontière. Ainsi, ils ont montré que la probabilité et le rendement espéré du portefeuille varient pour les différentes valeurs de γ . En effet, l'augmentation de la valeur du coefficient d'aversion au risque de l'investisseur entraîne une décroissance au niveau de la probabilité et du seuil de rendement, c'est-à-dire l'investisseur devient plus averse au risque.

En se basant sur le modèle de Das et al. (2010), Singer (2011) a développé deux approches : la première approche se place dans le cadre où la sélection des actifs spécifiques selon les objectifs est autorisée et fait appel à l'intuition des investisseurs individuels. Dans ce cadre, Singer (2011) a montré que les sous portefeuilles optimaux ne coïncident pas forcément avec la frontière efficiente de moyenne-variance. Ainsi, il a montré que les sous-portefeuilles peuvent induire à deux nouvelles frontières efficientes moyenne-variance : une frontière qui ignore la corrélation entre les sous-portefeuilles et l'autre frontière qui prend en compte la corrélation entre les sous-portefeuilles. Cette approche consiste à donner une pondération à chaque sous-portfeuille, suivant la méthode de Das et al. (2010), et à les rassembler par la suite dans un seul portefeuille global. Quant à la deuxième approche, elle consiste à analyser le cadre où la sélection des actifs spécifiques aux objectifs n'est pas autorisée (garder la même hypothèse que Das et al. (2010) avec des interprétations différentes). Dans ce cadre, Singer (2011) a proposé une solution très proche de celle de Das et al. (2010). Cette solution est un point de la frontière efficiente moyenne-variance et coïncide avec un sous-portfeuille optimal.

Gordon et Baptista (2011) cherchent à savoir si la cohérence du modèle Das et al. (2010) avec le modèle de Markowitz (1952) se brise si l'investisseur délègue une telle tâche à une tierce personne. Pour répondre à cette question, ils ont développé un modèle de sélection de portefeuille avec la comptabilité mentale et la délégation. Ils ont développé un modèle qui est basé sur deux littératures. La première littérature est liée à la théorie comportementale du portefeuille (Das et al., 2010) (L'investisseur considère son portefeuille global comme un ensemble de comptes mentaux associés à des objectifs différents) et la deuxième littérature repose sur la délégation de la gestion de portefeuille à un manager de portefeuille. En effet, le modèle de Gordon et Baptista (2011) suppose que l'investisseur délègue sa richesse à un manager de portefeuille qui cherche à minimiser la tracking-error variance (TEV) en tentant de battre le portefeuille indiciel de référence. En effet, les managers sélectionnent les portefeuilles qui présentent la tracking-error variance minimale par rapport à tracking error espérée du Benchmark : C'est-à-dire pour chaque compte, le manager du portefeuille sélectionne le portefeuille qui présente un rendement espéré le plus élevé et qui répond aux objectifs du compte. La cohérence du modèle de Gordon et Baptista (2011) avec le modèle de Markowitz (1952) nécessite une certaine condition liée à la composition des Benchmarks. Alors, si les portefeuilles optimaux des managers couvrent la frontière efficiente moyenne-variance, alors la cohérence du modèle de Gordon et Baptista (2011) avec celui de Markowitz (1952) est assurée. Lorsque la contrainte de la vente à découvert est présente, Gordon et Baptista (2011) ont montré que les portefeuilles optimaux dans les comptes sont situés sur la frontière efficiente moyenne-variance, à condition que les portefeuilles optimaux des gestionnaires couvrent cette frontière. Les résultats de Gordon et Baptista (2011) sont cohérents avec le modèle de Das et al (2010) si les portefeuilles optimaux sélectionnés par le manager couvrent la frontière efficiente.

5.2.5. *Le positionnement optimal du portefeuille standard selon la comptabilité mentale.* Dans le cadre de l'optimisation de portefeuille structuré, Das et Statman (2009) ont combiné certaines caractéristiques de la théorie de portefeuille comportementale et de la théorie moderne de portefeuille pour développer une nouvelle théorie : la théorie de portefeuille selon la comptabilité mentale. Dans cette approche, l'investisseur divise son portefeuille en plusieurs comptes mentaux comme dans la théorie de portefeuille comportementale, mais ils placent dans ces sous-portefeuilles des titres décrits selon l'approche moyenne-variance. L'ajout des options à l'ensemble des titres valables permet d'avoir de meilleures combinaisons de rendement espéré et la probabilité d'échouer à atteindre un certain seuil. Les investisseurs enrichissent leurs portefeuilles, composés d'actions, d'obligations, des options et des produits structurés.

Das et Statman (2009) ont étendu la théorie de portefeuille selon la comptabilité mentale en intégrant des produits dérivés dans l'ensemble des titres. Ils ont adapté une fonction objective plus générale, qui s'étend aux titres dont la distribution n'est pas normale. Leur approche consiste à maximiser les rendements espérés, telle que la probabilité d'échouer à atteindre un certain seuil soit satisfaite. Ils ont identifié les meilleurs types de produits dérivés pour chaque compte mental. Dans ce cadre, l'investisseur choisit les portefeuilles optimaux pour chaque compte mental selon le couple rendement

espéré et le risque mesuré par la probabilité d'échouer à atteindre un seuil donné s . Le programme d'optimisation est donné par :

$$\begin{aligned} & \max_w w' \mu, \\ & \text{s.c. } \Pr[r_p \leq s] \leq \alpha, \end{aligned}$$

où $w = (w_1, \dots, w_n)'$ représente le vecteur de pondérations de n titres dans le portefeuille et $\mu \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur de rendement espéré de n titres. La contrainte suppose que le portefeuille doit avoir un rendement r_p plus faible que le seuil s avec une probabilité qui n'excède pas α .

Das et Statman (2009) ont introduit des produits dérivés au problème d'optimisation initial de l'individu. Ceci exige l'introduction d'une distribution multi-variée des rendements des titres. Le problème d'optimisation ci-dessus est représenté comme suit :

$$\begin{aligned} & \max_w \int_{u \in U} ((w'r(u))p(r(u)) \prod_{i=1}^n dr_i(u), \\ & \text{s.c. } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \\ \int_{u:(w'r(u)) < s} p(r(u)) \prod_{i=1}^n dr_i(u) \leq \alpha \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

où $r(u) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de rendement de l'état u de l'espace U ; $w \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des pondérations des comptes mentaux pour les n titres dans un compte mental et $P(r(u))$ représente la probabilité de l'apparition du rendement $r(u)$. La résolution de ce programme d'optimisation est numériquement très intensive.

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, Das et Statman (2009) ont développé une approche robuste à 2 étapes. D'abord, il s'agit d'établir une grille pour déterminer les pondérations des portefeuilles possibles afin de localiser la région de l'optimum. Ensuite, il s'agit d'utiliser l'optimisation avec «Gradient» dans cette région pour localiser le portefeuille optimal.

Etape 1 : Recherche de la grille : Il s'agit de déterminer les valeurs possibles pour le vecteur $w \in \mathbb{R}^n$. En effet, il faut choisir un ensemble de valeurs pour $(w_1, w_2, \dots, w_{(n-1)})$ et un ensemble $w_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w_i$. Il s'agit de maximiser $(n-1)$ titres. Pour chaque ensemble de pondération possible, Das et Statman (2009) calculent les rendements des portefeuilles pour chaque état u . Ils examinent, par la suite, les rendements des portefeuilles pour vérifier si la contrainte de risque est satisfaite ou pas et éliminent tous les ensembles w qui ne satisfont pas cette condition. Ils calculent ensuite le rendement de chaque ensemble de pondération éligible pour trouver l'ensemble qui donne le rendement espéré le plus élevé.

Etape 2 : Optimisation : Il s'agit d'optimiser la fonction subjective numérique non linéaire selon la contrainte du risque non linéaire. Das et Statman (2009) ont reformulé le programme d'optimisation précédent afin de faciliter le processus d'optimisation. Le nouveau programme est donné par :

$$\begin{aligned} & \max_w \int_{u \in U} (w'r(u))p(r(u)) \prod_{i=1}^n dr_i(u) - X \left(\int_{u:(w'r(u)) < s} p(r(u)) \prod_{i=1}^n dr_i(u) \leq \alpha \right)^2, \\ & \text{s.c. } w_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w_i, \end{aligned}$$

où X est la valeur de pénalité (scalaire) qui est suffisamment élevée pour pousser l'individu à déterminer une probabilité cumulative de faillite $[\int_{u:(w'r(u)) < s} p(r(u)) \prod_{i=1}^n dr_i(u) \leq \alpha]$ égale à α . Das et Statman (2009) ont utilisé cette technique pour examiner comment les différents produits dérivés, dont les rendements ne suivent pas la loi Normale, permettent d'améliorer le portefeuille.

Das et Statman (2013) ont repris le modèle de Das et Statman (2009) tel que la contrainte de la complétude du marché n'est pas imposée et les rendements des actifs dérivés sont distribués selon la loi Normale. Ils supposent que les individus investissent dans un cadre statique selon la stratégie «buy and hold». Ils ont adapté le même programme d'optimisation que celui de Das et Statman (2009) et ont rajouté des options et des produits structurés à l'ensemble initial des titres. Ils ont analysé le choix de l'investisseur face à ces actifs dans un cadre risqué. Ceci a permis de créer d'autres moments non nuls (Skewness et Kurtosis).

Das et Statman (2009, 2013) ont trouvé que l'ajout des options et des produits structurés à l'ensemble des titres possibles permet d'avoir des atouts au niveau de la combinaison du rendement espéré et de la probabilité d'échouer à atteindre un seuil de rendement donné. Les options et les produits structurés sont adaptés à certains objectifs : les options de vente sont adaptées au compte mental «downside protection», dont le but consiste à éviter la pauvreté. Das et Statman (2013) ont montré que les options de vente ne sont utilisées dans ce compte que lorsqu'ils sont dans la monnaie, la valeur du seuil s est relativement élevée et la probabilité α est faible. Ainsi, ils ont constaté que, plus le prix d'exercice de l'option de vente (dans la monnaie) et le niveau du seuil sont élevés, plus le rendement espéré et l'écart-type du rendement du portefeuille optimal est faible, plus Skewness et Kurtosis augmentent et plus le poids attribué aux options de vente dans le portefeuille diminue. Quant aux options d'achat, elles sont utilisées dans le compte «upside potential», dont l'objectif est d'atteindre une certaine richesse. Das et Statman (2009, 2013) ont montré que l'introduction d'une option d'achat dans ce compte permet d'avoir un rendement espéré du portefeuille optimal et un écart-type du rendement du portefeuille plus élevés. Ils ont constaté que les allocations accordées à une option d'achat, quand elle est dans la monnaie, sont plus importantes que les allocations accordés à une option d'achat quand il est à la monnaie ou en dehors de la monnaie. En outre, l'introduction d'une option d'achat permet d'avoir un Skewness positif et un Kurtosis négatif. Das et Statman (2009, 2013) ont constaté que l'introduction du Call au portefeuille optimal permet à l'investisseur, qui a un goût pour le risque, d'avoir des gains plus importants que l'investisseur très averse au risque.

Das et Statman (2009, 2013) ont expliqué la popularité des options et des produits structurés dans le cadre de l'optimisation du portefeuille suivant deux cas : cas où les rendements des actifs ne suivent pas la loi Normale et le cas où les rendements des actifs suivent la loi Normale. Ils ont examiné le rôle des options et des produits structurés dans le cadre «buy and hold». Cependant, examiner le rôle des produits structurés et des options dans le portefeuille dynamique en présence des autres biais comportementaux (l'ambiguïté, le regret et la déception) reste le sujet des prochaines études.

5.3. Optimisation de portefeuille standard selon la théorie de l'ambiguïté. Dans les analyses économiques, plusieurs situations de choix sont caractérisées par l'incertitude ou par l'ambiguïté. Ces situations sont différentes des situations caractérisées par le risque. Le paradoxe d'Ellsberg (1961) a montré que cette différence est significative au niveau comportemental. Ceci suggère qu'il existe deux dimensions de croyances du preneur de décision concernant les probabilités de survenance des événements : risque et ambiguïté. Le concept de l'ambiguïté fait référence à un manque de précision ou de clarté d'un énoncé ou d'informations dans une situation précise. Il renvoie à la diversité des interprétations possibles d'un mot, d'une expression ou d'une situation. Dans les modèles standards, l'ambiguïté est négligée par l'individu.

Merton (1980) a constaté dans son étude qu'il est difficile d'anticiper le rendement espéré des actions et que l'individu a besoin d'une période très longue pour estimer ce rendement. Afin d'incorporer l'ambiguïté dans les situations de prise de décision, Chen et Epstein (2002) ont proposé un modèle d'utilité des multiple-priors. Hansen et Sargent (2001) et Anderson et al. (2003) sont les premiers à proposer des études qui permettent de prendre en compte l'ambiguïté dans le cadre de l'optimisation de portefeuille. Liu (2008) a utilisé un ensemble exogène de priors et une utilité des multiple-priors développés par Chen et Epstein (2002) afin de capturer la notion de l'ambiguïté et de l'aversion à l'ambiguïté. Plus tard, Fei (2007) a déterminé le portefeuille optimal de l'investisseur en prenant en compte l'anticipation de l'investisseur et l'ambiguïté. Il a constaté que les méthodes de martingale

ordinaires et les méthodes de calcul de Malliavin peuvent être utilisées pour résoudre le problème d'optimisation de l'investisseur. Il a également montré que l'anticipation et l'ambiguïté affectent le choix du portefeuille optimal de l'investisseur. Pflug et Wozabal (2007) ont déterminé les portefeuilles optimaux quand le modèle de probabilités sous-jacentes n'est pas parfaitement connu. Ils ont appliqué l'approche «maxmin» qui permet de prendre en compte explicitement l'ambiguïté dans le cadre du choix du modèle de probabilités. Ce modèle est appelé «le modèle d'optimisation robuste». Il permet d'utiliser un ensemble de confiance pour la distribution des probabilités. Pflug et Wozabal (2007) ont montré que la valeur monétaire de l'information dans leur modèle peut être déterminée.

L'estimation des paramètres d'un modèle est toujours très difficile. En outre, le modèle d'optimisation moderne est sensible aux estimations des paramètres d'entrée. Par conséquent, la performance et la composition des portefeuilles optimaux obtenus selon l'approche moyenne-variance sont toujours sensibles aux perturbations rencontrées au niveau des paramètres principaux du modèle (par exemple : le rendement espéré et la matrice de variance-covariance). Dans le cadre des théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée classique, plusieurs auteurs supposent que les investisseurs possèdent la même opinion concernant la vraie distribution de probabilités des événements aléatoires. Cependant, l'incertitude au niveau des valeurs des paramètres financières conduit à des erreurs de spécification. Afin de résoudre ce problème, Hansen et Sargent (2001) ont proposé un modèle de contrôle robuste. L'approche de préférence robuste considère que la fonction objective de l'individu prend en compte la possibilité que le modèle utilisé par l'individu peut être erroné et n'est qu'une approximation du modèle réel. Hansen et Sargent (2001) ont montré que l'incertitude peut être basée sur l'ambiguïté qui résulte d'un manque d'information concernant le caractère aléatoire.

Dans le cadre d'allocation d'actifs, l'investisseur fait face, non seulement au risque du rendement des actifs financiers mais aussi à une ambiguïté au niveau du vecteur de rendements espérés ou/et au niveau de la volatilité et des covariances des rendements des actifs. La question sur l'incertitude au niveau du modèle d'optimisation de portefeuille a fait l'objet de plusieurs recherches. Dans ce contexte, la méthode de l'optimisation robuste a été proposée. Cette approche est considérée comme étant un nouvel outil de modélisation. Elle propose des véhicules permettant d'intégrer le risque lié à l'estimation des paramètres d'entrée dans le processus de prise de décision dans le cadre de l'allocation d'actifs.

5.3.1. *Le problème de l'optimisation robuste.* Afin de faire face à la sensibilité des paramètres du modèle classique, il est naturel de prendre en compte l'ambiguïté au niveau des paramètres financiers dans le choix du portefeuille optimal. Ceci permet de proposer un modèle d'optimisation robuste. Il existe plusieurs interprétations de la robustesse qui conduisent à des formulations mathématiques différentes. Cette section aborde le problème de l'allocation optimale des actifs disponibles d'une manière robuste lorsque les estimations de rendements des actifs et de la matrice variance-covariance ne sont pas fiables. D'une manière générale, l'approche de l'optimisation robuste vise à déterminer des solutions pour les problèmes d'optimisation avec des paramètres d'entrée incertains. Il s'agit de déterminer l'allocation optimale des fonds en présence des erreurs statistiques au niveau des estimations des paramètres du problème. Début des années 1970, Soyster (1973) est considéré comme l'un des premiers chercheurs qui ont étudié l'approche d'optimisation robuste. Son étude a été concentrée sur l'optimisation linéaire.

Plusieurs contributions concernant l'optimisation de portefeuille en présence de l'ambiguïté ont vu le jour début du 21^{ème} siècle. L'approche d'optimisation robuste a été développée par Rustem et al. (2000) pour des ensembles discrets de risque et par Howe et Rustem (2002) avec un ensemble d'incertitudes fixé pour des scénarios de rendement en continu. En outre, El Ghaoui et al. (2003) ont utilisé la VaR (Value-at-Risk) comme un critère pour la sélection de portefeuille selon l'optimisation robuste. Koenig et Tütüncü (2004) supposent que l'incertitude réside dans la composante du vecteur de rendements espérés et de la matrice de covariance des actifs financiers. Ils ont développé une approche d'optimisation robuste dont l'algorithme est basé sur celui développé par Halldorsson et Tütüncü (2003). Selon cette approche, l'ambiguïté est décrite à partir d'un ensemble d'incertitudes,

qui comprend toutes les réalisations possibles des paramètres d'entrée incertains. Ils ont traité le problème d'optimisation robuste du portefeuille comme un problème de point-selle qui comporte des contraintes semi-définies.

Le problème de sélection du portefeuille optimal peut être déterminé mathématiquement selon une programmation quadratique convexe. La résolution de ce programme permet de générer un portefeuille efficient appartenant à la frontière efficiente. Afin de générer cette dernière, le problème d'optimisation quadratique doit être paramétré. Ceci peut être résolu selon trois manières équivalentes :

- 1) Maximiser le rendement espéré sous la condition que la variance soit majorée ;
- 2) Minimiser la variance du rendement sous la condition que le rendement espéré soit minoré ;
- 3) Maximiser le risque ajusté au rendement espéré en prenant en compte le coefficient d'aversion au risque de l'investisseur.

Lorsque la contrainte de la variance n'est pas linéaire, la première méthode ne présente plus une programmation quadratique. Cependant, les deux autres programmes sont données par :

Problème 1 :

$$\begin{aligned} & \min_w w' \Sigma w, \\ & \text{s.c. } w' \mu \geq R, \\ & \text{et } w \in W. \end{aligned}$$

Problème 2 :

$$\begin{aligned} & \max_w (w' \mu - \phi w' \Sigma w), \\ & \text{s.c. } w \in W, \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec μ représente le vecteur de rendements espérés des titres ; Σ représente la matrice de variance-covariance des titres (matrice semi-définie et positive) ; w est le vecteur de pondérations des actifs dans le portefeuille ; σ^2 est le majorant de la variance du portefeuille ; R représente le minorant du rendement espéré ; W est l'ensemble de portefeuilles possibles et ϕ représente le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur.

Dans ce cadre, les contraintes sur w sont établies comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ & \text{et } w \geq 0. \end{aligned}$$

La première condition suppose que toute la richesse disponible à l'investissement doit être allouée. Tandis que la deuxième condition impose que les ventes à découvert ne soient pas interdites.

Contrairement à l'approche classique «moyenne-variance», où les paramètres d'entrée (le vecteur de rendements espérés et la matrice de covariance) ne sont pas observables, Koenig et Tütüncü (2004) ont tenté de présenter toutes les informations disponibles concernant les paramètres du modèle sous la forme d'un ensemble d'incertitude. Dans ce cadre, l'ensemble d'incertitude sur le vecteur du rendement espéré μ ainsi que sur la matrice variance-covariance Σ peut prendre la forme d'un intervalle, tels que :

$$\mathbb{P}_\mu = \{\mu; \underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}\},$$

$$\mathbb{P}_\Sigma = \{\Sigma; \Sigma \succcurlyeq 0, \underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \bar{\Sigma}\},$$

$$\text{et } \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)} = \{(\mu, \Sigma); \mu \in P_\mu \text{ et } \Sigma \in P_\Sigma\},$$

avec $\underline{\mu}, \bar{\mu}, \underline{\Sigma}$ et $\bar{\Sigma}$ représentent les valeurs extrêmes des intervalles ci-dessus et $\Sigma \succcurlyeq 0$ indique que la matrice Σ est une matrice positive et symétrique.

En prenant en compte l'ensemble d'incertitude $\mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}$, Halldórsson et Tütüncü (2003) et Goldfarb et Iyengar (2003) ont introduit respectivement ces deux problèmes d'optimisation :

Programme 3 :

$$\min_{(\mu \in \mathbb{P}_\mu \text{ et } \Sigma \in \mathbb{P}_\Sigma)} \max_w (w' \mu - \phi w' \Sigma w). \quad (5.2)$$

Programme 4 :

$$\min_w \max_{\Sigma \in \mathbb{P}_\Sigma} (w' \Sigma w),$$

$$\text{s.c. } w \in W,$$

$$\text{et } \min_{\mu \in \mathbb{P}_\mu} w' \mu \geq R.$$

Comme nous l'avons déjà cité, les deux programmes 1 et 2 sont équivalents. On peut dire alors qu'avec la même équivalence, les programmes 3 et 4 sont équivalents. Le programme d'optimisation robuste 3 est orienté vers la recherche d'une solution qui permet d'avoir la meilleure stratégie d'allocation d'actifs parmi l'ensemble des scénarios défavorables. Koenig et Tütüncü (2004) ont traité le problème d'optimisation robuste «maxmin» en utilisant le théorème du point-selle⁴.

En appliquant le théorème du point-selle, le programme d'optimisation 3 peut être réécrit sous cette forme :

Programme 5 :

$$\max_w \min_{(\mu \in \mathbb{P}_\mu \text{ et } \Sigma \in \mathbb{P}_\Sigma)} (w' \mu - \phi w' \Sigma w).$$

$w^*(\phi)$ peut être une solution optimale pour ce programme d'optimisation, pour une valeur fixée et positive de ϕ . Cette solution peut être une solution optimale pour le programme d'optimisation 4 quand $R = \min_{\mu \in \mathbb{P}_\mu} w' \mu$.

Supposant que le choix de w a été effectué au niveau du troisième programme. Maintenant, il s'agit de déterminer le pire scénario qui peut se produire en prenant en compte l'incertitude au niveau des paramètres. Dans ce cas, le problème d'optimisation peut être donné par :

$$\min_{(\mu \in \mathbb{P}_\mu \text{ et } \Sigma \in \mathbb{P}_\Sigma)} (w' \mu - \phi w' \Sigma w).$$

Ce programme d'optimisation consiste à déterminer la solution optimale qui permet d'avoir la meilleure stratégie d'allocation parmi les scénarios défavorables.

5.3.2. *Le modèle de Koenig et Tütüncü (2004)*. Koenig et Tütüncü (2004) ont présenté une nouvelle approche d'allocation d'actifs en présence de l'ambiguïté, au niveau des données financières. Ils ont introduit une formulation robuste de l'approche moyenne-variance. Contrairement à l'approche d'optimisation standard, où les paramètres d'entrée (les rendements et les covariances des rendements des actifs) sont considérés comme des données sûres, l'approche de l'optimisation robuste suppose que les estimations des données sont définies sous la forme d'un ensemble d'incertitudes. En effet, leur stratégie d'allocation d'actifs robuste consiste à trouver une stratégie d'allocation optimale à partir des différentes classes d'actifs dans le pire scénario.

En présence d'un actif sans risque (par exemple : un bon de trésor) et des actifs risqués, Koenig et Tütüncü (2004) ont déterminé le portefeuille efficient en maximisant le ratio de Sharpe. Ils ont montré que tous les portefeuilles efficientes sont des combinaisons linéaires de l'actif sans risque. Ainsi, ils ont

⁴Théorème (point-selle)

Soient U et P deux ensembles quelconques et l'application : $L : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$. Le couple $(u^*, p^*) \in U \times P$ représente un point-selle de L si :

$$L(u^*, p) \leq L(u^*, p^*) \leq L(u, p^*) \text{ quelque soit } u \in U \text{ et } p \in P$$

Autrement dit, u^* est un point de minimisation de la fonction $u \in U \rightarrow L(u, p^*) \in \mathbb{R}$, et p^* est le point de maximisation de la fonction $p \in P \rightarrow L(u^*, p) \in \mathbb{R}$.

montré qu'il existe un seul portefeuille risqué optimal présentant le ratio de Sharpe le plus élevé, donné par :

$$h(w) = \frac{\mu'w - r_f}{\sqrt{w'\Sigma w}},$$

où r_f est le rendement de l'actif sans risque. Koeing et Tütünc (2004) ont montré qu'il existe un ensemble de portefeuilles possible avec un ratio de Sharpe positif et que l'actif sans risque représente le portefeuille efficient. Le portefeuille qui présente le ratio de Sharpe le plus élevé est obtenu par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \max_w h(w), \\ & \text{s.c. } w \in \chi. \end{aligned}$$

Ce problème d'optimisation est difficile à résoudre d'une manière directe car il possède une fonction objective non linéaire et non concave. Goldfarb et Iyengar (2003) ont transformé ce programme d'optimisation en un problème de minimisation convexe.

La fonction $h(w)$ peut être réécrite par :

$$h(w) = \frac{(\mu - r_f e)'w}{\sqrt{w'\Sigma w}} = g\left(\frac{w}{k}\right); \forall k > 0,$$

où $(\mu - r_f e)$ représente le rendement excédentaire du taux sans risque.

En tenant compte de l'ensemble de portefeuilles possibles $\chi(e'w = 1 \text{ et } w \in \chi)$, Koeing et Tütünc (2004) ont montré que le portefeuille w^* qui représente le ratio de Sharpe le plus élevé peut être déterminé par la résolution de ce problème d'optimisation avec une fonction objective quadratique convexe :

Programme 6 :

$$\begin{aligned} & \min_w w'\Sigma w, \\ & \text{s.c. } (w, k) \in \chi^+, \\ & \text{et } (\mu - r_f e)'w = 1, \end{aligned}$$

où $\chi^+ := \{w \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} | k > 0, \frac{w}{k} \in \chi\} \cup (0, 0)$. Si w^* est la solution optimale de ce programme d'optimisation, alors $w = \frac{\hat{w}}{k}$.

Premier cas : Cas simple

En prenant en compte l'ensemble d'incertitude $\mathbb{P}_{\mu, \Sigma}$ ainsi que les contraintes faites sur les pondérations des actifs et la propriété qui supposent que la matrice $\bar{\Sigma}$ soit semi-définie positive, on peut déterminer la solution optimale qui permet de simplifier le programme d'optimisation robuste suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{(\mu, \Sigma) \in \mathbb{P}_{\mu, \Sigma}} [w'\mu - \phi w'\Sigma w], \\ & \text{avec } \phi \geq 0 \text{ et } w \geq 0, \end{aligned}$$

Dans ce cas, le couple $\mu^* = \underline{\mu}$ et $\Sigma^* = \bar{\Sigma}$ représentent la solution optimale de ce programme d'optimisation indépendamment de ϕ et du vecteur μ . Ce cas d'optimisation robuste peut être résolu comme un programme d'optimisation standard, mais sous certaines conditions. Ce résultat indique que lorsque les ventes à découvert sont interdites et quand les bornes supérieures de la matrice de covariance forment une matrice acceptable, la réalisation du pire scénario pour les paramètres du modèle est la même quel que soit le choix du portefeuille optimal (le rendement espéré est réalisé avec les plus faibles valeurs de son intervalle de définition et les covariances sont réalisées avec les valeurs les plus élevées de leur domaine de définition). Dans ce cas, le programme 3 peut être transformé en un problème de maximisation donné par :

$$\max_w [w'\underline{\mu} - \phi w'\bar{\Sigma}w].$$

Ce programme correspond à un problème standard de moyenne-variance et peut être résolu par la méthode «critical lines» de Markowitz (1956). En outre, le problème 4 peut être réduit au problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_w [w' \bar{\Sigma} w], \\ & \text{s.c. } w \in W, \\ & \text{et } w' \underline{\mu} \geq R. \end{aligned}$$

Deuxième cas : Cas général

Dans un cadre plus général, Koeing et Tütüncü (2004) ont proposé un programme d'optimisation robuste qui peut être résolu à l'aide du théorème de point-selle. Soit $\Psi\phi$ une fonction objective définie par :

$$\Psi\phi(w, \mu, \Sigma) = w' \mu - \phi w' \Sigma w,$$

avec $w \in W$ et $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}$. Selon Halldorsson et Tütüncü (2003), pour des valeurs fixes de $\mu, \Sigma \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}$ et pour $\phi \geq 0$, la fonction $\Psi\phi$ est une fonction quadratique concave de w . Ainsi, pour des valeurs données de ϕ et w , la fonction $\Psi\phi$ est une fonction linéaire en μ et en Σ .

En reprenant les contraintes faites sur w et $\mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}$, Halldorsson et Tütüncü (2003) ont montré que ces deux programmes sont équivalents :

$$\max_w \min_{(\mu, \Sigma) \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}} [\Psi\phi(w, \mu, \Sigma)],$$

$$\text{et } \min_{(\mu, \Sigma) \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}} \max_w [\Psi\phi(w, \mu, \Sigma)].$$

En effet, l'équivalence de ces 2 programmes d'optimisation est obtenue à partir de l'application du principe du théorème du point-Selle sur la fonction $\Psi\phi(w, \mu, \Sigma)$. Ainsi, Halldorsson et Tütüncü (2003) ont montré que les solutions de ces deux programmes d'optimisation sont équivalentes. En d'autres termes, il existe un vecteur $\bar{w} \in W$ et une matrice colonne $(\bar{\mu}, \bar{\Sigma}) \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}$, tel que :

$$\Psi\phi(w, \bar{\mu}, \bar{\Sigma}) \leq \Psi\phi(\bar{w}, \bar{\mu}, \bar{\Sigma}) \leq \Psi\phi(\bar{w}, \mu, \Sigma),$$

$$\forall \bar{w} \in W \text{ et } (\bar{\mu}, \bar{\Sigma}) \in \mathbb{P}_{(\mu, \Sigma)}.$$

Cette relation permet de résoudre le problème d'optimisation «maxmin» précédent (problème 5.2). Alors, la détermination de la solution optimale du problème 5.1 est équivalente à la formulation du point-selle.

Comparaison entre l'approche d'optimisation de portefeuille moderne et l'approche d'optimisation robuste du portefeuille. Dans cette section, nous établissons une comparaison entre le comportement obtenu par la résolution du programme d'optimisation robuste avec celui obtenu par la résolution du programme d'optimisation de l'approche moderne, en se basant sur les travaux de Koeing et Tütüncü (2004). L'expérience de Koeing et Tütüncü (2004) est basée sur les prix mensuels de cinq classes d'actifs sur 23 ans (janvier 1979-juillet 2002) : Large cap growth stocks (actions à une forte croissance et à forte capitalisation), Large cap value stocks (actions stables à une forte capitalisation), Small cap growth stocks (actions à une forte croissance et une faible capitalisation) Small cap value stocks (actions stables à une faible capitalisation), Fixed income securities (titres à revenu fixe). Afin de déterminer l'effet de l'ambiguïté, au niveau du vecteur du rendement espéré et de la matrice variance-covariance, sur l'allocation d'actifs, Koeing et Tütüncü (2004) ont pris des intervalles d'incertitude différents dont les bornes sont définies par des quantiles. Dans un premier temps, Koeing et Tütüncü (2004) ont établi les moyennes historiques (quantile 50%) des rendements espérés des 5 indices ainsi que leurs variances et covariances. Ensuite, ils ont procédé au calcul des quantiles 2,5% et 97,5% pour les rendements mensuels des titres qui correspondent respectivement aux bornes supérieures et inférieures de rendements espérés et des matrices de variance-covariance $(\bar{\mu}, \underline{\mu}; \bar{\Sigma}, \underline{\Sigma})$. Ils ont établi la

frontière efficiente classique, en s'appuyant sur les moyennes de rendements espérés et de covariances des titres. En présence d'une incertitude supplémentaire au niveau des vecteurs de rendements et de la matrice de variance-covariance des actifs, ils ont établi par la suite la frontière efficiente robuste en se basant sur les quantiles 2.5% et 97.5% des rendements espérés et des covariances des titres. Les deux graphiques ci-dessous présentent les deux frontières efficientes (la frontière efficiente de l'approche moyenne-variance et la frontière efficiente robuste)⁵ :

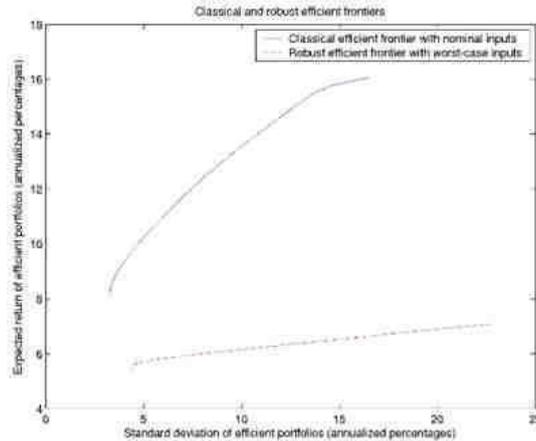


FIG. 4. La frontière efficiente classique et la frontière efficiente robuste

Sur le graphique 4, la frontière efficiente robuste se situe au-dessous de la frontière efficiente classique. Ces résultats montrent que les portefeuilles robustes efficientes sont moins bons que les portefeuilles efficientes de Markowitz (1952) et sont dominés au sens moyenne-variance. Ceci peut être expliqué par le fait que les portefeuilles de la frontière efficiente classique présentent des valeurs nominales exactes du rendement espéré et du risque, alors que les portefeuilles de la frontière efficiente robuste représentent les valeurs de rendements espérés et les niveaux de risque dans les scénarios défavorables ($\underline{\mu}$ et $\overline{\Sigma}$).

Dans un second temps, Koeing et Tütüncü (2004) ont déterminé la composition du portefeuille efficient classique et l'ont comparé avec celle du portefeuille efficient robuste en fonction du rendement espéré du portefeuille. Ceci est illustré à partir du graphique 5⁶.

Dans les deux graphes ci-dessus, l'investisseur accorde une part importante de son portefeuille, dans les deux approches, pour les titres à revenu fixe au début qu'il élimine par la suite progressivement. En effet, au niveau de la composition du portefeuille efficient robuste, au fur et à mesure que les valeurs du rendement espéré augmentent, la part réservée au titre à revenu fixe dans ce portefeuille diminue et est remplacée progressivement par des actions à une forte capitalisation (des actions plus sûres que les actions à faible valeur de capitalisation et qui génèrent le rendement le plus élevé), jusqu'à ce que le portefeuille devienne composé uniquement par des actions à une forte capitalisation. En revanche, selon l'approche classique, pour de faibles valeurs du rendement espéré, le portefeuille efficient n'est composé que par des titres à revenu fixe. En se déplaçant tout au long de la frontière efficiente, vers un rendement espéré plus élevé, les titres à revenu fixe sont remplacés progressivement par un mélange de titres à forte capitalisation et des titres à faible capitalisation, jusqu'à ce que le portefeuille efficient ne soit composé que par des titres à forte capitalisation.

⁵Koeing M., Tutuncu R.H. (2004). Robust Asset Allocation. *Annals of Operations Research*, 1-4, 132, 13.

⁶Koeing M., Tutuncu R.H. (2002). Robust Asset Allocation. *Annals of Operations Research*, 1-4, 132, 19.

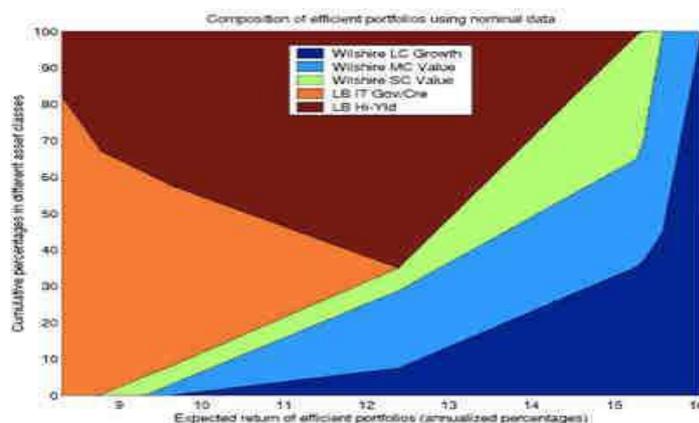


FIG. 5. Composition du portefeuille efficient classique

Afin de détecter la volatilité des titres d'une manière plus significative, Koeing et Tütüncü (2004) ont réparti les rendements de 5 indices sur des périodes de 4 ans et ont refait le même travail avec des quantiles 5% et 95% pour le rendement espéré et les covariances. Ceci permet d'avoir des intervalles d'estimation plus larges. Dans ce cadre, Koeing et Tütüncü (2004) ont obtenu des résultats similaires à ceux du cas précédent au niveau de la frontière efficiente robuste et de la frontière efficiente classique. En gardant ces mêmes conditions, Koeing et Tütüncü (2004) ont refait le même travail en utilisant un ensemble de classe d'actifs plus important (10 indices) pour une période plus courte. Ensuite, ils ont comparé les compositions du portefeuille efficient classique et le portefeuille efficient robuste. Ils ont montré que, dans chacun de ces portefeuilles, une proportion importante de la richesse a été attribuée aux actifs avec un rendement fixe et un niveau de risque faible. Cette proportion diminue au fur et à mesure que le niveau du rendement espéré augmente jusqu'à ce que le portefeuille efficient devienne essentiellement constitué par des titres à forte croissance et par des titres à moyenne-faible capitalisation. Contrairement à ces portefeuilles, le portefeuille efficient classique est constitué principalement par des titres à forte capitalisation et une petite partie de la richesse a été allouée aux titres avec un faible niveau de risque à la fin de la frontière efficiente. Ceci montre que le portefeuille robuste est moins diversifié que le portefeuille efficient classique.

Par la suite, afin de décrire l'ensemble de d'incertitude d'une manière plus précise, Koeing et Tütüncü (2004) ont utilisé les quantiles 10% et 90% pour des périodes de 2 ans et ont obtenu des mêmes limites que celles obtenues dans le cas précédent (4 ans). Afin d'avoir des intervalles de confiance plus restreintes, Koeing et Tütüncü (2004) ont utilisé des quantiles 25% et 75% pour les rendements espérés et les covariances. Les résultats de cette approche ont montré que les portefeuilles efficients robustes sont composés entièrement par des titres à une forte capitalisation. Alors que le mélange des deux classes d'actifs (des titres à une forte capitalisation et des titres à une faible capitalisation) n'est utilisé qu'en très petite quantité. Ces résultats montrent bien que les portefeuilles efficients robustes sont beaucoup moins diversifiés que les portefeuilles efficients classiques.

En comparant la performance de ces 3 approches robustes (4 ans avec des quantiles 5% et 95%; 2 ans avec des quantiles 10% et 90%; 2 ans avec des quantiles 25% et 75%) avec ceux de l'approche classique, Koeing et Tütüncü (2004) ont trouvé que les portefeuilles classiques sont plus performants. Ils ont constaté aussi que les portefeuilles générés pendant la période de 4 ans sont plus performants que les 2 autres scénarios (périodes de 2 ans).

En outre, Koeing et Tütüncü (2004) ont testé la stabilité des portefeuilles efficaces générés par l'approche classique et par l'approche robuste au cours du temps. Les graphiques 6⁷ et 7⁸ illustrent la composition de chacun de ces portefeuilles en fonction du temps.

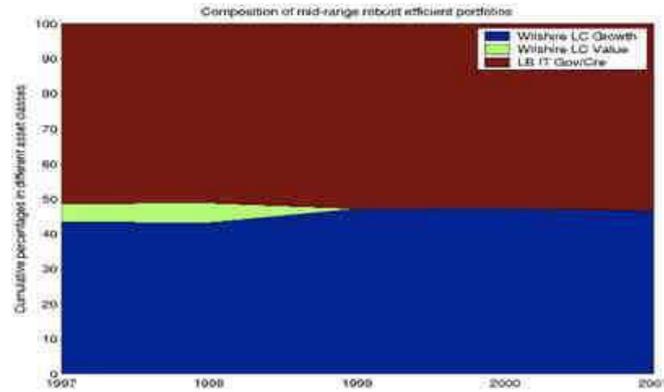


FIG. 6. Composition du portefeuille efficace robuste en fonction du temps

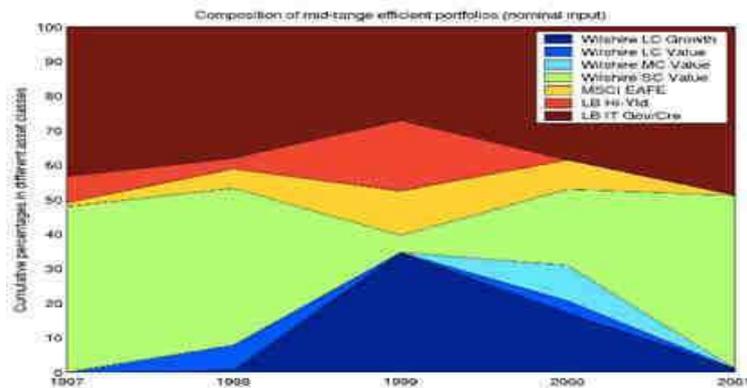


FIG. 7. Composition du portefeuille efficace classique en fonction du temps

A partir de ces deux graphiques, il est clair que la composition du portefeuille efficace classique varie considérablement par rapport à la composition du portefeuille efficace robuste. Au début de la période, le portefeuille efficace robuste est composé par des titres à revenu fixe, un peu plus que 50%, et par un mélange entre des actions à forte capitalisation et à forte croissance et des actions stables à forte capitalisation. Mais, à partir de l'année 1999, le portefeuille ne sera composé que par des titres à revenu fixe et des actions à forte capitalisation et à forte croissance qui sont considérées comme les actions les plus sûres parmi les différentes classes d'actifs proposées. Donc, le portefeuille efficace robuste est considéré plus pertinent et plus stable que le portefeuille efficace classique.

Dans le cadre d'incertitude supplémentaire au niveau des paramètres, l'approche d'optimisation robuste permet d'avoir une meilleure stratégie d'optimisation de portefeuille. Le portefeuille efficace robuste est composé par plusieurs classes d'actifs, dans le pire scénario, avec une faible perte de performance au niveau des scénarios probables. Dans le cas où l'incertitude prend plus d'ampleur, Koeing et Tütüncü (2004) ont montré que les rendements espérés des portefeuilles robustes dans le

⁷Koeing M., Tutuncu R.H. (2002). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 1-4, 132, 23.

⁸Koeing M., Tutuncu R.H. (2002). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 1-4, 132, 23.

pire cas augmentent. Ceci suggère que la bonne taille de l'ensemble d'incertitude doit être déterminée selon l'attitude au risque de l'investisseur. Alors, les portefeuilles robustes déterminés au début de la période de l'investissement restent optimaux tout au long de cette période. Ce type de portefeuille est plus pertinent et stable que les portefeuilles efficients classiques et présente une alternative intéressante pour les investisseurs qui suivent la stratégie de « buy and hold ».

5.3.3. *Illustration empirique.* Comme nous l'avons déjà mentionné dans la partie précédente, le problème de l'optimisation robuste vise à trouver des solutions aux problèmes d'optimisation dans le cadre d'incertitude supplémentaire au niveau des paramètres financiers. Il consiste à déterminer l'allocation optimale des fonds parmi les différentes classes d'actifs en présence des erreurs statistiques au niveau des estimations des paramètres du problème. Ce problème peut être formulé mathématiquement selon une programmation quadratique convexe. Cette dernière consiste à minimiser une fonction quadratique sous réserve d'égalité et d'inégalité des contraintes linéaires. Ainsi, pour cette structure d'incertitude, Koeing et Tütüncü (2004) ont montré que le problème de sélection de portefeuille robuste peut être résolu comme un problème du point-selle impliquant certaines contraintes.

Dans cette partie, nous développons des applications numériques basées sur le modèle d'optimisation robuste de Koeing et Tütüncü (2004). Ce dernier est basé sur le problème d'optimisation «maxmin», dans trois cas différents afin de déterminer l'effet de l'ambiguïté au niveau des paramètres du modèle sur l'optimisation du portefeuille. D'abord, nous déterminons le portefeuille robuste en présence de l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espérés des actifs. Ensuite, nous examinons les caractéristiques du portefeuille robuste en présence d'une incertitude supplémentaire au niveau de la matrice variance-covariance de rendements des actifs d'une part, et au niveau des rendements espérés des actifs et de la matrice variance-covariance de rendements des actifs d'autre part.

Ambiguïté au niveau du vecteur de rendement espéré. Dans un environnement incertain, nous supposons qu'il existe une certaine perturbation au niveau du vecteur de rendements espérés des actifs et que la matrice variance-covariance des rendements Σ reste constante. Cette incertitude supplémentaire au niveau des rendements est supposée uniforme et exprimée par le paramètre x , tel que :

$$\bar{R}_x = \bar{R} + x.e,$$

avec Σ : fixe,

où \bar{R} est le vecteur des rendements espérés de référence de n actifs financiers; \bar{R}_x est le vecteur des rendements espérés incertain et x est le paramètre d'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espérés.

L'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espérés est exprimée à travers l'ensemble d'incertitude $\mathbb{P}_{\bar{R}}$ tel que :

$$\mathbb{P}_{\bar{R}} = \{x, \text{ tel que } x \in [-\varepsilon; \varepsilon]\}.$$

où ε correspond au degré d'ambiguïté et de variation du rendement espéré. La détermination du portefeuille optimal robuste revient à résoudre le problème d'optimisation robuste suivant :

$$\max_w \min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_{\bar{R}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)].$$

A partir du théorème du point-selle, le programme précédent peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\min_{P \in \mathbb{P}} \max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)]. \quad (5.3)$$

Dans ce cas, nous supposons que la fonction d'utilité prend cette forme :

$$U = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(R_P) - \frac{\phi}{2} \sigma^2(R_P),$$

où ϕ est le paramètre d'aversion au risque de l'investisseur.

Dans ce contexte, l'utilité est considérée comme une mesure de la valeur que l'investisseur accorde à son portefeuille. Cet investisseur sélectionne le portefeuille qui lui permet de maximiser son utilité espérée sous la condition que la somme des pondérations accordées aux actifs dans son portefeuille soit égale à 1. La première partie du programme 5.3 peut être écrite comme suit :

$$\max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(R_P) - \frac{\phi}{2} \sigma^2(R_P)$$

avec $\sum_{i=1}^n w_i = 1.$

La résolution de ce problème (voir annexe Markowitz) donne l'expression du portefeuille optimal tel que :

$$W^*(x) = \frac{1}{\phi} (\bar{R}_x \Sigma^{-1} - \frac{(A_x - \phi)}{C_x} e \Sigma^{-1}).$$

A partir de cette expression, nous déduisons respectivement les équations du rendement espéré $\mathbb{E}(R_P)$ et de la variance du rendement $\sigma^2(R_P)$ du portefeuille optimal robuste :

$$\mathbb{E}(R_P) = \frac{d_x}{C_x \phi} + \frac{A_x}{C_x} \text{ et } \sigma^2(R_P) = \frac{d_x}{C_x \phi^2} + \frac{1}{C_x}.$$

A partir de l'expression du portefeuille optimal $W^*(x)$, l'expression de $U[V(X)]$ devient explicite en x , avec :

$$U[V(x)] = \mathbb{E}[V(x)] - \frac{\phi}{2} V[V(x)].$$

En utilisant les expressions du rendement espéré et de la variance du rendement du portefeuille optimal robuste, le programme d'optimisation peut être réécrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} & \min_{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon} U[V(x)], \\ & \iff \\ & \min_{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon} \left[\left(\frac{d_x}{C_x \phi} + \frac{A_x}{C_x} \right) - \frac{\phi}{2} \left(\frac{d_x}{C_x \phi^2} + \frac{1}{C_x} \right) \right]. \end{aligned}$$

En présence de l'ambiguïté au niveau du vecteur des rendements espérés, les expressions A, B, C et d (voir annexe Markowitz) dépendent de \bar{R}_x , donc elles dépendent du paramètre x . Ces expressions peuvent être écrites en fonction de x , tels que :

$$A_x = e \Sigma^{-1} (\bar{R} + x.e) = A + x.C;$$

$$B_x = (\bar{R}_x + x.e)' \Sigma^{-1} (\bar{R} + x.e) = B + 2x.A + x^2.C;$$

$$C_x = e' \Sigma^{-1} e = C;$$

$$d_x = B_x C - A_x^2.$$

En remplaçant les paramètres A_x, B_x, C_x et d_x par leurs expressions dans la fonction $U[V(X)]$ nous obtenons :

$$U[V(X)] = \frac{1}{C} [(A_x - 1) + \frac{1}{2\phi} d_x] = \frac{1}{C} [(A + x.C - 1) + \frac{1}{2\phi} (CB_x - A_x^2)],$$

où :

$$\begin{aligned} CB_x - A_x^2 &= C(B + 2xA + x^2C) - (A + xC)^2 \\ &= CB + 2C.x.A + x^2C^2 - A^2 - 2A.x.C - x^2C^2 \\ &= CB - A^2 = d, \end{aligned}$$

alors :

$$U[V(X)] = \frac{1}{C} [(A + x.C - 1) + \frac{1}{2\phi} d]$$

$$= \frac{A}{C} + x - \frac{1}{C} + \frac{d}{2\phi},$$

d'où :

$$U[V(X)] = \frac{(A-1)}{C} + \frac{d}{2\phi} + x.$$

Nous remarquons ici que la fonction $U[V(X)]$ est une fonction affine en x . D'où, le programme de minimisation précédent peut être réécrit, d'une manière plus explicite, comme suit :

$$\min_{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon} \left[\frac{(A-1)}{C} + \frac{d}{2\phi} + x \right]. \quad (5.4)$$

La résolution de ce programme donne la valeur de x qui permet d'avoir la valeur minimale de l'utilité du rendement du portefeuille optimal.

Application numérique. Dans cette partie numérique, nous établissons le portefeuille optimal robuste à partir des trois titres de notre échantillon (titre 1 : *S&P 500* ; titre 2 : *Euro Stoxx 50* ; titre 3 : *SSE Composite*) dans un environnement incertain. Nous supposons que cette incertitude porte sur le vecteur des rendements espérés des titres et que la matrice variance-covariance Σ reste fixe. La résolution du programme d'optimisation explicite 5.4 permet d'établir le niveau d'ambiguïté, exprimé par le paramètre x , qui permet d'avoir la valeur minimale de $U[V(X)]$ qui correspond à la valeur du portefeuille optimal robuste. Cette résolution a été faite sous Matlab. Comme nous l'avons expliqué dans la partie théorique, l'expression de $U[V(X)]$ est explicite en x , ceci peut être illustré à partir du graphique 8 :

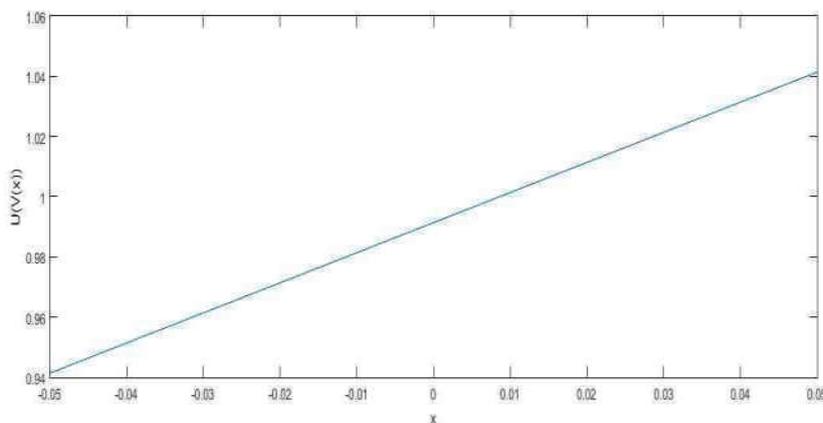


FIG. 8. Variation de la fonction d'utilité en fonction de x

D'après le graphique 8, nous constatons que la fonction d'utilité $U[V(X)]$ est une fonction croissante en x , tel que $x \in [-0,05; 0,05]$ et que la valeur minimale de cette fonction correspond à la valeur minimale de x . En tenant compte de la contrainte faite sur la pondération des actifs dans le portefeuille optimal, qui exige que la somme des pondérations de tous les actifs dans le portefeuille soit égale à 1, et à partir de l'expression de $W^*(x)$, les pondérations des actifs dans le portefeuille optimal robuste sont données par :

$$\begin{aligned} w_{x_1} &= 1 - w_{x_2} - w_{x_3}; \\ w_{x_2} &= 1 - w_{x_1} - w_{x_3}; \\ w_{x_3} &= 1 - w_{x_1} - w_{x_2}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous supposons que le paramètre x suit la loi discrète Uniforme sur l'intervalle $[-\varepsilon; \varepsilon]$, discrétisée avec un pas de 0,0001. Dans notre exemple, nous supposons que $\varepsilon = 5\%$. En présence d'une incertitude supplémentaire, nous cherchons à déterminer la valeur du paramètre x qui permet de minimiser la valeur du portefeuille optimal afin de trouver le nouveau rendement espéré du portefeuille optimal robuste.

La résolution numérique du programme d'optimisation 5.4 permet de déterminer la valeur optimale du paramètre x qui permet de minimiser la valeur de l'utilité, pour les différentes valeurs du paramètre d'aversion au risque $\phi = 1, 2, 5, 10$. Nous constatons que quelque soit la valeur du paramètre d'aversion au risque de l'investisseur, le niveau d'ambiguïté x est toujours le même, tel que : $x = -0,05$. Sachant que la perturbation au niveau du vecteur des rendements espérés est uniforme, le rendement du portefeuille optimal robuste en présence de l'ambiguïté est donné par :

$$\mathbb{E}(R_{P_x}) = w(\bar{R} + x.e).$$

Pour les différentes valeurs du paramètre de l'aversion au risque, le portefeuille optimal robuste est caractérisé par :

TAB. 4. Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste

Aversion au risque	x	Rendement espéré du portefeuille efficient robuste	Risque du portefeuille efficient robuste	Rendement espéré du portefeuille efficient MV
$\phi = 1$	-0,05	0,9649	0,0043	1,0149
$\phi = 2$	-0,05	0,9649	0,0043	1,0149
$\phi = 5$	-0,05	0,9649	0,0043	1,0149
$\phi = 10$	-0,05	0,9612	0,0034	1,0111

A partir du tableau 4, nous constatons que le niveau d'ambiguïté au niveau du vecteur de rendement espéré reste constant pour les différentes valeurs de ϕ , tel que $x = -0,05$. Ainsi, nous constatons que la valeur du portefeuille optimal robuste atteint son minimum quand le paramètre d'ambiguïté x est à son minimum.

En présence d'une incertitude supplémentaire au niveau du vecteur des rendements espérés des actifs, nous remarquons que le rendement espéré du portefeuille optimal robuste est plus faible que celui du portefeuille efficient classique pour un même niveau d'aversion au risque. Ainsi, nous remarquons que plus le coefficient d'aversion au risque est élevé, plus le rendement espéré du portefeuille optimal robuste est faible. Nous constatons que le niveau du rendement espéré du portefeuille optimal reste constant pour les cas où : $\phi = 1, 2, 5$. Pour $\phi = 10$, nous remarquons que le rendement espéré du portefeuille optimal robuste change par rapport aux autres cas. Ainsi, nous remarquons que le niveau du rendement espéré du portefeuille optimal robuste est plus faible que celui du portefeuille efficient classique pour $\phi = 10$.

Afin de se rendre compte de l'impact de l'ambiguïté et de l'aversion au risque de l'investisseur sur la valeur du portefeuille optimal, nous avons établi le graphique suivant, qui permet de représenter la valeur du portefeuille en fonction du paramètre $x \in [-0,05; 0,05]$ et du paramètre d'aversion au risque $\phi \in [2; 50]$:

Le schéma 9 montre l'évolution de la valeur du portefeuille avec la variation de x d'une part, tel que $x \in [-0,05; 0,05]$, et avec la variation de ϕ d'autre part, tel que $\phi \in [2; 50]$. D'après ce graphique, nous remarquons que la valeur du portefeuille optimal est une fonction croissante de x et décroissante de ϕ . Ceci signifie que, conformément à l'intuition, plus l'investisseur est averse au risque, plus la valeur de son portefeuille est faible. Ainsi, plus le degré d'incertitude au niveau du rendement espéré (représenté par x) est élevé, plus la valeur du portefeuille est élevée. Ce résultat montre que la valeur

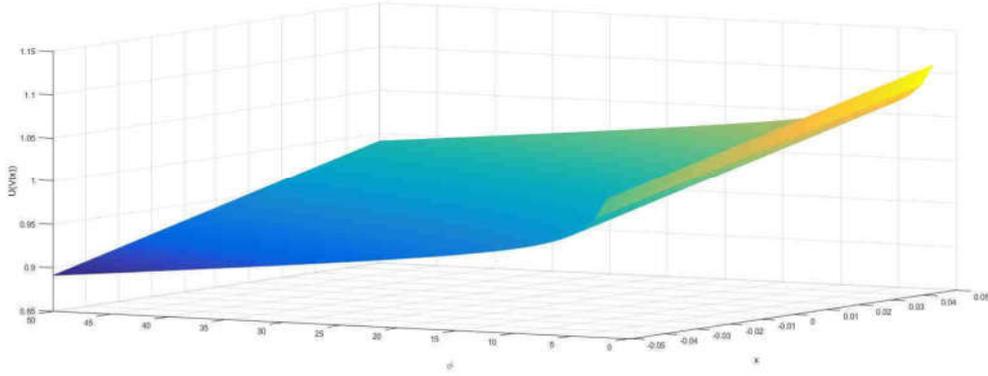


FIG. 9. Variation de la fonction d'utilité en fonction de x et du paramètre d'aversion au risque

du portefeuille est une fonction croissante de l'ambiguïté. Plus le niveau de l'ambiguïté au niveau du rendement espéré des actifs est grand, plus la valeur du portefeuille optimal robuste est élevée.

Ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance. Nous considérons le cas d'optimisation de portefeuille en présence de l'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance de rendements des actifs financiers (c'est à dire au niveau des variances de rendements des actifs et des covariances entre eux). Dans ce cas, le niveau du rendement espéré du portefeuille est supposé constant. La matrice variance-covariance est représentée comme suit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

où σ_{11} représente la variance du rendement de l'actif 1 ; σ_{nn} représente la variance du rendement de l'actif n et $\sigma_{n1} = \sigma_{1n}$ représente la covariance entre le rendement de l'actif 1 et celui de l'actif n . Le phénomène d'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance se traduit par une perturbation du type multiplicatif au niveau des variances de rendements des actifs ainsi que leurs covariances, tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_{iiy} &= \sigma_{ii}y; \\ \sigma_{ijz} &= \sigma_{ij}z, \end{aligned}$$

où σ_{ii} correspond à la variance du rendement de l'actif i ; σ_{ij} correspond à la covariance entre le rendement du titre i et du titre j ; y représente le niveau d'ambiguïté au niveau des variances des actifs et z représente le niveau d'ambiguïté au niveau des covariances entre les rendements des actifs. Cette incertitude au niveau de ces paramètres peut être traduite par :

$$\Sigma_{y,z} = \begin{pmatrix} \sigma_{iiy} & \cdots & \sigma_{ijz} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{ijz} & \cdots & \sigma_{iiy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11y} & \cdots & \sigma_{1nz} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1z} & \cdots & \sigma_{nny} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous supposons que : $y = z = \lambda$, tel que :

$$1 - \alpha \leq \lambda \leq 1 + \alpha ; \text{ avec } \alpha \in]0, 1[.$$

Ceci signifie que la perturbation est uniforme au niveau des variances des rendements des actifs et de leurs covariances. D'où, la matrice variance-covariance ambiguë est exprimée par :

$$\Sigma_\lambda = \lambda \Sigma.$$

Dans ce cadre, nous cherchons à déterminer le portefeuille optimal à partir de la résolution du programme d'optimisation robuste suivant :

$$\max_w \min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_\Sigma} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)],$$

où $\mathbb{P}_\Sigma = \{\Sigma; \Sigma \succcurlyeq 0, \underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \overline{\Sigma}\}$ est l'ensemble d'incertitude au niveau de la matrice variance-covariance Σ , avec : $\underline{\Sigma} = \Sigma(1 - \alpha)$ et $\overline{\Sigma} = \Sigma(1 + \alpha)$. D'après le théorème du point-Selle, le programme d'optimisation ci-dessus peut être réécrit sous cette forme :

$$\min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_\Sigma} \max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)], \quad (5.5)$$

où $U(V_T) = \mathbb{E}(R_P) - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P)$ est la fonction d'utilité. La résolution de la première partie du programme d'optimisation 5.5 « $\max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)]$ », sous la contrainte « $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ » permet d'établir l'expression de W^* :

$$W^*(\lambda) = \frac{1}{\phi}(\overline{R}\Sigma_\lambda^{-1} - \frac{A_\lambda - \phi}{C_\lambda}e\Sigma_\lambda^{-1}).$$

Nous remarquons que la matrice variance-covariance des rendements des actifs dépend du paramètre d'ambiguïté λ . À partir de cette expression, nous établissons l'expression du rendement espéré $\mathbb{E}(R_P)$ du portefeuille optimal robuste et celle de la variance de son rendement $\sigma^2(R_P)$:

$$\mathbb{E}(R_{P\lambda}) = \frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi} + \frac{A_\lambda}{C_\lambda} \text{ et } \sigma^2(R_{P\lambda}) = \frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi^2} + \frac{1}{C_\lambda},$$

où les paramètres $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ et d_λ sont définis par :

$$A_\lambda = e\Sigma_\lambda^{-1}\overline{R} = e\lambda\Sigma^{-1}.\overline{R} = \frac{1}{\lambda}e\Sigma^{-1}.\overline{R} = \frac{A}{\lambda};$$

$$B_\lambda = \overline{R}'\Sigma_\lambda^{-1}.\overline{R} = \overline{R}'(\lambda\Sigma)^{-1}\overline{R} = \frac{1}{\lambda}\overline{R}'\Sigma^{-1}\overline{R} = \frac{B}{\lambda};$$

$$C_\lambda = e'.\Sigma_\lambda^{-1}.e = e'(\lambda\Sigma)^{-1}.e = \frac{1}{\lambda}e'\Sigma^{-1}.e = \frac{C}{\lambda};$$

$$d_\lambda = B_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2}(BC - A^2).$$

En remplaçant la pondération optimale du portefeuille, le rendement espéré du portefeuille optimal et la variance de rendement du portefeuille optimal par leurs expressions, nous sommes menés à résoudre la deuxième partie du problème d'optimisation en fonction de λ :

$$\min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_\Sigma} \left[\left(\frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi} + \frac{A_\lambda}{C_\lambda} \right) - \frac{\phi}{2} \left(\frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi^2} + \frac{1}{C_\lambda} \right) \right],$$

\Leftrightarrow

$$\min_{1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha} \left[\left(\frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi} + \frac{A_\lambda}{C_\lambda} \right) - \frac{\phi}{2} \left(\frac{d_\lambda}{C_\lambda\phi^2} + \frac{1}{C_\lambda} \right) \right].$$

En simplifiant l'expression de $U(V_T)$, cette dernière peut être réécrite sous cette forme :

$$\begin{aligned} U(V_T(\lambda)) &= \frac{1}{C}[(A_\lambda - 1) + \frac{1}{2}\phi d_\lambda] \\ &= \frac{1}{C} \left[\left(\frac{A}{\lambda} - 1 \right) + \frac{1}{2\phi\lambda^2}(BC - A^2) \right] \\ &= \frac{1}{C} \left[\frac{A}{\lambda} - 1 + \frac{d}{2\phi\lambda^2} \right] \\ &= \frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2C\phi\lambda^2}. \end{aligned}$$

Le programme d'optimisation s'écrit ainsi sous cette forme :

$$\min_{1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha} \left[\frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2C\phi\lambda} \right].$$

La résolution de ce problème d'optimisation nous génère la valeur du portefeuille optimal quand λ est à son minimum. Ce résultat représente la valeur du portefeuille optimal dans le pire scénario.

Application numérique. Reprenons les données annualisées de notre échantillon portant sur les rendements de trois indices (titre 1 : *S&P 500* ; titre 2 : *Euro Stoxx 50* ; titre 3 : *SSE Composite*), nous cherchons à déterminer le portefeuille efficient robuste en présence d'une incertitude supplémentaire au niveau de la matrice variance-covariance exprimée par le paramètre $1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$. Dans ce cas, nous supposons que $\alpha = 5\%$. Alors, $0,95 \leq \lambda \leq 1,05$. Dans ces conditions, le portefeuille optimal peut être obtenu à partir de la résolution du programme d'optimisation suivant :

$$\min_{1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha} \left[\frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2\phi C\lambda} \right].$$

La résolution de ce problème d'optimisation en fonction de λ nous permet de tracer le graphique 10 qui permet de déterminer la variation de la fonction d'utilité en fonction de λ :

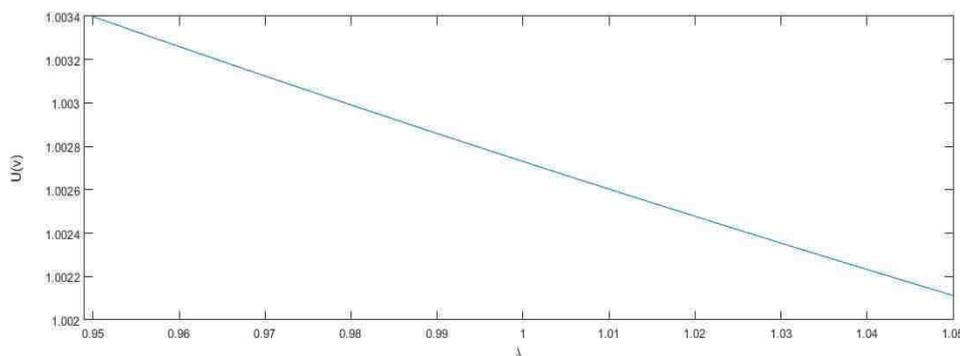


FIG. 10. Variation de la fonction d'utilité en fonction de lamda

A partir du graphique 10, nous remarquons que la fonction d'utilité de l'investisseur est une fonction décroissante en fonction de λ . En effet, nous constatons que la fonction de l'utilité atteint son minimum quand λ est à son maximum $\lambda = 1,05$. Afin de déterminer les caractéristiques du portefeuille efficient en présence de l'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance, il s'agit de déterminer d'abord la valeur du paramètre λ permettant d'obtenir la valeur minimale du portefeuille optimal pour des différentes valeurs du paramètre d'aversion au risque. Dans ce cadre, nous supposons que la valeur de λ varie entre 0,95 et 1,05. La valeur de l'ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance lorsque la valeur du portefeuille est maximale est donnée par : $\lambda = 1,05$. Alors, la nouvelle matrice variance-covariance est donnée par :

$$\Sigma_{\lambda} = \lambda \cdot \Sigma = \begin{pmatrix} 0,0046 & 0,001 & 0,0002 \\ 0,001 & 0,0039 & 0,0024 \\ 0,0002 & 0,0024 & 0,0069 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour les différentes valeurs du paramètre d'aversion au risque ϕ , le niveau du risque du portefeuille optimal robuste est donné dans le tableau 5.

A partir du tableau 5, la valeur minimale du portefeuille efficient robuste est atteinte lorsque λ est à son maximum quelque soit le niveau d'aversion au risque de l'investisseur ($\phi = 1, 2, 5, 10$). En

TAB. 5. Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste

Aversion au risque	λ	Rendement espéré du portefeuille efficient robuste	Risque du portefeuille efficient robuste	Risque du portefeuille efficient MV
$\phi = 1$	1,05	1,0149	0,0046	0,0043
$\phi = 2$	1,05	1,0149	0,0046	0,0043
$\phi = 5$	1,05	1,0149	0,0046	0,0043
$\phi = 10$	1,05	1,0111	0,0035	0,0034

présence de l’ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance, nous remarquons que les niveaux du risque des portefeuilles optimaux robustes changent, par rapport à ceux des portefeuilles efficients classiques pour un même niveau d’aversion au risque, alors que les niveaux de leurs rendements espérés restent constants par rapport à ceux des portefeuilles efficients classiques. Ainsi, nous remarquons que plus le niveau de l’aversion au risque de l’investisseur est élevé, plus le niveau du risque du portefeuille optimal robuste diminue. En présence d’incertitude au niveau de la matrice variance-covariance, nous remarquons que le niveau du risque du portefeuille optimal robuste est légèrement supérieur à celui de l’approche classique pour le même niveau d’aversion au risque.

Le graphique 11 nous permet de suivre l’évolution de la valeur du portefeuille en fonction du paramètre d’aversion au risque qui varie dans l’intervalle $[2 : 50]$, d’une part, et du paramètre d’ambiguïté au niveau de la matrice variance-covariance λ qui varie dans l’intervalle $[0,95 : 1,05]$, d’autre part. Ce graphique montre que la valeur du portefeuille est une fonction décroissante en fonction du paramètre d’aversion au risque et du paramètre d’ambiguïté λ .

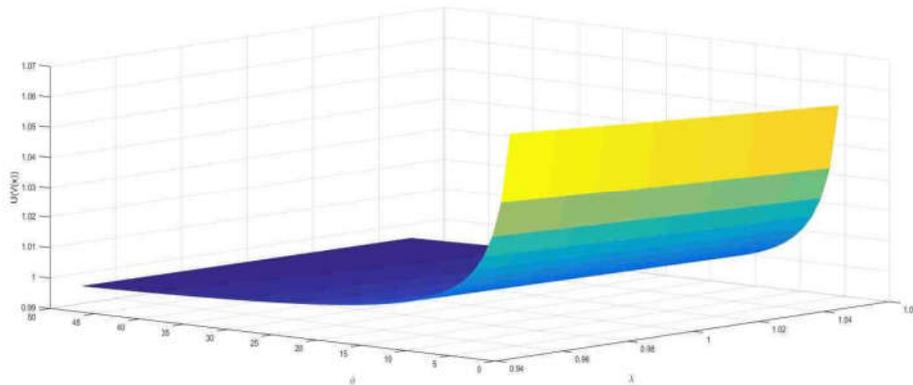


FIG. 11. Variation de la fonction d’utilité en fonction du paramètre d’ambiguïté et du paramètre d’aversion au risque

Ambiguïté au niveau du vecteur du rendement espéré et de la matrice variance-covariance. Nous supposons que l’investisseur fait face simultanément à une perturbation au niveau du vecteur des rendements espérés des actifs et de la matrice de variance-covariance des rendements des actifs. En effet, le niveau d’ambiguïté au niveau du vecteur du rendement des actifs est donné par le paramètre x . Quant au niveau d’ambiguïté au niveau de la matrice de variance-covariance, il est représenté par λ , tels que :

$$\bar{R}_x = \bar{R} + x.e \text{ avec } x \in [-\varepsilon; \varepsilon];$$

$$\Sigma_\lambda = \lambda \Sigma \text{ où } : 1 - \alpha \leq \lambda \leq 1 + \alpha; \text{ avec } \alpha \in]0, 1[.$$

Soient les ensembles d'incertitude au niveau du vecteur des rendements espérés et de la matrice variance-covariance représentés par la méthode de «multiple-priors», tels que :

$$\mathbb{P}_{\bar{R}} = \{x, \text{ tel que } x \in [-\varepsilon; \varepsilon];$$

$$\mathbb{P}_{\Sigma} = \{\Sigma; \Sigma \succcurlyeq 0, \underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \bar{\Sigma}\} \text{ avec } \underline{\Sigma} = \Sigma(1 - \alpha) \text{ et } \bar{\Sigma} = \Sigma(1 + \alpha);$$

$$\mathbb{P}_{(\bar{R}, \Sigma)} = \{(\bar{R}, \Sigma); \bar{R} \in \mathbb{P}_{\bar{R}} \text{ et } \Sigma \in \mathbb{P}_{\Sigma}\}.$$

Dans ce cadre, nous sélectionnons le portefeuille optimal selon le programme d'optimisation robuste suivant :

$$\max_w \min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_{(\bar{R}, \Sigma)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)].$$

D'après le théorème de point-selle, ce programme peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbb{P} \in \mathbb{P}_{(\bar{R}, \Sigma)}} \max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)], \\ & \iff \\ & \min_{\substack{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha}} \max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)], \end{aligned}$$

où $U(V_T) = \mathbb{E}(R_P) - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P)$ est la fonction d'utilité. En remplaçant $U(V_T)$ par son expression, le programme ci-dessus peut être réécrit par :

$$\min_{\substack{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha}} [\mathbb{E}(R_P) - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P)].$$

La résolution de la première partie de ce programme « $\max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)]$ », sous la contrainte « $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ » permet d'avoir l'expression de W^* :

$$W^*(x, \lambda) = \frac{1}{\phi}(\bar{R}_x \Sigma_{\lambda}^{-1} - \frac{A_{x, \lambda} - \phi}{C_{x, \lambda}} e \Sigma_{\lambda}^{-1}).$$

A partir de cette expression, nous avons établi l'expression du rendement espéré du portefeuille optimal $E(R_{P, \lambda})$ et celle de la variance de son rendement $\sigma^2(R_{P, \lambda})$:

$$E(R_{P, \lambda}) = \frac{d_{x, \lambda}}{C_{x, \lambda} \phi} + \frac{A_{x, \lambda}}{C_{x, \lambda}} \text{ et } \sigma^2(R_{P, \lambda}) = \frac{d_{x, \lambda}}{C_{x, \lambda} \phi^2} + \frac{1}{C_{x, \lambda}},$$

où les paramètres $A_{x, \lambda}, B_{x, \lambda}, C_{x, \lambda}$ et $d_{x, \lambda}$ sont donnés par :

$$A_{x, \lambda} = \frac{1}{\lambda} e \Sigma_{\lambda}^{-1} (\bar{R} + x.e) = \frac{1}{\lambda} (A + x.C);$$

$$B_{x, \lambda} = (\bar{R} + x.e)' \Sigma_{\lambda}^{-1} (\bar{R} + x.e) = \frac{1}{\lambda} (B + 2.x.A + x^2.C);$$

$$C_{x, \lambda} = e' \Sigma_{\lambda}^{-1} e = \frac{C}{\lambda};$$

$$d_{x, \lambda} = B_{x, \lambda} C_{x, \lambda} B - A_{x, \lambda}^2 = \frac{1}{\lambda^2} (B_{x, \lambda} C_{x, \lambda} B - A_{x, \lambda}^2) = \frac{d_{x, \lambda}}{\lambda^2}.$$

La fonction $U(V_T(x, \lambda))$, que nous cherchons à minimiser en fonction de x et de λ , peut s'écrire comme suit :

$$U(V_T(x, \lambda)) = \frac{1}{C_{x, \lambda}} [(A_{x, \lambda} - 1) + \frac{1}{2\phi} d_{x, \lambda}].$$

Ceci correspond au cas d'optimisation où l'ambiguïté porte sur le vecteur des rendements espéré des actifs, auquel nous rajoutons une incertitude supplémentaire au niveau de la matrice variance-covariance. Ceci peut être exprimé par la relation suivante :

$$\begin{aligned} U(V_T(x, \lambda)) &= \frac{1}{C_\lambda} [(A_\lambda - 1) + \frac{1}{2\phi} d_\lambda] + x \\ &= \frac{1}{\frac{C}{\lambda}} \left[\left(\frac{A}{\lambda} - 1 \right) + \frac{d}{2\lambda^2\phi} \right] + x \\ &= \frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2\lambda C\phi} + x, \end{aligned}$$

d'où :

$$U(V_T(x, \lambda)) = \frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2\lambda C\phi} + x.$$

Afin de déterminer le portefeuille optimal, il s'agit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha}} \left[\frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + \frac{d}{2\lambda C\phi} + x \right].$$

La résolution de ce programme d'optimisation permet de déterminer la valeur du portefeuille optimal robuste en fonction des paramètres d'incertitude x et λ .

Application numérique. Dans cet exemple, nous reprenons les données de notre échantillon portant sur 3 indices (titre 1 : *S&P 500* ; titre 2 : *Eurostoxx 50* ; titre 3 : *SSE Composite*). Dans ce cas, nous reprenons les mêmes valeurs pour les limites des intervalles de définition des deux paramètres x et λ , que des deux exemples précédents, tels que $\varepsilon = 5\%$ et $\alpha = 5\%$. Dans ce contexte, nous déterminons le portefeuille optimal robuste selon le programme d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1-\alpha \leq \lambda \leq 1+\alpha}} \left[\frac{A}{C} - \frac{\lambda}{C} + d \frac{d}{2\lambda C\phi} + x \right].$$

La résolution de ce programme d'optimisation est explicite. Nous remarquons que cette équation est croissante en x et décroissante en λ . Ceci permet de déterminer la valeur optimale de chacun de ces deux paramètres, tel que le minimum de cette équation est atteint quand le premier paramètre d'incertitude x est à son minimum, et le deuxième paramètre d'incertitude λ est à son maximum.

En tenant compte des allocations des actifs dans le portefeuille optimal, le rendement espéré de ce portefeuille ainsi que son risque, pour des différentes valeurs de l'aversion au risque ($\phi = 1, 2, 5, 10$), sont représentés dans le tableau 6 :

TAB. 6. Les caractéristiques du portefeuille efficient robuste

Aversion au risque	x	λ	Rendement espéré du portefeuille efficient robuste	Risque du portefeuille efficient robuste	Rendement espéré du portefeuille efficient MV	Risque du portefeuille efficient MV
$\phi = 1$	-0,05	1,05	0,9649	0,0046	1,0149	0,0043
$\phi = 2$	-0,05	1,05	0,9649	0,0046	1,0149	0,0043
$\phi = 5$	-0,05	1,05	0,9649	0,0046	1,0149	0,0043
$\phi = 10$	-0,05	1,05	0,9611	0,0035	1,0111	0,0034

En présence d'incertitude au niveau du vecteur des rendements espérés des actifs et de la matrice variance-covariance, nous remarquons, à partir du tableau 6, que la rentabilité espérée du portefeuille optimal robuste a légèrement diminué par rapport à celle du portefeuille efficient classique quelque soit le niveau d'aversion au risque de l'investisseur. Cependant, nous constatons que le niveau du risque du portefeuille efficient robuste a légèrement baissé. Ainsi, pour tous les niveaux d'aversion au risque,

nous remarquons que le portefeuille optimal robuste en présence d'incertitude au niveau du vecteur des rendements espérés et de la matrice variance-covariance présente le même niveau de rendement espéré que le portefeuille optimal robuste lorsque l'incertitude porte que sur le vecteur des rendements espérés, et le même niveau du risque que le portefeuille optimal robuste lorsque l'incertitude porte que sur la matrice variance-covariance.

Le tableau 7 montre les différentes valeurs du portefeuille optimal robuste lorsque l'incertitude est au niveau du vecteur des rendements espéré et de la matrice variance-covariance :

TAB. 7. La valeur du portefeuille efficient robuste

Aversion au risque	x	λ	Valeur du portefeuille efficient robuste
$\phi = 1$	-0,05	1,05	0,95535
$\phi = 2$	-0,05	1,05	0,95535
$\phi = 5$	-0,05	1,05	0,95535
$\phi = 10$	-0,05	1,05	1,0689

A partir du tableau 7, pour des niveaux d'incertitude similaires, nous remarquons que la valeur du portefeuille optimal robuste reste constante pour les cas où : $\phi = 1, 2, 5$. Pour $\phi = 10$, nous remarquons que la valeur du portefeuille optimal robuste augmente par rapport aux autres cas. Alors, nous pouvons constater que la fonction d'utilité du portefeuille est une fonction croissante du coefficient d'aversion au risque ϕ .

Afin de suivre la variation de la valeur du portefeuille optimal robuste en fonction des incertitudes présentes au niveau du vecteur des rendements espérés des actifs et de la matrice variance-covariance des rendements, nous avons établi le graphique 12 qui permet d'illustrer la variation de la valeur du portefeuille optimal robuste en fonction des deux paramètres d'ambiguïté x et λ :

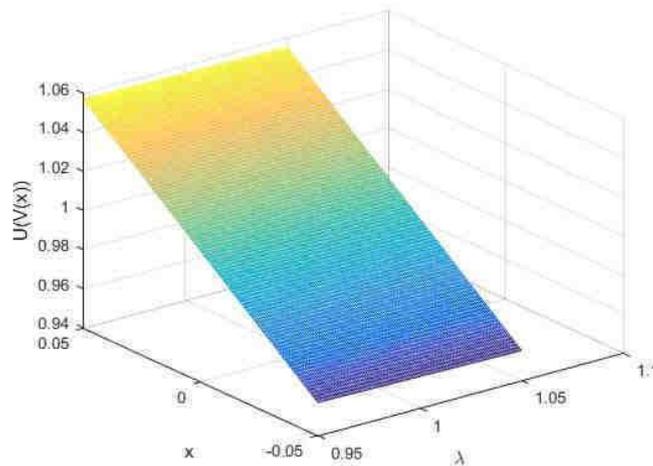


FIG. 12. Variation de la fonction d'utilité en fonction des paramètres d'ambiguïté x et de lamda

A partir du graphique 12, nous remarquons que la fonction de l'utilité est une fonction croissante en x et décroissante en λ . La valeur minimale de la fonction de l'utilité est atteinte quand x est égale à la valeur de la borne inférieure de son intervalle de définition ($x = -0,05$), et quand la valeur de λ est égale à la valeur de la borne supérieure de son intervalle de définition ($\lambda = 1,05$).

5.4. Optimisation de portefeuille standard selon la théorie du regret.

5.4.1. *Revue de littérature.* Dans le cadre de la prise de décision, le preneur de décision peut se retrouver dans une situation où il doit faire un choix entre plusieurs alternatives. Il peut comparer les conséquences de l'alternative choisie avec celles des options non choisies. Ce type de comparaison entraîne chez l'individu un sentiment de regret. Le regret est un sentiment de douleur ressenti par l'investisseur lorsqu'il se rend compte qu'il a pris la mauvaise décision alors qu'il avait la possibilité de choisir d'autres alternatives. En d'autres termes, l'investisseur éprouve du regret lorsque le rendement de son investissement est moins performant que ceux des autres investissements possibles. Le rôle du regret a été largement étudié dans le cadre de la prise de décision par Larrick (1993), Boles et Larrick (1995), Zeelenberg (1999), Connolly et Zeelenberg (2002) et Connolly et Buther (2006). Bell (1982) et Fishburn (1982) ont proposé la théorie du regret dans le cadre économique incertain. Cette théorie a été développée par Loomes et Sudgen (1982). Dans le cadre de la gestion de portefeuille standard, l'investisseur prend en compte le fait qu'il peut regretter d'avoir pris une telle décision d'investissement qui se révèle non optimale a posteriori. Il est donc judicieux de développer des approches d'optimisation de portefeuille qui permettent de prendre en compte le sentiment du regret de l'investisseur. Les approches d'optimisation de portefeuille avec regret sont principalement basées sur l'optimisation stochastique. Ceci suppose que les données sont incertaines et reposent sur la détermination exacte des probabilités sous-jacentes. Dans ce cadre, une large littérature a été développée (Muermann et al., 2006 ; Li et al., 2012 ; Ji et al., 2014 ; Simões et al., 2017).

Afin d'examiner l'effet du regret ex-ant de l'investisseur sur l'allocation de sa richesse, Muermann et al. (2006) ont suivi l'approche de Braun et Muermann (2004) qui suppose que les préférences de l'investisseur peuvent être définies comme 2 attributs de la fonction d'utilité de Bernoulli (1738) : Le premier attribut est lié à la fonction d'utilité de l'investisseur averse au risque $U(\cdot)$, tels que $U' > 0$ et $U'' < 0$; et le deuxième attribut est lié au fait que l'investisseur est concerné par la perspective du regret exprimé par la fonction $g(\cdot)$ qui permet de mesurer le montant du regret de l'investisseur. Muermann et al. (2006) supposent que l'investisseur est averse au regret ($g' < 0$ et $g'' > 0$). Ji et al. (2014) ont généralisé l'approche d'optimisation du portefeuille selon la théorie de regret en minimisant la somme pondérée de la différence entre le rendement du portefeuille de l'investisseur et la somme de rendement de chaque portefeuille possible. Contrairement aux autres approches d'optimisation du portefeuille en présence du regret, qui sont essentiellement basées sur l'optimisation stochastique et l'optimisation floue, l'approche de Ji et al. (2014), basée sur l'optimisation robuste, permet de protéger le principe de la diversification de l'investissement. Dans leur modèle, Ji et al. (2014) supposent que le regret de l'investisseur peut être classé en deux catégories : le premier regret est celui qui peut être ressenti par l'investisseur lorsqu'il se rend compte que le rendement de l'actif dans lequel il a alloué une grande somme est très faible ; le deuxième type de regret est celui de ne pas avoir alloué assez dans l'actif dont le rendement s'avère très élevé. Le modèle de Ji et al. (2014) suppose que l'investisseur doit choisir son portefeuille parmi un ensemble d'actifs risqués dont les rendements sont incertains et que les ventes à découvert sont interdites. Le regret est mesuré par la différence entre le rendement maximal et le rendement obtenu par l'investisseur (Li et al., 2012). Ji et al. (2014) ont étendu cette définition au cadre du regret robuste en choisissant les pondérations du sous-ensemble : c'est le regret robuste actualisé. Afin de décrire l'incertitude au niveau des paramètres, Ji et al. (2014) ont introduit un point de référence et une région de perturbation autour de ces paramètres incertains. Le problème développé par Ji et al. (2014) est un problème d'optimisation stochastique qui consiste à minimiser l'espérance du regret pondéré et stochastiquement actualisé et ont développé une solution appelé : «La solution optimale stochastique avec du regret actualisé». Plus tard, Ji (2017) a développé une approche d'optimisation de portefeuille en présence du regret permettant de minimiser la différence entre le rendement maximal et le rendement de chaque portefeuille dans le cadre d'optimisation du pire scénario multi-périodes. Dans ce modèle, le preneur de décision possède des informations sur les distributions incertaines, par exemple le premier ordre. En appliquant le théorème de la dualité de la programmation semi-infinie, le problème d'optimisation de portefeuille dans le pire cas avec

des distributions incertaines est reformulé de façon équivalente à un problème d'optimisation linéaire classique.

Simões et al. (2017) ont proposé un problème d'optimisation robuste absolue (ARPO). Cette approche permet de minimiser la volatilité maximale du portefeuille choisi dans le pire scénario. Ils supposent que les investisseurs ont leurs propres objectifs et ont ajouté une autre contrainte à la fonction objective de l'investisseur. Ils cherchent à évaluer la performance du portefeuille obtenu par leur méthode en comparant leurs résultats avec un ensemble de Benchmarks. Ils considèrent que leur perte en performance est évaluée par rapport à la plus faible volatilité du Benchmark. Simões et al. (2017) ont appliqué leurs modèles sur le marché de l'union monétaire et économique européen. Ils ont constaté que la méthode PRPO permet d'avoir un portefeuille plus diversifié que les deux autres méthodes classiques (la méthode d'optimisation du portefeuille robuste absolue et la méthode d'optimisation du portefeuille de la minimisation de la volatilité MVPO). De plus, Simões et al. (2017) ont appliqué le programme de la maximisation du rendement espéré sous la contrainte du regret sur des données américaines. Ils ont constaté que les portefeuilles obtenus par la méthode d'optimisation du portefeuille par la maximisation du ratio Sharpe (MSPO) et la méthode d'optimisation du portefeuille absolue par la maximisation du ratio Sharpe (SARPO) possèdent une volatilité supplémentaire beaucoup plus importante que celle obtenue par le portefeuille de PRCPO et par le portefeuille PRCPO. Simões et al. (2017) ont montré que la minimisation du regret permet d'avoir de meilleurs degrés de protection par rapport à la méthode d'optimisation robuste absolue et la méthode de minimisation de la volatilité dans tous les scénarios. De plus, la minimisation du regret donne aux investisseurs la confiance de poursuivre leurs objectifs en contrôlant le niveau de la volatilité supplémentaire. Simões et al. (2018) ont étendu les modèles d'optimisation robuste relatifs de portefeuille qui permettent d'optimiser la performance des portefeuilles par rapport à un ensemble de Benchmarks. Ils ont effectué cette extension dans le cadre de la volatilité minimale, où ils ont modélisé directement le regret comme la différence maximale entre la volatilité obtenue et celle d'un indice de référence donné. En outre, ils ont proposé d'utiliser le regret comme une contrainte supplémentaire plutôt que comme une nouvelle fonction objective, afin que les praticiens puissent maintenir leur cadre actuel. Ils ont examiné aussi comment un tel problème d'optimisation peut être résolu pour une classe de fonctions objectives, d'incertitude et d'ensembles de Benchmark. Enfin, ils ont illustré les avantages de cette approche en examinant son rendement par rapport à d'autres méthodes courantes sur plusieurs marchés boursiers.

5.4.2. *Modèle de Solnik (2007)*. Solnik (2007) a appliqué la théorie du regret dans le cadre financier, en particulier, dans le contexte de l'optimisation de portefeuille. Il a analysé les préférences des individus pour les actions domestiques (home bias). Ce biais a émergé à cause de la survenance des difficultés relatives à l'investissement à l'étranger et de la présence des barrières à savoir : les restrictions juridiques, les frais de transactions, les informations asymétriques, le taux de change... D'une manière générale, les individus achètent des fonds étrangers non seulement pour leurs avantages de diversification (rendement/risque), mais aussi pour leur potentiel à la hausse (surperformer les fonds domestiques). En effet, lorsque les fonds étrangers sous-performent les fonds domestiques, l'investisseur ressent des douleurs à cause du regret. En se basant sur la théorie du regret et ce biais, Solnik (2007) a établi un nouveau modèle comportemental tenant en compte le biais domestique en se basant sur la théorie du regret. Il a appliqué la théorie du regret à l'allocation d'actifs internationaux : les fonds étrangers (internationaux) présentent un potentiel à la hausse. Alors, l'investisseur éprouve du regret quand le rendement des fonds internationaux est inférieur à celui des fonds domestiques et de la réjouissance si les rendements des fonds étrangers surperforment les rendements des fonds locaux.

Dans son modèle, Solnik (2007) a pris en considération deux pays (un pays est considéré comme un pays domestique et l'autre comme un pays étranger). Il suppose que chaque pays est représenté par un actif. Il suppose également qu'un individu cherche à investir sa richesse initiale w dans les deux fonds : une proportion de $(1 - \alpha)$ de sa richesse initiale dans le fond domestique dont le rendement est noté par R et une proportion α de sa richesse initiale dans le fond international dont le rendement stochastique est donné par R_i . A l'échéance, la fonction de paiement du portefeuille de cet investisseur

est donnée par :

$$w^1 = w(((1 - \alpha)R + \alpha R_i) = w(R + \alpha(R_i - R)).$$

La fonction d'utilité standard est donnée par :

$$v(w(R + \alpha s)),$$

où $s = R_i - R$ est la différence entre le rendement de l'actif international et le rendement de l'actif domestique. En effet, si $s > 0$, alors l'investisseur éprouve de la réjouissance et si $s < 0$, l'investisseur éprouve du regret.

La fonction de l'utilité modifiée de l'investisseur est donnée par :

$$U(w^1) = v(w(R + \alpha s)) + f(v(w(R + \alpha s)) - v(wR)),$$

où $v(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont 2 fonctions monotones, croissantes et concaves ($f' < 0$; $f'' > 0$; $f(0) = 0$).

Les rendements des actifs domestiques sont définis comme un Benchmark. Ainsi, Solnik (2007) a montré que l'allocation d'actif optimale α^* est obtenue par la maximisation de la fonction de l'espérance de l'utilité modifiée de l'individu selon α . La fonction d'utilité modifiée est complexe avec deux attributs (aversion au risque et aversion au regret). Si la fonction $f(\cdot)$ est linéaire, le programme d'optimisation devient équivalent à celui de la maximisation de l'utilité espérée standard. Ceci revient à maximiser cette fonction :

$$E(v(w(R + \alpha s))).$$

D'une manière générale, la fonction $f(\cdot)$ est concave (aversion au regret).

Soit : $R = \bar{R} + r$, avec \bar{R} est le rendement espéré du fond domestique et r est le rendement espéré stochastique dont le rendement espéré est nul. Solnik (2007) a développé la fonction $v(\cdot)$ autour de \bar{R} et la fonction de regret $f(\cdot)$ autour de 0. Notant par : $\Sigma_r = E(r^2)$; $\Sigma_s = E(s^2)$ et $cov(r, s) = E(rs)$. Il a établi une solution numérique pour le problème de maximisation ci-dessus. Cette solution est donnée par :

$$\alpha^* = \frac{(\bar{s}v' + cov(r, s)wv'')(1 + f')}{(w\Sigma_s(v'' + v''f' + v'^2f''))}.$$

Dans le cas où l'aversion au regret est nulle ($f(\cdot) \equiv 0$: le cas standard), l'allocation optimale à l'étranger est donnée par :

$$\alpha_{no}^* = \frac{\bar{s}}{\phi\Sigma_s} - \frac{cov(r, s)}{\Sigma_s},$$

où $\phi = -\frac{wv''}{v'}$ est une mesure d'aversion au risque relatif. Ceci représente le résultat standard sous l'hypothèse de la normalité multi-variée. Ainsi, le résultat traditionnel peut être obtenu si la fonction de regret $f(\cdot)$ est linéaire.

En présence de l'aversion au regret, l'allocation optimale pour le fond international peut être exprimée sous cette forme :

$$\alpha^* = \alpha_{no}^*(1 - \theta),$$

où $\theta = \frac{f'' \frac{v'^2}{v''}}{1 + f' + f'' \frac{v'^2}{v''}} > 0$.

En se basant sur la définition de l'aversion au regret de Bell (1983) ($RA = -\frac{wv'f''}{1+f'}$), Solnik (2007) a défini l'aversion au regret par :

$$\theta = \frac{\frac{RA}{\theta}}{1 + \frac{RA}{\theta}}.$$

D'où, la solution optimale peut être exprimée par :

$$\alpha^* = \left[\frac{\bar{s}}{\phi\Sigma_s} - \frac{cov(R, s)}{\Sigma_s} \right] (1 - \theta).$$

Le premier terme de cette équation présente le résultat standard. Tandis que le second terme permet d'ajuster l'aversion au regret de l'investisseur. Le coefficient θ permet de présenter l'aversion au regret de l'individu. Sa valeur est nulle en absence de l'aversion au regret et prend des valeurs

entre $]0, 1]$ quand l'aversion au regret domine l'aversion au risque. Ce coefficient permet de mesurer l'ampleur du biais domestique.

Dans son article, Solnik (2007) a discuté certains cas :

- En absence de l'aversion au regret, l'investisseur n'éprouve ni regret, ni réjouissance. Dans ce cas, la solution optimale est cohérente avec la solution optimale de la théorie de l'utilité espérée classique et le biais domestique est absent ($\theta = 0$).
- Si l'aversion au regret est bien supérieure à l'aversion au risque ($\theta = 1$) : l'investisseur est averse au regret et son aversion au regret est plus importante que son aversion au risque. Dans ce cas, l'investisseur n'investit pas sa richesse dans l'actif étranger et ne l'investit que sur le marché local.
- Si l'aversion au regret et l'aversion au risque de l'investisseur sont présentes avec la même ampleur ($\frac{RA}{\theta} = 1$), l'allocation optimale étrangère est égale à la moitié de celle de l'investisseur non averse au regret ($\theta = 0,5$: 50% du biais domestique).

Solnik (2007) a déterminé l'allocation optimale d'un investisseur averse au risque et au regret et l'a comparé avec celle de l'approche traditionnelle. Il a montré que l'aversion au regret pousse l'investisseur à investir dans les actifs étrangers afin de réduire le potentiel de regret. Ceci montre que lorsque l'investisseur est averse au regret (en plus de l'aversion au risque), il va être influencé par le biais domestique d'une manière significative. Ainsi, il a montré que l'équation du marché global diffère selon le type de l'utilité espérée. Si les mesures de risque sont exogènes, les rendements espérés résultant de l'équation du marché global diffèrent selon la fonction d'utilité espérée (utilité avec une aversion au risque ou une aversion au regret).

Un peu plus tard, Michenaud et Solnik (2008) ont appliqué la théorie du regret dans le cadre du choix de la couverture de change optimale. Ils ont établi un modèle de prise de décision avec deux composantes de risque : le risque traditionnel (la volatilité) et le risque du regret. Ils ont montré que l'investisseur anticipe son regret et l'incorpore dans sa fonction objective et qu'il peut éprouver du regret de ne pas avoir fait le choix de couverture optimale à posteriori. Ils ont déterminé une solution analytique de ce modèle. Michenaud et Solnik (2008) ont présenté une illustration empirique basée sur une étude globale et comportementale de la couverture pour des investisseurs institutionnels. Ils ont montré qu'en présence d'une prime de risque importante, l'investisseur averse au regret a moins tendance à être complètement exposé au risque de change car ceci peut créer un potentiel de regret dans le cas d'une décroissance importante de la valeur de la devise. Ils ont constaté que l'investisseur averse au regret est plus sensible aux rendements des actifs dont la distribution est asymétrique.

5.5. Optimisation de portefeuille standard selon la théorie de la déception. Mise à part le sentiment du regret, qui est susceptible d'influencer le comportement des individus regret au moment de la prise de décision, le sentiment de la déception peut influencer le choix de l'individu en présence du risque et d'incertitude. Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986) ont montré que la déception est une réaction psychologique éprouvée par l'individu juste après avoir fait un mauvais choix. En effet, l'individu éprouve de la déception (ou de «l'allégresse») si le rendement de la stratégie choisie par l'individu est inférieur (ou supérieur) à son espérance. La théorie de déception est une théorie descriptive du choix dans un cadre risqué et incertain. Ils ont établi des modèles de prise de décision basés sur la théorie de la déception. Plus tard, Gul (1991) a développé un modèle de prise de décision basé sur l'aversion à la déception, appelé : «La théorie de l'aversion à la déception». Cette théorie a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans le cadre de la gestion de portefeuille.

5.5.1. *Le modèle de Gollier et Muermann (2006).* Gollier et Muermann (2006) ont proposé un nouveau critère de prise de décision en présence du risque, dans lequel l'individu détermine son utilité à partir des sentiments anticipés ex-ante et sa désutilité à partir de la déception ex-post. Dans leur modèle, Gollier et Muermann (2006) ont pris en compte les sentiments anticipés et la déception et supposent que l'individu choisit à l'avance son niveau d'optimisme, étant donné que l'optimisme permet d'augmenter l'utilité des sentiments antérieurs et le risque de la déception postérieur. Ces hypothèses sont contradictoires aux hypothèses de la théorie de l'utilité espérée qui supposent que le risque n'a

aucun effet sur le bien-être de l'individu avant la résolution de l'incertitude. En outre, ces hypothèses supposent qu'une fois l'incertitude est résolue, l'individu évalue son rendement final et n'éprouve pas de déception même si le rendement final n'atteint pas ses espérances. Gollier et Muermann (2006) ont déterminé les caractéristiques des croyances et des préférences optimales des individus en présence du risque généré par le processus mental.

Plusieurs chercheurs (Akerlof et Dickeurs, 1982 ; Caplin et Leahy, 2001 ; Brunnermeier et Parker, 2005 ; Gollier, 2005) ont anticipé les sentiments dans le cadre de l'économie. Ils ont utilisé un modèle de choix de portefeuille simple pour montrer que les émotions anticipées peuvent expliquer les raisons pour lesquelles les individus sont rationnels et plus optimistes qu'avec des informations valables. Dans ce cadre, les individus limitent leur pessimisme car ils savent bien qu'un excès de pessimisme peut les pousser à prendre plus de risque. Le modèle de Gollier et Muermann (2006) est une combinaison entre la théorie de déception de Bell (1985) et la notion de déception d'Akerlof et Dickeurs (1982). Gollier et Muermann (2006) ont appliqué leur critère de décision simple au problème de choix du portefeuille et à l'assurance de portefeuille et ont montré que l'individu est plus réticent à prendre le risque comparé à la prédiction du modèle de l'utilité espérée.

Gollier et Muermann (2006) ont défini la fonction de préférences comme étant la somme pondérée maximale de l'utilité espérée subjective générée à partir des émotions anticipées de l'utilité espérée objective de la déception. Ils ont montré que cette fonction est compatible avec la dominance stochastique de premier et de second degré. Cette fonction ne satisfait pas l'axiome d'indépendance et permet d'expliquer le paradoxe d'Allais. Dans leur modèle, Gollier et Muermann (2006) supposent qu'un individu fait face à une loterie $Q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ où q_s est la probabilité objective de l'état s . Le support de cette loterie est donné par : $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$. Soit y la valeur réelle anticipée de la fonction de paiement du portefeuille de cette loterie. Cette valeur est déterminée par l'individu. L'agent évalue sa satisfaction à travers la fonction d'utilité espérée objective suivante :

$$EU(Q, y) = \sum_s q_s U(c_s, y),$$

où $U(c_s, y)$ est l'utilité de l'agent obtenue à partir de la fonction de paiement du portefeuille de la loterie c_s donnant une fonction de paiement du portefeuille espéré y . Cette fonction est deux fois différentiable. L'aversion au risque de l'individu est exprimée par la concavité et la croissance de la fonction d'utilité. Ainsi, la déception de l'agent est déterminée par la décroissance de la fonction d'utilité en fonction de la fonction de paiement du portefeuille anticipé $U_y \leq 0$.

Après avoir choisi la loterie $Q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$, l'agent forme des croyances subjectives concernant la distribution de la fonction de paiement du portefeuille final. La distribution subjective $P = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ est différente des probabilités objectives. Ceci signifie que l'agent fait face à une dissonance cognitive dans le processus de prise de décision. Dans ce cadre, l'agent détermine tout d'abord sa satisfaction extraite à partir des émotions anticipées à la date 1. La satisfaction est supposée être égale à l'utilité espérée subjective de la fonction de paiement du portefeuille futur donné par :

$$EU(P, y) = \sum_{s=1}^S p_s U(c_s, y).$$

La fonction de paiement du portefeuille espéré est égale à l'équivalent certain du risque :

$$U(y, y) = \sum_{s=1}^S p_s U(c_s, y).$$

En se basant sur les croyances subjectives, l'agent est indifférent entre la fonction de paiement du portefeuille risqué de la loterie et de la fonction de paiement du portefeuille anticipée d'une manière certaine. L'agent sélectionne les croyances subjectives et la fonction de paiement du portefeuille espéré associé afin de maximiser sa richesse V , qui est égale à la somme pondérée de la satisfaction générée

par les émotions anticipées à la date 1 et la satisfaction générée à la date 2, tel que :

$$W(Q) = \max_{P \in S, y} V(y, P, Q) = k \sum_{s=1}^S p_s U(c_s, y) + \sum_{s=1}^S q_s U(c_s, y),$$

$$\text{S.c. } U(y, y) = \sum_{s=1}^S p_s U(c_s, y),$$

où k est le paramètre qui représente l'intensité des émotions anticipées du preneur de décision.

Le modèle de Gollier et Muermann (2006) suppose que les croyances subjectives P entraînent le même équivalent certain qui permet de gagner la même richesse. Ceci implique que les croyances subjectives optimales sont sous-déterminées. En utilisant la contrainte du modèle précédent, le problème de Gollier et Muermann (2006) peut être réécrit comme suit :

$$W(Q) = \max_{c_1 \leq y \leq c_s} F(y, Q) = kv(y) + \sum_{s=1}^S q_s U(c_s, y),$$

où $v(y) = U(y, y)$, pour tout y . $y^* = y^*(Q)$, est la fonction de paiement du portefeuille espéré qui permet de résoudre le problème ci-dessus.

L'intuition suppose que la détérioration du risque objectif permet de réduire l'espérance optimale. Afin de vérifier si cette intuition est tenue dans leur modèle, Gollier et Muermann (2006) ont examiné deux ensembles de changements de risque : dominance stochastique de premier degré (FSI) et les croissances en risque de Rothschild-Stiglitz (IR). En effet, chaque changement qui détériore le risque objectif dans le sens de la dominance stochastique du premier degré réduit l'espérance de la fonction de paiement du portefeuille optimal y^* . Ceci présente une conséquence directe de l'aversion à la déception. Ainsi, chaque croissance au niveau du risque objectif de Rothschild-Stiglitz diminue (ou augmente) l'espérance de la fonction de paiement du portefeuille optimal si U est concave (ou convexe) dans la fonction de paiement du portefeuille actuel. Gollier et Muermann (2006) ont montré que la fonctionnelle de préférence W satisfait l'exigence minimale et la dominance stochastique de second degré. La fonctionnelle de préférence W peut être réécrite par :

$$W(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{s=1}^S q_s M(c_s, \mathbb{Q}),$$

où M est la fonction d'utilité locale et est définie par Machina (1982) par : $M(C, \mathbb{Q}) = kv(y^*(\mathbb{Q})) + U(C, y^*(\mathbb{Q}))$. Le modèle de Gollier et Muermann (2006) est un cas particulier du modèle de l'utilité espérée générale de Machina (1982).

Allocation optimale du portefeuille

Gollier et Muermann (2006) ont examiné le modèle standard «one-safe-one-risky-asset». Dans ce modèle, l'individu cherche à investir sa richesse initiale z_0 dans un actif sans risque dont le rendement est normalisé à 0 et dans un actif risqué dont le rendement excédentaire est écrit par une variable aléatoire \tilde{x} . L'individu doit déterminer son investissement α dans l'actif risqué qui permet de maximiser sa richesse $W(\alpha)$, tel que :

$$W(\alpha) = \max_{y_{\min} \leq y \leq y_{\max}} kv(y) + EU(z_0 - \alpha \tilde{x}, y),$$

où y_{\min} et y_{\max} représentent les espérances minimale et maximale respectivement. Gollier et Muermann (2006) ont résolu ce problème pour chaque α . La fonction de paiement du portefeuille optimal $y(\alpha)$ est définie en fonction de la demande pour l'actif risqué et satisfaisant cette condition :

$$kv'(y(\alpha)) + EU_y(z_0 + \alpha \tilde{x}, y(\alpha)) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ si } y(\alpha) = y_{\min} \\ = 0 \text{ si } y(\alpha) \in [y_{\min}; y_{\max}] \\ \geq 0 \text{ si } y(\alpha) = y_{\max} \end{array} \right\}.$$

Si W est concave en α , la condition de premier ordre du problème du portefeuille est donné par :

$$w'(\alpha^*) = E\tilde{x}U_{c(z_0+\alpha^*\tilde{x},y^*)} = 0,$$

où $y^* = y(\alpha^*)$ et la fonction d'utilité U est concave. La demande pour l'actif risqué est positive (nulle, négative) si le rendement espéré excédentaire est positif (nul, négatif).

Gollier et Muermann (2006) supposent que $U(c, y) = u(c - \eta y)$ et u est DARA tel que η est un scalaire positif. Dans ce cas, DARA est équivalent à l'aversion au risque absolue, croissante dans la fonction de paiement du portefeuille espéré. L'augmentation de l'intensité d'anticipation des émotions augmente la fonction de paiement du portefeuille espéré et par conséquent le degré de l'aversion au risque.

L'accroissement de l'intensité de la déception ex-post a 2 effets opposés : d'une part, il permet d'accroître le degré de l'aversion au risque puisque $\frac{d(-\frac{U_{cc}(c,y)}{U_c(c,y)})}{d\eta} \geq 0$; d'autre part, il permet de décroître la fonction de paiement du portefeuille espéré et le degré d'aversion au risque. Gollier et Muermann (2006) ont montré que, si l'aversion au risque de l'individu est supérieure à 1 et si u est standard, alors le premier effet domine le deuxième effet. Gollier et Muermann (2006) ont constaté que les individus ayant une émotion anticipée et une déception ex-post, sélectionne un portefeuille moins risqué que le modèle de l'utilité espérée. Le modèle de Gollier et Muermann (2006) permet d'expliquer l'énigme de prime de risque. Ceci peut être appliqué à la fois aux individus optimistes et pessimistes. Les résultats de Gollier et Muermann (2006) sont contradictoires aux espérances optimales obtenues par Brunnermeier et Parker (2005) et Gollier (2005) où l'agent est toujours optimiste et sélectionne le portefeuille le plus risqué.

5.5.2. *Le modèle de Jouini et al. (2013)*. L'origine des croyances subjectives revient à Akerlof et Dickens (1982). Gollier et Muermann (2010) ont proposé un modèle structuré de formation des croyances subjectives dans lequel ces dernières permettent de résoudre le lien entre la déception ex-post et la satisfaction antérieure. Ce modèle est basé sur la théorie de la déception (Bell, 1985; Loomes et Sugden, 1986; Gul, 1991) qui suppose que l'allégresse de l'individu augmente avec la différence entre le rendement reçu et le rendement espéré. Dans cette approche, l'individu détermine la fonction de paiement du portefeuille optimal et les croyances optimales (optimistes ou pessimistes) qui lui permettent d'avoir le meilleur compromis entre la satisfaction ex-ante et la déception ex-post. Ainsi, les anticipations possibles de l'individu sont fixées d'une manière exogène.

Jouini et al. (2013) ont revisité le modèle de Gollier et Muermann (2010). Ils supposent qu'un agent fait face à une fonction de paiement du portefeuille risqué \tilde{c} , décrit par la distribution de probabilité objective \mathbb{Q} . Dans ce cadre, l'agent peut choisir une distribution de probabilité subjective dans l'ensemble \mathbb{P} pour les distributions de probabilités qui sont continues selon \mathbb{Q} (Brunnermeier et Parker, 2005). Dans le modèle de Jouini et al. (2013), la déception et l'allégresse sont mesurées par un point de référence y qui représente la fonction de paiement du portefeuille espéré anticipé. A la date initiale, l'agent peut exprimer une certaine satisfaction en anticipant des émotions et jouir de l'utilité espérée subjective future de la fonction de paiement du portefeuille risqué \tilde{c} . A la date 1, la satisfaction est exprimée par la déception éprouvée par l'individu. Elle est exprimée par $U(c, y)$ pour une réalisation c de \tilde{c} , tels que : U est une fonction d'utilité bidimensionnelle, croissante et concave dans son premier argument ($U_c > 0$ et $U_{cc} < 0$) et décroissante dans son deuxième argument ($U_y < 0$) afin de refléter la déception. Dans ce cas, plus la fonction de paiement du portefeuille espéré anticipé est élevée, plus la déception ex-post est élevée.

Le bien-être de l'individu, associé à des croyances données P , est la somme pondérée de ses satisfactions ex-ante et ex-post, tel que :

$$W(P, \tilde{c}) = k\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\tilde{c}, y)] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[U(\tilde{c}, y)],$$

où k mesure l'intensité des émotions anticipées.

La fonction de paiement du portefeuille espéré anticipé est égale à l'équivalent certain de la fonction de paiement du portefeuille risqué, tel que :

$$U(y, y) = \mathbb{E}_P[U(\tilde{c}, y)].$$

Dans leur modèle, Jouini et al. (2013) supposent que l'individu cherche à maximiser sa satisfaction $W(P, \tilde{c})$. Cet individu doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$W(\tilde{c}_\alpha) = \max_{c_{\inf(\mathbb{Q})} \leq Y \leq c_{\sup(\mathbb{Q})}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(\tilde{c}, y)].$$

où $c_{\inf(\mathbb{Q})}$ et $c_{\sup(\mathbb{Q})}$ représentent respectivement le rendement minimum essentiel et le rendement supérieur sous \mathbb{Q} , $F(\tilde{c}, y) = kU(y, y) + U(c, y)$. Ce problème d'optimisation peut être réécrit par :

$$\max_{\mathbb{P}} kU(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{c}); \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{c}) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(U(\tilde{c})), \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{c})).$$

Cette relation montre que le modèle de Jouini et al. (2013) est cohérent avec le modèle de déception dont l'équivalent certain est le point de référence (Gul, 1991) et le modèle de la déception dont le point de référence est représenté par la fonction de paiement du portefeuille espéré (Bell, 1985; Loomes et Sugden, 1986).

Dans le cadre du choix du portefeuille optimal, Jouini et al. (2013) supposent que l'individu cherche à investir sa richesse initiale z à la date 0 dans un actif sans risque et un actif risqué dont le rendement est exprimé par la variable aléatoire \tilde{x} sous la distribution de probabilités \mathbb{Q} . Dans ce modèle, l'individu va investir la proportion α de sa richesse initiale dans l'actif risqué. Dans ce cas, la fonction de paiement du portefeuille risqué de l'individu est donnée par :

$$\tilde{e}_\alpha = (z + \alpha\tilde{x}).$$

Dans ce cadre, la satisfaction de l'agent est égale à :

$$W(\tilde{c}_\alpha) = \max_{c_{\inf(\mathbb{Q})} \leq Y \leq c_{\sup(\mathbb{Q})}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(\tilde{c}, y)].$$

La résolution de ce problème consiste à choisir la proportion de la richesse initiale investie dans l'actif risqué $\tilde{\alpha}$ qui permet de maximiser la satisfaction de l'individu. Cette proportion optimale est donnée par :

$$\tilde{\alpha} = \arg \max_{\alpha} W(\tilde{c}_\alpha).$$

Comme Gollier et Muermann (2010), Jouini et al. (2013) supposent que la fonction $F(\tilde{c}, y)$ est une fonction concave en y . Dans ce contexte, la condition de premier ordre nécessaire et suffisante pour déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal espéré y^* est donnée par :

$$E_{\mathbb{Q}}[F_y(\tilde{c}, y)] = kv'(y) + E_{\mathbb{Q}}[U_y(\tilde{c}, y)] \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ si } y^* = c_{\inf(\mathbb{Q})} \\ = 0 \text{ si } y^* \in c_{\inf(\mathbb{Q})} \\ \geq 0 \text{ si } y^* = c_{\sup(\mathbb{Q})} \end{array} \right\}.$$

Le modèle de Jouini et al. (2013) mène à de nouvelles conclusions et de nouveaux résultats qui permettent de mettre en lumière plusieurs énigmes dans le cadre de la théorie de décision et de la théorie de choix du portefeuille. Jouini et al. (2013) ont montré que la fonctionnelle de préférence de l'individu n'est pas nécessairement compatible avec la dominance stochastique de premier degré et de second degré. Ceci montre qu'une croissance au niveau du risque permet à l'agent de former une meilleure fonction de paiement de portefeuille espérée optimale en termes de rapport entre l'allégresse et la déception. La plupart des résultats du modèle de Gollier et Muermann (2010) concernant l'impact de la dominance sur la fonction de paiement du portefeuille espéré ne sont pas valables dans le modèle de Jouini et al. (2013) qu'avec d'autres hypothèses. Jouini et al. (2013) ont établi une condition additionnelle afin de rendre la fonctionnelle de préférence compatible avec la dominance stochastique de premier ordre.

Dans le modèle de Jouini et al. (2013), la modification du support de la distribution de probabilité objective permet de changer la classe des fonctions de paiement des portefeuilles espérés possibles et d'avoir une fonction de paiement du portefeuille espéré plus intéressante en termes du rapport entre l'allégresse et la déception. Jouini et al. (2013) ont montré que si U_y est une fonction croissante en fonction de la fonction de paiement du portefeuille c , alors chaque transformation de la dominance stochastique du premier degré, dans le cadre de la distribution de probabilité \mathbb{Q} , permet de réduire faiblement la fonction de paiement du portefeuille espéré optimal y^* ou la satisfaction de l'individu. La condition $U_{yc} > 0$ signifie que l'agent est averse à la déception. En absence d'une condition additionnelle dans le modèle de Jouini et al. (2013), l'impact de la transformation de la dominance stochastique de premier degré sur la satisfaction de l'individu est ambigu. La modification du support de la distribution objective permet d'avoir des compromis entre la satisfaction et la déception. Ceci permet d'augmenter la satisfaction de l'individu. Dans ce cadre, les formes simples de la transformation de la dominance stochastique de premier degré sont données par le changement de la loterie binaire $(\{x_1, x_2\}, \{\pi, 1-\pi\})$ tel que : $x_1 < x_2$ à une fonction de paiement du portefeuille certain x_1 ou par le changement de la fonction de paiement du portefeuille certain x_2 à la loterie L .

Gneezy et al. (2006) ont défini l'axiome d'internalité dans son modèle de choix. Cet axiome suppose que pour une loterie binaire, le niveau de satisfaction de l'individu est déterminé par la satisfaction associée au meilleur rendement et la satisfaction associée au rendement le plus faible. Les modèles de déception permettent de violer l'exigence de l'internalité ($F_y(x, x) \geq 0$ pour tout x). Ceci montre qu'une condition additionnelle est nécessaire pour déterminer le critère de choix de Jouini et al. (2013) et que ce critère de décision est cohérent avec les transformations de la dominance stochastique de premier degré. Ceci permet de constater que lorsque la fonction de paiement du portefeuille espéré et la fonction de paiement du portefeuille réel sont conformes. La décroissance au niveau de l'utilité ex-ante, induite par la décroissance au niveau de la fonction de paiement du portefeuille espéré, est plus importante que la croissance de l'utilité ex-post. Comme les modèles de déception permettent de violer l'axiome d'internalité, la condition proposée par Jouini et al. (2013), permet d'assurer que l'intensité de l'allégresse est plus importante que celle de la déception. Cette condition est cohérente avec Gneezy et al. (2006) qui supposent que les modèles de déception permettent de violer la dominance stochastique de premier degré.

Contrairement au modèle de la théorie de l'utilité espérée classique et au modèle de Gollier et Muermann (2010), Jouini et al. (2013) ont montré que l'individu prend des positions non nulles dans les actifs risqués dont la moyenne du rendement est nulle. Dans ce cadre, la présence du risque permet d'avoir une gamme de fonctions de paiement de portefeuille espérées plus large qui permet d'avoir soit une satisfaction plus importante soit une déception plus faible afin de compenser l'aversion au risque. En outre, contrairement à la théorie de l'utilité espérée classique qui suppose que l'individu investit toute sa richesse initiale dans un portefeuille parfaitement diversifié, la proposition précédente implique que lorsque l'individu fait face à un portefeuille parfaitement diversifié et à un portefeuille sous-diversifié dont le rendement moyen est nul, l'individu choisit d'investir une proportion non nulle ($F_y(z, z) \neq 0$) de sa richesse initiale dans le portefeuille sous-diversifié. Ceci permet à l'individu d'avoir un portefeuille sous-diversifié.

6. Conclusion

L'optimisation de portefeuille dans le cadre standard a vu le jour avec l'approche moyenne-variance (Markowitz, 1952). Cette approche a été la base et le point de départ de plusieurs modèles d'optimisation de portefeuille. Cependant, ce modèle a été critiqué par plusieurs chercheurs de la finance comportementale vu qu'il ne répond aux exigences des individus réels. Dans ce chapitre, nous avons étudié l'optimisation de portefeuille dans le cadre statique selon l'approche moyenne-variance et dans le cadre de la finance comportementale en prenant en compte des différents biais comportementaux. D'abord, nous avons présenté le modèle "moyenne-variance" et nous avons appliqué les données de notre échantillon sur les résultats de ce modèle afin d'établir les pondérations du portefeuille efficient

pour des différents niveaux d'aversion au risque (1, 2, 5, 10). Nous avons montré que, pour un niveau d'aversion au risque relativement élevé égal à 10, le résultat n'est pas dégénéré. Pour un niveau d'aversion au risque égal à 10, les résultats ont montré que le portefeuille efficient est bien diversifié. Ce portefeuille est composé essentiellement du titre qui présente le rendement espéré le plus élevé et le niveau de risque relativement le plus faible parmi les titres de notre échantillon. Nous avons aussi établi la frontière efficiente et l'ensemble de portefeuilles possibles correspondant à ce niveau d'aversion au risque.

Ensuite, nous avons étudié l'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale. Une grande partie de cette section a été consacrée au problème d'optimisation de portefeuille standard selon la théorie de l'ambiguïté qui porte sur le problème d'optimisation robuste. Nous avons présenté le problème d'optimisation robuste d'une manière générale et le modèle d'optimisation robuste de Koenig et Tutuncu (2004). En se basant sur ce modèle, nous avons établi un modèle d'optimisation robuste permettant de prendre en compte l'ambiguïté dans 3 cas différents : au niveau du vecteur de rendements espérés des titres / de la matrice variance-covariance des rendements des titres / du vecteur de rendements espérés et de la matrice variance-covariance des rendements des titres. Pour chacun de ces trois cas, nous avons établi un modèle spécifique. En utilisant Matlab, nous avons déterminé les caractéristiques du portefeuille optimal robuste pour des différentes valeurs d'aversion au risque (1, 2, 5, 10). Les résultats numériques ont montré que le niveau d'ambiguïté reste le même pour tous les niveaux d'aversion au risque dans les trois cas. Nous avons constaté également que lorsque l'ambiguïté porte que sur le vecteur de rendements espérés (la matrice variance-covariance des rendements) des titres, le niveau de risque (le rendement espéré) des portefeuilles efficients robustes est le même que celui du portefeuille efficient classique et que le niveau du rendement espéré (le risque) du portefeuille efficient robuste change par rapport au portefeuille efficient classique, pour tous les niveaux d'aversion au risque de l'investisseur. Nous avons également montré que lorsque l'incertitude porte sur le vecteur de rendements espérés et la matrice variance-covariance des rendements des titres, chacun des niveaux du rendement espéré et du risque du portefeuille efficient robuste changent par rapport au portefeuille efficient. Les deux dernières parties de ce chapitre portent sur l'optimisation du portefeuille standard selon la théorie du regret et la théorie de déception. Pour la partie de l'optimisation de portefeuille selon la théorie du regret, nous avons présenté une revue de littérature portant sur les différents travaux sur ce sujet. Enfin, nous avons présenté certains modèles d'optimisation de portefeuille selon la théorie de déception dans le cadre statique, à savoir Gollier et Muermann (2006) et Jouini et al. (2013).

Annexe (Markowitz, 1952)

Afin de déterminer l'ensemble des portefeuilles qui permettent de minimiser la variance pour un niveau de rendement espéré constant, il s'agit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_w \quad & w' \Sigma w, \\ \text{Sc. } & w' \bar{R} = \mathbb{E}[R_p], \\ & \text{et } w'e = 1. \end{aligned}$$

La résolution de ce programme d'optimisation consiste à déterminer le vecteur de pondérations w_i qui minimise la variance du portefeuille pour un niveau de rendement espéré donné (la première contrainte) et qui respecte la condition qui suppose que la somme des pondérations des titres est égale à 1 (la deuxième contrainte). Le lagrangien de ce problème est donné par :

$$L(w, \lambda, \alpha) = w' \Sigma w + \lambda (E[R_p] - w' \bar{R}) + \alpha (1 - w'e),$$

où λ et α sont deux multiplicateurs de Lagrange. Le problème d'optimisation contraint est équivalent à ce problème d'optimisation libre.

$$\min L(w, \lambda, \alpha).$$

Les conditions nécessaires du premier ordre sont données par :

$$\frac{dL(w, \lambda, \alpha)}{dw} = 2\Sigma w - \lambda \bar{R} - \alpha e = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{dL(w, \lambda, \alpha)}{d\lambda} = E[R_p] - w' \bar{R} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{dL(w, \lambda, \alpha)}{d\alpha} = 1 - w' e = 0. \quad (6.3)$$

Comme la matrice de variance-covariance Σ est inversible, nous obtenons :

$$(6.1) \Rightarrow 2w - \lambda \Sigma^{-1} \bar{R} - \alpha \Sigma^{-1} e = 0.$$

D'où :

$$w = \frac{1}{2}(\lambda \Sigma^{-1} \bar{R} + \alpha \Sigma^{-1} e).$$

En substituant w par son expression dans les deux termes 6.2 et 6.3, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[R_p] = w' \bar{R},$$

$$\mathbb{E}[R_p] = \frac{1}{2}(\lambda \bar{R}' \Sigma^{-1} \bar{R} + \alpha \bar{R}' \Sigma^{-1} e).$$

Et comme nous avons : $w' e = 1$, alors :

$$1 = \frac{1}{2}(\lambda e' \Sigma^{-1} \bar{R} + \alpha e' \Sigma^{-1} e).$$

Notons par :

$$A = e' \Sigma^{-1} \bar{R},$$

$$B = \bar{R}' \Sigma^{-1} \bar{R},$$

$$C = e' \Sigma^{-1} e,$$

$$d = BC - A^2.$$

Maintenant, il suffit de résoudre ce système pour déterminer les expressions de λ et α :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[R_p] = \frac{1}{2}(B\lambda + A\alpha) \\ 1 = (A\lambda + C\alpha). \end{array} \right\}.$$

Donc :

$$\lambda = 2 \frac{(CE[R_p] - A)}{d},$$

$$\alpha = 2 \frac{(B - A.E[R_p])}{d}.$$

En substituant λ et α par leurs expressions dans l'équation de w , nous obtenons la composition des portefeuilles possibles, exprimée par :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{d}[(C.E[R_p] - A)\Sigma^{-1}\bar{R} + (B - A.E[R_p])\Sigma^{-1}e] \\ &= \frac{1}{d}(B.\Sigma^{-1}e - A.\Sigma^{-1}\bar{R}) + E[R_p]\frac{1}{d}(C.\Sigma^{-1}\bar{R} - A.\Sigma^{-1}e), \end{aligned}$$

avec :

$$w_1 = \frac{1}{d}(B.\Sigma^{-1}e - A.\Sigma^{-1}\bar{R}) \text{ et } w_2 = \frac{1}{d}(C.\Sigma^{-1}\bar{R} - A.\Sigma^{-1}e).$$

Ceci nous permet d'obtenir l'expression du portefeuille optimal en fonction du rendement espéré $E[R_p]$:

$$w = w_1 + E[R_p]w_2.$$

Tout portefeuille w de la frontière peut s'écrire comme une combinaison linéaire de 2 portefeuilles optimaux, tel que :

$$w = (1 - E[R_p])w_1 + E[R_p]w_2,$$

où w_1 correspond au portefeuille optimal dont le rendement espéré est nul, et $(w_1 + w_2)$ correspond au portefeuille optimal ayant un rendement espéré égal à 1.

Finalement, la frontière des portefeuilles optimaux peut être construite à partir de 2 portefeuilles quelconques appartenant à cette frontière et dont les rendements espérés sont distincts.

Parmi l'ensemble des portefeuilles optimaux, l'investisseur rationnel au sens moyenne-variance, choisit le portefeuille efficient qui lui permet de minimiser la variance du rendement de son portefeuille pour un rendement espéré supérieur à celui du portefeuille de variance minimale. Ainsi, le choix du portefeuille efficient est déterminé en fonction de l'utilité de l'investisseur et de son aversion au risque. Dans ce cadre, le portefeuille efficient est obtenu en maximisant l'espérance de la fonction d'utilité de la richesse de l'investisseur. Le programme d'optimisation est donné par :

$$\begin{aligned} \max_w \mathbb{E}[R_P] - \frac{\phi}{2}\sigma^2(R_P), \\ \text{s.c. } w'e = 1, \\ \iff \\ \max_w w'\bar{R} - \frac{\phi}{2}w'\Sigma w, \\ \text{s.c. } w'e = 1. \end{aligned}$$

Le lagrangien de ce problème est introduit par :

$$L(w, \lambda) = w'\bar{R} - \frac{\phi}{2}w'\Sigma w + \lambda(1 - w'e).$$

Les conditions nécessaires de premier ordre sont :

$$\frac{dL(w, \lambda)}{dw} = \bar{R} - \phi\Sigma w - \lambda e = 0; \quad (6.4)$$

$$\frac{dL(w, \lambda)}{d\lambda} = 1 - w'e = 0. \quad (6.5)$$

Ces deux conditions permettent d'avoir :

$$(6.4) \Rightarrow w = \frac{1}{\phi}(\bar{R}\Sigma^{-1} - \lambda\Sigma^{-1}e);$$

$$(6.5) \Rightarrow w'e = 1,$$

$$\frac{1}{\phi}(\Sigma^{-1}\bar{R}e' - \lambda e\Sigma^{-1}e'),$$

$$\iff \frac{1}{\phi}(A - \lambda C) = 1.$$

D'où :

$$\lambda = \frac{A - \phi}{C}.$$

Et nous avons :

$$w = \frac{1}{\phi}(\bar{R}\Sigma^{-1} - \lambda\Sigma^{-1}e).$$

En substituant λ par son expression dans w , nous obtenons :

$$w^* = \frac{1}{\phi}(\bar{R}\Sigma^{-1} - \frac{A - \phi}{C}e\Sigma^{-1}).$$

Le rendement espéré de ce portefeuille est donnée par cette expression :

$$\begin{aligned}
E[R_P] &= w'\bar{R}, \\
&= \frac{1}{\phi}(\bar{R}\Sigma^{-1} - \frac{A-\phi}{C}\Sigma^{-1}\bar{R}e'), \\
&= \frac{1}{\phi}(B - \frac{A-\phi}{C}A), \\
&= \frac{1}{C\phi}(BC - A^2 + A\phi), \\
&= \frac{1}{C\phi}(d + A\phi), \\
&= \frac{d}{C\phi} + \frac{A}{C}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$E[R_P] = \frac{d}{C\phi} + \frac{A}{C}.$$

La variance de ce portefeuille est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sigma^2(R_p) &= \frac{1}{\phi^2}(\bar{R}' - \frac{A-\phi}{C}e')(\Sigma^{-1}\bar{R} - \frac{A-\phi}{C}e\Sigma^{-1}\bar{R}), \\
&= \frac{1}{\phi^2}(\Sigma^{-1}\bar{R}' - \frac{A-\phi}{C}e'\Sigma^{-1})\Sigma(\Sigma^{-1}\bar{R} - \frac{A-\phi}{C}e\Sigma^{-1}), \\
&= \frac{1}{\phi^2}(\bar{R}\Sigma^{-1}\bar{R}' - \frac{A-\phi}{C}e'\Sigma^{-1}\bar{R}' - \frac{A-\phi}{C}e\Sigma^{-1}\bar{R}' + \frac{(A-\phi)^2}{C^2}e\Sigma^{-1}e), \\
&= \frac{1}{\phi^2}(B - \frac{A-\phi}{C}A - \frac{A-\phi}{C}A' + \frac{(A-\phi)^2}{C^2}C), \\
&= \frac{1}{\phi^2}(B - \frac{2(A-\phi)}{C}A + \frac{(A-\phi)^2}{C}), \\
&= \frac{1}{C\phi^2}(BC - 2A^2 + 2A\phi + \phi^2), \\
&= \frac{1}{C\phi^2}(BC - A^2 + \phi^2), \\
&= \frac{d}{C\phi^2} + \frac{\phi^2}{C\phi^2}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma^2(R_p) = \frac{d}{C\phi^2} + \frac{1}{C}.$$

Alors, le portefeuille efficient est déterminé par son expression :

$$w^* = \frac{1}{\phi}(\bar{R}\Sigma^{-1} - \frac{A-\phi}{C}e\Sigma^{-1}).$$

Ainsi, il est caractérisé par son rendement espéré :

$$E[R_P] = \frac{d}{C\phi} + \frac{A}{C}.$$

Et par son risque :

$$\sigma^2(R_p) = \frac{d}{C\phi^2} + \frac{1}{C}.$$

Annexe

Concernant l'estimation des paramètres du modèle, d'une manière générale, nous supposons que nous avons d actifs risqués dont les log-rendements sont donnés par :

$$r_i = \ln(R_i) = \ln\left(\frac{S_{it}}{S_{i(t-1)}}\right); \text{ avec } R_i = \frac{S_{it}}{S_{i(t-1)}} \text{ et } i = 1, \dots, d,$$

où r_i représente le log-rendement de l'indice i ; R_i représente le rendement de l'indice i ; S_{it} représente le prix de l'indice i à l'instant t et $S_{i(t-1)}$ représente le prix de l'indice i à l'instant $(t-1)$. Notons par \bar{r}_i le rendement espéré de l'actif i , σ_i son écart-type et $\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ la corrélation entre le rendement de l'actif i et celui de l'actif j .

Maintenant, nous supposons que les prix de ces actifs financiers sont conduits par un mouvement Brownien Géométrique multidimensionnel tel que :

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dw_{it} \text{ pour } i = 1, \dots, d,$$

où μ_i est la tendance de l'indice i ; σ_i est son coefficient de diffusion et $W_t = (W_{i,t})_{1 \leq i \leq d}$ est un mouvement Brownien à d dimensions avec une matrice de volatilité Σ et une matrice de corrélation Σ_c données par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_d \end{bmatrix}, \Sigma_c = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,d} \\ \rho_{1,2} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \rho_{d-1,d} \\ \rho_{1,d} & \dots & \rho_{d-1,d} & 1 \end{bmatrix}.$$

Supposons que nous avons :

$$\begin{aligned} S_{i,t} &= S_{i,0} \exp \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \Delta t + \sigma_i W_{i,t} \right], \\ S_{j,t} &= S_{j,0} \exp \left[\left(\mu_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) \Delta t + \sigma_j W_{j,t} \right], \end{aligned}$$

où $\alpha_i = \mu_i - 1/2\sigma_i^2$ et Δt est un pas de temps. A partir de ces deux expressions, nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{S_{i,t}}{S_{i,0}} &= \exp \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{i,t} \right], \\ \frac{S_{j,t}}{S_{j,0}} &= \exp \left[\left(\mu_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) \Delta t + \sigma_j \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{j,t} \right], \end{aligned}$$

où ε_i est une variable qui suit la loi Normale centrée réduite.

Soit :

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \Delta t.$$

Maintenant, nous cherchons à calculer le vecteur du rendement espéré des actifs \bar{R}_i et leur matrice de variance-covariance $\Sigma_S = (\sigma_{S_i, S_j})_{1 \leq i, j \leq d}$. A partir de l'expression de $\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}}$, nous obtenons le rendement espéré de l'actif i donnée par :

$$\bar{R}_i = \mathbb{E} \left[\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right] = \exp[\mu_i \Delta t].$$

A partir de ces deux expressions de $S_{i,t}$ et $S_{j,t}$, nous déduisons l'expression de la matrice de variance-covariance entre les prix de l'actif i et ceux de l'actif j tel que :

$$\begin{aligned} S_{i,t} S_{j,t} &= \\ S_{i,0} S_{j,0} \exp \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \mu_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) \Delta t + \sigma_i W_{i,t} + \sigma_j W_{j,t} \right] &= \\ S_{i,0} S_{j,0} \exp \left[(\mu_i + \mu_j + \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) \Delta t - \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) \Delta t + \sigma_i W_{i,t} + \sigma_j W_{j,t} \right]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}[S_{i,t}S_{j,t}] = S_{i,0}S_{j,0} \exp [(\mu_i + \mu_j + \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}) \Delta t] .$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{S_i,S_j} &= \text{Covariance}(S_{i,t}; S_{j,t}) = \mathbb{E}[S_{i,t}S_{j,t}] - \mathbb{E}[S_{i,t}] \mathbb{E}[S_{j,t}] \\ &= S_{i,0}S_{j,0} \exp [(\mu_i + \mu_j) \Delta t] (\exp [(\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}) \Delta t] - 1) \end{aligned}$$

Pour des critères autres que la moyenne-variance, il est nécessaire d'utiliser les densités des rendements des actifs $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$. Supposons que $V_0 = 1$, alors : $V_T = R_T^w V_0 = R_T^w$. Pour la théorie du regret par exemple, il faut évaluer :

$$\begin{aligned} &\exp[-a(V_T - \frac{\phi}{2}V_T^2 - c)] = \\ &\int \int \int \exp[-a((w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3) - \frac{\phi}{2}(w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3)^2 - c)] f_{R_1,R_2,R_3}(dR_1, dR_2, dR_3), \end{aligned}$$

où c est une constante. Nous avons :

$$R_{i,t} = e^{(\alpha_i t + \sigma_i W_{i,t})} = e^{(\alpha_i t + \sigma_i \sqrt{t} \varepsilon_i)},$$

où ε_i est une variable qui suit la loi normale centrée avec une matrice de volatilité :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix} .$$

D'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} &\exp[-a(V_T - \frac{\phi}{2}V_T^2 - c)] = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a((w_1 e^{(\alpha_1 + \sigma_1 x_1)} + w_2 e^{(\alpha_2 + \sigma_2 x_2)} + w_3 e^{(\alpha_3 + \sigma_3 x_3)}) \\ &- \frac{\phi}{2}(w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3)^2 - c)] f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Deuxième partie

La gestion structurée dans le cadre de la finance comportementale

Introduction

L'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion de portefeuille standard a été largement utilisée par les praticiens vu la simplicité de son application : le risque d'un portefeuille peut être correctement mesuré par la variance de son rendement et, de ce fait, à l'optimum, le portefeuille de l'investisseur doit être parfaitement diversifié. Ce modèle, relativement simpliste, a beaucoup de limitations notamment pour répondre aux besoins des investisseurs qui sont devenus très sophistiqués, et dont l'aversion au risque peut fluctuer. Afin de répondre à cette complexité dans les choix des investisseurs, les institutions financières ont eu recours à la gestion de portefeuille structurée, en particulier l'assurance de portefeuille qui offre la possibilité de construire un portefeuille contenant des produits dérivés permettant de bénéficier le plus largement possible de la hausse éventuelle d'un actif risqué tout en protégeant le capital investi. Un produit structuré est basiquement composé d'un investissement sur un actif sans risque (une obligation...) et d'une option souscrite sur un sous-jacent risqué exposé au risque du marché. Une des raisons de la popularité de ces produits vient du fait qu'ils possèdent souvent la propriété de la garantie du capital. Ainsi, ces produits permettent aux investisseurs de se protéger sur les marchés baissiers et de participer aux marchés haussiers.

Ce type de produit a pris de l'ampleur en Europe au milieu des années 1990. Ces produits ont eu beaucoup de succès auprès des investisseurs et des institutions financières grâce à leurs caractéristiques. Cependant, trois problèmes principaux se sont posés avec les produits structurés :

- Le premier problème est celui de l'évaluation des produits structurés sur les marchés financiers. En effet, la valorisation des produits structurés se fait en se basant sur des méthodes d'évaluation des prix classique. Ces méthodes sont basées sur les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de couverture dynamique dans le cadre du temps continu. Le modèle de Black-Scholes est le modèle phare d'évaluation des prix des actifs dans le cadre de la gestion structurée. Ce problème a été largement examiné dans la littérature financière consacrée aux produits structurés (Chen et Kensinger, 1990 ; Chen et Sears, 1990 ; Wasserfallen et Schenk, 1996 ; Burth et al., 2001 ; Stoimenov et Wilkens, 2005 ; Bertrand et Prigent, 2015). Ces chercheurs ont étudié le problème d'évaluation des produits structurés sur le marché européen (français, suisse, allemand...).

- Le deuxième problème des produits structurés est celui de l'adéquation d'un produit structuré donné au profil d'un investisseur particulier (le client potentiel), en prenant en compte son attitude face au risque et le risque pris par l'émetteur de ces produits. La théorie de l'utilité espérée classique permet de déterminer l'attitude des investisseurs vis-à-vis du risque. Cependant, comme rappelé précédemment, cette théorie ne reflète pas la réalité du comportement humain. La finance comportementale incluant des théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée classique, à savoir la CPT, peut ainsi permettre de proposer d'une manière précise et concrète des catégories de produits structurés prenant en compte les comportements réels des investisseurs et leurs attitudes face au risque.

- Le troisième problème rencontré avec les produits structurés sur les marchés financiers concerne l'impact de ces produits sur les marchés financiers (équilibre du marché). L'étude du modèle d'équilibre général de l'assurance de portefeuille a été examinée par plusieurs chercheurs (Basak, 1995/2002 ; Grossman et Zhou, 1996 ; Carr et Madan, 2001). Ces chercheurs ont étudié les effets de l'assurance de portefeuille sur la dynamique des marchés financiers comme elle est susceptible d'affecter la prime de risque et la volatilité des marchés.

Cette deuxième partie de la thèse est dédiée à l'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion structurée. Elle traite principalement du deuxième problème qui porte sur l'adéquation des produits structurés au profil du client potentiel. Ce problème n'a pas pu être totalement résolu avec la finance classique qui suppose que les investisseurs sont rationnels. Cependant, comme souligné ci-dessus, l'émergence de la finance comportementale, qui permet de prendre en considération les sentiments et les émotions des individus réels sur les marchés financiers présente un moyen efficace permettant de résoudre ce problème. En effet, nous avons choisi de traiter le problème d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion structurée en prenant en compte certains biais comportementaux à savoir : la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception. Le premier chapitre de

cette partie est consacré à la présentation des généralités sur la gestion structurée et le positionnement optimal du portefeuille structuré selon la théorie de l'utilité espérée. Les trois autres chapitres de cette partie portent respectivement sur l'optimisation de portefeuille structuré selon la théorie de l'ambiguïté, la théorie du regret et la théorie de déception.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous présentons certaines généralités sur la gestion structurée et les produits structurés. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous déterminons les stratégies principales d'assurance de portefeuille (OBPI, CPPI). Ensuite, nous consacrons le reste de ce chapitre à la détermination du positionnement optimal du portefeuille. Nous examinons d'abord le positionnement du portefeuille optimal dans le cadre classique (i.e. la théorie de l'utilité espérée). Ensuite, nous établissons le positionnement optimal du portefeuille dans le cadre de la finance comportementale en prenant en compte la théorie des perspectives cumulées (CPT) et la fonction d'utilité du type RDEU.

CHAPITRE 3

Les principes de la gestion structurée

1. Généralités sur la gestion structurée

L'un des principaux objectifs des banques d'investissement consiste à développer constamment de nouveaux instruments financiers. Ce processus d'innovation, appelé «ingénierie financière», est le plus souvent basé sur l'utilisation de produits déjà existants qui sont combinés pour créer de nouveaux instruments financiers (complexes), afin de mieux répondre aux besoins de leurs clients. L'un des groupes les plus importants des instruments financiers nouvellement introduits et résultant d'une telle ingénierie financière est appelé «les produits structurés». D'une manière générale, les produits financiers structurés sont composés d'au moins de deux composantes différentes, dont l'une doit être un dérivé. Stoimenov et Wilkens (2005) ont établi une typologie en ce qui concerne les fonds structurés indexés sur des indices ou des actions. Ils ont différencié deux catégories de produits : ceux basés sur des options européennes standards et ceux qui font appel à des options plus sophistiquées (des options exotiques).

Les produits structurés sont émis par des banques et s'adressent à des investisseurs privés ou institutionnels. Ces produits sont commercialisés par l'intermédiaire des fonds de placement communs et des fonds d'assurance-vie. Ils peuvent être négociés sur une bourse organisée ou vendus directement par leur banque émettrice, qui cote les cours acheteur et vendeur. Les produits structurés sont des combinaisons de produits dérivés et d'actifs financiers sous-jacents (Breuer et Perst, 2007). En effet, ce type de produit est une combinaison des titres à revenu fixe permettant de protéger le capital, des options, des contrats à terme et d'autres dérivés, qui sont souvent basés sur les indices du marché et qui permettent de profiter de l'expansion favorable du marché. La composante dérivée est souvent une option (de vente ou d'achat) qui permet de fournir un certain profil de portefeuille spécifique à l'échéance. Ils permettent d'avoir des positions complexes avec des options sans la nécessité d'accéder au marché des options. Il existe une grande variété de ces produits, car un grand nombre de sous-jacents et d'options peuvent être introduits. La demande des produits structurés a rapidement augmenté dans le monde entier. Les produits structurés sont devenus assez populaires aux Etats-Unis dans les années 1980, par la suite, ils ont été introduits en Europe au milieu des années 1990.

Dans leur étude, Bertrand et Prigent (2015) ont étudié les produits structurés de détail émis par l'industrie financière française. Ils ont constaté qu'en juillet 2012¹, les produits gérés sur le marché de détail français des produits structurés de détail se sont élevés à 48,6 milliards d'euros, soit environ 4 % du total des actifs gérés (actifs sous gestion). La plupart de ces produits ont un rendement convexe et ne versent aucun coupon pendant leur durée de vie. La période de souscription des produits structurés français est généralement limitée dans le temps. A l'issue de cette période, le fonds est émis avec un nombre fixe d'actions. Il est alors fortement conseillé à l'investisseur de conserver ses actions jusqu'à la date d'échéance du fonds. Les produits structurés sont fermés aux nouvelles souscriptions à partir de la date de leur création, à l'exception des souscriptions effectuées dans le seul but de compenser les rachats initiés par les porteurs du fonds. Il n'existe donc pas de véritable marché secondaire : seule l'institution financière qui émet ces produits peut racheter des actions vendues par l'investisseur. Par exemple, au cours des mois de septembre et octobre 2012, moins de 10 millions d'euros ont été rachetés par les investisseurs, soit environ 0,02% des actifs sous gestion dans le secteur des produits

¹Les données fournies dans ce paragraphe sont fournies par le prospectus légal fourni par l'Autorité des marchés financiers (AMF).

structurés de détail. Si l'investisseur vend ses actions avant la date d'échéance, le prix offert dépendra des paramètres du marché à cette date (net des frais de rachat). Il peut être très différent (inférieur ou supérieur) du montant obtenu par la simple application de la formule. Notons qu'en France, les fonds gérés avec une clause de garantie du capital représentent 91% du total des fonds structurés. Ainsi, en juillet 2012, 636 fonds à formule gérés par de grandes institutions financières françaises (banques et assurances) ont été dénombrés. Ce chiffre peut varier au fil du temps, car certains fonds disparaissent à l'échéance et d'autres sont créés. En termes de nombre de fonds, quatre leaders (Amundi, Lyxor International, BNP Paribas et Natixis), émetteurs de fonds structurés, se partagent 70% du marché. En ce qui concerne les actifs sous gestion, la concentration du marché est encore plus forte : Amundi et Natixis détiennent ensemble 66 % du marché.

Bertrand et Prigent (2015) ont tenté de concevoir une typologie simplifiée de tous les fonds négociés selon le type de la formule utilisée. La «complexité» fait référence à la complexité technique (mathématique) de la formule du point de vue de la couverture. Comme dans Stoimenov et Wilkens (2005), Bertrand et Prigent (2015) ont lié la complexité à la spécification du composant optionnel (par exemple, les composants d'option simples ou exotiques). En effet, comme dans presque toutes les études antérieures, la complexité est directement liée au problème de couverture de la composante optionnelle. Mais la complexité devrait être mesurée d'une manière plus précise. Certains auteurs, comme par exemple Célérier et Vallée (2013), ont proposé une méthodologie lexicographique pour identifier les caractéristiques globales de chaque produit qui permettent de définir sa complexité. Dans ce cadre, Bertrand et Prigent (2015) ont créé une typologie simplifiée contenant 10 catégories de formules ainsi qu'une catégorie supplémentaire composée de tous les fonds qui ne correspondent pas aux 10 catégories précédentes. Ils ont pris en considération les fonds qui garantissent la totalité du placement initial à l'échéance. Les fonds les plus complexes, avec la possibilité de rachat anticipé, représentent 28,21 % du total des actifs sous gestion. La deuxième catégorie est celle des «fonds basés sur la moyenne des performances passées» qui représente 17,96 % du total des actifs sous gestion. Les fonds de type asiatique viennent en troisième catégorie, avec 13,74 % du total des actifs sous gestion, suivis par la catégorie «Capped OBPI». Ensuite, la catégorie «Autres» représente environ 11,17 % du total des actifs sous gestion et les fonds «OBPI» et «Lookback» représentent presque le même pourcentage (6,45 % et 6,17 %). Il est intéressant de noter que les fonds basés sur un mécanisme de la moyenne des performances passées des actifs sous-jacents (c'est-à-dire un indice boursier), à savoir les fonds basés sur la moyenne des performances passées et les fonds de type asiatique, représentent presque un tiers du total des actifs sous gestion. Cela reflète sans doute le fait que les fonds structurés sont tout naturellement considérés comme un moyen qui permet de lisser les performances passées de certains marchés à risque tout en garantissant la reprise de l'investissement initial.

De plus, Bertrand et Prigent (2015) ont étudié l'échéance initiale (maximale) des produits assurés à la date d'observation, soit juillet 2012. Ils supposent que la date d'émission remonte au janvier 2007 et n'ont pris en compte que les fonds dont l'échéance résiduelle est supérieure à 5 ans, ce qui garantit un échantillon homogène. Ils ont constaté que pour les années d'émission appartenant à l'intervalle [2007, 2009], la durée initiale moyenne à l'échéance est de 7,12 ans. S'ils calculent la moyenne pondérée (par actif sous gestion), ils obtiennent 7,16 années. Le délai moyen de l'échéance à la date d'entrée en vigueur apparaît assez long, ce qui est certainement une conséquence directe du faible niveau des taux d'intérêt. Ils ont observé aussi un certain raccourcissement au cours de la période (2009-2010), à savoir après la crise des subprimes et pendant la crise de la dette grecque. Les institutions financières émettrices, qui perçoivent une augmentation de l'aversion au risque de leurs clients, peuvent donc réduire le temps jusqu'à l'échéance de leurs produits structurés. Enfin, Bertrand et Prigent (2015) ont analysé les actifs sous-jacents des produits structurés en pourcentage du nombre total des fonds. L'indice est le sous-jacent le plus utilisé par les fonds structurés, 43,95%. Ensuite, ils ont trouvé, à des pourcentages très similaires, le panier des indices (26,05 %) et le panier des actions (22,79 %). En ce qui concerne les actifs sous gestion, le panier d'indices vient en premier, avec 47,47 % du total des actifs sous gestion. L'indice représente 29,40 % du total des actifs sous gestion.

Les produits structurés sont émis par les instituts financiers sur mesure pour répondre aux profils particuliers des investisseurs et satisfaire leurs besoins spécifiques qui ne peuvent pas être satisfaits par les instruments financiers standards et qui sont habituellement disponibles sur le marché. En effet, ces produits permettent de fournir à l'investisseur des fonds avec des meilleurs profils, qui ne sont pas toujours directement disponibles sur le marché financier. Ils lui permettent également d'améliorer son allocation stratégique et le couple (le risque ; le rendement espérée) de son portefeuille, de lui fournir un degré de protection du capital et de se couvrir contre les pertes potentielles. En outre, ils permettent à l'investisseur de profiter des hausses des actifs risqués, tout en n'étant exposés que partiellement aux baisses du marché. La combinaison d'actifs de base donne naissance à de nouveaux actifs aux caractéristiques très spécifiques dont l'évaluation apparaît très complexe. Dans ce contexte, trois problèmes de base se posent pour l'émetteur des produits structurés.

- Le premier problème qui se pose avec les produits structurés est celui de leur juste évaluation. En effet, l'évaluation des coûts de ce genre de produit nécessite la prise en compte des spécificités du produit proposé (profil de gain et de risque) et les frais de gestion, qui incluent la rémunération de l'intermédiaire et la détermination des coûts d'entrée et de sortie. La valorisation des produits structurés peut se faire en se basant sur les méthodes d'évaluation classiques, basées sur les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de la couverture dynamique en temps continu, tel que le modèle de Black-Scholes. Ainsi, ces méthodes supposent que le marché est relativement parfait. Cette hypothèse se justifie en partie par le fait qu'une institution financière est capable de couvrir le risque de couverture lié aux produits dérivés présents dans le fond explicitement ou implicitement, d'une manière dynamique. En effet, le contrat décrivant la formule du produit doit être décrypté afin de permettre la décomposition du paiement final du fond en une somme de placements sur des différents actifs de base. D'un point de vue plus théorique, il s'agit d'une approche basée sur la théorie générale de l'équilibre économique en prenant en compte les spécificités des marchés financiers. Cette approche consiste à analyser le processus de prise de décision de l'émetteur du produit et de son client potentiel. Suivant cette approche les valeurs des paramètres décrivant l'évolution aléatoire du rendement de l'actif risqué de référence, les contraintes pesant sur les acteurs du marché et la spécification de leurs attitudes face au risque sont mises en jeu. Deux approches de ce courant de littérature peuvent être distinguées à savoir : la première approche est celle basée sur l'hypothèse de marché en temps continu avec une couverture dynamique et la deuxième approche est basée sur le positionnement optimal des produits financiers dans le cadre statique.

Le problème d'évaluation des produits structurés a été examiné par plusieurs auteurs en comparant les prix sur le marché primaire ou secondaire aux justes valeurs théoriques : Chen et Kensinger (1990) et Chen et Sears (1990) ont traité la tarification des instruments convexes sur le *S&P 500* ; Wasserfallen et Schenk (1996) et Burth et al. (2001) ont examiné le marché suisse ; Stoimenov et Wilkens (2005) ont étudié la tarification équitable des produits structurés liés aux actions dans le secteur allemand de la banque de détail privée et Bertrand et Prigent (2015) ont étudié la tarification équitable des produits structurés financiers français. Ces études ont montré que presque tous les types de produits structurés liés à des actions ont un prix supérieur à leur valeur théorique, en fonction de leur degré de complexité. Les études empiriques portant sur l'évaluation correcte des produits structurés sont relativement peu nombreuses. Elles portent sur des produits échangés sur le marché secondaire (où les prix reflètent dans certaine mesure les valeurs réelles des actifs). Pour les produits qui ne sont pas échangés sur ce marché, il s'agit d'établir d'abord la formule exacte du contrat, puis de l'évaluer à l'aide des modèles de base en supposant que l'actif de référence suit un mouvement brownien géométrique (hypothèse de base du modèle Black-Scholes). Bertrand et Prigent (2011) ont évalué les produits structurés avec une clause de garantie qui correspond à des fonds à formule. Ils ont sélectionné un échantillon à partir de la liste de 679 OPCVM de fonds à formule proposés aux clients. Dans ce cas, la composante optionnelle peut être une option binaire, une option Lookback, une option asiatique, une option basée sur la moyenne des options d'achat à une échéance intermédiaire (effet cliquet), une option associée au Capped OBPI standard ou une extension de celui-ci. . . Ils ont utilisé des formules d'évaluation (Monte Carlo) appropriées à ces produits permettant de mettre en évidence

le phénomène de surévaluation. Ils ont examiné par la suite la sensibilité de cette surévaluation à la volatilité du marché en prenant en considération le risque de gestion de ces fonds. Ils ont constaté que l'écart entre le prix théorique et celui qui est implicite aux contrats proposés (indiqué dans le formulaire publié par l'émetteur) se réduit quand la volatilité augmente. Ainsi, la surévaluation varie entre 2% et 5% pour la plupart des fonds. Ceci peut être justifié à partir de l'évaluation des prix de la sur-couverture statique de ces produits. En outre, Bertrand et Prigent (2015) ont examiné certains types de produits structurés, offrant de l'assurance à l'échéance (quelles que soient les fluctuations du marché, l'investisseur reçoit au moins la valeur de son placement initial moins les frais de gestion), émis sur le marché français en juillet 2012. Ils ont examiné la juste valeur de ces produits (des fonds à formule sur le marché français), qui comprennent de nombreux types d'options, au moment de leur émission sur le marché. Ils ont déterminé le biais de tarification en faveur de l'institution financière émettrice (après la déduction des frais de gestion). Pour ce faire, ils ont utilisé les hypothèses du cadre Black-Scholes, en ignorant les coûts de transaction et les frictions du marché (à savoir les taxes) comme dans toutes les études précédemment publiées sur la tarification équitable des produits structurés. Pour chaque fonds représentatif, ils ont déterminé sa valeur théorique explicite. Cela leur permet d'obtenir un large échantillon de produits (429 produits) et d'éviter le biais systématique dû à des conditions de marché trop spécifiques. Bertrand et Prigent (2015) n'ont considéré que les produits structurés de détail indexés sur l'indice *Eurostoxx* 50 et ont analysé le prix (la juste valeur) à l'aide de plusieurs niveaux de volatilité et le prix théorique à l'aide d'une variété de valeurs de paramètres financiers, à travers sept principaux groupes, à savoir : les fonds à remboursement potentiel avant l'échéance T ; OBPI ; Capped OBPI ; les types Lookback ; les options asiatiques ; les fonds basés sur la moyenne des performances passées et OBPI troqués (moyenne). D'après leurs expériences, Bertrand et Prigent (2015) ont montré que, vu que les produits complexes sont plus difficiles à couvrir, les émetteurs utilisent des niveaux de volatilité très élevés pour les évaluer afin de réduire leurs propres risques. Il semble même que pour certains d'entre eux, aucune des valeurs de volatilité ne suggère une juste évaluation. L'ampleur des erreurs d'évaluation, qui se situe généralement entre 2 % et 7 %, est conforme à celle d'autres pays européens. Cela s'explique par la sensibilité à la volatilité des marchés financiers des produits de couverture à une échéance relativement longue.

D'autres études portant sur le problème de l'évaluation des produits structurés ont été menées dans différents pays européens à savoir : Szymanowska et al. (2004) ont analysé l'évaluation des reverses convertibles aux Pays-Bas et ont constaté une surévaluation de 6%. Stoimenov et Wilkens (2005) ont étudié l'ensemble des fonds structurés disponibles sur le marché allemand indexés sur les actions émises par les banques de détail privées, et émises à partir des données issues du marché primaire et du marché secondaire. Leurs résultats montrent que les produits structurés sont surévalués lorsque le marché primaire est pris comme une référence. Cette surévaluation décroît quand les produits sont évalués par rapport au marché secondaire et se rapprochent de leur maturité. Ainsi, Wallmeier et Diethelm (2008) ont examiné l'évaluation des reverses convertibles indexés sur plusieurs actifs de référence avec des protections de capital conditionnelles sur le marché suisse et ont noté une surévaluation moyenne de 3,4%. En Suède, l'évolution de 22 «index-linked notes» (environ 40% des fonds structurés émis en Suède en 2005) sur toute leur durée de vie a été étudiée (de janvier 2005 à janvier 2007). Cette étude a montré qu'il n'y a pas une surévaluation notable par rapport au marché secondaire.

- Le deuxième problème important, qui est moins examiné dans la littérature financière, est celui de l'adéquation d'un produit structuré donné au profil de l'investisseur (le client potentiel), en prenant en compte son attitude face au risque et aussi le risque pris par l'émetteur. La loi américaine de Dodd-Frank et la directive européenne MiFID ont souligné que les institutions financières doivent vérifier l'adéquation des produits structurés avec leurs clients, à la lumière de la protection financière des investisseurs (voir Chang et al., 2015). En effet, le client peut bénéficier d'un surcroît de satisfaction lui permettant de supporter un coût supérieur. Ainsi, le produit structuré proposé par l'émetteur peut ne pas lui être approprié à cause d'un manque de compatibilité avec ses objectifs d'investissement, son attitude face au risque ou sa situation financière personnelle.

En novembre 2007, l'AMF a intégré dans son règlement général, à l'article 314-44, une directive permettant de favoriser la protection des investisseurs et d'assurer une meilleure information pour les clients des institutions financières. Afin de valider l'adéquation produit\client, cette directive impose aux prestataires de services financiers de prendre en compte des objectifs de l'investisseur, d'évaluer sa tolérance au risque et de vérifier son niveau de connaissance en finance. Des recherches issues de la théorie de la décision, permettant de modéliser le comportement des intervenants sur le marché financier, peuvent être appliquées. Cette théorie est basée sur la notion de la fonction d'utilité qui représente les préférences des individus sur les différents choix qu'ils peuvent opérer. Afin de mieux comprendre le mécanisme d'échange au niveau des marchés financiers, il est possible de faire un recours à la théorie de l'équilibre général. Pour ce fait, il s'agit de répondre à ces deux questions fondamentales :

Quel est le produit le plus adapté à un client donné, étant donné ses caractéristiques ?

Quelles sont les conséquences de l'attitude face au risque des intervenants sur les marchés financiers en termes de prix ?

L'utilité espérée, proposée par von Neumann et Morgenstern (1947), permet de déterminer l'attitude de l'investisseur face au risque à travers la fonction d'utilité. Cette fonction prend en compte l'aversion au risque de l'individu, qui peut être traduite par la concavité de la fonction d'utilité. La théorie de l'utilité espérée suppose que l'individu souhaite maximiser le rendement de son investissement avec peu de fluctuations possibles. Ceci semble être contradictoire. La finance comportementale, incluant des approches non standards du comportement vis-à-vis du risque, telles que la CPT (la théorie des perspectives cumulées) de Kaneman et Tversky (1992), est une réponse alternative à la théorie de l'utilité espérée. La mise en œuvre de cette théorie dans le cadre du choix optimal des produits de type fonds à formule permet d'avoir des différents types de profils de portefeuille à la maturité (voir la théorie des perspectives cumulées). En effet, dans le cadre de la CPT, la concavité et la convexité de la courbe correspondent respectivement à une position défensive et offensive face aux fluctuations aléatoires du marché. En présence de contraintes de garantie, les profils obtenus correspondent à des combinaisons du montant garanti (sous forme obligataire) et à une option d'achat sur une position optimale en absence de contrainte de garantie (voir Bertrand et al., 2001 et El Karoui et al., 2001).

- Un troisième problème concerne l'impact des produits structurés sur les marchés financiers est posé. Dans les deux problèmes précédents, un seul type d'agent économique est considéré : l'acheteur d'assurance de portefeuille.

Mais qui devrait acheter et qui devrait vendre les portefeuilles assurés ?

Quel est l'impact de l'assurance de portefeuille sur les marchés financiers et l'économie ?

Des questions aussi importantes ont été partiellement examinées, dans le cadre de l'équilibre financier.

D'une manière générale, la théorie de portefeuille suppose que l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de l'utilité de la valeur de son portefeuille à l'échéance en allouant sa richesse initiale sur les différents actifs en temps continu (voir Merton, 1971 et Cox et Huang, 1989). L'hypothèse du temps continu est présente dans plusieurs autres travaux à savoir celui de Cvitanic et Karatzas (1992) mais avec une différence aussi importante : le marché n'est plus supposé complet (toutes les options ne peuvent plus être nécessairement couvertes). En temps continu, El Karoui et al. (2005) ont prouvé que, sous une garantie fixe à l'échéance, la stratégie d'assurance OBPI (Option Based Portfolio Insurance) est optimale pour des fonctions d'utilité assez générales (voir aussi Jensen et Sorensen, 2001 pour un cas particulier).

L'étude du modèle d'équilibre général de l'assurance de portefeuille a été examinée par Basak (1995, 2002) ; Grossman et Zhou (1996) et Carr et Madan (2001). Le débat habituel porte sur les effets de l'assurance de portefeuille sur la dynamique des marchés financiers, vu que l'assurance de portefeuille peut affecter la volatilité des marchés et la prime de risque. Si l'hypothèse du marché efficace suppose que la volatilité des actions n'est due qu'au flot d'information, de nombreux praticiens et chercheurs soutiennent le fait que les stratégies de négociation dynamiques peuvent accroître la volatilité des marchés boursiers, en particulier la méthode d'assurance de portefeuille (voir le rapport

Brady, 1988, sur le krach boursier d'octobre 1987). Brennan et Schwartz (1989) et Grossman et Zhou (1996) ont constaté que la volatilité du marché est accrue par l'assurance de portefeuille, tandis que, selon Basak (1995, 2002), elle est réduite par l'assurance de portefeuille. Ces résultats opposés s'expliquent notamment par les différentes hypothèses concernant la consommation des agents, par exemple : Grossman et Zhou (1996) supposent que la consommation a eu lieu uniquement à l'horizon de l'assurance de portefeuille et Basak (1995) suppose que les agents consomment d'une manière continue. En outre, Basak (2001) a prouvé que les conditions d'équilibre général dépendent des hypothèses portant sur des économies de type échange pure ou de production. Dans le cas de l'échange pur, le prix du marché augmente toujours alors que dans le cas de la production, l'impact dépend de la situation. Ainsi, les conclusions sur l'assurance de portefeuille et la dynamique du marché (volatilité et prime de risque) sont plutôt mitigées.

Dans son article, Leland (1980) a prouvé que, lorsque l'investisseur a les mêmes croyances du marché, le profil du portefeuille optimal est globalement convexe si, et seulement si, la tolérance au risque de l'investisseur augmente avec la valeur de son portefeuille plus rapidement que la tolérance au risque de l'investisseur augmente avec la richesse du marché mondial. Sous l'hypothèse de la tolérance au risque linéaire avec une même prudence et des convictions log-normales avec la même volatilité, Leland (1980) a constaté que le profil du portefeuille optimal de l'investisseur est globalement convexe s'il a un rendement espéré supérieur à celui du marché financier. Ainsi, Carr et Madan (2001) ont montré par exemple que, si l'investisseur pense que la volatilité de son portefeuille sera élevée, il vendra des options à parité alors que, s'il pense que la volatilité sera faible, il achètera des options en dehors de la monnaie. Benninga et Mayshar (2000) ont examiné la demande d'options dans un cadre d'équilibre général par des agents ayant des fonctions d'utilité du type HARA. Ils ont montré que l'hétérogénéité du degré d'aversion au risque relative parmi les investisseurs implique que l'agent représentatif a une aversion au risque relative décroissante. Ils ont également montré que la formule Black-Scholes ne tient plus et que toutes les options sont surévaluées par rapport aux prix Black-Scholes. En effet, le risque de fond peut potentiellement expliquer la demande d'options plutôt que l'hétérogénéité des préférences.

Bertrand et Prigent (2011) ont examiné l'équilibre du portefeuille sous les contraintes d'assurance portant sur la richesse finale dans le cadre de l'utilité espérée. Ils ont établi une extension des résultats de Carr et Madan (2001) en introduisant des contraintes d'assurance générales sur les portefeuilles individuels. Ils ont déterminé le profil du portefeuille optimal à l'équilibre sous des contraintes d'assurance portant sur la richesse. Les résultats ont montré que les actifs dérivés doivent être introduits dans le portefeuille pour maximiser l'utilité espérée de l'investisseur. Dans ce cadre, la solution optimale dépend clairement de l'aversion au risque de l'investisseur et de la garantie à l'échéance. Sous l'hypothèse standard où les contraintes d'assurance et la fonction de paiement du portefeuille sont exprimées en fonction de l'actif risqué, la solution est égale au maximum entre cette fonction et la solution du problème sans contrainte mais avec une richesse initiale différente. Dans le cas d'absence de la garantie, la concavité/convexité du profil du portefeuille est déterminée selon le degré d'aversion au risque et de la performance du marché financier (par exemple : le ratio de Sharpe). Bertrand et Prigent (2011) ont montré que, même en présence des contraintes d'assurance exogènes, la densité d'équilibre neutre au risque est égale au produit d'un facteur correspondant à la tolérance au risque, et d'un facteur reflétant les convictions personnelles, qui est une généralisation des résultats de Carr et Madan (2001).

Ainsi, le lissage de la performance d'un actif sous-jacent donné dans le temps (généralement un indice financier ou un panier d'indices) est un objectif principal pour les produits structurés. Deux méthodes principales sont introduites pour atteindre cet objectif : l'une est basée sur l'introduction d'une option d'achat asiatique, qui rapporte une partie de la performance positive de la moyenne des valeurs de référence au cours de la période de gestion ; l'autre est basée sur la moyenne des performances positives passées de l'actif de référence. Ces deux types de fonds permettent au portefeuille d'être moins sensible à la valeur finale de l'actif sous-jacent. Ces fonds présentent des volatilités plus faibles que leurs sous-jacents et tiennent mieux en compte de l'ensemble de la trajectoire de l'actif de référence. Cependant, Bertrand et Prigent (2015b) ont montré que la complexité de ces produits n'est pas

toujours avantageuse par rapport aux produits qui sont plus simples, lorsqu'on utilise des mesures de performance, telles que : les ratios Kappa (qui incluent par exemple les ratios Omega et Sortino).

Pendant les périodes des baisses des marchés financiers et des fortes volatilités, la demande en faveur des produits structurés croît, et en particulier ceux qui comportent une clause de protection du capital. C'est le but de l'assurance de portefeuille qui est conçue pour donner à l'investisseur la capacité de limiter le risque de baisse tout en permettant une certaine participation aux marchés à la hausse. Ces méthodes permettent aux investisseurs de récupérer, à l'échéance, un pourcentage donné de leur capital initial, notamment en cas de chute des marchés. La valeur du portefeuille est déterminée en fonction de l'indice de référence. En effet, les principaux avantages des produits structurés dépendent du type du sous-jacent utilisé. Les investisseurs achètent des assurances pour améliorer l'utilité espérée de leurs richesses finales. Le profil du portefeuille optimal peut être déterminé à partir du problème du positionnement optimal du produit structuré et dépend essentiellement de l'aversion au risque de l'investisseur. Plusieurs autres contraintes d'assurance spécifique peuvent être prises en considération. Bertrand et al. (2001), El Karoui et al. (2005) et Prigent (2006) ont présenté des contraintes très générales liées à l'assurance de portefeuille. Le positionnement optimal peut également être examiné à travers l'utilité espérée dépendante du rang (RDEU), comme avec Jin et Zhou (2008) pour le cas dynamique, et avec Prigent (2008) pour le cas statique. Dans ce cadre, le choix du seuil peut être déterminé par l'investisseur (Pfiffelmann, 2005; Pfiffelmann et Roger, 2008; Roger, 2008). En outre, Arrow (1963, 1971), Borch (1962), Mossin (1968) et Raviv (1979) ont déterminé les principes fondamentaux de la stratégie d'assurance optimale dans le cadre de la maximisation de l'utilité espérée. Ceci permet d'expliquer l'incitation à établir des stratégies d'assurance pour les individus averses au risque.

L'assurance est un instrument utilisé pour se protéger contre le risque de perte. En effet, l'assuré transfère une partie de ce risque en échange d'une prime avec l'assureur. Dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, chaque investisseur rationnel maximise son utilité espérée. Arrow (1977) a montré que l'assuré est neutre au risque et que la stratégie d'assurance optimale fournit une couverture complète. Des extensions concernant les stratégies d'assurance basées sur l'assouplissement des primes en présence d'une contrainte budgétaire supplémentaire ont été repérées dans les travaux de Blazenko (1985), Cummins et Mahul (2004), Gollier (1987), Kaluszka (2005) et Zhou et Wu (2008). Toutefois, les investisseurs institutionnels, par exemple, peuvent exiger des contrats d'assurance plus complexes. Les deux principales stratégies d'assurance de portefeuille standard sont l'assurance de portefeuilles proportionnels constants (CPPI) et l'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI). Ce type de stratégie d'assurance de portefeuille correspond à des stratégies d'assurance de portefeuille optimales, sur la base des hypothèses spécifiques (Bertrand et al., 2001). L'optimalité de telles stratégies de portefeuille dynamique a été largement examinée. La mise en place du temps continu est généralement considérée pour étudier l'assurance de portefeuille (Grossman et Vila, 1989; Basak, 1995; Grossman et Zhou, 1996). En temps continu, la principale hypothèse à prendre en compte est que les marchés sont complets, c'est-à-dire, tous les profils de portefeuille à l'échéance peuvent être parfaitement couverts. Ainsi, El Karoui et al. (2005) ont prouvé que, sous une garantie fixe à l'échéance, la stratégie de portefeuille à base d'options (OBPI) est optimale pour des fonctions d'utilité assez générales (voir aussi Jensen et Sorensen, 2001) dans le cadre du temps continu. Dans ce cadre, le rendement optimal (qui permet de maximiser l'utilité espérée de l'investisseur) dépend essentiellement de l'aversion au risque et de la prudence de l'investisseur (voir par exemple Bertrand et Prigent, 2010). Cependant, deux principaux problèmes se posent :

Premièrement, les banques d'investissement doivent déterminer les coûts d'émission d'un tel produit structuré. Cela se fait généralement en utilisant des outils théoriques d'arbitrage standard, en supposant que les marchés financiers sont parfaits à partir d'une gestion active de ces institutions financières. Deuxièmement, les gains d'utilité potentiels du client induits par l'achat d'un produit financier structuré donné seraient évalués.

Concernant le premier problème, étant donné que les produits structurés sont composés de plusieurs instruments financiers, la méthodologie d'évaluation les décompose généralement en parties intégrales,

ce qui devrait faciliter l'analyse et la fixation du prix des différentes composantes. Un portefeuille composé de ces instruments plus simples devrait avoir le même profil de rendement que le produit structuré. Compte tenu de l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers, la valeur du produit structuré est égale à la somme des composantes individuelles. Cette approche permet d'utiliser un modèle spécifique pour calculer les justes prix théoriques du marché pour tous les produits entrant dans la formule du produit structuré. Lorsqu'il n'est pas possible de décomposer un produit en composantes simples, c'est-à-dire lorsque le produit structuré combine des instruments complexes difficiles à évaluer, des procédures numériques doivent être utilisées pour évaluer le produit (Les expériences de Monte Carlo).

Concernant le second problème, et en particulier par rapport à l'utilité des gains fournie par les produits structurés, l'aversion au risque est en effet cruciale pour décrire le comportement des investisseurs. Selon Breuer et Perst (2007), les produits structurés sont des combinaisons de produits dérivés et d'actifs financiers sous-jacents qui présentent des structures avec des profils (risque/rendement) spéciaux qui pourraient ne pas être accessibles sur le marché des capitaux sans que les coûts de transaction importants soient encourus - du moins pour les investisseurs privés (voir par exemple, Das, 2000). Par conséquent, les investisseurs peuvent accepter de payer un coût supplémentaire (implicite) pour avoir accès à ce type de produits. En tenant compte de la psychologie des investisseurs, de leurs biais cognitifs et de leurs réactions émotionnelles, plusieurs chercheurs ont examiné le problème du positionnement optimal de ces produits dans le cadre de la finance comportementale. Par exemple, Hens et Riger (2008) ont montré que l'investisseur inclut dans son portefeuille des produits structurés plus complexes que les actions standard. Ainsi, Driessen et Maenhout (2007) ont étudié ce problème, en supposant soit l'utilité espérée, soit le CPT de Kahneman et Tversky (1992). Pfiffelmann (2005) a montré que certains produits structurés spécifiques, tels que les obligations liées au capital, dépendent essentiellement d'un niveau de référence donné. Ben Ameur et Prigent (2010), Jin et Zhou (2008) et Prigent (2008) ont examiné l'optimisation du portefeuille en fonction de l'utilité espérée dépendante du rang. Dans ce cadre, il peut être prouvé par exemple que, sous certaines hypothèses spécifiques concernant les paramètres financiers et l'attitude à l'égard des risques, des profils de portefeuille tels que les straddles peuvent être optimaux.

Contrairement aux résultats théoriques de la théorie de l'utilité espérée, la forme de l'assurance optimale est obtenue à partir des études empiriques. Solvic et al. (1977) ont constaté, d'après leurs études expérimentales liées à la prise de décision dans le cadre de l'assurance, que les individus préfèrent se protéger contre les événements qui causent fréquemment des petites pertes que de grandes pertes occasionnelles. Ils ont établi deux explications à ce phénomène, qui est en contradiction avec le principe de la théorie de l'utilité espérée :

Premièrement, les assurés sont des preneurs de risque face aux pertes. Deuxièmement, ils ont tendance à refuser la protection contre les pertes dont la probabilité est inférieure au seuil du rendement espéré. Kunreuther et al. (1978) ont confirmé ces résultats à partir de leur étude expérimentale. Afin de mieux expliquer le comportement des assurés, plusieurs modèles de décision alternatifs à la théorie de l'utilité espérée ont été proposés incluant : les probabilités subjectives pondérées (RDEU, CPT), la comptabilité mentale, l'ambiguïté, le sentiment du regret et le sentiment de la déception.

2. Les stratégies d'assurance de portefeuille

Les stratégies d'assurance de portefeuille ont été développées pour protéger l'investisseur à la maturité et limiter son risque à la baisse en assurant un niveau de perte prédéfini tout en profitant des marchés haussiers liés à l'actif risqué. Il existe plusieurs types d'assurances à savoir (CPPI, OBPI, CPDO, Stop-less ...). Les deux méthodes d'assurance de portefeuille CPPI (constant proportion portfolio insurance) et OBPI (option based portfolio insurance) sont considérées comme les deux produits d'assurance les plus populaires et les plus importantes. Leur stratégie consiste à investir une partie du capital initial dans un actif risqué et la partie restante du capital dans un actif sans risque.

2.1. Assurance de portefeuille à base d'options : Option Based Portfolio Insurance (OBPI). La stratégie d'assurance de portefeuille OBPI (option based portfolio insurance) a été introduite par Leland et Rubinstein en 1976. Cette méthode est basée sur une combinaison statique d'un actif risqué S (généralement un indice financier) couvert par une option de vente décrite sur cet actif risqué. Elle consiste à investir d'une manière partielle dans un actif sans risque et à le combiner avec des actifs risqués. Il s'agit d'acheter simultanément un actif financier risqué S et une option de vente décrite sur cet actif risqué. Quelle que soit la valeur de S , la valeur du portefeuille à l'échéance T est toujours supérieure à la valeur du prix d'exercice K de l'option de vente. Ainsi, le prix d'exercice de l'option de vente représente le montant garanti, qui est toujours égal à un pourcentage de l'investissement initial.

L'objectif principal de la méthode OBPI consiste à garantir un montant fixe pour l'investisseur à l'échéance. En fait, si le marché financier est parfait, la stratégie OBPI fournit une assurance de portefeuille à tout moment de la période de gestion. Cette stratégie est un cas particulier du positionnement optimal. La valeur du portefeuille est déterminée en fonction de l'indice de référence, sur une période définie. Le rendement optimal, qui maximise l'utilité espérée, dépend généralement de l'aversion au risque de l'investisseur.

Soit investisseur qui souhaite investir sa richesse initiale V_0 sur 2 actifs : un actif sans risque B et un actif risqué S (un indice financier). L'horizon temporel de cet investissement est $[0, T]$. La valeur de l'actif sans risque B évolue selon :

$$dB_t = B_t r dt,$$

où r est le taux d'intérêt sans risque. L'évolution dynamique de l'actif risqué S est donnée par ce processus :

$$dS_t = S_t[\mu dt + \sigma dW_t],$$

où W_t est le mouvement brownien géométrique standard; μ est la tendance de S et σ est la volatilité de S .

La stratégie OBPI est basée sur l'achat de q unités de l'actif S et de q unités de l'option de vente européenne, décrite sur l'actif S , de prix d'exercice K et de maturité T . La valeur du portefeuille V^{OBPI} à l'échéance est donnée par :

$$V_T^{OBPI} = q(S_T + (K - S_T)^+).$$

La valeur de ce portefeuille est toujours supérieure ou égale à K . Pour $q = 1$, le montant garanti à l'échéance est égal au prix d'exercice K . Selon la relation de parité entre le Call et le Put, l'expression de la valeur du portefeuille peut être réécrite par :

$$V_T^{OBPI} = q(S_T + (K - S_T)^+) = q(K + (S_T - K)^+).$$

Cette relation montre que le montant garanti est un multiplicateur du nombre d'unités q investies sur un actif : qK . Pour chaque instant $t < T$, la valeur du portefeuille est donnée par :

$$\begin{aligned} V_t^{OBPI} &= q(S_t + P(t, S_t, K)) \\ &= q(K e^{-r(T-t)} + C(t, S_t, K)), \end{aligned}$$

où $P(t, S_t, K)$ est la valeur de l'option européenne à l'instant t et $C(t, S_t, K)$ est la valeur du call à l'instant t . Ces deux valeurs sont déterminées par le modèle de Black-Scholes.

Pour chaque instant t avant la maturité T , la valeur du portefeuille est toujours au-dessus de $qK e^{(-r(T-t))}$. Ceci montre que la garantie est dynamique dans ce contexte. En particulier, si $q = 1$, la valeur du portefeuille V_T^{OBPI} sera exprimée par :

$$V_T^{OBPI} = S_T + (K - S_T)^+ = K + (S_T - K)^+.$$

La méthode OBPI est une approche dynamique qui permet d'atteindre un niveau minimal de la richesse à l'échéance quel que soit la valeur de l'actif risqué sur le marché financier. En se basant sur le modèle d'évaluation des options de Black-Scholes, la méthode OBPI permet d'obtenir une solution

optimale en imposant une garantie exogène dans le problème d'optimisation de l'utilité espérée de l'investisseur, dont la fonction d'utilité est une fonction de type CRRA.

2.2. Assurance de portefeuille par la méthode du coussin : Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI). La méthode d'assurance de portefeuille CPPI ou la méthode du coussin a été introduite par Perold (1986) pour les instruments à revenu fixe et a été développée par la suite par Black et Jones (1987) pour les instruments de capitaux propres (voir aussi Perold et Sharpe, 1988). Cette méthode est une technique d'assurance de portefeuille avec un plancher, qui est la plus faible valeur acceptable du portefeuille de l'investisseur. Elle consiste à investir d'une manière partielle dans un actif sans risque et de le combiner avec des actifs risqués. Cette méthode est basée sur la stratégie d'allocation d'actifs dynamique dans le temps.

Dans le cadre de la méthode CPPI, l'investisseur souhaite garder la valeur de son portefeuille au-dessus de la valeur du plancher P_t pour chaque instant t . D'abord, l'investisseur commence par le choix d'un plancher. Nous supposons que la valeur du plancher évolue suivant cette dynamique :

$$dP_t = P_t r dt.$$

La valeur du plancher donne un montant de garantie dynamique. Ainsi, la valeur initiale du portefeuille V_0 doit être supérieure à la valeur initiale du plancher P_0 .

Soient V_t et C_t respectivement la valeur du portefeuille à l'instant t et la valeur du coussin à l'instant t . Par définition, le coussin est la différence entre la valeur du portefeuille et la valeur du plancher à un instant donné. Il est exprimé par :

$$C_t = V_t - P_t.$$

Quand la valeur du portefeuille est égale à la valeur du plancher, le coussin s'annule ($V_t = P_t$) et l'investisseur n'est plus exposé au risque.

Ensuite, l'investisseur détermine le montant alloué dans les actifs risqués et investit la partie restante de la richesse dans un actif sans risque. La méthode standard de CPPI définit le montant investi sur les actifs risqués par «exposition», donnée par e_t , tel que :

$$e_t = mC_t,$$

où m est une constante, appelée multiple. Cette relation définit l'exposition de l'investisseur au risque. La constante m est supposée toujours supérieure à 1 afin d'avoir une fonction de paiement du portefeuille convexe. La valeur initiale du plancher et la tolérance au risque sont déterminées par rapport aux objectifs de l'investisseur. En outre, la méthode CPPI est basée sur deux paramètres : la valeur du plancher P_t et le multiple m . Le prix d'exercice K dans la méthode OBPI joue le même rôle que la valeur du plancher $P_0 e^{rt}$.

Pour tout instant $t < T$, la valeur du portefeuille est donnée par :

$$dV_t = (V_t - e_t) \frac{dB_t}{B_t} + e_t \frac{dS_t}{S_t}.$$

La valeur du coussin satisfait cette relation :

$$\begin{aligned} dC_t &= d(V_t - P_t) \\ &= (V_t - e_t) \frac{dB_t}{B_t} + e_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) - dP_t \\ &= (C_t + P_t - mC_t) \frac{dB_t}{B_t} + mC_t \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) - dP_t \\ &= (C_t - mC_t) r dt + mC_t (\mu dt + \sigma dW_t) \\ &= C_t [(r + m(\mu - r)) dt + m\sigma dW_t], \end{aligned}$$

tels que $\frac{dB_t}{B_t} = \frac{dP_t}{P_t} = r dt$ et $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$.

En utilisant la formule d'Ito, C_t est exprimée par :

$$C_t = C_0 \exp\left[\left(m(\mu - r) + r - \frac{m^2\sigma^2}{2}\right)t + m\sigma dW_t\right].$$

Soit $S_T^m = S_0^m \exp\left[m\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + m\sigma W_t\right]$. A partir de cette expression, l'expression de W_t peut être déduite :

$$W_t = \frac{1}{m\sigma} \left[\log\left(\frac{S_T^m}{S_0^m}\right) - m\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \right].$$

En substituant W_t par son expression dans l'expression du coussin, C_t peut être réécrite par :

$$C_t(m, S_t) = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^m \exp\left[\left((1-m)\left(r + \frac{m\sigma^2}{2}\right)\right)t\right],$$

alors

$$C_t(m, S_t) = \alpha_t S_t^m,$$

avec $\alpha_t = \left(\frac{C_0}{S_0}\right)^m \exp\left[\left((1-m)\left(r + \frac{m\sigma^2}{2}\right)\right)t\right]$.

D'où, la valeur du portefeuille obtenu par la méthode CPPI est donnée par :

$$V_t^{CPPI}(m, S_t) = P_0 e^{rt} + \alpha_t S_t^m.$$

Les propriétés de la CPPI ont été largement étudiées dans la littérature. Les références incluent Bookstaber et Clarke (1984), Bookstaber et Langsam (1988), Kavee et Zhu (1988), Black et Rouhani (1989), Black et Perold (1992), Bertrand et Prigent (2005), Balder et al. (2009), Balder et Mahayni (2008) et Kraus et Zagst (2011). Le positionnement optimal du portefeuille structuré selon la théorie de l'utilité espérée standard.

Dans cette partie, nous avons déterminé le positionnement du portefeuille optimal, sans et avec les contraintes d'assurance, selon la théorie de l'utilité espérée classique. Nous supposons qu'un investisseur souhaite allouer sa richesse initiale selon la stratégie d'investissement «buy and hold» en prenant en compte son aversion au risque dans un marché complet où les opportunités d'arbitrage sont absentes. Cet investisseur va investir sa richesse sur 2 actifs : un actif sans risque (obligation zéro-coupon) et un actif risqué S . Le processus de valeur du portefeuille de cet investisseur est donné par : $(V_t e^{-r(T-t)})_t$, tel que : $(V_t e^{-r(T-t)})_t$ est une \mathbb{Q} -martingale où \mathbb{Q} est la probabilité neutre au risque.

La condition d'absence d'opportunités d'arbitrage permet d'établir cette contrainte budgétaire :

$$V_0 = E_{\mathbb{Q}}[V_T e^{-rT}] = E_{\mathbb{P}}[V_T M_T],$$

où M_T correspond au processus : $M_T = g_T \exp(-rT)$ tel que $g_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ est la dérivée Radon-Nikodym sous la probabilité historique \mathbb{P} . Cette contrainte suppose que la valeur de la richesse initiale investie est égale à l'espérance actualisée des paiements futurs sous la probabilité \mathbb{Q} .

3. Positionnement optimal du portefeuille

3.1. Cas sans contrainte. Supposant qu'un investisseur cherche à maximiser son utilité espérée finale sous la probabilité historique \mathbb{P} , tout en respectant la contrainte budgétaire. La fonction d'utilité de cet investisseur est une fonction croissante, continue et deux fois différenciable. Le programme d'optimisation de cet investisseur est donné, selon Cox et Huang (1989), par :

$$\max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T)],$$

$$\text{avec } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_T M_T],$$

où V_T désigne la valeur du portefeuille à la maturité T . La résolution de ce programme d'optimisation permet de déterminer le paiement optimal du portefeuille par :

$$V_T^* = J[\lambda g],$$

où J est l'inverse de la fonction de l'utilité marginale, tel que $J = (U')^{-1}$ et λ est le paramètre Lagrangien associé à la contrainte budgétaire.

Brennan et Solanki (1981) ont proposé une approche permettant de déterminer le paiement optimal du portefeuille structuré. Cette approche a été reprise par Carr et Madan en 2001 et suppose que l'investisseur cherche à maximiser l'utilité espérée de la valeur finale de son portefeuille exprimée en fonction de $h(S_T)$. Ce problème est donné par :

$$\max_h \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T))],$$

$$\text{avec } V_0 = e^{-rT} E_{\mathbb{Q}}[h(S_T)].$$

Dans ce contexte, nous supposons que la fonction d'utilité de l'investisseur est du type CRRA (Constant Relative Risk Aversion) et donc donnée par : $U(X) = \frac{X^\phi}{1-\phi}$ si $\phi \neq 1$.

Nous supposons que S_t évolue selon un mouvement Brownien géométrique, ce qui implique que le Log du rendement de l'actif risqué S est une variable gaussienne d'espérance $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ et de variance $\sigma^2 T$. Alors, la résolution du programme d'optimisation ci-dessus permet de déterminer la valeur optimale V_T^* sous la forme d'une fonction $h^*(S_T)$ définie par :

$$h^*(s) = \frac{V_0 e^{rT}}{\int_0^\infty g(s)^{\frac{\phi}{\phi-1}} f_P(s) ds} g^{\frac{1}{\phi-1}},$$

où f_P est la fonction de densité de la fonction log-normale de S_T , tel que :

$$f(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{(\ln(\frac{s}{s_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right].$$

Notons par $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$ (Ratio de Sharpe); $A = -\frac{1}{2}\theta^2 T + \frac{\theta}{\sigma}(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$; $\varphi = e^A(S_0)^{\frac{\theta}{\sigma}}$ et $k = \frac{\theta}{\sigma}$. Selon Black-Scholes, la fonction $g(s)$ est définie par :

$$g(s) = \varphi S^{-k}.$$

D'après ces notations, $h^*(s)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$h^*(s) = dS^m,$$

$$\text{où } d = \frac{V_0 e^{rT}}{\int_0^\infty g(s)^{\frac{\phi}{\phi-1}} f_P(s) ds} \varphi^{\frac{\phi}{\phi-1}} > 0 \text{ et } m = \frac{k}{1-\phi} > 0.$$

Graphiquement, la fonction de paiement du portefeuille optimal $h^*(s)$ est une fonction croissante de S si $k > 0$ et $\mu > r$. La forme de cette fonction dépend de la comparaison entre $(1 - \phi)$ (l'aversion relative au risque propre à chaque investisseur) et du paramètre k (un ratio de Sharpe par unité de volatilité). Ceci permet de constater :

- Si $m < 1$: la fonction $h^*(s)$ est concave : la concavité provient du fait que l'aversion relative au risque est forte ou la performance de l'actif risqué au sens de ratio de Sharpe est faible.

- Si $m = 1$: la fonction $h^*(s)$ est linéaire, telle que : $\frac{(\mu-r)}{\sigma^2} = 1 - \phi = RRA$ (Relative Risk Aversion).

- Si $m > 1$: la fonction $h^*(s)$ est convexe : la convexité provient soit du fait que l'aversion relative au risque est faible, soit du fait que la performance de l'actif risqué au sens de ratio de Sharpe est forte.

Ceci est représenté à partir du graphique 1 :

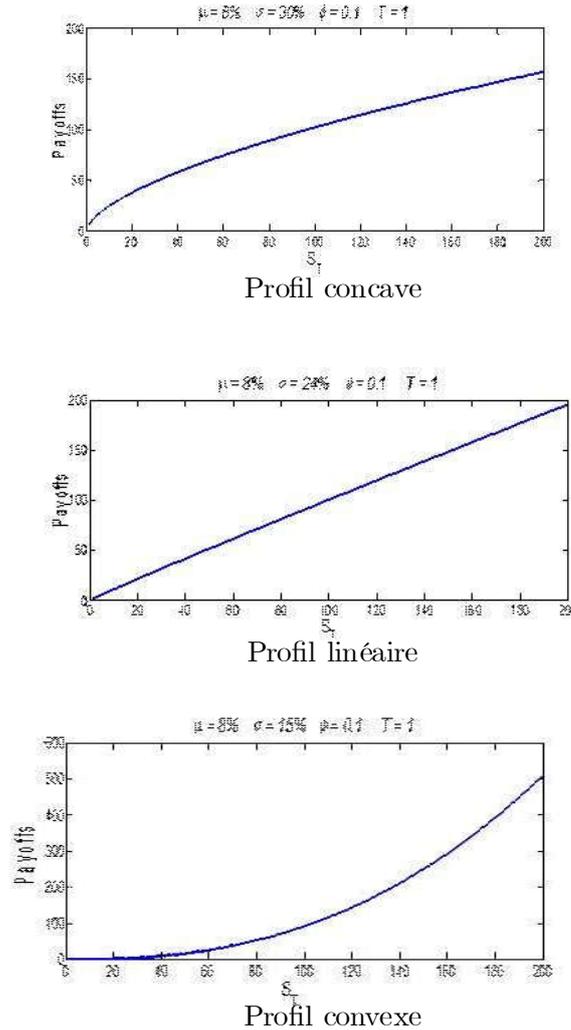


FIG. 1. Les profils optimaux sans contrainte

3.2. Cas avec contrainte (portefeuille assuré). L'investisseur cherche à protéger ses fonds contre les risques potentiels du marché. Pour ceci, il achète une assurance de portefeuille qui lui permet de se couvrir contre une baisse du marché et avoir un montant garanti à l'échéance. Ce montant garanti ou la valeur plancher P_T est le montant minimal au-dessus duquel la valeur du portefeuille devrait être à l'échéance quel que soient le prix de l'actif sous-jacent. En prenant en compte l'hypothèse de la complétude du marché, le programme d'optimisation de l'investisseur est donné par :

$$\begin{aligned} & \max_{V_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [U(V_T)] \\ & \text{s.c. } V_T \geq P_T, \\ & \text{et } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [V_T M_T] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [P_T M_T], \end{aligned}$$

où P_T représente la valeur du plancher.

Si la contrainte de garantie est imposée, la valeur de l'investissement initial V_0 doit être supérieure à $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [P_T M_T]$. La solution optimale V_T^{**} de ce problème d'optimisation est donnée par Bertrand et Prigent (2012) comme suit :

$$V_T^{**} = \max(V_T^*, P_T) = P_T + (V_T^* - P_T)^+,$$

où V_T^* est la solution optimale du programme d'optimisation sans contrainte. A l'échéance, la valeur optimale du portefeuille en présence de la contrainte de garantie est toujours supérieure ou égale à la valeur du plancher.

L'investisseur souhaite avoir la valeur optimale du portefeuille V_T^{**} à l'échéance, exprimée en fonction de la valeur de l'actif risqué S à cette date ($h^{**}(S_T)$). Dans ce cas, le programme d'optimisation de l'investisseur prend cette forme :

$$\begin{aligned} & \max_h \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T))], \\ \text{s.c. } & V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T)g(S_T))], \\ & \text{et } h(S_T) \geq h_c(S_T), \end{aligned}$$

où $h^*(S)$ est la solution optimale du programme sans contrainte de garantie et $h_c(S)$ représente la contrainte de garantie tel que : $P_T = h_c(S_T)$. Cette solution est donnée par :

$$h^{**}(S) = \max(h^*(S); h_c(S)) = h_c(S_T) + (h^*(S) - h_c(S))^+ = h^*(S_T) + (h_c(S) - h^*(S))^+,$$

où la fonction h^{**} est une fonction croissante en S . Cette fonction est donnée dans les graphiques ci-dessous :

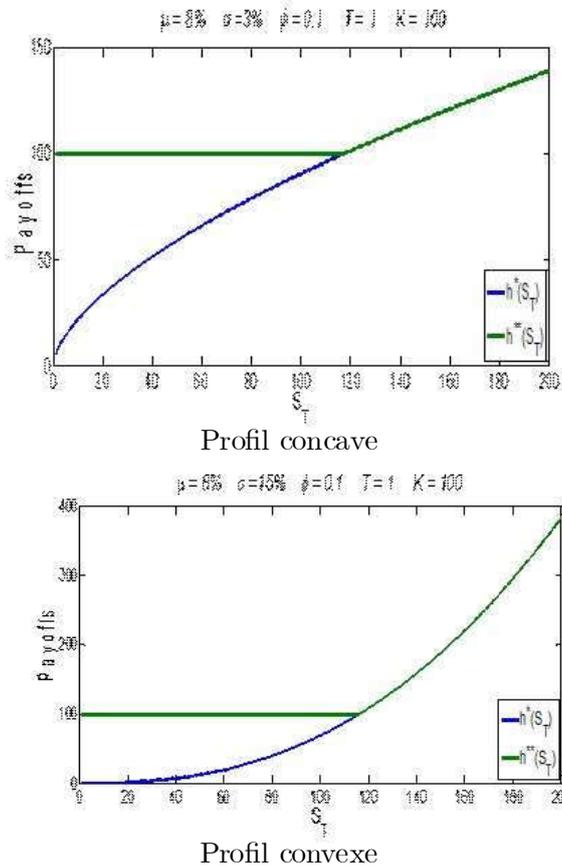


FIG. 2. Les profils optimaux avec contrainte

L'investisseur reçoit d'une manière certaine le montant de la garantie (la valeur du plancher) si la valeur de l'actif risqué baisse, et bénéficie de la croissance de l'actif risqué avec un certain taux si la valeur de l'actif risqué augmente. Bertrand et Prigent (2012) ont maximisé l'utilité CRRA de la différence entre la valeur finale du portefeuille et la valeur du plancher. Ils ont constaté que la méthode CPPI est optimale (Prigent, 2007). La concavité et la convexité de la fonction de paiement optimale dépendent de la comparaison entre le ratio de Sharpe ($\frac{\mu-r}{\sigma}$) et l'aversion au risque de l'individu.

Si l'actif risqué évolue selon le mouvement Brownien géométrique, Bertrand et Prigent (2012) ont trouvé le même résultat de V^{**} tel que :

$$V^{**}(S_T) = dS_T^m + (h_c(S_T) - dS_T^m)^+,$$

où $h_c(S_T) = aS_T + K$, avec a représente la part de l'actif risqué S qu'on souhaite avoir et K présente la garantie en capital fixe. Ceci correspond à l'évaluation du paiement final d'une option européenne :

$$V^{**}(S_T) = dS_T^m + (aS_T + K - dS_T^m)^+.$$

Bertrand et Prigent (2012) ont examiné l'équilibre des portefeuilles financiers en présence des contraintes d'assurance au niveau de la richesse finale. Ils ont déterminé l'équilibre financier partiel optimal et l'équilibre général optimal en analysant des fonctions d'utilité et des contraintes d'assurance. Ces deux auteurs ont constaté que les actifs dérivés financiers doivent être introduits dans le portefeuille pour maximiser l'utilité espérée de l'investisseur. Ils ont constaté que la solution optimale dépend de l'aversion au risque de l'investisseur et de la garantie à la maturité. Ainsi, ils ont montré que le paiement optimal du portefeuille, en présence de la contrainte d'assurance, est égal au maximum entre la fonction du paiement du portefeuille en présence de la contrainte et la fonction de paiement optimal du portefeuille en l'absence de la contrainte de garantie.

4. Le modèle de Leland (1980)

Leland (1980) a caractérisé la nature des investisseurs qui pourraient bénéficier de l'assurance de portefeuille. Il a montré que l'achat de l'assurance de portefeuille est équivalente (i) soit à l'achat d'une option de vente, dont le prix d'exercice est égal à la valeur initiale du portefeuille, en plus de la possession d'un portefeuille de référence (ii) soit à l'achat d'une option d'achat, dont le prix d'exercice est égal à la valeur initiale du portefeuille, en plus de la possession d'une somme en liquide égale à la valeur du portefeuille de référence actualisée par le taux sans risque sur la période de l'assurance. Ces résultats ont été démontrés ailleurs par Brennan et Schwartz (1976) et complétés par Leland (1980). Ce dernier a supposé que si l'investisseur obtient un portefeuille assuré complet, il aura une assurance de fin de période y donnée par :

$$Y(W_T, W_0) = \max(W_T; W_0),$$

où W_T représente la valeur finale du portefeuille de référence; W_0 est la valeur initiale du portefeuille de référence. Cette formule permet à l'investisseur d'obtenir la valeur la plus élevée entre la valeur initiale et la valeur finale du portefeuille de référence. Pour ceci, l'investisseur doit évidemment payer une prime pour avoir la valeur du portefeuille assuré.

Dans un premier temps, Leland (1980) suppose que l'investisseur qui possède un portefeuille de référence et qui achète une option de vente définie sur le portefeuille de référence avec un prix d'exercice égal à W_0 . Une telle option permet d'avoir des rendements à la fin de la période donnés par :

$$P(W_T, W_0) = \max(W_0 - W_T; 0).$$

La possession du portefeuille de référence et de l'option de vente permet d'avoir la valeur du portefeuille assurée à l'échéance donnée par :

$$\begin{aligned} W_T + P(W_T, W_0) &= W_T + \max(W_0 - W_T; 0) \\ &= \max(W_T; W_0) \\ &= Y(W_T, W_0). \end{aligned}$$

Cette formule montre que la possession d'un portefeuille de référence et l'achat d'une option de vente avec un prix d'exercice égale à W_0 permet d'avoir des rendements assurés. Le prix de l'assurance doit être égal au prix de l'option de vente avec un prix d'exercice égal à W_0 .

Dans un second temps, Leland (1980) suppose que l'investisseur possède une option d'achat dont le prix d'exercice est égal à W_0 et une somme d'espèce égale à $\frac{W_0}{1+r}$, tel que r est le taux sans risque

permettant d'actualiser la somme de l'espèce durant toute la période d'assurance. A l'échéance, l'option d'achat est égale à :

$$C(W_T, W_0) = \max(W_T - W_0; 0).$$

Quant à la somme en espèce, elle est égale à W_0 à l'échéance. L'option d'achat et de la somme en espèce vont avoir ensemble une valeur finale égale à :

$$\begin{aligned} W_0 + C(W_T, W_0) &= W_0 + \max(W_T - W_0; 0) \\ &= \max(W_T; W_0) \\ &= y(W_T, W_0). \end{aligned}$$

Cette formule représente le deuxième moyen permettant d'avoir des rendements assurés : acheter une option d'achat et posséder une somme en espèce. Ceci implique que la stratégie de transaction dynamique qui crée l'assurance de portefeuille est identique à la stratégie dynamique qui crée une option d'achat équivalente. Leland (1980) a montré que la stratégie de transaction dynamique qui permet de créer des valeurs du portefeuille assuré nécessite un investissement plus important dans le portefeuille de référence comme sa valeur va augmenter et un montant plus important en espèce comme sa valeur va diminuer.

Dans son modèle, Leland (1980) suppose que la valeur d'un portefeuille, dont la valeur initiale et la valeur finale sont données respectivement par W_0 et W_T , est une variable aléatoire. La fonction de paiement du portefeuille $p(W_T)$ reflète les espérances du marché et les attitudes face au risque de l'investisseur. Leland (1980) suppose que :

- Un ensemble complet d'options écrites sur le portefeuille de référence existe et permet de déterminer $p(W_T)$.
- Le marché fonctionne comme s'il est composé par des investisseurs représentatifs ayant une fonction d'utilité $U(W_M)$ par rapport à la richesse du marché à l'échéance et une fonction de probabilité $h(W_{MT}; W_T)$ donnant une relation entre la densité de la richesse du marché à l'échéance et les valeurs du portefeuille.

En outre, Leland (1980) suppose qu'un individu dont la valeur de sa richesse finale dépend de la valeur finale du portefeuille de référence W_T et que $y(W_T)$ représente la richesse de l'investisseur pour W_T donnée. L'investisseur va choisir la solution optimale $Y(\cdot)$ qui permet de maximiser son utilité espérée sous la contrainte budgétaire, tel que :

$$\begin{aligned} \max_{y(\cdot)} \int_{-\infty}^{+\infty} U[Y(W_T)] f(W_T) dW_T, \\ \text{s.c.} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(W_T) p(W_T) dW_T = I, \end{aligned}$$

où $f(W_T)$ est la fonction de densité de probabilités de valeurs finales du portefeuille et I est la richesse initiale de l'investisseur. Ce problème est similaire à la documentation qui porte sur le partage du risque optimal sauf que les prix du marché fixe $p(W_T)$ remplace la déclaration de contingence des prix de la deuxième partie du problème. La solution du problème précédent est simple. Pour chaque niveau de richesse W_T :

$$f(W_T) U'[y(W_T)] = \lambda p(W_T),$$

où λ est une constante positive dont le niveau est déterminée à travers la contrainte budgétaire. En différenciant cette équation par rapport à W_T et en la résolvant pour $y'(W_T)$, la dérivée de la solution optimale de cette équation est donnée par :

$$Y' = \left(-\frac{U'}{U''} \right) \left(\frac{f'}{f} - \frac{p'}{p} \right), \quad (4.1)$$

pour tout W_T tels que les arguments des fonctions sont supprimés. En différenciant encore une fois par rapport à W_T et en simplifiant, Leland (1980) a obtenu :

$$Y'' = \left[\frac{d}{dY} \left(-\frac{U'}{U''} \right) + \frac{d}{dW_T} \left(\frac{f'}{f} - \frac{p'}{p} \right) / \left(\frac{f'}{f} - \frac{p'}{p} \right) \right] \left[-\frac{U'}{U''} \left(\frac{f'}{f} - \frac{p'}{p} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Toutes choses étant égales, les investisseurs dont la tolérance au risque croît avec la richesse plus rapidement ont plutôt tendance de faire recours à des assurances de portefeuille. Ceci peut être vérifié par le fait que la partie à droite de l'équation 4.2 est toujours positive. Si les fonctions f et p sont fixes, Y'' a plus tendance à être positive si $\frac{d}{dY} \left(-\frac{U'}{U''} \right)$ est grande, c'est-à-dire si la tolérance au risque de l'investisseur croît rapidement avec le niveau de la richesse. $Y'' > 0$ implique que la fonction Y est localement convexe.

Leland (1980) considère un environnement où la fonction du prix de déclaration de contingence $p(W_T)$ reflète les préférences d'un investisseur normal. Il existe une fonction d'utilité $V(W_T)$ et une fonction de densité de probabilité $h(W_T)$, tel que :

$$p(W_T) = h(W_T)V'(W_T), \quad (4.3)$$

où $V'(W_T)$ est la fonction d'utilité marginale quand la valeur du portefeuille de référence est donnée par W_T . Pour une équation 4.3 donnée, l'équation 4.1 peut être exprimée par :

$$Y' = \left(-\frac{U'}{U''} \right) \left(-\frac{V''}{V'} + \frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right). \quad (4.4)$$

Maintenant, Leland (1980) suppose que les investisseurs ont les mêmes espérances que le marché. Il considère le cas qui a été examiné par Brennan et Solanki (1979) où $f(W_T) \equiv h(W_T)$ (c'est-à-dire l'investisseur a les mêmes espérances que le marché). Dans ce cas, l'équation 4.4 est réduite à :

$$Y' = \left(-\frac{U'}{U''} \right) / \left(-\frac{V''}{V'} \right),$$

où $Y' > 0$ est l'aversion au risque de l'investisseur. Leland (1980) a constaté que si l'investisseur a les mêmes espérances que le marché, la solution optimale $Y(\cdot)$ est strictement convexe si, et seulement si, la tolérance au risque de l'individu est plus rapidement croissante avec Y qu'avec W_T .

Leland (1980) considère également le cas où les espérances des investisseurs sont différentes de celles du marché. Afin de déterminer les résultats spécifiques, Leland (1980) suppose que :

- L'investisseur a une tolérance au risque linéaire exprimée par :

$$-\frac{U'}{U''} = a_i + b_i Y_i.$$

- La fonction d'utilité du marché montre une aversion au risque relative constante ou une tolérance au risque proportionnelle, donnée par :

$$-\frac{V''}{V'} = b_M W_{TM}.$$

- La valeur du marché à l'échéance est distribuée selon la loi normale avec : $E[\ln W_{TM}] = \mu_M$ pour le marché et μ_i pour l'investisseur ; $var[\ln W_{TM}] = \sigma_M^2$ pour le marché et σ_i^2 pour l'investisseur.

Ces hypothèses sont similaires à celles de Brennan et Solnik (1979) qui supposent que les espérances de l'investisseur et du marché sont identiques. Dans ce cas, Leland (1980) doit déterminer le portefeuille du marché, c'est à dire : $W_T = W_{TM}$.

- Soit $W_0 = 1$. L'hypothèse de la log-normale implique :

$$h(W_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2} W_T} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma_M^2} (\ln W_T - \mu_M)^2 \right],$$

où la fonction de densité de l'investisseur est exprimée par :

$$f(W_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i W_T} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma_i^2} (\ln W_T - \mu_i)^2 \right].$$

La solution est donnée par :

$$Y(W_T) = C_0 W_T^{\left[\left(\frac{b_i}{b_M}\right) + b_i k_1 + b_i k_2 \ln W_T\right]} - \frac{a_i}{b_i}, \quad (4.5)$$

où C_0 est une constante d'intégration déterminée par la contrainte budgétaire; $k_1 = \frac{\mu_i \sigma_M^2 - \mu_M \sigma_i^2}{\sigma_i^2 \sigma_M^2}$ et $k_2 = \frac{\sigma_i^2 - \sigma_M^2}{2\sigma_i^2 \sigma_M^2}$.

La solution 4.5 est une solution générale du cas où les espérances sont différentes. Leland (1980) a constaté que si le marché et l'investisseur ont la même tolérance au risque ($b_i = b_M$) et les mêmes estimations au risque ($\sigma_i = \sigma_M$), la solution optimale $Y(W_T)$ va être strictement convexe, si et seulement si, $\mu_i > \mu_M$ (l'investisseur a des espérances plus optimisantes que le marché). Il a montré que l'investisseur dont la tolérance au risque croît avec la richesse d'une manière plus rapide que l'investisseur normal, et/ou l'investisseur dont les espérances sont plus optimistes que l'investisseur normal, bénéficient d'une assurance de portefeuille. Ainsi, il a constaté que les investisseurs dont la tolérance au risque croît avec la richesse plus rapidement que l'investisseur normal doivent inclure des investissements du type Safety-First. Il a indiqué que l'assurance de portefeuille existe dans certains cas : dans le cas où si les options du marché, souscrites sur le portefeuille de référence, existent, l'assurance de portefeuille est obtenue en achetant une option de vente en plus de la possession d'un portefeuille de référence, et dans le cas d'achat d'une option d'achat en plus de la possession d'une somme en espèce.

5. Le portefeuille optimal structuré selon la théorie des perspectives cumulées (CPT)

5.1. Revue de littérature. Afin de déterminer l'attitude de l'investisseur, dont la fonction d'utilité est de type CPT, vis-à-vis des stratégies d'assurance du portefeuille, Branger et Vrecko (2009) ont développé un modèle basé sur le modèle de Black-Scholes et l'équivalent certain comme critère d'évaluation : $CE_i = (CPT_i)^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ avec CPT_i est la fonction d'utilité CPT de l'investisseur i . D'après leurs expériences empiriques, ils ont montré que les stratégies d'assurance du portefeuille sont attractives pour les investisseurs avec une fonction d'utilité de type CPT. Ceci est détournant pour l'investisseur ayant une fonction d'utilité de type CRRA et qui préfère les stratégies d'investissement de type «buy and hold». Ainsi, ils ont montré que la croissance de l'équivalent certain pour l'investisseur ayant une utilité de type CPT est due au changement de la stratégie d'investissement de l'investisseur : de la stratégie d'investissement avec des proportions constantes (buy and hold) à une stratégie d'assurance de portefeuille. D'après leurs études, Branger et Vrecko (2009) ont constaté que l'aversion aux pertes et la pondération des probabilités sont les deux caractéristiques de la CPT qui permettent d'expliquer l'attrait de l'investisseur aux stratégies d'assurance de portefeuille. Ils ont affirmé que lorsqu'une seule caractéristique de la CPT existe, l'assurance de portefeuille reste toujours attractive pour l'investisseur ayant une fonction d'utilité de type CPT, mais l'utilité dans la partie des gains, due à l'assurance de portefeuille, décroît significativement.

Dans le cadre d'optimisation du portefeuille structuré, Ben Ameur et Prigent (2010) ont examiné le cadre statique où la valeur du portefeuille est donnée en fonction d'un Benchmark et ont étudié des situations où les probabilités sont modifiées. Jin et Zhou (2008) ont traité le même problème mais dans un cadre dynamique. Ils ont montré que la solution optimale ne peut être obtenue qu'en divisant le problème d'optimisation en deux parties : la première partie concerne les gains et la deuxième partie concerne les pertes. La détermination des pertes et des gains dépend des valeurs finales de l'actif risqué. Leur solution est intéressante du fait que les gains et les pertes sont déterminés par puisque le prix de l'actif risqué est au-dessus ou au-dessous du point de référence parce que le portefeuille optimal de l'investisseur est une combinaison de deux options digitales. A leur tour, Dichtl et Drobetz (2011) ont

montré que la popularité des stratégies d'assurance de portefeuille peut être expliquée par l'utilisation des éléments de la finance comportementale, à savoir la CPT. Afin de déterminer l'attractivité des stratégies d'assurance de portefeuille, ils ont utilisé la méthode de simulation de Monte-Carlo et la méthode de simulation historique, pour mettre en œuvre l'ensemble des méthodes d'assurance de portefeuille classiques et les stratégies d'investissement Benchmark et évaluer les rendements des portefeuilles à travers le cadre de la CPT.

Dans le cadre de la méthode de simulation de Monte-Carlo, Dichtl et Drobetz (2011) ont simulé la valeur de la $CPT(VCPT)$ pour déterminer la composante responsable de l'attractivité des stratégies d'assurance de portefeuille pour les investisseurs ayant une fonction d'utilité de type CPT :

$$CPV = \sum_{i=1}^n \Pi_i \cdot v(x_i).$$

Dans ce contexte, la valeur des actifs sur le marché est supposée évaluée par le processus Brownien géométrique :

$$d(\ln s) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz.$$

Dichtl et Drobetz (2011) ont obtenu des résultats robustes à partir de la simulation Monte-Carlo qui sont valables dans plusieurs scénarios économiques. Ces résultats montrent que les stratégies d'assurance à savoir : la méthode CPPI, avec un niveau de protection 100%, dominent significativement les stratégies d'investissement de buy and hold en termes des valeurs des perspectives cumulées.

5.2. Le modèle de Bertrand et Prigent (2012). En se basant sur les travaux de Jin et Zhou (2008), qui considèrent que le point de référence est le point 0, Bertrand et Prigent (2012) ont déterminé, dans leur ouvrage «Gestion de portefeuille», le positionnement optimal du portefeuille dans le cadre de la CPT.

Soient deux fonctions d'utilité u^+ et u^- définies sur \mathbb{R}^+ , tels que u^+ mesure les gains et deux fois différentiable et u^- mesure les pertes, avec : $u^+(0) = u^-(0) = 0$. En plus, soient deux fonctions de pondération des probabilités : w^+ pour les gains et w^- pour les pertes. Ces deux fonctions sont définies sur $[0, 1]$, strictement croissantes et deux fois différentiables, tel que $w^+(0) = w^-(0) = 0$ et $w^+(1) = w^-(1) = 1$. Soit : $U(X) = U^+(X^+) - U^-(X^-)$, tels que $U^+(X^+) = \int_0^{+\infty} w^+(p(u^+ > y))dy$ et $U^-(X^-) = \int_0^{+\infty} w^-(p(u^- > y))dy$.

Le problème d'optimisation de l'investisseur, selon Bertrand et Prigent (2012), est défini par :

$$\max_{V_T} U(V_T) = U^+(X^+) - U^-(X^-),$$

$$\text{S.c. } E(gV_T) = V_0,$$

où $g = \frac{dV_T}{V_T}$ et $E(gV_T) = E_{\mathbb{Q}}(V_T e^{-rT}) = V_0$.

Comme dans le cadre de Jin et Zhou (2008), ce modèle d'optimisation peut être réparti sur 3 sous-problèmes. La première étape de la résolution de ce programme d'optimisation consiste à résoudre ce problème :

$$\max_{V_T} U^+(V_T),$$

$$\text{S.c. } E(gV_T) = x^+.$$

Il peut être réécrit sous cette forme :

$$\max_{V_T} \int_0^{+\infty} w^+(p(u^+ > y))dy,$$

$$\text{S.c. } E(gV_T) = x^+,$$

avec $V_T \geq 0$; $V_T = 0$ dans l'ensemble A et $x^+ \geq 0$. La valeur optimale de la résolution de ce programme d'optimisation est donnée par $U^+(A, x^+)$ tels que :

- Si $p(A) > 0$: la région réalisable de ce programme n'est pas vide et $v^+(A, x^+)$ est la borne supérieure de ce programme.
- Si $p(A) = 0$ et $x^+ = 0$: la solution optimale de ce programme a une seule valeur $V_T = 0$ puisque $V^+(A, x^+)$.
- Si $p(A) = 0$ et $x^+ > 0$: la résolution de ce programme n'a pas de solution réalisable ($v^+, (A, x^+) = -\infty$).

La deuxième étape de ce programme d'optimisation consiste à résoudre le deuxième problème donné par :

$$\min_{V_T} \int_0^{+\infty} w^-(p(u^- > y)) dy,$$

$$\text{S.c. } E(gV_T) = x^+ - x_0,$$

avec $V_T \geq 0$ et $V_T = 0$ dans A . La valeur optimale de la résolution de ce programme d'optimisation est donnée par $U^-(A, x^+)$ tels que :

- Si $p(A) < 1$: la région réalisable de ce programme n'est pas vide et $U^+(A, x^+)$ est la borne inférieure de ce programme.
- Si $p(A) = 1$ et $x^+ = 0$: la solution optimale de ce programme a une seule valeur $V_T = 0$ puisque $U^-(A, x^+) = 0$.
- Si $p(A) = 1$ et $x^+ > 0$: la résolution de ce programme n'a pas de solution réalisable ($v^+, (A, x^+) = +\infty$).

La troisième étape de la résolution du programme d'optimisation initial consiste à :

$$\min [V^+(A, x^+) - V^-(A, x^+)],$$

$$\text{S.c. } A \in F^T \text{ et } x^+ \geq x_0^+,$$

$$x^+ = 0 \text{ si } P(A) = 0,$$

$$x^+ = x_0 \text{ si } P(A) = 1.$$

La résolution de ce programme peut être établie à partir du troisième programme, exprimé par :

$$\max U^+(c, x^+) - v^-\left(\frac{x^- - x_0}{E(g1_{g>c})}\right)w^-(1 - F_\rho(c)),$$

$$\text{S.c. } \underline{\rho} \leq c \leq \bar{\rho},$$

$$x^+ = 0 \text{ quand } \underline{\rho} = c,$$

$$x^+ = x_0 \text{ quand } \bar{\rho} = c,$$

avec $v^+(c, x^+) = v^+((w : \rho \leq c), x^+)$; F_ρ est la fonction de distribution de ρ ; $\underline{\rho} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; P(\rho < \alpha) > 0\}$ et $\bar{\rho} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; P(\rho > \alpha) > 0\}$.

La résolution du premier programme permet d'obtenir la solution optimale suivante : $V_{T^+}^*(c, x^+)$ où $\underline{\rho} \leq c \leq \bar{\rho}$. La résolution du troisième programme permet de déterminer les valeurs optimales (c^*, x_+^*) . Si $(c^*, x_+^*) = (\bar{\rho}, x_0)$, alors $V_{T^+}^*(\bar{\rho}, x_0)$ est la solution optimale, sinon, l'expression $V_{T^+}^*(\bar{\rho}, x_0)1_{\rho \leq c^*} - (\frac{x_+^* - x_0}{E(\rho 1_{\rho > c^*})})1_{\rho > c^*}$ permet de résoudre le problème de l'investisseur. La solution optimale du premier programme est donnée par :

$$V_T^* = (U'_+)^{-1}\left(\frac{\lambda(c, x^+)\rho}{w'_+(F_\rho(\rho))}\right)1_{\rho \leq C},$$

avec $\lambda(c, x^+)$ satisfait cette expression : $E((U'_+)^{-1}\left(\frac{\lambda(c, x^+)\rho}{w'_+(F_\rho(\rho))}\right)1_{\rho \leq C}) = x^+$.

La valeur finale du portefeuille optimal est donnée par :

$$V_T^* = (U'_+)^{-1}a - b,$$

où $a = \frac{\lambda(c, x^+)\rho}{w'_+(F_\rho(\rho))}1_{\rho \leq C}$ et $b = (\frac{x_+^* - x_0}{E(\rho 1_{\rho > c^*})})1_{\rho > C}$.

Selon Bertrand et Prigent (2012), la fonction de paiement de ce portefeuille optimal correspond à un portefeuille composé de 2 options digitales, dont la partie non constante correspond à la partie des gains. Ils ont constaté que la densité Radon-Nikodym de ρ est donnée par : $\rho(S_T)$ tels que $\rho(s) = \chi s^{-k}$; $k = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$ et s représente l'actif risqué (actif sous-jacent). Ils ont déduit que $\rho > c^*$ est équivalent à $S_T < \tilde{s} = (\frac{\chi}{c^*})^{1/k}$; $F_\rho(\rho) = 1 - F_s(s)$ et $w_\gamma^*(p) = \frac{p^{(\gamma-1)}((\gamma-1)p+\gamma(1-p)^\gamma+p(1-p)^{\gamma-1})}{(p^\gamma+(1-p)^\gamma)^{(1/\gamma+1)}}$.

La fonction d'utilité de l'investisseur est du type CRRA : $u^+(v) = \frac{v^\alpha}{\alpha}$; $\alpha \in]0, 1[$. D'où la valeur finale du portefeuille optimal est donnée par :

$$V_T^* = h^*(S_T),$$

où $h^*(s) = (u'_+)^{-1} \frac{\lambda g(s)}{w'_+(1-F_s(s))} 1_{s \geq \tilde{s}} - \frac{(x_+^* - x_0)}{E(\rho 1_{S < \tilde{s}})} 1_{S < \tilde{s}}$.

Ce résultat montre que la fonction du paiement du portefeuille optimal possède une partie constante dans la partie des pertes (lorsque la valeur de l'actif risqué S_T est au-dessous de \tilde{s}). Cependant, la fonction de paiement possède la même forme que celle du cas statique de l'utilité espérée dans la partie des gains (concave). Dans cette partie, le ratio $\frac{\lambda g(s)}{w'_+(1-F_s(s))}$ est évalué en $(1 - F_s(s))$ au lieu de $F_s(s)$ dans le cas de l'utilité anticipée.

5.3. Le positionnement optimal des produits structurés avec une fonction d'utilité de type RDEU. Afin de déterminer le positionnement optimal du portefeuille dans le cadre de la RDEU, Ben Ameer et Prigent (2010) ont étendu les résultats de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2007). Dans ce cadre, l'investisseur est un preneur de prix et cherche à maximiser sa fonction d'utilité modifiée.

Soit un investisseur qui suit la stratégie d'investissement buy and hold et qui souhaite construire un portefeuille à partir de trois actifs : actif sans risque B , actif risqué S et une option de vente P . Cet investisseur souhaite maximiser son utilité espérée avec une déformation de probabilités. Supposant qu'un actif risqué évolue selon un mouvement Brownien géométrique :

$$S_T = S_0 \exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t],$$

où W_t est le mouvement Brownien géométrique. Selon Ben Ameer et Prigent (2010), la valeur du portefeuille en tenant compte de la contrainte budgétaire, à la maturité est donnée par :

$$V_T = \alpha B_T + \beta S_T + \frac{(V_0 - \alpha B_T - \beta S_T)}{P_0(K)} (K - S_T)^+.$$

Dans un premier temps, Ben Ameer et Prigent (2010) ont étudié le cas d'optimisation du portefeuille selon la fonction d'utilité du type CARA ($U(x) = \exp(\frac{-\alpha x}{\alpha})$; $\alpha > 0$). Dans ce contexte, l'investisseur doit maximiser sa fonction d'utilité espérée afin de déterminer la composition de son portefeuille :

$$\max_{(\alpha, \beta)} E[U(V_T)].$$

Les études expérimentales de Ben Ameer et Prigent (2010) ont montré que la composition du portefeuille optimal dépend largement de l'aversion au risque de l'investisseur et de la volatilité de l'actif risqué : plus le paramètre d'aversion au risque et le paramètre de la volatilité sont élevés, plus le montant investi sur les actifs risqué est petit.

Dans un second temps, Ben Ameer et Prigent (2010) ont étudié le profil du portefeuille optimal en utilisant la fonction d'utilité avec une transformation des probabilités de type RDEU (Quiggin, 1982). Comme dans le premier cas, la maximisation de la fonction d'utilité RDEU de l'investisseur a permis à Ben Ameer et Prigent (2010) de constater que les quantités allouées aux actifs risqués dépendent des paramètres du marché et de l'aversion au risque de l'investisseur : des valeurs élevées pour la volatilité et pour le paramètre d'aversion au risque impliquent une allocation d'un faible montant dans l'actifs risqué. Ils ont constaté qu'en présence d'une déformation des probabilités, l'investisseur va toujours

réduire les quantités des actifs risqués dans son portefeuille. Ceci correspond à un portefeuille avec un profil plus conservateur que le cas de CARA.

6. Conclusion

Dans ce chapitre théorique, nous avons évoqué les principes de la gestion structurée d'une manière générale. Nous avons présenté les caractéristiques des produits structurés, leur introduction sur le marché financier et leurs évolutions au cours du temps sur le marché européen. Nous avons également examiné les problèmes rencontrés par les émetteurs et les investisseurs concernant les produits structurés au niveau du marché. En effet, nous avons défini les 3 problèmes que l'émetteur et les investisseurs sont susceptibles de rencontrer. Le premier problème porte sur l'évaluation des prix des produits structurés vu la complexité de leur composition. Le deuxième problème est celui de l'adéquation d'un produit structuré au profil de l'investisseur (le client potentiel) tout en prenant en compte son attitude vis-à-vis du risque et l'attitude de l'émetteur face au risque. Quant au troisième problème, il concerne l'impact des produits structurés sur le marché financier. Ce problème recouvre le problème d'équilibre général de l'assurance de portefeuille. En outre, nous avons présenté les deux principales méthodes d'assurance de portefeuille : la méthode d'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI), établie par Leland et Rubinstein (1976), et la méthode du coussin (CPPI), développée par Perold (1986). Ces deux méthodes sont considérées comme les produits d'assurance de portefeuille les plus populaires et les plus importants. Nous avons aussi déterminé le positionnement optimal du portefeuille structuré selon la théorie de l'utilité espérée dans le cas sans contrainte (Brennan et Solanki, 1981 ; Carr et Madan, 2001) et dans le cas avec contrainte (Bertrand et Prigent, 2012). Nous avons présenté le modèle de base de l'optimisation de portefeuille dans le cadre de l'assurance de portefeuille, introduit par Leland (1980). Ce dernier a montré que l'investisseur qui bénéficie de l'assurance de portefeuille est celui dont la tolérance au risque croît plus rapidement avec la richesse par rapport à un investisseur normal. Enfin, nous avons déterminé le positionnement optimal du portefeuille structuré selon la CPT (Bertrand et Prigent, 2012) et la fonction d'utilité du type RDEU (Ben Ameur et Prigent, 2010).

Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à l'ambiguïté

1. Introduction

La question concernant l'optimisation de portefeuille, dans un cadre incertain, a fait l'objet d'une très vaste enquête aux cours des dernières décennies. Comme nous l'avons déjà précisé dans la partie théorique de la thèse, le concept de l'ambiguïté fait référence à un manque de précision ou de clarté d'un énoncé ou d'informations dans une situation précise. En pratique, l'ambiguïté est due typiquement à une certaine incertitude au niveau des valeurs des paramètres financiers et des probabilités dans le cadre économique (Ellsberg, 1961). De ce fait, la détermination du profil du portefeuille optimal dans un contexte incertain a des applications importantes dans le cadre de la gestion de portefeuille structurée. Ce sujet a été largement étudié et analysé par les économistes et les mathématiciens. Dans le cadre d'optimisation de portefeuille statique, Koeing et Tütünc (2004) ont présenté une nouvelle approche d'allocation d'actifs en présence de l'ambiguïté, au niveau du vecteur de rendements espérés et de la matrice de covariance des actifs. Ils ont introduit une formulation robuste de l'approche moyenne-variance et ont déterminé le profil du portefeuille efficient en maximisant le ratio de Sharpe. Quant à Liu et Zeng (2015), ils ont proposé un modèle d'optimisation de portefeuille basé sur l'approche moyenne-variance où l'ambiguïté porte sur les corrélations des rendements des actifs risqués. Ainsi, Biagini et Pinar (2015); Yan et al. (2016) et Ismail et Pham (2016) ont étudié le problème d'allocation d'actifs en présence de l'incertitude au niveau de l'interaction entre les rendements des actifs en prenant en compte l'aversion à l'ambiguïté des investisseurs. Dans le cadre de la gestion structurée, Ben Ameer et Prigent (2013) ont étudié le profil du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté en se basant sur l'approche de Maccheroni et al. (2006). Ils ont étudié le cas de la maximisation de l'utilité espérée du type CRRA avec un indice d'ambiguïté basé sur la log-entropie dans le cadre du positionnement du portefeuille optimal statique de Leland (1980) et de Brennan et Solanki (1981). De ce fait, la détermination et l'étude du profil et du positionnement du portefeuille optimal dans le cadre multidimensionnel (plusieurs actifs risqués) présente une problématique qui n'a pas été traitée dans la littérature existante.

Dans ce chapitre, nous avons présenté le profil de portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté, selon la méthode introduite par Leland (1980) et Brennan et Solanki (1981). Par rapport à Ben Ameer et Prigent (2013), nous avons traité le cas multidimensionnel, qui permet notamment de prendre en compte les corrélations entre plusieurs actifs risqués. Dans ce cadre, nous supposons que le positionnement optimal du portefeuille fait référence à des stratégies statiques. Cependant, les stratégies de couverture de portefeuille actuelles correspondent en réalité à des transactions en temps continu. Contrairement à la théorie du portefeuille standard, le positionnement optimal du portefeuille ne suppose pas que le portefeuille est une simple combinaison linéaire des actifs de base. Au contraire, les options doivent être incluses dans la détermination du portefeuille optimal et la valeur finale du portefeuille est une fonction de l'indice de référence. Un cas particulier du positionnement optimal est l'assurance de portefeuille basée sur l'option (OBPI), introduite par Leland et Rubinstein (1976). Il s'agit d'un portefeuille investi sur un actif risqué S (généralement un indice financier à savoir l'indice S&P 500) couvert par une option de vente. Quelle que soit la valeur de S à un horizon donné T , la valeur du portefeuille est toujours supérieure au prix d'exercice K de l'option de vente. La théorie de l'assurance de portefeuille considère généralement que les fonctions de paiement des portefeuilles sont exprimées en fonction de l'indice de référence (un portefeuille d'actifs). À l'échéance, le risque

de la baisse est limité (les investisseurs peuvent recevoir un pourcentage donné de leur capital initial, même dans le cas des marchés baissiers), tandis que les investisseurs peuvent également participer aux marchés haussiers. Cependant, des contraintes d'assurance plus spécifiques peuvent être introduites, par exemple pour les investisseurs institutionnels (voir par exemple Bertrand et al. (2001) pour les contraintes d'assurance assez générales).

Notre objectif dans ce chapitre consiste à examiner le profil du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté dans le cadre multidimensionnel. Notre modèle est une extension du modèle de Ben Ameur et Prigent (2013) au cas multidimensionnel en tenant compte des corrélations entre les actifs financiers. Nous montrons en particulier comment l'aversion à l'ambiguïté et les corrélations des actifs risqués impactent le profil optimal du portefeuille. Dans la deuxième section de ce chapitre, nous introduisons un exemple introductif permettant de déterminer le positionnement optimal du portefeuille structuré en tenant compte de l'ambiguïté et en investissant essentiellement sur deux actifs risqués et sur leurs options de vente correspondantes dans le cadre buy-and-hold, dans trois cas différents : le cas où l'ambiguïté porte uniquement au niveau des tendances ; le cas où l'ambiguïté porte sur les tendances et des volatilités des actifs et le cas où l'ambiguïté porte sur les corrélations entre les rendements des actifs. Dans la troisième section, nous traitons le problème d'optimisation général permettant de déterminer le profil et les caractéristiques du portefeuille optimal. Dans cette section, nous détaillons la modélisation du marché financier et le calcul de la probabilité neutre au risque. Nous illustrons numériquement les résultats antérieurs pour le cas d'une utilité espérée classique et pour le cas d'une utilité avec une aversion à l'ambiguïté en nous basant sur le critère maxmin de Gilboa et Schmeidler (1989) et sur les préférences avec des a priori multiples de Hansen et Sargent (2001). La dernière section porte sur des illustrations empiriques basées à la fois sur l'indice *S&P 500* et l'indice *Eurostoxx 50* pour deux périodes, à savoir «la crise financière 2008», et «une période standard», à savoir 2016. En absence et en présence de l'entropie, ces illustrations permettent de déterminer le profil du portefeuille optimal dans trois cas différents (ambiguïté au niveau des tendances / ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités / ambiguïté au niveau de la corrélation).

2. Le positionnement optimal sous l'ambiguïté

Dans ce qui suit, nous étendons le résultat de Ben Ameur et Prigent (2013) au cas multidimensionnel, notamment en tenant compte des corrélations entre plusieurs actifs risqués. Nous considérons le cadre du positionnement optimal du portefeuille introduit par Leland (1980) et Brennan et Solanki (1981) (voir aussi Carr et Madan, 200; Prigent, 2006) au cas de l'utilité espérée en présence de l'ambiguïté. Nous supposons que l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de son utilité U tout en faisant face à une ambiguïté au niveau des paramètres. En outre, nous supposons que cet investisseur est un preneur de prix (par exemple son indice de référence S est l'indice *S&P 500* et son investissement est trop faible pour modifier la valeur de l'indice) et que la valeur de son portefeuille est déterminée en fonction des valeurs finales des actifs risqués.

2.1. Exemple introductif (le cas buy-and-hold). D'abord, nous examinons un portefeuille financier structuré particulier étendant la stratégie d'assurance OBPI de Leland et Rubinstein (1976) avec cinq actifs : un actif sans risque B avec un taux d'intérêt constant r , deux actifs risqués $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ (par exemple deux indices boursiers) et deux options de vente écrites respectivement sur $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$. Nous supposons que les actifs risqués $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ suivent des mouvements browniens géométriques¹. Ceci implique que les valeurs de ces actifs à l'échéance T prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} S_T^{(1)} &= S_0^{(1)} \exp \left[d^{(1)}T + \sigma^{(1)}\sqrt{T}X^{(1)} \right], \\ S_T^{(2)} &= S_0^{(2)} \exp \left[d^{(2)}T + \sigma^{(2)}\sqrt{T}X^{(2)} \right], \end{aligned}$$

¹Ceci correspond par exemple à la distribution d'un mouvement brownien géométrique $(S_t)_t$ dans le cadre du temps continu, qui satisfait :

$$S_t = S_0 \exp \left[(\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma W_t \right],$$

avec : $d = (\mu - 1/2\sigma^2)$ et où : W désigne le mouvement Brownien standard.

où la distribution commune de $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ est la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$ avec un coefficient de corrélation $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) = \rho$.

Par conséquent, les variables aléatoires gaussiennes $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \rho^{(1)}Y^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^{(1)2}}Y^{(2)}, \\ X^{(2)} &= \rho^{(2)}Y^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^{(2)2}}Y^{(2)}, \end{aligned}$$

où $Y^{(1)}$ et $Y^{(2)}$ sont des variables aléatoires gaussiennes standard avec une covariance nulle et $-1 \leq \rho^{(1)} \leq 1$, $-1 \leq \rho^{(2)} \leq 1$. Nous avons :

$$\rho = \text{Covariance}(X^{(1)}, X^{(2)}) = \rho^{(1)}\rho^{(2)} + \sqrt{1 - \rho^{(1)2}}\sqrt{1 - \rho^{(2)2}}.$$

Par conséquent, les options de vente sont évaluées dans le cadre du modèle Black-Scholes. Nous dénotons par $P_0(K^{(1)})$ et $P_0(K^{(2)})$ les valeurs initiales des options de vente écrites respectivement sur $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ avec des prix d'exercice donnés respectivement par $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$. A l'échéance T , la valeur du portefeuille avec les cinq parts des actifs respectifs $\alpha, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ et $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ est donnée par :

$$V_T = \alpha B_T + \beta^{(1)}S_T^{(1)} + \beta^{(2)}S_T^{(2)} + \gamma^{(1)}(K^{(1)} - S_T^{(1)})^+ + \gamma^{(2)}(K^{(2)} - S_T^{(2)})^+.$$

Notons que la contrainte budgétaire correspond à :

$$V_0 = \alpha B_0 + \beta^{(1)}S_0^{(1)} + \beta^{(2)}S_0^{(2)} + \gamma^{(1)}P_0(K^{(1)}) + \gamma^{(2)}P_0(K^{(2)}).$$

Introduisons la condition d'assurance, c'est-à-dire à l'échéance : $V_T \geq V_0$.

PROPOSITION 1. *La valeur du portefeuille est assurée à l'échéance T si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :*

$$\begin{aligned} (\text{Cas } S_T^{(1)} &= 0 \text{ et } S_T^{(2)} = 0) \quad \alpha B_T + \gamma^{(1)}K^{(1)} + \gamma^{(2)}K^{(2)} \geq V_0, \\ (\text{Cas } S_T^{(1)} &= K^{(1)} \text{ et } S_T^{(2)} = K^{(2)}) \quad \alpha B_T + \beta^{(1)}K^{(1)} + \beta^{(2)}K^{(2)} \geq V_0, \\ (\text{Cas } S_T^{(1)} &= K^{(1)} \text{ et } S_T^{(2)} = 0) \quad \alpha B_T + \beta^{(1)}K^{(1)} + \gamma^{(2)}K^{(2)} \geq V_0, \\ (\text{Cas } S_T^{(1)} &= 0 \text{ et } S_T^{(2)} = K^{(2)}) \quad \alpha B_T + \beta^{(2)}K^{(2)} + \gamma^{(1)}K^{(1)} \geq V_0, \\ (\text{Cas } S_T^{(1)} &> K^{(1)} \text{ et } S_T^{(2)} > K^{(2)}) \quad \beta^{(1)} \geq 0, \beta^{(2)} \geq 0. \end{aligned}$$

PREUVE. Puisque V_T est une fonction linéaire par morceaux de $S_T^{(1)}$ et $S_T^{(2)}$, la condition $V_T \geq V_0$ est satisfaite pour toutes les valeurs possibles du couple $(S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$ dès qu'il est satisfait pour chaque sommet de la surface polygonale correspondante à la fonction V_T et satisfaite pour $S_T^{(1)} > K^{(1)}$ et $S_T^{(2)} > K^{(2)}$. \square

Afin d'illustrer numériquement le portefeuille optimal, nous considérons les valeurs de base des paramètres suivants :

$$B_0 = 1, S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 100, V_0 = 1000, r = 2\%.$$

Dénotons par : $d^{(1)} = \mu^{(1)} - 0.5\sigma^{(1)2}$ et $d^{(2)} = \mu^{(2)} - 0.5\sigma^{(2)2}$. Nous considérons le critère général de décision introduit par Hansen et Sargent (2001), avec une fonction d'utilité du type HARA définie par $U(V) = \frac{(V - V^*)^{1-\phi}}{1-\phi}$, avec $\phi \neq 1$ et un indice d'ambiguïté C modélisé par le critère d'entropie $R(\mathbb{P}, \mathbb{P}_0)$ par rapport à la probabilité \mathbb{P}_0 et multiplié par le coefficient ξ . Notons que l'hypothèse de la fonction d'utilité HARA, avec $v^* = V_0$ implique que le portefeuille optimal est assuré (c'est-à-dire $V_T \geq V_0 = 1000$). La probabilité \mathbb{P}_0 est associée aux valeurs : des tendances $\mu = (\mu_0^{(1)}, \mu_0^{(2)})$, des volatilités $\sigma_0 = (\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)})$ et des coefficients $(\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)})$. Les probabilités \mathbb{P} correspondent aux valeurs : des tendances $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$, des volatilités $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ et des coefficients $(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$.

Nous supposons que l'ambiguïté est constante pour chaque paramètre financier p correspondant à un intervalle donné $[p, \bar{p}]$.

Nous désignons par f_{S_T} la fonction de distribution de probabilité (pdf) des actifs $S_T = (S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$ par rapport à \mathbb{P} et par g le ratio $f_{S_T}/f_{0,S_T}$. Nous devons résoudre ce problème d'optimisation :

$$\max_{\alpha, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}} \min_{\substack{\mu^{(i)} \in [\underline{\mu}^{(i)}, \overline{\mu}^{(i)}], \sigma^{(i)} \in [\underline{\sigma}^{(i)}, \overline{\sigma}^{(i)}], \\ \rho^{(i)} \in [\underline{\rho}^{(i)}, \overline{\rho}^{(i)}]}} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [U(V_T)] + C(\mathbb{P})],$$

avec

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [U(V_T)] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} U \left[\begin{array}{c} \alpha B_0 e^{rT} + \beta^{(1)} s^{(1)} + \beta^{(2)} s^{(2)} \\ + \gamma^{(1)} (K - s^{(1)})^+ + \gamma^{(2)} (K - s^{(2)})^+ \end{array} \right] f_{S_T}(s^{(1)}, s^{(2)}) dx dy,$$

et

$$C(\mathbb{P}) = \xi \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \log [g(s^{(1)}, s^{(2)})] f_{S_T}((s^{(1)}, s^{(2)})) ds^{(1)} ds^{(2)}.$$

Afin d'illustrer la solution optimale, nous considérons l'indice *S&P 500* comme le premier actif risqué et l'indice *Euro Stoxx 50* comme le second actif. Nous déterminons les valeurs des paramètres du marché pour deux périodes d'investissement correspondantes respectivement à 2008 et 2016, du début janvier jusqu'à la fin de décembre avec des rendements hebdomadaires. Nous devons déterminer les pondérations optimales $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_2$ et γ_2 . Nous étudions plusieurs cas particuliers pour déterminer l'impact de l'ambiguïté.

2.1.1. *Ambiguïté uniquement au niveau des tendances.* Ici, nous ne considérons le cadre où l'ambiguïté ne porte que sur les tendances μ avec et sans entropie (respectivement $\xi = 100$ et $\xi = 0$). Nous avons fixé $K^{(1)} = K^{(2)} = 100$. Pour cet exemple, nous considérons les valeurs des paramètres qui se réfèrent aux deux périodes d'investissement 2008 et 2016.

· Pour 2008, nous avons : $\mu_1^0 = -45.13\%$; $\mu_2^0 = -51.04\%$; $\sigma_1 = \sigma_1^0 = 33.29\%$, $\sigma_2 = \sigma_2^0 = 37.76\%$; $\rho_1 = 0.348$; $\rho_2 = -0.348$, ce qui correspond à $\rho_0 = 0.878$.

· Pour 2016, nous avons : $\mu_1^0 = 11.21\%$; $\mu_2^0 = 2.12\%$; $\sigma_1 = \sigma_1^0 = 11.79\%$, $\sigma_2 = \sigma_2^0 = 18.99\%$; $\rho_1 = 0.247$; $\rho_2 = -0.247$, ce qui correspond à $\rho_0 = 0.758$.

Nous avons estimé trois profils de risque, à savoir $\phi = 2$ (relativement agressif), $\phi = 5$ (modéré) et $\phi = 10$ (conservateur). Nous considérons les valeurs suivantes pour les bornes des tendances, définissant l'ensemble d'ambiguïté :

$$\mu_{1\text{inf}} = \mu_{2\text{inf}} = -50\%; \quad \mu_{1\text{sup}} = \mu_{2\text{sup}} = 20\%.$$

TAB. 1. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances (2008)

ϕ	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
			$\xi = 0$					$\xi = 100$		
2	4.12	41.28	55.87	-45.83	55.82	0.09	4.44	5.94	4.06	5.55
5	272	1.41	5.88	2.76	17.44	468	1.27	7.78	1.09	17.19
10	724	0.81	1.81	0.76	6.72	995	0.03	0.03	-0.19	-0.19

En absence de l'entropie (c'est-à-dire $\xi = 0$), pour la plus petite aversion au risque $\phi = 2$, le positionnement optimal du portefeuille pour la période d'investissement 2008 correspond à une position longue sur l'indice *S&P 500* et à une position courte sur l'indice *Euro Stoxx 50*. Pour $\phi = 5$ et $\phi = 10$, le positionnement optimal consiste à avoir une position longue sur les deux indices et à investir

TAB. 2. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances (2016)

ϕ	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
			$\xi = 0$					$\xi = 100$		
2	1.45	4.96	5.70	4.28	5.04	2.24	4.72	5.29	4.22	4.96
5	534	2.56	2.70	1.85	1.99	564.13	2.30	1.50	1.81	1.51
10	719	1.83	1.84	0.82	0.82	725.10	1.59	1.59	1.16	1.16

beaucoup plus sur l'actif sans risque. Pour la période d'investissement 2016, l'investisseur a toujours des positions longues sur les deux indices. Nous notons également que les poids accordés aux options de vente sont plus importants que ceux accordés aux actifs risqués eux-mêmes, générant un profil optimal d'abord décroissant, puis croissant (en forme de «papillon»). Ceci est dû au niveau très élevé des volatilités. Cela implique que l'investisseur anticipe des écarts importants par rapport aux valeurs réelles des actifs risqués. Comme d'habitude, plus l'aversion au risque est élevée, plus l'investissement sur les indices *S&P 500* et *Euro Stoxx 50* est faible et plus l'investissement sur l'actif sans risque est élevé. Par rapport à 2008, les investissements sur les deux indices *S&P 500* et *Euro Stoxx 50* sont plus élevés pour la période 2016. Cela s'explique par les niveaux de volatilités qui sont beaucoup plus élevés en 2008. Pour mieux analyser l'investissement sur les actions et les options de vente, rappelons que le portefeuille $\beta S_T + \gamma(K - S_T)^+$ fournit un montant garanti égal à γK . Pour $\beta = \gamma$, nous récupérons l'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI) de Leland et Rubinstein (1976). Ici, par exemple pour $\phi = 2$ et pour l'année 2016, le portefeuille $\beta_1 S_T^1 + \gamma_1(K - S_T^1)^+ + \beta_2 S_T^2 + \gamma_2(K - S_T^2)^+$ fournit au moins un montant garanti égal à 924 (soit 92.4% de V_0). Cela signifie qu'un investisseur ayant une aversion au risque qui n'est pas très forte peut investir sur des actifs risqués puisqu'il est partiellement couvert par des positions longues sur les options de vente correspondantes. Lorsque son aversion au risque est assez forte (par exemple $\phi = 10$), l'assurance de portefeuille est principalement basée sur l'investissement très significatif sur l'actif sans risque.

Nous considérons également que l'ambiguïté porte uniquement sur les tendances μ_i , avec un indice d'ambiguïté modélisé par une entropie (ici $\xi = 100$). Nous gardons les mêmes paramètres financiers que dans le cas précédent. Pour définir la probabilité de référence \mathbb{P}_0 , nous prenons les estimations des rendements espérés des indices (c'est-à-dire μ_1^0 et μ_2^0) sur chaque période correspondante. Par rapport au cas précédent où l'indice d'ambiguïté est nul, tous les poids accordés aux actifs risqués sont plus faibles (sauf β_2 pour $\phi = 2$ et l'année 2008). Par exemple, pour $\phi = 2$ en 2016, les nouvelles pondérations des actifs risqués sont presque divisées par 10 par rapport à 2008 (quand $\xi = 0$). Ceci est dû à une anticipation de pertes très importantes au niveau des paramètres μ_1^0 et μ_2^0 . Enfin, notons que pour $\phi = 10$ en 2016, les pondérations β_i et γ_i sont presque égales, ce qui correspond à l'achat de fonds similaires à l'OBPI standard.

La figure 1 illustre le profil optimal du portefeuille V_T en fonction de la valeur du benchmark $S_T = (S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$ et aussi en fonction de la volatilité pour une aversion au risque modérée $\phi = 5$. Pour l'année 2008, depuis que $\beta_1 < \gamma_1$ et $\beta_2 < \gamma_2$, les profils optimaux diminuent en fonction des valeurs des actifs risqués S_T^1 et S_T^2 dans le domaine $\{S_T^1 < K, S_T^2 < K\}$ et augmentent dans le domaine $\{S_T^1 > K, S_T^2 > K\}$. Pour l'année 2016, nous récupérons la même caractéristique pour le cas sans entropie. Mais, dans le cas de l'entropie, depuis que $\beta_1 > \gamma_1 > 0$ et $\beta_2 > \gamma_2 > 0$, les profils optimaux sont toujours croissants et convexes par rapport aux valeurs des actifs risqués S_T^1 et S_T^2 .

2.1.2. *Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités.* Nous considérons maintenant que l'ambiguïté porte sur les tendances et les volatilités. Nous gardons les mêmes valeurs des paramètres financiers que dans le cas précédent, sauf que maintenant les volatilités sont également ambiguës. Nous

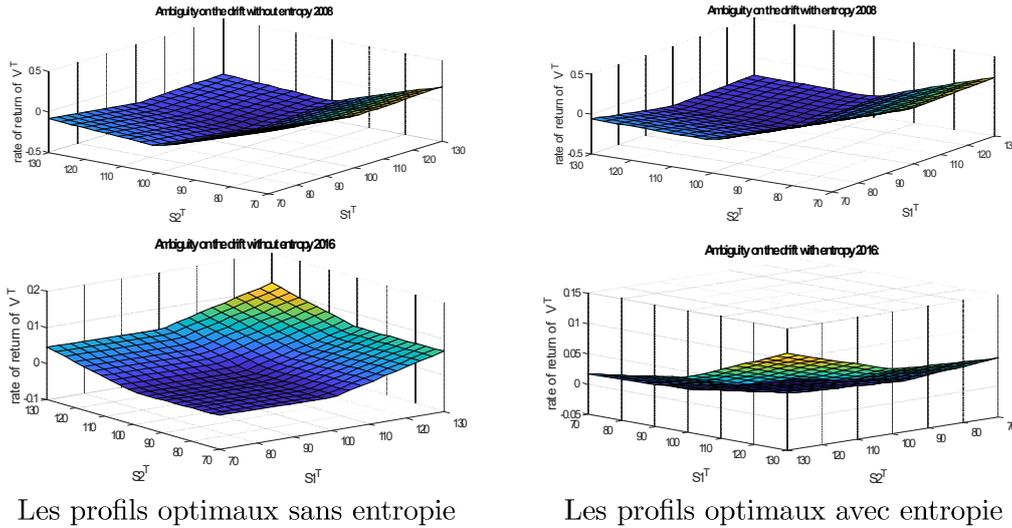


FIG. 1. Les fonctions de paiement des portefeuilles optimaux pour le cas buy-and-hold - Ambiguïté au niveau des tendances

considérons les valeurs suivantes pour les limites des tendances et des volatilités :

$$\begin{aligned} \mu_{1 \text{ inf}} &= \mu_{2 \text{ inf}} = -50\%; \mu_{1 \text{ sup}} \mu_{2 \text{ sup}} = 20\%; \\ \sigma_{1 \text{ inf}} &= \sigma_{2 \text{ inf}} = 10\%; \sigma_{1 \text{ sup}} = \sigma_{2 \text{ sup}} = 40\%. \end{aligned}$$

TAB. 3. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités (2008)

ϕ	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
			$\xi = 0$					$\xi = 100$		
2	-0.10	4.94	6.83	4.25	6.74	1.10	4.25	5.74	4.16	5.75
5	234	4.76	5.88	1.73	2.84	505	3.27	3.90	0.94	1.57
10	686	1.55	2.99	0.37	9.63	757	1.07	1.44	1.01	1.20

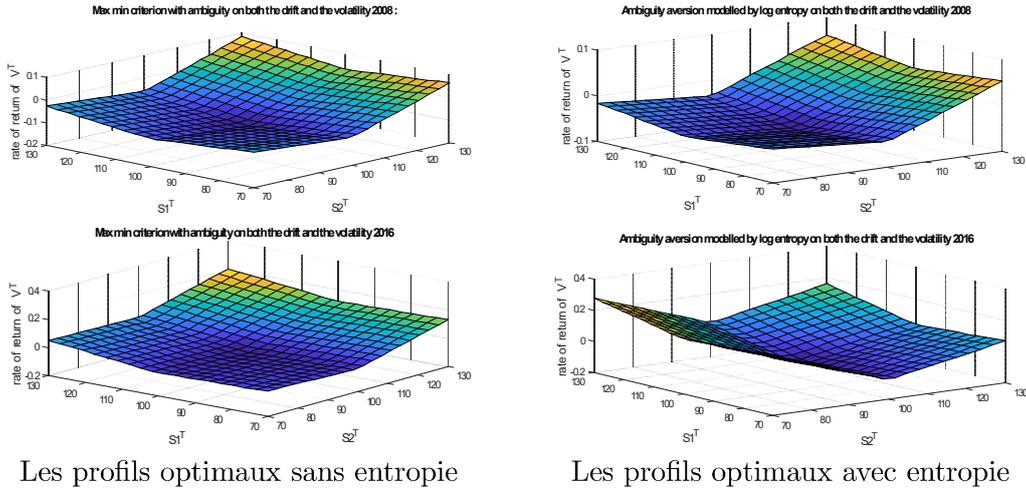
TAB. 4. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités (2016)

ϕ	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
			$\xi = 0$					$\xi = 100$		
2	0.10	4.93	5.39	4.73	5.27	1.69	6.67	10.25	2.35	8.79
5	89.24	5.67	6.19	2.90	3.41	1.24	4.78	13.52	4.12	5.20
10	146	5.19	3.73	4.04	4.47	449	8.21	10.05	-3.63	8.14

Pour le cas sans entropie, comparé aux résultats des tableaux 1 et 2, les différences ne sont significatives que pour une aversion relativement faible ($\phi = 2$). La raison est que, pour le cas précédent où l'ambiguïté porte uniquement au niveau des tendances, nous avons fixé $\sigma_1 = \sigma_1^0 = 33.29\%$, tandis que, en ajoutant une ambiguïté au niveau des volatilités, nous considérons que $\sigma_{1 \text{ inf}} = 10\%$ et $\sigma_{1 \text{ sup}} = 40\%$, ce qui implique une volatilité empirique $\sigma_1^0 = 33.29\%$.

Pour le cas de l'entropie, en regardant le tableau 4, nous notons que, pour la période 2016, les positions sur les actifs risqués sont globalement plus convexes. En effet, les différences $(\gamma_i - \beta_i)$ sont plus importantes quand $\sigma_{1\text{ sup}} = \sigma_{2\text{ sup}} = 40\%$. Cependant, pour le cas sans entropie, nous avons des volatilités beaucoup plus faibles (rappelons que : $\sigma_1 = \sigma_1^0 = 11.79\%$, $\sigma_2 = \sigma_2^0 = 18.99\%$).

Rappelons qu'une forte volatilité potentielle induit à une anticipation d'une variation très significative de l'actif risqué $S_T^{(i)}$. Ceci conduit à déterminer des rendements de portefeuille élevés pour des niveaux de volatilités (des actifs risqués) élevés, soit pour une valeur significativement inférieure à la valeur initiale $S_0^{(i)}$, soit pour une valeur significativement plus élevée. Nous cherchons donc à avoir un profil convexe, d'abord décroissant puis croissant. Une telle caractéristique est illustrée dans la figure 2.



Les profils optimaux sans entropie

Les profils optimaux avec entropie

FIG. 2. Les fonctions de paiement des portefeuilles optimaux pour le cas buy-and-hold - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités

2.1.3. *Ambiguïté au niveau de la corrélation.* Ici, nous considérons que l'ambiguïté ne porte que sur la corrélation entre les rendements des actifs risqués. En outre, toutes les tendances et les volatilités sont fixes et égales à leurs anticipations empiriques respectives (voir la sous-section précédente). Pour définir l'entropie et la probabilité de référence \mathbb{P}_0 , nous choisissons plusieurs valeurs pour le couple $(\rho_1(\mathbb{P}_0), \rho_2(\mathbb{P}_0))$ de sorte que la corrélation $\rho(\mathbb{P}_0)$ varie dans l'ensemble $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$. Pour le cas de l'entropie, nous supposons que ρ_1 et ρ_2 varient dans l'ensemble $[-1, 1]$. Nous fixons $\phi = 5$; $K^{(1)} = K^{(2)} = 100$ avec $r = 2\%$.

TAB. 5. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau de la corrélation (2008)

$\rho(\mathbb{P}_0)$	$\rho_1(\mathbb{P}_0)$	$\rho_2(\mathbb{P}_0)$	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
				$\xi = 0$					$\xi = 100$			
-1	1	-1	499	2.67	2.53	1.66	2.53	595	2.38	2.01	1.00	3.02
-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	665	0.83	2.28	1.79	3.18	707	0.57	3.38	1.33	4.38
0	1	0	714	1.89	8.48	-0.49	3.18	792	1.19	12.00	-0.87	2.18
0.5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	992	-0.28	2.36	-0.09	1.29	1015	-0.30	1.28	-0.13	0.95
1	1	1	1016	-0.48	2.19	-0.22	2.03	1200	-1.18	-0.52	-0.93	1.30

TAB. 6. Les pondérations optimales - Ambiguïté au niveau de la corrélation (2016)

$\rho(\mathbb{P}_0)$	$\rho_1(\mathbb{P}_0)$	$\rho_2(\mathbb{P}_0)$	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2	α	β_1	γ_1	β_2	γ_2
				$\xi = 0$					$\xi = 100$			
-1	1	-1	312	5.22	8.12	1.09	4.12	252	4.98	7.02	1.58	6.02
-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	514	2.30	3.16	2.07	5.71	494	1.78	2.34	2.62	7.10
0	1	0	681	2.89	49.39	-1.83	4.38	627	2.42	44.01	-2.14	5.74
0.5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	902	1.27	1.02	-0.40	1.16	953	0.48	0.33	-0.05	0.33
1	1	1	995	-0.01	1.29	-0.16	2.69	1055	-0.27	-0.22	-0.27	-0.21

Les tableaux 5 et 6 montrent les poids optimaux pour plusieurs probabilités de référence \mathbb{P}_0 . Nous notons en particulier que, lorsque $\rho(\mathbb{P}_0) = -1$, toutes les pondérations sont positives alors que, pour $\rho(\mathbb{P}_0) = +1$, que les pondérations des actifs risqués sont négatives. Ceci illustre l'effet de la diversification.

2.2. Le profil du portefeuille optimal. Dans cette partie, nous examinons le problème d'optimisation général. Nous supposons qu'il existe des actifs financiers de base : une obligation B à un taux sans risque r et un système de cours boursiers $S_T = (S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(d)})$ (un panier d'indices boursiers par exemple). Nous cherchons à déterminer le profil du portefeuille optimal général en fonction du benchmark risqué $S_T = (S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(d)})$. Nous supposons que l'investisseur cherche à déterminer le profil du portefeuille optimal h , qui est une fonction définie sur toutes les valeurs possibles des actifs S_T à l'échéance T . Si le marché est complet, l'investisseur peut obtenir ce profil. Le marché peut être complet si, par exemple, le marché financier évolue en temps continu et toute option peut être dupliquée dynamiquement par une stratégie de couverture parfaite. Le marché peut encore être complet si, par exemple, dans le cadre d'une seule période, toute option européenne de tout prix d'exercice est disponible sur le marché financier (comme le montre ce qui suit lorsqu'il s'agit d'une couverture statique). Dans ce contexte, l'incapacité de négocier en temps continu induit potentiellement à des investissements sur l'actif sans risque B , sur les actifs S et toutes les options européennes dont les actifs sous-jacents sont S . Le marché peut également être incomplet. Dans ce cas, la solution donnée dans cette section n'est que théorique mais reste intéressante à connaître, puisque le profil optimal peut être approximé en investissant sur des actifs négociés (dans la pratique, l'investisseur définit une méthode d'approximation, qui peut tenir compte des coûts de transaction ou des problèmes de liquidité). Selon la condition standard de non-arbitrage, les prix des actifs sont calculés selon des probabilités neutres au risque. S'il existe des marchés pour toute option de vente et toute option d'achat européenne en dehors de la monnaie pour tout prix d'exercice, cela implique qu'il existe une probabilité neutre au risque unique qui peut être identifiée à partir des prix des options (voir Breeden et Litzenberger, 1978). Dans le cas contraire, s'il n'y a pas de négociation continue, le marché est généralement incomplet. Dans ce cas, une probabilité neutre au risque \mathbb{Q} est utilisée pour évaluer les options. Il est également possible que les prix des actions changent continuellement et que le marché reste dynamiquement incomplet. Encore une fois, nous supposons qu'une probabilité neutre au risque est choisie. Supposons que les prix sont déterminés selon une telle mesure \mathbb{Q} . Désignons par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la dérivée Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} . Désignons par M_T le produit $e^{-rT} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. En raison de la condition de non-arbitrage, la contrainte budgétaire correspond à la relation suivante :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(B_T, S_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(B_T, S_T)M_T]. \quad (2.1)$$

2.2.1. Optimisation de portefeuille. Dans ce qui suit, la fonction d'utilité de l'investisseur U est supposée croissante et deux fois différentiable. Pour un positionnement optimal, la valeur du portefeuille V est déterminée en fonction des actifs de base : $V = h(B_T, S_T)$. Par conséquent, l'investisseur

doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max}_h \text{ Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}]), \\ \text{s.c. } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(B_T, S_T)M_T]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Supposons que S_T possède une fonction de densité de probabilité notée par f_{S_T} . Alors, l'espérance $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))]$ est égale à :

$$\int U[h(s)] f_{S_T} ds. \quad (2.3)$$

Pour simplifier la présentation des principaux résultats, nous supposons, comme d'habitude, que la fonction h remplit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} h^2(s) f_{S_T}(s) ds < \infty, \text{ pour tout } f_{S_T} \in \tilde{F},$$

où \tilde{F} désigne l'ensemble des fonctions de densité de probabilité correspondantes à l'ensemble des distributions de probabilités Δ .

Ceci signifie que $h \in \mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds), \mathbb{P}_{S_T} \in \Delta)$, qui est l'ensemble des fonctions mesurables avec des carrés intégrables sur \mathbb{R}^d par rapport à toutes les distributions $\mathbb{P}_{S_T}(ds)$ appartenant à l'ensemble Δ . Sous une hypothèse concernant les profils et l'ensemble Δ des multipriors, nous pouvons déduire un premier résultat général.

Hypothèse 1 : La fonction d'utilité U est strictement concave et continue ;

Hypothèse 2 : Pour tout $h \in \mathcal{H}$, la fonctionnelle $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}]$ est continue et quasi-convexe sur Δ ;

Hypothèse 3 : Nous cherchons la solution dans le sous-ensemble des fonctions continues appartenant à \mathcal{H} ;

Hypothèse 4 : L'ensemble Δ de multipriors est compact.

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses (1,2,3,4), le profil optimal h^* existe et correspond à la solution optimale pour une probabilité donnée $\mathbb{P}_{S_T}^* \in \Delta$.*

PREUVE. Sous les hypothèses (1,2,3), la fonctionnelle $(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}])$ est une fonction continue par rapport à $\mathbb{P} \in \Delta$. Par conséquent, puisque Δ est compact (voir hypothèse 4), nous déduisons que pour n'importe quel profil donné h , la solution de $\text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}])$ est atteinte avec la probabilité $\mathbb{P}(h) \in \Delta$. Finalement, en utilisant le théorème minimax², le résultat est prouvé. \square

COROLLAIRE 1. *Nous indiquons plusieurs conditions suffisantes pour garantir la quasiconvexité de la fonction $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}]$ par rapport à $\mathbb{P} \in \Delta$:*

- *Tout d'abord, la fonctionnelle $C[\mathbb{P}]$ elle-même est censée être continue et quasiconvexe dans Δ .*

- *Deuxièmement, nous notons que la fonction $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))]$ est convexe par rapport à \mathbb{P} (par linéarité). Par conséquent, la quasiconvexité de $C[\cdot]$ implique la quasiconvexité de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(B_T, S_T))] + C[\mathbb{P}]$ (voir Debreu et Koopmans, 1982 ; Crouzeix et Lindberg, 1986). Dans la section 3, cette propriété est satisfaite pour l'exemple fondamental.*

Maintenant, nous déterminons les conditions de premier ordre. Pour ce propos, nous introduisons une nouvelle fonctionnelle Γ_{U_f} associée à la fonction d'utilité U . Elle est définie dans l'espace \mathcal{H} par :

$$\text{Pour tout } Y \in \mathcal{H}, \Gamma_{U,C}(Y) = \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(Y)] + C[\mathbb{P}]).$$

²**Théorème Minimax (Sion, 1958) : (point-selle)** Soient C et K deux ensembles convexes fermés dans deux espaces vectoriels topologiques X et Y respectivement. Soit $F(x, y) : C \times K \rightarrow R$ une fonction quasiconcave en x et quasiconvexe en y . Si la fonction F est semi-continue supérieure (ou inférieure) en x et semi-continue inférieure en y , et K est compact, alors la fonction $F(x, y)$ possède une valeur de Selle en $C \times K$ et :

$$\sup_{x \in C} \inf_{y \in K} F(x, y) = \inf_{y \in D} \sup_{x \in K} F(x, y).$$

La fonctionnelle $\Gamma_{U,C}$ est généralement appelée la fonction de Nemitski associée à la fonction d'utilité U lorsque U est concave et $C = 0$ (voir Ekeland et Turnbull (1983) pour la définition et les propriétés de base). Désignons également par g la densité de M_T par rapport à \mathbb{P}^3 . Supposons que la fonction g est définie sur l'ensemble des valeurs de S_T et $g \in \mathcal{H}$. Ensuite, le problème d'optimisation est réduit à :

$$\text{Max}_{h \in \mathcal{H}} \text{Min}_{f_{S_T} \in \tilde{F}} \left(\int_{\mathbb{R}^{+d}} (U[h(s)]) \cdot f_{S_T}(s) ds + C[f_{S_T}] \right), \quad (2.4)$$

$$\text{sous } V_0 = \int_{\mathbb{R}^{+d}} h(s)g(s)f_{S_T}(s)ds. \quad (2.5)$$

Introduisons la fonctionnelle $\widehat{\Gamma}_{U,C}$ définie sur l'ensemble \mathcal{H} par :

$$\widehat{\Gamma}_{U,C}(h) = \text{Min}_{f_{S_T} \in \tilde{F}} \left(\int_{\mathbb{R}^{+d}} (U[h(s)]) \cdot f_{S_T}(s) ds + C[f_{S_T}] \right). \quad (2.6)$$

Soit Λ une fonctionnelle linéaire, définie par :

$$\Lambda(h) = \int_{\mathbb{R}^{+d}} h(s)g(s)f_{S_T}(s)ds. \quad (2.7)$$

PROPOSITION 3. *Supposons que la fonctionnelle $\widehat{\Gamma}_{U,f,h_0}(\cdot)$ est différentiable. Ensuite, sous la condition (3.5), chaque maximum relatif h^* de $\widehat{\Gamma}_{U,f,h_0}$ satisfait la condition de premier ordre suivante : il existe un scalaire λ tel que :*

$$\frac{\partial \widehat{\Gamma}_{U,C}(h)}{\partial h} = \lambda \Lambda. \quad (2.8)$$

PREUVE. Ce résultat est un exemple particulier des résultats généraux concernant l'optimisation sous contraintes, lorsque la fonction à optimiser et la fonction qui caractérise la contrainte sont différentiables. De plus, nous prenons en considération le fait que la dérivée de la fonction linéaire continue L est égale à elle-même. Le résultat est donc prouvé. \square

PROPOSITION 4. *Sous la condition (3.5), le profil du portefeuille optimal h^* est déterminé à partir de la condition de premier ordre : il existe un scalaire λ tel que :*

$$\frac{\partial \widehat{\Gamma}_{U,C}(h)}{\partial h} = \lambda g(\cdot). \quad (2.9)$$

De plus, si la fonction $\Theta_{U,C}(z) = \frac{\partial \widehat{\Gamma}_{U,C}(\cdot)}{\partial h}$ est inversible pour tout s , le profil du portefeuille optimal h^* est donné par :

$$h^* = \Theta_{U,C}^{-1}(\lambda g), \quad (2.10)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange tel que :

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^{+d}} \Theta_{U,C}^{-1}(\lambda g(s))g(s)f_{S_T}(s)ds.$$

2.2.2. *Les propriétés du portefeuille optimal.* Dans ce qui suit, nous détaillons quelques principales propriétés du profil du portefeuille optimal h^* en fonction des actifs de référence $S_T^{(i)}$.

COROLLAIRE 2. *Si la fonctionnelle $\Theta_{U,C}$ diminue, h^* est une fonction croissante en fonction des actifs de référence $S_T^{(i)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ si, et seulement si, la densité g est une fonction décroissante de $S_T^{(i)}$. Si la fonction $\Theta_{U,C}$ augmente, l'inverse est vrai.*

³La fonction g est une densité de Radon-Nikodym $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$.

PROPOSITION 5. *Supposons que la fonctionnelle $\Theta_{U,C}$ a une valeur inverse $\Theta_{U,C}^{-1}$. Le profil optimal h^* doit satisfaire :*

$$\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\Theta_{U,C}(h(s))}{\Theta'_{U,C}(h(s))} \right) \times \left(-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} \frac{1}{g(s)} \right). \quad (2.11)$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la relation $\lambda = \Theta_{U,C}/g$, les calculs différentiels standards conduisent à :

$$\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\Theta_{U,C}(h^*(s))}{\Theta'_{U,C}(h^*(s))} \right) \times \left(-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} \frac{1}{g(s)} \right). \quad (2.12)$$

□

Introduisons la fonction $T_o(h^*(s))$ définie par :

$$T_o(h^*(s)) = -\frac{\Theta_{U,C}(h^*(s))}{\Theta'_{U,C}(h^*(s))}. \quad (2.13)$$

Notons que, si la fonction U est concave (cas standard), la fonction $T_o(h^*(s))$ est appelée la tolérance au risque et correspond à l'inverse de l'aversion absolue au risque. Comme nous pouvons le voir, $\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}}$ dépend de $T_o(h^*(s))$. La conception du profil optimal peut également être spécifiée.

Dénotons par :

$$Y_i(s) = \left(-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} \frac{1}{g(s)} \right). \quad (2.14)$$

En différenciant deux fois par rapport à $s^{(i)}$, nous obtenons :

COROLLAIRE 3. *La dérivée de deuxième ordre du profil h^* est donnée par :*

$$\frac{\partial^2 h^*(s)}{\partial s^{(i)2}} = [T'_o(h^*(s)) + \frac{\partial Y_i(s)}{\partial s^{(i)}} \frac{1}{Y_i(s)^2}] \times [T_o(h^*(s)) Y_i^2(s)]. \quad (2.15)$$

A partir de la relation ci-dessus, nous pouvons déduire les conditions de concavité/converité.

REMARQUE 1. *(Couverture du portefeuille optimal) Deux types de stratégies de couverture peuvent être envisagées :*

- *La première est statique, telle qu'introduite par Carr et Madan (2001). En effet, pour le cas unidimensionnel, Carr et Madan (2001) ont prouvé que l'existence des options de vente et des options d'achat européennes en dehors de la monnaie pour tous les prix d'exercice permet de déterminer le positionnement optimal sur un marché complet. Cette hypothèse est justifiée lorsqu'il y a un grand nombre de prix d'exercice et d'options (par exemple l'indice S&P 500). Ces auteurs ont prouvé qu'il est possible d'identifier explicitement la stratégie d'investissement qui doit être poursuivie afin d'obtenir un gain h deux fois différentiable. Le résultat précédent peut être étendu au cas multidimensionnel. Examinons le cas avec deux actifs risqués. Tout profil de portefeuille régulier peut être reproduit en investissant sur l'obligation, sur les deux actifs risqués et sur des options telles que les options de vente et les options d'achat standard qui sont écrites séparément sur les actifs risqués et aussi sur des options définies comme des produits, tel que : $(S^{(1)} - K)^+ (S^{(2)} - v^{(2)})^+$, $(K - S^{(1)})^+ (S^{(2)} - v^{(2)})^+$, $(S^{(1)} - K)^+ (v^{(2)} - S^{(2)})^+$, $(K - S^{(1)})^+ (v^{(2)} - S^{(2)})^+$. Nous pouvons aussi nous appuyer sur des travaux antérieurs de la couverture statique, comme Pellizzari (2005) qui traite la couverture statique des dérivés multivariées à l'aide des méthodes de simulation, comme celles de Tebaldi (2015) et Chen et al. (2008) qui examinent la super-réplication statique pour une classe d'options exotiques et celle de De Giovanni et al. (2008) qui compare les stratégies de couverture Delta.*

- *La seconde stratégie de couverture correspond à la couverture dynamique standard dans un cadre de temps continu. En effet, par exemple dans le cas du mouvement géométrique brownien, le profil du portefeuille optimal, déterminé dans le cadre statique, correspond au rendement du portefeuille dynamique optimal à l'échéance puisque les deux sont purement définis en fonction des valeurs des*

actifs risqués S_T à l'échéance T . En utilisant le calcul d'Ito standard, nous déterminons en particulier le Delta.

3. Exemple fondamental

Dans ce qui suit, les résultats théoriques antérieurs sont illustrés pour une utilité espérée standard et une utilité avec une aversion à l'ambiguïté. Nous supposons que les prix des options sont déterminés dans le cadre de Black-Scholes⁴

3.1. Le marché financier.

REMARQUE 2. Dans ce qui suit, nous considérons d actifs financiers S_i conduits par un mouvement brownien multidimensionnel :

$$dS_{i,t} = S_{i,t}(\mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t}), \quad (3.1)$$

où $W_t = (W_{i,t})_{1 \leq i \leq d}$ est un mouvement brownien à d -dimensions avec une matrice de variance Σ et une

matrice de corrélation Σ_c données par $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_d \end{bmatrix}$, $\Sigma_c = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,d} \\ \rho_{1,2} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \rho_{d-1,d} \\ \rho_{1,d} & \dots & \rho_{d-1,d} & 1 \end{bmatrix}$.

REMARQUE 3. La matrice variance-covariance Σ_S des prix des actifs S est donnée par : $\Sigma_S = (\sigma_{S_i, S_j})_{1 \leq i, j \leq d}$ avec

$$\sigma_{S_i, S_j} = S_{i,0} S_{j,0} \exp[(\mu_i + \mu_j)t] (\exp[(\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j})t] - 1)$$

REMARQUE 4. (Mouvement Brownien comme une fonction des prix des actifs risqués) Puisque les prix des actifs risqués sont définis à partir de ces relations $dS_{i,t} = S_{i,t}(\mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t})$, nous déduisons que :

$$S_{i,t} = S_{i,0} \exp((\mu_i - 1/2\sigma_i^2)t + \sigma_i W_{i,t}).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$W_{i,t} = \text{Log}[S_{i,t}/S_{i,0}] - (\frac{\mu_i}{\sigma_i} - 1/2\sigma_i)t.$$

NOTATION 1. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes (voir Jacod et Shiryaev, 2002). Le processus $\mathcal{E}(X)$ désigne l'exponentielle stochastique Dade-Doléans et est défini à partir de l'équation différentielle stochastique (SDE) :

$$d\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)dX.$$

3.2. La probabilité neutre au risque. Supposons que Σ_c et Σ sont des matrices inversibles, le marché financier est sans arbitrage et complet. La probabilité neutre au risque \mathbb{Q} existe et est unique. Elle est définie à partir de sa densité Radon-Nikodym η par rapport à la probabilité objective \mathbb{P} , définie par $\eta_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$. Dénotons :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_d \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_d \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 6. En utilisant le théorème de représentation de la martingale pour la filtration brownienne, cette densité est associée à d primes de risque du marché $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ et donnée par :

$$\eta_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathcal{E} \left[- \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right] =$$

⁴Nous examinons ce cas parce qu'il s'agit du cas le plus courant dans la pratique. D'autres cas peuvent également être envisagés si le rendement logarithmique de l'actif risqué n'est plus gaussien.

$$\exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t - \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right],$$

avec

$$\Lambda = \Sigma_c^{-1} \cdot \Sigma^{-1} \cdot [M - r\mathbb{1}]. \quad (3.2)$$

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes (voir Jacod et Shiryaev, 2002). Pour les deux semi-martingales X et Y , $[X, Y]$ désigne la variation quadratique des processus X et Y . Le processus $\langle X, Y \rangle$ désigne le compensateur prévisible de ces processus. Rappelons-nous que nous avons :

$$[X, Y]_t = \langle X, Y \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s,$$

où ΔX_t et ΔY_t désignent les sauts des processus et le processus $\langle X, Y \rangle$ est défini à partir de la condition suivante : Les parties martingales respectives M^X et M^Y de X et Y existent, tel que : $(M_t^X M_t^Y - \langle X, Y \rangle_t)_t$ est une martingale (locale). Nous avons aussi : (intégration par formule partielle)

$$d(XY) = XdY + YdX + d[X, Y].$$

Le processus $\mathcal{E}(X)$ désigne l'exponentielle stochastique de Dade-Doléans, définie à partir de l'équation stochastique différentielle (SDE) :

$$d\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)dX.$$

Notons que pour les semi-martingales continues X , nous avons $[X, Y]_t = \langle X, X \rangle_t$. Alors, nous obtenons :

$$\mathcal{E}(X_t) = \mathcal{E}(X_0) \exp \left[X_t - \frac{1}{2} \langle X, X \rangle_t \right].$$

Le résultat est établi en utilisant le théorème de Girsanov. Nous faisons le parallèle avec l'approche de Buhlmann et al. (1996). Chacun des d actifs de base $S_{i,t}$ doit satisfaire la condition suivante : lorsque les actifs sont actualisés par le compte nominal du marché monétaire C , ils doivent être des martingales par rapport à la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} . Cela équivaut au fait que, lorsqu'ils sont multipliés par la densité de Radon-Nikodym η et divisés par C , ils doivent être des martingales par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} . Notons que nous avons :

$$S_{i,t} \eta_t / C_t = \mathcal{E}[(\mu_i - r)t + \sigma_i W_{i,t}] \mathcal{E} \left[- \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right],$$

qui est aussi égale à (formule de Yor) :

$$\mathcal{E} \left[(\mu_i - r)t + \sigma_i W_{i,t} - \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} - \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right].$$

Notons aussi que nous avons :

$$\left\langle \sigma_i W_{i,t}, \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right\rangle = \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) t.$$

Le fait que les processus $(S_{i,t} \eta_t / C_t)$ sont des martingales par rapport à \mathbb{P} , il est équivalent à la propriété suivante : Leurs composantes de variation bornées sont égales à 0. Ces d dernières conditions impliquent les égalités suivantes : pour tout $i = 1, \dots, d$:

$$(\mu_i - r) - \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) = 0,$$

Ces égalités conduisent à l'équation (3.2). □

Le processus η peut être écrit comme suit :

$$\eta_t = \mathcal{E} [-sW_t] \text{ avec } W_t = \frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t}}{s} \text{ et } s = \sqrt{\sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j \rho_{ij}}.$$

Notons que le processus W est un mouvement Brownien standard. Notons par :

$$\varphi(t) = \exp \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right]. \quad (3.3)$$

COROLLAIRE 4. *(La densité de Radon-Nikodym comme une fonction des prix des actifs risqués)*
La densité de Radon-Nikodym η_t est égale au produit de la fonction déterministe du temps $\varphi(t)$

et de $\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i})}$. De plus, si les corrélations $\rho_{i,j}$ sont nulles, alors nous obtenons une généralisation simple du cas unidimensionnel, à savoir que la fonction des actifs risqués est égale à $\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\mu_i - r}{\sigma_i})}$.

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned} \eta_t &= \mathcal{E} \left[- \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t - \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right] \exp \left[- \sum_{i=1}^d \left(\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \sigma_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right] \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i})}. \end{aligned}$$

□

3.3. Le portefeuille optimal. Dans ce qui suit, nous déterminons d'abord le profil du portefeuille optimal dans le cas de l'utilité espérée standard. Ensuite, nous avons étudié le cas correspondant à l'ambiguïté.

3.3.1. *Utilité espérée standard.* Soit U une fonction d'utilité strictement concave et différentiable. Introduisons l'inverse de l'utilité marginale J , exprimé par :

$$J(y) = U'^{-1}(y).$$

En utilisant le résultat de base de Cox et Huang (1989), nous déduisons que la valeur du portefeuille optimal est égale à :

$$V_T^* = J(a.\eta_T), \quad (3.4)$$

où a est une constante déduite de la contrainte budgétaire :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [V_T^*] = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [J(a.\eta_T)].$$

Dans ce qui suit, nous considérons le cas d'une fonction d'utilité du type HARA, à savoir $U(v) = (v - pV_0)^{(1-\phi)} / (1 - \phi)$ avec $\phi \neq 1$ et p est la proportion garantie de l'investissement initial V_0 . Cela implique que l'inverse de l'utilité marginale J est donné par :

$$J(y) = U'^{-1}(y) = pV_0 + y^{-1/\phi}.$$

Nous en déduisons que la valeur optimale du portefeuille pour le cas HARA est égale à :

$$V_T^* = J(a.\eta_T) = pV_0 + c\eta_T^{-1/\phi}, \quad (3.5)$$

où c est une constante déduite à partir de la contrainte budgétaire :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [V_T^*] = pV_0 + ce^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\eta_T^{-1/\phi}].$$

Alors, en utilisant le corollaire (4), nous déduisons que le profil du portefeuille optimal, telle que la valeur du portefeuille optimal est une fonction des valeurs des actifs risqués à l'échéance.

PROPOSITION 7. (*Le profil du portefeuille optimal*)

La valeur du portefeuille V_T^* est une fonction des actifs de base S_i donnés par :

$$pV_0 + \quad (3.6)$$

$$c \exp \left[-\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) T \right] \prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)}. \quad (3.7)$$

Dans ce qui suit, nous montrons que le portefeuille optimal peut être considéré comme un fonds d'assurance de portefeuille à proportion constante (CPPI) défini sur des actifs multiples. Pour cette fin, nous introduisons la notation suivante : $m_i^* = \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)$.

PROPOSITION 8. (*Le portefeuille optimal vu comme un fond CPPI avec plusieurs actifs*)

La valeur du portefeuille optimal satisfait : $V_t^* = P_t + C_t$, avec :

$$P_t = e^{-r(T-t)} pV_0 \quad (\text{Le plancher}),$$

$$C_t = \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \quad (\text{le coussin}),$$

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, nous prouvons que, pour cet exemple fondamental, la valeur du portefeuille optimal satisfait :

$$\begin{aligned} V_t^* &= P_t + C_t, \\ &\text{avec} \\ P_t &= e^{-r(T-t)} p V_0 \text{ (le plancher),} \\ C_t &= \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \text{ (le coussin),} \end{aligned}$$

- En plus, comme nous l'avons déjà vu dans (3.6), la valeur du portefeuille optimal V_T^* à l'échéance T est donnée par :

$$\begin{aligned} V_T^* &= pV_0 + \tilde{\psi}(T) \prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \\ &\text{avec} \\ \tilde{\psi}(t) &= c \exp \left[1/2 \frac{1}{\phi} \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right] \prod_{i=1}^d \exp \left(-\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) t \right) \end{aligned}$$

- A partir de la propriété de la martingale, la valeur du portefeuille V_t à n'importe quel moment t satisfait :

$$V_t^* = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [V_T^* | \mathcal{F}_t].$$

Alors, nous avons :

$$V_t^* = e^{-r(T-t)} pV_0 + \tilde{\psi}(T) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} | \mathcal{F}_t \right].$$

Ceci signifie que la valeur du portefeuille V_t^* est une fonction des actifs de base $S_{i,t}$ à l'instant t , donnée par :

$$\begin{aligned} V_t^* &= e^{-r(T-t)} pV_0 + \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \\ &\text{avec} \\ \psi(t) &= \tilde{\psi}(t) \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

A partir de ces expressions, nous déduisons le résultat.

- Nous examinons maintenant les termes de $\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} | \mathcal{F}_t \right]$:

Nous avons :

$$\begin{aligned} (S_{i,T}/S_{i,t})^{m_i^*} &= \exp \left[m_i^* ((\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + \sigma_i (W_{i,T} - W_{i,t})) \right] \\ &= \exp \left[m_i^* (\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + 1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) \right] \\ &\quad \times \exp \left[-1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) + m_i^* \sigma_i (W_{i,T} - W_{i,t}) \right]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{m_i^*} | \mathcal{F}_t \right] = \exp \left[\sum_{i=1}^d m_i^* (\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + 1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) \right].$$

□

PROPOSITION 9. (*La couverture Delta*)

Les participations au portefeuille optimal sont données par :

$$e_{i,t}^* = m_i^* [V_t^* - P_t] = m_i^* C_t.$$

Les stratégies de couverture Delta sont données par :

$$\Delta_{i,t}^* = \frac{e_{i,t}^*}{S_{i,t}} = \frac{m_i^* C_t}{S_{i,t}} = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \frac{\psi(t)}{S_{i,t}} (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \prod_{j=1, j \neq i}^d (S_{j,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_j}{\sigma_j}\right)}.$$

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, nous prouvons que les stratégies de couverture Delta sont données par :

$$\Delta_{i,t}^* = \frac{e_{i,t}^*}{S_{i,t}} = \frac{m_i^* C_t}{S_{i,t}} = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \frac{\psi(t)}{S_{i,t}} (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \prod_{j=1, j \neq i}^d (S_{j,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_j}{\sigma_j}\right)}.$$

Afin de déterminer les participations optimales au portefeuille optimal, nous déterminons d'abord la SDE satisfaite par la valeur optimale du portefeuille. Nous avons :

$$dV_t^* = dP_t + \psi(t) d \left(\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \right) + \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \psi'(t) dt.$$

Nous identifions les facteurs qui multiplient les termes $dS_{i,t}/S_{i,t}$. A cette fin, nous notons que :

$$d \left(\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right) = \sum_{i=1}^d \left(m_i^* \left[\prod_{j=1, j \neq i}^d S_{j,t}^{m_j^*} \right] S_{i,t}^{m_i^* - 1} dS_{i,t} \right) + \vartheta_t,$$

où ϑ est un processus de variation borné. Nous avons aussi :

$$d \left(\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right) = \sum_{i=1}^d \left(m_i^* \left[\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right] \frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} \right) + \vartheta_t.$$

Puisque la valeur du portefeuille satisfait la relation suivante :

$$V_t^* - P_t = \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*},$$

nous en déduisons que :

$$dV_t^* = \sum_{i=1}^d m_i^* [V_t^* - P_t] \frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} + \varkappa_t,$$

où \varkappa est un processus de variation borné. Enfin, en identifiant les facteurs de $\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}}$, nous obtenons :

$$e_{i,t}^* = m_i^* [V_t^* - P_t].$$

Les stratégies de couverture Delta sont immédiatement déduites de l'égalité $\Delta_{i,t}^* = \frac{e_{i,t}^*}{S_{i,t}}$. \square

COROLLAIRE 5. *Pour le cas MBG, le portefeuille optimal correspond à un CPPI multidimensionnel où les montants investis respectivement sur les actifs de base sont proportionnels au même coussin avec des multiples constants respectifs :*

$$m_i^* = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right). \quad (3.8)$$

Nous notons que, si les corrélations $\rho_{i,j}$ sont nulles, nous obtenons une généralisation du cas unidimensionnel, telle que chaque exposition sur un actif individuel S_i est proportionnelle au même coussin C_t avec un multiple m_i^* qui est égal au ratio de Merton correspondant $\left(\frac{1}{\phi} \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2} \right)$. Cette dernière formule

généralise le multiple unidimensionnel standard de la CPPI pour lequel nous avons $m^* = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\mu-r}{\sigma^2}\right)$. Pour $n = 1$, nous obtenons exactement le même résultat en utilisant la relation $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$.

Le cas CRRA. Supposons que la fonction d'utilité de l'investisseur est une fonction du type CRRA :

$$U(v) = \frac{v^{1-\phi}}{1-\phi}, \text{ avec } \phi \neq 1.$$

A partir de cette expression, nous déduisons : $J(y) = y^{-\frac{1}{\phi}}$. Ainsi, en utilisant le résultat précédent pour le cas HARA avec $p = 0$, nous déduisons :

PROPOSITION 10. *Le profil du portefeuille optimal CRRA est donné par :*

$$V_t^* = \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*}. \quad (3.9)$$

REMARQUE 5. *Notons que h^* est croissant par rapport à toutes les valeurs des actifs risqués $S_{i,t}$, dès que $\lambda_i > 0$, pour tout i . Pour le cas de l'indépendance (tel que $\rho_{i,j} = 0$), cette dernière hypothèse équivaut à $\mu_i > r$, pour tout i .*

COROLLAIRE 6. *La concavité/convexité du profil optimal par rapport à toutes les valeurs des actifs risqués $S_{i,t}$ est déterminée par la comparaison entre m_i^* et 1, qui est équivalente à la comparaison entre l'aversion relative au risque ϕ et le ratio $\frac{\lambda_i}{\sigma_i}$. Notons que, lorsque les actifs risqués sont indépendants, ce dernier ratio est égal au ratio de Sharpe divisé par la volatilité σ_i , tel que le ratio de Merton $\kappa_i = \frac{\mu_i-r}{\sigma_i}$.⁵*

- i) V_t^* est concave par rapport aux valeurs des actifs risqués $S_{i,t}$ si $\frac{\lambda_i}{\sigma_i} < \phi$.
- ii) V_t^* est linéaire par rapport aux valeurs des actifs risqués $S_{i,t}$ si $\frac{\lambda_i}{\sigma_i} = \phi$.
- iii) V_t^* est convexe par rapport aux valeurs des actifs risqués $S_{i,t}$ si $\frac{\lambda_i}{\sigma_i} > \phi$.

Les caractéristiques précédentes sont illustrées par la figure 3.

3.3.2. *Utilité avec ambiguïté.* Supposons que la fonction d'utilité est une fonction de puissance : $U(x) = \frac{x^{1-\phi}}{1-\phi}$ (cas CRRA) avec une aversion au risque relative $\phi > 0$ et $\phi \neq 1$.

Nous supposons que les d actifs financiers S_i sont conduits par un mouvement Brownien multidimensionnel : (Voir Relation 3.1) :

$$dS_{i,t} = S_{i,t}(\mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t}),$$

Cependant, les paramètres μ_i , σ_i et $\rho_{i,j}$ sont inconnus. Alors, l'ensemble des multiples priors Δ_P correspondent à l'ambiguïté qui porte au niveau des paramètres M , Σ et Σ_c . Nous supposons que l'ensemble Δ_P des scénarios probabilistes $\mathbb{P}_{M,\Sigma,\Sigma_c}$ a une correspondance un-à-un avec un ensemble compact Δ pour (M, Σ, Σ_c) .

Case 1. Le critère Maxmin de l'utilité espérée (Gilboa et Schmeidler, 1989). Considérons le premier cas où $C = 0$. Ce cas correspond au critère maxmin de l'utilité espérée de Gilboa et Schmeidler (1989). Nous devons résoudre :

$$\text{Max}_{h \in \mathcal{H}} \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta_P} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T))]). \quad (3.10)$$

A partir de la proposition (2), nous en déduisons que la solution optimale pour le cas CRRA est donnée par :

$$h^*(S_T) = J(\lambda \eta_T),$$

avec :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[J(\lambda \eta_T)] \text{ et } \eta_T = \exp\left[-\frac{1}{2} s^2 T - s W_T\right],$$

⁵Voir Prigent (2007).

où :

$$s^2 = \Sigma \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \rho_{ij}.$$

Si la fonction d'utilité est du type CRRA, nous aurons $J(y) = y^{-\frac{1}{\phi}}$. En utilisant la relation (10), la contrainte budgétaire correspond à :

$$V_0 e^{rT} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda^{-\frac{1}{\phi}} \eta_T^{-\frac{1}{\phi}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\lambda^{-\frac{1}{\phi}} \eta_T^{-\frac{1}{\phi}} \eta_T],$$

Ceci implique que $\lambda^{-\frac{1}{\phi}} = V_0 e^{rT} / \mathbb{E}[\eta_T^{\frac{\phi-1}{\phi}}]$. Pour calculer ce dernier terme, nous rappelons que, pour une variable gaussienne donnée $X \rightsquigarrow N(\bar{X}, \sigma_X)$, nous avons : $\mathbb{E}[e^{\alpha X}] = \exp(\alpha \bar{X} + \alpha^2 \frac{\sigma_X^2}{2})$. Par conséquent, nous en déduisons :

$$\mathbb{E}[\eta_T^{\frac{\phi-1}{\phi}}] = e^{(1-\frac{1}{\phi})(-\frac{1}{2}s^2T) + (1-\frac{1}{\phi})^2 \frac{s^2T}{2}} = e^{-\frac{s^2T}{2}(\frac{\phi-1}{\phi^2})}$$

Maintenant, nous calculons l'utilité espérée du portefeuille optimal pour un triplet donné (M, Σ, Σ_c) . Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\phi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[J(\lambda \eta_T)^{1-\phi}] &= \frac{(e^{rT} V_0)^{1-\phi}}{1-\phi} \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\eta_T^{1-\frac{1}{\phi}}]} \right)^{1-\phi} \mathbb{E}[\eta_T^{1-\frac{1}{\phi}}] \\ &= \frac{(e^{rT} V_0)^{1-\phi}}{1-\phi} e^{\frac{s^2T}{2}(1-\frac{1}{\phi})} \end{aligned}$$

Par conséquent, en simplifiant l'expression précédente, nous déduisons le résultat suivant :

PROPOSITION 11. *Pour le cas CRRA et le mouvement Brownien géométrique multidimensionnel, la solution optimale avec une aversion à l'ambiguïté comme elle est décrite par le cadre de Gilboa et Schmeidler (1989), correspond à la solution optimale du critère de l'utilité espérée standard quand le triplet optimal (M, Σ, Σ_c) correspond au problème de minimisation suivant :*

$$\text{Min}_{(M, \Sigma, \Sigma_c)} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^2 + 2 \sum_{1=i < j=d} \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \quad (3.11)$$

avec

$$\Lambda = \Sigma_c^{-1} \cdot \Sigma^{-1} \cdot (M - rII)$$

Pour le cas unidimensionnel, rappelons que nous avons les mêmes résultats.

COROLLAIRE 7. *Pour le cas CRRA et pour le mouvement brownien géométrique unidimensionnel, la solution optimale avec une aversion à l'ambiguïté correspond à la solution optimale pour le critère d'utilité espérée standard lorsque le couple (μ, σ) minimise la valeur absolue du ratio de Sharpe $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$.*

Dans ce qui suit, nous avons détaillé le cas multidimensionnel. Pour ceci, nous avons étudié plusieurs cas particuliers.

Absence d'ambiguïté au niveau des corrélations. Nous considérons que tous les coefficients de corrélation ρ_{ij} sont fixes (c'est-à-dire que Σ_c n'est pas ambiguë). Tout d'abord, nous minimisons les facteurs de saturation λ_i . Si nous cherchons un extremum intérieur, la dérivée de la fonctionnelle $\sum_{i=1}^d \lambda_i^2 + 2 \sum_{1=i < j=d} \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j}$ doit être nulle. Elle conduit à la caractérisation suivante :

$$\text{pour tout } i, \lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \rho_{i,j} = 0. \quad (3.12)$$

Cette dernière condition est équivalente à : $\Sigma_c \cdot \Lambda^* = 0$. Par conséquent, si Σ_c est inversible, il n'existe qu'une seule solution correspondante à $\Lambda^* = 0$. Cela signifie que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ est une condition qui n'est généralement pas satisfaite puisqu'elle est équivalente à $\mu_i = r$, pour tout i . Lorsque Σ_c n'est pas inversible, des solutions intérieures peuvent exister. Cela signifie que certains actifs sont redondants et sont exclus.

REMARQUE 6. La présence de $\rho_{i,j}$ ne permet pas généralement d'avoir un optimum intérieur autre que $\Lambda^* = 0$. Par conséquent, la solution est atteinte sur le bord de l'ensemble compact Δ .

Pour un tel cas, considérons l'exemple suivant : Supposons que l'ambiguïté ne porte que sur les tendances $\mu_i \in [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$ (les matrices Σ_c et Σ sont sensées être fixes). Supposons aussi que $\Sigma_c = Id$ (c'est-à-dire pour tous les $i \neq j$, $\rho_{i,j} = 0$).

COROLLAIRE 8. Sous les hypothèses précédentes, si $\underline{\mu}_i \geq r$, la solution optimale du problème (3.11) correspond à une solution optimale de la maximisation de l'utilité espérée standard pour les valeurs les plus faibles des paramètres $\underline{\mu}_i$. Le profil optimal avec ambiguïté $h_{U,C}^*$ est une fonction de puissance croissante des actifs risqués. Il est donné par :

$$h_{U,C}^*(s) = \psi(t) \prod_{i=1}^d (s_i/S_{i,0})^{m_i^*}$$

$$\text{avec } m_i^* = \frac{\underline{\mu}_i - r}{\sigma_i^2} \frac{1}{\phi}.$$

Seule la matrice de corrélation est ambiguë. Supposons que les matrices M et Σ sont fixes et que la matrice Σ_c est ambiguë. Considérons par exemple le cas $d = 2$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \rho \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \right] \\ \lambda_2 = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right] \end{cases}$$

Notons $a_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}$, le ratio de Sharpe de l'actif i . Par conséquent, le problème $\min_{-1 \leq \rho \leq 1} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\rho]$ est équivalent à :

$$\min_{-1 \leq \rho \leq 1} \left[\frac{a_1^2 + a_2^2 + 2\rho a_1 a_2}{(1 - \rho^2)} \right].$$

Supposons, comme d'habitude, que les deux ratios de Sharpe a_i sont positifs. Dénotons $B_{1,2} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2}$. Alors le minimum ρ^* est égal à $(-B_{1,2} + \sqrt{B_{1,2}^2 - 4})/2$. Notons que, si les deux actifs risqués ont le même ratio de Sharpe, alors $\rho^* = -1$.

Case 2. (Les préférences à multiplicateur de Hansen et Sargent, 2001). Introduisons maintenant la log-entropie multipliée par le paramètre ξ , comme une aversion à l'ambiguïté. Soit \mathbb{P}_0 la distribution de probabilité de référence. Nous devons résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Max}_{h \in \mathcal{H}} \text{Min}_{\mathbb{P} \in \Delta} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T))] + C[\mathbb{P}]),$$

avec

$$C[\mathbb{P}] = \xi \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} \right) \text{Log} \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} \right) \right],$$

Dans ce cadre, nous déterminons explicitement la log-entropie pour une préférence donnée \mathbb{P}_0 . Supposons que les matrices Σ_c et Σ sont inversibles. Dénotons par : $\alpha_T^{(i)} = (\mu^{(i)} - 0.5\sigma^{(i)2}) T$.

LEMME 1. (Log-entropie)

$$\delta_T = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} \right) \text{Log} \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} \right) \right] = \ln \left(\frac{\sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} \sqrt{1 - \rho_0^2}}{\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \sqrt{1 - \rho^2}} \right) - 1 + \frac{1}{2(1 - \rho_0^2)}$$

$$\times \left(\begin{aligned} & \frac{\sigma_0^{(1)2} + \sigma_0^{(2)2}}{\sigma_0^{(1)2} \sigma_0^{(2)2}} + \left(\frac{\alpha_T^{(1)} - \alpha_{0,T}^{(1)}}{\sigma_0^{(1)} \sqrt{T}} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\alpha_T^{(2)} - \alpha_{0,T}^{(2)}}{\sigma_0^{(2)} \sqrt{T}} \right)^2 - 2 \frac{\rho_0}{\sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)} T} \left[\sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \rho T + \left(\alpha_T^{(1)} - \alpha_{0,T}^{(1)} \right) \left(\alpha_T^{(2)} - \alpha_{0,T}^{(2)} \right) \right] \end{aligned} \right)$$

DÉMONSTRATION. La densité Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0}$ est déterminée comme suit :

Dénotons par f_{S_T} la fonction de distribution de probabilités des actifs $S_T = (S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$ par rapport à \mathbb{P} et par g le ratio $f_{S_T}/f_{0,S_T}$.

Dénotons par :

$$\begin{aligned}\alpha_T^{(1)} &= (\mu^{(1)} - 0.5\sigma^{(1)2})T; \quad \alpha_T^{(2)} = (\mu^{(2)} - 0.5\sigma^{(2)2})T, \\ \tilde{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma^{(1)2}T & \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\rho T \\ \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\rho T & \sigma^{(2)2}T \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}f_{S_T}(s^{(1)}, s^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^{(1)}s^{(2)}\sqrt{\det(\tilde{\Sigma})}} \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)}.\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)} \end{pmatrix}\right]\right] \\ f_{0,S_T}(s^{(1)}, s^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^{(1)}s^{(2)}\sqrt{\det(\tilde{\Sigma}_0)}} \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)}.\Sigma_0^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)} \end{pmatrix}\right]\right] \\ g(s^{(1)}, s^{(2)}) &= \frac{\sqrt{\det(\tilde{\Sigma}_0)}}{\sqrt{\det(\tilde{\Sigma})}} \times \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)}.\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)} \end{pmatrix} - \\ \ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)}.\Sigma_0^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)} \end{pmatrix} \end{array}\right]\right].\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\log[g(s^{(1)}, s^{(2)})] &= \ln\left(\frac{\sqrt{\det(\tilde{\Sigma}_0)}}{\sqrt{\det(\tilde{\Sigma})}}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)}.\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_T^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_T^{(2)} \end{pmatrix} - \\ \ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)}, \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)}.\Sigma_0^{-1}\begin{pmatrix} \ln[s^{(1)}] - \alpha_{0,T}^{(1)} \\ \ln[s^{(2)}] - \alpha_{0,T}^{(2)} \end{pmatrix} \end{array}\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons :

$$\begin{aligned}\delta_T &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(s^{(1)}, s^{(2)}) \log[g(s^{(1)}, s^{(2)})] f_{0,S_T}(s^{(1)}, s^{(2)}) ds^{(1)} ds^{(2)} = \\ &\ln\left(\frac{\sigma_0^{(1)}\sigma_0^{(2)}\sqrt{1-\rho_0^2}}{\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \left(\begin{array}{c} \frac{\sigma^{(1)2}}{\sigma_0^{(1)2}} + \frac{\sigma^{(2)2}}{\sigma_0^{(2)2}} + \left(\frac{\alpha_T^{(1)} - \alpha_{0,T}^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}\sqrt{T}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_T^{(2)} - \alpha_{0,T}^{(2)}}{\sigma_0^{(2)}\sqrt{T}} \right)^2 \\ -2 \frac{\rho_0}{\sigma_0^{(1)}\sigma_0^{(2)}T} \left[\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\rho T + \left(\alpha_T^{(1)} - \alpha_{0,T}^{(1)} \right) \left(\alpha_T^{(2)} - \alpha_{0,T}^{(2)} \right) \right] \end{array} \right).$$

□

PROPOSITION 12. *Pour le cas de l'entropie logarithmique, la solution optimale est déterminée en minimisant d'abord (en ce qui concerne les paramètres financiers) la fonction suivante qui implique les deux termes s et δ_T .*

$$\frac{(V_0 e^{rT})^{1-\phi}}{1-\phi} \exp\left(\frac{1}{2}s^2 T \frac{1-\phi}{\phi}\right) + \xi \delta_T. \quad (3.13)$$

Ensuite, une fois que les paramètres financiers optimaux ont été déterminés, nous déterminons la solution optimale CRRA correspondante à ces paramètres.

COROLLAIRE 9. *(Ambiguïté uniquement au niveau des tendances) Pour ce cas particulier, nous pouvons utiliser une preuve alternative. En effet, en utilisant le théorème de représentation de la martingale pour la filtration brownienne, cette densité est associée à d primes de risque du marché, $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ et est donnée par :*

$$\nu_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_\mu}{d\mathbb{P}_{\mu_0}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathcal{E} \left[- \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j W_{j,t} \right],$$

où $\mathcal{E}(\cdot)$ est la densité exponentielle stochastique Dade-Doléans, avec $\tilde{\lambda}_i$ satisfaisant :

$$\Sigma \cdot \Sigma_c \cdot \tilde{\Lambda} = M - M^0, \quad (3.14)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_d \end{pmatrix}, \quad M^0 = \begin{pmatrix} \mu_1^0 \\ \mu_2^0 \\ \dots \\ \mu_d^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \dots \\ \tilde{\lambda}_d \end{pmatrix}.$$

Dénotons $\tilde{s} = \sqrt{\Sigma \tilde{\lambda}_i^2 + 2 \sum_{i < j \leq d} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \rho_{ij}}$, nous obtenons la fonctionnelle qui doit être minimisée :

$$\frac{(V_0 e^{rT})^{1-\phi}}{1-\phi} \exp\left(\frac{1}{2}s^2 T \frac{1-\phi}{\phi}\right) + \frac{1}{2}\xi \tilde{s}^2 T.$$

Les résultats antérieurs sont illustrés numériquement dans la section suivante pour plusieurs cas.

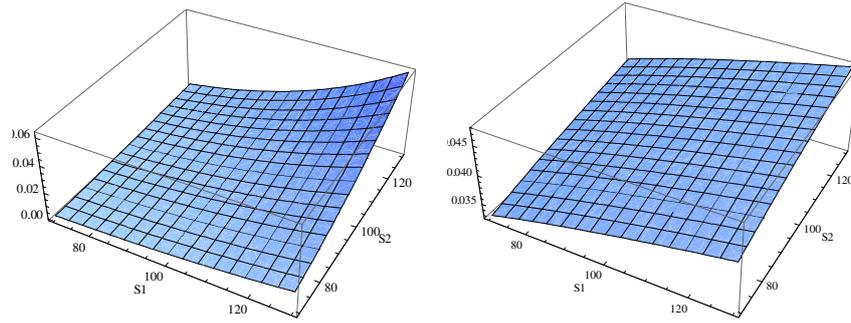
4. Illustration empirique des portefeuilles optimaux

Dans ce qui suit, nous analysons la stratégie de portefeuille optimal pour deux actifs risqués. Nous fournissons en particulier les poids optimaux m_1^* et m_2^* tels que définis dans la relation 4.7. En ce qui concerne l'exemple introductif, nous considérons l'indice *S&P 500* comme le premier actif risqué et l'indice *Eurostoxx 50* comme le deuxième actif risqué. Les options de vente sont évaluées dans le cadre du modèle Black-Scholes. Nous fixons $r = 2\%$. Nous utilisons les valeurs des paramètres du marché pour les périodes d'investissement qui correspondent respectivement à 2008 et 2016 (du début janvier jusqu'à la fin de décembre) avec des rendements hebdomadaires (voir la section 2.1).

4.1. Ambiguïté seulement au niveau des tendances. Dans ce qui suit, nous illustrons la solution optimale lorsqu'il n'y a une ambiguïté qu'au niveau des tendances pour le cas sans entropie et le cas avec entropie. Quant au cas de buy-and-hold (voir la section 2.1), nous considérons les valeurs suivantes pour les limites des tendances, définissant l'ensemble d'ambiguïté :

$$\mu_{1\text{inf}} = \mu_{2\text{inf}} = -50\%; \quad \mu_{1\text{sup}} = \mu_{2\text{sup}} = 20\%.$$

Nous choisissons la valeur standard $\phi = 5$ pour une aversion au risque relative. Nous choisissons $\xi = 5 \times 10^{-14}$ pour 2008 et $\xi = 4 \times 10^{-13}$ pour 2016.



Le profil du portefeuille convexe Le profil du portefeuille concave

FIG. 3. Le profil du portefeuille optimal

Le tableau 7 montre que pour le critère maxmin (c'est-à-dire sans entropie), l'investissement sur les actifs risqués est négligeable puisque les deux multiples m_1^* et m_2^* sont proches de 0. Ceci est dû aux petites valeurs des tendances μ_1^* et μ_2^* (près de 2%). Cela signifie que l'investisseur choisit d'investir la quasi-totalité de sa richesse sur l'actif sans risque. Les profils des portefeuilles optimaux qui en résultent sont plats. Pour le cas de l'entropie, nous notons que, pour 2008, les tendances μ_1^* et μ_2^* sont toutes les deux négatives (environ -9%). Rappelons que leurs valeurs empiriques (qui définissent la probabilité \mathbb{P}_0) sont respectivement égales à : $\mu_1^0 = -45.13\%$ et $\mu_2^0 = -51.04\%$. Par conséquent, les multiples m_1^* et m_2^* sont négatifs (environ -10%). Cela signifie que l'investisseur utilise un effet de levier d'environ 20% réparti presque uniformément sur les deux actifs risqués afin d'investir davantage sur l'actif sans risque. Pour 2016, les tendances μ_1^* et μ_2^* correspondent aux valeurs empiriques $\mu_1^0 = 11.21\%$ et $\mu_2^0 = 2.12\%$. L'investisseur utilise un effet de levier d'environ 45% de la richesse totale sur le deuxième actif risqué afin d'investir environ 300% de sa richesse sur le premier actif risqué. La figure 4 montre le rendement du portefeuille optimal en fonction des rendements des deux actifs risqués pour le cas de l'entropie, dans lequel l'investissement sur les actifs risqués est significatif.

TAB. 7. Les multiples optimaux - Ambiguïté au niveau des tendances

Sans entropie									
Année	μ_1^*	μ_2^*	$\sigma_1 = \sigma_1^0$	$\sigma_2 = \sigma_2^0$	$\rho = \rho^0$	λ_1^*	λ_2^*	m_1^*	m_2^*
2008	1.998%	1.997%	33.29%	37.76%	87.8%	4×10^{-5}	-1×10^{-4}	2×10^{-5}	-6×10^{-5}
2016	2.2%	2.4%	11.72%	18.99%	75.8%	0.0023	0.00193	0.0040	0.0203

Avec entropie									
Année	μ_1^*	μ_2^*	$\sigma_1 = \sigma_1^0$	$\sigma_2 = \sigma_2^0$	$\rho = \rho^0$	λ_1^*	λ_2^*	m_1^*	m_2^*
2008	-8.37%	-9.67%	33.29%	37.76%	87.8%	-0.1753	-0.1555	-0.1053	-0.0824
2016	11.21%	2.12%	11.72%	18.99%	75.8%	1.8249	-1.3770	3.0957	-1.4502

4.2. Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités. Nous choisissons maintenant de ne pas avoir de limites a priori sur les tendances et les volatilités (c'est-à-dire que nous n'imposons que $\mu_i \inf \leq \mu_i \sup$ et $\sigma_i \inf \leq \sigma_i \sup$). Le tableau 8 fournit en particulier les multiples optimaux correspondant à ce cadre.

Comparé aux résultats du tableau précédent 7, le tableau 8 montre que nous avons obtenu globalement les mêmes caractéristiques. La seule différence significative correspond au cas de l'entropie

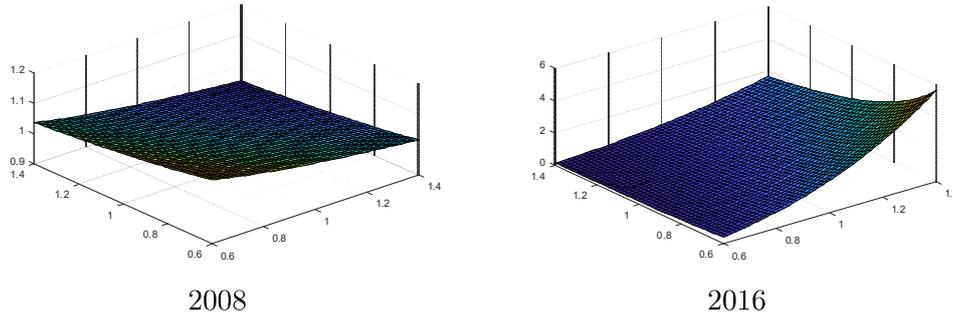


FIG. 4. Les profils du portefeuille optimal - Ambiguïté au niveau des tendances

pour l'année 2008. Avec une ambiguïté au niveau de la volatilité, nous avons obtenu des tendances beaucoup plus petites μ_1^* et μ_2^* tout en ayant des volatilités plus élevées σ_1^* et σ_2^* .

4.3. Ambiguïté seulement au niveau de la corrélation. Dans ce qui suit, nous examinons l'impact de l'ambiguïté sur la corrélation ρ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté au niveau des autres paramètres financiers. Rappelons que, pour 2008, nous avons trouvé empiriquement $\rho_0 = 0.878$ et pour 2016 $\rho_0 = 0.758$. Selon la Relation 3.13, nous devons minimiser :

$$\frac{(V_0 e^{rT})^{1-\phi}}{1-\phi} \exp\left(\frac{1}{2}s^2 \frac{1-\phi}{\phi}\right) + \xi \delta_1.$$

Notons que, lorsque seule la corrélation est ambiguë, le terme δ_1 est réduit à :

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{1-\rho_0^2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 + \frac{(1-\rho_0\rho)}{(1-\rho_0^2)}.$$

Nous fixons $\phi = 5$ et $\xi = 10^{(-21)} \times 7$. Le tableau 8 présente les valeurs optimales lorsque la corrélation ρ est ambiguë (elle est comprise entre -1 et 1).

TAB. 8. Les multiples optimaux - Ambiguïté au niveau des tendances et des volatilités

Sans entropie									
Année	μ_1^*	μ_2^*	σ_1^*	σ_2^*	ρ	λ_1^*	λ_2^*	m_1^*	m_2^*
2008	1.99%	1.99%	22.15%	27.67%	0.878	1.09×10^{-5}	-3.5×10^{-6}	9.8×10^{-6}	-2.54×10^{-6}
2016	2.2%	2.4%	29.94%	38.24%	0.758	2.61×10^{-5}	-2.03×10^{-5}	1.74×10^{-5}	-1.06×10^{-5}
Avec entropie									
Année	μ_1^*	μ_2^*	σ_1^*	σ_2^*	ρ	λ_1^*	λ_2^*	m_1^*	m_2^*
2008	-39.57%	-43.88%	47.1%	53.41%	0.878	-0.5598	-0.3684	-0.2378	-0.1380
2016	10.46%	3.76%	17.12%	27.38%	0.758	1.8822	-1.5845	2.1989	-1.1574

Le tableau 8 montre que la corrélation optimale ρ^* est assez proche de la corrélation empirique pour l'année 2008, alors qu'elle est très différente de celle de 2016 quand il n'y a pas d'entropie ($\rho^* = 0.005 \neq \rho_0 = 0.758$). Par rapport au cas où l'ambiguïté porte uniquement au niveau des tendances, les multiples m_1^* et m_2^* sont quasiment nuls pour le cas sans entropie mais plus proches des précédents pour le cas avec une entropie.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné le positionnement du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté, en particulier celui de Maccheroni et al. (2006) qui englobe à la fois les préférences des multiples-priors de Gilboa et Schmeidler (1989) et les préférences de Hansen et Sargent (2001). Ainsi, nous avons déterminé le profil du portefeuille optimal dans le cas multidimensionnel. Dans le cas multidimensionnel, nous avons montré comment le portefeuille optimal dépend à la fois de l'aversion au risque de l'investisseur et de son aversion à l'ambiguïté au niveau des distributions des probabilités. Nous avons montré également que lorsque les actifs risqués sont indépendants, la solution optimale correspond à la minimisation de la valeur absolue du ratio de Sharpe de chaque actif risqué. En outre, nous avons illustré l'impact de l'ambiguïté sur les corrélations entre les actifs risqués lorsqu'ils sont dépendants. Ces résultats peuvent être appliqués dans la pratique pour déterminer les profils des produits structurés financiers écrits sur plusieurs actifs risqués, par exemple pour choisir le type d'options qui doit être introduit dans le portefeuille (voir par exemple les options panier ou les options arc-en-ciel).

Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion au regret

1. Introduction

La prise de décision face au risque et à l'incertitude dans le cadre de la gestion de portefeuille a fait l'objet de nombreuses études et demeure un sujet très important. La théorie de l'utilité espérée est un modèle standard pour analyser les décisions des investisseurs dans un cadre incertain. Elle présente l'hypothèse classique pour modéliser les choix des investisseurs et a été largement considérée par les économistes financiers comme une base solide de l'optimisation du portefeuille depuis l'article fondateur de Merton (1969) et ses nombreuses extensions dans le cadre du temps continu (voir par exemple Karatzas et al., 1986 ; Cox et Huang, 1989 ; Karatzas et Shreve, 1998 ; Campbell et Viceira, 2002 ; Prigent, 2007). Cependant, malgré sa popularité, cette approche n'est pas toujours cohérente avec le comportement humain réel. Mis à part la théorie de l'ambiguïté, qui présente un impact très important sur les choix des investisseurs dans le cadre de la gestion standard et structurée, la théorie du regret joue un rôle important dans le cadre de la gestion de portefeuille. En effet, le regret a un impact significatif au niveau de l'optimisation du portefeuille puisque l'investisseur est préoccupé par la performance d'autres stratégies d'investissement possibles. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la partie théorique, la théorie du regret a été développée par Bell (1982) et Loomes et Sugden (1982). Cette théorie a été intégrée dans la littérature par plusieurs chercheurs permettant d'expliquer le comportement de l'investisseur. Elle fait référence au sentiment du regret ou de la réjouissance qu'un individu peut ressentir lorsqu'il obtient un résultat x au lieu d'un résultat y . Plus récemment, et comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, Solnik (2007) et Michenaud et Solnik (2008) ont étudié les décisions d'allocation d'actifs en présence du regret afin de déterminer le choix optimal de la couverture de change dans le cadre de l'optimisation de portefeuille statique. Solnik (2007) a montré que l'aversion au regret pousse l'investisseur à investir dans des actifs étrangers afin de réduire le regret potentiel. Dans leur article, Mhiri et Prigent (2010) ont étendu les résultats de Solnik (2007) et ont déterminé le rendement du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence du regret. Leur modèle est une extension du modèle d'allocation d'actifs de Leland (1980) ; Brennan et Solanki (1981) ; Carr et Madan (2001) et Prigent (2006). Ils ont examiné l'allocation du portefeuille optimal en prenant en compte la théorie du regret et ont déterminé l'impact du regret/réjouissance sur la composition du portefeuille international. En outre, Diecidue et al. (2012) ; Nasiry et Popescu (2012) et Viefers et Strack (2014) se sont concentrés sur les applications dynamiques de la théorie du regret.

L'impact du regret dans le cadre de la gestion de portefeuille structurée a été examiné dans plusieurs scénarios. Dans le cadre de l'assurance de portefeuille, plusieurs chercheurs ont développé des études qui utilisent soit la théorie du regret elle-même (Bell, 1982 et Loomes et Sugden, 1982) soit des extensions de la théorie du regret (voir par exemple Braun et Muermann, 2004 ; Barberis et al. 2006 ; Gollier et Salanié, 2006 ; Muermann et al. 2006 ; Michenaud et Solnik, 2008 ; Qin, 2015). Barberis et al. (2006) ont utilisé le concept du regret pour expliquer l'énigme de la participation au marché boursier. Braun et Muermann (2004) (voir aussi Muermann et al., 2006) ont examiné les implications du regret sur la demande d'assurance. Ils ont montré qu'une personne aversive au regret se couvre différemment de la personne qui cherche à maximiser sa fonction d'utilité espérée standard. Ils ont montré que le regret permet à l'individu d'éviter les décisions extrêmes. En effet, ils ont constaté que le regret pousse l'individu à acheter plus (moins) de couverture d'assurance si l'assurance est

relativement chère (bon marché) et à acheter plus (moins) d'actifs risqués si la prime de risque est relativement élevée (faible). Qin (2015) a développé un modèle de la théorie du regret et a examiné les effets du regret sur le comportement des investisseurs. Son modèle diffère de ceux des études précédentes dans la mesure où il prend en compte non seulement le «le regret de l'action» (le regret d'avoir fait un mauvais investissement) mais aussi «le regret de l'inaction» (le regret d'avoir raté une bonne opportunité).

Dans ce chapitre, nous déterminons le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion au regret. Nous montrons ainsi comment le sentiment du regret/réjouissance est susceptible de modifier la valeur du portefeuille optimal par rapport au cas de l'utilité espérée standard. Le reste de ce chapitre est organisé de la manière suivante. La deuxième section de chapitre porte sur la présentation du modèle de Mhiri et Prigent (2010) qui permet de déterminer le profil du portefeuille optimal structuré selon la théorie du regret d'une manière générale dans le cadre unidimensionnel. La troisième section est dédiée à la détermination du portefeuille optimal général avec une fonction d'utilité du type regret/réjouissance pour un cas multidimensionnel. Dans cette partie, nous présentons le profil et les caractéristiques du portefeuille optimal ainsi que le profil du portefeuille optimal assuré. Dans la quatrième section, nous avons établi un exemple numérique permettant d'illustrer numériquement les résultats théoriques de la section précédente dans le cas multidimensionnel. Dans cette section, nous présentons le marché financier sur lequel notre étude porte et le calcul de la probabilité neutre au risque. En outre, nous établissons un modèle permettant de déterminer le portefeuille optimal avec une fonction d'utilité espérée standard, d'une part, et la fonction d'utilité regret/réjouissance, d'autre part. Cet exemple illustre numériquement les résultats antérieurs concernant l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur le choix du portefeuille optimal.

2. Le modèle de Mhiri et Prigent (2010)

Mhiri et Prigent (2010) ont défini la fonction d'utilité du regret/réjouissance par :

$$U(x) = \frac{x^{(1-RA)}}{1-RA},$$

où RA est le coefficient d'aversion au regret de l'investisseur.

Dans leur modèle, Mhiri et Prigent (2010) supposent que l'investisseur est un preneur de prix et cherche à déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal h qui lui permet de maximiser sa fonction d'utilité espérée. Ils supposent que 3 types d'actifs standard sont présents sur le marché : un actif sans risque (cash) N , une obligation B et un indice financier (action) S . A la maturité, la fonction de paiement optimal de l'investisseur doit être exprimée en fonction des valeurs possibles de (N_T, B_T, S_T) .

Mhiri et Prigent (2010) supposent que les prix des options sont déterminés suivant la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} . Ils désignent par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la dérivé Radon-Nikodym sous la probabilité historique \mathbb{P} ; N_T le facteur d'actualisation et M_T le rapport suivant : $M_T = N_T \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Sous la condition de non-arbitrage, la contrainte budgétaire est exprimée par :

$$V_0 = E_{\mathbb{Q}}[h(N_T, B_T, S_T)N_T] = E_{\mathbb{P}}[h((N_T, B_T, S_T)M_T)].$$

La fonction d'utilité de l'individu U est inversible et son inverse est donné par J . La fonction de paiement du portefeuille est exprimée par V en fonction des valeurs possibles des actifs standard présents sur le marché tel que :

$$V = h(N_T, B_T, S_T).$$

Dans leur modèle, Mhiri et Prigent (2010) considèrent la fonction h_0 comme la fonction de paiement du portefeuille de référence permettant d'évaluer le regret/réjouissance de l'investisseur pour les autres fonctions de paiement. Cette fonction de paiement de référence correspond à celle du portefeuille domestique (Solnik, 2007).

Afin de déterminer le positionnement du portefeuille optimal, l'investisseur doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max_h E_{\mathbb{P}}[U(h(N_T, B_T, S_T)) + f(U(h(N_T, B_T, S_T)) - U(h_0(N_T, B_T, S_T)))],$$

$$\text{s.c. } V_0 = E_{\mathbb{P}}[h(N_T, B_T, S_T)M_T].$$

Soient f_{X_T} la fonction de pondération de $X_T = (N_T, B_T, S_T)$ et $E_{\mathbb{P}}[U(h(N_T, B_T, S_T))] = \int U(h(x)) f_{X_T} dx$. La fonction h peut être simplifiée et réécrite sous cette forme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} h^2(x) f_{X_T} dx < \infty.$$

Ceci signifie que $h \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$. Cet ensemble présente l'ensemble des fonctions mesurables dont le carré est inclu dans \mathbb{R}^d selon la distribution $\mathbb{P}_{X_T}(dx)$.

Soit une nouvelle fonction $\mathbb{P}_{X_T}(dx)$ associée à la fonction d'utilité U . Cette fonction est appelée la fonctionnelle de Nemitski et définie dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$ par :

$$\tau_{U_f} = E_{\mathbb{P}_{X_T}}[U(y) + f(U(y) - a_0)] \text{ pour tout } y \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T}(dx)),$$

où $U_f(\cdot, a_0) = U(\cdot) + f(U(\cdot) - a_0)$.

Soit g la fonction de densité de M_T selon \mathbb{P} . Cette fonction est définie sur l'ensemble des valeurs de X_T dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$.

Le problème d'optimisation de l'investisseur est réduit à :

$$\max_{h \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T}(dx))} \int_{\mathbb{R}^d} (U(h(x)) + f(U(h(x)) - U(h_0(x)))) f_{X_T}(x) dx,$$

$$\text{s.c. } V_0 = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) g(x) f_{X_T} dx.$$

Soit la fonction $\hat{\tau}_{(U_f, h_0)}$ définie dans l'ensemble $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X_T})$ par :

$$\hat{\tau}_{(U_f, h_0)} = \int_{\mathbb{R}^d} (U(h(x)) + f(U(h(x)) - U(h_0(x)))) f_{X_T}(x) dx,$$

et soit Λ une fonction linéaire définie par :

$$\Lambda(h) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) g(x) f_{X_T}(x) dx.$$

Mhiri et Prigent (2010) supposent que la fonction $\hat{\tau}_{(U_f, h_0)}(\cdot)$ est différentiable. La fonction de paiement maximale h^* de $\hat{\tau}_{(U_f, h_0)}$ sous la contrainte budgétaire doit satisfaire la condition de premier ordre. Alors, il existe un scalaire λ , tel que : $\frac{d\hat{\tau}_{(U_f, h_0)}(h)}{dh} = \lambda \Lambda$.

En outre, Mhiri et Prigent (2010) ont déterminé la condition de premier ordre de la fonction de paiement du portefeuille optimal h^* de $\hat{\tau}_{(U_f, h_0)}$. Soit un scalaire λ , tel que :

$$U'[h(\cdot)].[1 + f'[U(h(x)) - U(h_0(x))]] = \lambda g(\cdot).$$

Mhiri et Prigent (2010) ont établi la fonction $\phi_{h_0}(z)$ définie par :

$$\phi_{h_0}(z) = U'(z)(1 + f'(U(z) - U(h_0(x))))).$$

Cette fonction est supposée être inversible pour tout x . Alors, la fonction de paiement du portefeuille optimal est définie par :

$$h^* = \phi_{h_0}(\lambda g),$$

où λ est un multiplicateur scalaire de Lagrange, tel que :

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h_0}^{-1}(\lambda g(x)) g(x) f_{X_T}(x) dx.$$

La condition de premier ordre fournit une condition nécessaire permettant d'avoir la fonction de paiement optimal h^* .

La dérivée de la fonction ϕ_{h_0} est donnée par :

$$\phi'_{h_0} = U''(z)(1 + f'(U(z) - U(h_0(x)))) + (u'(z))^2(f''(U(z)) - U(h_0)).$$

Comme la fonction ϕ_{h_0} est strictement décroissante, la fonction h^* est une fonction décroissante selon le benchmark S_T . Dans ce cas, la fonction de paiement optimal h^* satisfait cette relation :

$$h^{*'}(S) = \left(-\frac{\phi'_{h_0} h(s)}{\phi''_{h_0} h(s)}\right) \times \left(-\frac{g'(s)}{g(s)}\right).$$

Mhiri et Prigent (2010) ont introduit la fonction $T_0(h(S))$ par :

$$T_0(h(S)) = -\frac{\phi'_{h_0} h(s)}{\phi''_{h_0} h(s)}.$$

Si la fonction d'utilité U est toujours concave et le sentiment du regret ou de réjouissance est absent (le cas standard), la fonction $T_0(h(S))$ est appelée : «la tolérance au risque» et correspond à l'inverse de l'aversion au risque absolue. Alors, la fonction $h'(S)$ dépend de $T_0(h(S))$.

La dérivée seconde de la fonction de paiement du portefeuille h est donnée par :

$$h''(S) = [T'_0 h(S) + \frac{Y'(S)}{Y(S)^2}] \times [T_0(h(S))Y(S)^2],$$

où $Y(S) = -\frac{g'(S)}{g(S)}$. D'où, les conditions de concavité/convexité peuvent être déduites.

La dérivée de la fonction de paiement du portefeuille optimal est donnée par :

$$\frac{dh(s)}{ds^{(i)}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{RA}{\phi}}\right) \left(\frac{1}{\phi} \frac{-dg(s)}{ds^{(i)}}\right) + \left(\left(\frac{\frac{RA}{\phi}}{1 + \frac{RA}{\phi}} \frac{U'(h^0(s))}{U'(h(s))}\right)\right) \left(\frac{dh_0(s)}{ds^{(i)}}\right).$$

Mhiri et Prigent (2010) ont constaté que si le portefeuille de référence dépend de S_T , la dérivée de la fonction de paiement du portefeuille optimal est égale à l'opposé de la dérivée du logarithme de la densité neutre au risque g multiplié par le ratio $(\frac{1}{1+RA})$. Ce résultat est similaire à celui de Solnik (2007). Mhiri et Prigent (2010) ont déterminé les allocations internationales avec regret/réjouissance et les ont comparé avec l'allocation optimale obtenue par l'approche classique (investir la totalité de la richesse dans l'actif qui présente le rendement espéré le plus élevé pour le niveau de risque le plus faible : il s'agit de l'action américaine). Ils ont constaté que l'utilité du regret/réjouissance peut être positive (l'investisseur éprouve de la réjouissance de ne pas avoir investi la totalité de sa richesse dans l'action américaine) ou négative (l'investisseur éprouve du regret de ne pas avoir investi toute sa richesse dans l'action américaine). Ainsi, ils ont montré que le sentiment de la réjouissance est proportionnel à l'aversion au risque et l'aversion au regret de l'individu : plus l'aversion au risque ou l'aversion au regret de l'individu est élevée, plus sa réjouissance est élevée.

3. Portefeuille optimal général avec une fonction d'utilité regret/réjouissance

Cette section étend les résultats antérieurs concernant la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec regret. Supposons que l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de son utilité U en présence d'une fonction de regret/réjouissance. Cet investisseur est un preneur de prix (par exemple, son indice de référence S est l'indice $S\&P$ 500 et son investissement est trop faible pour modifier la valeur de cet indice).

3.1. Le marché financier. Supposons qu'il existe des types d'actifs financiers de base tels qu'une obligation B à taux déterministe r et un système de cours d'indices boursiers $S_T = (S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(d)})$ (un panier d'indices boursiers par exemple). Nous recherchons maintenant le profil du portefeuille optimal général en fonction du benchmark risqué $S_T = (S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(d)})$. Nous supposons que l'investisseur détermine le profil du portefeuille optimal h qui est une fonction définie sur toutes les valeurs possibles des actifs S_T à l'échéance T . Si le marché est complet, l'investisseur peut obtenir ce profil. Le marché peut être complet si, par exemple, le marché financier évolue d'une manière continue et toute option peut être dupliquée dynamiquement par une stratégie de couverture parfaite.

Le marché peut encore être complet si, par exemple, dans le cadre d'une période unique, des options européennes de tous les prix d'exercice sont disponibles sur le marché financier (comme le montre ce qui suit lorsqu'il s'agit de couverture statique). Dans ce contexte, l'incapacité de négocier en temps continu induit potentiellement à des investissements sur l'actif B , sur les actifs S et sur toutes les options européennes avec des actifs sous-jacents S . Le marché peut également être incomplet. Dans ce cas, la solution donnée dans cette section reste théorique mais intéressante à connaître, puisque le profil du portefeuille optimal peut être approximé en investissant sur des actifs négociés (dans la pratique, l'investisseur définit une méthode d'approximation, qui peut tenir compte des coûts de transaction ou des problèmes de liquidité). Dans le cadre de la condition de non-arbitrage standard, les prix des actifs sont calculés selon des probabilités neutres au risque. Si les options de vente et les options d'achat européennes sont en dehors de la monnaie, pour tous les prix d'exercice, il existe une probabilité neutre au risque unique qui peut être identifiée à partir des prix des options (voir Breeden et Litzenberger, 1978). Dans le cas contraire, en absence de négociation en temps continu, le marché est généralement incomplet. Dans ce cas, une probabilité neutre au risque \mathbb{Q} est utilisée pour évaluer les options. Il est également possible que les prix des actions changent continuellement mais que le marché soit encore dynamiquement incomplet. Encore une fois, nous supposons qu'une probabilité neutre au risque est choisie. Supposons que les prix sont déterminés selon une telle mesure \mathbb{Q} . Désignons par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la dérivée Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} et M_T le produit $e^{-rT} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. En raison de la condition de non-arbitrage, la contrainte budgétaire correspond à la relation suivante :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(S_T)M_T]. \quad (3.1)$$

3.2. Le profil du portefeuille optimal. Dans ce qui suit, l'utilité de l'investisseur U est croissante et deux fois différentiable. La fonction de regret f satisfait : $f[0] = 0$, la fonction f est croissante, f'' est concave (qui correspond à l'aversion au regret) et $f''' > 0$. Nous supposons que l'utilité marginale U' est inversible. Nous dénotons son inverse par J .

Pour un positionnement optimal, la valeur du portefeuille V est une fonction des actifs de base : $V = h(S_T)$. Considérons un profil de portefeuille donné par h_0 , qui désigne le portefeuille de référence pour évaluer le regret/la réjouissance de tout autre portefeuille h^1 . Par conséquent, l'investisseur doit résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T)) + f(U(h(S_T)) - U(h_0(S_T)))], \\ \text{s.c. } & V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(S_T)M_T]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Supposons que S_T possède une fonction de densité notée par : f_{S_T} . Alors l'espérance :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T)) + f(U(h(S_T)) - U(h_0(S_T)))],$$

est égale à :

$$\int [U(h(s)) + f(U(h(s)) - U(h_0(s)))] f_{S_T}(s) ds. \quad (3.3)$$

¹Dans Solnik (2007), ceci correspond à la valeur du portefeuille investi uniquement sur des actifs domestiques.

Pour simplifier la présentation des principaux résultats, nous supposons, comme d'habitude, que la fonction h remplit la condition d'intégrabilité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} h^2(s) f_{S_T}(s) ds < \infty.$$

Ceci signifie que $h \in \mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds))$, qui est l'ensemble des fonctions mesurables avec des carrés intégrables sur \mathbb{R}^d avec toutes les distributions $\mathbb{P}_{S_T}(ds)$.

Considérons la fonctionnelle Γ_{a_0} associée à la fonction d'utilité U et à la fonction de regret f , pour tout nombre réel fixe a_0 , qui est défini sur l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds))$ comme suit :

$$\text{Pour tout } X \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds)), \Gamma_{a_0}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{S_T}}[U(X) + f(U(X) - a_0)].$$

Introduisons U_f par :

$$U_f(\cdot, a_0) = U(\cdot) + f(U(\cdot) - a_0).$$

Lorsque la fonction U_f est concave, Γ_{U_f} est généralement appelée la fonction de Nemitski associée à U_f (voir Ekeland et Turnbull (1983) pour la définition et les propriétés de base).

Désignons également par g la fonction de densité de M_T par rapport à \mathbb{P}^2 . Supposons que g est une fonction définie sur l'ensemble de valeurs S_T et $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds))$. Alors, le problème d'optimisation est réduit à :

$$\text{Max}_{h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T}(ds))} \int_{\mathbb{R}^d} (U[h(s)] + f[U(h(s)) - U(h_0(s))]) \cdot f_{S_T}(s) ds, \quad (3.4)$$

$$\text{s.c. } V_0 = \int_{\mathbb{R}^d} h(s)g(s) f_{S_T}(s) dx. \quad (3.5)$$

Dénotons par $\widehat{\Gamma}_{h_0}$ la fonctionnelle définie sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T})$ par :

$$\widehat{\Gamma}_{h_0}(h) = \int_{\mathbb{R}^d} (U[h(s)] + f[U(h(s)) - U(h_0(s))]) f_{S_T}(s) ds. \quad (3.6)$$

Soit Λ une fonctionnelle linéaire définie par :

$$\Lambda(h) = \int_{\mathbb{R}^d} h(s)g(s) f_{S_T}(s) ds. \quad (3.7)$$

PROPOSITION 13. *Supposons que la fonctionnelle $\widehat{\Gamma}_{h_0}(\cdot)$ est différentiable. Alors, chaque maximum relatif h^* de $\widehat{\Gamma}_{h_0}$ sous la condition (3.5) doit nécessairement satisfaire la condition de premier ordre : il existe un scalaire λ tel que :*

$$\frac{\partial \widehat{\Gamma}_{h_0}(h)}{\partial h} = \lambda \Lambda. \quad (3.8)$$

DÉMONSTRATION. Cette propriété est une conséquence des résultats généraux concernant l'optimisation sous des contraintes, lorsque la fonction à optimiser et la fonction caractérisant la contrainte sont différentiables. Ici, nous notons que la dérivée de la fonction linéaire continue L est égale à elle-même. Ainsi, nous en déduisons le résultat. \square

PROPOSITION 14. *Le profil du portefeuille optimal h^* de $\widehat{\Gamma}_{h_0}$ sous la condition (3.5) est caractérisé par la condition de premier ordre : il existe un scalaire λ tel que :*

$$U'[h(\cdot)] \cdot [1 + f'[U(h(s)) - U(h_0(s))]] = \lambda g(\cdot). \quad (3.9)$$

De plus, si la fonction $\Phi_{h_0(s)}(z) = U'(z) [1 + f'[U(z) - U(h_0(s))]]$ est inversible pour tout s , alors le profil du portefeuille optimal h^* est donné par :

$$h^*(s) = \Phi_{h_0(s)}^{-1}(\lambda g(s)), \quad (3.10)$$

²La fonction g est la densité Radon-Nikodym de $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$.

où λ est le multiplicateur scalaire de Lagrange tel que :

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{h_0(s)}^{-1}(\lambda g(s)) g(s) f_{S_T}(s) ds.$$

DÉMONSTRATION. - A partir des propriétés de la fonction d'utilité U et de la fonction de regret f , la fonction $\widehat{\Gamma}_{h_0}$ est différentiable sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{S_T})$.

- De plus, la contrainte budgétaire est une fonction linéaire de h .

- Enfin, la fonction $\widehat{\Gamma}_{h_0}$ est concave, pour tout a_0 , la fonction $U_f(\cdot, a_0) = U(\cdot) + f(U(\cdot) - a_0)$ est concave.³

Alors, il existe une seule solution h^* qui est une solution de $\frac{\partial L}{\partial h} = 0$, où le Lagrangien L est défini par :

$$\begin{aligned} L(h, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} [(U[h(s)] + f[U(h(s)) - U(h_0(s))])] f_{S_T}(s) ds \\ &\quad + \lambda \left(V_0 - \int_{\mathbb{R}^d} h(s) g(s) f_{S_T}(s) ds \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire.

La condition de premier ordre est équivalente à :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} [(U'[h(s)] + U'(h(s)) f'[U(h(s)) - U(h_0(s))])] f_{S_T}(s) ds \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} g(s) f_{S_T}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Alors, pour tout s ,

$$U'[h(s)] \cdot (1 + f'[U(h(s)) - U(h_0(s))]) \cdot f_{S_T}(s) = \lambda g(s) f_{S_T}(s),$$

A partir de laquelle nous déduisons :

$$U'[h(s)] \cdot (1 + f'[U(h(s)) - U(h_0(s))]) = \lambda g(s),$$

Ceci conduit au profil du portefeuille optimal h^* défini par : $\Phi_{h_0}(h^*) = \lambda g$. Par conséquent :

$$h^* = \Phi_{h_0}^{-1}(\lambda g).$$

□

REMARQUE 7. Selon les hypothèses antérieures sur la fonction d'utilité U et la fonction de regret f , la condition de premier ordre fournit une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'optimum h^* .

³Pour tout x, y et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} &U(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f(U(\lambda x + (1 - \lambda)y) - a_0) \\ &\geq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) + f(\lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) - a_0), \end{aligned}$$

Puisque U est concave et f est croissante.

Maintenant, puisque f est concave et comme nous avons :

$$\lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) - a_0 = \lambda[U(x) - a_0] + (1 - \lambda)[U(y) - a_0],$$

nous déduisons :

$$\begin{aligned} f(\lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) - a_0) &= f(\lambda[U(x) - a_0] + (1 - \lambda)[U(y) - a_0]) \\ &\geq \lambda f(U(x) - a_0) + (1 - \lambda)f(U(y) - a_0). \end{aligned}$$

A partir de cette fonction, nous obtenons la concavité de $U(\cdot) + f(U(\cdot) - a_0)$.

3.2.1. *Les propriétés du portefeuille optimal.* Les propriétés du profil du portefeuille optimal h^* , qui est défini en fonction des actifs risqués $S_T^{(i)}$, peuvent être analysées.

LEMME 2. *La dérivée de Φ_{h_0} par rapport à z est donnée par :*

$$\Phi'_{h_0}(z) = U''(z) [1 + f'[U(z) - U(h_0(s))]] + [U']^2(z) [f''[U(z) - U(h_0(s))]].$$

Ainsi, sous les hypothèses précédentes concernant l'utilité U et la fonction de regret f , la fonction Φ_{h_0} est strictement décroissante.

Supposons dans ce qui suit que le profil de référence h_0 ne dépend pas de $S_T = (S_T^{(i)})_i$.

COROLLAIRE 10. *Comme la fonction Φ_{h_0} est décroissante, h^* est une fonction croissante en fonction des valeurs des actifs risqués $S_T^{(i)}$ si, et seulement si, la fonction de densité g est une fonction décroissante de $S_T^{(i)}$.*

PROPOSITION 15. *Supposons que la fonctionnelle Φ_{h_0} possède un inverse $\Phi_{h_0}^{-1}$. Le profil du portefeuille optimal h^* doit satisfaire :*

$$\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\Phi_{h_0}(h(s))}{\Phi'_{h_0}(h(s))} \right) \times \left(-\frac{\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} \right). \tag{3.13}$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que nous avons :

$$h^*(s) = \Phi_{h_0}^{-1}(\lambda g(s)). \tag{3.14}$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}} = [\Phi_{h_0}^{-1}]'(\lambda g(s)) \lambda \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}. \tag{3.15}$$

En utilisant la relation $\lambda = \Phi_{h_0}(h)/g$, les calculs des différentielles standards conduisent à cette expression :

$$\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\Phi_{h_0}(h(s))}{\Phi'_{h_0}(h(s))} \right) \times \left(-\frac{\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} \right). \tag{3.16}$$

□

Introduisons la fonction $T_o(h(s))$ définie par :

$$T_o(h(s)) = -\frac{\Phi_{h_0}(h(s))}{\Phi'_{h_0}(h(s))}. \tag{3.17}$$

Notons que si la fonction U est toujours concave et qu'il n'y a pas de regret/réjouissance (cas standard), la fonction $T_o(h(s))$ est appelée la tolérance au risque et correspond à l'inverse de l'aversion au risque absolue. Comme nous pouvons le voir, $\frac{\partial h^*(s)}{\partial s^{(i)}}$ dépend de $T_o(h(s))$. La conception du profil du portefeuille optimal peut également être spécifiée. Désignons par :

$$Y_i(s) = -\frac{\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)}. \tag{3.18}$$

En différenciant deux fois, nous obtenons :

COROLLAIRE 11. *La dérivée de second ordre du profil du portefeuille h est donnée par :*

$$\frac{\partial^2 h^*(s)}{\partial s^{(i)} \partial s^{(j)}} = \left[\frac{\partial T_o(h(s))}{\partial s^{(j)}} Y_i(s) + T_o(h(s)) \frac{\partial Y_i(s)}{\partial s^{(j)}} \right], \tag{3.19}$$

avec

$$\frac{\partial Y_i(s)}{\partial s^{(j)}} = \frac{\partial}{\partial s^{(j)}} \left[-\frac{\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} \right] = -\frac{\frac{\partial^2 g(s)}{\partial s^{(i)} \partial s^{(j)}} g(s) + \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(j)}}}{g^2(s)}.$$

COROLLAIRE 12. *A partir de la relation ci-dessus, on peut déduire les conditions de concavité/convexité.*

Supposons maintenant que le profil du portefeuille de référence h_0 est une fonction de l'actif risqué S_T . Supposons que la fonction $\Phi_y [z]$ est définie par :

$$\Phi_y [z] = U' [z] (1 + f' [U [z] - U [y]]),$$

et possède un inverse pour toute valeur de y .

Introduisons la fonction Π définie par :

$$\Pi(a, y) = \Phi_y^{-1}(a) \text{ avec } \Phi_y [z] = a.$$

Supposons que Π est différentiable.

PROPOSITION 16. *Selon les hypothèses précédentes, le profil du portefeuille optimal h^* doit satisfaire :*

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} = \frac{\partial \Pi}{\partial a} (h_0(s), \lambda g(s)) \times \lambda \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} (h_0(s), \lambda g(s)) \times \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}. \quad (3.20)$$

DÉMONSTRATION. En utilisant des arguments standards concernant la différenciation des fonctions composées. \square

Les dérivés $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ représentent respectivement les pondérations de la densité neutre au risque et de la dérivée du profil du portefeuille de référence dans l'expression de la dérivée du profil du portefeuille optimal. Les pondérations peuvent être détaillées en fonction de l'aversion au risque absolue ϕ et de l'aversion au regret RA .

Nous obtenons le résultat suivant :

PROPOSITION 17. *La dérivée du profil du portefeuille optimal ("delta") est donnée par :*

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(\frac{1}{1 + RA/\phi} \right) \underbrace{\left(\frac{1 - \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{\phi \ g(s)} \right)}_{\text{solution usuelle}} + \underbrace{\left(\frac{RA/\phi \ U'(h_0(s))}{1 + RA/\phi \ U'(h(s))} \right)}_{\text{impact de } h_0(s)} \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}. \quad (3.21)$$

Rappelons la solution de Solnik (2007) (par approximation) :

$$h'(s) = \left(\frac{1}{1 + RA/\phi} \right) \alpha_g \text{ (profil de portefeuille linéaire)}. \quad (3.22)$$

DÉMONSTRATION. Le profil du portefeuille optimal est la solution de :

$$\forall s, U' [h(s)] \cdot (1 + f' [U (h(s)) - U (h_0(s))]) = \lambda g(s).$$

Ensuite, en différenciant les deux termes de l'expression précédente par rapport à $s^{(i)}$, nous obtenons :

$$\forall s, \lambda \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} = \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [U (h(s)) - U (h_0(s))]) + U' [h(s)] \left(f'' [U (h(s)) - U (h_0(s))] \right) \left[\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} U' (h(s)) - \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}} U' (h_0(s)) \right]. \quad (3.23)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} \left(U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [.]) + U''^2 (h(s)) f'' [.] \right) = \\ \lambda \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} + \left(U' (h(s)) f'' [.] U' (h_0(s)) \right) \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}. \end{aligned}$$

Puisque :

$$\lambda = \frac{U' [h(s)] \cdot (1 + f' [U (h(s)) - U (h_0(s))])}{g(s)},$$

nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} &= \left(\frac{U' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot])}{U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot]) + U'^2 (h(s)) f'' [\cdot]} \frac{1}{g(s)} \right) \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} \\ &+ \left(\frac{\left(U' (h(s)) f'' [\cdot] U' (h_0(s)) \right)}{U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot]) + U'^2 (h(s)) f'' [\cdot]} \right) \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}. \end{aligned}$$

Notons que nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} &= \left(\frac{-U' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot])}{U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot]) + U'^2 (h(s)) f'' [\cdot]} \right) \left(\frac{-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} \right) \\ &+ \left(\frac{\left(U' (h(s)) f'' [\cdot] U' (h_0(s)) \right)}{U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot]) + U'^2 (h(s)) f'' [\cdot]} \right) \frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}. \end{aligned}$$

Par définition de ϕ_a et RA_a , nous déduisons le résultat. \square

REMARQUE 8. Nous pouvons remarquer que :

- Si le profil du portefeuille de référence ne dépend pas de S_T , la dérivée du profil optimal est égale à l'opposé de la dérivée du logarithme de la densité neutre au risque g multipliée par le rapport $\left(\frac{1}{\phi_a + RA_a} \right)$. Nous obtenons une solution similaire à celle de Solnik (2007).

- Pour une aversion au risque fixe, lorsque l'aversion au regret tend vers l'infini et la dérivée $\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}}$ converge vers la dérivée $\frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}}$ puisque $h(\cdot)$ converge vers le profil du portefeuille de référence $h_0(\cdot)$.

- En absence du regret ($f = 0$), ce dernier est égal à l'inverse de l'aversion au risque absolue, car il correspond à la solution standard.

- Notons également que les deux poids $\left(\frac{-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} \right)$ et $\left(\frac{\partial h_0(s)}{\partial s^{(i)}} \right)$ ont le même signe. Ceci est égal à l'opposé du signe du terme $U'' [h(s)] \cdot (1 + f' [\cdot]) + U'^2 (h(s)) f'' [\cdot]$. En particulier, le signe de ces deux poids est positif dès que la fonction d'utilité U et la fonction de regret f sont concaves.

- Par conséquent, si $-g(\cdot)$ et $h_0(\cdot)$ croissent en fonction $s^{(i)}$, alors le profil du portefeuille optimal h^* croît également. Ceci ne peut être décroissant pour un certain intervalle de valeurs d'actifs risqués que si le profil de référence h_0 diminue sur cet intervalle et si le regret est suffisamment significatif.

- Si le portefeuille de référence h_0 ne dépend pas du vecteur des actifs risqués s , le ratio de la part de la richesse investie sur l'actif i est divisé par la part investie sur l'actif j et est donné par :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(j)}} = \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(j)}}.$$

Ce ratio ne dépend ni de l'aversion au risque ni de l'aversion au regret de l'investisseur.

- Si le profil du portefeuille de référence h_0 correspond au portefeuille à pondérations égales (c'est-à-dire $h_0(s) = V_0/d \sum_{i=1}^d s^{(i)}/S_0^{(i)}$), alors :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(\frac{1}{1 + RA/\phi} \right) \left(\frac{1}{\phi} \right) \left(-\frac{1}{g(s)} \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} + \left(U' (h_0(s)) \frac{f''}{1 + f'} \right) \left(\frac{1}{dS_0^{(i)}} \right) \right). \quad (3.24)$$

Par conséquent, nous déduisons la valeur du ratio $\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(j)}}$.

3.2.2. *Couverture du portefeuille optimal.* Pour le cas unidimensionnel, Carr et Madan (2001) ont montré que l'existence des options de vente et des options d'achat européennes en dehors de la monnaie, pour tout prix d'exercice, permet de déterminer le positionnement du portefeuille optimal sur un marché complet. Cette hypothèse est justifiée lorsqu'il y a un nombre important de prix d'exercice (par exemple l'indice $S\&P$ 500). Ces auteurs ont prouvé qu'il est possible d'identifier explicitement la stratégie d'investissement qui doit être poursuivie afin d'obtenir un profil du portefeuille h doublement

différentiable. Le portefeuille $h(S)$ est dupliqué par une position initiale unique de $h(S_0) - h'(S_0)S_0$ d'obligations à escompte, $h'(S_0)$ actions et $h(K)dK$ options en dehors de la monnaie pour tous les prix d'exercice K :

$$h(S) = [h(S_0) - h'(S_0)S_0] + h'(S_0)S + \int_0^{S_0} h''(K)(K - S)^+ dK + \int_{S_0}^{\infty} h''(K)(S - K)^+ dK. \quad (3.25)$$

En général, h_0 et h^* sont croissants. Par conséquent, le profil du portefeuille optimal est une fonction croissante de l'indice de référence. Si h n'est pas différentiable, il est approximé par une séquence de fonctions de profils h_n deux fois différentiables. Ensuite, puisque les fonctions de paiement h_n sont deux fois différentiables, elles sont dupliquées par les positions initiales de $h_n(S_0) - h'_n(S_0)S_0$ d'obligations à escompte unitaire, $h'_n(S_0)$ d'actions et $h_n(K)dK$ d'options en dehors de la monnaie pour tout prix d'exercice K :

$$h_n(S) = [h_n(S_0) - h'_n(S_0)S_0] + h'_n(S_0)S + \int_0^{S_0} h''_n(K)(K - S)^+ dK + \int_{S_0}^{\infty} h''_n(K)(S - K)^+ dK.$$

Le résultat précédent peut être étendu au cas multidimensionnel.

PROPOSITION 18. *Tout profil de portefeuille régulier peut être reproduit en investissant sur une obligation, sur les deux actifs risqués et sur des options telles que les options de vente et d'achat standard qui sont vendues séparément sur les deux actifs risqués ainsi que sur des options définies comme des produits, à savoir : $(S^{(1)} - K)^+ (S^{(2)} - v^{(2)})^+$, $(K - S^{(1)})^+ (S^{(2)} - v^{(2)})^+$, $(S^{(1)} - K)^+ (v^{(2)} - S^{(2)})^+$, $(K - S^{(1)})^+ (v^{(2)} - S^{(2)})^+$.*

3.3. Le portefeuille assuré. Cette section est une généralisation du modèle de Bertrand et al. (2001) et Prigent (2006) au cas d'utilité avec regret/réjouissance. L'investisseur cherche à avoir une garantie spécifique qui lui fournit une assurance supplémentaire contre le risque. Si par exemple le taux d'intérêt est non stochastique, une telle garantie peut être modélisée en laissant une fonction h_{\min} , définie sur les valeurs possibles du benchmark S_T : quelle que soit la valeur de S_T , l'investisseur souhaite obtenir une valeur finale du portefeuille au-dessus du plancher $h_{\min}(S_T)$. Par exemple, si h_{\min} est linéaire, tel que $h_{\min}(s) = as + b$, alors lorsque le benchmark baisse, l'investisseur est sûr d'obtenir au moins b (égal à un pourcentage fixe de son investissement initial) et si le benchmark augmente, il réalise des profits à partir des hausses avec un pourcentage a .

$$\text{Max}_h \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(S_T)) + f(U(h(S_T)) - U(h_0(S_T)))] \quad (3.26)$$

$$\text{s.c. } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(S_T)M_T] \quad (3.27)$$

$$\text{et } h(S_T) \geq h_{\min}(S_T)$$

Comme nous pouvons le voir, l'investissement initial V_0 doit être supérieur à $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_{\min}(S_T)M_T]$ si la contrainte d'assurance est satisfaite. Nous obtenons le résultat suivant :

PROPOSITION 19. *Il existe un profil du portefeuille optimal non contraint h^* associé à un coefficient de Lagrange λ_c tel que le profil du portefeuille optimal h^{**} est donné par :*

$$h^{**} = \text{Max}(h_{\min}, h^*) = \text{Max}(h_0, \Phi^{-1}(\lambda_c g)). \quad (3.28)$$

REMARQUE 9. *Le paramètre λ peut être considéré comme un multiplicateur de Lagrange associé à un portefeuille optimal non assuré mais avec une richesse initiale modifiée. En effet, lorsque la valeur de h^* est plus grande que le plancher d'assurance h_{\min} , alors $h^{**} = h^*$. Sinon, $h^{**} = h_{\min}$. En supposant que les fonctions h^* et h_{\min} sont continues, la fonction de paiement du portefeuille h^{**} est une fonction continue par rapport aux valeurs de l'indice de référence, comme toute combinaison linéaire d'options standard.*

4. Exemple fondamental

Dans ce qui suit, les résultats théoriques antérieurs sont illustrés pour une utilité espérée standard et une utilité avec une aversion au regret. Les prix des options sont déterminés dans le cadre de Blac-Scholes.⁴

4.1. Le marché financier. Dans ce qui suit, nous considérons d actifs financiers S_i conduits par un mouvement brownien géométrique multidimensionnel :

$$dS_{i,t} = S_{i,t}(\mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t}), \quad (4.1)$$

où $W_t = (W_{i,t})_{1 \leq i \leq d}$ est un mouvement brownien à d dimensions avec une matrice de corrélation Σ_c donnée par :

$$\Sigma_c = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,d} \\ \rho_{1,2} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \rho_{d-1,d} \\ \rho_{1,d} & \dots & \rho_{d-1,d} & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_d \end{bmatrix}.$$

REMARQUE 10. La matrice variance-covariance Σ_S des prix des actifs S est donnée par : $\Sigma_S = (\sigma_{S_i, S_j})_{1 \leq i, j \leq d}$ avec :

$$\sigma_{S_i, S_j} = S_{i,0} S_{j,0} \exp [(\mu_i + \mu_j) t] (\exp [(\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) t] - 1).$$

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned} S_{i,t} &= S_{i,0} \exp \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t + \sigma_i W_{i,t} \right], \\ S_{j,t} &= S_{j,0} \exp \left[\left(\mu_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) t + \sigma_j W_{j,t} \right], \end{aligned}$$

A partir de ces deux expressions, nous déduisons :

$$\begin{aligned} S_{i,t} S_{j,t} &= \\ S_{i,0} S_{j,0} \exp \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \mu_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right) t + \sigma_i W_{i,t} + \sigma_j W_{j,t} \right] &= \\ S_{i,0} S_{j,0} \exp \left[(\mu_i + \mu_j + \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) t - \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) t + \sigma_i W_{i,t} + \sigma_j W_{j,t} \right]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E} [S_{i,t} S_{j,t}] = S_{i,0} S_{j,0} \exp [(\mu_i + \mu_j + \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) t].$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{S_i, S_j} &= \text{Covariance} (S_{i,t}; S_{j,t}) = \mathbb{E} [S_{i,t} S_{j,t}] - \mathbb{E} [S_{i,t}] \mathbb{E} [S_{j,t}] \\ &= S_{i,0} S_{j,0} \exp [(\mu_i + \mu_j) t] (\exp [(\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}) t] - 1). \end{aligned}$$

□

⁴Nous examinons ce cas parce qu'il s'agit du cas le plus courant dans la pratique. D'autres cas peuvent également être envisagés si le rendement logarithmique de l'actif risqué n'est plus gaussien.

REMARQUE 11. (Le mouvement Brownien comme une fonction des prix des actifs risqués)
Comme les prix des actifs risqués sont définis à partir de l'expression suivante :

$$dS_{i,t} = S_{i,t}(\mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t}),$$

nous déduisons que :

$$S_{i,t} = S_{i,0} \exp((\mu_i - 1/2\sigma_i^2)t + \sigma_i W_{i,t}).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\exp(\sigma_i W_{i,t}) = S_{i,t}/S_{i,0} \exp(-(\mu_i - 1/2\sigma_i^2)t),$$

et finalement :

$$W_{i,t} = \text{Log}[S_{i,t}/S_{i,0}] - \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i} - 1/2\sigma_i\right)t.$$

NOTATION 2. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes (voir Jacod and Shiryaev, 2002). Pour toutes les semimartingales X et Y , $[X, Y]$ désigne le processus de variation quadratique des processus X et Y . Le processus $\langle X, Y \rangle$ désigne le compensateur prévisible de ces processus. Rappelons que nous avons :

$$[X, Y]_t = \langle X, Y \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s,$$

où ΔX_t et ΔY_t désignent les sauts des processus et $\langle X, Y \rangle_t$ est défini à partir de la condition suivante : Les parties martingales M^X et M^Y de X et Y existent tel que $(M_t^X M_t^Y - \langle X, Y \rangle_t)_t$ est une martingale (locale).

Nous avons aussi : (La formule d'intégration par partie)

$$d(XY) = XdY + YdX + d[X, Y].$$

Le processus $\mathcal{E}(X)$ désigne l'exponentiel stochastique Dade-Doléans, défini à partir de l'équation différentielle stochastique (SDE) :

$$d\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)dX.$$

Notons que, pour des semimartingales X , nous obtenons :

$$\mathcal{E}(X_t) = \mathcal{E}(X_0) \exp \left[X_t - \frac{1}{2} \langle X, X \rangle_t \right].$$

4.2. La probabilité neutre au risque. Supposons que Σ_c et Σ sont des matrices inversibles, le marché financier est sans arbitrage et complet. La probabilité neutre au risque \mathbb{Q} existe et est unique. Elle est définie à partir de sa densité Radon-Nikodym η par rapport à la probabilité objective \mathbb{P} , définie par $\eta_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$. Notons par :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_d \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_d \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 20. En utilisant le théorème de représentation de la martingale pour la filtration brownienne, cette densité est associée à d primes de risque du marché, $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ et donnée par :

$$\eta_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathcal{E} \left[- \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right] = \exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t - \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right],$$

avec

$$\Lambda = \Sigma_c^{-1} \cdot \Sigma^{-1} \cdot [M - r\mathbb{1}]. \quad (4.2)$$

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes (voir Jacod et Shiryaev, 2002). Pour les deux semi-martingales X et Y , $[X, Y]$ désigne la variation quadratique des processus X et Y . Le processus $\langle X, Y \rangle$ désigne le compensateur prévisible de ces processus. Rappelons-nous que nous avons :

$$[X, Y]_t = \langle X, Y \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s,$$

où ΔX_t et ΔY_t désignent les sauts des processus et $\langle X, Y \rangle$ est défini à partir de la condition suivante : Les parties martingales respectives M^X et M^Y de X et Y sont tel que : $(M_t^X M_t^Y - \langle X, Y \rangle_t)_t$ est une martingale (locale). Nous avons aussi : (intégration par formule partielle)

$$d(XY) = XdY + YdX + d[X, Y].$$

Le processus $\mathcal{E}(X)$ désigne l'exponentiel stochastique de Dade-Doléans, définie à partir de l'équation stochastique différentielle (SDE) :

$$d\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)dX.$$

Notons que pour les semimartingales continues X , nous avons $[X, Y]_t = \langle X, X \rangle_t$. Alors, nous obtenons :

$$\mathcal{E}(X_t) = \mathcal{E}(X_0) \exp \left[X_t - \frac{1}{2} \langle X, X \rangle_t \right].$$

Le résultat est établi en utilisant le théorème de Girsanov. Nous faisons le parallèle avec l'approche de Buhlmann et al. (1996). Chacun des d actifs de base $S_{i,t}$ doit satisfaire la condition suivante : lorsque les actifs sont actualisés par le compte nominal du marché monétaire C , ils doivent être des martingales par rapport à la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} . Cela équivaut au fait que, lorsqu'ils sont multipliés par la densité de Radon-Nikodym η et divisés par C , ils doivent être des martingales par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} . Nous avons :

$$S_{i,t}\eta_t/C_t = \mathcal{E}[(\mu_i - r)t + \sigma_i W_{i,t}] \mathcal{E} \left[- \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right],$$

qui est aussi égale à (formule de Yor) :

$$\mathcal{E} \left[(\mu_i - r)t + \sigma_i W_{i,t} - \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} - \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right].$$

Notons aussi que nous avons :

$$\left\langle \sigma_i W_{i,t}, \sum_{j=1}^d \lambda_j W_{j,t} \right\rangle = \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) t.$$

Le fait que les processus $(S_{i,t}\eta_t/C_t)$ sont des martingales par rapport à \mathbb{P} , il est équivalent à la propriété suivante : leurs composantes de variation bornées sont égales à 0. Ces d dernières conditions impliquent les égalités suivantes, pour tout $i = 1, \dots, d$:

$$(\mu_i - r) - \sigma_i \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \rho_{i,j} \right) = 0.$$

Ces égalités conduisent à l'équation (4.2). □

Le procesus η peut être écrit comme suit :

$$\eta_t = \mathcal{E}[-sW_t] \text{ avec } W_t = \frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t}}{s} \text{ et } s = \sqrt{\Sigma \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j \rho_{ij}}.$$

Notons que le processus W est un mouvement Brownien standard. Notons par :

$$\varphi(t) = \exp \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right]. \quad (4.3)$$

COROLLAIRE 13. *(La densité Radon-Nikodym comme une fonction des prix des actifs risqués)*

La densité Radon-Nikodym η_t est égale au produit de la fonction déterministe du temps $\varphi(t)$ et de $\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i})}$. De plus, si les corrélations $\rho_{i,j}$ sont nulles, alors nous obtenons une généralisation simple du cas unidimensionnel, à savoir que la fonction des actifs risqués est égale à $\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\mu_i - r}{\sigma_i})}$.

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned} \eta_t &= \mathcal{E} \left[- \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t - \sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[-1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right] \exp \left[- \sum_{i=1}^d \left(\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \sigma_i W_{i,t} \right] \\ &= \exp \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right] \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i})}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

□

Le processus η peut s'écrire comme suit :

$$\eta_t = \mathcal{E} [-sW_t] \text{ avec } W_t = \frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i W_{i,t}}{s} \text{ et } s = \sqrt{\sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j \rho_{ij}}.$$

Notons que le processus W est un mouvement Brownien standard.

4.3. Le portefeuille optimal.

4.3.1. *Utilité espérée standard.* Soit U une fonction d'utilité strictement concave et différentiable. Introduisons l'inverse de l'utilité marginale J , donné par :

$$J(y) = U'^{-1}(y).$$

En utilisant le résultat de base de Cox et Huang (1989), nous déduisons que la valeur du portefeuille optimal est égale à :

$$V_T^* = J(a.\eta_T),$$

où a est une constante déduite à partir de la contrainte budgétaire :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [V_T^*] = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [J(a.\eta_T)].$$

Dans ce qui suit, nous considérons le cas d'une fonction d'utilité du type HARA, à savoir $U(v) = (v - pV_0)^{(1-\phi)} / (1 - \phi)$ avec $\phi \neq 1$ et p est une proportion garantie de l'investissement initial V_0 . Cela implique que l'inverse de l'utilité marginale J est donné par :

$$J(y) = U'^{-1}(y) = pV_0 + y^{-1/\phi}.$$

Nous en déduisons que la valeur optimale du portefeuille pour le cas HARA est égale à :

$$V_T^* = J(a.\eta_T) = pV_0 + c\eta_T^{-1/\phi}, \quad (4.5)$$

où c est une constante déduite à partir de la contrainte budgétaire :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [V_T^*] = pV_0 + ce^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\eta_T^{-1/\phi} \right].$$

Alors, en utilisant la relation (4.4), nous déduisons que le profil du portefeuille optimal, telle que la valeur du portefeuille optimal est une fonction des valeurs des actifs risqués à l'échéance.

PROPOSITION 21. (*Le profil du portefeuille optimal*)

La valeur du portefeuille optimal V_T^* est une fonction des actifs de base S_i et donnée par :

$$pV_0 + c \exp \left[-\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) T \right] \prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)}. \quad (4.6)$$

Dans ce qui suit, nous déterminons le montant investi sur chaque actif risqué S_i .

PROPOSITION 22. (*La valeur du portefeuille optimal vue comme une stratégie CPPI dans le cas multidimensionnel*)

La valeur du portefeuille optimal satisfait : (les notions ci-dessous)

$$\begin{aligned} V_t^* &= P_t + C_t, \\ &\text{avec} \\ P_t &= e^{-r(T-t)} pV_0 \text{ (le plancher),} \\ C_t &= \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \text{ (le coussin),} \\ &\text{et} \\ m_i^* &= \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Comme nous l'avons déjà vu dans (4.6), la valeur du portefeuille V_T^* à l'échéance T est donnée par :

$$\begin{aligned} V_T^* &= pV_0 + \varphi(T) \prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)}, \\ &\text{avec} \\ \varphi(T) &= c \exp \left[1/2 \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) t \right] \prod_{i=1}^d \exp \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) t \right). \end{aligned}$$

A partir de la propriété de la martingale, la valeur du portefeuille V_t à n'importe quel moment t satisfait :

$$V_t^* = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [V_T^* | \mathcal{F}_t].$$

Alors, nous avons :

$$V_t^* = e^{-r(T-t)} pV_0 + \tilde{\psi}(T) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} | \mathcal{F}_t \right].$$

Cela signifie que la valeur du portefeuille V_t^* est une fonction des actifs de base $S_{i,t}$ à l'instant t , donnée par :

$$\begin{aligned} V_t^* &= e^{-r(T-t)} pV_0 + \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)}, \\ &\text{avec} \\ \psi(t) &= \varphi(T) \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

A partir de ces fonctions, nous déduisons le résultat.

Nous examinons maintenant les termes $\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$:

Nous avons :

$$\begin{aligned} (S_{i,T}/S_{i,t})^{m_i^*} &= \exp \left[m_i^* ((\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + \sigma_i (W_{i,T} - W_{i,t})) \right] \\ &= \exp \left[m_i^* (\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + 1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) \right] \\ &\quad \times \exp \left[-1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) + m_i^* \sigma_i (W_{i,T} - W_{i,t}) \right]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d (S_{i,T}/S_{i,t})^{m_i^*} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left[\sum_{i=1}^d m_i^* (\mu_i - 1/2\sigma_i^2)(T-t) + 1/2 (m_i^*)^2 \sigma_i^2 (T-t) \right].$$

□

PROPOSITION 23. (*Les actions du portefeuille optimal*)

Les actions du portefeuille optimal sont données par :

$$e_{i,t}^* = m_i^* [V_t^* - P_t] = m_i^* C_t.$$

DÉMONSTRATION. Afin de déterminer les actions optimales du portefeuille, nous déterminons d'abord la SDE satisfaite par la valeur optimale du portefeuille. Nous établissons :

$$dV_t^* = dP_t + \psi(t) d \left(\prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \right) + \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*} \psi'(t) dt.$$

Nous devons identifier les facteurs qui multiplient les termes $dS_{i,t}/S_{i,t}$. A cette fin, nous notons que :

$$d \left(\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right) = \sum_{i=1}^d \left(m_i^* \left[\prod_{j=1, j \neq i}^d S_{j,t}^{m_j^*} \right] S_{i,t}^{m_i^*-1} dS_{i,t} \right) + \vartheta_t,$$

où ϑ est un processus de variation borné. C'est pourquoi nous avons aussi :

$$d \left(\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right) = \sum_{i=1}^d \left(m_i^* \left[\prod_{i=1}^d S_{i,t}^{m_i^*} \right] \frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} \right) + \vartheta_t.$$

Puisque la valeur du portefeuille satisfait la relation suivante :

$$V_t^* - P_t = \psi(t) \prod_{i=1}^d (S_{i,t}/S_{i,0})^{m_i^*}.$$

Nous en déduisons que :

$$dV_t^* = \sum_{i=1}^d m_i^* [V_t^* - P_t] \frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} + \varkappa_t,$$

où \varkappa est un processus de variation borné. Enfin, en identifiant les facteurs de $\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}}$, nous obtenons :

$$e_{i,t}^* = m_i^* [V_t^* - P_t].$$

□

COROLLAIRE 14. *Pour le cas MBG, le portefeuille optimal correspond à un CPPI multidimensionnel où les montants investis respectivement sur les actifs de base sont proportionnels au même coussin avec des multiples constants respectifs :*

$$m_i^* = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right). \quad (4.7)$$

Nous notons que, si les corrélations $\rho_{i,j}$ sont nulles, nous obtenons une généralisation du cas unidimensionnel, tel que chaque exposition sur un actif individuel S_i est proportionnelle au même coussin C_t avec un multiple m_i^* qui est égal au ratio de Merton correspondant $\left(\frac{1}{\phi} \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2}\right)$. Cette dernière formule généralise le multiple unidimensionnel standard de la CPPI pour lequel nous avons $m^* = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\mu - r}{\sigma^2}\right)$, puisque pour $n = 1$, nous obtenons exactement le même résultat en utilisant la relation $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

4.3.2. Utilité avec regret/réjouissance. Nous introduisons une fonction de regret/réjouissance f , qui satisfait : $f[0] = 0$, $f' > 0$ (f est une fonction croissante), $f'' < 0$ (f est une fonction concave qui correspond à l'aversion au regret) et $f''' > 0$.

La fonction Φ_{h_0} est définie par :

$$\Phi_{h_0}(z) = U'(z) [1 + f'[U(z) - U(h_0(x))]].$$

Cette fonction est inversible pour tout x . Ainsi, la fonction de paiement du portefeuille optimal h_{RU}^* est donnée par :

$$h_{RU}^* = \Phi_{h_0}^{-1}(\lambda_{RU} g), \quad (4.8)$$

où λ_{RU} est un multiple de Lagrange tel que :

$$V_0 e^{rT} = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{h_0}^{-1}(\lambda_{RU} g(x)) g(x) f_{S_T}(x) dx.$$

Ainsi, la solution optimale est donnée par :

$$h_{RU}^* = \Phi_{h_0}^{-1}(\lambda_{RU} \chi s^{-\kappa}). \quad (4.9)$$

Nous considérons la fonction du regret suivante :

$$f(x) = \frac{1 - \exp[-ax]}{a}, \text{ avec } a > 0.$$

Alors, nous avons :

$$\Phi_{h_0}(z) = z^{-\gamma} \left(1 + \exp \left(-a \left[\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{h_0(x)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \right) \right).$$

Cette fonction est strictement décroissante et inversible dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Nous considérons pour l'instant une fonction d'utilité de regret/réjouissance par rapport à un investissement sans risque (c'est-à-dire : $h_0(S_T) = V_0 e^{rT}$). Nous pouvons comparer les solutions du cas de l'utilité standard avec ceux du cas de l'utilité avec regret/réjouissance. En regardant la relation (3.21), nous devons déterminer d'abord les sensibilités de la densité neutre au risque g aux valeurs des actifs risqués $s^{(i)}$. Plus spécifiquement, nous calculons les dérivés de son logarithme.

LEMME 3. (La dérivé du logarithme de la densité neutre au risque)

Nous avons :

$$\frac{\partial \log [g(s)]}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \frac{1}{s^{(i)}}. \quad (4.10)$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la relation (4.4), nous avons :

$$g(s) = \exp \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right] \prod_{i=1}^d \left(s^{(i)} / S_{i,0} \right)^{\left(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right)}.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\text{Log} [g(s)] = \left[\left(\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\sigma_i} (\mu_i - 1/2\sigma_i^2) - 1/2 \left(\sum_{i=1, j=1}^d \lambda_i \lambda_j \rho_{i,j} \right) \right) t \right] + \sum_{i=1}^d \left(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \text{Log} \left(s^{(i)} / S_{i,0} \right).$$

Ainsi, nous déduisons :

$$\frac{\partial \text{Log} [g(s)]}{\partial s^{(i)}} = \left(-\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \frac{1}{s^{(i)}}.$$

□

REMARQUE 12. *A partir de la relations (4.10), nous obtenons :*

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(\frac{1}{1 + RA/\phi} \right) \left(\frac{1 - \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{\phi g(s)} \right),$$

avec :

$$-\frac{\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}}}{g(s)} = -\frac{\partial \log [g(s)]}{\partial s^{(i)}} = \left(\frac{\lambda_i}{\sigma_i} \right) \frac{1}{s^{(i)}}.$$

- Si le portefeuille de référence h_0 ne dépend pas du vecteur des actifs risqués s , le ratio de la part investie sur l'actif i est divisé par la part investie sur l'actif j est donné par :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(j)}} = \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial g(s)}{\partial s^{(j)}} = \left(\frac{\lambda_i \sigma_j}{\lambda_j \sigma_i} \right) \frac{s^{(j)}}{s^{(i)}}.$$

Ce ratio ne dépend ni de l'aversion au risque ni de l'aversion au regret. Il est inversement proportionnel au ratio des valeurs des actifs.

- Si la valeur du portefeuille de référence h_0 correspond au portefeuille équitement pondéré (c'est-à-dire $h_0(s) = V_0/d \sum_{i=1}^d s^{(i)}/S_0^{(i)}$) :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} = \left(\frac{1}{1 + RA/\phi} \right) \left(\frac{1}{\phi} \right) \left(-\frac{\partial g(s)}{\partial s^{(i)}} + \left(U'(h_0(s)) \frac{f''}{1 + f'} \right) \left(\frac{1}{dS_0^{(i)}} \right) \right). \quad (4.11)$$

Par conséquent, nous déduisons la valeur du ratio $\frac{\partial h(s)}{\partial s^{(i)}} / \frac{\partial h(s)}{\partial s^{(j)}}$.

Dans ce qui suit, nous examinons les propriétés des fonctions Φ_{h_0} et Ψ_h par rapport à la fonction du risque et du regret.

EXEMPLE 1. *Nous supposons que la fonction du regret f satisfait :*

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma \neq 1, \text{ et } f(x) = \frac{1-e^{-ax}}{a}, \text{ avec } a > 0.$$

Dans ce cas, la fonction Q est donnée par :

$$Q(x) = x + \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{a}.$$

Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Phi_{h_0,x}(y) &= U'[y] \cdot (1 + f'[U(y) - U(h_0(x))]), \\ &= x^{-\gamma} \left(1 + e^{-a \left(\frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{h_0(x)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_z(y) &= -U'[y] \cdot Q'[U(z) - U(y)], \\ &= -y^{-\gamma} \left(1 + e^{a \left(\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} + e^{-a \left(\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} \right). \end{aligned}$$

La fonction $\Psi_z(\cdot)$ est illustrée par l'exemple numérique suivant :

$$\gamma = 5, a = 2, V_0 = 1000.$$

Notons que $\Psi_z(\cdot)$ est toujours positive.

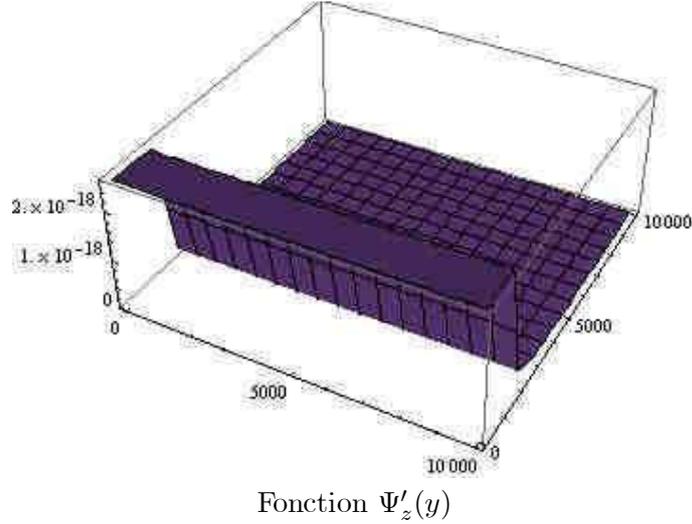


FIG. 1. Le signe de la dérivée (cas 1)

Comme la dérivée de $\Psi_z(\cdot)$ est positive, le problème (3.4) correspond à la minimisation d'une fonction convexe avec une contrainte linéaire. Par conséquent, sa solution est donnée par la relation (4.12) :

$$h_{0,h}(X_T) = \Psi_{h[x]}^{-1}(\lambda g(X_T)). \quad (4.12)$$

Pour des valeurs plus élevées de a ($a = 2 \times 10^9$), ce résultat n'est plus vrai et le signe de la dérivée de $\Psi_z(\cdot)$ varie.

REMARQUE 13. Autre fonction de regret f possible :

$$f(x) = k \left(\sqrt{x + b^2} - b \right) \quad \text{avec } k > 0 \text{ et } b > 0.$$

4.4. Illustration numérique. Les figures ci-dessous illustrent les profils du portefeuille optimal qui dépendent de l'aversion au risque et de l'aversion au regret de l'investisseur. Nous considérons la fonction du regret suivante, comme suggérée par Bell (1983) :

$$f(x) = \frac{1 - \exp[-ax]}{a}, \quad \text{avec } a > 0.$$

Alors, pour une fonction d'utilité du type CRRA, à savoir $U(v) = v^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, nous avons :

$$\Phi_{h_0(s)}(v) = v^{-\gamma} \left(1 + \exp \left(-a \left[\frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{h_0(s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \right) \right).$$

Par exemple, nous considérons le cas unidimensionnel dans lequel la dynamique de l'actif risqué est de type brownien géométrique avec les valeurs des paramètres suivantes :

$$\mu = 0.06; \sigma = 0.2,$$

et :

$$T = 8 \text{ ans}; S_0 = 100; V_0 = 100; \gamma = 2; a = 20.$$

La figure 2 illustre le profil du portefeuille optimal en tant que fonction de la valeur de l'actif risqué S . Comme prévu, comme l'aversion au regret assez élevée, la fonction de paiement optimale avec regret/réjouissance est nettement plus proche de la fonction de paiement correspondante à l'investissement sans risque.

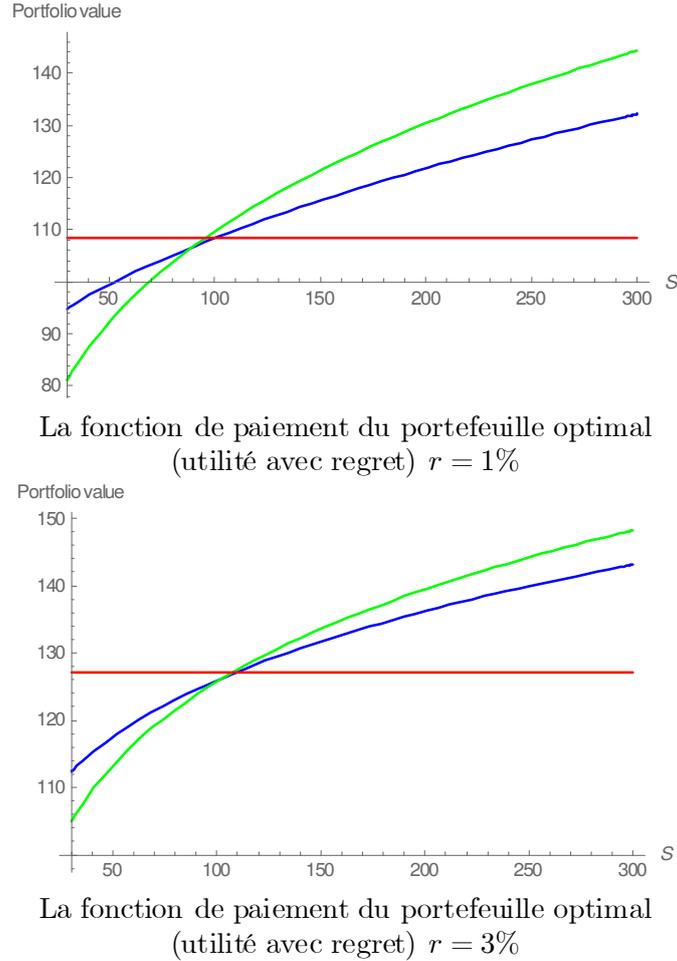


FIG. 2. La fonction de paiement du portefeuille optimal avec regret

Nous considérons maintenant le cas multidimensionnel dans lequel les dynamiques des actifs risqués sont de type brownien géométrique multidimensionnel avec les valeurs des paramètres suivants :

$$\mu_1 = 0.06; \sigma_1 = 0.15; \mu_2 = 0.07; \sigma_2 = 0.2; \rho = 0.5; r = 1\%,$$

et :

$$T = 8 \text{ ans}; S_{1,0} = S_{2,0} = 100; V_0 = 1; \gamma = 5. \quad (4.13)$$

Cas $a = 1$: La figure 2 illustre la valeur du portefeuille optimal en tant que fonction des valeurs des actifs risqués S_1 et S_2 . Comme prévu, depuis que l'aversion au regret est assez élevée, la fonction de paiement du portefeuille optimal avec regret/réjouissance est très proche de la fonction de paiement du portefeuille correspondant à l'investissement sans risque.

Considérons maintenant le cas $a = 10$ avec les mêmes valeurs des paramètres financiers que précédemment. La figure 6 illustre l'impact du regret sur le profil du portefeuille optimal. Pour des valeurs relativement élevées des deux actifs risqués, la valeur du portefeuille avec regret est moins élevée que celle du portefeuille optimal sans regret. Cependant, ceci n'est pas le cas pour des valeurs relativement faibles des deux actifs risqués.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion de portefeuille selon la théorie du regret pour un cas multidimensionnel. En effet, nous avons montré comment le sentiment du regret/réjouissance peut impacter la valeur du portefeuille optimal

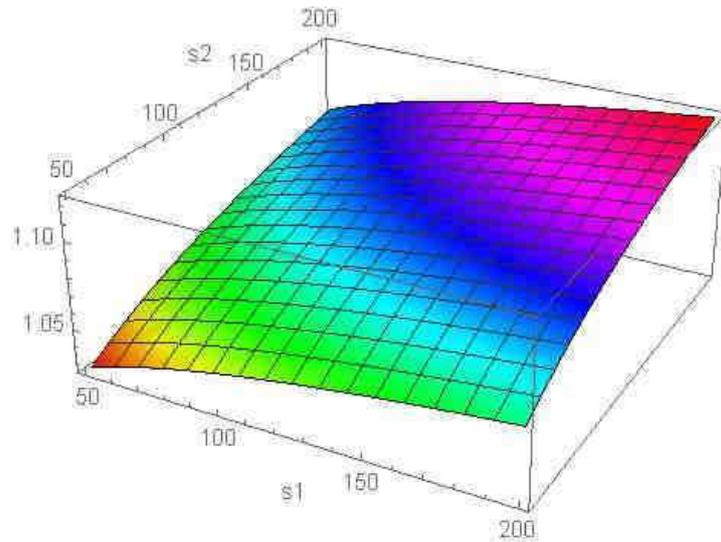


FIG. 3. Profil du portefeuille optimal pour l'utilité avec regret\réjouissance ($a=1$)

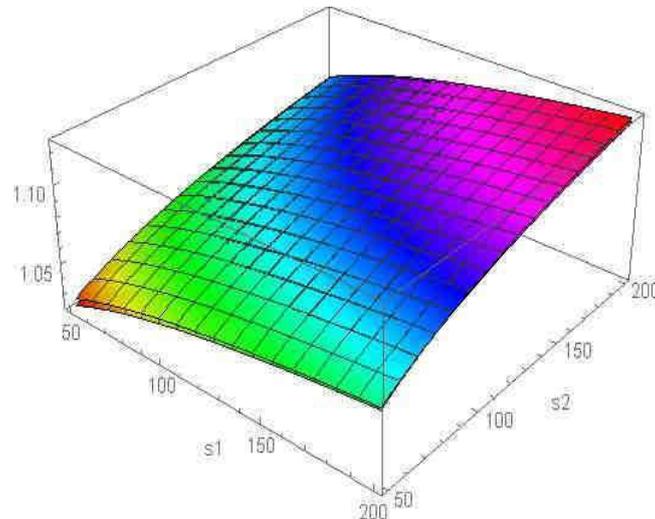


FIG. 4. Comparaison des profils du portefeuille optimal pour l'utilité avec et sans regret\réjouissance ($a=1$)

par rapport au cas de l'utilité espérée standard. Nous avons illustré le rôle de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur le choix du portefeuille optimal. En outre, nous avons examiné le cas des investisseurs qui peuvent avoir une aversion au regret, comme le suggèrent Bell (1982), Fishburn (1982) et Loomes et Sudgen (1987). Nous avons résolu le problème le plus général du positionnement optimal du portefeuille, en proposant une extension des résultats antérieurs de Leland (1980); Brennan et Solanki (1981) et Prigent (2006, 2007). Nous avons également montré que le sentiment de regret/réjouissance a un impact significatif sur l'allocation du portefeuille optimal. En effet, nous avons prouvé que dans le cadre de la théorie du regret, l'investisseur peut modifier substantiellement le profil de son portefeuille optimal.

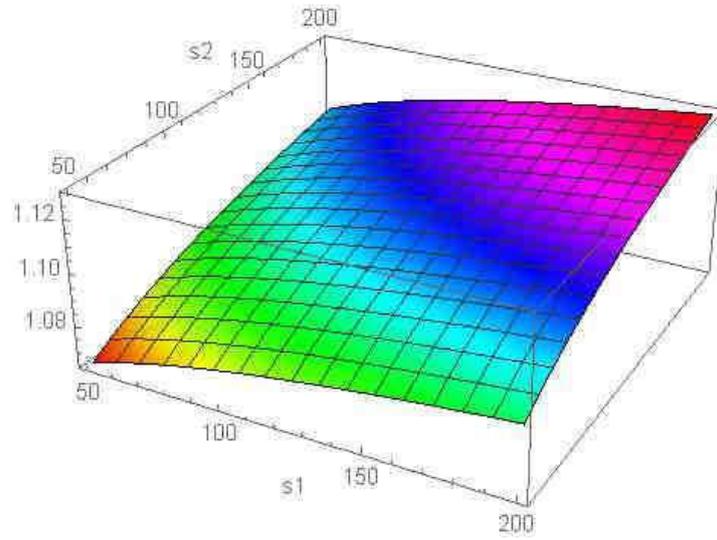


FIG. 5. Profil du portefeuille optimal pour l'utilité avec regret\réjouissance ($a=10$)

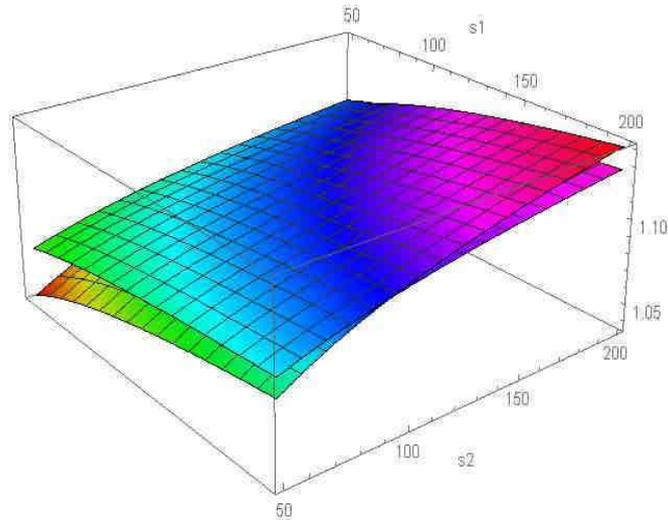


FIG. 6. Comparaison des profils du portefeuille optimal pour l'utilité avec et sans regret\réjouissance ($a=10$)

Le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à la déception

1. Introduction

Bien que la finance traditionnelle se concentre sur les outils utilisés permettant d'optimiser le rendement et minimiser les risques, la finance comportementale explique comment la psychologie et susceptible d'influencer les décisions des individus plus que la théorie financière. En effet, elle permet d'étudier comment les émotions et les biais cognitifs influencent les décisions financières des individus. Parmi ces émotions, la déception est considérée comme un sentiment très fort qui influence le comportement et les décisions des preneurs de décision. Comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre théorique de la thèse, la théorie de déception est une théorie descriptive du choix dans un cadre risqué et présente une théorie alternative à la théorie de l'utilité espérée. Bell (1985) et Loomes et Sugden (1986), les fondateurs de la théorie de déception, ont défini la déception comme une réaction psychologique vis-à-vis d'un rendement qui ne correspond pas aux anticipations et aux espérances antérieures de l'individu. Ils supposent que la déception est une réaction psychologique éprouvée par le preneur de décision juste après avoir fait un mauvais choix. Ils supposent aussi que l'individu forme une certaine espérance antérieure concernant le rendement futur d'une perspective donnée. Ils ont montré que l'individu éprouve de la déception (ou de l'allégresse) si le rendement de l'option choisie par l'individu est inférieur (ou supérieure) à son espérance une fois que l'incertitude est résolue. En outre, ils ont indiqué que la déception est associée à un sentiment douloureux et l'allégresse est associée à un sentiment de plaisir, de joie et d'euphorie. La déception est définie comme une proportion directe de la différence entre le rendement espéré et le rendement obtenu par l'alternative choisie (Van Dijk et van der Pligt, 1996 ; Zeelenberg et al., 2002 ; Van Dijk et alii, 2003). Contrairement à la théorie du regret, qui est essentiellement basée sur la comparaison entre le résultat obtenu par l'option choisie avec le résultat qui aurait pu être obtenu par les autres alternatives, la théorie de déception suppose que l'individu compare le rendement obtenu avec ses espérances.

L'origine des croyances subjectives revient à Akerlof et Dickens (1982). Plusieurs chercheurs (Akerlof et Dickens, 1982 ; Caplin et Leahy, 2001 ; Brunnermeier et Parker, 2005 ; Gollier, 2005) ont anticipé les sentiments dans le cadre de l'économie. Ils ont utilisé des modèles de choix de portefeuille simples pour montrer que les émotions anticipées, y compris la déception, peuvent expliquer les raisons pour lesquelles les individus sont rationnels et optimistes. Gollier et Muemmann (2006) ont développé un modèle qui est une combinaison entre la théorie de déception de Bell (1985) et la notion de déception d'Akerlof et Dickens (1982). Ils ont proposé un nouveau critère de prise de décision en présence du risque basé sur des hypothèses contradictoires aux principes de la théorie de l'utilité espérée. Ils ont défini une fonction de préférences comme étant la somme pondérée maximale de l'utilité espérée subjective générée à partir des émotions anticipées de l'utilité espérée objective de la déception. Cette fonction ne satisfait pas l'axiome d'indépendance et permet d'expliquer le paradoxe d'Allais. Leur modèle permet de prendre en compte la déception et suppose que l'individu choisit à l'avance son niveau d'optimisme. Il permet également d'expliquer l'énigme de la prime de risque. Gollier et Muemmann (2006) ont appliqué par la suite leur critère de prise de décision simple au problème de choix du portefeuille et à l'assurance de portefeuille et ont montré que l'individu est plus réticent à prendre le risque comparé à la prédiction du modèle de l'utilité espérée. Ce modèle permet à l'individu de déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal et les croyances optimales (optimistes ou pessimistes) qui lui permettent d'avoir le meilleur compromis entre la satisfaction ex-ante et la déception ex-post.

Ainsi, les anticipations possibles de l'individu sont fixées d'une manière exogène. Leurs résultats sont contradictoires aux espérances optimales obtenues par Brunnermeier et Parker (2005) et Gollier (2005) où l'agent est toujours optimiste et sélectionne le portefeuille le plus risqué.

Le problème d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion structurée en présence de l'aversion à la déception a été relativement peu traité par les chercheurs. Dans le cadre de l'assurance de portefeuille fondée sur la théorie de la déception, Lien et Wang (2001) ont examiné l'impact de l'aversion à la déception sur la stratégie de couverture avec des contrats à terme. Ils ont intégré une fonction de type CRRA dans le cadre de la théorie de l'aversion à la déception de Gul (1991) et ont montré que l'investisseur averse à la déception choisit une position à terme plus proche de la couverture avec une variance minimale qu'un investisseur moins averse à la déception. Ils ont également constaté que plus l'aversion au risque ou à la déception est élevée, plus le point de référence est bas et que le point de référence d'un individu déçu tend à être inférieur à celui d'un individu averse aux pertes. Par conséquent, l'investisseur averse à la déception a un comportement conservateur. En outre, selon la théorie de l'espoir et de la peur de Lopes (1987) et la théorie de portefeuille comportementale de Shefrin et Statman (2000), Jouini et al. (2013) ont introduit un modèle qui permet d'expliquer la coexistence de la demande d'assurance et de la loterie avec l'aversion à la déception et le désir de la satisfaction. Jouini et al. (2013) ont montré que l'assurance complète n'est pas optimale quand la valeur investie sur l'actif risqué est différente de 0. Ce résultat implique que les perspectives risquées peuvent être désirables et que les transformations de la dominance stochastique de second ordre sont absentes dans le cadre de la satisfaction de l'individu. En outre, la théorie de la déception a été appliquée en particulier au problème de la détermination des règles optimales de partage de risques entre les particuliers et les compagnies d'assurance.

Depuis Borch (1962), de nombreux chercheurs ont étudié ce problème à partir des résultats d'Arrow (1974) (cf. Kaluszka et Okolewski, 2008). Leurs recherches portent sur l'optimalité de l'assurance déductible basée sur la théorie de l'utilité espérée en généralisant la contrainte de la prime comme une combinaison convexe de la valeur espérée et de l'indemnité de l'assurance. Dans ce contexte, Huang et al. (2012) ont étudié l'optimalité du contrat d'assurance optimal sous l'angle de la théorie de la déception et ont montré que lorsque les individus anticipent une déception, il existe deux types de contrat d'assurance optimal. Le premier type de contrat comprend une franchise et une coassurance au-dessus de la franchise. Ils ont constaté que le coût marginal égal à zéro est juste une condition suffisante, mais non nécessaire, pour qu'une franchise zéro soit exigible. Le second type n'a pas de franchise et l'assurance optimale commence avec une couverture complète pour les petits sinistres et comprend une coassurance au-dessus d'une valeur supérieure de la couverture complète. Les deux types de contrats optimaux pourraient impliquer une coassurance. Un peu plus tard, Cheung et al. (2015) ont examiné les problèmes de prise de décision d'assurance optimale étudiés par Kaluszka et Okolewski (2008) et ont étudié la forme de la garantie d'assurance optimale sous les différentes théories de la déception (Bell, 1985 ; Loomes et Sugden, 1986 ; Gul, 1991 ; Cillo et Delquié, 2006). Ils ont montré que la garantie d'assurance reste optimale avec tous les modèles de la théorie de la déception. Quant à Artstein-Avidan et Dillenberger (2015), ils ont montré que les personnes déçues sont plus susceptibles d'acheter des contrats d'assurance dynamiques (par exemple, une assurance périodique). Cela s'explique par le fait que les investisseurs particuliers sont prêts à payer, en plus de la prime de risque, un bonus pour éviter d'être exposés à la résolution progressive de l'incertitude. Ainsi, Artstein-Avidan et Dillenberger (2015) ont montré que lorsque le coefficient d'aversion à la déception est très élevé, la prime payée pour la résolution progressive des situations de déception converge vers 0. Ceci présente un niveau qui permet à l'individu de maximiser son utilité espérée. Pour cette raison, il existe une valeur du coefficient d'aversion à la déception qui permet de maximiser la prime de résolution progressive.

Dans le cadre de l'assurance de portefeuille fondée sur la théorie de déception, Lien et Wang (2001) ont examiné l'effet de l'aversion à la déception sur la stratégie de couverture avec des contrats à terme. Ils ont intégré une fonction de type CRRA dans le cadre de la théorie de l'aversion à la déception de Gul (1991) et ont montré que l'investisseur averse à la déception choisit une position à terme plus

proche de la couverture avec une variance minimale qu'un investisseur moins averse à la déception. Ainsi, ils ont constaté que l'effet de l'aversion à la déception est plus fort lorsque l'individu est moins averse au risque. Ils ont constaté également, qu'au niveau de la couverture, une faible aversion à la déception conduit l'investisseur à être neutre au risque et à choisir une position radicalement différente de celle d'un investisseur très averse à la déception. De plus, Lien et Wang (2001) ont constaté que plus l'aversion au risque ou à la déception est élevée, plus le point de référence est bas. Leurs résultats numériques ont montré que le point de référence d'un individu averse à la déception tend à être inférieur à celui d'un individu averse aux pertes. Par conséquent, l'investisseur averse à la déception a un comportement conservateur et ne profite pas autant des bonnes opportunités qu'un investisseur averse aux pertes. De plus, selon la théorie de l'espoir et de la peur de Lopes (1987) et la théorie de portefeuille comportementale de Shefrin et Statman (2000), le modèle de Jouini et al. (2013) explique la coexistence de la demande d'assurance et de la loterie avec la peur de la déception et le désir de la satisfaction. Jouini et al. (2013) ont montré que l'assurance complète n'est pas optimale quand la valeur investie sur l'actif risqué est différente de 0. Ce résultat implique que les perspectives risquées peuvent être désirables et que les transformations de la dominance stochastique de second ordre sont absentes dans le cadre de la satisfaction de l'individu. Un peu plus tard, Cheung et al. (2015) ont réexaminé les problèmes de prise de décision d'assurance optimale étudiés par Kaluszka et Okolewski (2008) et ont étudié la forme de la garantie d'assurance optimale sous les différentes théories de la déception (Bell, 1985 ; Loomes et Sugden, 1986 ; Gul, 1991 ; Cillo et Delquié, 2006). Ils ont montré que la garantie d'assurance reste optimale avec tous les modèles de la théorie de la déception. Quant à Artstein-Avidan et Dillenberger (2015), ils ont montré que les personnes déçues sont plus susceptibles d'acheter des contrats d'assurance dynamiques (par exemple, une assurance périodique). Cela s'explique par le fait que les investisseurs particuliers sont prêts à payer, en plus de la prime de risque, un bonus pour éviter d'être exposés à la résolution progressive de l'incertitude. Ainsi, Artstein-Avidan et Dillenberger (2015) ont montré que lorsque le coefficient d'aversion à la déception est très élevé, la prime payée pour la résolution progressive des situations de déception converge vers 0. Ceci présente un niveau qui permet à l'individu de maximiser son utilité espérée. Pour cette raison, il existe une valeur du coefficient d'aversion à la déception qui permet de maximiser la prime de résolution progressive.

Cependant, le problème d'optimisation de portefeuille avec plusieurs actifs risqués en présence de l'aversion à la déception dans le cadre de la gestion structurée n'a pas été traité ni par les chercheurs ni par les praticiens. Ce sujet fait l'objet de ce chapitre. Dans ce chapitre, nous déterminons le positionnement optimal des produits structurés en présence d'aversion à la déception dans le cas multidimensionnel. D'abord, nous présentons le modèle de la théorie de déception fondamentale de Loomes et Sugden (1986), qui est la base de notre étude. Ensuite, nous explorons le cas discret. En effet, nous déterminons l'allocation du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception. Pour ceci, nous étudions un exemple numérique pour le cas binomial et le cas Lognormal. Par la suite, nous développons un modèle, dans le cadre de la gestion structurée, permettant de déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal qui permet de maximiser la fonction de l'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception pour le cas multidimensionnel. Ce modèle est une extension des résultats antérieurs portant sur la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980) ; Brennan et Solanki (1981) ; Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec déception. Enfin, Nos résultats théoriques antérieurs sont illustrés par un exemple numérique dans la dernière section de ce chapitre.

2. Modélisation

Dans ce qui suit, nous considérons le modèle de Loomes et Sugden (1986). Loomes et Sugden (1986) ont établi un modèle de choix en présence d'incertitude qui permet de générer une large classe de prédictions de comportement cohérentes avec celles des individus observés. Leur modèle revendique la violation du principe de la chose sûre et l'axiome des probabilités composées et propose une explication pour ces violations dans un cadre incertain.

Dans leur modèle, Loomes et Sugden (1986) supposent que l'individu fait face à une loterie A avec n conséquences dont la probabilité de survenance du $j^{\text{ième}}$ état est donnée par p_j satisfaisant $0 \leq p_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Le rendement de la stratégie w sous l'état j est noté par R_j^w . Ainsi, ils supposent que chaque individu possède une fonction d'utilité classique $u(\cdot)$ qui permet d'attribuer un indice d'utilité pour chaque valeur du portefeuille à l'échéance, à savoir $V_j^w = V_0 R_j^w$. Ce terme est noté par $u(V_0 R_j^w)$.

Dans un premier temps, Loomes et Sugden (1986) supposent que l'individu fait face à une loterie à une seule étape. La valeur de l'utilité espérée classique de cette loterie est donnée par :

$$\sum_{j=1}^n p_j u(V_0 R_j^w) = \overline{u(V^w)}.$$

Dans ce cadre, la déception et l'allégresse sont représentées par une seule fonction de valeur réelle différentiable, telle que $D(\cdot)$ attribue un incrément ou un décrement pour chaque valeur possible de la différence entre l'utilité du $j^{\text{ième}}$ état et l'espérance antérieure de l'individu : $u(V_j^w) - \overline{u(V^w)}$.

Cet incrément ou décrement permet de modifier l'utilité obtenue sous l'état j . Cette utilité modifiée est exprimée par : $u(V_j^w) + D[u(V_j^w) - \overline{u(V^w)}]$ et l'utilité espérée de la stratégie w est donnée par :

$$E_i = \sum_{j=1}^n p_j \left(u(V_j^w) + D[u(V_j^w) - \overline{u(V^w)}] \right).$$

Loomes et Sugden (1986) supposent que $D(0) = 0$, $D(\cdot)$ est une fonction croissante et sa dérivée vérifie $0 \leq D'(x) < 1$ pour tout x , $D(\cdot)$ est une fonction concave sur \mathbb{R}^- et convexe sur \mathbb{R}^+ . A noter que la condition $D'(x) < 1$ est introduite pour préserver la dominance stochastique d'ordre 1.

EXEMPLE 2. *A titre d'exemple, nous pouvons considérer la fonction d'utilité CRRA*

$$U(v) = \frac{v^{(1-\gamma)}}{1-\gamma},$$

et la fonction D suivante :

$$D_c(x) = \begin{cases} -x^2/(-x+c) & \text{pour } x < 0, \\ x^2/(x+c) & \text{pour } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{avec } c > 0.$$

La figure 1 illustre la fonction D .

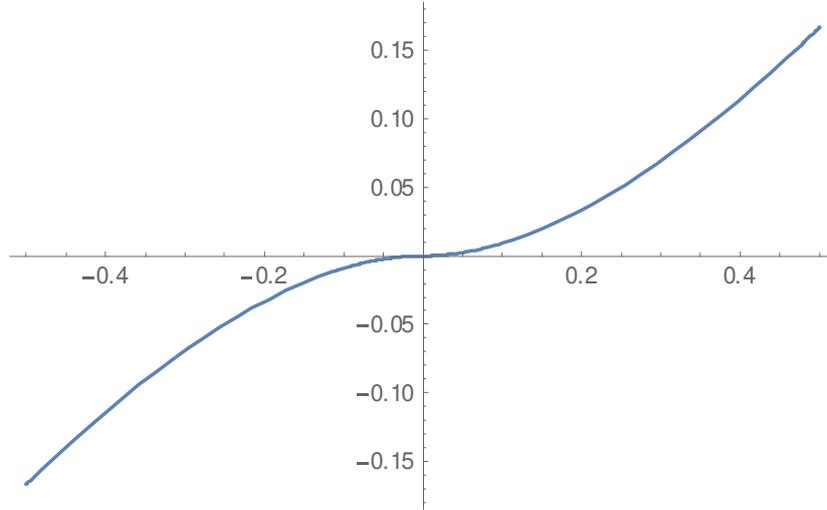


FIG. 1. La fonction D

3. Portefeuille optimal en présence d'aversion à la déception (cas discret)

Dans ce qui suit, nous supposons que l'investisseur cherche à déterminer l'allocation du portefeuille optimal w^* qui lui permet de maximiser sa fonction d'utilité espérée en présence d'aversion à la déception. L'actif sans risque est rémunéré au taux r . L'actif risqué S peut prendre n valeurs possibles correspondant aux n aléas potentiels. L'univers Ω est du type $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. La probabilité objective \mathbb{P} est définie par la donnée des $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$. La probabilité neutre au risque \mathbb{Q} est définie par la donnée des $q_i = \mathbb{Q}(\omega_i)$.

Considérons $V = (v_1; \dots; v_n)$ les valeurs possibles du portefeuille à échéance. L'investisseur cherche à maximiser l'espérance de l'utilité de la valeur terminale de son portefeuille donnée par :

$$\sum_{i=1}^n p_i \left(U(v_i) + D \left[U(v_i) - \sum_{j=1}^n p_j U(v_j) \right] \right), \quad (3.1)$$

sous la contrainte de budget suivante :

$$\sum_{i=1}^n q_i v_i = V_0(1 + r).$$

Les conditions du premier ordre du lagrangien associées au problème d'optimisation sous contrainte conduisent aux équations suivantes : Pour tout i ,

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\sum_{i=1}^n p_i \left(U(v_i) + D \left[U(v_i) - \sum_{j=1}^n p_j U(v_j) \right] \right) \right) = \lambda q_i.$$

Ceci nous conduit à : pour tout i ,

$$p_i [U'(v_i) + D' \left[U(v_i) - \sum_{j=1}^n p_j U(v_j) \right] [U'(v_i) - p_i U'(v_i)]] = \lambda q_i.$$

Ceci est encore équivalent à :

$$U'(v_i) \left(1 + (1 - p_i)D' \left[(1 - p_i)U(v_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j U(v_j) \right] \right) = \lambda q_i / p_i. \quad (3.2)$$

Notons que par stricte croissance de U , nous avons $U'(v_i) > 0$. Comme par hypothèse nous avons $D' \geq 0$, nous en déduisons que le terme de droite est strictement positif. Notons :

$$F(v_1, \dots, v_n) = (f_1(v_1, \dots, v_n), \dots, f_n(v_1, \dots, v_n)),$$

où $f_i(v_1, \dots, v_n)$ désigne la fonction :

$$U'(v_i) \left(1 + (1 - p_i)D' \left[(1 - p_i)U(v_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j U(v_j) \right] \right).$$

Etudions la monotonie de la fonction $f_i(v_1, \dots, v_n)$ par rapport à la variable v_i .

Pour cela, nous calculons $\frac{\partial f_i(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} = & \\ & U''(v_i) \left(1 + (1 - p_i)D' \left[(1 - p_i)U(v_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j U(v_j) \right] \right) \\ & + [U'(v_i)]^2 (1 - p_i)^2 D'' \left[(1 - p_i)U(v_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j U(v_j) \right]. \end{aligned}$$

Notons que par stricte concavité de U , nous avons $U''(v_i) < 0$.

Rappelons que $D''[(1 - p_i)U(v_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j U(v_j)]$ est négatif pour $U(v_i) < \sum_{j=1}^n p_j U(v_j)$ et positif

pour $U(v_i) > \sum_{j=1}^n p_j U(v_j)$.

Nous en déduisons en particulier que $\frac{\partial f_i(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i}$ est négative pour $U(v_i) < \sum_{j=1}^n p_j U(v_j)$. Pour le

cas $U(v_i) > \sum_{j=1}^n p_j U(v_j)$, une condition suffisante pour que $\frac{\partial f_i(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i}$ soit négative est que :

$$\frac{-U''(v_i)}{[U'(v_i)]^2} \geq D''(\dots) \frac{(1 - p_i)^2}{1 + (1 - p_i)D'[\dots]}.$$

3.1. Cas binomial. A l'échéance, l'actif risqué S ne prend que deux valeurs possibles dS_0 et uS_0 avec $d < 1 + r < u$. L'univers Ω est du type $\Omega = \{d, u\}$. La probabilité objective \mathbb{P} est définie par la donnée de $p_d = \mathbb{P}(d)$ et $p_u = \mathbb{P}(u)$. Rappelons que, dans ce cas, la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} est donnée par :

$$\mathbb{Q}(d) = \frac{u - (1 + r)}{u - d}; \mathbb{Q}(u) = \frac{(1 + r) - d}{u - d}.$$

La condition 3.2 devient ici :

$$U'(v_d) (1 + (1 - p_d)D' [(1 - p_d)U(v_d) - p_u U(v_u)]) = \lambda q_d / p_d. \quad (3.3)$$

$$U'(v_u) (1 + (1 - p_u)D' [(1 - p_u)U(v_u) - p_d U(v_d)]) = \lambda q_u / p_u. \quad (3.4)$$

A titre d'illustration, considérons le choix des fonctions U et D définies dans l'exemple 2. Nous avons :

$$D'_c(x) = \begin{cases} (x^2 - 2xc) / (-x + c)^2 & \text{pour } x < 0, \\ (x^2 + 2xc) / (x + c)^2 & \text{pour } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{et } U'(v) = v^{(-\gamma)}.$$

Pour ce cas particulier à deux aléas, notons que le problème d'optimisation se ramène à un problème à une seule variable sans contrainte. En effet, nous avons par exemple :

$$v_d = \frac{V_0(1 + r) - q_u v_u}{q_d}.$$

La condition du premier ordre en v_u est alors la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial v_u} \left[\begin{array}{c} p_u (U(v_u) + D [(1 - p_u)U(v_u) - p_d U(v_d)]) \\ + \\ p_d (U(v_d) + D [(1 - p_d)U(v_d) - p_u U(v_u)]) \end{array} \right] = 0,$$

où nous remplaçons v_d par $\frac{V_0(1+r)-q_u v_u}{q_d}$.

Nous obtenons la condition suivante :

$$\left[\begin{array}{c} p_u (U'(v_u) + D' [(1 - p_u)U(v_u) - p_d U(v_d)]) [(1 - p_u)U'(v_u) + p_d (q_u/q_d) U'(v_d)] \\ + \\ p_d ((-q_u/q_d) U'(v_d) + D' [(1 - p_d)U(v_d) - p_u U(v_u)]) [(1 - p_d) (-q_u/q_d) U'(v_d) - p_u U'(v_u)] \end{array} \right] = 0.$$

Nous pouvons également raisonner en poids optimaux. Soit w le poids investi sur l'actif risqué. Notons l'espérance de U (valeur de portefeuille) par $E(w)$:

$$E(w) = U(V_0 [(1 - w)(1 + r) + wd]) p_d + U(V_0 [(1 - w)(1 + r) + wu]) p_u.$$

Notons également :

$$\begin{aligned} v_d(w) &= V_0 [(1 - w)(1 + r) + wd] \\ v_u(w) &= V_0 [(1 - w)(1 + r) + wu] \end{aligned}$$

Nous obtenons la condition du premier ordre suivante pour les extrema locaux :

$$\left[\begin{array}{c} p_u \left[uU'(v_u(w)) + D' [v_u(w) - E(w)] \left[uU'(v_u(w)) - \frac{\partial E(w)}{\partial w} \right] \right] \\ + \\ p_d \left[dU'(v_d(w)) + D' [v_d(w) - E(w)] \left[dU'(v_d(w)) - \frac{\partial E(w)}{\partial w} \right] \right] \end{array} \right] = 0.$$

Les graphiques suivants illustrent les propriétés des solutions pour le cas numérique suivant :

$$V_0 = 1; r = 2\%, u = 10\%, d = -10\%; p_d = p_u = 1/2; \gamma = 5; c = 1.$$

Il apparait que l'existence d'un maximum dépend crucialement de la présence de contraintes ou non sur le poids investi sur l'actif risqué. Pour le cas A, le maximum est atteint en 0; pour le cas B, il est atteint en -0.4167 ; pour le cas C, il est toujours atteint en -0.4167 ; enfin, pour le cas D, nous voyons qu'il est atteint asymptotiquement et qu'il y a de plus la présence de deux minima locaux et d'un maximum local correspondant au cas précédent.

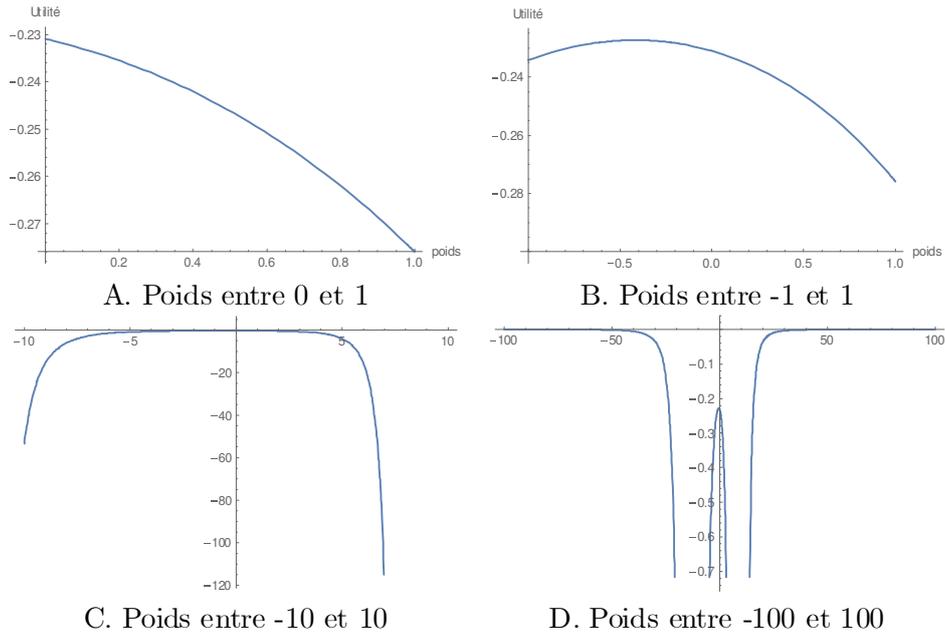
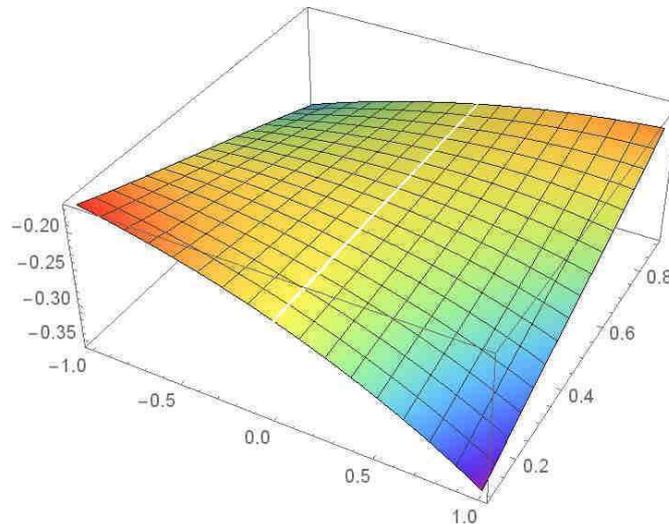


FIG. 2. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué

La figure 3 illustre l'impact de la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$.

FIG. 3. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité p_u ($\gamma=5$)

Nous constatons comme attendu que lorsque la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse est forte, l'investisseur choisit d'investir totalement sur cet actif. A contrario, quand cette probabilité est faible, l'investisseur choisit d'investir totalement sur l'actif sans risque.

La figure 4 illustre l'impact du rendement u de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$. Nous faisons varier le rendement u de $(1+r)$ à 50%.

Nous notons que lorsque le rendement de l'actif risqué à la hausse u est fort, l'investisseur ne choisit pas d'investir totalement sur cet actif. En effet, le rapport $Q(u)/Q(d)$ est décroissant en u et

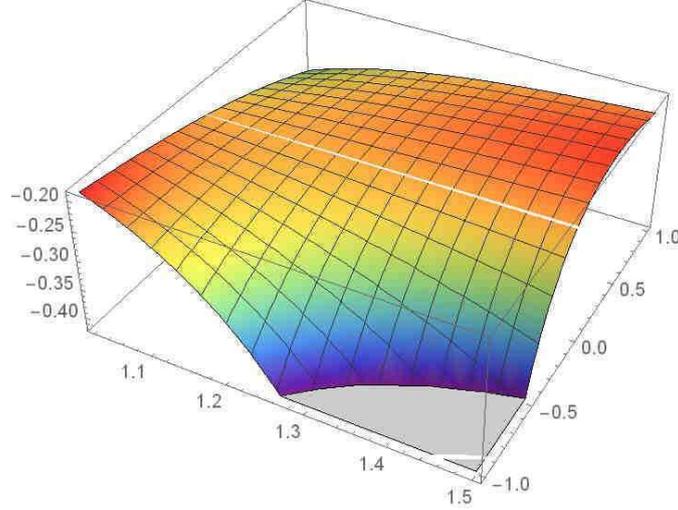


FIG. 4. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u ($\gamma=5$)

nous avons :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{Q}(d) = 1; \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{Q}(u) = 0.$$

La contrainte de budget tend à faire converger la solution vers le placement sans risque. Elle s'oppose ainsi à la solution consistant à tout investir sur l'actif risqué. Quand le rendement est faible, l'investisseur choisit d'investir totalement sur l'actif sans risque.

3.2. Cas Lognormal (statique). Dans ce qui suit, nous considérons un marché financier composé d'un actif sans risque B tel que $B_T = B_0 e^{rT}$ et un actif risqué S de loi lognormale donné par $S_T = S_0 e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T}$ où W_T suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sqrt{T})$.

L'investisseur doit choisir le poids optimal w sur l'actif risqué suivant son critère d'optimisation à savoir :

$$\max_w \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [U(V_T^w) + D(U(V_T^w) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T^w)])],$$

avec :

$$V_T^w = V_0 \left[(1-w) e^{rT} + w e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T} \right].$$

La condition du premier ordre conduit à la relation suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\begin{aligned} & U'(V_T^w) \left(e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T} - e^{rT} \right) + (D'(U(V_T^w) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(V_T^w)]) \times \\ & \left(U'(V_T^w) \left(e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T} - e^{rT} \right) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U'(V_T^w) \left(e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T} - e^{rT} \right) \right] \right) \end{aligned} \right] \\ = \lambda V_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(e^{(\mu - 0.5\sigma^2)T + \sigma W_T} - e^{rT} \right) \right].$$

Cette équation implicite peut être analysée numériquement. Considérons l'exemple numérique suivant :

$$\mu = 0.07; \sigma = 0.2,$$

et :

$$T = 1 \text{ an}; S_0 = 100; r = 2\%; V_0 = 1; \gamma = 5; c = 1.$$

Le tableau 1 montre que le poids optimal est encore une fonction croissante du rendement espéré comme dans le cas de l'utilité sans déception.

Le tableau 2 montre que le poids optimal est encore une fonction décroissante de la volatilité comme dans le cas de l'utilité sans déception.

TAB. 1. Le poids optimal en fonction de l'espérance de rendement en présence de déception

Tendance μ	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
Poids standard	4.92%	9.85%	14.82%	19.81%	24.82%	29.84%	34.87%
Poids avec déception	8.83%	9.33%	9.86%	10.4%	10.91%	11.44%	12%
Tendance μ	10%	11%	12%	13%	14%	15%	
Poids standard	39.91%	44.95%	50.01%	55.05%	60.1%	65.13%	
Poids avec déception	12.48%	13%	13.51%	14.03%	14.55%	15.06%	

TAB. 2. Le poids optimal en fonction de la volatilité en présence de déception

Volatilité	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	
Poids standard	51.06%	50.9%	50.6%	50.33%	50.04%	44.42%	39%	34.5%	30.73%	27.54%	
Poids avec déception	20.22%	18.12%	16.52%	15.3%	14.26%	13.44%	12.76%	12.19%	11.7%	11.3%	
Volatilité	20%	21%	22%	23%	24%	25%	26%	27%	28%	29%	30%
Poids standard	24.9%	22.5%	20.44%	18.66%	17.1%	15.8%	14.5%	13.42%	12.45%	11.6%	10.8%
Poids avec déception	10.9%	10.6%	10.3%	10.04%	9.8%	9.6%	9.4%	9.2%	9.03%	8.9%	8.7%

Nous notons globalement une sensibilité des poids optimaux en présence de déception bien moindre que dans le cas de l'utilité standard.

4. Portefeuille structuré optimal en présence d'aversion à la déception

Cette section étend les résultats antérieurs concernant la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec déception. Supposons que l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de son utilité U en présence d'une fonction de déception D . Cet investisseur est un preneur de prix (par exemple, son indice de référence S est le *S&P 500* et son investissement est trop faible pour modifier la valeur de l'indice).

Nous supposons que l'investisseur cherche à déterminer la fonction de paiement du portefeuille optimal h qui lui permet de maximiser sa fonction d'utilité espérée. Nous supposons que trois types d'actifs standards sont présents sur le marché : un actif sans risque N , une obligation B et un indice financier (action) S . A la maturité, la fonction de paiement optimale de l'investisseur doit être exprimée en fonction des valeurs possibles de (N_T, B_T, S_T) . Dans ce qui suit, nous supposons comme d'habitude que les prix des options sont déterminés suivant la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} . Nous désignons par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la dérivée de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à la probabilité historique \mathbb{P} , par N_T le facteur d'actualisation et par M_T le terme suivant $N_T \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Sous la condition de non-arbitrage, la contrainte budgétaire est exprimée par :

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(N_T, B_T, S_T)N_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(N_T, B_T, S_T)M_T]$$

La fonction d'utilité de l'individu U est supposée inversible et son inverse est donnée par J . La fonction de paiement V du portefeuille est exprimée en fonction des valeurs possibles des actifs standards présents sur le marché :

$$V = h(N_T, B_T, S_T).$$

Nous considérons la fonction D de déception. Afin de déterminer le positionnement du portefeuille optimal, l'investisseur doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max_h \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(N_T, B_T, S_T)) + D[U(h(N_T, B_T, S_T)) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(N_T, B_T, S_T))]]]$$

$$\text{s.c. } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(N_T, B_T, S_T)M_T].$$

Soit f_{X_T} la fonction de densité de $X_T = (N_T, B_T, S_T)$. Nous avons : $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(h(N_T, B_T, S_T))] = \int U(h(x))f_{X_T}(x)dx$. Nous supposons que la fonction h vérifie : ($d = 3$ ici)

$$\int_{\mathbb{R}^{+d}} h^2(x)f_{X_T}(x)dx < \infty.$$

Ceci signifie que $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$ qui est l'ensemble des fonctions mesurables dont le carré est intégrable sur \mathbb{R}^{+d} selon la distribution $\mathbb{P}_{X_T}(dx)$. Considérons la fonctionnelle $\Gamma_{U,D}$ associée à la fonction d'utilité U et à la fonction de déception D . Cette fonction est appelée la fonctionnelle de Nemitski et définie dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$ par :

$$\Gamma_{U,D} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{X_T}}[U(Y) + D(U(Y) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{X_T}}[U(Y)])] \text{ pour tout } Y \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T}(dx)),$$

Soit g la fonction de densité de M_T sous \mathbb{P} . Cette fonction est définie sur l'ensemble des valeurs de X_T dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T}(dx))$.

Le problème d'optimisation de l'investisseur est réduit à :

$$\max_{h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T}(dx))} \int_{\mathbb{R}^{+d}} \left(U(h(x)) + D \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^{+d}} U(h(x))f_{X_T}(x)dx \right] \right) f_{X_T}(x)dx$$

avec $V_0 = \int_{\mathbb{R}^{+d}} h(x)g(x)f_{X_T}(x)dx$.

Soit la fonction $\widehat{\Gamma}_{U,D}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{+d}, \mathbb{P}_{X_T})$ par :

$$\widehat{\Gamma}_{U,D} = \int_{\mathbb{R}^{+d}} \left(U(h(x)) + D \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^{+d}} U(h(x))f_{X_T}(x)dx \right] \right) f_{X_T}(x)dx$$

Considérons Λ la fonction linéaire définie par :

$$\Lambda(h) = \int_{\mathbb{R}^{+d}} h(x)g(x)f_{X_T}(x)dx,$$

correspondant à la contrainte budgétaire.

Nous supposons que la fonction $\widehat{\Gamma}_{U,D}$ est différentiable. La fonction de paiement maximale h doit satisfaire la condition du premier ordre suivante :

Il existe un scalaire λ tel que :

$$\frac{d\widehat{\Gamma}_{U,D}(h)}{dh} = \lambda\Lambda.$$

Les conditions du premier ordre du lagrangien associé au problème d'optimisation sous contrainte conduisent aux équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\int_{\mathbb{R}^{+d}} \left(U(h(x)) + D \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^{+d}} U(h(x))f_{X_T}(x)dx \right] \right) f_{X_T}(x)dx \right) = \lambda\Lambda.$$

Ceci nous conduit à :

$$U'(h(x)) + D' \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^{+d}} U(h(x))f_{X_T}(x)dx \right] (U'(h(x)) - U'(h(x))f_{X_T}(x)) = \lambda g(x).$$

Ceci est encore équivalent à :

$$U'(h(x)) \left(1 + (1 - f_{X_T}(x))D' \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^{+d}} U(h(x))f_{X_T}(x)dx \right] \right) = \lambda g(x). \quad (4.1)$$

Considérons la fonction $\Phi_{U,D}(h)$ définie par :

$$\Phi_{U,D}(h)(x) =$$

$$U'(h(x)) \left(1 + (1 - f_{X_T}(x)) D' \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^d} U(h(x)) f_{X_T}(x) dx \right] \right)$$

Supposant que cette fonction soit inversible pour tout x . Alors, la fonction de paiement du portefeuille optimal est définie par :

$$h^* = \Phi_{U,D}^{-1}(\lambda g),$$

où λ est un multiplicateur scalaire de Lagrange tel que :

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{U,D}^{-1}(\lambda g(x)) g(x) f_{X_T}(x) dx.$$

La condition de premier ordre fournit une condition nécessaire permettant d'avoir la fonction de paiement optimale h^* .

La dérivée de la fonctionnelle $\Phi_{U,D}$ est donnée par :

$$U''(h(x)) \left(1 + (1 - f_{X_T}(x)) D' \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^d} U(h(x)) f_{X_T}(x) dx \right] \right) +$$

$$U'^2(h(x)) (1 - f_{X_T}(x))^2 \left(D'' \left[U(h(x)) - \int_{\mathbb{R}^d} U(h(x)) f_{X_T}(x) dx \right] \right)$$

La fonction de paiement optimale h^* satisfait cette relation :

$$h^{*'}(x) = \left(-\frac{\Phi_{U,D}(h)(x)}{\Phi'_{U,D}(h)(x)} \right) \times \left(-\frac{g'(s)}{g(s)} \right)$$

Introduisons la fonction $T_{0,D}(h(S))$ définie par :

$$T_{0,D}(h(x)) = \left(-\frac{\Phi_{U,D}(h)(x)}{\Phi'_{U,D}(h)(x)} \right).$$

La fonction $T_{0,D}$ correspond à une tolérance au risque généralisée en présence de déception.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème du positionnement optimal du portefeuille en présence de déception potentielle en se basant sur le modèle fondamental de la théorie de la déception de Loomes et Sugden (1986). En effet, nous avons d'abord examiné l'allocation du portefeuille optimal permettant de maximiser la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception. Dans ce contexte, nous avons examiné un exemple numérique permettant de déterminer le portefeuille optimal pour le cas binomial (deux actifs risqués) et un autre dans le cadre Lognormal. Ensuite, nous avons introduit un modèle qui nous permet d'identifier la fonction de paiement du portefeuille optimal correspondant à la maximisation de l'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception, y compris pour le cas multidimensionnel, dans le cadre de la gestion structurée. Ce modèle nous a permis d'étendre les résultats antérieurs portant sur la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980); Brennan et Solanki (1981); Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec déception. Les résultats numériques ont montré que les pondérations optimales des actifs risqués sont moins sensibles à la variation de la volatilité en présence de déception que dans le cas de l'utilité standard.

6. Annexe

Cas $\gamma = 2$.

Les graphiques suivants illustrent les propriétés des solutions pour le cas numérique suivant :

$$V_0 = 1; r = 2\%, u = 10\%, d = -10\%; p_d = p_u = 1/2; \gamma = 2; c = 1.$$

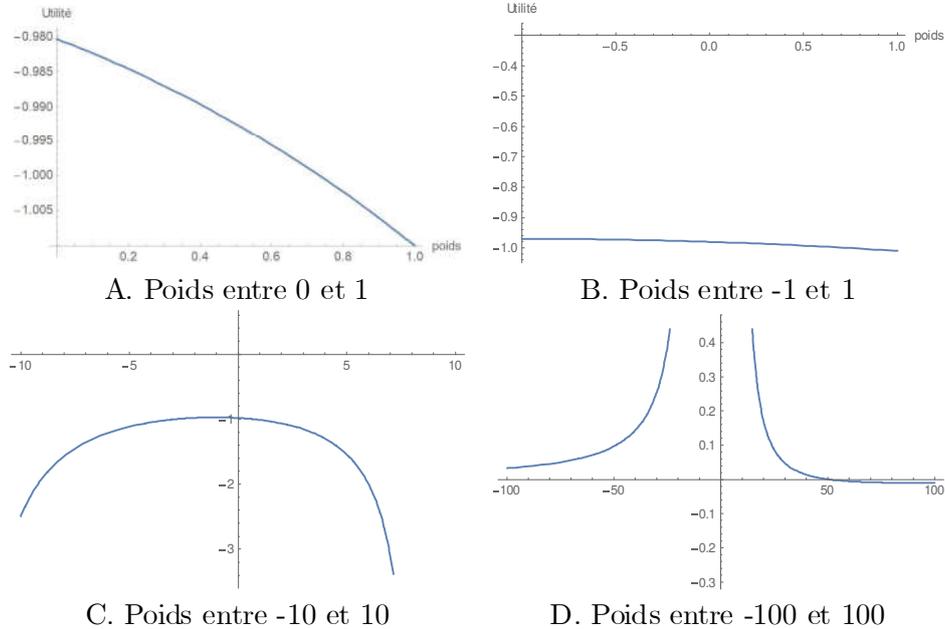


FIG. 5. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué ($\gamma=2$)

Il apparaît que l'existence d'un maximum dépend beaucoup de la présence de contraintes ou non sur le poids investi sur l'actif risqué. Pour le cas A, le maximum est atteint en 0; pour tous les autres cas, il est atteint en -0.4167 .

La figure 6 illustre l'impact de la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$.

Nous constatons comme attendu que lorsque la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse est forte, l'investisseur choisit d'investir totalement sur cet actif. A contrario, quand cette probabilité est faible, l'investisseur choisit d'investir totalement sur l'actif sans risque.

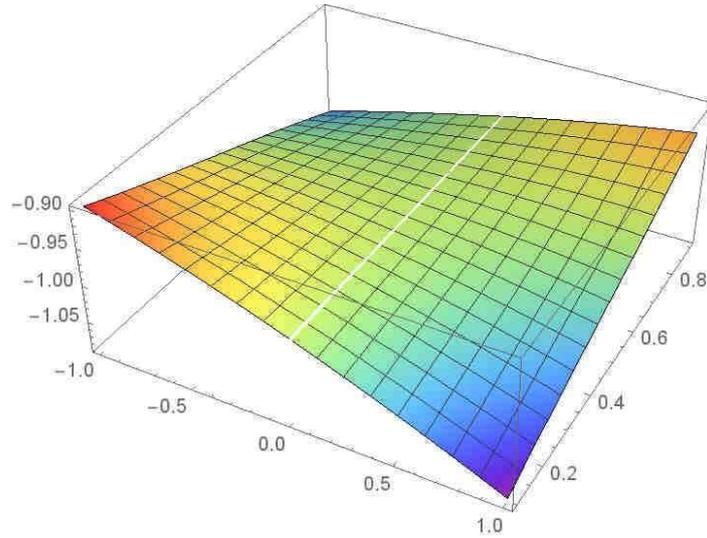


FIG. 6. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité p_u ($\gamma=2$)

La figure 7 illustre l'impact du rendement u de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$. Nous faisons varier le rendement u de $(1+r)$ à 50%.

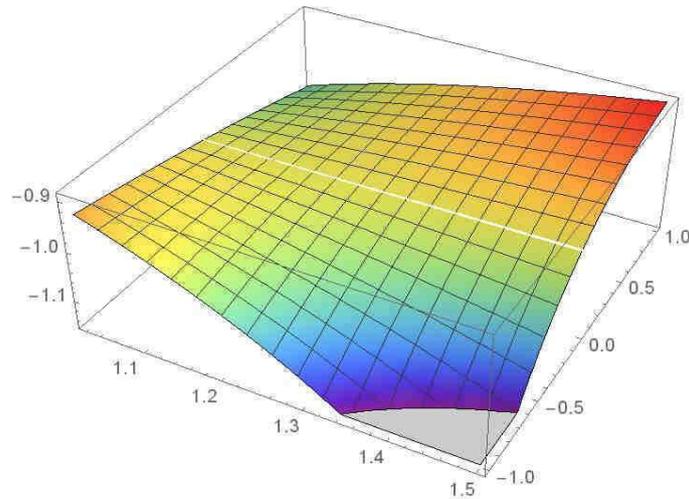


FIG. 7. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u ($\gamma=2$)

Cas $\gamma = 10$.

Les graphiques suivants illustrent les propriétés des solutions pour le cas numérique suivant :

$$V_0 = 1; r = 2\%, u = 10\%, d = -10\%; p_d = p_u = 1/2; \gamma = 10; c = 1.$$

Il apparaît que l'existence d'un maximum dépend cruciallement de la présence de contraintes ou non sur le poids investi sur l'actif risqué. Pour le cas A, le maximum est atteint en 0 ; pour tous les autres cas B, il est atteint en -0.2075 .

La figure 9 illustre l'impact de la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$.

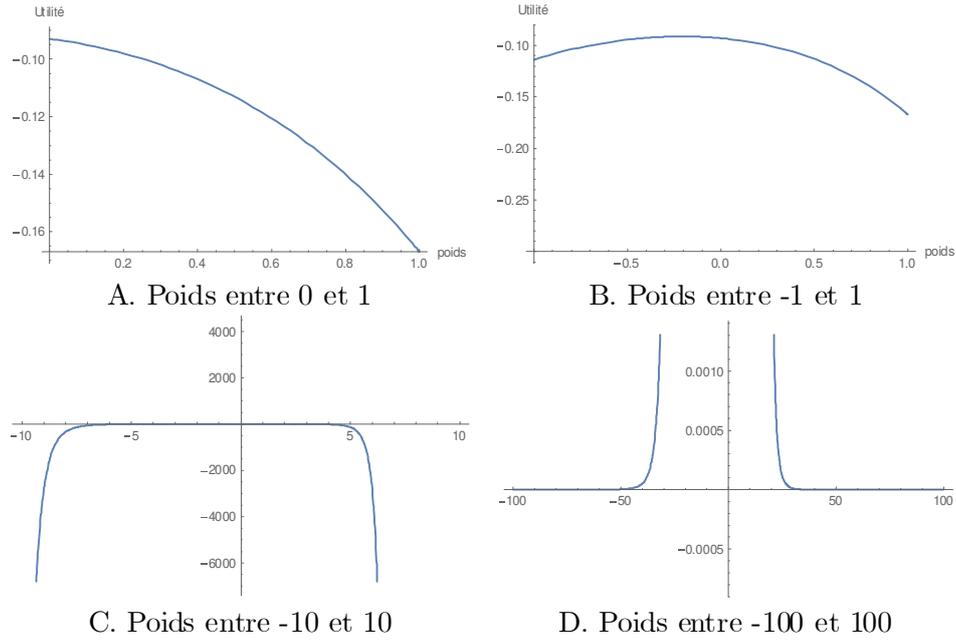


FIG. 8. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué ($\gamma=10$)

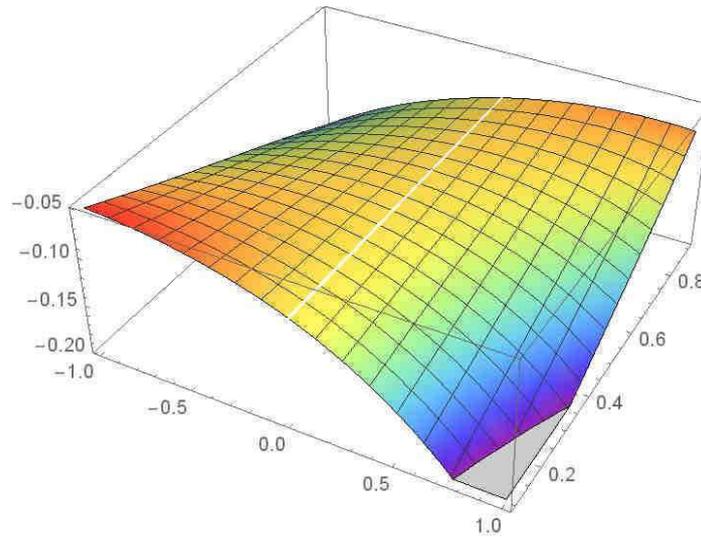


FIG. 9. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et de la probabilité p_u ($\gamma=10$)

Nous constatons comme attendu que lorsque la probabilité p_u d'avoir un rendement de l'actif risqué à la hausse est forte, l'investisseur choisit d'investir totalement sur cet actif. A contrario, quand cette probabilité est faible, l'investisseur choisit d'investir totalement sur l'actif sans risque.

La figure 10 illustre l'impact du rendement u de l'actif risqué à la hausse. Nous considérons la contrainte suivante sur le poids : $w \in [-1, 1]$. Nous faisons varier le rendement u de $(1+r)$ à 50%.

Au final, nous constatons que le poids optimal investi sur l'actif risqué est toujours négatif (pour $\gamma = 2, 5$ et 10) et croissant en γ .

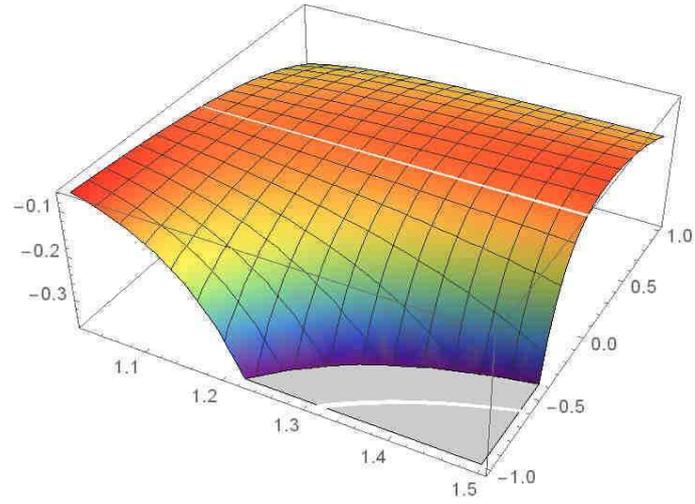


FIG. 10. Espérance d'utilité en fonction du poids de l'actif risqué et du rendement à la hausse u ($\gamma=10$)

Bibliographie

- [1] Abido K., Simo-Kengue B., Mba J., Koumba U. (2018). Behavioral portfolio selection and optimisation : An application to international stocks. *Financial Markets and Portfolio Management, Springer*, 27.
- [2] Akerlof G., Dickens W. (1982). The economic consequences of cognitive dissonance. *American Economic Review*, 72, 3, 307-319.
- [3] Alary D., Gollier C., Treich N. (2013). The effect of ambiguity aversion on insurance and self-protection. *The Economic Journal*, 123, 573, 1188-1202.
- [4] Allais M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, 21, 4, 503-546.
- [5] An Y., Jin Z., Zhang J. (2017). Dynamic portfolio optimization with ambiguity aversion. *Journal of Banking and Finance*, 79, 95-109.
- [6] Anscombe F., Aumann R. (1963). Definition of subjective probability. *The Annals of Mathematical Statistics*, 34, 1, 199-205.
- [7] Anderson J., Sirjusingh C., Parsons A., Boone C., Wickens C., Cowen L., Kohn L. (2003). Model of selection and experimental evolution of antifungal drug resistance in *saccharomyces cerevisiae*. *Genetics*, 163, 4, 1287-1298.
- [8] Arrow K. (1963). Uncertainty and the welfare economics of medical care notes on contributors. *The American Economic Reviews*, 3, 5, 141-149.
- [9] Arrow K. (1971). Insurance, risk and resource allocation. *Foundations of Insurance Economics*, 14, 220-229.
- [10] Arrow K. (1974). The limits of organization. *Norton and Company*, 1, New York, 96.
- [11] Arrow K. (1977). The Property Rights doctrine and demand revelation. *Economics and Human Welfare, Essays in Honor of Tibor Scitovsky*, 23-39.
- [12] Artstein-Avidan S., Dillenberger D. (2015). Dynamic disappointment aversion : Don't tell me anything until you know for sure. *PIER Working Paper Archive, No. 10-025, Penn Institute for Economic Research, Department of Economics, University of Pennsylvania*.
- [13] Arzac E., Bawa V. (1977). Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors. *Journal of Financial Economics*, 4, 3, 277-288.
- [14] Asgary A., Levy J. (2009). A review of the implications of prospect theory for natural hazards and disaster planning. *International Journal of Environmental Research*, 3, 3, 383.
- [15] Balder S., Mahayni A. (2008). Cash-lock comparison of portfolio insurance strategies. *Technical Rept.*
- [16] Balder S., Brandl M., Mahayni A. (2009). Effectiveness of CPPI strategies under discrete-time trading. *The Journal of Economic Dynamics and Control*, 33, 204-220.
- [17] Barberis N., Huang M., Thaler R. (2006). Individual preferences : Monetary gambles, and stock market participation : A case for narrow framing. *The American Economic Review*, 96, 4, 1069-1090.
- [18] Barberis N., Huang M., Santos T. (2001). Prospect theory and asset prices. *Quarterly Journal of Economics*, 1, 116, 1-53.
- [19] Barberis N., Thaler R. (2002). A survey of behavioral finance. *Handbook of the Economics of Finance*, 1, 1053-1128.
- [20] Barberis N., Huang M. (2008). Stocks as lotteries : The Implications of probability weighting for security prices. *American Economic Review*, 98, 5, 2066-2100.
- [21] Baron J., Ritov I. (1995). Outcome knowledge, regret and omission bias. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 64, 119-127.
- [22] Basak S. (1995). A general equilibrium model of portfolio insurance. *Review of Financial Studies*, 8, 4, 1059-1090.
- [23] Basak S. (2002). A comparative study of portfolio insurance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 7-8, 1217-1241.
- [24] Becker S. W., Brownson F. O. (1964). What price ambiguity ? or the role of ambiguity in decision-making. *Journal of Political Economy*, 72, 1, 62-73.
- [25] Bell D. (1982). Regret in decision making under uncertainty. *Operations Research*, 30, 5, 961-981.

- [26] Bell D. (1983). Risk premiums for decision regret. *Management Science*, 29, 10, 1156-1166.
- [27] Bell D. (1985). Disappointment in decision making under uncertainty. *Operations Research*, 33, 1, 1-27.
- [28] Ben Ameur H., Prigent J.-L. (2010). Behavior towards risk in structured portfolio management. *International Journal of Economics and Finance*, 2, 5, 91-102.
- [29] Ben Ameur H., Prigent J.-L. (2013). Optimal portfolio positioning under ambiguity. *Economic Modelling*, 34, 89-97.
- [30] Ben-Tal A., Nemirovski A. (1998). Robust Convex Optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23, 4.
- [31] Ben-Tal A., Nemirovski A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25, 1, 1-13.
- [32] Benartzi S., Thaler R. (1995). Myopic loss aversion and the equity premium puzzle. *Quarterly Journal of Economics*, 110, 1, 73-92.
- [33] Benartzi S., Thaler R. (2001). Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American Economic Review*, 91, 1, 79-98.
- [34] Benninga S., Mayshar J. (2000). Heterogeneity and option pricing. *Review of Derivatives Research*, 4, 1, 7-27.
- [35] Berber B., Odean T. (2000). Trading is hazardous to your wealth : The common stock investment performance of individual investors. *The Journal of Finance*, 2, 773-806.
- [36] Berkelaar A., Kouwenberg R., Thierry P. (2004). Optimal portfolio choice under loss aversion. *Review of Economics and Statistics*, 86, 4, 973-987.
- [37] Bernard C., Ghossoub M. (2010). Static portfolio choice under cumulative prospect theory. *Mathematics and Financial Economics*, 4, 2, 277-306.
- [38] Bernardo A., Ledoit O. (2000). Gain, loss, and asset pricing. *Journal of Political Economy*, 10, 1, 144-172.
- [39] Bernoulli D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 5, 175-192. (Translated as Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk (1954). *Econometrica*, 22, 23-26.
- [40] Bertrand P., Lesne J.-P., Prigent J.-L. (2001). Gestion de portefeuille avec garantie : L'allocation optimale en actifs dérivés. *Finance*, 22, 7-35.
- [41] Bertrand P., Prigent J.-L. (2005). Portfolio insurance strategies : OBPI versus CPPI. *Finance*, 26, 5-32.
- [42] Bertrand P., Prigent J.-L. (2010). A note on risk aversion, prudence and portfolio insurance. *Geneva Risk and Insurance Review*, 35, 1, 81-92.
- [43] Bertrand P., Prigent J.-L. (2011). Omega performance measure and portfolio insurance. *Journal of Banking and Finance*, 35, 7, 1811-1823.
- [44] Bertrand P., Prigent J.-L. (2012). Gestion de portefeuille : Analyse quantitative et gestion structurée. *Economica*, 2, Paris, 381.
- [45] Bertrand P., Prigent J.-L. (2015). French retail financial structured products : A typology and assessment of their fair pricing. *Bankers, Markets and Investors*, 135, 5-19.
- [46] Bertrand P., Prigent J.-L. (2015b). On path-dependent structured funds : Complexity does not always pay (Asian versus Average performance funds). *Finance*, 36, 2, 67-105.
- [47] Biagini S., Pinar M. (2015). The robust Merton problem of an ambiguity averse investor. *Mathematics and Financial Economics*, 11, 1, 1-24.
- [48] Black F., Jones R. (1987). Simplifying portfolio insurance. *Journal of Portfolio Management*, 48-51.
- [49] Black F., Rouhani R. (1989). Constant proportion portfolio insurance and the synthetic put option : A comparison. *Institutional Investor Focus on Investment Management*, edited by Frank J. Fabozzi. Cambridge, Mass : Ballinger, 695-708.
- [50] Black F., Perold A. (1992). Theory of constant proportion portfolio insurance. *Journal of Economics, Dynamics and Control*, 16, 403-426.
- [51] Blazenko G. (1985). The design of an optimal insurance policy. *American Economic Review*, 75, 1, 253-255.
- [52] Bleichrodt H., Cillo A., Diecidue E. (2010). A quantitative measurement of regret theory. *Management Science*, 56, 1, 161-175.
- [53] Bleichrodt H., Wakker P. (2015). Regret theory : A bold alternative to the alternatives. *The Economic Journal*, 583, 125, 493-532.
- [54] Blondel S. (2003). Généralisation de l'espérance d'utilité : le cas des jeux de loterie en France. *Economie et prévision*, 159, 105-112.
- [55] Boles T., Larrick R. (1995). Avoiding regret in decisions with feedback : A negotiation example. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 63, 1, 87-97.

- [56] Boles T., Messick D. (1995). A reverse outcome bias : The influence of multiple reference points on the evaluation of outcomes and decisions. *Organizational Behavior and Human Decision and Processes*, 62, 262-275.
- [57] Bookstaber R., Clarke R. (1984). Option portfolio strategies : Measurement and evaluation. *The Journal of Business*, 57, 4, 469-492.
- [58] Bookstaber R., Langsam J. (1988). Portfolio insurance trading rules. *Journal of Futures Markets*, 8, 1, 15-31.
- [59] Borch K. (1962). Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, 30, 3, 424-444
- [60] Bower G., Wright W. (1992). Mood effects on subjective probability assessment. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 52, 276-291.
- [61] Branger N., Vrecko D. (2009). Why is portfolio insurance attractive to investors?. *JEL Classification* : D1, G13.
- [62] Braun M., Muermann A. (2004). The impact of regret on the demand for insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 71, 4, 737-767.
- [63] Breeden D., Litzenberger R. (1978). Prices of state contingent claims implicit in options prices. *Journal of Business*, 51, 4, 621-651.
- [64] Brennan M., Schwartz E. (1976). The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3, 3, 195-213.
- [65] Brennan M., Solanki R. (1981). Optimal portfolio insurance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16, 3, 279-300.
- [66] Brennan M., Schwartz E. (1989). Portfolio insurance and financial market equilibrium. *The Journal of Business*, 62, 4, 455-72.
- [67] Breuer W., Perst A. (2007). Retail banking and behavioral financial engineering : The case of structured products. *Journal of Banking and Finance*, 31, 827-844.
- [68] Broihanne M.-H., Merli M., Roger P. (2004). Finance comportementale. *Economica, Gestion*, 262.
- [69] Brunnermeier M., Parker J. (2005). Optimal Expectations. *American Economic Review*, 95, 4, 1092-1118.
- [70] Buhlmann H., Delbaen F., Embrechts P., Shiryaev A. (1996). No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms. *CWI Quarterly*, 9, 4, 291-317.
- [71] Bultel D., Connolly T. (2006). Regret in economic and psychological theories of choice. *Journal of Behavioral Decision Making*, 19, 2, 139-154.
- [72] Burth S., Kraus T., Wohlwend H. (2001). The pricing of structured products in the Swiss market. *Journal of Derivatives*, 2, 9, 30-40.
- [73] Camille N., Coricelli G., Sallet J., Pradat-Diehl P., Duhamel J., Sirigu A. (2004). The involvement of the orbitofrontal cortex in the experience of regret. *Science*, 304, 5674, 1167-1170.
- [74] Campbell J., Viceira L. (2002). Strategic asset allocation : Portfolio choice for long-term investors. *Clarendon lecture in Economics, Oxford University Press*, 1, New York, 274.
- [75] Caplin A., Leahy J. (2001). Psychological expected utility theory and anticipatory feelings. *The Quarterly Journal of Economics*, 116, 1, 55-79.
- [76] Carr P., Madan D. (2001). Optimal positioning in derivative securities. *Quantitative finance*, 1, 19-37.
- [77] C el erier C., Vallée B. (2013). Catering to investors through security design : Headline rate and complexity. *Quarterly Journal of Economics*, 132, 3, 1469-1508.
- [78] Chang E. C., Tang D.Y., Zhang M. (2015). Suitability checks and household investments in structured products. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 50, 3, 597-622.
- [79] Chauveau T., Nalpas N. (2002). Disappointment, pessimism and the equity risk premia. *JEL classification* : D81, G12.
- [80] Chauveau T., Nalpas N. (2009). A theory of disappointment. *JEL Classification* : D81.
- [81] Chen A., Kensinger J. (1990). An analysis of market-index certificates of deposit. *Journal of Financial Services Research*, 4, 93-110.
- [82] Chen K., Sears R. (1990). Pricing the SPIN. *Financial Management*, 2, 19, 36-47.
- [83] Chen Z., Epstein L. (2002). Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. *Econometrica*, 70, 4, 1403-1443.
- [84] Chen X., Delstra G., Dhaene J., Vanmaele M. (2008). Static super-replicating strategies for a class of exotic options. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42, 3, 1067-1085.
- [85] Cheung K., Chong Yam S. (2015). The optimal insurance under disappointment theories. *Insurance : Mathematics and Economics*, 64, 77-90.
- [86] Chew S., MacCrimmon K. (1979). Alpha-nu choice theory : An axiomatization of expected utility. *Working Paper, University of British Columbia, Vancouver, BC*.

- [87] Chew S. (1982). A mixture set axiomatization of weighted utility theory. *College of Business and Public Administration Discussion Paper, University of Arizona*, 82-84.
- [88] Chew S. (1983). A Generalization of thequasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox. *Econometrica*, 51, 4, 1065-92.
- [89] Chow C., Sarin R. (2001). Comparative Ignorance and the Ellsberg Paradox. *Journal of Risk and Uncertainty*, 22, 2, 129-139.
- [90] Cillo A., Delquié P. (2006). Expectations, disappointment, and rank-dependent probability weighting. *Theory and Decision*, 2, 60, 193-206.
- [91] Collard F., Mukerji S., Sheppard K., Tallon J.-M. (2011). Ambiguity and the historical equity premium. *CES Working Paper, No.2011.32*.
- [92] Connolly T., Zeelenberg M. (2002). Regret in decision making. *Current Directions in Psychological Science*, 11, 6, 212-216.
- [93] Connolly T., Butler D. (2006). Regret in economic and psychological theories of choice. *Journal of Behavioral Decision Making*, 19, 2, 139-154.
- [94] Coricelli G., Critchley H., Joffily M., O' Doherty J., Sirigu A., Dolan R. (2005). Regret and its avoidance : A neuroimaging study of choice behavior. *Nature Neuroscience*, 9, 8, 1255-1262.
- [95] Cox J., Huang C.-F. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when assets prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49, 1, 33-83.
- [96] Crouzeix J., Lindberg P. (1986). Additively decomposed quasi-convex functions. *Mathematical Programming*, 35, 1, 42-57.
- [97] Cummins J., Mahul O. (2004). The Demand for insurance with an upper limit on coverage. *Journal of Risk and Insurance*, 71, 2, 253-264.
- [98] Cvitanic J., Karatzas L. (1992). Convex duality in constrained portfolio optimization. *The Annals of Applied Probability*, 2, 4, 767-818.
- [99] Daris R., Haucis M. (2016). Prospect theory based portfolio optimization problem with imprecise forecasts. *Managing Global Transitions*, 14, 4, 359-384.
- [100] Das S. (2000). Structured products and hybrid securities. *Wiley Frontiers in Finance*, 2, New York, 1006.
- [101] Das S., Staman M. (2009). Beyond mean-variance : Portfolios with derivatives and non normal returns in mental accounts. *SSRN Electronic Journal*, 1782309.
- [102] Das S., Markowitz H., Scheid J., Statman M. (2010). Portfolio optimization with mental accounts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45, 2.
- [103] Das S., Staman M. (2013). Options and structured products in behavioral portfolios. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37, 1, 137-153.
- [104] De Giovanni D., Ortobelli S., Svetlozar Rachev S. (2008). Delta hedging strategies comparison. *European Journal of Operational Research*, 185, 3, 1615-1631.
- [105] Debreu G., Koopmans T. (1982). Additively decomposed quasiconcave functions. *Mathematical Programming*, 24, 1, 1-38.
- [106] Dekel E. (1986). An axiomatic characterization of preferences under uncertainty : Weakening the independence axiom. *Journal of Economic Theory*, 40, 2, 304-318.
- [107] Deng L., Pirvu T. A. (2017). Multi-period investment strategies under cumulative prospect theory. *Paper, No. 1608.08490*.
- [108] Dichtl H., Drobetz W. (2011). Portfolio insurance and prospect theory investors : Popularity and optimal design of capital protected financial products. *Journal of Banking and Finance*, 7, 35, 1683-1697.
- [109] Diecidue E., van de Ven J. (2006). Aspiration level probability of success and failure, and expected utility. *International Economic Review*, 49, 2, 683-700.
- [110] Diecidue E., Rudi N., Tang W. (2012). Dynamic purchase decisions under regret : Price and availability. *Decision Analysis*, 9, 1, 22-30.
- [111] Diecidue E., Somasundaram J. (2015). Regret theory : A new foundation. *Journal of Economic Theory*, 88, 172-119.
- [112] Diecidue E., Somasundaram J. (2017). Regret theory and risk attitudes. *Journal of Risk and Uncertainty*, 55, 2-3, 147-175.
- [113] Dow J., Werlang S. (1992). Uncertainty aversion, risk aversion, and the optimal choice of portfolio. *Econometrica*, 6, 1, 197-204.
- [114] Driessen J., Maenhout P. (2007). An empirical portfolio perspective on option pricing anomalies. *Review of Finance*, 11, 4, 561-603.

- [115] Easley D., O'Hara M. (2009). Ambiguity and nonparticipation : The role of regulation. *Review of Financial Studies*, 22, 5, 1817-1843.
- [116] Ekeland I., Turnbull T. (1983). Infinite-dimensional optimization and convexity. *Chicago Lectures in Mathematics, the University of Chicago Press*, 519.
- [117] Ellsberg D. (1961). Risk, ambiguity and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 4, 75, 643-669.
- [118] El Ghaoui L., Oks M., Oustry F. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization : A conic programming approach. *Operations Research*, 4, 51, 543-556.
- [119] El Karoui N., Peng S., Quenez M. (2001). A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints. *The Annals of Applied Probability*, 11, 3, 664-693.
- [120] El Karoui N., Jeanblanc M., Lacoste V. (2005). Optimal portfolio management with American capital guarantee. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 3, 449-468.
- [121] Fei W. (2007). Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation. *Information Sciences*, 177, 23, 5178-5190.
- [122] Fishburn P., Kochenberger G. (1979). Two-piece Von Neumann-Morgenstern utility functions. *Decision Sciences*, 10, 503-518.
- [123] Fishburn P. (1982). Non transitive measurable utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 26, 1, 31-67.
- [124] Fishburn P. (1983). A generalization of comparative probability on finite sets. *Journal of Mathematical Psychology*, 27, 298-310.
- [125] French K., Poterba J. (1991). Investor diversification and international equity markets. *American Economic Review*, 81, 2, 222-226.
- [126] Friedman M., Savage L. (1948). The utility analysis of choices involving risk. *The Journal of Political Economy*, 56, 4, 279-304.
- [127] Frohm J. (2008). Levels of automation in production systems.
- [128] Gilboa I. (1987). Subjective utility with purely subjective non-additive probabilities. *Journal of Mathematical Economics*, 16, 65-88.
- [129] Gilboa I., Schmeidler D. (1989). Maxmin expected utility with a non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18, 2, 141-153.
- [130] Gilovich T., Medvec V. (1995). The experience of regret : What, when, and why. *Psychological Review*, 102, 2, 379-95.
- [131] Gneezy U., A List J., Wu G. (2006). The uncertainty effect : When a risky prospect is valued less than its worst possible outcome. *The Quarterly Journal of Economics*, 121, 4, 1283-1309.
- [132] Goldfarb D., Iyengar G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28, 1, 1-38.
- [133] Gollier C. (1987). The design of optimal insurance contracts without the nonnegativity constraint on claims. *The Journal of Risk and Insurance*, 54, 2, 314-324.
- [134] Gollier C. (2005). Optimal illusions and decisions under risk. *University of Toulouse, IDEI Working Paper, No. 340*.
- [135] Gollier C., Salanié B., (2006). Individual decisions under risk, risk sharing and asset prices with regret. *Université de Toulouse, Unpublished Working Paper, IDEI*.
- [136] Gollier C., Muermann A. (2006). Regret, portfolio choice, and guarantees in defined contribution schemes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 39, 2, 219-229.
- [137] Gollier C., Muermann A. (2010). Optimal Choice and beliefs with ex ante saving and ex post disappointment. *Management Science*, 56, 8, 1272-1284.
- [138] Gollier C. (2011). Portfolio choices and asset prices : The comparative statics of ambiguity aversion. *Review of Economic Studies*, 78, 1329-1344.
- [139] Gollier C. (2013). Quels choix d'allocations d'actifs pour les agents averses à l'ambiguïté. *Louis Bachelier, L'actualité de la Recherche en Finance*, 1329-1344.
- [140] Gomes F. (2005). Portfolio choice and trading volume with loss-averse investors. *Journal of Business*, 78, 2, 675-706.
- [141] Gordon J., Baptista A. (2011). Portfolio selection with mental accounts and delegation. *Journal of Banking and Finance*, 35, 10, 2637-2657.
- [142] Graham J., Menzel D., Miller F., Illing J., Gardner D. (1982). Effect of ozone on drug-induced sleeping time in mice pretreated with mixed-function oxidase inducers and inhibitors. *Toxicology and Applied Pharmacology*, 62, 3, 489-497.

- [143] Grant S., Kajji A. (1998). AUSI expected utility : An anticipated utility theory of relative disappointment aversion. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 37, 3, 277-290.
- [144] Grossman S., Vila J.-L. (1989). Portfolio insurance in complete markets : A note. *Journal of Business*, 62, 4, 473-476 .
- [145] Grossman S., Zhou J. (1996). Equilibrium analysis of portfolio insurance. *Journal of Finance*, 51, 4, 1379-1403.
- [146] Gurevich G., Kliger D., Levy O. (2009). Decision-making under uncertainty : A field study of cumulative prospect theory. *Journal of Banking and Finance*, 33, 1221-1229.
- [147] Gul F. (1991). A theory of disappointment aversion. *Econometrica*, 59, 3, 667-686.
- [148] Halldórsson B., Tüttüncü R. (2003). An interior-point method for a class of Saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116, 3, 559-590.
- [149] Hansen L., Sargent T. (2000). Wanting robustness in macroeconomics. In *Handbook of Monetary Economics*, 3 B, 1097-1157.
- [150] Hansen L., Sargent T. (2001). Robust control and model uncertainty. *American Economic Review*, 91, 2, 60-66.
- [151] Hens T., Riger M. (2008). The dark side of the moon : Structured products from the customers' perspective. *ISB, University of Zurich, NCCR Finrisk Working paper*, 459.
- [152] Hens T., Riger M. (2009). Why do investors buy structured products ?. *EFA 2009 Bergen Meetings Paper*.
- [153] Hens T., Mayer J. (2014). Cumulatives prospect theory and mean variance analysis : A rigorous comparison. *Swiss Finance Institute Research Paper*, 14-23.
- [154] Herschberg M. (2012). Limits to arbitrage : An introduction to behavioral finance and a literature review. *Palermo Business Review*, 7.
- [155] Huang R., Shih P.-T., Tzeng L. (2012). Disappointment and the optimal insurance contract. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 37, 2, 258-284.
- [156] Howe C., Purves D. (2002). Range image statistics can explain the anomalous perception of length. *Department of Neurobiology, Box 3209, PNAS*, 99, 20,13184-13188.
- [157] Inman J., Peter A., Raghbir P. (1997). Framing the deal : The role of restrictions in accentuating deal value. *Journal of Consumer Research*, 24, 1, 68-79.
- [158] Inman J., Zeelenberg M. (2002). Regret in repeat purchase versus switching decisions : The attenuating role of decision justifiability. *Journal of Consumer Research*, 29, 116-128.
- [159] Ismail A., Pham H. (2016). Robust Markowitz mean-variance portfolio selection under ambiguous volatility and correlation. *MSC Classification* : 91G10, 91G80, 60H30.
- [160] Jacod J., Shiryaev A. (2002). Limit theorems for stochastic processes (Grundlehren der mathematischen wissenschaften) *Springer*, 2, 692.
- [161] Jensen B., Sorensen C. (2001). Paying for minimum interest rate guarantees : Who should compensate who ?. *European Financial Management*, 7, 2, 183-211.
- [162] Ji Y., Wang T., Goh M., Zhou Y., Zou B. (2014). The worst-case discounted regret portfolio optimization problem. *Applied Mathematics and Computation*, 239, 310-319.
- [163] Jia J., Dyer J. (1996). A standard measure of risk and risk-value models. *Management Science*, 45, 519-532.
- [164] Jia J., Dyer J. S., Butler J. (2001). Generalized disappointment models. *Journal of Risk and Uncertainty*, 22, 1, 59-78.
- [165] Jin H., Zhou X. (2008). Behavioral portfolio selection in continuous time. *Mathematical Finance : An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 18, 3, 385-426.
- [166] Josephs R., Larrick R., Steele C., Nisbett R. (1992). Protecting the self from the negative consequences of risky decisions. *Journal of Personality and Social Psychology*, 62, 1, 26-37.
- [167] Jouini E., Karehnke P., Napp C. (2013). On portfolio choice with savoring and disappointment. *Management Science*, 60, 3, 796-804.
- [168] Ju N., Miao J. (2012). Ambiguity, learning, and asset returns. *Econometrica*, 80, 2, 559-591.
- [169] Kahneman D., Tversky A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review*, 80, 4, 237-251.
- [170] Kahneman D., Tversky A. (1974). Judgment under uncertainty : Heuristics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.
- [171] Kahneman D., Tversky A. (1979). Prospect theory : An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 2, 47, 263-292.
- [172] Kahneman D., Tversky A. (1982). The psychology of preferences. *Scientific American*, 246, 1, 160-173.
- [173] Kahneman D., Miller D. (1986). Norm theory : Comparing reality to its alternatives. *Psychological Review*, 2, 93, 136-153.

- [174] Kahneman D., Tversky A. (1992). Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 4, 297-323.
- [175] Kaluszka M. (2005). Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation. *Insurance Mathematics and Economics*, 36, 3, 375-398.
- [176] Kaluszka M., Okolewski K. (2008). An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract. *The Journal of Risk and Insurance*, 75, 2, 275-288.
- [177] Karatzas I., Lehoczky J., Sethi S., Shreve S. (1986). Explicit solution of a general consumption/investment problem. *Mathematics of Operations Research*, 11, 2, 261-294.
- [178] Karatzas I., Shreve S. (1998). Methods of mathematical finance. *Springer-Verlag, Berlin*, 1, 419.
- [179] Karmarkar U. (1978). Subjectively weighted utility : A descriptive extension of the expected utility model. *Organizational Behavior and Human Performance*, 21, 1, 61-72.
- [180] Kavee R., Zhu Y. (1988). Performance of portfolio insurance strategies. *The Journal of Portfolio Management Spring*, 14, 3, 48-54.
- [181] Kaya K. (2017). Managing ambiguity in asset allocation. *Journal of Asset Management*, 18, 3, 163-187.
- [182] Keating C., Shadwick F. (2002). An universal performance measure. *Comments and Criticism Invited*.
- [183] Kenreuther H., Ginsberg R., Miller L., Sagi P., Solvic P., Borkan B., Kartz N. (1978). Disaster insurance protection, public policy lessons. *Wiley John and Sons*, New York, 400.
- [184] Keren G., Gerritsen L. (1999). On the robustness and possible accounts of ambiguity aversion. *Acta Psychologica*, 103, 1, 149-172.
- [185] Knight F. (1921). Risk, uncertainty, and profit. *Hart, Schaffner, and Marx Prize Essays, No. 31, Houghton Mifflin, Boston and New York. Houghton Mifflin Co., The Riverside Press, Boston*.
- [186] Koenig M., Tütüncü R. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132, 1-4, 157-187.
- [187] Kraus J., Zagst R. (2011). Stochastic dominance of portfolio insurance strategies : OBPI versus CPPI. *Annals of Operations Research*, 185, 1, 75-103.
- [188] Landman J. (1993). Regret : The persistence of the possible. *Behavioral Decision Making*, 8, 3, 220-221.
- [189] Larrick R. (1993). Motivational factors in decision theories : The role of self-protection. *Psychological Bulletin*, 113, 3, 440-450.
- [190] Larrick R., Boles T. (1995). Avoiding regret in decisions with feedback : A negotiation example. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 63, 1, 87-97.
- [191] Leland H., Rubinstein M. (1976). The evolution of portfolio insurance. *A Guide to Dynamic Hedging : Portfolio Insurance, Don Lusk*, John Wiley and Sons.
- [192] Leland H. (1980). Who should buy portfolio insurance ? *Journal of Finance*, 35, 2, 581-594.
- [193] Levy H., Levy M. (2004). Prospect theory and mean-variance analysis. *The Review of Financial Studies*, 17, 4, 1015-1041.
- [194] Li X., Shou B., Qin Z. (2012). An expected regret minimization portfolio selection model. *European Journal of Operational Research*, 218, 2, 484-492.
- [195] Lien D., Wang Y. (2001). Risk aversion, disappointment aversion, and futures hedging. *The Journal of Futures Markets*, 22, 2, 123-141.
- [196] Liu J., Zeng X. (2015). Diversification and correlation ambiguity. *JEL Classification : G11*.
- [197] Lohrenz T., McCabe K., Camerer C., Montague P. (2007). Neural signature of fictive learning signals in a sequential investment task. *National Academy of Sciences*, 104, 22, 9493-9498.
- [198] Loomes G., Sugden R. (1982). Regret theory : An alternative theory of rational choice under uncertainty. *Economic Journal*, 368, 92, 805-824.
- [199] Loomes G., Sugden R. (1983). Regret theory and measurable utility. *Economics Letters*, 12, 19-21.
- [200] Loomes G., Sugden R. (1986). Disappointment and dynamic consistency in choice under uncertainty. *Review of Economic Studies*, L 3, 271-282.
- [201] Loomes G., Sugden R. (1987). Some implications of a more general form of regret theory. *Journal of Economic Theory*, 41, 270-287.
- [202] Loomes G., Sugden R. (1987b). Testing for regret and disappointment in choice under uncertainty. *Economic Journal*, 388, 97, 118-129.
- [203] Lopes L. (1987). Between hope and fear : The psychology of risk. *Advances in Experimental Social Psychology*, 20, 255-295.
- [204] Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A. (2006). Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences. *Econometrica*, 74, 1447-1498.

- [205] Machina M. (1982). Expected utility : Analysis without the independence axiom. *Econometrica*, 50, 277-323.
- [206] Machina M. (1983). The economic theory of behavior towards risk : Theory, evidence and new directions. *Stanford University, Technical Report of the Center for Research on Organizational Efficiency, No. 433*.
- [207] Maenhout P. (2004). Robust portfolio rules and asset pricing. *Review of Financial Studies*, 17, 4, 951-983.
- [208] Markowitz H. (1952b). The utility of wealth. *Journal of Political Economy*, 60, 2, 151-158.
- [209] Markowitz H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 1, 77-91.
- [210] Markowitz H. (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *A Journal Dedicated to Advances in Operations and Logistics Research*, 3, 1-2, 111-133.
- [211] Mellers B. (2000). Choice and the relative pleasure of consequences. *Psychological Bulletin*, 126, 6, 910-924.
- [212] Merton R. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty : The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51, 3, 247-257.
- [213] Merton R. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- [214] Merton R. (1980). On estimating the expected return on the market. *Journal of Financial Economics*, 8, 323-361.
- [215] Mhiri M., Prigent J.-L. (2010). Optimal portfolio allocation and regret theory. *Research Working Paper Series, JEL Classification : C61, G11, L10, 1-32*.
- [216] Michenaud S., Solnik B. (2008). Applying regret theory to investment choices : Currency hedging decisions. *Journal of International Money and Finance*, 27, 5, 677-694.
- [217] Mossin J. (1968). Optimal Multiperiod Portfolio Policies. *The Journal of Business*, 41, 2, 215-229.
- [218] Muermann A., Mitchell O., Volkman J. (2006). Regret, portfolio choice, and guarantees in defined contribution schemes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 39, 2, 219-229.
- [219] Mullainathan S., Thaler R. (2000). Behavioral economics. *NBER Working Paper, No. 7948*.
- [220] Nasiry J., Popescu L. (2012). Advance selling when consumers regret. *Management Science*, 58, 6, 1160-1177.
- [221] Neumann J. von, Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton : Princeton University Press, 776.
- [222] Palma A., Picard N., Prigent J.-L. (2009). Prise en compte de l'attitude face au risque dans le cadre de la directive MiFID. *Cahier de recherche, 2009-35*.
- [223] Pellizzari P. (2005). Static hedging of multivariate derivatives by simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 8, 1287-1312.
- [224] Perold A. (1986). Constant portfolio insurance. *Harvard Business School, Unpublished Manuscript*.
- [225] Perold A., Sharpe W. (1988). Dynamic strategies for asset allocation. *Financial Analyst Journal*, 16-27.
- [226] Pfiffelmann M. (2005). Why expected utility theory cannot explain LLDA?. *The ICFA Journal of Behavioral Finance*.
- [227] Pfiffelmann M., Roger P. (2008). Les comptes d'épargne associés à des loteries : Approche comportementale et études de cas. *Banque et Marchés*, 78, 16-23.
- [228] Pfiffelmann M., Roger T., Bourachnikova O. (2016). When behavioral portfolio theory meets Markowitz theory. *Economic Modeling*, 53, 419-435.
- [229] Pflug G., Wozabal D. (2007). Ambiguity in portfolio selection. *Quantitative Finance*, 7, 4, 435-442.
- [230] Pflug G., Pohl M. (2018). A review on ambiguity in stochastic portfolio optimization. *Set-Value and Variational Analysis*, 26, 4, 733-757.
- [231] Piters R., Zeelenberg M. (2007). A theory of regret regulation 1.0. *Journal of Consumer Psychology*, 17, 1, 3-18.
- [232] Pirvu T., Schulze K. (2012). Multi-stock portfolio optimization under prospect theory. *Mathematics and Financial Economics*, 6, 4, 337-362.
- [233] Prigent J.-L. (2006). Generalized option based portfolio insurance. *Working paper Thema, University Cergy-Pontoise, France*.
- [234] Prigent J.-L. (2007). Portfolio optimization and performance analysis. *Boca Raton, Florida : Chapman & Hall, 456*.
- [235] Prigent J.-L. (2008). Portfolio optimization and rank dependent expected utility. *Proceedings of The Fifth World Congress of The Bachelier Finance Society, Imperial College, London*.
- [236] Prigent J.-L. (2010). Portfolio optimization and rank dependent expected utility. *Proceedings of the 10th Econometric Society World Congress, Shanghai*.
- [237] Qin J. (2015). A model of regret, investor behavior and market turbulence. *Journal of Economic Theory*, 160, 150-174.

- [238] Quiggin J. (1982). A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 4, 3, 323-343.
- [239] Quiggin J. (1994). Regret theory with general choices. *Journal of Risk and Uncertainty*, 8, 2, 153-165.
- [240] Rasiah D. (2012). Post-modern portfolio theory supports diversification in an investment portfolio to measure investment's performance. *Journal of Finance and Investment Analysis*, 1, 1, 69-91.
- [241] Raviv A. (1979). The design of an optimal insurance policy. *American Economic Review*, 69, 1, 84-96.
- [242] Rieger M. (2009). Evolutionary stability of prospect theory preferences. *Journal of Mathematical Economics*, 50, 1-11.
- [243] Ritov I. (1996). Probability of regret : Anticipation of uncertainty resolution in choice. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 66, 2, 228-236.
- [244] Roese I. (2005). If only : How to turn regret into opportunity. *Broadway Books*, 1, New York, 256.
- [245] Roger P. (2008). Capital protected notes for loss averse investors : How should they be advertised? *Working paper, Laboratoire LaRGE, University of Strasbourg*.
- [246] Roy A. (1952). Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20, 3, 431-449.
- [247] Rustem B., Robin G., Wolfgang M. (2000). Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1591-1621.
- [248] Samuelson P. (1950). Probability and the attempts to measure utility. *Economic Review*, 1, 167-173.
- [249] Savage L. (1954). The foundations of statistics. *Wiley Publications in Statistics*, 2, New York, 294.
- [250] Schimmack U., Diener E. (1997). Affect intensity : Separating intensity and frequency in repeatedly measured affect. *Journal of Personality and Social Psychology*, 73, 6, 1313-1329.
- [251] Schmeidler D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57, 571-587.
- [252] Segal U. (1987). Some remarks on Quiggin's anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organizations*, 8, 145-154.
- [253] Sewell M. (2010). The application of intelligent systems to financial time series analysis. *PhD Dissertation, Department of Computer Science, University College London, University of London*.
- [254] Shefrin H., Statman M. (1985). The disposition to sell winners too early and ride losers too long. *Journal of Finance*, 40, 3, 777-90.
- [255] Shefrin H., Statman M. (2000). Behavioral portfolio theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 2, 127-151.
- [256] Shefrin H. (2002). Behavioral decision making, forecasting, game theory, and role-play. *International Journal of Forecasting*, 18, 375-382.
- [257] Shiller R. (2013). Speculative asset prices (Nobel Prize Lecture). *American Economic Review*, 104, 6, 1486-1517.
- [258] Shleifer A., Vishny R. (1997). The limits of arbitrage. *The Journal of Finance*, 52, 1, 35-55.
- [259] Shigeta Y. (2018). Ambiguity matters if you invest in many assets. *JEL Classification* : D81, G11.
- [260] Shimanoff S. (1984). Commonly named emotions in everyday conversations. *Perceptual and Motor Skills*, 58, 2, 514.
- [261] Simões G., McDonald M., Williams S., Daniel F., Hauser R. (2017). Robust portfolio optimisation with specified competitors.
- [262] Simões G., McDonald M., Williams S., Daniel F., Hauser R. (2018). Relative robust portfolio optimization with benchmark regret. *Journal Quantitative Finance*, 18, 12. 1991-2003.
- [263] Simonson I. (1992). The influence of anticipating regret and responsibility on purchase decisions, *Journal of Consumer Research*, 19, 1, 105-118.
- [264] Singer N. (2011). Goal-specific asset selection and utility in behavioral portfolio theory with mental accounts. *JEL Classification* : G11.
- [265] Singh T., Sikarwar G. (2015). The influence of investor psychology on regret aversion. *Global Journal of Management and Business Research : Finance*, 15, 2, 55-69.
- [266] Simon H. (1955). A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics*, 69, 1, 99-118.
- [267] Sion M. (1958). On general minimax theorems. *Pacific Journal of Mathematics*, 8, 1, 171-176.
- [268] Smithson M. (1989). Cognitive science. Ignorance and uncertainty : Emerging paradigms. *Springer-Verlag Publishing, New York*.
- [269] Snow A. (2011). Ambiguity aversion and the propensities for self-insurance and self-protection. *Journal of Risk and Uncertainty*, 42, 1, 27-43.
- [270] Solnik B. (2007). Equity home bias and regret : An international equilibrium model. *HEC School of Management, Unpublished Working Paper*.

- [271] Solvic P., Baruch F., Lichtenstein S., Combs B. (1977). Preference for insuring against probable small losses : Insurance implications. *Journal of Risk and Insurance*, 44, 2, 237.
- [272] Soyster A. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operational Research*, 21, 1154-1157.
- [273] Statman M. (1999). Foreign stocks in behavioral portfolios. *Financial Analysts Journal*, 55, 2, 12-16.
- [274] Statman M. (2014). Behavioral Finance : Finance with normal people. *Borsa Istanbul Review*, 14, 2, 65-73.
- [275] Stoimenov P., Wilkens S. (2005). Are structured products fairly priced?. An analysis of the German market for equity-linked instruments. *Journal of Banking and Finance*, 29, 12, 2971-2993.
- [276] Sugden R. (1982). On the economics of philanthropy. *Economic Journal, Royal Economic Society*, 92, 366, 341-350.
- [277] Sugden R. (1983). On the economics of philanthropy : Reply. *Economic Journal, Royal Economic Society*, 93, 371, 639-639.
- [278] Sugden R. (1993). An axiomatic foundation of regret. *Journal of Economic Theory*, 60, 1, 159-180.
- [279] Sung K., Yam S., Yim S., Zhou J. (2011). Behavioral optimal insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 49, 3, 418-428.
- [280] Szymanowska M., Horst J., Veld C. (2004). An empirical analysis of pricing dutch reverse convertible bonds. *JEL Classification* : G10, G19.
- [281] Tebaldi C. (2005). Hedging using simulation : a least squares approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 8, 1287-1312.
- [282] Telser L. (1955). Safety First and Hedging. *Review of Economic Studies, Oxford University Press*, 23, 1, 1-16.
- [283] Thaler R. (1999). Mental accounting matters. *Journal of Behavioral Decision Making*, 12, 3, 183-206.
- [284] Tobin J. (1958). Liquidity preference as behavior toward risk. *Review of Economic Studies*, 25, 2, 65-86.
- [285] van Dijk W., van der Pligt J. (1996). The impact of probability and magnitude on disappointment and elation. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 69, 277-284.
- [286] van Dijk W., Zeelenberg M., van der Pligt J. (2003). Blessed are those who expect nothing : Lowering expectations as a way of avoiding disappointment. *Journal of Economic Psychology*, 24, 505-516.
- [287] Vieffers P., Strack P. (2014). Too proud to stop : Regret in dynamic decisions. *Diw Berlin Discussion Paper, No. 1401*.
- [288] Wakker P., Deneffe D. (1996). Eliciting von Neumann-Morgenstern utilities when probabilities are distorted or unknown. *Management Science*, 42, 8, 1131-1150.
- [289] Wakker P. (2010). Prospect theory : For risk and ambiguity. *Cambridge University Press*, 518.
- [290] Wang T., Boutilier C. (2003). International joint conference on artificial intelligence. *JCAI*, 309-319.
- [291] Wallmeier M., Diethelm M. (2008). Market pricing of exotic structured products : The case of multi-asset barrier reverse convertibles in Switzerland. *The Journal of Derivatives*, 17, 2.
- [292] Wasserfallen W., Schenk C. (1996). Portfolio insurance for the small investor in Switzerland. *Journal of Derivatives*, 3, 3, 37-43.
- [293] Xue D., Xun Y. (2011). Portfolio choice under cumulative prospect theory : An analytical Treatment. *Journal of Management Science*, 57, 2, 315-331.
- [294] Yaari M. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55, 1, 95-115.
- [295] Yan S., Chi P., Yang H., Yuen F. (2016). Optimal asset allocation : Risk and information uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 251, 2, 554-561.
- [296] Zeelenberg M. (1996). On the importance of what might have been : Psychological perspectives on regret and decision making. *Ph.D. dissertation, Faculty of Psychology, University of Amsterdam*.
- [297] Zeelenberg M., van Dijk W., Manstead A. (1998). Reconsidering the relation between regret and responsibility. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 74, 3, 254-272
- [298] Zeelenberg M. (1999). Anticipated regret, expected feedback and behavioral decision making. *Journal of Behavioral Decision Making*, 12, 2, 93-106.
- [299] Zeelenberg M. (1999b). The use of crying over spilled milk : A note on the rationality of regret. *Philosophical Psychology*, 12, 3, 325-340.
- [300] Zeelenberg M., van Dijk, W., Manstead, A., van der Pligt, J., (2000). On bad decisions and disconfirmed expectancies : The psychology of regret and disappointment. *Cognition and Emotion*, 14, 4, 521-541.
- [301] Zeelenberg M., van den Bos K., van Dijk E., Pieters R. (2002). The inaction effect in the psychology of regret. *Journal of Personality and Social Psychology*, 82, 314-327.
- [302] Zhou Z., Wu W. (2008). Local linear quantile estimation for nonstationary time series. *The Annals of Statistics*, B5, 37, 2696-2729.

Conclusion Générale

La finance comportementale remet en question la théorie financière classique basée sur la rationalité des investisseurs dont découle notamment la notion de marché efficient. Elle prend en compte les inefficiences de marché potentielles et l'hypothèse d'irrationalité de l'investisseur. D'une manière schématique, la finance comportementale consiste à mieux intégrer la psychologie à la finance. Cette nouvelle science permet d'expliquer les anomalies du marché financier causées par le comportement humain. Ces causes sont liées à des facteurs psychologiques qui interfèrent lors de la prise de décision, à savoir notamment l'aversion à l'ambiguïté, l'aversion au regret et l'aversion à la déception. Ces biais ont favorisé l'émergence de plusieurs théories d'utilités alternatives à la théorie de l'utilité classique. Ces théories ont été appliquées dans le cadre de la gestion de portefeuille standard et structuré. Dans ce cadre, plusieurs modèles alternatifs aux modèles de la finance moderne, qui permettent de prendre en compte les sentiments anticipés des investisseurs, ont vu le jour. Dans le cadre de cette vision comportementale de la théorie de choix de portefeuille, nous avons essayé de répondre à la problématique de notre recherche, à savoir l'impact des biais de l'aversion à l'ambiguïté, de l'aversion au regret et de l'aversion à la déception sur l'optimisation de portefeuille standard et structurée y compris dans le cas multidimensionnel. Nous avons déterminé ainsi le positionnement du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté et examiné l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion à l'ambiguïté sur le profil du portefeuille optimal. Nous avons également montré comment le sentiment du regret/réjouissance peut changer la valeur du portefeuille optimal par rapport au cas de l'utilité espérée standard. Nous avons ainsi étudié l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur l'allocation optimale du portefeuille structuré. Enfin, nous avons étudié l'effet de l'aversion à la déception sur les pondérations optimales des actifs risqués au sein du portefeuille optimal standard et structuré. Pour chacun de ces cas, nous avons fourni un modèle mathématique permettant d'illustrer l'effet de chacun de ces biais sur l'allocation de portefeuille.

Dans la partie consacrée à l'optimisation de portefeuille standard, nous avons présenté le modèle moyenne-variance et nous avons appliqué les données de notre échantillon, portant sur les rendements annuels de trois titres (*S&P 500*, *Eurostoxx 50* et *SSE Composite*) sur une période de 10 ans (du 1^{er} décembre 2007 jusqu'au 31 janvier 2018), sur ce modèle afin d'établir les caractéristiques du portefeuille efficient pour les différents niveaux d'aversion au risque (1, 2, 5, 10). Les résultats ont montré que, pour un niveau d'aversion au risque relativement élevé égal à 10, le résultat n'est pas dégénéré. Pour un niveau d'aversion au risque égal à 10, nous avons remarqué que le portefeuille efficient est bien diversifié. Ce portefeuille est composé essentiellement du titre qui présente le rendement espéré le plus élevé et le niveau de risque relativement le plus faible parmi les titres de notre échantillon. Ensuite, nous avons étudié l'optimisation de portefeuille standard dans le cadre de la finance comportementale. Nous avons examiné le problème de l'optimisation de portefeuille standard selon la théorie de l'ambiguïté. Ce type de problème porte sur le modèle d'optimisation robuste. En se basant sur le modèle d'optimisation robuste de Koenig et Tütüncü (2004), nous avons établi un modèle d'optimisation robuste permettant de prendre en compte l'ambiguïté dans trois cas différents : au niveau du vecteur de rendements espérés des titres ; de la matrice variance-covariance des rendements des titres ; du vecteur de rendements espérés et de la matrice variance-covariance des rendements des titres. Pour chacun de ces trois cas, nous avons établi un modèle d'optimisation de portefeuille spécifique. En utilisant Matlab, nous avons déterminé les caractéristiques du portefeuille optimal robuste pour des différentes valeurs d'aversion au risque (1, 2, 5, 10). Les résultats numériques ont montré que le niveau

d'ambiguïté reste le même pour tous les niveaux d'aversion au risque dans les trois cas. En outre, nous avons comparé les caractéristiques du portefeuille efficient classique avec celles du portefeuille efficient robuste. Nous avons constaté que lorsque l'ambiguïté ne porte que sur le vecteur des rendements espérés (la matrice variance-covariance des rendements) des titres, le niveau de risque (le rendement espéré) des portefeuilles efficients robustes est le même que celui du portefeuille efficient classique et que le niveau du rendement espéré (le risque) du portefeuille efficient robuste change par rapport au portefeuille efficient classique, pour tous les niveaux d'aversion au risque de l'investisseur. De plus, les résultats numériques ont montré que lorsque l'incertitude porte sur le vecteur de rendements espérés et la matrice variance-covariance des rendements des titres, chacun des niveaux du rendement espéré et du risque du portefeuille efficient robuste changent par rapport au portefeuille efficient.

Dans la partie de la gestion structurée, nous avons évoqué les principes de la gestion structurée. Nous avons examiné les principes de la gestion structurée d'une manière générale et les problèmes rencontrés par les émetteurs et les investisseurs concernant les produits structurés au niveau du marché. Ensuite, nous avons déterminé le positionnement du portefeuille optimal en présence de l'ambiguïté, en se basant sur le modèle de Maccheroni et al. (2006), qui englobe à la fois les préférences des multiples-priors de Gilboa et Schmeidler (1989) et les préférences de Hansen et Sargent (2001). Par la suite, nous avons déterminé le profil du portefeuille structuré optimal dans le cas multidimensionnel en présence de l'ambiguïté. Dans ce cas, nous avons montré comment le portefeuille optimal dépend à la fois de l'aversion au risque de l'investisseur et de son aversion à l'ambiguïté au niveau des distributions des probabilités. Nous avons montré également que lorsque les actifs risqués sont indépendants, la solution optimale correspond à la minimisation de la valeur absolue du ratio de Sharpe de chaque actif risqué. Nous avons également illustré l'effet de l'ambiguïté sur les corrélations entre les actifs risqués lorsque leurs rendements sont dépendants. Ces résultats peuvent être appliqués dans la pratique pour déterminer les profils des produits structurés financiers écrits sur plusieurs actifs risqués, par exemple pour choisir le type d'options qui doit être introduit dans le portefeuille. En outre, nous avons traité le problème d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la gestion de portefeuille selon la théorie du regret pour un cas multidimensionnel. Nous avons établi un modèle qui permet de montrer comment le sentiment du regret/réjouissance peut impacter la valeur du portefeuille optimal par rapport au cas de l'utilité espérée standard. Nous avons illustré numériquement les résultats antérieurs afin de déterminer l'impact de l'aversion au risque et de l'aversion au regret sur le choix du portefeuille optimal. Nous avons résolu le problème le plus général du positionnement optimal du portefeuille, en proposant une extension des résultats antérieurs de Leland (1980); Brennan et Solanki (1981) et Prigent (2006, 2007). Les résultats de notre étude ont montré que le sentiment de regret/réjouissance a un impact significatif sur l'allocation optimale dans le cadre de l'assurance de portefeuille. Enfin, nous avons étudié le problème du positionnement optimal du portefeuille en présence de déception potentielle. Notre approche a été basée sur le modèle fondamental de la déception de Loomes et Sugden (1986). Nous avons d'abord examiné l'allocation du portefeuille optimal maximisant la fonction d'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception. Pour ce faire, nous avons examiné un exemple numérique pour le cas binomial (deux actifs risqués) et un autre dans le cadre Lognormal. Par la suite, dans le cadre de la gestion structurée, nous avons introduit un modèle nous permettant d'identifier la fonction de paiement du portefeuille optimal correspondant à la maximisation de l'utilité espérée de l'investisseur en présence d'aversion à la déception, y compris pour le cas multidimensionnel. Ceci nous a permis d'étendre les résultats antérieurs portant sur la maximisation de l'utilité espérée de Leland (1980), Brennan et Solanki (1981), Carr et Madan (2001) et Prigent (2006) au cas de l'utilité espérée avec déception.