Université des Antilles – Laboratoire LAMIA

Contrôle Optimal Stochastique avec application à la propagation de l'e-rumeur

par **Kendy VALMONT**

12 novembre 2019

Mots clés : **e-rumeur, modèle déterministe et stochastique, équations différentielles stochastiques, mouvement Brownien, processus de Poisson, extinction, persistance, principe du maximum et contrôle optimal stochastique.**

Résumé

Avec le phénomène grandissant des réseaux sociaux, une nouvelle forme de rumeur, l'e-rumeur, est née et progresse de façon significative. Un tel phénomène est important pour les communautés, organisations et états car sa propagation peut rapidement mettre en péril l'opinion publique, ainsi que les marchés économiques et financiers. Puisqu'elle peut être dangereuse pour nos sociétés, il est important de comprendre comment se diffuse l'e-rumeur afin de pouvoir la contrôler. Ce problème est un challenge pour de nombreux scientifiques car il devient de plus en plus important avec le développement de nouvelles technologies. Beaucoup d'études ont été faites dans le cas déterministe ces dernières années. Mais ce processus de diffusion multidimensionnel est principalement régi par des éléments socio-psychologiques et a aussi un caractère aléatoire. L'objectif de cette thèse est l'approche stochastique d'un tel phénomène, à savoir de modéliser son aspect aléatoire et de le contrôler par l'utilisation d'équations différentielles stochastiques et la théorie du contrôle optimal associée. En se basant sur ce qui a été fait pour des modèles épidémiologiques, nous avons proposé des approches similaires pour l'e-rumeur.

Dans un premier temps, nous avons présenté un nouveau modèle stochastique contenant un mouvement Brownien qui modélise l'aspect aléatoire de la propagation de l'e-rumeur. Nous avons ensuite étudié la dynamique de ce nouveau modèle. Les analyses de la persistance et de l'extinction de l'e-rumeur ont aussi été développées. Nous avons terminé l'étude de ce nouveau modèle par un jeu de données qui permet de comparer le modèle stochastique et le déterministe associé pour mettre en valeur l'intérêt de notre approche stochastique.

Dans un second temps, nous avons ajouté au modèle précédent un processus de Poisson afin de modéliser la brusque augmentation du nombre de propageurs. Les mêmes analyses ont ensuite été faites pour ce deuxième modèle stochastique. Puis, nous avons complété le jeu de données précédent, en ajoutant les paramètres manquants, afin de comparer les deux modèles stochastiques avec le déterministe associé.

En dernier lieu, nous avons utilisé la théorie du contrôle optimal stochastique afin de contrôler le nombre de propageurs pour minimiser la propagation de l'e-rumeur.

Mots clés : e-rumeur, modèle déterministe et stochastique, équations différentielles stochastiques, mouvement Brownien, processus de Poisson, extinction, persistance, principe du maximum et contrôle optimal stochastique.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier grandement Alain PIETRUS et Séverine BERNARD. Ce fut un plaisir de travailler en leur compagnie car, outre leur appui scientifique, ils ont toujours été présents pour me soutenir et me conseiller tout au long de ces années qui ont permis l'élaboration de cette thèse.

Je remercie également Mr Jean-Pierre NADAL et Mr Javier TREJOS-ZELAYA d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Ils ont pris le temps de la lire et leurs remarques pertinentes m'ont permis de davantage mettre mon travail en valeur.

J'adresse mes remerciements à Mr Paul NUIRO et Mr Evans GOUNO pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de faire parti du jury de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Mr Jean VAILLANT, Professeur de Mathématiques à l'Université des Antilles, pour ses orientations et conseils durant mes études doctorales.

Cette thèse a été financée par l'ambassade de France en Haïti, avec le soutien de l'École Normale Supérieure d'Haïti (ENS). Je voudrais ici leur témoigner toute ma gratitude.

Je remercie particulièrement Mr Bérard CENATUS, directeur académique de l'ENS d'Haïti, pour son soutien permanent et toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études.

Je remercie les membres du Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications (LAMIA) de l'Université des Antilles qui ont tout fait pour m'aider, me soutenir et me fournir de bonnes conditions de travail.

Je remercie enfin ma famille, en particulier Mme Larochelle VALMONT, ma chère tante, Kensly VALMONT, mon fils et Nathalie MACXION, mon épouse pour la patience, l'encouragement et la confiance qu'ils m'ont témoigné.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^n$:	Espace réel de dimension n.
$\mathbb{R}_+$:	L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^{n\times m}$:	L'ensemble des matrices à coefficients réels d'ordre $n \times m$.
$X.Y$ ou $\langle X, Y\rangle$:	Produit scalaire entre $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
$C(U, V)$:	L'ensemble des fonctions continues de U vers V.
$C(U)$:	L'ensemble des fonctions continues de U vers $\mathbb{R}$.
$C_0(U)$:	L'ensemble des fonctions à support compact.
$C^k = C^k(U)$:	L'ensemble des fonctions de $C(U, \mathbb{R})$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues.
$C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$:	$f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ C^1 par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et C^2 par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$.
B_t ou $B(t)$:	Mouvement Brownien.
$E[Y] = \int Y d\mu$:	L'espérance de la variable aléatoire Y par rapport à la mesure μ.
$E[Y\|\mathcal{F}]$:	Espérance conditionnelle de Y par rapport à $\mathcal{F}$(σ-algèbre).
$\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t^m$:	La σ-algèbre générée par $\{B_s : s \leq t\}$, où B_s est un mouvement Brownien de dimension m.
$\mathcal{F}_\infty$:	La σ-algèbre générée par $\displaystyle\bigcup_{t>0} \mathcal{F}_t$.
$s \vee t$:	Le maximum entre s et t ($= \max(s, t)$).
$s \wedge t$:	Le minimum entre s et t ($= \min(s, t)$).
A^T :	La matrice transposée de A.
$\mathbb{P}$:	La loi de probabilité de B_t, mouvement Brownien standard.
p.s. :	Presque sûrement, ou $\mathbb{P}$-presque sûrement, ou avec probabilité 1.
p.p. :	Presque partout.

$A := B$:	A est défini par B.
$\emptyset$:	L'ensemble vide.
$\mathbb{1}_A$:	La fonction indicatrice de l'ensemble A, c'est-à-dire $\mathbb{1}_A(x) =$ si $x \in A$ et 0 sinon.
A^c :	Le complémentaire de A dans Ω, c'est-à-dire $A^c = \Omega - A$.
$f : A \longrightarrow B$:	f est une fonction de A vers B.
$\|\|x\|\|$:	La norme Euclidienne du vecteur x.
$\|A\|$:	La norme Euclidienne de la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ définie par $\left(\sum \|a_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
$tr[A]$:	Trace de la matrice A.
δ_{ij} :	Le symbole de Kronecker.
$L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$:	La famille des variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $E[X\|^p] < \infty$.
$L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega; \mathbb{R}^d)$:	La famille des variables aléatoires X $\mathcal{F}_t$-mesurables telle que $E[X\|^p] < \infty$.
$\mathcal{L}^p([a,b]; \mathbb{R}^d)$:	La famille des processus $\{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ $\mathcal{F}_t$-adaptés à valeurs réelles telle que $\int_a^b \|f(t)\|^p dt < \infty$ p.s.
$\mathcal{S}^n$:	L'ensemble des matrices symétriques d'ordre $n \times n$.
$\equiv$:	Équivalence.
v.a. :	Variable aléatoire.
iid :	Indépendant et identiquement distribué.
cup :	Convergence uniforme en probabilité.
$\square$:	Fin d'une preuve.

Introduction

Au cours de ces dernières années, nous avons pu remarquer comment l'apparition des nouveaux moyens de communications comme Facebook, Twitter, WhatsApp, facilite la diffusion des informations à travers le monde. Cela entraine aussi la propagation, en grande quantité et de façon rapide, de vraies ou fausses informations qui peuvent être appréciables pour certains et détestables pour d'autres. Car cela peut détruire l'image d'un individu, d'une entreprise, d'une figure politique, etc. Une e-rumeur peut par exemple causer beaucoup de déficit au sein d'une entreprise, peut aussi causer l'échec d'un candidat surtout pendant une période électorale. Même si la rumeur ne va pas durer, son passage peut détourner l'attention de toute une population. Dans le but de contribuer à la lutte contre ce phénomène très dangereux pour notre société, certains mathématiciens ont décidé de le modéliser en s'inspirant en majorité des modèles épidémiologiques.

À notre connaissance, les premiers modèles mathématiques sur la diffusion d'information ont été l'œuvre du mathématicien A. Rapoport dans les années 1950. Dans son premier article [46] en 1952, il a étudié l'applicabilité de la théorie des réseaux aléatoires à la théorie de la propagation de la rumeur, plus précisément dans le cas de la connectivité faible du réseau. De plus, il a montré qu'une équation ordinaire du temps continu peut être utilisée à la place de l'équation temporelle pour modéliser la propagation de la rumeur quand le temps mesuré est considéré comme le nombre d'entrées supprimées si la distribution des intervalles du récit est connue. En 1953 dans [44], il a appliqué une formule d'itération utilisée précédemment pour un réseau aléatoire à certaines données de la propagation d'information à travers une population. Dans cette étude, il tente de prendre en compte ce comportement de la densité apparente des axones en terme d'hypothèse de transitivité, cette dernière étant basée sur un certain biais socio-culturel, à savoir que les contacts probables entre deux personnes qui ont été elles-même en contact sont susceptibles de se chevaucher fortement. Cette même année, dans un autre article [45], il a modifié l'hypothèse de transitivité de différentes manières pour décrire le processus de diffusion d'informations dans lequel une certaine quantité de contacts est aléatoire. Dans son modèle, il a introduit un paramètre pour indiquer une tendance d'aller au-delà de son voisinage immédiat pour diffuser l'information au fur et à mesure que le voisinage devient saturé de connaisseurs. Dans un autre modèle il a fait apparaître le caractère aléatoire dans l'hypothèse que les nouveaux connaisseurs soient uniformément repartis parmi les connaisseurs.

Dix ans plus tard, D. J. Daley et D. G. Kendall proposaient d'autres modèles inspirés directement de la modélisation épidémiologique à travers deux articles. Dans un premier [17] en 1964, ils ont appuyé Goffman et Newill qui disaient qu'il y a une analogie entre la propagation d'une maladie infectieuse et la diffusion d'informations. En particulier, ils ont souligné qu'un modèle pour la propagation de la rumeur peut-être construit sous plusieurs angles dépendant du mécanisme supposé pour décrire la croissance et la décadence du processus de propagation proprement dit. Ils ont fait remarquer que dans les modèles de rumeurs, les techniques mathématiques connues en épidémiologie peuvent être appliquées. Mais cela ne veut pas dire que les résultats ainsi obtenus doivent être nécessairement ceux attendus sur la base d'une analogie formelle avec les épidémies. Pour construire son premier modèle, ils ont divisé la population en trois catégories, comme la modélisation SIR en épidémiologie, ceux qui n'ont pas encore entendu parler de la rumeur (les susceptibles en épidémilogie), ils les désignent par la lettre S ; ceux qui propagent la rumeur (les infectés en épidémiologie), ils les désignent par la lettre I et ceux qui sont contre la rumeur (les morts par la maladie, les isolés, immunisés en épidémiologie), ils les désignent par la lettre R. Puis dans leur contribution [18] en 1965, ils ont présenté le principe de diffusion des constantes arbitraires, qui peut être utilisé pour la variance des fluctuations de la trajectoire d'un échantillon dans un modèle stochastique sur l'unique trajectoire de l'approximation déterministe associée.

Deux ans plus tard, le mathématicien K. Dietz passait en revue dans [19] les contributions mathématiques de description de la propagation des épidémies et des rumeurs. À travers ces travaux, il a remarqué que la plupart des modèles épidémiques étudiés ont un aspect très général et peuvent s'appliquer également à la description d'autres phénomènes. Pour continuer les travaux de Daley et Kendall, dans [25] Huang et al. en 2011 ont modifié le modèle SIR souvent utilisé pour modéliser les épidémies en divisant la catégorie des stiflers en deux sous-catégaries, ceux qui acceptent la rumeur et ceux qui s'y opposent. Dans cette étude, ils ont proposé une stratégie d'isolation au hasard.

Quelques années plus tard, S. Bernard et al. ont réalisé d'autres travaux sur la propagation de la rumeur. En 2015, ils ont proposé dans [11] des approches pour minimiser la propagation d'une e-rumeur en se servant du principe de maximum de Pontryagin. Puis en 2016, ce même groupe de mathématiciens en se servant du modèle de Huang et al. dans [12] ont montré qu'on pourrait diminuer la propagation d'une e-rumeur en contrôlant le taux pour qu'un spreader devienne un stifler acceptant la rumeur après avoir rencontré un spreader ou un stifler. Ce même modèle a été modifié en 2017 par S. Bernard et al dans [13] par l'ajout de deux actions extérieures, pouvant être vues comme une contre information et comme l'isolation des spreaders les plus actifs. Ils ont montré dans [14] qu'à partir de ses actions on peut contrôler la rumeur. L'année suivante, dans [15] le modèle de Huang a encore subi une autre modification en ajoutant des entrées et sorties dans le réseau considéré. Pour cela, ils ont supposé qu'un stifler opposant peut aussi quitter le réseau comme tous les autres membres au même taux afin que la taille du réseau puisse rester constante. Ils ont commencé l'étude par la recherche des états d'équilibres admissibles en résolvant le système d'équations différentielles ordinaires, puis ont souligné les conditions de stabilité. Ensuite, ils ont montré qu'il n'existe pas de cycle limite entre les spreaders et les stiflers et ont donné le critère de coexistence des différentes classes d'individus.

Mais le processus de diffusion d'informations est principalement motivé par des éléments socio-psychologiques que les systèmes d'équations différentielles ordinaires utilisés n'arrivent pas à modéliser. Ces derniers sont souvent des modèles SIR ou des modèles SIR modifiés dont l'idée est de diviser la population en catégories. Donc, ils tiennent compte du comportement des adhérents par catégorie. Or dans la mesure du possible, le modèle devrait être capable de donner des informations sur le comportement de chaque personne. Car, les réseaux sont ouverts au grand public, ils ne sont pas capables de distinguer chacun de ses adhérents, c'est pour cela qu'il est difficile d'avoir un regard exhaustif. En fait, ils sont composés de différents types de personnes qui n'agissent pas de la même manière à la réception d'un message. Certains agissent sur le coup de l'émotion, d'autres prennent du recul afin d'analyser le message avant de le partager. C'est donc un processus qui a un aspect aléatoire.

Par rapport aux remarques du paragraphe précédent, nous ne disons pas qu'il y a un modèle parfait mais, nous pouvons constater quelques faiblesses dans ces modèles même si à l'époque il n'y avait pas ces réseaux sociaux. Selon nous, un modèle composé d'un système d'équations différentielles stochastiques dont l'aspect aléatoire sera modélisé à travers un mouvement Brownien représentera mieux les flux de propagations du phénomène.

Le but de cette thèse est de modéliser l'aspect aléatoire de ce phénomène et de le contrôler. Elle est constituée de deux parties, une première partie où nous rappelons quelques notions préliminaires en calcul stochastique et une deuxième partie où il y a les résultats obtenus. La première partie est constituée de trois chapitres. Le premier chapitre porte sur les notions de base en probabilités, le processus d'Itô, les équations différentielles stochastiques. Le second chapitre est consacré au processus d'Itô-Lévy, les équations différentielles stochastiques avec des processus d'Itô-Lévy. Le troisième chapitre porte sur le principe de contrôle optimal stochastique. La seconde partie est constituée de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions la dynamique d'un modèle stochastique d'e-rumeur. Dans le second chapitre, nous faisons l'étude de la dynamique d'un modèle stochastique à saut. Le dernier chapitre se consacre à l'association d'un problème de contrôle optimal au modèle du premier chapitre de la deuxième partie.

Première partie

Notions Préliminaires

Chapitre 1

Équations Différentielles Stochastiques (EDS)

1 Introduction

Dans beaucoup de branches de la science et de l'industrie, les systèmes sont souvent perturbés par divers types de bruits environnementaux. Considérons, par exemple, un modèle simple d'accroissement d'une population représenté par l'équation différentielle classique suivante :

$$\frac{dP}{dt} = a(t)P(t), \;\; P(0) = P_0 \;\; \text{(constante)} \tag{1.1}$$

avec $P(t)$ le nombre d'habitants à l'instant t et $a(t)$ le taux d'accroissement à l'instant t. Il se peut que $a(t)$ ne soit pas complètement connu, de ce fait, on a suggéré d'ajouter certains effets environnementaux aléatoires. En d'autre terme :

$$a(t) = \alpha(t) + \text{bruit},$$

un bruit dont nous ne savons pas exactement son comportement, mais qui suit une distribution de probabilité. Le terme $\alpha(t)$ est supposé déterministe (non aléatoire). L'équation (1.1) devient alors

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(t)P(t) + P(t) \times \text{bruit}, \;\; P(0) = P_0. \tag{1.2}$$

D'une manière générale, on peut réécrire (1.2) sous la forme suivante :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X_t) + M(t, X_t) \times \text{bruit}, \quad X(0) = X_0 \tag{1.3}$$

avec F et M des fonctions données. La question naturelle qu'on se pose est comment résoudre l'équation (1.3) ? On trouvera la réponse à cette question dans la suite. Toutefois, il est important, avant de continuer, de donner quelques notions de bases de la théorie des probabilités, en utilisant [6, 33, 37, 40].

2 Notions basiques de la théorie des probabilités

La théorie des probabilités est une partie des mathématiques qui s'occupe de la modélisation des systèmes donnant des résultats qui se basent sur le hasard. Tous les résultats possibles, les événements élémentaires sont regroupés dans un ensemble, Ω, avec un élément typique, $\omega \in \Omega$. Tous les éléments de Ω ne sont pas en général des événements observables ou intéressants. Cependant, nous regroupons tous ses événements observables ou intéressants dans une famille, $\mathcal{F}$, de sous-ensembles de Ω. Une famille de sous-ensembles peut être une σ-algèbre.

Définition 1.1. *Soit Ω un ensemble. Une σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω vérifiant les propriétés suivantes :*

i- $\emptyset \in \mathcal{F}$ *;*

ii- $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, *avec* $F^C = \Omega \backslash F$ *le complémentaire de* F *dans* Ω *;*

iii- $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle un espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont dorénavant des ensembles $\mathcal{F}$-mesurables. Si $\mathcal{C}$ est une famille de sous-ensembles de Ω alors il existe une plus petite σ-algèbre $\sigma(\mathcal{C})$ sur Ω contenant $\mathcal{C}$. Ce ensemble $\sigma(\mathcal{C})$ est la σ-algèbre générée par $\mathcal{C}$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ est une famille d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$ alors $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{C})$ est la σ-algèbre de Borel et les éléments de $\mathcal{B}^n$ sont des ensembles de Borel.

Définition 1.2. *Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ telle que :*

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*

(b) Si $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ et $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ deux à deux disjoints (c-à-d $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s'appelle un espace probabilisé.

Définition 1.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une fonction $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite $\mathcal{F}$-mesurable si*

$$Y^{-1}(U) := \Big\{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\Big\} \in \mathcal{F}$$

pour tout ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ (ou pour tout ensemble de Borel $U \subset \mathbb{R}^n$).

Une fonction $Y(\omega) = (Y_1(\omega), Y_2(\omega), ..., Y_n(\omega))^T$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite $\mathcal{F}$-mesurable si tous les éléments Y_i sont $\mathcal{F}$-mesurables. De même une fonction matricielle $Y(\omega) = (Y_{ij}(\omega))_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m}$ est dite $\mathcal{F}$-mesurable si tous les éléments Y_{ij} sont $\mathcal{F}$-mesurables. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de $A \subset \Omega$ définie par

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \ \omega \notin A, \end{cases}$$

est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si A est un ensemble $\mathcal{F}$-mesurable, c'est-à-dire $A \in \mathcal{F}$.

Théorème 1.1 (Radon-Nikodym)**.** *Soient μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que $\nu << \mu$. Alors il existe une fonction mesurable $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, unique à un ensemble μ-négligeable près, telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$*

$$\nu(F) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_F f d\mu.$$

Définition 1.4. *Une variable aléatoire (v.a.) X est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Toute variable aléatoire X induit une mesure de probabilité μ_X sur $\mathbb{R}^n$, définie par*

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)),$$

μ_X est appelé distribution de X. Si $\int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$ alors le nombre

$$E[X] := \int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x d\mu_X(x)$$

s'appelle l'espérance mathématique de X.
Le nombre

$$V[X] = E\Big[\Big(X - E[X]\Big)^2\Big]$$

s'appelle la variance de X. Le nombre $E[|X|^p]$ $(p > 0)$ est le $p^{ème}$ moment de X. Si Y est une autre variable aléatoire,

$$Cov(X,Y) = E\Big[\Big(X - E[X]\Big)\Big(Y - E[Y]\Big)^T\Big]$$

s'appelle la covariance de X et Y.

Si $Cov(X,Y) = 0$ alors on dit que X et Y sont non corrélées. Pour une variable aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$, on définit $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_n])^T$. Pour une $n \times m$-matrice de variables aléatoires $X = (X_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$, on définit $E[X] = (E[X_{ij}])_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$. Si X et Y sont deux variables aléatoires de $\mathbb{R}^n$ alors la $n \times n$-matrice symétrique définie positive

$$Cov(X,Y) = E\Big[\Big(X - E[X]\Big)\Big(Y - E[Y]\Big)^T\Big]$$

est leur matrice de covariance.
Plus généralement, si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est Borel mesurable, on a alors la formule de transformation suivante

$$E\Big[g(X)\Big] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu_X(x).$$

Pour $p \in (0, +\infty)$, soit $L^p = L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ la famille de variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$ avec $E[|X|^p] < +\infty$.
Dans L^1, nous avons $\Big|E[X]\Big| \le E\Big[|X|\Big]$. De plus, les inégalités suivantes sont vérifées :

Inégalité de Hölder :

$$\Big|E[X^T Y]\Big| \le \Big(E\Big[|X|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(E\Big[|X|^q\Big]\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.4}$$

pour $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $X \in L^p$, $Y \in L^q$.

Inégalité de Minkovski :

$$\Big(E\Big[|X+Y|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(E\Big[|X|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(E\Big[|Y|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.5}$$

pour $p > 1$, $X, Y \in L^p$.

Inégalité de Chebyshev

$$\mathbb{P}\Big\{\omega, |X(\omega)| \geq c\Big\} \leq c^{-p} E\Big[|X|^p\Big], \tag{1.6}$$

pour $c > 0$, $p > 0$, $X \in L^p$.
Une simple application de l'inégalité de Hölder implique que

$$\Big(E\Big[|X|^r\Big]\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \Big(E\Big[|X|^p\Big]\Big)^{\frac{1}{p}},$$

si $0 < r < p < +\infty$, $X \in L^p$.
Pour la preuve de chacune de ces inégalités, on peut se référer à [37].

Soient X et X_k, $k \in \mathbb{N}^\star$, respectivement une variable et une famille de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^n$. Les quatre types de convergences suivantes sont importantes :

(a) S'il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ de mesure nulle tel que pour tout $\omega \in \mathcal{F} \backslash \Omega_0$ la suite $\{X_k(\omega)\}$ converge vers $X(\omega)$ dans le sens usuel dans $\mathbb{R}^n$ alors $\{X_k\}$ est dite convergente presque surement vers X ou avec probabilité 1 et on écrit

$$\lim_{k\to+\infty} X_k = X \text{ p.s.}$$

(b) Si pour tout $\epsilon > 0$ $\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\Big\}\Big) \to 0$ quand $k \to +\infty$ alors $\{X_k\}$ est dite convergente en probabilité.

(c) Si X_k et X appartiennent à L^p et $E\Big[|X_k - X|^p\Big] \to 0$ alors $\{X_k\}$ est dite convergente vers X dans L^p.

(d) Si pour toute fonction g réelle continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{k\to+\infty} E\Big[g(X_k)\Big] = E\Big[g(X)\Big]$ alors $\{X_k\}_{k\geq 0}$ est dite convergente vers X au sens des distributions.

Le concept de convergence s'organise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Convergence dans } L^p \\ & & \Downarrow \\ \text{Convergence p.s.} & \Rightarrow & \text{Convergence en probabilité} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Convergence au sens des distributions} \end{array}$$

De plus, une suite converge en probabilité si et seulement si toute sous-suite de celle-ci contient une sous-suite convergente presque sûrement. Une condition suffisante pour

$\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = X$ p.s. est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E\Big[|X_k - X|^p\Big] < +\infty \text{ pour tout } p > 0.$$

Théorème 1.2 (Théorème de la convergence monotone)**.** *Si $\{X_k\}_{k\geq 0}$ est une suite croissante et positive de variables aléatoires alors*

$$\lim_{k\to+\infty} E[X_k] = E\Big[\lim_{k\to+\infty} X_k\Big]. \tag{1.7}$$

Théorème 1.3 (Théorème de la convergence dominée)**.** *Soit $p \geq 1$, $\{X_k\} \subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ et $Y \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$. On suppose que $|X_k| \leq Y$ p.s. et $\{X_k\}$ converge en probabilité vers X. Alors $X \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\{X_k\}$ converge vers X dans L^p et*

$$\lim_{k\to+\infty} E[X_k] = E[X]. \tag{1.8}$$

Définition 1.5. *Soit I un ensemble d'indice. Une collection d'ensembles $\{A_i : i \in I\}$ est dite indépendante si*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})...\mathbb{P}(A_{i_k}),$$

pour tous les choix d'indices possibles $i_1, i_2, ..., i_k \in I$.

Une suite de sous-σ-algèbres $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ est dite indépendante si pour tous choix d'indices possibles, on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})...\mathbb{P}(A_{i_k}),$$

pour tout $A_{i_1} \in \mathcal{F}_{i_1}$, $A_{i_2} \in \mathcal{F}_{i_2}$, ..., $A_{i_k} \in \mathcal{F}_{i_k}$.

Une famille de variables aléatoires $\{X_i : i \in I\}$ est dite indépendante si les σ-algèbres $\sigma(X_i)$, $i \in I$ qu'elle génère sont indépendantes. Par exemple, deux variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}\Big(\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\Big) = \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in A)\mathbb{P}(\omega : Y(\omega) \in B),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}^n$ et $B \in \mathcal{B}^m$.

Définition 1.6. *Soit $\{A_k\}$ une collection d'ensembles de $\mathcal{F}$. On définit la limite supérieure de ses ensembles par :*

$$\lim_{k\to+\infty} \sup A_k = \Big\{\omega : \omega \in A_k \ \textit{pour} \ k \to +\infty\Big\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\bigcup_{k=i}^{+\infty} A_k.$$

Il est clair qu'elle est incluse dans $\mathcal{F}$. Avec la loi de probabilité, on a le résultat suivant :

Lemme 1.1 (Lemme de Borel-Cantelli)**.**

1. *Si* $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ *et* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) < +\infty$ *alors*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to+\infty} \sup A_k\right) = 0, \tag{1.9}$$

c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ *et une variable aléatoire entière* k_0 *telle que pour tout* $\omega \in \Omega$*, on a* $\omega \notin A_k$ *quand* $k \geq k_0(\omega)$*.*

2. *Si la suite* $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ *est indépendante et que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$ *alors*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to+\infty} \sup A_k\right) = 1, \tag{1.10}$$

c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(\Omega_\theta) = 1$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_\theta$*, il existe une sous suite* A_{k_i} *telle que* ω *appartient à tous les* A_{k_i}*.*

Soit $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A par rapport à B, notée $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Toutefois, par rapport à un ensemble de conditions que nous rencontrons fréquemment, nous avons besoin d'un concept plus général qui est l'espérance conditionnelle. Soit $X \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{F}$ donc $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable. En général, X n'est pas $\mathcal{G}$-mesurable. Nous recherchons donc une intégrale $\mathcal{G}$-mesurable d'une variable aléatoire Y de même valeur que X sur la moyenne dans le sens que

$$E[\mathbb{1}_G Y] = E[\mathbb{1}_G X] \text{ c'est-à-dire } \int_G Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_G X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \text{ pour tout } G \in \mathcal{G}.$$

Ainsi par le théorème de Radon-Nikodym, il existe un Y unique presque surement, appelé espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$ et on écrit

$$Y = E\Big[X|\mathcal{G}\Big].$$

Si $\mathcal{G} = \sigma(\{A_k\})$, c'est-à-dire $\mathcal{G}$ est généré par $\{A_k\}$. Alors $E\Big[X|\mathcal{G}\Big]$ est une fonction sur Ω donnée par

$$E\Big[X|\mathcal{G}\Big] = \sum_k \frac{\mathbb{1}_{A_k} E[\mathbb{1}_{A_k} X]}{\mathbb{P}(A_k)}.$$

Si $\omega \in A_k$

$$E\Big[X|\mathcal{G}\Big](\omega) = \frac{E[\mathbb{1}_{A_k}X]}{\mathbb{P}(A_k)}.$$

Par rapport à la définition, on a :

$$E\Big[E\Big[X|\mathcal{G}\Big]\Big] = E[X]$$

et

$$\Big|E\Big[X|\mathcal{G}\Big]\Big| \leq E\Big[\Big|X\Big||\mathcal{G}\Big] \quad p.s.$$

Voici quelques propriétés importantes de l'espérance conditionnelle (toutes les égalités et inégalités sont vraies presque sûrement) :

(a) $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = E[X]$;

(b) $X \geq 0 \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \geq 0$;

(c) X est $\mathcal{G}$-mesurable $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = X$;

(d) $X = c$ (constante) $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = c$;

(e) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $E[aX + cY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$;

(f) $X \leq Y \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$;

(g) X est $\mathcal{G}$-mesurable $\Rightarrow E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$, en particulier $E\Big[E[X|\mathcal{G}]Y|\mathcal{G}\Big] = E[X|\mathcal{G}]E[Y|\mathcal{G}]$;

(h) $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendants $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = E[X]$. En particulier si X et Y sont indépendants alors $E[X|Y] = E[X]$;

(i) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow E\Big[E\Big[X|\mathcal{G}_2\Big]|\mathcal{G}_1\Big] = E\Big[X|\mathcal{G}_1\Big]$.

Finalement, si $X = (X_1, ..., X_n)^T \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ alors leur espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}$ est définie comme

$$E[X|\mathcal{G}] = \Big(E[X_1|\mathcal{G}], ..., E[X_n|\mathcal{G}]\Big)^T.$$

2.1 Processus stochastiques

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Définition 1.7. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $T \geq 0$. Une filtration est une famille $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de sous-σ-algèbre croissante de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$, pour tout $0 \leq t < \xi < +\infty$).*

Une filtration est dite continue à droite si $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{\xi>t} \mathcal{F}_\xi$, pour tout $t \geq 0$. Quand l'espace probabilisé est complet, on dit que la filtration satisfait les conditions usuelles si elle est continue à droite et $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls (ensembles de mesures nulles).

À partir de maintenant, nous allons travailler dans un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles. Nous définissons aussi $\mathcal{F}_{+\infty} = \sigma(\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire la σ-algèbre générée par $\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

Définition 1.8. *Un processus X_t est dit $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté (ou plus simplement adapté) si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable appelé l'espace des états. Un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est une famille $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.9. *À $\omega \in \Omega$, on associe l'application :*

$$[0, T) \rightarrow E \tag{1.11}$$

$$t \mapsto X_t(\omega) \tag{1.12}$$

appelée la trajectoire de $\{X_t\}_{t\geq 0}$ associée à ω.

De manière similaire, on peut définir dans le cas discret une matrice de processus stochastique, on note souvent un processus stochastique $\{X_t\}_{t\geq 0}$ comme $\{X_t\}$, X_t ou $X(t)$.

Prenons $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on dit que le processus stochastique $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est $\mathbb{P}$-p.s. continu à droite (respectivement $\mathbb{P}$-p.s. continu à gauche, respectivement $\mathbb{P}$-p.s. continu) si pour $\mathbb{P}$-presque toute fonction $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (respectivement continue à gauche, respectivement continue) pour tout $t \geq 0$. Il est dit càdlàg s'il est continu à droite et pour presque tout $\omega \in \Omega$, la limite à gauche, $\lim\limits_{s\to t} X_s(\omega)$, existe et est finie pour tout $t > 0$. Il est intégrable si pour tout $t \geq 0$, X_t est une variable aléatoire intégrable. Il est mesurable si en considérant le processus stochastique comme étant une fonction à deux variables (t, ω) de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ vers $\mathbb{R}^n$, il est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-mesurable, avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ la famille des sous-ensembles de Borel de $\mathbb{R}_+$. Un processus stochastique est progressivement mesurable ou progressif si pour tout $T > 0$, en considérant $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ comme une fonction à deux variables (t, ω) de $[0, T] \times \Omega$ vers $\mathbb{R}^n$, elle est $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}$-mesurable, avec $\mathcal{B}([0, T])$ la famille des sous-ensembles de Borel de $[0, T]$. Soit $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{P}$) la plus petite σ-algèbre de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ telle que chaque processus adapté càdlàg (respectivement processus continu à gauche) soit une fonction mesurable en (t, ω). Un processus est dit optimal (respectivement prévisible) si le processus considéré comme une fonction de (t, ω) est $\mathcal{O}$-mesurable (respectivement $\mathcal{P}$-mesurable). Un processus stochastique réel $\{A_t\}_{t \geq 0}$ est un processus croissant si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $A_t(\omega)$ est positif, croissant, continu à droite pour tout $t \geq 0$. Il est un processus à variation finie si $A_t = \overline{A}_t - \widehat{A}_t$ avec $\{\overline{A}_t\}$, $\{\widehat{A}_t\}$ deux processus croissants. Il est évident que les processus à variations finies sont des càdlàgs. Donc les processus adaptés à variations finies sont optimaux.

Les relations entre les différents processus stochastiques sont résumées ci-dessous :

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Continu, adapté} & & \text{Continu, adapté} & & \text{Croissant, adapté} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{Continu à gauche, adapté} & & \text{Càdlàg} & \Leftarrow & \text{Adapté, à variation finie} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{Prévisible} & \Rightarrow & \text{Optimal} & & \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \text{Progressif} & \Rightarrow & \text{Adapté} \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \text{mesurable} & &
\end{array}
$$

Définition 1.10. *Soient $\{X_t\}_{t \geq 0}$ et $\{X'_t\}_{t \geq 0}$ deux processus stochastiques à valeurs dans le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$, avec $\{X_t\}_{t \geq 0}$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\{X'_t\}_{t \geq 0}$ basé sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.*

1. *On dit qu'ils sont équivalents si pour tout $m \geq 1$, $t_1, t_2, ..., t_m \in [0, T)$ et $B_1, ..., B_m \in \mathcal{E}$, on a*

$$\mathbb{P}(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_m} \in B_m\}) = \mathbb{P}'(\{X'_{t_1} \in B_1, ..., X'_{t_m} \in B_m\}).$$

2. *La famille des lois des variables aléatoires (v.a.) $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ lorsque $\{t_1, ..., t_n\}$ parcourt l'ensemble des parties finies non vides de $[0, T)$ s'appelle la famille des lois de dimension finie ou famille des répartitions finies de $\{X_t\}_{t \geq 0}$.*

Deux processus stochastiques sont équivalents si et seulement s'ils ont les mêmes répartitions finies.

Définition 1.11. *On dit encore que chacun de ces processus est une version ou modification de l'autre ou encore que* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *et* $\{X'_t\}_{t\geq 0}$ *sont des versions du même processus (c'est une relation d'équivalence). Ils sont indiscernables si pour presque tout* $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$ *pour tout* $t \geq 0$, *c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega) \ \textit{pour tout} \ t \geq 0\Big\}\Big) = 1.$$

Théorème 1.4 (Continuité de Kolmogorov)**.** *On suppose que le processus* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *satisfait la condition suivante : pour tout* $t > 0$, *il existe des constantes positives* α, β, D *telles que*

$$E\Big[|X_t - X_s|^{\alpha}\Big] \leq D|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

Alors il existe une version continue de X.

Définition 1.12 (Temps d'arrêt [37])**.** *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ *(elle peut prendre la valeur* $+\infty$*) est un* $\{\mathcal{F}_t\}$*-temps d'arrêt (ou simplement temps d'arrêt) si* $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *quelque soit* $t \geq 0$. *Soient* τ *et* ρ *deux temps d'arrêts tels que* $\tau \leq \rho$ *p.s., on définit*

$$[[\tau, \rho[[= \Big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : \tau(\omega) \leq t < \rho(\omega)\Big\}$$

appelé intervalle stochastique. On peut définir de façon analogue les intervalles stochastiques suivants $]]\tau, \rho]]$, $[[\tau, \rho]]$ *et* $]]\tau, \rho[[$. *Si* τ *est un temps d'arrêt, on définit*

$$\mathcal{F}_{\tau} = \Big\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\omega : \tau(\omega) \leq 0\} \in \mathcal{F}_t \ \textit{pour tout} \ t \geq 0\Big\}$$

qui est une sous-σ*-algèbre de* $\mathcal{F}$. *Si* τ *et* ρ *sont deux temps d'arrêts tels que* $\tau \leq \rho$ *p.s. alors* $\mathcal{F}_{\tau} \subset \mathcal{F}_{\rho}$.

Théorème 1.5. *Si* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus mesurable progressivement et* τ *est un temps d'arrêt alors* $X_{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}$ *est* $\mathcal{F}_{\tau}$*-mesurable. En particulier, si* τ *est fini alors* X_{τ} *est* $\mathcal{F}_{\tau}$*-mesurable.*

Définition 1.13 (Martingale)**.** *Un processus intégrable* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ $\{\mathcal{F}_t\}$*-adapté à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *est une martingale par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$ *(ou simplement martingale) si*

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \ \textit{p.s.}, \ \ \textit{pour tout} \ 0 \leq s < t < +\infty.$$

Si $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ est un processus mesurable progressivement et τ est un temps d'arrêt alors $X^{\tau} = \{X_{\tau\wedge t}\}_{t\geq 0}$ s'appelle processus d'arrêt de X.

Théorème 1.6 (Théorème de Doob martingale)**.** *Soient* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *une martingale à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$ *et* θ, ρ *deux temps d'arrêts finis. Alors*

$$E[M_\theta|\mathcal{F}_\rho] = M_{\theta\wedge\rho} \ \ p.s.$$

En particulier, si τ *est un temps d'arrêt alors*

$$E[M_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s] = M_{\tau\wedge s} \ \ p.s., \ \ pour\ tout\ \ 0 \leq s < t < +\infty,$$

c'est-à-dire que le processus d'arrêt $M_\tau = \{M_{\tau\wedge t}\}$ *est aussi une martingale par rapport à la même filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$*.*

Définition 1.14. *Un processus stochastique* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *est de carré intégrable si* $E[|X_t|^2] < +\infty$ *pour tout* $t \geq 0$*. Si* $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *est une martingale continue de carrée intégrable à valeur réelle alors il existe un unique processus continu croissant adapté noté* $\{\langle M, M\rangle_t\}$ *tel que* $\{M_t^2 - \langle M, M\rangle_t\}$ *soit une martingale continue, pour tout* $t \geq 0$*. Le processus* $\{\langle M, M\rangle_t\}$ *s'appelle variation quadratique de* M*.*

En particulier, pour quelque soit τ temps d'arrêt fini, on a

$$E[M_\tau^2] = E[\langle M, M\rangle_\tau].$$

Si $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ est une autre martingale continue de carrée intégrable à valeur réelle, on définit

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}\Big(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t - \langle N, N\rangle_t\Big),$$

et $\Big\{\langle M, N\rangle_t\Big\}$ est appelé la variation quadratique adjointe de M et N. Elle est l'unique processus continu intégrable de variation finie tel que $\Big\{M_tN_t - \langle M, N\rangle_t\Big\}$ soit une martingale continue pour $t \geq 0$. En particulier, pour tout temps d'arrêt fini τ,

$$E[M_\tau N_\tau] = E[\langle M, N\rangle_\tau].$$

Définition 1.15. *Un processus* $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *adapté continu à droite est une martingale locale s'il existe une suite croissante* $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ *de temps d'arrêts, avec* $\tau_k \uparrow +\infty$ *p.s., telle que tout* $\{M_{\tau_k\wedge t} - M_0\}$ *soit une martingale.*

Toute martingale est une martingale locale, mais la réciproque n'est pas vraie. Si $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ et $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ sont deux martingales locales continues à valeurs réelles alors leur variation quadratique adjointe $\{\langle M, N\rangle_t\}_{t\geq 0}$ est l'unique processus continu adapté de la variation finie tel que $\{M_tN_t - \langle M, N\rangle_t\}_{t\geq 0}$ soit une martingale locale continue pour tout $t \geq 0$. Quand $M = N$, $\{\langle M, N\rangle_t\}_{t\geq 0}$ est la variation quadratique de M.

Théorème 1.7 (La loi forte des grands nombres, [37]). *Soit $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale réelle localement continue telle que $M_0 = 0$. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t = \infty \ \ p.s. \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M, M\rangle_t} = 0 \ \ p.s.$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\langle M, M\rangle_t}{t} < \infty \ \ p.s. \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t} = 0 \ \ p.s.$$

Théorème 1.8 (Inégalités des martingales de Doob [37]). *Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale positive à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}_+$.*

(i) Si $p \geq 1$ et $M_t \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ alors

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \sup_{a\leq t\leq b} |M_t(\omega)| \geq c\}\Big) \leq \frac{E\Big[|M_b|^p\Big]}{c^p}, \ \ pour\ tout\ \ c > 0;$$

(ii) Si $p > 1$ et $M_t \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ alors

$$E\Big[\sup_{a\leq t\leq b} |M_t|^p\Big] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E\Big[|M_b|^p\Big].$$

Théorème 1.9. *Soient $\{A_t\}_{t\geq 0}$ et $\{U_t\}_{t\geq 0}$ deux processus croissants continus adaptés avec $A_0 = U_0 = 0$ p.s. Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale locale continue avec $M_0 = 0$ p.s. Soit ξ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{F}_0$-mesurable. On définit*

$$X_t = \xi + A_t - U_t + M_t, \ \ pour\ \ t \geq 0.$$

Si X_t est strictement positif alors

$$\Big\{\lim_{t\to+\infty} A_t < +\infty\Big\} \subset \Big\{\lim_{t\to+\infty} X_t \ \ existe\ et\ finie\Big\} \cap \Big\{\lim_{t\to+\infty} U_t < +\infty\Big\} \ \ p.s.,$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(B \cap D^c) = 0$, avec $B \subset D$ p.s. En particulier, si $\lim_{t\to+\infty} A_t < +\infty$ p.s. alors pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$\lim_{t\to+\infty} X_t(\omega) \ \ existe\ et\ finie\ et\ \lim_{t\to+\infty} U_t < +\infty.$$

Définition 1.16. *Un processus stochastique $\{X_t\}_{t\geq 0}$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ est un processus à accroissements indépendants (abréviation : P.A.I.) si on a :*

(i) $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. ;

(ii) $\forall n \geq 2$, $\forall t_1, ..., t_m \in [0, T)$ *tel que* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m$ *les variables aléatoires (v.a.)* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$ *sont indépendantes.*

Un processus stochastique $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus à accroissements indépendants stationnaires (abréviation : P.A.I.S.) si c'est un P.A.I. et si*

(iii) $\forall \xi, t \in [0, T)$ *tel que* $0 \leq \xi < t$*, la variable aléatoire (v.a.)* $X_t - X_\xi$ *a la même loi que* $X_{t-\xi}$.

Autrement dit, pour tout $h \geq 0$*,*

$$X_{t+h} - X_{\xi+h} =^{\mathcal{L}} X_{t-\xi},$$

pour tout $\xi, t \in [0, T)$ *tel que* $0 \leq \xi < t$ *(Notation :* $X =^{\mathcal{L}} Y$ *si et seulement si* X *et* Y *ont même loi).*

2.2 Mouvements Browniens

En observant la nature en 1828, le botaniste Écossais Robert Brown a pu remarquer que le déplacement des grains de pollens sur un liquide est un mouvement irrégulier. Plus tard, il expliquait que ce sont les collisions aléatoires avec les molécules de ce liquide qui sont à la base de ce type de mouvement. Pour décrire ce mouvement mathématiquement, il est naturel d'utiliser le concept de processus stochastique $B_t(\omega)$, interprété comme étant la position du grain de pollen ω à l'instant t. Mouvement Brownien est le nom donné depuis lors à ce mouvement irrégulier. Voici la définition mathématique d'un mouvement Brownien standard.

Définition 1.17. *Soit un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *avec la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*. Un mouvement Brownien standard de dimension un est un processus stochastique* $\{B_t\}_{t\geq 0}$ *continu* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adapté qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Les propriétes d'un P.A.I ;

(ii) Pour tout $0 \leq s < t < +\infty$*, l'incrément* $B_t - B_s$ *a une distribution normale de espérance nulle et de variance* $t - s$.

Si $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k < +\infty$ alors les incréments $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq k$ sont indépendants et on dit que le mouvement Brownien a des incréments indépendants. De plus, la distribution de $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ dépend seulement de la différence $t_i - t_{i-1}$, et on dit que le mouvement Brownien a des incréments stationnaires.

À parti du théorème de continuité de Kolmogorov, nous avons ce corolaire.

Corollaire 1.1. *Tout Brownien a une version continue.*

Démonstration 1. *En se référant à un exercice de [40], on a :*

$$E\Big[|B_t - B_s|^4\Big] = n(n+2)|t-s|^2,$$

avec $\alpha = 4$, $D = n(n+2)$ *et* $\beta = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *(Théorème continuité de Kolmogorov), il existe une version continue de* B_t.

La filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ fait partie de la définition du mouvement Brownien. Toutefois, souvent on parle d'un mouvement Brownien sur un espace probabilisé sans la filtration. C'est-à-dire que le mouvement Brownien est défini comme étant un processus réel continu qui vérifie la propriété (i) mais à la place de la propriété (ii) on dit qu'il a des incréments indépendants. On définit $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$ pour $t \geq 0$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t^B$ est la σ-algèbre générée par $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Dans ce cas, $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}$ s'appelle la filtration naturelle générée par $\{B_t\}$. Il est clair que $\{B_t\}$ est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geq 0}$. De plus, si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration au sens large, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$, et $B_t - B_s$ est indépendant par rapport à $\mathcal{F}_s$ quand $0 \leq s < t < +\infty$ alors $\{B_t\}$ est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$.

Dans la définition, on n'a pas mentionné que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ devient complet et la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ vérifie les conditions usuelles. Cependant, il est souvent nécessaire de travailler dans un espace probabilisé complet avec une filtration vérifiant les conditions usuelles. Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ la complétude de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il est clair que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{N}$ une collection d'ensembles $\mathbb{P}$-nuls, c'est-à-dire $\mathcal{N} = \{A \in \overline{\mathcal{F}} : \mathbb{P}(A) = 0\}$. Pour $t \geq 0$, on définit

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{N}).$$

Dans ce cas, $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}$ s'appelle l'augmentation par rapport à $\mathbb{P}$ de la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}$ générée par $\{B_t\}$. L'augmentation $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}$ est une filtration sur $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions usuelles. De plus, $\{B_t\}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ par rapport à la filtration $\{\overline{\mathcal{F}}\}$. Ceci montre qu'en se donnant un mouvement Brownien $\{B_t\}_{t\geq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut construire un espace probabilisé complet avec une filtration satisfaisant les conditions usuelles.

Le mouvement Brownien possède beaucoup de propriétés, en voici quelques unes :

(i) $\{-B_t\}$ est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_t$;

(ii) Soit $c > 0$, on définit

$$X_t = \frac{B_{ct}}{\sqrt{c}} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Alors X_t est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_{ct}\}$;

(iii) B_t est une martingale continue de carrée intégrable et sa variation quadratique est $\langle B, B\rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$;

(iv) Par rapport à la loi des grands nombres, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \text{ p.s.};$$

(vi) Pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $\omega \to B_t(\omega)$ est différentiable.

Maintenant définissons un mouvement Brownien de dimension multiple.

Définition 1.18. *Un processus $\{B_t = (B_t^1, ..., B_t^n)\}_{t\geq 0}$ de dimension n est dit un mouvement Brownien de dimension n si tous les $\{B_t^i\}$ sont des mouvements Browniens de dimension 1 et $\{B_t^1\}, ..., \{B_t^n\}$ sont indépendants.*

Un mouvement Brownien B_t de $\mathbb{R}^n$ est une martingale continue de dimension n par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{F}_t$ générée par $\{B_s : s \leq t\}$. En effet,

$$\begin{aligned} E[|B_t|]^2 &\leq E[|B_t|^2] = |B_0| + nt \\ \text{et si } s \geq t \text{ alors } E[B_s|\mathcal{F}_t] &= E[B_s - B_t + B_t|\mathcal{F}_t] \\ &= E[B_s - B_t|\mathcal{F}_t] + E[B_t|\mathcal{F}_t] \\ &= 0 + B_t = B_t \end{aligned}$$

et $E[B_t|\mathcal{F}_t] = B_t$, B_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. De plus, sa variation quadratique est

$$\langle B^j, B^k\rangle_t = \delta_{jk} t \text{ pour } 0 \leq j, k \leq n,$$

avec δ_{jk} le symbole de Kronecker, c'est-à-dire

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k. \end{cases}$$

Théorème 1.10 (Théorème de P. Lévy (1948)). *Soient* $\Big\{M_t = (M_t^1, ..., M_t^n)\Big\}_{t\geq 0}$ *une martingale locale continue de dimension* n *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *et* $M_0 = 0$ *p.s. Si*

$$\langle M^j, M^k\rangle_t = \delta_{jk} t \ \ pour \ \ 1 \leq j, k \leq n$$

alors $\Big\{M_t = (M_t^1, ..., M_t^n)\Big\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien de dimension* n *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$.

Comme application du théorème de Lévy, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 1.11. *Soit* $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *une martingale locale continue telle que* $M_0 = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} \langle M, M\rangle_t = +\infty$ *p.s. Pour* $t \geq 0$, *on définit le temps d'arrêt*

$$\tau = \inf\{s : \langle M, M\rangle_s > t\}.$$

Alors $\{M_{\tau t}\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_{\tau t}\}_{t\geq 0}$.

Corollaire 1.2. *Soit* $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien tel que* $B_0 = 0$. *Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \langle B, B\rangle_t = \infty \ \ p.s. \ \ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{\langle B, B\rangle_t} = 0$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\langle B, B\rangle_t}{t} < \infty \ \ p.s. \ \ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0, \ \ p.s.$$

3 Intégrales d'Itô (stochastiques)

3.1 Construction de l'intégrale d'Itô

Nous revenons à la question qui était de trouver une interprétation raisonnable du "bruit" dans l'équation (1.3) de l'introduction :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X_t) + M(t, X_t) \times \text{bruit}, \ \ X(0) = X_0.$$

Pour simplifier, on se concentre sur un bruit de dimension un. À première vue, il est raisonnable de penser à remplacer notre bruit par un processus stochastique W_t. L'équation (1.3) devient alors

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X_t) + M(t, X_t)W_t, \ \ X(0) = X_0. \tag{1.13}$$

En se basant sur plusieurs situations, comme par exemple en ingénierie, W_t devrait, approximativement, vérifier au moins ces trois propriétés :

1. $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$ et W_{t_2} sont indépendants ;
2. $\{W_t\}$ est stationnaire, c'est-à-dire la distribution de $\left\{W_{t_1+t}, ..., W_{t_k+t}\right\}$ ne dépend pas de t ;
3. $E[W_t] = 0$, pour tout t.

Toutefois, il s'avère qu'il n'existe pas de processus stochastique raisonnable qui verifie 1 et 2. Les trajectoires d'un tel processus ne sont pas continues. On va voir quel est le processus approprié pouvant remplacer W_t.

Si on prend $E[W_t^2] = 1$ alors la fonction $(t, \omega) \to W_t(\omega)$ ne sera pas mesurable sur la σ-algèbre $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$, avec $\mathcal{B}$ la σ-algèbre de Borel sur $[0, +\infty[$.

On pourrait remplacer W_t par un bruit blanc qui est un processus aléatoire stationnaire centré dont les variables aléatoires sont indépendantes. Cependant, la construction d'un tel processus est délicate et utilise la notion de processus généralisé qui fait intervenir une extension au cas aléatoire de théorie des distributions temporaires ($[0, +\infty[$), pas comme une mesure de probabilité sur le très petit espace $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$, plutôt comme un processus ordinaire. Voir [2, 22, 23, 24, 48].

Pour nous faciliter la tâche, nous allons essayer de réécrire l'équation (1.13) dans une forme qui suggère le remplacement de W_t par un processus stochastique approprié.

Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = t$ et considérons une version discrétisée de (1.13)

$$X_{k+1} - X_k = F(t_k, X_k)\Delta t_k + M(t_k, X_k) W_k \Delta t_k,$$

avec $X_k = X(t_k)$, $W_k = W(t_k)$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Remplaçons $W_k \Delta t_k$ par $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$, avec $\{V_t\}_{t \geq 0}$ un processus approprié. Les hypothèses (1), (2) et (3) sur W_t suggèrent que V_t aurait des accroissements indépendants et stationnaires avec moyenne nulle. Le seul processus dont les trajectoires sont continues est le mouvement Brownien qu'on note par $B(t) = B_t$ (pour une étude approfondie voir [30]). En prenant $V_t = B_t$, on obtient la forme suivante :

$$X_{k+1} = X_k + F(t_k, X_k)\Delta t_k + M(t_k, X_k)\Delta B_k,$$

avec $\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$. En sommant toutes les équations, on trouve alors

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} F(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} M(t_j, X_j)\Delta B_j. \tag{1.14}$$

Lorsque $\max_j \Delta t_j \to 0$ et en supposant que l'on ait fixé $t_k = t$, la première somme du terme de droite de (1.14) converge en moyenne quadratique vers

$$\int_0^t F(\xi, X_\xi)d\xi.$$

En fait, cette intégrale peut être définie dès lors que $\displaystyle\int_{[0,t]^2} E[F(\xi, X_\xi)F(l, X_l)]d\xi dl < \infty$, comme la limite en moyenne quadratique de $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} F(t_j, X_j)\Delta t_j$.

De même, on peut établir l'existence d'une limite, en moyenne quadratique, pour la deuxième somme lorsque $\max_j \Delta t_j \to 0$, cette limite étant notée

$$\int_0^t M(\xi, X_\xi)dB_\xi.$$

D'où

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(\xi, X_\xi)d\xi + \int_0^t M(\xi, X_\xi)dB_\xi. \tag{1.15}$$

On réécrit encore l'équation (1.15) sous la forme différentielle équivalente

$$dX_t = F(t, X_t)dt + M(t, X_t)dB_t, \tag{1.16}$$

les termes $F(.,.)$ et $M(.,.)$ sont appelés respectivement fonction de dérive et fonction de diffusion. On a $X_t = X_t(\omega)$ solution de l'équation (1.15) qui est un processus stochastique et nous reviendrons sur son existence par la suite. Il s'agit maintenant de donner un sens à l'intégrale suivante connue sous le nom de l'intégrale d'Itô ou intégrale stochastique

$$\int_0^t M(\xi, X_\xi)dB_\xi,$$

avec $B_\xi(\omega)$ un mouvement Brownien standard de dimension 1. Si $t \mapsto M(t, X_t)$ de l'équation (1.15) était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est pas toujours le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrandes ayant le même résultat que l'intégration par partie dans le cas différentiable.

On suppose que $0 \leq S < T$ et $f(t,\omega)$ une fonction donnée. On définit l'intégrale suivante

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega).$$

Avant de donner les procédés utilisés par Itô pour donner un sens mathématique à l'intégrale, il est important de rappeler quelques définitions.

Définition 1.19. *Un processus stochastique X_t est une fonctionnelle Brownienne non-anticipative si pour toute filtration canonique $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ engendrée par $\{B_t\}_{t\geq 0}$*

1. *X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$;*
2. *X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,T]$.*

Définition 1.20. *Une fonctionnelle Brownienne non-anticipative $\{e_t\}_{t\in[0,T]}$ est dite simple ou élémentaire s'il existe une partition*

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T \;\; de \;\; [0,T] \;\; telle \; que \;\; e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k]}(t).$$

Pour une telle fonctionnelle, nous définissons l'intégrale stochastique par

$$\int_0^t e_s dB_s = \sum_{k=1}^{m} e_{t_{k-1}}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}] + e_{t_m}[B_t - B_{t_m}],$$

où m est tel que $t \in [t_m, t_{m+1}]$.

Définition 1.21. *Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S,T)$ une classe de fonctions $f(t,\omega) : [0,+\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ telles que*

a) $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-mesurable, avec $\mathcal{B}$ la σ-algèbre de Borel sur $[0,+\infty)$;
b) $f(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté ;
c) $E\Big[\displaystyle\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\Big] < +\infty$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{V}$, nous allons montrer comment définir l'intégrale

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega),$$

avec B_t-mouvement brownien de dimension 1.

Dans un premier temps on définit $I[\phi]$ pour une simple classe de fonctions ϕ. Puis on montre que toute $f \in \mathcal{V}$ peut être approximée par un certain ϕ et on utilise cela pour définir $\int f dB$ comme étant la limite de $\int \phi dB$ quand $\phi \to f$. On choisit $\phi \in \mathcal{V}$ qui soit une fonction élémentaire c'est-à-dire

$$\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

donc

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega).$$

Lemme 1.2 (Isométrie d'Itô)**.** *Si $\phi(t,\omega)$ est bornée et élémentaire alors*

$$E\Big[\Big(\int_S^T \phi(t,\omega) dB_t(\omega)\Big)^2\Big] = E\Big[\int_S^T \phi(t,\omega)^2 dt\Big].$$

Démonstration 2. *Ce lemme est démontré dans [40].*

Maintenant nous allons utiliser l'isométrie d'Itô pour étendre la définition à partir d'une fonction élémentaire vers des fonctions de $\mathcal{V}$. Cela se fera en plusieurs étapes dont les démonstrations sont dans [37, 40].

Étape 1 Soit $g \in \mathcal{V}$ bornée et $g(.,\omega)$ continue pour tout ω. Alors il existe une fonction élémentaire $\phi_n \in \mathcal{V}$ telle que

$$E\Big[\int_S^T (g(t) - \phi_n(t)) dt\Big] \to 0, \ \text{quand} \ n \to +\infty.$$

Étape 2 Soit $h \in \mathcal{V}$ bornée. Alors il existe une suite de fonctions bornées $g_n \in \mathcal{V}$ telle que $g_n(.,\omega)$ soit continue pour tout ω, n et

$$E\Big[\int_S^T (h(t) - g_n(t))^2 dt\Big] \to 0, \ \text{quand} \ n \to +\infty.$$

Étape 3 Soit $f \in \mathcal{V}$. Alors il existe une suite $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$ telle que h_n soit bornée pour tout n et

$$E\Big[\int_S^T (f(t) - h_n(t))^2 dt\Big] \to 0, \ \text{quand} \ n \to +\infty.$$

On est prêt maintenant à compléter la définition de l'intégrale d'Itô

$$\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) \ \text{pour} \ f \in \mathcal{V}.$$

Si $f \in \mathcal{V}$, par les étapes 1 à 3, nous choisissons les fonctions élémentaires $\phi_n \in \mathcal{V}$ telles que

$$E\Big[\int_S^T |f - \phi_n|^2 dt\Big] \to 0.$$

Et on définit

$$I[f](\omega) := \int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) := \lim_{n\to+\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega).$$

La limite existe comme un élément de $L^2(\mathbb{P})$ si $\Big\{\int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega)\Big\}$ forme une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$.

Théorème 1.12. *Soit $f \in \mathcal{V}$. Alors l'intégrale indéfinie $I[f] = \{I(t)\}_{0\le t\le T}$ est une martingale continue de carrée intégrable et sa variation quadratique est donnée par*

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds, \ \ 0 \le t \le T. \tag{1.17}$$

D'où la définition suivante :

Définition 1.22 (Intégrale d'Itô). *Soit $f \in \mathcal{V}$. L'intégrale d'Itô de f est définie par*

$$\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega) \ \ (\textit{dans } L^2(\mathbb{P}))$$

avec $\{\phi_n\}$ une suite de fonctions élémentaires telles que

$$E\Big[\int_S^T \Big(f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega)\Big)^2 dt\Big] \to 0, \ \ \textit{quand } n \to +\infty.$$

Corollaire 1.3 (Isométrie d'Itô). *On a*

$$E\Big[\Big(\int_S^T f(t,\omega) dB_t\Big)^2\Big] = E\Big[\int_S^T f^2(t,\omega) dt\Big], \ \ \textit{pour tout } f \in \mathcal{V}.$$

Corollaire 1.4. *Si $f, f_n \in \mathcal{V}$ pour $n = 1, 2, ...$ et*

$$E\Big[\int_S^T (f_n(t,\omega) - f(t,\omega))^2 dt\Big] \to 0, \ \ \textit{quand } n \to +\infty$$

alors

$$\int_S^T f_n(t,\omega) dB_t(\omega) \to \int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) \ \ (\textit{dans } L^2(\mathbb{P})), \ \ \textit{quand } n \to +\infty.$$

Pour illustrer cette définition, on donne l'exemple suivant :

Exemple

$$\text{si } B_0 = 0 \text{ alors } \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Prenons

$$\phi_n(s,\omega) = \sum_j B_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}}(s)$$

avec $B_j = B_{t_j}$. Alors

$$\begin{aligned}
E\Big[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds\Big] &= E\Big[\int_0^t \Big(\sum_j B_j \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}[}(s) - B_s\Big)^2 ds\Big] \\
&= E\Big[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\Big] \\
&= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} E\Big[(B_j - B_s)^2\Big] ds \\
&= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds \\
&= \frac{1}{2}\sum_j (t_{j+1} - t_j)^2 \to 0, \text{ quand } \Delta t_j \to 0.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine, d'après le corollaire 1.4, que

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \int_0^t \phi_n(s,\omega) dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j B_j \Delta B_j.$$

Calculer I revient donc à calculer la limite de l'intégrale $\int_0^t \phi_n(s) dB_s$. On a

$$\Delta(B_j^2) = B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) = (\Delta B_j)^2 + 2B_j\Delta B_j,$$

d'où

$$B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}\Big(\Delta(B_j^2) - (\Delta B_j)^2\Big).$$

Ce qui entraine que

$$\int_0^t \phi_n(s) dB_s = \sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_j \Delta(B_j^2) - \sum_j (\Delta B_j)^2\Big).$$

Or

$$\sum_j \Delta(B_j^2) = B_1^2 - B_0^2 + B_2^2 - B_1^2 + ... + B_t^2 - B_{j-1}^2 = B_t^2 - B_0^2 = B_t^2, \text{ car } B_0^2 = 0,$$

d'où

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}\Big(B_t^2 - \sum_j (\Delta B_j)^2\Big).$$

Montrons que $\sum\limits_j (\Delta B_j)^2 \to t$, pour cela calculons

$$\begin{aligned}
E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2 - t\Big)^2\Big] &= E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m+1} (\Delta B_j)^2 - t\Big)^2\Big] \\
&= E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2 - 2t\sum_j (\Delta B_j)^2 + t^2\Big] \\
&= E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t\sum_j E\Big[(\Delta B_j)^2\Big] + t^2 \\
&= E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t\sum_j (\Delta t_j) + t^2 \\
&= E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t^2 + t^2 \\
&= E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] - t^2,
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2 &= \sum_{j=0}^{m-1} (\Delta B_j)^2 \times \sum_{j=0}^{m-1} (\Delta B_j)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (\Delta B_j)^4 + 2\sum_{l<j} (\Delta B_l)^2 (\Delta B_j)^2,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] &= E\Big[\sum_{j=0}^{m-1} (\Delta B_j)^4\Big] + 2E\Big[\sum_{l<j} (\Delta B_l)^2 (\Delta B_j)^2\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} E\Big[(\Delta B_j)^4\Big] + 2\sum_{l<j} \Delta t_l \Delta t_j \\
&= 3\sum_{j=0}^{m-1} (\Delta t_j)^2 + 2\sum_{l<j} \Delta t_l \Delta t_j,
\end{aligned}$$

car $\Delta B_j \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_j)$ implique que $E\Big[(\Delta B_j)^4\Big] = 3(\Delta t_j)^2$, donc

$$\begin{aligned}
E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2\Big)^2\Big] &= 2\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 + \sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 + 2\sum_{l<j}\Delta t_l \Delta t_j \\
&= 2\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 + \Big(\sum_{j=0}^{m-1}\Delta t_j\Big)^2 = 2\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 + t^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2 - t\Big)^2\Big] = 2\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 + t^2 - t^2 = 2\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2.$$

Or

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\Delta t_j)^2 \to 0 \text{ quand } \Delta t_j \to 0 \text{ implique que } E\Big[\Big(\sum_j (\Delta B_j)^2 - t\Big)^2\Big] \to 0.$$

Donc

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0}\int_0^t \phi_n(s,\omega) dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0}\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Théorème 1.13 (Propriétés de l'intégrale d'Itô)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$ et $0 \leq S < U < T$. Alors*

1. *Linéarité :* $\displaystyle\int_S^T (cf+g)dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ *(c constante) ;*
2. *Additivité :* $\displaystyle\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ *;*
3. $\displaystyle E\Big[\int_S^T f dB_t\Big] = 0$ *;*
4. $\displaystyle\int_S^T f dB_t$ *est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Théorème 1.14. *Soit $f \in \mathcal{V}(0,T)$. Alors il existe une version continue par rapport à t de*

$$\int_0^t f(s,\omega) dB_s(\omega), \ \ 0 \leq t \leq T,$$

c'est-à-dire qu'il existe un processus stochastique J_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ continu par rapport à t tel que

$$\mathbb{P}\Big(J_t = \int_0^t f(s) dB_s\Big) = 1, \ \ \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Corollaire 1.5. *Soit $f \in \mathcal{V}(0,T)$. Alors pour tout t*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$ et

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le T}|M_t| \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda^2}E\Big[\int_0^T f(s,\omega)^2 ds\Big]; \quad \lambda, T > 0.$$

3.2 Extensions de l'intégrale d'Itô

L'intégrale d'Itô peut être définie pour une plus grande classe d'intégrandes que $\mathcal{V}$. Si on remplace par exemple la deuxième propriété b) de la définition 1.21 par l'hypothèse suivante :

b') il existe une famille croissante de σ-algèbres $\{\mathcal{H}_t\}_{t\ge 0}$ telle que

1. B_t soit une martingale par rapport à $\mathcal{H}_t$;
2. f_t soit $\mathcal{H}_t$-adapté,

on peut remarquer que 1. entraine que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$. Ce qui est essentiel dans cette extension, c'est le fait qu'on a permis à f_t de ne plus dépendre de $\mathcal{F}_t$ autant que B_t reste une martingale par rapport au passé de f_s ; $s \le t$. Si l'hypothèse b') est vérifiée alors $E[B_s - B_t|\mathcal{H}_t] = 0$, pour tout $s > t$ et si nous revenons sur tout que nous disions ci-dessus, nous pouvons voir que cette hypothèse est suffisante pour construire l'intégrale d'Itô. Cela nous permet de donner une autre définition de l'intégrale d'Itô en dimension multiple.

Définition 1.23. *Soit $B = (B_1, B_2, ..., B_n)$ un mouvement Brownien de dimension n. On note $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$ l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ d'éléments $v = [v_{lj}(t,\omega)]_{l,j}$ satisfaisant les conditions a) et c) de la définition 1.21 et b') définie ci-dessus, par rapport à la filtration $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\ge 0}$. Soit $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$. On définit, en utilisant la notation matricielle*

$$\int_S^T vdB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix},$$

une matrice (vecteur colonne) de dimension $m \times 1$ dont son $i^{\text{ème}}$ composante est la somme suivante de n intégrales d'Itô en dimension 1 :

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{lj}(s,\omega)dB_j(s,\omega).$$

Si $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)} = \{\mathcal{F}_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$ alors nous écrirons $\mathcal{V}^{m\times n}(S,T)$ et si $m = 1$ nous écrivons $\mathcal{V}^n_{\mathcal{H}}(S,T)$ (respectivement $\mathcal{V}^n(S,T)$) au lieu de $\mathcal{V}^{m\times n}_H(S,T)$ (respectivement $\mathcal{V}^{n\times 1}(S,T)$). Nous avons aussi

$$\mathcal{V}^{m\times n} = \mathcal{V}^{m\times n}(0,\infty) = \bigcap_{T>0} \mathcal{V}^{m\times n}(0,T).$$

Un autre extension qu'on peut avoir de l'intégrale d'Itô consiste à affaiblir la condition c) de la définition 1.21 en la remplaçant par

$$\text{c')}\ \ \mathbb{P}\Big[\int_S^T f(s,\omega)^2 ds < \infty\Big] = 1.$$

D'ou la définition suivante

Définition 1.24. *On définit $\mathcal{W}_H(S,T)$ la classe de processus $f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ satisfaisant a) de la définition 1.21 et b') et c') définies ci-dessus. De façon similaire, on peut aussi écrire $\mathcal{W}_H = \bigcap_{T>0} \mathcal{W}_H(0,T)$ et dans le cas d'une matrice, on écrit $\mathcal{W}^{m\times n}_H(S,T)$.*

4 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique. Par exemple le calcul de l'intégrale classique $\int_0^t B_s dB_s$ posait problème, car elle n'a pas un sens mathématique, les trajectoires des processus stochastiques ne sont pas différentiables. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique qui nous aide à mieux appréhender le problème de différentiabilité des processus stochastiques.

4.1 Formule d'Itô en dimension 1

Définition 1.25 (Processus d'Itô en dimension 1)**.** *Soit B_t un mouvement Brownien de dimension 1 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus d'Itô de dimension 1 (ou intégrale stochastique) est un processus stochastique X_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega) ds + \int_0^t v(s,\omega) dB_s, \tag{1.18}$$

avec $v \in \mathcal{W}_H$ tel que

$$\mathbb{P}\Big[\int_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty \ \ \textit{pour tout}\ \ t \geq 0\Big] = 1 \tag{1.19}$$

et u $\mathcal{H}_t$-adapté vérifiant

$$\mathbb{P}\Big[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty, \ \ pour\ tout\ \ t \geq 0\Big] = 1. \tag{1.20}$$

Un X_t de la forme de (1.18) peut s'écrire parfois sur cette forme plus courte :

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Par exemple, on a :

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t.$$

Théorème 1.15 (Formule d'Itô en dimension 1)**.** *Soit X_t un processus stochastique qui vérifie*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

et soit $g(t,x) \in C^2\Big([0,\infty) \times \mathbb{R}\Big)$, c'est-à-dire deux fois continue et différentiable sur $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Alors $Y_t = g(t, X_t)$ est aussi un processus stochastique et

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{1.21}$$

avec $(dX_t)^2 = (dX_t) \times (dX_t)$ calculé suivant les règles :

$$dt \times dt = dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0 \ \ et \ \ dB_t \times dB_t = dt.$$

Exemple d'application. Prenons à nouveau $I = \int_0^t B_s dB_s$. Posons $X_t = B_t$ et $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. On a $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$ et d'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d\Big(\frac{1}{2}B_t^2\Big) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt \ \ &\Rightarrow \ \ \int_0^t d\Big(\frac{1}{2}B_s^2\Big) = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t ds \\ &\Rightarrow \ \ \frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t \\ &\Rightarrow \ \ \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on pourrait trouver le même résultat avec une intégration par parties.

Théorème 1.16 (Intégration par parties). *Supposons $f(s,\omega) = f(s)$ qui dépend seulement de s et f est continue et bornée sur $[0,t]$. Alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

Exemple d'application. Pour montrer que

$$\int_0^t sdB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds,$$

on prend $f(s) = s$ avec la formule d'intégration par parties et on a

$$\int_0^t sdB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

4.2 Formule d'Itô en dimension multiple

Nous allons maintenant étendre la formule d'Itô en dimension multiple. Soit $B(t,\omega) = (B_1(t,\omega), ..., B_m(t,\omega))$ un mouvement Brownien de dimension m. Si pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, $u_i(t,\omega)$ et $v_{ij}(t,\omega)$ vérifient les conditions de la définition de la formule d'Itô en dimension 1, alors nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} dX_1 &= u_1 dt + v_{11}dB_1 + \cdots + v_{1m}dB_m \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ dX_n &= u_n dt + v_{n1}dB_1 + \cdots + v_{nm}dB_m. \end{cases} \tag{1.22}$$

En faisant une simple représentation matricielle, on a

$$dX_t = udt + vdB_t, \tag{1.23}$$

avec

$$X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}, \quad dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Le processus X_t est un processus d'Itô de dimension n ou simplement un processus d'Itô.

Théorème 1.17 (Formule d'Itô en dimension multiple). *Soit*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

un processus d'Itô de dimension n comme défini ci-dessus. Soit $g(t,x) = (g_1(t,x), ..., g_p(t,x))$ une fonction C^2 de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors le processus $Y(t,\omega) = g(t, X(t))$ est aussi un processus d'Itô dont sa $k^{ème}$ composante est donnée par

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X)dX_i dX_j \tag{1.25}$$

avec

$$dB_i \times dB_j = \delta_{ij}dt, \quad dB_i \times dt = dt \times dB_i = dt \times dt = 0.$$

Par exemple

$$dx_i(t)dx_j(t) = \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(t)g_{jk}(t)dt.$$

Par ailleurs, la formule s'écrit

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}dx^T(t)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx(t).$$

Notons que si $x(t)$ est continu et différentiable en t alors (par les formules classiques de calcul de dérivées) le calcul du terme $\frac{1}{2}dx^T(t)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx(t)$ ne sera pas possible. Par exemple, prenons $Y_t = x_1(t)x_2(t)$, alors via les deux formules précédentes, on a

$$\begin{aligned} d(x_1(t)x_2(t)) &= x_1(t)dx_2(t) + x_2(t)dx_1(t) + dx_1(t)dx_2(t) \\ &= x_1(t)dx_2(t) + x_2(t)dx_1(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{1k}(t)g_{2k}(t)dt. \end{aligned}$$

Ce qui diffère de la formule classique d'intégration par parties $d(uv) = vdu + udv$, où u, v sont différentiables. Cependant, la version de la formule d'intégration par parties stochastique est similaire à celle classique.

4.3 Moments d'inégalités

Dans cette section, nous allons donner quelques inégalités importantes dont les preuves se trouvent dans [37]. Leur démonstration fait appel à la formule d'Itô.
Soit $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$, $t \geq 0$ un mouvement Brownien de dimension m défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.18. *Soient $p \geq 2$ et $g \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(0,T)$ tels que*

$$E\Big[\int_0^T |g(s)|^p ds\Big] < \infty.$$

Alors
$$E\Big[\Big|\int_0^T g(s)dB(s)\Big|^p\Big] \leq \Big(\frac{p(p-1)}{2}\Big)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\Big[\int_0^T |g(s)|^p ds\Big].$$
En particulier pour $p = 2$, on a une égalité.

Théorème 1.19. *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*
$$E\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t g(s)dB(s)\Big|^p\Big] \leq \Big(\frac{p^3}{2(p-1)}\Big)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\Big[\int_0^T |g(s)|^p ds\Big].$$
Ce qui nous amène à l'inégalité suivante :

Théorème 1.20 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Soit $g \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{m\times n})$, on définit pour tout $t \geq 0$,*
$$x(t) = \int_0^t g(s)dB(s) \ \ et \ \ A(t) = \int_0^t |g(s)|^2 ds.$$
Alors pour tout $p > 0$, il existe deux constantes positives c_p et C_p (dépendantes de p) telles que
$$c_p E\Big[|A(t)|^{\frac{p}{2}}\Big] \leq E\Big[\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^p\Big] \leq C_p E\Big[|A(t)|^{\frac{p}{2}}\Big] \tag{1.26}$$
pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut prendre
$$\begin{aligned} c_p &= \Big(\frac{p}{2}\Big)^p, & C_p &= \Big(\frac{32}{p}\Big)^{\frac{p}{2}}, & &si\ \ 0 < p < 2;\\ c_p &= 1, & C_p &= 4, & &si\ \ p = 2;\\ et\ \ c_p &= (2p)^{\frac{-p}{2}}, & C_p &= \Big(\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\Big)^{\frac{p}{2}}, & &si\ \ p > 2. \end{aligned}$$

Inégalités de type Gronwall

Les inégalités de type Gronwall ont été largement utilisées dans la théorie des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles stochastiques pour montrer des résultats d'existence, unicité, limite, comparaison, continuité, etc. Le résultat suivant est une inégalité de type Gronwall.

Théorème 1.21 (Inégalité de Gronwall)**.** *Soient $T > 0$ et $c \geq 0$ (constante). Soit $u(.)$ une fonction positive, bornée, mesurable sur $[0, T]$ et soit $v(.)$ une fonction positive intégrable sur $[0, T]$. Si*
$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \ \ pour\ tout\ \ 0 \leq t \leq T$$
alors
$$u(t) \leq c\exp\Big(\int_0^t v(s)ds\Big), \ \ pour\ tout\ \ 0 \leq t \leq T.$$

5 Résolution et existence de solution d'une EDS

5.1 Exemple et méthode de résolution

Maintenant nous revenons aux solutions possibles $X_t(\omega)$ de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad b(t, X_t) \in \mathbb{R}, \quad \sigma(t, X_t) \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

Il est intéressant de se poser ces questions :

1. Peut-on trouver un théorème d'existence et d'unicité de solution pour une telle équation ? Quelles sont les propriétés de cette solution ?
2. Comment peut-on résoudre une telle équation ?

Nous nous sommes plutôt intéressés à la réponse de la première question mais avant d'y répondre, nous allons traiter la deuxième question à travers un exemple issu de [40].

Exemple

Revenons à l'exemple simple d'accroissement d'une population énoncé au début de ce chapitre

$$\frac{dP(t)}{dt} = a(t)P(t)dt$$

qui a été transformé en l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante

$$dP_t = rP_tdt + \alpha P_tdB_t, \;\; P(0) = P_0 \text{ (Condition initiale)}, \tag{1.28}$$

avec r et α deux constantes. Or

$$\frac{dP_t}{P_t} = rdt + \alpha dB_t. \tag{1.29}$$

En prenant l'intégrale entre 0 et t des deux membres, on a

$$\int_0^t \frac{dP_s}{P_s} = r\int_0^t ds + \alpha\int_0^t dB_s,$$

donc

$$\int_0^t \frac{dP_s}{P_s} = rt + \alpha B_t, \;\; \text{car } \; B_0 = 0. \tag{1.30}$$

Notre objectif est de trouver P_t. Pour cela, appliquons la formule d'Itô à la fonction

$$g(t, x) = \ln(x), \quad x > 0.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} d(\ln(P_t)) &= \frac{\partial \ln(P_t)}{\partial t} + \frac{\partial \ln(P_t)}{\partial P_t} dP_t + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln(P_t)}{\partial^2 P_t^2}(dP_t)^2 \\ &= \frac{1}{P_t} dP_t + \frac{1}{2}\Big(- \frac{1}{P_t^2}\Big)(dP_t)^2 \\ &= \frac{dP_t}{P_t} - \frac{1}{2P_t^2}\alpha^2 P_t^2 dt \\ &= \frac{dP_t}{P_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt \end{aligned}$$

donc

$$\frac{dP_t}{P_t} = d(\ln(P_t)) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt.$$

En utilisant (1.30), on a

$$\int_0^t d(\ln(P_t)) + \int_0^t \frac{1}{2}\alpha^2 ds = rt + \alpha B_t \qquad \text{donc} \qquad \ln\frac{P_t}{P_0} = -\frac{1}{2}\alpha^2 t + rt + \alpha B_t$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \ln\frac{P_t}{P_0} = (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t.$$

On a alors

$$P_t = P_0 \exp\Big((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t\Big).$$

Maintenant nous avons trouvé la forme explicite de la solution P_t de l'équation d'accroissement d'une population, cela nous aide à comprendre le comportement de B_t afin d'obtenir des informations sur la solution. On peut faire les remarques suivantes :

1. Si $r > \frac{1}{2}\alpha^2$ alors $P_t \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ p.s. ;
2. Si $r < \frac{1}{2}\alpha^2$ alors $P_t \to 0$ quand $t \to +\infty$ p.s. ;
3. Si $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ alors P_t varie entre de grandes et petites valeurs arbitraires.

Pour une description complète des méthodes de réduction des équations différentielles stochastiques de dimension 1, on peut voir [20] (chapitre 4). Une méthode pour les dimensions multiples a été introduite dans [40] également.

5.2 Existence et unicité de solution

Le théorème suivant montre sous certaines hypothèses l'existence et l'unicité de solution.

Théorème 1.22 (Existence et unicité de l'EDS, [37, 40])**.** *Soient $T > 0$, $b(.,.) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma(.,.) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ deux fonctions mesurables vérifiant :*

1. $||b(t,X)||+|\sigma(t,X)| \leq C(1+||X||)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $C = Cte$, $|\sigma| = \Big(\sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$;
2. $||b(t,X) - b(t,Y)|| + |\sigma(t,X) - \sigma(t,Y)| \leq D(||X - Y||)$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $D = Cte$.

Soit Z une variable aléatoire indépendante de la σ-algèbre $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ générée par B_s, $s \geq 0$ telle que $E[|Z|^2] < \infty$.
Alors l'EDS

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \quad X_0 = Z, \tag{1.31}$$

admet une unique solution $X_t(\omega)$ continue en t qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $X_t(\omega)$ *est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t^Z$ générée par Z et $B_s(.)$, $s \leq t$;*
2. $E\Big[\int_0^T |X_t|^2 dt\Big] < \infty$.

Nous venons de rappeler certaines notions sur les processus stochastiques qui seront utilisées dans le chapitre 4. Le chapitre suivant sera consacré aux processus d'Itô-Lévy.

Chapitre 2

Équations Différentielles Stochastiques à sauts

---

1 Calculs stochastiques avec diffusion de sauts

1.1 Définition de base et résultats sur les processus de Lévy

Définition 2.1 (Processus de Lévy). *Un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $\{\eta(t)\}_{t\geq 0} = \{\eta_t\}_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}$ avec $\eta_0 = 0$ p.s. est un processus de Lévy si η_t est continu en probabilité et ses accroissements sont indépendants et stationnaires.*

Théorème 2.1. *Soit $\{\eta_t\}$ un processus de Lévy. Alors η_t a une version càdlàg (continue à droite et admet une limite à gauche) qui est aussi un processus de Lévy.*

Démonstration 3. *Pour la preuve, voir [43, 49].*

Compte tenu de ce résultat, nous supposerons désormais que les processus de Lévy que nous utilisons soient des càdlàgs.

Le saut de η_t pour $t \geq 0$ est défini par

$$\Delta\eta_t = \eta_t - \eta_{t^-}.$$

Soit $\mathbb{B}_0$ la famille des ensembles de Borel $U \subset \mathbb{R}$ dont la fermeture, non contenant 0, est notée $\overline{U}$. Pour tout $U \in \mathbb{B}_0$, nous définissons

$$N(t, U) = N(t, U, \omega) = \sum_{s:0<s\leq t} \mathbb{1}_U(\Delta \eta_s).$$

En d'autres mots, $N(t, U)$ est le nombre de sauts de taille $\Delta \eta_s \in U$ qui se produit avant ou à l'instant t. On appelle $N(t, U)$ la mesure aléatoire de poisson (ou mesure du saut) de $\eta(.)$.

Remarque 1. *Notons que $N(t, U)$ est fini pour tout $U \in \mathbb{B}_0$. Pour voir cela, nous procédons comme suit : on définit*

$$T_1(\omega) = \inf\{t > 0; \eta_t \in U\}.$$

Nous prétendons que $T_1(\omega) > 0$ p.s. Pour le prouver, notons que par la continuité de la trajectoire d'une droite, nous avons

$$\lim_{t \to 0^+} \eta(t) = \eta(0) = 0 \text{ p.s.}$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t(\epsilon) > 0$ tel que $|\eta(t)| < \epsilon$, pour tout $t < t(\epsilon)$. Ce qui implique que $\eta_t \notin U$, pour tout $t < t(\epsilon)$, si $\epsilon < \operatorname{dist}(0, U)$.

Définissons par induction

$$T_{n+1}(\omega) = \inf\{t > T_n(\omega); \Delta \eta_t \in U\}.$$

Alors par le même argument, $T_{n+1} > T_n$ p.s. Nous prétendons que

$$T_n \to \infty \text{ quand } n \to \infty, \text{ p.s.}$$

Supposons le contraire. Alors $T_n \to T < \infty$. Dans ce cas,

$$\lim_{s \to T^-} \eta(s) \text{ n'existe pas,}$$

ce qui contredit l'existence des limites à gauche des trajectoires.

Étant donné que tout mouvement Brownien $\{B_t\}_{t\geq 0}$ a des accroissements indépendants et stationnaires, donc B_t est un processus de Lévy. Notons d'autres exemples importants :

Définition 2.2 (processus de Poisson). *Le processus de Poisson $\pi(t)$ d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que*

$$\mathbb{P}(\pi(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Théorème 2.2 ([43], théorème 1.35).

1. *L'ensemble des fonctions $U \longrightarrow N(t, U, \omega)$ définit une mesure σ-finie sur $\mathbb{B}_0$ pour tout t, ω fixés. La forme différentielle de cette mesure s'écrit $N(t, dz)$.*
2. *L'ensemble des fonctions $[a, b) \times U \longrightarrow N(b, U, \omega) - N(a, U, \omega)$; $[a, b) \subset [0, \infty)$, $U \in \mathbb{B}_0$, définit une mesure σ-finie pour tout ω fixé. La forme différentielle de cette mesure s'écrit $N(dt, dz)$.*
3. *L'ensemble des fonctions*
$$\nu(U) = E[N(1, U)],$$
avec $E = E_p$ noté espérance par rapport à p, définit aussi une mesure σ-finie sur $\mathbb{B}_0$ et s'appelle la mesure de Lévy sur $\{\eta_t\}$.
4. *Pour tout $U \in \mathbb{B}_0$, le processus*
$$\pi_U(t) := \pi_U(t, \omega) := N(t, U, \omega)$$
est un processus de poisson d'intensité $\lambda = \nu(U)$.

Exemple : Le processus de Poisson composé. Soit $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (iid) à distribution commune $\mu_{X(1)} = \mu_X$ et soit $\pi(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ, indépendant de tous les $X(n)$.

Le processus de poisson composé $Y(t)$ est défini par

$$Y(t) = X(1) + ... + X(\pi(t)), \quad t \geq 0.$$

Un accroissement de ce processus est donné par

$$Y(s) - Y(t) = \sum_{k=\pi(t)+1}^{\pi(s)} X(k), \quad s > t.$$

Ceci est indépendant de $X(1), ..., X(\pi(t))$ et cette distribution dépend seulement de la différence $(s-t)$ et de la distribution de $X(1)$. Donc $Y(t)$ est un processus de Lévy.

Pour trouver la mesure de Lévy ν de $Y(t)$, on note que si $\nu \in \mathbb{B}_0$ alors

$$\begin{aligned} \nu(U) &= E[N(1,U)] = E\Big[\sum_{s:0<s\leq T} \mathbb{1}_U(\Delta Y(s))\Big] \\ &= E[(nombre\ de\ sauts) \times X_U(saut)] = E[\pi(1)\mathbb{1}_U(X)] = \lambda_{\mu_X}(U), \end{aligned}$$

par l'indépendance. Nous concluons que $\nu = \lambda_{\mu_X}$.

Ceci montre qu'un processus de Lévy peut être représenté par un processus de poisson composé si et seulement si sa mesure de Lévy est finie. Cependant, noter qu'il y a beaucoup de processus de Lévy intéressants η_t qui ont une mesure de Lévy ν infinie, en fait même lorsque $\int_{|z|<1} \nu(dz) = \infty$ (voir [8]). En général, on peut prouver que pour tout $R > 0$ fixé, les processus

$$M_t^{(k)} := \int_{\frac{1}{k}\leq|z|\leq R} z(N(t,dz) - t\nu(dz)), \;\; k = 1, 2, ...$$

sont des martingales dans $L^2(\mathbb{P})$ et elles convergent dans $L^2(\mathbb{P})$ vers une martingale notée M_t et définie par

$$M_t = \int_{|z|<R} z(N(t,dz) - t\nu(dz)).$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Décomposition Itô-Lévy [26])**.** *Soit $\{\eta_t\}$ un processus de Lévy. Alors η_t a cette décomposition*

$$\eta_t = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{|z|<R} z\overline{N}(t,dz) + \int_{|z|\geq R} N(t,dz),$$

pour toutes constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $R \in [0,\infty]$. Ici

$$\overline{N}(dt,dz) = N(dt,dz) - \nu(dz)dt$$

est la mesure aléatoire de poisson composée de $\eta(.)$ et $B(t)$ est un mouvement Brownien indépendant de $\overline{N}(dt,dz)$.

Pour chaque $A \in \mathbb{B}_0$, le processus

$$M_t := \overline{N}(t,A) \text{ est une martingale.}$$

Si $\alpha = 0$ et $R = \infty$ alors η_t est une martingale de Lévy.

Théorème 2.4 ([49], théorème 25.3). *Dans le cas où $R = 1$, si pour tout $t \geq 0$ on a $E[\eta_t] < \infty$, alors*

$$\int_{|z|\geq 1} |z|\nu(dz) < \infty,$$

et par conséquent, dans le cas où $R = \infty$, nous écrivons

$$\eta_t = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{\mathbb{R}} z\overline{N}(t, dz).$$

Théorème 2.5 (Formule de Lévy-Khintchine [43]). *Soit $\{\eta_t\}$ un processus de Lévy avec mesure de Lévy ν. Alors $\int_{\mathbb{R}} \min(1, z^2)\nu(dz) < \infty$ et*

$$E[e^{iu\eta_t}] = e^{t\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

avec

$$\psi(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i\alpha u + \int_{|z|<R} \Big[e^{iuz} - 1 - iuz\Big]\nu(dz) + \int_{|z|\geq R} \Big(e^{iuz} - 1\Big)\nu(dz). \tag{2.2}$$

Inversement, étant donné les constantes α, σ^2 et une mesure ν sur $\mathbb{B}_0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, z^2)\nu(dz) < \infty,$$

il existe un processus de Lévy $\eta(t)$ (unique en loi) tel que (2.1) *et* (2.2) *soient vérifiées.*

Notons qu'il est possible d'avoir $\int_{|z|\leq R} |z|\nu(dz) = \infty$.

Théorème 2.6 ([43], corollaire P. 48). *Un processus de Lévy est une semi-martingale.*

Définition 2.3 ([43]). *Notons D_{cup} l'espace des processus càdlàg adapté, muni de la topologie de la convergence uniforme en probabilité sur les compacts (cup) : $H_n \longrightarrow H$ cup si pour tout $t > 0$ $\sup\limits_{0\leq s\leq t} |H_n(s) - H(s)| \longrightarrow 0$ en probabilité ($A_n \longrightarrow A$ en probabilité si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mathbb{P}(|A_n - A| > \epsilon) > \epsilon$).*
Notons $L_{\ cup}$ noté l'espace des processus càdlàg adapté (continu à gauche avec les limites à droites), muni de la topologie cup. Si $H(t)$ est une fonction en escalier de la forme

$$H(t) = H_0\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_i H_i\mathbb{1}_{(T_i,T_{i+1}]},$$

avec $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ et $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_{n+1} < \infty$ sont les temps d'arrêts et X est un càdlàg, on définit

$$J_X H(t) := \int_0^t H_s dX_s := H_0X_0 + \sum_i H_i(X_{T_{i+1}\wedge t} - X_{T_i\wedge t}), \ \ t \geq 0.$$

Théorème 2.7 ([43], p.51)**.** *Soit X une semi-martingale. Alors la fonction J_X peut être étendue à une fonction linéaire continue*

$$J_X : L_{cup} \longrightarrow D_{cup}.$$

Cette construction nous permet de définir les intégrales stochastiques de la forme :

$$\int_0^t H(s)d\eta_s,$$

pour tout $H \in L_{\ cup}$. Vu la décomposition Itô-Lévy, cette intégrale peut être scindée en intégrales par rapport à ds, $dB(s)$, $\overline{N}(ds, dz)$ et $N(ds, dz)$. C'est pourquoi, il est naturel de considérer des intégrales stochastiques plus générales de la forme :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s,\omega)ds + \int_0^t \beta(s,\omega)dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,t,\omega)\tilde{N}(ds,dz), \tag{2.3}$$

avec des intégrandes satisfaisant les conditions appropriées pour que les intégrales existent et en définissant

$$\tilde{N}(ds,dz) = \begin{cases} N(ds,dz) - \nu(dz)ds & si \ \ |z| < R \\ N(ds,dz) & si \ \ |z| \geq R, \end{cases}$$

avec R comme dans le théorème de décomposition Itô-Lévy. Nous allons utiliser le raccourci suivant pour la notation de la différentielle du processus $X(t)$ satisfaisant (2.3) :

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\tilde{N}(dt,dz). \tag{2.4}$$

Nous appelons de tels processus des processus Itô-Lévy.

Rappelons qu'une semi-martingale $M(t)$ est appelée martingale locale à temps T (par rapport à $\mathbb{P}$) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T$ p.s. et $M(t \wedge \tau_n)$ est une martingale par rapport à $\mathbb{P}$ pour tout n.

Notons que

1. Si $E\Big[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)dt\Big] < \infty$, alors le processus

$$M(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\overline{N}(dt,dz) \ \text{ est une martingale, } \ 0 \leq t \leq T.$$

2. Si $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)dt < \infty$ p.s. alors $M(t)$ est une martingale locale, $0 \leq t \leq T$.

Quelques propriétés de l'intégrale stochastique avec le processus Itô-Lévy sont données dans le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit $\gamma(s,z)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_s \times \mathcal{B}$-mesurable telle $E\Big[\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)^2\nu(dz)\Big] < \infty$. Pour tout $s < t$, on a :*

1. $E\Big[\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\tilde{N}(ds,dz)\Big|\mathcal{F}_s\Big] = 0$ *p.s. ;*
2. $E\Big[\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\tilde{N}(ds,dz)\Big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] = (t-s)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)^2\nu(dz)$ *p.s.*

Démonstration 4. *Pour la preuve voir le lemme* 2.2 *de [32].*

2 La formule d'Itô-Lévy et les résultats associés

Soient $X(t)$ vérifiant (2.4) et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, le processus $Y(t) := f(t, X(t))$ est-il aussi un processus Itô-Lévy et si oui, comment pouvons-nous le représenter dans la forme (2.4) ?

Si nous raisonnons de manière heuristique et utilisons nos connaissances de la formule classique d'Itô, il est facile de deviner la réponse.

Soit $X^{(c)}(t)$ la partie continue de $X(t)$, c'est-à-dire en enlevant les sauts de $X(t)$. Alors une accroissement de $Y(t)$ provient d'une accroissement de $X^{(c)}(t)$ plus les sauts (venant de $N(.,.)$). Par conséquent, en se basant sur le formule d'Itô classique, on devinerait que

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))dX^{(c)}(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t)).\beta^2(t)dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Big[f(t, X(t^-) + \gamma(t,z)) - f(t, X(t^-))\Big]N(dt,dz). \end{aligned}$$

Il se peut que notre proposition soit correcte lorsque

$$dX^{(c)}(t) = \Big(\alpha(t) - \int_{|z|<R} \gamma(t,z)\nu(dz)\Big)dt + \beta(t)dB(t)$$

et cela donne le résultat suivant :

Théorème 2.8 (Formule d'Itô-Lévy en dimension 1 [3, 10, 43])**.** *Supposons que $X(t) \in \mathbb{R}$ soit un processus Itô-Lévy de la forme*

$$dX(t) = \alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz),$$

avec

$$\tilde{N}(dt,dz) = \begin{cases} N(dt,dz) - \nu(dz)dt & si\ \ |z| < R \\ N(dt,dz) & si\ \ |z| \geq R, \end{cases}$$

pour tout $R \in [0,\infty]$.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et on définit $Y(t) = f(t,X(t))$. Alors $Y(t)$ est aussi un processus Itô-Lévy et

$$\begin{aligned} &dY(t) = \\ &\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))\Big[\alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dB(t)\Big] + \frac{1}{2}\beta^2(t,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))dt \\ &+ \int_{|z|<R} \Big[f(t,X(t^-)+\gamma(t,z)) - f(t,X(t^-)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t^-))\gamma(t,z)\Big]\nu(dz)dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Big[f(t,X(t^-)+\gamma(t,z)) - f(t,X(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,dz). \end{aligned}$$

Notez que

$$\begin{array}{llll} \text{si} & R = 0 & \text{alors} & \tilde{N} = N \quad \text{partout.} \\ \text{et si} & R = \infty & \text{alors} & \tilde{N} = \overline{N} \quad \text{partout.} \end{array}$$

Exemple (Le processus géométrique de Lévy, [41]) Considérons l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dX(t) = X(t^-)\Big[\alpha dt + \beta dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\tilde{N}(dt,dz)\Big]$$

avec α, β des constantes et $\gamma(t,z) > -1$. Pour déterminer la solution $X(t)$ de cette équation, nous la réécrivons de la façon suivante :

$$\frac{dX(t)}{X(t^-)} = \alpha dt + \beta dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\tilde{N}(dt,dz).$$

Maintenant, on définit

$$Y(t) = \ln(X(t)).$$

Alors par la formule d'Itô

$$\begin{aligned}
dY(t) &= \frac{X(t)}{X(t)}\Big[\alpha dt + \beta dB(t)\Big] - \frac{1}{2}\beta^2 X^{-2}(t)X^2(t)dt + \int_{|z|<R}\Big[\ln(X(t^-) + \gamma(t,z)X(t^-)) \\
&- \ln(X(t^-)) - X^{-1}(t^-)\gamma(t,z)X(t^-)\Big]\nu(dz)dt + \int_{\mathbb{R}}\Big[\ln(X(t^-) + \gamma(t,z)X(t^-)) \\
&- \ln(X(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,dz) \\
&= (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)dt + \beta dB(t) + \int_{|z|<R}\Big[\ln(1+\gamma(t,z)) - \gamma(t,z)\Big]\nu(dz)dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(t,z))\tilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

Donc, en intégrant entre 0 et t, on a

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Y(0) + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\Big)t + \beta B(t) + \int_0^t \int_{|z|<R}\Big[\ln(1+\gamma(s,z)) - \gamma(s,z)\Big]\nu(dz)ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(s,z))\tilde{N}(ds,dz)
\end{aligned}$$

et on obtient cette cette solution

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0)\exp\Big[(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B(t) + \int_0^t \int_{|z|<R}\Big(\ln(1+\gamma(s,z)) - \gamma(s,z)\Big)\nu(dz)ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(s,z))\tilde{N}(ds,dz)\Big].
\end{aligned}$$

Par analogie au cas de diffusion ($N = 0$), on appelle ce processus $X(t)$ un processus géométrique de Lévy. Il est souvent utilisé comme un modèle pour les cours de la bourse (voir [8]).

Maintenant, nous allons formuler la version multidimensionnelle correspondante au théorème sur la formule d'Itô-Lévy en dimension 1.

Théorème 2.9 (Formule d'Itô-Lévy en dimension multiple, [41])**.** *Soient $X(t) \in \mathbb{R}^n$ un processus Itô-Lévy qui vérifie*

$$dX(t) = \alpha(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)dB(t) + \int_{\mathbb{R}^l} \gamma(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz), \tag{2.5}$$

avec $\alpha : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^l \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times l}$ des processus adaptés tels que les intégrales existent, $B(t)$ un mouvement Brownien de *dimension* m *et*

$$\begin{aligned}\tilde{N}(dt,dz)^T &= \Big(\tilde{N}_1(dt,dz_1),...,\tilde{N}_l(dt,dz_l)\Big)\\ &= \Big(N_1(dt,dz_1)-\mathbb{1}_{|z_1|<R_1}\lambda_1(dz_1)dt,...,N_l(dt,dz_l)-\mathbb{1}_{|z_l|<R_l}\lambda_l(dz_l)dt\Big),\end{aligned}$$

avec $\{N_l\}$ *des processus de poissons indépendants,* λ_j *des mesures de Lévy provenant de* l *processus de Lévy* $\eta_1,...,\eta_l$ *indépendants de dimension* 1.

On note que chaque colonne $\gamma^{(k)}$ *de la* $n\times l$*-matrice* $\gamma=(\gamma_{ij})$ *dépend seulement de* z *à travers la* $k^{\text{ième}}$ *coordonnée de* z_k*, c'est-à-dire,*

$$\gamma^{(k)}(t,z,\omega)=\gamma^{(k)}(t,z_k,\omega),\ \ z=(z_1,..,z_l)\in\mathbb{R}^l,\ \ k=1,2,...,l.$$

Quand on écrit en détail la $i^{\text{ième}}$ *composante de* $dX(t)$*, on obtient*

$$dX_i(t)=\alpha_i(t,\omega)dt+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t,\omega)dB_j(t)+\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}}\gamma_{ij}(t,z_j,\omega)\tilde{N}(dt,dz_j),\ \ 1\le i\le n.$$

Soit $f\in C^{1,2}\Big([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\Big)$*. En posant* $Y(t)=f(t,X(t))$*, on a :*

$$\begin{aligned}&dY(t)=\\&\frac{\partial f}{\partial t}dt+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(\alpha_i dt+\sigma_i dB(t)\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dt\\&+\sum_{k=1}^{l}\int_{|z_k|<R_k}\Big[f(t,X(t^-)+\gamma^{(k)}(t,z_k))-f(t,X(t^-))-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{(k)}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t^-))\Big]\lambda_k(dz_k)dt\\&+\sum_{k=1}^{l}\int_{\mathbb{R}}\Big[f(t,X(t^-)+\gamma^{(k)}(t,z_k))-f(t,X(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,dz_k),\end{aligned}$$

avec $\gamma^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ *est la* $k^{\text{ième}}$ *colonne de la* $n\times l$*-matrice* $\gamma=(\gamma_{ik})$ *et* $\gamma_i^{(k)}=\gamma_{ik}$ *est la* $i^{\text{ième}}$ *coordonnée de* $\gamma^{(k)}$.

Théorème 2.10 (Isométrie d'Itô-Lévy, [41])**.** *Soit* $X(t)\in\mathbb{R}^n$ *qui vérifie* (2.5) *avec* $X(0)=0$ *et* $\alpha=0$*. Alors*

$$\begin{aligned}E[X^2(T)] &= E\Big[\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}}\gamma_{ij}^2(t,z_j)\nu_j(dz_j)\Big)dt\Big]\\ &= \sum_{i=1}^{n}E\Big[\int_0^T\Big(\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}}\gamma_{ij}^2(t,z_j)\nu_j(dz_j)\Big)dt\Big],\end{aligned}$$

à condition que le membre de droite soit fini.

Remarque 2. *Pour un cas particulier du théorème isométrie d'Itô-Lévy, prenons*

$$dX(t) = d\eta(t) = \int_{\mathbb{R}} z\overline{N}(dt, dz) \in \mathbb{R},$$

avec $E[X^2(T)] = T \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz) < \infty$. *Par application de l'isométrie,*

$$E\Big[\Big(H(t)d\eta(t)\Big)^2\Big] = E\Big[\int_0^T H^2(t)dt\Big] \int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz),$$

pour tout $H \in L_{cup}$ *tel que* $H \in L^2([0,T] \times \Omega)$, *c'est-à-dire tel que*

$$||H||^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} := E\Big[\int_0^T H^2(t)dt\Big] < \infty.$$

En utilisant cela, nous pouvons, de la manière habituelle, élargir la définition de l'intégrale

$$\int_0^T Y(t)d\eta(t) \in L^2(\Omega)$$

à tous les processus $Y(t)$ dans $L^2([0,T] \times \Omega)$ qui soient limites des processus $H_n \in L_{cup} \cap L^2([0,T] \times \Omega)$. Nous appelons de tels processus $Y(t)$ des processus prévisibles.

3 Équations différentielles stochastiques de Lévy

Le processus géométrique de Lévy est un exemple de diffusion de Lévy, c'est-à-dire la solution d'une EDS pilotée par les processus de Lévy.

Théorème 2.11 (Existence et unicité de solutions des EDS de Lévy, [41])**.** *Considérons l'EDS de Lévy de* $\mathbb{R}^n$ *suivante :* $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et*

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t) + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, X(t^-), z)\tilde{N}(dt, dz) \tag{2.6}$$

avec $\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ *et* $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times l}$ *satisfaisant les conditions suivantes :*
-il existe une constante $C_1 < \infty$ *telle que*

$$|\sigma(t,x)|^2 + ||\alpha(t,x)||^2 + \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{l} |\gamma_k(t,x,z)|^2 \nu_k(dz_k) \leq C_1(1 + ||x||)^2,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *;*
-il existe une constante $C_2 < \infty$ *telle que*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 + ||\alpha(t,x) - \alpha(t,y)||^2 + \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{l} |\gamma^{(k)}(t,x,z) - \gamma^{(k)}(t,y,z)|^2 \nu_k(dz_k)$$
$$\leq C_2 ||x-y||^2,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Alors il existe une unique càdlàg $X(t)$ *solution de* (2.6) *telle que*

$$E[|X(t)|^2] < \infty, \ \ \textit{pour tout} \ \ t.$$

Les solutions des *EDS* de Lévy homogène en temps, c'est-à-dire quand $\alpha(t,x) = \alpha(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ et $\gamma(t,x,z) = \gamma(x,z)$, sont appelées des diffusions de sauts (ou diffusions de Lévy).

C'est ainsi que nous terminons les rappels sur les processus d'Itô-Lévy. Ces notions nous aideront dans l'aboutissement de nos travaux au chapitre 5. Dans le chapitre suivant nous allons donner quelques notions sur le contrôle optimal stochastique.

Chapitre 3

Contrôle optimal stochastique

1 Problèmes de contrôle optimal stochastique

1.1 Introduction

Dans une équation différentielle stochastique, la source fondamentale d'incertitude est le bruit blanc, qui représente les effets conjoints d'un grand nombre de forces aléatoires indépendantes agissant sur les systèmes. Quand les systèmes sont dynamiques, les décisions pertinentes (contrôles) qui découlent des informations les plus récentes mises à la disposition des décideurs (contrôleurs) peuvent également changer avec le temps. Les contrôleurs doivent sélectionner une décision optimale parmi toutes celles possibles pour atteindre le meilleur résultat espéré lié à leurs objectifs. De tels problèmes d'optimisations sont appelés problèmes de contrôle optimal stochastique. Ce dernier intervient dans différents domaines de la vie courante comme l'économie, la biologie, les sciences humaines et sociales.

Dans ce qui suit, nous allons procéder par un ajustement du problème de contrôle optimal déterministe qui existe déjà afin d'avoir un problème de contrôle optimal stochastique répondant à la réalité en se servant de [51].

1.2 Formulation des problèmes de contrôle optimal stochastique

Tous les systèmes d'équations différentielles stochastiques (EDS) présentent des caractéristiques communes telles que : un système de diffusion décrit par Itô ; beaucoup de décisions alternatives qui peuvent affecter la dynamique du système ; les décisions et/ou l'état du système sont sujets à certaines contraintes ; un critère mesurant l'efficacité des décisions. Notre but est d'optimiser (maximiser ou minimiser) ce critère en sélectionnant une décision non-participative parmi celles satisfaisant les contraintes. Un tel problème est appelé problème de contrôle optimal stochastique.

Présentons maintenant deux formulations mathématiques (formulation forte (SF) et formulation faible (WF)) du problème de contrôle optimal stochastique à travers deux définitions.

Formulation forte (SF)

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions usuelles. On définit un mouvement Brownien standard $B(.)$ de dimension m sur ce même espace. Considérons l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u(t))dt + \sigma(t, X_t, u(t))dB(t), \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$, U un espace métrique séparé donné et $T \in (0.\infty)$ fixé. La fonction $u(.)$ s'appelle le contrôle représentant l'action, la décision, ou la politique des décideurs (contrôleurs). À tout instant, le contrôleur doit être bien renseigné sur certaines informations (telles que spécifiées par le champ d'information $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$) à un moment donné (spécifique)), mais il n'est pas en mesure de prédire ce qui arrivera à cause de l'incertitude du système (en conséquence, pour tout t, le contrôleur ne peut pas prendre sa décision $u(t)$ avant que le temps t arrive). Cette restriction non-participative en terme mathématique peut être représentée par $u(.)$ qui doit être $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté ($u(.)$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$). C'est-à-dire que le contrôle $u(.)$ est pris dans l'ensemble

$$\mathcal{U}[0, T] := \Big\{ u : [0, T] \times \Omega \to U \ |u(.) \text{ est } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} - \text{adapté} \Big\}.$$

Tout $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$ est appelé contrôle réalisable (faisable). En outre, nous pouvons avoir certaines contraintes d'état. Pour tout $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$, l'équation (3.1) est à coefficients aléatoires. Soit $S(t) : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction donnée. La contrainte d'état peut être donnée par

$$X(t) \in S(t),\ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{3.2}$$

Notons que d'autres types de contraintes d'état sont également possibles.

Nous introduisons la fonction coût suivante :

$$J(u(.)) = E\Big[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\Big]. \tag{3.3}$$

Définition 3.1 (Définition 4.1 de [51] (p. 63))**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles et* $B(.)$ *un mouvement Brownien standard de dimension* m *défini sur ce même espace. Une fonction* $u(.)$ *est s-admissible et* $(X(.), u(.))$ *est une paire s-admissible, si*

(i) $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$ *;*

(ii) $X(.)$ *est l'unique solution de l'équation* (3.1) *;*

(iii) Certaines contraintes d'état prescrites (données) sont satisfaites ;

(iv) $f(., X(.), u(.)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ *et* $h(X(T)) \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$.

L'ensemble des contrôles s-admissibles est noté $\mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T]$. Notre formulation forte (SF) du problème de contrôle optimal stochastique est la suivante :

$$\text{Problème (SF) : Minimiser (3.3) sur } \mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T].$$

Le but est de trouver $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T]$ (s'il existe), tel que

$$J(\overline{u}(.)) = \inf_{u \in \mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T]} J(u(.)). \tag{3.4}$$

Le problème (SF) est s-fini si la partie de droite de (3.4) est finie, et il admet une s-solution unique s'il existe une solution unique $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T]$ qui vérifie (3.4). Tout $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}^s_{\text{ad}}[0,T]$ satisfaisant (3.4) est appelé contrôle s-optimal. Le processus d'état $\overline{X}(.)$ correspondant et la paire état-contrôle $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$ sont appelés processus d'état s-optimal et paire s-optimale respectivement.

Formulation faible (WF)

Notons que dans la formulation forte, l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et le mouvement Brownien $B(.)$ de ce même espace sont tous deux fixés. Dans certaines situations il sera nécesaire et même pratique de varier l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ainsi que $B(.)$ et de les considérer comme des parties à contrôler. Pour cette raison, nous avons besoin d'une autre formulation du problème.

Définition 3.2. *Un 6-uplet $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}, B(.), u(.))$ est appelé contrôle ω-admissible, et $(X(.), u(.))$ une paire ω-admissible, si*

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles ;

(ii) $B(.)$ est un mouvement Brownien standard de dimension m défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$;

(iii) $u(.)$ est un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans U ;

(iv) $X(.)$ est l'unique solution de l'équation (3.1) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sous $u(.)$;

(v) Certaines contraintes d'état prescrites (données) sont satisfaites ;

(vi) $f(., X(.), u(.)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$ et $h(X(T)) \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$. Ici, les espaces $L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$ et $L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$ sont définis sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ associé au 6-uplet π.

L'ensemble de tous les contrôles ω-admissibles est noté par $\mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0, T]$. Parfois on écrit $u(.) \in \mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0, T]$ au lieu de $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}, B(.), u(.)) \in \mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0, T]$ s'il n'y a aucune confusion à craindre, cela dépend aussi du contexte dans lequel on considère la formulation faible. Notre formulation faible (WF) du problème de contrôle optimal stochastique est la suivante :

$$\text{Problème (WF) : Minimiser (3.3) sur } \mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0, T].$$

On cherche donc $\overline{\pi} \in \mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0, T]$ (s'il existe) tel que

$$J(\overline{\pi}) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}^{\omega}_{\mathrm{ad}}[0,T]} J(\pi). \tag{3.5}$$

De même que dans la formulation forte, le problème (WF) est ω-fini si la partie de droite de (3.5) est finie. On définit la ω-solution unique, le contrôle ω- optimal, le processus d'état ω-optimal et la paire ω-optimale de la même façon que dans la formulation forte.

Soulignons que la formulation forte est celle qui découle du monde pratique, alors qu'on se sert parfois de la formulation faible comme un modèle mathématique auxiliaire mais c'est un modèle mathématique efficace qui vise le même objectif que la formulation forte. Un des objectifs du contrôle optimal stochastique, et on pourrait même dire le principal, est d'optimiser (minimiser ou maximiser) l'espérance mathématique de certaines variables aléatoires qui dépendent seulement de la distribution des processus impliqués. Par conséquent, si toutes les solutions de l'équation (3.1) ont la même distribution dans des espaces de probabilités différents, alors on est plus libre dans le choix de l'espace de probabilité qui nous convient. On devrait noter aussi que la formulation faible échoue toutefois si l'un des coefficients donnés b, σ, f et h est aléatoire (c'est-à-dire si l'un d'entre eux dépend explicitement de ω), parce que dans ce cas, l'espace de probabilité doit être spécifié et fixé à priori.

1.3 Existence de contrôle optimal

Dans cette sous-section, nous allons donner des résultats sur l'existence de contrôle optimal pour un problème de contrôle optimal. De ce fait, nous allons d'abord analyser le cas de la formulation forte (SF)

Existence sous la formulation forte

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $B(.)$ un mouvement Brownien de dimension 1. Considérons le système d'équations différentielles stochastiques controlé suivant :

$$\begin{cases} dX(t) = \Big(AX(t) + CU(t)\Big)dt + \Big(DX(t) + EU(t)\Big)dB(t), \quad t \in [0,T], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

A, C, D, E étant des matrices de tailles appropriées. L'état $X(.)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le contrôle $U(.)$ dans

$$\mathcal{U}^L[0,T] := \Big\{U(.) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^k) \ / \ U(t) \in \mathbb{U}, \ \text{p.p. } t \in [0,T], \ \mathbb{P}-\text{p.s.}\Big\},$$

avec $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^k$. Notons que nous avons une contrainte additionnelle car le contrôle $U(.)$ doit être de carré intégrable juste pour assurer l'existence de solutions de (3.6). Mais, si

$\mathbb{U}$ est borné, alors cette restriction sera automatiquement satisfaite. Soit la fonction coût suivante

$$J(U(.)) = E\Big[\int_0^T f(X(t), U(t))dt + h(X(T))\Big], \tag{3.7}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Le problème de contrôle optimal peut être le suivant :

Problème (SFL) : Minimiser (3.7) sous contrainte (3.6) par rapport à $\mathcal{U}^L[0,T]$.
Maintenant, introduisons-nous les hypothèses suivantes :

(HSL_1) L'ensemble $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe, fermé et les fonctions f et h sont convexes et pour tout $\delta, K > 0$,

$$f(X(t), U) \geq \delta|U|^2 - K, \quad h(X) \geq -K, \ \forall (X,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{U}. \tag{3.8}$$

(HSL_2) L'ensemble $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact et les fonctions f et h sont convexes.

Théorème 3.1 (Existence de contrôle optimal sous la formulation forte [51] (p. 68))**.** *Sous les hypothèses (HSL_1) ou (HSL_2), si le problème (SFL) est fini alors il admet un contrôle optimal.*

Démonstration 5. *Voir [51].*

Existence sous la formulation faible

Pour pouvoir examiner l'existence de contrôles optimaux sous la formulation faible, faisons les hypothèses suivantes

(HW_1) $(\mathbb{U}, d)$ est un espace métrique compact et $T > 0$;

(HW_2) Les fonctions b, σ, f et h sont toutes continues et il existe une constante $L > 0$ telle que pour

$$\phi(t,X,U) = b(t,X,U), \ \ \sigma(t,X,U), \ \ f(t,X,U) \ \text{ ou } \ h(X),$$

$$\begin{cases} |\phi(t,X,U) - \phi(t,Y,U)| \leq L|X - Y|, \ \ \forall t \in [0,T], X, Y \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{U}, \\ |\phi(t,0,U)| \leq L, \ \ \forall (t,U) \in [0,T] \times \mathbb{U}; \end{cases}$$

(HW_3) Pour tout $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\Big(b, \sigma\sigma^T, f\Big)(t, X, U) := \Big\{\Big(b_i(t, X, U), (\sigma\sigma^T)_{ij}(t, X, U), f(t, X, U)\Big)/$$
$$U \in \mathbb{U}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\Big\}$$

est convexe dans $\mathbb{R}^{n+nm+1}$;

(HW_4) $S(t) \equiv \mathbb{R}^n$.

Pour plus de détails sur ces hypothèses, on peut consulter [51].
Nous allons maintenant donner le théorème d'existence de contrôle optimal dans le cas de la formulation faible.

Théorème 3.2 (Existence de contrôle optimal sous la formulation faible). *Sous les hypothèses (HW_1)-(HW_4), si le problème (WF) est fini, alors il admet un contrôle optimal.*

Démonstration 6. *Voir [51].*

2 Le principe du maximum et les systèmes Hamiltoniens stochastiques

L'une des approches principales pour résoudre un problème d'optimisation consiste à déduire un ensemble de conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par toute solution optimale. Ces conditions nécessaires deviennent suffisantes sous certaines conditions de convexité de l'objective (ou des contraintes). Les problèmes de contrôle optimal peuvent être considérés comme des problèmes d'optimisation dans des espaces de dimension infinie. Ils sont ainsi substantiellement difficiles à résoudre. Le principe du maximum formulé par Pontryagin et son groupe en 1950, est vraiment un jalon de la théorie du contrôle optimal. De même que la trajectoire optimale de l'état, tout contrôle optimal doit vérifier le système Hamiltonien, ainsi qu'une condition maximale de la fonction qui porte le nom d'Hamiltonien. En termes mathématiques, le principe du maximum réside dans le fait que maximiser l'Hamiltonien est beaucoup plus facile que résoudre le problème de contrôle d'origine qui est en dimension infinie.

Le premier essai avec le principe du maximum de Pontryagin était sur des problèmes de contrôle déterministe, l'idée clé provient du calcul classique des variations. On trouve dans la littérature des détails sur la façon de procéder, par exemple dans [50, 51].

Dans le cas stochastique, nous allons procéder comme suit : introduire le principe du maximum stochastique en se servant du principe du maximum déterministe ; formuler l'équation adjointe ; puis trouver les systèmes Hamiltoniens stochastiques ; ensuite mettre en relation le principe du maximum stochastique et les systèmes Hamiltoniens stochastiques.

2.1 Introduction du principe du maximum stochastique

Nous rappelons d'abord la formule forte du problème de contrôle optimal stochastique (3.4) avant d'introduire quelques hypothèses.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles. On définit sur cet espace un Brownien standard $B(.)$. Considérons un système d'équations différentielles stochastiques contrôlé de même type que (3.1)

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t), \ t \in [0, T], \\ X(0) = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

avec la fonction coût :

$$J(u(.)) = E\Big[\int_0^T f(t, X(.), u(.))dt + h(X(T))\Big], \tag{3.10}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n, \ \ \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}, \ \ f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$$

et

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

On définit :

$$b(t, X, u) = \begin{pmatrix} b_1(t, X, u) \\ b_2(t, X, u) \\ \vdots \\ b_n(t, X, u) \end{pmatrix}, \ \ \sigma(t, X, u) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t, X, u), ..., \sigma_m(t, X, u) \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma(t,X,u)=\begin{pmatrix}\sigma_{1j}(t,X,u)\\ .\\ .\\ .\\ \sigma_{nj}(t,X,u)\end{pmatrix},\quad 1\leq j\leq m.$$

Faisons les hypothèses suivantes (comparées aux hypothèses du contrôle optimal déterministe) :

(h_0) **:** $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle générée par $B(t)$, augmentée de tous les ensembles de mesure nul de $\mathcal{F}$;

(h_1) **:** (U,d) est un espace métrique séparable et $T>0$;

(h_2) **:** les fonctions b,σ,f et h sont mesurables et il existe une constante $L>0$ et $\overline{\omega}:[0,\infty]\to[0,\infty)$ (un module de continuité) tels que pour tout

$$\phi(t,X,u)=b(t,X,u),\ \ \sigma(t,X,u),\ \ f(t,X,u)\ \text{ ou }\ h(X),$$

on a :

$$\begin{cases}|\phi(t,X,u_1)-\phi(t,Y,u_2)|\leq L|X-Y|+\overline{\omega}(d(u_1-u_2)),\quad \forall t\in[0,T],\quad X,Y\in\mathbb{R}^n,\\ u_1,u_2\in U\\ |\phi(t,0,u)|\leq L,\quad \forall(t,u)\in[0,T]\times U;\end{cases}\tag{3.11}$$

(h_3) **:** les fonctions b,σ,f et h sont de classe C^2 par rapport à X.

De plus, il existe une constante $L>0$ et $\overline{\omega}:[0,\infty]\to[0,\infty)$ tel que pour $\phi=b,\sigma,f,h$, on a :

$$\begin{cases}|\phi_X(t,X,u)-\phi_X(t,y,\widehat{u})|\leq L|X-Y|+\overline{\omega}(d(u-\widehat{u})),\\ |\phi_{XX}(t,X,u)-\phi_{XX}(t,Y,\widehat{u})|\leq\overline{\omega}(|X-Y|+d(u-\widehat{u})),\quad\forall t\in[0,T],\quad X,Y\in\mathbb{R}^n,\\ u,\widehat{u}\in U.\end{cases}\tag{3.12}$$

L'hypothèse h_0 signifie que le bruit du système est la seule source d'incertitude dans le problème et les informations passées sur le bruit sont disponibles pour le contrôleur. Cette hypothèse sera très importante pour la suite.
On définit :

$$\mathcal{U}[0,T] := \Big\{u : [0,T] \times \Omega \to U |\ u \text{ est } \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} - \text{adapté}\Big\}. \tag{3.13}$$

Étant donné $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$, l'équation (3.9) est un EDS avec des coefficients aléatoires. Dans le Chapitre 1, Section 6.4 de [51], les auteurs ont montré que sous les hypothèses (h_1)-(h_2), pour tout $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$, l'équation d'état (3.9) admet une solution unique $X(.) := X(., u(.))$ et la fonction coût est bien définie. Dans le cas où $X(.)$ est la solution de (3.9) correspondant à $u(.) \in \mathcal{U}[0,T]$, nous appelons $(X(.), u(.))$ une paire admissible et $X(.)$ un processus d'état admissible (trajectoire). Notre problème de contrôle optimal peut s'écrire :

$$\text{Problème } (S) : \text{Minimiser } (3.10) \text{ sur } \mathcal{U}[0,T].$$

Tout $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}[0,T]$ satisfaisant

$$J(\overline{u}(.)) = \inf_{u \in \mathcal{U}[0,T]} J(u(.)) \tag{3.14}$$

est le contrôle optimal. Le correspondant $\overline{x}(.) := x(., \overline{u}(.))$ et $(\overline{x}(.), \overline{u}(.))$ sont appelés processus d'état optimal/ trajectoire et paire optimale respectivement.
Le but est de trouver des conditions nécessaires pour le contrôle optimal stochastique, similaire au principe du maximum dans le cas déterministe.

2.2 Équations adjointes

Dans cette partie nous allons introduire les équations adjointes impliquées dans le principe du maximum stochastique et un système Hamiltonien stochastique associé.
Posons $\mathcal{S}^n = \Big\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\Big\}$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre $n \times n$ et soit $(x(.), u(.))$ une paire optimale donnée.
Dans le cas déterministe, la variable adjointe $p(.)$ joue un rôle central dans le principe du maximum (pour plus de détails, consulter [50] spécialisé dans ce domaine et [51] qui fait une parallèle entre déterministe et stochastique). Le vecteur adjoint $p(t)$ vérifie une équation différentielle ordinaire de type rétrograde (avec retard) (c'est-à-dire qu'on donne

la valeur finale). Cette dernière est toutefois équivalente à une équation normale si on inverse le temps. Cependant, dans le cas stochastique, on ne peut pas simplement inverser le temps, car cela peut détruire l'anticipation des solutions. Nous introduirons plutôt le problème de valeur terminale suivant pour une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dp(t) = -\Big[b_X(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))^T p(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_X^j(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))^T q_j(t) - f_X(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big]dt \\ +q(t)dB(t), \\ p(T) = -h_X(\overline{X}(T)), \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.15}$$

Ici, on ne connait pas la paire de processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptée $(p(.),q(.))$. Nous appelons le système ci-dessus équation différentielle stochastique rétrograde (BSDE). La question qui se pose ici est : est-ce-que l'équation doit être résolue à l'envers (si on donne la valeur terminale) ? Toutefois, la solution $(p(.),q(.))$ doit être nécessairement $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptée. Quelque soit la paire de processus $(p(.),q(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ qui vérifie (3.15), elle sera une solution adaptée à (3.15). Dans le chapitre 7 du livre de Jiongmin Yong et al. [51], on montre systématiquement que quand certaines hypothèses sont vérifiées, pour tout $(\overline{X}(.),\overline{u}(.)) \in L^2_{\mathcal{F}} \times \mathcal{U}[0,T]$, une telle équation à savoir (3.15) admet une unique solution adaptée $(p(.),q(.))$.

La variable adjointe $p(.)$ dans le cas déterministe correspond à ce qu'on appelle shadow price (prix de l'ombre) ou la valeur marginale de la ressource représentée par la variable d'état en théorie économique. Le principe du maximum n'est autre que minimiser le montant total des coûts pour maximiser la contribution totale de la valeur marginale. On pourrait trouver plus de détails dans le chapitre 5, section 3.2 de [51]. Néanmoins, dans le cas stochastique, le contrôleur doit avoir la capacité d'équilibrer soigneusement l'échelle de contrôle et le degré d'incertitude qui peut affecter la volatilité du système (c'est-à-dire, si le coefficient de diffusion dépend de la variable de contrôle). Donc, la valeur marginale seule n'est pas en mesure de caractériser le compromis entre le coût et le gain dans un environnement incertain. On doit introduire une autre variable pour refléter l'incertitude ou le facteur de risque dans le système. Ceci va se faire en introduisant une équation adjointe comme suit :

$$\begin{cases} dP(t) = \\ -\Big[b_X(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))^T P(t) + P(t) b_X(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t)) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jX}(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))^T P(t) \sigma_{jX}(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t)) \\ +H_{XX}(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t))\Big] dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_j(t) dB_j(t), \\ P(T) = -h_{XX}(\overline{X}(T)), \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.16}$$

avec H l'Hamiltonien qui est défini par :

$$\begin{aligned} H(t,X,u,p,q) &= \langle p, b(t,X,u)\rangle + tr[q^T \sigma(t,X,u)] - f(t,X,u), \\ &(t,X,u,p,q) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

et $(p(.), q(.))$ solution de (3.15). Dans l'équation (3.16), l'inconnu est encore une paire de processus $(P(.), Q(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n))^m$. Quand $\sigma = 0$, l'Hamiltonien $H(t,X,u,p,q)$ défini en (3.17) coïncide avec l'Hamiltonien $H(t,X,u,p)$ dans le cas déterministe.

Remarquons que l'équation (3.15) est aussi une BSDE (équation différentielle stochastique rétrograde) avec des matrices inconnues. Comme pour l'équation (3.15), sous les hypothèses (h_0)-(h_3), il existe une unique solution adaptée $(P(.), Q(.))$ à (3.16). Nous nous référons à (3.15) (resp. (3.16)) l'équation adjointe du prémier ordre (resp. second ordre), et à $p(.)$ (resp. $P(.)$) comme processus adjoint de prémier ordre (resp. second ordre). Dans ce qui suit, si $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$ est une paire optimale (resp admissible), $(p(.), q(.))$ et $(P(.), Q(.))$ sont des solutions adaptées à (3.15) et (3.16), respectivement, alors le 6-uplet $(\overline{X}(.), \overline{u}(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$ est appelé 6-uplet optimal (resp. 6-uplet admissible).

2.3 Le principe du maximum et les systèmes Hamiltoniens stochastiques

On va débuter avec le principe du maximum de Pontryagin (déjà utilisé dans beaucoup de livres qui traitent le cas déterministe comme dans [50]) pour notre contrôle optimal stochastique. À première vue, on devrait s'attendre à un principe du maximum stochastique qui maximise l'Hamiltonien H défini en (3.17). Malheureusement, ça ne marchera pas si la coefficient de diffusion dépend du contrôle, on pourra néanmoins faire quelques petits ajustements.

Exemple. Considérons le système de comtrôle suivant ($m = n = 1$)

$$dX(t) = u(t)dB(t), \;\; t \in [0,1], \;\; X(0) = 0, \tag{3.18}$$

avec l'espace de contrôle $U = [-1, 1]$ et la fonction coût

$$J(u(.)) = E\Big[\int_0^1 \Big(X(t)^2 - \frac{1}{2}u(t)^2\Big)dt + X(1)^2\Big]. \tag{3.19}$$

En remplaçant $X(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)dB(s)$ dans la fonction coût, on a :

$$J(u(.)) = E\Big[\int_0^1 \Big(\frac{3}{2} - t\Big)u(t)^2 dt\Big]. \tag{3.20}$$

Donc le contrôle optimal est $\overline{u}(t) \equiv 0$ avec la trajectoire optimale $\overline{x}(t) \equiv 0$. Toutefois, l'Hamiltonien correspondant est

$$H(t, \overline{X}(t), u(t), p(t), q(t)) = \frac{1}{2}u^2 + q(t)u. \tag{3.21}$$

C'est une fonction convexe en u qui n'atteint pas un maximum en $\overline{u}(t) = 0$ pour tout t.

Pour obtenir la forme correcte de l'Hamiltonien dans le cas stochastique, on doit, dans un premier temps, ajouter l'ajustement du risque, qui est lié au coefficient de diffusion, à l'Hamiltonien pour refléter l'attitude de recherche de risque ou d'aversion au risque du contrôleur. Pour y arriver, introduisons l'Hamiltonien généralisé.

$$\begin{aligned} G(t, X, u, p, P) :=& \frac{1}{2}tr\Big[\sigma(t, X, u)^T P\sigma(t, X, u)\Big] + \langle p, b(t, X, u)\rangle - f(t, X, u), \\ &(t, X, u, p, P) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Notons que $G(t, X, u, p, P)$ dépend de P mais pas de q. En comparant (3.17) et (3.22) et l'Hamiltonien déterministe, on peut voir que

$$\begin{cases} G(t, X, u, p, P) = H(t, X, u) + \frac{1}{2}tr\Big[\sigma(t, X, u)^T P\sigma(t, X, u)\Big], \\ H(t, X, u, p, q) = H(t, X, u) + tr\Big[q^T\sigma(t, X, u)\Big]. \end{cases} \tag{3.23}$$

La prudence est requise car il y a une différence entre $G(t, X, u, p, P)$ et $H(t, X, u, p, q)$. La fonction $G(t, X, u, p, P)$ apparaîtra dans l'équation HJB (Hamilton Jacobi Bellman) du problème de contrôle optimal stochastique.

Ensuite, associé avec un 6-uplet optimal $(\overline{X}(.), \overline{u}(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$, nous définisons une fonction $\mathcal{H}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(t,X,u) &:= H(t,X,u,p(t),q(t)) - \tfrac{1}{2}tr\Big[\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))^T P(t)\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big] \\
&+ \tfrac{1}{2}tr\Big[\Big(\sigma(t,X(t),u(t)) - \sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big)^T P(t)\Big(\sigma(t,X(t),u(t)) \\
&- \sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big)\Big] \\
&\equiv \tfrac{1}{2}tr\Big[\sigma(t,X(t),u(t))^T P(t)\sigma(t,X(t),u(t))\Big] + \langle p(t), b(t,X,u)\rangle - f(t,X,u) \\
&+ tr\Big[q(t)^T\sigma(t,X(t),u(t))\Big] - tr\Big[\sigma(t,X(t),u(t))^T P(t)\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big] \\
&\equiv G(t,X,u,p(t),P(t)) + tr\Big[\sigma(t,X(t),u(t))^T\Big(q(t) - P(t)\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t))\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Remarquons que la fonction Hamiltonien $\mathcal{H}$ peut être définie de manière similaire en relation avec le 6-uplet admissible $(X(.), u(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$.

Théorème 3.3 (Principe du maximum stochastique, théorème 5.2 de [51])**.** *On suppose que les hypothèses* (h_0)-(h_3) *soient verifées. Soit* $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$ *une paire optimale du problème* (3.9)*. Alors il existe deux paires de processus*

$$
\begin{cases}
(p(.), q(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m \\
(P(.), Q(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n))^m,
\end{cases} \tag{3.25}
$$

avec

$$
\begin{cases}
q(.) = (q_1(.), ..., q_m(.)), \quad Q(.) = (Q_1(.), ..., Q_m(.)), \\
q_j(.) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n), \quad Q_j(.) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n), \quad 1 \leq j \leq m,
\end{cases} \tag{3.26}
$$

satisfaisant les équations adjointes du premier ordre et second ordre (3.15) *et* (3.16) *respectivement, telles que*

$$
\begin{aligned}
&H(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t)) - H(t,\overline{X}(t),u,p(t),q(t)) \\
&-\tfrac{1}{2}tr\Big[\Big(\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t)) - \sigma(t,\overline{X}(t),u)\Big)^T P(t)\Big(\sigma(t,\overline{X}(t),\overline{u}(t)) - \sigma(t,\overline{X}(t),u)\Big)\Big] \geq 0, \\
&\forall u \in U,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P} - p.s.,
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

ou, de manière équivalente,

$$
\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t,\overline{x}(t),u),\ t \in [0,T],\ \mathbb{P} - p.s. \tag{3.28}
$$

L'inégalité (3.27) s'appelle une inégalité variationnelle et (3.28) s'appelle la condition maximale. Notons que le troisième terme de la partie gauche de l'inégalité (3.27) reflète l'ajustement du risque, qui doit être présent lorsque σ dépend de u.

Maintenant revenons à l'exemple (3.18). Les équations adjointes du premier et second ordre associées à la paire optimale $(\overline{x}(.), \overline{u}(.)) \equiv (0, 0)$ sont

$$dp(t) = q(t)dB(t), \quad p(1) = 0 \tag{3.29}$$

et

$$dP(t) = 2dt + Q(t)dB(t), \quad P(1) = -2. \tag{3.30}$$

Donc $(p(t), q(t)) = (0, 0)$ et $(P(t), Q(t)) = (2t - 4, 0)$ sont les uniques solutions adaptées. La partie gauche de l'inéquation (3.27) s'écrit maintenant

$$\frac{1}{2}\overline{u}(t)^2 + q(t)\overline{u}(t) - \frac{1}{2}u^2 - q(t)u - \frac{1}{2}(\overline{u}(t) - u)^2 P(t) = (\frac{3}{2} - t)u^2 \geq 0, \quad \forall \in [0, 1].$$

Nous devons aussi calculer

$$\mathcal{H}(t, \overline{x}(t), u) = \frac{1}{2}(P(t) + 1)u^2 + q(t)u = \frac{1}{2}(2t - 3)u^2. \tag{3.31}$$

La fonction Hamiltonien $\mathcal{H}$ ci-dessus est concave en u pour tout $t \in [0, T]$ et $\overline{u}(t) = 0$ maximise $\mathcal{H}$. Pour le présent cas,

$$H(t, \overline{x}(t), u, p(t), q(t)) = \frac{1}{2}u^2.$$

Donc on voit très bien comment le processus adjoint du second ordre (qui réprésent le facteur de risque) joue un rôle dans la rotation de la fonction convexe $u \to H(t, \overline{x}(t), u, p(t), q(t))$ avec la concave $u \to \mathcal{H}(t, \overline{x}(t), u, p(t), q(t))$ montrée ci-dessus.

Présentons deux cas particuliers importants.

1$^{\text{er}}$ **cas :** Le terme de diffusion σ ne dépend pas de la variable de contrôle, c'est-à-dire

$$\sigma(t, X, u) = \sigma(t, X), \quad \forall (t, X, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U. \tag{3.32}$$

Dans ce cas, la condition maximale (3.28) est réduite à

$$H(t, \overline{X}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)) = \max_{u \in U} H(t, \overline{X}(t), u(t), p(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \ \mathbb{P} - \text{p.s.}, \tag{3.33}$$

qui est similaire au cas déterministe (pas de risque d'ajustement). Notons que dans ce cas, l'équation (3.16) n'a pas d'importance pour $(P(.), Q(.))$. Donc, la différentielle d'ordre deux des fonctions b, σ, f et h par rapport à X n'est pas nécessaire.

$2^{\text{ème}}$ **cas :** L'espace de contrôle $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et tous les coefficients sont de classe C^1 en u. Alors, l'équation (3.27) implique

$$\langle H_u(t, \overline{X}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)), u - \overline{u}(t) \rangle \leq 0, \ \forall u \in U, \ t \in [0, T], \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{3.34}$$

C'est une forme locale (contrairement à la forme globale (3.27) ou (3.28)) du principe du maximum. Notons que la forme locale n'implique pas seulement le processus adjoint de second ordre $P(.)$.

De même, comme dans le cas déterministe, le système adjoint de premier ordre peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} dX(t) = H_p(t, X(t), u(t), p(t), q(t))dt + H_q(t, X(t), u(t), p(t), q(t))dB(t) \\ dp(t) = -H_X(t, X(t), u(t), p(t), q(t))dt + q(t)dB(t), \quad t \in [0, T] \\ X(0) = X_0, \quad p(T) = -h_X(X(T)). \end{cases} \tag{3.35}$$

La combinaison de (3.35), (3.16) et (3.27) (ou (3.28)) s'appelle système Hamiltonien, avec ses solutions, on a un 6-uplet $(X(.), u(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$. Ainsi, on peut aussi reformuler le théorème 3.3 comme suit :

Théorème 3.4 (Théorème 3.3 reformulé)**.** *On suppose que* (h_0)*-*(h_3) *soient vérifiées. Soit le Problème* (S) *admettant une paire optimale* $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$*. Alors le* 6*-uplet optimal* $(\overline{X}(.), \overline{u}(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$ *du problème* (S) *est solution du système Hamiltonien stochastique* (3.35)*,* (3.16) *et* (3.27)*(ou* (3.28)*).*

Démonstration 7. *Pour une démonstration de ce théorème, on peut consulter [51].*

On peut remarquer d'après le résultat ci-dessus que la théorie du contrôle optimal peut être utilisée pour résoudre des systèmes Hamiltoniens stochastiques. Le système (3.35) ($u(.)$ donné) est un équation différentielle stochastique avec retard (FBSDE).

Nous soulignons que le théorème 3.3 reste vrai si les fonctions f et h sont de classe C^2 par rapport à la variable x et permet d'avoir une fonction polynômiale croissante (en particulier quadratique) par rapport à la variable X, à condition que b et σ aient une croissance linéaire.

Dans [51], on montre que si on ajoute à la condition maximale (3.28) quelques conditions de convexité, on aura des conditions suffisantes d'optimalité.

Introduisons d'abord une hypothèse supplémantaire :

(h_4) **:** L'espace de contrôle U est un corps convexe de $\mathbb{R}^k$. Les fonctions b, σ et f sont localement lipschitziennes en u, et leurs dérivées par rapport à X sont continues en (X, u).

Lemme 3.1. *On suppose que* (h_0)-(h_4) *soient vérifiés. Soient* $(\overline{X}(.), \overline{u}(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$ 6-*admissibles donnés et* $\mathcal{H}$ *la fonction qui vérifie la condition maximale de* (3.28). *Alors pour tout* $t \in [0, T]$ *et* $\omega \in \Omega$,

$$\partial_u H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)) = \partial_u \mathcal{H}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)). \tag{3.36}$$

Nous présentons maintenant les conditions suffisantes d'optimalitées suivantes :

Théorème 3.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)**.** *Supposons que* (h_0)-(h_4) *soient vérifiés. Soient* $(\overline{X}(.), \overline{u}(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$ 6-*admissibles donnés. Supposons que* h *soit convexe,* $H(t, \overline{X}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t))$ *soit concave pour tout* $t \in [0, T]$ *p.s. et*

$$\mathcal{H}(t, \overline{X}(t), \overline{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \overline{X}(t), u), \quad t \in [0, T], \quad \mathbb{P} - p.s. \tag{3.37}$$

Alors $(\overline{X}(.), \overline{u}(.))$ *est une paire optimale du problème* (S).

Maintenant que les outils mathématiques nécessaires à cette thèse ont été rappelés, on va les utiliser pour des problèmes de propagation de la rumeur sur les réseaux sociaux.

Deuxième partie

Dynamique et contrôlabilité de modèles stochastiques d'e-rumeur

Chapitre 4

Dynamique d'un nouveau modèle stochastique d'e-rumeur

1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, ces dernières années, l'apparition des nouveaux outils de communication à savoir Facebook, Twitter, WhatsApp joue un rôle très important dans la propagation des rumeurs. En particulier dans le cas de fake news, c'est un phénomène très dangereux pour notre société qui peut intervenir en économie comme en politique par exemple. Les premiers modèles mathématiques d'e-rumeur ont mis en évidence une similarité entre la diffusion des informations et la propagation des épidémies, en particulier la propagation de rumeur. Pour plus de détails, les lecteurs peuvent se référer aux travaux de [17, 18, 19, 44, 45, 46]. Dans le cas des épidémies, la population est en général divisée en trois groupes, les susceptibles (S), les infectés (I) et les guéris (R). Par analogie, dans le cas de la rumeur, on divise la population en ignorants (I), spreaders (S) et stiflers (R).

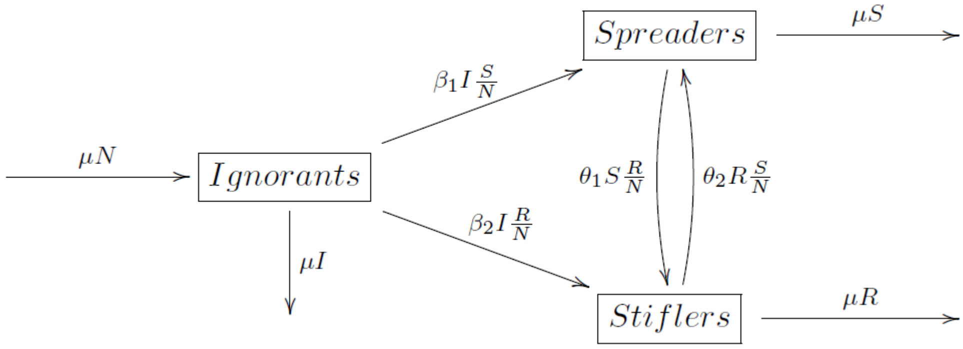
Dans des travaux précédents, les auteurs ont débuté avec un modèle trouvé dans [25] dans lequel ils divisaient le groupe des stiflers en deux sous-catégories, à savoir les stiflers acceptant la rumeur et ceux qui s'y opposent et proposaient une stratégie d'isolation au hasard. S. Bernard et al. ont modifié ce modèle en supposant que tous les paramètres dépendent du temps et ont caractérisé différents paramètres optimaux afin de minimiser la propagation de la rumeur dans [11, 12]. Dans deux autres articles, ils ont introduit deux actions extérieures dans le modèle dans le but de les contrôler séparément dans [13] et simultanément dans [14] et de réduire la propagation de fake news sur un réseau social. Ces actions ont été introduites comme une contre-information et une isolation des spreaders les plus actifs. Par la suite, une analyse de stabilité a été effectuée sur un nouveau modèle d'e-rumeur dans [15]. Dans cette étude, la population du réseau est divisée en quatre catégories, les ignorants, les spreaders, les stiflers acceptant et les stiflers opposant. Mais ce nouveau modèle prend en compte le fait qu'un stifler acceptant peut devenir spreader ou un stifler opposant qui peut quitter le réseau comme tous les autres membres. Avec ce système dynamique, une analyse de stabilité a été faite afin d'étudier les conditions d'existence des états d'équilibres admissibles et leur stabilité, l'inexistence de cycle limite ainsi que les critères de persistance.

Mais ce processus de diffusion multidimensionnel est principalement régi par des éléments socio-psychologiques et il a aussi un caractère aléatoire. Comme cela a été fait pour différents modèles épidémiologiques [16, 21, 27, 28, 29, 35, 53, 54], nous allons utiliser des arguments similaires pour la e-rumeur. Nous allons dans un premier temps proposer un modèle déterministe d'e-rumeur pour lequel nous analysons la stabilité dans la première section, comme elle a été le cas dans [39] pour une population d'électeurs avec deux partis politiques. Du modèle déterministe nous arrivons à un modèle stochastique en tenant compte de l'aspect aléatoire pour qu'un ignorant ou un stifler devienne un spreader. Dans la seconde section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution en se basant sur des résultats sur les équations différentielles stochastiques (voir [37, 40] par exemple). Les sections 4 et 5 sont consacrées à l'étude de l'extinction et la persistance de la rumeur respectivement. Dans la dernière section nous comparons numériquement les seuils des modèles déterministes et stochastiques. À la fin du chapitre, nous concluons par quelques perspectives.

2 Formulation du modèle déterministe et construction du modèle stochastique associé

2.1 Formulation du modèle détermiste

On considère le diagramme suivant :



et le système de trois équations différentielles ordinaires associé au diagramme précédent suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dI(t)}{dt} = \mu N - \beta_1 \dfrac{I(t)S(t)}{N} - \beta_2 \dfrac{I(t)R(t)}{N} - \mu I(t), \\ \dfrac{dS(t)}{dt} = \beta_1 \dfrac{I(t)S(t)}{N} - \theta_1 \dfrac{S(t)R(t)}{N} + \theta_2 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu S(t), \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \beta_2 \dfrac{I(t)R(t)}{N} + \theta_1 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \theta_2 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu R(t). \end{cases}$$

Pour arriver à ce système qui modélise la propagation d'une rumeur sur un réseau de taille constante N, on combine les deux groupes de stiflers du modèle déterministe utilisé dans [15] en un groupe noté R. De plus, $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ sont respectivement le nombre de spreaders, d'ignorants et de stiflers (personnes qui reçoivent la rumeur et la garde pour elles) du réseau ; β_1, β_2 respectivement le taux pour qu'un ignorant devient un spreader, un stifler ; θ_1 le taux pour qu'un spreader devient un stifler et θ_2 l'inverse ; μ taux pour qu'une personne intègre ou quitte le réseau, comme ignorant, spreader ou stifler.
On suppose que μ, β_1, β_2, θ_1, θ_2 sont strictement positifs car l'étude n'aurait pas d'intérêt dans le cas contraire. En posant $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $i = \dfrac{I}{N}$, $s = \dfrac{S}{N}$, $r = \dfrac{R}{N}$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = \mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t), \\ \dfrac{ds(t)}{dt} = \beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t), \\ \dfrac{dr(t)}{dt} = \beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

De plus, $I + S + R = N$ donc $i + s + r = 1$ et on peut trouver les points d'équilibres du système (4.1) en résolvant le système d'équation suivant, trouvé en remplaçant $i(t)$ par

$1 - s(t) - r(t)$:

$$\begin{cases} \beta_1(1 - s(t) - r(t))s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t) = 0, \\ \beta_2(1 - s(t) - r(t))r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t) = 0. \end{cases}$$

D'après les résultats de [39] sur la dynamique entre deux partis politiques, les états d'équilibres admissibles de la forme $(i^\star, s^\star, r^\star)$ du système (4.1) sont :

— $E_1 = (1, 0, 0)$;

— $E_2 = \left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0\right)$ si $\beta_1 > \mu$;

— $E_3 = \left(\frac{\mu}{\beta_2}, 0, \frac{\beta_2 - \mu}{\beta_2}\right)$ si $\beta_2 > \mu$;

— $E_4 = \left(\frac{\theta}{\theta + \beta_1 - \beta_2}, \frac{\mu(\beta_1 - \beta_2) - \theta(\beta_2 - \mu)}{\theta(\theta + \beta_1 - \beta_2)}, \frac{\theta(\beta_1 - \mu) - \mu(\beta_1 - \beta_2)}{\theta(\theta + \beta_1 - \beta_2)}\right)$

$$\text{si} \begin{cases} \theta + \beta_1 - \beta_2 > 0, \\ \mu(\beta_1 - \beta_2) - \theta(\beta_2 - \mu) > 0, \\ \theta(\beta_1 - \mu) - \mu(\beta_1 - \beta_2) > 0. \end{cases}$$

Par rapport à la valeur de $i^\star$, pour que l'étude ait un intérêt, on suppose $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \mu$ et sans perte de généralité, on suppose aussi que $\theta = \theta_1 - \theta_2 > 0$.

Justifications des hypothèses : $\beta_1 \geq \beta_2 > \mu$, $\theta > 0$.

- L'hypothèse $\theta > 0$ ne changera pas les résultats de l'étude car θ intervient dans deux équations de notre système, une fois avec le signe positif et l'autre avec le signe négatif. Dans le cas où $\theta < 0$, on travaillerait donc avec $-\theta$ au lieu de θ.

- Si $\beta_1 < \beta_2$ alors la probabilité pour qu'un ignorant devienne un spreader serait plus faible que celle de devenir un stifler. Dans ce cas, la rumeur ne se propagerait pas.
On choisit donc $\beta_1 \geq \beta_2$.

- Si β_1, $\beta_2 < \mu$ alors il y aurait plus de sorties du réseau et donc moins de propagation de rumeur.

Choix du seuil déterministe R_0^d : Posons $R_0^d = \dfrac{\mu(\theta + \beta_1)}{\beta_2(\theta + \mu)}$.
Pourquoi ce choix ?

Basé sur les résultats de Misra [39] qui montre que : si $\theta \geq \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_2-\mu}$ alors on a extinction des spreaders ; si $\theta \leq \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}$ alors on a extinction des stiflers ; et si $\theta \in \Big(\dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}, \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_2-\mu}\Big)$ alors on a persistance des deux.
Pour justifier notre choix, considérons la fonction de Lyapunov $\sigma(s,r) = s^p r^q$ avec $p > 0$, $q > 0$, qui est une fonction strictement positive de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2_+$. Soit la fonction

$$\Psi(s,r) = \frac{1}{\sigma(s,r)}\frac{d\sigma}{dt}(s,r) = p\Big[\beta_1(1-s-r)-\theta r-\mu\Big] + q\Big[\beta_2(1-s-r)-\theta r-\mu\Big].$$

1- Si $R_0^d = \dfrac{\mu(\theta+\beta_1)}{\beta_2(\theta+\mu)} > 1$ alors

$$\begin{aligned}
\mu(\theta+\beta_1) > \beta_2(\theta+\mu) \quad &\Rightarrow \quad \mu(\beta_1-\beta_2) - \theta(\beta_2-\mu) > 0\\
&\Rightarrow \quad \theta(\beta_2-\mu) < \mu(\beta_1-\beta_2)\\
&\Rightarrow \quad \theta < \frac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_2-\mu}.
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent $\theta \leq \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}$ ou $\theta > \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}$:

- Si $\theta > \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}$ alors $\theta(\beta_1-\mu) - \mu(\beta_1-\beta_2) > 0$ alors E_4 est admissible et l'unique point d'équilibre, stable et on est dans la zone de persistance.

- si $\theta \leq \dfrac{\mu(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1-\mu}$ alors E_4 n'est pas admissible et on n'a pas de persistance car $\Psi(E_2) \leq 0$.

Dans ce cas,

$$\begin{cases} E_1 & \text{est instable}\\ E_2 & \text{devient stable}\\ E_3 & \text{est instable.}\end{cases}$$

Or $E_2 = (\dfrac{\mu}{\beta_1}, \dfrac{\beta_1-\mu}{\beta_1}, 0)$, le système se stabilise autour d'un point d'équilibre où $s \neq 0$ et $r = 0$ donc la rumeur ne s'arrête pas.

Conclusion Si $R_0^d > 1$ alors la rumeur ne s'arrête pas, car il y a soit persistance de S et R, soit stabilisation autour d'un point où $s \neq 0$, $r = 0$.

2- Si $R_0^d = \dfrac{\mu(\theta+\beta_1)}{\beta_2(\theta+\mu)} \leq 1$ alors

$$\begin{aligned} \mu(\theta+\beta_1) \leq \beta_2(\theta+\mu) \quad &\Leftrightarrow \quad \theta(\mu-\beta_2)+\mu(\beta_1-\beta_2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\theta(\beta_2-\mu)+\mu(\beta_1-\beta_2) \leq 0 \end{aligned}$$

donc E_3 n'est pas admissible et $\Psi(E_3) \leq 0$.
Or E_1 est instable car $\beta_1 > \mu$ et $\beta_2 > \mu$.
E_3 est stable car

$$\begin{cases} -(\beta_2-\mu) \leq 0 \\ \mu(\beta_1-\beta_2)-\theta(\beta_2-\mu) \leq 0. \end{cases}$$

De plus, $\theta(\beta_2-\mu) \geq \mu(\beta_1-\beta_2)$ car $R_0^d \leq 1$. Or

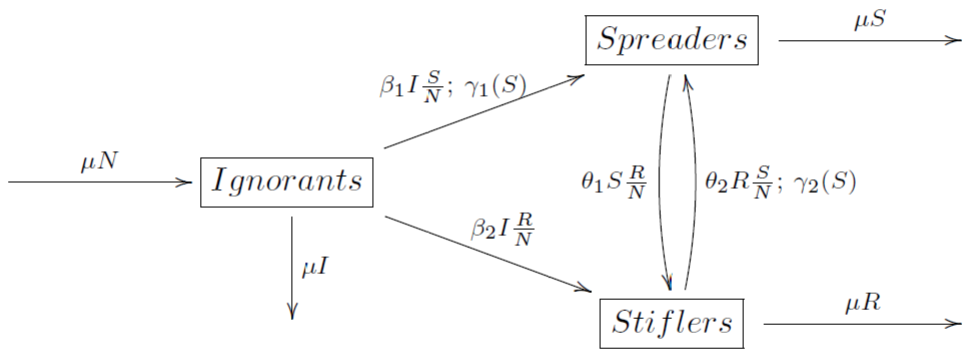
$$\begin{aligned} \beta_1 \geq \beta_2 \quad &\Rightarrow \quad \theta(\beta_1-\mu) \geq \theta(\beta_2-\mu) \geq \mu(\beta_1-\beta_2) \\ &\Rightarrow \quad \theta(\beta_1-\mu)-\mu(\beta_1-\beta_2) \geq 0 \end{aligned}$$

et $-(\beta_2-\mu) \leq 0$, donc E_2 est instable. On a donc un seul point d'équilibre stable E_3.
De plus, $\Psi(E_1) > 0$ et $\Psi(E_2) = \dfrac{q}{\beta_1}\Big[\theta(\beta_1-\mu)-\mu(\beta_1-\beta_2)\Big] > 0$.

Conclusion Si $R_0^d \leq 1$ alors le système se stabilise autour d'un seul point d'équilibre stable $E_3 = \left(\dfrac{\mu}{\beta_2}, 0, \dfrac{\beta_2-\mu}{\beta_2}\right)$ pour lequel $s=0$ et $r \neq 0$, donc la rumeur s'arrête.

2.2 Formulation du modèle stochastique

Lors de la propagation d'une rumeur sur un réseau, certains événements comme par exemple des problèmes sur le réseau lui-même pourraient arriver. De plus, chaque personne en relation avec le réseau a sa façon de réagir en présence de la rumeur. Le potentiel spreader peut recevoir des conseils d'un(e) ami(e) à travers un message pour partager ou pas la rumeur. Il peut devenir un spreader de manière inconsciente, etc. Afin de modéliser ces perturbations aléatoires qui agissent sur le taux de propagation de la rumeur, nous faisons appel à un modèle stochastique. Ce dernier se construit, comme dans [16, 31], en ajoutant au modèle déterministe un terme de diffusion qui modélise les perturbations aléatoires des paramètres liés à la propagation. Dans de nombreuses branches des sciences appliquées comme par exemple dans la dynamique infectieuse, y compris la dynamique de la e-rumeur, les modèles d'équations différentielles stochastiques jouent un rôle important, car ils peuvent donner un certain degré de réalisme supplémentaire par rapport au modèle d'équation différentielle déterministe (voir par exemple [4, 35, 47]). Pour arriver à ce modèle stochastique, on ajoute comme anoncé dans le paragraphe précédent un terme de diffusion au modèle déterministe. Ce terme de diffusion sera le produit d'une fonction mesurable $(\gamma_1(S), \gamma_2(S))$ qui dépendra de S et d'un brownien $B(t) = (B_1(t), B_2(t), 0)$ défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{F}$ satisfait les conditions usuelles (c'est-à-dire la croissance, la continuité, pendant que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-nul). On a pris cette fonction dépendant de S, car on a donné la priorité à l'action de devenir spreader. En se basant sur les travaux de R. Kovacevic dans [31], de A. Gray et al. dans [21], de C. Chen and Y. Kang dans [16], de C. Ji et al. dans [28, 29] et du modèle déterministe, on a fait le choix d'une fonction $(\gamma_1(S), \gamma_2(S)) = \Big(\gamma_1 \dfrac{IS}{N}, \gamma_2 \dfrac{RS}{N}\Big)$, où γ_1 et γ_2 sont les intensités respectives de $B_1(t)$ et $B_2(t)$ (intensités du bruit environnemental). Toutes les règles de transmission sont synthétisées dans le diagramme suivant :



et peuvent être représentées par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$
\begin{cases}
dI(t) = \Big(\mu N - \beta_1 \dfrac{I(t)S(t)}{N} - \beta_2 \dfrac{I(t)R(t)}{N} - \mu I(t)\Big)dt - \gamma_1(S)dB_1(t), \\
dS(t) = \Big(\beta_1 \dfrac{I(t)S(t)}{N} - \theta_1 \dfrac{S(t)R(t)}{N} + \theta_2 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu S(t)\Big)dt + \gamma_1(S)dB_1(t) \\
\qquad\qquad +\gamma_2(S)dB_2(t), \\
dR(t) = \Big(\beta_2 \dfrac{I(t)R(t)}{N} + \theta_1 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \theta_2 \dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu R(t)\Big)dt - \gamma_2(S)dB_2(t).
\end{cases}
$$

En remplaçant les fonctions $\gamma_1(S)$ et $\gamma_2(S)$ par celles choisies, on a :

$$\begin{cases} dI(t) = \Big(\mu N - \beta_1\dfrac{I(t)S(t)}{N} - \beta_2\dfrac{I(t)R(t)}{N} - \mu I(t)\Big)dt - \gamma_1\dfrac{I(t)S(t)}{N}dB_1(t), \\ dS(t) = \Big(\beta_1\dfrac{I(t)S(t)}{N} - \theta_1\dfrac{S(t)R(t)}{N} + \theta_2\dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu S(t)\Big)dt + \gamma_1\dfrac{I(t)S(t)}{N}dB_1(t) \\ \qquad +\gamma_2\dfrac{R(t)S(t)}{N}dB_2(t), \\ dR(t) = \Big(\beta_2\dfrac{I(t)R(t)}{N} + \theta_1\dfrac{S(t)R(t)}{N} - \theta_2\dfrac{S(t)R(t)}{N} - \mu R(t)\Big)dt - \gamma_2\dfrac{R(t)S(t)}{N}dB_2(t). \end{cases}$$

De même que dans le modèle déterministe, μ, β_1, β_2, θ_1, θ_2 sont strictement positifs. En posant $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $i = \dfrac{I}{N}$, $s = \dfrac{S}{N}$, $r = \dfrac{R}{N}$, on obtient :

$$\begin{cases} di(t) = \Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big)dt - \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t), \\ ds(t) = \Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t)\Big)dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 r(t)s(t)dB_2(t), \\ dr(t) = \Big(\beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t)\Big)dt - \gamma_2 r(t)s(t)dB_2(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

En posant :

$$X_t = \begin{pmatrix} i(t) \\ s(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \quad F(t, X_t) = \begin{pmatrix} \mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t) \\ \beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t) \\ \beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t) \end{pmatrix}$$

et

$$M(t, X_t) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 i(t)s(t) & 0 & 0 \\ \gamma_1 i(t)s(t) & \gamma_2 r(t)s(t) & 0 \\ 0 & -\gamma_2 r(t)s(t) & 0 \end{pmatrix},$$

on arrive à l'EDS suivante :

$$dX_t = F(t, X_t)dt + M(t, X_t)dB_t. \tag{4.3}$$

3 Existence et Unicité de solution globale positive

Pour montrer l'existence et l'unicité de solution pour (4.2), nous allons appliquer le théorème 1.22 extrait de [37, 40] à l'EDS (4.3).

Avant d'annoncer le théorème d'existence et d'unicité de solution de (4.3), introduisons une condition initiale pour l'EDS. Soit $0 \leq t_0 < T < +\infty$ et X_0 un $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^3$ tel que $E\Big[|X_0|^2\Big] < +\infty$. On prend $X(t_0) = X_0$ comme condition initiale pour l'équation (4.3).

3.1 Théorème d'existence et unicité de solution

Théorème 4.1. *Pour toute condition initiale $X(0) = X_0 \in (0,1)^3$, l'équation différentielle stochastique (4.3) admet une unique solution locale.*

Démonstration 8. *Vérifions les hypothèses du théorème 1.22.*
La fonction $F(.,.)$ est composée de fonctions mesurables donc elle est mesurable. De même pour $M(.,.)$.
$1-$ Soit $X(t) = (i(t), s(t), r(t))$ et $t \in [0,t]$. On a

$$\Big|M(t,X(t))\Big| + \Big|\Big|F(t,X(t))\Big|\Big| = \sqrt{\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 r^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 r^2(t)s^2(t)}$$
$$+\sqrt{\Big[\Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big)^2 + \Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t)\Big)^2}$$
$$+\Big(\beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t)\Big)^2\Big].$$

Trouvons une majoration pour chacun des termes sous les radicaux. On a

$$\begin{aligned}
\Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big)^2 &\leq \mu^2 + \Big(\beta_1 i(t)s(t) + \beta_2 i(t)r(t) + \mu i(t)\Big)^2, \\
&\quad (a-b)^2 \leq a^2 + b^2 \\
&= \mu^2 + \Big(\beta_1 s(t) + \beta_2 r(t) + \mu\Big)^2 i^2(t) \\
&\leq \mu^2 + 3\Big(\beta_1^2 s^2(t) + \beta_2^2 r^2(t) + \mu^2\Big) i^2(t), \\
&\quad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2), \\
&\leq \mu^2 + 3\Big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \mu^2\Big) i^2(t) \quad s, r \in (0,1).
\end{aligned}$$

Par analogie,

$$\begin{aligned}
\Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t)\Big)^2 &\leq \Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2 + \mu^2)\Big)s^2(t), \\
&\quad (a-b)^2 \leq a^2 + b^2 \ \ et \ \ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \\
\Big(\beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r^2(t)\Big) &\leq \Big(2(\beta_2^2 + \theta^2) + \mu^2\Big)r^2(t), \\
&\quad (a-b)^2 \leq a^2 + b^2 \ \ et \ \ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

et

$$\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 r^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 r^2(t)s^2(t) = 2\Big(\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 r^2(t)s^2(t)\Big)$$
$$\leq 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \ \ car, i, s, r \in (0,1).$$

En utilisant les majorations, on a

$$\begin{aligned}\Big|\Big|F(t,X_t)\Big|\Big| + \Big|M(t,X_t)\Big| \quad \leq \quad & \sqrt{\Big[\mu^2 + 3\Big(\beta_1^2+\beta_2^2+\mu^2\Big)i^2(t) + \Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2+\mu^2)\Big)s^2(t)} \\ & \overline{+\Big(2(\beta_2^2+\theta^2)+\mu^2\Big)r^2(t)\Big]} + \sqrt{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\Big|\Big|F(t,X_t)\Big|\Big| + \Big|M(t,X_t)\Big| \leq C\Big(1+||X_t||\Big),$$

avec

$$C = \Big[3\Big(\beta_1^2+\beta_2^2+\mu^2\Big) \vee \Big(\beta_1^2+2(\theta^2+\mu^2)\Big) \vee \Big(2(\beta_2^2+\theta^2)+\mu^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \vee \Big[\mu + \sqrt{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}\Big].$$

2– *Soit* $X(t) = \Big(i_1(t), s_1(t), r_1(t)\Big)$, $Y(t) = \Big(i_2(t), s_2(t), r_2(t)\Big)$ *et* $t \in [0,t]$

$$\begin{aligned}&\Big|\Big|F(t,X(t)) - F(t,Y(t))\Big|\Big| + \Big|M(t,X(t() - M(t,Y(t))\Big| = \\ &\Big[\Big(\beta_1(i_2s_2-i_1s_1) + \beta_2(i_2r_2-i_1r_1) + \mu(i_2-i_1)\Big)^2 + \Big(\mu(s_2-s_1) + \theta(s_2r_2-s_1r_1) \\ &-\beta_1(i_2s_2-i_1s_1)\Big)^2 + \Big(\mu(r_2-r_1) - \theta(s_2r_2-s_1r_1) - \beta_2(i_2r_2-i_1r_1)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &+\sqrt{2\gamma_1^2(i_2s_2-i_1s_1)^2 + 2\gamma_2^2(s_2r_2-s_1r_1)^2}.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}A &= \beta_1(i_2s_2-i_1s_1) + \beta_2(i_2r_2-i_1r_1) + \mu(i_2-i_1) \\ B &= \mu(s_2-s_1) + \theta(s_2r_2-s_1r_1) - \beta_1(i_2s_2-i_1s_1) \\ C &= \mu(r_2-r_1) - \theta(s_2r_2-s_1r_1) - \beta_2(i_2r_2-i_1r_1) \\ E &= 2\gamma_1^2(i_2s_2-i_1s_1)^2 + 2\gamma_2^2(s_2r_2-s_1r_1)^2.\end{aligned}$$

Trouvons les valeurs des termes de A, B, C et E, puis une majoration pour chacun d'eux. On a

$$\begin{aligned}\beta_1(i_2s_2-i_1s_1) &= \beta_1(i_2s_2-i_1s_2+i_1s_2-i_1s_1) = \beta_1[s_2(i_2-i_1)+i_1(s_2-s_1)] \\ &= \beta_1s_2(i_2-i_1) + \beta_1i_1(s_2-s_1).\end{aligned}$$

Par analogie,

$$\beta_2(i_2r_2-i_1r_1) = \beta_2r_2(i_2-i_1) + \beta_2i_1(r_2-r_1),$$

$$donc \;\; A = (\mu + \beta_1 s_2 + \beta_2 r_2)(i_2 - i_1) + \beta_1 i_1 (s_2 - s_1) + \beta_2 i_1 (r_2 - r_1).$$

Et

$$\begin{aligned}
A^2 &\leq 3\Big[(\mu + \beta_1 s_2 + \beta_2 r_2)^2 (i_2 - i_1)^2 + \beta_1^2 i_1^2 (s_2 - s_1)^2 + \beta_2^2 i_1^2 (r_2 - r_1)^2\Big],\\
&\quad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)\\
&\leq 3\Big[3(\mu^2 + \beta_1^2 s_2^2 + \beta_2^2 r_2^2)(i_2 - i_1)^2 + \beta_1^2 i_1^2 (s_2 - s_1)^2 + \beta_2^2 i_1^2 (r_2 - r_1)^2\Big],\\
&\quad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)\\
&\leq 3\Big[3(\mu^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)(i_2 - i_1)^2 + \beta_1^2 (s_2 - s_1)^2 + \beta_2^2 (r_2 - r_1)^2\Big], \quad i_1, s_2, r_2 \in (0,1).
\end{aligned}$$

Par analogie,

$$\begin{aligned}
B^2 &= \Big[\beta_1 s_2 (i_1 - i_2) + (\mu + \theta r_2 - \beta_1 i_1)(s_2 - s_1) + \theta s_1 (r_2 - r_1)\Big]^2\\
&\leq 3\Big[\beta_1^2 (i_2 - i_1)^2 + (2(\mu^2 + \theta^2) + \beta_1^2)(s_2 - s_1)^2 + \theta^2 (r_2 - r_1)^2\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^2 &= \Big[\beta_2 r_2 (i_1 - i_2) + \theta r_2 (s_1 - s_2) + (\mu - \theta s_1 - \beta_2 i_1)(r_2 - r_1)\Big]^2\\
&\leq 3\Big[\beta_2^2 (i_2 - i_1)^2 + \theta^2 (s_2 - s_1)^2 + (\mu^2 + 2(\theta^2 + \beta_2^2))(r_2 - r_1)^2\Big]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E &= 2\gamma_1^2\Big(i_2 s_2 - i_1 s_1)^2 + 2\gamma_2^2 (s_2 r_2 - s_1 r_1)\Big)^2\\
&= 2\gamma_1^2\Big[s_2(i_2 - i_1) + i_1(s_2 - s_1)\Big]^2 + 2\gamma_2^2\Big[r_2(s_2 - s_1) + s_1(r_2 - r_1)\Big]^2\\
&\leq 4\gamma_1^2\Big[s_2^2(i_2 - i_1)^2 + i_1^2(s_2 - s_1)^2\Big] + 4\gamma_2^2\Big[r_2^2(s_2 - s_1)^2 + s_1^2(r_2 - r_1)^2\Big]\\
&= 4\gamma_1^2(i_2 - i_1)^2 + 4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(s_2 - s_1)^2 + 4\gamma_2^2(r_2 - r_1)^2.
\end{aligned}$$

Trouvons la majoration de $A^2 + B^2 + C^2$. On a

$$\begin{aligned}
&A^2 + B^2 + C^2 \leq 3\Big[3(\mu^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)(i_2 - i_1)^2 + \beta_1^2 (s_2 - s_1)^2 + \beta_2^2 (r_2 - r_1)^2\Big]\\
&+3\Big[\beta_1^2 (i_2 - i_1)^2 + (2(\mu^2 + \theta^2) + \beta_1^2)(s_2 - s_1)^2 + \theta^2 (r_2 - r_1)^2\Big]\\
&+3\Big[\beta_2^2 (i_2 - i_1)^2 + \theta^2 (s_2 - s_1)^2 + (\mu^2 + 2(\theta^2 + \beta_2^2))(r_2 - r_1)^2\Big]\\
&= 3\Big[\Big(3(\mu^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2\Big)(i_2 - i_1)^2 + \Big(\beta_1^2 + 2(\mu^2 + \theta^2) + \beta_1^2 + \theta^2\Big)(s_2 - s_1)^2\\
&+\Big(\beta_2^2 + \theta^2 + \mu^2 + 2(\theta^2 + \beta_2^2)\Big)(r_2 - r_1)^2\Big]\\
&= 3\Big[\Big(3\mu^2 + 4(\beta_1^2 + \beta_2^2)\Big)(i_2 - i_1)^2 + \Big(2(\mu^2 + \beta_1^2) + 3\theta^2\Big)(s_2 - s_1)^2\\
&+\Big(\mu^2 + 3(\theta^2 + \beta_2^2)\Big)(r_2 - r_1)^2\Big].
\end{aligned}$$

En remplaçant les majorations, on a

$$\Big|\Big|F(t,X(t))-F(t,Y(t))\Big|\Big|+\Big|M(t,X(t))-M(t,Y(t))\Big|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\sqrt{E},$$

d'où

$$\Big|\Big|F(t,X(t))-F(t,Y(t))\Big|\Big|+\Big|M(t,X(t))-M(t,Y(t))\Big|\leq\Big[3\Big((3\mu^2+4(\beta_1^2+\beta_2^2))(i_2-i_1)^2$$
$$+(2(\mu^2+\beta_1^2)+3\theta^2)(s_2-s_1)^2+(\mu^2+3(\theta^2+\beta_2^2))(r_2-r_1)^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$+2\sqrt{\Big[\gamma_1^2(i_2-i_1)^2+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(s_2-s_1)^2+\gamma_2^2(r_2-r_1)^2\Big]}.$$

Par conséquent,

$$\Big|\Big|F(t,X_t)-F(t,Y_t)\Big|\Big|+\Big|M(t,X_t)-M(t,Y_t)\Big|\leq D\Big|\Big|X_t-Y_t\Big|\Big|,$$

avec

$$D=\Big[\sqrt{3}\Big((3\mu^2+4(\beta_1^2+\beta_2^2))\vee(2(\mu^2+\beta_1^2)+3\theta^2)\vee(\mu^2+3(\theta^2+\beta_2^2))\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\vee\Big[2\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\Big].$$

Les hypothèses étant vérifiées donc, d'après le théorème d'existence et unicité de solution locale 1.22, l'EDS (4.3) *admet une unique solution locale, d'où l'existence d'une unique solution locale pour notre système* (4.2). □

3.2 Solution globale et entre 0 et 1

Le théorème 4.1 montre que notre système (4.2) a une solution unique mais locale. Donc il reste à montrer que cette solution unique est globale et reste entre 0 et 1.

Théorème 4.2. *Pour toute valeur initiale donnée* $(i(0),s(0),r(0))\in(0,1)^3$ *de* (4.1), *il existe une unique solution globale* $(i(.),s(.),r(.))\in(0,1)^3$ *quelque soit* $t\geq 0$ *et cette solution reste dans* $(0,1)^3$ *avec la probabilité 1, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}\Big\{(i(t),s(t),r(t))\in(0,1)^3,\ \forall\ t\geq 0\Big\}=1.$$

Démonstration 9. *Nous transformons le système* (4.1) *en un système à deux équations*

$$\begin{cases} di(t)=\Big(\mu-\beta_1 i(t)s(t)-\beta_2 i(t)(1-i(t)-s(t))-\mu i(t)\Big)dt-\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t),\\ ds(t)=\Big(\beta_1 i(t)s(t)-\theta s(t)(1-i(t)-s(t))-\mu s(t)\Big)dt+\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)\\ \qquad\qquad +\gamma_2 s(t)(1-i(t)-s(t))dB_2(t). \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour $(i(0), s(0)) = (i_0, s_0)$ *solution initiale donnée, le théorème* 4.1 *prouve l'existence d'une solution locale* $(i(t), s(t))$ *de* (4.4) *pour* $t \in [0, \tau_e)$ *(*τ_e *est appelé temps d'explosion [37]). Pour montrer que cette solution est globale, nous avons besoin de montrer que* $\tau_e = +\infty$ *p.s. Soit* $n_0 > 0$ *suffisamment grand tel que* $i_0, s_0 \in \Big(\frac{1}{n_0}, 1 - \frac{1}{n_0}\Big)$. *Pour chaque entier* $n > n_0$, *on définit le temps d'arrêt :*

$$\tau_n = \inf\Big\{t \in [0, \tau_e) : (i(t) \wedge s(t) \wedge r(t)) \leq \frac{1}{n} \text{ ou } (i(t) \vee s(t) \vee r(t)) \geq 1 - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Nous fixons $\inf \emptyset = +\infty$ *(avec* $\emptyset$ *ensemble vide). Il est clair que* τ_n *est croissante quand* $n \to +\infty$. *Posons* $\tau_{+\infty} = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$. *On a* $\tau_{+\infty} \leq \tau_e$ *(car* $\tau_n \leq \tau_e$*) p.s. Si nous arrivons à montrer que* $\tau_{+\infty} = +\infty$ *p.s. alors* $\tau_e = +\infty$ *p.s. pour tout* $n \geq n_0$. *La preuve est réduite à montrer que* $\tau_{+\infty} = +\infty$ *p.s.*
Supposons que l'assertion est fausse. Il existe alors deux constantes $T > 0$ *et* $\epsilon \in (0, 1)$ *telles que* $\mathbb{P}\Big(\tau_{+\infty} \leq T\Big) > \epsilon$. *Et il existe un entier* $n_1 \geq n_0$ *tel que*

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \geq \epsilon, \;\; \forall\, n \geq n_1. \tag{4.5}$$

On définit l'ensemble $D = \Big\{(i, s) \in (0, 1)^2 : i + s < 1\Big\}$, *puis la fonction* $V : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$V(i(t), s(t)) = \frac{1}{i(t)} + \frac{1}{s(t)} + \frac{1}{1 - i(t) - s(t)}.$$

En utilisant la formule d'Itô, nous obtenons

$$\begin{aligned} dV(i(t), s(t)) = {} & \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial i}di + \frac{\partial V}{\partial s}ds + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(di)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(ds)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial s}dids \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial i}dsdi\Big], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & (di)^2 = \gamma_1^2 i^2(t) s^2(t) dt, \;\; (ds)^2 = \Big[\gamma_1^2 i^2(t) s^2(t) + \gamma_2^2 (1 - i(t) - s(t))^2 s^2(t)\Big] dt \\ & \text{et } \; dids = dsdi - \gamma_1^2 i^2(t) s^2(t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&dV(i(t),s(t)) = \\
&\Big(-\frac{1}{i^2(t)}+\frac{1}{(1-i(t)-s(t))^2}\Big)\Big[\Big(\mu-\beta_1 i(t)s(t)-\beta_2 i(t)(1-i(t)-s(t))-\mu i(t)\Big)dt \\
&-\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)\Big]+\Big(-\frac{1}{s^2(t)}+\frac{1}{(1-i(t)-s(t))^2}\Big)\Big[\Big(\beta_1 i(t)s(t)-\theta s(t)\Big(1-i(t) \\
&-s(t)\Big)-\mu s(t)\Big)dt+\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)+\gamma_2 s(t)(1-i(t)-s(t))dB_2(t)\Big] \\
&+\frac{\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)}{2}\Big[\Big(\frac{2}{i^3(t)}+\frac{2}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big)+\Big(\frac{2}{s^3(t)}+\frac{2}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big)\Big(\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) \\
&+\gamma_2^2(1-i(t)-s(t))^2 s^2(t)\Big)-\frac{4\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big]dt.
\end{aligned}
$$

On écrit alors

$$
\begin{aligned}
dV(i(t),s(t)) \quad &= LV(i(t),s(t))dt+\gamma_1\Big(\frac{s(t)}{i(t)}-\frac{i(t)}{s(t)}\Big)dB_1(t) \\
&+\gamma_2\Big(\frac{s(t)}{1-i(t)-s(t)}-\frac{1-i(t)-s(t)}{s(t)}\Big)dB_2(t),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

avec $LV : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$
\begin{aligned}
&LV(i,s) = \Big(\frac{1}{(1-i-s)^2}-\frac{1}{i^2}\Big)\Big(\mu-\beta_1 is-\beta_2 i(1-i-s)-\mu i\Big) \\
&+\Big(\frac{1}{(1-i-s)^2}-\frac{1}{s^2}\Big)\Big(\beta_1 is-\theta s(1-i-s)-\mu s\Big)+\gamma_1^2 i^2 s^2\Big(\frac{1}{i^3}+\frac{1}{(1-i-s)^3}\Big) \\
&+\Big(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{(1-i-s)^3}\Big)\Big(\gamma_1^2 i^2 s^2+\gamma_2^2(1-i-s)^2 s^2\Big)-\frac{2\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i-s)^3} \\
= \quad &-\frac{\mu}{i^2}+\frac{\beta_1 s}{i}+\frac{\beta_2(1-i-s)}{i}+\frac{\mu}{i}+\frac{\mu}{(1-i-s)^2}-\frac{\beta_1 is}{(1-i-s)^2}-\frac{\beta_2 i}{1-i-s} \\
&-\frac{\mu i}{(1-i-s)^2}-\frac{\beta_1 i}{s}+\frac{\theta(1-i-s)}{s}+\frac{\mu}{s}+\frac{\beta_1 is}{(1-i-s)^2}-\frac{\theta s}{1-i-s}-\frac{\mu s}{(1-i-s)^2} \\
&+\frac{\gamma_1^2 s^2}{i}+\frac{\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i-s)^3}+\frac{\gamma_1^2 i^2}{s}+\frac{\gamma_2^2(1-i-s)^2}{s}+\frac{\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i-s)^3}+\frac{\gamma_2^2 s^2}{1-i-s} \\
&-\frac{2\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i-s)^3}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
LV(i,s) \quad \leq \quad &\frac{\beta_1 s}{i}+\frac{\beta_2(1-i-s)}{i}+\frac{\mu}{i}+\frac{\mu}{(1-i-s)^2}-\frac{\mu i}{(1-i-s)^2}+\frac{\theta(1-i-s)}{s}+\frac{\mu}{s} \\
&-\frac{\mu s}{(1-i-s)^2}+\frac{\gamma_1^2 s^2}{i}+\frac{\gamma_1^2 i^2}{s}+\frac{\gamma_2^2(1-i-s)^2}{s}+\frac{\gamma_2^2 s^2}{1-i-s},
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned} LV(i,s) &\leq \frac{\beta_1 s}{i} + \frac{\beta_2(1-i-s)}{i} + \frac{\mu}{i} + \frac{\gamma_1^2 s^2}{i} + \frac{\theta(1-i-s)}{s} + \frac{\mu}{s} + \frac{\gamma_1^2 i^2}{s} + \frac{\gamma_2^2(1-i-s)^2}{s} \\ &\quad + \frac{\mu(1-i-s)}{(1-i-s)^2} + \frac{\gamma_2^2 s^2}{1-i-s} \\ &\leq \frac{\beta_1}{i} + \frac{\beta_2}{i} + \frac{\mu}{i} + \frac{\gamma_1^2}{i} + \frac{\theta}{s} + \frac{\mu}{s} + \frac{\gamma_1^2}{s} + \frac{\gamma_2^2}{s} + \frac{\mu}{1-i-s} + \frac{\gamma_2^2}{1-i-s} \\ &= \frac{1}{i}\Big(\beta_1 + \beta_2 + \mu + \gamma_1^2\Big) + \frac{1}{s}\Big(\theta + \mu + \gamma_1^2 + \gamma_2^2\Big) + \frac{1}{1-i-s}\Big(\mu + \gamma_2^2\Big). \end{aligned}$$

D'où

$$LV(i(t), s(t)) \leq CV(i(t), s(t)),$$

avec

$$C = \Big(\beta_1 + \beta_2 + \mu + \gamma_1^2\Big) \vee \Big(\theta + \mu + \gamma_1^2 + \gamma_2^2\Big).$$

En remplaçant la majoration dans (4.6), *nous obtenons*

$$\begin{aligned} dV(i(t), s(t)) \quad &\leq CV(i(t), s(t))dt + \gamma_1\Big(\frac{s(t)}{i(t)} - \frac{i(t)}{s(t)}\Big)dB_1(t) \\ &+\gamma_2\Big(\frac{s(t)}{1-i(t)-s(t)} - \frac{1-i(t)-s(t)}{s(t)}\Big)dB_2(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

En intégrant (4.7) *entre* 0 *et* $\tau_n \wedge t$, *on a :*

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n \wedge t} dV(i(\xi), s(\xi))d\xi &\leq \int_0^{\tau_n \wedge t} CV(i(\xi), s(\xi))d\xi + \gamma_1 \int_0^{\tau_n \wedge t} \Big(\frac{s(\xi)}{i(\xi)} - \frac{i(\xi)}{s(\xi)}\Big)dB_1(\xi) \\ &+ \gamma_2 \int_0^{\tau_n \wedge t} \Big(\frac{s(\xi)}{1-i(\xi)-s(\xi)} - \frac{1-i(\xi)-s(\xi)}{s(\xi)}\Big)dB_2(\xi) \end{aligned}$$

et en prenant l'espérance des deux membres, on a :

$$\begin{aligned} E\Big[V(i(\tau_n \wedge t), s(\tau_n \wedge t))\Big] &\leq V(i_0, s_0) + CE\Big[\int_0^{\tau_n \wedge t} V(i(\xi), s(\xi))d\xi\Big] \\ &\leq V(i_0, s_0) + C\int_0^t E\Big[V(i(\tau_n \wedge \xi), s(\tau_n \wedge \xi))\Big]d\xi. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$E\Big[V(i(\tau_n \wedge T), s(\tau_n \wedge T))\Big] \leq V(i_0, s_0)e^{CT}. \tag{4.8}$$

Prenons $\Omega_n = \{\tau_n \leq T\}$ *pour* $n \geq n_1$ *et comme pour tout* $n \geq n_1$, $\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \geq \epsilon$ *donc, d'après* (4.5), $\mathbb{P}(\Omega_n) \geq \epsilon$. *Pour tout* $\omega \in \Omega_n$, *il existe au moins l'un des* $i(\tau_n, \omega)$, $s(\tau_n, \omega)$

qui soit égal à $1 - \frac{1}{n}$ *ou* $\frac{1}{n}$.
Si $i(\tau_n, \omega) = 1 - \frac{1}{n}$ *ou* $\frac{1}{n}$ *alors*

$$V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega)) \geq n.$$

Si $s(\tau_n, \omega) = 1 - \frac{1}{n}$ *ou* $\frac{1}{n}$ *alors*

$$V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega)) \geq n.$$

D'après (4.5) *et* (4.8), *on a :*

$$V(i_0, s_0)e^{CT} \geq E[\mathbb{1}_{\Omega_n(\omega)} V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega))] \geq \epsilon n,$$

avec $\mathbb{1}_{\Omega_n}$ *la fonction indicatrice de* Ω_n. *Puisque* ϵ *est fixé dans* $(0, 1)$, *on obtient, lorsqu'on fait* $n \to \infty$, $\infty > V(i_0, s_0)e^{CT} = \infty$, *ce qui est absurde. Donc* $\tau_\infty = \infty$ *p.s., ce qui termine la preuve.* □

4 Extinction de la rumeur sur le réseau

Dans les modèles déterministes, la valeur du nombre basique de reproduction R_0^d, appélé seuil, détermine la zone de persistance et d'extinction de la rumeur, comme pour les épidémies etc. Quand $R_0^d \leq 1$, il y a stabilisation du système autour d'un seul point stable pour lequel le nombre de spreaders diminue exponentiellement jusqu'à s'annuler et le nombre de stifflers reste différent de zéro, c'est-à-dire que la rumeur s'arrête sur le réseau. Tandis que quand $R_0^d > 1$, le système se stabilise autour d'un point où le nombre de spreaders est non nul et le nombre de stifflers diminue jusqu'à s'annuler. Mais ils ne deviennent pas ignorants, car le modèle n'envisage pas une telle situation, soit ils quittent le réseau ou ils deviennent spreaders, c'est-à-dire le nombre de spreaders est soit stabilisé ou augmenté. Donc dans ce cas, la rumeur persiste sur le réseau parce qu'on a toujours présence de spreaders.
Dans cette section, nous allons définir certaines conditions pour lesquelles on aurait extinction de la rumeur.
Avant d'établir les résultats, il est important de donner trois lemmes, deux inspirés des lemmes 2.1 et 2.2 de [35, 54] et un du théorème 1.3.4 de [37], qui seront utilisés pour démontrer le théorème sur l'extinction.

Lemme 4.1. *Soit $(i(.), s(.), r(.))$ solution de (4.2) avec $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ la condition initiale. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(t)+s(t)+r(t)}{t} = 0 \ \ p.s.,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(t)}{t} = 0, \ \ \lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{t} = 0 \ \ et \ \lim_{t\to\infty} \frac{r(t)}{t} = 0 \ \ p.s.$$

Démonstration 10. *D'autres preuves similaires du même type sont dans [53, 54]. Soit $u(t) = i(t) + s(t) + r(t)$. On définit $w(t) = (1+u)^p$, avec p une constante strictement positive. En utilisant la formule d'Itô, on a :*

$$dw(u) = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(du)^2 = p(1+u)^{p-1}du + \frac{1}{2}p(p-1)(1+u)^{p-2}(du)^2.$$

Or

$$u(t) = i(t) + s(t) + r(t) \Rightarrow du(t) = di(t) + ds(t) + dr(t)$$

et

$$(du)^2 = (di)^2 + (ds)^2 + (dr)^2 + 2(dids + didr + dsdr),$$

avec

$$\begin{aligned} &(di)^2 = \gamma_1^2 i^2 s^2 dt, \ \ (ds)^2 = (\gamma_1^2 i^2 + \gamma_2^2 r^2)s^2 dt, \ \ (dr)^2 = \gamma_2^2 s^2 r^2 dt, \\ &dids = -\gamma_1 i^2 s^2 dt, \ \ didr = 0, \ \ dsdr = -\gamma_2^2 s^2 r^2 dt \end{aligned}$$

et

$$(du)^2 = \gamma_1^2 i^2 s^2 dt + \gamma_1^2 i^2 s^2 dt + \gamma_2^2 r^2 s^2 dt + \gamma_2^2 s^2 r^2 dt + 2(-\gamma_1 i^2 s^2 dt - \gamma_2^2 s^2 r^2 dt) = 0.$$

En remplaçant $di, ds,$ et dr, on a :

$$\begin{aligned} dw(u) &= p(1+u)^{p-1}du \\ &= p(1+u)^{p-1}[\mu - \beta_1 is - \beta_2 ir - \mu i + \beta_1 is - \theta sr - \mu s + \beta_2 ir + \theta sr - \mu r]dt \\ &\quad + p(1+u)^{p-1}[-\gamma_1 isdB_1 + \gamma_1 isdB_1 + \gamma_2 rsdB_2 - \gamma_2 rsdB_2] \\ &= p(1+u)^{p-1}[\mu - \mu(i+s+r)]dt = p(1+u)^{p-1}(\mu - \mu u)dt \\ &\quad = p(1+u)^{p-2}(\mu - \mu u^2)dt, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$dw(u(t)) = Lw(u(t))dt, \tag{4.9}$$

avec $Lw(u) = p(1+u)^{p-2}(\mu - \mu u^2)$. *Pour* $0 < k < p\mu$ *et en remplaçant* $w(u(t))$ *par* $e^{kt}w(u(t))$ *dans* (4.9), *on a :*

$$d[e^{kt}w(u(t))] = L[e^{kt}w(u(t))]dt.$$

En prenant l'intégrale entre 0 *et* t, *puis l'espérance des deux membres, on obtient :*

$$E[e^{kt}w(u(t))] = w(u(0)) + \int_0^t L[e^{k\xi}w(u(\xi))]d\xi, \tag{4.10}$$

avec

$$\begin{aligned} L[e^{kt}w(u)] &= ke^{kt}w(u) + e^{kt}Lw(u) = ke^{kt}(1+u)^p + pe^{kt}(1+u)^{p-2}(\mu - \mu u^2) \\ &= pe^{kt}(1+u)^{p-2}\left[\frac{k}{p}(1+u)^2 + \mu(1-u^2)\right] \\ &= pe^{kt}(1+u)^{p-2}\left(\frac{k}{p} + \mu + \frac{2k}{p}u - (\mu - \frac{k}{p})u^2\right) \\ &\leq pe^{kt}H \end{aligned}$$

et

$$H = \sup_{u \in \mathbb{R}_+}\left\{(1+u)^{p-2}(\frac{k}{p} + \mu + \frac{2k}{p}u - (\mu - \frac{k}{p})u^2)\right\}.$$

En utilisant (4.10), *on a :*

$$E\Big[e^{kt}(1+u)^p\Big] \leq (1+u(0))^p + \frac{pHe^{kt}}{k} - \frac{pH}{k} \Rightarrow E\Big[(1+u(t))^p\Big] \leq \frac{(1+u(0))^p}{e^{kt}} + \frac{pH}{k}.$$

D'où

$$\lim_{t\to+\infty}\sup E\Big[(1+u(t))^p\Big] \leq \frac{pH}{k} := H_0 \ \ p.s.$$

Comme u(t) est continue, il existe une constante $M > 0$ *telle que*

$$E[(1+u(t))^p] \leq M, \quad t \geq 0. \tag{4.11}$$

Pour tout $\delta > 0$ *suffisamment petit,* $k = 1, 2, 3, ...$, *en intégrant* (4.9) *entre* $k\delta$ *et* t, *on a :*

$$\int_{k\delta}^t dw(u(\xi))d\xi = \int_{k\delta}^t Lw(u(\xi))d\xi$$

et en remplaçant $Lw(u(t))$ *et* $w(u(t))$ *par leurs valeurs, on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{k\delta}^t d(1+u(\xi))^p d\xi &= \int_{k\delta}^t p(1+u(\xi))^{p-2}(\mu - \mu u^2(\xi))d\xi, \\ \text{donc } (1+u(t))^p &= (1+u(k\delta))^p + \int_{k\delta}^t p(1+u(\xi))^{p-2}(\mu - \mu u^2(\xi))d\xi. \end{aligned}$$

On prend ensuite la borne supérieure pour t compris entre $k\delta$ et $(k+1)\delta$, ce qui donne

$$\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p = (1+u(k\delta))^p + \sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\int_{k\delta}^{t} p(1+u(\xi))^{p-2}(\mu-\mu u^2(\xi))d\xi\Big|.$$

En prenant l'espérance des deux membres et on obtient

$$E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big] = E[(1+u(k\delta))^p] + I_1,$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= E\left[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\int_{k\delta}^{t} p(1+u(\xi))^{p-2}(\mu-\mu u^2(\xi))d\xi\Big|\right]\\
&= E\left[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\int_{k\delta}^{t} p\mu(1+u(\xi))^{p-2}(1+u(\xi))(1-u(\xi))d\xi\Big|\right]\\
&= E\left[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\int_{k\delta}^{t} p\mu(1+u(\xi))^{p}\frac{1-u(\xi)}{1+u(\xi)}d\xi\Big|\right].
\end{aligned}$$

Or $u(t)\leq 1$ donc il existe $c_1 = p\mu \sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\frac{1-u(\xi)}{1+u(\xi)}\Big|$ tel que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c_1 E\left[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}\Big|\int_{k\delta}^{t}(1+u(\xi))^p d\xi\Big|\right] \leq c_1 E\Big[\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}(1+u(\xi))^p d\xi\Big]\\
&\leq c_1 E\Big[\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(\xi))^p d\xi\Big]\\
&\leq c_1 E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(\xi))^p[(k+1)\delta-k\delta]\Big]\\
&= c_1\delta E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big] \leq E[(1+u(k\delta))^p] + c_1\delta E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big].$$

En particulier, pour $\delta>0$ tel que $c_1\delta\leq 1$, on a

$$E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big] \leq 2E[(1+u(k\delta))^p] \leq 2M, \quad \textit{d'après } (4.11).$$

Soit $\epsilon_u>0$. En utilisant l'inégalité de Chebyshev, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p > (k\delta)^{1+\epsilon_u}\Big) \leq \frac{E\Big[\sup_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}(1+u(t))^p\Big]}{(k\delta)^{1+\epsilon_u}} \leq \frac{2M}{(k\delta)^{1+\epsilon_u}}, \quad k=1,2,3,...$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli [37], nous obtenons, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{k\delta \leq t \leq (k+1)\delta} (1+u(t))^p \leq (k\delta)^{1+\epsilon_u}, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.12}$$

Comme l'inégalité est vraie pour tout k, *il existe un* $k_0(\omega)$, *pour presque tout* $\omega \in \Omega$ *tel que la relation* (4.12) *reste vraie pour tout* $k \geq k_0$. *Pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *si* $k \geq k_0$ *et* $k\delta \leq t \leq (k+1)\delta$,

$$\frac{\log(1+u(t))^p}{\log t} \leq \frac{(1+\epsilon_u)\log(k\delta)}{\log(k\delta)} = 1 + \epsilon_u.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{\log(1+u(t))^p}{\log t} \leq 1 + \epsilon_u \;\; p.s.$$

Faisons $\epsilon_u \to 0$, *on a*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{\log(1+u(t))^p}{\log t} \leq 1 p.s.$$

Comme $1 < p < 1 + 2\mu$ *donc* $\mu > \frac{p-1}{2}$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{\log(u(t))}{\log t} \leq \lim_{t\to+\infty} \sup \frac{\log(1+u(t))}{\log t} \leq \frac{1}{p} \;\; p.s.,$$

c'est-à-dire que pour $0 < \sigma < 1 - \frac{1}{p}$, *il existe une constante* $T = T(\omega)$ *et un ensemble* Ω_σ *tel que* $\mathbb{P}(\Omega_\sigma) \geq 1 - \sigma$ *et pour* $t \geq T$, $\omega \in \Omega_\sigma$,

$$\log u(t) \leq (\frac{1}{p} + \sigma) \log t$$

et donc

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{u(t)}{t} \leq \lim_{t\to+\infty} \sup \frac{t^{\frac{1}{p}+\sigma}}{t} = 0.$$

Or i, s *et* r *sont positives donc* u *l'est aussi et on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{i(t)+s(t)+r(t)}{t} = 0 \;\; p.s.$$

Pour la même raison

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{i(t)}{t} = 0 \;\; \lim_{t\to+\infty} \frac{s(t)}{t} = 0 \;\; et \;\; \lim_{t\to+\infty} \frac{r(t)}{t} = 0 \;\; p.s.,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 4.1. □

Lemme 4.2. *Soit* $(i(.), s(.), r(.))$ *solution de* (4.2) *avec* $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ *la condition initiale. Alors*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi)}{t}=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi)}{t}=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi)}{t}=0,$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi)}{t}=0\ \ et\ \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi)}{t}=0\ \ p.s.$$

Démonstration 11. *D'autres preuves similaires sont disponibles dans [53, 54].*
Soit $X(t)=\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi)$, $Y(t)=\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi)$, $Z(t)=\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi)$, $H(t)=\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi)$, *et* $R(t)=\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi)$. *Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et l'inégalité de Hölder, nous obtenons pour tout* $2<p<1+2\mu$

$$E\left[\sup_{0\le\xi\le t}|H(\xi)|^p\right]\le C_pE\left[\int_0^t i^2(\xi)s^2(\xi)d\xi\right]^{\frac{p}{2}}\le C_pt^{\frac{p}{2}}E\left[\sup_{0\le\xi\le t}i^p(\xi)\sup_{0\le\xi\le t}s^p(\xi)\right]\le 2M^2C_pt^{\frac{p}{2}}.$$

Soit ϵ_H, *une constante positive, choisie arbitrairement. Alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big\{\omega:\sup_{k\delta\le t\le(k+1)\delta}|H(t)|^p>(k\delta)^{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}}\Big\} &\le \frac{E\left[|H((k+1)\delta)|^p\right]}{(k\delta)^{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}}}\\ &\le \frac{2M^2C_p[(k+1)\delta]^{\frac{p}{2}}}{(k\delta)^{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}}}.\end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Doob martingale, on a :

$$\mathbb{P}\Big\{\omega:\sup_{k\delta\le t\le(k+1)\delta}|H(t)|^p>(k\delta)^{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}}\Big\}\le\frac{2^{1+\frac{p}{2}}C_pM^2}{(k\delta)^{1+\epsilon_H}}. \tag{4.13}$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient pour presque tout $\omega\in\Omega$,

$$\sup_{k\delta\le t\le(k+1)\delta}|H(t)|^p\le(k\delta)^{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}},\ \ k=1,2,3,...$$

Donc, il existe $k_{H_0}(\omega)$ *positif tel que pour presque tout* $\omega\in\Omega$, *pour* $k\ge k_{H_0}$, *la relation reste vraie. Pour presque tout* $\omega\in\Omega$, *si* $k\ge k_{H_0}$ *et* $k\delta\le t\le(k+1)\delta$, *on a*

$$\frac{\ln|H(t)|^p}{\ln t}\le\frac{(1+\epsilon_H+\frac{p}{2})\ln(k\delta)}{\ln k\delta}=1+\epsilon_H+\frac{p}{2}.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln|H(t)|}{\ln t}\le\frac{1+\epsilon_H+\frac{p}{2}}{p}.$$

En faisant

$$\epsilon_H \to 0, \ \ \textit{on obtient} \ \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|H(t)|}{\ln t} \leq \frac{1+\frac{p}{2}}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}.$$

Alors pour $0 < \eta < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$ *petit, il existe une constante* $\overline{T} = \overline{T}(\omega) > 0$ *et un ensemble* Ω *tel que* $\mathbb{P}(\Omega_\eta) \geq 1 - \eta$, *pour* $t \geq \overline{T}$ *et* $\omega \in \Omega_\eta$,

$$\ln|H(t)| \leq (\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \eta)\ln t \ \ \textit{et donc} \ \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{H(t)}{t} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\eta}}{t} = 0.$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty}\inf \dfrac{|H(t)|}{t} \geq 0$, *cela entraine que*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|H(t)|}{t} = 0 \ \ \textit{p.s.}$$

D'où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{H(t)}{t} = 0.$$

Par analogie, on montre que :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{X(t)}{t} = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \frac{Y(t)}{t} = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \frac{Z(t)}{t} = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \frac{R(t)}{t} = 0,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 4.2. □

Soit

$$R_{01}^s = \frac{(\mu + 2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)},$$

qu'on utilisera comme seuil dans la suite pour l'extinction mais aussi pour la persistance du modèle stochastique. Pour mieux comprendre le choix de ce seuil, il faudra suivre la démonstration du résultat de l'extinction, car c'est en faisant les calculs qu'on arrive à effectivement le déterminer.

Théorème 4.3. *Soit* $(i(.), s(.), r(.))$ *solution de* (4.2) *avec* $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ *la condition initiale. Si* $R_{01}^s < 1$ *alors*

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{\ln s(t)}{t} \leq (\mu+\theta)(R_{01}^s - 1) < 0 \ \ \textit{p.s.},$$

ce qui signifie que $s(.)$ *tend exponentiellement vers zéro presque surement, c'est-à-dire que la rumeur s'arrête à probabilité* 1.

Démonstration 12. *Pour faciliter les calculs, on utilise dans tout le reste du document le modèle suivant obtenu en remplaçant $r(.)$ par $1-i(.)-s(.)$ dans (4.2) :*

$$\begin{cases} di(t) = \Big(\mu - (\beta_1-\beta_2)i(t)s(t) + \beta_2 i^2(t) - (\beta_2+\mu)i(t)\Big)dt - \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t), \\ ds(t) = \Big((\beta_1+\theta)i(t)s(t) + \theta s^2(t) - (\theta+\mu)s(t)\Big)dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 s(t)dB_2(t) \\ \qquad\quad -\gamma_2 i(t)s(t)dB_2(t) - \gamma_2 s^2(t)dB_2(t). \end{cases} \tag{4.14}$$

On intègre entre 0 et t les deux EDS de (4.14), ce qui donne

$$\begin{aligned} i(t)-i_0 &= \mu t - (\beta_1-\beta_2)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \beta_2\int_0^t i^2(\xi)d\xi - (\beta_2+\mu)\int_0^t i(\xi)\xi \\ &\quad -\gamma_1\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_1(\xi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s(t)-s_0 &= (\beta_1+\theta)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \theta\int_0^t s^2(\xi)d\xi - (\theta+\mu)\int_0^t s(\xi)d\xi \\ &\quad +\gamma_1\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_1(\xi) + \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi) \\ &\quad -\gamma_2\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi). \end{aligned}$$

En les additionnant, on a :

$$\begin{aligned} i(t)-i_0+s(t)-s_0 &= \mu t + (\beta_2+\theta)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \beta_2\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \theta\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\ &\quad -(\beta_2+\mu)\int_0^t i(\xi)d\xi - (\theta+\mu)\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) \\ &\quad -\gamma_2\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^t i(\xi)d\xi &= \frac{\mu}{\beta_2+\mu}t + \frac{\beta_2+\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \frac{\beta_2}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\ &\quad -\frac{\theta+\mu}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \phi(t), \end{aligned} \tag{4.15}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -\frac{1}{\beta_2+\mu}\Big(i(t)-i_0+s(t)-s_0-\gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi)+\gamma_2\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi)\\ &+ \gamma_2\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi)\Big).\end{aligned}$$

Appliquons la formule d'Itô à la fonction $\ln s(t)$*, on a :*

$$\begin{aligned}d(\ln s(t)) &= \frac{\partial \ln s(t)}{dt}dt+\frac{\partial \ln s(t)}{\partial s}ds(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln s(t)}{\partial s^2}(ds(t))^2\\ &= \frac{1}{s(t)}ds(t)-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2(t)}(ds(t))^2.\end{aligned}$$

En calculant le carré de la deuxième équation du système (4.14)*, on a :*

$$(ds)^2=(\gamma_1^2 i^2 s^2+\gamma_2^2 s^2+\gamma_2^2 i^2 s^2+\gamma_2^2 s^4-2\gamma_2^2 i s^2-2\gamma_2^2 s^3+2\gamma_2^2 i s^3)dt,$$

d'où, en remplaçant ds *et* $(ds)^2$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}&d(\ln s(t))\\ =\ & \frac{1}{s(t)}\Big(\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)+\gamma_2 s(t)dB_2(t)-\gamma_2 i(t)s(t)dB_2(t)-\gamma_2 s^2(t)dB_2(t)\Big)\\ -\ & \frac{1}{2s^2(t)}\Big(\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)+\gamma_2^2 s^2(t)+\gamma_2^2 i^2(t)s^2(t)+\gamma_2^2 s^4(t)-2\gamma_2^2 i(t)s^2(t)\\ -\ & 2\gamma_2^2 s^3(t)+2\gamma_2^2 i(t)s^3(t)\Big)dt+\frac{1}{s(t)}\Big((\beta_1+\theta)i(t)s(t)+\theta s^2(t)-(\theta+\mu)s(t)\Big)dt\\ =\ & \Big((\beta_1+\theta)i(t)+\theta s(t)-(\theta+\mu)-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)i^2(t)-\frac{1}{2}\gamma_2^2-\frac{1}{2}\gamma_2^2 s^2(t)+\gamma_2^2 i(t)+\gamma_2^2 s(t)\\ -\ & \gamma_2^2 i(t)s(t)\Big)dt+\gamma_1 i(t)dB_1(t)+\gamma_2 dB_2(t)-\gamma_2 i(t)dB_2(t)-\gamma_2 s(t)dB_2(t).\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 *et* t*, on a alors :*

$$\begin{aligned}\ln s(t) &= (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\int_0^t i(\xi)d\xi-(\theta+\mu)t-\frac{1}{2}\gamma_2^2 t-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi\\ &+ (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi-\gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)\\ &+ \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi)-\gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi)-\gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi)+\ln s_0.\end{aligned}$$

On remplace $\int_0^t i(\xi)d\xi$ *de l'équation* (4.15) *dans la précédente, ce qui donne*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \Big[\frac{\mu}{\beta_2+\mu}t + \frac{\beta_2+\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \frac{\beta_2}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{\theta+\mu}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \phi(t)\Big](\beta_1+\theta+\gamma_2^2) - (\theta+\mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t \\
&- \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi) - \gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi) \\
&- \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) + \ln s_0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu)t - \tfrac{1}{2}\gamma_2^2 t + \frac{(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi \\
&+ \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&+ (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)\xi - \gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + \psi(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

avec

$$\psi(t) = \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi) - \gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) + \ln s_0.$$

Or $i, s \in (0,1)$ *donc* $i^2 \leq 1, s^2 \leq 1, is \leq 1$ *et*

$$\begin{aligned}
&\ln s(t) \leq \\
&\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t + \frac{(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t + \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t \\
&+\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi \\
&-\frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + \psi(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) \\
&= \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t + \frac{2(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t \\
&-\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) \\
&+\psi(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\gamma_2^2 s^2 + (\theta+\gamma_2^2)s &= -\frac{1}{2}[\gamma_2^2 s^2 - 2(\theta+\gamma_2^2)s] = -\frac{1}{2}\left[\gamma_2^2 s^2 - 2\gamma_2 s\frac{1}{\gamma_2}(\theta+\gamma_2^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(\gamma_2 s - \frac{\theta+\gamma_2^2}{\gamma_2}\right)^2 - \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{\gamma_2^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_2 s - \frac{\theta+\gamma_2^2}{\gamma_2}\right)^2 + \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2} \\ &\leq \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \ln s(t) &\leq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t + \frac{2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\beta_2+\theta)}{\beta_2+\mu}t + \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}t \\ &+ \gamma_2 B_2(t) - \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t) \\ &\leq \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - \frac{\gamma_2^4 - (\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}t - (\theta+\mu)t \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t). \end{aligned}$$

En divisant l'équation par t, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln s(t)}{t} &\leq \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - \frac{\gamma_2^4 - (\theta^2+2\theta\gamma_2^2+\gamma_2^4)}{2\gamma_2^2} - (\theta+\mu) \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\langle s(t)\rangle + \gamma_2\frac{B_2(t)}{t} + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t} + \frac{\psi(t)}{t}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\ln s(t)}{t} &\leq (\theta+\mu)\Big[\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)} - 1\Big] \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\langle s(t)\rangle + \gamma_2\frac{B_2(t)}{t} + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t} + \frac{\psi(t)}{t}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dans la relation (4.17)*, on aurait pu éliminer le terme contenant $\langle s(t)\rangle$ mais on fait le choix de le garder car cette relation sera utilisée pour la persistance. En remplaçant R_{01}^s par sa valeur, on a*

$$\frac{\ln s(t)}{t} \leq (\theta+\mu)(R_{01}^s - 1) + \gamma_2\frac{B_2(t)}{t} + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t} + \frac{\psi(t)}{t},$$

et en prenant la limite quand $t\to+\infty$, comme $R_{01}^s < 1$, on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{t} = 0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = 0 \ \text{ d'après les lemmes 4.1 et 4.2,}$$

et d'après le corollaire 1.2

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_2(t)}{t} = 0,$$

donc

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln s(t)}{t} \leq (\mu + \theta)(R^s_{01} - 1) < 0,$$

ce qui entraine que

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = 0 \ \ p.s.,$$

ce qui veut dire qu'il y a un regroupement de spreaders dans le groupe des stiflers ou une partie de spreaders qui quitte le réseau, car d'après le modèle, un spreader ne peut pas devenir ignorant. Ceci termine la démonstration du théorème 4.3. □

Le théorème 4.3 montre que sous la condition $R^s_{01} < 1$, la rumeur s'arrête.

5 Persistance de la rumeur sur le réseau

Dans cette section, nous allons établir une condition suffisante pour que la rumeur persiste sur le réseau. Pour cela, nous allons choisir un seuil et présenter une définition de la persistance en moyenne qu'on peut trouver dans [16, 34].

Définition 4.1. *Le système* (4.2) *persiste en moyenne si*

$$\lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle > 0, \ \ p.s.$$

Avant d'annoncer le théorème 4.4, on rappelle ici deux lemmes généraux qui proviennent de l'appendice de [27] et qui nous serviront dans la démonstration de la persistance.

Lemme 4.3. *Soit* $f \in \mathcal{C}\Big([0,\infty) \times \Omega, (0,\infty)\Big)$. *S'il existe des constantes positives* λ_0 *et* λ *telles que*

$$\ln f(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t f(\xi) d\xi + F(t) \ \ p.s.$$

pour tout $t \geq 0$, *avec* $F \in \mathcal{C}\Big([0,\infty) \times \Omega, \mathbb{R}\Big)$ *et* $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = 0$ *p.s. alors*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi) d\xi \leq \frac{\lambda}{\lambda_0} \ \ p.s.$$

Lemme 4.4. *Soit $f \in \mathcal{C}\Big([0,\infty)\times\Omega,(0,\infty)\Big)$. S'il existe des constantes positives λ_0 et λ telles que*

$$\ln f(t) \geq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t f(\xi)d\xi + F(t) \;\; p.s.$$

pour tout $t \geq 0$, avec $F \in \mathcal{C}\Big([0,\infty)\times\Omega,\mathbb{R}\Big)$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{F(t)}{t} = 0$ p.s. alors

$$\lim_{t\to\infty}\inf \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi)d\xi \geq \frac{\lambda}{\lambda_0} \;\; p.s.$$

Soient

$$R_{02}^s = \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\beta_1)(\beta_2+\mu)}R_0^d - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)} \;\text{ et }\; R_{03}^s = \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}$$

qu'on utilisera comme seuils dans la suite pour la persistance du modèle stochastique. Pour mieux comprendre ces choix de seuils, il faudra suivre la démonstration du résultat de la persistance, car, c'est en faisant les calculs qu'on arrive à le déterminer.
Les résultats de la persistance ne font intervenir que des hypothèses sur R_{02}^s et R_{03}^s mais, on aura besoin dans le théorème 4.4, puis dans le théorème 4.5, d'une condition sur R_{01}^s. Donc, cela nous contraint à trouver une relation entre ces seuils.

Relation entre les seuils : R_{02}^s et R_{01}^s puis R_{03}^s et R_{01}^s.
On a

$$\begin{aligned}
R_{02}^s &= \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\beta_1)(\beta_2+\mu)}R_0^d - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}\\
&= \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\beta_1)(\beta_2+\mu)} \times \frac{\mu(\theta+\beta_1)}{\beta_2(\theta+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}\\
&= \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}\\
&\leq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{2(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)}\\
&= \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)} = R_{01}^s
\end{aligned}$$

donc

$$R_{02}^s \leq R_{01}^s. \;\; \square$$

Étant donné que $\beta_2 \geq \theta$ (hypothèse du théorème 4.5), on a

$$2\beta_2 \geq 2\theta \Rightarrow 2(\beta_2+\theta) \geq 3\theta \Rightarrow \mu + 2(\beta_2+\theta) \geq \mu+\beta_2+3\theta,$$

ce qui entraine que

$$\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} \geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)}$$

donc

$$\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} \geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_{01}^s &= \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)} \\ &\geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)} = R_{03}^s, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$R_{03}^s \leq R_{01}^s. \quad \square$$

Théorème 4.4. *Soit $(i(.), s(.), r(.))$ solution de (4.2) avec $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ la solution initiale. Si $R_{02}^s > 1$ alors*

$$\frac{(\beta_2+\mu)(R_{02}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2} \leq \lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2+\mu)(R_{01}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2} \quad p.s.,$$

ce qui signifie qu'il y a presque surement un nombre de propageurs sur le réseau, c'est-à-dire que la rumeur persiste en moyenne avec la probabilité 1.

Démonstration 13. *On multiplie l'équation (4.17) par t et on a*

$$\begin{aligned} \ln s(t) &\leq (\theta+\mu)\left[\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)} - 1\right] t \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu} t\langle s(t)\rangle + \gamma_2 B_2(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t). \end{aligned}$$

Comme $\langle s(t)\rangle = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t s(\xi)d\xi$, on écrit

$$\begin{aligned} \ln s(t) &\leq (\theta+\mu)\left[\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} + \frac{\theta(\theta+2\gamma_2^2)}{2\gamma_2^2(\theta+\mu)} - 1\right] t \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{(\beta_2+\mu)} \int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t). \end{aligned}$$

En remplaçant R_{01}^s par sa valeur, on obtient

$$\ln s(t) \leq (\mu+\theta)(R_{01}^s-1)t - \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t).$$

En prenant $F(t) = \gamma_2 B_2(t) + (\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)\phi(t) + \psi(t)$, *on a* $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = 0$, *d'après les lemmes* 4.1, 4.2 *et le corollaire* 1.2.
Posons $\lambda = (\mu + \theta)(R_{01}^s - 1)$ *et* $\lambda_0 = \frac{(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)(\theta + \mu)}{\beta_2 + \mu} > 0$. *Comme* $R_{02}^s < R_{01}^s$ *et* $R_{02}^s > 1$ *donc* $R_{01}^s > 1$ *c'est-à-dire* $\lambda > 0$.
Par application du lemme 4.3, *on a*

$$\lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\mu + \theta)(R_{01}^s - 1)}{\frac{(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)(\theta + \mu)}{\beta_2 + \mu}},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2 + \mu)(R_{01}^s - 1)}{\beta_1 + \theta + \gamma_2^2},$$

ce qui montre la première partie du théorème.
De plus, en utilisant l'équation (4.16) *on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \frac{\mu(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} t - (\theta + \mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t + \frac{(\beta_2 + \theta)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} \int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi \\
&+ \frac{\beta_2(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} \int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} \int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} \int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \int_0^t i^2(\xi)d\xi + (\theta + \gamma_2^2) \int_0^t s(\xi)d\xi \\
&- \frac{1}{2}\gamma_2^2 \int_0^t s^2(\xi)d\xi - \gamma_2^2 \int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + \psi(t) + (\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Comme $i, s \in (0,1)$ *donc* $i^2 \leq 1$, $s^2 \leq 1$, $is \leq 1$ *et* $-i^2 \geq -1$, $-s^2 \geq -1$, $-is \geq -1$. *On a alors*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\geq \frac{\mu(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} t - (\theta + \mu)t - \frac{1}{2}\gamma_2^2 t - \lambda_0 \int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \int_0^t d\xi \\
&- \frac{1}{2}\gamma_2^2 \int_0^t d\xi - \gamma_2^2 \int_0^t d\xi + F(t) \\
&= \left[\frac{\mu(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} - (\theta + \mu) - \frac{1}{2}\gamma_2^2 - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \frac{1}{2}\gamma_2^2 - \gamma_2^2\right] t \\
&- \lambda_0 \int_0^t s(\xi)d\xi + F(t),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\geq \left[\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - (\theta+\mu) - \frac{1}{2}\gamma_1^2 - \frac{5}{2}\gamma_2^2\right]t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t)\\
&= (\theta+\mu)\left[\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)} - 1\right]t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t)\\
&= (\theta+\mu)\left[\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\beta_1)(\beta_2+\mu)} \times \frac{\mu(\theta+\beta_1)}{\beta_2(\theta+\mu)} - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)} - 1\right]t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi\\
&+ F(t).
\end{aligned}$$

En remplaçant R_0^d par sa valeur, on obtient

$$\ln s(t) \geq (\theta+\mu)\left[\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\beta_1)(\beta_2+\mu)}R_0^d - \frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)} - 1\right]t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t).$$

En remplaçant R_{02}^s par sa valeur, on a :

$$\ln s(t) \geq (\theta+\mu)(R_{02}^s - 1)t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t).$$

Posons maintenant $\lambda = (\mu+\theta)(R_{02}^s - 1)$. Comme $R_{02}^s > 1$ on a $\lambda > 0$. Par application du lemme 4.4, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\theta+\mu)(R_{02}^s-1)}{\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2+\mu)(R_{02}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2},$$

ce qui termine la deuxième partie du théorème. □

Remarque 3. *Dans le cas où $R_{02}^s < 1 < R_{01}^s$, en suivant la démonstration précédente, on obtient*

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2+\mu)(R_{01}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2} \quad p.s.$$

qu'on peut considérer comme une persistance de la rumeur.

Théorème 4.5. *Soit $(i(.), s(.), r(.))$ solution de (4.2) avec $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ la condition initiale. Si $\beta_2 \geq \theta$, $\theta < \frac{\beta+\mu}{2}$, $\gamma_1^2 + \frac{\mu-\beta_2}{\beta_2+\mu}\gamma_2^2 \geq \frac{2\beta_2(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}$, $\gamma_2^2 \geq \frac{2\theta(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu-2\theta}$ et $R_{03}^s > 1$ alors*

$$\frac{(\beta_2+\mu)(R_{03}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2} \leq \lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2+\mu)(R_{01}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2} \quad p.s.,$$

ce qui signifie qu'il y a presque surement un nombre de propageurs sur le réseau, c'est-à-dire que la rumeur persiste en moyenne avec la probabilité 1.

Démonstration 14. *La partie droite de l'inégalité se démontre de la même façon que la preuve du théorème 4.4, car* $R^s_{03} > 1$ *implique que* $R^s_{01} > 1$. *Il reste à montrer la partie gauche, à savoir :*

$$\lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2+\mu)(R^s_{03}-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2}.$$

En utilisant l'équation (4.16) *et l'hypothèse* $\beta_2 \geq \theta$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) \quad &\geq \quad \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\frac{1}{2}\gamma_2^2 t+\Big(\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\gamma_2^2\Big)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi \\
&+ \quad \Big(\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Big)\int_0^t i^2(\xi)d\xi+\Big(\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}\gamma_2^2\Big)\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \quad \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+\psi(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Étant donné que $\gamma_1^2+\dfrac{\mu-\beta_2}{\beta_2+\mu}\gamma_2^2 \geq \dfrac{2\beta_2(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}$, *on a :*

$$\frac{1}{2}\gamma_1^2+\frac{1}{2}\gamma_2^2 \geq \frac{\beta_2(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}+\frac{1}{2}\gamma_2^2-\frac{\mu-\beta_2}{2(\beta_2+\mu)}\gamma_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\gamma_1^2+\frac{1}{2}\gamma_2^2 \geq \frac{\beta_2(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}+(\frac{1}{2}-\frac{\mu-\beta_2}{2(\beta_2+\mu)})\gamma_2^2,$$

ce qui entraine que

$$\frac{1}{2}\gamma_1^2+\frac{1}{2}\gamma_2^2 \geq \frac{\beta_2(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}+\frac{2\beta_2}{2(\beta_2+\mu)}\gamma_2^2$$

d'où

$$\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}\gamma_1^2\frac{1}{2}\gamma_2^2 \leq 0.$$

De plus, l'hypothèse $\gamma_2^2 \geq \dfrac{2\theta(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu-2\theta}$ *implique que*

$$\frac{\beta_2+\mu-2\theta}{2(\beta_2+\mu)}\gamma_2^2 \geq \frac{\theta(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu},\ \ \textit{car}\ \theta < \frac{\beta_2+\mu}{2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\gamma_2^2 \geq \frac{\theta(\beta_1+\theta)}{\beta_2+\mu}+\frac{\theta}{\beta_2+\mu}\gamma_2^2\ \ \textit{cela entraine aussi que}\ \ \frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\gamma_2^2 \leq 0.$$

Comme $i, s \in (0,1)$ *donc* $i^2 \leq 1,\ s^2 \leq 1,\ is \leq 1$ *et on a :*

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\geq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\frac{1}{2}\gamma_2^2 t+\Big(\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\gamma_2^2\Big)\int_0^t d\xi\\ &+ \Big(\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}\gamma_2^2\Big)\int_0^t d\xi+\Big(\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Big)\int_0^t d\xi\\ &- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\geq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\frac{1}{2}\gamma_2^2 t+\Big(\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\gamma_2^2\Big)t\\ &+ \Big(\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Big)t+\Big(\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}\gamma_2^2\Big)t\\ &- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\geq \Big(\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}+\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}+\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}+\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\\ &- \frac{1}{2}\gamma_2^2-\gamma_2^2-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)-\frac{1}{2}\gamma_2^2-(\theta+\mu)\Big)t-\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi\\ &+ F(t)\\ &= \Big[\frac{(\mu+2\theta+\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+5\gamma_2^2)-(\theta+\mu)\Big]t\\ &\quad -\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t)\\ &= (\theta+\mu)\left[\frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu)(\beta_2+\mu)}-\frac{\gamma_1^2+5\gamma_2^2}{2(\theta+\mu)}-1\right]t\\ &\quad -\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t).\end{aligned}$$

En remplaçant R_{03}^s *par sa valeur, on a :*

$$\ln s(t) \geq (\theta+\mu)(R_{03}^s-1)t-\lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t).$$

Prenons ici $\lambda=(\mu+\theta)(R_{03}^s-1)$. *Comme* $R_{03}^s>1$ *on a* $\lambda>0$. *Par application du lemme 4.4, on a*

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\theta+\mu)(R_{03}^s-1)}{\dfrac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}},\quad \textit{c'est-à-dire}\quad \lim_{t\to+\infty}\inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2+\mu)(R_{03}^s-1)}{\beta_1+\theta+\gamma_2^2}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. □

6 Exemple numérique et remarques

Dans cette partie, nous allons considérer un petit jeu de données pour lequel, il y a extinction avec le modèle déterministe pourtant il y a persistance pour le modèle stochastique. Considérons le tableau suivant contenant des données lorsqu'une rumeur se propage sur un réseau :

Paramètres	β_1	β_2	θ_1	θ_2	$\theta = \theta_1 - \theta_2$	μ	γ_1	γ_2
Valeurs	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{21}{720}$	$\frac{7}{720}$	$\frac{14}{720}$	$\frac{1}{60}$	0.1	0.48

Dans ce cas, nous obtenons les seuils suivants

R_0^d	R_{01}^s	R_{03}^s
$0,84615$	$20,29424$	$1,40143$

On a pu remarquer pour ce jeu de données qui vérifie toutes les hypothèses du théorème 4.5, que le seuil déterministe R_0^d est inférieur à 1. D'après le théorème 4.3 pour le modèle déterministe, la rumeur s'arrête. Pourtant pour le modèle stochastique, le seuil stochastique R_{03}^s qui détemine la persistance de la rumeur est plus grand que 1, donc d'après le théorème 4.5, il y a persistance en moyenne de la rumeur. Cet exemple montre clair l'intérêt de considérer l'aspect aléatoire dans la modélisation de la propagation de la e-rumeur.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté un nouveau modèle déterministe, puis stochastique d'e-rumeur, nous avons calculé les seuils de persistance et d'extinction de la rumeur. De plus, nous avons comparé les résultats déterministes et stochastiques afin de mettre en évidence l'intérêt de l'utilisation des modèles stochastiques.

Chapitre 5

Dynamique d'un modèle stochastique à saut d'e-rumeur

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons ajouter au modèle précédent un processus de Poisson afin de modéliser l'augmentation brusque du nombre de spreaders, puis comparer ce nouveau modèle au précédent. Pour cela, nous allons d'abord dans une première section formuler le modèle en ajoutant un terme de saut. La deuxième section se consacre à l'étude de l'existence et unicité de solution du modèle. À la troisième section, nous déterminons un seuil d'extinction pour présenter un théorème d'extinction. À la quatrième section, nous déterminons un seuil de persistance et présentons deux résultats sur la persistance de la e-rumeur sur le réseau. Nous comparons les deux modèles stochastiques à la dernière section à travers un exemple.

1 Formulation du modèle stochastique à saut

On considère le système d'équations différentielles stochastiques (4.2) du chapitre précédent qui modélise la propagation d'une rumeur sur un réseau tout en tenant compte des effets, liés aux comportements des utilisateurs ou au réseau lui-même qui influencent la propagation du phénomène. Étant donné qu'on ne connait pas vraiment chaque membre du réseau, car il est divisé en groupe, on considère ses effets comme étant des perturbations aléatoires. Ces dernières très importantes dans la dynamique de propagation de la rumeur sont modélisées à l'aide d'un bruit environnemental.

Cependant, lors de la propagation d'une rumeur, il peut y avoir à un moment donné un grand nombre d'utilisateurs qui propagent la rumeur et cela brusquement. De ce fait, il est important d'ajouter au modèle précédent un terme de choc, comme on fait souvent en biologie. Inspiré par de nombreux travaux de propagation d'épidémies, comme [36, 52] par exemple, on modifie (4.2) de la façon suivante :

$$\begin{cases} di(t) = (\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t))dt - \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) \\ \qquad\qquad - \int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt,du), \\ ds(t) = (\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t))dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 r(t)s(t)dB_2(t) \\ \qquad\qquad + \int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt,du), \\ dr(t) = (\beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t))dt - \gamma_2 r(t)s(t)dB_2(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $i(t^-)$, $s(t^-)$ respectivement la limite à gauche de $i(.)$ et $s(.)$ en t ; $\tilde{N}(dt,du) = N(dt,du) - \lambda(du)dt$, où N est un processus de poisson, λ la mesure caractéristique de N sur un sous-ensemble mesurable Z de $(0,+\infty)$ avec $\lambda(Z) < +\infty$; $C(u) : Z \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bornée et continue. On suppose que $B_j(t)(j = 1,2)$ et N sont indépendants. Ce système peut s'écrire sous la forme :

$$dX(t) = F(t,X(t))dt + M(t,X(t))dB(t) + \int_Z h(X(t^-),u)\tilde{N}(dt,du), \tag{5.2}$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} i(t) \\ s(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \quad F(t,X(t)) = \begin{pmatrix} \mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t) \\ \beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)r(t) - \mu s(t) \\ \beta_2 i(t)r(t) + \theta s(t)r(t) - \mu r(t) \end{pmatrix},$$

$$M(t,X(t)) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 i(t)s(t) & 0 & 0 \\ \gamma_1 i(t)s(t) & \gamma_2 r(t)s(t) & 0 \\ 0 & -\gamma_2 r(t)s(t) & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$h(X(t^-),u) = \begin{pmatrix} -C(u)i(t^-)s(t^-) & 0 & 0 \\ 0 & C(u)i(t^-)s(t^-) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Existence et unicité de solution globale positive de (5.1)

Nous avons montré que le mouvement Brownien peut supprimer l'explosion dans le modèle du chapitre 4. Dans cette partie, nous allons montrer que le processus à saut peut supprimer l'explosion et la solution du modèle (5.1) est positive et globale, en utilisant une méthode analytique de Lyapunov mentionnée dans [7, 38] et les techniques de démonstration de [52].

Avant d'établir ce résultat, il est important de faire certaines hypothèses, puis montrer l'existence et l'unicité de solution locale pour (5.2) en utilisant le théorème 2.11 provenant de [41].

Pour tout $m > 0$, nous supposons qu'il existe $L_m > 0$ tel que les coefficients de diffusion du saut vérifient les hypothèses suivantes :

(H_1) : $\displaystyle\int_Z |h(x,u) - h(y,u)|^2 \lambda(du) \leq L_m |x-y|^2$, avec $|x| \vee |y| \leq m$;

(H_2) : $|\ln(1 + C(u)i(t^-))| \leq K_1$, où, K_1 est une constante positive ;

(H_3) : Pour tout $u \in Z$, il existe une constante positive c telle que

$$\int_Z \Big[\ln(1 + C(u)i(t^-))\Big]^2 \lambda(du) < c.$$

2.1 Existence et unicité de solution locale

Théorème 5.1. *Pour toute condition initiale $X(0) = X_0 \in (0,1)^3$, l'équation différentielle stochastique* (5.2) *admet une unique solution locale.*

Démonstration 15. *Dans le chapitre précédent, nous avons montré, dans un premier* *temps, que pour tout* $X(t) = (i(t), s(t), r(t))$,

$$\Big|\Big|F(t, X(t))\Big|\Big| \leq \sqrt{\mu^2 + 3\Big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \mu^2\Big)i^2(t) + \Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2 + \mu^2)\Big)s^2(t) + \Big(2(\beta_2^2 + \theta^2) + \mu^2\Big)r^2(t)},$$

c'est-à-dire

$$\Big|\Big|F(t, X(t))\Big|\Big|^2 \leq \mu^2 + 3\Big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \mu^2\Big)i^2(t) + \Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2 + \mu^2)\Big)s^2(t) + \Big(2(\beta_2^2 + \theta^2) + \mu^2\Big)r^2(t), \tag{5.3}$$

puis

$$\Big|M(t, X(t))\Big| \leq \sqrt{2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)},$$

c'est-à-dire

$$\Big|M(t, X(t))\Big|^2 \leq 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \tag{5.4}$$

En prenant Y *à l'origine dans l'hypothèse* (H_1), *on obtient*

$$\int_Z |h(X, u)|^2 \lambda(du) \leq L_m |X|^2. \tag{5.5}$$

En additionnant (5.3), (5.4) *et* (5.5), *nous avons*

$$\Big|\Big|F(t, X(t))\Big|\Big|^2 + \Big|M(t, X(t))\Big|^2 + \int_Z |h(X, u)|^2 \lambda(du) \leq \mu^2 + 3\Big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \mu^2\Big)i^2(t)$$
$$+\Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2 + \mu^2)\Big)s^2(t) + \Big(2(\beta_2^2 + \theta^2) + \mu^2\Big)r^2(t) + 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + L_m|X(t)|^2,$$

c'est-à-dire

$$\Big|\Big|F(t, X(t))\Big|\Big|^2 + \Big|M(t, X(t))\Big|^2 + \int_Z |h(X, u)|^2 \lambda(du) \leq C_1\Big(1 + ||X(t)||\Big)^2, \tag{5.6}$$

avec

$$C_1 = \Big(3(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \mu^2)\Big) \vee \Big(\beta_1^2 + 2(\theta^2 + \mu^2)\Big) \vee \Big(2(\beta_2^2 + \theta^2) + \mu^2\Big) \vee \Big(\mu + 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Big) \vee L_m.$$

Au chapitre 4, *nous avons montré également que*

$$\Big|\Big|F(t, X(t)) - F(t, Y(t))\Big|\Big| \leq \sqrt{3}\Big[(3\mu^2 + 4(\beta_1^2 + \beta_2^2))(i_2 - i_1)^2$$
$$+(2(\mu^2 + \beta_1^2) + 3\theta^2)(s_2(t) - s_1(t))^2 + (\mu^2 + 3(\theta^2 + \beta_2^2))(r_2(t) - r_1(t))^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\Big|\Big|F(t,X(t))-F(t,Y(t))\Big|\Big|^2 \leq 3\Big[(3\mu^2+4(\beta_1^2+\beta_2^2))(i_2-i_1)^2 \\ +(2(\mu^2+\beta_1^2)+3\theta^2)(s_2(t)-s_1(t))^2+(\mu^2+3(\theta^2+\beta_2^2))(r_2(t)-r_1(t))^2\Big].$$

De plus,

$$\Big|M(t,X_t)-M(t,Y_t)\Big| \leq 2\Big[\gamma_1^2(i_2(t)-i_1(t))^2+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(s_2(t)-s_1(t))^2 \\ +\gamma_2^2(r_2(t)-r_1(t))^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\Big|M(t,X_t)-M(t,Y_t)\Big|^2 \leq 4\Big[\gamma_1^2(i_2(t)-i_1(t))^2+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(s_2(t)-s_1(t))^2+\gamma_2^2(r_2(t)-r_1(t))^2\Big].$$

En utilisant ces deux majorations et l'hypothèse (H_1), *on obtient*

$$\Big|\Big|F(t,X(t))-F(t,Y(t))\Big|\Big|^2+\Big|M(t,X(t))-M(t,Y(t))\Big|^2+\int_Z |h(X,u)-h(Y,u)|^2\lambda(du) \\ \leq 3\Big[(3\mu^2+4(\beta_1^2+\beta_2^2))(i_2-i_1)^2+(2(\mu^2+\beta_1^2)+3\theta^2)(s_2(t)-s_1(t))^2 \\ +(\mu^2+3(\theta^2+\beta_2^2))(r_2(t)-r_1(t))^2\Big]+4\Big[\gamma_1^2(i_2(t)-i_1(t))^2+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(s_2(t)-s_1(t))^2 \\ +\gamma_2^2(r_2(t)-r_1(t))^2\Big]+L_m|X-Y|^2,$$

d'où

$$\Big|\Big|F(t,X(t))-F(t,Y(t))\Big|\Big|^2+\Big|M(t,X(t))-M(t,Y(t))\Big|^2+\int_Z |h(X,u)-h(Y,u)|^2\lambda(du) \\ \leq C_2||X-Y||^2, \tag{5.7}$$

avec

$$C_2=\Big[3\Big((3\mu^2+4(\beta_1^2+\beta_2^2))\vee(2(\mu^2+\beta_1^2)+3\theta^2)\vee(\mu^2+3(\theta^2+\beta_2^2))\Big)\Big]\vee\Big[4(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Big]\vee L_m.$$

Les inégalités (5.6) *et* (5.7) *montrent bien que les coefficients du modèle* (5.1) *vérifient les hypothèses du théorème* 2.11 *d'existence et d'unicité de solutions des EDS de Lévy, on peut donc conclure à l'existence et l'unicité de solution pour l'EDS* (5.2). □

2.2 Solution globale positive

Théorème 5.2. *Pour toute condition initiale donnée $X(0) = (i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ de (5.1), il existe une unique solution globale $(i(.), s(.), r(.)) \in (0,1)^3$ pour quelque soit $t \geq 0$ avec la probabilité 1, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}\Big\{(i(t), s(t), r(t)) \in (0,1)^3, \quad \forall\, t \geq 0\Big\} = 1.$$

Démonstration 16. *Nous transformons le système (5.1) en un système de deux équations en remplaçant $r(.)$ par $1 - i(.) - s(.)$:*

$$\begin{cases} di(t) = \Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)(1 - i(t) - s(t)) - \mu i(t)\Big)dt - \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) \\ \qquad\quad - \displaystyle\int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt, du), \\ ds(t) = \Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)(1 - i(t) - s(t)) - \mu s(t)\Big)dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) \\ \qquad\quad + \gamma_2 s(t)(1 - i(t) - s(t))dB_2(t) + \displaystyle\int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt, du). \end{cases} \tag{5.8}$$

À travers le théorème 5.1 on a montré que pour toute condition initiale $(i(0), s(0)) = (i_0, s_0)$ donnée, il existe une unique solution locale $(i(t), s(t))$ de (5.8) pour tout $t \in [0, \tau_e)$ (τ_e étant le temps d'explosion [37]). Il reste à montrer que cette solution est globale et positive. Pour ce faire, nous allons montrer que $\tau_e = +\infty$ p.s. Soit $n_0 > 0$ suffisamment grand tel que $i_0, s_0 \in \left(\frac{1}{n_0}, 1 - \frac{1}{n_0}\right)$. Pour chaque entier $n > n_0$, on définit le temps d'arrêt :

$$\tau_n = \inf\Big\{t \in [0, \tau_e) : (i(t) \wedge s(t)) \leq \frac{1}{n} \text{ ou } (i(t) \vee s(t)) \geq 1 - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Nous fixons $\inf \emptyset = +\infty$ ($\emptyset$ ensemble vide). Il est clair que τ_n est croissante quand $n \to +\infty$. Posons $\tau_{+\infty} = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$, d'où $\tau_{+\infty} \leq \tau_e$ (car $\tau_n \leq \tau_e$) p.s. Si nous arrivons à montrer que $\tau_{+\infty} = +\infty$ p.s. alors $\tau_e = +\infty$ p.s. pour tout $t \geq 0$. Donc la preuve est réduite à montrer que $\tau_{+\infty} = +\infty$ p.s.
Supposons que l'assertion soit fausse, alors il existe deux constantes $T > 0$ et $\epsilon \in (0,1)$ telles que $\mathbb{P}(\tau_{+\infty} \leq T) > \epsilon$ et il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \geq \epsilon, \ \forall\, n \geq n_1. \tag{5.9}$$

On définit un ensemble $D = \Big\{(i, s) \in (0,1)^2 : i + s < 1\Big\}$ puis la fonction $V : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (comme dans [16]) par

$$V(i, s) = \frac{1}{i} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1 - i - s}.$$

En utilisant la formule d'Itô pour les processus Itô-Lévy [41], on a :

$$
\begin{aligned}
& dV(i(t),s(t)) = \\
& \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial i}\Big[\Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)(1-i(t)-s(t)) - \mu i(t)\Big)dt \\
- \quad & \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)\Big] + \frac{\partial V}{\partial s}\Big[\Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)(1-i(t)-s(t)) - \mu s(t)\Big)dt \\
+ \quad & \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 s(t)(1-i(t)-s(t))dB_2(t)\Big] \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(di)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(ds)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial s}dids + \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial s}dsdi\Big] \\
+ \quad & \int_Z \Big[V\Big(i(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-), s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)\Big) - V(i(t^-),s(t^-)) \\
- \quad & \Big(-C(u)i(t^-)s(t^-)\frac{\partial V}{\partial i}(i(t^-),s(t^-)) + C(u)i(t^-)s(t^-)\frac{\partial V}{\partial s}(i(t^-),s(t^-))\Big)\Big]\lambda(du)dt \\
+ \quad & \int_Z \Big[V\Big(i(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-), s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)\Big) - V(i(t^-),s(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,du),
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
& dV(i(t),s(t)) = \\
& \Big(-\frac{1}{i^2(t)} + \frac{1}{(1-i(t)-s(t))^2}\Big)\Big[\Big(\mu - \beta_1 i(t)s(t) - \beta_2 i(t)(1-i(t)-s(t)) - \mu i(t)\Big)dt \\
& -\gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)\Big] + \Big(-\frac{1}{s^2(t)} + \frac{1}{(1-i(t)-s(t))^2}\Big)\Big[\Big(\beta_1 i(t)s(t) - \theta s(t)(1-i(t)-s(t)) \\
& -\mu s(t)\Big)dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 s(t)(1-i(t)-s(t))dB_2(t)\Big] \\
& +\frac{1}{2}\Big[\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)\Big(\frac{2}{i^3(t)} + \frac{2}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big) + \Big(\frac{2}{s^3(t)} + \frac{2}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big)\Big(\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t) \\
& +\gamma_2^2(1-i(t)-s(t))^2 s^2(t)\Big) - \frac{4\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)}{(1-i(t)-s(t))^3}\Big]dt + \int_Z \Big[\frac{1}{i(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-)} \\
& +\frac{1}{s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)} + \frac{1}{1 - i(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-) - s(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-)} \\
& -\frac{1}{i(t^-)} - \frac{1}{s(t^-)} - \frac{1}{1-i(t^-)-s(t^-)} + C(u)i(t^-)s(t^-)\Big(-\frac{1}{i^2(t^-)} + \frac{1}{(1-i(t^-)-s(t^-))^2}\Big) \\
& -C(u)i(t^-)s(t^-)\Big(-\frac{1}{s^2(t^-)} + \frac{1}{(1-i(t^-)-s(t^-))^2}\Big)\Big]\lambda(du)dt + \int_Z \Big[\frac{1}{i(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-)} \\
& +\frac{1}{s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)} + \frac{1}{1 - i(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-) - s(t^-) - C(u)i(t^-)s(t^-)} \\
& -\frac{1}{i(t^-)} - \frac{1}{s(t^-)} - \frac{1}{1-i(t^-)-s(t^-)}\Big]\tilde{N}(dt,du),
\end{aligned}
$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} dV(i(t),s(t)) = BV(i(t),s(t))dt + \gamma_1\Big(\frac{s(t)}{i(t)} - \frac{i(t)}{s(t)}\Big)dB_1(t) + \gamma_2\Big(\frac{s(t)}{1-i(t)-s(t)} \\ -\frac{1-i(t)-s(t)}{s(t)}\Big)dB_2(t) + \int_Z\Big(\frac{1}{i(t^-)-C(u)i(t^-)s(t^-)} \\ +\frac{1}{s(t^-)+C(u)i(t^-)s(t^-)} - \frac{1}{i(t^-)} - \frac{1}{s(t^-)}\Big)\tilde{N}(dt,du), \end{aligned} \tag{5.10}$$

avec

$$\begin{aligned} BV(i,s) &= \Big(\frac{1}{(1-i-s)^2} - \frac{1}{i^2}\Big)\Big(\mu - \beta_1 is - \beta_2 i(1-i-s) - \mu i\Big) \\ &+ \Big(\frac{1}{(1-i-s)^2} - \frac{1}{s^2}\Big)\Big(\beta_1 is - \theta s(1-i-s) - \mu s\Big) + \gamma_1^2 i^2 s^2\Big(\frac{1}{i^3} + \frac{1}{(1-i-s)^3}\Big) \\ &+ \Big(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{(1-i-s)^3}\Big)\Big(\gamma_1^2 i^2 s^2 + \gamma_2^2(1-i-s)^2 s^2\Big) - \frac{2\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i(t)-s(t))^3} \\ &+ \int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)-C(u)i(t^-)s(t^-)} + \frac{1}{s(t^- + C(u)i(t^-)s(t^-)} - \frac{1}{i(t^-)} - \frac{1}{s(t^-)} \\ &- \frac{C(u)i(t^-)s(t^-)}{i^2(t^-)} + \frac{C(u)i(t^-)s(t^-)}{(1-i(t^-)-s(t^-))^2} + \frac{C(u)i(t^-)s(t^-)}{s^2(t^-)} \\ &- \frac{C(u)i(t^-)s(t^-)}{(1-i(t^-)-s(t^-))^2}\Big]\lambda(du). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} BV(i,s) &\leq LV(i,s) + \int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)-C(u)i(t^-)s(t^-)} + \frac{1}{s(t^-)+C(u)i(t^-)s(t^-)} - \frac{1}{i(t^-)} \\ &- \frac{1}{s(t^-)} - \frac{C(u)s(t^-)}{i(t^-)} + \frac{C(u)i(t^-)}{s(t^-)}\Big]\lambda(du), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} LV(i,s) &= \Big(\frac{1}{(1-i-s)^2} - \frac{1}{i^2}\Big)\Big(\mu - \beta_1 is - \beta_2 i(1-i-s) - \mu i\Big) \\ &+ \Big(\frac{1}{(1-i-s)^2} - \frac{1}{s^2}\Big)\Big(\beta_1 is - \theta s(1-i-s) - \mu s\Big) + \gamma_1^2 i^2 s^2\Big(\frac{1}{i^3} + \frac{1}{(1-i-s)^3}\Big) \\ &+ \Big(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{(1-i-s)^3}\Big)\Big(\gamma_1^2 i^2 s^2 + \gamma_2^2(1-i-s)^2 s^2\Big) - \frac{2\gamma_1^2 i^2 s^2}{(1-i(t)-s(t))^3} \end{aligned}$$

la fonction déjà utilisée dans le chapitre 4. *Par conséquent,*

$$\begin{aligned} BV(i,s) \leq LV(i,s) + \int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)}\Big(\frac{1}{1-C(u)s(t^-)} - 1 - C(u)s(t^-)\Big) \\ +\frac{1}{s(t^-)}\Big(\frac{1}{1+C(u)i(t^-)} - 1 + C(u)i(t^-)\Big)\Big]\lambda(du), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
BV(i,s) &\leq LV(i,s)+\int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)}\times\frac{1-(1-C(u)s(t^-))-C(u)s(t^-)(1-C(u)s(t^-))}{1-C(u)s(t^-)}\\
&+\frac{1}{s(t^-)}\times\frac{1-(1+C(u)i(t^-))+C(u)i(t^-)(1+C(u)i(t^-))}{1+C(u)i(t^-)}\Big]\lambda(du)\\
&= LV(i,s)+\int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)}\times\frac{C^2(u)s^2(t^-)}{1-C(u)s(t^-)}+\frac{1}{s(t^-)}\times\frac{C^2(u)i^2(t^-)}{1+C(u)i(t^-)}\Big]\lambda(du)\\
&\leq LV(i,s)+\int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)}\times\frac{C^2(u)}{1-C(u)}+\frac{1}{s(t^-)}\times\frac{C^2(u)i^2(t^-)}{C(u)i(t^-)}\Big]\lambda(du)\\
&\leq LV(i,s)+\int_Z\Big[\frac{1}{i(t^-)}\times\frac{C^2(u)}{1-C(u)}+\frac{1}{s(t^-)}\times C(u)+\frac{1}{1-i(t^-)-s(t^-)}\Big]\lambda(du)\\
&\leq LV(i,s)+\int_Z\Big(\frac{C^2(u)}{1-C(u)}\vee C(u)\vee 1\Big)\lambda(du)V(i(t^-),s(t^-)).
\end{aligned}$$

D'où

$$BV(i(t),s(t))\leq DV(i(t),s(t))+KV(i(t^-),s(t^-)),$$

avec

$$D=\Big(\beta_1+\beta_2+\mu+\gamma_1^2\Big)\vee\Big(\theta+\mu+\gamma_1^2+\gamma_2^2\Big),$$

grâce au chapitre 4 *et*

$$K=\int_Z\Big(\frac{C^2(u)}{1-C(u)}\vee C(u)\vee 1\Big)\lambda(du).$$

En remplaçant la majoration dans (5.10), *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
dV(i(t),s(t)) &\leq (DV(i(t),s(t))+KV(i(t^-),s(t^-)))dt+\gamma_1\Big(\frac{s(t)}{i(t)}-\frac{i(t)}{s(t)}\Big)dB_1(t)\\
&+\gamma_2\Big(\frac{s(t)}{1-i(t)-s(t)}-\frac{1-i(t)-s(t)}{s(t)}\Big)dB_2(t)+\int_Z\Big(\frac{1}{i(t^-)-C(u)i(t^-)s(t^-)}\\
&+\frac{1}{s(t^-)+C(u)i(t^-)s(t^-)}-\frac{1}{i(t^-)}-\frac{1}{s(t^-)}\Big)\tilde{N}(dt,du).
\end{aligned}\tag{5.11}$$

En intégrant (5.11) *entre* 0 *et* $\tau_n\wedge t$*, on a :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_n\wedge t}dV(i(\xi),s(\xi))\\
\leq&\int_0^{\tau_n\wedge t}(DV(i(\xi),s(\xi))+KV(i(\xi^-),s(\xi^-)))d\xi+\int_0^{\tau_n\wedge t}\gamma_1\Big(\frac{s(\xi)}{i(\xi)}-\frac{i(\xi)}{s(\xi)}\Big)dB_1(\xi)\\
+&\int_0^{\tau_n\wedge t}\gamma_2\Big(\frac{s(\xi)}{1-i(\xi)-s(\xi)}-\frac{1-i(\xi)-s(\xi)}{s(\xi)}\Big)dB_2(\xi)+\int_0^{\tau_n\wedge t}\int_Z\Big(\frac{1}{i(\xi^-)-C(u)i(\xi^-)s(\xi^-)}\\
+&\frac{1}{s(\xi^-)+C(u)i(\xi^-)s(\xi^-)}-\frac{1}{i(\xi^-)}-\frac{1}{s(\xi^-)}\Big)\tilde{N}(d\xi,du).
\end{aligned}$$

La fonction V est continue sur D et $(i(.), s(.))$ est continue sur $[0, \tau_n \wedge t]$. Donc V est continue sur $[0, \tau_n \wedge t]$, c'est-à-dire $V(i(\xi^-), s(\xi^-)) = V(i(\xi), s(\xi))$ p.s. pour tout ξ dans $[0, \tau_n \wedge t]$. De ce fait, nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_n \wedge t} dV(i(\xi), s(\xi)) \\
\leq \; & \int_0^{\tau_n \wedge t} (D+K) V(i(\xi), s(\xi)) d\xi + \int_0^{\tau_n \wedge t} \gamma_1 \Big(\frac{s(\xi)}{i(\xi)} - \frac{i(\xi)}{s(\xi)} \Big) dB_1(\xi) \\
+ \; & \int_0^{\tau_n \wedge t} \gamma_2 \Big(\frac{s(\xi)}{1 - i(\xi) - s(\xi)} - \frac{1 - i(\xi) - s(\xi)}{s(\xi)} \Big) dB_2(\xi) + \int_0^{\tau_n \wedge t} \int_Z \Big(\frac{1}{i(\xi^-) - C(u) i(\xi^-) s(\xi^-)} \\
+ \; & \frac{1}{s(\xi^-) + C(u) i(\xi^-) s(\xi^-)} - \frac{1}{i(\xi^-)} - \frac{1}{s(\xi^-)} \Big) \tilde{N}(d\xi, du).
\end{aligned}
$$

En prenant l'espérance des deux membres, on obtient

$$
\begin{aligned}
E\Big[V(i(\tau_n \wedge t), s(\tau_n \wedge t)) \Big] & \leq V(i_0, s_0) + (D+K) E\Big[\int_0^{\tau_n \wedge t} V(i(\xi), s(\xi)) d\xi \Big] \\
& \leq V(i_0, s_0) + (D+K) \int_0^t E\Big[V(i(\tau_n \wedge \xi), s(\tau_n \wedge \xi)) d\xi \Big].
\end{aligned}
$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$
E\Big[V(i(\tau_n \wedge T), s(\tau_n \wedge T)) \Big] \leq V(i_0, s_0) e^{(D+K)T}. \tag{5.12}
$$

Prenons $\Omega_n = \{\tau_n \leq T\}$ pour $n \geq n_1$ et comme pour tout $n \geq n_1$, $\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \geq \epsilon$, on a $\mathbb{P}(\Omega_n) \geq \epsilon$. Pour tout $\omega \in \Omega_n$, il existe au moins l'un des $i(\tau_n, \omega)$, $s(\tau_n, \omega)$ qui soit égal à $1 - \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n}$.

Si $i(\tau_n, \omega) = 1 - \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n}$ alors $V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega)) \geq n$.
Si $s(\tau_n, \omega) = 1 - \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n}$ alors $V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega)) \geq n$.
D'après (5.9) et (5.12), on a :

$$
V(i_0, s_0) e^{(D+K)T} \quad > \quad E[\mathbb{1}_{\Omega_n}(\omega) V(i(\tau_n, \omega), s(\tau_n, \omega)] \geq \epsilon n.
$$

Étant donné que ϵ est fixé dans $(0, 1)$, lorsqu'on fait $n \to \infty$, on a $\infty > V(i_0, s_0, r_0) e^{(D+K)T} = \infty$, ce qui est absurde.

Donc $\tau_\infty = \infty$ p.s., ce qui termine la preuve. $\square$

3 Extinction de la rumeur sur le réseau

Pour simplifier, nous introduisons les notations suivantes :

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \int_Z \Big[C(u)i(t^-) - \ln(1 + C(u)i(t^-))\Big]\lambda(du)$$

et

$$k(t) = \int_0^t \int_Z \ln(1 + C(u)i(\xi^-))\tilde{N}(d\xi, du).$$

Lemme 5.1. *Soit* $(i(.), s(.), r(.))$ *solution de* (5.1) *avec* $X(0) = (i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ *condition initiale donnée. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(t) + s(t) + r(t)}{t} = 0 \;\; p.s.$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(t)}{t} = 0, \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{t} = 0 \;\; et \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{r(t)}{t} = 0 \;\; p.s.$$

Démonstration 17. *La somme des équations différentielles étant la même que dans le modèle stochastique sans saut, donc la démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme* 4.1. □

Lemme 5.2. *Soit* $(i(.), s(.), r(.))$ *solution de* (5.1) *avec* $X(0) = (i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ *condition initiale. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi)}{t} = 0, \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi)}{t} = 0, \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi)}{t} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi)}{t} = 0 \;\; et \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi)}{t} = 0.$$

Démonstration 18. *Vu qu'en ajoutant le saut, le système d'équation modélise toujours la dynamique de propagation d'une rumeur sur un réseau de taille constante, donc la démonstration de ce lemme est similaire à celle du lemme* 4.2. □

Soit

$$R_{01}^J = \frac{(\mu + 2(\beta_2 + \theta))(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{(\beta_2 + \mu)(\theta + \mu + \sigma_2)} + \frac{(\theta + \gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta + \mu + \sigma_2)},$$

qu'on utilisera comme seuil dans la suite pour l'extinction et la persistance du modèle stochastique à saut. La démonstration du théorème suivant justifie le choix de ce seuil.

Théorème 5.3. *Soit $(i(.), s(.), r(.))$ solution de (5.1) avec $X(0) = (i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ condition initiale. Si $R_{01}^J \leq 1$ alors*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln s(t)}{t} \leq (\mu + \theta)(R_{01}^J - 1) < 0 \quad p.s.,$$

ce qui signifie que $s(t)$ tend exponentiellement vers zéro presque surement, c'est-à-dire que la rumeur s'arrête à probabilité 1.

Démonstration 19. *Pour faciliter les calculs, on utilise dans tout le reste du document le modèle suivant obtenu remplaçant $r(.)$ par $1 - i(.) - s(.)$ dans (5.1) :*

$$\begin{cases} di(t) = [\mu - (\beta_1 - \beta_2)i(t)s(t) + \beta_2 i^2(t) - (\beta_2 + \mu)i(t)]dt - \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) \\ \qquad\quad -\displaystyle\int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt, du), \\ ds(t) = [(\beta_1 + \theta)i(t)s(t) + \theta s^2(t) - (\theta + \mu)s(t)]dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t) + \gamma_2 s(t)dB_2(t) \\ \qquad\quad -\gamma_2 i(t)s(t)dB_2(t) - \gamma_2 s^2(t)dB_2(t) + \displaystyle\int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt, du). \end{cases} \tag{5.13}$$

En intégrant entre 0 et t les deux EDS de (5.13), on a :

$$\begin{aligned} i(t) - i_0 &= \mu t - (\beta_1 - \beta_2)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \beta_2 \int_0^t i^2(\xi)d\xi - (\beta_2 + \mu)\int_0^t i(\xi)\xi \\ &- \gamma_1 \int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_1(\xi) - \int_0^t \int_Z C(u)i(\xi^-)s(\xi^-)\tilde{N}(d\xi, du) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s(t) - s_0 &= (\beta_1 + \theta)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \theta \int_0^t s^2(\xi)d\xi - (\theta + \mu)\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_1 \int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_1(\xi) \\ &+ \gamma_2 \int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2 \int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2 \int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi) \\ &+ \int_0^t \int_Z C(u)i(\xi^-)s(\xi^-)\tilde{N}(d\xi, du). \end{aligned}$$

En les additionnant, on obtient :

$$\begin{aligned} i(t) - i_0 + s(t) - s_0 &= \mu t + (\beta_2 + \theta)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \beta_2 \int_0^t i^2(\xi)d\xi + \theta \int_0^t s^2(\xi)d\xi \\ &- (\beta_2 + \mu)\int_0^t i(\xi)d\xi - (\theta + \mu)\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 \int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) \\ &- \gamma_2 \int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2 \int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_0^t i(\xi)d\xi = \frac{\mu}{\beta_2+\mu}t + \frac{\beta_2+\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \frac{\beta_2}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi$$
$$-\frac{\theta+\mu}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \phi(t), \tag{5.14}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -\frac{1}{\beta_2+\mu}\Big[i(t) - i_0 + s(t) - s_0 - \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) + \gamma_2\int_0^t i(\xi)s(\xi)dB_2(\xi)\\ &+ \gamma_2\int_0^t s^2(\xi)dB_2(\xi)\Big].\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô-Lévy ([41]) à la fonction $\ln s(t)$*, on a :*

$$\begin{aligned}d(\ln s(t)) &= \frac{\partial \ln s(t)}{dt}dt + \frac{\partial \ln s(t)}{\partial s}\Big(ds(t) - \int_Z C(u)i(t^-)s(t^-)\tilde{N}(dt,du)\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln s(t)}{\partial s^2}\Big(\gamma_2^2 s^2(t)(1-i(t)-s(t))^2 + \gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)\Big)dt\\ &+ \int_Z\Big[\ln\Big(s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)\Big) - \ln(s(t^-))\\ &- \frac{\partial \ln s(t)}{\partial s}(s(t^-))C(u)i(t^-)s(t^-)\Big]\lambda(du)dt\\ &+ \int_Z\Big[\ln\Big(s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)\Big) - \ln(s(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,du).\end{aligned}$$

En remplaçant $ds(t)$*, on obtient*

$$\begin{aligned}d(\ln s(t)) &= \frac{1}{s(t)}\Big[\Big((\beta_1+\theta)i(t)s(t) + \theta s^2(t) - (\theta+\mu)s(t)\Big)dt + \gamma_1 i(t)s(t)dB_1(t)\\ &+ \gamma_2 s(t)dB_2(t) - \gamma_2 i(t)s(t)dB_2(t) - \gamma_2 s^2(t)dB_2(t)\Big] - \frac{1}{2s^2(t)}\Big(\gamma_1^2 i^2(t)s^2(t)\\ &+ \gamma_2^2 s^2(t) + \gamma_2^2 i^2(t)s^2(t) + \gamma_2^2 s^4(t) - 2\Big(\gamma_2^2 i(t)s^2(t) + \gamma_2^2 s^3(t) + \gamma_2^2 i(t)s^3(t)\Big)\Big)dt\\ &+ \int_Z\Big[\ln(s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-) - \ln(s(t^-)) - \frac{1}{s(t^-)}C(u)i(t^-)s(t^-)\Big]\lambda(du)dt\\ &+ \int_Z\Big[\ln(s(t^-) + C(u)i(t^-)s(t^-)) - \ln(s(t^-))\Big]\tilde{N}(dt,du).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}d(\ln s(t)) &= \Big((\beta_1+\theta+\gamma_2^2)i(t) + (\theta+\gamma_2^2)s(t) - (\theta+\mu) - \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)i^2(t) - \frac{1}{2}\gamma_2^2 s^2(t)\\ &- \gamma_2^2 i(t)s(t) - \sigma_2\Big)dt + \gamma_1 i(t)dB_1(t) + \gamma_2 dB_2(t) - \gamma_2 i(t)dB_2(t) - \gamma_2 s(t)dB_2(t)\\ &+ \int_Z \ln(1 + C(u)i(t^-))\tilde{N}(dt,du).\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 *et* t, *on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\int_0^t i(\xi)d\xi + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi - (\theta+\mu)t - \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi - \gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi - \sigma_2 t + \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi) + \gamma_2 B_2(t) \\
&- \gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) + \int_0^t\int_Z \ln(1+C(u)i(\xi^-))\tilde{N}(d\xi,du) + \ln s_0.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\int_0^t i(\xi)d\xi$ *de l'équation* (5.14) *dans la précédente, on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \Big[\frac{\mu}{\beta_2+\mu}t + \frac{\beta_2+\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \frac{\beta_2}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{\theta+\mu}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \phi(t)\Big](\beta_1+\theta+\gamma_2^2) + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi - (\theta+\mu)t \\
&- \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi - \gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi - \sigma_2 t \\
&+ \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi) + \gamma_2 B_2(t) - \gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) \\
&+ \int_0^t\int_Z \ln(1+C(u)i(\xi^-))\tilde{N}(d\xi,du) + \ln s_0,
\end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu)t - \sigma_2 t + \frac{(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi \\
&+ \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + (\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi - \gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + \psi(t) + k(t) \\
&+ (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

avec

$$\psi(t) = \gamma_1\int_0^t i(\xi)dB_1(\xi) - \gamma_2\int_0^t i(\xi)dB_2(\xi) - \gamma_2\int_0^t s(\xi)dB_2(\xi) + \ln s_0.$$

Or $i, s \in (0,1)$ *donc* $i^2 \leq 1, s^2 \leq 1, is \leq 1$ *p.s. et*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\leq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\sigma_2 t+\frac{(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t+\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t\\
&+ \frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+(\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi\\
&- \frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+\psi(t)+k(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)
\end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\leq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu+\sigma_2)t+\frac{2(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+(\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)\\
&+ \psi(t)+k(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\gamma_2^2 s^2+(\theta+\gamma_2^2)s &= -\frac{1}{2}\Big(\gamma_2^2 s^2-2(\theta+\gamma_2^2)s\Big)=-\frac{1}{2}\Big(\gamma_2^2 s^2-2\gamma_2 s\frac{1}{\gamma_2}(\theta+\gamma_2^2)\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\Big[\Big(\gamma_2 s-\frac{\theta+\gamma_2^2}{\gamma_2}\Big)^2-\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{\gamma_2^2}\Big]\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\gamma_2 s-\frac{\theta+\gamma_2^2}{\gamma_2}\Big)^2+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}\\
&\leq \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\leq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu+\sigma_2)t+\frac{2(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}t\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+k(t)+\psi(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)\\
&\leq \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu+\sigma_2)t+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}t\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+\psi(t)+k(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

En divisant l'équation par t*, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln s(t)}{t} &\leq \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2}-(\theta+\mu+\sigma_2)\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\langle s(t)\rangle+\gamma_2\frac{B_2(t)}{t}+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t}+\frac{k(t)}{t}+\frac{\psi(t)}{t}.
\end{aligned}$$

En mettant $\theta+\mu+\sigma_2$ en facteur, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\ln s(t)}{t} &\leq (\theta+\mu+\sigma_2)\left[\frac{(\mu+2(\beta_1+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)}+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)}-1\right]\\ &- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\langle s(t)\rangle+\gamma_2\frac{B_2(t)}{t}+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t}+\frac{k(t)}{t}+\frac{\psi(t)}{t}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

En remplaçant R_{01}^J par sa valeur, on a

$$\frac{\ln s(t)}{t} \leq (\theta+\mu+\sigma_2)(R_{01}^J-1)+\gamma_2\frac{B_2(t)}{t}+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\frac{\phi(t)}{t}+\frac{k(t)}{t}+\frac{\psi(t)}{t}.$$

Et en prenant la limite quand $t\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=0, \text{ \textit{d'après le lemme 5.2,}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{t}=0, \text{ \textit{d'après les lemmes 5.1 et 5.2}}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{B_2(t)}{t}=0, \text{ \textit{d'après le corollaire} 1.2.}$$

De plus

$$\begin{aligned}\langle k,k\rangle_t &= \int_0^t\int_Z[\ln(1+C(u)i(\xi^-))]^2\lambda(du)d\xi, \text{ \textit{d'après la proposition} 2.4 \textit{de Kunita [32]}}\\ &< \int_0^t c d\xi = ct, \text{ \textit{d'après} } (H_3),\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\langle k,k\rangle_t}{t}<c,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{k(t)}{t}=0, \text{ \textit{d'après le corollaire} 1.2}$$

Comme $R_{01}^J<1$, on a

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{\ln s(t)}{t}\leq(\mu+\theta+\sigma_2)(R_{01}^J-1)<0 \text{ \textit{p.s.}}$$

Par conséquent $\lim_{t\to\infty}s(t)=0$ p.s., ce qui veut dire qu'il y a un regroupement de spreaders dans le groupe des stiflers ou un groupe de spreaders quitte le réseau. Ceci termine la démonstration du théorème 5.3. □

4 Persistance de la rumeur sur le réseau

Dans cette partie, nous allons donner une condition suffisante pour que la rumeur persiste sur le réseau. De ce fait, nous allons calculer un seuil et présenter une définition de la persistance en moyenne qu'on peut trouver dans [16, 34].

Soient

$$R_{02}^J = \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)}, \quad R_{03}^J = \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)}.$$

On les utilisera comme seuils dans la suite pour la persistance du modèle stochastique. Les démonstrations des théorèmes sur la persistance justifieront pourquoi nous avons choisi ces seuils, car ils découlent des calculs.
Les théorèmes de persistance ne font intervenir que des conditions sur R_{02}^J et R_{03}^J mais, à un moment donné, on aura besoin d'une condition sur R_{01}^J. Cela nous contraint donc à trouver une relation entre R_{01}^J et R_{02}^J puis R_{03}^J et R_{01}^J.

Relation entre les seuils : R_{02}^J et R_{01}^J puis R_{03}^J et R_{01}^J.
On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)} \leq \\
& \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} + \frac{2(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} + \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)} \\
= \; & \frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} + \frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)},
\end{aligned}$$

d'où

$$R_{02}^J \leq R_{01}^J. \; \square$$

Si $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \theta$ alors

$$2\beta_2 \geq 2\theta \Rightarrow 2(\beta_2+\theta) \geq 3\theta \Rightarrow \mu + 2(\beta_2+\theta) \geq \mu+\beta_2+3\theta,$$

ce qui entraine

$$\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} \geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)}$$

donc

$$\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} \geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)}+\frac{(\theta+\gamma_2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)} &\geq \frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} \\ &- \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$R_{03}^J \leq R_{01}^J. \square$$

Théorème 5.4. *Soit* $(i(.), s(.), r(.))$ *solution de* (5.1) *avec* $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ *la condition initiale. Si* $R_{02}^J > 1$ *alors*

$$s_- \leq \lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq s^- \ \ p.s.,$$

avec

$$s_- = \frac{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)(R_{02}^J-1)}{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)} \ \ et \ \ s^- = \frac{(\beta_2+\mu)(\mu+\theta+\sigma_2)(R_{01}^J-1)}{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}.$$

Démonstration 20. *En multipliant l'équation* (5.16) *par* t*, on a :*

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\leq (\theta+\mu+\sigma_2)\left[\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu+\sigma_2)(\beta_2+\mu)}+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)}-1\right]t \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}t\langle s(t)\rangle+\gamma_2 B_2(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)+k(t)+\psi(t).\end{aligned}$$

Comme $\langle s(t)\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t s(\xi)d\xi$*, on a*

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\leq (\theta+\mu+\sigma_2)\left[\frac{(\mu+2(\beta_2+\theta))(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\theta+\mu+\sigma_2)(\beta_2+\mu)}+\frac{(\theta+\gamma_2^2)^2}{2\gamma_2^2(\theta+\mu+\sigma_2)}-1\right]t \\ &- \frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{(\beta_2+\mu)}\int_0^t s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)+k(t)+\psi(t),\end{aligned}$$

en remplaçant R_{01}^J *par sa valeur, on obtient*

$$\begin{aligned}\ln s(t) &\leq (\mu+\theta+\sigma_2)(R_{01}^J-1)t-\frac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t) \\ &+ (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)+k(t)+\psi(t).\end{aligned}$$

En prenant $F(t) = \gamma_2 B_2(t)+(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t)+k(t)+\psi(t)$*, on a* $\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{t} = 0$*, d'après les lemmes* 5.1, 5.2 *et corollaire* 1.2.

Puis en posant $\lambda = (\mu+\theta+\sigma_2)(R^J_{01}-1)$ *et* $\lambda_0 = \dfrac{(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)(\theta+\mu)}{\beta_2+\mu} > 0$, *comme* $R^J_{02} < R^J_{01}$ *et* $R^J_{02} > 1$, *on a* $R^J_{01} > 1$, *c'est-à-dire* $\lambda > 0$ *aussi.*
Par application du lemme 4.3,

$$\lim_{t\to\infty}\sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2+\mu)(\mu+\theta+\sigma_2)(R^J_{01}-1)}{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)},$$

ce qui montre la première partie du théorème.

De plus, en utilisant l'équation (5.15), *on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &= \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\sigma_2 t+\frac{(\beta_2+\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi\\
&+ \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t i^2(\xi)d\xi+\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s^2(\xi)d\xi\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+(\theta+\gamma_2^2)\int_0^t s(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t s^2(\xi)d\xi\\
&- \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t i^2(\xi)d\xi-\gamma_2^2\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi+\gamma_2 B_2(t)+k(t)+\psi(t)\\
&+ (\beta_1+\theta+\gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Comme $i,s\in(0,1)$ *donc* $i^2\leq 1$, $s^2\leq 1$, $is\leq 1$ *et* $-i^2\geq -1$, $-s^2\geq -1$, $-is\geq -1$ *p.s. et on a :*

$$\begin{aligned}
\ln s(t) &\geq \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t-(\theta+\mu)t-\sigma_2 t-\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi\\
&- \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\int_0^t d\xi-\frac{1}{2}\gamma_2^2\int_0^t d\xi-\gamma_2^2\int_0^t d\xi+F(t)\\
&= \Big[\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}-\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_2^2+2\gamma_2^2)-(\theta+\mu+\sigma_2)\Big]t\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t)\\
&= (\theta+\mu+\sigma_2)\Big[\frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)}-\frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)}-1\Big]t\\
&- \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t).
\end{aligned}$$

En remplaçant R^J_{02} *par sa valeur, on obtient*

$$\ln s(t)\geq(\theta+\mu+\sigma_2)\left[R^J_{02}-1\right]t-\lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi+F(t),$$

et en prenant $\lambda = (\theta + \mu + \sigma_2)(R^J_{02} - 1)$, comme $R^J_{02} > 1$, on a $\lambda > 0$.
Par application du lemme 4.4,

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2 + \mu)(\theta + \mu + \sigma_2)(R^J_{02} - 1)}{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)},$$

ce qui termine la deuxième partie du théorème. □

Remarque 4. *Dans le cas où $R^J_{02} < 1 < R^J_{01}$, en suivant la preuve précedente, nous avons*

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to+\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq \frac{(\beta_2 + \mu)(\theta + \mu + \sigma_2)(R^J_{02} - 1)}{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)} \quad p.s.,$$

ce qui peut être considéré comme une propagation de la rumeur.

Théorème 5.5. *Soit $(i(.), s(.), r(.))$ solution de (5.1) avec $(i_0, s_0, r_0) \in (0,1)^3$ condition initiale. Si $\beta_2 \geq \theta$, $\theta < \dfrac{\beta + \mu}{2}$, $\gamma_1^2 + \dfrac{\mu - \beta_2}{\beta_2 + \mu}\gamma_2^2 \geq \dfrac{2\beta_2(\beta_1 + \theta)}{\beta_2 + \mu}$, $\gamma_2^2 \geq \dfrac{2\theta(\beta_1 + \theta)}{\beta_2 + \mu - 2\theta}$ et $R^J_{03} > 1$ alors*

$$s_\star \leq \lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \leq \lim_{t\to\infty} \sup\langle s(t)\rangle \leq s^\star \quad p.s.,$$

avec

$$s_\star = \frac{(\beta_2 + \mu)(\theta + \mu + \sigma_2)(R^J_{03} - 1)}{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)} \quad et \quad s^\star = \frac{(\beta_2 + \mu)(\mu + \theta + \sigma_2)(R^J_{01} - 1)}{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)},$$

ce qui signifie qu'il y a presque surement un nombre de propageurs sur le réseau, c'est-à-dire que la rumeur persiste en moyenne avec probabilité 1

Démonstration 21. *La partie droite de l'inégalité se démontre de la même façon que la preuve du Théorème 5.5, car $R^J_{03} > 1$ implique que $R^J_{01} > 1$. Il reste à montrer la partie gauche, à savoir que*

$$\lim_{t\to\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2 + \mu)(\theta + \mu + \sigma_2)(R^J_{03} - 1)}{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}.$$

En utilisant l'équation (5.15) et l'hypothèse $\beta_2 \geq \theta$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln s(t) \;\geq\; & \frac{\mu(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu}t - (\theta + \mu + \sigma_2)t + \Big(\frac{2\theta(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} - \gamma_2^2\Big)\int_0^t i(\xi)s(\xi)d\xi \\
+ \; & \Big(\frac{\beta_2(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Big)\int_0^t i^2(\xi)d\xi + \Big(\frac{\theta(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu} - \frac{1}{2}\gamma_2^2\Big)\int_0^t s^2(\xi)d\xi \\
- \; & \frac{(\theta + \mu)(\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)}{\beta_2 + \mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + \gamma_2 B_2(t) + k(t) + \psi(t) + (\beta_1 + \theta + \gamma_2^2)\phi(t).
\end{aligned}$$

Avec les mêmes hypothèses nous avons démontré dans la preuve du théorème 4.5 du chapitre 4

$$\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} \leq \gamma_2^2, \quad \frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} \leq \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2) \ \ et \ \ \frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} \leq \frac{1}{2}\gamma_2^2.$$

De plus $i, s \in (0,1)$ *donc* $i^2 \leq 1, \ s^2 \leq 1, \ is \leq 1$ *et on a :*

$$\begin{array}{rcl} \ln s(t) & \geq & \frac{\mu(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}t - (\theta+\mu+\sigma_2)t + \Big(\frac{2\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - \gamma_2^2\Big)\int_0^t d\xi \\ & + & \Big(\frac{\beta_2(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\Big)\int_0^t d\xi + \Big(\frac{\theta(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - \frac{1}{2}\gamma_2^2\Big)\int_0^t d\xi \\ & - & \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t), \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} \ln s(t) & \geq & \Big[\frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2} - (\theta+\mu+\sigma_2)\Big]t \\ & - & \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t). \end{array}$$

En mettant $(\theta+\mu+\sigma_2)$ *en facteur, on obtient*

$$\begin{array}{rcl} \ln s(t) & \geq & (\theta+\mu+\sigma_2)\Big[\frac{(\mu+\beta_2+3\theta)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)} - \frac{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}{2(\theta+\mu+\sigma_2)} - 1\Big]t \\ & - & \frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t). \end{array}$$

En remplaçant R_{03}^J *par sa valeur, on a :*

$$\ln s(t) \geq (\theta+\mu+\sigma_2)(R_{03}^J - 1)t - \lambda_0\int_0^t s(\xi)d\xi + F(t).$$

Puis en prenant $\lambda = (\theta+\mu+\sigma_2)(R_{03}^J-1)$*, comme* $R_{03}^J > 1$*, on a* $\lambda > 0$ *et par application du lemme 4.4, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\theta+\mu+\sigma_2)(R_{03}^J-1)}{\frac{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)}{\beta_2+\mu}},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\langle s(t)\rangle \geq \frac{(\beta_2+\mu)(\theta+\mu+\sigma_2)(R_{03}^J-1)}{(\theta+\mu)(\beta_1+\theta+\gamma_2^2)},$$

ce qui termine la preuve. $\square$

5 Exemple numérique et remarques

Dans cette section, nous allons montrer, en utilisant le même petit jeu de données que celui du chapitre 4 et en ajoutant le saut au modèle stochastique que la zone de persistance diminue.

Remarque 5. *En utilisant l'inégalité $x - 1 - \ln x \geq 0$ pour $x > 0$, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \int_Z \Big[C(u)i(t^-) - \ln(1 + C(u)i(t^-))\Big]\lambda(du)\\ &= \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \int_Z \Big[(1 + C(u)i(t^-)) - 1 - \ln(1 + C(u)i(t^-))\Big]\lambda(du)\\ &\geq \frac{1}{2}\gamma_2^2.\end{aligned}$$

Par rapport à cette remarque, nous choisissons σ_2 de telle sorte que son double soit plus grand ou égal à γ_2^2. On prend les valeurs suivantes :

Paramètres	β_1	β_2	θ_1	θ_2	$\theta = \theta_1 - \theta_2$	μ	γ_1	γ_2	σ_2
Valeurs	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{21}{720}$	$\frac{7}{720}$	$\frac{14}{720}$	$\frac{1}{60}$	0.1	0.48	0.1153

Dans ce cas, nous obtenons les seuils suivants :

R_0^d	R_{01}^s	R_{03}^s	R_{01}^J	R_{03}^J
$0,84615$	$20,29424$	$1,40143$	$19,09762$	$1,09508$

Avec ces valeurs, nous obtenons encore persistance en moyenne pour le modèle stochastique (5.1), mais avec un seuil de persistance R_{03}^J plus petit que R_{03}^s obtenu précédemment avec le modèle stochastique du chapitre 4. Cet exemple montre qu'avec le modèle (5.1), on a une zone de persistance plus petite que celle du chapitre 4.

6 Conclusion

Dans ce travail, après avoir présenté un nouveau modèle stochastique en tenant compte de l'augmentation brusque du nombre de spreaders, nous avons calculé de nouveaux seuils de persistance et d'extinction de la rumeur. De plus, nous avons comparé le modèle stochastique du chapitre 4 avec le nouveau (5.1). Dans la suite, nous allons associer un problème de contrôle optimal à ce modèle afin de minimiser la propagation de ce phénomène aléatoire.

Chapitre 6

Contrôlabilité d'un nouveau modèle stochastique d'e-rumeur

Introduction

Ce chapitre est consacré à la caractérisation du contrôle pour le modèle stochastique du chapitre 4 afin de minimiser la propagation d'une rumeur. Pour réaliser cette étude, nous introduisons dans la première section le problème de contrôle optimal stochastique que nous associons au modèle. Puis, dans la section suivante, nous formulons le problème de contrôle. À la troisième section, nous étudions l'existence de contrôle adapté. Dans la dernière, nous caractérisons le contrôle optimal.

1 Introduction du problème de contrôle optimal stochastique

Dans cette partie nous étudierons le problème de contrôle optimal suivant : minimiser la fonction coût

$$J(U(.)) = E\Big[\int_0^T f(t, X_t, U_t)dt\Big],$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} dX(t) = F(t, X(t), U(t))dt + M(t, X(t))dB(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

qui est l'EDS associée au modèle utilisé du chapitre 4 où $X(t)$ est le vecteur composé de $i(t)$, $s(t)$, $r(t)$ représentant respectivement la densité des ignorants, des spreaders qui propagent une rumeur sur le réseau, des stiflers (personnes qui reçoivent la rumeur et la gardent pour elles). Notons $U(.) = (\beta_1(.), \theta_2(.))$ la valeur du vecteur de contrôle ($\beta_1(.)$ étant le taux pour qu'un ignorant devient spreader et $\theta_2(.)$ le taux pour qu'un stifler devient spreader), $B(t)$ un brownien standard et F, M, f des fonctions connues dépendant de t, $i(t)$, $s(t)$, $r(t), U(t)$. Notre objectif est de limiter la propagation de la rumeur en contrôlant le taux pour qu'un ignorant ou un stifler devienne propageur. Il est clair que β_1 (respectivement θ_2) est borné par 0 et une valeur strictement positive $\beta_{1,\max}$ (respectivement 0 et une valeur strictement positive $\theta_{2,\max}$). On pose $\mathbb{U} = [0, \beta_{1,\max}] \times [0, \theta_{2,\max}]$.

2 Enoncé du problème et préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration (famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$), $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. Soit $B(t) = (B_1(t), B_2(t), 0)$ un mouvement Brownien standard (en particulier $B(t)$ est une martingale de $\mathcal{F}_t$) à valeurs réelles. On suppose que

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B(\xi); 0 \leq \xi \leq t\}.$$

Considérons le système d'équations différentielles stochastiques (4.2) du chapitre 4 transformé en ce système contrôlé :

$$\begin{cases} dX_t = F(t, X_t, U_t)dt + M(t, X_t)dB(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

avec

$$F(.,.,.) : [0, T] \times (0, 1)^3 \times \mathbb{U} \longrightarrow (0, 1)^3$$

pour tout $X_t = \begin{pmatrix} i(t) \\ s(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \in (0,1)^3$, $U_t = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{U}$ défini par

$$F(t, X_t, U_t) = \begin{pmatrix} \mu - v_1(t)i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t) \\ v_1(t)i(t)s(t) - \theta_1 s(t)r(t) + v_2(t)s(t)r(t) - \mu s(t) \\ \beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) - v_2(t)s(t)r(t) - \mu r(t) \end{pmatrix},$$

$M(.,.)$ la fonction déjà définie au chapitre 4 et

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{N-1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{U} \subseteq [0,1]^2$, $T \in]0, +\infty[$ est fixé et $\mathcal{M}_3$ est l'ensemble des matrices d'ordre 3. La fonction $U(.)$ est appelée le contrôle représentant l'action ou la décision. À chaque instant le contrôleur est bien informé sur certaines informations du système, comme spécifié par le champs d'informations $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ mais, n'est pas en mesure de dire ce qui va se passer dans le futur par rapport à l'incertitude du système. En termes mathématiques, cette restriction à la non-anticipation peut être représentée par $U(.)$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté.

Définition 6.1. *Un contrôle admissible $U(.)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $\mathbb{U}$ tel que*

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\Big[|U(t)|^m\Big] < +\infty, \ \forall m = 1, 2, ...$$

On note par $\mathbb{U}_{ad}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Définition 6.2. *Le problème suivant*

$$J(\overline{u}(.)) = \inf_{u\in\mathbb{U}_{ad}} J(u(.))$$

est fini si la partie de droite est finie.

On note par $L^p_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des processus $X(.)$ réels $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptés tel que $E\Big[\displaystyle\int_0^T |X(t)|^p dt\Big] < \infty$.

Soit $S(t) : [0,T] \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^3}$ une multifonction donnée. Les contraintes d'état peuvent être données par

$$X_t \in S(t), \ \ \forall \ t \in [0,T], \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{6.2}$$

Nous introduisons la fonction coût suivante :

$$J(U(.)) = E\Big[\int_0^T f(t, X_t, U_t)dt\Big], \tag{6.3}$$

avec

$$f(t, X_t, U_t) : [0, T] \times (0, 1)^3 \times \mathbb{U} \longrightarrow (0, 1)$$

définie par

$$f(t, X_t, U_t) = v_1^2(t)i(t)s(t) + v_2^2(t)s(t)r(t).$$

Notre problème est de trouver le vecteur contrôle $U^\star$ qui minimise la fonction coût (6.3) :

$$J(U^\star(.)) = \inf_{U \in \mathbb{U}_{\mathrm{ad}}} J(U(.)). \tag{6.4}$$

Étant donnée

i) $U(.) \in \mathbb{U}_{\mathrm{ad}}$;

ii) (6.1) admet une solution unique d'après le chapitre 4;

iii) Les contraintes vérifient (6.2);

iv) $f(., X(.), U(.)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; (0, 1))$, car

$$f(t, X_t, U_t) = v_1^2(t)i(t)s(t) + v_2^2(t)s(t)r(t) < \infty, \text{ puisque, } v_1, v_2, i, s \in (0, 1),$$

donc

$$\int_0^T |v_1^2(t)i(t)s(t) + v_2^2(t)s(t)r(t)|dt < \infty,$$

c'est-à-dire

$$E\Big[\int_0^T |v_1^2(t)i(t)s(t) + v_2^2(t)s(t)r(t)|dt\Big] < \infty.$$

En se référant à la définition 3.1, on peut dire que (6.4) est une formulation forte.

3 Existence du contrôle optimal adapté aux états de la rumeur

Théorème 6.1. *Soit* $X(0) \in (0, 1)^3$ *tel qu'il existe un contrôle* $U(.)$ *satisfaisant* (6.1). *Si le problème* (6.4) *est fini, alors il existe un contrôle optimal* $U^\star$ *sur* $[0, T]$ *tel que la trajectoire associée* $X_{U^\star}$ *satisfasse* (6.1) *et minimise le coût* $J(.)$ *défini par* (6.3).

Démonstration 22. *Il est clair que l'ensemble* $\mathbb{U} \subseteq [0,1]^2$ *est convexe et compact. Et la fonction* f *est convexe car*

$$D_f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial v_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2i(t)s(t) & 0 \\ 0 & 2s(t)r(t) \end{vmatrix} = 4i(t)s^2(t)r(t) > 0$$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v_1^2} = 2i(t)s(t) > 0$ *car* $i, s \in (0,1)$. *De plus, pour tout* $U \in \mathbb{U}_{ad}$, $\sup_{0 \le t \le T} E|U(t)|^m < +\infty$ *pour tout* $m = 1, 2, ...,$ *c'est-à-dire* $J(U(.))$ *est fini, donc le problème* (6.4) *est fini. D'après le théorème* 3.1 *sur l'existence de contrôle optimal, on a le résultat.* □

4 Caractérisation du contrôle optimal pour la e-rumeur

Pour pouvoir caractériser le contrôle qui minimise la fonction coût (6.3), on utilisera le principe du maximum stochastique (pour plus de détails, voir [1], théorème 1, [9], [50] et [51] théorème 3.2, p. 118).

Théorème 6.2. *Soit* $U^\star$ *un vecteur contrôle, solution du problème de contrôle optimal* (6.4). *Il existe deux applications* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$*-adaptées* $p(.) = (p_i(.), p_s(.), p_r(.)) : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *et* $q(.) = (q_i(.), q_s(.), q_r(.)) : [0,T] \to \mathcal{M}_3((0,1))$ *telles que* $U^\star = \Big(\dfrac{p_s - p_i}{2}, \dfrac{p_s - p_r}{2}\Big)$.

Démonstration 23. *À travers le théorème* 6.1, *nous avons montré que le problème de contrôle* (6.4) *admet un contrôle optimal. Si* $U(.) = (v_1(.), v_2(.)) \in \mathbb{U}_{ad}$ *est le contrôle optimal sur* $[0,T]$ *et* X_U *la trajectoire associée, solution de l'équation* (6.1), *alors, par application du principe du maximum stochastique, il existe deux applications* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$*-adaptées* $p(.) = (p_i(.), p_s(.), p_r(.)) : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *et* $q(.) = (q_i(.), q_s(.), q_r(.)) : [0,T] \to \mathcal{M}_3((0,1))$ *absolument continues appelées vecteurs adjoints. Ces derniers vérifient, pour tout* $t \in [0,T]$, *les équations adjointes du premier ordre ci-dessous. Et dans ce cas, puisque la fonction matricielle* $M(t, X_t)$ *ne dépend pas du vecteur contrôle, nous n'avons pas besoin d'introduire d'équations ajointes de second ordre. C'est-à-dire, l'hypothèse sur la différentielle d'ordre deux des fonctions* F, M *et* f *par rapport à* x *n'est donc pas nécessaire. Pour mieux comprendre et formuler l'équation adjointe du premier ordre, voir [9] (relation* 3.8 *page* 21*), [42] et [51] (exemple* 3.1 *page* 117*). On écrit*

$$dp(t) = -\frac{\partial H}{\partial X}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r)dt + q(t)dB(t),$$

d'où

$$\begin{cases} dp_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial i}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r)dt + q_i(t)dB(t), \\ dp_s(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial s}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r)dt + q_s(t)dB(t), \\ dp_r(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial r}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r)dt + q_r(t)dB(t), \\ p_i(T) = p_s(T) = p_r(T) = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

avec

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial i}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) = -p_i\Big[v_1 s(t) + \beta_2 r(t) + \mu\Big] + v_1 p_s s(t) + \beta_2 p_r r(t) - v_1^2 s(t); \\ \dfrac{\partial H}{\partial s}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) = -v_1 p_i i(t) + p_s\Big[v_1 i(t) - v_2(t) r(t) - \mu\Big] + p_r v_2(t) r(t) - v_1^2 i(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -v_2^2(t) r(t); \\ \dfrac{\partial H}{\partial r}(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) = -\beta_2 p_i i(t) - p_s v_2(t) s(t) + p_r\Big[\beta_2 i(t) + v_2(t) s(t) - \mu\Big] - v_2^2(t) s(t), \end{cases}$$

q_i étant la première ligne de la matrice q, q_s la deuxième ligne de la matrice q et q_r la troisième ligne de la matrice q car, d'après [5], l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) = p(t).F(t, X_t, U_t) - f(t, X_t, U_t),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) &= p_i\Big[\mu - v_1(t) i(t) s(t) - \beta_2 i(t) r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[v_1(t) i(t) s(t) \\ &- \theta_1 s(t) r(t) + v_2(t) s(t) r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t) r(t) + \theta_1 s(t) r(t) \\ &- v_2(t) s(t) r(t) - \mu r(t)\Big] - v_1^2(t) i(t) s(t) - v_2^2(t) s(t) r(t). \end{aligned}$$

Ce qui donne le système adjoint suivant :

$$\begin{cases} dp_i(t) = \Big[p_i(v_1 s(t) + \beta_2 r(t) + \mu) - v_1 p_s s(t) - \beta_2 p_r r(t) + v_1^2 s(t)\Big]dt + q_i(t)dB(t), \\ dp_s(t) = \Big[v_1 p_i i(t) - p_s(v_1 i(t) - v_2(t) r(t) - \mu) - p_r v_2(t) r(t) + v_1^2 i(t) + v_2^2(t) r(t)\Big]dt \\ \qquad\qquad +q_s(t)dB(t), \\ dp_r(t) = \Big[\beta_2 p_i i(t) + p_s v_2(t) s(t) - p_r(\beta_2 i(t) + v_2(t) s(t) - \mu) + v_2^2(t) s(t)\Big]dt + q_r(t)dB(t), \\ p_i(T) = p_s(T) = p_r(T) = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Remarque 6. *La variable adjointe $q(t)$ n'intervient que dans le système adjoint car la diffusion ne dépend pas du contrôle choisi en reférence au 1^{er} cas de la page 69 chapitre 3. Elle pourrait intervenir comme par exemple dans l'Hamiltonien (3.17) et de celui de [51]*

$$H(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) = p(t).F(t, X_t, U_t) + tr\Big[q^T(t).M(t, X_t)\Big] - f(t, X_t, U_t).$$

Mais par rapport au contrôle choisi le terme $tr\Big[q^T(t).M(t, X_t)\Big]$ ne sert à rien, car $M(t, X_t)$ ne dépend pas de U_t.

La théorie du contrôle optimal nous permet d'obtenir le contrôle $U^\star(.) = (v_1^\star(.), v_2^\star(.)) \in \mathbb{U}_{ad}$ satisfaisant la condition suffisante d'optimalité qui vérifie, presque partout sur $[0, T]$,

$$H(t, X_t, U^\star(t), p_i(t), p_s(t), p_r(t)) = \max_{U\in[0,\beta_{1,\max}]\times[0,\theta_{2,\max}]} H(t, X_t, U, p_i(t), p_s(t), p_r(t)), \;\; \mathbb{P}-p.s.$$

Cela revient à trouver les maxima aux points

$$U(.) = (0, v_2(.));\; (1, v_2(.));\; (v_1(.), 0);\; (v_1(.), 1);\; (v_1(.);\; v_2(.));\;\; v_1(.), v_2(.) \in]0, 1[,$$

et ensuite les comparer pour trouver le maximum global.

Recherche des maxima locaux

Pour le point $(0, v_2(.))$:

$$\begin{aligned} H(t, X_t, U_t, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= p_i(t)\Big[\mu - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] - p_s(t)\Big[-\theta_1 s(t)r(t) \\ &+ v_2(t)s(t)r(t) + \mu s(t)\Big] + p_r(t)\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) \\ &- v_2(t)s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - v_2^2(t)s(t)r(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v_2}(t, X_t, U_t, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= p_s(t)s(t)r(t) - p_r(t)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t) \\ 0 &= (p_s - p_r)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t) \\ v_2 &= \frac{p_s - p_r}{2}, \end{aligned}$$

d'où $U_t^1 = (0, \dfrac{p_s - p_r}{2})$ est un maximum local de H.

Pour le point $(1, v_2(.))$ **:**

$$\begin{aligned} H(t,X_t,U_t,p_i,p_s,p_r) &= p_i\Big[\mu - i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[i(t)s(t) - \theta_1 s(t)r(t) \\ &+ v_2(t)s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) \\ &- v_2(t)s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - i(t)s(t) - v_2^2(t)s(t)r(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v_2}(t,X_t,U_t,p_i(t),p_s(t),p_r(t)) &= p_s(t)s(t)r(t) - p_r(t)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t) \\ 0 &= (p_s - p_r)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t) \\ v_2 &= \frac{p_s - p_r}{2}, \end{aligned}$$

d'où $U_t^2 = (1, \frac{p_s - p_r}{2})$ *est un maximum local de* H.

Pour le point $(v_1(.), 0)$ **:**

$$\begin{aligned} H(t,X_t,U_t,p_i,p_s,p_r) &= p_i\Big[\mu - v_1(t)i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[v_1(t)i(t)s(t) \\ &- \theta_1 s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] \\ &- v_1^2(t)i(t)s(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v_1}(t,X_t,U_t,p_i(t),p_s(t),p_r(t)) &= -p_i i(t)s(t) + p_s i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t) \\ 0 &= (p_s - p_i)i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t) \\ v_1 &= \frac{p_s - p_i}{2}, \end{aligned}$$

d'où $U_t^3 = (\frac{p_s - p_i}{2}, 0)$ *est un maximum local de* H.

Pour le point $(v_1(.), 1)$ **:**

$$\begin{aligned} H(t,X_t,U_t,p_i,p_s,p_r) &= P_i\Big[\mu - v_1(t)i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[v_1(t)i(t)s(t) \\ &- \theta_1 s(t)r(t) + s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) \\ &- s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - v_1^2(t)i(t)s(t) - s(t)r(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_1}(t, X_t, U_t, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= -p_i i(t)s(t) + p_s i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t)\\ 0 &= (p_s - p_i)i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t)\\ v_1 &= \frac{p_s - p_i}{2},\end{aligned}$$

d'où $U_t^4 = (\frac{p_s - p_i}{2}, 1)$ *est un maximum local de* H.

Pour le point $(v_1(.);\ v_2(.))$ **:**

$$\begin{aligned}H(t, X_t, U_t, p_i, p_s, p_r) &= p_i\Big[\mu - v_1(t)i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[v_1(t)i(t)s(t)\\ &- \theta_1 s(t)r(t) + v_2(t)s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t)\\ &- v_2(t)s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - v_1^2(t)i(t)s(t) - v_2^2(t)s(t)r(t)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_1}(t, X_t, U_t, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= -p_i i(t)s(t) + p_s i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t)\\ 0 &= (p_s - p_i)i(t)s(t) - 2v_1(t)i(t)s(t)\\ v_1 &= \frac{p_s - p_i}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_2}(t, X_t, U_t, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= p_s(t)s(t)r(t) - p_r(t)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t)\\ 0 &= (p_s - p_r)s(t)r(t) - 2v_2(t)s(t)r(t)\\ v_2 &= \frac{p_s - p_r}{2},\end{aligned}$$

d'où $U_t^5 = (\frac{p_s - p_i}{2}, \frac{p_s - p_r}{2})$ *est un maximum local de* H.

Recherche du maximum global *Nous cherchons le maximum global en comparant tous les maxima. Pour cela, calculons* $H(t, X_t, U_t^5, p_i, p_s, p_r)$

$$\begin{aligned}H(t, X_t, U_t^5, p_i, p_s, p_r) &= p_i\Big[\mu - \frac{p_s - p_i}{2}i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[\frac{p_s - p_i}{2}i(t)s(t)\\ &-\theta_1 s(t)r(t) + \frac{p_s - p_r}{2}s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t)\\ &-\frac{p_s - p_r}{2}s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - \frac{(p_s - p_i)^2}{4}i(t)s(t) - \frac{(p_s - p_r)^2}{4}s(t)r(t).\end{aligned} \tag{6.7}$$

Trouvons une relation entre $H(t, X_t, U_t^5, p_i, p_s, p_r)$ *et* $H(t, X_t, U_t^1, p_i, p_s, p_r)$.
Étant donné que

$$\begin{aligned}
H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) &= p_i(t)\Big[\mu - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s(t)\Big[- \theta_1 s(t)r(t) \\
&+ \frac{p_s - p_r}{2} s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r(t)\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) \\
&- \frac{p_s - p_r}{2} s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - \frac{(p_s - p_r)^2}{4} s(t)r(t),
\end{aligned}$$

d'après l'équation (6.7), *on a*

$$\begin{aligned}
H(t, X_t, U_t^5, p_i, p_s, p_r) &= H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) - p_i \frac{p_s - p_i}{2} i(t)s(t) \\
&+ p_s \frac{p_s - p_i}{2} i(t)s(t) - \frac{(p_s - p_i)^2}{4} i(t)s(t) \\
&= H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) + \Big[\frac{(p_s - p_i)(p_s - p_i)}{2} \\
&- \frac{(p_s - p_i)^2}{4}\Big] i(t)s(t) \\
&= H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) + \Big[\frac{(p_s - p_i)^2}{2} \\
&- \frac{(p_s - p_i)^2}{4}\Big] i(t)s(t) \\
&= H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) + \frac{(p_s - p_i)^2}{4} i(t)s(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$H(t, X_t, U_t^1, p_i(t), p_s(t), p_r(t)) \leq H(t, X_t, U_t^5, p_i, p_s, p_r). \tag{6.8}$$

Trouvons une relation entre $H(t, X_t, U_t^5, p_i(t), p_s(t), p_r(t))$ *et* $H(t, X_t, U_t^2, p_i, p_s, p_r)$.
Étant donné que

$$\begin{aligned}
H(t, X_t, U_t^2, p_i, p_s, p_r) &= p_i\Big[\mu - i(t)s(t) - \beta_2 i(t)r(t) - \mu i(t)\Big] + p_s\Big[i(t)s(t) - \theta_1 s(t)r(t) \\
&+ \frac{p_s - p_r}{2} s(t)r(t) - \mu s(t)\Big] + p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t) + \theta_1 s(t)r(t) \\
&- \frac{p_s - p_r}{2} s(t)r(t) - \mu r(t)\Big] - i(t)s(t) - \frac{(p_s - p_r)^2}{4} s(t)r(t).
\end{aligned}$$

En utilisant (6.7)*, on a*

$$H(t,X_t,U_t^2,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)=p_i\Big[\mu-i(t)s(t)-\beta_2 i(t)r(t)-\mu i(t)\Big]$$
$$+p_s\Big[i(t)s(t)-\theta_1 s(t)r(t)+\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]+p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)+\theta_1 s(t)r(t)$$
$$-\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]-i(t)s(t)-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t)-p_i\Big[\mu-\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)$$
$$-\beta_2 i(t)r(t)-\mu i(t)\Big]-p_s\Big[\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\theta_1 s(t)r(t)+\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]$$
$$-p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)+\theta_1 s(t)r(t)-\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]+\frac{(p_s-p_i)^2}{4}i(t)s(t)$$
$$+\frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t)$$

ce qui entraine que

$$\begin{aligned}
H(t,X_t,U_t^2,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r) &= -p_i i(t)s(t)+p_s i(t)s(t)-i(t)s(t)\\
&\quad +p_i\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-p_s\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)+\frac{(p_s-p_i)^2}{4}i(t)s(t)\\
&= -\Big[1+p_i-p_s-p_i\frac{p_s-p_i}{2}+p_s\frac{p_s-p_i}{2}-\frac{(p_s-p_i)^2}{4}\Big]i(t)s(t)\\
&= -\Big[1-(p_s-p_i)+\frac{(p_s-p_i)(p_s-p_i)}{2}-\frac{(p_s-p_i)^2}{4}\Big]i(t)s(t)\\
&= -\Big[1-(p_s-p_i)+\frac{(p_s-p_i)^2}{2}-\frac{(p_s-p_i)^2}{4}\Big]i(t)s(t)\\
&= -\Big[1-(p_s-p_i)+\frac{(p_s-p_i)^2}{4}\Big]i(t)s(t)\\
&= -\frac{1}{4}\Big[4-4(p_s-p_i)+(p_s-p_i)^2\Big]i(t)s(t)=-\frac{1}{4}\Big(2-(p_s-p_i)\Big)^2 i(t)s(t),
\end{aligned}$$

donc

$$H(t,X_t,U_t^2,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)=-\frac{1}{4}\Big(2-p_s+p_i\Big)^2 i(t)s(t)$$

d'où

$$H(t,X_t,U_t^2,p_i,p_s,p_r)\leq H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r) \tag{6.9}$$

Trouvons une relation entre $H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)$ *et* $H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)$*.*
Étant donné que

$$\begin{aligned}
H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r) &= p_i\Big[\mu-\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\beta_2 i(t)r(t)-\mu i(t)\Big]+p_s\Big[\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)\\
&- \theta_1 s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]+p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)+\theta_1 s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]\\
&- \frac{(p_s-p_i)^2}{4}i(t)s(t),
\end{aligned}$$

d'après l'équation (6.7)*, on écrit*

$$\begin{aligned}
H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r) &= H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)+p_s\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-p_r\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)\\
&- \frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t)\\
&= H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)+\Big[\frac{(p_s-p_r)(p_s-p_r)}{2}-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big]s(t)r(t)\\
&= H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)+\Big[\frac{(p_s-p_r)^2}{2}-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big]s(t)r(t)\\
&= H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)+\frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$H(t,X_t,U_t^3,p_i,p_s,p_r)\leq H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r). \tag{6.10}$$

Trouvons une relation entre $H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)$ *et* $H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r)$.
Étant donné que

$$\begin{aligned}
H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r) &= p_i\Big[\mu-\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\beta_2 i(t)r(t)-\mu i(t)\Big]+p_s\Big[\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)\\
&- \theta_1 s(t)r(t)+s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]+p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)+\theta_1 s(t)r(t)\\
&- s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]-\frac{(P_s-P_i)^2}{4}i(t)s(t)-s(t)r(t).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (6.7)*, on a :*

$$\begin{aligned}
&H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)=p_i\Big[\mu-\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\beta_2 i(t)r(t)\\
&-\mu i(t)\Big]+p_s\Big[\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\theta_1 s(t)r(t)+s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]+p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)+\theta_1 s(t)r(t)\\
&-s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]-\frac{(P_s-P_i)^2}{4}i(t)s(t)-s(t)r(t)-p_i\Big[\mu-\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\beta_2 i(t)r(t)\\
&-\mu i(t)\Big]-p_s\Big[\frac{p_s-p_i}{2}i(t)s(t)-\theta_1 s(t)r(t)-\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu s(t)\Big]-p_r\Big[\beta_2 i(t)r(t)\\
&+\theta_1 s(t)r(t)-\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-\mu r(t)\Big]+\frac{(p_s-p_i)^2}{4}i(t)s(t)+\frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t)
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r) &= p_s s(t)r(t)-p_r s(t)r(t)-s(t)r(t)\\
&\quad +p_r\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)-p_s\frac{p_s-p_r}{2}s(t)r(t)+\frac{(p_s-p_r)^2}{4}s(t)r(t)\\
&= -\Big(1+p_r-p_s+p_s\frac{p_s-p_r}{2}-p_r\frac{p_s-p_r}{2}-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big)s(t)r(t)\\
&= -\Big(1+p_r-p_s+\frac{(p_s-p_r)(p_s-p_r)}{2}-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big)s(t)r(t)\\
&= -\Big(1+p_r-p_s+\frac{(p_s-p_r)^2}{2}-\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big)s(t)r(t)\\
&= -\Big(1+p_r-p_s+\frac{(p_s-p_r)^2}{4}\Big)s(t)r(t)\\
&= -\frac{1}{4}\Big(4-4(p_s-p_r)+(p_s-p_r)^2\Big)s(t)r(t)=-\frac{1}{4}\Big(2-(p_s-p_r)\Big)^2 s(t)r(t),
\end{aligned}$$

donc

$$H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r)-H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r)=-\frac{1}{4}(2-p_s+p_r)^2 s(t)r(t)$$

d'où

$$H(t,X_t,U_t^4,p_i,p_s,p_r)\leq H(t,X_t,U_t^5,p_i,p_s,p_r). \tag{6.11}$$

Donc d'après (6.8), (6.9), (6.10) *et* (6.11), *le maximum global est* $U_t^5=\Big(\frac{p_s-p_i}{2},\frac{p_s-p_r}{2}\Big)$.
□

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré que le modèle est contrôlable en choisissant cette fonction coût, puis nous arrivons à caractériser le contrôle qui nous permet de minimiser la propagation de la rumeur.
En perspective, nous aimerions contrôler les paramètres dépendant aussi de la partie diffusion, afin de minimiser la propagation du phénomène.

Conclusion et perspectives

Cette thèse a été l'occasion de travailler sur la théorie du contrôle optimal stochastique, les systèmes dynamiques et leurs applications aux sciences sociales, en particulier la propagation de la rumeur.

On peut noter dans la littérature plusieurs contributions dans le cas déterministe associant la théorie des systèmes dynamiques à la propagation de la rumeur. On peut citer D. J. Daley et D. G. Kendall qui ont appuyé l'étude de Goffman et Newill sur une analogie entre la propagation d'une maladie infectieuse et la diffusion d'informations. Plus récemment, on peut citer S. Bernard et al. qui ont également proposé des modèles en utilisant les modélisations épidémiologiques. Notre contribution va au-delà car elle se place dans le cas stochastique.

Notre première contribution est la transformation en modèle stochastique du modèle déterministe d'e-rumeur de S. Bernard et al. [15]. Le modèle obtenu est composé de quatre compartiments (car le groupe qui représente les stiflers est divisé en deux sous-groupes) et le système associé est donc formé de quatre équations dépendant de plusieurs paramètres ce qui rend les calculs très compliqués. Il est difficile de trouver les états d'équilibres du système d'équations différentielles ordinaires afin de déterminer le seuil déterministe qui servira dans les autres études. Avec ceci il est difficile de vérifier si le modèle était bien défini, analyser la persistance et l'extinction de la rumeur sous certains seuils stochastiques. De ce fait, il était plus judicieux de transformer le modèle en fusionnant les deux groupes de stiflers pour pouvoir s'en sortir. Après le fusionnement des groupes, nous avons remarqué que ce modèle détermiste a été utilisé par Misra [39] pour modéliser la dynamique des votants entre deux partis politiques. Dans cette étude, il a calculé les états d'équilibres du système, puis en prenant pour référence un paramètre du modèle, il a déterminé deux zones d'extinctions et une zone de persistance.

À partir de ces travaux, nous avons déterminé un seuil déterministe qui nous permet de préciser les zones d'extinction et de persistance. La transformation de ce modèle déterministe à trois compartiments en modèle stochastique a été faite par analogie avec les épidémies. Nous avons d'abord montré l'existence et l'unicité d'une solution positive du système d'équations différentielles stochastiques. Nous avons ensuite développé les analyses d'extinction et de persistance. Cela nous a permis de déterminer des seuils en utilisant la formule d'Itô. Tous ces résultats pourraient être resumés dans deux théorèmes, mais nous avons dû ajouter un troisième théorème à travers lequel nous avons diminué la zone de persistance afin de faire une comparaison entre les modèles déterministe et stochastique à l'aide d'un jeu de données.

Après avoir presenté ces résultats, nous pensions entamer la partie contrôle optimal mais, lors d'une première présentation orale, il nous a été conseillé d'utiliser un modèle stochastique à saut. En effet, dans certains phénomènes comme la propagation de la rumeur, il y a souvent des augmentations brusques d'une population donnée. Grâce à cela, nous arrivons à un deuxième modèle stochastique, en ajoutant un processus de Poisson au premier modèle. Les études faites sur le modèle précédent ont été alors faites avec un degré de difficulté supérieur.

Les comparaisons effectuées nous ont permis de voir que l'aspect aléatoire que nous avons introduit à l'aide du modèle stochastique peut influencer la propagation de l'e-rumeur. De plus, les informations que donnent ces nouveaux modèles peuvent nous aider à prendre de bonnes décisions dans la vie courante.

La dernière contribution concerne le contrôle optimal stochastique. Dans cette partie, nous avons contrôlé deux paramètres ayant une influence sur le nombre de propageurs, afin de minimiser la propagation de l'e-rumeur. Une première approche, dans laquelle le coefficient de diffusion ne dépend pas des contrôles choisis a été faite sur le premier modèle stochastique en utilisant la théorie du contrôle optimal stochastique.

Ces travaux nous laissent envisager de nombreuses perspectives. Tout d'abord, il semblerait intéressant de faire quelques simulations en utilisant des données de réseaux sociaux (Facebook, Twitter,...) qui nous permettraient de mieux comparer les différents modèles. Pour ce faire, on pourrait envisager des collaborations avec des informaticiens travaillant sur le sujet. On pourrait par exemple choisir deux paramètres parmi les plus importants par leur influence sur les seuils, et représenter pour chaque modèle, sur le même graphe, la frontière sur laquelle le seuil de diffusion est égale à 1. En réalité, le choix ne serait pas simple vu le nombre de paramètres. Il a été observé que la modification de la structure d'une population a une influence sur la détermination des seuils de diffusion dans le cas d'une épidémie. Il serait intéressant de faire une étude similaire en modifiant la structure du réseau dans le cas de l'e-rumeur et d'en observer l'influence sur la détermination des seuils de diffusion. Des études pourraient également être envisagées dans le cas de réseau d'e-rumeur de taille variable.

Pour ce qui est de la partie contrôle optimal, une seconde approche dans laquelle le coefficient de diffusion dépendrait des contrôles choisis pourrait être envisagée ultérieurement.

Bibliographie

[1] Q. Abushova and C. Aghayevab. Stochastic maximum principle for nonlinear optimal control problem of switching systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259 (2014), 371–376.

[2] R. J. Adler. *The geometry of random fields*. Wiley and Sons, 1981.

[3] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2003.

[4] L. Arnold, W. Horsthemke, J.W. Stucki. The influence of external real and white noise on the Lotka–Volterra model. *J. Biomed,* 21 (1979), 451–471.

[5] K. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi. On the Stochastic Maximum Principle in Optimal Control of Degenerate Diffusions with Lipschitz Coefficients. *Appl Math Optim*, 56 (2007), 364–378.

[6] D. Bakry, R. D. Gill, S. A. Molchanov. *Lectures on probability theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelbeg, 1994.

[7] J. Bao and C. Yuan. Stochastic population dynamics driven by Lévy noise. *J. Math. Anal. Appl.,* 391 (2012), 363–375.

[8] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Math. Appl. 17. Springer, Berlin Heidelberg, New York 1994.

[9] A. Bensoussan. Lectures on stochastic control, part I. *Lect. Notes in Math., Springer, Berlin*, Vol. 972 (1983), 1–62.

[10] A. Bensoussan, J.L. Lions. *Impulse control and quasi-variational Inequalities*. Gauthiers-Villars, Paris, 1984.

[11] S. Bernard, G. Bouza and A. Piétrus. An optimal control approach for e-rumor. *Revista Investigación Operacional,* Vol. 36, No. 2 (2015), 108-114.

[12] S. Bernard, G. Bouza and A. Piétrus. An e-rumour model with control on the spreaders. *Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences,* Vol. 69, No. 11 (2016), 1407-1414.

[13] S. Bernard, T. César and A. Piétrus. Some actions to control e-rumors. *e-Journal of the Caribbean Academy of Sciences,* Vol. 9, No. 1 (2017), 1-8.

[14] S. Bernard, T. César and A. Piétrus. Spreading rumors and external actions, Large-Scale Scientific Computing LSSC 2017. *Lecture Notes in Computer Science, Springer,* Vol. 10665 (2018), 193-200.

[15] S. Bernard, T. César and A. Piétrus. Stability of a new e-rumor model, Control Systems and Mathematical Methods in Economics. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer*, 687 (2018), 377-390.

[16] C. Chen and Y. Kang. Dynamics of stochastic SIS epidemic model with satured incidence. *Abstract and Applied Analysis,* (2014) 723825.

[17] D.J. Daley and D.G. Kendall. Epidemics and rumors. *Nature*, 204 (1964), 11-18.

[18] D.J. Daley and D.G. Kendall. Stochastic rumours. *IMA J. of Applied Mathematics*, 1 (1965), 42-55.

[19] K. Dietz. Epidemics and rumours : a survey. *Journal of the Royal Society A*, Vol. 130, No. 4 (1967), 505-528.

[20] T.C. Gard. *Introduction to stochastic differential equations.* Dekker.

[21] A. Gray, D. Greenhalgh, L. Hu, X. Mao and J. pan. A stochastic differential equation SIS model. *SIAM Journal of Applied Mathematics,* 71, No. 3 (2011), 870-902.

[22] T. Hida. *Brownian motion.* Springer-Verlag, 1980.

[23] T. Hida, H.H. Kuo, J. Potthoff. *Streit L. white noise : An infinite dimensional approach.* Kluwer, 1993.

[24] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, T. Zhang. *Stochastic partial differential equations.* Birkhäuser, 1996.

[25] J. Huang and X. Jin. Preventing rumor spreading on small-world networks. *J. Syst. Sci. Complex* , 24 (2011), 449-456.

[26] J. Jacod, A. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes.* Springer, Berlin Heidelberg, New York 1987.

[27] C. Ji, D. Jiang. Threshold behaviour of a stochastic SIR model. *Applied Mathematical Modelling,* 38 (2014), 5067-5079.

[28] C. Ji, D. Jiang and N. Shi. Multigroup SIR epidemic model with stochastic perturbation. *Physica A,* Vol. 325 (2011), 1747-1762.

[29] C. Ji, D. Jiang, Q. Yang and N. Shi. Dynamics of a multigroup SIR epidemic model with stochastic perturbation. *Automatica,* Vol. 48, No. 1 (2012), 121-131.

[30] F. B. Knight. *Essentials of Brownian motion.* American Math. Soc., 1981.

[31] R. Kovacevic. Stochastic SIS epidemic models-the PDE-Approch. *Research Report,* April, (2015), 2015-09.

[32] H. Kunita. Itô's stochastic calculus : Its surprising power for applications. *Stochastic Processes and their Applications,* 120 (2010), 622–652.

[33] J.F. Le Gall. *Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[34] Q. Liu and Q. Chen. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence. *Applied Mathematics and Computation,* 282 (2016), 155–166

[35] Q. Liu and D. Jiang. The threshold of a stochastic delayed SIR epidemic model with vaccination. *Physica A,* 461 (2016), 140–147.

[36] Q. Liu, D. Jiang, N. Shi and T. Hayat. Dynamics of a stochastic delayed SIR epidemic model with vaccination and double diseases driven by Lévy jumps. *Physica A* , 492 (2018), 2010–2018.

[37] X. Mao. *Stochastic Differential Equations and Applications.* Woodhead Publishing WP, 1997.

[38] X. Mao, G. Marion and E. Renshaw. Environmental noise suppresses explosion in population dynamics, Stochastic Process. *Appl.*, 97 (2002), 95–110.

[39] A. K. Misra. A simple mathematical model for the spread of two political parties. *Nonlinear Analysis : Modelling and control,* Vol. 17, No. 3 (2012), 343-354.

[40] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Application.* Springer-Verlag Heidelberg New York, Fifth edition, Corrected Printing, 2002.

[41] B. Øksendal and A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[42] S. Peng. A General stochastic maximum principle for optimal control problems. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol 28, No. 4 (1990), 966-979.

[43] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations.* 2nd Edition, Springer, Berlin Heidelberg, New York 2003.

[44] A. Rapoport. Spread of information through a population with socio-structural bias I, Assumption of transitivity. *Bull. Math. Biophys.*, 15 (1953), 523-533.

[45] A. Rapoport. Spread of information through a population with socio-structural bias II, Various models with partial transitivity. *Bull. Math. Biophys.*, 15 (1953), 535-546.

[46] A. Rapoport and L.I. Rebhun. On the mathematical theory of rumor spread. *Bull. Math. Biophys.* 14 (1952), 375-383.

[47] E. Renshaw. *Modelling Biological Populations in Space and Time.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[48] Y. A. Rozanov. *Markov random fields.* Springer-Verlag, 1982.

[49] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press, 1999.

[50] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications.* Vuibert, 2008.

[51] J. Yong and X.Y. Zhou. *Stochastic controls : Hamiltonians systems and HJB equations.* Springer, New York, 1999.

[52] X. Zhanga and K. Wanga. Stochastic SIR model with jumps. *Applied Mathematics Letters,* 26 (2013), 867–874.

[53] Y. Zhao, D. Jiang. The threshold of a stochastic SIS epidemic model with vaccination. *Applied Mathematics and Computation,* 243 (2014), 718–727.

[54] Y. Zhou, W. Zhang. Threshold of a stochastic SIR epidemic model with Lévy jumps. *Physica A,* 446 (2016), 204–216.