# THÈSE

*En vue de l'obtention du*

## Doctorat de l'Université des Antilles

**En Mathématiques appliquées**

*Présentée et soutenue par*

**Jasmine CESARS**

*Le 13 décembre 2019*

# Inférence statistique et équations différentielles stochastiques. Application en hydrologie

Devant le jury composé de

| | | | |
|---|---|---|---|
| FOULADIRAD | Mitra | Professeur, Université de Troyes | Rapporteur |
| GOUNO | Evans | MCF HDR, Université de Bretagne-Sud | Rapporteur |
| NUIRO | Silvère Paul | MCF HDR, Université des Antilles | Co-directeur |
| POULLET | Pascal | Professeur, Université des Antilles | Président |
| TREJOS | Javier | Professeur, Université de Costa-Rica | Examinateur |
| VAILLANT | Jean | Professeur, université des Antilles | Directeur |

**Ecole doctorale N°589 :** Milieu Insulaire Tropical à Risques : Protection, Valorisation, Santé et Développement

# Inférence Statistique et Equations Différentielles Stochastiques. Application en hydrologie

*Campus de Fouillole, le 13 Décembre 2019*

# Table des matières

**Introduction** **1**

**1 Eléments sur les processus stochastiques** **5**
1.1 Généralités sur les processus stochastiques . . . . . 5
1.1.1 Martingale et temps d'arrêt . . . . . 6
1.2 Intégrale stochastique et calcul d'itô . . . . . 12
1.2.1 Construction de l'intégrale stochastique . . . . . 13
1.2.2 Intégration par parties . . . . . 16
1.2.3 Théorème de Girsanov . . . . . 16
1.3 Processus de Lévy et lois incrémentales . . . . . 17
1.3.1 Processus de Poisson . . . . . 20
1.3.2 Processus de Wiener . . . . . 22
1.3.3 Processus Gamma . . . . . 22

**2 Equations Différentielles Stochastiques** **23**
2.1 Généralité sur les EDS . . . . . 23
2.2 EDS sans sauts . . . . . 24
2.2.1 Modèle de Black-Scholes . . . . . 24
2.2.2 Modèle de Langevin . . . . . 25
2.2.3 Modèle d'Ornstein-Ulhenbeck . . . . . 25
2.2.4 Modèle de Lotka-Volterra . . . . . 26
2.3 Modèles incluant des sauts . . . . . 27
2.3.1 Modèle de Black-Scholes à sauts . . . . . 27
2.3.2 Modèle de Black-Scholes à sauts et régimes . . . . . 32
2.3.3 Modèle de Langevin à sauts . . . . . 33
2.3.4 Modèle de Lotka-Volterra à sauts . . . . . 37
2.3.5 Présentation d'un modèle à solution non explicite . . . . . 37
2.3.6 EDS dirigée par un mouvement brownien fractionnaire . . . . 40
2.4 Méthodes numériques pour les EDS . . . . . 42

2.5 Programmes écrits dans l'environnement R . . . . . 43
2.5.1 Simulations numériques du modèle Black-Scholes à sauts . . . 43
2.5.2 Simulations numériques du Langevin à sauts . . . . . 44

**3 Inférence statistique sur les modèles à sauts 45**
3.1 Introduction . . . . . 45
3.2 Cas du modèle Black-Scholes à sauts . . . . . 47
3.2.1 Vraisemblance . . . . . 47
3.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance (MV) . . . . . 48
3.2.3 Rapport de vraisemblance . . . . . 49
3.3 Cas du modèle Black-Scholes à sauts et régimes . . . . . 52
3.3.1 Vraisemblance d'échantillon . . . . . 52
3.3.2 Test de rupture de régime . . . . . 54
3.4 Cas du modèle de Langevin à sauts . . . . . 57
3.5 Détection de sauts . . . . . 58

**4 Applications 61**
4.1 Application du modèle Black-Scholes à sauts en hydrologie . . . . . 62
4.2 Application à des données artificielles . . . . . 68

**Conclusions et perspectives 71**

**Annexe A 73**

**Annexe B 75**

# Résumé

*Mots-clés :* Equation différentielle stochastique, processus de Wiener, processus de Poisson, processus d'Itô, processus de Lévy, processus de Lévy fractionnaire ; intégrale stochastique ; Equation Différentielle Stochastique (EDS) dirigée par un Mouvement Brownien (MB), EDS dirigée par un Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) ; méthode de maximum de vraisemblance, inférence statistique.

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont souvent utilisées pour modéliser des phénomènes aléatoires en temps continu. C'est le cas des EDS ayant pour solution des processus dits de diffusion qui servent à décrire des propagations de maladie ou des cours financiers. L'étude des EDS gouvernées par le processus de Wiener (ou mouvement brownien) a connu des avancées significatives ces dernières années mais celle concernant des EDS gouvernées par des processus de Lévy à sauts, en raison de sa complexité, est moins développée. Dans cette thèse, nous nous intéressons à des EDS à sauts, à solution explicite tel que le modèle de Black-Scholes gouverné par un processus de Poisson associé à des sauts stochastiques. Le processus de Langevin à sauts aléatoires est également étudié. Les propriétés distributionnelles de ces modèles sont présentées, en particulier le fait que les solutions directes ou transformées des EDS associées peuvent être des processus à accroissements indépendants. Le lien avec les caractéristiques probabilistes des amplitudes de saut est mis en avant. Dans la pratique, l'observation d'un processus solution de ces EDS ne peut se faire qu'en temps discret alors qu'il s'agit d'un processus en temps continu. Les résultats, que nous avons obtenus concernant les lois de probabilités associées à des observations en temps discret, permettent d'établir des vraisemblances conditionnelles ou non conditionnelles utiles pour l'inférence statistique sur les paramètres du modèle considéré. Ainsi l'étude du logarithme du rapport de vraisemblance est menée dans le cas du modèle de Black-Scholes à sauts et à régimes. Un test de rupture relatif au taux de décroissance est proposé ainsi que des méthodes de simulations numériques des solutions des EDS considérées. Des scripts écrits dans l'environnement de programmation permettent de générer des jeux de données artificielles offrant des possibilités de tester des outils inférentiels développés. Une application en hydrologie est effectuée à partir de données concernant la Guadeloupe et provenant de la banque HYDRO.

# Abstract

Keywords : Stochastic differential equation, Wiener process, Poisson process, Ito process, Levy process, fractional Levy process ; stochastic integral ; Stochastic Differential Equation (SDE) driven by Brownian Motion (BM), SDE governed by a Fractional Brownian Motion (FBM) ; likelihood technique, statistical inference.

Stochastic differential equations (SDE) are often used to model random phenomena in continuous time. This is the case for SDE whose solution are diffusion processes describing propagations of diseases or financial stocks. The study of SDE governed by a Wiener process (or Brownian motion) has made good progress in recent years, but the SDE governed by Levy processes jump are less studied due to their complexity. In this PhD work, we are interested in SDE with jumps, having an explicit solution such as the Black-Scholes model governed by a Poisson process associated with stochastic jumps. The Langevin process with random jumps is also studied. The distributional properties of these models are presented, in particular the fact that the direct or transformed solutions of the associated SDE can be processes with independent increments. The link with the probabilistic characteristics of the jump amplitudes is highlighted. In practice, the observation of a solution process of these SDE can be carried out only in discrete time whereas it is a continuous time process. The results, which we have obtained concerning the laws of probability associated with discrete time observations, allow to establish conditional likelihood useful for statistical inference on the model parameters. Thus, the study of the logarithm of the likelihood ratio is conducted in the case of the Black-Scholes model with jumps and change points. A change point test about the intrinsic rate of decrease is proposed as well as methods of numerical simulations of the SDE solutions. Scripts written in the programming environment allows to generate artificial data sets offering possibilities to test inferential tools. An application in hydrology is carried out from data concerning Guadeloupe and from the HYDRO bank.

# Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse monsieur Jean VAILLANT, professeur à l'Université des Antilles (UA), et mon co-directeur monsieur Silvère P. NUIRO maître de conférences HDR (UA), pour toute leur aide, leurs conseils, leurs encouragements, leurs disponibilités permanentes et surtout de m'avoir stimulée tout au long de ces trois années.

J'exprime ma gratitude à l'égard de messieurs Jacques LAMINIE, Jack MOLINIÉ et Achis CHERY d'avoir évalué l'avancement de ma thèse pendant les deux premières années.

Je voudrais également exprimer mes profondes satisfactions et gratitudes à l'égard de Evans GOUNO, professeur invité à Duke University (USA) et Mitra FOULADIRAD, professeure à l'université de Troyes pour leurs remarques et suggestions sur mon mémoire de doctorat ainsi qu'aux professeurs Pascal POULLET et Javier TRÉJOS, qui me font l'honneur de participer à mon jury de soutenance de thèse.

Je tiens à remercier tous les professeurs et les membres du Laboratoire Mathématiques Informatique et Applications (LAMIA), ainsi que tous les membres du Département de Mathématiques et Informatique (DMI).

J'adresse un remerciement spécial à Monsieur Bérard CENATUS pour son soutien dans mes démarches auprès de différentes institutions. Je profite de cette occasion pour remercier la Fondation Connaissance et Liberté (FOKAL) de m'avoir accordé un support financier me permettant de commencer ce travail. Je remercie également l'Ambassade de France en Haïti pour leur support financier tout au long de ces trois années.

Je tiens tout particulièrement à remercier vivement ma mère Altagrace LAMOUR et mon mari Patrick LUBIN pour tout ce que je leur dois ainsi que mes frères et soeurs pour leur aide précieuse. Je remercie aussi mes amis et amies, collègues et camarades de promotion.

# Notations

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : | ensemble de réels |
| $\mathbb{R}_+$ | : | ensemble de réels positifs |
| $\mathbb{N}$ | : | ensemble des entiers naturels |
| $\propto$ | : | symbole de la proportionnalité |
| $\sharp(A)$ | : | cardinal de A |
| $\Gamma$(shape, scale) | : | Fonction Gamma |
| $\mathbb{1}_A$ | : | fonction indicatrice de l'ensemble A . |
| $\delta$ | : | mesure de Dirac. |
| $X \sim N(\mu, \sigma)$ | : | X suit une loi normale de paramètre $\mu$ et $\sigma$. |
| $\mathbb{E}(./\mathcal{F})$ | : | espérance conditionnelle à la tribu $\mathcal{F}$. |
| $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ | : | mouvement brownien standard. |
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | : | espace probabilisé. |
| $E[X]$ | : | espérance mathématiques de la variable aléatoire $X$. |
| $\int X dP$ | : | intégrale de Lebesgue de X relativement à la mesure $P$. |
| $P(.\|A)$ | : | mesure de probabilité conditionnelle à $A$, A état donné. |
| $N(0,1)$ | : | loi gaussienne (normale) standard. |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | : | loi gaussienne d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$. |
| $LN(\mu, \sigma^2)$ | : | loi log-normale de paramètre $\mu$ et $\sigma^2$. |
| $B(n,p)$ | : | loi binomiale de paramètre $n$ et $p$. |
| $U(a,b)$ | : | loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. |
| $P(\lambda)$ | : | loi de Poisson de paramètre $\lambda$. |
| $V(X)$ | : | Variance théorique de la variable aléatoire $X$. |
| $E[Y\|X=x]$ | : | espérance conditionnelle de Y à $\{X=x\}$. |
| $\hat{\theta}$ | : | estimation de $\theta$. |
| $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ | : | convergence en loi de $X_n$ vers $X$. |
| $X_n \xrightarrow{P} X$ | : | convergence en probabilité de $X_n$ vers $X$. |
| $X_n \xrightarrow{p.s} X$ | : | convergence presque sûrement de $X_n$ vers $X$. |

# Acronymes

| | | |
|---|---|---|
| p.s. | : | presque sûrement |
| v.a. | : | variable aléatoire |
| EDS | : | Equation Différentielle Stochastique |
| EDD | : | Equation Différentielle Déterministe |
| iid | : | indépendant et identiquement distribué |
| PP | : | Processus Ponctuel |
| PPH | : | Processus de Poisson Homogène |
| MAP | : | estimateur maximum a posteriori |
| MB | : | Mouvement brownien |
| MBF | : | mouvement brownien fractionnaire |
| MCMC | : | Markov chain Monte Carlo |
| PAI | : | Processus à accroissements indépendants |

# Introduction

Dans différents domaines scientifiques, les équations différentielles stochastiques interviennent pour modéliser des phénomènes aléatoires. Ces équations différentielles stochastiques sont définies comme généralisation des équations différentielles ordinaires. Les premiers travaux significatif de ce domaine dates des années 1940. Elles servent à décrire des phénomènes très variés. Les équations différentielles stochastiques permettent aussi de modéliser des trajectoires aléatoires telles que les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion (Calif [18], Gardiner [57]). Elles sont souvent utilisés dans différents domaines tel l'écologie pour modéliser la propagation d'une maladie affectant des végétaux, des animaux ou des humains (Peter [63]), et pour modéliser des interactions entre espèces et des individus avec leur environnement en tenant compte des variabilités spatiales ou temporelles (Bahardi[25]), la dynamique de la population (Lungu et Oksendal, [11],[33]) pour modéliser la localisation de la population d'une espèce donnée ou encore de sa taille, la biologie (Folia et Rattray [21]) et (Wilkinson [53]), les mathématiques financières (Chonavel [56]). Le modèle Black-Scholes a été introduit pour évaluer une option dans le cadre de marché financier. Il est considéré comme une avancée fondamentale pour la finance moderne (Khaled et Meddahi [12]). Cependant, d'autres types de comportements aléatoires sont possibles, tels que les processus à sauts (voir Cesars et al. [1], Bahar and Moa [14], Bao and Yuan [20]). Certains auteurs, voulant tenir compte de ces sauts, s'interesse à l'étude des EDS en y incluant des arrivées des sauts par un processus de Poisson (voir Merton [22] ). En démographie, pour certaines espèces, l'arrivée des sauts est modélisée par un processus de Lévy (voir Bahar and Mao [14]). Le modèle introduit par ces auteurs est la solution d'une EDS gouvernée par un processus de Lévy et nommé, suivant certains auteurs, équation logistique avec retard (Bao and Yuan [15]).

Dans ce travail de recherche, nous présentons différentes approches, en insistant sur les modèles Black-Scholes à sauts, Langevin à sauts et un modèle logistique qui n'a pas de solution explicite. Notre objectif est de construire un cadre pour développer l'inférence statistique pour les solutions des équations différentielles stochastiques observées en temps discret. Après avoir donné quelques résultats impor-

tants relatifs à l'inférence statistique pour certaines équations différentielles stochastiques, nous présentons des résultats concernant la vraisemblance d'échantillon pour l'observation en temps discret d'un processus de Black-Scholes à sauts puis celle pour un processus de Black-Scholes à sauts et à régimes. Des techniques permettant d'obtenir des simulations numériques des trajectoires d'EDS à sauts sont développées dans l'environnement .

Dans un deuxième volet, nous présentons un exemple de prise en compte des variations des flux à partir de données observées dans une unité hydrologique situé en Guadeloupe, dans les Antilles françaises. L'objectif est de modéliser le caractère aléatoire des flux et d'effectuer des calculs analytiques ou numériques. Pour ce faire, nous considérons le modèle de Black-Scholes à sauts. L'inférence statistique liée à ce modèle est développée à partir de techniques de vraisemblance. Le cas étudié correspond à une EDS gouvernée par un processus de Wiener et par un processsus de Poisson. Les propriétés distributionnelle des solutions de cette EDS sont présentées. Des illustrations sont également effectuées à partir des données générées des scripts écrits avec le langage .

Ce mémoire est présenté comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduisons notre outil essentiel de travail que sont les processus stochastiques, notamment le mouvement brownien (ou processus de Wiener) et leurs propriétés caractéristiques, les processus de Lévy et les intégrales stochastiques. Pour la modélisation des processus à sauts, nous y introduisons le processus de Poisson ainsi que le processus Gamma pour les amplitudes de sauts. De plus, le mouvement brownien fractionnaire est aussi introduit car il présente, selon la valeur de l'indice de Hurst, une dépendance à court terme ou à long terme.

Dans le second chapitre, nous étudions des EDS qui servent souvent à modéliser des phénomènes aléatoires, à l'instar des équations différentielles ordinaires pour les modèles déterministes. Les conditions suffisantes, pour que les problèmes soient bien posés, y sont introduites. L'étude des modèles de Black-Scholes, de Langevin et logistique incluant des sauts y est développée. Cette partie inclut des simulations numériques pour ces modèles à sauts. Un exemple de modèle gouverné par une équation incluant un mouvement brownien fractionnaire y est dévéloppé. Pour traiter le cas d'équations différentielles stochastiques pour lesquelles la solution n'est pas explicite, des méthodes de simulations numériques sont proposées. Elles permettent d'illustrer certains résultats théoriques par rapport aux modèles étudiés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'inférence statistique sur les modèles à sauts. Des développements sont effectués pour les modèles de Black-Scholes et de Langevin à sauts, principalement basés sur la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle. Nous considérons les propriétés du rapport de

vraisemblance dans les cas du modèle de Black-Scholes à sauts et à régimes. Un test de rupture pour le taux de décroissance est étudié.

Le dernier chapitre est consacré à l'etude d'un exemple concret d'application. A l'aide du modèle Black-Scholes à sauts, nous avons appliqué nos résultats théoriques à un problème d'hydrologie, basé sur des données provenant de la banque HYDRO relatif au débit d'eau d'une rivière de Guadeloupe (Antilles Françaises). Cette application est en rapport avec les brusques variations de la pluviométrie observées localement sur ce territoire.

Au final, nous terminons avec des remarques conclusives ainsi que des perspectives pour la poursuite de ce travail de recherche.

# Chapitre 1

# Eléments sur les processus stochastiques

Avant de présenter des généralités sur les équations différentielles stochastiques et la théorie des processus stochastiques, il convient de donner les définitions fondamentales concernant ces processus. Dans ce qui suit, nous considérons uniquement la catégorie de processus stochastiques, dits en temps continu. En effet, comme nous le verrons au chapitre 2, les solutions des EDS sont dans cette catégorie.

## 1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre, on se limite à faire quelques rappels des outils fondamentaux concernant les processus stochastiques. Le contenu du chapitre est fortement inspiré des ouvrages de ((Alòs [4]), Le Gall [37]) et (Lamberton [65]).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que $X = (X_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F})$ indicé par $T$ si $X$ est une famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t\in T}$ est appelé trajectoire du processus $X$.

Si $T = \mathbb{N}$, on parle de processus stochastique en temps discret.

Si $T = \mathbb{R}_+$, on parle de processus stochastique en temps continu.

Si $T = \mathbb{R}^2$, on parle de processus stochastique spatial.

Si $T = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, on parle de processus stochastique spatio-temporel.

L'étude de processus stochastiques en temps continu impose l'utilisation du quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration.

**Définition 1.1.1** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, une filtration est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, notée par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ est appelé espace probabilisé filtré.*

**Définition 1.1.2** *La **tribu** $\mathcal{F}_t$ est une formalisation mathématique de l'information dont on dispose à l'instant $t$. Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux évènements pouvant intervenir.*

La notion de processus adapté à une filtration fait référence au fait que, la valeur à toute date $t$, est mesurable :

**Définition 1.1.3** *Un **processus** $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si pour chaque $t$, $X_t$ est $\mathcal{F}_t - mesurable$.*

Bien qu'un processus $X$ puisse être en temps continu, la connaissance de la loi d'un vecteur aléatoire quelconque de dimension $n$ extrait de $X$ revêt une importance primordiale.

**Définition 1.1.4** *Etant donné un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, les **lois fini-dimensionnelles** de $X$ sont les lois de tous les vecteurs $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Le théorème de Kolmogorov permet de préciser pour quelles conditions sur ces lois fini-dimensionnelles on peut garantir l'existence du processus stochastique $X$ (Grunig [32]).

### 1.1.1 Martingale et temps d'arrêt

Les martingales sont des processus intégrables dont l'espérance conditionnelle vérifie une certaine propriété. Elles sont impliquées dans différents problèmes stochastiques et permettent de caractériser certains modèles. Pour plus de détails sur les applications en finances voir ( Lamberton [65]) et(Musiela [67]).

**Définition 1.1.5** *Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ une filtration et $X_t$ un processus aléatoire. Un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ tel que $X_t \in L^1$ pour tout $t \geqslant 0$ est appelé*

- *martingale si, pour tous $0 \leq s < t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$*
- *surmartingale si, pour tous $0 \leq s < t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leqslant X_s$*
- *sousmartingale si, pour tous $0 \leq s < t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geqslant X_s$.*

### Temps d'arrêt

En modélisation, lorsqu'on considère un processus aléatoire, on s'intéresse souvent à des instants pour lesquels un seuil est atteint. Un tel instant de chaque trajectoire du processus est aléatoire. Ainsi, on peut définir le temps d'arrêt de la façon suivante :

**Définition 1.1.6** *Un* ***temps d'arrêt*** *de la filtration $\mathcal{F}_t$ est une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, \infty]$ telle que, pour tout $t \geqslant 0$, $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.*
*On associe à $T$ la classe suivante de parties de $\Omega$ :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \,/\, \forall t \in \mathbb{R}_+, A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\},$$

*qui est une tribu.*

A présent, introduisons les propriétés d'un processus gaussien qui nous seront très utiles par la suite quand nous introduirons le MB. Les processus gaussiens sont discutés dans des ouvrages tels celui de Caumel ([69]).

**Définition 1.1.7** *Un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un* ***vecteur gaussien****, si pour tous réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la variable aléatoire réelle $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ suit une loi gaussienne.*

**Définition 1.1.8** *Un* ***processus*** *$(X_t)_{t\geqslant 0}$ est dit* ***gaussien*** *si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{t_i}$ suit une loi gaussienne, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Ainsi, un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est gaussien si toute ses lois fini-dimensionnelles correspondent à des vecteurs gaussiens.

**Proposition 1.1.1** *Un processus gaussien $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est* ***stationnaire*** *ssi $E(X_t)$ est une constante et $cov(X_s, X_t) = K(s-t)$ où $K$ est une fonction réelle de la variable réelle. On parle de stationnarité faible.*

**Théorème 1.1.1** *Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus gaussien centré ($E[X_t] = 0$), de fonction de covariance $\rho(s,t)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $s, t$ :*

$$\rho(t,t) + \rho(s,s) - 2\rho(s,t) \leqslant c|t-s|^{\alpha}.$$

*Alors il existe une version continue $\tilde{X}$ de $X$. De plus, pour tout $\gamma < \dfrac{\alpha}{2}$, les trajectoires de $\tilde{X}$ sont p.s. höldériennes de coefficient $\gamma$.*

## Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien provient du mouvement irrégulier des grains de pollen à la surface d'eau. Il est associé à l'analyse des mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir l'évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle important dans la théorie des processus stochastiques.
Un botaniste écossais, Robert Brown, décrit en 1828 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou fluide. Au $19^{ieme}$ siècle, après lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier. En 1900, Louis Bachelier étudie quantitativement ce mouvement irrégulier en finance pour décrire des cours de bourses. En 1905, le physicien allemand Albert Einstein a construit un modèle probabiliste pour représenter des particules microscopiques soumises aux multiples chocs de leur environnements. En 1923, l'américain Norbert Wiener construit la fonction aléatoire du mouvement brownien. Plus tard, le français Paul Lévy ainsi que d'autres mathématiciens découvrent de nombreuses propriétés du mouvement brownien et l'introduit dans des équations différentielles stochastiques. L'étude sera systématisé par le japonais Kiyoshi Itô. Pour plus de détails sur le mouvement brownien, nous vous renvoyons à ( (Ioannis [36], Le Gall [37])) et (Karoui [59]).

### Le mouvement Brownien standard

**Définition 1.1.9** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*
*Un processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles est appelé* ***mouvement brownien standard*** *si*

- *pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que, $0 \leqslant s \leq t$, la variable $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$*
- *$B_0 = 0$ p.s*
- *Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que, $0 \leqslant s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $N(0, t-s)$.*
- *$B$ est à trajectoires continues.*

**Théorème 1.1.2** *Si le processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien et si $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ alors $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

**Proposition 1.1.2** *Les trajectoires du mouvement brownien standard sont Hölder continues de paramètre $\alpha < \dfrac{1}{2}$.*

**Proposition 1.1.3** *Le processus $(B_t)$ est un* ***processus gaussien*** *dont la fonction de covariance est : $\rho(s,t) = s \wedge t$.*

Lorsqu'on observe une trajectoire discrétisée du mouvement brownien, il peut être utile de compléter la trajectoire entre les points de l'échantillonnage. La notion de pont brownien répond à cette question.

**Définition 1.1.10** *Si $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard, alors le processus*

$$(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]} \text{ avec } \widetilde{B}_t = B_t - tB_1, \text{ est un pont brownien.}$$

**Proposition 1.1.4** *Le **pont brownien** $(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien, centré, de covariance*

$$E(\widetilde{B}_t\widetilde{B}_s) = min(s,t) - st \quad \forall (s,t) \in [0,1]^2.$$

Pour plus de détails sur ces processus, on peut consulter le livre de Comets ([42]).

### Le mouvement brownien fractionnaire

L'étude des phénomènes irréguliers a pris une place importante dans différents domaines tels l'économie, l'épidémiologie, la finance, la physique, l'ingénieurie, etc. Les spécialistes de ces domaines s'adressent souvent à un mathématicien afin de trouver un modèle qui leur convient. Ainsi, en 1940, Kolmogorov a introduit le mouvement brownien fractionnaire, qui modélisent de très nombreux phénomènes auto-similaire puis popularisé par Mandelbrot et Van ([7]). Ce processus est très important au niveau de certaines applications, en raison de son caractère à mémoire longue. C'est l'unique processus gaussien auto-similaires à accroissements stationnaires. Ces auteurs ont donné une représentation au MBF à travers une intégrale fractionnaire par rapport au MB standard. C'est un processus qui généralise le MB standard. Il est caractérisé par un paramètre $H \in (0,1)$, nommé indice de Hurst. Dans la littérature, les trois cas suivants sont considérés :

$$0 \leq H \leq 1/2,\ 1/2 \leq H \leq 1,\ H = 1/2$$

Pour plus de détails, on se refère ( Lounis [3])

**Définition 1.1.11** *Un processus Gaussien centré continu noté $B^H = (B_t^H)_{t\geqslant 0}$, est appelé **mouvement brownien fractionnaire** d'indice $H \in (0,1)$ s'il vérifie les conditions suivantes :*

- *$B^H$ est un processus stationnaire i.e $B_{t+s}^H - B_s^H$ a la même loi que $B_t^H$ pour tout $s,t \geqslant 0$ ;*
- *$B^H$ est un processus gaussien et $E\left[(B_t^H)^2\right] = t^{2H}$ pour tout $(t,H)$ de $\mathbb{R}_+\times]0,1[$ ;*

— $B_0^H = 0$.

**Remarque 1.1.1**

— *Lorsque* $H = \frac{1}{2}$, *le mouvement brownien fractionnaire* $B^{\frac{1}{2}}$ *est un brownien standard.*

— *Lorsque* $H \neq \frac{1}{2}$, *le mouvement brownien fractionnaire* $B^H$ *n'est pas une semi-martingale. Les accroissements ne sont pas indépendants, on ne peut donc pas utiliser le calcul d'Itô classique ou de Stratonovich.*

**Proposition 1.1.5** *Si* $(X_t)$ *est un processus gaussien centré stationnaire tel que* $X_0 = 0$ *p.s. et* $Var(X_t) = t^{2H}$ *alors* $(X_t)$ *est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre* $H$.

### Quelques propriétés du MB standard et du MBF

**Théorème 1.1.3** *Soit* $B = (B_t)$ *un mouvement brownien et des réels* $s, t, c$ *positifs fixés. Les processus définis sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *par :*

$$-B_t,\ B_{t+s} - B_s,\ cB_{t/c^2} \text{ et } tB_{1/t}$$

*sont des mouvements browniens. On parle aussi de processus de Wiener.*

**Proposition 1.1.6** *Le mouvement brownien fractionnaire* $B^H$ *admet comme fonction de covariance, la fonction* $\rho$ *définie pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ *par :*

$$\rho(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{1.1}$$

**Proposition 1.1.7** *Soit* $H \in (0,1)$ *et* $B^H$ *un MBF d'indice* $H$. *On a*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad E[(B_t^H - B_s^H)^2] = |t-s|^{2H}.$$

*Par conséquent, les trajectoires de* $B^H$ *sont presque toutes höldériennes d'exposant* $H - \epsilon$ *pout tout* $\epsilon > 0$.

Le paramètre $H$ concerne le signe de la corrélation des accroissements. Pour la preuve, on se refère à ( Francesca et al. [64], 2008)

**Remarque 1.1.2**

*Si* $H = \dfrac{1}{2}$, *alors :*

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t + s - |t-s|) = s \wedge t = cov(B_t, B_s) \tag{1.2}$$

On peut retrouver ainsi la covariance du mouvement brownien standard.

**Proposition 1.1.8** *Le mouvement brownien fractionnaire possède les propriétés suivantes :*

— *Stationnarité des accroissements :*
$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad B_{t+s}^H - B_s^H$ *et* $B_t^H - B_0^H$ *ont même loi.*

— *Autosimilarité :*
$\forall (a,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad B_{at}^H$ *et* $a^H B_t^H$ *ont même loi.*

**Représentation en moyenne mobile du MBF**

Cette représentation a été fournie, en premier lieu, par ([7]) :

$$B_t^H = \frac{1}{c_H} \int_{\mathbb{R}} \left[ (t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right] dB_s \tag{1.3}$$

où $B_s$ est un MB standard et $c_H^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[ (1-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 ds$.

**Représentation de Lévy-Hida**

On peut aussi représenter le MBF sur un interval fini de la forme suivante :

$$\forall t \geqslant 0, \quad B_t^H := \int_0^t K_H(t,s) dB_s \tag{1.4}$$

— si $H > \frac{1}{2}$ alors $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \quad t > s,$

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du$$

où

$$c_H^2 = \frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})};$$

— si $H < \frac{1}{2}$ alors $\forall t, s \in \mathbb{R}^+,$

$$K_H(t,s) = b_H \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (H-\frac{1}{2}) s^{H-\frac{1}{2}} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{3}{2}} du \right]$$

où

$$b_H^2 = \frac{2H}{\beta(1-2H)(1-2H, H+\frac{1}{2})};$$

pour plus de détail voir (Nualart [51], 2003).

**Propriétés de mémoire**

**Définition 1.1.12** *Un processus stationnaire en temps discret $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ présente une dépendance à long terme si sa fonction covariance $\rho$ satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1$$

*pour une constante $c$ et pour $\alpha \in ]0,1[$.*

Comme par définition, pour tout entier $n$, on a $\rho(n) = cov(X_k, X_{k+n})$, alors en cas de dépendance à long terme, la dépendance entre $X_k$ et $X_{k+n}$ diminue lentement quand $n \to \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

Si on considère le processus des accroissements du MBF $B^H$ à des dates entières, soit

$$X_k := B_k^H - B_{k-1}^H \, et \, X_{k+n} := B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H,$$

d'après la proposition (1.1.6), on a les propriétés de dépendance à long terme pour $H > \frac{1}{2}$, puisque

$$\rho(n) = \frac{n^{2H}}{2}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2H}\right) \sim H(2H-1)n^{2H-2}$$

quand $n \to \infty$.

En résumé, on en déduit que :

— Si $H > \frac{1}{2}$ alors $\rho(n) > 0$ et $\sum_n \rho(n) = \infty$

— Si $H < \frac{1}{2}$ alors $\rho(n) < 0$ et $\sum_n \rho(n) < \infty$

Par conséquent, le MBF présente une dépendance à long terme si $H > \frac{1}{2}$ et à court terme si $H < \frac{1}{2}$.

## 1.2 Intégrale stochastique et calcul d'itô

Les travaux du mathématicien Japonais Kiyoshi Itô (1915-2008) ont été fondamentaux pour la définition de l'intégrale stochastique. La théorie qu'il a développé, après 1945, a permis d'aborder les équations différentielles stochastiques. Ses travaux ont donné un sens à des équations de la forme

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

Dans cette section, nous allons faire quelques rappels de théorie des probabilités. Aussi, nous rappelons quelques résultats importants relatif au calcul d'Itô, afin de pouvoir les utiliser dans la résolution d'équations différentielles stochastiques. Nous introduisons aussi la théorie de martingale en temps continu. Ce processus est discuté dans différents ouvrages tel ([37]) et ([68]).
Dans le prochain paragraphe, nous considérons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ et un mouvement brownien $B = (B_t, t \geqslant 0)$ .

## 1.2.1 Construction de l'intégrale stochastique

**Définition 1.2.1** *On appelle $(\mathcal{F}_t)$-**mouvement brownien** un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*
- *pour tout $t \geqslant 0$, $X_t$ est $(\mathcal{F}_t)$-mesurable ;*
- *si $0 \leqslant s \leqslant t$ alors $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $(\mathcal{F}_s)$;*
- *si $0 \leqslant s \leqslant t$ alors la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.*

**Définition 1.2.2** *On appelle **processus élémentaire** $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ un processus de la forme*

$$X_t(w) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(w) \mathbb{1}_{]t_{i-1}, t_i}(t)$$

*où $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_p = T$ et $\phi_i$ est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée.*
*L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire $X$ est alors, par définition, le processus continu $\int_0^t X_s dB_s$ défini par :*

$$\int_0^t X_s dB_s = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\phi_i + (B_t - B_{t_k})\phi_{k+1} \ , \text{ où } t \in ]t_{k-1}, t_k[$$

**Proposition 1.2.1** *Si $X_t$ est un processus élémentaire alors :*
- *$\int_0^t X_s dB_s$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale,*
- $E\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$
- $E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2\right) \leqslant 4E\left(\int_0^t X_s^2\right) ds.$

A présent, nous allons étendre cette intégrale à une classe de processus adapté.

**Définition 1.2.3** *Soit $B$ le mouvement brownien standard défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $X$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ; on suppose que $X$ vérifie :*

$$E\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < \infty$$

*On appelle* ***intégrale stochastique d'Itô*** *sur $[0,t]$ de $X$ par rapport à $B$ et l'on note $\int_0^t X_s dB_s$ la variable aléatoire réelle définie par :*

$$\int_0^t X_s dB_s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} X_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

*où la limite est en moyenne quadratique, et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = t$.*

**Définition 1.2.4** *Un* ***processus d'Itô*** *est un processus stochastique défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ qui peut être représenté sous la forme*

$$\forall t \in [0,T], \quad X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

*Le coefficient $b$ s'appelle drift (ou dérive) du processus et $\sigma$ son coefficient de diffusion.*

Sous la forme différentielle, on peut écrire

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

La formule d'Itô est un outil de base du calcul stochastique , qui est très utile pour l'analyse des intégrales stochastiques.

**Proposition 1.2.2** *Soit $B$ un mouvement brownien standard.*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t \quad p.s.$$

*où l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$ est à considérer comme la limite p.s. de*

$$\sum_{i=1}^{2^n} B_{(i-1)t2^{-n}}\Big(B_{it2^{-n}} - B_{(i-1)t2^{-n}}\Big).$$

**Démonstration 1.2.1** *Pour calculer l'intégrale stochastique* $\int_0^t B_s dB_s$*, on considère, pour* $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n = \sum_{i=1}^{2^n} B_{(i-1)t2^{-n}} \Big( B_{it2^{-n}} - B_{(i-1)t2^{-n}} \Big).$$

*Comme*

$$\sum_{i=1}^{2^n} B_{(i-1)t2^{-n}} \Big( B_{it2^{-n}} - B_{(i-1)t2^{-n}} \Big) = \sum_{i=1}^{2^n} \Big[ -\frac{1}{2} \Big( B_{it2^{-n}} - B_{(i-1)t2^{-n}} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big( B_{it2^{-n}} \Big)^2 - \frac{1}{2} \Big( B_{(i-1)t2^{-n}} \Big)^2 \Big],$$

*alors*

$$I_n = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \Big( B_{it2^{-n}} - B_{(i-1)t2^{-n}} \Big)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \Big( B^2_{it2^{-n}} - B^2_{(i-1)t2^{-n}} \Big).$$

*Par suite,*

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} B_t^2 \quad p.s.$$

Le résultat suivant, connu sur le nom de la formule d'Itô, a été démontré pour la première fois dans les années 1940. Il nous permet de traiter les intégrales stochastiques ([34]).

**Théorème 1.2.1** ***(Formule d'Itô)***
*Pour un processus d'Itô de la forme* $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ *et* $g \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*, le processus* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *défini par* $Y_t = g(t, X_t)$ *est un processus d'Itô qui vérifie*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

Par la suite, la formule d'Itô a été généralisée par le résultat suivant :

**Proposition 1.2.3** *Soient* $X$ *un processus d'Itô caractérisé par*

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t$$

*et* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction possédant des dérivés continues jusqu'à l'ordre 2. Le processus* $Y$ *défini par* $Y_t = g(X_t, t)$ *est un processus d'Itô dont la différentielle stochastique s'écrit :*

$$dY_t = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial X} b(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma(t, X_t) dB_t$$

en utilisant les conventions $dB_{i,t}.dt = dt.dB_{i,t} = dt.dt = 0$ et $dB_{i,t}.dB_{j,t} = \delta_{ij} dt$

### 1.2.2 Intégration par parties

Soient $X_t$ et $Y_t$ deux processus d'Itô, on a donc

$$dX_t = Fdt + GdB_t \quad et \quad dY_t = F'dt + G'dB_t.$$

Alors le produit $X_tY_t$ est un processus d'Itô, et on a

$$d(X_tY_t) = Y_tdX_t + X_tdY_t + dX_tdY_t.$$

L'expression $dX_tdY_t$ est le terme correctif introduit par Itô. Le calcul de l'intégrale d'Itô de la règle du produit donne la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^t Y_s dX_s = [X_sY_s]_0^t + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t GG'dt$$

### 1.2.3 Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov indique comment une martingale change si l'on change de mesure de probabilité. Il donne l'outil technique qui permet la transformation d'un processus de érive donné $a$ en un autre processus de dérive $b \neq a$. Ce théorème est particulièrement important dans la théorie des mathématiques financières. Il nous montre comment passer de la probabilité historique à la probabilité risque neutre qui est un outil très utile pour évaluer la valeur d'un dérivé du sous-jacent ([65], [67] et [70]).

**Lemme 1.2.1** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace probabilisé, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et l'application $M$ définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad M(A) = E_{\mathbb{P}}\Big[\mathbb{1}_A \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big]$$

*$M$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $M \sim \mathcal{N}(\alpha, 1)$.*

**Théorème 1.2.2** *Soient $B$ un mouvement brownien, $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle et $\lambda = (\lambda_t,\ t \in [0,T])$ un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}$. On considère le processus $L = (L_t,\ t \in [0,T])$, défini par :*

$$L_t = \exp\Big(-\int_0^t \lambda_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 ds\Big).$$

**Définition 1.2.5** *Le processus $\lambda$ satisfait la condition de Novikov si et seulement si :*

$$E_{\mathbb{P}}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s,x)ds\Big)\Big] < +\infty$$

**Théorème 1.2.3** *Si $\lambda$ satisfait la condition de Novikov, on a :*

1. *le processus $L$ est une $\mathbb{P}-$martingale ;*
2. *le processus $B^*$ défini par :*

$$B_t^* = B^t + \int_0^t \lambda_s ds$$

*est un mouvement brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{M})$ où $M$ est caractérisée par :*

$$\frac{dM}{d\mathbb{P}} = L_t$$

**Remarque 1.2.1** *Il est d'interêt de noter que $L$ est une martingale lorsque $\lambda$ est constant. En effet, dans ce cas , on a :*

$$L_t = e^{\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)}$$

*dont nous avons pu montrer aisément qu'il s'agissait d'une martingale.*

## 1.3 Processus de Lévy et lois incrémentales

Le processus de Lévy est un processus stochastique à temps continu, continu à droite et qui admet une limite à gauche (càdlàg) partant de 0, présenté dans plusieurs documents tels que (Protter [38]), (Oksendal [46]). Ce processus stochastique est à accroissements indépendants stationnaires ; il a été étudié en premier lieu par le mathématicien Français Paul Lévy (1886-1971). Il est caractérisé par 3 composantes : une dérive (un drift), une composante de diffusion et une composante de saut. En d'autres termes, c'est un mouvement brownien avec dérive. On peut noter que le processus de Poisson et le mouvement brownien sont des cas particuliers de processus de Lévy.

**Définition 1.3.1** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$, avec $X_0 = 0$ p.s., est* ***un processus de Lévy*** *si :*

*i) il est à accroissement indépendant i.e, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute famille finie $(t_j)_{j=1,\ldots,n}$ telle que $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \infty$, les variables aléatoires $\{X_{t_{j+1}} - X_{t_j}; 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$ sont indépendantes ;*

*ii) il est à accroissement stationnaire i.e, pour tous $s < t$, la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ a même loi que $X_{t-s}$ ;*

*iii) il est stochastiquement continu :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geqslant \epsilon) = 0.$$

**Représentation de Lévy-Khintchine**

**Définition 1.3.2** *Soit $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^k$ de loi $\mu$. On dit que $X$ est **infiniment divisible** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des v.a. iid $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ telles que*

$$X = Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}$$

**Proposition 1.3.1** *Si $X$ est un processus de Lévy, alors $X$ est de loi infiniment divisible pour tout $t \geqslant 0$.*

## Intégrale de Lévy et formule d'Itô

Les théorèmes qui suivent sont détaillés dans Oksendal ( [46]).

**Théorème 1.3.1 (Décomposition d'Itô-Lévy)** *Soit $X = (X_t)$ un processus de Lévy alors il existe $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $R \in [0, \infty]$ tels que :*

$$X_t = at + \sigma B_t + \int_{|z|<R} z\tilde{N}(t, dz) + \int_{|z| \geqslant R} zN(t, dz)$$

*avec $\tilde{N}(t, dz) = N(t, dz) - \nu(dz)dt$ qui est la mesure de Poisson composée de $X$ et, $(B_t)$un mouvement brownien indépendant de $\tilde{N}(t, dz)$.*

**Théorème 1.3.2** *Soient $(X_t)$ un processus de Lévy et $\nu$ sa mesure de Lévy. Alors $\int_{\mathbb{R}} min(1, z^2)\nu(dz) < \infty$ et $E[e^{iuX_t}] = e^{t\psi(u)}$, $u \in \mathbb{R}$, où*

$$\psi(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + iau + \int_{|z|<R} \{e^{iuz} - 1 - iuz\}\nu(dz) + \int_{|z| \geqslant R} (e^{iuz} - 1)\nu(dz).$$

**Théorème 1.3.3 (Formule d'Itô pour le processus de Lévy)** *. Supposons que $(X_t)$ soit un processus de Lévy de la forme*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t + \int_{|z|<R} \gamma(t, z, x)\tilde{N}(dt, dz)$$

*où*

$$\tilde{N}(dt, dz) = \begin{cases} N(dt, dz) - \nu(dz)dt & si\,|z| < R \\ N(dt, dz) & si\,|z| \geqslant R \end{cases}$$

*pour tout $R \in [0, +\infty]$.*

*Etant donné $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$, on a :*

$$dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial F}{\partial X}(t,X_t)[a(t,x)dt + b(t,x)dB_t] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}b^2(t,X_t)dt$$
$$+ \int_{|z|<R}\{F(t,X_{t^-}) + \gamma(t,z) - F(t,X_{t^-})) - \frac{\partial F}{\partial X}(t,X_{t^-})\gamma(t,z)\}\nu(dz)(dt)$$
$$+ \int_R \{F(t,X_{t^-}) + \gamma(t,z) - F(t,X_{t^-}))\}\bar{N}(dt,dz) \quad (1.5)$$

**Remarque 1.3.1** .
- *Si $R = 0$ alors $\bar{N} = N$.*
- *Si $R = \infty$ alors $\bar{N} = \tilde{N}$.*

Le théorème ci-dessous nous donne les conditions d'existences et d'unicité de la solution d'une EDS gouvernée par un processus de Lévy. Pour plus de détails, voir ([46]) et ([73]).

**Théorème 1.3.4 (Existence et unicité)** . *Considérons l'EDS dirigée par un processus de Lévy suivante qui est définie dans $\mathbb{R}^n$ par $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$ et*

$$dX_t = \alpha(t,x)dt + \sigma(t,x)dB_t + \int_R \gamma(t,X_{t^-},z)\tilde{N}(dt,dz),$$

*où $\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times l}$ satisfait les conditions suivantes :*

- *Condition de Lipschitz : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\exists C \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)||^2 + |\alpha(t,x) - \alpha(t,y)|^2 + \sum_{k=1}^{l}\int_R |\gamma^{(k)}(t,x,z_k) - \gamma^{(k)}(t,y,z_k)|\nu(dz_k) \leqslant C|x-y|^2$$

- *Condition de croissance : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists D \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$||\sigma(t,x)||^2 + |\alpha(t,x)|^2 + \sum_{k=1}^{l}\int_R |\gamma^{(k)}(t,x,z_k)|^2\nu_k(dz_k) \leqslant D(1+|x|^2)$$

*Alors il existe une unique solution $X_t$ càdlàg adaptée tel que $\forall t,\ E|X_t|^2] < \infty$.*

### 1.3.1 Processus de Poisson

Considérons d'abord la notion de processus ponctuel. Ce dernier peut être consi- déré comme une mesure stochastique à valeurs entières. Il sert à décrire la distribution d'évenements sur un espace métrique. Les processus ponctuels permettent de décrire divers phénomènes consistant en des distributions d'événements. En démographie ou en écologie, lorqu'on s'intéresse à la répartition d'individus de certaines espèces, on peut à l'aide d'outils de recensement et d'outils statistiques fournir des modèles associés à des comptages et/ou positions de points. Pour des informations complémentaires voir (Daley et Vere-Jones [60]).
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé et $(\chi, d)$ un espace métrique.

**Définition 1.3.3** *On appelle* ***configuration*** *tout ensemble de points*

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

*où $x \in (\chi, d)$ sont des points issues d'une expérience aléatoire. On dit qu'une configuration est localement finie si elle possède au plus un nombre fini de points dans n'importe quel borélien borné $A$ de $(\chi, d)$. On note $x \in N^{lf}$ la famille des configurations localement finies.*

**Définition 1.3.4** *On appelle* ***processus ponctuel*** *sur $(\chi, d)$ une application qui, à toute éventualité $w \in \Omega$ associe une configuration localement fini $x \in N^{lf}$ dans $\chi$ dont le nombre de points $N(A)$ dans un borélien borné $A$ vérifie que la variable aléatoire $w \longrightarrow N(A)(w) = N(A)$ est une variable aléatoire finie pour tout borélien $A$ de $\chi$.*

Si $\chi = \mathbb{R}^+$, le processus ponctuel est dit temporel et on peut lui associé des dates $T_i$ qui sont des points ordonnés de $\mathbb{R}^+$. Le cas de processus ponctuel temporel a une approche différente en raison de l'ordre chronologique

**Définition 1.3.5** *Soit $N$ un processus ponctuel temporel. Le processus de dénombrement ou de comptage associée au processus $N$ est celui qui est défini par $(N_t)_{t\geq 0}$, où $N_t = \#\{T_i, T_i \in [0, t]\}$.*

**Définition 1.3.6** *Soit $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus ponctuel sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Si la limite suivante (1.6) existe alors $\lambda$ est appelé intensité du processus $N$. On dit que $N$ est homogène car $\lambda$ ne dépend pas du temps.*

$$\lambda = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h > 0) \tag{1.6}$$

Un processus de Poisson, du nom du mathématicien français Siméon Denis Poisson est un outil très utile dans l'étude des phénomènes de comptage. Ce processus est couramment utilisé pour modéliser, par exemple une file d'attente, le trafic routier, l'assurance-sinitre, etc...

**Définition 1.3.7** *Soit $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus ponctuel d'intensité $\lambda$, on dit qu'il s'agit d'un* ***processus de Poisson (temporel) homogène*** *si ses trajectoires sont continues à droite et constantes par morceaux, avec des accroissements indépendants, $N_0 = 0$ et pour tout $0 \leqslant s < t$,*

$$N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s)) :$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(N_t - N_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp\Big( - \lambda(t-s)\Big).$$

**Définition 1.3.8** *Un* ***processus de Poisson temporel*** *$N$ de paramètre ou d'intensité $\lambda \geq 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leqslant t\}}$$

*associé à une famille ($T_n \in \mathbb{N}$) de variables aléatoires représentant les temps d'arrivée, telle que les v.a. ($T_{n+1} - T_n$ ; $n \in \mathbb{N}^*$) sont iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda$.*

**Proposition 1.3.2** *Pour tout $t > 0$, la variable $N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t$, i.e :*

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

On s'intéresse à la distribution jointe de la statistique associée à $n$ échantillons iid. Un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui admet des discontinuités aux instants des sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les amplitudes de sauts sont des variables iid d'une loi donnée.

**Définition 1.3.9** *Un* ***processus de Poisson composé*** *de paramètre $\lambda > 0$ et de loi de sauts $\mu_y$ est un processus stochastique défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

où $(Y_n)_n$ est une suite de va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mu_y$ et N est un processus de Poisson de paramètre $\lambda$ indépendant de la suite $(Y_n)_n$.

### 1.3.2 Processus de Wiener

Le botaniste écossais Robert Brown a décrit en 1828, l'agitation spontanée de petites dans un fluide. En 1901, une présentation du modèle mathématique du MB a été faite par Louis Bachelier. Puis, en 1905, Albert Einstein a donné une description quantitative du MB. Ces recherches seront d'une très grande importance dans le développement de la physique moderne.
En 1923, Norbert Wiener a présenté une description mathématique de ce phénomène en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions réelles. C'est suite à cela que le MB sera appelé **processus de Wiener**. En étudiant les propriétés distributionnelles du MB telles que la continuité, la non-dérivabilité des trajectoires, il a défini l'intégrale stochastique qui porte son nom. Pour plus de détails, on pourra consulter le livre de Caumel ([69]) et celui de Sondermann ([68]).

### 1.3.3 Processus Gamma

Dans la littérature, plusieurs types de processus Gamma sont décrits (voir Wolpert [16]). Néanmoins la définition la plus courante est la suivante (Paroissin et Salami, 2014 [27])

**Définition 1.3.10** *On appelle* ***processus de Lévy à accroissement Gamma****, tout processus stochastique qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $X_0 = 0$
- *les accroissements de $X_t$ sont indépendants.*
- *les accroissements $X_{t+s} - X_t$ de $(X_t)$ sont de loi Gamma de paramètre d'échelle $\beta$ et de paramètre de forme $\alpha$*

**Remarque 1.3.2** *Il est à noter que certains processus dit Gamma ne sont pas des processus de Lévy.*

Un processus de Lévy à accroissement suivant une loi Gamma est un processus Gamma.

**Remarque 1.3.3** *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X_t$ admet pour densité*

$$x \to \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha t)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha t-1} \times e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbb{1}_{R_+}(x).$$

*Aussi $E[X_t] = \alpha\beta t$, $V(X_t) = \alpha\beta^2 t$ et sa fonction caractéristique est :*

$$E[e^{iuX_t}] = (1 - \frac{iu}{\alpha t})^{-\beta}$$

# Chapitre 2

# Equations Différentielles Stochastiques

## 2.1 Généralité sur les EDS

Les équations différentielles stochastiques sont des équations dans lesquelles opèrent formellement des opérateurs différentiels en tenant compte du hasard. Elles sont la généralisation des équations différentielles ordinaires où la dynamique déterministe d'évolution est perturbé par un bruit aléatoire. On peut considérer que les perturbations aléatoires sont de la forme $\sigma B_t$ où $(B_t)$ désigne un mouvement brownien et $\sigma$ une constante qui représente l'intensité du bruit. Ces équations sont du type

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

où l'inconnu est un processus $X_t$ qui doit vérifier une équation qui implique sa dérivée. Les EDS sont utilisées pour décrire des systèmes qui évoluent avec le temps. Avant de chercher à résoudre une équation différentielle stochastique, il est important de vérifier que le problème est bien posé. C'est-à-dire de démontrer l'existence, l'unicité relativement aux processus aléatoires et la non explosion de la solution. Sans aller plus loin, nous allons voir les deux conditions qui permettent de prouver que le problème est bien posé sur un intervalle donné. La méthode est inspirée de celle des EDO qui est basée sur l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. En premier lieu, nous avons la condition de Lipschitz qui prouve l'existence et l'unicité de la solution et la condition de croissance qui nous indique que la solution n'explose pas en temps fini (1.3.4). Puis nous avons proposé quelques exemples de résolution d'EDS avec ou sans sauts. On renvoie aux travaux de Iacus ([55]) pour plus de détails concernant les EDS.

**Théorème 2.1.1 (Théorème d'existence et d'unicité pour les EDS)** .
*Pour l'équation $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ avec $X_0 = Z$, où $Z$ indépendant de $(B_t)$, il existe une unique solution continue en $t$ adaptée à $\mathcal{F}_t$, avec $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s; s \leqslant t\} \cup \{Z\})$ et telle que $E[\int_0^T |X_t|^2] < \infty$ dès lors qu'il existe des constantes $C$ et $D$ telles que*

— *Condition de Lipschitz :*

$$\forall (t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2, \quad |b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leqslant D|x-y|;$$

— *Condition de croissance :*

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \quad |b_t(x)| + |\sigma_t(x)| \leqslant C(1+|x|).$$

**Théorème 2.1.2 (Théorème de Campbell)** *Soit un processus de Poisson de temps de sauts $T_i$ et d'intensité $\lambda$. Si $f$ est une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$ alors*

$$E\Big[\sum_{i=1}^{\infty} f(T_i)\Big] = \lambda \int_0^t f(s)ds, \quad V\Big(\sum_{i=1}^{\infty} f(T_i)\Big) = \lambda \int_0^t f^2(s)ds.$$

## 2.2 EDS sans sauts

Dans cette section, nous proposons quelques exemples d'EDS sans sauts. L'objectif est de mieux appréhender ces modèles dans les versions régulières avant d'y introduire les discontinuités que sont les sauts. Pour obtenir une solution explicite, on utilise la technique du facteur intégrant. On peut citer en référence le livre de Iacus ([55]).

### 2.2.1 Modèle de Black-Scholes

En 1973, les chercheurs F. Black et M. Scholes ([23]) ont considéré le modèle basé sur l'équation suivante :

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{2.1}$$

où $b$ et $\sigma$ sont des constantes. Cette EDS modélise l'évolution d'un cours $X$ soumis à un taux d'íntérêt déterministe $b$ et à une perturbation $\sigma X_t dB_t$ où $\sigma$ est le coefficient de diffusion ou de volatilité ([12]). Le modèle Black-Scholes est l'équivalent au mouvement brownien géométique. Les hypothèses du théorème (3.4.1) sont satisfaites, donc le problème est bien posé. Pour trouver la solution explicite de l'équation (2.1), on applique la formule d'Itô avec $Y_t = ln(X_t)$, donc

$$d(Y_t) = bdt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

ce qui conduit à la solution suivante

$$X_t = x_0 \exp(\Big(b - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma B_t).$$

On vérifie que $X_t$ suit une loi log-normale d'espérance $x_0 e^{bt}$ et de variance $x_0^2 e^{2bt}(e^{\sigma^2 t} - 1)$. Ce qui nous permet de dire que le processus $X_t$ solution du modèle converge en probabilité vers 0 si $b < -\frac{\sigma^2}{2}$.

### 2.2.2 Modèle de Langevin

L'équation de Langevin ([24]) est une équation différentielle stochastique publiée en 1908 et qui correspond historiquement à un modèle dans lequel on analyse l'effet du fluide sur la particule brownienne. On suppose que la particule n'est soumise à aucune autre force extérieure. On peut écrire cette équation sous la forme :

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t \tag{2.2}$$

avec $b, \sigma > 0$, et $X_t$ la position instantanée de la particule. les hypothèses du théorème (3.4.1) sont vérifiées, il y a donc existence et unicité de la solution du modèle. En appliquant la formule d'Itô avec $Y_t = e^{bt} X_t$, on obtient

$$d(Y_t) = be^{bt} X_t dt + e^{bt} dX_t = e^{bt} \sigma dB_t$$

Ainsi $Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{bs} \sigma dB_s$ et

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)} \sigma dB_s$$

Dans la littérature, ce processus est appelé Processus de Ornstein-Ulhenbeck.

### 2.2.3 Modèle d'Ornstein-Ulhenbeck

Le processus de Ornstein-Ulhenbeck est caractérisé par le modèle suivant :

$$dX_t = b(a - X_t)dt + \sigma dB_t \tag{2.3}$$

où $a$, $b$ et $\sigma$ sont des constantes positives et $(B_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien. Ce modèle est souvent utilisé pour décrire la dynamique de variables financières. On remarque que le drift est positif lorsque $(X_t)$ est inférieur à $a$ et la tendance sera donc à la hausse. Si par contre, $(X_t)$ est plus grand que $a$, la tendance est

à la baisse. De ce fait, une telle formulation introduit une force de rappel dans la dynamique du taux court. Dans le modèle de Ornstein-Ulhenbeck, le coefficient de diffusion $\sigma$ ne dépend pas de $X_t$. Comme les variations de $B_t$ sur un intervalle de temps $dt$ sont de l'ordre de $\sqrt{dt}$, ce processus peut prendre des valeurs négatives car la variation du mouvement brownien est très importante par rapport au terme de tendance sur le très court terme ([70]). Les conditions du théorème (3.4.1) étant vérifiés, on peut appliquer la formule d'Itô pour trouver la solution explicite du modèle. Remarquant que $X_t$ est un processus d'Itô, on applique la formule d'Itô avec la fonction $Y_t = e^{bt}X_t$.
On obtient

$$d(Y_t) = e^{bt}dX_t + be^{bt}X_t dt = abe^{bt}dt + \sigma e^{bt}dB_t;$$

ce qui conduit à

$$X_t = x_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \sigma \int_0^t e^{b(s-t)}dB_s.$$

Le processus solution de ce modèle suit une loi normale de moyenne

$$x_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt})$$

et de variance $\dfrac{\sigma^2}{2b}\Big(1 - e^{2bt}\Big)$.

### 2.2.4 Modèle de Lotka-Volterra

Le modèle logistique est un modèle déterministe solution de l'équation de Lotka-Volterra (Zhao et al. [2]). La version stochastique conduit à l'EDS de Lotka-Volterra uni-dimensionnelle suivante

$$dX_t = X_t(a - bX_t)dt + \sigma X_t dB_t \tag{2.4}$$

Il sert à décrire l'évolution démographique d'une population d'individus d'une même espèce (Bahar and Moa ([14]) et (Bao and Yuan [20]). Les hypothèses du théorème (3.4.1) sont vérifiées, le modèle est bien posé. Sous certaines conditions, la solution explicite $X$ de l'EDS (2.4) est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t = x_0 e^{(a-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}\left(1 + x_0 ab \int_0^t \phi_s^{-1} ds\right)^{-1}$$

où $\phi_t = e^{-\left[(a-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t\right]}$. Nous renvoyons à Skiadas [26] pour les détails du calcul.

## 2.3 Modèles incluant des sauts

On peut considérer le mouvement brownien comme étant le modèle le plus simple pour décrire un phénomène aléatoire dont la valeur varie de manière continue. Cependant, dans certains cas, par exemple dans le domaine de la finance, l'économie, l'assurance-sinistre, etc, les processus observés peuvent présenter des discontinuités dont la localisation et l'amplitude sont aléatoires. Dans cette partie, on va considérer deux modèles à sauts, le modèle de Langevin à sauts qui a une solution explicite et un modèle logistique dont la solution n'est pas explicite.

### 2.3.1 Modèle de Black-Scholes à sauts

Depuis les observations de Robert Brown sur le déplacement des grains de pollen en solution et les travaux de Einstein et d'Itô qui ont proposé une description de ce phénomène, on s'est rendu compte que deux nombreux situations pouvaient être décrites en faisant intervenir des forces aléatoires.
On s'intéresse à ce processus de Lévy qui constituent des processus à sauts qui généralisent les processus de Poisson. Les propriétés d'une classe de solutions sont présentées par rapport aux processus de Wiener, et de Poisson associés. Nous fournissons des résultats permettant des simulations numériques exactes de ces EDS. L'excès de variance du mouvement brownien et les valeurs extrêmes des amplitudes de saut sont analysées. Nous présentons des méthodes d'inférence statistique à partir des observations du modèle. Afin d'illustrer certains phénomènes aléatoires, nous allons utiliser le modèle de Black-Scholes à sauts.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les hypothèses usuelles. Soit $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien, $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson et $(A_t)_{t\geqslant 0}$ un processus stochastique positif à trajectoires continues, faiblement stationnaire d'espérance $\mu$ et de variance $\nu$. On suppose que $B_t$, $N_t$ et $A_t$ sont indépendants et sont tous $(\mathcal{F}_t)-$ adaptés.

$$dX_t = -\tau X_t dt + \sigma X_t dB_t + A_t X_t dN_t \tag{2.5}$$

où $\tau$ représente le taux intrinsèque de décroissance.
Les termes de dérive, de diffusion et de choc du côté droit de l'équation (2.5) sont des fonctions linéaires de $X_t$, qui sont continues sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 2.3.1** *Sous les conditions d'existence et d'unicité de la solution, énoncées dans le théorème (1.3.4), l'EDS* (2.5) *admet une solution positive $X_t$ donnée par :*

$$X_t = X_0 \exp\left( -\left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \int_0^t \log(1 + A_s) dN_s \right). \tag{2.6}$$

**Preuve :**
Résolvons l'EDS (2.5) en remarquant tout d'abord que les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de la solution donnée par le théorème (3.4.1)sont vérifiées pour toute condition initiale. Déterminons la forme explicite de la solution.
Comme $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus d'Itô, on peut appliquer la formule d'Itô pour processus de Lévy en choisissant correctement la transformation.
En prenant $Y : (t, X_t) \mapsto \log(X_t)$ pour tout $t \geqslant 0$ qui est de classe $C^2$ et à dérivées bornées sur un compact de $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\begin{aligned} dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{dX_t^2}{X_t^2} + \Big[\log(X_t + A_t X_t) - \log(X_t)\Big] dN_t \\ = -\tau dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt + \log(1 + A_t) dN_t \\ = -\left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t + \log(1 + A_t) dN_t \end{aligned}$$

d'où

$$Y_t = Y_0 - \left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} \log(1 + A_{T_i})$$

et par conséquent

$$X_t = x_0 \exp\left(-\Big(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma B_t\right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + A_{T_i}).$$

□

### Distribution associée à la solution

Compte tenu de notre objectif qui est l'inférence statistique sur le modèle, il importe de déterminer la loi de probabilité qui régit la solution.

**Proposition 2.3.2** *Conditionnellement à $(A_j)_{j=1,\dots,N_t}$ et $N_t$, la v.a $X_t$ a une distribution log-normale avec des paramètres $\log(K_t)$ et $\sigma^2 t$, où*

$$K_t = X_0 \exp\left(-\left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \times \prod_{j=1}^{N_t} (1 + A_j).$$

**Preuve :**
Si on pose $Y_t = \log(X_t)$. Etant donné que $B_t \sim N(0,t)$, ce qui implique que $Y_t \sim N\Big(\log K_t, \sigma^2 t\Big)$ conditionnellement à $K_t$. Soit $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ les observations du processus $(X_t)$, au temps $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in [0,t]$. La distribution du processus $(X_t)$ dépend des paramètres $\tau$, $\sigma^2$, $\theta$ et $\lambda$ qui doivent être estimés. $\lambda$ est l'intensité du processus de Poisson et $\theta$ est un paramètre vectoriel caractérisant la loi des amplitudes de saut. □
Afin de connaitre le comportement asymptotique de la solution, en particulier les possibilités de convergence en probabilité, il importe de connaitre l'espérance et la variance de $X_t$ pour tout $t$ élément de $\mathbb{R}_+$.

**Proposition 2.3.3** *Soit le processus $(X_t)$ solution de l'EDS (2.5) alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E[X_t] = x_0 e^{(-\tau+\lambda\mu)t} \quad \textit{et } V(X_t) = \Big(E[X_t]\Big)^2\Big(e^{[\sigma^2+\lambda(\nu+\mu^2)]t} - 1\Big). \quad (2.7)$$

*où $\mu$ est l'espérance de $A_t$ et $\nu$ la variance de $A_t$.*

**Preuve :**
Comme $X_t = x_0 e^{-\Big(\tau+\frac{\sigma^2}{2}\Big)t+\sigma B_t} \prod_{i=1}^{N_t}(1+A_{T_i})$
et que $e^{\sigma B_t}$ suit une loi log-normale de paramètres 0 et $\sigma^2 t$, on a donc $E[e^{\sigma B_t}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$. D'autre part les $A_{t_i}$ sont indépendants, donc

$$E\left[\prod_{i=1}^{N_t}(1+A_{T_i})\right] = E[(1+A_{T_1})^{N_t}] = E\Big[(1+E[A_{T_1}])^{N_t}\Big] = e^{\lambda t(E[1+A_{T_1}]-1)}.$$

Comme $N_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda t$, sa fonction génératrice des probabilités en $1+\mu$ vaut $e^{\lambda\mu t}$. D'autre part $B$ et $N$ sont indépendants, il s'en suit que

$$E[X_t] = x_0 e^{-(\tau+\frac{\sigma^2}{2})t} e^{\frac{\sigma^2}{2}t} e^{\lambda\mu t} = x_0 e^{(-\tau+\lambda\mu)t}.$$

Calculons maintenant $E[X_t^2]$.

$$X_t^2 = x_0^2 e^{-\Big(2\tau+\sigma^2\Big)t+2\sigma B_t}\left(\prod_{i=1}^{N_t}(1+A_{T_i})\right)^2$$

or $e^{2\sigma B_t}$ suit une loi log-normale de paramètres 0 et $4\sigma^2 t$ donc $E[e^{2\sigma B_t}] = e^{2\sigma^2 t}$.
En outre

$$E\left[\prod_{i=1}^{N_t}(1+A_{T_i})^2\right] = E[(1+A_{T_1})^{2N_t}] = e^{\lambda t(E[(1+A_{T_1})^2]-1)} = e^{\lambda t(2\mu+\nu+\mu^2)}.$$

D'où $E[X_t^2] = \Big(E[X_t]\Big)^2 e^{\Big(\sigma^2+\lambda(\nu+\mu^2)\Big)t}$ puis le résultat attendu. □
On en déduit le résultat suivant, via l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

**Corollaire 2.3.1** .

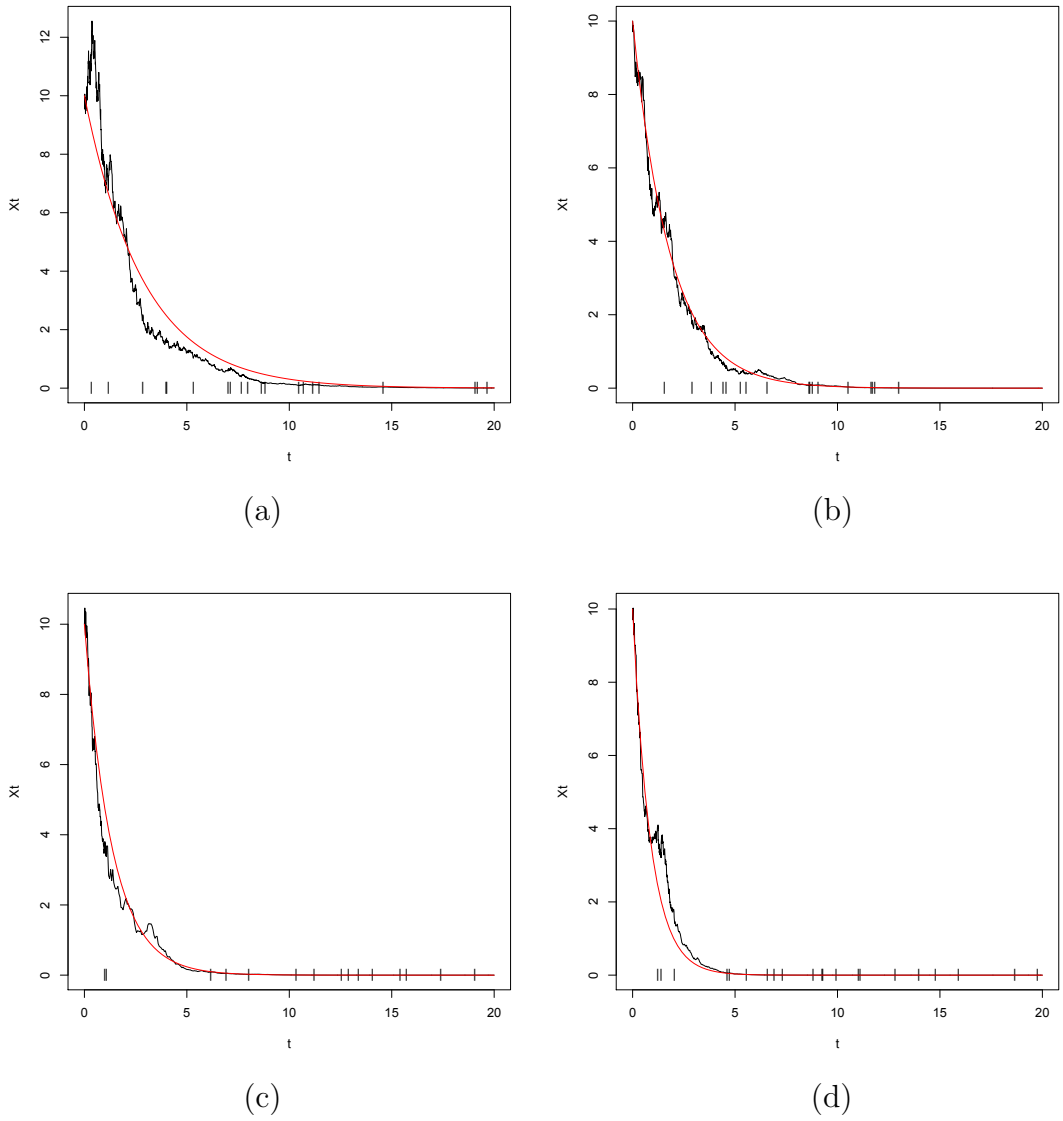
- *Si* $\tau > \lambda\mu$ *alors* $\lim_{t\to+\infty} E[X_t] = 0$.
- *Si, de plus,* $\tau > \lambda\mu + \dfrac{\sigma^2+\lambda(\nu+\mu^2)}{2}$ *alors* $X_t$ *converge en probabilité vers* 0 *quand* $t$ *tend vers* $+\infty$.

**Remarque 2.3.1** *Il est important de noter que le corollaire ( 2.3.1) donne une condition suffisante pour la stabilité asymptotique du modèle, à savoir*

$$\tau > \lambda\mu + \frac{\sigma^2+\lambda(\nu+\mu^2)}{2} = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\Big[(\mu-1)^2+\nu-1\Big].$$

*On peut noter que* $(\mu-1)^2+\nu-1$ *peut être négatif, ce qui signifie donc que le modèle avec sauts peut converger en probabilité vers* 0 *pour des valeurs de* $\tau$ *plus petite que le modèle sans saut. Cette situation se produit lorsque la variance des sauts est plus petite que* 1 *et que la moyenne est proche de* 1.

La figure (2.1) nous fournit une illustration avec des amplitudes suivant la loi log-normale de paramètres $-3$ et 0.5, et $\lambda\mu + \dfrac{\sigma^2+\lambda(\nu+\mu^2)}{2} = 0.102$. On observe bien une convergence vers 0 qui est d'autant plus rapide que $\tau$ est élevé.




(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 2.1 – Simulations sous R du modèle de Black-Scholes à sauts (2.5).
$(x_0, \sigma^2, \lambda, \mu, \nu, t) = (10, 0.07, 1, 0.064, 0.0026, 20)$.
$\tau = 0.4$ pour (a) , $\tau = 0.6$ pour (b), $\tau = 0.8$ pour (c), $\tau = 1.2$ pour (d).

**Solution théorique de l'équation différentielle associée**

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la solution de l'EDD associée à (2.5) dans la mesure où elle nous permet de voir le comportement en l'absence de bruit multiplicatif et en considérant que les sauts (qui sont positifs), viennent atténuer la décroissance intrinsèque.

**Proposition 2.3.4** *La solution de l'EDD associée à ce modèle est :*

$$X_t = x_0 e^{(-\tau+\lambda\mu)t}$$

.

**Preuve :**
L'EDD associée associé à ce modèle est

$$dX_t = X_t(-\tau + \lambda E[A_1])dt.$$

Aussi

$$\frac{dX_t}{X_t} = (-\tau + \lambda E[A_1])dt$$

d'où

$$ln(X_t) = ln(X_0) + (-\tau + \lambda E[A_1])t,$$

ce qui conduit à

$$X_t = x_0 e^{(-\tau+\lambda\mu)t}$$

**Corollaire 2.3.2** *si* $\tau > \lambda\mu$ *alors* $\lim_{t\longrightarrow\infty} X_t = 0$.

**Remarque 2.3.2** *La solution de l'EDD est l'espérance de la solution stochastique de l'EDS (2.5).*

### 2.3.2 Modèle de Black-Scholes à sauts et régimes

Nous nous interressons ici à la situation pour laquelle les valeurs du taux de décroissance varient au cours du temps mais par pallier. Cela correspond à un modèle dit *à régimes* pour ce taux de décroissance :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad dX_t = -\tau_t X_t dt + \sigma X_t dB_t + A_t X_t dN_t \tag{2.8}$$

où $\tau_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \mathbb{1}_{S_k}(t)$, les $S_k$ étant des intervalles bornés disjoints de $\mathbb{R}_+$ et les $c_k$ des nombres réels.

**Proposition 2.3.5** *Sous les conditions d'existence et d'unicité de la solution, énoncées dans le théorème (1.3.4), l'EDS* (2.8) *admet une solution positive $X_t$ donnée par :*

$$\forall t \in S_k, \quad X_t = X_{s_k} \exp\left( \left(c_k + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - s_k) + \sigma(B_t - B_{s_k}) + \int_{s_k}^{t} \log(1 + A_s) dN_s \right) \quad (2.9)$$

*où $s_k$ est la date d'entrée dans le régime.*

**Preuve :**
D'après la proposition (2.6), à la date d'entrée $s_k$ dans le régime $S_k$, la valeur initiale du processus étant $X_{s_k}$ et le taux de décroissance valant alors $c_k$, nous obtenons l'expression désirée. □
Le régime $S_k$ peut être le $k^{ieme}$ état visité par une chaine de Markov à espace d'états fini $S$. Dans la pratique, cette chaine est soit observée, ou soit cachée. Par exemple, en hydrologie, les états de la chaine peuvent correspondent à des saisons associées à la pluviométrie de la région étudiée.

### 2.3.3 Modèle de Langevin à sauts

L'objectif est de trouver un modèle qui généralise celui de Langevin (2.2.2), et qui tiendrait compte de l'arrivée non continues dans le temps d'informations impactant le phénomène étudié.

**Proposition 2.3.6** *Supposons que $\tau$ et $\sigma$ sont des constantes positives, $A_t$ est une variable aléatoire qui suit une loi positive à densité, $B$ un processus de Wiener et $N$ un processus de Poisson. Le modèle de Langevin à sauts suivant a une unique solution en $t$.*

$$dX_t = -\tau X_t dt + \sigma dB_t + A_t dN_t \quad (2.10)$$
$$X_0 = x_0,$$

**Preuve :**
Une solution de l'EDS (2.10) est un processus stochastique càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}$, adapté. Déterminons la solution de cette EDS en notant au préalable que le problème est bien posé (Oksendal [44]). Calculons la solution explicite de la solution de (2.10) Etant donné que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus d'Itô. On peut utiliser la formule d'Itô, tout en choisissant une fonction bien appropriée.
Prenons la fonction $f : (X_t, t) \mapsto e^{\tau t} X_t$ qui est de classe $C^2$ et à dérivées bornées sur tout compact de $\mathbb{R}$. Aussi a-t-on :

$$d(e^{\tau t} X_t) = \tau e^{\tau t} X_t dt + e^{\tau t} dX_t + [e^{\tau t}(X_t + A_t) - e^{\tau t}(X_t)] dN_t = \sigma e^{\tau t} dB_t + e^{\tau t} A_t dN_t$$

d'où

$$e^{\tau t}X_t - x_0 = \sigma \int_0^t e^{\tau s} dB_s + \int_0^t e^{\tau s} A_s dN_s.$$

Ce qui conduit à

$$X_t = x_0 e^{-\tau t} + \sigma \int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s dN_s.$$

□

**Corollaire 2.3.3** *La solution de (2.10) s'exprime de la façon suivante*

$$X_t = x_0 e^{-\tau t} + \sigma \int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s dN_s$$

*et admet pour espérance*

$$E[X_t] = e^{-\tau t} x_0 + \frac{\lambda E[A_1]}{\tau}(1 - e^{-\tau t}). \tag{2.11}$$

**Preuve :**
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, via la linéarité de l'espérance, il s'ensuit que :

$$E[X_t] = e^{-\tau t} x_0 + \sigma E\Big[\int_0^t e^{\tau(t-s)} dB_s\Big] + E\Big[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\tau(t-s)} A_{T_i}\Big].$$

Appliquant le théorème de Campbell, il vient que :

$$E[X_t] = x_0 e^{-\tau t} + \lambda E(A_1) \int_0^t e^{-\tau(t-s)} ds,$$

d'où, on déduit que

$$E[X_t] = e^{-\tau t} x_0 + \frac{\lambda E(A_t)}{\tau}(1 - e^{-\tau t})\Big).$$

□

**Remarque 2.3.3** *On a donc sans difficulté les propriétés suivantes :*

$$\lim_{t\to\infty} E[X_t] = \frac{\lambda E[A_t]}{\tau} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^+} E[X_t] = x_0$$

D'autre part, déterminons la variance du processus $(X_t)$.

**Corollaire 2.3.4** *Pour tout $t > 0$, la variance de $(X_t)$ conditionnelle à $(X_0)$ est*

$$V(X_t) = \frac{V(A_1)\lambda + \sigma^2}{2\tau}(1 - e^{-2\tau t}) \ . \tag{2.12}$$

**Preuve :**
Comme $(B_t)_{t\geqslant 0}$ et $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendants, alors :

$$V(X_t) = V\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s N(ds)\Big) + \sigma^2 V\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s\Big).$$

Posons $V_1 = V\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s\Big)$ et $V_2 = V\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s N(ds)\Big)$. Ainsi, d'après l'isométrie d'Itô, on a :

$$V_1 = E\left[\Big(\int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s\Big)^2\right] = E\Big[\int_0^t e^{-2\tau(t-s)} ds\Big] = \frac{1}{2\tau}(1 - e^{-2\tau t}).$$

A l'aide du théorème de Campbell, on obtient que :

$$V_2 = V\left(\sum_0^{N_t} e^{-\tau(t-s)} A_{T_i}\right) = V(A_1)\lambda \int_0^t e^{-2\tau(t-s)} ds = \frac{V(A_1)\lambda}{2\tau}(1 - e^{-2\tau t}).$$

On conclut que :

$$V(X_t) = \frac{V(A_1)\lambda + \sigma^2}{2\tau}(1 - e^{-2\tau t}).$$

□

**Corollaire 2.3.5** *Si $(X_t)$ est le processus stochastique solution de l'équation (2.10), alors*

$$\lim_{t\to+\infty} V(X_t) = \frac{V(A_1)\lambda + \sigma^2}{2\tau}$$

**Remarque 2.3.4** *On ne peut donc pas affirmer que le processus $(X_t)$ converge en probabilité vers $\dfrac{\lambda E[A_1]}{\tau}$.*

**Corollaire 2.3.6** *La solution $X_t$ de l'EDS (2.10) suit, conditionnellement à $(A_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ et $(N_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$, la loi gaussienne $\mathcal{N}(m_t, v_t)$ où*

$$m_t = x_0 e^{-\tau t} + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s dN_s$$

*et*

$$v_t = \frac{\sigma^2}{2\tau}(1 - e^{-2\tau t}).$$

**Preuve :**
On a $X_t - x_0 e^{-\tau t} - \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A_s dN_s = \sigma \int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s$. Comme la variable aléatoire $\int_0^t e^{-\tau(t-s)} dB_s$ suit la loi normale centrée de variance $\int_0^t e^{-2\tau(t-s)} ds$, on en déduit le résultat. □

La figure (2.2) présente des simulations du modèle de Langevin à sauts pour lesquelles les amplitudes suivent une loi log-normale de paramètres $-2$ et $0.5$.

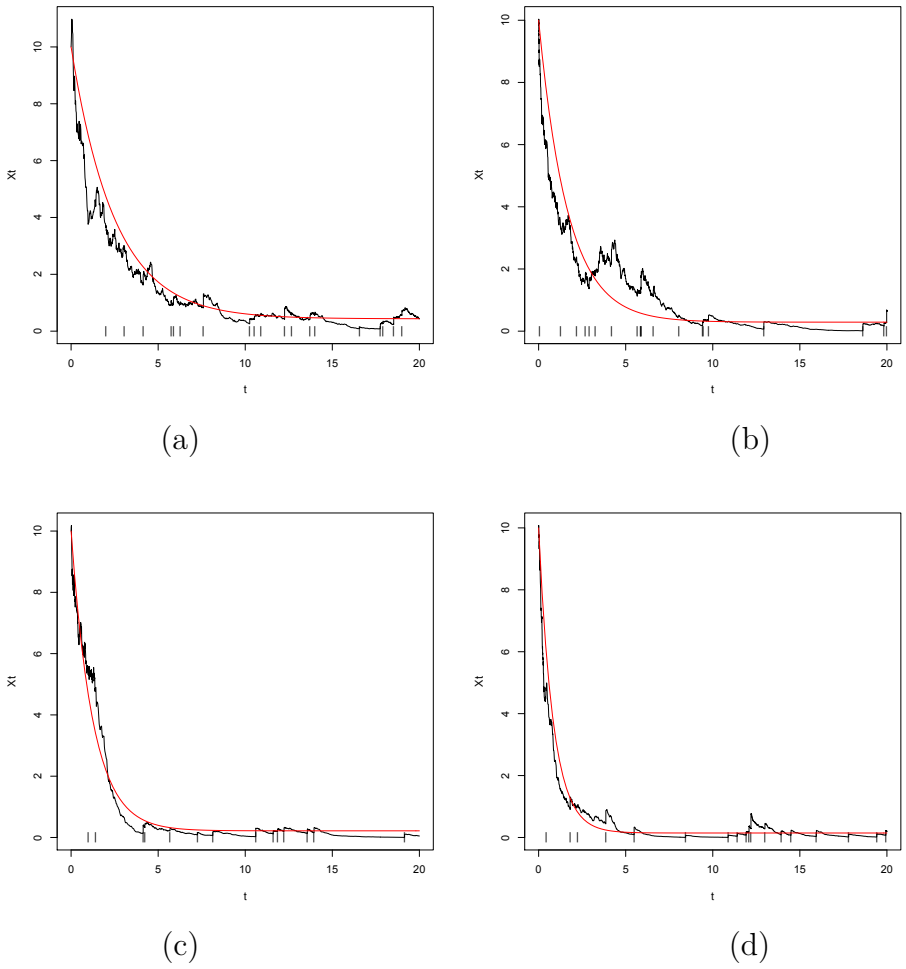



FIGURE 2.2 – Simulations du modèle de Langevin à sauts (2.10).
$(x_0, \sigma^2, \lambda, \mu, \nu, t) = (10, 0.07, 1, 0.173, 0.0196, 20)$.
$\tau = 0.4$ pour (a) , $\tau = 0.6$ pour (b), $\tau = 0.8$ pour (c), $\tau = 1.2$ pour (d).

### 2.3.4 Modèle de Lotka-Volterra à sauts

Une généralisation du modèle uni-dimensionnelle de Lotka-Volterra est discuté par Zhao et al. [2]. Il inclut un bruit multiplicatif comme pour l'EDS (2.4) mais aussi des sauts à amplitudes à valeurs fixes $r$ :

$$dX_t = X_t(a - bX_t)dt + \sigma X_t dB_t + rdN_t \tag{2.13}$$

où $(a, b, \sigma, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$.

Ces auteurs montrent que l'équation (2.13) admet sous certaines conditions une unique solution stationnaire p.s. positive. Ils fournissent d'autres propriétés distributionnelles de cette solution dans l'objectif de proposer des outils d'inférence statistique sur les paramètres $a$ *et* $b$.

### 2.3.5 Présentation d'un modèle à solution non explicite

Dans cette section, nous allons de nouveau considérer un processus de Lévy associé à un processus de Wiener $B$ et un processus de Poisson $N$ sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ satisfaisant les hypothèses usuelles. En cas d'évenement du processus $N_t$, on considère une amplitude $A_t$ associée à cet évenement. Pour toute date $t \geq 0$, on admet que cette variable aléatoire $A_t$ est positive et de distribution paramétrée par le vecteur $\theta$. On suppose que les processus $B$, $N$ et $(A_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants et $(\mathcal{F}_t)$ adaptés. L'EDS considérée est

$$dX_t = X_t(K - X_t)\tau dt + \sigma X_t(K - X_t)dB_t + A_t X_t(K - X_t)dN_t \tag{2.14}$$

$$X_0 = x_0$$

où le paramètre $\tau$ est un taux de croissance intrinsèque et $\sigma$ l'écart type associé à $B$.

#### Existence et unicité de la solution

**Proposition 2.3.7** *L'équation (2.14) admet une unique solution continue en t, si les conditions du théorème (1.3.4) sont vérifiées.*

**Preuve :**
Vérifions les conditions d'existence et d'unicité de la solution de cette EDS.

— Condition de Lipschitz
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tau X_t(K - X_t) - \tau Y_t(K - Y_t)|^2 = \tau^2 |K(X_t - Y_t) - (X_t^2 - Y_t^2)|^2 \tag{2.15}$$

$$|\sigma X_t(K - X_t) - \sigma Y_t(K - Y_t)|^2 = \sigma^2 |K(X_t - Y_t) - (X_t^2 - Y_t^2)|^2 \quad (2.16)$$

$$(2.15) + (2.16) \leqslant (\tau + \sigma)(K + \alpha)|X_t - Y_t| \quad si\ |X_t + Y_t|^2 \leqslant \alpha$$

alors

$$(2.15) + (2.16) \leqslant C|X_t - Y_t|^2$$

avec $C = (\tau + \sigma)(K + \alpha)$ □

— Condition de croissance
cette condition est satisfaite car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} &|\tau X_t(K - X_t)|^2 + |\sigma X_t(K - X_t)|^2 \\ &\qquad = \tau^2 |X_t(K - X_t)|^2 + \sigma^2 |X_t(K - X_t)|^2 \\ &\qquad \leqslant (\tau^2 + \sigma^2)(1 + X_t^2)|K - X_t|^2 \\ &\qquad \leqslant C(1 + X_t^2) \quad si\ |K - X_t|^2 \leqslant \alpha \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec $C = \alpha(\tau^2 + \sigma^2)$ □

Cette deuxième coondition est plus faible que celle du théorème (1.3.4), mais suffisante pour affirmer que la solution n'explose pas en temps fini.

**Proposition 2.3.8** *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $\tau$ *et* $\sigma$ *deux constants positifs,* $\tau_t$ *et* $\sigma_t$ *des fonctions continues bornées définies sur* $\mathbb{R}$ *at* $A_t$ *une variable aléatoire. Sous les conditions d'existence et d'unicité de la solution,* 2.14 *admet une solution unique positive* $X_t$ *au temps* $t$.

**Preuve :**
Les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de la solution sont vérifiées, on a donc l'existence de la solution pour toute condition initiale. Déterminons la forme explicite de cette solution. En apercevant que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique, on peut appliquer la formule d'Itô au processus avec une fonction bien choisie. Prenons une fonction $Y : (x, t) \mapsto ln\left|\dfrac{X_t}{K - X_t}\right|$, $K \neq X_t\ \forall t \geqslant 0$ qui est de classe $C^2$ et à dérivées bornées sur un compact de $\mathbb{R}$, on obtient :

$$dY_t = \frac{K dX_t}{X_t(K - X_t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{K(K - 2X_t)dX_t^2}{X_t^2(K - X_t)^2}\right) + \left[ln\left|\frac{X_t + X_t(K - X_t)A_t}{K - X_t - X_t(K - X_t)A_t}\right| - ln\left|\frac{X_t}{K - X_t}\right|\right] dN_t.$$

En utilisant l'EDS et en simplifiant, il suit que

$$dY_t = K(\tau dt + \sigma dB_t) - \frac{K\sigma^2}{2}(K - 2X_t)dt + ln\left|\frac{\Big(1 + (K - X_t)A_t\Big)}{1 - X_t A_t}\right| dN_t$$
$$= K(\tau - \frac{K\sigma^2}{2})dt + K\sigma dB_t - K\sigma^2 X_t dt + ln\left|1 + \frac{KA_t}{1 - X_t A_t}\right|]dN_t$$

d'où

$$Y_t = ln\left(\frac{x_0}{K - x_0}\right) + K(\tau - \frac{K\sigma^2}{2})t + K\sigma B_t + K\sigma^2 \int_0^t X_s ds$$
$$+ \sum_{i=1}^{N_t} ln\left|1 + \frac{KA_{T_i}}{1 - X_t A_{T_i}}\right|.$$

Aussi

$$\frac{X_t}{K - X_t} = \frac{x_0}{K - x_0} exp\left[K(\tau - \frac{K\sigma^2}{2})t + K\sigma B_t + K\sigma^2 \int_0^t X_s ds\right] \times \prod_{i=1}^{N_t}\left(1 + \frac{KA_{T_i}}{1 - X_t A_{T_i}}\right) \tag{2.18}$$

□

**Proposition 2.3.9** *Soit $X_t$ la solution de (2.14), on a :*

- *si $A_t < \dfrac{1}{X_t}$ alors $K - X_t$ et $K - x_0$ sont de même signe pour tout $t \geqslant 0$;*
- *si $K < x_0$ alors $K < X_t$ pour tout $t \geqslant 0$;*
- *si $x_0 < K$ alors $X_t < K$ pour tout $t \geqslant 0$;*
- *si $x_0 = K$ alors $X_t = K$ pour tout $t \geqslant 0$.*

**Proposition 2.3.10** *On suppose $\tau > \dfrac{\sigma^2 K}{2}$. Alors $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} X_t = K$ pour tout $x_0 > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$.*

**Preuve :**

En considérant l'EDS (2.18), si $\tau > \dfrac{\sigma^2 K}{2}$, $1 \neq X_t A_t$ et $K \neq x_0$, alors

$$\liminf_{t \longrightarrow \infty}\left(\frac{x_0}{K - x_0}\right) exp\left[K(\tau - \frac{K\sigma^2}{2})t + K\sigma B_t\right] \leq \liminf_{t \longrightarrow \infty}\left(\frac{X_t}{K - X_t}\right)$$

ceci est possible uniquement lorsque $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} X_t = K$, puisque le premier terme est infini. □

**Equation déterministe associée à(2.14)**

En prenant l'espérance de droite de l'équation (2.14), on obtient l'EDD associée à ce modèle :

$$dX_t = X_t(K - X_t)(\tau + \lambda E[A_t])dt.$$

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(K - X_t)\tau + \lambda E[A_t])dt \\ \frac{1}{K}\left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{K - X_t}\right)dX_t &= (\tau + \lambda E[A_1])dt \\ \frac{dX_t}{X_t} - \left(\frac{-dX_t}{K - X_t}\right) &= K(\tau + \lambda E[A_1])dt \\ \frac{X_t}{K - X_t} &= \frac{x_0 e^{K(\tau+\lambda E[A_1])t}}{K - x_0} \\ X_t &= \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-K(\tau+\lambda E[A_1])t}} \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.11** *On a les propriétés suivantes :*

- *si* $K = 0$ *ou* $x_0 = 0$ *alors* $X_t = 0$ *pour tout* $t > 0$;
- *si* $K = x_0$ *alors* $X_t = K$ *pour tout* $t \geqslant 0$;
- *si* $0 < K < x_0$ *alors* $X_t$ *décroit avec* $K < X_t$ *pour tout* $t > 0$;.
- *si* $0 < x_0 < K$ *alors* $X_t$ *croit avec* $X_t < K$ *pour tout* $t > 0$;.
- $\lim_{t \longrightarrow 0} X_t = x_0$;
- $\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = K$.

### 2.3.6 EDS dirigée par un mouvement brownien fractionnaire

**Définition 2.3.1** *Soient* $a(t)$ *et* $\sigma(t)$ *:*$[0, T] \to \mathbb{R}$ *deux processus stochastiques. On dit qu'un processus stochastique* $\{X_t : t \in [0, T]\}$ *est un différentiel stochastique par rapport à un mouvement brownien fractionnaire* $B_t^H$ *si pour tout* $t \in [0, T]$*, le processus s'écrit sous la forme suivante :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^H \tag{2.19}$$

*où* $X_0$ *est une variable aléatoire.*

### Formule d'Itô fractionnaire

Soit $B_t^H$ un mouvement brownien et soit $F(t, W_t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$, alors pour tout $H \in (0, 1)$, on peut enoncer le théorème d'Itô fractionnaire suivante

$$F(t, W_t^H) = F(0, W_0^H) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}\Big(s, W_s^H\Big)ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\Big(s, W_s^H\Big)dB_s^H + H\int_0^t s^{2H-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big(s, W_s^H\Big)ds \quad (2.20)$$

### Exemple d'application

Considérons l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck dirigée par un mouvement brownien fractionnaire . Elle s'écrit sous la forme :

$$dX_t = b(a - X_t)dt + \sigma dB_t^H \quad (2.21)$$

On peut déterminer la solution de (2.18)en utilisant le facteur intégrant :

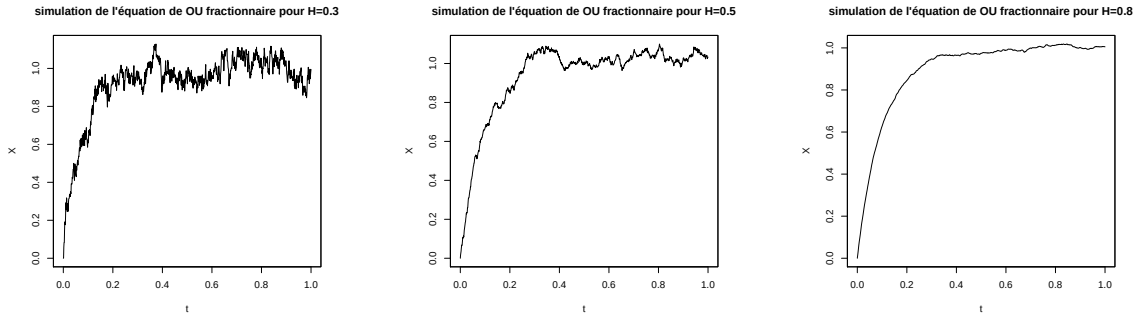
$$F(t, B_t^H) = \exp(\int_0^t bds).$$

Posons $Y_t = F(t, B_t^H) = X_t e^{bt}$; donc

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + ab\int_0^t e^{bs}ds + \int_0^t e^{bs}dB_s^H$$

d'où

$$X_t = x_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \sigma\int_0^t e^{-b(t-s)}dB_s^H.$$




(a) (b) (c)

FIGURE 2.3 – Simulation de l'équation de O.U pour différente valeur de H

## 2.4 Méthodes numériques pour les EDS

Les méthodes de simulation sont généralement basées sur des approximations discrètes de la solution. Dans la majorité des cas, l'impossibilité de déterminer une solution explicite impose l'utilisation de méthodes d'approximations discrètes. Dans cette partie, nous allons introduire les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta. Pour plus de détails, on se refère à (Jedrzejewski [58]) et, pour ce qui concerne plus particulièrement les EDS, à (Iacus [55]). Notons que ce dernier ne s'intéresse qu'aux EDS gouvernées par un processus de Wiener.

### Méthode d'Euler

La méthode de Leonhard Euler(1707-1783) est une méthode à pas séparé du premier ordre. Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ par le schéma discret $\frac{X_{t+h} - X_t}{h}$. C'est l'un des schémas les plus simples et le plus appliqué pour résoudre numériquement des équations différentielles. L'idée est la suivante : On se place sur l'intervalle $[0, T], T \in \mathbb{R}_+$ où l'on discrétise notre solution $X_t$. On partitionne l'intervalle $[0, T]$ en $N$ sous-intervalles de longueur $\Delta t > 0$ de sorte que

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [n\Delta t, (n+1)\Delta t] \tag{2.22}$$

avec $N\Delta t = T$. Ainsi, si l'on considère l'EDS suivante

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{2.23}$$

On va définir $\hat{X}_t$ comme une chaîne de Markov.
On initialise la chaîne de Markov $\hat{X}_0 = x_0$. L'approximation d'Euler de $(X_t)$ est un processus stochastique continu $(\hat{X}_t)$ qui satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + b(t, \hat{X}_t)\Delta t + \sigma(t, \hat{X}_t)\Delta \hat{B}_t \tag{2.24}$$

avec $\Delta \hat{B}_t = B_{t+1} - B_t$ représentent les accroissements du processus de Wiener $B = (B_t, t \geqslant 0)$, qui suit une loi normale centrée $N(0, \Delta t) = \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$. Chaque ensemble produit par la méthode d'Euler-Maruyama est une réalisation approximative de la solution stochastique du processus $X_t$ qui dépend de la loi $N(0, \Delta t)$

### Méthode Runge-Kutta

La méthode de Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta (1901), noté Runge-Kutta, est une méthode à pas unique. C'est une généralisation de la méthode d'Euler. Avec

Euler, on n'utilise que la dérivée première, par contre avec Runge-Kutta, on utilise que les premiers éléments du développement limité. La méthode d'ordre 1 se réduit à celle d'Euler. Cette méthode nous permet de réaliser des simulations utilisant un nombre aléatoire issu d'une distribution gaussienne. Il existe d'autres méthodes de Runge-Kutta d'ordre plus élevé, mais qui font intervenir des variables aléatoires non-gaussiennes, ce qui complique la résolution de l'EDS.
Prenons un exemple, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1.5 L'idée est la suivante :

$$X_{t+1} = X_t + b(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}\Big(\sigma(t, X'_t) - \sigma(t, X_t)\Big)\frac{(\Delta B_t)^2 - \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} \quad (2.25)$$

avec $X'_t = X_t + b(X_t)\Delta t + \sigma(X_t)\sqrt{\Delta t}$.

## 2.5 Programmes écrits dans l'environnement R

Afin de simuler les modèles à sauts proposés en (2.5) et (2.10), différents scripts ont été écrits avec , en utilisant les propriétés des processus de Poisson et de Wiener. Pour plus de détails concernant la simulation numérique des EDS, on peut consulter l'ouvrage de Iacus ([55]). L'auteur y propose, dans le package sde, quelques scripts pour la modélisation de certaines EDS. Le lecteur intéressé pourra trouver une intéressante introduction à dans ([70]) et ([71]).

### 2.5.1 Simulations numériques du modèle Black-Scholes à sauts

Nous avons effectué des simulations numériques exactes des trajectoires de $X_t$ en appliquant un algorithme en trois étapes :

1. Simulation du nombre de sauts de Poisson
2. Simulation des amplitudes de sauts
3. Simulation du modèle Black-Scholes classique entre deux sauts consécutifs.

Nous avons ainsi pu construire des jeux de données artificielles. Des fonctions natives de permettant la génération de lois usuelles ont été utilisées. Il s'agit des fonctions suivantes : rpois, runif, rnorm et rlnorm. Le script **simBSsauts2** (Voir Annexe B) effectue ces simulations numériques.

### 2.5.2 Simulations numériques du Langevin à sauts

Comme pour le modèle de Black-Scholes à sauts, des simulations numériques exactes ont pu être réalisées pour le modèle de Langevin à sauts en appliquant un algorithme similaire à trois étapes :

1. Simulation du nombre de sauts de Poisson
2. Simulation des amplitudes de sauts
3. Simulation du modèle de Langevin classique entre deux sauts consécutifs.

Le script **simLAsauts2** (voir Annexe B) effectue ces simulations numériques.

# Chapitre 3

# Inférence statistique sur les modèles à sauts

## 3.1 Introduction

Les modèles fondés sur les équations différentielles stochastiques sont utilisées dans différentes domaines telles la dynamique de population, l'écologie, la finance, la physique. Mener l'inférence statistique pour les paramètres inconnus dans les EDS est un exercice difficile. Toutes les méthodes présentent des avantages et des inconvénients. Certaines des approches incluent la méthode des moments, d'autres les techniques de vraisemblance ou la méthode d'augmentation des données. Notons que la litérature concernant l'inférence statistique dans les processus stochastiques en temps discret est plus abondante depuis les travaux de (Box et Jenkins [61]), comme le souligne (Moore [17]) dans son aperçu historique sur l'inférence statistique dans les processus stochastiques.

Pour mener à bien l'inférence statistique sur les modèles vus précédement, il convient de distinguer les différents types d'observations disponibles. Les variables à observer ou échantillonner sont les $X_t$, $A_t$ et $T_i$ c'est-à-dire des enregistrements du phénomène étudié ainsi que les éléments du processus ponctuel générateur de sauts. Les cas possibles sont les suivants :

1. observation complète sur un intervalle $[0, t]$ : pour tout $s \in [0, t]$, $(X_s, A_s, N_s)$ est observé, $t > 0$ étant la date finale d'observation.

2. observation partielle sur l'intervalle $[0, t]$ : le processus $X$ est observé aux dates $t_1, \ldots, t_n$, le processus $N$ est totalement observé sur $[0, t]$ ainsi que les amplitudes de saut associées $(A_i)_{i \in [\![1, N_t]\!]}$

3. observation partielle sur l'intervalle $[0, t]$ : seul le processus $X$ est observé aux dates $t_1, \ldots, t_n$.

Le premier cas est très rare car il correspond à une observation continue dans le temps. Or les observations disponibles sont souvent discrètes dans le temps. Néanmoins, quand tel est le cas, l'estimation paramétrique peut être effectuée en deux étapes selon (Fuchs [43])
Le deuxième cas auquel nous nous sommes consacrés principalement est plus fréquent.
Le troisième cas, pour les modèles à sauts, est plus ardu d'un point de vue de l'inférence statistique car il nécessite une estimation des dates et amplitudes de sauts. Il est important de préciser que de nombreux auteurs se sont intéressés à l'estimation des paramètres de diffusion dans le cas d'observations en temps discret de ces processus de diffusion (pour plus d'éléments, voir Sorensen [62]) car les EDS associées n'incluent comme processus stochastique que le mouvement brownien. Ainsi, (Sorensen [62]) ne s'intéresse qu'aux solutions de EDS gouvernée par un processus de Wiener et exclut les processus de Lévy à sauts.
Dans la suite de ce chapitre, nous nous focalisons sur la situation 2 pour laquelle le processus $X$ est observé aux dates distinctes $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$ alors que les dates et amplitudes de saut $(T_i, A_i)_{i \in [\![1, N_t]\!]}$ sont observées sur $[0, t]$. Notre approche sera basée sur la construction de la vraisemblance de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ conditionnellement à $(T_i, A_i)_{i \in [\![1, N_t]\!]}$.
En plus des conditions d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS (voir théorème de Lévy 1.3.4), Lo ([19]) fournit les conditions pour mettre en oeuvre les techniques d'estimation basées sur la vraisemblance du processus solution. Soit $(X_t)$ la solution de l'EDS donnée par

$$dX_t = a(X_t, t, \alpha) + b(X_t, t, \beta)dB_t + c(X_t, t, \gamma)dN_t \tag{3.1}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma)$ appartient à l'espace des paramètres $A \times B \times \Gamma$.
Alors Lo ([19]) propose que :

C1. Les fonctions $a, b, et\, c$ sont deux fois continument différentiables en $(X_t, t)$ et trois fois différentiables sur $A \times B \times \Gamma$. La fonction $\tilde{c}(X_t, t, \gamma) = X_t + c(X_t, t, \gamma)$ est bijective et

$$\forall (t, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma \; et \, X_t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\gamma c}{\gamma X_t} + 1 \right| \neq 0.$$

C2. Le vrai paramètre (inconnu) $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0)$ est situé dans l'intérieur d'un espace compact de dimension finie $\Theta = A \times B \times \Gamma \times \Lambda$.

Comme la solution de l'EDS (3.1) est un processus de Markov (Arnold [35]) la vraisemblance s'exprime à partir des probabilités de transition associées.

## 3.2 Cas du modèle Black-Scholes à sauts

### 3.2.1 Vraisemblance

Dans le cas des observations concernant la solution $X$ de l'EDS (2.5), le théorème (3.2.1) ci-dessous, nous fournit la vraisemblance conditionnelle pour un échantillon $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

**Lemme 3.2.1** *Soit $X$ la solution de l'EDS (2.5). Si les sauts $A_j$ sont des variables indépendantes alors le processsus $(\log(X_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants. De plus, ces accroissements vérifient*

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad avec\ s < t, \quad E[\log(X_t) - \log(X_s)] \propto t - s.$$

**Preuve :**
Soit $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $s < t$, à partir de l'équation (2.6) et en posant $Y_t = \log(X_t)$, on obtient

$$Y_t - Y_s = -(\tau + \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(B_t - B_s) + \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \log(1 + A_j). \tag{3.2}$$

Comme les processus $B$ et $N$ sont à accroissements indépendants et que les $A_j$ sont indépendants, il en résulte que $Y_t - Y_s$ est indépendant de

$$Y_s = -(\tau + \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s + \sum_{j=0}^{N_s} \log(1 + A_j).$$

D'autre part,

$$E[Y_t - Y_s] = \Big( - (\tau + \frac{\sigma^2}{2}) + \lambda E[\log(1 + A_1)]\Big)(t-s).$$

□

**Remarque 3.2.1** *Si le processus $(A_t)$ est un processus Gamma qui est PAI, alors $(Y_t)$ reste un PAI.*

**Théorème 3.2.1** *Soit $(t,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, soit $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ les observations aux dates $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$ de la solution $X$ du modèle de Black-Scholes à sauts*

*(2.5). En posant, pour tout $s$ dans $[0,t], Y_s = \log(X_s)$, alors la vraisemblance $V_1$ de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ conditionnelle à $(A_i)_{i\in[\![1,N_t]\!]}$ et $(N_s)_{s\in[0,t]}$ s'écrit :*

$$V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau,\sigma,\theta,\lambda\Big) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\left(\left(-\Big(\Delta Y_{t_i} + (\tau+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)\Big)^2\right) / (2\sigma^2(\Delta t_i))\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta t_i)}}$$

*où $\Delta Y_{t_i} = Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}$ et $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$.*

**Preuve :**
D'après la proposition (2.3.2), le lemme (3.2.1) et l'expression suivante :

$$\Delta Y_{t_i} = Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} = -(\tau + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i + \sigma(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j),$$

conditionnellement à $(A_j)_{j\in]\!]N_{t_{i-1}},N_{t_i}]\!]}$, $\Delta Y_{t_i}$ suit une loi normale d'espérance

$$-(\tau + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i + \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)$$

et de variance $\sigma^2\Delta t_i$ ce qui nous fournit le résultat final. □

### 3.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance (MV)

La vraisemblance $V_1$ de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ conditionnelle à $(A_i)_{i\in[\![1,N_t]\!]}$ et $(N_s)_{s\in[0,t]}$, où $n$ est le nombre de dates d'observations, est fournie par les résultats du paragraphe (3.2) précédent. La proposition suivante nous donne la vraisemblance non conditionnelle $V_2$ de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ :

**Proposition 3.2.1** *Si les $A_i$ sont indépendants et si le processus $N$ est indépendant des $A_i$, alors la vraisemblance de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ s'écrit :*

$$V_2\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau,\sigma,\theta,\lambda\Big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{N_t}}{N_t!}\prod_{j=1}^{N_t} f_\theta(A_j) \times V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau,\sigma,\theta,\lambda\Big)$$

*où $f_\theta$ est la fonction densité de probabilité commune aux $A_i$.*

**Preuve :**
La démonstration découle directement de la formule des probabilités composées, de l'indépendance des $A_i$ et de l'indépendance du processus $N$ avec les $A_i$. □

En appliquant la méthode du maximum de vraisemblance, nous obtenons, à partir de la proposition (3.2.1), les estimateurs suivants :

$$\widehat{\tau} = \frac{1}{t_n}\Big(\sum_{j=1}^{N_t}\log(1+A_j) - Y_{t_n}\Big) - \frac{\widehat{\sigma^2}}{2}.$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + r^*\Delta_{t_i} - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)^2(\Delta_{t_i})^{-1}\right)}{n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + r^*(\Delta_{t_i}) - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)},$$

où $r^* = \widehat{\tau} + \dfrac{\widehat{\sigma^2}}{2}$, et $\widehat{\lambda} = \dfrac{N_t}{t}$.
Dans le cas où $A_j$ suit la distribution log-normale de paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, alors

$$\widehat{\theta_1} = \frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\log\ A_j \tag{3.3}$$

$$\widehat{\theta_2} = \frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\Big(\log\ A_j - \widehat{\theta_1}\Big)^2 \tag{3.4}$$

Comme $\mu = E[A_1] = e^{\theta_1 + \frac{\theta_2}{2}}$ et $\nu = V[A_1] = e^{2\theta_1+\theta_2}(e^{\theta_2} - 1)$, alors

$$\widehat{\mu} = e^{\widehat{\theta_1} + \frac{\widehat{\theta_2}}{2}} \quad \text{et} \quad \widehat{\nu} = e^{2\widehat{\theta_1}+\widehat{\theta_2}}(e^{\widehat{\theta_2}} - 1).$$

Notons que si $f_\theta$ est fonction de covariables, l'inférence concernant $\sigma^2, \tau$ *et* $\lambda$ ne s'en trouve pas affectée.

### 3.2.3 Rapport de vraisemblance

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au logarithme du rapport de vraisemblance pour deux hypothèses relatives aux taux de décroissance $\tau$.

**Proposition 3.2.2** *Soit $(t,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, soit $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ les observations aux dates $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$ de la solution $X$ du modèle de Black-Scholes à sauts (2.5). En posant, pour tout $s$ dans $[0,t]$, $Y_s = \log(X_s)$, alors le logarithme $\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0, \tau_1, \sigma^2, Y)$ du rapport de vraisemblance pour deux hypothèses concernant $\tau$,*

$$H_0 : \tau = \tau_0 \quad et \quad H_1 : \tau = \tau_1,$$

*est le suivant*

$$\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0, \tau_1, \sigma^2, Y) = \frac{\tau_0 - \tau_1}{\sigma^2}\Big(Y_{t_n} - Y_{t_0} - \sum_{j=1}^{N_{t_n}} \log(1+A_j) + \frac{t_n - t_0}{2}(\sigma^2 + \tau_0 + \tau_1)\Big) \quad (3.5)$$

**Preuve :**
Le logarithme du rapport de vraisemblance est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0, \tau_1, \sigma^2, Y) &= \log\left(\frac{V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]}; \tau_1, \sigma, \theta, \lambda\Big)}{V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]}; \tau_0, \sigma, \theta, \lambda\Big)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{0,i}^2 - M_{1,i}^2}{2\sigma^2 \Delta t_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(M_{0,i} - M_{1,i})(M_{0,i} + M_{1,i})}{2\sigma^2 \Delta t_i}\end{aligned}$$

où

$$M_{1,i} = \Delta Y_{t_i} + (\tau_1 + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1 + A_j)$$

et

$$M_{0,i} = \Delta Y_{t_i} + (\tau_0 + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1 + A_j).$$

Comme

$$M_{0,i} - M_{1,i} = (\tau_0 - \tau_1)\Delta t_i$$

et

$$M_{0,i} + M_{1,i} = 2\Delta Y_{t_i} + (\sigma^2 + \tau_0 + \tau_1)\Delta t_i - 2\sum_{j=1}^{N_{t_n}} \log(1 + A_j),$$

on en déduit le résultat final. □

Ainsi, pour tester l'hypothèse d'égalité du taux de décroissance, la statistique suivante correspondant au rapport de vraisemblance peut être utilisée :

$$\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\widehat{\tau},\widehat{\sigma}^2,Y)=\frac{\tau_0-\widehat{\tau}}{\widehat{\sigma^2}}\Big(Y_{t_n}-Y_{t_0}-\sum_{j=1}^{N_{t_n}}\log(1+A_j)+\frac{t_n-t_0}{2}(\widehat{\sigma^2}+\tau_0+\widehat{\tau})\Big)$$

où

$$\widehat{\tau}=\frac{1}{t_n}\Big(\sum_{j=1}^{N_t}\log(1+A_j)-Y_{t_n}\Big)-\frac{\widehat{\sigma^2}}{2} \tag{3.6}$$

et

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\Big(\Delta_{Y_{t_i}}+r^*\Delta_{t_i}-\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)^2(\Delta_{t_i})^{-1}\right)}{n+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\Delta_{Y_{t_i}}+r^*(\Delta_{t_i})-\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)} \tag{3.7}$$

avec $r^*=\widehat{\tau}+\dfrac{\widehat{\sigma^2}}{2}$.

**Proposition 3.2.3** .
*Sous l'hypothèse $H_0$, le rapport du log-vraisemblance $\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)$ suit une loi normale d'espérance*

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau_1-\tau_0}{\sigma}\Big)^2(t_n-t_0)$$

*et de variance*

$$\Big(\frac{\tau_0-\tau_1}{\sigma}\Big)^2(t_n-t_0).$$

**Preuve :**
D'après l'expression (3.2) , on a

$$Y_{t_n}-Y_{t_0}=-(\tau_0+\frac{\sigma^2}{2})(t_n-t_0)+\sigma(B_{t_n}-B_{t_0})+\int_{t_0}^{t_n}\log(1+A_s)dN_s.$$

Posons

$$Z_n=Y_{t_n}-Y_{t_0}+(\tau+\frac{\sigma^2}{2})(t_n-t_0)-\int_{t_0}^{t_n}\log(1+A_s)dN_s.$$

Ainsi, $Z_n$ est l'accroissement entre $t_0$ et $t_n$ d'un processus de Wiener de variance $\sigma^2$, donc

$$E[Z_n]=0\quad et\quad V[Z_n]=\sigma^2(t_n-t_0).$$

Comme

$$\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)=\frac{\tau_0-\tau_1}{\sigma^2}\Big(Z_n+\frac{\tau_1-\tau_0}{2}(t_n-t_0)\Big), \tag{3.8}$$

donc

$$E[\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)]=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau_1-\tau_0}{\sigma}\Big)^2(t_n-t_0)$$

et

$$V[\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)]=\Big(\frac{\tau_0-\tau_1}{\sigma}\Big)^2(t_n-t_0).$$

D'autre part, l'expression (3.8) montre que $\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)$ est une transformation affine de $Z_n$ qui est gaussienne, donc est également une variable gaussienne. □

**Proposition 3.2.4** *La région critique $R_\alpha$ de niveau $\alpha$ pour le test*

$$H_0:\tau=\tau_0 \quad \textit{contre} \quad H_1:\ tau=\tau_1$$

*vérifie*

$$R_\alpha=\left\{\frac{|\mathcal{L}_{A,N}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y)+\frac{1}{2}\frac{\tau_1-\tau_0}{\sigma}(t_n-t_0)|}{\frac{|\tau_0-\tau_1|}{\sigma}\sqrt{t_n-t_0}}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

*où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi gaussienne centrée réduite.*

**Preuve :**
Ceci est une conséquence immédiate de la proposition (3.2.3).

## 3.3 Cas du modèle Black-Scholes à sauts et régimes

### 3.3.1 Vraisemblance d'échantillon

Il convient de souligner que les régimes peuvent être observés ou cachés. Quand ils sont observés, la proposition suivante nous fournit la vraisemblance d'échantillon :

**Proposition 3.3.1** *Soit $(t,n)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{N}^*$, soit $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ les observations aux dates $0\le t_1,\dots,t_n\le t$ de la solution $X$ du modèle de Black-Scholes à sauts et régimes (2.8). En posant, pour tout $s$ dans $[0,t]$, $Y_s=\log(X_s)$, alors la vraisemblance*

*$V_1$ de $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ conditionnelle à $(A_i)_{i\in[\![1,N_t]\!]}$ et $(N_s)_{s\in[0,t]}$ s'écrit :*

$$V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau,\sigma,\theta,\lambda\Big) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(f_1(c_k,\sigma,\Delta t_i,\Delta Y_{t_i},A,N)\mathbb{1}_{S_k\times S_k}(t_{i-1},t_i)+ f_2(c_{k-1},c_k,\sigma,\Delta t_i,\Delta Y_{t_i},A,N)\mathbb{1}_{S_{k-1}\times S_k}(t_{i-1},t_i)\Big)$$

*où*

$$f_1(c_k,\sigma,\Delta t_i,\Delta Y_{t_i},A,N) = \frac{\exp\left(\left(-\Big(\Delta Y_{t_i}+(c_k+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i-\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)^2\right)/\left(2\sigma^2(\Delta t_i)\right)\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta t_i)}},$$

$$f_2(c_{k-1},c_k,\sigma,\Delta t_i,\Delta Y_{t_i},A,N) = \frac{\exp\left(\left(-\Big(\Delta Y_{t_i}+\frac{\sigma^2}{2}\Delta t_i+c^*(s_k,t_{i-1},t_i)-\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)^2\right)/\left(2\sigma^2(\Delta t_i)\right)\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta t_i)}},$$

*avec $c^*(s_k,t_{i-1},t_i) = c_k(t_i-s_k)+c_{k-1}(s_k-t_{i-1})$.*

**Preuve :**
Dans le cas où $t_{i-1}$ et $t_i$ sont dans $S_k$, la vraisemblance s'écrit en remplaçant $\tau$ par $c_k$, dans l'expression du $i^{eme}$ facteur de $V_1$ donnée par le théorème (3.2.1) et l'égalité :

$$Y_{t_i}-Y_{t_{i-1}} = -(c_k+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i+\sigma(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})+\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)$$

qui nous précise que l'espérance de $\Delta Y_{t_i}$ conditionnelle aux processus $A$ et $N$ est

$$-(c_k+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i+\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j).$$

Dans le cas où $t_{i-1} \in S_{k-1}$ et $t_i \in S_k$, la vraisemblance s'écrit en tenant compte de l'égalité $\Delta Y_{t_i} = (Y_{t_i} - Y_{s_k}) + (Y_{s_k} + Y_{t_{i-1}})$ dont l'espérance conditionnelle aux processus $A$ et $N$ est :

$$\frac{\sigma^2}{2}\Delta t_i - c_k(t_i - s_k) - c_{k-1}(s_k - t_{i-1}) - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1 + A_j).$$

□

### 3.3.2 Test de rupture de régime

Nous allons considérer la situation où nous voulons vérifier qu'il y a un changement de régime (relatif au paramètre $\tau$) dans l'intervalle d'observation $[0, t]$ à une date inconnue, dite de rupture. Nous nous intéressons donc aux hypothèses suivantes

$$\begin{cases} H_0 : \tau = \tau_0 \quad \text{sur} \quad [0, t] \\ H_{1,k} : \tau = \tau_0 \quad \text{sur} \quad [0, t_k] \quad \text{et} \quad \tau = \tau_1 \quad \text{sur} \quad ]t_k, t] \\ H_1^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n-1} H_{1,k}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Les $t_k$ sont les $n$ dates d'observations du processus de Black-Scholes à sauts et régimes. $H_1^{(n)}$ correspond à l'hypothèse selon laquelle il y a un unique changement de régime dans l'intervalle $[0, t]$. Le problème de test $H_0$ contre $H_1^{(n)}$ est donc l'hypothèse l'absence de changement de régime contre une rupture de régime qu'il convient de détecter.

**Proposition 3.3.2** *Soit $(t, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, soit $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ les observations aux dates $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$ de la solution $X$ du modèle de Black-Scholes à sauts avec au plus 2 régimes (2.8) dans l'intervalle $[0, t]$. Alors le logarithme $\mathcal{L}_{A,N}^{(k)}(\tau_0, \tau_1, \sigma^2, Y)$ du rapport de vraisemblance pour les deux hypothèses $H_0$ et $H_{1,k}$ de l'expression (3.9) est*

$$\mathcal{L}_{A,N}^{(k)}(\tau_0, \tau_1, \sigma^2, Y) = \frac{\tau_0 - \tau_1}{\sigma^2}\left(Y_{t_n} - Y_{t_k} - \int_{t_k}^{t_n} \log(1 + A_s) dN_s + \frac{t_n - t_k}{2}(\sigma^2 + \tau_0 + \tau_1)\right)$$

**Preuve :**

Le logarithme du rapport de vraisemblance est :

$$\mathcal{L}_{A,N}^{(k)}(\tau_0,\tau_1,\sigma^2,Y) = \log\left(\frac{V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau_1,\sigma,\theta,\lambda\Big)}{V_1\Big((X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]};\tau_0,\sigma,\theta,\lambda\Big)}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{M_{0,i}^2 - M_{1,i}^2}{2\sigma^2\Delta t_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(M_{0,i}-M_{1,i})(M_{0,i}+M_{1,i})}{2\sigma^2\Delta t_i}$$

où $M_{1,i} = \Delta Y_{t_i} + (\tau_1^* + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)$ avec $\tau_1^* = \tau_0 \mathbb{1}_{[\![1,k]\!]}(i) + \tau_1 \mathbb{1}_{[\![k+1,n]\!]}(i)$

et $M_{0,i} = \Delta Y_{t_i} + (\tau_0 + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_i - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)$.

Comme

$$M_{0,i} - M_{1,i} = (\tau_0 - \tau_1^*)\Delta t_i = (\tau_0-\tau_1)\Delta t_i \mathbb{1}_{[\![k+1,n]\!]}(i)$$

et

$$M_{0,i} + M_{1,i} = 2\Delta Y_{t_i} + (\sigma^2 + \tau_0 + \tau_1^*)\Delta t_i - 2\sum_{j=1}^{N_{t_n}} \log(1+A_j),$$

on en déduit le résultat final. □

La proposition (3.3.2) fournit un outil intéressant pour l'étude théorique de la puissance $H_0$ contre $H_{1,k}$. Cependant, dans la pratique, les paramètres $\tau$ et $\sigma$ sont inconnus et peuvent être estimés par maximum de vraisemblance. Les expressions de ces estimateurs sont données par (3.6) et (3.7). Notons que les tests de détection de ruptures ont été discutés par ([30]) ainsi que Ghorbanzadeh ([28]), ce dernier s'intéressant en particulier à la rupture de l'espérance dans un échantillon gaussien. Notons $\widehat{\tau_0}$ et $\widehat{\sigma_0^2}$ les estimateurs MV sous $H_0$, on a

$$\widehat{\tau_0} = \frac{1}{t_n}\Big(\sum_{j=1}^{N_t}\log(1+A_j) - Y_{t_n}\Big) - \frac{\widehat{\sigma_0^2}}{2} \tag{3.10}$$

et

$$\widehat{\sigma_0^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_0^*}\Delta_{t_i} - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)^2(\Delta_{t_i})^{-1}\right)}{n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_0^*}(\Delta_{t_i}) - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}}\log(1+A_j)\Big)} \tag{3.11}$$

avec $\widehat{r_0^*} = \widehat{\tau_0} + \dfrac{\widehat{\sigma_0^2}}{2}$.

D'autre part, les estimateurs MV sous $H_{1,k}$ notés $\widehat{\tau_{1,k}}$ et $\widehat{\sigma_{1,k}^2}$ avant rupture, et $\widehat{\tau_{2,k}}$ et $\widehat{\sigma_{2,k}^2}$ après rupture, sont

$$\widehat{\tau_{1,k}} = \frac{1}{t_k}\Big(\int_0^{t_k} \log(1+A_s)dN_s - Y_{t_k}\Big) - \frac{\widehat{\sigma_{1,k}^2}}{2} \tag{3.12}$$

et

$$\widehat{\sigma_{1,k}^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_{1,k}^*}\Delta_{t_i} - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)\Big)^2 (\Delta_{t_i})^{-1}\right)}{n + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_{1,k}^*}(\Delta_{t_i}) - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)\Big)} \tag{3.13}$$

avec $\widehat{r_{1,k}^*} = \widehat{\tau_{1,k}} + \dfrac{\widehat{\sigma_{1,k}^2}}{2}$.

$$\widehat{\tau_{2,k}} = \frac{1}{t_n - t_k}\Big(\int_{t_k}^{t_n} \log(1+A_s)dN_s - Y_{t_n} - Y_{t_k}\Big) - \frac{\widehat{\sigma_{2,k}^2}}{2} \tag{3.14}$$

et

$$\widehat{\sigma_{2,k}^2} = \frac{\displaystyle\sum_{k+1}^{n}\left(\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_{2,k}^*}\Delta_{t_i} - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)\Big)^2 (\Delta_{t_i})^{-1}\right)}{n + \displaystyle\sum_{k+1}^{n}\Big(\Delta_{Y_{t_i}} + \widehat{r_{2,k}^*}(\Delta_{t_i}) - \sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} \log(1+A_j)\Big)} \tag{3.15}$$

avec $\widehat{r_{2,k}^*} = \widehat{\tau_{2,k}} + \dfrac{\widehat{\sigma_{2,k}^2}}{2}$.

On peut vérifier que

$$\widehat{r_0^*} = \frac{t_k}{t_n}\widehat{r_{1,k}^*} + \Big(1 - \frac{t_k}{t_n}\Big)\widehat{r_{2,k}^*} \tag{3.16}$$

et donc que

$$\widehat{\tau_0} = \frac{t_k}{t_n}\widehat{\tau_{1,k}} + \Big(1 - \frac{t_k}{t_n}\Big)\widehat{\tau_{2,k}} + \frac{1}{2}\Big(\frac{t_k}{t_n}\widehat{\sigma_{1,k}^2} + \Big(1 - \frac{t_k}{t_n}\Big)\widehat{\sigma_{2,k}^2} - \widehat{\sigma_0^2}\Big) \tag{3.17}$$

La valeur $k$ correspondant à une rupture entre les dates d'observations consécutives $t_k$ et $t_{k+1}$ est estimée en choisissant la valeur $\widehat{k}$ de $[\![1, n-1]\!]$ réalisant le maximum de

$$\mathcal{L}_{A,N}^{(k)}(Y) = \mathcal{L}_{A,N}\Big(\widehat{\tau_0}, \widehat{\tau_{1,k}}, \widehat{\sigma_{1,k}^2}, (Y_{t_i})_{i\in[\![1,k]\!]}\Big) + \mathcal{L}_{A,N}\Big(\widehat{\tau_0}, \widehat{\tau_{2,k}}, \widehat{\sigma_{2,k}^2}, (Y_{t_i})_{i\in[\![k+1,n]\!]}\Big). \tag{3.18}$$

L'hypothèse $H_0$ d'absence de changement de régime sera rejetée quand la valeur de la statistique de test $\mathcal{L}_{A,N}^{(\widehat{k})}(Y)$ sera trop grande. Comme nous pouvons simuler la distribution de cette statistique de test sous $H_0$, un test de Monte Carlo peut être appliqué [29].

## 3.4 Cas du modèle de Langevin à sauts

### Méthode de vraisemblance

**Lemme 3.4.1** *Soit $X$ la solution du modèle de Langevin à sauts (2.10). Si les sauts $A_j$ sont des variables indépendantes, alors le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants.*

**Preuve :**
Soit $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $s < t$, à partir de l'équation (2.3.3), on obtient

$$X_t - X_s = x_0(e^{-\tau t} - e^{-\tau s}) + \sigma \int_s^t e^{-\tau(t-u)} dB_u + \int_s^t e^{-\tau(t-u)} A_u dN_u \tag{3.19}$$

Etant donné que les processus $B$ et $N$ sont à accroissements indépendants, et que les $A_j$ sont indépendants, on déduit que $X_t - X_s$ est indépendant de $X_s$, c'est-à-dire

$$x_0 e^{-\tau s} + \sigma \int_0^s e^{-\tau(t-u)} dB_u + \int_0^s e^{-\tau(t-u)} A_u dN_u.$$

□

**Théorème 3.4.1** *Soit $(t,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, soit $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ les observations aux dates $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq t$ de la solution $X$ du modèle de Langevin à sauts (2.3.3). La vraisemblance $V_3$ de $(\Delta X_{t_1}, \ldots, \Delta X_{t_n})$ conditionnelle à $(A_i)_{i\in[\![1,N_t]\!]}$ et $(N_s)_{s\in[0,t]}$ s'écrit :*

$$V_3\Big((\Delta X_{t_i})_{i\in[\![1,n]\!]}; \tau, \sigma, \theta, \lambda\Big) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\left(\left(-(\Delta X_{t_i} - x_0(e^{-\tau t_i} - e^{-\tau t_{i-1}}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2\tau(t_i-s)} A_s dN_s)^2\right) / \left(\sigma^2\tau^{-1}(1 - e^{-2\tau\Delta t_i})\right)\right)}{\sqrt{\pi\sigma^2\tau^{-1}(1 - e^{-2\tau\Delta t_i})}}$$

**Preuve :**
Selon le corollaire (2.3.3), le lemme (3.4.1) et l'expression de (3.19), les $\Delta X_{t_i}$ sont indépendants et leurs lois conditionnelles à $(A_i)_{i\in[\![1,N_t]\!]}$, sont gaussiennes d'espérance

$$x_0(e^{-\tau t_i} - e^{-\tau t_{i-1}}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2\tau(t_i-s)} A_s dN_s,$$

et de variance $\sigma^2\tau^{-1}(1 - e^{-2\tau\Delta t_i})$. □

Le théorème (3.4.1) permet d'obtenir la log-vraisemblance et les fonctions scores permettant d'obtenir les estimateurs de maximum de vraisemblance pour $\tau$ et $\sigma^2$. On a l'expression suivante :

$$\widehat{\sigma^2} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{-(\Delta X_{t_i} - x_0(e^{-\widehat{\tau}t_i} - e^{-\widehat{\tau}t_{i-1}}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2\widehat{\tau}(t_i-s)} A_s dN_s)^2}{n\widehat{\tau}^{-1}(1 - e^{-2\widehat{\tau}\Delta t_i})}. \tag{3.20}$$

Notons que cette expression (3.20) est un outil pour le calcul de ces estimateurs MV.

## 3.5 Détection de sauts

Nous nous intéressons ici à des situations pour lesquelles ni les dates ni les amplitudes de sauts ne sont observées. Dans une telle situation, il convient de détecter ces dates et pour chacune d'entre elles, évaluer l' amplitude de saut correspondante. Pour des observations $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$, nous proposons l'algorithme suivant basé sur un nombre fixe d'itérations $N$ et un paramètre de réglage d'échelle $\alpha$ :

1) choix d'un seuil $\epsilon$,
2) calcul des $D_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$,
3) sélection des dates $t_i$ telle que $D_i > \epsilon$,
4) estimation des paramètres dont $\widehat{\sigma}$,
5) calcul de la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\epsilon)$,
6) poser $\epsilon = \alpha\widehat{\sigma}$ et $i = i + 1$
7) si $i \leqslant N$ aller en 2) sinon on s'arrête.
8) choisir comme modèle celui qui correspond à la plus forte des $N$ vraisemblances.

Nous avons écrit les fonctions suivantes dans l'environnement R (voir Annexe B) :

1. **detect** : effectue la détection de sauts et le calcul d'amplitude pour un seuil $\epsilon$ donné.

2. **vraislnorm** : calcule la vraisemblance d'un processus de Black-Scholes à sauts pour $\epsilon$ donné, soit $\mathcal{L}(\epsilon)$, pour des amplitudes de loi log-normale.
3. **vraislgamma** : calcule la vraisemblance d'un processus de Black-Scholes à sauts pour $\epsilon$ donné, soit $\mathcal{L}(\epsilon)$, pour des amplitudes de loi gamma.

# Chapitre 4

# Applications

## Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif est de discuter de la modélisation du débit d'eau dans certain cours d'eau de la Guadeloupe. En effet, certaines rivières sont connues pour avoir un débit modeste à certaines périodes de l'année mais avec des pics soudains et brefs plus ou moins corrélés avec la pluviométrie. Nous considérons que l'observation du débit d'eau en un point donné du cours d'eau peut être décrit à l'aide d'un processus stochastique en temps continu et à valeurs réelles. En raison des pics ponctuels soudains, il est pertinent de considérer les solutions d'EDS gouvernées par un processus de Lévy à sauts. Vu les propriétés distributionnelles et statistiques étudiées aux chapitres 2 et 3, nous pouvons envisager les modèles de Black-Scholes à sauts ou celui de Langevin à sauts. Il est à noter que le modèle de Black-Scholes à sauts permet d'envisager le tarissement jusqu'à assèchement. En effet, pour tout couple $(s,t)$ de $\mathbb{R}_+^2$ avec $s<t$, on a :

$$X_t = X_s \exp\left(-(\tau+\frac{\sigma^2}{2})(t-s)+\sigma(B_t-B_s)+\sum_{j=N_s+1}^{N_t}\log(1+A_j)\right)$$

et, selon le corollaire (2.3.1), si $\tau > \lambda\mu$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} E[X_t]=0$.
Cela signifie que, si $\tau$ le taux est suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur au cumul espéré d'amplitudes de saut par unité de temps, alors le débit espéré $E[X_t]$ converge au cours du temps vers 0.
Notons que le cumul espéré d'amplitudes de saut par unité de temps vaut bien :

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N_1} A_i\Big] = E\Big[\int_0^1 A_s dN_s\Big] = \lambda\int_0^1 E[A_s]ds = \lambda\mu.$$

D'autre part, si de plus, $\tau > \lambda\mu + \dfrac{\sigma^2 + \lambda(\nu + \mu^2)}{2}$ alors $X_t$ converge en probabilité vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$.

Ceci signifie que, si le taux intrinsèque de décroissance est supérieur à $\lambda\mu$ plus une quantité dépendant de la variance du brownien et de la fréquence des sauts, alors le tarissement de débit est possible.

Ainsi, certaines valeurs des paramètres du modèle de Black-Scholes à sauts conduisent à la convergence en probabilité de $(X_t)$ vers 0. Le modèle de Langevin, lui, ne converge pas en probabilité vers 0.

Dans la suite de cette partie, une application du modèle Black-Scholes à sauts a été faite sur des données d'hydrologie provenant de la banque HYDRO. On suppose que l'évolution du processus $(X_t)$ est gouvernée par l'EDS (2.5) dont la solution au temps $t$ est notée $X_t$ et représente le débit d'eau à cette date. Le modèle est étudié sur un intervalle de 21 jours sur lequel on observe les dates et les amplitudes de saut qui sont respectivement les $T_i$ et les $A_i$.

## 4.1 Application du modèle Black-Scholes à sauts en hydrologie

Nous considérons un catalogue de données hydrologiques de la Guadeloupe (Antilles françaises) pour la période du 5 mars 2018 au 25 mars 2018. Au total, 292 observations ont été enregistrées dans le catalogue de la banque HYDRO. Il contient les 4 variables suivantes : station, date d'observation, heure d'observation, débit d'eau en $m^3/s$. Il s'agit de débits d'eau observés dans deux stations A et B. Leurs valeurs sont représentées dans les figures 4.1 et 4.2 suivantes :

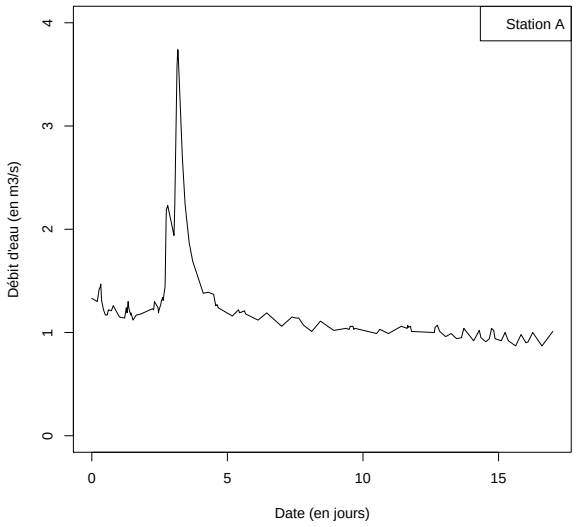



FIGURE 4.1 – Distribution temporelle du débit d'eau.

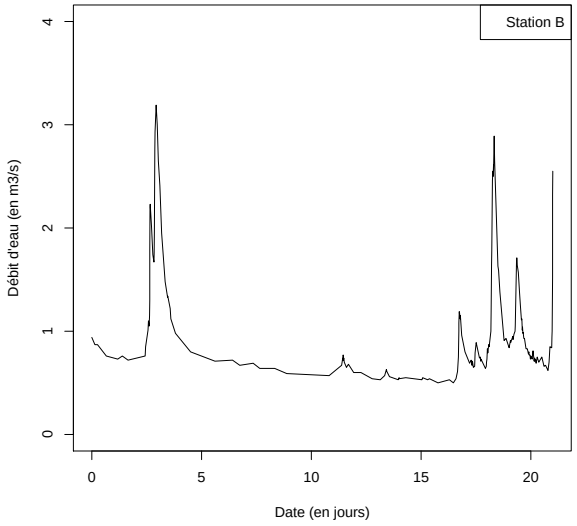



FIGURE 4.2 – Distribution temporelle du débit d'eau.

Afin d'examiner un autre aspect de la fluctuation des débits, la différence de débits d'eau mesurés entre deux dates consécutives dans chacune des deux stations A et B a été calculée (figures 4.3 et 4.4).

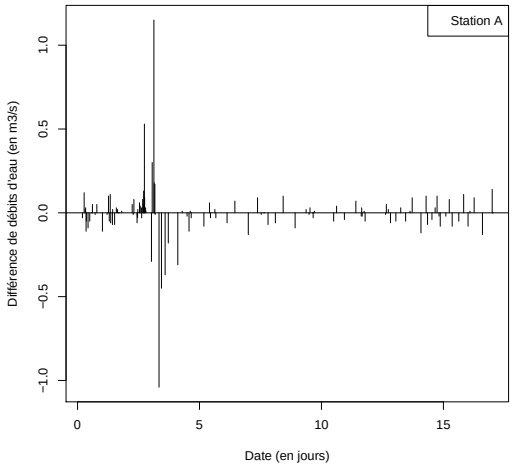



FIGURE 4.3 – Distribution temporelle de la différence du débit d'eau.

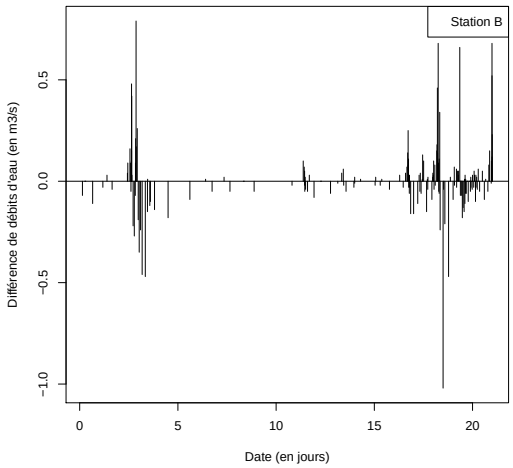



FIGURE 4.4 – Distribution temporelle de la différence du débit d'eau.

D'autre part, un lissage non paramétrique avec noyau tri cubique ([72]) a été opéré sur ces données pour visualiser les valeurs de débit paraissant se démarquer notamment des autres. Deux paramètres de lissage différents ont été utilisés (voir 4.5 et 4.6). Cela nous a conduit à utiliser un algorithme de détection de dates de saut et d'évaluation d'amplitudes de saut.

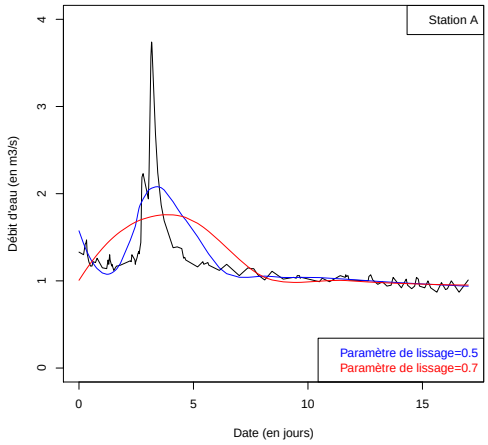



FIGURE 4.5 – Distribution temporelle et lissage du débit d'eau.

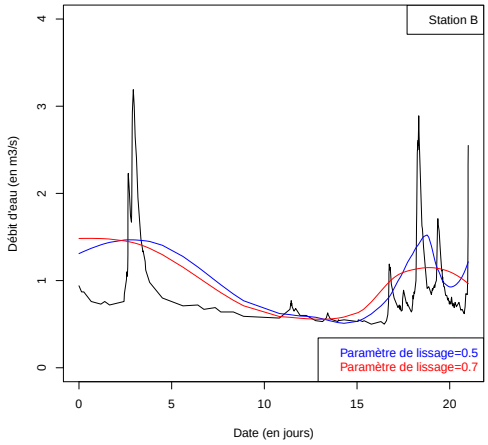



FIGURE 4.6 – Distribution temporelle et lissage du débit d'eau.

En considérant le modèle de Black-Scholes à sauts, nous avons mené l'inférence statistique à partir de ces données.
Il existe différentes façons d'estimer les paramètres des EDS. Nous avons utilisé la technique du maximum de vraisemblance vue au chapitre précédent.
L'estimation de $\tau$, $\sigma^2$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et ensuite leur écart-type d'estimation sont donnés dans les tableaux 4.1 et 4.2. L'écart-type d'estimation et la p-valeur pour le rapport du log-vraisemblance pour le test de nullité des paramètres sont également donnés. Les p-valeurs obtenues pour la station A indiquent un rejet net de l'hypothèse de nullité pour chacun des paramètres. Pour le paramètre $\tau$, la p-valeur du test est moins significative, ce qui indique que la diminution exponentielle du débit d'eau entre les événements de Poisson n'est pas très significative. Par contre pour la station B, les hypothèses de nullité de paramètre sont rejetées très nettement sauf pour le paramètre $\tau$ pour lequel on ne rejette pas la nullité.

| **Estimateur** | **Estimation** | **Ecart-type d'estimation** | **Test de nullité** |
|---|---|---|---|
| $\widehat{\tau}$ | 0.1499 | 0.0643 | 0.0197 |
| $\widehat{\sigma^2}$ | 0.0700 | 0.0092 | 0.0000 |
| $\widehat{\mu}$ | 0.2286 | 0.1093 | 0.0000 |
| $\widehat{\nu}$ | 0.0319 | 0.0773 | 0.0000 |
| $\widehat{\lambda}$ | 1.1176 | 0.2564 | 0.0000 |

TABLE 4.1 – Résultats de l'inférence statistique sur les données de débit d'eau dans la station A.

| **Estimateur** | **Estimation** | **Ecart-type d'estimation** | **Test de nullité** |
|---|---|---|---|
| $\widehat{\tau}$ | 0.2046 | 0.0883 | 0.0109 |
| $\widehat{\sigma^2}$ | 0.1620 | 0.0178 | 0.0000 |
| $\widehat{\mu}$ | 0.3714 | 0.1105 | 0.0000 |
| $\widehat{\nu}$ | 0.1148 | 0.0781 | 0.0000 |
| $\widehat{\lambda}$ | 1.4286 | 0.2608 | 0.0000 |

TABLE 4.2 – Résultats de l'inférence statistique sur les données de débit d'eau dans la station B.

Notons que la matrice Hessienne de la log-vraisemblance de la station A est

$$\begin{pmatrix} 242.79 & 121.40 & 0 & 0 & 0 \\ 121.40 & 11992.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.36 \times 10^{+01} & -3.69 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 & -3.69 \times 10^{-14} & 1.67 \times 10^{+02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15.21 \end{pmatrix},$$

et celle de la station B est

$$\begin{pmatrix} 129.60 & 64.80 & 0 & 0 & 0 \\ 64.80 & 3193.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.19 \times 10^{+01} & -7.01 \times 10^{-15} & 0 \\ 0 & 0 & -7.01 \times 10^{-15} & 1.64 \times 10^{+02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.7 \end{pmatrix},$$

ce qui nous fournit, par inversion, la matrice de Variance-Covariance asymptotique des estimateurs de maximum de vraisemblance. Elle nous donne donc des informations concernant la variabilité des estimateurs MV ainsi que leur degré de corrélation asymptotique :
La matrice de covariance de la station A est :

$$\begin{pmatrix} 4.13 \times 10^{-03} & -4.19 \times 10^{-05} & 0 & 0 & 0 \\ -4.19 \times 10^{-05} & 8.38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.19 \times 10^{-02} & 2.63 \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & 0 & 2.63 \times 10^{-18} & 5.97 \times 10^{-03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix},$$

et celle de la station B est :

$$\begin{pmatrix} 0.0078 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0002 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.22 \times 10^{-02} & 5.23 \times 10^{-19} & 0 \\ 0 & 0 & 5.23 \times 10^{-19} & 6.10 \times 10^{-03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 \end{pmatrix}.$$

Le couple $(\widehat{\tau}, \widehat{\sigma^2})$ est non corrélé au couple $(\widehat{\mu}, \widehat{\nu})$, chacun de ces couples étant non corrélé à $\widehat{\lambda}$.

## 4.2 Application à des données artificielles

Sur la base des données artificielles générées avec le logiciel R, nous avons réalisé des simulations numériques avec un ensemble de paramètres similaires aux valeurs estimées du tableau 4.1. La figure 4.7 montre un exemple de telles trajectoires.

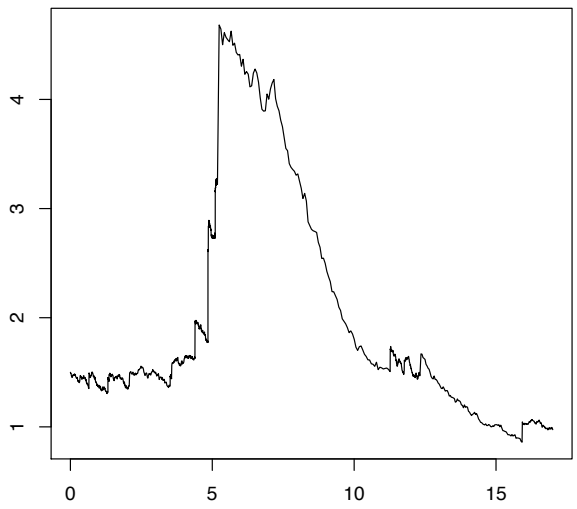



FIGURE 4.7 – Trajectoire simulée pour $(\tau,\sigma^2,\lambda,\mu,\nu)= (0.15, 0.07, 1, 0.17, 0.02)$

Pour chaque trajectoire simulée, la méthode du maximum de vraisemblance a fourni des estimations des paramètres. Par conséquent, à partir de l'ensemble des simulations de trajectoires, nous avons pu obtenir une approximation de la distribution d'échantillon de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour chaque paramètre (figure 4.8). Les propriétés classiques de non biais et de normalité ont ensuite été vérifiées (tableau 4.3).

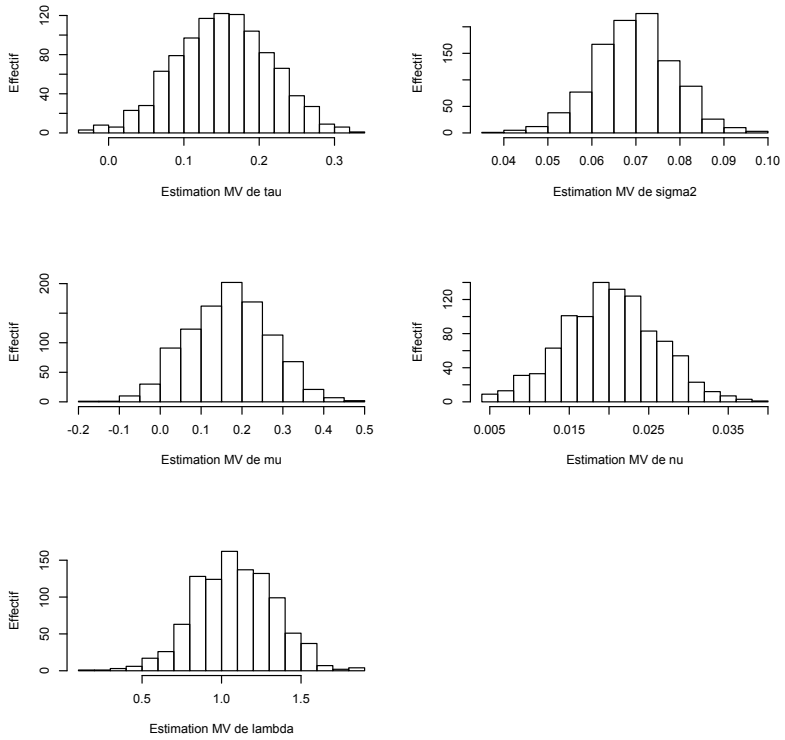



FIGURE 4.8 – Distribution des estimateurs MV pour 1000 simulations avec $(\tau,\sigma^2,\lambda,\mu,\nu)= (0.15, 0.07, 1, 0.17, 0.02)$

| **Paramètre** | **Moyenne** | **Ecart-type** | **Test de normalité** |
|---|---|---|---|
| $\tau$ | 0.1520 | 0.0629 | 0.3787 |
| $\sigma^2$ | 0.0070 | 0.0090 | 0.1646 |
| $\mu$ | 0.1682 | 0.1003 | 0.8501 |
| $\nu$ | 0.0201 | 0.0060 | 0.5015 |
| $\lambda$ | 1.0823 | 0.2492 | 0.2747 |

TABLE 4.3 – Test de Shapiro-Wilk pour les estimateurs MV sur 1000 simulations avec $(\tau,\sigma^2,\lambda,\mu,\nu)= (0.15, 0.07, 1, 0.17, 0.02)$

# Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse concernent les propriétés distributionnelles des solutions d'EDS gouvernée par un processus de Lévy à sauts. Ces solutions sont des processus stochastiques permettant de décrire des phénomènes en temps continu soumis à l'influence de processus ponctuels associés à des sauts. Nous nous sommes intéressés aux cas fréquemment rencontrés d'observations en temps discret d'un phénomène en temps continu. Dans l'optique de développer l'inférence statistique pour ces modèles, nous avons obtenu différents résultats concernant la vraisemblance pour des observations effectuées à $n$ dates distinctes. Nous nous sommes focalisé principalement sur des modèles de Black-Scholes à sauts et/ou à régimes. Les techniques de vraisemblance utilisées sont conditionnelles aux dates et aux amplitudes de sauts. Les propriétés du rapport de vraisemblance sont présentées, un test de rupture relatif au paramètre de décroissance dans le modèle de Black-Scholes est établi. Il est basé sur le rapport de vraisemblance avant et après rupture et sur un estimateur du maximum de vraisemblance pour l'intervalle contenant la date de rupture. Le critère de test ainsi obtenu permet de tester l'absence de changement de régime par simulation de sa loi de probabilité sous cette hypothèse nulle. Des programmes de simulations numériques réalisées sous fournissent des outils d'inférence statistique. Ils permettent de faire des expérimentations numériques par l'optention de données artificielles, aidant au dévéloppement d'outils appropriés d'inférence statistique. L'application à des données hydrologiques illustre les possibilités ouvertes par ces méthodes.

A ce stade du travail, diverses perspectives sont à explorer. Tout d'abord, nous comptons prendre en compte les situations où les dates et les amplitudes de sauts ne sont pas observées mais doivent être évaluées au moyen d'un algorithme de lissage. Une généralisation du modèle Black-Scholes à sauts est envisagée en considérant un processus non stationnaire de sauts avec des amplitudes dépendant des dates de sauts. Ensuite, nous comptons étudier des EDS gouvernées par un mouvement brownien fractionnaire qui semblent mieux prendre en compte les particularités de certains phénomènes aléatoires, par exemple en physique. Pour réaliser la simulation

numérique pour le modèle logistique, il faudra implémenter des méthodes numériques du type Euler ou Runge-Kutta. De plus, il sera intéressant d'étudier la robustesse de méthodes que nous développerons en utilisant des données artificielles générées à partir des scripts écrits sous .

# Annexe A

## Quelques fonctions du package **sde** de R

BM : cette fonction simule le mouvement brownien, le pont brownien et le modèle de Black-Scholes.

BBridge : simule le pont brownien.

GBM : simule le modèle de Black-Scholes.

cpoint : estime le temps de rupture pour le paramètre de volatilité d'un processus de diffusion.

dcEuler : fournit une approximation de la loi conditionnelle d'un processus de diffusion.

EULERloglik : fournit une approximation de la vraisemblance d'un processus solution d'une SDE.

ksmooth : estimation non paramétrique du coefficient de diffusion, de la tendance et de la densité pour un processus de diffusion unidimensionnel.

rcBS : simule le processus de Black-Scholes conditionnel à sa valeur initiale.

dcBS : calcule la densité du processus de Black-Scholes conditionnel à sa valeur initiale.

pcBS : calcule la fonction de répartition du processus de Black-Scholes conditionnel à sa valeur initiale.

qcBS : calcule le quantile du processus de Black-Scholes conditionnel à sa valeur initiale.

rcOU : simule le processus de Ornstein-Ulhenbeck conditionnel à sa valeur initiale.

dcOU : calcule la densité du processus de Ornstein-Ulhenbeck conditionnel à sa valeur initiale.

pcOU : calcule la fonction de répartition du processus de Ornstein-Ulhenbeck conditionnel à sa valeur initiale.

qcOU : calcule le quantile du processus de Ornstein-Ulhenbeck conditionnel à sa valeur initiale.

sde.sim : propose des méthodes de simulation de solution de SDE.

sdeAIC : calcule le critère AIC pour des processus de diffusion à partir de la vraisemblance approchée. ([31]).

# Annexe B

## Programmes de simulations et d'inférence statistique pour les EDS à sauts

### Cas du modèle Black-Scholes à sauts

```
simBSsauts2=function(X0,tau,sigma,lambda,mu,nu,t,nsim,M){
#Several simulation of the SDE: dXt=Xt(-tau*~dt+sigma*dBt+AtdNt)
# over interval [0, t]
# X0  is the initial value ; X_{0}> 0
# tau is the rate of decrease > 0
# sigma is the standard deviation of the Wiener process >=0
# lambda  is the Poisson process intensity ; lambda  >0
# mu  is the mean parameter of the log-normal distribution
#for the jump amplitude
# E(At)=exp(mu+nu/2)
# nu  is the variance  parameter of the log-normal distribution
#for the jump amplitude
#M is the maximum on the ordinate axis
# Var(At)=(E(At)^2)*(exp(nu)-1)
meanAt=exp(mu+(sigma^2)/2)
varAt=((meanAt)^2)*(exp(nu)-1)

# argu=max(exp((-tau+lambda*meanAt)*t),1)
# M=X0*(argu+4*sqrt(exp((sigma^2+lambda*(varAt+meanAt^2))*t)-1))
plot(c(0,0),c(0,t),type="n",xlim=c(0,t),ylim=c(0,M),xlab="t",
ylab="Xt")
for (i in 1:nsim) {
n=rpois(1,lambda*t)
dates=c(sort(runif(n,max=t)))
sauts=rlnorm(n,meanlog=mu,sdlog=sqrt(nu))
r=tau+(sigma^2)/2
```

```
# simulation of Wiener process between 0 and first jump time
Brown=cumsum(c(0,rnorm(100,mean=0,sd=sqrt(dates[1]/100))))
#Simulation of processus between 0 and first jump time
valeurs=curve(X0*exp(-r*x+sigma*Brown),from=0,to=dates[1],
add=TRUE,type="n")$y
datejours=seq(0,dates[1],length.out=101)
datejours=c(datejours,dates[1])
debit=c(valeurs,valeurs[101]*(1+sauts[1]))
xdates=c(dates,t)
xsauts=c(sauts,0)
for (i \, in 1:n){
# trace of the ith jump
#lines(rep(dates[i],2),c(valeurs[101],valeurs[101]*(1+sauts[i])))
X1=valeurs[101]*(1+sauts[i])# Modification de la condition initiale
#Simulation of Wiener process between two consecutive jumps
Brown=cumsum(c(0,rnorm(100,mean=0,sd=sqrt((xdates[i+1]
-xdates[i])/100))))
#Simulation of process between two consecutive jumps
valeurs=curve(X1*exp(-r*(x-xdates[i])+sigma*Brown),
from=xdates[i],to=xdates[i+1],
add=TRUE,type="n")$y
datejours=c(datejours,seq(xdates[i],xdates[i+1],
length.out=102)[-1],xdates[i+1])
debit=c(debit,valeurs,valeurs[101]*(1+xsauts[i+1]))
}
points (datejours,debit,type="l",ylim=c(0,max(debit)),
xlab="t",ylab="Xt",col=i)
#points (dates,rep(0,length(dates)),pch="|")
}
# trace of the mean curve for Xt
meanAt=exp(mu+(sigma^2)/2
varAt=((meanAt)^2)*(exp(nu)-1)
EXt=function(t){X0*exp((-tau+lambda*meanAt)*t)}
curve(EXt(x),add=T,from=0,to=t,col="red",lwd=3)
 }
```

### Cas du modèle de Langevin à sauts

Le script **simLAsauts2** effectue ces simulations numériques :

```
simLAsauts2=function(X0,tau,sigma,lambda,mu,nu,t,nsim,M){
# Several simulation of the SDE: dXt=-tau*Xt*dt+sigma*dBt+AtdNt
# over interval [0, t]
```

```
# X0 is the initial value ; X_{0}> 0
# tau is the rate of decrease > 0
# sigma is the standard deviation of the Wiener process >=0
# lambda is the Poisson process intensity ; lambda  >0
# mu is the mean parameter of the jump amplitude
# E(At)=mu
# nu is the variance parameter of the jump amplitude
# Var(At)=nu
# M is the maximum on the ordinate axis
#argu=max(exp((-tau+lambda*mu)*t),1)
#M=X0*(argu+4*sqrt(exp((sigma^2+lambda*(nu+mu^2))*t)-1))
plot(c(0,0),c(0,t),type="n",xlim=c(0,t),ylim=c(0,M),
xlab="t",ylab="Xt")
m=log(mu)- 0.5*log(1+ nu/(mu^2))
v=log(1+nu/(mu^2))
for(i in 1:nsim){
n=rpois(1,lambda*t)
dates=c(sort(runif(n,max=t)))
sauts=rlnorm(n,meanlog=m,sdlog=sqrt(v))
r=tau+(sigma^2)/2
# simulation of Wiener process between 0 and first jump time
Brown=cumsum(c(0,rnorm(100,mean=0,sd=sqrt(dates[1]/100))))
#Simulation of processus between 0 and first jump time
valeurs=curve(X0*exp(-r*x+sigma*Brown),from=0,to=dates[1],
add=TRUE,type="n")$y
datejours=seq(0,dates[1],length.out=101)
datejours=c(datejours,dates[1])
debit=c(valeurs,valeurs[101]+sauts[1])
xdates=c(dates,t)
xsauts=c(sauts,0)
for(i in 1:n){
# trace of the ith jump
# lines(rep(dates[i],2),c(valeurs[101],valeurs[101]*(1+sauts[i])))
X1=valeurs[101]+sauts[i] # Initial condition modification
#Simulation of Wiener process between two consecutive jumps
Brown=cumsum(c(0,rnorm(100,mean=0,sd=sqrt((xdates[i+1]
-xdates[i])/100))))
#Simulation of process between two consecutive jumps
valeurs=curve(X1*exp(-r*(x-xdates[i])+sigma*Brown),
from=xdates[i],to=xdates[i+1],add=TRUE,type="n")$y
datejours=c(datejours,seq(xdates[i],xdates[i+1],
```

```
length.out=102)[-1],xdates[i+1])
debit=c(debit,valeurs,valeurs[101]+xsauts[i+1])
 }
points(datejours,debit,type="l",ylim=c(0,max(debit)),
xlab="t",ylab="Xt",col=i)
#points(dates,rep(0,length(dates)),pch="|")
}
# trace of the mean curve for Xt
meanAt=exp(mu+(sigma^2)/2)
varAt=((meanAt)^2)*(exp(nu)-1)
EXt=function(t){X0*exp((-tau+lambda*meanAt)*t)}
curve(EXt(x),add=T,from=0,to=t,col="red",lwd=3)
```

## Fonction R de détection de dates de saut et d'évaluation d'amplitudes de saut

```
 detect=function(debit,epsilon){
#empirical method of detecting jumps
#calculation water flow difference between two consecutive dates
ecart=diff(debit)
#detection of positive difference above the given threshold
trisaut=ecart>epsilon
#sorting of observation dates for jumps
datesaut=debit[trisaut]
#Evaluation of jump amplitudes
amplsaut=ecart[trisaut]
list(dates=datesaut, amplitudes=amplsaut)
}
```

## Fonction R d'inférence statistique sur le modèle de Black-Scholes à sauts

```
traiteBSS=function(dateobs,debit,epsilon ){
resu=detect(debit,epsilon)
amplsaut=resu$amplitudes
trisaut=resu$trisaut
ti=dateobs
Yti=log(debit)
Nt=length(amplsaut)
n=length(ti)
```

```
lambdaesti=Nt/max(ti)
resti=(sum(log(1+amplsaut))-Yti[n])/ti[n]
B=rep(0,n-1)
B[trisaut]=log(1+amplsaut)
Nesti=sum(((diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)^2)/diff(ti))
Desti=n+sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
sigma2esti=Nesti/Desti
tauesti=resti-sigma2esti/2
parenthese=sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
Hess=matrix(rep(0,4),nrow=2)
Hess[1,1]=ti[n]/sigma2esti
Hess[1,2]=Hess[2,1]=(sum(B)-tauesti*ti[n]-Yti[n])/sigma2esti^2
Hess[2,2]=-(n+2*parenthese)/(2*sigma2esti^2)+ti[n]/(4*sigma2esti)
sum(((diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)^2)/diff(ti))/(sigma2esti^3)
MatCov=solve(Hess)
ECtauesti=sqrt(diag(MatCov)[1])
ECsigma2esti=sqrt(diag(MatCov)[2])
EClambdaesti=sqrt(lambdaesti/ti[n])
m=mean(log(amplsaut))
v=var(log(amplsaut))
muesti=exp(m+v)
nuesti=(m^2)*(exp(v)-1)
Hesstot=matrix(rep(0,25),nrow=5)
Hesstot[1:2,   1:2]=Hess
Hesstot[5,5]=Nt/(lambdaesti^2)
Hesstot[3,3]=Nt/(v^2)
Hesstot[3,4]=Hesstot[4,3]=2*sum(log(amplsaut)-m)/(v^3)
Hesstot[4,4]=2*Nt/(v^2)
MatCovtot=solve(Hesstot)
ECmuesti=sqrt(diag(MatCovtot)[3])
ECnuesti=sqrt(diag(MatCovtot)[4])
round(sqrt(diag(MatCovtot)),4) #SSE (Standard Error of Estimate)
for the five estimates, rounded to yhe nearest 10000th
}
```

### Calcul de la vraisemblance de Black-Scholes à sauts pour un seuil $\epsilon$ et des amplitudes de loi log-normale

```
Vraislnorm=function(dateobs,debit,epsilon){
#Amplitudes de sauts de loi lognormale
resu=detect(debit,epsilon)
amplsaut=resu$amplitudes
```

```
trisaut=resu$trisaut
ti=dateobs
Yti=log(debit)
Nt=length(amplsaut)
n=length(ti)
lambdaesti=Nt/max(ti)
resti=(sum(log(1+amplsaut))-Yti[n])/ti[n]
B=rep(0,n-1)
B[trisaut]=log(1+amplsaut)
Nesti=sum(((diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)^2)/diff(ti))
Desti=n+sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
sigma2esti=Nesti/Desti
tauesti=resti-sigma2esti/2
parenthese=sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
logvrais=dpois(Nt,lambdaesti*ti[n],log=T)
+sum(dlnorm(amplsaut,meanlog=mean(log(amplsaut)),
sdlog=sd(log(amplsaut))),log=T)+sum(dnorm(diff(Yti)
+resti*diff(ti)-B),mean=0,sd=sqrt(sigma2esti*diff(ti)),log=T)
logvrais
}
```

## Calcul de la vraisemblance de Black-Scholes à sauts pour un seuil $\epsilon$ et des amplitudes de loi gamma

```
Vraisgamma=function(dateobs,debit,epsilon){
#Amplitudes de sauts de loi gamma
resu=detect(debit,epsilon)
amplsaut=resu$amplitudes
trisaut=resu$trisaut
ti=dateobs
Yti=log(debit)
Nt=length(amplsaut)
n=length(ti)
lambdaesti=Nt/max(ti)
resti=(sum(log(1+amplsaut))-Yti[n])/ti[n]
B=rep(0,n-1)
B[trisaut]=log(1+amplsaut)
Nesti=sum(((diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)^2)/diff(ti))
Desti=n+sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
sigma2esti=Nesti/Desti
tauesti=resti-sigma2esti/2
parenthese=sum(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B)
```

```
aesti=(mean(amplsaut)^2)/var(amplsaut)
sesti=var(amplsaut)/mean(amplsaut)
logvrais=dpois(Nt,lambdaesti*ti[n],log=T)
+sum(dgamma(amplsaut,shape=aesti,scale=sesti),log=T)
+sum(dnorm(diff(Yti)+resti*diff(ti)-B),mean=0,
sd=sqrt(sigma2esti*diff(ti)),log=T)
logvrais
}
```

# Bibliographie


[1] **J. Cesars, S. P. Nuiro, J. Vaillant**, 2019, *Statistical inférence on a Black-Scholes model with jumps. Application in hydrology*, Journal of mathematics and statistics, Vol 15, 196-200.

[2] **H. Zhao, C. Zhang and L. Wen**, 2018, *Maximum likelihood estimation for stochastic Lotka–Volterra model with jumps.* Advances in Difference Equations, vol 148,1-22.

[3] **T. Lounis , S. Bouabdellah**, 2008, *Régularisation de l'équation de Langevin en dimension 1 par le mouvement Brownien fractionnaire*, arXiv :0807.0280[math-ph]

[4] **E. Alòs, D. Nualart**, 2003, *Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion.* Stoch Rep 75(3) :129–152.

[5] **T. Marquardt**, 2006, *Fractional Lévy processes with an application to long memory moving average processes*, Brenoulli, Vol 12, number 6, 1099-1126.

[6] **W. Dai, C.C. Heyde**, 1996, *Ito's formular with respect to fractional brownian motion and its application.* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Vol 9 issue 4, 439-448.

[7] **B. Mandelbrot , J. Van Ness** , 1968, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications.* Siam Rev 10 :422–437

[8] **E. Alòs , O. Mazet , D. Nualart**, 2001, *Stochastic calculus with respect to gaussien processes.*Ann Probab, Vol 29(2), 766–801

[9] **D. Nualart and A. Rascanu**, *Differential equations driven by fractional Brownian motion*, Collect. Math. 53,1, 55-81.

[10] **D. Borysenko, O. Borysenko**, 2017, *Explicit form of global solution to stochastic logistic differential equation and related topics*, Stat. Optim. Inf. Comput, Vol 5, 58-64.

[11] **E. M. Lungu, B. Oksendal**, 1997, *Optimal Harvesting from a Population in a Stochastic Crowded Environment*, Mathematical Biosciences, Volume 145, Issue 1, 47-75.

[12] **K. Khaldi and S. Meddahi** , 2010, *Estimation of the parameters of the Stochastic Differential Equations Black-Scholes Model Share Price of Gold.* Journal of Mathematics and Statistics 6(4) : 421-424.

[13] **C. Zhu , G. Yin**, 2009, *On competitive Lotka–Volterra model in random environments.* J. Math. Anal. Appl., Vol 357, 154-170.

[14] **A. Bahar and X. Mao**,2004, *Stochastic delay Lotka–Volterra model.* J. Math. Anal. Appl., Vol 292, 364-380.

[15] **J. Bao, C. Yuan** , 2012, *Stochastic population dynamics driven by Lévy noise* . J. Math. Anal. Appl., Vol 391, 367-375.

[16] **R.L.Wolpert**, 2017. *Some notes on Gamma processs.* Unpublished paper

[17] **M. Moore**, 1987, *Inférence statistique dans le processus stochastiques : Aperçu historique. The canadian journal of statistics*, Vol 15, No. 3, 185-207.

[18] **R. Calif**, 2012, *PDF models and synthetic model for the wind speed fluctuations based on the resolution of Langevin equation.* Applied Energy, Vol 99, 173-182.

[19] **A. W. Lo**, 1988, *Maximum Likelihood estimation of generalized Itô process with discretely sample data.* Econometric Theory, 4, 1988, 231-247.

[20] **J. Bao, C. Yuan** , 2012, *Stochastic population dynamics driven by Lévy noise . J. Math. Anal Appli*, Vol 391,363-375.

[21] **M. M. Folia, M. Rattray**, 2017, *Trajectory inference and parameter estimation in stochastic models with temporally aggregated data.* stat comput. vol 28. 1056-1072.

[22] **R.C. Merton**, 1976, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous* , Journal of Financial Economics 3, 124-44.

[23] **F. Black, M. Scholes**, 1973, *The pricing of option and corporate Liabilities.* Journal of Political economy, vol 81, 637-654.

[24] **P. Langevin**, 1908, *Sur la théorie du mouvement brownien*, CRAS, Vol 146, 530-533.

[25] **P. Bahardi, C. Poletto, J. J. Ramassso, M. Tizzoni, V. Colizza, and A. Vespignamis**, *Human mobility networks, Travel restrictions, and the global spread of 2009 H1N1 pandemic*, PLOS 0NE, doi :10137/journal.pone.0016591.

[26] **C. H. Skiadas**, 2010, *Exact Solutions of Stochastic Differential Equations : Gompertz, Generalized Logistic and Revised Exponential.* Methodol Comput Appl Probab , vol 12, 261–270.

[27] **C. Paroissin and A. Salami**, 2014, *Failure time of non homogeneous Gamma process.* Communication in statistics-Theory and Method, Vol 43(15), 3148-3161.

[28] **D. Ghorbanzadeh**, 1995, *Un test de détection de rupture de la moyenne dans un modèle gaussien*, Revue de statistique appliquée, Vol 4, 67-76.

[29] **J. Besag and P. Clifford**, 1989, *Generalized Monte Carlo significance tests*, Biometrika, Vol 76,633-642.

[30] **R. Habibi**, 2012, *Change point detection in Black-Scholes models using recursive estimation*, ijed, Vol 2, 13-15.

[31] **D. Dacunha-Castelle , D. Florens-Zmirou**, (1986) *Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations,Stochastics*, Vol 19, 263-284.

[32] **R. Grunig**, 1966, *Probabilités parfaites. Théorème de Kolmogorov*, Vol 2, 221-225, Ann. institut Henry Poincaré.

[33] **E. M. Lungu, B. Oksendal**, 2001, *Optimal Harvesting from interacting Populations in a Stochastic Environment*, Bernoulli, Volume 7, Issue 3, 527-539.

[34] **B. Jourdain**, 2016, *Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie.* polycopie ENPC, 2011. http ://cermics.enpc.fr/ delmas/Enseig/levy.html.

[35] **L. Arnold**, 1974, *Stochastic Differential Equations : Theory and Applications.* New York : John Wiley and Sons.

[36] **I. Karatzas and S. E. Shreve**, 1998, *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Second Edition. Springer

[37] **J. F. Le Gall**, 2013, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[38] **P. Protter**, 1990, *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-york.

[39] **B. Oksendal**, 2003, *Stochastic Differential Equations.* $6^{th}$ *Edition. Springer-Verlag*, New-york.

[40] **N. C. Samuel, R. J. Elliott**, 2015, *Stochastic calculus and applications.* $2^{nd}$ Edition. Springer Science+Business Media New York.

[41] **G. N. Milstein, M. V. Tretyakov**, 2004, *Stochastics Numerics for Mathematical Physics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[42] **F. Comets, T. Meyre** , 2015, *Calcul stochastique et modèles de diffusions.* $2^{nd}$ Edition. Dunod.

[43] **C. Fuchs**, 2013, *Inference for diffusion process. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*

[44] **B. Oksendal** , 2013, *Stochastic Differential Equations : an introduction with application.* Sixth Edition, Sixth Corrected Printing With 14 Figures.

[45] **M. M. Rao**, 2004, *Real and Stochastic Analysis*. Birkhauser Boston, $1^{st}$ Edition.

[46] **B. Oksendal et S. Agnès**, 2007, *Applied stochastic control of jump diffusions*. $2^{nd}$ Edition.

[47] **C. Bender** , 2003, *An Itô formula for generalized functionals of a fractional brownian motion with arbitrary hurst parameter*. Stochastic Processes ad their Applications.

[48] **E. Alòs , O. Mazet , D. Nualart** , 2000, *Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than* $\frac{1}{2}$.

[49] **G. Gripenberg and I. Norros**, 2018, *On the Prediction of Fractional Brownian Motion*, www.jstor.org.

[50] **E. Allen**, 2007, *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer.

[51] **D. Nualart** , 2003, *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications*.Stochastic Models (Mexico City), Contemp. Math. 336. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 3–39.

[52] **T. Sauer**, 2012, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance*. DOI :10.1007/978-3-642-17254-0 19.

[53] **D. J. Wilkinson**, 2011, *Stochastic modelling for systems biology. In : Chapman and Hall/CRC Mathematical and Computational Biology*. 2nd edn. Taylor and Francis .

[54] **M.F.M. Osborne**, 1959, *Brownian motion in the stock market*. Oper. Res., 7, 145–173.

[55] **S. M. Iacus**, 2008, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. Springer*. USA.

[56] **T. Chauvanel**, 2013, *Equations différentielles stochastiques*, http technique -ingenieur.fr.

[57] **C. W. Gardiner**, 2004, *Handbook of Stochastic Methods : for Physics, Chemistry and the Natural*. Sciences (Springer Series in Synergetics), 2rd ed.

[58] **F. Jedrzejewski**, 2005, *Introduction aux méthodes numériques*. Springer-Verlag France

[59] **N. E. Karoui, E. Gobet, E. Pardoux**. *Introduction au calcul stochastique*. Ecole Polytechnique.

[60] **D. J. Daley, D. Vere-Jones**, 2003, *An introduction to the Theory of Point Processes*. Springer, New-York.

[61] **G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel and G. M. Ljung** 2016. *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Wiley, New-York, 5th Ed.

[62] **H. Sorensen**, 2002, *Estimation of diffusion parameters for discretely observed diffusion processes*. Bernouilli, vol 8, 491-508.

[63] **P. J. Morin**, 2011, *Community Ecology*. Wiley-Blackwell. Press, Malden. ISBN :978-1-444-33821-8.

[64] **B. Francesca, H. Yaozhong, B. Oksendal, T. Zhang**, 2008, *Stochastic Calculus For Fractional Brownian Motions and Applications*. Springer-Verlag London Limited.

[65] **D. Lamberton et B. Lapeyre**, 2012, *Introduction au calcul stochastique Appliqué à la finance*, 3nd ed. Ellipse.

[66] **F. C. Klebaner**, 2012, Introduction to stochastic calculus with applications. 3nd ed, Imp érial college Press.

[67] **M. Musiela and M. Rutkowski**, 2005, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd ed, Springer.

[68] **D. Sondermann**, 2006, *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*, Springer.

[69] **Y. Caumel**, 2011, *Probabilités et processus stochastiques*, Springer.

[70] **P. Lafaye de Micheaux, R. Drouilhet et B. Liquet** , 2011, *Le logiciel R*. Springer.

[71] **V. Goulet et L. Caron**, 2011, *Introduction à la programmation en R*, 5nd ed. Springer.

[72] **W. S. Cleveland, E. Grosse and W. M. Shyu**, 1992, *Local regression models*. Chapter 8 of Statistical Models in S eds J.M. Chambers and T.J. Hastie, Wadsworth, Brooks/Cole.

[73] **A. E. Kyprianou**, 2006, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Springer.