

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR : MÉCANIQUE,
PHYSIQUE, MICRO ET NANOÉLECTRONIQUE
LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET D'ACOUSTIQUE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Discipline : Sciences pour l'ingénieur
Spécialité : Mécanique des Solides

par

Louis MEYRAND

**MODES NON LINÉAIRES : APPROCHES
RÉDUITES PAR PGD/HBM ET APPLICATIONS
AUX RÉPONSES FORCÉES**

Directeur de thèse :
Bruno COCHELIN

Co-encadrante de thèse :
Emmanuelle SARROUY

Soutenue publiquement le 26 Novembre 2019 devant le jury composé de :

M.	A. GRAVOUIL	Professeur, LaMCoS, INSA Lyon	Rapporteur
M.	O. THOMAS	Professeur, LISPEN, ENSAM Lille	Rapporteur
M.	G. CHIAVASSA	Professeur, M2P2, Centrale Marseille	Examineur
M.	G. RICCIARDI	Expert senior, HDR, CEA Cadarache	Examineur
M.	F. THOUVEREZ	Professeur, LTDS, Centrale Lyon	Examineur
M.	C. TOUZÉ	Professeur, IMSIA, ENSTA	Examineur
M.	B. COCHELIN	Professeur, LMA, Centrale Marseille	Directeur
Mme.	E. SARROUY	Maître de Conférences, LMA, Centrale Marseille	Co-encadrante

À ma famille, à Amandine

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs et encadrants de thèse Bruno Cochelin et Emmanuelle Sarrouy de m'avoir proposé ce travail et de m'avoir encadré. Pour leurs conseils, leur aide, leur pédagogie sans faille et la justesse de leurs remarques, je les remercie vivement. Depuis le début de mon travail avec eux, je reste convaincu qu'atteindre leur degré de professionnalisme, de compétence et de rigueur scientifiques sera un bel objectif pour ma propre carrière.

Mes remerciements vont à présent à Fabrice Thouverez, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse. Un grand merci à Anthony Gravouil et à Olivier Thomas d'avoir accepté d'être rapporteurs du présent manuscrit. Merci à Guillaume Chiavassa et Cyril Touzé de leur intérêt pour mon travail et d'avoir accepté d'examiner ces travaux. Un remerciement spécial à M. Guillaume Ricciardi pour avoir non seulement examiné cette thèse mais aussi pour l'avoir suivie depuis le CEA et pour les échanges que nous avons pu avoir durant ces trois années autour de la dynamique non linéaire appliquée au nucléaire. À l'ensemble de mon jury de thèse j'adresse à nouveau mes remerciements les plus sincères pour les questions et remarques très intéressantes qui ont pu être soulevées lors de ma soutenance.

Je remercie l'Université d'Aix-Marseille et l'École Doctorale 353 d'avoir financé mes travaux, Pascal Campion de toute son aide et de toute sa bienveillance auprès des doctorants de l'ED, ainsi que l'École Centrale de Marseille de m'avoir fait confiance en tant qu'enseignant vacataire tout au long de ma thèse. Merci aux collègues enseignants de m'avoir permis de dispenser ces enseignements dans d'excellentes conditions, à l'endroit même où j'avais déjà eu l'immense plaisir de devenir ingénieur il y a maintenant quelques années.

Bien évidemment j'adresse de chaleureux remerciements à l'ensemble du personnel du LMA, à toutes les équipes et les services, à Elena, à Archi et en particulier à l'équipe Matériaux et Structures dont j'ai fait partie. Merci pour tout ce qu'ils m'ont apporté depuis mon arrivée dans ces locaux flambant neufs, scientifiquement comme humainement. Merci à tous les chercheurs, enseignants-chercheurs, ingénieurs et techniciens, sans qui ce travail n'existerait pas. Un grand merci à Annie, Marie, Sandrine, Stéphanie, Alain et Michel pour leur aide quotidienne, leur gentillesse, leur grande compétence et les très nombreux cafés et repas partagés bien sûr ! Merci à tous pour les portes toujours ouvertes à toutes questions, pour les discussions et débats en tous genres, et bien sûr pour cette grande qualité scientifique qui ne cesse de m'impressionner depuis plus de trois ans.

Je remercie également les doctorants, post-doctorants, ATERs, et stagiaires que j'ai pu rencontrer pendant ces trois années. Collègues aux précieux conseils, collègues à l'écoute et qui remontent le moral quand il le faut, collègues devenus amis, merci à tous et à chacun. Je pense spécialement à vous, Maverick et Anthony, tous deux les meilleurs collègues de bureau que l'on puisse avoir, à Marion, dynamique non linéaire et super co-responsable des doctorants, mais aussi notamment à Aldo, Ana, Boris et Nora, Christelle, Daria, Harold, Léo, Louis, Marie, Marina, Martin, Nicolas, Oscar, Patrik, Quentin, Rémi, Thomas, Tom C., Tom D., Veronica, Youssera, et tous ceux qui se reconnaîtront. À vous tous, plus que merci pour votre soutien de tous les jours, aux cafés, au bureau comme ailleurs ! Un remerciement spécial à ceux avec qui j'ai pu remplir quelques grilles, c'est-à-dire à Jean, Thierry, Emmanuelle, Caroline, Stéphane, Maverick, Roberto, Quentin et Léo.

Un grand merci aux amis de longue date, à Benjamin et Aurore, Cédric, Florent, Rémy et Timothée, qui continuent à me supporter après tout ce temps !

Enfin, j'adresse mes profonds remerciements aux personnes qui me sont chères, à ma famille, à ma chère et tendre Amandine, pour leur soutien sans relâche depuis toujours, mais aussi pour leur patience et leur compréhension dans les moments les plus éprouvants.

Résumé

Dans le domaine de la dynamique des structures, la prise en compte des non linéarités dans les modèles est un enjeu d'actualité, qui est progressivement intégré par le secteur industriel. Son intérêt va de pair avec l'explosion des performances informatiques à laquelle on assiste depuis quelques décennies. L'objectif est de créer des modèles toujours plus réalistes et donc toujours plus complexes et non linéaires par bien des aspects. Le coût de traitement informatique de ces modèles qui comportent généralement un grand nombre de degrés de liberté doit être abaissé, tout en conservant précision et fiabilité des solutions.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse consistent en le développement de méthodes numériques permettant d'une part de traiter rapidement et efficacement des problèmes vibratoires de taille élevée qui présentent des non linéarités diverses, et d'autre part de le faire en exploitant des objets liés aux caractéristiques modales intrinsèques aux systèmes. Pour ce faire, le parti pris est de réaliser le calcul des Modes Non Linéaires (MNLs) des structures. Ces objets peuvent être considérés comme une extension des modes propres de vibrations tenant compte des non linéarités systémiques.

L'objectif du premier axe de ce manuscrit est de proposer une approche réduite du calcul de ces MNLs. Elle se base sur un schéma de continuation de branches de MNLs qui combine des techniques de réduction de modèle par *Proper Generalized Decomposition* (PGD) et une approche fréquentielle par équilibrage harmonique (HBM). Les problèmes numériques traités qui en découlent sont de plus petite taille, plus rapides à traiter, et la description des MNLs obtenue est économe en variables à stocker. Le cas de MNLs dits amortis est également traité afin de pouvoir tenir compte des effets dissipatifs auxquels la structure peut être soumise, notamment ceux de nature non linéaire. Une algorithmie analogue au cas non amorti est développée et présentée pour le calcul de ces objets.

Le second axe de ces travaux est centré autour de l'exploitation de l'information modale des MNLs dans le cadre du calcul de réponses forcées de systèmes non linéaires. Une estimation rapide et à faible dimension des pics de résonance principale est réalisée à travers un solveur à 3 inconnues : amplitude, phase et fréquence. L'ensemble des méthodes, de la construction des MNLs au tracé des fonctions de réponse en fréquence (FRF), est illustré par différents exemples. Les modèles traités vont du cas présentant quelques degrés de liberté au modèle de poutres par éléments finis, et les non linéarités étudiées sont de natures variées (conservatives ou dissipatives, localisées ou géométriques).

Mots-clés : Dynamique des structures, Systèmes non linéaires, Méthodes numériques, Modes non linéaires, Synthèse modale, Réduction de modèle

Abstract

Title : Nonlinear Normal Modes : PGD/HBM-based reduced approaches and applications to forced responses

In the field of structural dynamics, taking into account nonlinearities in models is a topical issue, which is gradually being integrated by the industrial sector. The spectacular progress in IT performance that has been taking place in recent decades justifies this growing interest. The objective is to create increasingly realistic models, which makes them more complex and nonlinear in many aspects. The computational cost of these models must be reduced as they often have a high number of degrees of freedom while maintaining the accuracy and reliability of the solutions.

The work presented in this PhD thesis consists in the development of numerical methods allowing to quickly and efficiently compute large vibration problems that present various nonlinearities. At the same time, one wants to exploit objects related to the modal characteristics intrinsic to the systems. In order to do this, the choice is made to calculate the Nonlinear Normal Modes (NNMs) of the structures. These objects can be considered as an extension of the linear normal modes taking into account systemic nonlinearities.

The objective of the first axis of this manuscript is to propose a reduced approach of the calculation of these NNMs. It is based on a NNM branch continuation scheme that combines Proper Generalized Decomposition (PGD) model reduction technique and a frequency domain treatment by harmonic balance method (HBM). The resulting numerical problems are smaller in size, faster to process, and the description of the NNMs obtained is economical in terms of variables to store. The case of damped NNMs is also addressed in order to take into account the dissipative effects to which the structure may be subjected, in particular those of a nonlinear nature. An algorithm similar to the undamped case for computing these objects is implemented and described.

The second axis of this work focuses on the use of the modal data contained in NNMs in the computation of forced responses of large nonlinear systems. A fast and low-dimensional estimation of the main resonance peaks is performed through a solver with 3 unknowns : amplitude, phase and frequency. All the methods, from the construction of NNMs to the plotting of frequency response functions (FRF) are illustrated by various examples. The handled models range from cases with a few degrees of freedom to finite element beam models. The nonlinearities studied are of various natures : conservative or dissipative, localized or geometrical.

Keywords : Structural dynamics, Nonlinear systems, Numerical methods, Nonlinear normal modes, Modal synthesis, Model reduction



Table des matières

Introduction	1
Partie 1 : Modélisation de la dynamique de systèmes mécaniques non linéaires	
Chapitre 1 Systèmes non linéaires continus en temps	7
1.1 Formulation différentielle	9
1.1.1 Systèmes autonomes et non-autonomes	9
1.1.2 Oscillateurs couplés non linéaires	10
1.2 Amortissement structurel	11
1.2.1 Amortissement de Rayleigh	11
1.2.2 Amortissement modal	11
1.3 Non linéarités	12
1.3.1 Frottement et contact : efforts non linéaires associés	13
1.4 Analyse des solutions	15

1.4.1	Classes de solutions	15
1.4.2	Stabilité des solutions	17
1.4.3	Continuation de solution et Bifurcations	20
1.5	Phénoménologie non linéaire	21
1.5.1	Modes de vibration	22
1.5.2	Résonances	25
Chapitre 2 Méthodes numériques de résolution		29
2.1	Intégrateurs temporels	31
2.2	Résolution de systèmes algébriques	33
2.3	Méthodes temporelles pour le cas non linéaire	34
2.3.1	Méthode de type Lindstedt-Poincaré	34
2.3.2	Algorithmes de tir	35
2.4	Continuation numérique de solution	35
2.4.1	Continuation point par point	36
2.4.2	Continuation par la MAN	40
Chapitre 3 Réduction de modèle en dynamique non linéaire		43
3.1	Intérêt de la réduction de modèle	45
3.2	Méthodes de type Galerkin	46
3.2.1	Collocations orthogonale et trigonométrique	47
3.2.2	Équilibrage harmonique (HBM)	47
3.3	Obtention de projecteurs de Galerkin	52
3.3.1	Méthodes a posteriori	52
3.3.2	Méthodes a priori	58
3.4	Introduction à la Proper Generalized Decomposition (PGD)	60
3.4.1	Bref historique et généralités	61
3.4.2	Formalisme de la PGD d'après Nouy	61

Partie 2 : Méthode réduite de continuation de Mode Non Linéaire par approche PGD/HBM avec enrichissement modal

Chapitre 4	Combinaison PGD/HBM pour le calcul d'une solution périodique	67
4.1	Introduction	69
4.2	Construction des sous-problèmes en oPGD/HBM	69
4.2.1	Séparation des variables	69
4.2.2	Sous-problème temporel \mathcal{T}_m en oPGD	70
4.2.3	Sous-problème spatial \mathcal{S}_m en oPGD	71
4.2.4	Algorithme global oPGD/HBM	72
4.3	Sous-problèmes et algorithme global en pPGD	75
Chapitre 5	Continuation de Mode Non Linéaire – Description réduite	79
5.1	Principes et intérêts de la description de MNLs par PGD	81
5.2	Considérations géométriques pour la continuation	82
5.2.1	Représentation d'un point de MNL	82
5.2.2	Choix d'une distance	82
5.3	Processus de continuation de MNL par PGD/HBM	83
5.3.1	Algorithme général de continuation d'un MNL par enrichissement PGD	83
5.3.2	Prédiction et correction	84
5.3.3	Amorçage – Début de branche	85
5.3.4	Gestion du pas	86
5.3.5	Gestion de la dimension réduite variable m	86
Chapitre 6	Modes Non Linéaires amortis et extension méthodologique	89
6.1	Définition du MNL amorti retenue	91
6.1.1	Définition d'après Laxalde et Thouverez	91

6.1.2	Cas particulier avec dépendance fréquence-amortissement	92
6.2	Réécriture de la HBM pour solutions pseudo-périodiques	92
6.2.1	Processus de Galerkin associé	92
6.2.2	Traitement de la partie non linéaire \mathbf{H}_{nl}	93
6.2.3	Équations manquantes	94
6.3	Intégration dans un algorithme de continuation PGD/HBM	94
6.3.1	Modification du sous-problème \mathcal{T}_m	95
6.3.2	Modification du sous-problème \mathcal{S}_m	96
6.3.3	Nouvelles initialisations spatiales	97
6.3.4	Autres spécificités algorithmiques	97
6.3.5	Bilan et remarques diverses	98

Partie 3 : Synthèse modale non linéaire construite à partir des Modes Non Linéaires

Chapitre 7 Travaux antérieurs et choix d'un modèle à phase unique	101	
7.1	Introduction	103
7.2	Prérequis à la synthèse à partir de MNLs	104
7.2.1	Amplitude modale	104
7.2.2	Méthode du mode non linéaire résonant unique	105
7.3	Quelques formes pour la synthèse	106
7.3.1	Travaux de Laxalde et Thouverez	106
7.3.2	Travaux de Krack, Peter et al.	106
7.3.3	Travaux de Joannin et al.	107
7.4	Synthèse à phase unique retenue	107
7.4.1	Considérations sur la phase ϕ	108

Chapitre 8 Continuation réduite de FRF basée sur les grandeurs modales

non linéaires	113
8.1 Proposition de synthèse de FRF à partir des MNLs	115
8.1.1 Choix de description des MNLs	115
8.1.2 Synthèse modale non linéaire à phase unique	115
8.1.3 Caractéristiques de l'implémentation du solveur réduit	118
8.2 Limites et perspectives d'amélioration du solveur	119

Partie 4 : Applications

Chapitre 9 Du Mode Non Linéaire à la FRF : validation des méthodes	123
9.1 Le portique de Roorda	125
9.1.1 Description du modèle – Cinématique de Von Kármán	125
9.1.2 Construction du premier MNL non amorti	126
9.1.3 Contenu des modes PGD	128
9.1.4 Comparaison avec la variante oPGD	130
9.1.5 Considérations numériques	131
9.2 Système masses-ressorts à frottement sec	132
9.2.1 Tracé du premier MNL amorti	133
9.2.2 Initialisations spatiales	134
9.2.3 Discussion sur la prise en compte de l'amortissement	134
9.3 Synthèse modale non linéaire sur système académique à non linéarités géométriques	135
9.3.1 Tracé de la première résonance	136
9.3.2 Caractéristiques liées au solveur de synthèse modale non linéaire	138
9.3.3 Considérations numériques	140
9.3.4 Essai du solveur basé sur l'erreur dynamique	141
Chapitre 10 Modèles de poutres à non linéarités localisées dont contact	143

10.1	Modèles de poutre d'Euler-Bernoulli	145
10.2	Poutre encastrée-libre avec ressort de bout cubique	146
10.2.1	Tracé du premier MNL conservatif	146
10.2.2	Considérations numériques sur le calcul du MNL conservatif	152
10.2.3	Tracé du premier MNL amorti et de la résonance 1	154
10.3	Poutre encastrée-libre avec contact unilatéral	156
Conclusions et perspectives		163
Annexes		167
Annexe A Obtention de \mathcal{S}_m en PGD/HBM		169
A.1	Calcul de \mathcal{S}_m en oPGD	169
A.2	Simplifications d'opérateurs via la HBM	171
A.3	Calcul de \mathcal{S}_m en pPGD	171
Annexe B Calcul du système algébrique non linéaire de la HBM complexe		175
B.1	Relations entre les formulations complexe et réelle	175
B.2	Projections et système algébrique	175
B.3	Composantes de \mathbf{H}_{nl}	177
Annexe C Matrices associées aux modèles de poutre utilisés		179
C.1	Poutre d'Euler-Bernoulli	179
C.2	Poutre à rotations modérées	180
Bibliographie		183
Table des figures		193
Liste des tableaux		199



Introduction

La conception de structures mécaniques de plus en plus complexes, en particulier dans le secteur industriel, est accompagnée de la mise en place de modèles physiques toujours plus réalistes. De nombreuses avancées sont permises par l'essor des calculateurs, toujours plus puissants depuis quelques décennies. C'est dans ce contexte que s'inscrit la volonté d'une prédiction du comportement vibratoire des systèmes étudiés plus fine et prenant en compte des phénomènes jusque là négligés ou simplifiés, de nature non linéaire.

Il est courant de considérer lors des phases de conception mécanique les approches expérimentale et numérique, chacune amenant son lot d'informations. La réalité se place toujours du côté des essais expérimentaux, lesquels permettent de générer données quantitatives et qualitatives. Ils sont cependant coûteux et donc évités lorsque faire se peut. On se tourne alors vers l'outil numérique, qui permet de considérer un plus grand nombre de cas, et ce tout au long de la phase de conception d'un produit. Il est alors usuel d'utiliser des codes de calcul basés sur une discrétisation spatiale de la structure, par exemple à l'aide de la méthode des éléments finis. On en vient alors à considérer des systèmes présentant un très grand nombre de degrés de liberté. Des hypothèses ramenant à des comportements linéaires sont très souvent faites pour s'épargner du temps de calcul ou pour contourner les difficultés numériques liées à la complexité des modèles.

L'objectif de ce travail est de contribuer à la thématique du traitement de structures en dynamique non linéaire, afin de permettre de s'affranchir des hypothèses réductrices liées aux processus de linéarisation et ainsi mieux décrire la réalité des comportements vibratoires. Les systèmes considérés pourraient présenter un grand nombre de degrés de libertés et des non linéarités de nature variées. En particulier, les structures en grand déplacement, comportant des non linéarités géométriques réparties sur un grand nombre de degrés de liberté, ou les problèmes présentant des contacts localisés sont concernés par les approches développées dans ce travail.

L'utilisation d'objets particuliers permettant de bien représenter la dynamique non linéaire des

structures, les Modes Non Linéaires (MNLs), constitue la piste principalement explorée dans le cadre de ce manuscrit. On souhaite les exploiter de manière analogue à leurs équivalents linéaires, les modes propres de vibration. Les propriétés des MNLs sont étudiées depuis les années 1960, et on souhaite ici utiliser certaines d'entre elles en vue de réduire les coûts de calcul et faciliter l'interprétation et la prédiction des vibrations de systèmes forcés.

La dernière décennie a vu l'émergence de méthodes numériques dédiées au calcul des MNLs, mais ce domaine d'étude n'a pas encore atteint sa maturité : de grands ensembles de variables doivent être calculés et stockés pour les décrire, ce qui complique leur obtention rapide et leur réutilisation pour le tracé de fonctions de réponse en fréquence (FRFs) de systèmes forcés.

Des techniques de réduction de modèle seront employées pour pallier cette difficulté, la plus remarquable étant la *Proper Generalized Decomposition* (PGD), méthode basée sur une séparation des variables et sur l'obtention de sous-systèmes plus petits liés à chacune de ces variables.

Pour répondre aux différents objectifs fixés dans la présente introduction, ce manuscrit s'articule ainsi autour de quatre parties : un état de l'art des concepts de dynamique non linéaire présents au cœur de cette étude, la présentation d'algorithmes de continuation en dimension réduite de MNLs par combinaison de PGD et d'équilibrage harmonique (HBM), l'exploitation de ces objets dans le cadre de la synthèse modale non linéaire de réponses forcées, et la validation et l'illustration de ces approches sur une série de cas applicatifs.

- La Partie 1 dans son ensemble revient sur des concepts fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques, sur la modélisation de systèmes mécaniques non linéaires et sur les principales techniques de réduction de modèle. Tout d'abord, le système d'équations différentielles traité tout au long de ce travail sera explicité et détaillé. On présentera certaines sources de non linéarités pouvant se présenter dans sa formulation, la nature des solutions recherchées et des éléments d'intérêt de la phénoménologie non linéaire (modes de vibration, résonance, etc.). On reviendra ensuite sur les principales classes de méthodes numériques permettant l'obtention de solutions de systèmes dynamiques non linéaires et sur les méthodes de continuation de ces solutions lorsqu'un paramètre vient à varier. Enfin, dans un troisième temps, les principales techniques de réduction de modèle seront exposées. Un accent particulier sera mis sur l'équilibrage harmonique (HBM) et sur les méthodes de type PGD, techniques largement utilisées dans toute la suite de ces travaux.
- La Partie 2 présente l'intégralité d'un algorithme de continuation de MNL basé sur une combinaison de techniques de réduction de modèle par PGD et d'une approche fréquentielle par équilibrage harmonique. On retrouvera au fil de la lecture des informations sur la construction des problèmes réduits à traiter, sur les spécificités de cette approche ou encore sur l'intérêt de certaines variantes. La présentation est découpée en deux temps : l'obtention d'un point de MNL par combinaison PGD/HBM, puis l'incorporation du solveur obtenu dans un schéma de continuation afin de construire l'ensemble de la branche de solutions. Enfin, le cas des MNLs amortis sera considéré. On montrera comment étendre la méthodologie précédente et comment adapter les algorithmes associés à ce cas d'étude qui apporte des informations pertinentes quant aux aspects dissipatifs des systèmes.
- La Partie 3 est entièrement dédiée à la synthèse modale de réponses forcées construite à partir des MNLs obtenus précédemment. Les différentes hypothèses physiques ou algorithmiques faites seront justifiées au regard de la littérature, que ce soit pour le choix

de la forme de solution forcée recherchée, la manière d'exploiter l'information des MNLs, ou encore les équations résolues pour tracer les FRFs. Une fois ce cadre d'étude posé, l'algorithme implémenté et ses caractéristiques seront présentés.

- Enfin, la Partie 4 regroupe un ensemble d'exemples d'application visant à valider ou à illustrer les approches développées en Partie 2 pour le calcul de MNLs et en Partie 3 pour la synthèse modale de réponses forcées. Sont traités, dans l'ordre : la construction d'un MNL du portique de Roorda, système à non linéarités géométriques conservatives, l'obtention d'un MNL amorti d'un système masses-ressorts à frottement sec régularisé puis la synthèse modale à partir de MNLs d'un système à non linéarités géométriques. Enfin, deux modèles de poutre d'Euler-Bernoulli à non linéarités localisées dont un comportant un problème de contact unilatéral seront utilisés pour revenir une dernière fois sur l'ensemble des méthodes développées dans ce travail et en illustrer les spécificités physiques et numériques.

De nombreux points abordés dans ce manuscrit en Partie 2 et en Partie 4 ont fait l'objet de publications. Ont été réalisés dans le cadre ces travaux de thèse un article dans une revue à comité de lecture ([50]), deux communications orales dans des congrès internationaux ([53, 52]) et une communication en congrès national ([51]). Un article portant sur les investigations de la Partie 3 est en cours d'élaboration.

Partie 1 : Modélisation de la dynamique de systèmes mécaniques non linéaires

1 Systèmes non linéaires continus en temps

Ce premier chapitre est consacré à la modélisation physique de la dynamique des systèmes mécaniques. Après avoir défini et décrit une forme générale de système d'équations différentielles régissant l'évolution du comportement de la classe de systèmes étudiée, on s'attardera sur certaines solutions classiques ainsi que sur la notion de stabilité qui leur est associée. Enfin, les notions modales ainsi que la phénoménologie non linéaire nécessaire au développement du présent travail seront introduites.

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1	Formulation différentielle	9
1.1.1	Systèmes autonomes et non-autonomes	9
1.1.2	Oscillateurs couplés non linéaires	10
1.2	Amortissement structurel	11
1.2.1	Amortissement de Rayleigh	11
1.2.2	Amortissement modal	11
1.3	Non linéarités	12
1.3.1	Frottement et contact : efforts non linéaires associés	13
1.3.1.a	Modèle de frottement sec – Loi de Coulomb	13
1.3.1.b	Modèles de contact	14
1.4	Analyse des solutions	15
1.4.1	Classes de solutions	15
1.4.2	Stabilité des solutions	17
1.4.2.a	Stabilité des points fixes	18
1.4.2.b	Stabilité d’une solution périodique – Théorie de Floquet	19
1.4.3	Continuation de solution et Bifurcations	20
1.5	Phénoménologie non linéaire	21
1.5.1	Modes de vibration	22
1.5.1.a	Modes linéaires	22
1.5.1.b	Modes linéaires amortis	23
1.5.1.c	Modes non linéaires	23
1.5.2	Résonances	25
1.5.2.a	Résonance principale (ou forcée)	25
1.5.2.b	Résonances secondaires	26
1.5.2.c	Résonances internes	28

1.1 Formulation différentielle

Le travail présenté porte sur la détermination de l'évolution de systèmes mécaniques régis par des équations différentielles en temps. On suppose connaître préalablement, via une modélisation physique, une expression de ladite équation. Pour un système présentant N inconnues, cette dernière s'écrit généralement comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

avec \mathbf{x} vecteur de \mathbb{R}^N , $t \in \mathbb{R}$ variable temporelle, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ et \mathbf{F} fonction de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N . \mathbb{R}^N est appelé espace d'états, la configuration d'une grandeur étant entièrement déterminée par la connaissance de ses composantes dans cet espace. Dans le cas où ce dernier serait composé à moitié des vecteurs liés aux déplacements suivis de ceux des vitesses associées, on parlera plutôt d'espace des phases.

Bien que des dérivations en temps d'ordres supérieurs à 1 puissent apparaître dans les modèles physiques développés, on peut se ramener au système différentiel d'ordre 1 de l'Eq. (1.1) à condition de poser un nombre suffisant de variables intermédiaires. Se placer dans l'espace des phases, et donc associer à une variable d'état x la variable intermédiaire $y = \dot{x}$ peut s'avérer judicieux et sera exploité par la suite.

1.1.1 Systèmes autonomes et non-autonomes

Deux classes de systèmes différentiels sont souvent mises en avant. On distingue ainsi les systèmes dit autonomes de ceux qui ne le sont pas [58].

- Un système est dit autonome lorsque la fonction vectorielle \mathbf{F} ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t dans le système donné en Eq. (1.1). Son expression peut alors se réduire à :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

- Un système non-autonome dont les coefficients sont périodiques peut être converti en un système autonome de dimension supérieure. Ceci prendra son importance lorsque l'on cherchera par la suite des solutions périodiques à des systèmes dont le vecteur des sollicitations extérieures $\mathbf{f}_e(t)$ est lui-même sous forme harmonique.

Par exemple, pour une sollicitation extérieure de la forme $f_e(t) = \cos(\omega t)$, on peut définir une variable intermédiaire $\theta = \omega t$ définie à modulo 2π près. Une fois cette nouvelle variable injectée dans le système et l'équation $\dot{\theta} = \omega$ ajoutée, on obtient bien un système autonome de dimension supérieure.

Par ailleurs, on verra que dans le cadre de ces travaux, la présence du temps dans la formulation de système autonome de l'Eq. (1.1) correspond uniquement à l'influence des forces extérieures. Ceci amènera à distinguer *in fine* les systèmes mécaniques soumis à un forçage de ceux en oscillations libres.

1.1.2 Oscillateurs couplés non linéaires

Les considérations précédentes servent de cadre général issu de la théorie des systèmes dynamiques à des modèles mécaniques qu'il nous faut encore expliciter et détailler. On supposera qu'une méthode de discrétisation en espace telle la méthode des éléments finis a préalablement été appliquée aux équations modélisant le phénomène physique étudié.

Soit le système différentiel d'ordre 2 de N équations qui en résulte :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e(t), \quad (1.3)$$

avec \mathbf{x} , $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, $\mathbf{f}_e(t) \in \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. En posant $\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T]^T$, il est toujours possible d'obtenir à partir de l'Eq. (1.3) le système d'état – ou système augmenté [31] :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \mathbf{H}_e(t) \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbf{f}_{nl} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbf{f}_e(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.4)$$

Ce système, à condition d'inversibilité de la matrice \mathbf{M} , est sous la forme d'état de l'Eq. (1.1) dans l'espace des phases, et correspond à un système autonome dès lors que $\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{0}$.

Au prix de quelques arguments physiques détaillés ci-dessous, les systèmes dont la dynamique est décrite par l'Eq.(1.3) seront les systèmes différentiels de référence traités tout au long des travaux à suivre.

Justification physique de la forme de l'Eq. (1.3) Il est difficile d'obtenir des solutions analytiques à un problème de dynamique des milieux continus comportant des non linéarités. On applique généralement des méthodes de discrétisation (*e.g.* méthode des éléments finis, méthode de Ritz, etc.) afin de se ramener à un problème de dimension finie, ce qui ouvre la voie à une formulation matricielle du problème. Le système différentiel issu de ce processus se met généralement sous la forme donnée en Eq. (1.3).

Cette forme permet d'une part de reconnaître une généralisation en dimension N et en non linéaire de l'équation différentielle ordinaire (ODE) de l'oscillateur harmonique forcé et amorti, et d'autre part permet d'attribuer aux matrices du système des propriétés de même nature que celles apparaissant en dimension 1 dans ce dernier.

Les termes contribuant linéairement à l'Eq. (1.3) sont donc la matrice de masse \mathbf{M} , la matrice de raideur linéaire \mathbf{K} , la matrice dite d'amortissement \mathbf{C} pouvant contenir des effets dissipatifs visqueux voire une contribution antisymétrique modélisant des effets gyroscopiques, et un terme d'excitation $\mathbf{f}_e(t)$.

Le vecteur des efforts non linéaires $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ modélise des non linéarités d'origines variées (lois de comportement inélastiques, phénomènes de contact-perte de contact, non linéarités dites géométriques...) détaillées dans la Sec. 1.3. On se place ici dans un cas voulu le plus général possible, prenant en compte une dépendance en $\dot{\mathbf{x}}$ de l'effort non linéaire.

1.2 Amortissement structurel

La nature des sources d'amortissement sont nombreuses, aussi nous nous limiterons à quelques exemples classiques. Modéliser finement l'amortissement d'une structure est un travail à ce jour fortement complexe, et il est très difficile de s'affranchir de mesures expérimentales pour y parvenir. On introduira généralement des termes dissipatifs via la matrice d'amortissement \mathbf{C} *a posteriori*, une fois un modèle discret obtenu. Sont à présent reportées deux grandes classes de modèles d'amortissement qui supposent un découplage en base modale et donc une facilité d'implémentation numérique.

1.2.1 Amortissement de Rayleigh

L'amortissement de Rayleigh est une expression d'amortissement global par rapport à la structure considérée, prenant la forme d'une combinaison linéaire des matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (1.5)$$

Ce modèle d'amortissement, bien que simple à mettre en œuvre et pratique pour diagonaliser le système linéaire sous-jacent à l'Eq. (1.3), peut s'avérer simpliste, principalement à cause de sa nature globale. La prise en compte d'effets dissipatifs localisés ou liés à l'hétérogénéité d'une structure ne seront pas pris en compte, ce qui en fait un outil de validation numérique plutôt qu'un modèle dissipatif réaliste.

La détermination des coefficients α et β reposant généralement sur une étude expérimentale utilisant seulement deux fréquences propres distinctes de la structure (cf. Sec. 1.2.2), l'amortissement du système ne pourra que rarement être fidèle à la réalité.

1.2.2 Amortissement modal

Dans le cadre des analyses vibratoires à venir, on préférera utiliser un amortissement modal. Les modes propres linéaires et objets qui lui sont associés seront rappelés et détaillés plus tard, en Sec. 1.5.1. Soit \mathbf{C} matrice d'amortissement du système considéré. On peut lui associer une matrice $\tilde{\mathbf{C}}$, matrice d'amortissement exprimée dans la base des modes propres linéaires. À condition de disposer de la matrice des vecteurs propres du système Φ , cette dernière s'exprime :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi. \quad (1.6)$$

La diagonale de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$, définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \quad \tilde{C}_{kk} = 2\xi_k \omega_k, \quad (1.7)$$

apporte des informations sur les amortissements modaux ξ_k du système, les pulsations propres ω_k étant alors connues. Les termes hors diagonale traduisent quant à eux les couplages entre modes induits par la matrice \mathbf{C} .

En pratique, pour des systèmes de taille raisonnablement petite, on peut réaliser numériquement la démarche inverse en imposant des amortissements modaux et en faisant le changement de base inverse pour obtenir une matrice \mathbf{C} artificiellement mais de manière contrôlée.

Cas d'un amortissement de Rayleigh déduit des propriétés modales En exprimant la matrice d'amortissement de Rayleigh donnée dans l'Eq. (1.5) dans la base modale, on peut identifier les termes diagonaux avec ceux d'une matrice construite par amortissement modal dans cette même base. On obtient les relations :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \quad \xi_k = \frac{\alpha}{2\omega_k} + \frac{\beta\omega_k}{2}. \quad (1.8)$$

D'après l'Eq. (1.8), le tracé de ξ en fonction de ω donné en Fig. 1.1 illustre les limites d'une telle approche : les termes en α et β ont des effets contraires sur le taux d'amortissement modal suivant que l'on se place à basse ou haute fréquence. Ceci empêche de définir une large plage fréquentielle sur laquelle l'amortissement ne serait pas trop important.

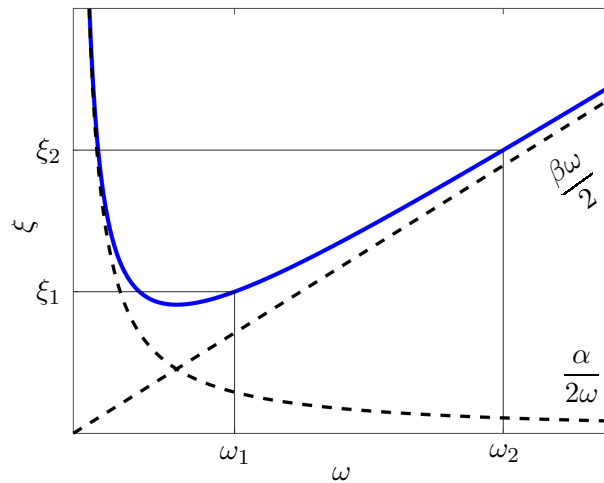


FIGURE 1.1 – Allure du taux d'amortissement modal suivant la pulsation dans le cas d'un amortissement de Rayleigh

1.3 Non linéarités

Si la connaissance théorique des systèmes dynamiques linéaires est solidement appuyée, celle des systèmes comportant des non linéarités l'est beaucoup moins. Le besoin de réalisme et de finesse dans les modèles mécaniques récents ainsi que le développement de machines de calcul de plus en plus performantes justifient la prise en compte de phénomènes jusqu'alors négligés. La complexité des systèmes à résoudre s'en trouve fortement affectée, en particulier lorsqu'il s'agit de traiter des systèmes de tailles importantes, généralement en relation avec un besoin industriel.

S'il est difficile de classer ou de lister exhaustivement les non linéarités, on citera les comportements non linéaires suivants, tels qu'évoqués par Clément dans son travail de thèse [11] :

- Des non linéarités dites géométriques, généralement issues de la prise en compte des grandes déformations, pouvant correspondre à la conservation de certaines fonctions jusqu'alors li-

néarisées dans les équations : choix de l'ordre 1 pour les fonctions sinusoïdales restreignant l'étude à un cadre local (petits angles), suppression parfois arbitraire de termes polynomiaux d'ordre élevé, de termes croisés, etc.

- Des non linéarités dues aux conditions aux limites, comme on peut trouver dans les modèles de contact (cf. Sec. 1.3.1.b).
- Des non linéarités issues de la dissipation. Les phénomènes d'amortissement sont souvent issus de frottement et d'interactions microscopiques de la matière, complexes à décrire. Ils n'ont aucune raison d'être linéaires et ne le sont généralement pas. Même le très classique modèle de frottement de Coulomb constitue un apport de non linéarité qu'il faut alors traiter (cf. Sec. 1.3.1.a).
- Des non linéarités issues d'une loi de comportement du matériau non linéaire.

La présence de termes non linéaires implique des efforts théoriques et numériques supplémentaires. La plupart des théorèmes fondamentaux de l'analyse des systèmes linéaires ne s'appliquent plus, en particulier le théorème de superposition. L'existence et l'unicité des solutions sont très rarement garanties. Ces constats d'ensemble justifient le développement d'outils numériques fiables et rapides permettant de traiter des systèmes de cette complexité, tout en garantissant une facilité d'interprétation des résultats de ces méthodes par l'ingénieur.

1.3.1 Frottement et contact : efforts non linéaires associés

Pour les besoins de cette étude, introduisons à présent deux modèles classiques, un de frottement et un de contact. Ces modèles présentent des discontinuités dans leur formulation, lesquelles sont souvent contournées dans la littérature par l'utilisation d'expressions régularisées [55, 56, 54]. Un exemple d'une telle simplification est illustrée dans le cas de la loi de frottement.

1.3.1.a Modèle de frottement sec – Loi de Coulomb

Le modèle de frottement sec sans doute le plus classique est celui régi par la loi de Coulomb, laquelle permet de définir un seuil pour l'effort tangentiel \mathbf{T} tel que :

$$\begin{cases} \text{Si } |\mathbf{T}| < \mu|\mathbf{N}| \text{ alors } \dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}} = \mathbf{0} & (\text{adhérence}), \\ \text{Si } |\mathbf{T}| = \mu|\mathbf{N}| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}} = \lambda \mathbf{T} & (\text{glissement}), \end{cases} \quad (1.9)$$

avec \mathbf{N} effort normal, μ coefficient de frottement et $\dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}}$ la vitesse relative des deux corps au point de contact. Cette loi n'est pas différentiable, ce qui conduit généralement à des difficultés numériques. On utilise donc souvent des versions régularisées de la loi de Coulomb permettant d'adoucir le point de discontinuité [37]. L'exemple de régularisation tracé en Fig. 1.2 s'exprime via la fonction tangente hyperbolique de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}}) = \mathbf{T} = \mu|\mathbf{N}| \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_{\text{rel}}}{\varepsilon}\right), \quad (1.10)$$

avec ε paramètre choisi tel qu'il soit le plus petit possible pour approcher au mieux la discontinuité du modèle d'origine (cf. Fig. 1.2).

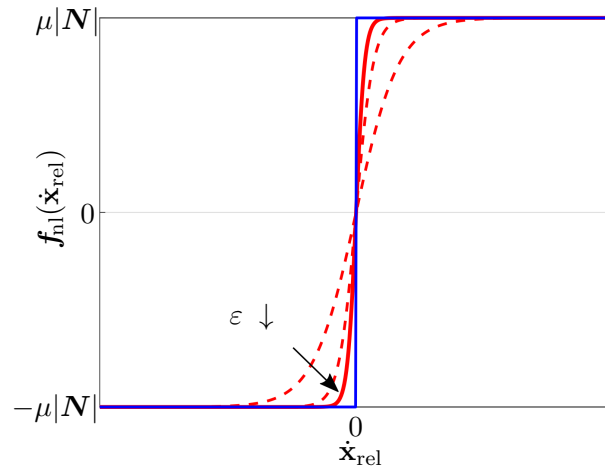


FIGURE 1.2 – Effort non linéaire $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{T}$ en fonction de la vitesse relative $\dot{\mathbf{x}}_{rel}$. Bleu : cas non régularisé. Rouge : Quelques cas régularisés pour des valeurs du paramètre ε décroissantes.

1.3.1.b Modèles de contact

On propose à présent deux modèles simples de contact employés dans la suite de ces travaux. Ces lois, de type butée élastique, seront appliquées en des nœuds de la structure discrétisée. Les régularisations de ces expressions peuvent se faire simplement à l'aide de fonctions polynomiales. Le lecteur intéressé pourra par exemple se référer aux travaux de Moussi [55].

Contact unilatéral Un contact unilatéral en la coordonnée généralisée i est modélisé par une fonction conservative linéaire par morceaux (cf. Fig. 1.3) :

$$(\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}))_i = \begin{cases} k(x_i - g) & \text{si } x_i \geq g, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.11)$$

avec k (N/m) coefficient de raideur linéaire du ressort associé et g (m) jeu initial entre le nœud et le point de contact. Les autres termes $(\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}))_{j \neq i}$ de l'effort non linéaire sont nuls, ce qui en fait une non linéarité dite *localisée*.

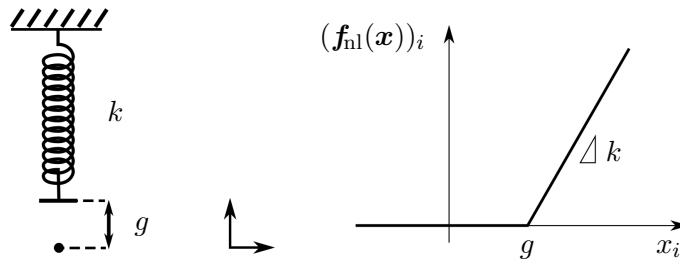


FIGURE 1.3 – Schéma de principe d'un contact unilatéral et effort non linéaire associé

Contact bilatéral (symétrique) Un contact bilatéral en la coordonnée généralisée i est également une fonction conservative définie par morceaux (cf. Fig. 1.4) telle que le seul coefficient

non nul vaut :

$$(\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}))_i = \begin{cases} k(x_i - g) & \text{si } x_i \geq g \text{ ,} \\ k(x_i + g) & \text{si } x_i \leq -g \text{ ,} \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (1.12)$$

avec g (m) jeu correspondant à la distance entre le nœud et un des points de contact. La non linéarité est également localisée.

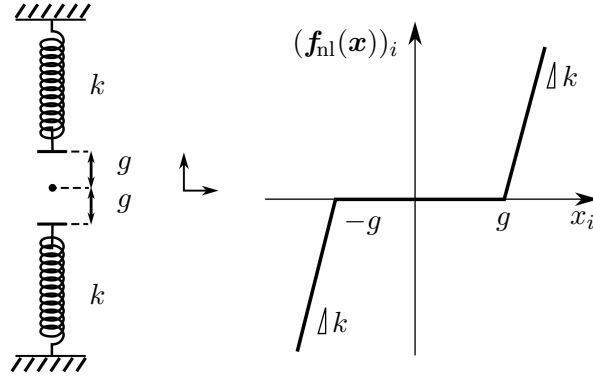


FIGURE 1.4 – Schéma de principe d'un contact bilatéral symétrique et effort non linéaire associé

1.4 Analyse des solutions

1.4.1 Classes de solutions

Le système dynamique non linéaire étant à présent décrit, il convient d'expliciter la nature et les propriétés de ses solutions temporelles $\mathbf{x}(t)$. Quelques évolutions de solutions sont tracées en Fig. 1.5 pour le cas de l'oscillateur harmonique amorti forcé.

On reprendra la terminologie introduite dans la présente section pour décrire les solutions des systèmes dynamiques étudiés par la suite. Ce cadre théorique est notamment celui utilisé par Nayfeh et Balachandran [58]. On caractérise d'abord deux régimes temporels séparant le comportement à $t = 0$ du comportement asymptotique, lorsque $t \rightarrow \infty$. Le régime permanent décrit le comportement asymptotique du système dynamique lorsque $t \rightarrow \infty$, tandis que le régime transitoire évoque la plage temporelle nécessaire pour atteindre le régime permanent.

On classe ensuite les solutions dynamiques suivant leur variabilité par rapport au temps :

- Point d'équilibre / Point fixe : solution constante relativement au temps (cf. Fig. 1.5 (a))
- Solution dynamique : solution présentant une évolution non-constante. On s'intéressera en particulier aux solutions périodiques, définies par leur plus petite période T , telle que pour $\mathbf{x}(t)$ solution :

$$\forall t_0 \mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}(t_0). \quad (1.13)$$

On associe à cette période une pulsation $\omega = 2\pi/T$ ainsi qu'une fréquence de vibration $f = 1/T$.

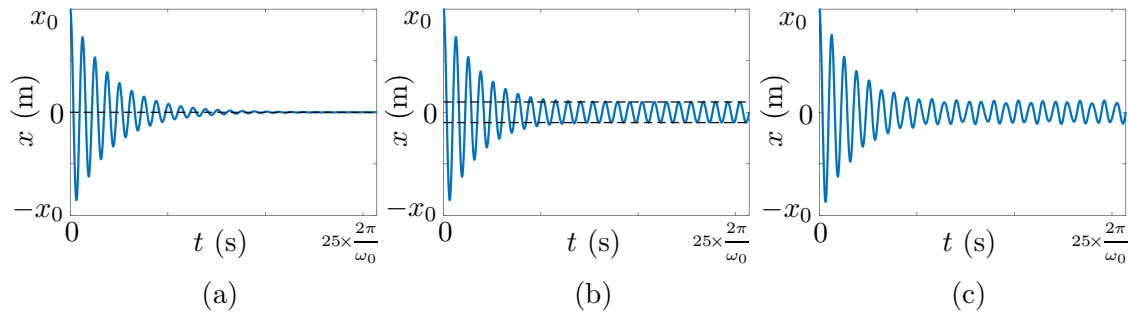


FIGURE 1.5 – Quelques réponses transitoires de l'oscillateur harmonique (a) Cas de lâcher ($f_e = 0$) : convergence vers point fixe (b) Cas $f_e(t) = A \cos(\omega t)$ convergeant vers un cycle limite (c) Exemple de réponse quasi-périodique ($f_e(t) = A(\cos(\omega t) + 2 \cos(\frac{\pi}{2}\omega t))$)

On évoquera sans en faire d'étude les solutions quasi-périodiques, qui superposent au moins deux signaux périodiques de fréquences incommensurables (leurs rapports sont des irrationnels), ainsi que les solutions chaotiques, solutions non constantes ne présentant ni périodicité, ni quasi-périodicité.

Remarque sur le comportement asymptotique L'obtention du régime transitoire via des méthodes de résolution qui intègrent les équations du mouvement dans le domaine temporel peut s'avérer coûteux. Potentiellement, il faut intégrer sur des temps très longs afin d'obtenir le comportement asymptotique (cf. Fig. 1.5). De plus, l'analyse du contenu fréquentiel d'un cycle limite doit alors se faire *a posteriori*, par exemple via une transformation de Fourier. Ces constats motivent le développement de méthodes fréquentielles qui viendraient directement calculer les coefficients de Fourier d'un cycle limite en faisant abstraction de la dynamique transitoire (cf. Sec. 3.2.2).

Portrait de phase On définit un portrait de phase comme un graphe de trajectoires de solutions dans l'espace des phases. On cherche alors à visualiser des informations sur les comportements transitoires et/ou asymptotiques d'une solution. Bien que pratiques pour les systèmes présentant très peu de degrés de liberté, ils ne sont qu'une projection partielle du comportement dynamique du système pour les systèmes de taille importante. On choisit alors de représenter des coordonnées que l'on veut pertinentes dans l'espace des phases. Les trois cas tracés en Fig. 1.5 pour le cas de l'oscillateur harmonique sont représentés en Fig. 1.6 sous la forme de portraits de phase. On soulignera que les solutions périodiques et quasi-périodiques apparaissent asymptotiquement comme des trajectoires fermées dans l'espace des phases. Ce constat graphique fait clairement apparaître la différence entre les termes de solution périodique et de cycle limite, lesquels sont souvent amalgamés dans la littérature.

Section de Poincaré Une section de Poincaré est un échantillonnage de la trajectoire d'une solution dans l'espace des phases. Si l'on relève et trace sur un portrait de phase des valeurs $[\mathbf{x}(kT_0)^T, \dot{\mathbf{x}}(kT_0)^T]^T$ avec $k \in \mathbb{N}$ et T_0 temps d'échantillonnage (souvent pris égal à la période de

l'excitation), plusieurs cas de figure peuvent se présenter. Si la trajectoire est T_0 -périodique, un seul point sera tracé. Si elle est par exemple nT_0 -périodique, n points apparaîtront du fait du choix de la fréquence d'échantillonnage $1/T_0$. Une solution quasi-périodique fera apparaître une courbe fermée, une solution chaotique étant quant à elle un amas de points.

Pour une description détaillée de l'obtention de sections de Poincaré notamment via l'utilisation de l'application de Poincaré, le lecteur peut notamment se référer à [44].

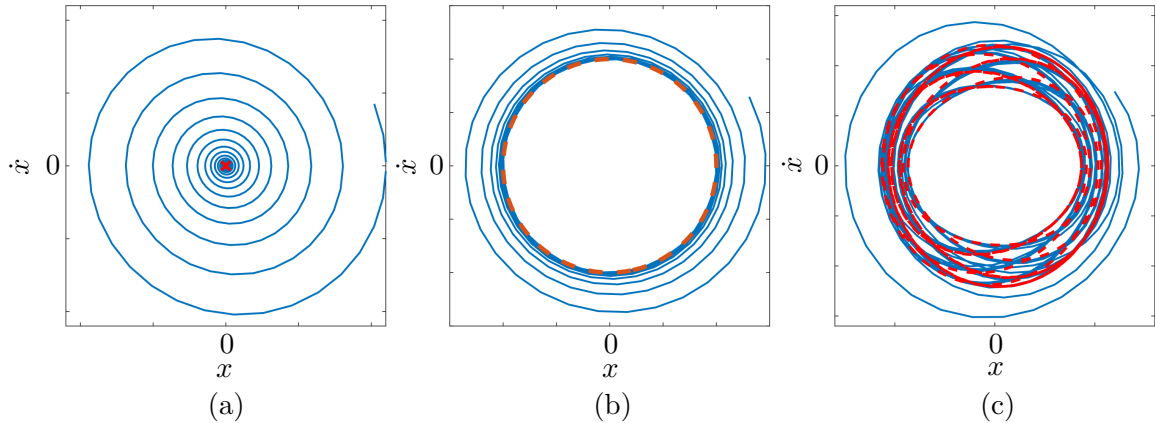


FIGURE 1.6 – Quelques portraits de phase de l'oscillateur harmonique (a) Cas de lâcher (b) Cas $f_e(t) = A \cos(\omega t)$ (c) Exemple de réponse quasi-périodique. Rouge : Cycles limites théoriques

1.4.2 Stabilité des solutions

La définition de stabilité est historiquement chargée de nombreuses contributions, les plus notoires étant associées à Lyapunov et Poincaré.

On évoquera une première définition intuitive, dite stabilité bornée, énonçant qu'une solution $\mathbf{x}(t)$ est stable si et seulement si :

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R} \|\mathbf{x}(t)\| \leq L. \quad (1.14)$$

Peu évidente à utiliser en pratique, on lui préférera la définition locale donnée par Lyapunov. La stabilité d'une solution $\mathbf{x}(t)$ selon Lyapunov s'exprime de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall \mathbf{y}(t) \text{ solution, } [\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| \leq \eta \Rightarrow \forall t \geq t_0 \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon]. \quad (1.15)$$

Ainsi, toute solution $\mathbf{y}(t)$ suffisamment proche à l'instant t_0 d'une solution stable au sens de Lyapunov $\mathbf{x}(t)$ restera dans son voisinage. Si l'on considère $\mathbf{y}(t)$ comme une perturbation de la solution stable $\mathbf{x}(t)$, on en déduit qu'elle reste confinée dans un tube de ligne moyenne $\mathbf{x}(t)$ et de rayon ε .

On définira une solution $\mathbf{x}(t)$ comme étant asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Lyapunov et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0$. Cette définition fait tendre toute perturbation de la solution stable $\mathbf{x}(t)$ vers zéro. C'est cette approche perturbative qui sera préférentiellement exploitée pour le calcul numérique de la stabilité de points fixes ou de solutions périodiques.

Stabilité de Poincaré Les notions de stabilité jusqu'ici introduites présentent certaines lacunes vis-à-vis du cas des solutions périodiques d'un système dynamique. Des contre-exemples physiques classiques sont les solutions périodiques de systèmes libres non amortis, présentant une relation de dépendance fréquence-amplitude. Pour des conditions initiales proches, la variation de fréquence entre deux solutions périodiques $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ permet d'exhiber des temps t_k tels qu'elles ne sont plus "voisines", *i.e.* $\forall \varepsilon \exists t_k \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{y}(t_k)\| \geq \varepsilon$.

Ce constat a amené Poincaré à définir une stabilité dite orbitale, liée aux propriétés géométriques des trajectoires suivies par les solutions dans l'espace des phases. En reprenant les notations précédentes, la stabilité orbitale de $\mathbf{x}(t)$ se définit de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall \mathbf{y}(t) \text{ solution } [\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(t_1)\| \leq \eta \Rightarrow \exists t_2, t_3 \text{ tq } \|\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{y}(t_3)\| < \varepsilon]. \quad (1.16)$$

La recherche pratique de la stabilité au sens de Poincaré requiert l'utilisation des outils de visualisation des trajectoires des solutions que peuvent être les portraits de phase ou les sections de Poincaré.

1.4.2.a Stabilité des points fixes

Nous avons vu que les points fixes, à l'instar des cycles limites, sont des objets essentiels à la détermination du comportement du système en régime permanent. Par exemple, on pourra chercher à visualiser des bassins d'attraction, qui sont l'ensemble des conditions initiales convergent vers une solution stable. Une telle investigation nécessite une définition de la stabilité des points fixes.

On n'abordera pas dans ce manuscrit l'analyse de stabilité via l'obtention et l'utilisation de fonctions de Lyapunov. On pourra se référer à l'ouvrage [48] pour aller plus loin.

La détermination pratique et exploitable numériquement de la stabilité des points fixes est centrée autour d'une approche perturbative de l'équilibre. Soit \mathbf{y}_0 solution de type point fixe préalablement déterminée. On considère une solution perturbée $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}(t)$ injectée dans le système non linéaire de l'Eq. (1.1), avec $\mathbf{z}(t) = o(\mathbf{y}(t))$. En développant à l'ordre 1 par rapport à \mathbf{z} , on obtient alors le système tangent suivant :

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, t) \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{z}, \quad (1.17)$$

avec \mathbf{A} matrice jacobienne évaluée au point fixe \mathbf{y}_0 . En diagonalisant cette matrice, et en notant $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$ avec \mathbf{D} diagonale, on peut écrire la solution du système tangent (1.17) passant par \mathbf{z}_0 à $t = t_0$:

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{z}_0 = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}(t-t_0)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{z}_0. \quad (1.18)$$

La matrice $e^{\mathbf{D}(t-t_0)}$ est une matrice diagonale dont les valeurs sont $e^{\lambda_i(t-t_0)}$, avec λ_i *i^{eme}* valeur propre de \mathbf{A} . Le comportement asymptotique de la perturbation est régi par le signe de la partie réelle des valeurs propres λ_i . Les vecteurs propres issus de la diagonalisation précédente formant une base de \mathbb{R}^N , on peut décomposer l'espace suivant la stabilité des sous-espaces propres en une somme directe $\mathcal{E}_s \oplus \mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}_c$. Le sous-espace stable \mathcal{E}_s est appelé variété stable, le sous-espace instable \mathcal{E}_i est appelé variété instable, tandis que \mathcal{E}_c est appelé variété centrée, chacun des sous-espaces étant généré respectivement par les vecteurs propres associés à une partie réelle de valeur propre négative, positive, ou nulle.

Les variétés stable et instable permettent de statuer sur la stabilité du point fixe. Une solution dont la variété instable est non vide sera instable. On appellera solution hyperbolique une solution dont la variété centrée est vide ($\mathcal{E}_c = \emptyset$). En gardant à l'esprit les considérations précédentes, la Fig. 1.7 illustre l'ensemble des cas de stabilité de points fixes.

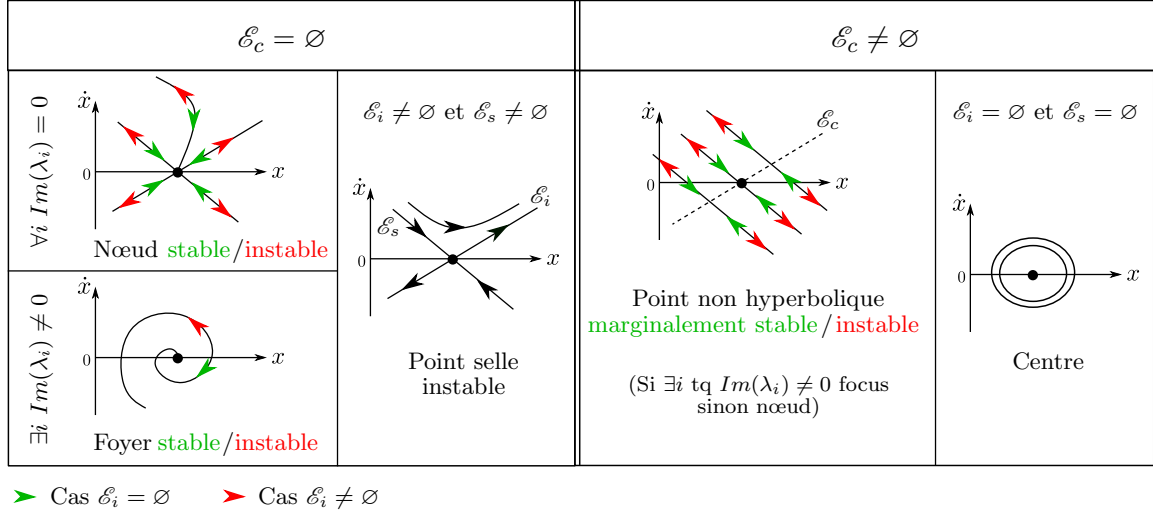


FIGURE 1.7 – Schéma des portraits de phase des points fixes. Sens des flèches : temps croissant.

1.4.2.b Stabilité d'une solution périodique – Théorie de Floquet

La détermination de la stabilité des solutions périodiques part d'une démarche perturbative analogue à celle utilisée pour les points fixes. On s'intéresse à une solution perturbée $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{z}(t)$ du système régi par l'Eq. (1.1), avec $\mathbf{y}_p(t)$ solution T -périodique de ladite équation et $\mathbf{z}(t) = o(\mathbf{y}_p(t))$. Le développement à l'ordre 1 aboutit à l'équation linéarisée suivante :

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_p(t), t) \mathbf{z} = \mathbf{A}(t) \mathbf{z}, \quad (1.19)$$

avec $\mathbf{A}(t)$ matrice jacobienne évaluée en $\mathbf{y}_p(t)$. L'Eq. (1.19) constitue un système différentiel linéaire à coefficients périodiques, de période T . Sa résolution rentre dans le cadre de la théorie de Floquet, dont nous allons donner quelques éléments utiles à la détermination de la stabilité.

Ce système différentiel linéaire possède N solutions indépendantes \mathbf{z}_i compilées dans une matrice $\mathbf{Z}(t) = [\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_N(t)]$, avec $\mathbf{Z}(t)$ lui-même solution de l'Eq. (1.19). Or, par T -périodicité de $\mathbf{Z}(t)$, la matrice $\mathbf{Z}(t+T)$ est également solution, et doit donc s'exprimer comme combinaison linéaire de la base de solution qu'est $\mathbf{Z}(t)$, via une matrice constante notée Φ_F . Ainsi :

$$\mathbf{Z}(t+T) = \mathbf{Z}(t) \Phi_F. \quad (1.20)$$

Φ_F est appelée matrice de monodromie. Cette dernière n'est pas unique car dépendante du choix de système fondamental de solutions $\mathbf{Z}(t)$. On peut ainsi poser $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_N$ identité d'ordre N , et obtenir $\mathbf{Z}(T) = \Phi_F$. La matrice de monodromie peut alors être obtenue par intégration temporelle sur une seule période T , à partir de N conditions initiales linéairement indépendantes que sont les $\mathbf{z}_i(0) = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ (avec le "1" à la i^{eme} position).

En diagonalisant ensuite Φ_F ($\Phi_F = \mathbf{P}\mathbf{D}_F\mathbf{P}^{-1}$, avec \mathbf{D}_F matrice diagonale de termes ρ_i) et en appliquant le changement de variable $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}$, on obtient $\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{D}_F$, ou encore $\forall 1 \leq i \leq N \mathbf{v}_i(t+T) = \rho_i\mathbf{v}_i(t)$. Par récurrence, on en déduit :

$$\forall m \geq 0 \forall 1 \leq i \leq N \mathbf{v}_i(mT) = \rho_i^m \mathbf{v}_i(0). \quad (1.21)$$

L'étude de stabilité est donc ramenée à l'analyse des normes des valeurs propres $|\rho_i|$ de la matrice de monodromie. On nomme ces valeurs propres des multiplicateurs de Floquet. Une direction propre i appartiendra au sous-espace stable ou au sous-espace instable respectivement si $|\rho_i| < 1$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = 0$) ou si $|\rho_i| > 1$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = +\infty$). Le sous-espace centré est généré par le vecteur propre dont le module de la valeur propre $|\rho_i|$ vaut 1. On peut montrer que dans le cadre des systèmes autonomes, la variété centrée contient toujours le vecteur propre associé à la valeur propre 1 [58]. Cette valeur sera donc exclue de l'analyse pratique de stabilité.

On notera que si $\rho_i = 1$, la solution $\mathbf{v}_i(t)$ est T -périodique, et que si $\rho_i = -1$, la solution $\mathbf{v}_i(t)$ est $2T$ -périodique (doublement de période).

1.4.3 Continuation de solution et Bifurcations

Les concepts permettant de décrire des solutions de type point fixe ou périodique ainsi que leur stabilité ont été décrits précédemment. Nous allons maintenant nous intéresser à la continuation de solution suivant un seul paramètre. Ce cas de figure s'avère physiquement très commun, le paramètre pouvant par exemple être la fréquence ω de sollicitation extérieure d'une structure si l'on s'intéresse aux fonctions de réponses en fréquence (FRF).

Soit un système différentiel non linéaire dépendant d'un paramètre κ que nous souhaitons étudier sur un ensemble discret ou un intervalle $[\kappa_0; \kappa_0 + \kappa]$ de valeurs. Le problème s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \kappa). \quad (1.22)$$

On peut intuitivement concevoir que pour certains intervalles $[\kappa_0; \kappa_0 + \kappa]$, la dynamique trouvée soit sensiblement la même : même nombre de points fixes, solutions qualitativement semblables tant en régime transitoire qu'en régime permanent, mêmes stabilités, etc. On peut ainsi décrire des branches de solutions similaires en nature. Cependant, des changements qualitatifs des solutions peuvent intervenir pour certaines valeurs du paramètre κ : on parlera de point de bifurcation.

En pratique, pour détecter ces points singuliers, on exploitera de nouveau les notions de stabilité de solution (de point fixe ou de cycle limite) comme critère descriptif de l'état vibratoire de notre système physique.

Les bifurcations pour la continuation suivant un paramètre ont été exhaustivement étudiées, et on peut les classer à partir des études de stabilité. La théorie des bifurcations est notamment détaillée dans l'ouvrage [33].

Bifurcation de point fixe Comme décrit en Sec. 1.4.2.a, on étudie les valeurs propres λ_i de la jacobienne évaluée au point fixe considéré. Plus précisément, la présence ou non d'une partie

réelle strictement positive pour une valeur propre λ_i permet de conclure quant à l'instabilité dudit point fixe.

Deux grandes classes de bifurcations de point fixe se démarquent :

- des bifurcations dites statiques, *e.g.* point de retournement, transcritique ou fourche, pour lesquelles une partie réelle de λ_i devient positive.
- les bifurcations de type Andronov-Hopf, également nommées bifurcations de Hopf ou bifurcations dynamiques, pour lesquelles deux valeurs propres conjuguées franchissent l'axe des imaginaires : il apparaît ou disparaît une solution périodique.

Le lecteur intéressé pourra trouver le détail des sous-catégories de bifurcations de point fixe dans [58] par exemple.

Bifurcation de cycle limite Comme décrit en Sec. 1.4.2.b, le franchissement du cercle unité par les multiplicateurs de Floquet ρ_i constitue notre critère de stabilité d'une solution périodique. Les cas particuliers de franchissement par $\rho_i = -1$ et $\rho_i = 1$ correspondent respectivement à des doubléments de périodes et à des points de type retournement ou embranchement (cf. Fig. 1.8). Sinon, dans le cas général, on parlera de bifurcation de Neimark-Sacker, ou bifurcation de Hopf de type II.

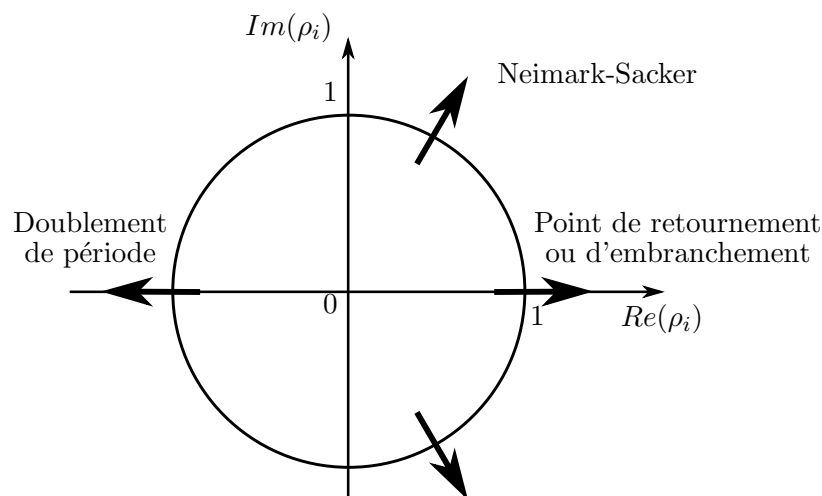


FIGURE 1.8 – Schéma des bifurcations de cycles limites possibles. Flèches : franchissement du cercle unité lorsque le paramètre de continuation κ varie

1.5 Phénoménologie non linéaire

Après avoir brièvement rendu compte de la nature et de la stabilité des solutions d'un système dynamique non linéaire, nous avons vu qu'il était possible d'inclure cela dans le contexte général d'une famille de systèmes pour laquelle un paramètre κ varie. Le tracé de FRF étant

au centre des présents travaux, la pulsation ω de solutions périodiques sera généralement ce paramètre de continuation.

Au regard de ces notions fondamentales, nous introduisons dans les sections suivantes certains phénomènes vibratoires et objets mathématiques qui permettent une compréhension fine de la dynamique des systèmes non linéaires, y compris d'un point de vue expérimental. L'obtention numérique rapide et réduite de ces objets est l'objectif principal de ce travail de thèse.

1.5.1 Modes de vibration

L'analyse modale est centrée sur l'étude des modes de vibration d'un système. Pouvant être déterminés numériquement ou expérimentalement, ces modes sont des couples fréquence propre/vecteur propre intrinsèques à l'objet d'étude et à ses caractéristiques dynamiques, ce qui en fait des outils largement exploités en milieu industriel.

Par ailleurs, les besoins croissants de réalisme des modèles physiques industriels couplés au développement de moyens de calcul numériques toujours plus puissants permettent à présent de s'intéresser à la phénoménologie non linéaire. Ces effets étaient jusqu'à il y a peu constatés expérimentalement mais rarement pris en compte de manière fine dans les modèles numériques. Fort de ce constat, les objets linéarisés que sont les modes de vibrations linéaires ne suffisent plus pour décrire fidèlement la dynamique des systèmes non linéaires, et l'on est tenté de se tourner vers une extension des modes propres linéaires qui serait plus adaptée à ces systèmes complexes : les modes non linéaires.

1.5.1.a Modes linéaires

Il convient tout d'abord de rappeler la notion de mode propre linéaire ainsi que les principaux résultats et propriétés associés. On considère le cas où le système décrit par l'Eq. (1.3) est linéaire, libre et non-amorti, autrement dit : $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{0}$. Le système dynamique s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1.23)$$

Un mode propre linéaire est défini comme un couple (ω_i, ϕ_i) tel que $\mathbf{x}_i(t) = \phi_i A \cos(\omega_i t)$ est solution périodique de l'Eq. (1.23). Le système discret étant de taille N , il existera N modes propres linéaires que l'on peut trouver en injectant la forme de $\mathbf{x}_i(t)$ dans l'Eq. (1.23) et en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = \mathbf{0}. \quad (1.24)$$

On définit ensuite la matrice modale Φ dont les colonnes sont les vecteurs propres ϕ_i rangés par ordre croissant de fréquence propre. Nous adopterons la normalisation usuelle des modes propres par rapport à la matrice de masse \mathbf{M} , définie par la relation $\forall k \in \{1, \dots, N\} \phi_k^T \mathbf{M} \phi_k = 1$. De plus, les modes sont orthogonaux deux à deux par rapport à la matrice de masse \mathbf{M} mais aussi par rapport à la matrice de raideur \mathbf{K} , ce qui peut s'écrire au final $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}_N$ et $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$. Cette diagonalisation simultanée des matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} permet de découpler les équations.

Les modes propres linéaires ne présentent pas de dépendance fréquence/amplitude. Enfin, les modes propres définissent des sous-espaces invariants de l'espace des phases : tout mouvement initialisé sur un mode propre y restera.

1.5.1.b Modes linéaires amortis

Il est possible d'introduire un autre concept modal dans le cadre de la théorie linéaire : les modes propres d'une structure amortie. Il s'agit cette fois de conserver l'amortissement visqueux qui avait été retiré de l'Eq. (1.23) pour obtenir le problème aux valeurs propres non amorti. Le système s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Pour faire apparaître un nouveau problème aux valeurs propres généralisé, on a recours à la formulation en système augmenté de l'Eq. (1.4), dans le cas particulier pour lequel $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{f}_e = \mathbf{0}$. En rappelant que $\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T]^T$, vecteur d'état de taille $2N$, le problème augmenté s'écrit donc :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (1.26)$$

En cherchant des solutions de l'Eq. (1.26) sous la forme complexe $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\psi}_i e^{\lambda_i t}$, avec $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{C}^{2N}$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$, le problème aux valeurs propres généralisé obtenu s'écrit :

$$(\mathbf{B} + \lambda_i \mathbf{A})\boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0}. \quad (1.27)$$

Cependant, si le théorème spectral garantit l'existence de N modes dans le cas non amorti, ici l'absence de définie-positivité de la matrice \mathbf{A} empêche d'affirmer l'existence de $2N$ modes complexes amortis. Bien que dans de nombreux cas ces modes existent, en particulier pour des systèmes peu amortis, ils ne diagonalisent pas nécessairement \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} simultanément.

Les modes propres linéaires amortis présentent deux propriétés fortes : ils sont orthogonaux entre eux par rapport à la matrice \mathbf{B} , et si une valeur propre λ_k est telle que $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, alors parmi les autres modes il en existe un qui vaut $(\overline{\lambda_k}, \overline{\boldsymbol{\psi}_k})$, conjugué du premier.

Notons $\lambda_i = -\beta_i + i\tilde{\omega}_i$, avec $\tilde{\omega}_i$ (rad.s⁻¹) pulsation propre amortie du mode i et β_i (s⁻¹) taux d'amortissement de ce mode. Après avoir écrit la composante ψ_{ij} sous sa forme complexe amplitude-phase $|\psi_{ij}|e^{i\theta_{ij}}$, analysons l'expression du j^{eme} degré de liberté du mode i :

$$\text{Re}\{y_j(t)\} = \text{Re}\{|\psi_{ij}|e^{i\theta_{ij}}e^{i\tilde{\omega}_i t}e^{-\beta_i t}\} = |\psi_{ij}|\cos(\tilde{\omega}_i t + \theta_{ij})e^{-\beta_i t}.$$

La partie oscillatoire du mouvement modal subit un déphasage temporel lequel peut être différent pour chaque composante du vecteur \mathbf{y} : les différents degrés de libertés (ddl) n'atteindront généralement pas leurs extrema en même temps. Autrement dit, la présence d'amortissement introduit un déphasage entre les degrés de libertés même d'une structure. On prendra soin de ne pas confondre ce dernier avec le déphasage entre le forçage d'une système et l'ensemble des degrés de liberté que l'on retrouve dans le cadre du calcul des réponses forcées.

1.5.1.c Modes non linéaires

Le concept mathématique relativement récent de mode non linéaire (MNL) a fait l'objet de plusieurs définitions historiques [63]. Avant de faire un inventaire plus exhaustif des travaux

qui les traitent, nous pouvons d'ores et déjà les considérer comme une volonté d'extension du concept de mode propre linéaire au cas non linéaire. Cependant, la perte de linéarité du système traité implique l'impossibilité d'appliquer directement le principe de superposition. L'intérêt général de ces objets est donc de rendre compte de la phénoménologie non linéaire en partant d'objets connus et d'exploiter leur information tant à but de diagnostic que de construction de la dynamique d'un système complexe (*e.g.* pour la synthèse modale).

Revenons à présent rapidement sur l'introduction historique de ce concept. Les premiers travaux sur la question remontent à Poincaré et Lyapunov. Ce dernier démontra sous hypothèses de régularité et d'absence de résonance interne qu'un système hamiltonien de dimension finie possède une famille de solutions périodiques autour d'un point d'équilibre stable. Entre 1962 et 1966, Rosenberg publie des travaux basés sur cette théorie [64, 65] et définit comme mode normal non linéaire une vibration à l'unisson des degrés de liberté du système. Par construction, il s'agit de MNL non amorti et il n'existe pas de déphasage entre les inconnues du système : elles atteignent toutes leurs extrema et leurs zéros en même temps. Pour les travaux présentés dans ce manuscrit, calculer les MNLs non amortis d'un système signifiera les calculer à la façon de Rosenberg. On cherchera donc des familles de solutions périodiques de l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.28)$$

Les termes dissipatifs sont retranchés de cette formulation. Par ailleurs, une propriété fondamentale de ces oscillations non linéaires est la dépendance fréquence-énergie mécanique que l'on ne retrouvait pas dans le cas linéaire. En effet, les formes modales ainsi que leur fréquence de vibration présentent une dépendance en l'énergie du système. On distinguera d'une part des effets non linéaires dits *assouplissants* lorsque ω_i diminue à énergie croissante, et d'autre part des effets non linéaires *raidissants* lorsqu'à l'inverse ω_i augmente à énergie croissante.

Les différents concepts introduits sur les MNLs à la façon de Rosenberg sont illustrés en Fig. 1.9 pour l'oscillateur à 1 ddl dit de Duffing, pour des valeurs unitaires, dont l'équation peut s'écrire :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = f_e \cos(\omega t) \\ m = 1, k = 1, c = f_e = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Il s'agit de l'oscillateur harmonique enrichi d'une non linéarité βx^3 cubique et conservative car ne dépendant pas de la vitesse $\dot{x}(t)$. Le signe de β influe directement sur le caractère raidissant ou assouplissant de la non linéarité.

Pour le tracé de cet exemple on cherche des solutions périodiques à 1 harmonique, sous la forme $x(t) = a_1 \cos(\omega t)$.

En présence d'amortissement, la notion de solution périodique qui pouvait être utilisée pour décrire les MNLs de Rosenberg ne suffit plus, puisque tout mouvement converge asymptotiquement vers un équilibre stable. Shaw et Pierre proposent alors dans les années 1990 une approche plus géométrique des MNLs : que le système soit amorti ou non, il s'agit d'une variété invariante de dimension 2 dans l'espace des phases [74, 75].

Dans ce manuscrit, on sera amené à chercher des solutions évoluant sur ces variétés. On se focalisera sur des solutions périodiques amorties – ou pseudo-périodiques – de l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

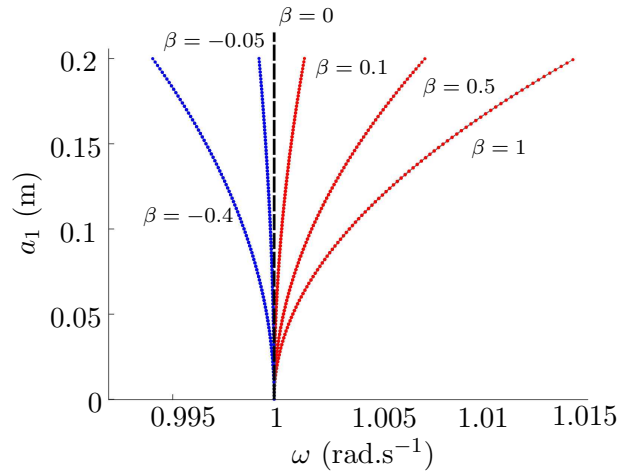


FIGURE 1.9 – Mode non linéaire de l'oscillateur de Duffing unitaire pour différentes valeurs de raideur cubique β (N.m^{-3})

Nous dénommerons MNLs amortis de telles solutions, en référence d'une part à la définition de Shaw et Pierre des MNLs et d'autre part à la prise en compte des effets dissipatifs des équations du mouvement.

1.5.2 Résonances

On se place dans le cas du calcul de réponses forcées pour le système régi par l'Eq. (1.3), rappelé ci-dessous :

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e(t). \quad (1.31)$$

On se placera dans le cas classique d'une sollicitation mono-harmonique $\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{f}_0 \cos(\omega t)$.

1.5.2.a Résonance principale (ou forcée)

On définit une résonance principale comme un maximum d'amplitude atteint par le système du fait d'une sollicitation extérieure. On observe cette dernière pour des fréquences d'excitation $\omega \approx \omega_i$, avec ω_i i -ème pulsation propre linéaire. Cependant, contrairement au cas linéaire, il existe une dépendance entre la pulsation de résonance et l'amplitude de forçage du système.

Une différence sera faite entre la résonance en amplitude qui vient d'être définie avec la notion de résonance de phase. En effet, on peut définir une fréquence pour laquelle le déphasage temporel entre la réponse $\mathbf{x}(t)$ et le forçage extérieur $\mathbf{f}_e(t)$ vaut $-\frac{\pi}{2}$, appelée résonance de phase. Cette différence conceptuelle entre ces deux points de résonance est particulièrement perceptible pour des systèmes présentant de forts amortissements. L'illustration la plus simple de ce phénomène est visible dans le cas linéaire, d'après les explications données dans la Sec. 1.5.1.b.

La résonance de l'oscillateur de Duffing (unitaire) est tracée en Fig. 1.10 pour différents niveaux de forçage extérieur.

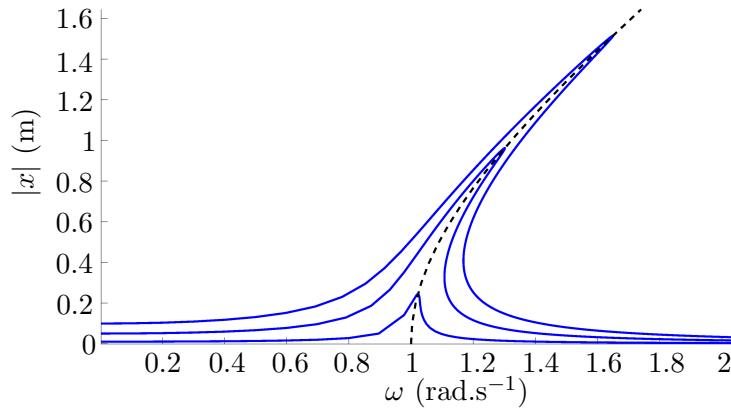


FIGURE 1.10 – Résonance principale de l'oscillateur de Duffing unitaire, avec $c = 0.04 \text{ kg.s}^{-1}$, $\beta = 1 \text{ N.m}^{-3}$ et différentes valeurs de f_e : 0.01 N, 0.05 N et 0.1 N. Pointillés : MNL

On observe la dépendance fréquence-amplitude de la résonance : ici, plus l'énergie mécanique du système est grande, plus la fréquence de vibration du Duffing forcé est élevée (effet raidissant de la non linéarité cubique). Les pics de résonance viennent ainsi se placer autour de la courbe correspondant au mode non linéaire. On parle de *backbone curve* définie par le mode non linéaire, du fait que cet objet représente l'ossature des différentes réponses forcées possibles autour des pics de résonance.

Le rôle clé que jouent les MNLs en tant que descripteurs du comportement dynamique d'une structure autour de la résonance justifie les efforts numériques fournis dans ce travail de thèse : on souhaite obtenir ces objets rapidement en vue de les exploiter en tant que brique élémentaire pour la synthèse des réponses forcées non linéaires.

Commentaires phénoménologiques On notera l'existence d'une plage de pulsations ω telle que plusieurs réponses dynamiques coexistent (cf. Fig. 1.11). On peut montrer via le calcul des coefficients de Floquet que la branche tracée en rouge est instable. Lorsque l'on réalise un balayage ascendant de ω expérimentalement ou numériquement, on constate un saut d'amplitude au niveau de la résonance. De même, si le balayage est descendant, un autre saut a lieu autour de 1.1 rad.s^{-1} , ce qui rend la branche instable difficilement accessible lors des essais. Numériquement, le problème de l'accès à la branche instable sera résolu via l'utilisation de schémas de continuation de solution, lesquels permettent de suivre localement la courbe le long de son abscisse curviligne. Les points de retournement comme ceux-ci pourront donc être détectés.

1.5.2.b Résonances secondaires

Lorsqu'il existe une relation de commensurabilité entre la pulsation d'excitation et des pulsations propres, des phénomènes de résonance secondaire peuvent apparaître.

On appelle résonance super-harmonique une relation $\omega = \frac{\omega_i}{n}$ avec ω pulsation d'excitation du système et $n \in \mathbb{Z}^*$. On constate alors l'apparition d'un terme de pulsation $n\omega$ dans la réponse dynamique. Pour illustrer ce type de résonance secondaire, on définit le système à deux degrés de liberté représenté en Fig. 1.12 et extrait de [81]. Les inconnues sont les déplacements

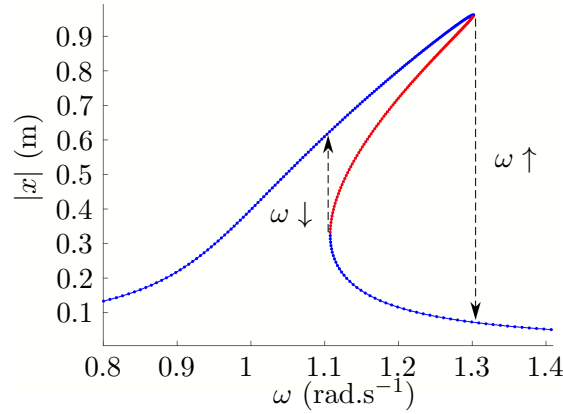


FIGURE 1.11 – Résonance principale de l'oscillateur de Duffing pour $f_e = 0.5 N$: zones de stabilité et solutions multiples. Rouge : zone instable d'après Floquet. Flèches : sauts de solution lors d'un balayage en fréquence.

(adimensionnés) $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ce système est à élongation quadratique des ressorts, menant à l'apparition de non linéarités polynomiales (cubiques) dans les équations du mouvement.

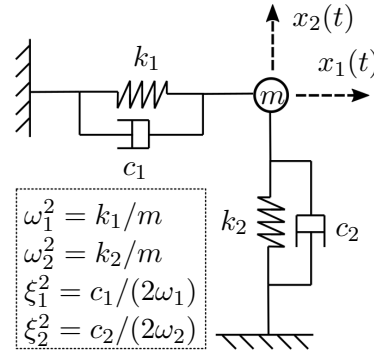


FIGURE 1.12 – Système masses-ressorts de taille 2 à non linéarité cubique.

En base modale, et pour des ressorts de longueur initiale $l_0 = 1$, ces dernières s'expriment :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \frac{\partial E_{pm}}{\partial x_1} = f_e \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 + \frac{\partial E_{pm}}{\partial x_2} = f_e \cos(\omega t) \\ E_{pm} = \frac{1}{2}\omega_1^2(x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2))^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2(x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2))^2 \end{cases} \quad (1.32)$$

Le tracé d'une fonction de réponse en fréquences de la Fig. 1.13 laisse apparaître quelques résonances super-harmoniques. La présence de termes quadratiques en les variables explique la présence de pics pour $\omega \approx \frac{\omega_1}{2}$ et $\omega \approx \frac{\omega_2}{2}$. Les fréquences dépendant du niveau d'énergie mécanique présente dans le système, les relations de commensurabilité ne sont qu'approximatives, et on confirmera généralement la nature d'une résonance secondaire en analysant *a posteriori* le contenu harmonique des solutions qui constituent les pics.

On notera également l'existence de résonances sous-harmoniques, observées lorsqu'une relation $\omega = n\omega_i$ existe. Il apparaît alors dans la réponse dynamique un terme de pulsation $\frac{\omega}{n}$.

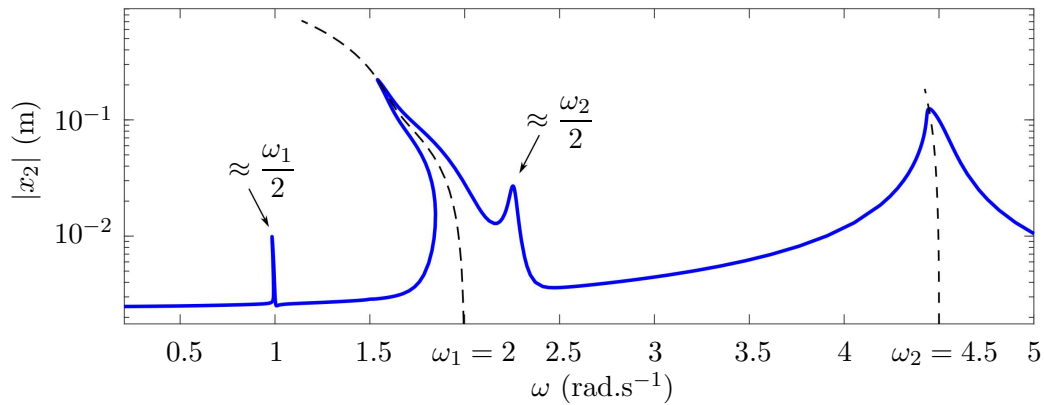


FIGURE 1.13 – Fonction de réponse en fréquence du système masses-ressorts à 2 ddls, pour $f_e = 0.05$ N

1.5.2.c Résonances internes

Finissons par évoquer le phénomène de résonance interne. Comme son nom le sous-entend, il s'agit d'une conséquence des propriétés modales du système étudié. Il apparaîtra lorsqu'existeront des relations de commensurabilité entre les différentes valeurs propres du système. On définit donc une résonance interne par une relation $\sum c_k \omega_k = 0$, $c_k \in \mathbb{Z}^*$. Des couplages entre les modes concernés peuvent alors apparaître dans la réponse forcée.

Ce phénomène est relativement fréquent du fait que les fréquences propres évoluent en fonction de l'énergie mécanique présente dans le système et que des relations de commensurabilité finissent très souvent par apparaître.

Méthodes numériques de résolution

Le système différentiel étudié ainsi que les concepts et outils permettant l'analyse de ses solutions sont à présent posés. Fort du constat que des solutions analytiques pour des problèmes non-linéaires présentant beaucoup de degrés de liberté sont très rares, nous allons à présent détailler les principales classes de méthodes permettant l'obtention numérique des solutions de systèmes dynamiques non linéaires. Les intégrateurs temporels ainsi que les algorithmes de résolution de systèmes algébriques, essentiels à la construction d'un grand nombre de solveurs, seront brièvement décrits. Ces approches très classiques serviront de brique élémentaire pour construire des solveurs plus complexes, lesquels seront plus adaptés au traitement de cas non linéaires ainsi qu'au calcul de solutions périodiques. Les principales méthodes de continuation de solution seront enfin détaillées.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Intégrateurs temporels	31
2.2	Résolution de systèmes algébriques	33
2.3	Méthodes temporelles pour le cas non linéaire	34
2.3.1	Méthode de type Lindstedt-Poincaré	34
2.3.2	Algorithmes de tir	35
2.4	Continuation numérique de solution	35
2.4.1	Continuation point par point	36
2.4.1.a	Étape de prédiction	36
2.4.1.b	Étape de correction	38
2.4.1.c	Schéma de continuation et gestion du pas	39
2.4.2	Continuation par la MAN	40

2.1 Intégrateurs temporels

Nous détaillerons d'abord l'approche de résolution la plus intuitive et sans doute la plus répandue, qui consiste à déterminer une solution $\mathbf{x}(t)$ dans le domaine temporel.

Les intégrateurs temporels reposent sur des schémas numériques permettant notamment de traiter les équations différentielles ordinaires (ODEs) telles que formulées dans l'Eq. (1.1) et associées à une condition initiale de type $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. On se propose de résoudre numériquement le problème de Cauchy ainsi posé à partir de schémas itératifs basés sur un maillage en temps (t_k) , avec $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ pas de temps, et sur les valeurs actuelles ou précédemment calculées de $\mathbf{x}(t_k)$ et/ou $\dot{\mathbf{x}}(t_k)$.

Une classe assez générale de ces schémas de type différences finies est celle des méthodes à q pas [19]. Ces méthodes prennent en compte l'état du système sur les q itérations en temps préalablement réalisées, et peuvent s'exprimer :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{x}_{k+1-i} + h_k \sum_{i=0}^q \beta_i \dot{\mathbf{x}}_{k+1-i}, \quad (2.1)$$

en notant $\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k), t_k)$, et en précisant que l'on cherche dans cette expression à calculer la solution à $t = t_{k+1}$.

Schéma explicite ou implicite Lorsque $\beta_0 = 0$, la détermination de l'état à $t = t_{k+1}$ via le schéma ne fait pas intervenir l'inconnue actuelle $\dot{\mathbf{x}}_{k+1}$ et se fait facilement via des opérations matricielles courantes. On parle de schéma explicite.

Si $\beta_0 \neq 0$, il faut alors résoudre un système d'équations pour déterminer l'état $(k+1)$, ce qui peut présenter des avantages mais se révèle généralement plus coûteux en temps de calcul numérique. On parle de schéma implicite.

Consistance Lors d'un choix de schéma à appliquer à une ODE, la première considération à prendre en compte est l'erreur réalisée du fait même de remplacer l'ODE par le schéma. On veut que la somme des erreurs réalisées pour chaque pas de temps soit négligeable dès que $h = \max_{0 \leq k < N} (h_k)$ est assez petit. Le schéma multi-pas de l'Eq. (2.1) est dit consistant si son

erreur de consistance $\varepsilon_k = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{x}(t_{k+1-i}) + h_k \sum_{i=0}^q \beta_i \dot{\mathbf{x}}(t_{k+1-i}) \right)$ respecte la condition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = 0.$$

Stabilité et convergence Du fait des erreurs d'arrondis numériques, des perturbations sont irrémédiablement introduites dans les données du schéma. Un schéma pour lequel une petite variation des données implique une grande perturbation de la solution n'a aucun intérêt pratique. Si l'on arrive à majorer ces erreurs, conditionnellement ou non, on obtient alors un schéma

stable. Soit la suite (z_k) telle que $z_{k+1} = \sum_{i=1}^q \alpha_i z_{k+1-i} + h_k \sum_{i=0}^q \beta_i \dot{z}_{k+1-i} + e_k$ perturbée par les différents e_k . La condition de stabilité du schéma s'écrit à l'aide d'une constante de majoration C indépendante du pas :

$$\max_{0 \leq k \leq N} |x_k - z_k| \leq C(|x_0 - z_0| + \sum_{n \leq N} |e_n|). \quad (2.2)$$

Pour les méthodes à q pas, la stabilité d'un schéma (consistant) permet de conclure sur sa convergence moyennant des hypothèses de régularité sur la fonction \mathbf{F} (théorème de Lax-Richtmyer). Un schéma est convergent si la solution numérique tend vers la solution analytique lorsque h tend vers 0.

Suivant le schéma choisi, on peut déterminer des stabilités conditionnées par des grandeurs telles le pas ou obtenir des schémas stables inconditionnellement. L'intérêt des schémas implicites est qu'ils sont souvent (inconditionnellement) stables, et ce malgré le fait qu'il faille résoudre un système d'équations.

On notera que la stabilité d'un schéma donné ne peut pas toujours être déterminée, particulièrement lorsque les systèmes à traiter sont non linéaires. On choisira alors préférentiellement comme critère de stabilité la conservation de l'énergie à chaque itération du schéma.

Ordre du schéma Dans l'optique d'utiliser des schémas dont on maîtrise l'erreur de consistance ε_k , on définira un schéma d'ordre p par :

$$\exists C' \text{ tq } \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \leq C' h^p. \quad (2.3)$$

Quelques schémas classiques En particulierisant les coefficients α_i et β_i de l'Eq. (2.1), on peut retrouver un grand nombre de schémas classiquement utilisés.

Les méthodes d'Euler avant (ordre 1, explicite) et arrière (ordre 1, implicite) sont respectivement obtenues pour $(\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1)$ et $(\alpha_1 = 1, \beta_0 = 1)$, les autres coefficients étant nuls. On notera l'existence des schémas à un pas basés sur un développement de Taylor de x_{k+1} par rapport à x_k , ou les schémas de type Runge-Kutta (le plus connu étant le RK4) qui exploitent des méthodes de quadrature du reste intégral de l'expression $x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(x, t) dt$.

Concernant les schémas à pas multiples, on notera ceux de type Adams, fortement stables, qui interpolent par des polynômes le contenu du reste intégral – *e.g.* Adams-Bashforth (explicites) et Adams-Moulton (implicites) – ou l'algorithme BDF (interpolation de \dot{x}_{k+1} par la dérivée des polynômes d'interpolation des x_j , implicite).

En dynamique non linéaire, le schéma de Newmark est très répandu du fait qu'il est utilisable directement sur un système d'ordre différentiel d'ordre 2 comme l'Eq. (1.3). Le nombre de variables est ainsi réduit par deux, la formulation d'état telle l'Eq. (1.4) n'étant plus nécessaire. Dans le cas linéaire, on peut exhiber des paramètres de stabilité inconditionnelle ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$). Les détails de construction d'un schéma de Newmark adapté au cas non linéaire peuvent être trouvés dans [68] par exemple.

Critique de l'approche Les intégrateurs temporels ne font aucune hypothèse quant à l'amplitude de la non linéarité éventuelle du système, ce qui en fait un outil de résolution générique. Cependant, les problèmes liés aux caractéristiques intrinsèques du schéma choisi (stabilité conditionnelle, conservation de l'énergie, lourdeur calculatoire dans le cas implicite, etc.) ainsi que la non possibilité de s'affranchir de l'intégration du régime transitoire parfois non pertinent suggèrent le développement d'autres approches de résolution pour les systèmes dynamiques.

2.2 Résolution de systèmes algébriques

Comme suggéré précédemment, il s'avère coûteux d'utiliser un intégrateur temporel sur de longues durées pour atteindre un régime permanent. Cet état final s'avère souvent être l'état d'intérêt et l'on souhaite s'affranchir du régime transitoire. Une idée de traitement est de chercher la solution sous une forme correspondant directement au régime permanent (cf. Sec. 3.2), ce qui amène à transformer l'ODE de l'Eq. (1.3) en système algébrique non linéaire $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, avec $\tilde{\mathbf{x}}$ les nouvelles inconnues permettant de reconstruire $\mathbf{x}(t)$ une fois calculées.

Parmi les méthodes de résolution de systèmes algébriques abordées dans cette section, notons que nous ne reviendrons pas sur celles dites *sans gradient*, basées sur une interpolation polynomiale de $\tilde{\mathbf{x}}$ et la recherche des zéros du polynôme en question [21].

Méthodes de Newton Les algorithmes avec gradient reposent sur le développement de Taylor-Young de l'équation algébrique $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Dans le cas des méthodes dites de Newton-Raphson, on se place en un point de départ $\tilde{\mathbf{x}}_0$ *a priori* quelconque et on cherche une correction $\Delta\tilde{\mathbf{x}}$ telle que :

$$\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{O}(\|\Delta\tilde{\mathbf{x}}\|^2), \quad (2.4)$$

avec $\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ matrice jacobienne du système évaluée en le point $\tilde{\mathbf{x}}_0$. Une correction qui permet de trouver une solution numérique est telle que $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, ce qui mène au système linéaire final à résoudre :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{x}}_0) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0). \quad (2.5)$$

On vérifie alors si la norme de l'erreur $\|\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{x}})\|$ est inférieure à un seuil numérique que l'on s'est préalablement fixé. Si ce n'est pas le cas on prend $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{x}}$ en tant que point de départ pour l'Eq. (2.5) et on réitère le procédé pour obtenir $\tilde{\mathbf{x}}_2$.

Une étape de ce procédé est appelée itération de Newton, et son coût est globalement celui de la méthode d'obtention de l'inverse de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{x}}_0)$.

L'inconvénient majeur des méthodes de type Newton-Raphson est la dépendance de la convergence au choix du point initial $\tilde{\mathbf{x}}_0$. Lors du processus de descente vers une solution, l'algorithme peut par exemple se retrouver bloqué sur un minimum local non nul ou "osciller" entre plusieurs solutions numériques. L'utilisation de ce type de solveur plus en aval de ce travail reposera sur la proximité du point initial utilisé avec la solution recherchée, laquelle permet un certain contrôle de la convergence.

Variantes Les limites évoquées ci-dessus ont motivé le développement d'un grand nombre de variantes et raffinements du processus développé ci-dessus, généralement regroupés sous le terme de méthodes de Newton. On citera les méthodes de type quasi-Newton, qui partent du constat que la matrice $\mathbf{J}_H(\tilde{\mathbf{x}}_0)^{-1}$ peut d'une part ne pas être connue analytiquement et d'autre part s'avère en général coûteuse à calculer, surtout pour des systèmes de grande taille. Ces méthodes se basent sur une approximation $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ de l'inverse de la jacobienne qui doit respecter une condition de type $\tilde{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_1) - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}_0))$.

Enfin, on notera que les problèmes de l'éloignement du point de départ ainsi que celui d'une matrice $\mathbf{J}_H(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ pouvant être singulière peuvent être contournés via l'utilisation d'algorithmes de Newton couplés à des techniques de région de confiance [16]. C'est ce solveur – dit *trust-region-dogleg* – qui sera utilisé dans les simulations à venir, à travers son implémentation faite dans le logiciel de calcul vectoriel MATLAB®.

2.3 Méthodes temporelles pour le cas non linéaire

2.3.1 Méthode de type Lindstedt-Poincaré

Nous commencerons par aborder rapidement les méthodes perturbatives de type Lindstedt-Poincaré [57]. Ces méthodes historiques et très employées reposent sur l'introduction d'un paramètre $\varepsilon \ll 1$ caractérisant la non linéarité et le développement de la solution cherchée en série de Taylor par rapport à ce paramètre :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \mathbf{x}_i(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}). \quad (2.6)$$

L'injection de cette forme de solution dans le système à résoudre et la projection sur chacun des termes d'ordre i de la série de Taylor permettent d'obtenir un jeu de m équations différentielles linéaires à résoudre. Cependant, on constate l'apparition de termes tendant vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$, appelés termes séculaires. Pour les faire disparaître, on pourra utiliser la méthode de Lindstedt-Poincaré, basée sur un changement de variable qui introduit plusieurs échelles de temps :

$$s = \left(\sum_{j=0}^p k_j \varepsilon^j \right) t. \quad (2.7)$$

Les p constantes k_j sont déterminées après avoir dans un premier temps introduit $\mathbf{x}(s(t))$ dans les équations, puis isolés les termes en ε^j et enfin en posant comme nuls les p termes séculaires.

Une variante à la formulation plus générale est régulièrement utilisée pour le traitement des systèmes dynamiques non linéaires : la méthode des échelles multiples. Comme son nom l'indique, elle repose également sur l'introduction de plusieurs échelles de temps. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage [58] pour en savoir plus sur les développements liés à cette approche.

On notera que ces méthodes ne permettent de traiter que des systèmes que l'on pourra qualifier de “faiblement” non linéaires, le paramètre ε étant supposé petit.

Enfin, au delà de l'aspect historique de ces approches perturbatives, on pourra les considérer comme un point de départ pour une méthode numérique particulière permettant la continua-

tion de systèmes non linéaires à l'aide de séries de Taylor, la méthode asymptotique numérique, qui sera exposée en Sec. 2.4.2.

2.3.2 Algorithmes de tir

Les méthodes de tir sont des méthodes très utilisées pour la recherche de solutions périodiques, basées sur la condition de périodicité du système et sur l'utilisation d'un intégrateur temporel.

Le constat de départ est que si l'on intègre les équations du système à partir d'une configuration de départ \mathbf{x}_0 sur une durée T^* , alors $\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ si $T^* = T$ est la période cherchée. Si cette grandeur n'est pas un zéro, il suffit alors de corriger le couple (\mathbf{x}_0, T^*) avec pour objectif de minimiser la norme de $\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0$.

Pour ce faire, on réalise le développement à l'ordre 1 de la condition de périodicité autour du point (\mathbf{x}_0, T^*) , ce qui s'écrit :

$$\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T^*}(T^*, \mathbf{x}_0) \cdot \Delta T^* + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}(T^*, \mathbf{x}_0) \cdot \Delta \mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

De plus, on remarque qu'un tel système est sous-déterminé. Une équation supplémentaire notée $p(\mathbf{x}_0) = 0$ et appelée condition de phase est ajoutée afin de lever le caractère arbitraire de la condition initiale \mathbf{x}_0 . En effet, une solution périodique $\mathbf{x}(t + T)$ reste la même quel que soit le temps t choisi. On reviendra sur les choix d'équation de phase en Sec. 3.2.2.

Le système linéaire finalement traité est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} - \mathbf{I} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T^*} \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_0 \\ \Delta T^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0) \\ -p(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Il reste à évaluer les deux dérivées partielles de \mathbf{x} . Si l'on considère que le système traité est régi par l'ODE de l'Eq. (1.1), leurs expressions sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T^*} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial T^*} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0)) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}(T^*, \mathbf{x}_0) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(T^*, \mathbf{x}_0) \right) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(T^*, \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \end{cases}. \quad (2.10)$$

La deuxième équation est une ODE linéaire d'ordre 1 qui permet d'obtenir via une intégration temporelle la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}$.

Au final, un algorithme de tir résout un système de taille $N + 1$, avec N nombre de degrés de libertés de l'Eq. (1.1) et réalise au préalable une intégration temporelle complète sur une durée T^* .

2.4 Continuation numérique de solution

Comme introduit en Sec. 1.4.3, les méthodes de continuation de solution visent à calculer des familles de solutions d'un système pour lequel au moins un paramètre évolue. Nous nous

placerons dans le cadre de l'Eq. (1.22), pour laquelle le paramètre que l'on veut suivre est noté κ et nous supposerons que la recherche de solutions de cette équation prend la forme du système suivant :

$$\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \kappa) = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Lorsque l'on ne considère pas de point de bifurcation, le théorème des fonctions implicites garantit l'existence d'un continuum de solutions de dimension 1 que l'on désignera comme branche de solutions [63, 26, 24]. Comme illustré en Fig. 2.1, il serait malvenu de définir une branche de solutions par un segment contenant des solutions entre deux valeurs κ_0 et κ_1 . De plus, un simple balayage d'une discrétisation de l'intervalle $[\kappa_0, \kappa_1]$, en plus de ne pas pouvoir détecter la multiplicité des solutions et de faire apparaître des sauts tels ceux en Fig. 1.10, ne permet pas le traitement des points de retournements. En conséquence de ces différents phénomènes, lors du processus numérique de continuation, il sera souvent défini une abscisse curviligne faisant office d'indexation pour les différents points constituant cette branche, s dans cet exemple.

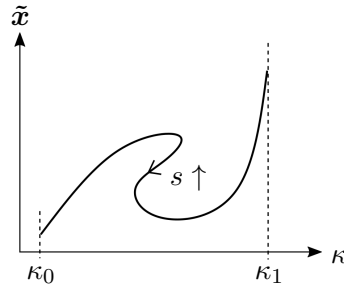


FIGURE 2.1 – Schéma de principe d'une branche de solutions suivie par continuation.

On distinguera deux grandes classes de schémas de continuation par la suite. Les schémas de continuation point par point – ou par longueur d'arc – sont les méthodes historiques et peut-être les plus intuitives, et se basent généralement sur un processus de prédiction-corréction pour le calcul d'un point solution. C'est ce type d'approche que l'on retrouve dans les codes tels AUTO [25, 27], MATCONT [23] ou CONTENT [45]. Les schémas traçant des branches continues de solutions peuvent constituer une deuxième approche, et l'on s'attardera seulement sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [12, 13, 15] et son implémentation MANLAB [1].

2.4.1 Continuation point par point

La continuation point par point part du postulat que l'on a déjà calculé un ou plusieurs points solutions pour certaines valeurs du paramètre de continuation κ . Ces n premiers points sont les $\{(\tilde{\mathbf{x}}_1, \kappa_1), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}_n, \kappa_n)\}$. Dans l'espace $(\tilde{\mathbf{x}}, \kappa)$, on cherche un nouveau point solution pour lequel on souhaiterait contrôler au mieux son lieu géométrique.

2.4.1.a Étape de prédiction

Pour ce faire, on postule une forme pour le prochain point solution $(\tilde{\mathbf{x}}_*, \kappa_*)$, nommée point prédit. Ce point n'est généralement pas solution du système, mais s'en veut le plus proche possible.

La prédiction est faite à une certaine longueur d'arc arbitraire Δs du dernier point solution, à l'abscisse curviligne $s_n + \Delta s$. On associe à Δs les incréments $\Delta \kappa$ et $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$. Les prédicteurs introduits sont illustrés en Fig. 2.2.

Prédiction sécante Méthode très légère ne nécessitant la résolution d'aucun système, la méthode de prédiction sécante cherche le point prédit sur la droite formée par les deux derniers points solutions calculés dans l'espace $(\tilde{\mathbf{x}}, \kappa)$. La distance entre le dernier point calculé et le point prédit est la longueur d'arc Δs . En notant $\mathbf{y}_n = [\tilde{\mathbf{x}}_n^T \ \kappa_n]^T$, ceci s'écrit :

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{y}_n + \Delta s \cdot \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}}{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}\|}. \quad (2.12)$$

Prédiction polynomiale (généralisation) Si l'on dispose d'un plus grand nombre de points solutions que dans le cas de la prédiction sécante, on peut envisager un cas plus général pour lequel le point prédit se situe cette fois non pas sur une droite mais sur un polynôme formé par l'ensemble des points solutions considérés.

L'implémentation la plus simple consiste en l'utilisation des polynômes de Lagrange pour trouver le polynôme $P(s)$ d'ordre m qui passe par les $m + 1$ derniers points solutions [68].

On s'attend à une meilleure qualité de prédiction que dans le cas particulier de la méthode sécante. Cependant, la pertinence de son implémentation peut être mise en doute. On peut en effet imaginer des points de retournement aigus qui nécessiteraient une montée en ordre du polynôme pour obtenir une bonne prédiction. On préférera donc lors de nos implémentations une prédiction plus simple, voire simpliste, mais rapide en la plupart des points d'une branche et compensée par l'étape de correction qui suit.

Prédiction tangente Les méthodes précédentes se basaient sur deux points au moins précédemment calculés sans tenir compte du système résolu. La prédiction tangente, locale en le sens qu'elle se base seulement sur le dernier point calculé, tient compte de ce système au prix d'un effort supplémentaire.

On cherche à calculer $\mathbf{t} = [\Delta \tilde{\mathbf{x}}^T, \Delta \kappa]^T$, vecteur tangent à la courbe en le dernier point calculé \mathbf{y}_n . Si on considère que le système étudié est régi par l'Eq. (1.1), on peut écrire l'expression dépendant des jacobiniennes partielles $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}_n, \kappa_n)$ et $\mathbf{J}_{\kappa} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \kappa}(\tilde{\mathbf{x}}_n, \kappa_n)$:

$$\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\kappa} \cdot \Delta \kappa = 0 \implies \Delta \tilde{\mathbf{x}} = (-\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\kappa}) \Delta \kappa.$$

La direction est ainsi connue, et pour un incrément $\Delta \kappa$ on peut calculer un vecteur $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$. La longueur de \mathbf{t} étant Δs , on peut également écrire :

$$\|\Delta \tilde{\mathbf{x}}\|^2 + \Delta \kappa^2 = \Delta \kappa^2 (1 + \|\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\kappa}\|^2) = \Delta s^2 \implies \Delta \kappa = \frac{\pm \Delta s}{\sqrt{1 + \|\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\kappa}\|^2}}.$$

Enfin, le sens de \mathbf{t} est donné par le signe du déterminant :

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{x}}} & \mathbf{J}_{\kappa} \\ \mathbf{t}^T & \end{bmatrix} > 0.$$

Finalement le point prédit s'écrit : $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}_n + \mathbf{t}$.

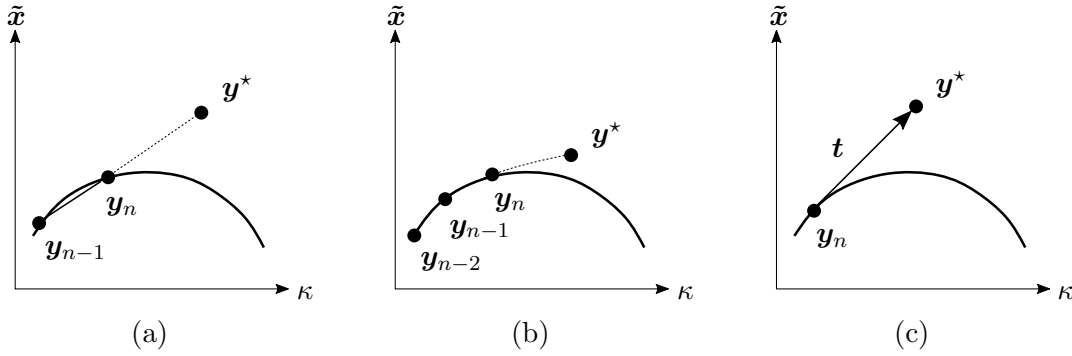


FIGURE 2.2 – Principaux prédicteurs. (a) Prédiction sécante (b) Prédiction polynomiale d'ordre supérieur (c) Prédiction tangente.

2.4.1.b Étape de correction

Une fois le point prédit \mathbf{y}^* obtenu, une étape de correction est nécessaire pour s'assurer de l'obtention d'un point solution de l'équation. L'équation de correction consiste généralement en une relation de type géométrique liant \mathbf{y}^* , \mathbf{y}_n et \mathbf{y}_{n+1} . La méthode naturelle consiste à injecter en entrée d'un schéma de Newton-Raphson le point prédit et de fixer $\kappa_{n+1} = \kappa^*$. L'utilisation de cette équation de correction ne permet cependant pas de traiter correctement les points de retournement. On proposera donc 2 techniques classiques de correction dans les paragraphes suivants, illustrées en Fig. 2.3.

Correction par longueur d'arc On peut utiliser une équation imposant la longueur d'arc entre le dernier point calculé \mathbf{y}_n et \mathbf{y}_{n+1} . La relation s'écrit, pour une longueur d'arc Δs :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{x}}_n\|^2 + |\kappa_{n+1} - \kappa_n|^2 = \Delta s^2.$$

Malgré une équation quadratique à résoudre, cette formulation permet un contrôle géométrique efficace du tracé des branches de solutions. Elle dépend cependant de la qualité du point prédit car on remarquera que sur le cercle de centre \mathbf{y}_n et de rayon Δs , pour une branche de solutions donnée, deux solutions sont possibles et un demi-tour de la continuation peut se manifester en pratique.

Correction par pseudo-longueur d'arc La méthode de correction par pseudo-longueur d'arc repose sur une équation d'orthogonalité corrigeant à la fois $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$ et $\Delta \kappa$. Elle s'exprime dans la métrique choisie via le produit scalaire :

$$\langle \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}^* | \mathbf{y}^* - \mathbf{y}_n \rangle = 0.$$

Ce type de correction est un moyen efficace de se "rabattre" sur la courbe solution cherchée et est bien adapté au traitement des points de retournement. De plus, la condition d'orthogonalité à satisfaire est linéaire. Cependant, contrairement à la correction par longueur d'arc, l'algorithme résultat peut s'éloigner considérablement du dernier point calculé \mathbf{y}_n en le sens que n'importe quel point solution appartenant à la droite orthogonale à la direction $\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_n$ peut être trouvé.

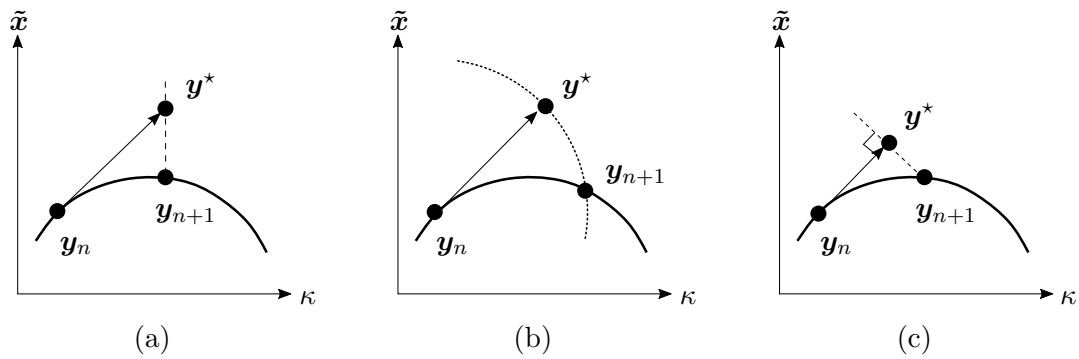


FIGURE 2.3 – Principaux correcteurs. (a) Correction par Newton (b) Correction par longueur d'arc (c) Correction par pseudo-longueur d'arc.

2.4.1.c Schéma de continuation et gestion du pas

Le processus global de continuation est finalement représenté en Fig. 2.4.

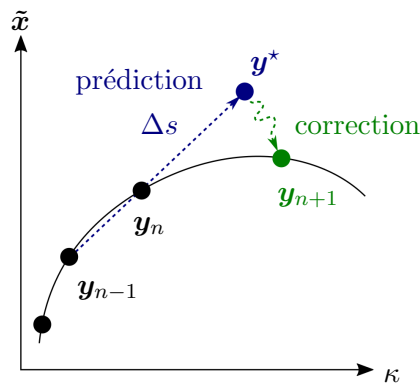


FIGURE 2.4 – Illustration du principe général de continuation par prédiction-corrrection.

Le choix d'un couple prédicteur-correcteur peut être plus ou moins pertinent suivant le système étudié. De manière générale, on cherchera un compromis entre qualité d'un prédicteur et qualité d'un correcteur : une bonne prédiction peut sembler coûteuse mais le solveur utilisé pour la correction convergera potentiellement plus vite. Au contraire, une prédiction simple comme une prédiction sécante peut paraître grossière mais demeure pertinente pour traiter de grandes longueurs d'arc qui se révèlent être peu incurvées, sans point de retournement.

Dans tous les cas, ce choix s'allie à des stratégies de gestion du pas Δs que l'on utilise pour calculer le point solution suivant. Nous donnerons des arguments basiques et intuitifs, mais le lecteur pourra se référer à [2] pour plus de détails.

Lors du tracé d'une branche de solutions, on peut intuitivement distinguer des segments pour lesquels le comportement dynamique varie peu et la correction se fait très rapidement. *A contrario*, on trouve des zones à problèmes (*e.g.* résonance, proximité d'une bifurcation, etc.) qui vont dans les faits nécessiter plus d'itérations de Newton. Ces zones se retrouvent généralement être les zones d'intérêt de la dynamique non linéaire du système. L'idée est de fixer un critère amenant à faire varier Δs en fonction de ces considérations.

Soient r_1 et r_2 deux réels positifs avec $r_1, r_2 > 1$, et N_{ite}^{min} , N_{ite}^{max} deux entiers correspondant à des nombres d'itérations de correction. On propose la stratégie de continuation classique suivante, selon le nombre N_{ite} d'itérations de correction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } N_{ite} \geq N_{ite}^{max} : \text{Correction abandonnée. Nouvelle prédiction avec } \Delta s = \Delta s / r_1 \\ \text{Si } N_{ite} \leq N_{ite}^{min} : \text{Point convergé et point suivant prédit avec } \Delta s = \Delta s \times r_2 \\ \text{Sinon : Point convergé et point suivant prédit avec le même } \Delta s \end{array} \right.$$

Ainsi les zones numériquement problématiques sont décrites avec un plus grand nombre de points que les zones peu variables. Les parties les moins intéressantes étant décrites avec moins de points, du temps de calcul est économisé. La Fig. 1.11, tracée par continuation, montre bien la nécessité d'intégrer plus de points pour tracer correctement le point de retournement du pic de résonance de l'oscillateur de Duffing.

Enfin, deux conditions de gestion du pas supplémentaires sont intégrées dans les algorithmes décrits dans les parties suivantes de ce travail. La première vient enrichir l'arbre de décision précédemment donnée avec la relation : si $N_{ite}^{grand} \leq N_{ite} < N_{ite}^{max}$ alors le point est convergé et le point suivant est prédit avec $\Delta s = \Delta s / r_3$, avec $r_3 < r_1$. On intègre ainsi une notion de décélération de la continuation à l'approche de zones numériquement difficiles à traiter.

L'algorithme peut être amené à resserrer son pas indéfiniment menant à un blocage de la continuation dans une zone donnée. Ceci peut notamment arriver à l'approche d'une bifurcation. La stratégie consiste alors à introduire un saut de Δs pour passer la difficulté numérique : si le pas Δs est tel que $\Delta s < \Delta s_{min}$, alors pour le point suivant $\Delta s = \Delta s \times r_4$ avec $r_4 \gg 1$ par exemple.

2.4.2 Continuation par la MAN

La méthode asymptotique numérique (MAN) [20, 6, 12] peut être vue comme une alternative aux méthodes de continuation point par point. Son principe de base consiste en le développement en séries entières de la solution $\tilde{\mathbf{x}}$ par rapport à un paramètre s que l'on peut prendre égal à l'abscisse curviligne comme précédemment. Elle permet cette fois d'obtenir une description continue d'une branche de solutions.

On notera dans cette section N le nombre d'équation de (2.11) et comme précédemment, $\mathbf{y} = [\tilde{\mathbf{x}}^T, \kappa]^T$ le vecteur des inconnues global, de taille $N + 1$. Soit \mathbf{y}_0 une solution connue du système de l'Eq. (2.11), *i.e.* qui vérifie numériquement $\|\mathbf{H}(\mathbf{y}_0)\| < \varepsilon_{max}$, avec ε_{max} un seuil de tolérance fixé. Une branche de solutions du système est cherchée sous la forme :

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^{i_{max}} s^i \mathbf{y}_i. \quad (2.13)$$

On développe alors le système autour de \mathbf{y}_0 , et on peut montrer que chacun des termes \mathbf{y}_i de la série entière satisfait une équation du type :

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{y}_i = \mathbf{F}_{nl}^i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{i-1}), \quad (2.14)$$

avec $\mathbf{J}_H = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}}$ matrice jacobienne associée au système tangent à l'Eq. (2.11), de taille $N \times (N+1)$. Dans cette équation, on constate qu'un terme d'ordre i dépend uniquement des termes qui lui

sont d'ordre inférieur et que l'on aurait préalablement calculés, via une fonction non linéaire \mathbf{F}_{nl}^i . La tangente normalisée en \mathbf{y}_0 , notée \mathbf{y}_1 , est solution du système :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_H(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{y}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 = 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

On définit ainsi la pseudo-longueur d'arc $s = \mathbf{y}_1^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$ comme projection de la branche de solutions cherchée sur la tangente \mathbf{y}_1 .

Tronçon de solutions Le théorème des fonctions implicites garantit que l'unique branche de solutions passant par le point \mathbf{y}_0 peut être représentée par la série de Taylor en s de l'Eq. (2.13). En pratique on prend un ordre de troncature de la série de Taylor i_{max} de l'ordre de 20, et on associe à cette série tronquée un rayon de convergence utile s_{max} , de l'ordre de 70% à 90% du véritable rayon de convergence.

Pour $s \in [0, s_{max}]$, la série de Taylor représente très fidèlement la branche de solutions partant de \mathbf{y}_0 et finissant au point $\mathbf{y}(s_{max})$. Au delà de la longueur d'arc s_{max} , la série de Taylor tronquée commence à diverger par rapport à la solution véritable du problème de continuation (cf. Fig. 2.5). On notera qu'une bonne approximation du rayon de convergence peut être trouvée en supposant que le résidu est dominé par le premier terme négligé dans la série de Taylor. Cette dernière vaut environ $(\varepsilon / \|\mathbf{F}_{nl}^{i_{max}+1}\|)^{i_{max}+1}$.

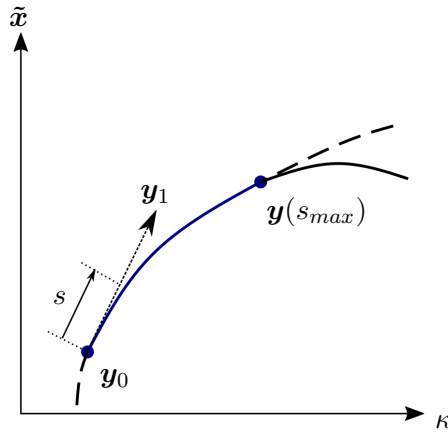


FIGURE 2.5 – Tronçon de solutions partant de \mathbf{y}_0 . Pointillés : solution exacte du système. Trait continu : tracé de la série de Taylor tronquée.

Lors de l'implémentation de la MAN, il suffit de définir un nouveau point de départ $\mathbf{y}_{02} = \mathbf{y}(s_{max})$ et de réitérer le calcul d'une nouvelle série de Taylor (cf. Fig. 2.6). La branche de solutions recherchée est donc découpée en *tronçons* de solutions, chaque tronçon j étant associé à une série de Taylor et une pseudo-longueur d'arc s_{maxj} .

L'implémentation numérique de la MAN a été réalisée dans un code MATLAB® par B. Cochelin et al., sous l'appellation MANLAB [1]. Un calcul efficace des séries de Taylor y est réalisé à l'aide d'une reformulation quadratique et tensorielle du système traité, de l'utilisation d'outils de différenciation automatique et d'un calcul efficace de la jacobienne analytique du système.

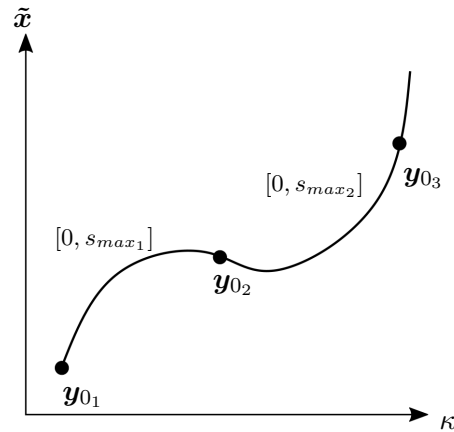


FIGURE 2.6 – Représentation continue de la branche de solutions par tronçons. Un tronçon est défini par une série de Taylor et son rayon de convergence utile s_{max} associé.

On peut voir deux limites à l'utilisation de la MAN, pour des cas qui nous intéresseront par la suite. D'une part, son utilisation suppose des modèles aux non linéarités régulières. Un modèle de contact raide ou une loi de Coulomb ne peuvent donc pas être traités sans approximation liée au modèle physique. D'autre part, la reformulation quadratique du système suppose la définition d'un certain nombre de variables intermédiaires. Ces dernières peuvent être très nombreuses et traiter des problèmes de taille industrielle s'avérerait alors très coûteux en termes de ressources informatiques. C'est dans l'optique de tout de même traiter des systèmes à grand nombre de degrés de libertés que des méthodes de réduction de modèle seront ensuite abordées.

Réduction de modèle en dynamique non linéaire

Les grandes classes de méthodes de réduction de modèle seront présentées dans ce chapitre. L'idée générale est de réduire le nombre de variables à traiter et d'améliorer les performances numériques tout en préservant précision et fiabilité des résultats. Nous reviendrons d'abord sur les incontournables méthodes de Galerkin dans toute leur généralité puis nous détaillerons des techniques de réduction de modèle classiques suivant que l'on possède ou non certaines données sur le problème à résoudre. Une attention particulière sera donnée à la méthode fréquentielle d'équilibrage harmonique (HBM pour *Harmonic Balance Method*) ainsi qu'au contexte propre aux techniques de réduction de modèle par *Proper Generalized Decomposition* (PGD).

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1	Intérêt de la réduction de modèle	45
3.2	Méthodes de type Galerkin	46
3.2.1	Collocations orthogonale et trigonométrique	47
3.2.2	Équilibrage harmonique (HBM)	47
3.2.2.a	Principes de base	48
3.2.2.b	Condition de phase	48
3.2.2.c	Notations matricielles	49
3.2.2.d	Estimation du terme non linéaire	51
3.3	Obtention de projecteurs de Galerkin	52
3.3.1	Méthodes a posteriori	52
3.3.1.a	Proper Orthogonal Decomposition (POD)	52
3.3.2	Méthodes a priori	58
3.3.2.a	Bases modales	58
3.3.2.b	Sous-structuration	60
3.4	Introduction à la Proper Generalized Decomposition (PGD)	60
3.4.1	Bref historique et généralités	61
3.4.2	Formalisme de la PGD d'après Nouy	61

3.1 Intérêt de la réduction de modèle

La réduction de modèle se place dans un contexte de complexification des modèles physiques employés, notamment au niveau industriel. En effet, la puissance calculatoire actuelle permet de prendre en compte des phénomènes négligés ou simplifiés jusque là, notamment des phénomènes non linéaires. Cet enrichissement descriptif est accompagné de la présence d'un grand nombre d'inconnues à déterminer pour un système physique donné.

Réduire un modèle vise donc à limiter le nombre de variables à traiter tout en rendant compte de manière précise et fiable de la physique des phénomènes mis en jeu. Les gains attendus peuvent relever de :

- la diminution du nombre de degrés de libertés traités,
- la réduction de la taille des problèmes résolus numériquement,
- la qualité de leur complexité algorithmique,
- l'utilisation la plus économe possible d'espace de stockage mémoire.

Par ailleurs, cette démarche s'avère particulièrement pertinente en présence de non linéarités. Les comportements complexes qui résultent de leur prise en compte ont souvent des effets néfastes sur la convergence des algorithmes, leur simplicité voire leur capacité à rendre compte fidèlement du comportement non linéaire.

Dans ce manuscrit, réduire un modèle consistera dans un premier temps à chercher la solution du système dynamique dans un espace de dimension finie en posant une combinaison linéaire d'éléments d'une base de réduction. Matriciellement, on écrira $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}_r \mathbf{q}$ avec $\mathbf{\Phi}_r$ matrice représentant la base réduite et \mathbf{q} les nouvelles inconnues du problème. Ensuite, ce seront les équations elles-mêmes qui seront projetées dans un sous-espace afin de réduire la taille du système.

Déterminer une base de projection $\mathbf{\Phi}_r$ avec le moins de perte d'information possible est au cœur des méthodes exposées ci-dessous. On distinguera d'une part les bases construites à partir de données du système déjà existantes – les méthodes *a posteriori* – et d'autre part les méthodes qui construisent la base en même temps que la solution elle-même, sans prérequis expérimental – les méthodes *a priori*. Dans tous les cas, il faut garder un regard critique sur l'erreur commise par le choix d'un tel sous-espace par rapport à la résolution d'un système complet. Dans les méthodes numériques développées, une solution obtenue via un modèle réduit sera systématiquement vérifiée au regard de l'erreur commise lorsqu'on l'injecte dans le système complet.

Nous commencerons par expliciter le cadre général des méthodes de Galerkin, techniques de réduction très utilisées dans le cadre des processus par éléments finis. Le cas particulier des méthodes d'équilibrage harmonique sera détaillé. Des méthodes d'obtention de bases de réduction *a posteriori* et *a priori* seront ensuite exposées. Le cas spécifique des processus PGD, au cœur de la méthode réduite de calcul des modes non linéaires proposée en Partie 2, sera traité indépendamment.

3.2 Méthodes de type Galerkin

Les méthodes de Galerkin supposent une formulation faible du problème de départ, dans un espace de Hilbert que nous nommerons \mathcal{H} . On pose un sous-espace $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{H}$ de taille réduite r . Le problème faible s'écrit formellement :

$$\text{Trouver } \mathbf{x} \in \mathcal{H} \text{ tq } \forall \mathbf{y} \in \mathcal{H} \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}(\mathbf{y}), \quad (3.1)$$

avec \mathbf{y} fonction test et \mathcal{B} et \mathcal{L} formes linéaires par rapport à \mathbf{y} . Une méthode de Galerkin aboutit à un système analogue, mais dans le sous-espace \mathcal{H}_r , ce qui peut s'écrire :

$$\text{Trouver } \mathbf{x}_r \in \mathcal{H}_r \text{ tq } \forall \mathbf{y}_r \in \mathcal{H}_r \mathcal{B}(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) = \mathcal{L}(\mathbf{y}_r), \quad (3.2)$$

avec \mathbf{x}_r et \mathbf{y}_r respectivement exprimés dans une base de réduction et dans une base de projection de l'espace \mathcal{H}_r . L'atout principal d'une méthode de Galerkin est de rendre le résidu obtenu orthogonal au sous-espace d'approximation \mathcal{H}_r . Exprimons à présent cette relation géométrique en fonction du système dynamique de l'Eq. (1.3) et de la décomposition de la solution dans une base de réduction de \mathcal{H}_r choisie, ici $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_r]$ pour l'exemple :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^r \phi_k q_k(t). \quad (3.3)$$

On injecte alors cette approximation dans le système d'origine pour obtenir le résidu $\mathbf{R}(\mathbf{q}(t))$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\Phi\mathbf{q}, \Phi\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_e(t). \quad (3.4)$$

Au moment de l'étape de projection de Galerkin, on peut dans l'absolu choisir une base de projection Ψ différente de la base de réduction Φ . On parle alors de méthodes de Petrov-Galerkin. La dénomination "méthode de Galerkin" est en fait associée au cas particulier $\Psi = \Phi$.

Dans le cas le plus général, le produit scalaire permettant de traduire l'orthogonalité du résidu s'écrit :

$$\underbrace{\Psi^T \mathbf{M} \Phi}_{M_r} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\Psi^T \mathbf{C} \Phi}_{C_r} \dot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\Psi^T \mathbf{K} \Phi}_{K_r} \mathbf{q}(t) + \underbrace{\Psi^T \mathbf{f}_{nl}(\Phi\mathbf{q}, \Phi\dot{\mathbf{q}})}_{f_{nlr}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} - \underbrace{\Psi^T \mathbf{f}_e(t)}_{f_{er}} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Le système d'équations différentielles ordinaires de taille réduite r obtenu peut ensuite être résolu, de manière plus économe qu'en taille N , à l'aide d'un solveur ou d'une méthode de résolution comme présenté dans le Chap. 2.

Nous venons ici de présenter brièvement les méthodes de réduction spatiales. Ces méthodes peuvent aussi s'appliquer dans la dimension temporelle afin de transformer le système différentiel de l'Eq.(1.3) en un système algébrique. Les variations temporelles de $\mathbf{x}(t)$ sont alors décrites comme suit :

$$\mathbf{x}_r(t) = \sum_{k=1}^r \mathbf{x}_k \phi_k(t). \quad (3.6)$$

Les inconnues deviennent les coefficients (vectoriels) \mathbf{x}_k . Du choix des bases de réduction Φ et de projection Ψ résulte une grande richesse de variantes parmi les méthodes spectrales. Le Tableau 3.1 regroupe celles présentées dans les sections suivantes, classées par choix de bases

Φ	Ψ	Nom de la méthode
Fourier	Fourier	Équilibrage harmonique (HBM)
Fonctions polynomiales par morceaux	Dirac aux points de Gauss	Collocation orthogonale (cf. AUTO et MATCONT)
Fourier	Dirac	Collocation trigonométrique
Formulation mixte Fourier/Temporel	Formulation mixte Fourier/Temporel	HBM + Alternating Frequency Time (AFT)

TABLEAU 3.1 – Liste de méthodes spectrales parmi les plus classiques ; classées par bases de réduction/projection, respectivement Φ et Ψ .

Ψ et Φ , et leur liste n'est bien sûr pas exhaustive. Ces techniques sont toutes classiques et ont pour point commun un choix de bases fondé sur des raisons mathématiques plutôt que physiques (contrairement aux méthodes *a priori* et *a posteriori* présentées ensuite). Un accent sera mis sur le cas de l'équilibrage harmonique du fait de son utilisation quasi-systématique dans les algorithmes développés à partir du Chap. 4.

3.2.1 Collocations orthogonale et trigonométrique

Les méthodes de collocation orthogonale sont des méthodes dont les fonctions test (de projection) sont des distributions de Dirac $\psi_i(t) = \delta(t - t_i)$. On parle de méthode pseudo-spectrale car dans ce cas limite, il ne s'agit pas de fonctions mais de distributions. La base de réduction utilisée pour approcher la solution \mathbf{x}_r est polynomiale (par morceaux), et un problème de collocation se ramène à la recherche d'interpolations de ces polynômes sur des intervalles temporels. On citera par exemple [39] pour le calcul de cycles limites via une collocation par polynômes de Lagrange, aux points de Gauss, avec implémentation dans le logiciel MANLAB.

Lorsque l'on cherche des solutions périodiques, il est pertinent d'approcher la solution par une série de Fourier tronquée à l'ordre H , $[1/\sqrt{2}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)]$. On parle alors de collocation trigonométrique. Cette méthode nécessite un échantillonnage en temps de la période ainsi qu'une évaluation du résidu en chaque t_k afin d'obtenir un système algébrique non linéaire de taille $N \times (2H + 1)$, avec N nombre d'inconnues de \mathbf{x} .

3.2.2 Équilibrage harmonique (HBM)

Dans le cadre de la recherche de solutions périodiques, la méthode d'équilibrage harmonique, que l'on raccourcira en HBM pour *Harmonic Balance Method*, est une méthode de Galerkin réduisant la solution et projetant le système sur une base de Fourier tronquée à un ordre H . Contrairement aux algorithmes de tir vus en Sec. 2.3.2, la HBM permet de calculer des solutions périodiques sans avoir recours à un schéma d'intégration temporelle. Bien que l'essentiel du processus de résolution de système par HBM soit développé ci-dessous, de nombreux compléments et approfondissements peuvent par exemple être trouvés dans [83, 84, 57, 71].

Nous allons à présent revenir sur les principes de base de la HBM, et suivront par l'introduction de notations et traitements utiles pour la suite des développements (opérateurs de

dérivation, estimation du terme non linéaire, etc.).

3.2.2.a Principes de base

Soit $\omega = 2\pi/T$ pulsation du signal de période T , grandeur inconnue dans le cas général. On cherche une solution d'un système dynamique non linéaire décrit sous la forme de la série de Fourier tronquée à l'ordre H :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)), \quad (3.7)$$

avec \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k respectivement les coefficients en cosinus et sinus de la série de Fourier. La dérivation par rapport au temps de cette expression de \mathbf{x} peut être effectuée simplement et s'écrit de manière compacte en fonction des \mathbf{a}_k , des \mathbf{b}_k et de ω , comme détaillé dans la Sec. 3.2.2.c. Une fois la décomposition de l'Eq. (3.7) injectée dans les équations du mouvement (*e.g.* Eq. (1.3), Eq. (1.28) ou Eq. (1.30)), on applique la projection de Galerkin sur chaque élément de la base de Fourier $[1/\sqrt{2}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)]$ en utilisant le produit scalaire suivant, défini sur la période T :

$$\langle f, g \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt. \quad (3.8)$$

Finalement, à partir d'une ODE d'ordre 2, la HBM permet d'obtenir un système algébrique non linéaire de taille $N \times (2H + 1)$, avec N taille du problème initial, dont les inconnues sont les vecteurs coefficients de Fourier. ω vient s'ajouter à la liste des inconnues \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k , notamment pour les systèmes libres, portant leur nombre à $N \times (2H + 1) + 1$. Le système algébrique sera noté \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \omega) = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Le système est résolu numériquement par un algorithme de type Newton-Raphson, comme décrit en Sec. 2.2. On gardera à l'esprit que la qualité de la convergence d'un tel schéma numérique est conditionnée par le choix d'un point initial le moins éloigné possible de la solution recherchée. Par exemple, pour le calcul d'un point à faible amplitude d'un MNL non amorti, il pourrait s'agir du mode linéaire sous-jacent.

3.2.2.b Condition de phase

Dans le cas général, on remarque que le fait de rechercher une solution périodique dont on ne connaît pas la période conduit à l'obtention par HBM d'un système sous-déterminé.

Pour lever l'indétermination, deux cas se présentent :

- Si le système est sollicité par un effort extérieur $\mathbf{f}_e(t)$ (mono-fréquentiel), autrement dit lorsque le système est non autonome, on posera l'équation $\omega = \omega_f$, avec ω_f pulsation du forçage. Le système de l'Eq. (3.9) augmenté de cette équation est à ce moment carré et présente localement une unique solution.

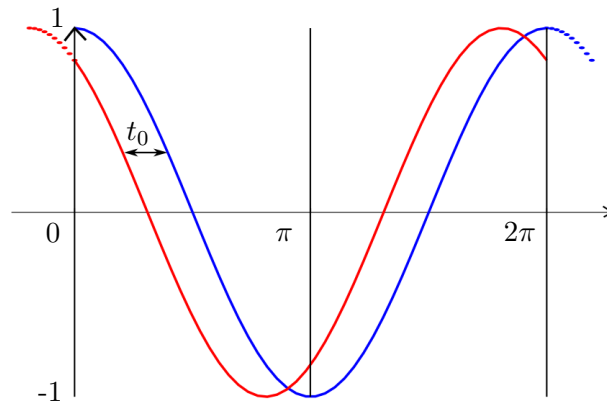


FIGURE 3.1 – Tracé des fonctions 2π -périodiques $\cos(t)$ (bleu) et $\cos(t + t_0)$ (rouge). La relation de périodicité est la même, mais si l'une des fonctions est solution d'un système autonome, l'autre l'est aussi. La détermination d'un temps de référence dans l'équation de phase force l'unicité de la solution.

- Si le système est libre, autrement dit dans le cadre de calcul de systèmes autonomes comme les MNLs, pour une valeur de ω donnée, le système admet localement une famille de solutions possibles. Cette famille rend compte du fait que pour définir une solution périodique, la donnée d'une période doit être accompagnée d'un instant de départ de référence t_0 , comme illustré en Fig. 3.1. Une équation supplémentaire appelée *équation de phase* [73] est donc posée pour forcer l'obtention d'une solution unique appartenant à cette famille.

Plusieurs choix d'équations de phase ont déjà été proposés dans la littérature [73, 57]. Le plus simple consiste à imposer une valeur nulle à $t = 0$ pour un degré de liberté donné, comme dans [4]. Ce type d'équation lie les coefficients de Fourier de la solution entre eux. On prend cependant le risque de ne pas pouvoir détecter des solutions qui violeraient cette condition. On peut aussi envisager de mettre à zéro la vitesse initiale d'un ou de tous les degrés de liberté [61].

Une autre possibilité est d'annuler un coefficient de Fourier d'un degré de liberté donné [67], supprimant au passage une inconnue au problème. Si l'on considère un système conservatif sans symétrie, choisir d'annuler un coefficient de sinus $(\mathbf{b}_k)_i$ implique que tous les autres coefficients \mathbf{b}_k sont nuls. Ceci divise la taille du problème par deux : seuls les $(H + 1)$ coefficients \mathbf{a}_k sont à trouver à l'aide des $N(H + 1)$ équations issues de la projection sur les fonctions cosinus.

Enfin, d'autres équations de phase possibles ont été utilisées dans le processus CHBM développé par Coudeyras et al. [17], lequel fait intervenir les valeurs propres du système tangent, ou la condition intégrale utilisée dans le logiciel AUTO [25].

3.2.2.c Notations matricielles

Revenons à présent sur l'expression de \mathbf{x} sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre H de l'Eq. (3.7). Une écriture compacte largement exploitée dans les implémentations numériques

présentées dans ce travail est l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_H \mathbf{h}_H(t, \omega), \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{X}_H = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots] \\ \mathbf{h}_H = [1/\sqrt{2}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots]^T \end{cases} \quad (3.10)$$

La base de Fourier $\mathbf{h}_H(t, \omega)$ est un objet connu pour une pulsation ω donnée, de sorte que connaître la solution périodique $\mathbf{x}(t)$ revient à connaître les $N \times (2H + 1)$ coefficients de Fourier regroupés en colonnes dans la matrice \mathbf{X}_H , ainsi que ω .

Introduisons par ailleurs le vecteur colonne \mathbf{x}_H des coefficients de Fourier de \mathbf{x} rangés par ordre harmonique :

$$\mathbf{x}_H = [\mathbf{a}_0^T, \dots, \mathbf{a}_k^T, \mathbf{b}_k^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_H^T]^T. \quad (3.11)$$

Les calculs exposés ensuite se baseront essentiellement sur cette manière d'ordonner les coefficients de Fourier, mais comme cela peut se voir dans la littérature et dans les implémentations numériques, il est aussi courant de choisir de séparer les termes en cosinus de ceux en sinus : $[\mathbf{a}_0^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{b}_H^T]^T$. Les expressions matricielles associées s'en retrouvent modifiées mais aucune différence conceptuelle n'est à noter. Une formulation pourra être préférée à l'autre suivant la facilité de codage des objets matriciels en jeu ou encore leur propriété de conditionnement.

Cette écriture matricielle permet également d'exhiber une écriture compacte des opérations de dérivation temporelle de \mathbf{x} . En effet, les coefficients de Fourier de $\dot{\mathbf{x}}$ s'expriment uniquement à partir des coefficients de Fourier de \mathbf{x} et de la matrice de dérivation \mathbf{D} suivante :

$$\mathbf{D} = \omega \text{diag} \left(0, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, H \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (3.12)$$

Par récurrence, on peut très simplement exhiber la dérivée n -ième de \mathbf{x} , notée $\mathbf{x}^{(n)}$:

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{X}_H \mathbf{D}^n \mathbf{h}_H(t, \omega). \quad (3.13)$$

Les notations matricielles ainsi introduites permettent ensuite d'exprimer le système algébrique de l'Eq. (3.9) sous la forme séparée suivante :

$$\mathbf{H}_1(\omega) \mathbf{x}_H + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega) = \mathbf{H}_e, \quad (3.14)$$

avec $\mathbf{H}_1(\omega)$, $\mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega)$ et \mathbf{H}_e respectivement projections de la partie linéaire, de l'effort non linéaire et de l'effort extérieur dans les équations du mouvement. Le terme linéaire par rapport aux coefficients de Fourier $\mathbf{H}_1(\omega)$ est connu analytiquement :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1(\omega) = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_H) \\ \mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{K} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \\ \mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & (k\omega) \mathbf{C} \\ -(k\omega) \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Le terme représentant les coefficients de Fourier de l'effort non linéaire, $\mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega)$ demande un traitement particulier, lequel est décrit ci-dessous en Sec. 3.2.2.d.

On rappelle que le système algébrique non linéaire obtenu est de taille $N \times (2H + 1) + 1$, en comptant l'équation de phase. Pour des systèmes de grande taille, la HBM s'avère donc

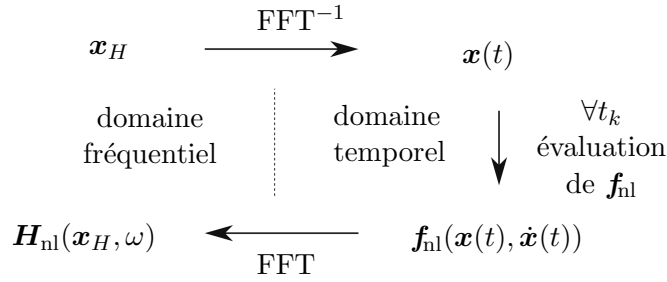


FIGURE 3.2 – Schéma de principe de la méthode Alternating Frequency Time (AFT)

très coûteuse. Elle l'est encore plus si le phénomène non linéaire modélisé nécessite la prise en compte d'un grand nombre d'harmoniques, comme c'est généralement le cas pour les problèmes de contact par exemple. Ce constat justifie le couplage de la HBM avec des techniques de réduction de modèle *ad hoc* dans la Partie 2.

3.2.2.d Estimation du terme non linéaire

L'effort numérique prépondérant de la procédure HBM est l'estimation des coefficients de Fourier du terme non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, *i.e.* $\mathbf{H}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_H, \omega)$. La méthode utilisée pour traiter ce terme est la méthode AFT, pour *Alternating Frequency Time method*, mise en forme par Cameron et Griffin [8].

Son principe se base sur un aller-retour entre les domaines temporel et fréquentiel (cf. Fig. 3.2) : on applique dans un premier temps une transformée de Fourier discrète (DFT) inverse au vecteur \mathbf{x}_H . On obtient alors $\mathbf{x}(t)$ et $\dot{\mathbf{x}}(t)$ pour un échantillonnage en temps à discuter. L'expression $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ de la non linéarité étant connue, on obtient alors un échantillonnage temporel d'une période de l'effort non linéaire, lequel peut être converti par DFT en un vecteur des coefficients de Fourier de la fonction non linéaire, autrement dit $\mathbf{H}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_H, \omega)$.

Cette méthode présente l'avantage majeur de fonctionner quelle que soit l'expression de la non linéarité considérée. Ceci pallie au fait qu'un développement analytique des coefficients de Fourier de $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ est généralement inaccessible, en particulier pour des systèmes de grande taille nécessitant un grand nombre d'harmoniques pour décrire sa dynamique. En contrepartie, l'utilisation de nombreuses transformations de Fourier pour estimer \mathbf{H}_{nl} à chaque itération de Newton-Raphson du solveur alourdit les temps de calcul, en particulier si le nombre d'harmoniques à prendre en compte est élevé. On notera l'utilisation systématique de l'algorithme (*inverse*) *Fast Fourier Transform* (FFT) pour calculer avec une complexité algorithmique moindre les transformées de Fourier discrètes.

Revenons sur le passage dans le domaine temporel nécessaire à l'application de l'AFT. On rappelle que cette technique sert dans le cadre de la recherche de solutions périodiques, et on peut trivialement montrer pour respecter le théorème d'échantillonnage de Shannon, le nombre minimal de pas de temps à faire pour représenter H harmoniques au sein d'une période vaut $2H + 1$. Par ailleurs, les algorithmes de FFT ayant une complexité minimale en $\mathcal{O}(n \log n)$ pour un nombre de pas de temps en puissance de 2, on choisit finalement la puissance de deux immédiatement supérieure à $2H + 1$ dans les implémentations numériques de l'AFT.

Il va de soi qu'en dépit de la garantie d'une information complète via le respect du théorème de Shannon avec ce nombre de pas de temps minimal, un coefficient multiplicatif k est généralement appliqué pour plutôt traiter $k \times (2H + 1)$ points, et ce afin d'obtenir des graphes plus facilement lisibles et exploitables.

3.3 Obtention de projecteurs de Galerkin

Comme évoqué en Sec. 3.2, il est possible de construire des bases de réduction Φ_r de la solution $\mathbf{x}(t)$ à partir de formes qui sont adaptées à la dynamique du système. Ces bases sont cherchées avec une dimension la plus petite possible. On peut distinguer deux grandes classes de méthodes de construction de base réduite :

- Les méthodes *a posteriori* : la base réduite est construite à partir de données initiales, issues de simulations numériques ou d'expériences. Nous reviendrons en particulier sur la méthode POD (*Proper Orthogonalized Decomposition*).
- Les méthodes *a priori* : la base réduite est construite sans connaissance préalable du système étudié. On utilise uniquement les conditions initiales du problème. Les méthodes PGD, au cœur des solveurs développés dans cette étude, en font partie. On explicitera rapidement les méthodes structurales comme la méthode de Craig & Bampton, classique pour les systèmes linéaires. Seront développées plus finement les méthodes utilisant des descriptions modales (base des modes propres et dérivées modales).

3.3.1 Méthodes a posteriori

3.3.1.a Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La POD, pour *Proper Orthogonal Decomposition*, est une méthode qui permet à partir d'un échantillon de données d'obtenir une base réduite optimale de décomposition de ces données, le critère d'optimalité reposant sur certaines considérations probabilistes. Les données initiales constituant l'échantillon sont préalablement obtenues via des essais expérimentaux ou des simulations numériques, et seront dans le cadre de cette étude les évolutions temporelles des degrés de liberté du système, rangées par ligne dans la matrice d'évolution de l'échantillon $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$.

La POD, dans sa trame générale, peut se retrouver sous l'appellation de décomposition de Karhunen-Loève (KLD). Si, comme dans cette étude, on considère un échantillon $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ discrétisé, on parlera plus volontiers d'analyse en composantes principales (PCA) [42].

Le critère d'optimalité propre à l'obtention d'une base POD est stochastique : il s'agit de maximiser la moyenne du produit scalaire entre la base cherchée Φ et l'échantillon discret $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. En y ajoutant une condition de normalisation de type $\|\phi_i\|^2 = 1$ pour rendre la solution unique, et en maximisant plutôt $\overline{\langle \mathbf{X}, \phi_i \rangle^2}$ pour s'approcher d'un vrai minimum, la recherche de modes POD (POMs) se ramène au problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$J[\phi_i] = \overline{\langle \mathbf{X}, \phi_i \rangle^2} - \lambda_i(\|\phi_i\|^2 - 1). \quad (3.16)$$

Par quelques calculs détaillés dans [5], on montre qu'un extremum est atteint lorsque le problème aux valeurs propres sous forme intégrale suivant est résolu :

$$\int \overline{\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}')}\phi_i(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \lambda_i\phi_i(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

avec $\overline{\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}')}$ fonction d'auto-corrélation moyennée. Un POM ϕ_i est associé à une valeur propre λ_i appelée *Proper Orthogonal Value* (POV). Les POMs forment une base de l'espace considéré, par rapport au produit scalaire canonique (et non pas par rapport aux matrices de masse ou de raideur comme dans le cas des modes propres linéaires de vibration).

Dans notre cas d'intérêt qui est l'utilisation d'un échantillon discret, l'auto-corrélation moyennée est estimée par la matrice de covariance de l'échantillon, notée Σ_X (sous condition d'ergodicité et de stationnarité du phénomène, et avec un grand nombre d'instants t relevés). À ce moment-là, trouver les POVs et les POMs revient à trouver les valeurs propres et vecteurs propres de Σ_X .

Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) La résolution du problème aux valeurs propres de l'Eq. (3.17) s'avère généralement coûteuse et on préférera réaliser une décomposition en valeurs singulières (SVD) pour obtenir les couples POV/POM. La démonstration liant théoriquement la matrice de covariance de l'échantillon à sa décomposition par SVD est donnée par Kerschen dans [42].

Soit un résultat préalablement obtenu sur un jeu de données discrétisé sur N_t pas de temps. Cet échantillon $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ de dimension $N \times N_t$ peut toujours se mettre sous la forme d'un produit matriciel appelé décomposition en valeurs singulières, tel que :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{V}^T(t), \quad (3.18)$$

avec $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ orthonormale de dimension $N \times N$, \mathbf{S} (pseudo) diagonale et semi définie-positive de dimension $N \times N_t$, et $\mathbf{V}(t)$ orthonormale de dimension $N_t \times N_t$.

Cette mise en facteurs permet de faire apparaître directement les modes propres orthogonaux (POMs) dans \mathbf{U} , leurs valeurs propres associées (POVs) dans \mathbf{S} , et ajoute même de l'information sur l'évolution temporelle de ces modes dans \mathbf{V} . On note que l'on est en présence d'une représentation séparant espace et temps.

Synthèse sur la POD par SVD En pratique, les données contenues dans les 3 matrices obtenues par SVD peuvent se résumer à ces quelques points essentiels :

- \mathbf{U} : contient les POMs. La k -ième colonne est le k -ième POM. Contient l'ensemble des informations spatiales de l'échantillon.
- \mathbf{V} : contient l'évolution des POMs. La k -ième colonne correspond au k -ième POM. Contient l'ensemble des informations temporelles de l'échantillon.
- \mathbf{S} : contient les valeurs singulières σ_i , qui sont les racines carrées des POVs λ_i . Ces valeurs sont ordonnées par ordre décroissant lorsque i augmente, et normalisent le POM auxquelles elles sont associées.

En plus d'être orthogonaux, les POMs sont optimaux au sens de l'énergie récupérée à partir de l'échantillon, au sens des moindres carrés [42]. Chaque POM peut être associé à une énergie relative à l'énergie totale de l'échantillon définie par $\sum_k \sigma_k^2$, via le ratio $\frac{\sigma_i^2}{\sum_k \sigma_k^2}$.

Les fonctions de forme que sont les POMs doivent permettre, via leur interprétation, de donner du sens aux différentes analyses vibratoires déjà disponibles. Voici quelques remarques relatives à ces aspects là :

- Les POMs forment une base par rapport au produit scalaire canonique, alors que les modes linéaires classiquement calculés pour des problèmes de vibration sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} . Pour un système linéaire, les POMs et les modes linéaires convergent les uns vers les autres si la matrice de masse est proportionnelle à la matrice identité [42]. En dehors de ce cas restreint, les deux bases de réduction ne sont pas spécialement liées l'une à l'autre.
- Feeny et Kappagantu [28] ne mettent pas en avant de lien entre les MNLs et les POMs, sauf dans le cas où le mouvement est réduit à un unique MNL non amorti, cas pour lequel le POM dominant est la meilleure représentation linéaire du MNL (au sens des moindres carrés).
- En tant que base de réduction, on peut choisir par exemple de conserver les POMs qui cumulent la quasi-totalité de l'énergie du signal échantillonné – en pratique au moins 99,9%.

Limites de l'utilisation de la POD La POD permet d'obtenir une base de réduction Φ représentative de la physique contenue dans un échantillon, et offre une liberté sur le nombre de POMs à incorporer dans la représentation choisie grâce à la notion d'énergie (statistique) associée à un POM. De plus, l'utilisateur peut se donner une idée raisonnable de la réductibilité du modèle : une énergie quasi-intégralement répartie sur quelques POMs suppose une haute réductibilité du modèle, alors qu'une énergie diffusée sur un grand nombre de POMs supposerait plutôt l'inverse.

Cependant, plusieurs inconvénients majeurs viennent contrebalancer les performances de la POD en tant que réducteur de modèle. Comme il s'agit d'une méthode *a posteriori*, il faut un effort expérimental ou numérique, via la simulation complète du système, pour obtenir l'échantillon de données. Pour de meilleurs résultats, un échantillonnage fin en temps est nécessaire, ce qui conduit à des matrices $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ de très grandes tailles. La SVD est justement coûteuse à réaliser en terme de complexité algorithmique pour des systèmes présentant un grand nombre de degrés de liberté et un grand nombre de pas de temps.

On notera aussi que l'indépendance statistique intervenant dans certaines hypothèses de calcul [5] ne n'avère effective que si les variables sont gaussiennes, ce qui peut s'avérer être un postulat risqué suivant les situations traitées.

Enfin, le principal argument menant à considérer une approche *a priori* à partir de la Partie 2 est que la base de réduction obtenue par POD est intrinsèquement locale. En effet, lors de la continuation de MNLs ou lors du tracé de FRFs, la nature de la solution change radicalement suivant la valeur du paramètre de continuation, *e.g.* avant/après une bifurcation,

avant/après/pendant la résonance, à basse/haute amplitude dans un MNL, etc. Suivant les points considérés pour réaliser la POD, les bases de POMs seront donc très différentes, rendant la méthode difficilement applicable. Dans le meilleur des cas, on peut sélectionner un certain nombre de points jugés pertinents pour bien décrire la dynamique globale et concaténer les bases POD obtenues, mais le coût algorithmique serait très conséquent en grande dimension.

Étude qualitative d'un exemple On illustrera l'application de la POD par l'étude qualitative de trois branches connexes de MNL d'une poutre encastree-libre dont l'extrémité libre est attachée transversalement à un ressort à raideur cubique, comme illustré en Fig. 3.3.

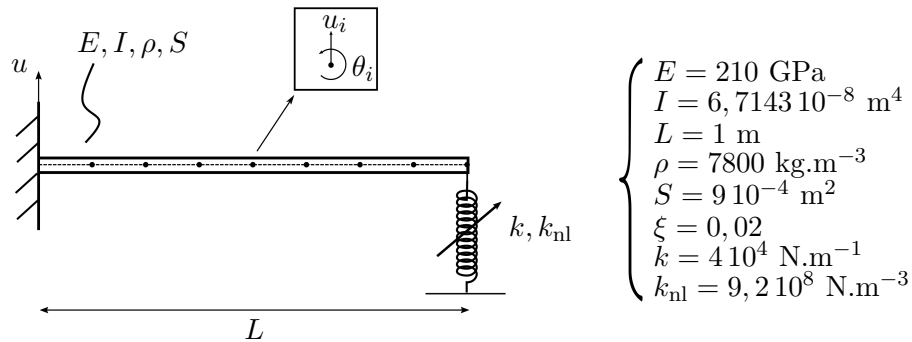


FIGURE 3.3 – Poutre encastree-libre avec ressort cubique au bout, avec grandeurs physiques utilisées pour la POD.

Le diagramme de bifurcation correspondant aux coefficients de Fourier $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ et \mathbf{a}_5 du MNL (cf. Fig. 3.4) est obtenu par HBM sur le logiciel MANLAB, afin d'analyser le contenu du mouvement. On s'intéressera qualitativement aux 3 branches de solutions représentées sur ce diagramme. Sont synthésés sur les Fig. 3.6, Fig. 3.7 et Fig. 3.8 l'ensemble des résultats obtenus par POD pour 3 points situés respectivement sur les branches (1), (2) et (3).

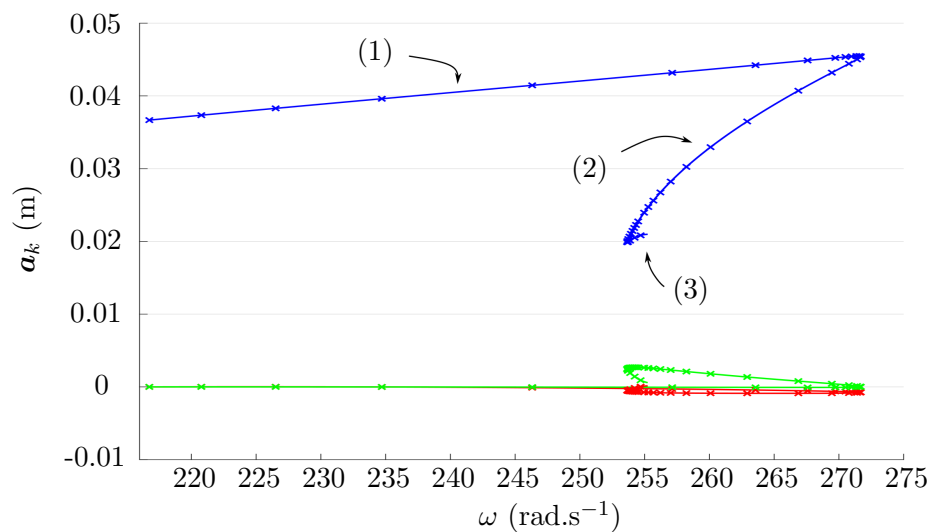


FIGURE 3.4 – Diagramme (partiel) de bifurcation du MNL1 de la poutre encastree-libre. En bleu : \mathbf{a}_1 , en rouge : \mathbf{a}_3 , en vert : \mathbf{a}_5 .

Au fil de la continuation suivant ω , la déformée des 4 premiers POMs évolue de la manière tracée en Fig. 3.5.

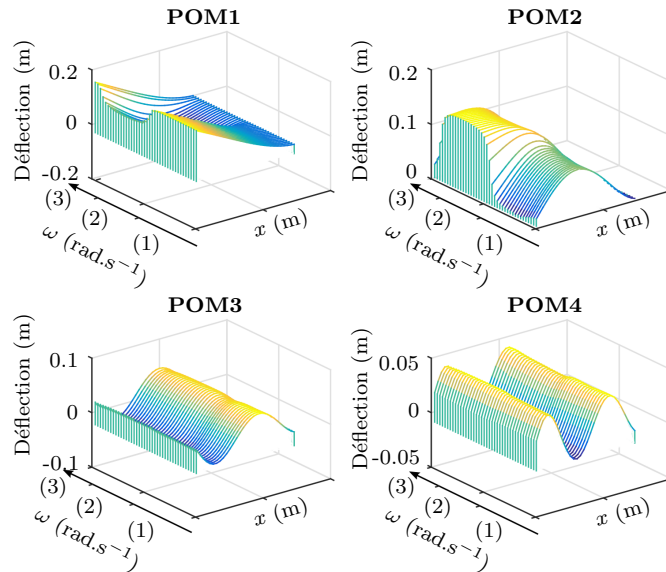


FIGURE 3.5 – Évolution des 4 premiers POMs suivant ω (pour les 3 branches visualisées). Encastrement ($x = 0$) à droite.

On constate bien un changement de nature du mouvement des 2 premiers POMs dominants lorsque l'on passe d'une branche de solutions à une autre. La POD peut donc permettre de détecter les changements significatifs de la solution en fonction de la non linéarité, tout au long de la continuation.

Ceci peut également être interprété en termes d'échanges d'énergie – au sens donné par la POD – entre les 2 premiers POMs. En effet, la branche de résonance interne (2) voit son deuxième POM s'exprimer en proportion non négligeable, comme le montre la Fig. 3.7.

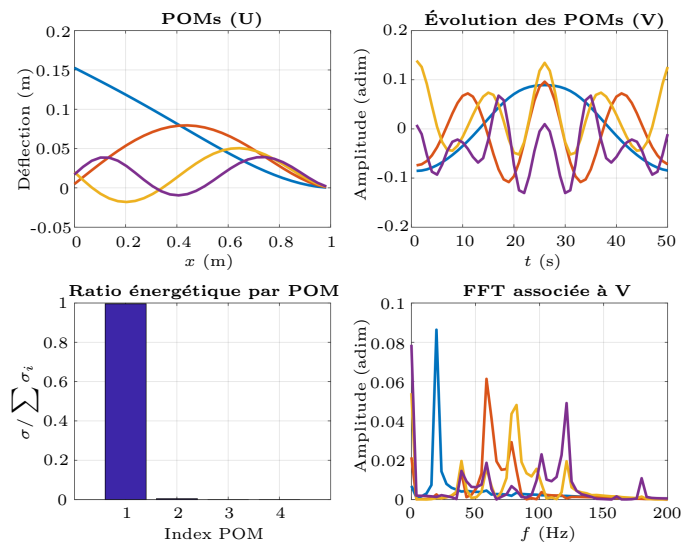


FIGURE 3.6 – Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (1) (ordre des POMs 1–4 : bleu, rouge, jaune, violet)

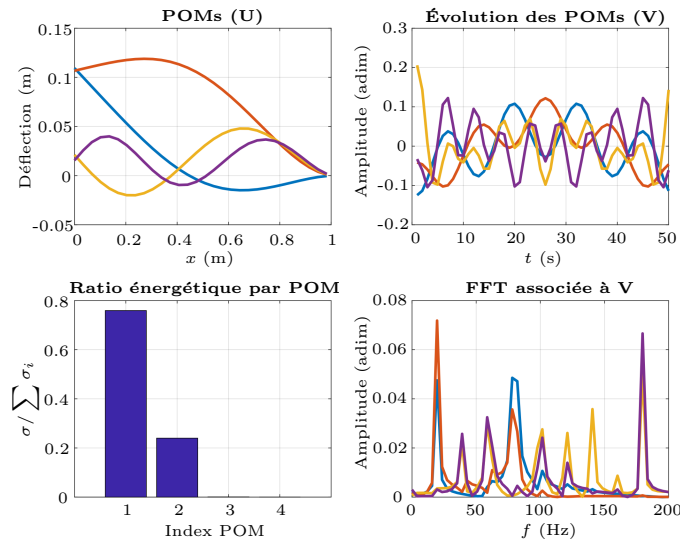


FIGURE 3.7 – Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (2) (ordre des POMs 1–4 : bleu, rouge, jaune, violet)

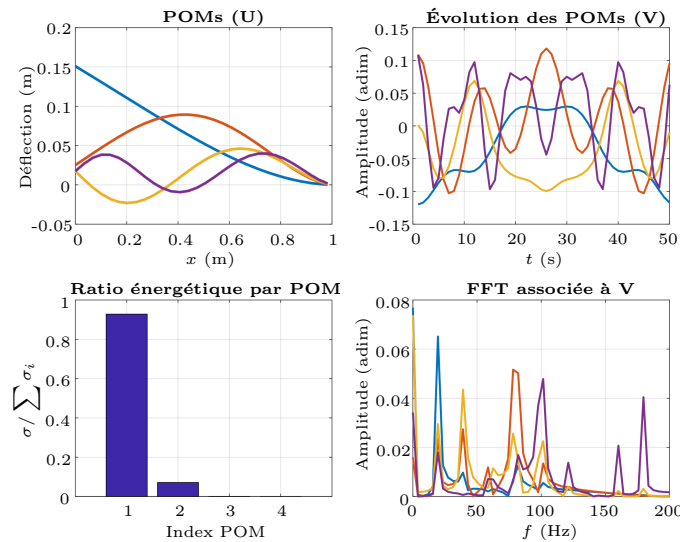


FIGURE 3.8 – Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (3) (ordre des POMs 1–4 : bleu, rouge, jaune, violet)

On notera que l'essentiel de l'information de la solution est contenu dans le premier POM dans chaque branche, conformément aux propriétés de la méthode. Dans les branches (1) et (3), une base de réduction de dimension 1 semble donc envisageable et serait très économique en temps de calcul. De même, une base de réduction de taille 2 est envisageable pour la branche (2). Cependant, la localité de l'analyse POD mènerait à construire au mieux une base de taille 4 pour décrire les 3 branches, par concaténation des 4 POMs dominants en présence. On imagine le coût algorithmique important d'un tel procédé pour un diagramme de bifurcation complet, et en grande dimension.

Bien que l'on traite un cas de système non linéaire ne permettant pas de conclure quant à la convergence entre modes propres linéaires et POMs, on donnera tout de même une comparaison

qualitative de ces derniers pour les branches (1) et (2) en Fig. 3.9, avec les POMs numérotés par énergie décroissante.

Si la branche (1) présente un POM dominant dont la déformée est visuellement proche du premier mode linéaire, ce constat disparaît lorsque l'on bascule sur la résonance interne (2).

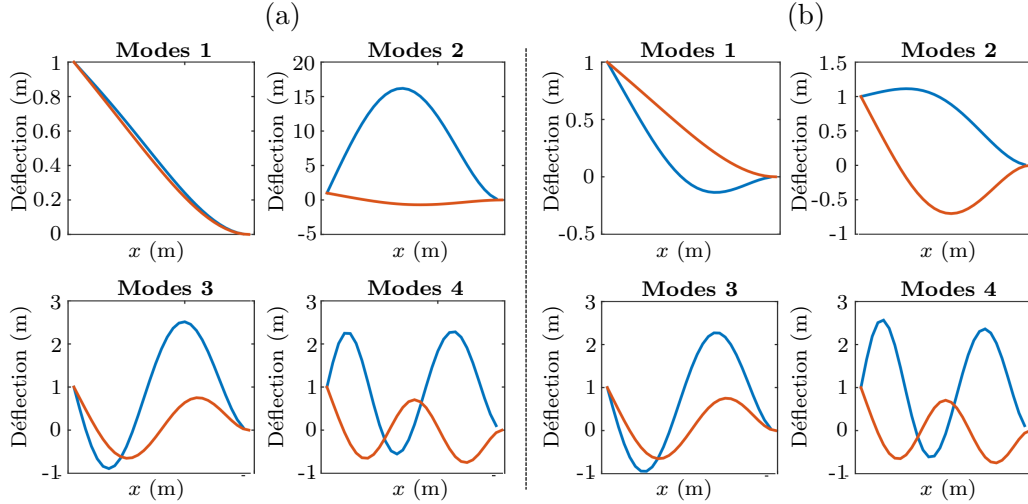


FIGURE 3.9 – Comparaison POMs/modes de même ordre. POM : bleu, Mode propre linéaire : rouge. (a) Cas de la branche (1) ; (b) Cas de la branche (2)

3.3.2 Méthodes a priori

3.3.2.a Bases modales

Il convient en premier lieu de rappeler un résultat important issu de la théorie linéaire : les modes propres linéaires de vibration forment une base. Tronquée à l'ordre r , on la note $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_r]$. En se plaçant en notations complexes (grandeurs avec chapeau) pour résoudre l'Eq. (1.3) avec $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{0}$ (système linéarisé), on peut calculer la participation q_i du i -ème mode propre dans la réponse forcée :

$$q_i = \frac{\phi_i^T \hat{\mathbf{f}}_e}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\omega}. \quad (3.19)$$

Ainsi, on peut exprimer le vecteur des ddls en formulation complexe $\hat{\mathbf{x}}$ à partir d'une base tronquée de r modes propres :

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r q_i \phi_i. \quad (3.20)$$

Le choix du nombre de modes retenus est généralement défini à partir d'une plage de fréquences d'intérêt pour l'étude. Il est physiquement pertinent de retenir les modes excités par les efforts extérieurs $\mathbf{f}_e(t)$ en présence.

Il est également courant de venir greffer à la base un correctif venant compenser les termes basse ou haute fréquences non retenus par la troncature modale. On citera la compensation

statique, qui vient rendre compte de la contribution des modes propres hautes fréquences ($\omega \ll \omega_{r+1}$) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^r q_i \phi_i + \mathbf{s}_r, \text{ avec } \mathbf{s}_r \approx \sum_{i=r+1}^n \frac{\phi_i^T \hat{\mathbf{f}}_e}{\omega_i^2} \phi_i. \quad (3.21)$$

L'écriture de la solution statique permet au final de déduire que le correctif \mathbf{s}_r à appliquer vaut :

$$\mathbf{s}_r \approx \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_e - \sum_{i=1}^r \frac{\phi_i^T \hat{\mathbf{f}}_e}{\omega_i^2} \phi_i. \quad (3.22)$$

Cette approche correctrice n'est plus valable en présence de systèmes dynamiques non linéaires. Une première idée peut alors être de calculer les MNLs d'une structure et de les projeter sur la base modale linéaire, afin de se faire une idée des interactions modales induites par les phénomènes non linéaires à haute énergie. La taille de la base de projection est alors choisie en rapport avec l'expression des non-linéarités. En grande dimension, on trouve en pratique que des modes de très grand ordre peuvent être requis pour décrire certains phénomènes à haute amplitude, empêchant une description économe en stockage numérique de la dynamique [77].

On peut tout de même chercher d'autres correctifs à ajouter aux modes propres linéaires. Des tentatives d'enrichissement de la base modale tronquée par des objets qui viendraient rendre compte de la dynamique non linéaire en présence existent, telles les dérivées modales.

Dérivées modales À l'instar des MNLs, le concept de dérivée modale se base sur la dépendance amplitude-fréquence dans le cas non linéaire. Les formes propres évoluent suivant le niveau d'énergie du système, ce qui constitue le point de départ de cette approche : $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{q})\mathbf{q}$. Cette expression est développée à l'ordre 2 autour d'une position d'équilibre \mathbf{q}_{eq} :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{q}_{eq}) = \sum_k \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}(\mathbf{q}_{eq})}_{\phi_k} q_k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_l \partial q_m}(\mathbf{q}_{eq})}_{\theta_{lm}} q_l q_m. \quad (3.23)$$

On reconnaît dans la somme de gauche l'expression des modes propres. Le terme de la somme de droite noté θ_{ij} constitue la définition de la dérivée modale (i, j) . Il vaut :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(\mathbf{q}_{eq}) + \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}(\mathbf{q}_{eq}). \quad (3.24)$$

Il traduit bien la variation des formes propres relativement à l'amplitude des inconnues.

Des méthodes de calcul des dérivées modales sont développées dans [76, 22]. Elles se basent sur une différentiation du problème aux valeurs propres linéaire $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi_i = \mathbf{0}$. Sombroek et al. proposent un calcul numérique direct des θ_{ij} en ajoutant une condition de normalisation qui rend la solution trouvée unique, ce qui donne :

$$\begin{cases} (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\theta_{ij} = \left(-\frac{\partial \mathbf{K}_{nl}}{\partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}_{eq}} + \frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}_{eq}} \mathbf{M} \right) \phi_i \\ \phi_i^T \mathbf{M} \theta_{ij} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.25)$$

avec \mathbf{K}_{nl} matrice jacobienne des efforts non linéaires. Finalement, calculer la dérivée modale θ_{ij} revient à résoudre le problème algébrique linéaire de taille $(N + 1)$ suivant :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) & -\mathbf{M}\phi_i \\ -(\mathbf{M}\phi_i)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ij} \\ \left. \frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \right|_{q_{eq}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial \mathbf{K}_{nl}}{\partial q_j} \right|_{q_{eq}} \phi_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Le coût algorithmique relatif au calcul des dérivées modales est raisonnable au regard du temps de calcul dédié à la recherche des modes propres linéaires. La principale question réside en le choix des dérivées modales à inclure dans la base de réduction du système dynamique. Après résolution des systèmes de l'Eq. (3.26) choisis, on peut mettre en avant des termes $q_i q_j$ prépondérants dans le développement de \mathbf{x} à l'ordre 2, et se retrouver au final avec une sélection restreinte de dérivées modales concaténées à la base modale linéaire. Cette analyse n'est cependant possible qu'*a posteriori*, et il n'est pas possible à la connaissance de l'auteur d'économiser des résolutions de ces systèmes de taille $N + 1$ par une approche prédictive.

3.3.2.b Sous-structuration

Évoquons rapidement la construction de bases de réduction par des méthodes de sous-structuration du système. Ces techniques se basent sur une redéfinition du vecteur inconnu \mathbf{x} en le partitionnant en ddls “maîtres” et en ddls “esclaves”. Très utilisées dans l'industrie, ces approches permettent de traiter indépendamment des organes d'un même produit complexe (*e.g.* dans les secteurs aéronautique et spatial). Dans ce cas, les ddls “maîtres” correspondent souvent aux frontières de l'organe, sur lesquelles des conditions de bord sont appliquées, et les ddls “esclaves” sont les inconnues internes, sur lesquelles une réduction de modèle analogue à la troncature modale peut alors être appliquée.

Citons la méthode de condensation statique de Guyan [34] qui néglige les efforts d'inertie des ddls “esclaves” afin d'exprimer ces derniers directement en fonction des ddls “maîtres”, ou la méthode de Craig et Bampton [18], particulièrement adaptée aux non linéarités localisées qui font alors office de ddls “maîtres”, ou encore la méthode de McNeal [49].

Les approches réduites développées à partir de la Partie 2 visent à traiter des systèmes non linéaires comportant un grand nombre de ddls mais pour lesquels aucune méthode de sous-structuration n'a été employée. Cependant, le lecteur peut garder à l'esprit que rien n'empêche de le faire, de manière complémentaire.

3.4 Introduction à la Proper Generalized Decomposition (PGD)

Une implémentation détaillée de la méthode PGD appliquée à la recherche de solutions périodiques de systèmes dynamiques non linéaires sera donnée en Partie 2. Dans cette section, nous reviendrons seulement sur les origines de la méthode et en exposeront les grands traits, au regard des méthodes de Galerkin présentées jusqu'alors.

3.4.1 Bref historique et généralités

Dans les années 1980, Ladevèze développe le solveur non incrémental et non linéaire LATIN (*L*Arge *T*ime *I*Ncrement), notamment détaillé dans [46]. Dans le vaste cadre de cette méthode, “l’approximation radiale” menait à des représentations espace-temps séparées des champs d’inconnues recherchés. L’objectif était déjà de réduire les coûts algorithmiques (stockage mémoire et temps CPU) pour le traitement de systèmes non linéaires dépendants des incréments de temps passés.

Des formulations séparées faisant intervenir d’autres grandeurs que l’espace et le temps sont apparues via les travaux de Ammar et Chinesta [3] ou encore ceux de Nouy pour la résolution d’équations stochastiques [59]. Elles seront nommées techniques PGD [10, 60], pour *Proper Generalized Decomposition*, basées sur l’écriture suivante en fonction des inconnues et paramètres \mathbf{p}_i :

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i^1(\mathbf{p}_1) \dots \mathbf{F}_i^N(\mathbf{p}_N), \quad (3.27)$$

avec \mathbf{p}_i un vecteur ou scalaire appartenant à un espace choisi de faible dimension d ($d \leq 3$ en général), m un nombre arbitraire de modes PGD, et \mathbf{F}_i^j fonction de forme associée au j -ème paramètre et au i -ème mode PGD. Généralement, \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 correspondent à l’espace et au temps. Les \mathbf{p}_i sont des paramètres propres à la physique traitée, considérés ici comme des variables. Comme les fonctions \mathbf{F}_i^j sont inconnues *a priori*, cette représentation séparée se veut plus générale que celle obtenue par POD, ce qui a motivé l’adoption de l’appellation PGD. Un grand nombre de développements et d’applications de la PGD sont notamment donnés par Chinesta dans [10].

Pour se donner une idée du gain de stockage de variables permis par la PGD [9], appliquons l’Eq. (3.27) avec un jeu de N paramètres \mathbf{p}_i (dont l’espace et le temps) associés à chaque point du domaine discrétisé. Chaque \mathbf{p}_i est décrit par N_i variables. Le nombre total d’inconnues du système non réduit vaut $N \times (\prod_i N_i)$. Avec une représentation séparée en m modes PGD ce nombre est réduit à $m \times (\sum_i N_i)$. Ainsi, le gain r_{PGD} en nombre de variables stockées et traitées par PGD vaut :

$$r_{PGD} = 1 - \frac{m \times \left(\sum_i^N N_i \right)}{N \times \left(\prod_i N_i \right)}. \quad (3.28)$$

À titre d’exemple, si on choisit les valeurs : $\forall i N_i = 1000$, $m = 10$, et $N = 3$, la représentation séparée par PGD est de taille 3×10^4 alors que le modèle complet demande de traiter 10^9 inconnues – menant à un gain de 99,997% de variables ici. C’est notamment cette compacité des descriptions retenues qui nous intéresse pour un calcul rapide et économe des MNLs dans la Partie 2 de ce travail.

3.4.2 Formalisme de la PGD d’après Nouy

La méthodologie de la PGD va à présent être présentée sous l’angle d’une approche de type Galerkin, tel qu’introduit dans les travaux de Nouy [60]. Par ailleurs, on se restreint à une

séparation espace-temps de la solution ($N = 2$ dans l'Eq. (3.27)), ce qui s'écrira :

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i q_i(t) = \mathbf{P} \mathbf{q}(t). \quad (3.29)$$

L'objectif est de déterminer les parties spatiale \mathbf{P} et temporelle $\mathbf{q}(t)$ de la représentation séparée de la solution. On se dote tout d'abord d'une initialisation de l'algorithme, définie par le point de départ $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0(t)\}$. Son choix sera discuté dans le Chap. 5.

Enfin, nous avons besoin de définir les formes \mathcal{B} et \mathcal{L} liées aux méthodes de type Galerkin, au regard de l'Eq. (1.3) du mouvement :

$$\forall \mathbf{y}(t) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \int_{I_t} \mathbf{y}(t)^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))] dt, \\ \mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) = \int_{I_t} \mathbf{y}(t)^T \mathbf{f}_e(t) dt, \end{array} \right. \quad (3.30)$$

avec I_t intervalle de temps correspondant par exemple à $[0, T]$ dans le cadre de la recherche de solutions périodiques.

Définition de sous-problèmes Pour déterminer les parties spatiale et temporelle, on se dote de 2 critères d'orthogonalité au sens de Galerkin (cf. Eq. (3.2)) : un par rapport au temps et l'autre par rapport à l'espace. À partir d'ici, plusieurs variantes du processus PGD sont possibles suivant les conditions d'orthogonalité retenues. Comme dans les travaux de Nouy ou Grolet [32], seules la oPGD (*optimal Galerkin PGD*) et la pPGD (*progressive PGD*), cas les plus classiquement traités dans la littérature, seront décrites et exploitées.

Dans le cas de l'oPGD, il s'agit de critères d'orthogonalité par rapport à $\text{vect}(\mathbf{P})$ et $\text{vect}(\mathbf{q})$:

$$\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \quad \mathcal{B}(\mathbf{P} \mathbf{q}, \mathbf{P}^* \mathbf{q}) = \mathcal{L}(\mathbf{P}^* \mathbf{q}), \quad (3.31)$$

$$\forall \mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{B}(\mathbf{P} \mathbf{q}, \mathbf{P} \mathbf{q}^*) = \mathcal{L}(\mathbf{P} \mathbf{q}^*). \quad (3.32)$$

Comme le fait Nouy, on peut alors définir des applications S et T telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} S : \quad \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \\ \quad \mathbf{q} \mapsto \mathbf{P} = S(\mathbf{q}) \quad \text{tq Eq. (3.31) vérifiée} \\ T : \quad \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \quad \mathbf{P} \mapsto \mathbf{q} = T(\mathbf{P}) \quad \text{tq Eq. (3.32) vérifiée.} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Un couple (\mathbf{P}, \mathbf{q}) solution du processus oPGD est alors un couple vérifiant simultanément les relations $\mathbf{P} = S(\mathbf{q})$ et $\mathbf{q} = T(\mathbf{P})$, ce qui est équivalent à trouver des points fixes de l'application $S \circ T$ ou de l'application $T \circ S$.

Les définitions de S et T dans l'Eq. (3.33) masquent la dépendance de ces applications en leurs points de départ, respectivement \mathbf{P}_0 et \mathbf{q}_0 , ce qui aura une importance significative lors de la résolution de ces problèmes de type point fixe par des solveurs de type Newton-Raphson. On utilisera donc un formalisme différent, équivalent, mais peut-être légèrement plus explicite pour

les applications à venir. Soient \mathcal{S}_m et \mathcal{T}_m respectivement les sous-problèmes spatial et temporel, définis tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_m(\mathbf{P}|\mathbf{q}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{Eq. (3.31) vérifiée} \\ \mathcal{T}_m(\mathbf{q}|\mathbf{P}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{Eq. (3.32) vérifiée.} \end{cases} \quad (3.34)$$

On insiste ainsi sur le fait que pour \mathcal{S}_m par exemple, une forme de départ \mathbf{P}_0 est transformée en \mathbf{P} par le sous-problème spatial, à partie temporelle \mathbf{q} fixée. Cette écriture plus fonctionnelle de \mathcal{S}_m et \mathcal{T}_m est en adéquation avec leur implémentation numérique, qui consistera effectivement à trouver un zéro aux différents $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{L}(\mathbf{y})$ en présence.

Dans le cas de la variante pPGD, une démarche analogue est appliquée pour obtenir de nouveaux sous-problèmes \mathcal{S}_m et \mathcal{T}_m , mais avec deux autres conditions d'orthogonalité. On raisonne cette fois avec m modes PGD déjà calculés et “bloqués” (au moins en forme), et on cherche à ajouter un $(m + 1)$ -ième mode PGD à la description réduite. La variante pPGD s'inscrit donc dans une perspective d'enrichissement de la description par modes PGD, suivant des critères restant à définir. Dans l'Eq. (3.35), on note séparément le nouveau descripteur :

$$\mathbf{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i q_i(t)}_{\mathbf{x}^{(m)}} + \mathbf{p}_{m+1} q_{m+1}(t). \quad (3.35)$$

Sachant cela, les conditions d'orthogonalité liées à la variante pPGD s'écrivent :

$$\forall \mathbf{p}_{m+1}^* \in \mathbb{R}^N \quad \mathcal{B}(\mathbf{x}_{(m)} + \mathbf{p}_{m+1} q_{m+1}, \mathbf{p}_{m+1}^* q_{m+1}) = \mathcal{L}(\mathbf{p}_{m+1}^* q_{m+1}), \quad (3.36)$$

$$\forall q_{m+1}^* \in \mathbb{R} \quad \mathcal{B}(\mathbf{x}_{(m)} + \mathbf{p}_{m+1} q_{m+1}, \mathbf{p}_{m+1} q_{m+1}^*) = \mathcal{L}(\mathbf{p}_{m+1} q_{m+1}^*). \quad (3.37)$$

L'Eq. (3.36) et l'Eq. (3.37) permettent de définir respectivement un nouveau sous-problème spatial pour déterminer \mathbf{p}_{m+1} et un nouveau sous-problème temporel pour déterminer q_{m+1} . Pour le sous-problème \mathcal{S}_{m+1} , seule la forme du mode PGD ajouté est calculée via la résolution d'un système, ce qui représente un gain important par rapport à la taille du même problème en oPGD. Il faut en effet traiter N inconnues en pPGD au lieu de $N \times m$ en oPGD, ce qui peut être lourd lors du traitement de systèmes non linéaires de grande taille. La pPGD permet une économie numérique importante concernant le sous-problème le plus volumineux des deux.

Le sous-problème temporel, quant à lui, laisse envisager des libertés d'implémentation. On peut ici aussi imaginer de ne calculer que q_{m+1} , mais il est souvent préférable de recalculer l'ensemble des évolutions des modes PGD contenues dans \mathbf{q} . Cette option algorithmique, que l'on retrouve sous le nom de “mise à jour des fonctions temporelles” dans [31], est la plus pertinente des options vis-à-vis de la physique décrite : il n'y a par exemple aucune raison qu'une forme de mode PGD (bloquée) présente la même évolution temporelle le long d'une continuation de solution périodique.

Boucle à directions alternées La dernière étape du processus PGD est d'injecter les sous-problèmes dans une boucle à directions alternées : à partir de $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0(t)\}$, on actualise soit la partie spatiale soit la partie temporelle en gardant la partie non traitée fixée. La convergence de la méthode peut alors être vérifiée vis-à-vis d'un critère d'erreur sur \mathbf{x} , lequel sera défini dans le Chap. 4.

Remarque sur les formes des modes PGD Les méthodes PGD permettent d'obtenir des modes sans connaissance préalable sur le système. Cependant, sans condition supplémentaire apportée à la méthodologie exposée dans cette section, la signification physique des formes des modes PGD est moindre. Nous tiendrons compte de cette faiblesse et la compenserons dans le développement de l'algorithme de calcul réduit de MNL exposé dans la Partie 2, notamment en jouant sur le point de départ $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0(t)\}$ de la boucle à directions alternées.

**Partie 2 : Méthode réduite de
continuation de Mode Non Linéaire
par approche PGD/HBM avec
enrichissement modal**

Combinaison PGD/HBM pour le calcul d'une solution périodique

Dans ce chapitre, un algorithme fréquentiel de calcul de solution périodique d'un système dynamique non linéaire est présenté. Son développement fait d'une part appel à l'équilibrage harmonique pour le traitement du contenu temporel de la solution et d'autre part à une classe de méthodes de réduction de modèle, la Proper Generalized Decomposition (PGD). Les systèmes obtenus via cette méthodologie PGD/HBM sont ainsi de taille plus petite et la description de la solution est plus compacte qu'avec l'utilisation de la HBM seule. L'approche présentée est originalement issue d'une publication de l'auteur dans le *Journal of Sound And Vibration* [50].

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1	Introduction	69
4.2	Construction des sous-problèmes en oPGD/HBM	69
4.2.1	Séparation des variables	69
4.2.2	Sous-problème temporel \mathcal{I}_m en oPGD	70
4.2.3	Sous-problème spatial \mathcal{I}_m en oPGD	71
4.2.4	Algorithme global oPGD/HBM	72
4.2.4.a	Critère d'erreur	72
4.2.4.b	Traitement de la non convergence	74
4.2.4.c	Normalisation du sous-problème spatial \mathcal{I}_m	74
4.3	Sous-problèmes et algorithme global en pPGD	75

4.1 Introduction

L'étude des objets mathématiques que sont les Modes Non Linéaires (MNLs) d'un système est profondément liée à la volonté d'accéder à des modes qui tiendraient compte des non linéarités en présence tout en présentant un maximum des avantages que comptent les modes linéaires de vibration. Les propriétés des MNLs sont ainsi étudiées dans l'optique de gains algorithmiques lors de la prédiction et/ou l'interprétation de réponses forcées en dynamique non linéaire [40, 47], et une tentative de ré-exploitation des MNLs en synthèse modale pour le calcul de FRFs sera proposée en Partie 3.

La dernière décennie a vu l'émergence de méthodes numériques dédiées mais ce champ de recherche n'a pas encore atteint sa maturité [63, 61]. Le cap des systèmes industriels est en train d'être franchi, mais les problèmes discrets à résoudre présentent un grand nombre de ddl et les non linéarités dégradent la convergence des algorithmes. Ainsi, les MNLs sont difficilement calculables de manière rapide et nécessitent un grand nombre de variables pour les décrire correctement, ce qui rend complexe leur réutilisation en synthèse modale. Certains travaux arrivent à exploiter avantageusement les MNLs, par exemple [37], et serviront de base aux développements méthodologiques de la Partie 3.

Dans ce chapitre, une méthode réduite combinant une PGD à une HBM afin de calculer un point de MNL est proposée. Le cadre de l'équilibrage harmonique est intéressant au regard de la périodicité des solutions recherchées. Malgré une qualité de la solution dépendante de l'ordre de troncature harmonique H , la HBM permet de traiter un système algébrique non linéaire plutôt que de traiter des ODEs non linéaires en domaine temporel. Cependant, nous avons vu en Sec. 3.2.2 que le nombre de descripteurs vaut $N \times (2H + 1)$ et devient très vite un problème lorsque le modèle physique nécessite un nombre de ddl N élevé ou un grand nombre d'harmoniques pour que son comportement soit bien décrit. Ce constat motive la combinaison de la HBM à la PGD afin d'obtenir des systèmes de plus petites tailles.

La PGD a déjà été utilisée dans les travaux de Grolet et Thouverez [32] pour le calcul de réponses libres et forcées de systèmes non linéaires et la construction des sous-problèmes de ce chapitre est grandement basée sur leur travail.

4.2 Construction des sous-problèmes en oPGD/HBM

Nous traiterons ici le calcul des modes non linéaires par la méthode oPGD, c'est-à-dire la variante consistant à recalculer à chaque itération l'ensemble des formes \mathbf{p}_i .

4.2.1 Séparation des variables

On rappelle que le processus PGD peut être divisé en trois grandes étapes : la séparation des variables, la définition d'un sous-problème propre à chaque variable (les autres grandeurs de la formulation séparée étant fixées), et l'injection de ces sous-problèmes dans une boucle à directions alternées les traitant à tour de rôle et vérifiant la convergence vers une solution

du système régi par l'Eq. (1.28) (système dont les MNLs sont solutions). Par ailleurs, pour alléger certaines expressions à venir, un champ $\mathbf{x}(t)$ solution de l'Eq. (1.28) respecte de manière équivalente la condition :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Bien que la PGD telle que décrite par Chinesta puisse admettre une écriture séparée de la solution faisant intervenir en tant que variable de nombreux paramètres, seuls l'espace et le temps sont retenus, ce qui mène à la forme de solution de l'Eq. (3.29), rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i q_i(t) = \mathbf{P}\mathbf{q}(t),$$

avec m entier positif arbitraire tel que $m \ll N$, correspondant au nombre de modes PGD retenus pour décomposer $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R})$ matrice spatiale contenant les formes des modes PGD, telle que $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m]$, et $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur contenant les évolutions de chaque mode PGD rangées en lignes.

La forme séparée étant un produit, le choix de normer chaque forme \mathbf{p}_i à 1 peut être fait : l'information relative aux amplitudes est ainsi seulement contenue dans les évolutions $q_j(t)$.

Ensuite, une HBM est appliquée à la partie temporelle $\mathbf{q}(t)$, qui est alors approximée par la série de Fourier tronquée à l'ordre H suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)).$$

Comme expliqué en Sec. 3.2.2, une base constituée uniquement de cosinus suffit à décrire un système conservatif (sans symétrie), ce qui nous amène à se placer dans le cas :

$$\mathbf{q}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) = \mathbf{Q}_H \mathbf{h}_H(t, \omega), \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{Q}_H = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots] \\ \mathbf{h}_H = [1/\sqrt{2}, \cos(\omega t), \cos(2\omega t), \dots]^T \end{cases} \cdot$$

Ceci conduit à une description temporelle d'un point du MNL extrêmement légère, de taille $m \times (H + 1) + 1$ en comptant la pulsation ω du signal périodique. Bien entendu, cette division par deux du nombre de coefficients de Fourier allège les calculs et les notations, mais n'est pas une obligation dans le sens où les développements de cette partie restent valables avec une base de Fourier non amputée de ses sinus. Notons enfin que calculer $\mathbf{q}(t)$ est équivalent à calculer \mathbf{Q}_H et ω .

4.2.2 Sous-problème temporel \mathcal{T}_m en oPGD

Dans cette section, on suppose les formes des modes PGD contenues dans \mathbf{P} connues et fixées. Le sous-problème temporel \mathcal{T}_m doit permettre de calculer \mathbf{Q}_H et ω connaissant \mathbf{P} . Pour ce faire, écrivons la formulation faible correspondant à l'Eq. (3.31), pour laquelle la fonction test s'écrit $\mathbf{x}^* = \mathbf{P}\mathbf{q}^*$ et où $\mathbf{q}(t)$ doit satisfaire l'Eq. (4.2) suivante pour une période d'oscillation $I_t = [0, 2\pi/\omega]$:

$$\forall t \in I_t \quad \forall \mathbf{q}^*(t) \quad \int_{I_t} \mathbf{q}^{*T}(t) \mathbf{P}^T \mathbf{R}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = 0. \quad (4.2)$$

Moyennant des conditions de régularité sur \mathbf{q}^* satisfaites du fait même de l'utilisation de la HBM, l'Eq. (4.2) est équivalente à l'Eq. (4.3) :

$$\forall t \in I_t \quad \mathbf{P}^T \mathbf{R}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) = 0. \quad (4.3)$$

Si l'on remplace \mathbf{R} par son expression complète et que l'on introduit les notations $\{\mathbf{M}_r = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}, \mathbf{K}_r = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}\} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2$ et $\mathbf{f}_{\text{nl}r} = \mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{nl}} \in \mathbb{R}^m$, on obtient immédiatement le système différentiel de l'Eq. (4.4) :

$$\forall t \in I_t \quad \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}r}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Il s'agit d'un système de taille m composé d'ODEs d'ordre 2 non linéaires. Ce dernier est traité par une méthode HBM couplée à un traitement par AFT du terme non linéaire, comme détaillé en Sec. 3.2.2. Le système algébrique non linéaire obtenu comporte $m \times (H + 1)$ équations et $m \times (H + 1) + 1$ inconnues, \mathbf{Q}_H et ω . Le caractère inconnu de la pulsation ω dans le cadre du calcul des MNLs mène à l'introduction d'une équation contrainte $c(\mathbf{q}_H, \omega)$ nécessaire pour rendre le système carré et donc la solution numérique déterminée unique. En utilisant les notations des Sec. 3.2.2 et Sec. 3.4, le sous-problème temporel \mathcal{T}_m est défini tel qu'il est écrit en Eq. (4.5).

$$\mathcal{T}_m(\mathbf{Q}_H, \omega | \mathbf{P}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{H}_1(\omega) \mathbf{q}_H + \mathbf{H}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_H, \omega) = \mathbf{0} \\ c(\mathbf{q}_H, \omega) = 0 \end{cases}, \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{q}_H = \{\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \dots\}^T$ et $c(\mathbf{q}_H, \omega)$ une condition qui sera spécifiée dans le Chap. 5 en tant que critère lié à la continuation du MNL. Les opérateurs linéaire \mathbf{H}_1 et non linéaire \mathbf{H}_{nl} sont ceux explicités dans l'Eq. (3.15) mais construits à partir des matrices réduites \mathbf{M}_r , \mathbf{K}_r et $\mathbf{f}_{\text{nl}r}$:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1(\omega) = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_H) \\ \mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{K}_r \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \\ \mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{K}_r - (k\omega)^2 \mathbf{M}_r \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.6)$$

4.2.3 Sous-problème spatial \mathcal{S}_m en oPGD

Dans cette section, on suppose l'évolution $\mathbf{q}(t)$ des m modes PGD connue et fixée. Le sous-problème spatial \mathcal{S}_m que l'on souhaite obtenir doit permettre de trouver la matrice spatiale \mathbf{P} sachant \mathbf{Q}_H et ω . Les détails calculatoires menant à la forme retenue du système et aux différents opérateurs utiles sont en Annexe A, et seuls les principaux résultats vont à présent être évoqués.

La formulation faible de l'Eq. (3.32) peut être écrite avec le choix de fonction test $\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k^* q_k$:

$$\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \quad \int_{I_t} \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k^* q_k \right)^T \mathbf{R}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = 0. \quad (4.7)$$

On obtient après quelques développements l'Eq. (4.8), constituée d'un ensemble de m systèmes de N équations :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \left[\sum_{j=1}^m \left(\int_{I_t} q_k \ddot{q}_j dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_k q_j dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_j \right] + \int_{I_t} q_k \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Ceci peut s'exprimer de manière plus compacte en un unique système matriciel de taille $N \times m$:

$$\mathcal{S}_m(\mathbf{P}|\mathbf{Q}_H, \omega) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{S}_1 \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

avec :

- $\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{N \times m}$ colonnes de \mathbf{P} mises bout à bout, inconnues de \mathcal{S}_m ,
- \mathbf{S}_1 s'exprimant analytiquement par :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{K} \quad (4.10)$$

avec $\mathbf{I}_0 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{Q}_H^T$ et $\mathbf{I}_2 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^2 \mathbf{Q}_H^T$ et $\mathbf{D}^2 = -\omega^2 \text{diag}(0, 1^2, 2^2, \dots, H^2)$,

- et $\mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \left[\int_{I_t} q_k \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt \right]_{1 \leq k \leq m}$, évalué par AFT, comme détaillé en Sec. 3.2.2.d.

Le détail des calculs en Annexe A montre également comment l'emploi de la HBM pour traiter les fonctions qui dépendent du temps permet l'obtention de ces opérateurs sous une forme simple à implémenter numériquement.

Une observation importante à faire à propos de \mathcal{S}_m est qu'il s'agit d'un système de taille $N \times m$, et cette dépendance en le nombre de ddl rend le sous-problème spatial plus coûteux à résoudre que le sous-problème temporel \mathcal{I}_m de taille $m \times (H + 1) + 1$. En effet on se place dans le cas $m \ll N$, ce qui est le cas dans un contexte industriel.

4.2.4 Algorithme global oPGD/HBM

Les sous-problèmes spatial et temporel étant à présent définis (dans le cadre de la oPGD pour l'instant), la dernière étape menant à l'obtention d'un solveur PGD/HBM pour le calcul d'un point de MNL est l'intégration de \mathcal{S}_m et \mathcal{I}_m dans une boucle à directions alternées. Le processus global est entièrement décrit dans l'Algorithme 1.

Les résolutions de \mathcal{I}_m et \mathcal{S}_m se font respectivement aux lignes 6 et 7. Les différents détails algorithmiques propres à la méthode vont à présent être explicités.

4.2.4.a Critère d'erreur

Une mesure de l'erreur numérique ε doit tout d'abord être faite (lignes 1 et 11). Elle permet de s'assurer que le point obtenu par PGD/HBM est bien une solution numérique du système que l'on cherche originellement à résoudre. Le choix de critère d'erreur retenu dans l'Algorithme 1 compare la norme du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ – avec $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{Q}_H \mathbf{h}_H(t, \omega)$ – à la norme de la contribution en raideur linéaire sur une période I_T . Pour le calcul du ratio $\|\mathbf{R}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{K}\mathbf{x}\|$, on utilise une discrétisation temporelle de la période I_T de manière à évaluer en chaque temps t_k les valeurs du résidu et de $\mathbf{K}\mathbf{x}$. $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{K}\mathbf{x}$ sont ainsi représentés par deux matrices de taille $N \times N_t$, avec N_t nombre de pas de temps dans I_T . La norme $\|\cdot\|$ du critère d'erreur est alors choisie comme norme matricielle subordonnée à la norme 2, ce qui permet de tenir compte de l'évolution des

Algorithme 1 : Algorithme global oPGD/HBM

```

Paramètres : Valeurs de  $m_{\max}$ ,  $k_{\max}$ ,  $\varepsilon_{\max}$  et  $r_{\text{ad}}$ ;
                Définition de  $c(\mathbf{q}_H, \omega)$  utilisée dans  $\mathcal{T}_m$ ;
                Modes lin. :  $\Phi = [\phi_{n_0}, \dots, \phi_n]$ .
Données : Valeurs initiales de  $m$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}_H$  et  $\omega$ .
1  $\varepsilon \leftarrow \|\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))\|/\|\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\|$ ;
2 tant que  $m \leq m_{\max}$  et  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\max}$  faire
3    $k \leftarrow 0$ ,  $\varepsilon_{\text{prev}} \leftarrow 2\varepsilon$ ;
4   tant que  $k \leq k_{\max}$  et  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\max}$  et  $\varepsilon \leq r_{\text{ad}}\varepsilon_{\text{prev}}$  faire      /* Boucle dir. alt. */
5      $k \leftarrow k + 1$ ,  $\varepsilon_{\text{prev}} \leftarrow \varepsilon$ ;
6      $\mathbf{Q}_H, \omega \leftarrow$  solutions de  $\mathcal{T}_m(\mathbf{Q}_H, \omega|\mathbf{P}) = \mathbf{0}$ ;
7      $\mathbf{P} \leftarrow$  solution de  $\mathcal{S}_m(\mathbf{P}|\mathbf{Q}_H, \omega) = \mathbf{0}$ ;
8     pour  $j \leftarrow 1$  à  $m$  faire                                          /* Normalisation mode PGD */
9        $\mathbf{p}_j \leftarrow \mathbf{p}_j/\|\mathbf{p}_j\|$ ;
10    fin
11     $\varepsilon \leftarrow \|\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))\|/\|\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\|$ ;
12  fin
13  si  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\max}$  alors                                          /* Initialisation avec mode lin. suivant */
14     $\mathbf{P} \leftarrow [\mathbf{P}, \phi_{n_0+m}]$ ,  $\mathbf{Q}_H \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H \\ \mathbf{0}_{1, H+1} \end{bmatrix}$ ;
15     $m \leftarrow m + 1$ ;
16  fin
17 fin
18 Retourner  $m$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}_H$ ,  $\omega$  et  $\varepsilon$ ;

```

ddls dans l'erreur. Le choix de diviser par $\|\mathbf{K}\mathbf{x}\|$ couplé à ce choix de norme permet notamment de pallier au fait que $\|\mathbf{R}(\mathbf{x})\|$ augmente "naturellement" lorsque les points du MNL présentent des amplitudes de plus en plus grandes. Basiquement, 1% d'erreur sur 1 m vaut 1000 fois plus que 1% d'erreur sur 1 mm.

À partir de ε , on peut introduire un critère de convergence dans la boucle à directions alternées (ligne 4). Ceci constitue une différence notable avec l'approche de Grolet et Thouverez dans [32], lesquels imposent uniquement un nombre k_{\max} d'itérations de boucle à réaliser sans vérification de la convergence "physique" du point retourné.

Dans l'Algorithme 1, la boucle se termine soit lorsque le nombre d'itérations k devient plus grand qu'un k_{\max} , soit lorsque l'erreur ε devient plus petite qu'une limite arbitraire ε_{\max} , soit lorsque l'itération courante ne réduit pas suffisamment l'erreur. Cette troisième condition s'écrit $\varepsilon > r_{\text{ad}}\varepsilon_{\text{prev}}$, avec $r_{\text{ad}} < 1$ un facteur positif arbitraire et $\varepsilon_{\text{prev}}$ l'erreur mesurée lors de l'itération précédente (ligne 5).

4.2.4.b Traitement de la non convergence

En cas de sortie de la boucle à directions alternées sans avoir convergé, l'ajout d'un nouveau mode PGD à la description est proposé (à partir de la ligne 13). La dimension réduite m est incrémentée, ce qui correspond à l'ajout d'une colonne dans \mathbf{P} et à l'ajout d'une ligne dans la matrice \mathbf{Q}_H .

Comme évoqué en Sec. 3.4, la méthodologie PGD seule ne donne pas de sens physique particulier aux modes PGD, notamment en ce qui concerne leur forme. Cependant, nous allons voir que le choix d'initialisation de \mathbf{P} et/ou de \mathbf{Q}_H influence grandement la qualité de la convergence de la méthode PGD/HBM, tout en faisant apparaître des formes de modes PGD interprétables du point de vue de l'ingénieur. Ceci est principalement dû à l'utilisation de solveurs de type Newton-Raphson pour résoudre les sous-problèmes, lesquels présentent des propriétés de convergence fortement influencées par le choix de leur point de départ. Ces différents constats mènent ainsi à deux questions : comment initialiser le solveur PGD/HBM, et qui de \mathcal{T}_m ou \mathcal{S}_m traiter en premier ?

Grolet et Thouverez [32] et Nouy [60] font le choix de commencer par le sous-problème spatial et initialisent \mathbf{Q}_H de manière aléatoire. Si l'on souhaite préserver la reproductibilité de la méthode et ainsi gagner en robustesse – *i.e.* supprimer ce caractère aléatoire – on se rend compte que trouver une initialisation pertinente pour la partie temporelle se révèle ardu. Partant de ce constat, la proposition d'algorithme présentée dans ce travail traite le sous-problème temporel en premier et se base sur des initialisations spatiales que l'on a déjà à disposition. Le choix fait est d'utiliser les formes ϕ_k des modes propres linéaires de vibration, solutions de l'Eq. (1.24).

Les formes ϕ_k présentent en effet deux avantages notables : elles sont facilement calculables et forment une base. Cette dernière propriété garantit une certaine indépendance entre les informations contenues par deux modes propres linéaires différents que l'on viendrait injecter en tant que forme initiale de mode PGD.

Finalement, dans l'Algorithme 1, si l'on cherche à calculer le n_0 -ième MNL, la nouvelle information spatiale injectée lorsqu'un nouveau mode PGD est ajouté est celle de ϕ_{n_0+m} , à amplitude nulle, ce qui se traduit par une ligne de coefficients de Fourier nuls dans \mathbf{Q}_H .

On notera que la comparaison de performances numériques entre le cas d'une boucle PGD avec \mathcal{S}_m traité en premier et initialisation aléatoire et le cas d'une boucle avec \mathcal{T}_m traité en premier et initialisation sur les modes propres sera illustrée en Partie 4.

4.2.4.c Normalisation du sous-problème spatial \mathcal{S}_m

Lors de l'ajout d'un nouveau mode PGD (lignes 13 et plus), il est possible qu'après application de \mathcal{T}_m le nouveau contenu harmonique soit très faible en norme. Le membre de gauche de l'Eq. (4.9) est alors numériquement proche de zéro. Pour pallier ce problème, le sous-problème spatial \mathcal{S}_m est divisé par la norme au carré de $q_{m+1}(t)$. Le carré est justifié par les expressions analytiques de \mathbf{I}_0 et \mathbf{I}_2 , exprimées en Annexe A.

Ne pas inclure cette modification dans l'implémentation du solveur PGD/HBM conduit

à des cas pathologiques pour lesquels le problème spatial ne corrige pas les formes des modes PGD, autrement dit converge sans faire d'itération de Newton, et ce à cause de la proximité du résidu avec le zéro numérique. Une implémentation robuste de ce solveur se doit donc de tenir compte de ce phénomène.

4.3 Sous-problèmes et algorithme global en pPGD

Comme expliqué en Sec. 3.4, le sous-problème le plus coûteux lorsque l'on considère l'approche oPGD est le sous-problème spatial \mathcal{S}_m , lequel nécessite de déterminer $N \times m$ inconnues. Ce constat motive l'introduction de la variante pPGD, basée sur les critères d'orthogonalités de l'Eq. (3.36) et de l'Eq. (3.37). On conservera le vocable de pPGD pour la méthode implémentée dans cette section bien qu'elle diffère légèrement de celles portant le même nom exposées par Grolet ou Nouy. Les objectifs retenus pour cette méthode pPGD sont de déterminer un sous-problème \mathcal{S}_m plus léger que dans le cas oPGD, et de s'affranchir du calcul de \mathcal{S}_m autant que possible.

Nous partirons une fois encore des travaux de Grolet et Trounev [32]. Leur écriture de la pPGD suppose une boucle à directions alternées dont les sous-problèmes traitent seulement le nouveau mode PGD ajouté, ainsi qu'une possible "actualisation" après k_{max} itérations de toutes les fonctions temporelles. Ceci revient à résoudre le problème temporel de l'oPGD en sortie de boucle. La proposition de processus pPGD/HBM exposée dans l'Algorithme 2 repose quant à elle sur les trois choix suivants :

- Le sous-problème \mathcal{S}_m n'est résolu que dans le cas où un nouveau mode PGD est ajouté à la description, *i.e.* lorsque la condition sur ε de la ligne 15 est respectée. De cette manière, la plupart des boucles à directions alternées ne traitent que le sous-problème temporel \mathcal{T}_m , à formes \mathbf{P} fixées. Dans le cas de la construction d'un MNL, ce choix sera consistant avec le fait que beaucoup de points voisins sont de contenus spatiaux similaires et ne nécessitent pas l'introduction de nouveaux modes PGD.
- Dans le cas où un sous-problème spatial est bel et bien résolu, il s'agit alors du problème réduit correspondant à l'Eq. (3.36) propre à la pPGD. On se trouve donc dans la situation où les formes des modes PGD contenues dans \mathbf{P} sont définitivement bloquées une fois calculées. Seul un mode PGD nouvellement introduit voit sa forme être mise à jour en fonction du système et de ses non linéarités (ligne 8). La complexité de \mathcal{S}_m est réduite à N , et la nouvelle équation matricielle à résoudre s'écrit :

$$\left(\int_{I_t} q_{m+1} \ddot{q}_{m+1} dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_{m+1} q_{m+1} dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_{m+1} + \int_{I_t} q_{m+1} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = - \sum_{j=1}^m \left(\int_{I_t} q_{m+1} \ddot{q}_j dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_{m+1} q_j dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_j, \quad (4.11)$$

avec le terme de droite entièrement connu. Il s'agit d'une sorte de cas particulier de l'Eq. (4.8), pour laquelle on aurait virtuellement posé $k = m + 1$. Ceci permet de remarquer que le nouveau \mathcal{S}_m peut se définir sous la forme compacte de l'Eq. (4.9), mais

avec des opérateurs qui seraient cette fois “extraits” de ceux de la oPGD et valant :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_0 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H (\mathbf{q}_H^{m+1})^T \text{ et } \mathbf{I}_2 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^2 (\mathbf{q}_H^{m+1})^T, \\ \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \int_{I_t} q_{m+1} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P} \mathbf{q}(t)) dt, \end{cases} \quad (4.12)$$

avec \mathbf{q}_H^{m+1} dernière ligne de \mathbf{Q}_H , remplie des coefficients de Fourier du $(m+1)$ -ième mode PGD. Une fois encore, quelques détails de calcul permettant d'obtenir ces expressions sont donnés en Annexe A.

- Le sous-problème \mathcal{T}_m de l'oPGD étant léger (taille $m(H+1)$ avec $m \ll N$), on le conserve dans l'approche pPGD. Ceci permet la mise à jour de toutes les évolutions des modes PGD directement dans la boucle à directions alternées. On note que l'on ne se sert pas du sous-problème temporel de la pPGD découlant de l'Eq. (3.37) dans ces travaux, mais le lecteur intéressé pourra retrouver son expression dans les travaux de Grolet et Thouverez [32].

Algorithme 2 : Algorithme global pPGD/HBM

Paramètres : Valeurs de m_{max} , k_{max} , ε_{max} et r_{ad} ;

Définition de $c(\mathbf{q}_H, \omega)$ utilisée dans \mathcal{T}_m ;

Modes lin. : $\Phi = [\phi_{n_0}, \dots, \phi_n]$.

Données : Valeurs initiales de m , \mathbf{P} , \mathbf{Q}_H et ω .

```

1  $\varepsilon \leftarrow \|\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))\| / \|\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\|$ ;
2 tant que  $m \leq m_{\text{max}}$  et  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{max}}$  faire
3    $k \leftarrow 0$ ,  $\varepsilon_{\text{prev}} \leftarrow 2\varepsilon$ ,  $\text{NewMode} \leftarrow 0$ ;
4   tant que  $k \leq k_{\text{max}}$  et  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{max}}$  et  $\varepsilon \leq r_{\text{ad}}\varepsilon_{\text{prev}}$  faire
5      $k \leftarrow k + 1$ ,  $\varepsilon_{\text{prev}} \leftarrow \varepsilon$ ;
6      $\mathbf{Q}_H, \omega \leftarrow$  solutions de  $\mathcal{T}_m(\mathbf{Q}_H, \omega | \mathbf{P}) = \mathbf{0}$ ; /* Sous-pb temporel oPGD */
7     si  $\text{NewMode} = 1$  alors /* Seulement si nouveau mode PGD */
8        $\mathbf{p}_m \leftarrow$  solution de  $\mathcal{S}_m(\mathbf{p}_m | \mathbf{P}, \mathbf{Q}_H, \omega) = \mathbf{0}$ ; /* Sous-pb spatial pPGD */
9        $\mathbf{p}_m \leftarrow \mathbf{p}_m / \|\mathbf{p}_m\|$ ;
10       $\mathbf{P} \leftarrow [\mathbf{P}, \mathbf{p}_m]$ ;
11    fin
12     $\varepsilon \leftarrow \|\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))\| / \|\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\|$ ;
13  fin
14   $\text{NewMode} \leftarrow 0$ ;
15  si  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{max}}$  alors
16     $\mathbf{p}_{m+1} \leftarrow \phi_{n_0+m} / \|\phi_{n_0+m}\|$ ,  $\mathbf{Q}_H \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H \\ \mathbf{0}_{1, H+1} \end{bmatrix}$ ;
17     $m \leftarrow m + 1$ ;
18     $\text{NewMode} \leftarrow 1$ ;
19  fin
20 fin
21 Retourner  $m$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}_H$ ,  $\omega$  et  $\varepsilon$ ;

```

Au final, la variante de l'algorithme de calcul de solution périodique par PGD/HBM utilisant la *progressive* PGD (pPGD) permet un gain calculatoire notable par rapport au cas oPGD.

Comme cela sera quantifié sur des exemples en Partie 4, le nombre total d'itérations de Newton nécessaires à l'obtention d'un point de MNL baisse drastiquement grâce à l'utilisation d'un sous-problème spatial \mathcal{S}_m plus léger et beaucoup moins souvent calculé. Cependant, une caractéristique fondamentale de cette variante est le fait de travailler à formes bloquées. L'information spatiale aura tendance à varier le long d'une branche donnée de MNL, et on imagine que bloquer les formes des modes PGD provoque une perte de flexibilité par rapport au cas oPGD. En effet, les modes PGD introduits dans la description seront plus nombreux en compensation de cela. Le peu de différences entre les implémentations numériques de la oPGD et de la pPGD permet de coder les deux à la fois sans trop d'efforts supplémentaires, ce qui laisse ensuite le choix à l'utilisateur quant à la variante qu'il jugera la plus pertinente d'utiliser en fonction de la physique non linéaire traitée.

En Partie 3 de ce manuscrit, il sera question de synthèse modale non linéaire et de réutilisation des MNLs dans ce cadre. La pPGD sera alors privilégiée pour le calcul des MNLs, car une représentation "fixe" des formes des modes PGD s'avère plus facilement exploitable et plus compacte en termes de stockage de variables.

Continuation de Mode Non Linéaire – Description réduite

Un solveur combinant *PGD* et approche *HBM* pour calculer une solution périodique du système libre non amorti a été exposé dans le chapitre précédent. Certaines spécificités de cette approche comme la possibilité de jouer sur la dimension réduite m ou sur les initialisations des sous-problèmes présentent un intérêt dans le cadre de la continuation de branches de *MNL*. Dans ce chapitre, un algorithme complet de continuation de *MNL* par approche réduite *PGD/HBM* est proposé et détaillé. La continuation à dimension variable permet de garder le nombre de variables utilisées pour décrire la branche le plus petit possible lorsque l'énergie mécanique augmente. Les caractéristiques du schéma de continuation seront explicitées et on reviendra sur certains points spécifiques à la méthode tels la gestion de la variabilité de la dimension dans l'implémentation numérique.

PLAN DU CHAPITRE 5

5.1	Principes et intérêts de la description de MNLs par PGD	81
5.2	Considérations géométriques pour la continuation	82
5.2.1	Représentation d'un point de MNL	82
5.2.2	Choix d'une distance	82
5.3	Processus de continuation de MNL par PGD/HBM	83
5.3.1	Algorithme général de continuation d'un MNL par enrichissement PGD	83
5.3.2	Prédiction et correction	84
5.3.3	Amorçage – Début de branche	85
5.3.4	Gestion du pas	86
5.3.5	Gestion de la dimension réduite variable m	86

5.1 Principes et intérêts de la description de MNLs par PGD

L'ajout d'un schéma de continuation au solveur PGD/HBM précédemment exposé est couplé à différentes idées que nous allons à présent évoquer, dans le cadre du tracé de MNLs. Un schéma de principe de la méthodologie développée dans ce chapitre est tracé en Fig. 5.1 (a). Tout d'abord, on se base sur le fait qu'à faible amplitude le n_0 -ème MNL présente des propriétés de tangence au n_0 -ème mode propre linéaire qui lui est sous-jacent [74, 75]. Ainsi, les premiers points du MNL à tracer sont cherchés sous une forme PGD unimodale ($m = 1$) et ce mode est initialisé à partir de la déformée du n_0 -ème mode linéaire.

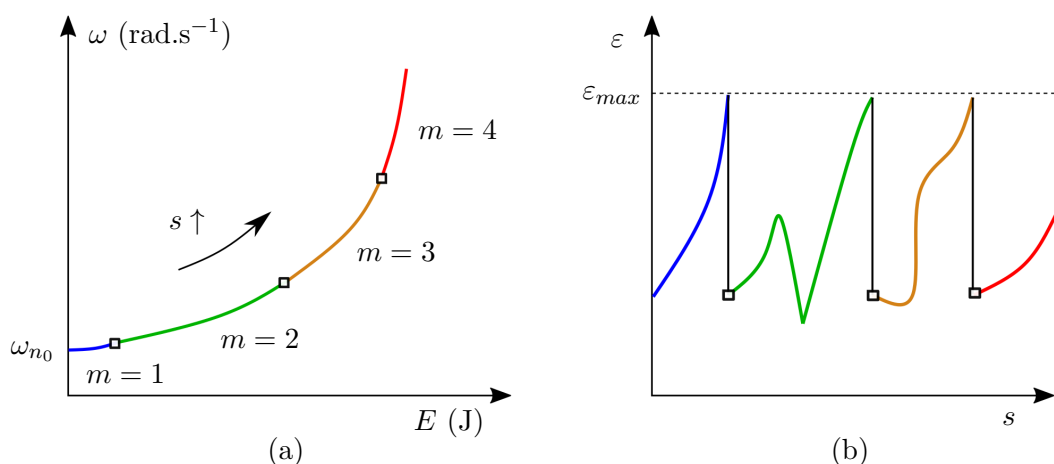


FIGURE 5.1 – Schéma de principe d'une continuation de MNL par approche PGD/HBM. Carrés : points solutions pour lesquels un mode PGD a été ajouté.

À mesure que l'énergie croît, les non linéarités du système dynamique s'expriment de plus en plus et de nouveaux modes PGD sont alors ajoutés à la description pour en tenir compte. L'algorithme de continuation proposé dans ce travail a ainsi pour originalité d'être à dimension variable. La taille m n'est augmentée que lorsque cela est nécessaire le long de la branche suivie. Elle est ainsi gardée la plus petite possible vis-à-vis du critère d'erreur choisi (cf. Fig. 5.1 (b)).

L'utilisation de la PGD permet une description compacte du MNL, que l'on peut comparer avec l'utilisation d'une HBM seule. Un point de MNL nécessite $N \times (H + 1) + 1$ inconnues à déterminer et à stocker lorsque l'on utilise l'équilibrage harmonique, alors qu'il n'en faut que $m \times (N + H + 1) + 1$ par PGD/HBM. À cela s'ajoute la variabilité de m le long de la continuation. Pour fixer les idées, considérons une branche de MNL décrite avec un maximum de $m = 4$ modes PGD, comme cela est le cas en Fig. 5.1. Si l'on suppose que $N = 1000$, $H = 30$ et que chaque tronçon à valeur de m constante contient 50 points, le nombre total d'inconnues traitées et stockées vaut $200 \times (1000 \times 31 + 1) = 6\,200\,200$ avec une simple continuation par HBM, et $50 \times (1 \times 1031 + 1) + 50 \times (2 \times 1031 + 1) + 50 \times (3 \times 1031 + 1) + 50 \times (4 \times 1031 + 1) = 515\,700$ par continuation PGD/HBM. Le gain r_{PGD} en nombre de variables est pour cet exemple d'environ 91,7%.

Cette légèreté de la description PGD se répercute aussi sur la complexité des sous-systèmes à traiter. La résolution de \mathcal{T}_m et \mathcal{S}_m se faisant par des solveurs de type Newton-Raphson, les inversions de matrices s'avèrent ainsi moins coûteuses. De plus, les points voisins d'une branche

de MNL ont la plupart du temps des natures très proches (hors points pathologiques), ce qui se traduira dans le schéma de continuation à venir par des initialisations de solveurs de bonne qualité et un nombre réduit d’itérations de Newton à effectuer.

D’autre part, si l’on considère la variante pPGD et son approche “à formes bloquées”, la vision “par tronçon” du MNL illustrée en Fig. 5.1(a) s’avère pratique d’une part pour une réutilisation du MNL en synthèse modale (cf. Partie 3), et d’autre part apporte de l’information spécifique à chaque tronçon sur l’expression des non linéarités dans le MNL.

Enfin, notons que l’emploi de la continuation de MNL par PGD/HBM n’est pertinente que lorsque $m \times (N + H + 1) < N \times (H + 1)$. À partir de cette inégalité, on déduit :

$$m < \frac{N}{N + H + 1}(H + 1) \Rightarrow m < H + 1. \quad (5.1)$$

Cette condition nécessaire montre que la méthode est adaptée aux problèmes présentant un grand nombre d’harmoniques.

Nous allons à présent construire et détailler l’algorithme de continuation réduite et retrouver les propriétés et résultats que nous venons d’évoquer.

5.2 Considérations géométriques pour la continuation

5.2.1 Représentation d’un point de MNL

Une solution périodique de l’Eq. (1.28) est un point de MNL qui, lorsqu’il est trouvé par le solveur PGD/HBM, est entièrement déterminé par la connaissance de \mathbf{P} , \mathbf{Q}_H et ω , comme évoqué en Sec. 4.2. Pour simplifier les notations, et à la manière d’un méta-modèle, on définit \mathbf{y}_n point du MNL, de dimension $Nm + (H + 1)m + 1$ tel que :

$$\mathbf{y}_n \equiv \{\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_{H_n}, \omega_n\}. \quad (5.2)$$

Parmi les points relatifs à la représentation de solutions de systèmes dynamiques évoqués en Sec. 1.4.1, on rappelle la contrainte graphique de projeter la dynamique de systèmes à grand nombre de ddls sur des espaces de dimension 2 ou 3. Ceci n’est pas nécessairement un problème, par exemple lorsque les non linéarités traitées sont localisées : il s’agira alors de choisir le ou les ddl(s) concerné(s) pour le tracé des graphes. Dans le cas général, on utilisera préférentiellement le FEP, pour *Frequency-Energy Plot* (cf. Fig 5.2), qui comme son nom l’indique représente la pulsation ω en fonction de l’énergie mécanique (conservative) du système E .

5.2.2 Choix d’une distance

Le processus de continuation requiert ensuite une notion de distance entre deux points \mathbf{y}_{n-1} et \mathbf{y}_n . On supposera pour l’instant que ces deux points sont décrits avec le même nombre de modes PGD, *i.e.* avec la même dimension réduite m . Plutôt que de prendre la norme euclidienne

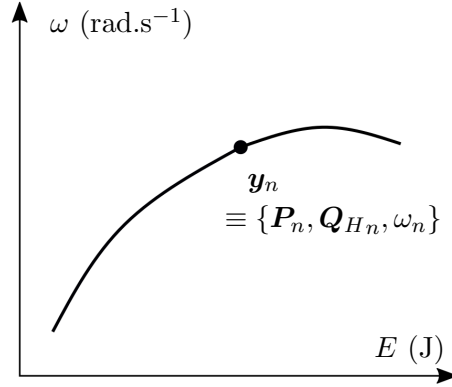


FIGURE 5.2 – Schéma de principe d'un FEP pour le tracé de branches de MNL

de la différence entre les grandeurs $\boldsymbol{x}(t)$ associées à ces points, le choix sera fait de définir une distance proposant des directions indépendantes pour \boldsymbol{P} , \boldsymbol{Q}_H et ω . Cette proposition fait notamment intervenir les coefficients de Fourier \boldsymbol{Q}_H plutôt qu'une discrétisation temporelle de la période. Ceci semble plus cohérent vis-à-vis de l'approche fréquentielle adoptée jusqu'ici.

La distance $d(\boldsymbol{y}_{n-1}, \boldsymbol{y}_n)$ entre deux points est ainsi définie par :

$$d(\boldsymbol{y}_{n-1}, \boldsymbol{y}_n) = \sqrt{\alpha_P^2 \|\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{n-1}\|^2 + \alpha_Q^2 \|\boldsymbol{Q}_{H_n} - \boldsymbol{Q}_{H_{n-1}}\|^2 + \alpha_\omega^2 |\omega_n - \omega_{n-1}|^2}, \quad (5.3)$$

avec α_P , α_Q et α_ω des constantes positives. Attribuer des poids séparés à chaque contribution à la distance permet un contrôle de l'influence relative que peuvent avoir les trois types de variables \boldsymbol{P} , \boldsymbol{Q}_H et ω .

En pratique, α_P , α_Q et α_ω sont fixés à 1 par défaut et l'utilisateur du code de continuation peut ajuster leurs valeurs suivant l'importance qu'il souhaite donner à chaque contribution. Ce réglage se fera souvent *a posteriori* d'une première continuation et viendra ajouter une certaine souplesse à la façon qu'a l'algorithme de tracer la branche de MNL. On doit ceci au fait que la distance d intervient explicitement lors des étapes de prédiction et de correction.

Enfin, la norme matricielle $\|\cdot\|$ de l'Eq. (5.3) est choisie arbitrairement. Dans les implémentations de ce travail, la norme matricielle subordonnée à la norme 2 est celle utilisée (choix par défaut sous MATLAB).

5.3 Processus de continuation de MNL par PGD/HBM

5.3.1 Algorithme général de continuation d'un MNL par enrichissement PGD

Une proposition d'algorithme complet de tracé de branches de MNL à partir d'un solveur PGD/HBM basé sur un enrichissement de la description au fil de la continuation est donnée dans l'Algorithme 3. Dans ce cadre, les solveurs PGD/HBM des Algorithmes 1 et 2 peuvent être vus comme des boîtes noires transformant un point prédit $\boldsymbol{y}_*^{\text{pred}}$ en le prochain de la branche \boldsymbol{y}_* (cf. ligne 9). Ce nouveau point est utilisé en tant que point d'initialisation de l'étape de correction,

laquelle est basée sur la spécification de l'équation contrainte $c(\mathbf{q}_H, \omega) = 0$ introduite dans l'Eq. (4.5) du sous-problème temporel. Les différentes étapes et spécificités de l'Algorithme 3 vont à présent être détaillées.

Algorithme 3 : Algorithme de continuation de MNL avec enrichissement PGD à la volée

Paramètres : Valeurs de Δm , $m_{\max \text{ tot}}$, r_ε , r_s^{mult} , r_s^{div} and Δs ;
 Valeurs de l'Algorithme 1 (ou l'Algorithme 2) :
 - k_{\max} , ε_{\max} et r_{ad} ;
 - Modes lin. : $\Phi = [\phi_{n_0}, \dots, \phi_n]$;
 - Équations contraintes : $c_2(\mathbf{q}_H, \omega)$ et $c_p(\mathbf{q}_H, \omega)$.

Données : Pulsation ω_{n_0} du n_0 -ème mode lin.

```

1  $\mathbf{y}_1 \leftarrow \{\phi_{n_0}, \mathbf{0}_{1,H+1}, \omega_{n_0}\};$  // Premier point
2  $c(\mathbf{q}_H, \omega) \leftarrow c_2(\mathbf{q}_H, \omega)$ ,  $m_{\max} \leftarrow m_{\max \text{ tot}};$  // Second point
3 Calculer  $\mathbf{y}_2$  avec l'Algorithme 1 (ou l'Algorithme 2), avec  $\mathbf{y}_1$  en valeur initiale;
4  $c(\mathbf{q}_H, \omega) \leftarrow c_p(\mathbf{q}_H, \omega);$  // Boucle de continuation
5  $p \leftarrow 2;$ 
6 tant que  $m \leq m_{\max \text{ tot}}$  faire
7    $m_{\max} \leftarrow m + \Delta m;$ 
8   Calculer  $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$  par prédiction sécante // Prédiction
   avec  $\mathbf{y}_p$ ,  $\mathbf{y}_{p-1}$  and  $\Delta s$ ;
9   Calculer  $\mathbf{y}_*$  avec l'Algorithme 1 (ou l'Algorithme 2) // Correction
   avec  $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$  en valeur initiale et  $m_{\max}$ ,  $k_{\max}$ ,  $\varepsilon_{\max}$  et  $r_{\text{ad}}$  en paramètres;
10  si  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$  alors
11     $\mathbf{y}_{p+1} \leftarrow \mathbf{y}_*;$ 
12     $p \leftarrow p + 1;$ 
13    si  $\varepsilon < r_\varepsilon \varepsilon_{\max}$  alors
14       $\Delta s \leftarrow r_s^{\text{mult}} \Delta s;$ 
15    fin
16  sinon
17     $\Delta s \leftarrow r_s^{\text{div}} \Delta s;$ 
18  fin
19 fin

```

5.3.2 Prédiction et correction

Bien que le schéma de continuation par prédiction-correction proposé dans ce travail permette le choix d'un prédicteur quelconque, le choix le plus simple d'une prédiction sécante est fait (cf. ligne 8). Comme défini dans l'Eq. (2.12), le point prédit $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$ est construit à partir des deux derniers points de MNL calculés \mathbf{y}_{n-1} et \mathbf{y}_n et de la distance d définie dans l'Eq. (5.3), ce qui s'écrit :

$$\mathbf{y}_*^{\text{pred}} = \mathbf{y}_n + \Delta s \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}}{d(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n)}, \quad (5.4)$$

avec Δs longueur d'arc entre le dernier point calculé et le point prédit.

L'étape de correction qui suit immédiatement (cf. ligne 9) consiste en l'application d'un solveur de type PGD/HBM (Algorithme 1 ou Algorithme 2) avec pour point de départ $\mathbf{y}_\star^{\text{pred}}$ et qui utilise une certaine équation contrainte $c(\mathbf{q}_H, \omega) = 0$ dans le sous-problème temporel \mathcal{T}_m . Cette équation est notée $c_p(\mathbf{q}_H, \omega)$ dans l'Algorithme 3 (cf. ligne 2) et correspond à la méthode de correction géométrique choisie parmi un panel possible, par exemple parmi celles décrites en Sec. 2.4.1. En pratique, on choisira parfois la correction par pseudo longueur d'arc pour sa simplicité (équation linéaire), et dans la grande majorité des cas la correction par longueur d'arc, qui s'écrit alors :

$$c_p(\mathbf{q}_{H\star}, \omega_\star) = d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_\star)^2 - \Delta s^2. \quad (5.5)$$

On rappelle que malgré son caractère quadratique et donc non linéaire, la correction par longueur d'arc permet un meilleur contrôle de la continuation qu'en pseudo-longueur d'arc. Elle impose en effet à la solution de se trouver sur une certaine hyper-sphère là où la correction par pseudo-longueur d'arc nous place sur une droite, sans préciser de distance. On note par ailleurs que l'Eq. (5.5) dépend de la matrice \mathbf{P}_\star contenant les dernières valeurs des formes des modes PGD calculées par \mathcal{S}_m avant de traiter le sous-problème \mathcal{T}_m courant.

5.3.3 Amorçage – Début de branche

Le choix d'une prédiction sécante nécessite le calcul préalable d'au moins 2 points de MNL, points qu'il va falloir renseigner en début d'algorithme pour amorcer le tracé de la branche de MNL. Ce compromis s'avère bon au sens qu'il s'agit là de la prédiction polynomiale la plus économe en points à calculer en amont (seulement 2) et que contrairement à la prédiction tangente aucun calcul de matrice jacobienne n'est à réaliser.

Le premier point \mathbf{y}_1 du MNL est trivialement connu (solution nulle), ce qui correspond aussi au mode propre linéaire sous-jacent ϕ_{n_0} pris à amplitude nulle. Dans le formalisme de la PGD/HBM, cela s'écrit en dimension $m = 1$:

$$\mathbf{y}_1 \equiv \{\phi_{n_0}, \mathbf{0}_{1,H+1}, \omega_{n_0}\}. \quad (5.6)$$

Le deuxième point \mathbf{y}_2 doit être un point permettant d'amorcer le tracé de la branche en s'éloignant de la solution nulle. Pour ce faire, on le calcule via un solveur PGD/HBM tout en imposant une condition d'amplitude sur un ddl à $t = 0$. Cette condition s'écrit $c_2(\mathbf{q}_H, \omega)$ dans l'Algorithme 3 et définit l'équation contrainte $c(\mathbf{q}_H, \omega)$ du solveur PGD/HBM choisi. Son expression s'écrit, pour le j -ème ddl, $u_j(t = 0) = u_{j0}$ avec $u_{j0} \neq 0$. Sachant que l'on a facilement accès à la j -ème ligne de \mathbf{P} dans l'implémentation numérique de l'algorithme sur MATLAB, et en notant cette dernière $\bar{\mathbf{p}}_j$, la condition d'amplitude peut s'exprimer :

$$c_2(\mathbf{q}_H, \omega) = (\mathbf{h}_H(0))^T \otimes \bar{\mathbf{p}}_j \mathbf{q}_H - u_{j0} = 0, \quad (5.7)$$

avec $\mathbf{h}_H(0)^T = [1/\sqrt{2} \ 1 \dots 1]$ pour une base de Fourier composée seulement de cosinus. Cette mise en forme permet d'ajouter le terme de l'Eq. (5.7) qui en facteur de \mathbf{q}_H dans la dernière ligne de la partie linéaire \mathbf{H}_1 de la HBM du sous-problème temporel (cf. Eq. 4.5), tandis que la valeur $-u_{j0}$ est ajoutée en dernière ligne du vecteur \mathbf{H}_{nl} .

L'amplitude du ddl choisi se veut très petite pour rester au plus proche du mode propre linéaire à ce stade de la continuation, ce qui permet généralement d'obtenir un point \mathbf{y}_2 qui est

lui aussi en dimension $m = 1$. De plus, \mathbf{y}_2 est calculé en prenant \mathbf{y}_1 en tant que point de départ, et la proximité alors imposée entre ces deux objets permet de converger en un nombre restreint d'itérations de Newton.

5.3.4 Gestion du pas

On trouve dans l'Algorithme 3, à partir de la ligne 10, des paramètres liés à la gestion du pas de continuation Δs , comme expliqué en Sec. 2.4.1.c. Le schéma d'adaptation du pas est ici relativement simple :

- Si le point ne respecte pas le critère d'erreur sur ε , alors Δs est diminué en étant multiplié par un facteur $r_s^{\text{div}} < 1$ (cf. ligne 17). Ceci mène à une nouvelle prédiction $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$ plus proche du dernier point calculé \mathbf{y}_n ,
- Sinon, si le point est convergé et respecte l'inéquation $\varepsilon < r_\varepsilon \varepsilon_{\text{max}}$, avec $r_\varepsilon < 1$, on multiplie Δs par $r_s^{\text{mult}} > 1$ (cf. lignes 13 et 14),
- Sinon, le point est convergé et on garde le même Δs pour la prédiction suivante.

En pratique, on vient souvent raffiner ce découpage par l'introduction d'une plage de valeurs de ε supplémentaire, proche de ε_{max} . On constate en effet qu'à l'approche de points pathologiques de type bifurcation, l'erreur augmente de manière significative jusqu'à approcher de la valeur limite tolérée. Suivant les circonstances, il peut paraître raisonnable de multiplier Δs soit par un facteur légèrement inférieur à 1, pour faire ralentir la continuation aux abords du point problématique, soit par un très grand facteur pour au contraire sauter la singularité.

Enfin, à la ligne 6, on voit par ailleurs que le critère d'arrêt retenu pour la continuation est basé sur un nombre limite $m_{\text{max tot}}$ de modes PGD. En pratique, on lui préférera généralement un critère basé sur la physique modélisée, par exemple l'appartenance à un intervalle de pulsations $[\omega_{\text{min}}; \omega_{\text{max}}]$ ou une énergie maximale E_{max} à ne pas dépasser.

5.3.5 Gestion de la dimension réduite variable m

Le schéma de prédiction-correction utilisé dans l'algorithme proposé pour construire le MNL est assez classique en soi. L'originalité réside en la possibilité d'augmenter la dimension réduite m du modèle lorsque l'on passe d'un point solution \mathbf{y}_n au point suivant \mathbf{y}_{n+1} . Cet incrément intervient à la ligne 7, où Δm modes PGD peuvent être ajoutés à la description de \mathbf{y}_{n+1} lors de l'étape de correction.

Cette différence de dimension entre deux points consécutifs nécessite l'introduction de règles supplémentaires lors de l'implémentation des équations de prédiction et de correction. Ces étapes font en effet intervenir la définition de la distance d , posée dans l'Eq. (5.3), et donc des sommes de matrice devant nécessairement avoir les mêmes dimensions.

Prédiction avec m incrémenté Lorsque les deux points précédemment calculés \mathbf{y}_{n-1} et \mathbf{y}_n n'ont pas la même dimension m , on choisit de réaliser la prédiction sécante $\mathbf{y}_\star^{\text{pred}}$ en complétant \mathbf{y}_{n-1} avec des composantes nulles. L'autre choix étant de tronquer \mathbf{y}_n , on préférera en effet ajouter des zéros : toute l'information calculée est ainsi prise en compte, conduisant à une prédiction de meilleure qualité.

Correction avec m incrémenté Lors de l'évaluation de $c_p(\mathbf{q}_H, \omega)$, le même problème se présente dans le cas où le point \mathbf{y}_\star est décrit avec plus de modes PGD que \mathbf{y}_n . L'utilisation d'une correction par longueur d'arc requiert en effet la distance entre ces deux quantités. Il apparaît plus judicieux d'évaluer la distance d dans un espace qui a la taille de \mathbf{y}_n et donc de tronquer \mathbf{y}_\star . On n'impose ainsi aucune condition géométrique sur la nouvelle composante introduite dans \mathbf{y}_\star .

Modes Non Linéaires amortis et extension méthodologique

Une méthode numérique de calcul de MNLs tels que définis par Rosenberg a été proposée. La proximité des pics de résonance de systèmes forcés avec les points de MNLs viendra motiver l'utilisation de ces derniers pour réaliser une synthèse modale permettant de calculer rapidement des FRFs (cf. Partie 3). Par ailleurs, les MNLs amortis sont des objets qui tiennent compte des effets dissipatifs des systèmes dynamiques, que ce soit via une contribution visqueuse ou dans l'expression même de l'effort non linéaire. L'utilisation de ces objets en synthèse modale plutôt que leurs homologues non amortis permettrait une meilleure prise en compte du décalage des pics de résonances induit par l'amortissement. Après avoir défini une extension à la HBM permettant le calcul de ces objets, un algorithme de continuation réduite de MNL amorti par PGD/HBM sera proposé, analogue au cas conservatif. Les spécificités du cas amorti seront mises en avant tout au long du chapitre.

PLAN DU CHAPITRE 6

6.1	Définition du MNL amorti retenue	91
6.1.1	Définition d'après Laxalde et Thouverez	91
6.1.2	Cas particulier avec dépendance fréquence-amortissement	92
6.2	Réécriture de la HBM pour solutions pseudo-périodiques	92
6.2.1	Processus de Galerkin associé	92
6.2.2	Traitement de la partie non linéaire \mathbf{H}_{nl}	93
6.2.3	Équations manquantes	94
6.3	Intégration dans un algorithme de continuation PGD/HBM	94
6.3.1	Modification du sous-problème \mathcal{I}_m	95
6.3.2	Modification du sous-problème \mathcal{S}_m	96
6.3.3	Nouvelles initialisations spatiales	97
6.3.4	Autres spécificités algorithmiques	97
6.3.5	Bilan et remarques diverses	98

6.1 Définition du MNL amorti retenue

Dans le présent manuscrit, un MNL amorti est une famille de solutions pseudo-périodiques de l'Eq. (1.30), rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Cette formulation, déjà définie en Sec. 1.5.1.c, s'appuie sur la définition de Shaw et Pierre [74, 75] des MNLs, laquelle peut être vue comme une généralisation aux systèmes non conservatifs de la définition des MNLs de Rosenberg. Pour être plus précis, les MNLs amortis calculés dans ce travail sont en fait des orbites qui appartiennent à la variété invariante de dimension 2 de l'espace des phases exposée par Shaw et Pierre. Ces trajectoires tendent vers l'état d'équilibre du fait des effets dissipatifs.

La méthode numérique qui va être présentée ne permet pas un tracé exhaustif de la variété, et se concentre sur des solutions particulières de l'Eq. (1.30) pour lesquelles sont multipliées contribution périodique et terme de décroissance exponentielle. Cette écriture "séparée" se base sur certains développements de la littérature [47, 43, 37] sur lesquels nous allons à présent revenir.

6.1.1 Définition d'après Laxalde et Thouverez

Dans [47], Laxalde et Thouverez proposent une extension de la définition de MNL selon Shaw et Pierre qui s'inspire également des modes linéaires complexes (cf. Sec. 1.5.1.b). Les auteurs proposent le terme de mode *complexe* non linéaire et délaissent ainsi l'adjectif *normal* pour signifier la perte de la notion de mouvement à l'unisson et donc de la présence possible de déphasages entre les ddls.

Comme pour le cas linéaire, la pulsation propre amortie du mode i est notée :

$$\lambda_i = -\beta_i + i\tilde{\omega}_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \\ \beta_i = \omega_i \xi_i \end{cases}, \quad (6.1)$$

avec ξ_i amortissement modal associé au mode linéaire i . Sont également définies deux échelles de temps adimensionnées : $\tau = \omega t$, correspondant à l'échelle de temps oscillatoire (variations rapides), et $\eta = \beta t$, correspondant à l'enveloppe de décroissance exponentielle due à l'amortissement (variations lentes). Les solutions de l'Eq. (1.30) sont cherchées sous la forme de séries de Fourier généralisées, définies par l'égalité :

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}(\tau, \eta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{x}}_{p,k} e^{-p\eta + ik\tau}. \quad (6.2)$$

Il faut alors associer à cette forme très générale un produit scalaire et une base de projection afin de mettre en place la méthode type Galerkin qui conduira à un système algébrique non linéaire analogue à celui d'une HBM classique. Le produit scalaire, à valeurs complexes, vaut :

$$\langle f, g \rangle_L = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{2\pi} f(\tau, \eta) \bar{g}(\tau, \eta) d\tau d\eta. \quad (6.3)$$

La base de projection, qui a la propriété notable d'être composée de fonctions pseudo-périodiques, est l'ensemble des fonctions $\phi_{p,k}$ telles que :

$$\begin{aligned} \phi_{p,k} : [0, 2\pi] \times [0, \infty] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\tau, \eta) &\mapsto e^{-p\eta + ik\tau}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Après calcul des dérivées de \mathbf{x} en fonction des variables adimensionnées τ et η , injection dans l'Eq. (1.30) et projections de Galerkin, le système algébrique non linéaire final s'écrit :

$$\forall (p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad [(-p\beta + ik\omega)^2 \mathbf{M} + (-p\beta + ik\omega) \mathbf{C} + \mathbf{K}] \hat{\mathbf{x}}_{p,k} + \frac{\langle \mathbf{f}_{nl}, \phi_{p,k} \rangle_L}{\|\phi_{p,k}\|^2} = \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

À cette étape, on tronque généralement sur p et k de sorte que $(p, k) \in [0, N_p] \times [-N_k, N_k]$, on écrit une formulation de l'AFT *ad hoc* pour estimer le terme $\langle \mathbf{f}_{nl}, \phi_{p,k} \rangle_L$, et on résout ce système par un solveur de type Newton-Raphson.

Notons deux inconvénients de cette forme généralisée de la HBM. Bien que la forme choisie pour $\mathbf{x}(t)$ permette, via deux échelles de temps indépendantes, de traiter une large gamme de systèmes non linéaires non conservatifs, le nombre d'inconnues à calculer est grand, notamment pour les systèmes qui requièrent un grand nombre d'harmoniques. Par ailleurs, l'AFT à réaliser fait intervenir une intégration jusqu'à l'infini, ce qui mène à des difficultés d'implémentation numérique.

6.1.2 Cas particulier avec dépendance fréquence-amortissement

Dans les travaux de Joannin et al. ou de Krack et al. [37, 43], les modes complexes non linéaires sont construits à partir d'un cas dégénéré de la formulation de Laxalde et Thouverez. Une dépendance fréquence-atténuation linéaire est introduite entre β et ω , ce qui se traduit par l'élimination de la somme sur p en prenant $p = |k|$.

$$\mathbf{x}(\tau, \eta) = \sum_{k=-N_k}^{N_k} \hat{\mathbf{x}}_k e^{-|k|\eta + ik\tau}. \quad (6.6)$$

Un problème semblable à celui de l'Eq. (6.5) peut être trouvé, cette fois de taille $N \times (2H + 1) + 2$ (ω et β inconnus). Le même produit scalaire et les fonctions de base $\phi_{|k|,k}$ correspondant à la dégénérescence appliquée sont utilisés pour obtenir ce système [47]. En gardant à l'esprit ces développements fondateurs, nous allons à présent développer une HBM généralisée présentant cette relation linéaire entre fréquence et amortissement et qui correspond au cadre utilisé par Joannin et al. dans leurs travaux.

6.2 Réécriture de la HBM pour solutions pseudo-périodiques

6.2.1 Processus de Galerkin associé

Pour mettre en relief les similitudes entre cette approche et la HBM classique détaillée en Sec. 3.2.2, les notations réelles seront adoptées. On cherche donc des solutions $\mathbf{x}(t)$ pseudo-

périodiques du système non linéaire libre et amorti de l'Eq. (1.30) sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H e^{-k\beta t} [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)]. \quad (6.7)$$

Cette démarche a été déjà réalisée par Joannin et al. en formulation complexe et les détails des calculs associés sont explicités en Annexe B. En quelques mots, la HBM complexe se base sur l'utilisation du produit scalaire hermitien :

$$\langle f|g \rangle_H = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.8)$$

lequel intègre les signaux sur la pseudo-période T . Les fonctions de base de projection sont cette fois les $\{e^{ik\omega t}\}_{1 \leq k \leq H}$, et la méthode ne fonctionne qu'à condition de faire l'hypothèse d'un amortissement faible de sorte qu'il est négligeable sur une pseudo-période. Cette hypothèse est physiquement vraisemblable du fait des variations lentes de l'enveloppe d'amortissement par rapport aux variations de la partie oscillatoire. Elle conduit à poser $e^{\lambda t} \approx e^{i\omega t}$, ce qui annule de nombreux termes dans les projections (cf. Annexe B) et facilite l'implémentation de l'AFT. Le prix à payer est l'introduction d'une erreur dans le processus de Galerkin, les sous-espaces considérés s'en retrouvant légèrement modifiés. Au final, en séparant parties réelle et imaginaire, on obtient pour chaque harmonique $k \neq 0$ le système suivant :

$$\begin{cases} [k^2(\beta^2 - \omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{a}_k + [-2k^2\beta\omega\mathbf{M} + k\omega\mathbf{C}]\mathbf{b}_k + \text{Re}(\langle \mathbf{f}_{nl}|e^{ik\omega t} \rangle_H) = \mathbf{0} \\ -[-2k^2\beta\omega\mathbf{M} + k\omega\mathbf{C}]\mathbf{a}_k + [k^2(\beta^2 - \omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{b}_k - \text{Im}(\langle \mathbf{f}_{nl}|e^{ik\omega t} \rangle_H) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Cette écriture est celle de la formulation classique de la HBM décrite en Sec. 3.2.2, à laquelle on vient ajouter des termes en β . La partie dynamique ($k \neq 0$) de l'opérateur linéaire $\mathbf{H}_1 = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_H)$ donnée dans l'Eq. (3.15) peut être réécrite à partir de l'Eq. (6.9), avec comme seule différence une nouvelle expression pour les $\mathbf{\Lambda}_k$:

$$\mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & (k\omega)\mathbf{C} \\ -(k\omega)\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k\beta)^2\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} & -2k^2\beta\omega\mathbf{M} \\ 2k^2\beta\omega\mathbf{M} & (k\beta)^2\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\text{terme supplémentaire en } \beta}. \quad (6.10)$$

Finalement, le système à résoudre pour le calcul d'un point de MNL amorti s'écrit :

$$\mathbf{H}_1(\omega, \beta) \mathbf{x}_H + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega, \beta) = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

On montre dans l'Annexe B que le terme non linéaire \mathbf{H}_{nl} peut s'écrire de manière identique au cas de la HBM classique, en dehors des quelques spécificités données ci-dessous.

6.2.2 Traitement de la partie non linéaire \mathbf{H}_{nl}

Cette réécriture de la HBM fait le choix simplificateur de considérer un amortissement faible pendant une pseudo-période. De cette hypothèse découle un corollaire quant au calcul de l'effort non linéaire \mathbf{f}_{nl} . Pour montrer cela, commençons par calculer la dérivée temporelle de \mathbf{x} :

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^H e^{-k\beta t} [(-k\beta\mathbf{a}_k + k\omega\mathbf{b}_k) \cos(k\omega t) + (-k\beta\mathbf{b}_k - k\omega\mathbf{a}_k) \sin(k\omega t)]. \quad (6.12)$$

Ceci permet d'exhiber, pour la partie périodique de cette écriture, une nouvelle matrice de dérivation $\mathbf{D}(\omega, \beta)$ "augmentée" par rapport à celle formulée en HBM classique :

$$\mathbf{D}(\omega, \beta) = \text{diag}(0, \begin{bmatrix} -\beta & \omega \\ -\omega & -\beta \end{bmatrix}, \dots, H \begin{bmatrix} -\beta & \omega \\ -\omega & -\beta \end{bmatrix}). \quad (6.13)$$

Pour rester consistant par rapport à l'hypothèse de pseudo-période à amortissement faible, on négligera pour l'AFT les termes exponentiels présents dans $\mathbf{x}(t)$ et $\dot{\mathbf{x}}(t)$ pour l'évaluation de $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. On conserve ainsi dans l'implémentation numérique l'écriture de l'Eq. (3.13), i.e. $\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{X}_H \mathbf{D}^n \mathbf{h}_H(t, \omega)$, mais en utilisant cette fois la nouvelle matrice de dérivation qui dépend de β . De fait, cette simplification évite le calcul des produits par $e^{-k\beta t}$ pour chaque pas de temps de la pseudo-période, lequel alourdirait considérablement l'évaluation du terme non linéaire. Certaines conséquences dues à cette hypothèse seront illustrées sur un exemple de système en Partie 4.

6.2.3 Équations manquantes

Le système algébrique non linéaire de l'Eq. (6.11) comporte un total de $N \times (2H + 1)$ équations pour $N \times (2H + 1) + 2$ inconnues. La pulsation de la partie périodique ω ainsi que le taux d'amortissement β doivent être déterminés pour un point de MNL amorti donné. Deux équations sont nécessaires pour lever cette indétermination. Comme dans le cas de la HBM classique utilisée jusqu'à maintenant, une première équation $c(\mathbf{q}_H, \omega, \beta)$ sera définie une fois ce solveur HBM injecté dans une boucle de continuation, et correspondra à la relation géométrique propre à la méthode correction retenue (longueur d'arc ou longueur d'arc en pratique).

Comme suggéré par Joannin et al. [37], on choisit pour deuxième équation une condition de phase simple : la vitesse initiale d'un ddl choisi arbitrairement est fixée à zéro. Si on suppose que cette condition est appliquée au j -ème ddl, on peut l'écrire à partir de l'Eq. (6.12) :

$$\dot{x}_j(t = 0) = \sum_{k=1}^H k[-\beta(\mathbf{a}_k)_j + \omega(\mathbf{a}_k)_j] = 0. \quad (6.14)$$

Dans l'implémentation numérique de ce solveur, en utilisant la j -ème ligne de \mathbf{P} notée $\bar{\mathbf{p}}_j$, on pourra écrire simplement cette condition de la manière suivante :

$$([1, \dots, H] \otimes [-\beta, \omega])(\bar{\mathbf{p}}_j \mathbf{X}_H)^T = 0. \quad (6.15)$$

6.3 Intégration dans un algorithme de continuation PGD/HBM

On a donc établi les bases d'un solveur HBM pour trouver des points de MNL amortis partant de la formulation développée par Laxalde et Thouverez et du cas particulier traité par Joannin et Krack.

Ce solveur présente de nombreuses similitudes avec le solveur HBM classique dans son formalisme, et la taille $N \times (2H + 1) + 2$ du système algébrique non linéaire à traiter est là aussi très coûteuse pour les systèmes nécessitant de nombreux ddls et/ou harmoniques dans leur

description. Une réduction de modèle de type PGD va permettre d'obtenir ici aussi un solveur de type PGD/HBM, lequel sera inclus dans un schéma de continuation identique à celui développé dans le Chap 5.

Calculer un MNL amorti tel que défini dans ce chapitre permet d'apporter de l'information modale non linéaire sur les effets dissipatifs, ce qui n'était pas le cas avec les MNLs conservatifs. L'amortissement a une influence sur la partie périodique du signal, et une nouvelle variable β évoluant le long de la branche est introduite (cf. Fig. 6.1). Sur les figures, on utilisera préférentiellement la grandeur adimensionnée $\xi = \beta/\omega$, plus simple à interpréter physiquement.

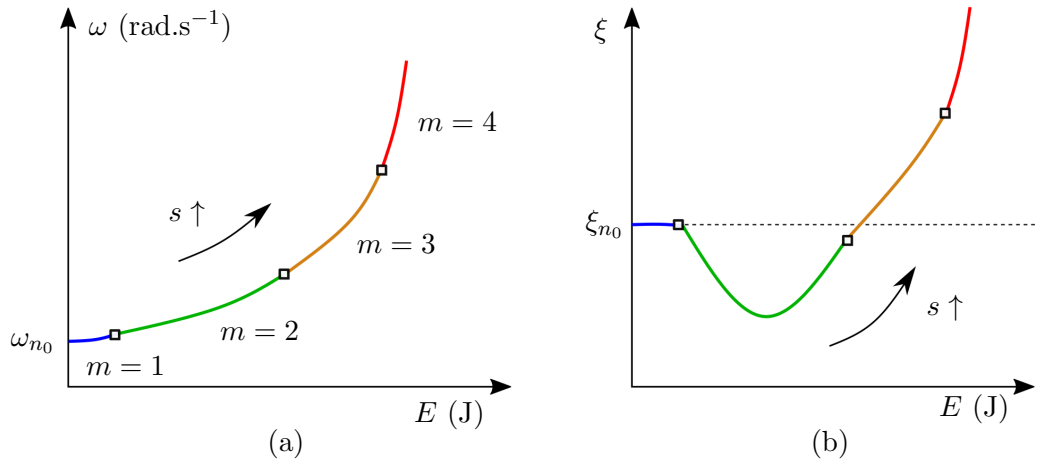


FIGURE 6.1 – Schéma de principe d'une continuation de MNL amorti par approche PGD/HBM. Carrés : points solutions pour lesquels un mode PGD a été ajouté.

Un point de MNL amorti \mathbf{y}_n , de taille $Nm + (2H + 1)m + 2$, est défini par l'ensemble suivant :

$$\mathbf{y}_n \equiv \{\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_{H_n}, \omega_n, \beta_n\}. \quad (6.16)$$

En gardant à l'esprit l'Algorithme 3 de continuation de MNL non amorti par PGD/HBM, nous allons à présent énumérer les points qui diffèrent du cas des MNLs non amortis traité dans le Chap. 4 et le Chap. 5.

6.3.1 Modification du sous-problème \mathcal{T}_m

Le solveur HBM adapté aux MNLs amortis est incorporé dans le sous-problème temporel \mathcal{T}_m d'un solveur PGD/HBM. Après séparation des variables en début de PGD et application des projections de Galerkin tel que décrit en Sec. 4.2.2, on obtient le système différentiel réduit suivant :

$$\forall t \in I_t \quad \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl,r}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t), \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

avec $\mathbf{C}_r = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathbf{f}_{nl,r}$ effort non linéaire pouvant cette fois présenter des composantes dissipatives. On cherche alors la partie temporelle $\mathbf{q}(t)$ sous la forme pseudo-périodique

correspondant à l'Eq. (6.7) :

$$\mathbf{q}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H e^{-k\beta t} [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)]. \quad (6.18)$$

Après application de la démarche décrite en section précédente, on obtient un système algébrique non linéaire de taille $m \times (2H + 1) + 2$ dépendant de β , dont les matrices et les deux équations à rajouter ont été données dans la section précédentes.

6.3.2 Modification du sous-problème \mathcal{S}_m

Pour rester cohérent avec l'hypothèse d'amortissement négligeable sur une pseudo-période faite dans le développement de la HBM dite complexe, des changements dans le sous-problème spatial sont également faits.

- Un terme correspondant à l'introduction de $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}$ est ajouté dans la formulation du sous-problème \mathcal{S}_m . En suivant la même démarche calculatoire que dans l'Annexe A, on montre simplement qu'un terme $\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{C}$ vient s'ajouter à l'opérateur \mathbf{S}_1 , qui devient :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{C} + \mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{K}. \quad (6.19)$$

- Les expressions des opérateurs \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 et du terme correspondant à la partie non linéaire $\mathbf{S}_{nl}(\tilde{\mathbf{p}})$ sont calculées en tenant compte de l'hypothèse d'amortissement négligeable sur une pseudo-période. On peut montrer que les expressions sont les mêmes que dans le cas non amorti, en dehors de la matrice \mathbf{D} qui présente une dépendance en β . Montrons le pour les opérateurs \mathbf{I}_l . On peut écrire en se basant sur l'Annexe A :

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{Q}_H \mathbf{M}_H \mathbf{D}^l(\omega, \beta) \mathbf{Q}_H^T, \quad (6.20)$$

avec les coefficients de la matrice $\mathbf{M}_H \in \mathcal{M}_{2H+1}(\mathbb{R})$ valant :

$$(\mathbf{M}_H)_{p,q} = \begin{cases} \text{soit } \int_0^T e^{-p\beta t} \cos(p\omega t) e^{-q\beta t} \sin(q\omega t) dt \\ \text{soit } \int_0^T e^{-p\beta t} \cos(p\omega t) e^{-q\beta t} \cos(q\omega t) dt \\ \text{soit } \int_0^T e^{-p\beta t} \sin(p\omega t) e^{-q\beta t} \sin(q\omega t) dt. \end{cases} \quad (6.21)$$

Avec l'hypothèse $e^{\lambda t} \approx e^{i\omega t}$, les termes exponentiels sont négligés dans les intégrales et on obtient comme en HBM classique l'égalité $\mathbf{M}_H = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{I}$. Au final, on prend à nouveau :

$$\mathbf{I}_l(\omega, \beta) = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^l(\omega, \beta) \mathbf{Q}_H^T, \quad (6.22)$$

mais avec une matrice de dérivation $\mathbf{D}(\omega, \beta)$ qui dépend de l'amortissement. Le même calcul est fait pour le terme non linéaire $\mathbf{S}_{nl}(\tilde{\mathbf{p}})$, avec la même conclusion.

- Comme pour le sous-problème temporel \mathcal{T}_m , les expressions de $\mathbf{x}(t)$ et $\dot{\mathbf{x}}(t)$ nécessaires pour évaluer $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ sont calculées en utilisant la matrice de dérivation $\mathbf{D}(\omega, \beta)$ mais en négligeant les termes exponentiels $e^{-k\beta t}$.

6.3.3 Nouvelles initialisations spatiales

Par analogie avec le cas des MNLs conservatifs, le sous-problème temporel \mathcal{T}_m est traité en premier dans la boucle à directions alternées et se base sur des initialisations spatiales obtenues à partir d'objets à notre disposition. Ainsi, lorsqu'un mode PGD est ajouté à la description du n_0 -eme MNL amorti, l'information spatiale utilisée est liée à la forme du mode linéaire amorti ψ_{n_0+m} , à amplitude nulle. Supposons avoir résolu le problème aux valeurs propres augmenté de l'Eq. (1.27) et avoir isolé les modes linéaires amortis de leur conjugués. On note χ_i la première moitié des ddls de ψ_i (suppression des vitesses issues de la formulation augmentée). Les χ_i contiennent les formes à injecter. On exploite le fait que les modes linéaires amortis forment une base et sont faciles à calculer à partir du problème aux valeurs propres de l'Eq. (1.27).

Par ailleurs, le schéma de continuation de l'Algorithme 3 requiert les deux premiers points du MNL amorti pour être amorcé. Dans le formalisme PGD/HBM, le premier point du MNL amorti \mathbf{y}_1 s'écrit en dimension $m = 1$:

$$\mathbf{y}_1 \equiv \{\text{Re}(\chi_{n_0}), \mathbf{0}_{1,2H+1}, \omega_{n_0}, \beta_{n_0}\}. \quad (6.23)$$

Ceci sera bien adapté à des problèmes à faible amortissement, pour lesquels $\text{Re}(\chi_{n_0})$ et $\text{Im}(\chi_{n_0})$ sont quasiment proportionnels et une seule forme suffit à l'algorithme. Dans le Chap. 9, un exemple de frotteur pour lequel $\text{Im}(\chi_{n_0})$ est injecté dans la description de \mathbf{y}_1 sera présenté.

Le deuxième point \mathbf{y}_2 , initialisé à partir de \mathbf{y}_1 , est calculé à partir de la condition $c_2(\mathbf{q}_H, \omega)$ telle que définie dans le cas des MNLs conservatifs.

6.3.4 Autres spécificités algorithmiques

Critère d'erreur Le critère d'erreur $\varepsilon < \|\mathbf{R}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{K}\mathbf{x}\|$ est conservé. Les expressions de \mathbf{x} et de ses dérivées temporelles en écriture matricielle sont :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{P}\mathbf{Q}_H\mathbf{D}^n\mathbf{h}_H^\beta(t, \omega, \beta), \\ \mathbf{h}_H^\beta = [1/\sqrt{2}, e^{-\beta t} \cos(\omega t), e^{-\beta t} \sin(\omega t), \dots]^T, \end{cases} \quad (6.24)$$

et sont injectées dans l'équation du mouvement pour évaluer le résidu numérique. On rappelle que ce choix de critère d'erreur physique permet de s'assurer que le point retenu par l'algorithme de continuation par PGD/HBM est bien solution du système d'origine. Ceci est particulièrement important dans le cas du tracé de MNLs amortis, car cela assure que l'erreur introduite dans les sous-problèmes à cause de l'hypothèse des amortissements négligeables sur une pseudo-période présente bien une influence moindre sur les résultats.

Distance modifiée A l'instar de l'algorithme de continuation PGD/HBM pour MNL non amorti, la distance utilisée pour les étapes de prédiction et de correction fait toujours intervenir des directions séparées pour les contributions \mathbf{P} , \mathbf{Q}_H et ω et des pondérations associées α_P , α_Q et α_ω . Une nouvelle direction pour β est ajoutée, ainsi qu'un poids α_β lui correspondant. La distance entre deux points s'exprime donc par la relation :

$$d(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) = \sqrt{\alpha_P^2 \|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}\|^2 + \alpha_Q^2 \|\mathbf{Q}_{Hn} - \mathbf{Q}_{Hn-1}\|^2 + \alpha_\omega^2 |\omega_n - \omega_{n-1}|^2 + \alpha_\beta^2 |\beta_n - \beta_{n-1}|^2}. \quad (6.25)$$

Le choix de créer une direction de continuation propre à β diffère de l'approche faite par Joannin et al. [37]. La correction par longueur d'arc utilisée dans leurs travaux fait intervenir $\|\lambda_n - \lambda_{n-1}\|$, avec $\lambda = -\beta + i\omega$ et $\|\cdot\|$ norme canonique de \mathbb{C} , ce qui lie de fait β et ω dans ces considérations géométriques. Le taux d'amortissement β peut cependant varier très différemment de ω , et il a été constaté un meilleur comportement du schéma de continuation en séparant les directions de β et ω .

6.3.5 Bilan et remarques diverses

Dans ce chapitre, une proposition d'algorithme de continuation réduite par PGD/HBM de MNL amorti a été détaillée. Basée sur un schéma algorithmique analogue à celui développé pour le tracé de MNL amortis, elle diffère cependant de manière notable par l'utilisation d'une version de la HBM adaptée au calcul de solutions pseudo-périodiques.

Le peu de différences entre l'implémentation numérique de la version pour MNL conservatif et l'implémentation de la version pour MNL amorti permet de disposer pour un coût de codage moindre de plusieurs outils modaux non linéaires, et ce en oPGD comme en pPGD.

On notera certaines limites fondamentales liées à la nature des MNLs amortis : les systèmes non linéaires étudiés ne doivent pas présenter de trop forts amortissements, et la description de l'amortissement via un unique coefficient β peut s'avérer assez simpliste d'un point de vue physique.

Par ailleurs, la validation des résultats obtenus par cette méthode n'est pas aussi évidente que dans le cas des solutions périodiques. Comparer avec des résultats obtenus par HBM non réduite ou avec la MAN était possible pour les MNLs à la façon de Rosenberg, mais dans le cas amorti on doit se tourner vers des intégrations temporelles généralement faites via un schéma de type Newmark.

Enfin, la possibilité d'obtenir rapidement les MNLs amortis ou non de systèmes non linéaires en grande dimension va permettre dans la Partie 3 une réutilisation de ces objets pour faire de la synthèse modale non linéaire, et l'influence du choix des MNLs utilisés suivant qu'ils sont conservatifs ou amortis pourra être constatée.

Partie 3 : Synthèse modale non linéaire construite à partir des Modes Non Linéaires

Travaux antérieurs et choix d'un modèle à phase unique

Dans ce court chapitre, nous reviendrons sur les principaux modèles de synthèse modale non linéaire faits à partir de MNLs qui ont servis de point de départ aux développements proposés dans le Chap. 8. On y retrouvera les travaux de Laxalde, Krack, Joannin et al. d'ores et déjà évoqués dans le Chap. 6. L'accent sera mis sur les hypothèses des modèles de synthèse, sur les formes de solutions retenues pour ces systèmes forcés ainsi que leurs propriétés. Le choix final retenu pour cette étude sera enfin donné au vu de ces éléments de la littérature.

PLAN DU CHAPITRE 7

7.1	Introduction	103
7.2	Prérequis à la synthèse à partir de MNLs	104
7.2.1	Amplitude modale	104
7.2.2	Méthode du mode non linéaire résonant unique	105
7.3	Quelques formes pour la synthèse	106
7.3.1	Travaux de Laxalde et Thouverez	106
7.3.2	Travaux de Krack, Peter et al.	106
7.3.3	Travaux de Joannin et al.	107
7.4	Synthèse à phase unique retenue	107
7.4.1	Considérations sur la phase ϕ	108

7.1 Introduction

Définissons tout d'abord la synthèse modale comme la combinaison d'objets issus de modèles dynamiques (*e.g.* les modes linéaires ou les MNLs) utilisée dans le but de décrire simplement le comportement vibratoire d'un système. On peut lister de manière non exhaustive les objectifs que l'on cherche à atteindre en utilisant cette méthode de réduction de modèle pour construire des réponses forcées. Il s'agira notamment :

- d'utiliser un nombre d'objets le plus petit possible pour en faire une méthode de réduction de modèle la plus compacte possible,
- d'obtenir un tracé rapide de la fonction de réponse en fréquence (FRF) d'un système soumis à un effort extérieur donné, en particulier pour les systèmes comportant beaucoup de ddls et beaucoup d'harmoniques,
- de réaliser tout cela avec des objets permettant une interprétation physique la plus simple possible des résultats. L'utilisation de MNLs doit permettre de bien rendre compte de la dynamique non linéaire, en particulier autour des résonances principales. On notera que l'obtention préalable des MNLs sera faite numériquement via les méthodes exposées en Partie 2, mais qu'il est aussi possible de les obtenir expérimentalement via des méthodes d'identification telles que [62].

La synthèse construite à partir de la base modale linéaire est sans doute la plus triviale et la plus utilisée de ces méthodes. Elle a déjà été détaillée dans la Sec. 3.3.2.a avec ou sans correction de type condensation statique. Elle ne rend toutefois pas compte de l'expression des non linéarités dans la dynamique lorsque l'énergie mécanique croît.

Système forcé On rappelle que le système d'équations dynamiques traité est représenté par l'Eq. (1.3), correspondant à un problème non linéaire amorti avec forçage mono-harmonique. On en redonne l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e(t).$$

L'hypothèse de forçage mono-harmonique qui permet la construction des FRFs pose la question de la prise en compte de la nature multi-harmonique de la solution $\mathbf{x}(t)$. Suivant le modèle de synthèse retenu, les harmoniques de la pulsation d'excitation ω_e seront prises en compte de manières différentes.

L'ensemble des travaux évoqués dans ce chapitre se basent sur une description multi-harmonique des MNLs. Ceci les rend compatibles avec la forme obtenue dans le Chap. 5 et le Chap. 6, via l'utilisation d'une continuation PGD/HBM.

Avant de discuter quelques exemples de synthèse modale non linéaire réalisée à partir des MNLs, il convient d'exposer quelques éléments contextuels importants.

7.2 Prérequis à la synthèse à partir de MNLs

Dans cette section, on cherche à calculer la j -ème résonance principale d'un système non linéaire en régime forcé mono-harmonique. On notera Ψ la forme (complexe) associée au j -ème MNL et ψ_k le vecteur correspondant à la k -ème harmonique de ce MNL. Enfin, on rappelle que $\{\phi_k\}$ est la base des modes linéaires, que l'on peut tronquer (ou non) à l'ordre $p_{max} \leq N$.

7.2.1 Amplitude modale

Quelle que soit la méthode d'obtention du MNL, ce dernier présente intrinsèquement une dépendance fréquence-amplitude qui a pour corollaire une évolution des déformées modales le long de la branche de solutions. Pour rester général, on peut ainsi introduire un index i traduisant cette variabilité de forme, de sorte que l'on note $\Psi(i)$ le MNL.

On peut voir un lien entre i et le concept d'amplitude modale associée au MNL. Dans le cas linéaire, on rappelle l'écriture du j -ème mode linéaire faisant intervenir l'amplitude modale q :

$$\mathbf{x}_j(t) = q \phi_j \cos(\omega_j t). \quad (7.1)$$

Dans le cas du j -ème MNL, on peut vouloir exprimer la dépendance forme-amplitude de la manière suivante, laquelle exprime Ψ en fonction de l'amplitude modale q :

$$\mathbf{x}_j(t) = q \Psi(q) \cos(\omega_j(q)t). \quad (7.2)$$

Cette écriture est moins générale qu'utiliser $\Psi(i)$ au sens où elle impose une dépendance linéaire entre l'amplitude modale q et la forme du MNL, ce qui peut mener à des difficultés numériques lorsqu'un MNL est injecté sous cette forme dans les synthèses présentées en Chap 8. Par ailleurs, une écriture en $q \Psi(q)$ nécessite généralement l'introduction de conditions de normalisation du MNL [43, 62, 47], que nous n'utiliserons pas dans la suite dans ces travaux.

Par soucis de clarté, on conservera par la suite l'appellation d'amplitude modale même lorsqu'il sera question de l'index i .

Choix d'une amplitude modale Plusieurs choix d'amplitudes modales sont proposés dans la littérature. Un premier choix peut être l'énergie mécanique du système E , voire son énergie cinétique E_c . Ces grandeurs présentent l'avantage d'être globales par rapport au système traité, mais ne constituent pas une grandeur monotone le long d'une branche de MNL. On verra en Partie 4 un exemple présentant une boucle d'interactions modales, pour lequel certaines valeurs de l'énergie peuvent être associées à plusieurs états vibratoires différents.

Une autre approche est de suivre le MNL relativement à des grandeurs de contrôle liées aux ddls. La solution retenue par Laxalde et al. [47] est par exemple d'introduire une grandeur complexe de contrôle q , telle que :

$$q = q_r + iq_i. \quad (7.3)$$

Chaque harmonique du MNL est alors pondérée par cette grandeur, de sorte qu'on obtient :

$$\psi_k(q) = \text{Re}(\psi_k)q_r + i \text{Im}(\psi_k)q_i. \quad (7.4)$$

On choisit généralement un ddl non linéaire physiquement simple à interpréter, mais cela peut s'avérer ardu selon le système traité. Dans le cas de problèmes de contact par exemple, certains ddls peuvent se retrouver bloqués localement dans la branche de MNL.

Finalement, le choix retenu pour indexer les formes des MNLs injectées en synthèse est l'utilisation de l'abscisse curviligne s obtenue lors du processus de continuation par PGD/HBM. En effet, on peut toujours obtenir facilement le Δs entre deux points du MNL (cf. Algorithme 3), de sorte que pour le n -ème point du MNL, on a :

$$s_n = \sum_{k=1}^n (\Delta s)_k. \quad (7.5)$$

La quantité s a pour avantages d'être monotone le long de la branche et de ne pas nécessiter un choix de ddl à suivre. On écrira donc par la suite $\Psi(s)$ pour désigner la forme du MNL à une (unique) abscisse curviligne donnée.

Branche discrète de MNL et amplitude modale Les branches de MNL injectées en synthèse étant généralement obtenues point par point, une interpolation des grandeurs relativement à l'amplitude modale choisie s'avère nécessaire. Cette étape présente deux inconvénients notables. D'abord, elle peut s'avérer coûteuse lorsque la taille des objets à interpoler est grande. Ce problème sera évité grâce à l'utilisation d'objets compacts obtenus par PGD/HBM. Ensuite, la qualité de l'interpolation dépendra fortement de l'ordre de grandeur de la distance entre les points de MNL calculés : un "maillage" du MNL peu serré sera léger à stocker mais l'interpolation ignorera d'éventuelles singularités situées entre les deux points réellement calculés.

7.2.2 Méthode du mode non linéaire résonant unique

La synthèse modale à partir de MNLs est réalisée pour un système à forçage mono-harmonique et se place dans le cadre de la méthode du mode non linéaire résonant unique proposée par Szempliska-Stupnicka dans les années 1970 [78, 72, 30]. Cette approche néglige les interactions modales, les résonances internes, et part ainsi du constat qu'autour de la résonance principale non linéaire, l'énergie est essentiellement concentrée dans le mode non linéaire correspondant. Ce mode est ainsi le seul traité de manière non linéaire tandis que les (faibles) contributions des autres modes seront prises comme linéaires et découplées du MNL. Cette méthode vise à réintroduire les avantages du principe de superposition applicable en théorie linéaire. Au final, la forme de solution cherchée par synthèse modale pour le système forcé autour de la j -ème résonance principale est la suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{MNL}j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p_{\text{max}}} \mathbf{x}_{\text{lin},k}. \quad (7.6)$$

avec $\mathbf{x}_{\text{MNL}j}$ participation liée au j -ème MNL et $\mathbf{x}_{\text{lin},k}$ participation du k -ème mode linéaire. Le MNL est alors qualifié de MNL dominant. Par construction, les contributions $\mathbf{x}_{\text{lin},k}$ sont directement obtenues à partir de la théorie linéaire, et valent :

$$\mathbf{x}_{\text{lin},k} = \text{Re} \left(\frac{\phi_k \phi_k^T}{\omega_k^2 - \omega_e^2 + 2i\omega_e \omega_k \xi_k} \mathbf{f}_e \right) \text{ avec } \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{e0} e^{i\omega_e t}. \quad (7.7)$$

Dans les travaux discutés dans la prochaine section, certains auteurs choisissent ou non de rajouter le terme correctif linéaire sommant les $\mathbf{x}_{\text{lin},k}$. Le traitement du terme $\mathbf{x}_{\text{MNL}j}$ est également spécifique à chaque développement.

7.3 Quelques formes pour la synthèse

On se focalise ici sur le terme précédemment défini par $\mathbf{x}_{\text{MNL}j}$. L'accent est mis sur la prise en compte des harmoniques dans la réponse forcée et sur la définition retenue pour le déphasage de cette réponse par rapport à l'effort extérieur.

7.3.1 Travaux de Laxalde et Thouverez

Dans ce travail [47], on rappelle que le MNL est cherché sous la forme :

$$\Psi = \sum_{k=-N_k}^{N_k} \psi_k e^{-|k|\beta t + ik\omega t}. \quad (7.8)$$

Les auteurs calculent ensuite la réponse forcée autour de la résonance à partir du MNL complexe amorti en supposant une forme de solution :

$$\mathbf{x}_{\text{MNL}j} = \text{Re}(q \Psi(q) e^{i\omega_e t}), \quad (7.9)$$

avec ω_e pulsation du forçage et $\Psi(q)$ la forme du MNL réduit à son premier harmonique $\psi_{\pm 1}$ indexée sur une amplitude modale q . Le caractère multi-harmonique de la réponse forcée n'est contenu que dans le fait que $\Psi(q)$ ait été au départ calculé à l'aide de plusieurs harmoniques. Il en est de même pour le déphasage de la réponse par rapport au forçage, présent dans la formulation complexe de q , les déphasages inter-ddls étant contenus dans la formulation complexe de Ψ . Ce déphasage pourrait s'écrire sous une forme $e^{i\phi}$ où $\phi = \angle(q)$.

7.3.2 Travaux de Krack, Peter et al.

Dans les articles [43, 62], la synthèse est réalisée à partir des modes linéaires et des MNLs extraits expérimentalement. Le calcul des MNLs amortis fait directement référence aux travaux de Laxalde et Thouverez et est également réalisé par HBM complexe. La forme de solution cherchée par synthèse modale est la suivante :

$$\mathbf{x}_{\text{MNL}j} = \text{Re}\left(q \sum_{k=0}^H \psi_k(|q|) e^{ik\omega_e t}\right), \quad (7.10)$$

avec q amplitude modale. Cette formulation, contrairement à la proposition précédente, traite les harmoniques d'ordres supérieurs du MNL via la sommation sur k et son terme $e^{ik\omega_e t}$. Une fois encore, le déphasage par rapport au forçage est implicitement contenu dans l'expression complexe

de l'amplitude q ; il est ainsi le même pour toutes les harmoniques et en notant $\phi = \angle(q)$, l'Eq. (7.10) peut se réécrire :

$$\mathbf{x}_{\text{MNL}j} = \text{Re}\left(|q| \sum_{k=0}^H \boldsymbol{\psi}_k(|q|) e^{i(k\omega_e t + \phi)}\right). \quad (7.11)$$

La phase ϕ des harmoniques d'ordres supérieurs n'est pas multipliée par l'ordre k .

7.3.3 Travaux de Joannin et al.

À titre d'ouverture, on porte l'attention du lecteur sur certains travaux récents [38]. Dans sa définition de super-éléments analogues à ceux développés en CMS, Joannin définit un champ de déplacement en tant que somme de MNLs calculés à frontières fixes et de formes propres statiques. Les MNLs sont calculés à la manière de Laxalde et al., en complexe, et sont réutilisés dans une synthèse comme celle de l'Eq. (7.6). L'originalité vient du fait que plusieurs MNLs peuvent être superposés dans cette formulation. Nous ne sommes alors plus dans le cadre de la théorie du mode non linéaire résonant unique.

L'idée de retenir plusieurs MNLs dans la synthèse a été envisagée pour le solveur qui sera présenté dans le Chap. 8, mais elle sera écartée en partant du constat qu'à haute énergie, le MNL dominant interagit avec les autres modes et contient de fait de l'information contenue dans d'autres MNLs. La restriction à 1 MNL dans la synthèse permet avant tout de simplifier les expressions, mais évite aussi sans doute d'injecter de l'information redondante dans le modèle réduit.

7.4 Synthèse à phase unique retenue

Au regard de ces travaux antérieurs, on propose de réaliser une synthèse modale placée dans le cadre des hypothèses de la théorie du mode non linéaire résonant unique de Szempliska-Stupnicka, dont la solution du système forcé sera cherchée sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(s) \left(\frac{\mathbf{a}_0(s)}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H [\mathbf{a}_k(s) \cos(k\omega t + \phi) + \mathbf{b}_k(s) \sin(k\omega t + \phi)] \right), \quad (7.12)$$

avec les matrices $\mathbf{P}(s)$ et les coefficients de Fourier $\mathbf{a}_k(s)$ et $\mathbf{b}_k(s)$ étant respectivement les parties spatiale et temporelle du point de MNL d'abscisse curviligne s , et ϕ unique phase. Les MNLs sont bien entendu obtenus via un processus de continuation réduite par PGD/HBM. le choix simplificateur est fait de ne pas ajouter les correctifs linéaires, comme cela est fait chez Laxalde et Thouverez. Les véritables inconnues à déterminer sont au final s , ω et ϕ .

Le choix d'une phase unique ϕ est fait en rapport aux travaux de Sarrouy et al. [70], qui démontre dans le cas mono-dimensionnel l'intérêt d'un contrôle par la phase pour tracer des FRFs de systèmes à paramètres incertains.

Au delà de l'écriture réelle, un point d'intérêt de cette approche par rapport à celles évoquées précédemment est la manière dont est introduit le déphasage de la réponse par rapport au forçage.

7.4.1 Considérations sur la phase ϕ

Il est fréquent de voir dans la littérature l'utilisation d'une phase identique pour toutes les harmoniques, ce qui se traduit par une expression de l'Eq. (7.12) présentant des $\cos(k\omega t + \phi)$ et des $\sin(k\omega t + \phi)$. Dans le cadre de la synthèse modale non linéaire proposée dans le Chap. 8, une telle implémentation de la phase a été testée et présente des écarts significatifs entre les résonances trouvées et celles obtenues par la méthode référence, la MAN. La convergence peut même ne pas se faire, et ce très tôt dans la continuation de la résonance.

C'est pour cela qu'une phase comme dans l'Eq. (7.12) a été préférée, ce qui revient à introduire un décalage du temps adimensionné $\tau = \omega t$, plus adapté au glissement de la phase entre 0 et $-\pi$ lors de la résonance.

Afin de montrer via un exemple que ce nouveau choix fonctionne effectivement mieux qu'une phase identique pour toutes les harmoniques, anticipons à présent quelques résultats de la Partie 4.

Soit le système à 2 ddls présentant des ressorts cubiques tel qu'illustré en Fig. 1.12 dans la Sec. 1.5.2.b. Les paramètres et le niveau de forçage ($f_e = 1 \cdot 10^{-3}$ N) sont ceux utilisés par Touzé et al. dans [81]. On prend $H = 10$ harmoniques. Comme dans cette référence, on trace la première résonance principale, ce qui revient ici à chercher des triplets $\{s, \omega, \phi\}$ tels que $\mathbf{x}(t)$ soit solution du système forcé.

Cas 1 : phase type $k\tau + \phi$ On cherche ici $\mathbf{x}(t)$ solution du système forcé telle que :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(s) \left(\frac{\mathbf{a}_0(s)}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H [\mathbf{a}_k(s) \cos(k\omega t + \phi) + \mathbf{b}_k(s) \sin(k\omega t + \phi)] \right). \quad (7.13)$$

En supposant disposer du solveur associé à la synthèse modale non linéaire développé dans le Chap. 8, on réussit à tracer la première résonance. Pour les 5 premières harmoniques, on compare qualitativement les résultats avec ceux obtenus par la MAN, ce qui est présenté en Fig. 7.1. L'écart à la référence est pour cet exemple perceptible à partir de la deuxième harmonique.

Cas 2 : phase type $k(\tau + \phi)$ La même continuation est ensuite réalisée pour la forme de $\mathbf{x}(t)$ de l'Eq. (7.12). Le comparatif pour les 5 premières harmoniques est également fait, en Fig. 7.2. Cette fois les résultats sont globalement meilleurs, en particulier pour ce qui est de la bonne prise en compte des harmoniques supérieures.

Projection de la MAN sur la forme de solution retenue Enfin, une dernière étude qualitative a été réalisée pour venir appuyer le choix d'introduction de la phase. Toujours pour le même exemple, la qualité de la forme de solution $\mathbf{x}(t)$ retenue pour la synthèse a pu être testée en projetant les coefficients de Fourier de la solution obtenue par la MAN sur la forme de $\mathbf{x}(t)$ choisie.

Autrement dit, pour chaque point de FRF obtenu par la MAN, la distance entre les coefficients de Fourier et ceux que l'on obtiendrait avec la synthèse choisie est minimisée par

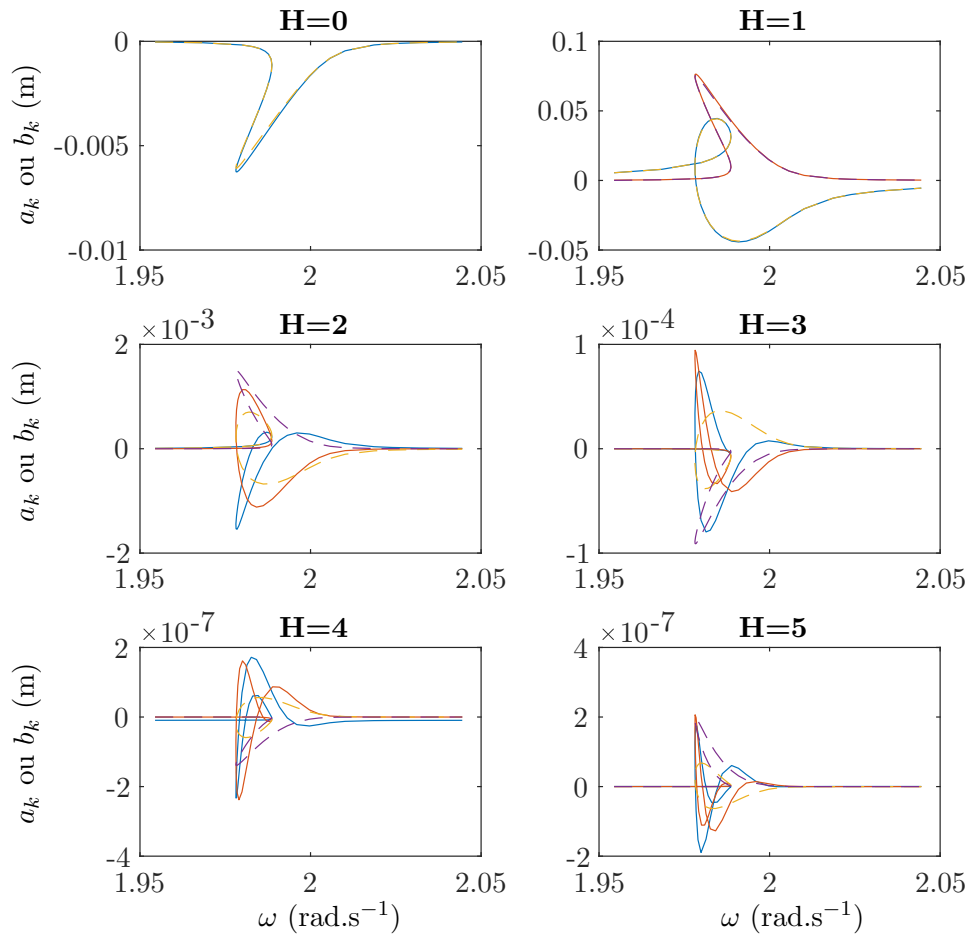


FIGURE 7.1 – Choix de la phase – Cas 1 – Première résonance du système à 2 ddl représentée par harmonique, pour le ddl 1. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse (cas 1). Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.

rapport aux paramètres $\{s, \phi\}$. Ceci permet donc d'exhiber un couple $\{s, \phi\}$ susceptible d'être obtenu par la synthèse. En Fig. 7.3 sont donc tracés s et ϕ pour une soixantaine de points de la FRF ainsi que le résidu ε_{reg} de la méthode de minimisation.

Bien que les deux approches puissent paraître satisfaisantes, on constate une différence de 3 ordres de grandeur pour le résidu ε_{reg} autour de la résonance, ce qui montre que la forme de solution (et de phase) retenue est mieux adaptée à la dynamique de ce système forcé.

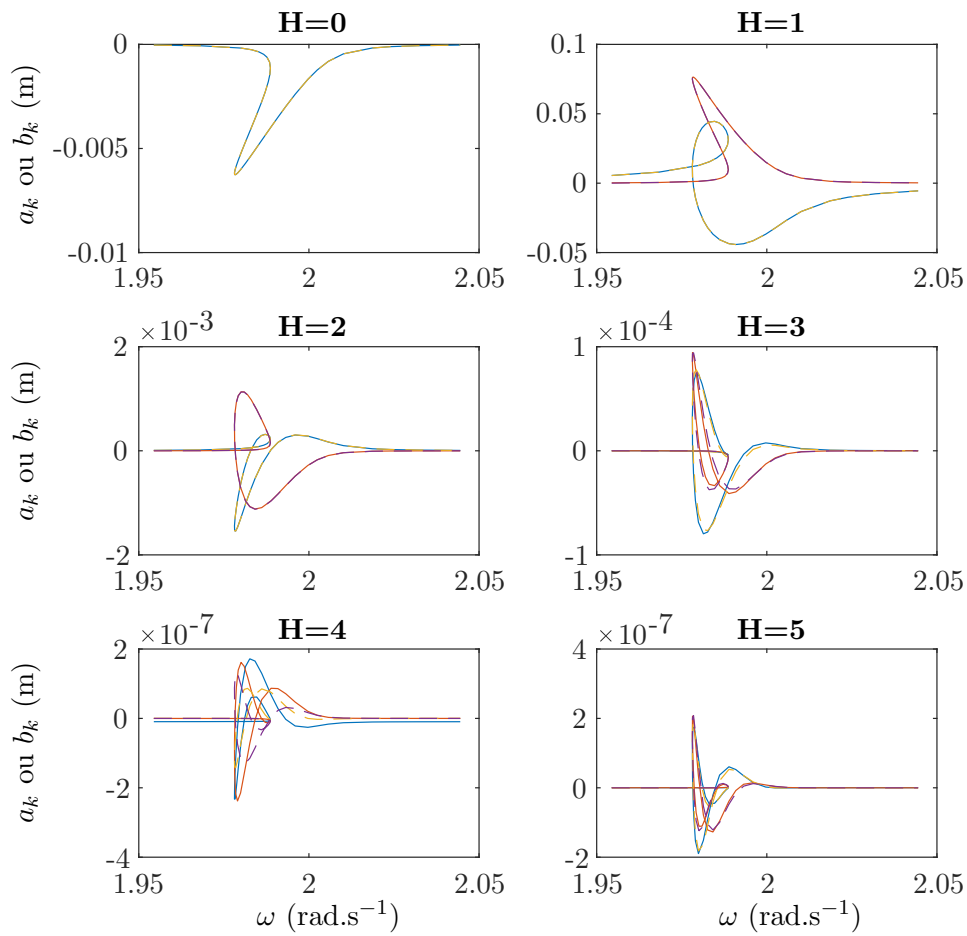


FIGURE 7.2 – Choix de la phase – Cas 2 – Première résonance du système à 2 ddl représentée par harmonique, pour le ddl 1. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse (cas 2). Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.

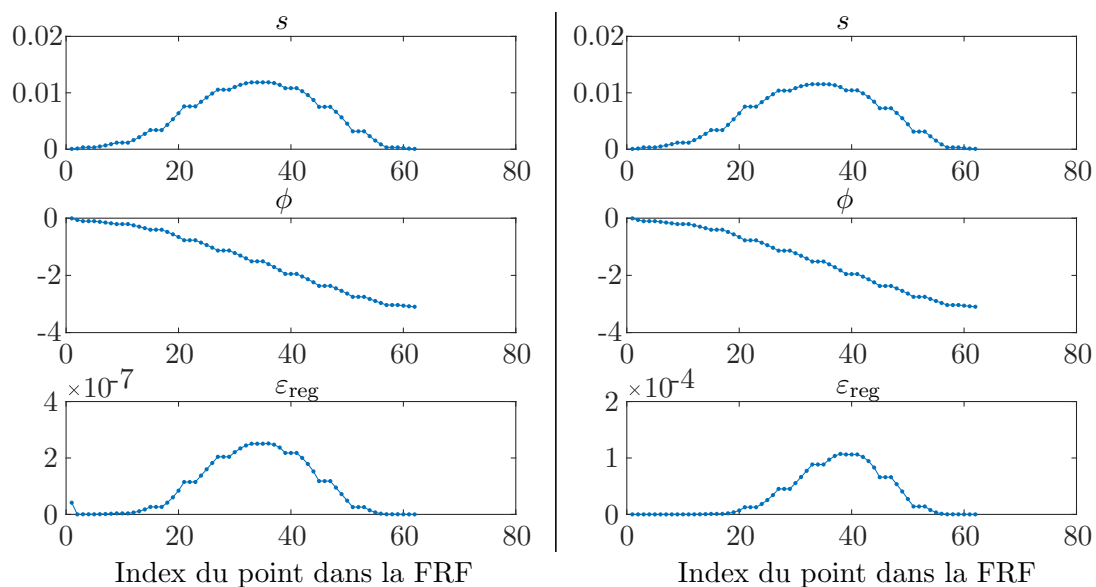


FIGURE 7.3 – Choix de la phase – Valeurs de s et ϕ obtenues à partir de la référence MAN par minimisation de l'erreur. Colonne gauche : cas de la phase telle que retenue (cas 2). Colonne droite : cas de la phase identique pour toutes les harmoniques (cas 1).

Continuation réduite de FRF basée sur les grandeurs modales non linéaires

En partant de la forme de solution retenue en fin de Chap. 7, les développements d'une proposition de solveur pour une synthèse modale non linéaire réalisée à partir de MNLs vont être présentés. Les modes non linéaires, amortis ou non, seront obtenus via l'algorithme de continuation réduit combinant PGD et HBM présenté en Partie 2. Les différentes étapes de l'algorithme et les résultats attendus seront exposés. Face aux limites de l'approche, une perspective d'amélioration du solveur de synthèse modale sera évoquée en fin de chapitre.

PLAN DU CHAPITRE 8

8.1	Proposition de synthèse de FRF à partir des MNLs	115
8.1.1	Choix de description des MNLs	115
8.1.2	Synthèse modale non linéaire à phase unique	115
8.1.3	Caractéristiques de l'implémentation du solveur réduit	118
8.2	Limites et perspectives d'amélioration du solveur	119

8.1 Proposition de synthèse de FRF à partir des MNLs

8.1.1 Choix de description des MNLs

Les algorithmes PGD/HBM de continuation des MNLs précédemment développés permettent l'obtention des MNLs amortis ou non jusqu'à une certaine abscisse curviligne s_{\max} , correspondant souvent à un niveau d'énergie donné E_{\max} .

Bien que ce ne soit pas une obligation, on suppose que cette branche a été construite en pPGD, ce qui permet d'associer des formes fixes pour chaque tronçon de la branche de taille m donnée et limite le stockage dédié à la partie spatiale \mathbf{P} .

Les modes PGD obtenus lors du calcul du MNL permettent de décrire, pour une énergie mécanique donnée, un état relativement proche d'une résonance du système. On peut supposer qu'une sollicitation qui résonnera à une énergie inférieure ou égale à cette valeur sera facilement descriptible avec les modes pPGD contenus dans le point du MNL en question.

On se limitera à la prise en compte d'un seul MNL, le MNL dominant, dans l'équation de synthèse, comme décrit par l'Eq. (7.12).

Enfin, on donne quelques propriétés plus ou moins triviales liées au MNL incorporé dans la synthèse :

- Lorsqu'un MNL amorti est utilisé, il a été calculé avec la même matrice d'amortissement visqueux \mathbf{C} et la même expression de $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ que dans l'expression du système forcé.
- La base de Fourier utilisée pour le calcul du MNL peut ne pas comporter de sinus dans le cas non amorti. Que ce soit le cas ou non, on emploie une base de cosinus et de sinus pour la synthèse de la réponse forcée, et on prend le même nombre d'harmoniques que la description HBM du MNL.
- De même, le vecteur "minimal" d'échantillonnage en temps de la période, utilisé pour le processus d'AFT, sera repris à l'identique pour la gestion des efforts non linéaires présents dans le solveur de la synthèse modale non linéaire. On rappelle que l'échantillonnage en temps doit respecter le théorème de Shannon, et que le nombre minimal de pas de temps ne dépend que de l'harmonique de plus haut degré H retenu dans la HBM (cf. Sec 3.2.2.d).

8.1.2 Synthèse modale non linéaire à phase unique

Soit le j -ème MNL dominant calculé par continuation PGD/HBM, que l'on souhaite exploiter pour le tracé de la j -ème résonance principale d'un système non linéaire sous forçage mono-harmonique. Le MNL peut s'exprimer en temps adimensionné $\tau = \omega t$ et est indexé suivant son abscisse curviligne s de la manière suivante :

$$\mathbf{x}(\tau, s) = \mathbf{P}(s) \left(\frac{\mathbf{a}_0(s)}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H [\mathbf{a}_k(s) \cos(k\tau) + \mathbf{b}_k(s) \sin(k\tau)] \right), \quad (8.1)$$

avec les coefficients de Fourier \mathbf{b}_k pouvant être nuls dans le cas d'un MNL non amorti sans symétrie particulière.

On cherche à tracer la FRF sous la forme de l'Eq. (7.12), ce qui peut s'écrire en temps adimensionné et à partir du MNL :

$$\mathbf{x}(\tau + \phi, s) = \mathbf{P}(s) \left(\frac{\mathbf{a}_0(s)}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H [\mathbf{a}_k(s) \cos(k(\tau + \phi)) + \mathbf{b}_k(s) \sin(k(\tau + \phi))] \right). \quad (8.2)$$

Cette hypothèse sur la forme de solution conduit à une implémentation numérique légère, au sens qu'elle ne nécessite que le stockage du MNL – réduit ici par PGD/HBM – et le calcul de 3 inconnues $\{s, \omega, \phi\}$ via un système non linéaire réduit qui présenterait 3 équations représentatives de la dynamique du système forcé.

Obtention du système réduit Comme cela est fait dans un grand nombre de travaux basés sur l'approche de Szempliska-Stupnicka [47, 43, 62, 30], seule l'harmonique fondamentale sera retenue à travers le processus de réduction de modèle qui accompagne la construction du solveur pour la synthèse modale. Dans les travaux de Krack et al. ou de Peter et al., la théorie du mode non linéaire résonant unique conduit en effet à traiter la contribution du MNL dominant de manière non linéaire mais en préservant d'une certaine manière le principe de superposition, ce qui se traduit par la résolution de l'équation modale suivante :

$$[\omega^2(q) - \omega_e^2 + 2i\omega_e\beta(q)]q = \boldsymbol{\psi}_1^H \mathbf{f}_{e0}, \quad (8.3)$$

avec q amplitude modale associée au (j -ème) MNL dominant dans la forme de solution de l'Eq. (7.10), et $\boldsymbol{\psi}_1^H$ transconjuguée de $\boldsymbol{\psi}_1$, harmonique fondamentale du MNL. On note l'absence de terme non linéaire explicite dans cette équation : ce sont les propriétés modales non linéaires ω et β qui dépendent de l'amplitude modale q . Il s'agit donc d'une équation implicite et complexe, à résoudre itérativement.

Ce système de taille 2, éventuellement associé à une équation liée à un schéma de continuation, permet de déterminer le couple $\{q, \omega\}$ et de tracer la FRF autour de la résonance d'intérêt. Avec une mise en forme réelle, nous allons à présent suivre une démarche analogue.

- Commençons par exprimer matriciellement $\mathbf{x}(\tau + \phi, s)$ en isolant les termes qui dépendent de la phase ϕ . Pour ce faire, on utilise les identités trigonométriques :

$$\begin{bmatrix} \cos(k\omega t + k\phi) \\ \sin(k\omega t + k\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\phi) & -\sin(k\phi) \\ \sin(k\phi) & \cos(k\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k\omega t) \\ \sin(k\omega t) \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Toute solution issue de la synthèse peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\tau + \phi, s) = \mathbf{X}_H(s) \mathbf{M}_\phi(\phi) \mathbf{h}_H(t, \omega) \\ \mathbf{M}_\phi(\phi) = \text{diag} \left(1, \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos(H\phi) & -\sin(H\phi) \\ \sin(H\phi) & \cos(H\phi) \end{bmatrix} \right). \end{cases} \quad (8.5)$$

La matrice \mathbf{M}_ϕ de déphasage de la base de Fourier est une matrice carrée de taille $(2H + 1) \times (2H + 1)$ dans le cas général. Si une base avec des cosinus seuls est utilisée (cas des MNLs conservatifs), elle se réduit à une matrice rectangulaire de taille $(H + 1) \times (2H + 1)$ obtenue en supprimant les lignes impaires de \mathbf{M}_ϕ (hors ligne 1). On montre simplement à partir de cette forme que les dérivées temporelles de \mathbf{x} s'écrivent $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{X}_H(s) \mathbf{M}_\phi(\phi) \mathbf{D}^n \mathbf{h}_H(t, \omega)$.

On injecte alors $\mathbf{x}(\tau + \phi, s)$ et ses dérivées dans le système dynamique forcé de l'Eq. (1.3)

- On projette spatialement le système de taille N . Le choix est fait de multiplier à gauche par $(\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T$. On obtient :

$$(\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{f}_e(t). \quad (8.6)$$

Le système obtenu est de taille $(2H + 1)$ dans le cas général, ou de taille $(H + 1)$ avec une base de cosinus seuls.

- Enfin, on projette temporellement par équilibrage harmonique en ne sélectionnant qu'une harmonique k , menant à un jeu de 2 équations qui correspondent au terme en $\cos(k\omega t)$ et au terme en $\sin(k\omega t)$. Si on note $M_k^a = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{M}(\mathbf{P}\mathbf{a}_k)$, $M_k^b = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{M}(\mathbf{P}\mathbf{b}_k)$, $C_k^a = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{a}_k)$, $C_k^b = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{b}_k)$, $K_k^a = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{a}_k)$ et $K_k^b = (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{b}_k)$ valeurs scalaires ne dépendant que de l'index s , le système s'écrit :

1. dans le cas général (en pratique pour les MNLs amortis) :

$$\begin{cases} [(-(k\omega)^2 M_k^a + (k\omega)C_k^b + K_k^a) \cos \phi + (-(k\omega)^2 M_k^b - (k\omega)C_k^a + K_k^b) \sin \phi \\ \quad + (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \langle \mathbf{f}_{nl} - \mathbf{f}_e \rangle_{\cos(k\omega t)} >_T = 0 \\ [-(k\omega)^2 M_k^a + (k\omega)C_k^b + K_k^a) \sin \phi + (-(k\omega)^2 M_k^b - (k\omega)C_k^a + K_k^b) \cos \phi \\ \quad + (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \langle \mathbf{f}_{nl} - \mathbf{f}_e \rangle_{\sin(k\omega t)} >_T = 0, \end{cases} \quad (8.7)$$

2. pour une base de Fourier en cosinus (en pratique pour les MNLs non amortis) :

$$\begin{cases} [-(k\omega)^2 \cos \phi M_k^a - (k\omega) \sin \phi C_k^a + \cos \phi K_k^a] \\ \quad + (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \langle \mathbf{f}_{nl} - \mathbf{f}_e \rangle_{\cos(k\omega t)} >_T = 0 \\ [(k\omega)^2 \sin \phi M_k^a - (k\omega) \cos \phi C_k^a - \sin \phi K_k^a] \\ \quad + (\mathbf{P}\mathbf{a}_1)^T \langle \mathbf{f}_{nl} - \mathbf{f}_e \rangle_{\sin(k\omega t)} >_T = 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Pour avoir une écriture générale, k a été laissé dans les équations, mais il faut particulariser à $k = 1$ par cohérence avec l'hypothèse de projection sur le fondamental.

Le terme non linéaire est évalué par AFT à partir du même échantillon de temps que celui utilisé pour le calcul du MNL dominant sous-jacent. Les conditions du théorème de Shannon sont ainsi assurées d'être respectées.

Par ailleurs, pour assurer un meilleur conditionnement numérique de ce système, notamment lorsque la contribution \mathbf{a}_1 s'avère faible, les 2 équations sont divisées par la norme euclidienne $\|\mathbf{a}_1\|$.

- Enfin, ce système est incorporé dans un schéma de continuation par prédiction-correction. Le schéma de correction est contenu dans une équation contrainte de type $c(s, \omega, \phi) = 0$.

À l'aide du solveur réduit final composé de 3 équations algébriques non linéaires et noté \mathcal{S}_{FRF} , un point de la FRF s'obtient via l'utilisation d'un solveur de type Newton-Raphson. Une solution périodique de la FRF se retrouve être associée à un triplet $\{s, \phi, \omega\}$, ce qui peut à nouveau s'écrire sous la forme d'un objet $\mathbf{y}_n \equiv \{s_n, \phi_n, \omega_n\}$.

Nous allons à présent énumérer les considérations numériques liées à l'implémentation de ce solveur pour synthèse modale non linéaire.

8.1.3 Caractéristiques de l'implémentation du solveur réduit

Propriétés du schéma de continuation Le processus de continuation de FRF via la synthèse modale non linéaire est donné dans l'Algorithme 4. Le schéma de prédiction-correction utilisé cherche des solutions dans un espace généré par les inconnues $\{s, \phi, \omega\}$. La distance utilisée ici, semblable à celles employées jusqu'alors, repose sur les 3 directions qui correspondent à ces inconnues, pondérées par des coefficients α_s, α_ϕ et α_ω arbitraires (valant 1 par défaut). Elle s'écrit, entre deux points \mathbf{y}_{n-1} et \mathbf{y}_n de la FRF :

$$d(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) = \sqrt{\alpha_s^2 |s_n - s_{n-1}|^2 + \alpha_\phi^2 |\phi_n - \phi_{n-1}|^2 + \alpha_\omega^2 |\omega_n - \omega_{n-1}|^2}. \quad (8.9)$$

À partir de ces considérations, une prédiction sécante est réalisée, associée à une correction laissée au choix de l'utilisateur – en pratique par longueur d'arc ou par pseudo-longueur d'arc – et qui est contenue dans l'équation contrainte $c(s, \omega, \phi) = 0$ du solveur \mathcal{S}_{FRF} .

Les deux premiers points nécessaires à l'amorçage de la continuation avec une prédiction sécante sont calculés avec des équations contraintes spécifiques $c_1(s, \omega, \phi) = 0$ et $c_2(s, \omega, \phi) = 0$. Des valeurs spécifiques de la pulsation, ω_1 et ω_2 , sont fixées par l'utilisateur, de sorte que les 2 équations s'écrivent respectivement $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$.

Enfin, la gestion du pas de continuation est faite de manière analogue à celle décrite en Sec. 5.3.4. Dans cette écriture, le critère d'erreur utilisé est directement lié à la convergence du solveur de type Newton utilisé. On ne vérifie pas que \mathbf{x} est bien solution numérique du système d'origine, défaut que l'on compensera par des comparaisons entre la solution obtenue et celle de la méthode de résolution de référence, la MAN. Le critère d'arrêt de l'algorithme, tout aussi libre de choix que le critère d'erreur, se base ici sur un ω_{max} qu'on prendra au delà de la zone de résonance traitée.

Actualisation du MNL suivant l'amplitude modale Le système à résoudre \mathcal{S}_{FRF} utilise des objets présentant une dépendance en l'amplitude modale s liée au MNL sous-jacent. L'inconnue s étant évaluée à chaque itération du solveur de type Newton-Raphson, il est important de préciser comment ces objets fonctions de s sont calculés.

Bien entendu, on parle ici des contributions spatiale $\mathbf{P}(s)$ et temporelle $\mathbf{Q}_H(s)$, mais aussi des grandeurs qui en découlent : $M_k^a(s), M_k^b(s), C_k^a(s), C_k^b(s), K_k^a(s), K_k^b(s)$ et l'effort non linéaire \mathbf{f}_{nl} .

Algorithme 4 : Algorithme de continuation de FRF par synthèse modale basée sur les MNLs

Paramètres : Valeurs de ω_{\max} , I_{\max} , r_i , r_s^{mult} , r_s^{div} and Δs ;
Équations contraintes : $c_1(s, \omega, \phi)$, $c_2(s, \omega, \phi)$ et $c_p(s, \omega, \phi)$.

Données : MNL indexé par s , H harmoniques

```

1  $c(s, \omega, \phi) \leftarrow c_1(s, \omega, \phi)$ ; // Premier point
2 Calculer  $\mathbf{y}_1$  avec le solveur  $\mathcal{S}_{\text{FRF}}$ ;
3  $c(s, \omega, \phi) \leftarrow c_2(s, \omega, \phi)$ ; // Second point
4 Calculer  $\mathbf{y}_2$  avec le solveur  $\mathcal{S}_{\text{FRF}}$ ;
5  $c(s, \omega, \phi) \leftarrow c_p(s, \omega, \phi)$ ; // Boucle de continuation
6  $p \leftarrow 2$ ;
7 tant que  $\omega \leq \omega_{\max}$  faire
8   | Calculer  $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$  par prédiction sécante // Prédiction
   | avec  $\mathbf{y}_p$ ,  $\mathbf{y}_{p-1}$  et  $\Delta s$ ;
9   | Calculer  $\mathbf{y}_*$  avec le solveur  $\mathcal{S}_{\text{FRF}}$  // Correction
   | avec  $\mathbf{y}_*^{\text{pred}}$  en valeur initiale et  $I$  nombre d'itérations de Newton;
10  | si  $I < I_{\max}$  alors
11  |   |  $\mathbf{y}_{p+1} \leftarrow \mathbf{y}_*$ ;  $p \leftarrow p + 1$ ;
12  |   | si  $I < r_i I_{\max}$  alors
13  |   |   |  $\Delta s \leftarrow r_s^{\text{mult}} \Delta s$ ;
14  |   |   fin
15  |   sinon
16  |   |  $\Delta s \leftarrow r_s^{\text{div}} \Delta s$ ;
17  |   fin
18 fin

```

À chaque itération de Newton, les deux points du MNL avec les amplitudes modales s_1 et s_2 les plus proches de s telles que $s_1 < s < s_2$ sont trouvées. Une interpolation linéaire des coefficients de Fourier ($\mathbf{P}\mathbf{a}_k$) et ($\mathbf{P}\mathbf{b}_k$) relativement à ces 2 points est réalisée, et la matrice interpolée obtenue est utilisée pour évaluer les grandeurs qui en dépendent. Ceci montre l'intérêt d'un tracé du MNL avec un nombre suffisant de points pour se permettre de conserver un schéma d'interpolation aussi simple et léger que possible.

8.2 Limites et perspectives d'amélioration du solveur

Cependant, comme expliqué dans [62], la génération d'harmoniques d'ordre élevé due à l'effort non linéaire pose la question de la pertinence de ne retenir que la projection spatiale sur l'harmonique 1 pour le tracé de la FRF. Cette projection est arbitraire et repose ici d'une part sur la nécessité d'obtenir 2 équations représentatives de la dynamique du système forcé, et d'autre part sur l'idée que le fondamental contient l'essentiel de l'information vibratoire et se trouve être l'harmonique la plus simple à contrôler du point de vue expérimental.

De plus, dans la section précédente, on peut se faire la remarque que dans le cas de l'utilisation de MNLs amortis, une projection par \mathbf{b}_1^T aurait pu être utilisée. Quid du choix des

2 équations à retenir ?

Pour s'affranchir d'un tel choix arbitraire de projection, d'autres idées de systèmes de taille 2 peuvent être envisagées. Définissons par exemple le résidu $\boldsymbol{\varepsilon}$ obtenu après injection de la forme de solution $\boldsymbol{x}(\tau + \phi, s)$ dans l'Eq. (1.3) du système forcé :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\tau + \phi, s) = \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{x}''(\tau + \phi, s) + \omega \mathbf{C} \boldsymbol{x}'(\tau + \phi, s) + \mathbf{K} \boldsymbol{x}(\tau + \phi, s) + \mathbf{f}_{nl}(\boldsymbol{x}(\tau + \phi, s), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau + \phi, s)) - \mathbf{f}_e(\tau), \quad (8.10)$$

avec $\boldsymbol{x}' = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \tau}$. Une approche de type Galerkin peut être appliquée au résidu, l'idée étant alors d'orthogonaliser l'erreur par rapport à une certaine mesure. Ceci pourrait par exemple s'écrire, d'après la formulation énoncée par Sarrrouy dans [69] :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}^T(\tau + \phi, s) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau + \phi, s) d\tau = 0 \\ \int_0^{2\pi} (\omega \boldsymbol{x}'(\tau + \phi, s))^T \boldsymbol{\varepsilon}(\tau + \phi, s) d\tau = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

Cette perspective pourrait faire l'objet de développements ultérieurs. Dans la Partie 4 de ce travail, les résultats exposés seront obtenus via le solveur présenté dans la section précédente, sauf à deux reprises où des résultats préliminaires seront tout de même proposés en guise d'ouverture. Les écarts entre les résonances obtenues et celles issues de la MAN s'expliqueront donc en partie par le choix de projection sur le fondamental et la prise en compte partielle des harmoniques d'ordres supérieurs autour de la résonance.

Partie 4 : Applications

Du Mode Non Linéaire à la FRF : validation des méthodes

Ce chapitre traite indépendamment trois exemples de systèmes de la littérature illustrant chacun une des méthodes respectivement mises en avant dans les Chap. 4 et 5, le Chap. 6, et le Chap. 8. Le premier système, le classique portique de Roorda (Sec. 9.1), présente des non linéarités géométriques, ce qui en fait un bon candidat pour le calcul de MNLs non amortis. Ensuite, un système masses-ressorts à deux ddls modélisant un frottement sec régularisé sera décrit en Sec. 9.2, afin de traiter cette fois des non linéarités dissipatives et de chercher des MNLs amortis. Enfin, la synthèse modale sera abordée sous l'angle d'un autre système masses-ressorts, à non linéarités polynomiales conservatives, pour lequel une comparaison sera faite entre le fait d'injecter des MNLs conservatifs ou des MNLs amortis dans le modèle (Sec 9.3). Au delà de quelques résultats propres aux exemples, les résultats principaux et les propriétés des méthodes associées seront mis en avant et comparés à certaines études de la littérature.

PLAN DU CHAPITRE 9

9.1	Le portique de Roorda	125
9.1.1	Description du modèle – Cinématique de Von Kármán	125
9.1.2	Construction du premier MNL non amorti	126
9.1.3	Contenu des modes PGD	128
9.1.4	Comparaison avec la variante oPGD	130
9.1.5	Considérations numériques	131
9.2	Système masses-ressorts à frottement sec	132
9.2.1	Tracé du premier MNL amorti	133
9.2.2	Initialisations spatiales	134
9.2.3	Discussion sur la prise en compte de l'amortissement	134
9.3	Synthèse modale non linéaire sur système académique à non linéarités géométriques	135
9.3.1	Tracé de la première résonance	136
9.3.2	Caractéristiques liées au solveur de synthèse modale non linéaire	138
9.3.3	Considérations numériques	140
9.3.4	Essai du solveur basé sur l'erreur dynamique	141

9.1 Le portique de Roorda

9.1.1 Description du modèle – Cinématique de Von Kármán

Le portique de Roorda est un système constitué de deux poutres identiques, à section rectangulaire, connectées en angle droit de manière rigide, tel que représenté en Fig. 9.1. Les extrémités sont des pivots. Il s'agit une structure classiquement étudiée en flambement [80] lorsqu'on y applique une force $-F\mathbf{e}_y$ au noeud formant l'angle droit.

Chaque poutre est discrétisée en 25 éléments d'Hermite, pour un total de 149 ddls une fois les conditions aux limites prises en compte. Les déplacements axial u_i et transverse w_i sont interpolés respectivement linéairement et cubiquement. Les propriétés géométriques et mécaniques choisies sont celles utilisées par Sombroek et al. [77] et sont récapitulées dans le Tableau 9.1. Une cinématique de Von Kármán telle que formulée dans [79] est utilisée. Elle se base sur des

Module de Young E (GPa)	Masse volumique ρ (kg/m ³)	L (m)	h (m)	b (m)	Puls. propres ω_{1-3} (rad.s ⁻¹)
210	7800	0.1	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	{739.15; 1154.6; 2956.4}

TABLEAU 9.1 – Propriétés géométriques, mécaniques et dynamiques du portique de Roorda

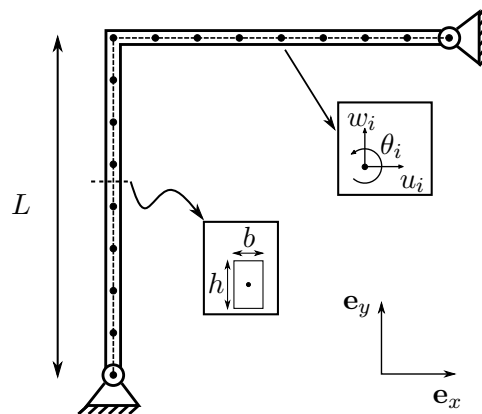


FIGURE 9.1 – Schéma du modèle de portique de Roorda.

rotations modérées de la fibre neutre de la poutre ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$) ainsi qu'une déformation axiale e de la poutre simplifiée : $e \approx u_{,x_i} + \frac{1}{2}w_{,x_i}^2$. Les expressions des matrices de masse \mathbf{M} et de raideur linéaire \mathbf{K} associées à ces hypothèses de poutre et aux interpolations propres aux éléments d'Hermite sont explicitées dans l'Annexe C.

L'effort non linéaire $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u})$ qui résulte des hypothèses du modèle de Von Kármán est intégré exactement sur chaque élément puis assemblé. Les intégrales en question sont données dans cette même annexe.

9.1.2 Construction du premier MNL non amorti

Le FEP correspondant au MNL 1 est représenté sur la Fig. 9.2. Il est tracé jusqu'à $\omega = 760$ rad.s⁻¹ et comporte 142 points calculés par pPGD en un temps CPU total de l'ordre de 1300 s, en choisissant une correction par longueur d'arc. Les paramètres utilisés en entrée de l'Algorithme 3 pour tracer le MNL sont compilés dans le Tableau 9.2. On note également le fait que les ddls $[u_i, w_i, \theta_i]$ n'étant pas nécessairement du même ordre de grandeur, on choisit de faciliter la convergence de l'algorithme en injectant des formes normalisées des modes linéaires ϕ_k : la division est faite par le maximum en déplacement (et non en rotation).

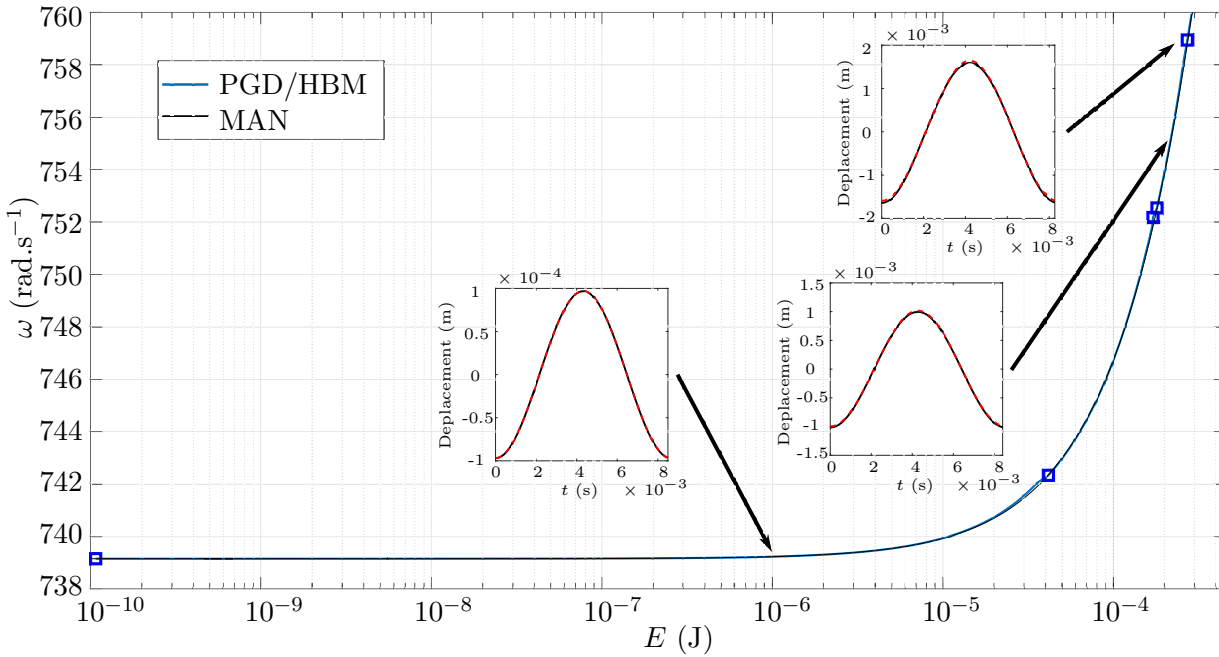


FIGURE 9.2 – FEP du MNL1 du portique de Roorda, par PGD/HBM (bleu) et par MAN (noir). Carrés : points où un mode PGD est ajouté. Les évolutions de x_{13} (noir) et y_{39} (rouge) représentent le déplacement transverse en les milieux de poutres.

Variante PGD	Δm	$m_{\max \text{ tot}}$	r_ε	r_s^{mult}	r_s^{div}
pPGD	1	10	1/50	1.1	0.5
Δs	k_{\max}	ε_{\max}	r_{ad}	$\mathbf{y}_2 : u_{35}(t=0)$	$\{\alpha_P, \alpha_q, \alpha_\omega\}$
1	5	$5 \cdot 10^{-3}$	0.8	10^{-6} m	$\{0, 1, 1\}$

TABEAU 9.2 – Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL 1 du portique de Roorda (pPGD).

Ce graphe ainsi que la référence tracée à partir de la MAN sont tous deux obtenus avec $H = 15$ harmoniques. Ce nombre est jugé suffisant car permettant de retrouver le même diagramme FEP que celui de référence obtenu en modèle complet temporel par Sombroek et al. ([77], Fig. 2).

Pour un critère d'erreur $\varepsilon_{\max} = 0.5\%$, la continuation par PGD/HBM permet l'obtention du même tracé qu'avec la MAN. Seuls quelques écarts peuvent être notés en les points qui précèdent l'introduction d'un nouveau mode PGD. En effet, ces points de fin de tronçon de

taille m donnée présentent l'erreur ε la plus grande, bien qu'en dessous du seuil ε_{max} fixé. Ce comportement correspond à celui attendu, par construction de l'algorithme, et est illustré sur la Fig. 9.3 : lorsque l'erreur ε atteint la valeur limite ε_{max} , un mode PGD est ajouté, ce qui réduit l'erreur en retour.

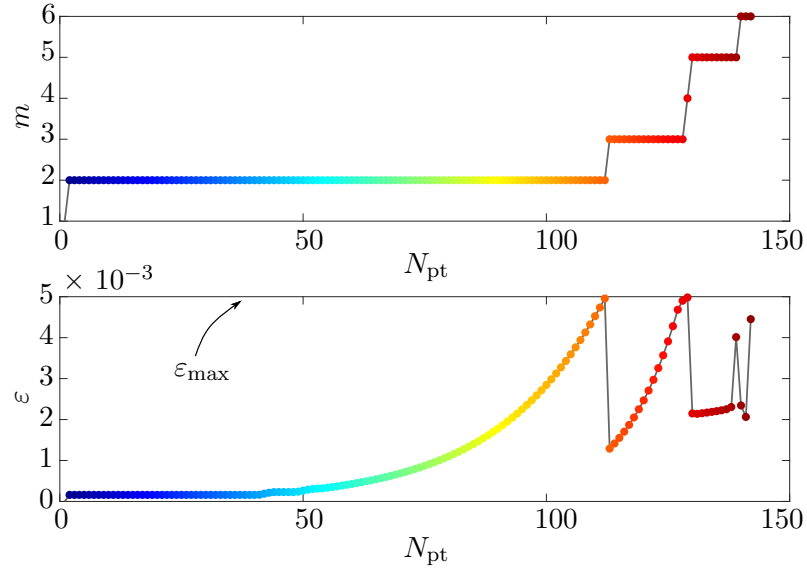


FIGURE 9.3 – Évolution de l'erreur ε et de la taille réduite m liée à la PGD/HBM le long de la continuation. N_{pt} est l'indice du point solution sur la branche.

Les descriptions temporelles des déplacements transverses en milieu de poutres en quelques points du MNL sont également représentées en Fig. 9.2 afin de montrer leur similitude avec celles obtenues par Sombroek et al. .

Quelques interprétations physiques Le comportement lisible sur la Fig. 9.2 est lié à des interprétations physiques relevées dans [77] et récapitulées dans ce paragraphe. Ce premier MNL correspond au premier mode de flexion du portique ϕ_1 : dans le cas linéaire, les deux poutres vibrent en phase, au sens où les poutres verticale et horizontale ont simultanément des déplacements de même signe respectivement suivant e_x et suivant e_y . Ce mode linéaire a par ailleurs un déplacement nul du coin situé à la jonction des deux poutres.

À haute énergie, les non linéarités géométriques, raidissantes, induisent des couplages entre flexion et traction-compression dans les poutres, ce qui conduit au déplacement du coin vers l'intérieur de la structure dans la déformée modale non linéaire. Sombroek et al. notent que ce mouvement correspond à celui représenté par la dérivée modale θ_{11} (cf. Fig. 9.4).

Enfin, la symétrie de la structure n'a *a priori* aucune raison d'être brisée par l'expression croissante des non linéarités. Le tracé temporel des périodes des milieux de poutres en quelques points du MNL, en Fig. 9.2, témoigne de cette symétrie, bien que quelques différences puissent être relevées à haute amplitude. La non validité des hypothèses inhérentes à la cinématique de Von Kármán en est l'explication, les déplacements dépassant l'épaisseur même des poutres.

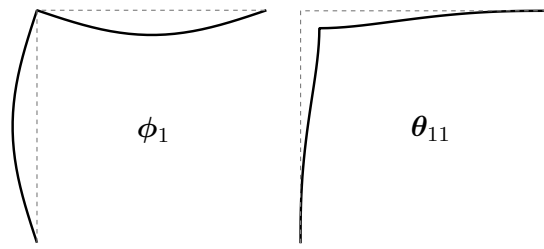


FIGURE 9.4 – Allures du premier mode linéaire ϕ_1 et de la dérivée de modale θ_{11} du portique de Roorda. Pointillés : configuration non déformée.

9.1.3 Contenu des modes PGD

À l'issue de la continuation par PGD/HBM, seuls 6 modes PGD sont nécessaires pour obtenir le FEP de la Fig. 9.2, en utilisant la variante pPGD. Leurs déformées, bloquées dans \mathbf{P} une fois calculées, sont celles représentées en Fig. 9.5. On reconnaît la forme du premier mode linéaire en tant que mode PGD 1. Le mode PGD 2, introduit à très basse énergie, est caractéristique du comportement non linéaire du portique de Roorda et traduit le déplacement du coin. Il porte ainsi l'information de la dérivée modale θ_{11} sans avoir à la calculer via un problème aux valeurs propres. On notera que cette forme a été obtenue via la distorsion spatiale de la forme du deuxième mode linéaire du portique de Roorda dans le sous-problème spatial \mathcal{S}_m . Les formes étant assez différentes, ceci montre le caractère adaptatif de l'algorithme. Les modes PGD d'ordre supérieur deviennent quant à eux nécessaires à plus haute énergie pour tenir compte non seulement des effets non linéaires en flexion mais aussi des effets de traction/compression.

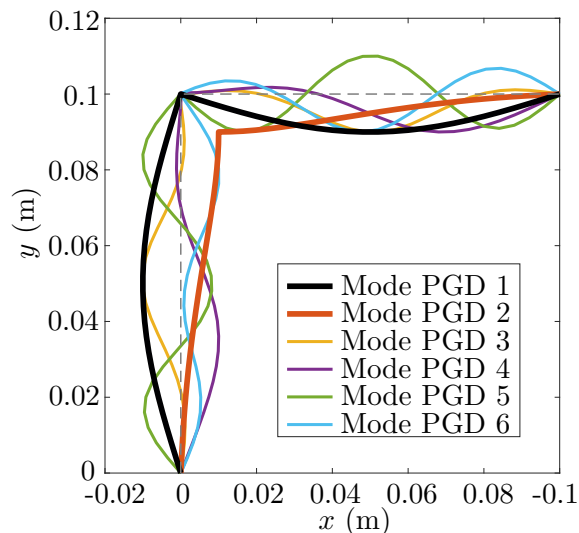


FIGURE 9.5 – Modes PGD : Contenu de la matrice spatiale \mathbf{P} en pPGD - Normalisation à 1cm du max. en flexion

Les modes PGD ajoutés sont tous fortement couplés au regard de la base des modes linéaires. On illustrera uniquement le cas du mode PGD 2 en Fig. 9.6, lequel présente des couplages significatifs même au-delà du 50-ème mode linéaire. On voit ainsi que la description par PGD/HBM est beaucoup plus compacte que si l'on utilisait comme sous-espace de projection de Galerkin une base de modes linéaires comme $[\phi_1, \dots, \phi_{50}]$.

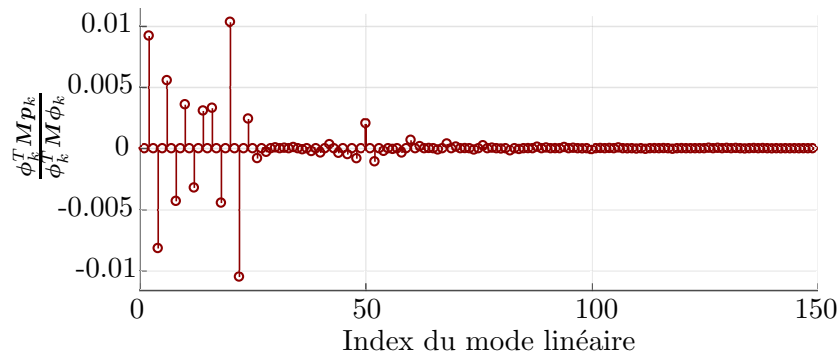


FIGURE 9.6 – Participations des modes linéaires pour le mode PGD 2

Le contenu harmonique des modes PGD est détaillé en Fig. 9.7. Le mode PGD 1 est quasi-intégralement régi par l'harmonique fondamentale tout au long de la branche de MNL. Le mode PGD 2 est composé d'une contribution statique et d'une contribution en $H = 2$ que l'on peut mettre en lien avec les termes quadratiques des non linéarités géométriques. Le mode PGD 3 a deux contributions majeures en $H = 1$ et en $H = 3$, plus caractéristiques de termes cette fois cubiques. Le contenu harmonique des modes PGD 4, 5 et 6 est plus difficilement interprétable : aucun des coefficients de Fourier n'est prépondérant devant les autres, et même les plus hautes harmoniques ont des contributions non négligeables. Ceci confirme le rôle mineur de ces formes dans la physique du système, bien qu'elles soient indispensables à sa résolution numérique.

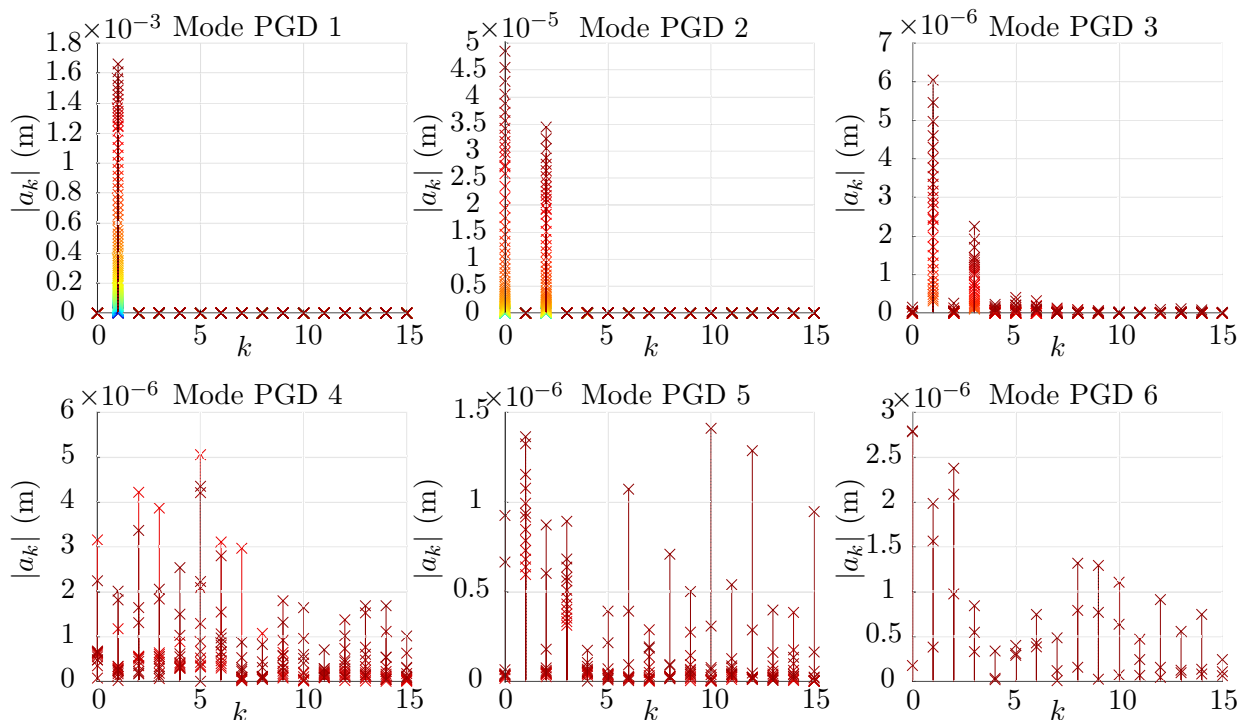


FIGURE 9.7 – Contenu harmonique des modes obtenus par pPGD sur le portique de Roorda. Code couleur de la Fig. 9.3 correspondant à l'indice du point de MNL sur la branche.

9.1.4 Comparaison avec la variante oPGD

Le tracé du MNL a également été fait en utilisant la variante oPGD, laquelle recalcule un problème spatial complet en chaque point, ce qui ne bloque pas les formes introduites comme en pPGD. On donne pour information les seuls paramètres algorithmiques pris différents du cas pPGD dans le Tableau 9.3.

r_s^{mult}	Δs	$\mathbf{y}_2 : u_{35}(t = 0)$
1.05	0.5	10^{-4} m

TABLEAU 9.3 – Paramètres de l’Algorithme 3 pour le MNL 1 du portique de Roorda propres au cas oPGD.

Le fait de recalculer \mathbf{P} pour chaque point du MNL donne une certaine flexibilité spatiale à l’algorithme, ce qui permet de réduire le nombre de modes PGD à seulement deux. L’introduction du second mode PGD est là encore faite très tôt dans le tracé du FEP (deuxième point).

Les déformées correspondantes sont très proches des modes PGD 1 et 2 obtenus par pPGD. Le mode PGD 1 correspond là aussi à ϕ_1 , ne varie quasiment pas en forme le long de la continuation et ne sera pas représenté ici. Le mode PGD 2 varie peu, comme illustré en Fig. 9.8. Cependant, on peut voir des légères distorsions spatiales du mode PGD au fil de la continuation, lesquelles permettent de compenser l’introduction des 4 modes PGD d’ordre supérieurs en pPGD. Il convient cependant de noter que pour ce calcul, la performance algorithmique est moins bonne qu’en pPGD ($t_{CPU} \approx 950s$ pour 76 points solutions) de par la nature même du sous-problème spatial traité.

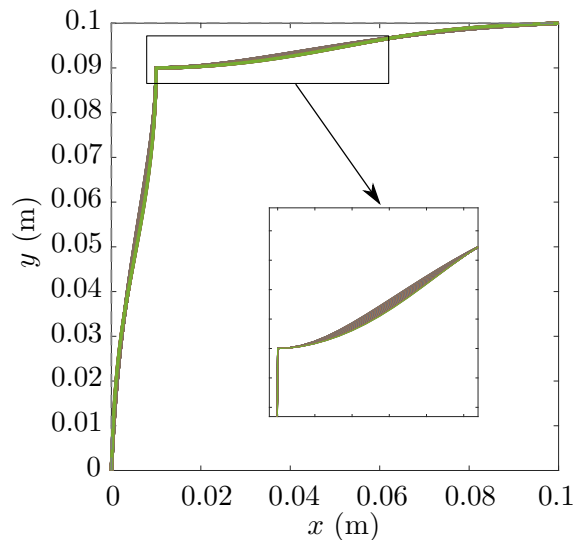


FIGURE 9.8 – Évolution du mode PGD 2 obtenu sans blocage des formes, en oPGD - Normalisation à 1 cm du maximum en flexion.

9.1.5 Considérations numériques

Compacité de la description PGD/HBM Seulement 6 modes PGD ont été nécessaires pour construire le premier MNL du portique de Roorda en utilisant la variante pPGD de l'algorithme de continuation par PGD/HBM, nombre réduit à 2 si on utilise la variante oPGD. D'après Sombroek et al., l'utilisation d'un sous-espace fixe incluant modes linéaires et dérivées modales permet de construire la même branche à l'aide de 20 descripteurs : les 5 premiers modes propres ainsi que leurs dérivées modales, $[\phi_1, \dots, \phi_5, \theta_{11}, \dots, \theta_{55}]$. Bien que la méthode alliant tir et continuation utilisée par ces auteurs soit fondamentalement différente de l'approche réduite fréquentielle de ce travail, on obtient une description plus compacte du même problème et ne nécessitant pas le calcul des dérivées modales. Par ailleurs, cette approche PGD/HBM semble à première vue plus simple à réutiliser dans le cadre de la synthèse de réponses forcées que des points solutions obtenus dans le domaine temporel par méthode de tir.

Revenons sur la compacité de la description PGD/HBM en décomptant le nombre de variables stockées lors du tracé du MNL par pPGD ou par oPGD, et en comparant ce nombre à celui que l'on aurait obtenu pour le même nombre de points en HBM classique. Les résultats sont présentés dans le Tableau 9.4. On rappelle qu'un point de MNL nécessite $N \times (H + 1) + 1$

m	1	2	3	4	5	6	Méthode	Total variables	Équiv. HBM
pPGD/HBM	1	111	16	1	10	3	pPGD/HBM	8 759	338 670
oPGD/HBM	1	75	-	-	-	-	oPGD/HBM	24 991	181 260

TABLEAU 9.4 – Nombre de points de MNL par tronçon de taille m donnée (gauche) ; Nombre total de variables de la branche de MNL (droite).

variables en HBM et $m \times (N + H + 1) + 1$ variables en PGD/HBM. De plus, le problème spatial n'est traité qu'une fois par tronçon de taille m en pPGD. On obtient au final pour ce système des gains en nombre de variables de 86,2% en oPGD et de 97,4% en pPGD, par rapport à une HBM classique.

Performances des sous-problèmes Enfin, quelques données sur les itérations de Newton réalisées par les solveurs associés aux sous-problèmes spatial \mathcal{S}_m et temporel \mathcal{T}_m sont regroupées dans le Tableau 9.5. Le solveur de type région de confiance est configuré avec des tolérances en abscisse et sur les fonctions de 10^{-9} , avec un nombre maximal d'itérations $N_{\text{ite max}} = 200$ en pPGD et $N_{\text{ite max}} = 75$ en oPGD. Les maxima sont généralement atteints en les points pour

		Moyenne	Écart type	Maximum
oPGD	\mathcal{T}_m	10.36	18.20	75
	\mathcal{S}_m	15.61	6.14	62
pPGD	\mathcal{T}_m	26.30	46.96	243
	\mathcal{S}_m	8.15	43.28	350

TABLEAU 9.5 – Moyenne, écart type et maximum des nombres d'itérations pour \mathcal{T}_m et \mathcal{S}_m le long de la branche de MNL du portique de Roorda.

lesquels un mode PGD est introduit par l'algorithme, ce qui arrive assez sporadiquement. Le

sous-problème spatial, plus lourd, nécessite en moyenne bien moins d'itérations de Newton en pPGD (il n'y est calculé que 5 fois). Le sous-problème temporel, plus léger, est quant à lui traité un peu plus souvent en pPGD, ce qui montre que ce sous-problème doit venir compenser le fait que les formes sont ici fixes dans \mathbf{P} .

Enfin, on peut s'apercevoir que $N_{\text{ite max}}$ semble être un paramètre de contrôle intéressant au sens que le prendre faible permet des gains en temps de calcul en "convertissant" les problèmes de convergence en nouveaux modes PGD, ou en une longueur d'arc Δs plus courte.

9.2 Système masses-ressorts à frottement sec

Nous allons à présent détailler un autre exemple caractérisé cette fois par une non linéarité dissipative. Est cherché le premier MNL amorti du système masses-ressorts à 2 ddl de la Fig. 9.9. Il s'agit d'un système académique simple à mettre en œuvre et traité dans la littérature [47, 36, 37] de sorte qu'une comparaison qualitative est possible. L'effort non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\dot{x}_2)$ est une

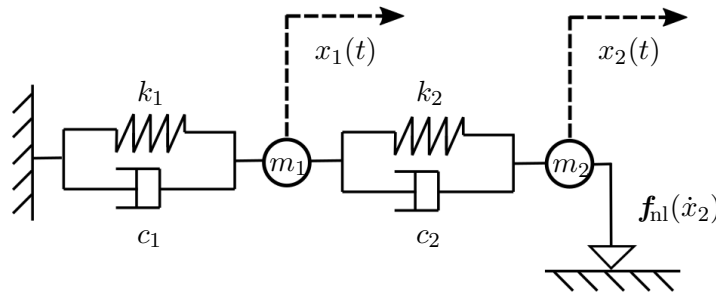


FIGURE 9.9 – Schéma du système masses-ressorts à frottement sec

loi de Coulomb régularisée telle que formulée en Sec. 1.3.1.a. On note que les résultats à venir peuvent être obtenus sans régularisation, mais celle-ci est retenue dans le modèle pour rester proche du cas traité par Joannin dans [36]. Le système différentiel matriciel à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mu N \tanh\left(\frac{\dot{x}_2}{\varepsilon_c}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

Les valeurs des constantes physiques retenues sont énumérées dans le Tableau 9.6 ci-dessous. À

m_1 (kg)	m_2 (kg)	c_1 (Ns/m)	c_2 (Ns/m)	k_1 (N/m)	k_2 (N/m)	μ	N (N)	ε_c
1	0.02	0.5	0.5	640	40	0.3	1	10^{-3}

TABLEAU 9.6 – Propriétés physiques du système à 2 ddl à frottement sec.

partir du système matriciel de l'Eq. (9.1), deux cas limites linéaires peuvent être extraits, chacun associé à des grandeurs modales : le cas du glissement, pour lequel les deux masses sont "libres" et $\mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{0}$, et le cas linéarisé proche de l'adhérence, où $\tanh\left(\frac{\dot{x}_2}{\varepsilon_c}\right) \approx \frac{\dot{x}_2}{\varepsilon_c}$. Dans ce dernier cas, le

problème de contact est réduit à une contribution visqueuse linéaire, de sorte que $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{0}$ et \mathbf{C} vaut :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + \frac{\mu N}{\varepsilon_c} \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Les données modales associées à ces deux comportements limites sont récapitulées dans le Tableau 9.7. Le décalage fréquentiel dû à l'amortissement visqueux linéaire est trivialement

	Mode linéaire	Mode lin. complexe cas "adhérent"		Mode lin. complexe cas "glissement"	
	ω_k	β_k	ω_k	β_k	ω_k
Mode 1	24.94	0.50	26.07	0.28	24.95
Mode 2	45.37	$1.50 \cdot 10^4$	0	12.72	43.52

TABLEAU 9.7 – Propriétés modales des systèmes linéaires associés au problème à 2 ddl à frottement sec.

constaté. Il est ici de type raidissant pour le mode 1, ce qui nous le verrons ne sera pas le cas de l'amortissement issu de la non linéarité.

9.2.1 Tracé du premier MNL amorti

L'algorithme de continuation par PGD/HBM adapté au cas des MNLs amortis, présenté dans le Chap. 6, a été utilisé pour tracer la Fig. 9.10 qui représente l'évolution des grandeurs modales non linéaires en fonction de l'amplitude $|x_1|$ du premier ddl du système. On peut voir

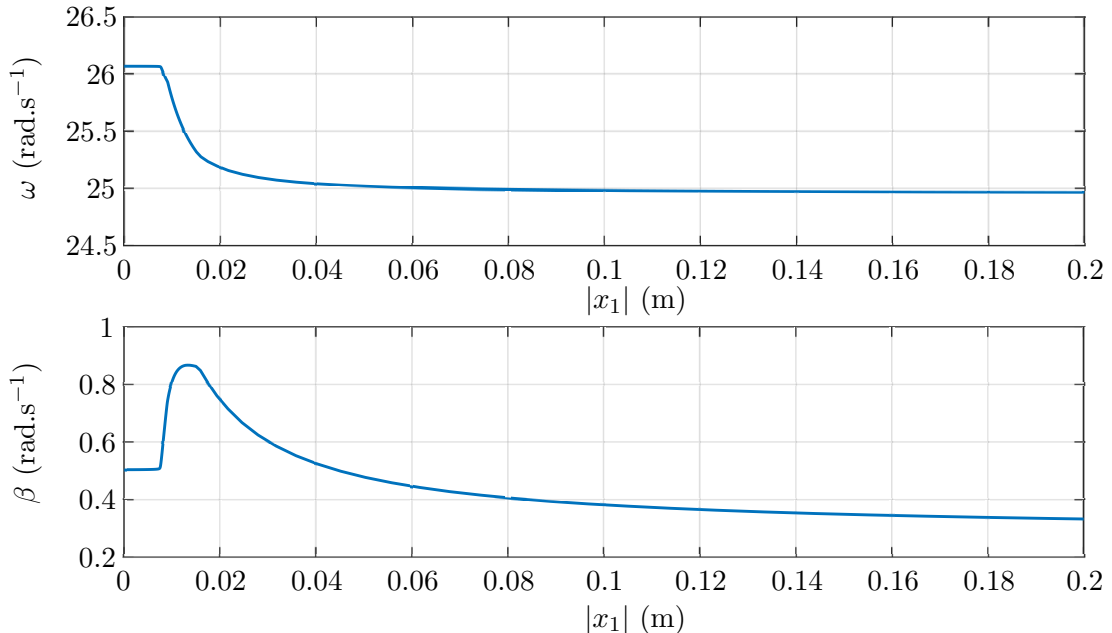


FIGURE 9.10 – Évolution des grandeurs modales le long de la branche du premier MNL amorti.

que la pulsation de la partie périodique des points du MNL amorti varie entre les deux cas

limites d'adhérence et de glissement présentés précédemment, respectivement à basse et à haute amplitude $|x_1|$. La non linéarité dissipative a un effet assouplissant sur le MNL 1, accompagné de la mise en évidence d'un maximum de taux d'amortissement modal β . On retrouve donc qualitativement les résultats obtenus par Joannin [36].

Le calcul est fait avec $m = 2$ modes en pPGD et avec $H = 5$ harmoniques, bien que le contenu fréquentiel de tous les modes PGD soit pour cet exemple quasi-uniquement constitué de la contribution du fondamental. Les paramètres algorithmiques propres à cet essai sont récapitulées dans le Tableau 9.8 ci-dessous. À ces paramètres s'ajoute l'équation de phase nécessaire pour rendre le système carré. Il s'agit ici de $\dot{x}_1(t = 0) = 0$.

Variante PGD	Δm	$m_{\max \text{ tot}}$	r_ε	r_s^{mult}	r_s^{div}
pPGD	1	2	1/1500	1.06	0.5
Δs	k_{\max}	ε_{\max}	r_{ad}	$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} : x_1(t = 0)$	$\{\alpha_P, \alpha_q, \alpha_\omega, \alpha_\beta\}$
1	5	$15 \cdot 10^{-2}$	0.8	$\{1 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}\} \text{ m}$	$\{0, 1, 1, 10^{-4}\}$

TABLEAU 9.8 – Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL 1 du système à frottement sec.

9.2.2 Initialisations spatiales

Pour obtenir ce résultat, l'algorithme a été directement initialisé en taille $m = 2$, donc avec deux formes à amplitude nulle. Comme évoqué dans le Chap. 6, la forme seule de la partie réelle du mode linéaire complexe ne suffit pas à obtenir les deux premiers points du MNL. Le premier mode linéaire complexe χ_1 présente des parties réelle et imaginaire loin d'être proportionnelles, ce qui traduit un fort déphasage entre les ddls et plus globalement un amortissement fort. Ainsi, l'information spatiale contenue dans chacune de ces contributions peut être considérée comme indépendante : les deux formes injectées dans le solveur seront donc $\text{Re}(\chi_1)$ et $\text{Im}(\chi_1)$, quitte à amorcer l'algorithme en taille $m = 2$.

Par ailleurs, cette description spatiale de taille 2 suffit pour décrire l'ensemble de la branche du premier MNL amorti de ce petit système. Seules leurs parties temporelles évoluent, et sans génération significative d'harmoniques supérieures.

9.2.3 Discussion sur la prise en compte de l'amortissement

Dans le Chap. 6, le solveur pour MNL amorti présenté repose sur une hypothèse d'amortissement faible qui mène à négliger la décroissance exponentielle dans le calcul de l'AFT lié à l'effort non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Lorsque les points calculés dans l'Algorithme 3 doivent vérifier le critère d'erreur, des problèmes de convergence apparaissent du fait de valeurs de ε souvent trop élevées. Ceci provient du fait que l'on cherche à vérifier numériquement les équations de la dynamique avec des points obtenus à partir de cette hypothèse simplificatrice sur la dissipation non linéaire.

Sur la Fig. 9.11, l'erreur ε est tracée le long de la branche. Deux constats peuvent être faits : d'une part le seuil ε_{\max} a dû être rehaussé pour permettre l'obtention de ce MNL, et ce

en accord avec l'explication précédente, d'autre part l'allure de la courbe suit celle de l'évolution de β dans la Fig. 9.10.

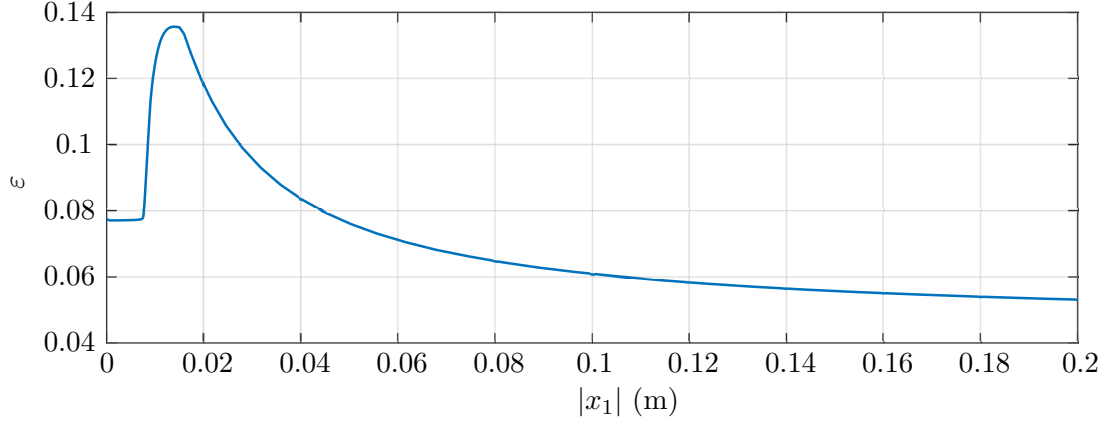


FIGURE 9.11 – Erreur ε le long de la branche du premier MNL amorti.

On peut ainsi aisément se rendre compte que l'erreur augmente d'autant plus que l'amortissement est élevé, et donc à mesure que l'hypothèse de départ est mise en défaut. Des travaux ultérieurs réintégrant la prise en compte de l'amortissement dans la contribution non linéaire permettraient probablement de passer outre ce phénomène. Une piste possible pourrait être de reconsidérer les développements de Laxalde et Thouverez [47] en amont de l'étape de dégénérescence de la série de Fourier décrivant la solution pseudo-périodique.

9.3 Synthèse modale non linéaire sur système académique à non linéarités géométriques

Un dernier exemple de système va à présent être traité, en vue cette fois de valider les solveurs de synthèse modale à partir de MNLs développés en Partie 3. En plus de l'obtention d'une FRF, on cherchera à mettre en évidence la différence entre le fait d'injecter des MNLs non amortis ou amortis dans le modèle.

La structure étudiée est le système déjà introduit en Sec. 1.5.2.b constitué de deux masses et deux ressorts dont les non linéarités géométriques (polynomiales d'ordre 3) sont conservées et dont le schéma est rappelé en Fig. 9.12. Ce choix d'exemple est fait à visée comparative, car déjà traité dans la littérature [82, 7] et en particulier dans le travail de Touzé et Amabili [81], duquel sont extraites les constantes physiques utilisées pour cette application numérique.

En base modale, pour des ressorts de longueur initiale $l_0 = 1$, et pour une excitation f_e localisée uniquement sur le premier mode de vibration, les équations à résoudre sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \frac{\partial E_{pm}}{\partial x_1} = f_e \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 + \frac{\partial E_{pm}}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \quad (9.3)$$

avec $E_{pm} = \frac{1}{2}\omega_1^2(x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2))^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2(x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2))^2$. Comme dans [81], les paramètres choisis sont ceux donnés dans le Tableau 9.9.

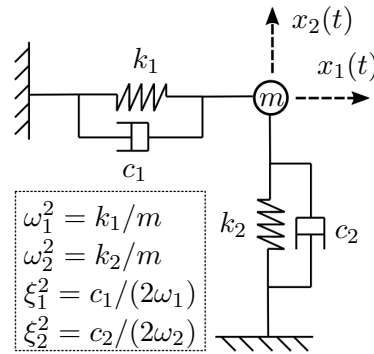


FIGURE 9.12 – Système masse-ressorts de taille 2 à non linéarités géométriques.

ω_1 (rad.s ⁻¹)	ω_2 (rad.s ⁻¹)	ξ_1	ξ_2	f_e (N/kg)
2	4.5	0.001	0.01	0.001

TABLEAU 9.9 – Propriétés physiques du système à 2 ddls à non linéarités géométriques.

9.3.1 Tracé de la première résonance

Le premier MNL (amorti ou non) de la structure est préalablement obtenu à l'aide des algorithmes de continuation par PGD/HBM décrits dans la Partie 2. Le calcul est réalisé par pPGD avec une prise en compte de $H = 10$ harmoniques.

On représente sur la Fig. 9.13 la première résonance au travers de l'évolution de l'amplitude $|x_1|$ du premier ddl en fonction de la pulsation ω_e du forçage mono-harmonique. Les paramètres

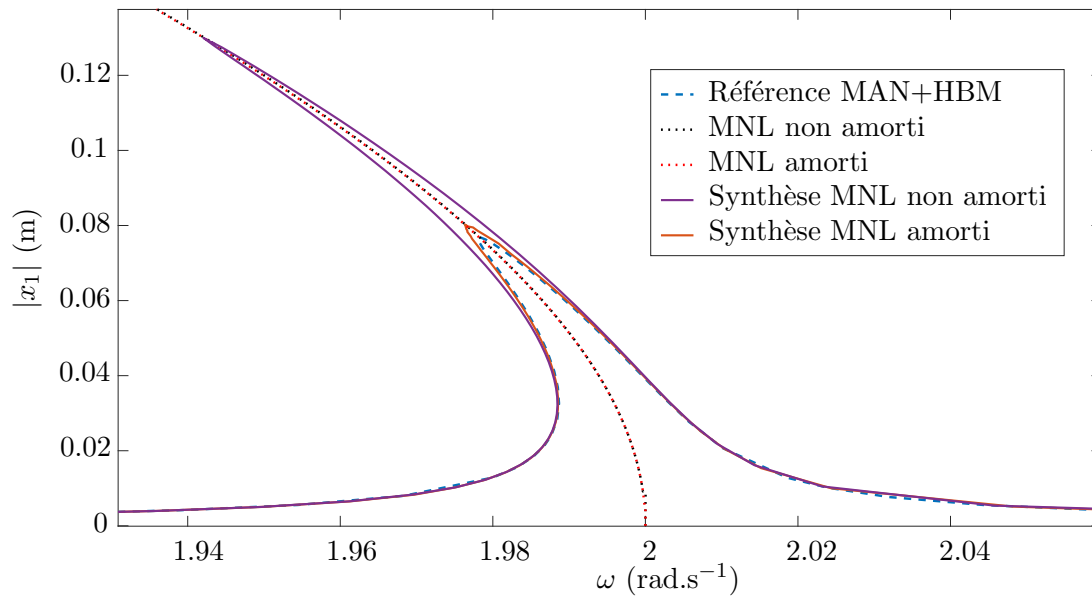


FIGURE 9.13 – FRF autour de la première résonance du système à non linéarités géométriques, tracée avec les solveurs de synthèse modale à partir de MNLs amortis ou non.

algorithmiques utilisés par le solveur de synthèse et relatifs à l’Algorithme 4 sont donnés pour information dans le Tableau 9.10.

ω_{\max}	I_{\max}	r_i	r_s^{mult}	r_s^{div}	Δ_s	$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} : \omega$	$\{\alpha_s, \alpha_\phi, \alpha_\omega\}$
5	1000	10^{-2}	1.01	0.5	1	{1.30, 1.31}	{1, 1, 1}

TABLEAU 9.10 – Paramètres algorithmiques utilisés par l’Algorithme 4 pour tracer la première résonance du système à non linéarités géométriques.

Le choix de représenter le ddl 1 plutôt que l’autre est guidé par le forçage modal de l’Eq. (9.3). On peut obtenir une FRF qualitativement similaire sur le ddl 2, mais à amplitude moindre. La seconde résonance n’est de toute façon que très peu perceptible du fait de la faible valeur de f_e . Par ailleurs, la différence entre MNLs amorti et non amorti n’est pas perceptible sur ce graphe du fait des faibles amortissement et forçage dans ce cas d’étude.

La Fig. 9.13 met en revanche en avant un résultat notable : le MNL amorti permet, via la prise en compte des effets dissipatifs visqueux, une meilleure estimation de la résonance qu’avec son pendant conservatif. Les résultats sont comparés avec une référence obtenue par la MAN couplée à une HBM à $H = 10$ harmoniques. Lors de l’obtention de ce graphe, de fortes similitudes avec des résultats obtenus par Touzé et Amabili ont été constatées (cf. [81], Fig. 2). Les méthodes d’obtention diffèrent : une méthode des échelles multiples (cf. Sec. 2.3.1) est appliquée à différentes formulations du même système dynamique obtenues par la méthode des formes normales [35, 82]. Au final, les auteurs tracent la même résonance à partir d’objets appelés “MNLs amortis” et “MNLs conservatifs”, pour des résultats qualitativement semblables. Un cas “tronqué au mode linéaire” est également testé, que nous rapprocherons dans le présent travail du cas où le premier mode linéaire est injecté dans les solveurs de synthèse à la place des MNLs. Ce cas exploratoire est représenté sur la Fig. 9.14. Sur cet essai supplémentaire, la

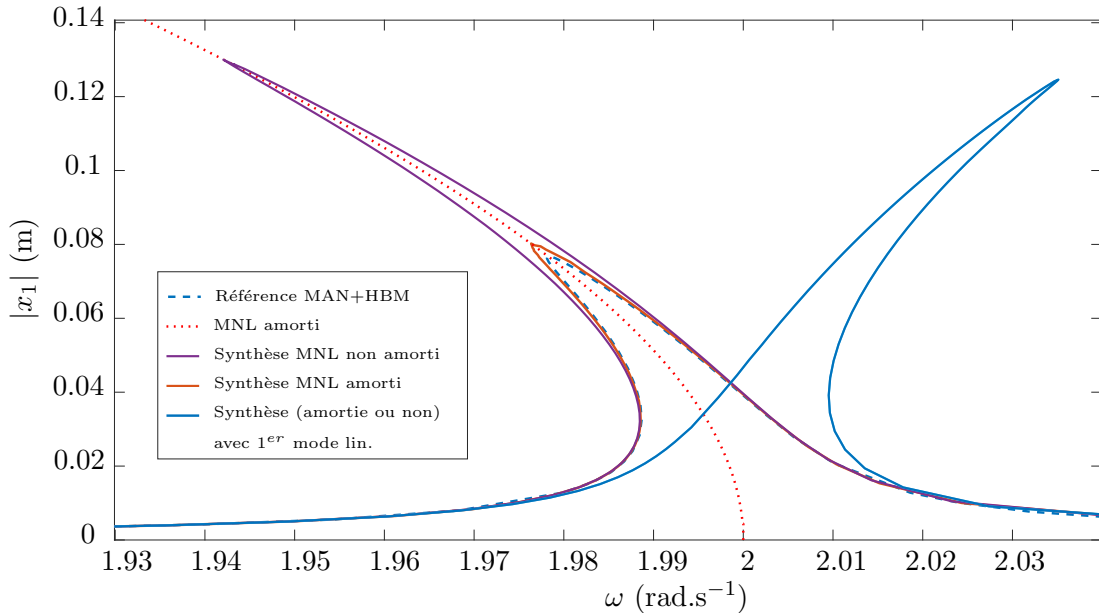


FIGURE 9.14 – FRF autour de la résonance du système à non linéarités géométriques dont un tracé obtenu par synthèse modale non linéaire à partir du mode linéaire sous-jacent.

phénoménologie est la même que chez Touzé et Amabili. Non seulement l’information modale

contenue dans le mode linéaire ne permet pas d'estimer correctement la résonance obtenue par la MAN, mais le type même de non linéarité est ici mal estimé, puisque l'on trouve un comportement raidissant ou lieu d'un comportement assouplissant.

Contenu harmonique Pour le cas fonctionnant le mieux, *i.e.* via l'utilisation du MNL amorti pour réaliser la synthèse, le contenu harmonique a déjà été exposé dans le Chap. 7 dans la Fig. 7.2. On rappelle seulement au lecteur le bon accord trouvé avec les résultats de la référence, bien que de petites différences commencent à apparaître pour les hautes harmoniques. Le cas exploitant les MNLs non amortis, un peu moins performant autour de la résonance, est illustré en Fig. 9.15.

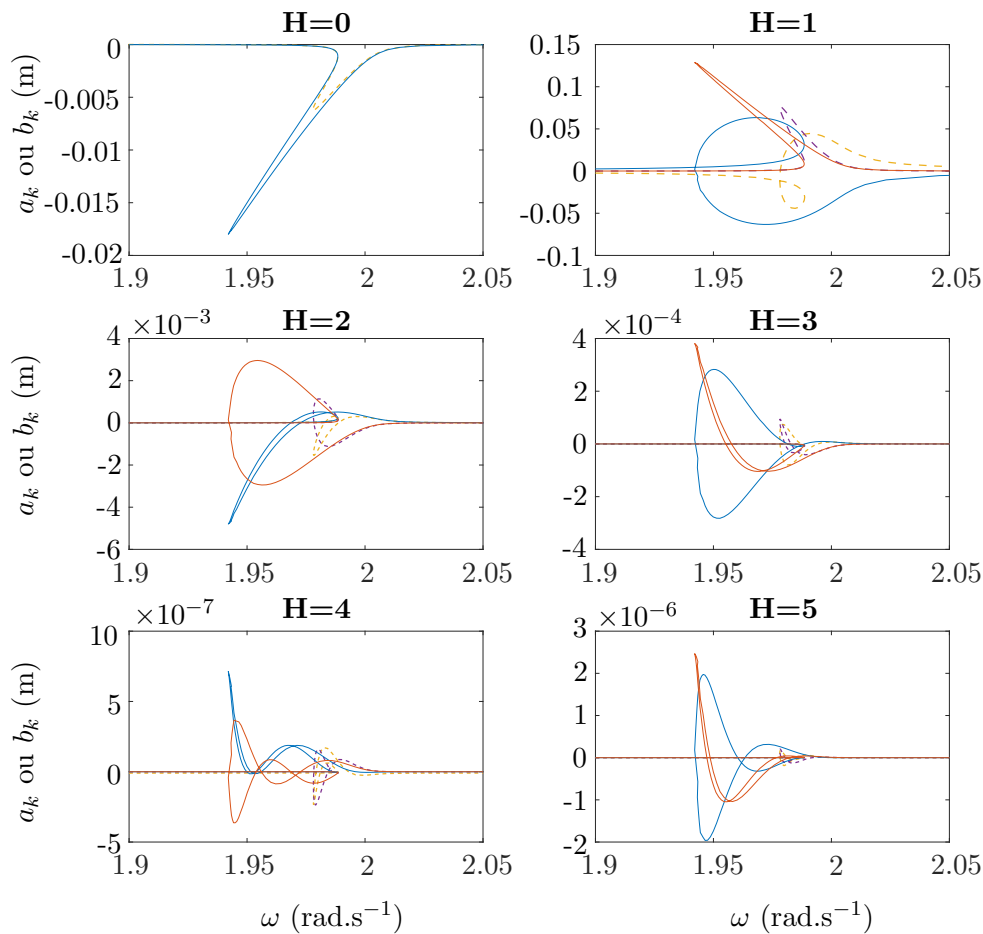


FIGURE 9.15 – Première résonance du système à non linéarités géométriques représentée par harmonique, pour le ddl 1 dans le cadre d'une synthèse modale via MNL non amorti. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse. Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.

9.3.2 Caractéristiques liées au solveur de synthèse modale non linéaire

La Fig. 9.16 et la Fig. 9.17 représentent respectivement dans le cas amorti et dans le cas non amorti les évolutions des 3 inconnues $\{s, \phi, \omega\}$. Le comportement de l'index s défini en Eq. (7.5)

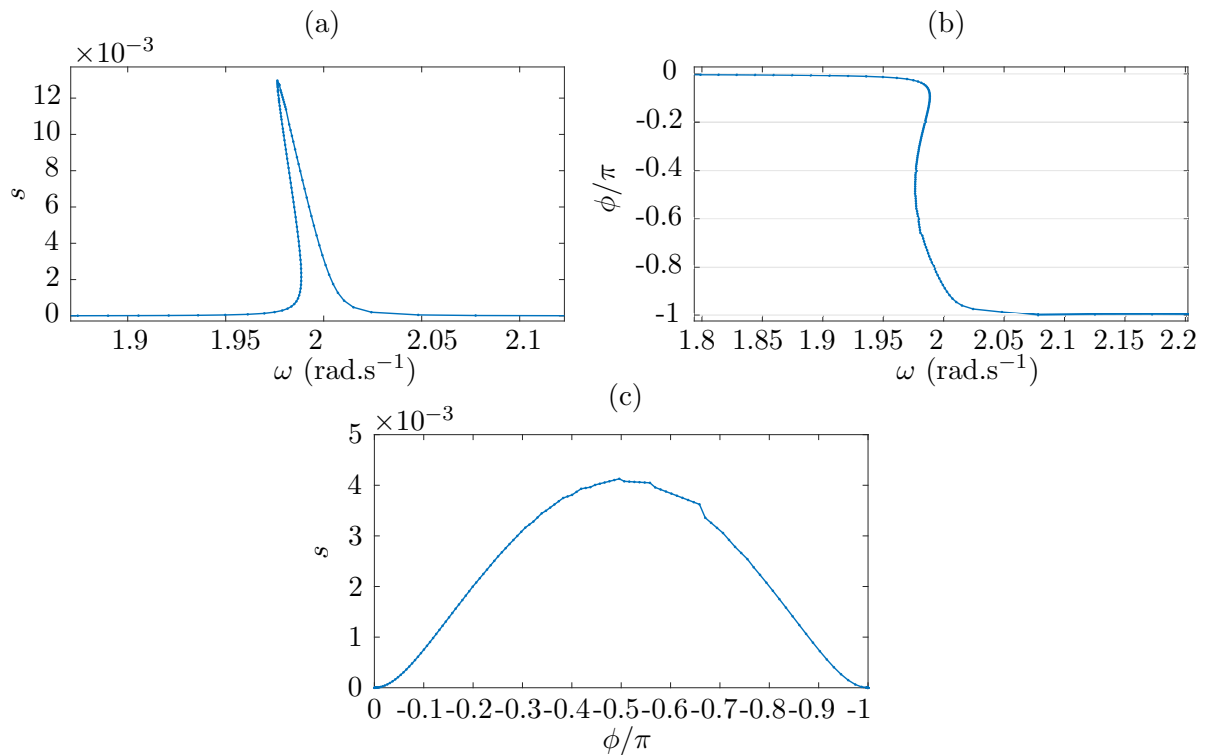


FIGURE 9.16 – Solutions obtenues par le solveur réduit de synthèse non linéaire à partir du MNL amorti. (a) Amplitude modale en fonction de la pulsation d’excitation (b) Phase en fonction de la pulsation d’excitation (c) Amplitude modale en fonction de la phase.

qui joue ici le rôle d’amplitude modale et celui de la phase unique ϕ sont en accord avec la physique représentée : comportement assouplissant en amplitude tandis que la phase décroît de 0 à $-\pi$ en passant par $-\frac{\pi}{2}$ à la résonance non linéaire. On note également un “retour en arrière” de la phase par rapport à la pulsation d’excitation. Les sous-graphes (b) et (c) montrent à ce propos qu’un balayage de la phase suffirait pour décrire la dynamique de ce système sans avoir recours à un schéma de continuation. La phase unique ϕ est en effet une fonction monotone, et on retrouve dans un cadre où un contrôle par la phase serait adapté, comme cela a été démontré en dimension 1 par Sarrouy dans [70].

Que ce soit dans le cas amorti ou non amorti, tous ces graphes ont par ailleurs été retrouvés en utilisant les solveurs du Chap. 8 sans schéma de continuation : le balayage de la phase a été réalisé de 0 à $-\pi$, associant à chaque point de FRF un des systèmes de taille 2 de l’Eq. (8.7) ou de l’Eq. (8.8).

Enfin, on remarque sur la Fig. 9.18 une bonne exploitation de l’information modale du MNL (ici dans le cas amorti) lors de l’interpolation faite pour déterminer la valeur de s telle que décrite en Sec. 8.1.3. Ceci est cohérent avec la phénoménologie en présence : lors du passage de la résonance, ce sont bien des points du MNL de plus haut indice s qui sont mobilisés.

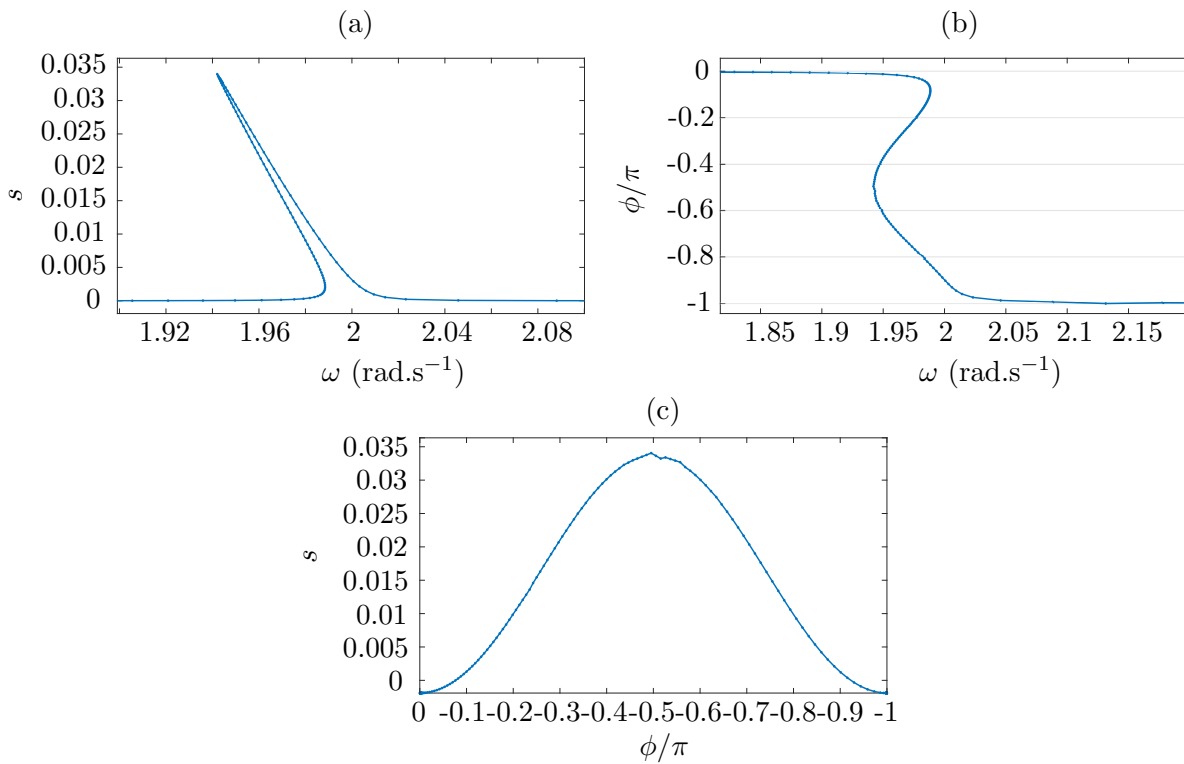


FIGURE 9.17 – Solutions obtenues par le solveur réduit de synthèse non linéaire à partir du MNL non amorti. (a) Amplitude modale en fonction de la pulsation d'excitation (b) Phase en fonction de la pulsation d'excitation (c) Amplitude modale en fonction de la phase.

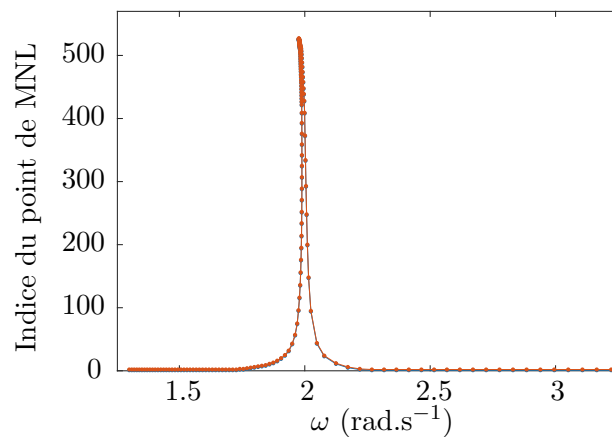


FIGURE 9.18 – Indices des points de MNL (amorti) utilisés pour l'interpolation lors du calcul d'un point de FRF. Bleu : points avec s_1 directement inférieur à s interpolé. Rouge : points avec s_2 directement supérieur à s interpolé.

9.3.3 Considérations numériques

Enfin, revenons rapidement sur quelques résultats purement numériques. L'erreur commise en chaque point de la FRF, correspondant à l'évaluation des fonctions par le solveur de type

Newton, est tracée en Fig. 9.19 pour le cas amorti. Comme attendu, les points ayant relativement moins bien convergé que les autres sont ceux de la zone de résonance.

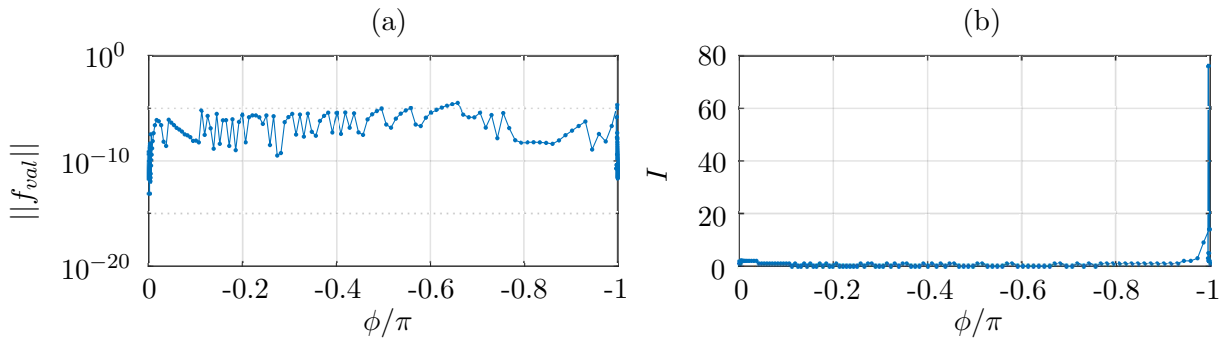


FIGURE 9.19 – Performances du solveur de synthèse non linéaires pour le système à non linéarités géométriques. (a) Évolution de l'erreur faite par solveur de Newton (b) Évolution du nombre d'itérations de Newton I .

La plupart des points convergent par ailleurs en moins de 3 itérations de Newton, ce qui amène à un total de 287 itérations pour l'ensemble de la FRF (entre 1.3 et 5 rad.s^{-1}) en un temps CPU d'environ 8 secondes. Bien qu'il ne soit pas pertinent de conclure quant à ces performances à partir d'un exemple en taille 2, nous verrons que ces tendances se confirmeront dans le chapitre suivant, pour un exemple plus volumineux.

9.3.4 Essai du solveur basé sur l'erreur dynamique

Le solveur de synthèse basé sur une forme d'orthogonalisation de l'erreur dynamique dans l'Eq. (8.11) a été testé sur ce système. Le MNL1 amorti y est injecté, ce qui permet d'obtenir les résultats présentés en Fig. 9.20. L'intérêt de cette piste, qui on le rappelle permet de s'affranchir d'un choix arbitraire de projection sur l'harmonique pour obtenir 2 équations, est clairement confirmé : la concordance avec la référence permet d'espérer une amélioration des tracés de FRF en utilisant "mieux" les MNLs calculés.

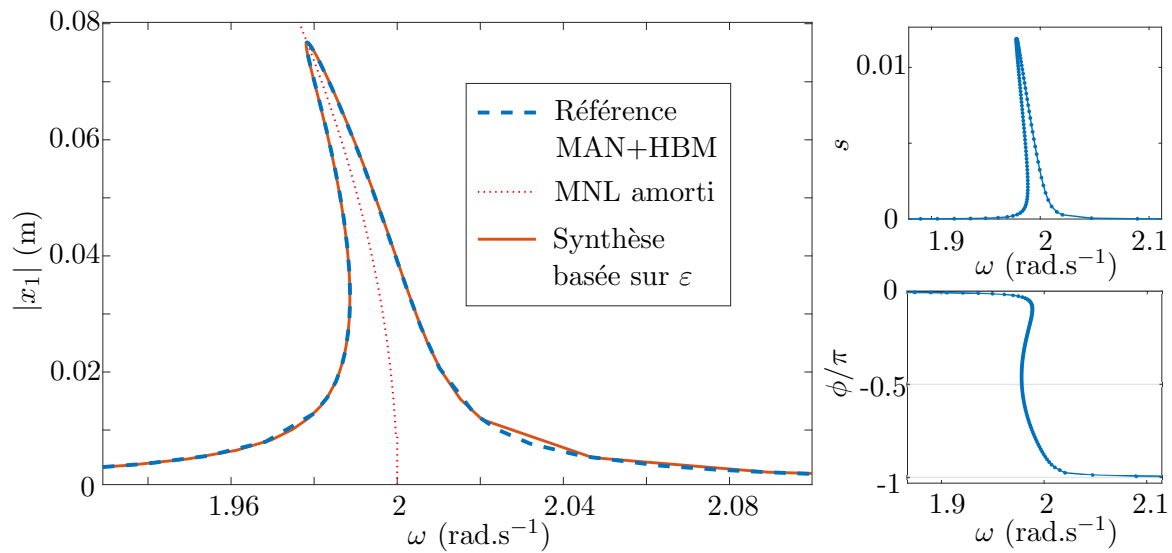


FIGURE 9.20 – FRF autour de la première résonance du système à non linéarités géométriques, tracée avec le solveur de synthèse modale défini à partir de l'erreur dynamique ε et avec injection du MNL1 amorti.

Modèles de poutres à non linéarités localisées dont contact

Dans ce second chapitre consacré à des applications numériques des méthodes développées dans les Parties 2 et 3, on montre les résultats obtenus pour des systèmes de poutre d'Euler-Bernoulli présentant des non linéarités localisées. Deux systèmes présentant le même exemple de poutre encastree-libre seront étudiés : d'une part un modèle avec ressort cubique transverse attaché en bout de poutre, et d'autre part un contact unilatéral non régularisé, lui aussi en bout de poutre. Les performances et les résultats attendus des méthodes de calcul précédemment développées seront illustrées, du calcul des MNLs à leur injection dans l'algorithme de synthèse modale construit à partir de ces modes.

PLAN DU CHAPITRE 10

10.1	Modèles de poutre d'Euler-Bernoulli	145
10.2	Poutre encastrée-libre avec ressort de bout cubique	146
10.2.1	Tracé du premier MNL conservatif	146
10.2.2	Considérations numériques sur le calcul du MNL conservatif	152
10.2.3	Tracé du premier MNL amorti et de la résonance 1	154
10.3	Poutre encastrée-libre avec contact unilatéral	156

10.1 Modèles de poutre d'Euler-Bernoulli

Deux systèmes mécaniques vont être décrits et pris en tant qu'exemples pour la méthode de continuation de MNL par combinaison PGD/HBM ainsi que pour la synthèse modale non linéaire à partir de MNLs. Ces systèmes sont des poutres d'Euler-Bernoulli pour lesquelles des non linéarités sont localisées sur un ddl spécifique. Ces cas d'étude présentent l'avantage d'être semi-académiques, dans le sens où les expressions analytiques qui leur sont associées sont connues, relativement simples à écrire, et permettent de simuler des systèmes industriels de grande taille en jouant sur le nombre d'éléments finis. Le premier modèle de poutre présente un ressort à raideur cubique à son extrémité. Le second modèle présente un contact unilatéral en bout de poutre. Les deux cas d'étude sont illustrés sur la Fig. 10.1. On note que les non linéarités sont ici conservatives, ce qui implique qu'une base Fourier uniquement composée de cosinus sera suffisante, et seuls $(H + 1)$ coefficients de Fourier seront à calculer au lieu de $(2H + 1)$.

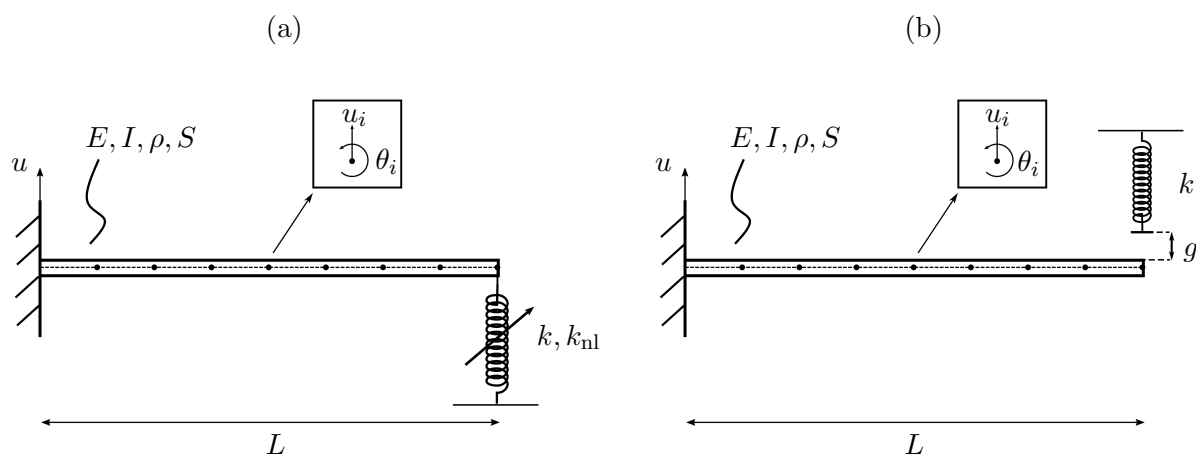


FIGURE 10.1 – Poutre d'Euler-Bernoulli encastree-libre (a) avec ressort transverse cubique sur le ddl 1 (b) avec jeu transverse entre le ddl 1 et le ressort lineaire.

Définissons à présent les valeurs des propriétés de la poutre : module de Young $E = 210$ GPa, masse volumique $\rho = 7800$ kg.m⁻³, aire de la section carrée de poutre $S = 9 \cdot 10^{-4}$ m², moment d'inertie quadratique pour une flexion plane $I = 6.71 \cdot 10^{-8}$ m⁴ et longueur $L = 1$ m. La raideur linéaire du ressort vaut $k = 4 \cdot 10^4$ N.m⁻¹. La poutre est discrétisée en $N_e = 20$ éléments par une méthode éléments finis à 2 ddls par nœud : un déplacement transverse u et une rotation θ . On obtient finalement $N = 40$ ddls après prise en compte de l'encastrement (suppression de 2 ddls). Les premières valeurs propres de la poutre seule et du système {poutre+ressort linéaire} sont données dans le Tableau 10.1. Les matrices élémentaires liées au processus éléments finis et permettant le calcul du problème aux valeurs propres linéaire sont rappelées en Annexe C. Dans

	i	1	2	3	4	5	6
ω_i (rad.s ⁻¹)	Poutre seule	157	988	2765	5419	8959	13385
	Avec ressort	217	999	2769	5420	8960	13386

TABEAU 10.1 – Pulsations propres de la poutre encastree-libre avec ou sans ressort de bout.

le premier cas d'étude, une non linéarité polynomiale est introduite via une raideur cubique k_{nl} ajoutée au ressort. Le second cas traite un problème de contact unilatéral : le ressort ne présente

qu'une raideur linéaire mais il existe un jeu g entre l'extrémité de la poutre et le ressort. Il s'agira de contact non régularisé, comme expliqué en Sec. 1.3.1.a.

10.2 Poutre encastree-libre avec ressort de bout cubique

Pour cet exemple, le système linéaire sous-jacent est celui décrit par les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} associées au modèle de poutre (cf. Annexe C) plus la raideur linéaire du ressort de bout de poutre. Le ressort étant accroché au ddl 1, ceci se traduit par l'ajout de raideur $K_{11} = K_{11\text{poutre}} + k$ à la matrice \mathbf{K} . Les pulsations propres linéaires sont données à la seconde ligne du Tableau 10.1.

L'effort non linéaire s'exprime par $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}) = [k_{\text{nl}}u_1^3(t) \mathbf{0}_{N-1}]^T$ avec $k_{\text{nl}} = 9.2 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-3}$. Sur une base exploratoire et parce que la description compacte de la PGD/HBM le permet, $H = 50$ harmoniques sont retenues, bien que ce problème n'en nécessite pas vraiment plus de vingt pour représenter fidèlement son comportement dynamique.

10.2.1 Tracé du premier MNL conservatif

Pour ce système, on peut trouver qu'avec les niveaux de forçage qui seront considérés par la suite, seule la première résonance principale présente un comportement clairement non linéaire (présence de points de retournement sur la FRF). Le MNL d'intérêt sera donc uniquement le premier, bien que rien n'empêche d'appliquer les techniques de ce travail aux autres résonances.

Le MNL non amorti sera illustré dans un premier temps en oPGD, puis en pPGD. Pour les deux cas, les paramètres requis par l'Algorithme 3 sont compilés dans le Tableau 10.2.

	Δm	$m_{\text{max tot}}$	r_ε	r_s^{mult}	r_s^{div}
oPGD	1	10	0.1	1	0.5
pPGD	1	10	0.1	1	0.5
Δs	k_{max}	ε_{max}	r_{ad}	$\mathbf{y}_2 : u_1(t=0)$	$\{\alpha_P, \alpha_q, \alpha_\omega\}$
1.5	10	10^{-3}	0.8	10^{-2} m	$\{1, 10^{-1}, 10^{-4}\}$
1.5	10	10^{-3}	0.8	10^{-3} m	$\{10^{-6}, 10^{-1}, 10^{-4}\}$

TABLEAU 10.2 – Paramètres requis par l'Algorithme 3 pour le cas de la poutre à ressort de bout cubique. Ligne 1 : oPGD ; Ligne 2 : pPGD.

Calcul par oPGD La Fig. 10.2 regroupe les résultats concernant le premier MNL non amorti de la structure, obtenus par oPGD. Sur tous les graphes à venir, la notation N_{pt} désigne l'indice du point de MNL calculé lors du processus de continuation. Pour ce cas d'étude, on se limitera aux 35 premiers points calculés ($N_{\text{pt}} \leq 35$, en trait continu sur la Fig. 10.2). Les points situés dans et après la boucle d'interaction modale seront par ailleurs illustrés dans le cas pPGD qui suit.

Seuls 4 modes PGD sont nécessaires pour décrire le tronçon constitué des 35 premiers points (Fig. 10.2(a),(c),(d) en trait continu). Ce nombre est porté à 6 pour tracer la branche entière (trait en pointillés inclus sur la figure). Dans le cadre des MNLs définis par Rosenberg, on rappelle que tous les ddls vibrent à l'unisson et atteignent leurs extrema en même temps. Ainsi, la déformée du MNL à vitesse nulle représentée en Fig. 10.2(b) donne des informations physiques intéressantes à interpréter. Sur cette sous-figure, on peut voir que plus l'énergie mécanique augmente, plus la raideur non linéaire du ressort de bout prend de l'importance par rapport à l'inertie en flexion de la poutre, ce qui génère des inversions de courbure autour de la zone attachée au ressort. Dans [41], Kerschen trouve des résultats similaires pour une autre poutre à ressort de bout cubique.

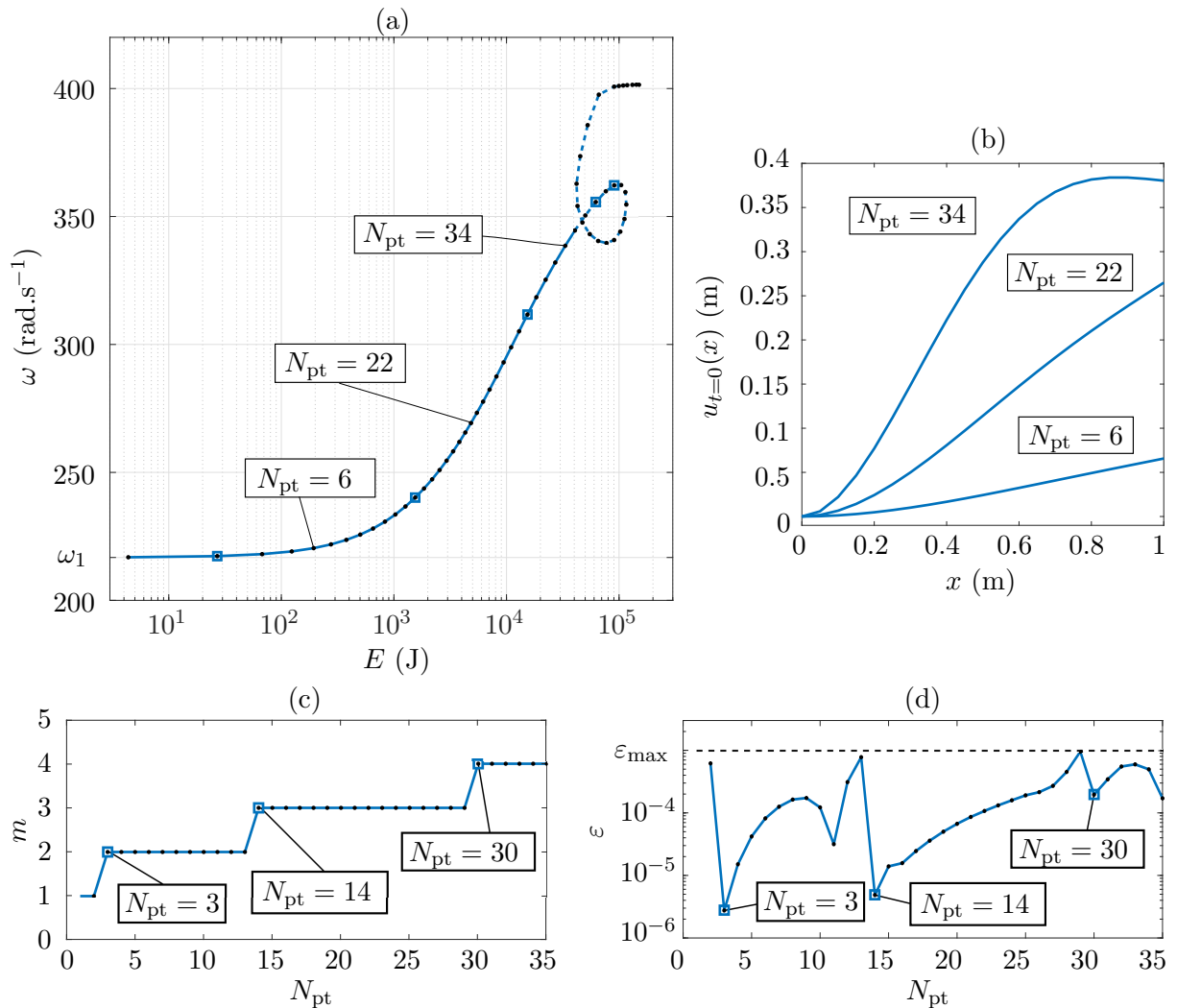


FIGURE 10.2 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – (a) FEP (b) Déformée modale à vitesse nulle pour 3 points de la continuation (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.

Sur la Fig. 10.2(d), la mesure de l'erreur ε est tracée. Son évolution est consistante avec celle de la dimension m : des modes PGD sont ajoutés lorsque ε atteint la valeur limite ε_{max} ,

ce qui en retour fait diminuer l'erreur. Le FEP montre aussi que les modes PGD sont ajoutés graduellement le long de la branche de MNL, ce qui est plutôt attendu pour une non linéarité cubique et donc régulière.

La Fig. 10.3 expose le contenu spatial des modes PGD \mathbf{p}_j . Ces derniers, malgré l'approche oPGD, conservent globalement la même forme le long de la continuation. On retrouve également une propriété intéressante de la méthode de continuation par PGD/HBM : les modes obtenus peuvent contenir les participations de plusieurs modes propres linéaires. Un tel "mode combiné" est le mode PGD 3, lequel présente des contributions significatives des 6 premiers modes propres. L'approche utilisée permet ainsi de prendre en compte des modes linéaires de haut degré dans un jeu réduit de formes obtenues par PGD : ici les 4 modes PGD contiennent l'information modale d'au moins 6 modes linéaires. Le contenu temporel des modes PGD est quant à lui

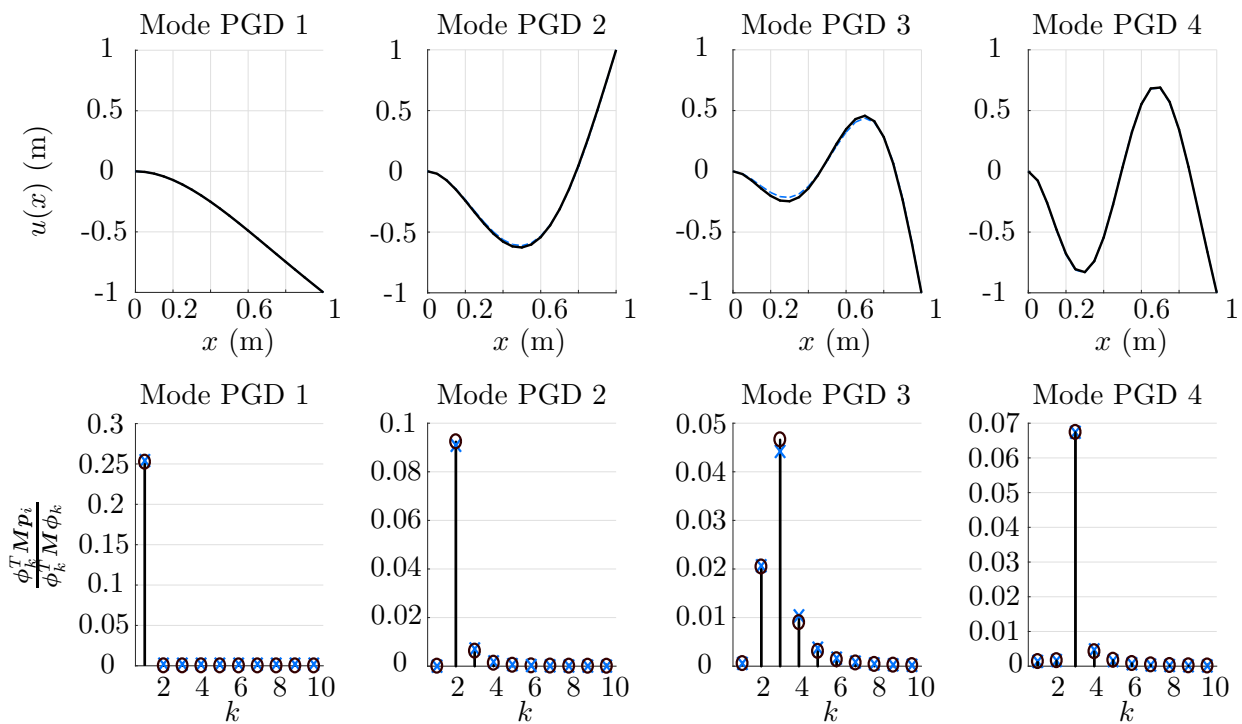


FIGURE 10.3 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. Ligne 1 : formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. Pointillés : forme lorsque le mode est introduit ; Trait continu : forme en fin de tronçon d'étude ($N_{\text{pt}} = 35$). Ligne 2 : Participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Croix : participation lorsque le mode PGD est introduit ; Cercles : participation en fin de tronçon d'étude ($N_{\text{pt}} = 35$).

représenté en Fig. 10.4. Comme les formes varient peu, il est cohérent de retrouver d'importantes variations de la partie temporelle le long de la branche de MNL. On en déduit ainsi *a posteriori* que l'approche pPGD semble mieux adaptée pour traiter ce problème. D'autre part, seules les harmoniques impaires ne sont pas nulles à cause de la nature cubique de la non linéarité. De manière générale, les hautes harmoniques ont moins d'influence : toutes les amplitudes $|a_k|$ sont submillimétriques à partir de $k = 11$, et ce pour tous les modes PGD.

Le comportement du mode PGD 1 est le plus évident car dirigé de manière prépondérante

par le cosinus fondamental. Les autres modes PGD ont un spectre harmonique plus riche, avec des contributions partagées de $|a_1|$, $|a_3|$, $|a_5|$ et $|a_7|$. On peut rapprocher ce constat du fait que ces mêmes modes combinent plusieurs modes linéaires et qu'il est vraisemblable que les différentes contributions sollicitent somme toute une plus grande variété d'harmoniques. Toutes ces interprétations qualitatives montrent aussi la complexification croissante du comportement vibratoire de la poutre et l'influence de plus en plus forte des hautes harmoniques lorsque l'énergie mécanique croît.

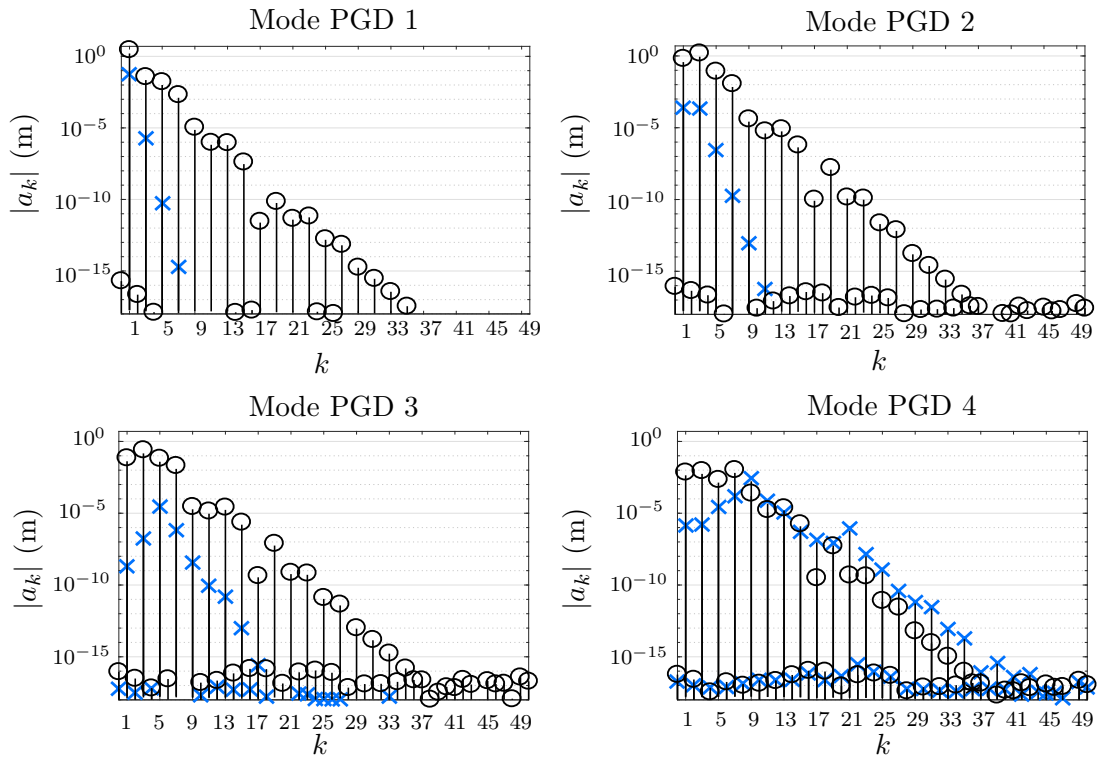


FIGURE 10.4 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de tronçon d'étude ($N_{pt} = 35$).

Finalement, on trouve sur cet exemple encore que les objectifs fixés par la méthode de continuation de MNL par combinaison PGD/HBM sont atteints : la branche est décrite avec peu de descripteurs, la taille m du modèle réduit est gardée la plus faible possible en ne l'incrémentant que lorsque le critère de convergence n'est plus satisfait, et bien entendu les données physiques du cas traité sont bien retrouvées.

Calcul par pPGD Le calcul par pPGD aboutissant logiquement aux mêmes résultats physiques qu'en oPGD, seules les différences avec le paragraphe précédent seront mises en avant.

En utilisant cette variante à formes bloquées, 131 points solutions ont été calculés afin de tracer le FEP présenté en Fig. 10.5. Seuls 7 modes PGD ont été requis par l'algorithme de continuation par pPGD/HBM pour tracer la branche entière, jusqu'à environ $E_{max} = 2.25 \cdot 10^5$ J. La même branche est obtenue avec 6 modes en oPGD, ce qui illustre une fois de plus que le fait de bloquer les formes des modes PGD une fois introduites dans la matrice spatiale \mathbf{P}

conduit à moins de flexibilité spatiale et donc à un plus grand nombre de formes à injecter. Les deux variantes conduisent bien au même FEP.

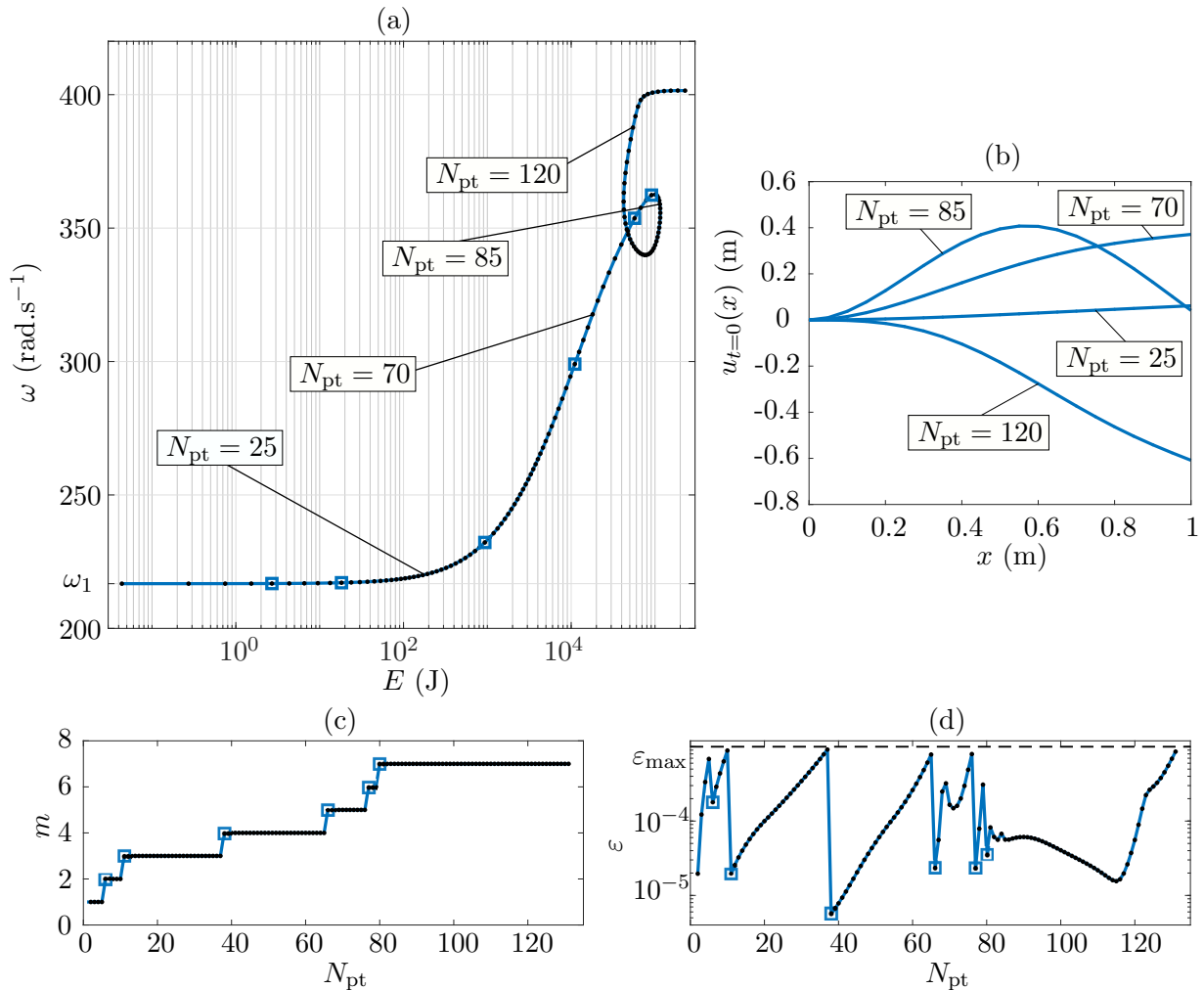


FIGURE 10.5 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – (a) FEP (b) Déformée modale à vitesse nulle pour 3 points de la continuation (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.

Sur les Fig. 10.5(c) et (d), la relation liant l'erreur ε au fait d'injecter de nouveaux modes PGD est retrouvée. Pour les 4 sous-figures, la même série d'interprétations qu'en oPGD peut être faite.

Un détail du contenu spatial des modes PGD \mathbf{p}_i est donné en Fig. 10.6. On y retrouve encore des objets combinant avantageusement les modes propres linéaires, comme le mode PGD 3. Jusqu'à la boucle d'interaction modale, 5 modes PGD suffisent à décrire la dynamique, avec la participation d'au moins 10 modes propres linéaires. Enfin, l'information temporelle associée à chaque mode PGD est détaillée en Fig. 10.7. Comme les formes ne varient pas et que la partie temporelle contient toute l'information en amplitude, il est normal de retrouver une importante variation des coefficients de Fourier le long de la continuation. Une fois encore, seules les harmoniques impaires sont non nulles du fait de la non linéarité cubique. Sur les 50

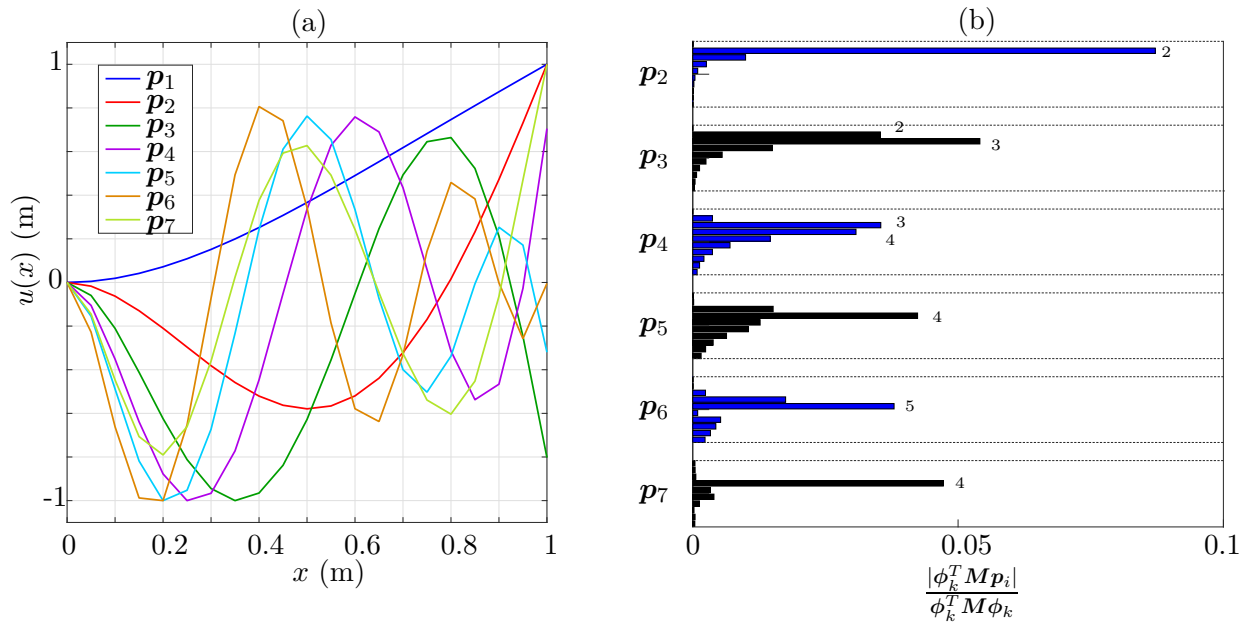


FIGURE 10.6 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. (a) Formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. (b) Participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Dans chaque groupe de barres, les modes linéaires sont indexés par ordre croissant jusqu’au mode 10. p_1 n’est pas affiché car égal au mode linéaire 1.

harmoniques retenues, celles de haut degré ont moins d’influence : à l’énergie maximale, toutes les amplitudes $|a_k|$ à partir de $k = 23$ sont submillimétriques, pour tous les modes PGD.

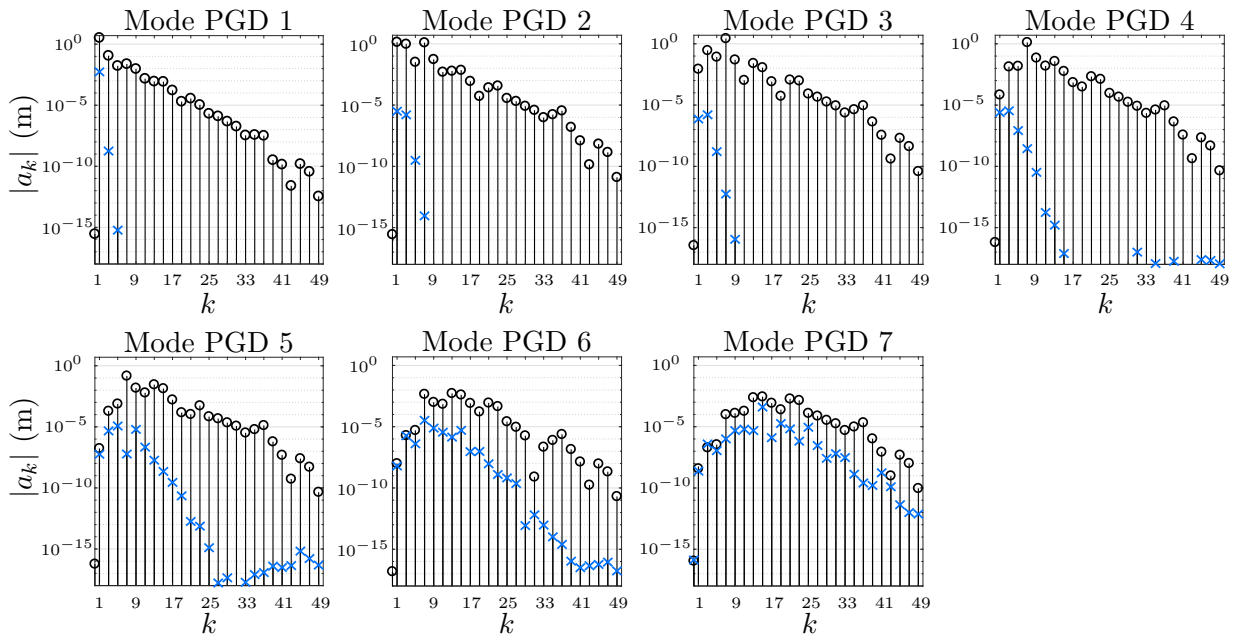


FIGURE 10.7 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de branche.

Le mode PGD 1 est régi par le fondamental tout au long de la branche, et les autres modes ont une plus grande richesse spectrale partagée entre les cosinus. Par exemple, en fin de branche, les 15 premières harmoniques impaires sont prédominantes dans les modes PGD 2–4 et les hautes harmoniques sont plus présentes dans les modes PGD 5–7.

10.2.2 Considérations numériques sur le calcul du MNL conservatif

Gain en descripteurs Les continuations par PGD/HBM diffèrent du fait même de l'utilisation de schéma de prédiction-correction point par point : les cas oPGD et pPGD ne sont pas tracés avec le même nombre de points et les tailles m ne varient pas de la même manière dans chaque cas. On comparera donc dans un premier temps pPGD ou oPGD à leur HBM équivalente, puis nous utiliserons comme référence les points calculés en pPGD pour comparer cette fois la quantité de descripteurs des 2 variantes entre elles. Les résultats sont présentés dans le Tableau 10.3. On note que les chiffres obtenus pour la oPGD ne concernent que les 35 premiers points de la branche (avant interaction modale).

	pPGD/HBM	oPGD/HBM	HBM	r_{PGD}
pPGD vs HBM	33266	-	267371	88%
oPGD vs HBM	-	8771	71435	88%
pPGD vs oPGD	33266	58695	267371	oPGD : 78%

TABLEAU 10.3 – Comparaison entre le nombre de descripteurs requis pour la pPGD/HBM, la oPGD/HBM et la HBM classique pour la poutre à ressort cubique. Dernière ligne : la référence pour le nombre de points et la taille m est celle du calcul par pPGD/HBM.

Sur cet exemple, les deux approches (pPGD et oPGD) sont très efficaces en terme de compacité de description, avec 88% de variables en moins par rapport à la HBM équivalente. Avec les points obtenus par pPGD, la oPGD serait un peu moins légère, avec 78% de variables en moins qu'une HBM équivalente (au cas pPGD). Ceci est bien cohérent avec le fait que la grande majorité des points ne recalculent pas le problème spatial et que les formes n'évoluent pas une fois calculées.

Gain en itérations de Newton Les résultats exposés ici concernent le solveur à région de confiance utilisé pour résoudre les sous-problèmes \mathcal{S}_m et \mathcal{T}_m , qui sont pour rappel algébriques non linéaires. L'algorithme requiert des tolérances en abscisse et sur les fonctions évaluées 10^{-9} et 10^{-12} respectivement pour les cas oPGD et pPGD – et un nombre maximal d'itérations de Newton I_{max} ici fixé à 100. Cette limite n'est pas souvent approchée lors de la continuation, seulement lorsqu'un mode PGD est sur le point d'être ajouté et au point de retournement de la boucle d'interaction modale.

Le Tableau 10.4 présente quelques données statistiques relatives au nombre d'itérations de Newton réalisées pour les deux variantes.

Comme attendu, le problème spatial calculé en oPGD est plus lourd. La pPGD permet de calculer un nombre moindre de problèmes spatiaux ce qui fait qu'une majorité de points sont "résolus en 0 itération" pour \mathcal{S}_m . Malgré son manque de flexibilité en forme, cette variante

		Nombre moyen d'itérations	Écart type	Nombre maximum d'itérations
oPGD	\mathcal{T}_m	6.23	4.89	22
	\mathcal{S}_m	16	10.92	54
pPGD	\mathcal{T}_m	6.56	17.96	206
	\mathcal{S}_m	1.29	6.23	46

TABLEAU 10.4 – Moyenne, écart type et maximum du nombre d'itérations de Newton pour les sous-problèmes \mathcal{T}_m et \mathcal{S}_m le long de la continuation.

montre ici encore son efficacité pour alléger le traitement du sous-problème spatial.

Influence de l'ordre des sous-problèmes Analysons à présent les performances numériques de l'Algorithme 1 lorsque le sous-problème spatial \mathcal{S}_m est calculé en premier dans la boucle d'itérations de point fixe. Comme expliqué dans la Sec. 4.2.4.b, lorsque \mathcal{S}_m est calculé avant \mathcal{T}_m , le manque d'information temporelle à notre disposition pour initialiser le sous-problème spatial est contourné en injectant des valeurs aléatoires dans \mathbf{Q}_H .

On teste donc cette approche en prenant des nombres aléatoires distribués uniformément entre 0 et 1 pour initialiser \mathbf{Q}_H . La démarche étant testée sur le cas oPGD, les mêmes paramètres algorithmiques sont pris, à l'exception bien entendu des choix liés aux nouveaux modes PGD introduits.

Dans le cas non-aléatoire, 35 tentatives de calcul de points solutions sont faites, conduisant directement à 35 points solutions. Autrement dit, la ligne 17 de l'Algorithme 1 n'est jamais appelée. Pour réaliser la comparaison, on relèvera lors de 25 tirages du cas aléatoire les valeurs suivantes, associées à 35 tentatives de calcul de points solutions : le maximum d'énergie atteint E_{\max} et les données relatives au nombre d'itérations de Newton. Les itérations faites lors des tentatives ayant échouées sont comptabilisées parmi celles du prochain point convergé. Les résultats sont compilés dans le Tableau 10.5.

	Min.	Moyenne	Écart type	Max.
Points convergés	5	21.2	9.31	31
E_{\max} (J)	$3.74 \cdot 10^{-10}$	$3.71 \cdot 10^3$	$4.4 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^4$
Nombre d'itérations pour \mathcal{T}_m	3	209.93	389.59	3000
Nombre d'itérations pour \mathcal{S}_m	3	110.62	192.03	1463

TABLEAU 10.5 – Moyenne, écart type et extrema de propriétés numériques pour les 25 essais aléatoires.

Contrairement au cas non-aléatoire, des tentatives infructueuses sont systématiquement relevées parmi les 35 réalisées. Le sous-problème temporel est particulièrement pénalisé par la présence des coefficients aléatoires. D'autre part, aucun des tirages n'atteint l'énergie finale obtenue en traitant \mathcal{T}_m en premier. Certains tirages stagnent à très basse énergie et 24 sur 25 d'entre eux présentent des points de MNL qui "reviennent en arrière" dans la continuation. Ces différents constats permettent de conclure sur le manque de robustesse de l'initialisation aléatoire

des nouveaux modes PGD. Pour finir, on ajoutera qu'il est de toute façon plus avantageux de s'affranchir de la variante aléatoire pour préserver la reproductibilité des résultats.

10.2.3 Tracé du premier MNL amorti et de la résonance 1

Pour cette partie de l'étude, définissons une matrice d'amortissement \mathbf{C} et un effort extérieur $\mathbf{f}_e(t)$ mono-harmonique entièrement localisée sur le ddl 1 (déplacement transverse du bout de poutre). Arbitrairement, avec $\tilde{\mathbf{C}}$ matrice d'amortissement en base modale et f_e amplitude de l'effort, on prend :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag}(2\xi_k\omega_k) & \text{avec } \xi_k = 0.02 \\ f_e = 2500 \text{ N.} \end{cases} \quad (10.1)$$

Le tracé du premier MNL amorti de la structure par pPGD amène à des résultats fort similaires à ceux de la section précédente. Le contenu des modes PGD ainsi que les données liées aux performances numériques de l'algorithme de continuation par PGD/HBM ne seront donc pas présentés. Seuls les paramètres d'entrée d'une part et les données modales non linéaires et l'erreur le long de la continuation d'autre part sont respectivement données dans le Tableau 10.6 et sur la Fig. 10.8.

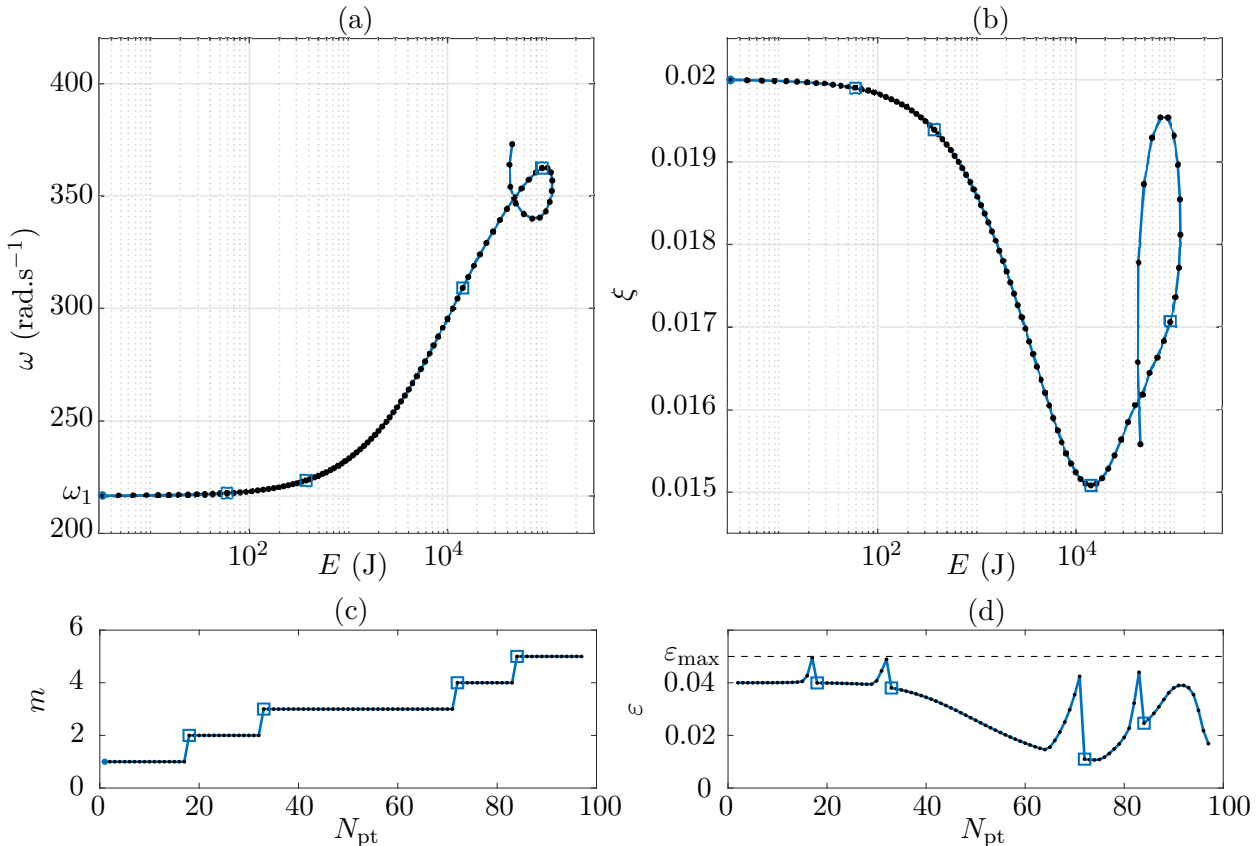


FIGURE 10.8 – Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 amorti par pPGD – (a) FEP (b) Amortissement modal en fonction de l'énergie mécanique conservative (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.

Variante PGD	Δm	$m_{\max \text{tot}}$	r_ε	r_s^{mult}	r_s^{div}
pPGD	1	10	1/100	1.05	0.5
Δs	k_{\max}	ε_{\max}	r_{ad}	$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} : x_1(t=0)$	$\{\alpha_P, \alpha_q, \alpha_\omega, \alpha_\beta\}$
1.5	5	10^{-1}	0.8	$\{1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}\}$ m	$\{1, 1, 1, 1\}$

TABLEAU 10.6 – Paramètres de l’Algorithme 3 pour le MNL1 amorti de la poutre à ressort cubique.

En quelques mots, l’algorithme est amorcé en taille 2 à partir du premier mode complexe, comme dans le cas du frotteur du Chap. 9, et les 5 modes PGD nécessaires à la continuation de la branche représentée sur cette figure sont assez proches en forme de ceux obtenus en pPGD dans le cas conservatif, avec des conclusions semblables sur le comportement harmonique. Par exemple, les formes des modes PGD 2–5 sont des combinaisons de modes linéaires dont l’évolution fait intervenir de hautes harmoniques impaires, alors que le mode PGD 1 est essentiellement régi par le fondamental à nouveau.

Comme dans le cas du frotteur décrit dans le Chap. 9, une limite du solveur PGD/HBM propre au cas amorti est constatée : l’amortissement étant négligé sur une pseudo-période dans l’évaluation par AFT des efforts non linéaires, l’erreur ε présente les mêmes variations que l’amortissement modal non linéaire ξ .

À partir du premier MNL conservatif et du premier MNL amorti, on cherche à présent à tracer la première résonance principale du système. La nature et les interprétations des résultats étant grandement similaires à ceux obtenus pour l’exemple de frotteur du Chap. 9, nous nous contenterons seulement de comparer 3 méthodes d’obtention de la FRF de la première résonance : avec le solveur de synthèse modale pour MNL conservatif, avec celui pour MNL amorti, et enfin avec le solveur basé sur l’orthogonalisation de l’erreur dynamique introduit à la fin du Chap. 8. Les données injectées dans le solveur sont récapitulées dans le Tableau 10.7.

ω_{\max}	I_{\max}	r_i	r_s^{mult}	r_s^{div}	Δs	$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} : \omega$	$\{\alpha_s, \alpha_\phi, \alpha_\omega\}$
700	100	10^{-1}	1.01	0.5	1	$\{1, 3\}$	$\{1, 1, 10^{-3}\}$

TABLEAU 10.7 – Paramètres algorithmiques utilisés par l’Algorithme 4 pour tracer la première résonance de la poutre à ressort cubique.

Les résultats, en Fig. 10.9, montrent une fois encore l’intérêt de la prise en compte de l’amortissement dans les objets modaux non linéaires, à travers l’utilisation des MNLs amortis plutôt que leurs homologues conservatifs. D’autre part, le solveur basé sur l’erreur dynamique ε , ne faisant aucune projection arbitraire sur l’harmonique fondamentale, permet d’obtenir une estimation de la FRF fidèle à celle obtenue par la MAN, ce qui en fait une piste intéressante à explorer dans le cadre de la synthèse non linéaire à partir de MNLs.

On notera enfin que par construction, l’amplitude modale s correspondant à une abscisse curviligne obtenue lors de la continuation du MNL, celle-ci dépend du choix de distance fait pour la continuation. Il n’est donc pas étonnant de voir sur la Fig. 10.9 des valeurs de s nettement supérieures dans le cas “MNL non amorti”, trace du paramétrage choisi dans l’implémentation algorithmique. L’allure de s suivant ω demeure la même dans tous les cas de figure, avec les

deux points de retournement caractéristiques du système traité.

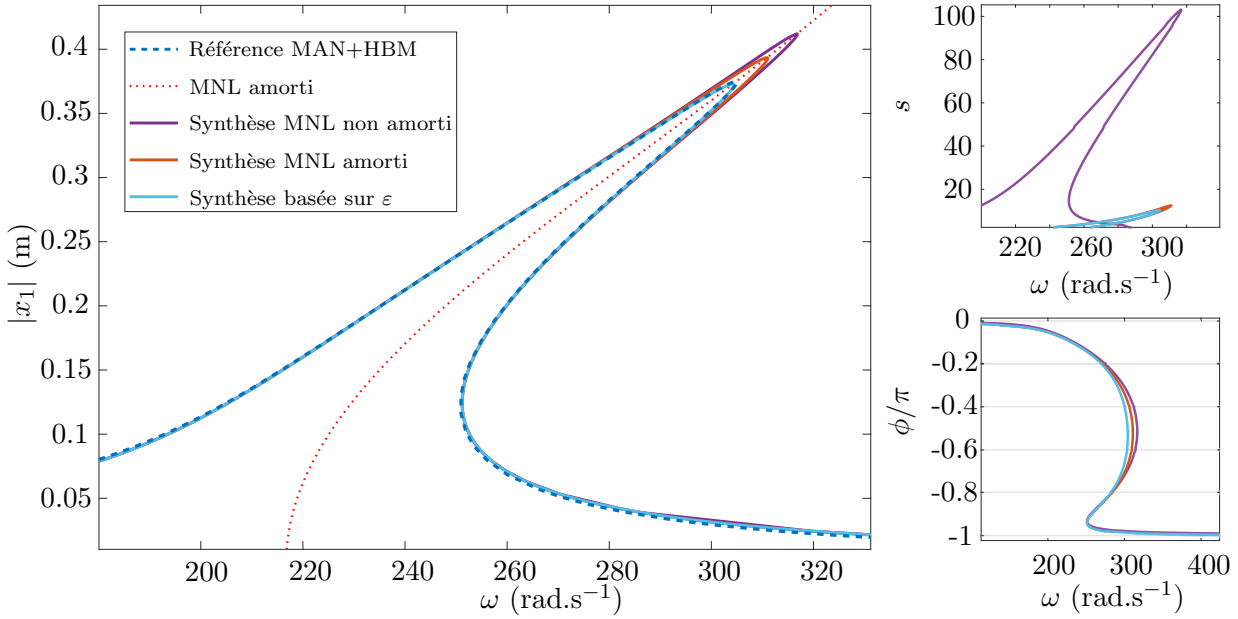


FIGURE 10.9 – FRF autour de la première résonance de la poutre à ressort cubique, tracée avec les 3 solveurs de synthèse modale étudiés : à partir de MNLs amortis ou non, et défini à partir de l’erreur dynamique ε .

10.3 Poutre encastree-libre avec contact unilatéral

Pour ce dernier exemple, le système linéaire sous-jacent est la poutre d’Euler-Bernoulli étudiée dans la section précédente. Le contact unilatéral est modélisé comme suit :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \begin{cases} [k(u_1(t) - g) \mathbf{0}_{N-1}]^T, & \text{si } u_1(t) > g, \\ \mathbf{0}_N, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (10.2)$$

avec un jeu $g = 2$ cm. Cette loi est gardée non régulière dans les simulations à venir. Le contact peut par ailleurs être considéré comme dur dans la mesure où $k/\frac{3EI}{L^3} = 94.56\%$, avec $\frac{3EI}{L^3}$ la raideur équivalente de la poutre seule au niveau du ddl 1. En termes de raideur, ce problème est similaire à un problème de contact entre cette poutre et une autre poutre de mêmes caractéristiques. La recherche de solutions périodiques pour cette classe de non linéarité requiert habituellement un grand nombre d’harmoniques, ce qui nous amène à considérer la valeur $H = 70$. La pertinence de ce choix sera constatée *a posteriori* sur la Fig. 10.12. On se propose d’en calculer le premier MNL non amorti.

Les valeurs injectées dans l’Algorithme 3 sont relevées dans le Tableau 10.8 ci-dessous. Pour cet exemple, on se basera sur le calcul obtenu avec la variante oPGD. Le cas pPGD, traité dans le cadre de ces travaux de thèse, ne sera évoqué qu’à travers quelques remarques liées à ses formes de modes PGD et à son implémentation numérique.

	Δm	$m_{\max \text{ tot}}$	r_ε	r_s^{mult}	r_s^{div}	
oPGD	5	10	0.5	1.07	0.5	
pPGD	5	10	0.5	1.2	0.5	
	Δs	k_{\max}	ε_{\max}	r_{ad}	$\mathbf{y}_2 : u_1(t=0)$	$\{\alpha_P, \alpha_q, \alpha_\omega\}$
	1	10	10^{-3}	0.8	$5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$\{0, 10^{-6}, 1\}$
	1	10	10^{-3}	0.8	$5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$\{0, 10^{-6}, 1\}$

TABLEAU 10.8 – Paramètres requis par l’Algorithme 3 pour le cas de la poutre à contact unilatéral. Ligne 1 : oPGD ; Ligne 2 : pPGD.

La branche du premier MNL de ce problème de contact unilatéral a pu être obtenue de la manière illustrée en Fig. 10.10 en 6 modes PGD et 199 points. Des points $N_{\text{pt}} = 1$ à $N_{\text{pt}} = 21$,

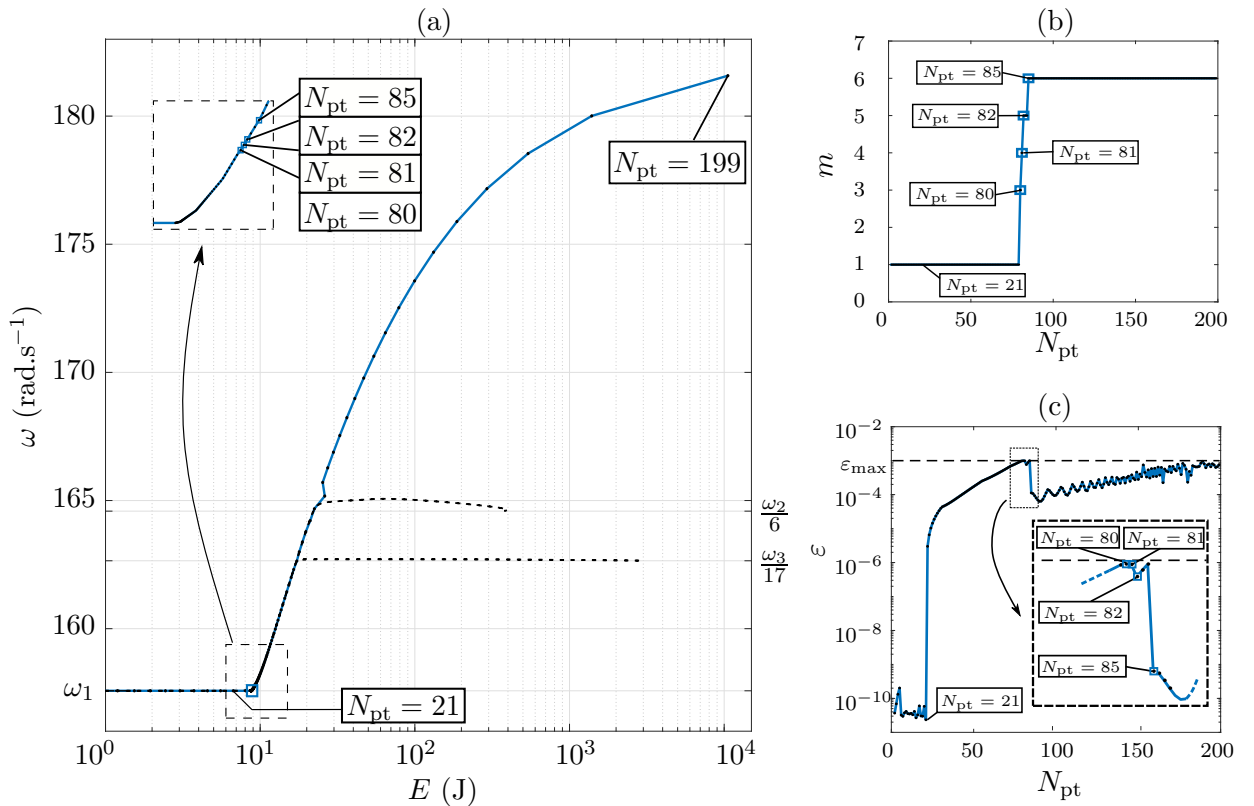


FIGURE 10.10 – Poutre avec contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – (a) FEP de la branche principale (trait continu) et de quelques résonances internes (pointillés) (b) Nombre m de modes PGD selon l’indice du point N_{pt} (c) Erreur ε selon l’indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD a été ajouté.

le MNL1 est exactement égal au premier mode linéaire de vibration – en cosinus fondamental pur donc – et la poutre ne touche pas encore le ressort de bout. Une zone de transition apparaît ensuite, correspondant à la plage $22 \leq N_{\text{pt}} \leq 85$, pour laquelle 5 modes PGD sont ajoutés en 5 points très proches les uns des autres. Enfin, les autres points correspondent au reste de la branche, à plus haute énergie mécanique.

Anecdotiquement, deux résonances internes ont été extraites d’autres simulations et super-

posées au FEP de la Fig. 10.10. Elles ont été obtenues en modifiant manuellement les paramètres du Tableau 10.8 avant ou pendant la continuation. Le suivi de ces branches est donc possible, moyennant quelques efforts de paramétrage de la continuation. Par ailleurs, on pourra retrouver des FEPs analogues illustrant d'autres systèmes à contact dans les travaux de Moussi et Cochelin [14, 54] par exemple.

La même branche a également pu être obtenue en pPGD, en 8 modes PGD et quelques 115 points, jusqu'à une énergie mécanique d'environ $E \approx 6.3 \cdot 10^4$ J. On note que dans ce cas, on a fixé $\Delta m = 5$ dans l'Algorithme 3, ce qui a permis d'ajouter directement 3 modes PGD en un seul point solution (ce point étant celui pour lequel la poutre commence à frapper le ressort). Ceci montre qu'il est possible de décrire des changements abrupts du comportement du système par continuation PGD/HBM et enrichissement à la volée de la description réduite, que l'approche se fasse par formes bloquées ou non.

Sur les sous-figures Fig. 10.10(b) et (c), on constate encore que l'erreur de mesure ε suit l'évolution de m , par construction. Localement, 5 modes PGD ont été nécessaires pour réduire significativement l'erreur. Que cela soit fait dans une courte zone de transition ou un seul point comme dans le cas pPGD, l'algorithme s'est adapté au changement brutal de physique. Ceci contraste avec la non linéarité cubique de l'exemple précédent et son ajout graduel des modes PGD le long de la branche décrite.

Comme montré en Fig. 10.11, les 4 premiers modes PGD ne varient quasiment pas en forme, seuls les 2 derniers le font. Le mode PGD 5 varie fortement entre $N_{\text{pt}} = 82$ et $N_{\text{pt}} = 199$, et ce en même temps que la participation du mode linéaire 4. Cependant, sa forme de fin de branche est quasiment atteinte en $N_{\text{pt}} = 85$, lorsque le mode PGD 6 est introduit dans la description. On notera que ce dernier mode PGD est remarquable de part son aspect fortement couplé (et donc compact) du point de vue des modes linéaires.

Une remarque d'ordre physique est que les modes PGD 5 et 6, en particulier le dernier, représentent bien la forme de la poutre après impact avec le ressort. Ceci reste vrai en pPGD, cas pour lequel les 4 premiers modes sont peu ou prou les mêmes qu'en oPGD et où les 4 derniers modes sont représentatifs de la physique après contact. Là encore, il est cohérent que la pPGD ait besoin de plus d'objets spatiaux pour rendre compte de la dynamique, les formes étant bloquées.

Enfin, le comportement harmonique associé à chaque mode PGD est représenté sur la Fig. 10.12. La partie temporelle est complexe du fait de la génération de hautes harmoniques par le contact non régularisé. Des tendances sont tout de même perceptibles. Le mode PGD 1 est logiquement prépondérant sous forme d'un cosinus fondamental dans la zone linéaire de la branche de MNL (avant impact). Ensuite, l'amplitude de l'ensemble des harmoniques augmente en même temps que l'énergie mécanique. Le fait qu'une partie de la période corresponde au vol libre de la poutre peut expliquer la présence significative des basses fréquences tout au long de la continuation. On notera enfin que des coefficients non négligeables a_0 apparaissent, expliqués par le terme statique présent dans la formulation initiale de l'effort non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$.

Considérations numériques D'après le Tableau 10.9, la oPGD d'une telle branche serait efficace, avec 81% de variables en moins qu'une HBM classique. Cependant c'est la pPGD qui va le plus loin avec un gain de 88% de variables, là aussi par rapport à la HBM. Finissons par

	pPGD/HBM	oPGD/HBM	HBM
pPGD vs oPGD	39161 (88%)	60606 (81%)	326715

TABLEAU 10.9 – Comparaison entre le nombre de descripteurs requis pour la pPGD/HBM, la oPGD/HBM et la HBM classique pour l'exemple de poutre à contact unilatéral. La référence pour les points solutions utilisés sont ceux du cas pPGD/HBM.

évoquer les données relatives au solveur de type Newton-Raphson employé pour résoudre les sous-problèmes. Les tolérances sont fixées à 10^{-12} et le nombre maximal d'itérations de Newton vaut $N_{\text{ite max}} = 100$, valeur qui n'est en pratique jamais approchée (cf. Tableau 10.10).

Dans le Tableau 10.10 sont donnés les statistiques relatives au nombre d'itérations de Newton réalisées pour tracer la branche de MNL, et ce pour les deux variantes de la PGD. Comme attendu, les sous-problèmes spatiaux sont plus lourds en oPGD qu'en pPGD, différence

		Nombre moyen d'itérations	Écart type	Nombre maximal d'itérations
oPGD	\mathcal{I}_m	2.18	1.53	16
	\mathcal{S}_m	9.77	8.68	49
pPGD	\mathcal{I}_m	3.56	5.52	42
	\mathcal{S}_m	0.35	1.92	14

TABLEAU 10.10 – Moyenne, écart type et maximum du nombre d'itérations pour les sous-problèmes \mathcal{I}_m et \mathcal{S}_m le long de la continuation.

accentuée par le fait que cette dernière en traite un nombre moins conséquent. On note que les résolutions en “zéro itération” dans le cas pPGD sont prises en compte dans le calcul de la moyenne et de l'écart type.

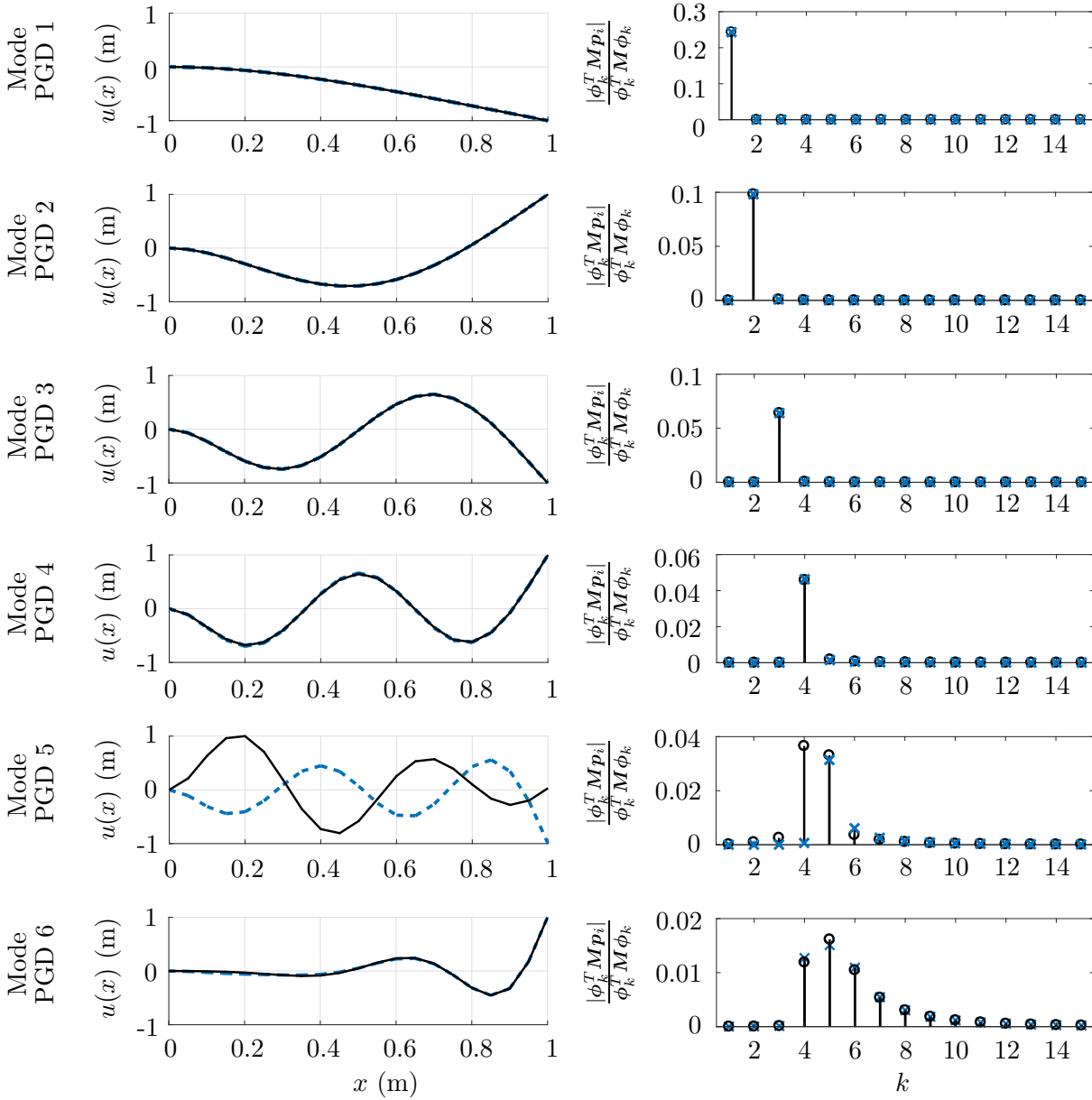


FIGURE 10.11 – Poutre à contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. Colonne de gauche : formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. Pointillés : forme lorsque le mode est introduit ; Trait continu : forme en fin de branche ($N_{pt} = 199$). Colonne de droite : participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Croix : participations lorsque le mode est introduit ; Cercles : participations en fin de branche ($N_{pt} = 199$).

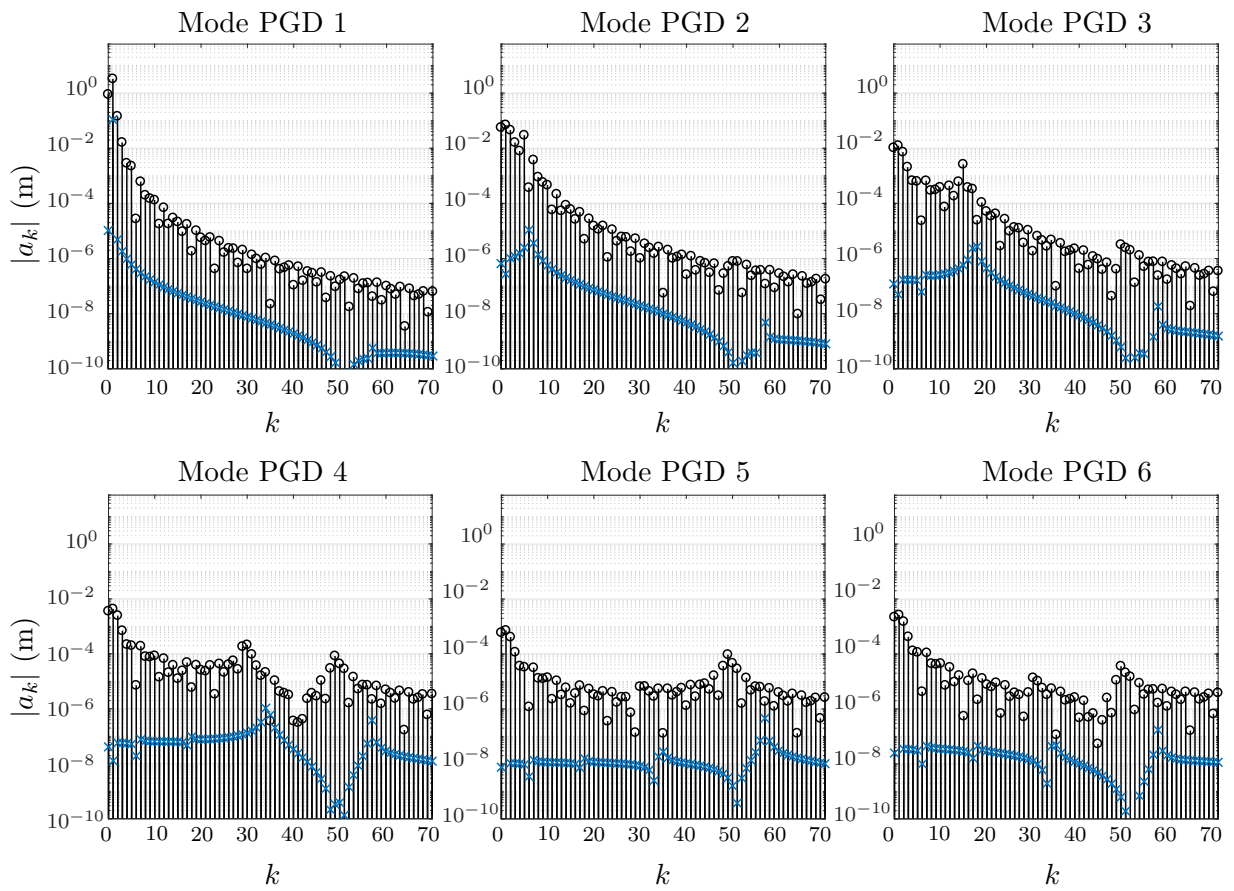


FIGURE 10.12 – Poutre avec contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de branche ($N_{\text{pt}} = 199$).



Conclusions et perspectives

Dans le cadre de ces travaux de thèse, plusieurs approches numériques en dimension réduite ont été présentées et discutées en vue de traiter des systèmes mécaniques en dynamique non linéaire pouvant présenter un grand nombre de degrés de liberté. Deux grands axes de recherche ayant pour toile de fond les modes non linéaires ont été explorés : la continuation rapide et compacte de ces modes puis l'exploitation de l'information qu'ils contiennent en vue d'obtenir à moindre coût la fonction de réponse en fréquence de la structure.

Dans un premier temps, un solveur basé sur les techniques de réduction de modèle par PGD a été construit dans le Chap. 4. Basée sur une séparation des variables dans les solutions recherchées et un traitement à directions alternées des parties spatiale et temporelle, la méthode de réduction employée a permis d'obtenir des sous-problèmes de tailles plus petites. La partie temporelle, dans le cadre de la recherche de solutions périodiques, est assez naturellement traitée par équilibrage harmonique, ce qui tous calculs faits nous a amené à considérer deux sous-problèmes algébriques non linéaires, résolus par des méthodes de type Newton-Raphson. Le choix de critère de convergence de la méthode nous a assuré l'obtention de points étant numériquement solutions de l'équation dynamique du modèle complet. Dans le Chap. 5, l'algorithme obtenu a été injecté dans un schéma de continuation point par point afin de tracer des branches entières de MNLs. La force de l'approche proposée, en plus de sa capacité à fournir une description compacte en termes de stockage du MNL, est de tirer parti d'initialisations physiquement pertinentes des sous-problèmes traités, limitant ainsi très fortement le nombre d'itérations de Newton à réaliser pour le calcul des points de la branche. Cet effet est également constaté voire accentué lorsque la variante pPGD est utilisée, grâce au fait de ne pas recalculer toutes les formes des modes PGD pour chaque point du MNL. Par construction, le fait d'être en présence d'un algorithme de continuation à dimension variable m permet de préserver une description réduite au maximum par rapport au critère d'erreur que l'on s'est fixé en tant qu'utilisateur : un mode PGD ne sera ajouté que lorsque cela sera requis.

Dans la Partie 4, il a été envisagé d'appliquer cet algorithme sur plusieurs exemples présentant des non linéarités différentes et de le valider en reprenant des cas d'étude de la littérature. Le premier MNL du portique de Roorda a ainsi été tracé, montrant la capacité de la méthode à s'adapter aux non linéarités géométriques et à certains effets physiques (notamment liés à la traction-compression) propres au système. De même, les cas de poutres d'Euler-Bernoulli présentant respectivement une non linéarité cubique localisée et une loi de contact non régularisée en bout de poutre ont été étudiés, exhibant cette fois-ci la capacité de l'algorithme à représenter des branches MNLs possédant potentiellement des boucles d'interactions modales, des résonances internes, ou plus généralement des changements assez abrupts de la nature de la solution au cours de la continuation.

Dans le Chap. 6, une extension méthodologique a été envisagée pour la construction de MNLs amortis. L'idée d'obtenir ces objets partait de l'hypothèse que la prise en compte des effets dissipatifs permettrait d'affiner la proximité entre MNL et pics de résonance, chose classiquement constatée en théorie linéaire. Dans cette optique, les objets linéaires sous-jacents utilisés lors des différentes initialisations spatiales étaient cette fois liés aux modes linéaires complexes. Des résultats analogues au cas non amorti ont finalement été obtenus, auxquels viennent s'ajouter une nouvelle variable β caractérisant la décroissance exponentielle des harmoniques de la solution pseudo-périodique recherchée. Les écritures matricielles implémentées dans les précédents algorithmes permettent d'obtenir à moindre coût de codage un solveur adapté à ce cas d'étude. En dépit d'une hypothèse de faible amortissement sur la pseudo-période causant une augmentation de l'erreur commise, des résultats de la littérature obtenus sur un frotteur à 2 ddls ont pu être retrouvés. Le premier MNL amorti de la poutre à ressort de bout cubique a également pu être tracé.

La Partie 3 a porté sur le tracé de FRFs en dimension réduite à partir des MNLs obtenus dans la partie précédente. En se plaçant dans le cadre de la théorie du mode non linéaire résonant unique un solveur de synthèse modale a été envisagé à partir de précédents travaux de la communauté. La discussion autour du fait que les équations à résoudre étaient basées sur une projection arbitraire des équations du mouvement sur l'harmonique fondamentale a mené à imaginer un autre solveur s'affranchissant de cette hypothèse. La forme de réponse forcée recherchée est caractérisée d'une part par la forme des MNLs précédemment calculés et stockés, et d'autre part par un triplet de valeurs amplitude-phase-fréquence, déterminé par le solveur de synthèse. Un exemple à non linéarités géométriques, déjà abordé dans la littérature par des approches différents (formes normales et échelles multiples), a permis la validation des résultats de synthèse par l'obtention de résultats qualitativement identiques : le MNL amorti permet bien une meilleure approximation de la résonance tracée que le MNL conservatif. De plus, on a pu constater que l'utilisation de modes propres linéaires pour décrire une dynamique non linéaire pouvait conduire à des erreurs lourdes, au point de trouver une non linéarité raidissante alors qu'elle est assouplissante. Le solveur de synthèse basé sur l'erreur commise ε et non sur une projection des équations sur l'harmonique 1 permet une reconstruction du pic de résonance meilleure qu'auparavant. Les graphes obtenus sont quasiment superposés à la référence obtenue par la MAN pour les exemples traités. Ces constats ont aussi pu être faits sur l'exemple de poutre à ressort de bout cubique.

Des perspectives peuvent être envisagées concernant divers aspects des approches numériques présentées. On peut tout d'abord considérer une consolidation globale des algorithmes proposés, par exemple en implémentant plus exhaustivement un panel de fonctionnalités pour amélio-

rer le processus de continuation point par point : détection des bifurcations, gestion du suivi de branche, etc. D'autres prédicteurs et/ou correcteurs peuvent être utilisés, ce choix étant toujours laissé à l'utilisateur de l'algorithme. Une autre idée relevant de ces aspects est le traitement de tronçons de MNLs qui verraient leur comportement vibratoire se "simplifier" lors de la continuation, par exemple en cas de résonance interne. En d'autres mots, on pourrait concevoir un critère d'appauvrissement de la description PGD lorsque cela se peut, m pouvant ainsi diminuer et véritablement rester le plus petit possible pour un tracé quelconque.

Le travail réalisé permet le suivi de la branche principale d'un MNL, du moins la branche qui émerge du cas linéaire sous-jacent. Il pourrait être intéressant de s'intéresser à des configurations permettant d'amorcer l'algorithme sur certaines solutions d'intérêt telles que les isola. Les solutions quasi-périodiques, quant à elles, pourraient être cherchées en reformulant la HBM du sous-problème temporel de manière adéquate.

Dans un registre différent, on note que l'analyse de stabilité est généralement faite *a posteriori* et indépendamment de la recherche des solutions. Ceci peut donc bien entendu être réalisé en complément des travaux de ce manuscrit. Les méthodes numériques liées à la stabilité présentent généralement un grand coût calculatoire, d'autant plus si le système présente un grand nombre de ddls, et l'écriture d'un critère de stabilité faisant intervenir les techniques de PGD peut éventuellement être envisagée.

Concernant l'obtention des MNLs amortis, les limites de l'hypothèse de faible amortissement faite par Laxalde, Joannin et al. ont été constatées. Un travail en amont sur la définition d'un solveur HBM plus général peut être envisagé, en repartant par exemple de la série de Fourier généralisée proposée par Laxalde et Thouverez dans [47] et en considérant des projections de type Galerkin qui conserveraient intégralement les effets dissipatifs sur une pseudo-période.

Enfin, la synthèse modale à partir de MNLs peut être considérée sous bien des formes suivant les choix faits dans la manière d'utiliser l'information des MNLs, la forme de la solution cherchée pour le système forcé ou encore la prise en compte ou non de plusieurs modes de vibration (linéaires ou non linéaires). Des essais préliminaires écrivant la solution sous la forme d'une somme de plusieurs MNLs (et faisant donc intervenir un couple amplitude-phase pour chaque MNL) ont permis d'obtenir plusieurs résonances principales en un seul tracé de FRF. La phase associée à chaque MNL diminuait bien de $-\pi$ à la résonance qui lui correspondait. Ces premières tentatives semblent intéressantes à poursuivre, en particulier en se servant du solveur de synthèse basé sur l'erreur ε .

On notera que les travaux liés à la synthèse peuvent être envisagés sans faire appel à des schémas de continuation : il a été montré dans le cas linéaire [70, 66] que la phase s'avère être un bon moyen de contrôle du tracé des résonances. La phase étant une fonction strictement décroissante, le simple fait de la balayer entre 0 et $-\pi$ suffirait pour tracer les pics de résonance non linéaires. Anecdotiquement, les FRFs exposées dans ce manuscrit ont aussi pu être obtenues, à l'identique, par un simple balayage de la phase.

Une autre thématique qui fait directement suite à la synthèse modale réduite présentée dans ces travaux est celle des systèmes dynamiques non linéaires stochastiques. En considérant un ou plusieurs paramètres comme des variables aléatoires, et en s'inspirant des travaux de Sarrouy [70] portant notamment sur l'utilisation du chaos polynomial pour propager les incertitudes, une méthode de calcul rapide d'un "faisceau de densité de probabilité" de FRFs pourrait être

implémentée à peu de coût, puisque nous disposons à présent de moyens de calcul rapide des MNLs. L'approche présentée dans la littérature s'appuie sur une formulation de la solution du système forcé avec une phase unique, ce qui semble particulièrement bien adapté aux choix adoptés dans ce manuscrit.

Annexes

Obtention de \mathcal{S}_m en PGD/HBM

A.1 Calcul de \mathcal{S}_m en oPGD

Soit le problème de oPGD respectant la condition d'orthogonalité de l'Eq. (3.31). On choisit comme fonction test de cette formulation $\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k^* q_k(t)$. Le vecteur des inconnues \mathbf{x} s'écrira également sous cette forme de somme :

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t).$$

On obtient en injectant \mathbf{x} et \mathbf{x}^* l'expression intégrale suivante :

$$\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \int_{I_T} \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k^* q_k(t) \right)^T \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt = 0.$$

On porte l'attention du lecteur sur la différence d'indices muets k et j suivant la sommation faite. En sortant les termes purement spatiaux de l'intégrale en temps, l'expression précédente est équivalente à :

$$\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R}) \sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k^{*T} \left(\int_{I_T} q_k(t) \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \int_{I_T} q_k(t) \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt = \mathbf{0}.$$

Si l'on remplace ensuite $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ par son expression complète et en isolant l'effort non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t))$, le système s'écrit :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \int_{I_T} q_k(t) \left(\mathbf{M} \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j \ddot{q}_j(t) + \mathbf{K} \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt + \int_{I_T} q_k(t) \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = \mathbf{0}.$$

À cette étape, le terme correspondant aux efforts non linéaires n'est plus modifié. Par ailleurs, les sommations finies sur l'indice muet j peuvent être interverties avec l'intégration sur I_T . De plus, les quantité q_j ou \ddot{q}_j étant scalaires, on peut sans aucun problème les écrire devant les vecteurs \mathbf{p}_j . Ce jeu d'écriture étant appliqué, on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \sum_{j=1}^m \left[\left(\int_{I_T} q_k(t) \ddot{q}_j(t) dt \right) \mathbf{M} + \left(\int_{I_T} q_k(t) q_j(t) dt \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{p}_j + \int_{I_T} q_k(t) \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = \mathbf{0}.$$

On peut alors ranger les intégrales temporelles dans des matrices ou vecteurs, en vue de l'implémentation numérique du problème. Pour ce faire, introduisons les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (\mathbf{P} \text{ mis en colonne}) , \\ \mathbf{I}_l = \left[\left(\int_{I_T} q_k(t) \frac{d^l q_j(t)}{dt^l} dt \right)_{1 \leq k, j \leq m} \right] \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \\ \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \left[\left(\int_{I_t} q_k(t) \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt \right)_{1 \leq k \leq m} \right] \in \mathbb{R}^{N \times m}. \end{array} \right.$$

Injectons-les à présent dans la précédente équation :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \sum_{j=1}^m [(\mathbf{I}_2)_{kj} \mathbf{M} + (\mathbf{I}_0)_{kj} \mathbf{K}] \mathbf{p}_j + (\mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}))_k = \mathbf{0}.$$

Cette forme peut être contractée en utilisant le produit tensoriel de Kronecker, qui s'écrit par blocs pour deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & a_{12} \mathbf{B} & \dots & a_{1n} \mathbf{B} \\ a_{21} \mathbf{B} & a_{22} \mathbf{B} & \dots & a_{2n} \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \mathbf{B} & a_{m2} \mathbf{B} & \dots & a_{mn} \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(m \times p), (n \times q)}(\mathbb{R}).$$

On obtient finalement le sous-problème spatial, système d'équations algébriques non linéaires dont les inconnues sont les $\tilde{\mathbf{p}}$, de taille $N \times m$:

$$\underbrace{(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{K})}_{\mathbf{S}_1} \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}.$$

Le terme non linéaire $\mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}})$ est estimé par AFT.

A.2 Simplifications d'opérateurs via la HBM

On rappelle l'écriture matricielle de l'Eq. (3.13) issue de la méthode HBM, qui nous permet d'écrire :

$$\mathbf{q}^{(n)}(t) = \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^n \mathbf{h}_H(t, \omega).$$

Montrons que l'intégrale d'un produit de deux fonctions temporelles se ramène à un simple produit matriciel de coefficients de Fourier en représentation HBM :

$$\mathbf{I}_0 = \int_{I_T} \mathbf{q}(t) \mathbf{q}^T(t) dt = \int_{I_T} \mathbf{Q}_H \mathbf{h}_H(t, \omega) (\mathbf{Q}_H \mathbf{h}_H(t, \omega))^T dt.$$

Seule la base de Fourier dépend du temps, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{Q}_H \underbrace{\left(\int_{I_T} \mathbf{h}_H(t, \omega) \mathbf{h}_H(t, \omega)^T dt \right)}_{\mathbf{M}_H} \mathbf{Q}_H^T.$$

Dans ce manuscrit, on choisit toujours une base de Fourier orthonormée (terme statique en $\mathbf{a}_0/\sqrt{2}$) et on démontre simplement que les intégrales sur une période T des produits des éléments de la base qui constituent $\mathbf{M}_H \in \mathcal{M}_{2H+1}(\mathbb{R})$ sont toutes nulles hors diagonales. De plus, tous les termes diagonaux valent $\frac{\pi}{\omega}$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{M}_H = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{I}.$$

Finalement, en remplaçant \mathbf{M}_H , on obtient pour \mathbf{I}_0 l'expression :

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{Q}_H^T.$$

De même, et en notant que $\mathbf{D}^2 = -\omega^2 \text{diag}(0, 1^2, \dots, H^2)$ est symétrique et dépend de ω , on obtient la matrice \mathbf{I}_2 :

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^2 \mathbf{Q}_H^T.$$

Enfin, le terme non linéaire $\mathbf{S}_{nl}(\tilde{\mathbf{p}})$ étant lui aussi constitué d'intégrales de produits de deux fonctions temporelles, la même démarche peut lui être appliquée, ce qui fait apparaître un simple produit entre les coefficients de Fourier \mathbf{Q}_H de $\mathbf{q}(t)$ et ceux de l'effort non linéaire. Ce seront ces derniers qui seront en fait évalués par FFT. Ainsi, en notant $\mathbf{F}_{nl}^H(\tilde{\mathbf{p}})$ la matrice des coefficients de Fourier de $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$, on peut écrire :

$$\mathbf{S}_{nl}(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{F}_{nl}^H \mathbf{Q}_H^T.$$

Dans l'implémentation numérique du sous-problème spatial pour le calcul de MNLs, le système entier peut être simplifié en factorisant puis retirant le terme $\frac{\pi}{\omega}$.

A.3 Calcul de \mathcal{S}_m en pPGD

Soit le problème de pPGD respectant la condition d'orthogonalité de l'Eq. (3.36). On choisit comme fonction test de cette formulation $\mathbf{p}_{m+1}^* q_{m+1}(t)$. Le vecteur des inconnues \mathbf{x} s'écrira sous

la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(m)} + \mathbf{p}_{m+1}q_{m+1}(t), \text{ avec } \mathbf{x}_{(m)} = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j q_j(t).$$

On obtient après injection de ces quantités l'expression intégrale suivante :

$$\forall \mathbf{p}_{m+1}^* \in \mathbb{R}^N \int_{I_T} (\mathbf{p}_{m+1}^* q_{m+1}(t))^T \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt = 0.$$

Comme dans le cas de l'oPGD, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p}_{m+1}^* \in \mathbb{R}^N \quad \mathbf{p}_{m+1}^{*T} \left(\int_{I_T} q_{m+1}(t) \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{I_T} q_{m+1}(t) \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

On remplace là aussi $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ par son expression et on isole le terme non linéaire :

$$\int_{I_T} q_{m+1}(t) \left(\mathbf{M} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{p}_j \ddot{q}_j(t) + \mathbf{K} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{p}_j q_j(t) \right) dt + \int_{I_T} q_{m+1}(t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt = \mathbf{0}.$$

On peut à présent inverser intégration et sommation, et éventuellement isoler les m premiers termes des sommes, connus, dans un second membre :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} \left(\int_{I_t} q_{m+1}(t) \ddot{q}_j(t) dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_{m+1}(t) q_j(t) dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_j + \int_{I_t} q_{m+1}(t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \left(\int_{I_t} q_{m+1}(t) \ddot{q}_{m+1}(t) dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_{m+1}(t) q_{m+1}(t) dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_{m+1} + \int_{I_t} q_{m+1}(t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt &= \\ - \sum_{j=1}^m \left(\int_{I_t} q_{m+1}(t) \ddot{q}_j(t) dt \mathbf{M} + \int_{I_t} q_{m+1}(t) q_j(t) dt \mathbf{K} \right) \mathbf{p}_j. & \end{aligned}$$

Définissons les opérateurs analogues au cas oPGD, mais de dimensions plus petites à cause de l'effet de "particularisation au cas $k = m + 1$ " :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_{m+1}^T]^T \in \mathbb{R}^{N \times (m+1)} \quad (\mathbf{P} \text{ mis en colonne}), \\ \mathbf{I}_l = \left[\left(\int_{I_T} q_{m+1}(t) \frac{d^l q_j(t)}{dt^l} dt \right)_{1 \leq j \leq m+1} \right] \in \mathbb{R}^{m+1} \quad (\text{mis en vecteur ligne, en prévision de } \otimes), \\ \mathbf{S}_{nl}(\tilde{\mathbf{p}}) = \int_{I_t} q_{m+1}(t) \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{P}\mathbf{q}(t)) dt \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Comme pour le cas oPGD, les intégrales de produits de deux fonctions temporelles se ramènent à un produit de coefficients de Fourier. La présence systématique de $q_{m+1}(t)$ dans ces intégrales

fait cette fois apparaître les coefficients de Fourier \mathbf{q}_H^{m+1} de cette quantité dans les expressions des opérateurs. On prouve donc facilement que :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_0 = \frac{\pi}{w} \mathbf{Q}_H (\mathbf{q}_H^{m+1})^\top \text{ et } \mathbf{I}_2 = \frac{\pi}{w} \mathbf{Q}_H \mathbf{D}^2 (\mathbf{q}_H^{m+1})^\top \\ \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\pi}{\omega} \mathbf{F}_{\text{nl}}^H (\mathbf{q}_H^{m+1})^\top. \end{cases}$$

Au final, avec ces nouvelles expressions d'opérateurs dédiés à la pPGD, le sous-problème spatial se met une fois de plus sous la forme d'un système algébrique non linéaire tel que :

$$(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{S}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}.$$

Calcul du système algébrique non linéaire de la HBM complexe

B.1 Relations entre les formulations complexe et réelle

Commençons par retrouver l'équivalence entre la forme de solution pseudo-périodique retenue dans l'Eq. (6.7) et celle donnée en complexe par Joannin dans [37]. Pour alléger les écritures, le terme statique $k = 0$ n'est pas traité, bien qu'il ne cause pas de problème particulier. Soit $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^H \hat{\mathbf{x}}_k e^{k\lambda t} + \sum_{k=1}^H \bar{\hat{\mathbf{x}}}_k e^{k\bar{\lambda}t} \right\} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^H \hat{\mathbf{x}}_k e^{k\lambda t} \right).$$

En rappelant que pour $\{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$, on peut écrire :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^H e^{-k\beta t} [\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{x}}_k) \cos(k\omega t) - \operatorname{Im}(\hat{\mathbf{x}}_k) \sin(k\omega t)].$$

L'identification entre les deux écritures se fait en posant $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{a}_k - i\mathbf{b}_k$. Ainsi :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^H e^{-k\beta t} [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)].$$

B.2 Projections et système algébrique

Lorsque la forme complexe de $\mathbf{x}(t)$ est injectée dans l'Eq. (1.30) du système dynamique libre, on obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^H [(k^2 \lambda^2 \mathbf{M} + k\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}_k e^{k\lambda t} + (k^2 \bar{\lambda}^2 \mathbf{M} + k\bar{\lambda} \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\hat{\mathbf{x}}}_k e^{k\bar{\lambda}t}] + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

On se munit du produit scalaire hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ pour réaliser les projections de Galerkin :

$$\langle f | g \rangle_H = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

L'ensemble $\{e^{ik\omega t}\}_{1 \leq k \leq H}$ forme une base orthogonale que l'on utilise pour la méthode Galerkin.

On calcule à présent les projections $\langle \cdot | e^{ik'\omega t} \rangle$ de l'équation de la dynamique, avec $1 \leq k' \leq H$, ce qui fait apparaître deux types d'intégrales sur la pseudo-période suivant que l'on traite un terme ou son conjugué.

Cas 1 : Pas d'hypothèse supplémentaire Les deux intégrales d'intérêt valent :

$$\begin{cases} \int_0^T e^{k\lambda t} e^{-ik'\omega t} dt = \frac{e^{-k\beta T} - 1}{-k\beta + i\omega(k - k')} = \gamma_{kk'}^1, \\ \int_0^T e^{k\bar{\lambda}t} e^{-ik'\omega t} dt = \frac{e^{-k\beta T} - 1}{-k\beta - i\omega(k + k')} = \gamma_{kk'}^2, \end{cases}$$

avec $\beta \neq 0$. Ceci conduit finalement à un système de H équations complexes peu évident à traiter, s'exprimant :

$$\forall 1 \leq k' \leq H \quad \sum_{k=1}^H [\gamma_{kk'}^1 (k^2 \lambda^2 \mathbf{M} + k\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}_k + \gamma_{kk'}^2 (k^2 \bar{\lambda}^2 \mathbf{M} + k\bar{\lambda} \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\hat{\mathbf{x}}}_k] + \langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik'\omega t} \rangle = \mathbf{0}.$$

Ce cas, non traité, est donné à titre informatif.

Cas 2 : Hypothèse d'amortissement faible On fait alors l'approximation $e^{k\lambda t} \approx e^{i\omega t}$ Les deux intégrales précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-ik'\omega t} dt = \gamma_{kk'}^1, \\ \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{-ik'\omega t} dt = \gamma_{kk'}^2, \end{cases}$$

L'indice k étant positif, toutes les intégrales $\gamma_{kk'}^2$ liées à la partie conjuguée s'annulent. Les $\{e^{ik\omega t}\}$ formant une base pour ce produit scalaire, les intégrales $\gamma_{kk'}^2$ ne sont non nulles que pour $k' = k$. Finalement, le problème de HBM complexe s'écrit :

$$\forall 1 \leq k \leq H \quad (k^2 \lambda^2 \mathbf{M} + k\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}_k + \langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle = \mathbf{0}.$$

C'est sous cette forme qu'est écrit le système dans les travaux de Joannin et al. [37]. Passer en formulation réelle se fait alors simplement : on injecte $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{a}_k - i\mathbf{b}_k$ dans l'équation précédente et on sépare parties réelle et imaginaire. On obtient finalement pour tout $1 \leq k \leq H$:

$$\begin{cases} [k^2(\beta^2 - \omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{a}_k + [-2k^2\beta\omega\mathbf{M} + k\omega\mathbf{C}]\mathbf{b}_k + \text{Re}(\langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H) = \mathbf{0} \\ -[-2k^2\beta\omega\mathbf{M} + k\omega\mathbf{C}]\mathbf{a}_k + [k^2(\beta^2 - \omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{b}_k - \text{Im}(\langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

On peut alors écrire ce système algébrique sous la forme matricielle :

$$\mathbf{H}_1(\omega, \beta) \mathbf{x}_H + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega, \beta) = \mathbf{0},$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_1(\omega, \beta) = \text{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_H), \\ \boldsymbol{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & (k\omega) \mathbf{C} \\ -(k\omega) \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k\beta)^2 \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} & -2k^2 \beta \omega \mathbf{M} \\ 2k^2 \beta \omega \mathbf{M} & (k\beta)^2 \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

Le terme $\mathbf{H}_{nl}(\mathbf{x}_H, \omega, \beta)$ est un vecteur regroupant de manière alternée les différentes valeurs de $\text{Re}(\langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H)$ et $-\text{Im}(\langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H)$. Il se trouve avoir en fait la même expression que dans le cas d'une HBM classique, ce qui est montré dans la section suivante.

B.3 Composantes de \mathbf{H}_{nl}

Dans le cas d'une HBM classique, \mathbf{H}_{nl} est le vecteur des coefficients de Fourier de l'effort non linéaire \mathbf{f}_{nl} . Il peut s'écrire à partir du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ tel que :

$$\langle f, g \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt.$$

Plus précisément, le vecteur alterne les projections en cosinus $\langle \cdot, \cos(k\omega t) \rangle_T$ et en sinus $\langle \cdot, \sin(k\omega t) \rangle_T$. Pour retrouver ce résultat, écrivons le produit scalaire complexe $\langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H$ en fonction des produits scalaires $\langle \mathbf{f}_{nl}, \cos(k\omega t) \rangle_T$ et $\langle \mathbf{f}_{nl}, \sin(k\omega t) \rangle_T$. Notons que \mathbf{f}_{nl} est à valeurs réelles.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_{nl} | e^{ik\omega t} \rangle_H &= \langle \mathbf{f}_{nl} | \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t) \rangle_H \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{f}_{nl} \cos(k\omega t) dt - i \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{f}_{nl} \sin(k\omega t) dt \\ &= \langle \mathbf{f}_{nl}, \cos(k\omega t) \rangle_T - i \langle \mathbf{f}_{nl}, \sin(k\omega t) \rangle_T. \end{aligned}$$

Au final, on peut bien écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} [k^2(\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{a}_k + [-2k^2 \beta \omega \mathbf{M} + k\omega \mathbf{C}] \mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_{nl} | \cos(k\omega t) \rangle_T = \mathbf{0} \\ -[-2k^2 \beta \omega \mathbf{M} + k\omega \mathbf{C}] \mathbf{a}_k + [k^2(\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_{nl} | \sin(k\omega t) \rangle_T = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Matrices associées aux modèles de poutre utilisés

C.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

Les éléments de théorie des poutres rappelés ici peuvent par exemple être trouvés dans [29]. Pour les exemples du Chap. 10, on se place dans le cadre de poutres planes en flexion simple, avec effets de cisaillement négligés et section constante. On utilise les notations de la Fig. C.1.

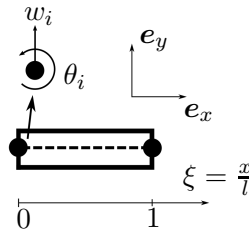


FIGURE C.1 – Élément de poutre à 2 ddls par nœud, de taille l .

Soit des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli présentant 2 ddls par nœud, $[w_i, \theta_i]$, avec w_i déplacement transverse et θ_i rotation du nœud i . Afin de préserver le caractère \mathcal{C}^1 de w et de $\frac{\partial w}{\partial x} = \theta$, une interpolation cubique du champ de déplacement est réalisée. À l'aide des polynômes d'Hermite, on obtient l'expression de w :

$$w(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}(t) \text{ avec : } \begin{cases} \xi = \frac{x}{l} \\ \mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & l\xi(1 - \xi)^2 & \xi^2(3 - 2\xi) & l\xi^2(\xi - 1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{q}(t) = [u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2]^T \end{cases} .$$

La rotation θ est obtenue facilement après dérivation des polynômes d'Hermite contenus dans \mathbf{N} . On peut par suite obtenir les matrices élémentaires de masse \mathbf{M}_e et de raideur \mathbf{K}_e à partir respectivement des énergies cinétique et de déformation. Pour un élément de longueur l , à module

de rigidité EI constant et à masse volumique ρ , on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_e = \rho S l \int_0^1 \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{N}(\xi) d\xi, \\ \mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \mathbf{N}^T(\xi)}{d\xi^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{N}^T(\xi)}{d\xi^2} \right)^T d\xi. \end{cases}$$

Tous calculs faits, les matrices élémentaires s'expriment par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_e = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ sym. & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym. & & & 4l^2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Le processus classique d'assemblage, sur lequel nous ne reviendrons pas, est ensuite réalisé afin d'obtenir les matrices globales \mathbf{M} et \mathbf{K} .

C.2 Poutre à rotations modérées

Les matrices de masse et de raideur élémentaires sont établies à partir du travail de Thomas [79]. On donnera seulement les étapes clés de leur obtention. Sur la Fig. C.2 sont représentés les 3 ddls par nœud utilisés dans la cinématique de Von Kármán.

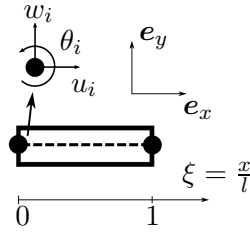


FIGURE C.2 – Élément de poutre à 3 ddls par nœud, de taille l .

En appliquant les hypothèses du modèle, on est amené à considérer des rotations modérées de la fibre neutre de la poutre ($\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$) et une déformation axiale simplifiée : $e \approx u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2$. On peut obtenir les équations locales du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{u} = N' \\ \rho S \ddot{w} = (Nw')' - M'' \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} N = ES \left(u' + \frac{w'^2}{2} \right), & M = EI w'' \\ u' = \frac{\partial u}{\partial x}, & w' = \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

On pose à présent l'approximation nodale, analogue à celle utilisée pour la poutre d'Euler-Bernoulli. Le vecteur des inconnues élémentaires est cette fois $[u, w, \theta]^T$. De la même façon que précédemment avec les poutres d'Euler-Bernoulli, l'inconnue liée à la flexion w est interpolée cubiquement via les polynômes d'Hermite, alors que les effets de traction-compression gérés par u sont eux interpolés linéairement. On écrit donc :

$$[u, w]^T = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}(t) \text{ avec : } \begin{cases} \xi = \frac{x}{l} \\ \mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & l\xi(1-\xi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2(3-2\xi) & l\xi^2(\xi-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{q}(t) = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2]^T \end{cases} .$$

Cette description des inconnues est injectée dans la formulation faible, ce qui permet d'obtenir les matrices élémentaires \mathbf{M}_e et \mathbf{K}_e , qui valent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_e = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^f & K_{12}^f & 0 & K_{13}^f & K_{14}^f \\ 0 & K_{21}^f & K_{22}^f & 0 & K_{23}^f & K_{24}^f \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & K_{31}^f & K_{32}^f & 0 & K_{33}^f & K_{34}^f \\ 0 & K_{41}^f & K_{42}^f & 0 & K_{43}^f & K_{44}^f \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

avec \mathbf{K}^f matrice de raideur élémentaire 4×4 de la poutre d'Euler-Bernoulli de la section précédente.

Enfin, les efforts élémentaires non linéaires sont évalués par le calcul exact dans notre cas des intégrales mises en jeu décrites en Annexe 2 de [79], puis de leur assemblage. En utilisant par exemple un logiciel de calcul formel, il est également facile de remonter à l'énergie de laquelle dérive l'effort conservatif $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$. On finira en remarquant que les non linéarités sont polynomiales pour ce type de modèle de poutre, le détail important étant qu'elles sont réparties sur l'ensemble des ddls.



Bibliographie

- [1] Manlab - an interactive path-following and bifurcation analysis software [logiciel]. (2009-2019). <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>.
- [2] E. L. ALLGOWER et K. GEORG : *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag, 2003.
- [3] A. AMMAR, B. MOKDAD, F. CHINESTA et R. KEUNINGS : A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3):153–176, décembre 2006.
- [4] R. ARQUIER, S. BELLIZZI, R. BOUC et B. COCHELIN : Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers & Structures*, 84(24-25):1565–1576, septembre 2006.
- [5] M. F. A. AZEEZ et A. F. VAKAKIS : Proper orthogonal decomposition (pod) of a class of vibroimpact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):859–889, 2001.
- [6] L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(8):1251–1277, 1993.
- [7] S. BELLIZZI et R. BOUC : A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 287(3):545–569, octobre 2005.
- [8] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, mars 1989.

-
- [9] F. CHINESTA, A. LEYGUE, F. BORDEU, J. V. AGUADO, E. CUETO, D. GONZALEZ, I. ALFARO, A. AMMAR et A. HUERTA : Pgd-based computational vademecum for efficient design, optimization and control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1):31–59, 2013.
- [10] F. CHINESTA, P. LADEVEZE et E. CUETO : A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4):395, 2011.
- [11] S. CLÉMENT : *Installation, Test and Non-Linear Vibratory Analysis of an Experiment with Four Fuel Assembly Models under Axial Flow*. Thèse de doctorat, Aix Marseille Université, décembre 2014.
- [12] B. COCHELIN : A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5):1181–1192, 1994.
- [13] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : Asymptotic-numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(7):1187–1213, 1994.
- [14] B. COCHELIN : Numerical computation of nonlinear normal modes using HBM and ANM. Dans G. KERSCHEN, éditeur : *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*, pages 251–292. Springer Vienna, Vienna, 2014.
- [15] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier, 2007.
- [16] A. R. CONN, N. I. M. GOULD et P. L. TOINT : *Trust Region Methods*. SIAM, 2000.
- [17] N. COUDEYRAS, J.-J. SINOU et S. NACIVET : A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3-5):1175–1199, 2009.
- [18] R. R. CRAIG et M. C. C. BAMPTON : Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [19] M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT : *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1989.
- [20] N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : A new method to compute perturbed bifurcations : Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9):943–957, 1990.
- [21] I. DANAILA, P. JOLY, S. M. KABER et M. POSTEL : *An Introduction to Scientific Computing : Twelve Computational Projects Solved with MATLAB*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [22] J. DE JONGH : *A Reduction Method for Nonlinear Dynamic Systems*. Thèse de doctorat, Eindhoven University, 1992.
- [23] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS et Y. A. KUZNETSOV : MATCONT : A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29(2):141–164, 2003.

-
- [24] M. di BERNARDO, A. R. CHAMPNEYS, C. J. BUDD et P. KOWALCZYK : Qualitative theory of non-smooth dynamical systems. *Dans Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences, pages 47–119. Springer, London, 2008.
- [25] E. J. DOEDEL : AUTO : A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. *Congressus Numerantium*, 30:265–284, 1981.
- [26] E. J. DOEDEL : Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations. *Dans Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*, pages 1–49. Springer, Dordrecht, 2007.
- [27] E. J. DOEDEL, H. B. KELLER et J.-P. KERNEVEZ : Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) : Bifurcation in Finite Dimensions. *Bifurcation and Chaos*, 1(3): 493–520, 1991.
- [28] B. F. FEENY et R. KAPPAGANTU : On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):607–616, 1998.
- [29] M. GÉRADIN et D. J. RIXEN : *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2014.
- [30] C. GIBERT : Fitting Measured Frequency Response Using Non-Linear Modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):211–218, janvier 2003.
- [31] A. GROLET : *Dynamique Non-Linéaire Des Structures Mécaniques : Application Aux Systèmes à Symétrie Cyclique*. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2013.
- [32] A. GROLET et F. THOUVEREZ : On the Use of the Proper Generalised Decomposition for Solving Nonlinear Vibration Problems. *Dans ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 913–920. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [33] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES : Local bifurcations. *Dans J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES, éditeurs : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, pages 117–165. Springer New York, 1983.
- [34] R. J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2):380–380, 1965.
- [35] L. JEZEQUEL et C. H. LAMARQUE : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3):429–459, septembre 1991.
- [36] C. JOANNIN, B. CHOUVION et F. THOUVEREZ : A reduced-order modeling technique for the study of nonlinear vibrations in dissipative systems. *Dans ISMA 2016*, page 12, 2016.
- [37] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, J.-P. OUSTY et M. MBAYE : A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83:75–92, 2017.
- [38] C. JOANNIN, F. THOUVEREZ et B. CHOUVION : Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple nonlinear modal synthesis. *Computers & Structures*, 203:18–33, juillet 2018.

-
- [39] S. KARKAR : *Méthodes Numériques Pour Les Systèmes Dynamiques Non Linéaires : Application Aux Instruments de Musique Auto-Oscillants*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, 2012.
- [40] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J. C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS : Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194, 2009.
- [41] G. KERSCHEN, éditeur. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. Numéro 555 de Courses and Lectures / International Centre for Mechanical Sciences. Springer, Wien, 2014.
- [42] G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN : The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems : An Overview. *Nonlinear Dynamics*, 41(1):147–169, 2005.
- [43] M. KRACK, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK : A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6798–6814, décembre 2013.
- [44] Y. A. KUZNETSOV : *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer New York, 1995.
- [45] Y. A. KUZNETSOV et V. LEVITIN : CONTENT : A multiplatform environment for analyzing dynamical systems. Rapport technique, Dynamical Systems Laboratory, CWI, Amsterdam, The Netherlands, 1997.
- [46] P. LADEVEZE : *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Mechanical Engineering Series. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [47] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ : Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5):1009–1025, mai 2009.
- [48] A. M. LYAPUNOV : *The General Problem of the Stability Of Motion*. CRC Press, 1992.
- [49] R. H. MACNEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581–601, décembre 1971.
- [50] L. MEYRAND, E. SARROUY, B. COCHELIN et G. RICCIARDI : Nonlinear normal mode continuation through a Proper Generalized Decomposition approach with modal enrichment. *Journal of Sound and Vibration*, 443:444–459, mars 2019.
- [51] L. MEYRAND, E. SARROUY et B. COCHELIN : Calcul de mode NL de structure à non linéarités géométriques via un algorithme de continuation PGD/HBM en dimension réduite. *Dans 14ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 2019.
- [52] L. MEYRAND, E. SARROUY et B. COCHELIN : Low-dimensional nonlinear modes computed with PGD/HBM and reduced nonlinear modal synthesis for forced responses. *Dans Seventh International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer*, Marseille, 2019.

-
- [53] L. MEYRAND, E. SARROUY, B. COCHELIN et G. RICCIARDI : A full PGD/HBM-based algorithm for a low-dimensional NNM continuation with modal enrichment. *Dans 28th International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2018)*, pages 2387–2403, Leuven, 2018.
- [54] E. MOUSSI, S. BELLIZZI, B. COCHELIN et I. NISTOR : Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64-65:266–281, décembre 2015.
- [55] E. H. MOUSSI : *Analysis of Vibrating Structures with Localized Nonlinearities Using Nonlinear Normal Modes*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, décembre 2013.
- [56] E. H. MOUSSI, S. BELLIZZI, B. COCHELIN et I. NISTOR : Modes non-linéaires de structures élastiques dotées de non-linéarités de contact. *Dans 11e Colloque National en Calcul des Structures-CSMA 2013*, page 9, 2013.
- [57] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK : *Nonlinear Oscillations*. Wiley, 1995.
- [58] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN : *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [59] A. NOUY : A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48):4521–4537, septembre 2007.
- [60] A. NOUY : A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23–24):1603–1626, 2010.
- [61] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL : Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):195–216, 2009.
- [62] S. PETER, M. SCHEEL, M. KRACK et R. I. LEINE : Synthesis of nonlinear frequency responses with experimentally extracted nonlinear modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 101:498–515, février 2018.
- [63] L. RENSON, G. KERSCHEN et B. COCHELIN : Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 364:177–206, 2016.
- [64] R. M. ROSENBERG : The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):7–14, 1962.
- [65] R. M. ROSENBERG : On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9:155–242, 1966.
- [66] E. SARROUY : Phase driven study for stochastic linear multi-dofs dynamic response. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 129:717–740, août 2019.
- [67] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 40:1–10, 2013.
- [68] E. SARROUY : *Global Analysis of Nonlinear Mechanical Systems - Application to Rotordynamics*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, octobre 2008.

-
- [69] E. SARROUY : Phase driven modal synthesis for forced response evaluation. *Dans Seventh International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer*, Marseille, 2019.
- [70] E. SARROUY, E. PAGNACCO et E. SOUZA DE CURSI : A constant phase approach for the frequency response of stochastic linear oscillators. *Mechanics & Industry*, 17(2):206, 2016.
- [71] E. SARROUY et J.-J. SINOÛ : Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems-on the use of the harmonic balance methods. *Dans F. EBRAHIMI, éditeur : Advances in Vibration Analysis Research*, pages 419–434. INTECH Open Access Publisher, avril 2011.
- [72] S. SETIO, H. SETIO et L. JEZEQUEL : A method of non-linear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration*, 158(3):497–515, novembre 1992.
- [73] R. SEYDEL : *From Equilibrium to Chaos, Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Elsevier, 1988.
- [74] S. W. SHAW et C. PIERRE : Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173, 1991.
- [75] S. W. SHAW et C. PIERRE : Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124, 1993.
- [76] P. SLAATS, J. DE JONGH et A. SAUREN : Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 54(6):1155–1171, mars 1995.
- [77] C. SOMBROEK, P. TISO, L. RENSON et G. KERSCHEN : Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace. *Computers & Structures*, 195:34–46, janvier 2018.
- [78] W. SZEMPLINSKA-STUPNICKA : “Non-linear normal modes” and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of non-linear elastic continuous systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 18(2):149–165, janvier 1983.
- [79] O. THOMAS, A. SÉNÉCHAL et J.-F. DEÛ : Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dynamics*, 86(2):1293–1318, octobre 2016.
- [80] P. TISO : *Finite Element Based Reduction Methods for Static and Dynamic Analysis of Thin-Walled Structures*. Thèse de doctorat, TU Delft, Faculteit der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, 2006.
- [81] C. TOUZÉ et M. AMABILI : Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298(4):958–981, décembre 2006.
- [82] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2):77–101, mai 2004.
- [83] M. URABE : Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2):120–152, 1965.

-
- [84] M. URABE et A. REITER : Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 14(1):107–140, 1966.



Liste des publications de l'auteur

Article dans une revue à comité de lecture

- (1) L. MEYRAND, E. SARROUY, B. COCHELIN et G. RICCIARDI : Nonlinear normal mode continuation through a Proper Generalized Decomposition approach with modal enrichment. *Journal of Sound and Vibration*, 443 :444-459, mars 2019.

Communications dans un congrès

- (2) L. MEYRAND, E. SARROUY, B. COCHELIN et G. RICCIARDI : A full PGD/HBM-based algorithm for a low-dimensional NNM continuation with modal enrichment. *Dans 28th International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2018)*, pages 2387-2403, Leuven, 2018.
- (3) L. MEYRAND, E. SARROUY et B. COCHELIN : Calcul de mode NL de structure à non linéarités géométriques via un algorithme de continuation PGD/HBM en dimension réduite. *Dans 14ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2019)*, Giens, 2019.
- (4) L. MEYRAND, E. SARROUY et B. COCHELIN : Low-dimensional nonlinear modes computed with PGD/HBM and reduced nonlinear modal synthesis for forced responses. *Dans Seventh International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer*, Marseille, 2019.

Table des figures

1.1	Allure du taux d'amortissement modal suivant la pulsation dans le cas d'un amortissement de Rayleigh	12
1.2	Effort non linéaire $f_{nl} = T$ en fonction de la vitesse relative \dot{x}_{rel} . Bleu : cas non régularisé. Rouge : Quelques cas régularisés pour des valeurs du paramètre ε décroissantes.	14
1.3	Schéma de principe d'un contact unilatéral et effort non linéaire associé	14
1.4	Schéma de principe d'un contact bilatéral symétrique et effort non linéaire associé	15
1.5	Quelques réponses transitoires de l'oscillateur harmonique	16
1.6	Quelques portraits de phase de l'oscillateur harmonique (a) Cas de lâcher (b) Cas $f_e(t) = A \cos(\omega t)$ (c) Exemple de réponse quasi-périodique. Rouge : Cycles limites théoriques	17
1.7	Schéma des portraits de phase des points fixes. Sens des flèches : temps croissant.	19
1.8	Schéma des bifurcations de cycles limites possibles. Flèches : franchissement du cercle unité lorsque le paramètre de continuation κ varie	21
1.9	Mode non linéaire de l'oscillateur de Duffing unitaire pour différentes valeurs de raideur cubique β (N.m ⁻³)	25
1.10	Résonance principale de l'oscillateur de Duffing unitaire, avec $c = 0.04$ kg.s ⁻¹ , $\beta = 1$ N.m ⁻³ et différentes valeurs de f_e : 0.01 N, 0.05 N et 0.1 N. Pointillés : MNL	26

1.11	Résonance principale de l'oscillateur de Duffing pour $f_e = 0.5 N$: zones de stabilité et solutions multiples. Rouge : zone instable d'après Floquet. Flèches : sauts de solution lors d'un balayage en fréquence.	27
1.12	Système masses-ressorts de taille 2 à non linéarité cubique.	27
1.13	Fonction de réponse en fréquence du système masses-ressorts à 2 ddls	28
2.1	Schéma de principe d'une branche de solutions suivie par continuation.	36
2.2	Principaux prédicteurs. (a) Prédiction sécante (b) Prédiction polynomiale d'ordre supérieur (c) Prédiction tangente.	38
2.3	Principaux correcteurs. (a) Correction par Newton (b) Correction par longueur d'arc (c) Correction par pseudo-longueur d'arc.	39
2.4	Illustration du principe général de continuation par prédiction-correction.	39
2.5	Tronçon de solutions partant de \mathbf{y}_0 . Pointillés : solution exacte du système. Trait continu : tracé de la série de Taylor tronquée.	41
2.6	Représentation continue de la branche de solutions par tronçons. Un tronçon est défini par une série de Taylor et son rayon de convergence utile s_{max} associé.	42
3.1	Tracé des fonctions 2π -périodiques $\cos(t)$ (bleu) et $\cos(t + t_0)$ (rouge). La relation de périodicité est la même, mais si l'une des fonctions est solution d'un système autonome, l'autre l'est aussi. La détermination d'un temps de référence dans l'équation de phase force l'unicité de la solution.	49
3.2	Schéma de principe de la méthode Alternating Frequency Time (AFT)	51
3.3	Poutre encastree-libre avec ressort cubique au bout, avec grandeurs physiques utilisées pour la POD.	55
3.4	Diagramme (partiel) de bifurcation du MNL1 de la poutre encastree-libre. En bleu : a_1 , en rouge : a_3 , en vert : a_5	55
3.5	Évolution des 4 premiers POMs suivant ω (pour les 3 branches visualisées). Encastrement ($x = 0$) à droite.	56
3.6	Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (1) (ordre des POMs 1-4 : bleu, rouge, jaune, violet)	56
3.7	Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (2) (ordre des POMs 1-4 : bleu, rouge, jaune, violet)	57
3.8	Contenu spatio-temporel et énergétique des modes POD pour la branche (3) (ordre des POMs 1-4 : bleu, rouge, jaune, violet)	57
3.9	Comparaison POMs/modes de même ordre. POM : bleu, Mode propre linéaire : rouge. (a) Cas de la branche (1) ; (b) Cas de la branche (2)	58

5.1	Schéma de principe d'une continuation de MNL par approche PGD/HBM. Carrés : points solutions pour lesquels un mode PGD a été ajouté.	81
5.2	Schéma de principe d'un FEP pour le tracé de branches de MNL	83
6.1	Schéma de principe d'une continuation de MNL amorti par approche PGD/HBM. Carrés : points solutions pour lesquels un mode PGD a été ajouté.	95
7.1	Choix de la phase – Cas 1 – Première résonance du système à 2 ddls représentée par harmonique, pour le ddl 1. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse (cas 1). Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.	109
7.2	Choix de la phase – Cas 2 – Première résonance du système à 2 ddls représentée par harmonique, pour le ddl 1. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse (cas 2). Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.	110
7.3	Choix de la phase – Valeurs de s et ϕ obtenues à partir de la référence MAN par minimisation de l'erreur. Colonne gauche : cas de la phase telle que retenue (cas 2). Colonne droite : cas de la phase identique pour toutes les harmoniques (cas 1).	111
9.1	Schéma du modèle de portique de Roorda.	125
9.2	FEP du MNL1 du portique de Roorda, par PGD/HBM (bleu) et par MAN (noir). Carrés : points où un mode PGD est ajouté. Les évolutions de x_{13} (noir) et y_{39} (rouge) représentent le déplacement transverse en les milieux de poutres.	126
9.3	Évolution de l'erreur ε et de la taille réduite m liée à la PGD/HBM le long de la continuation. N_{pt} est l'indice du point solution sur la branche.	127
9.4	Allures du premier mode linéaire ϕ_1 et de la dérivée de modale θ_{11} du portique de Roorda. Pointillés : configuration non déformée.	128
9.5	Modes PGD : Contenu de la matrice spatiale \mathbf{P} en pPGD - Normalisation à 1cm du max. en flexion	128
9.6	Participations des modes linéaires pour le mode PGD 2	129
9.7	Contenu harmonique des modes obtenus par pPGD sur le portique de Roorda. Code couleur de la Fig. 9.3 correspondant à l'indice du point de MNL sur la branche.	129
9.8	Évolution du mode PGD 2 obtenu sans blocage des formes, en oPGD - Normalisation à 1 cm du maximum en flexion.	130
9.9	Schéma du système masses-ressorts à frottement sec	132
9.10	Évolution des grandeurs modales le long de la branche du premier MNL amorti.	133
9.11	Erreur ε le long de la branche du premier MNL amorti.	135

9.12	Système masse-ressorts de taille 2 à non linéarités géométriques.	136
9.13	FRF autour de la première résonance du système à non linéarités géométriques, tracée avec les solveurs de synthèse modale à partir de MNLs amortis ou non.	136
9.14	FRF autour de la résonance du système à non linéarités géométriques dont un tracé obtenu par synthèse modale non linéaire à partir du mode linéaire sous-jacent.	137
9.15	Première résonance du système à non linéarités géométriques représentée par harmonique, pour le ddl 1 dans le cadre d'une synthèse modale via MNL non amorti. Bleu et rouge (traits continus) : resp. cosinus et sinus obtenus par synthèse. Jaune et violet (pointillés) : resp. cosinus et sinus obtenus par la MAN.	138
9.16	Solutions obtenues par le solveur réduit de synthèse non linéaire à partir du MNL amorti. (a) Amplitude modale en fonction de la pulsation d'excitation (b) Phase en fonction de la pulsation d'excitation (c) Amplitude modale en fonction de la phase.	139
9.17	Solutions obtenues par le solveur réduit de synthèse non linéaire à partir du MNL non amorti. (a) Amplitude modale en fonction de la pulsation d'excitation (b) Phase en fonction de la pulsation d'excitation (c) Amplitude modale en fonction de la phase.	140
9.18	Indices des points de MNL (amorti) utilisés pour l'interpolation lors du calcul d'un point de FRF. Bleu : points avec s_1 directement inférieur à s interpolé. Rouge : points avec s_2 directement supérieur à s interpolé.	140
9.19	Performances du solveur de synthèse non linéaires pour le système à non linéarités géométriques. (a) Évolution de l'erreur faite par solveur de Newton (b) Évolution du nombre d'itérations de Newton I	141
9.20	FRF autour de la première résonance du système à non linéarités géométriques, tracée avec le solveur de synthèse modale défini à partir de l'erreur dynamique ε et avec injection du MNL1 amorti.	142
10.1	Poutre d'Euler-Bernoulli encastée-libre (a) avec ressort transverse cubique sur le ddl 1 (b) avec jeu transverse entre le ddl 1 et le ressort linéaire.	145
10.2	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – (a) FEP (b) Déformée modale à vitesse nulle pour 3 points de la continuation (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.	147
10.3	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. Ligne 1 : formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. Pointillés : forme lorsque le mode est introduit ; Trait continu : forme en fin de tronçon d'étude ($N_{pt} = 35$). Ligne 2 : Participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Croix : participation lorsque le mode PGD est introduit ; Cercles : participation en fin de tronçon d'étude ($N_{pt} = 35$).	148

10.4	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par oPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de tronçon d'étude ($N_{pt} = 35$).	149
10.5	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – (a) FEP (b) Déformée modale à vitesse nulle pour 3 points de la continuation (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.	150
10.6	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. (a) Formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. (b) Participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Dans chaque groupe de barres, les modes linéaires sont indexés par ordre croissant jusqu'au mode 10. p_1 n'est pas affiché car égal au mode linéaire 1.	151
10.7	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 non amorti par pPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de branche.	151
10.8	Poutre à ressort de bout cubique, MNL1 amorti par pPGD – (a) FEP (b) Amortissement modal en fonction de l'énergie mécanique conservative (c) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (d) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD est ajouté.	154
10.9	FRF autour de la première résonance de la poutre à ressort cubique, tracée avec les 3 solveurs de synthèse modale étudiés : à partir de MNLs amortis ou non, et défini à partir de l'erreur dynamique ε	156
10.10	Poutre avec contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – (a) FEP de la branche principale (trait continu) et de quelques résonances internes (pointillés) (b) Nombre m de modes PGD selon l'indice du point N_{pt} (c) Erreur ε selon l'indice du point N_{pt} . Carrés : points où un mode PGD a été ajouté.	157
10.11	Poutre à contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – Analyse du contenu spatial des modes PGD. Colonne de gauche : formes des modes PGD, avec normalisation au maximum de déflexion. Pointillés : forme lorsque le mode est introduit ; Trait continu : forme en fin de branche ($N_{pt} = 199$). Colonne de droite : participations des modes linéaires dans chaque mode PGD. Croix : participations lorsque le mode est introduit ; Cercles : participations en fin de branche ($N_{pt} = 199$).	160
10.12	Poutre avec contact unilatéral, MNL1 conservatif par oPGD – Amplitudes des coefficients de Fourier (en cosinus) des modes PGD. Croix : coefficients lorsque le mode est introduit ; Cercles : coefficients en fin de branche ($N_{pt} = 199$).	161
C.1	Élément de poutre à 2 ddls par nœud, de taille l	179
C.2	Élément de poutre à 3 ddls par nœud, de taille l	180



Liste des tableaux

3.1	Liste de méthodes spectrales parmi les plus classiques; classées par bases de réduction/projection, respectivement Φ et Ψ	47
9.1	Propriétés géométriques, mécaniques et dynamiques du portique de Roorda . . .	125
9.2	Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL 1 du portique de Roorda (pPGD).	126
9.3	Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL 1 du portique de Roorda propres au cas oPGD.	130
9.4	Nombre de points de MNL par tronçon de taille m donnée (gauche); Nombre total de variables de la branche de MNL (droite).	131
9.5	Moyenne, écart type et maximum des nombres d'itérations pour \mathcal{I}_m et \mathcal{S}_m le long de la branche de MNL du portique de Roorda.	131
9.6	Propriétés physiques du système à 2 ddls à frottement sec.	132
9.7	Propriétés modales des systèmes linéaires associés au problème à 2 ddls à frottement sec.	133
9.8	Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL 1 du système à frottement sec.	134
9.9	Propriétés physiques du système à 2 ddls à non linéarités géométriques.	136
9.10	Paramètres algorithmiques utilisés par l'Algorithme 4 pour tracer la première résonance du système à non linéarités géométriques.	137

10.1 Pulsations propres de la poutre encastrée-libre avec ou sans ressort de bout.	145
10.2 Paramètres requis par l'Algorithme 3 pour le cas de la poutre à ressort de bout cubique. Ligne 1 : oPGD ; Ligne 2 : pPGD.	146
10.3 Comparaison entre le nombre de descripteurs requis pour la pPGD/HBM, la oPGD/HBM et la HBM classique pour la poutre à ressort cubique. Dernière ligne : la référence pour le nombre de points et la taille m est celle du calcul par pPGD/HBM.	152
10.4 Moyenne, écart type et maximum du nombre d'itérations de Newton pour les sous-problèmes \mathcal{T}_m et \mathcal{S}_m le long de la continuation.	153
10.5 Moyenne, écart type et extrema de propriétés numériques pour les 25 essais aléatoires.	153
10.6 Paramètres de l'Algorithme 3 pour le MNL1 amorti de la poutre à ressort cubique.	155
10.7 Paramètres algorithmiques utilisés par l'Algorithme 4 pour tracer la première résonance de la poutre à ressort cubique.	155
10.8 Paramètres requis par l'Algorithme 3 pour le cas de la poutre à contact unilatéral. Ligne 1 : oPGD ; Ligne 2 : pPGD.	157
10.9 Comparaison entre le nombre de descripteurs requis pour la pPGD/HBM, la oPGD/HBM et la HBM classique pour l'exemple de poutre à contact unilatéral. La référence pour les points solutions utilisés sont ceux du cas pPGD/HBM.	159
10.10 Moyenne, écart type et maximum du nombre d'itérations pour les sous-problèmes \mathcal{T}_m et \mathcal{S}_m le long de la continuation.	159