



Aix-Marseille Université

École Doctorale 352, Physique et Sciences de la Matière

Centre National d'Études Spatiales

Thales AVS/MIS

Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires, UMR 7345-CNRS

Dissertation soumise pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Physique et Sciences de la Matière

Spécialité : Énergie, Rayonnement et Plasma

Par

Damien F. G. MINENNA

Modélisation hamiltonienne N-corps de l'échange de moment dans
l'interaction onde-particule non-linéaire

Many-body hamiltonian modeling of the momentum exchange within
the nonlinear wave-particle interaction

Soutenue le 12 novembre 2019 devant le jury composé de :

Frédéric ANDRÉ	Thales AVS/MIS, Vélizy	Co-encadrant de thèse
Didier BÉNISTI	CEA, DAM, DIF, Arpajon	Rapporteur
Yves ELSKENS	Aix-Marseille Université, PIIM	Directeur de thèse
Marie-Christine FIRPO	CNRS, LPP, École Polytechnique, Palaiseau	Présidente du jury
Alain GHIZZO	Université de Lorraine, Institut Jean Lamour	Rapporteur
Julien HILLAIRET	CEA, IRFM, St-Paul-lez-Durance	Examinateur
André NICOLET	Aix-Marseille Université, Institut Fresnel	Invité
Juliette PLOUIN	CEA, IRFU, Gif-sur-Yvette	Examinatrice
Jérôme PUECH	CNES, Toulouse	Responsable CNES, invité
Nikita M. RYSKIN	Saratov State University	Examinateur

Dissertation de thèse, soutenue le 12 novembre 2019 à l'université d'Aix-Marseille.

Ce document a été composé en \LaTeX par Damien F. G. Minenna. Il s'inspire visuellement de plusieurs patrons disponibles sur <https://www.latextemplates.com/template/>.

Certaines figures ont été réalisées avec l'aide d'Élise Duverdier.



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons : Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](#).

This document is put at disposal under the terms of the [Creative Commons Licence: Attribution - Non-Commercial - NoDerivatives 4.0 International \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#).

À ma grand mère,
Ginette Minenna

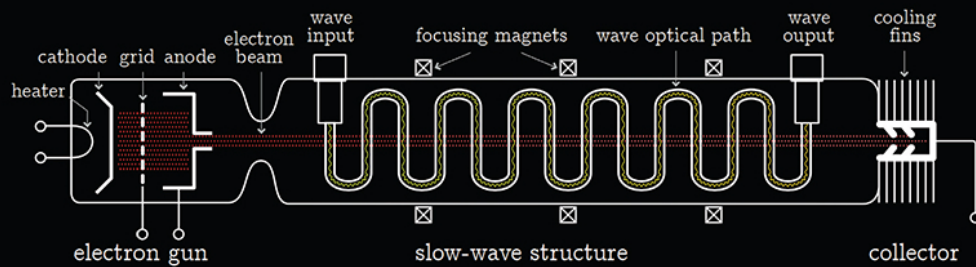
The European Physical Journal

volume 44 · number 1 · February 2019

EPJ H



Recognized by European Physical Society

Historical Perspectives
on Contemporary Physics

Schematic of a traveling-wave tube with a folded waveguide

From: *The traveling-wave tube in the history of telecommunication*
By Damian F.G. Minenna et al.

edp sciences

Springer

Traveling-wave tubes: The unsung heroes of space exploration

An invention from the 1950s is still being used today

Date: March 27, 2019

Source: Springer

Summary: What do televisions and space exploration have in common? No, we're not talking about a cheesy physics joke; rather, this is the story of an often-overlooked piece of equipment that deserves a place in the annals of telecommunication history. Now, researchers have reviewed the history of TWTs.

FULL STORY

What do televisions and space exploration have in common? No, we're not talking about a cheesy physics joke; rather, this is the story of an often-overlooked piece of equipment that deserves a place in the annals of telecommunication history. Some would argue that the traveling-wave tube (TWT) has not received the recognition it deserves when it comes to the history of space travel and communications -- until now. A group of researchers based at the Aix-Marseille Université in France has published a review looking into the history of TWTs, recently published in *EPJ H*.

This is the first time a paper aimed at the general public has described the vital role of this technology in various areas of development. The team collected and read hundreds of papers on the history and evolution of the traveling-wave tube. First introduced in the 1950s, a TWT is a relatively simple piece of equipment used for transmitting data across long distances, including the vast expanses of space.

A TWT is made up of three parts -- an electron gun that produces the beam; a slow wave structure made up of a series of magnets, through which the beam travels; and a collector that limits the amount of energy lost in the process. The paper describes how the TWT was pivotal to the development of the television in the 1950s, and to the space programme in the 1960s.

But it is just as relevant today. "Traveling-wave tubes are still frequently used in space telecommunication and for deep-space missions," says Damien Minenna, a PhD student who worked on the paper. For example, the NASA probe New Horizons recently sent images of Kuiper belt objects, the most distant images from Earth ever taken by a spacecraft, and they were transmitted using a TWT.

In Minenna's own research, he uses TWTs to study chaos in plasmas. He hopes the review article will help others understand, and appreciate, the importance and history of the traveling-wave tube.

Résumé

On s'intéresse à l'interaction onde-particule au travers d'une description N -corps (souvent jugée difficile à mettre en œuvre à cause du nombre de degrés de libertés mis en jeu). L'évolution de notre système repose sur un hamiltonien composé de la partie électromagnétique $\int_V (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) / 2 \, dV$, de la partie particules $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|^2 / (2m)$ et d'une partie de charge d'espace. Pour les guides d'onde périodiques, nous employons une technique de réduction, appelée le « modèle discret », pour diminuer drastiquement le nombre de degrés de libertés. Ce modèle décompose les champs électromagnétiques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n V_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ avec des amplitudes temporelles et des formes de champs dépendant de la géométrie de la structure. Cette même technique permet d'obtenir des termes de couplage lisses rendant possible l'utilisation de macro-particules. Notre hamiltonien est ré-exprimé avec le modèle discret pour obtenir une théorie N -corps auto-cohérente unidimensionnelle capable de décrire les effets non-linéaires (oscillations, piégeages et chaos) de l'interaction onde-particule en domaine temporel.

En appliquant le théorème de Noether, nous étudions aussi l'échange de moment canonique à l'origine de l'interaction. Une reformulation de la puissance électromagnétique en domaine temporel est proposée dans la représentation du modèle discret. De plus, notre théorie est validée analytiquement avec un modèle robuste de circuit équivalent. Nous étudions aussi une version tridimensionnelle de notre théorie reposant sur la géométrie hélicoïdale.

Notre hamiltonien sert de base à la construction d'un intégrateur numérique symplectique. Cet algorithme est utilisé pour modéliser diverses géométries de tubes à ondes progressives (du MHz au sous-THz, avec des tubes à hélice et à guides repliés, et longs de quelques centimètres à plusieurs mètres). Une validation de notre algorithme est réalisée avec des mesures expérimentales. Notre algorithme permet aussi l'étude de ces tubes, notamment des effets non-linéaire ainsi que la distorsion de signaux de télécommunication.

Finalement, nous montrons que, lorsque la vitesse de phase d'un champ électromagnétique n'est pas égale à la célérité de la lumière dans le vide, alors ce champ admet une quantité de mouvement mécanique et un moment conjugué distincts. Ce phénomène, au cœur de la controverse Abraham-Minkowski, n'avait été observé que dans les milieux diélectriques. Nous étendons sa portée aux guides d'ondes et aux plasmas et suggérons l'universalité de ce dilemme.

Abstract

We investigate the wave-particle dynamics using an N -body description (often deemed impossible due to the number of degrees of freedom involved). The evolution of our system rests on a hamiltonian composed of an electromagnetic part $\int_V (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) / 2 \, dV$, a particle part $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|^2 / (2m)$ and a space charge part. For periodic waveguides, we use a model reduction, called the “discrete model”, to drastically reduce the number of degrees of freedom. This model decomposes electromagnetic fields $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n V_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ and $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ with time amplitudes and field shapes depending on the geometry. This technique enables us to obtain smooth coupling terms, enabling the use of macro-particles. Our hamiltonian is reformulated with the discrete model to obtain a one-dimensional N -body self-consistent theory able to describe non-linear effects (oscillations, trapping and chaos) of the wave-particle interaction in time domain.

Applying Noether’s theorem, we investigate the canonical momentum exchange at the origin of the interaction. A reformulation of the electromagnetic power in time domain is proposed using the discrete model’s representation. Moreover, our theory is validated analytically against a robust equivalent circuit model. We also investigate a tridimensional version of our theory resting on the helix geometry.

Our hamiltonian provides the basis to build a numerical symplectic integrator. This algorithm is used to simulate several traveling-wave tube geometries (for MHz to sub-THz, with helix and folded waveguide tubes, from centimeters to meters long). Our algorithm is benchmarked against experimental measurements. It also allows the investigation of nonlinear effects in tubes as well as the analysis of the distortion of telecommunication signals.

Finally, we demonstrate that, when the phase velocity of an electromagnetic field is not equal to the speed of light in vacuum, then this field has distinct kinematic and canonical momenta. This phenomenon, at the heart of the Abraham-Minkowski controversy, was only observed in dielectric materials so far. We extend its scope to vacuum waveguides and to plasmas, and we suggest its universality.

Table des matières

Résumé	6
Abstract	7
Table des matières	9
Remerciements	12
Préface	15
I Introduction : interaction onde-particule et tubes hyperfréquences	19
1 Interaction onde-particule par la dynamique N-corps	21
1.1 Modèles d'interaction	23
1.2 Faisceau d'électrons libres en interaction avec une onde sinusoïdale	25
1.3 Modèle hamiltonien auto-cohérent	27
1.4 Interaction entre ondes et électrons dans un tube à ondes progressives	28
1.5 Lien entre la physique des plasmas et les tubes à ondes progressives	29
1.6 Objectifs : description N -corps en physique des plasmas et échange de moment	30
2 Tubes à ondes progressives	35
2.1 Rôles des tubes à ondes progressives	36
2.2 Fonctionnement des tubes à ondes progressives	37
2.3 Gain, puissance et rendement des TOPs	40
2.4 Objectifs : modélisation des tubes à ondes progressives	41
II Modèle discret hamiltonien N-corps	43
3 Modèle discret de Kuznetsov	45
3.1 Champ électromagnétique dans une structure périodique	46
3.2 Décomposition des champs électromagnétiques	50
3.3 Champs électromagnétiques en représentation par cellule	54
3.4 Propagation des champs avec le modèle discret	56
3.5 Avantages du modèle discret	59
4 Dynamique hamiltonienne N-corps pour le modèle discret	61
4.1 Modèles N -corps en électrodynamique et en plasmas	62
4.2 Formalisme hamiltonien	62
4.3 Dynamique des N_e particules dans un champ	63

4.4	Dynamique des M ondes en interaction avec le faisceau	64
4.5	Évolution temporelle et intégrateurs numériques symplectiques	67
4.6	Modèle unidimensionnel	69
4.7	Avantages de notre modèle N -corps	70
III	Simulation d'un tube à onde progressive avec le modèle discret	73
5	Simulations de tubes à ondes progressives avec DIMOHA	75
5.1	Approches usuelles pour simuler un TOP	75
5.2	Algorithme DIMOHA	76
5.3	Initialisation des paramètres à froid	78
5.4	Intégrateur et diagnostics	80
5.5	Comparaison avec un code fréquentiel	81
5.6	Comparaison avec un tube industriel à hélice	81
5.7	Comparaisons avec des tubes à cavités couplées	84
5.8	Avantages de DIMOHA	87
IV	Échange de moment entre ondes et particules	89
6	Moment conjugué et puissance électromagnétique pour le modèle discret unidimensionnel	91
6.1	Lagrangien du modèle discret	91
6.2	Application du théorème de Noether	92
6.3	Moment canonique des champs en régime monochromatique	94
6.4	Puissance électromagnétique	99
6.5	Fonction propre unidimensionnelle des champs	103
6.6	Avantages du modèle discret N -corps	104
7	Universalité de la controverse Abraham-Minkowski	105
7.1	Controverse Abraham-Minkowski	106
7.2	Résolution pour les guides d'onde	110
7.3	Validation avec notre algorithme DIMOHA	113
7.4	Occurrence pour les plasmas	114
7.5	Universalité de la controverse	114
V	Approches fréquentielle et tridimensionnelle du modèle discret	117
8	Modèle discret linéaire en domaine fréquentiel	119
8.1	Modèles fréquentiels actuels	120
8.2	Modèle faisceau fluide	123
8.3	Modèle de Pierce	126
8.4	Modèle discret linéaire	129
8.5	Comparaison entre le modèle discret et le modèle de Pierce	131
8.6	Avantages du modèle discret en régime linéaire	132

9	Structure hélicoïdale tridimensionnelle pour le modèle discret	135
9.1	Hélice du tube	136
9.2	Modèle discret pour la géométrie hélicoïdale	139
9.3	Modèle discret pour l'hélice en feuille	139
9.4	Puissance électromagnétique en régime non-monochromatique	142
9.5	Modèle discret pour l'hélice en ruban	143
9.6	Avantages et perspectives du modèle discret pour la géométrie hélicoïdale	143
VI	Conclusions et Annexes	145
10	Conclusions et perspectives	147
A	Pendule non linéaire et intégrateurs symplectiques	151
A.1	Pendule non-linéaire mathématique	152
A.2	Méthodes numériques	153
B	Démonstrations et relations utiles	157
B.1	Transformée- β inverse de Gel'fand d'un produit	157
B.2	Orthogonalité des modes	158
B.3	Hamiltonien électromagnétique	160
B.4	Vitesse de groupe	160
B.5	Fonctions de Bessel modifiées	161
	Publications et communications	163
	Bibliographie	165

« Vanité que ce gravier que vous tenez entre les mains. »

— Citation d'un auteur qui se reconnaîtra

Remerciements

Les travaux présentés dans cette dissertation n'auraient pas vu le jour sans toutes les personnes qui ont été présentes, qui m'ont aidé, qui m'ont apporté leurs conseils et qui m'ont supporté pendant ces trois longues années. Ce fut une formidable aventure et, si c'était à refaire, je recommencerais tout sans hésiter. Je me permets de remercier en particulier les personnes suivantes et je m'excuse d'avance auprès des oubliés. Commençons par mes cinq mentors.

Tout a débuté à Marseille en novembre 2015. Je suis tombé sur un sujet de stage sur un drôle d'engin qu'on appelle un TOP et qui servirait à faire de la physique bien compliquée. Ayant travaillé auparavant sur le squark STOP, je trouvais la continuité évidente. Je rencontre alors Yves Elskens, celui qui deviendrait mon directeur de thèse. Il m'explique son sujet et me motive. Durant cette thèse, je vais pouvoir travailler à la fois en physique théorique, avec plein de bouquins de maths, faire du numérique, faire de l'expérimental, ou même voir des aspects industriels, le tout dans un contexte spatial. Bref, je vais m'amuser. Sur un mur de son bureau, des larges bibliothèques me font de l'œil (je regrette quand même de t'avoir rendu tous tes livres à la fin de ma thèse). Depuis le début de mon stage et puis pendant toute ma thèse, Yves a toujours été présent, sa porte était toujours ouverte, et a toujours répondu avec bienveillance à mes questions (dont les plus bêtes). Il a aussi été là pour relire minutieusement toutes mes publications. Je lui en suis extrêmement reconnaissant et je le remercie aussi pour la confiance qu'il m'a accordée, notamment lorsque je lui annonçais, tout à coup, travailler sur un nouveau sujet. Nos nombreuses discussions dans son bureau, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, me manqueront.

Dès la première semaine de mon stage, une visite à Thales à Vélizy est programmée. J'y rencontre Frédéric André, mon co-directeur de thèse. Il me fait visiter son usine et me montre les petits objets métalliques qu'il appelle des TOPs. Il m'explique alors clairement les enjeux de ma thèse et me donne la fibre du tube. Frédéric m'a appris que les TOPs ne sont pas des reliques du passé mais des appareils magnifiques, et il m'a fait remettre en question mes préjugés sur l'industrie et les ingénieurs. Frédéric a toujours pris le temps de répondre à mes questions. Et nos conversations ont enrichi mes connaissances. Il m'a soutenu dans mes recherches et m'a aidé de nombreuses fois à partir en conférence. Grâce à sa générosité, je lui dois aussi mon embauche pour un mois à Thales après ma thèse. Pour tout cela, je l'en remercie. J'espère que l'on pourra continuer à discuter ensemble de physique.

De retour à Marseille, pendant ma prise de fonctions au laboratoire PIIM, j'ai été accueilli par le directeur d'équipe Fabrice Doveil. Il me montre alors un TOP immense et essaye de me convaincre que la physique est la même que dans les petits TOPs de Thales. Fabrice m'a très vite fait intégré son équipe. Il m'a permis de faire le lien entre équations et réalités des expériences. Fabrice a été présent pendant durant toute ma thèse, que ce soit scientifiquement ou humainement. Je le remercie pour nos nombreux échanges et pour avoir pris maintes fois le temps de me relire.

Je me mets à la tâche pendant mon stage. Il y a beaucoup à faire. Quelques mois plus tard je reçois un email de Jérôme Puech avec notamment deux phrases qui ont changé ma vie : « Je voulais aussi vous dire que la candidature de Damien Minenna a été retenue au niveau du CNES. C'est officiel. » Je vous laisse imaginer ma joie. Depuis lors, Jérôme Puech m'a honoré de sa confiance et je l'en remercie. Il m'a

accordé du temps, m'a soutenu dans tous mes projets de recherche et m'a aidé à partir en conférence en Corée.

Longtemps après, par un beau matin de juillet 2018 traînait dans des couloirs peu remplis le nouvel arrivant du laboratoire, Alexandre Poyé. Personne ne lui avait encore donné de travail et il a eu le malheur de passer devant moi. Je lui ai proposé de travailler sur un super code de MATLAB (la gestion du train d'électrons marchait bien). À la place, il m'a appris que Fortran n'était plus un langage démodé et illisible. Il m'a montré qu'un bon code bien géré (et commenté) pouvait faire des merveilles. C'est aussi Alexandre qui m'a appris ce que représentait 10^{18} W/cm² et que la physique des lasers était un domaine riche et magnifique. Je le remercie pour tous ces excellents conseils en science ou sur ma carrière. Je m'excuse d'avoir été têtu. Bien que nous nous sommes vraiment rencontré tardivement, je ne pense pas que ma thèse aurait autant avancé sans Alexandre. Nos discussions autour d'un café me manqueront. À l'occasion, j'espère avoir la possibilité de revenir pour une partie de cartes (je te dois toujours une revanche si tu l'oses). Le jour où tu te lanceras, tu deviendras un super directeur de thèse !

Yves, Frédéric, Fabrice, Jérôme et Alexandre : encore merci ! Je n'aurais pas pu rêver d'un meilleur encadrement.

Je remercie mes rapporteurs Didier Bénisti et Alain Ghizzo ainsi que les membres du jury Marie-Christine Firpo, Julien Hillairet, André Nicolet, Juliette Plouin et Nikita Ryskin pour leurs critiques constructives ayant amélioré cette dissertation. Je remercie d'autant plus Didier pour avoir accepté de me prendre en post-doctorat au CEA. Nikita, thank you for your advices about the discrete model and for taking the time to come to my defence.

Ma vie de thésard ne s'est pas arrêtée à une interaction avec mes encadrants ou mon jury. J'adresse bien évidemment toute ma reconnaissance aux membres du laboratoire PIIM que j'ai côtoyés, parfois quotidiennement, avec qui j'ai pu avoir énormément d'échanges (scientifiques ou non). Dans l'équipe TP, je remercie Cécile Arnas, Nicolas Claire, Lénaïc Couédel, Dominique Escande, Alexandre Escarguel, Verónica González-Fernández et Laurence Kovacic pour les pauses café, leurs conseils et nos échanges. Merci Dominique pour nos discussions de physique. Je remercie aussi l'équipe DSC. En particulier, je remercie Magali Muraglia pour ses conseils et pour m'avoir permis d'enseigner, cela m'a beaucoup apporté. Pour leurs bonnes humeurs, je remercie mon parrain Don Olivier Agullo, Yann Carmenen, Nicolas Dubuit, Matteo Faganello et Guillaume Fuhr. Grâce à vous six, je ne me suis jamais ennuyé au labo et vos conseils (surtout les sérieux) m'ont toujours aidé. Vous avez rendu ces trois années de thèse inoubliables. Je remercie aussi Sadri Benkadda, Peter Beyer, et David Zarzoso. N'oublions pas l'administration avec Nathalie Bonifay, Annette Calisti, Zaïna Kassim, Jean-Marc Layet, Émilien Paroutaud, Éric Rostang et Marie-Pierre Sergent. Éric, donne-moi des nouvelles de la Dinovale. Je souhaite bon courage aux nouveaux docteurs et aux thésards du laboratoire qui n'ont pas encore fini. En particulier, Myriam, Valentin, Alebia et Igor : merci d'avoir contribué à ma bonne humeur et bonne chance pour la suite. Myriam, tiens-moi au courant pour la suite. Merci aussi à Debraj, Grégory, Janileide, Judith, Malik, Manuela, Meirielen, Neeraj, Ning, Pierluigi, Pierre, Romain, Sabine et Samuele. J'en profite aussi pour saluer mes anciens collègues du Master CCP à Montpellier et du Master SFP à Marseille. Comme promis, je vous attendrai à Pôle emploi. Je souhaite également bon courage à Khalil, mon successeur, pour son début de thèse. Tu pourras dire que les bugs viennent de ton prédécesseur. Et bien entendu, je remercie les fabricants des machines à café Delonghi et Nespresso.

Je remercie mes très chers parents Michel et Bernadette qui ont toujours été là pour moi et qui m'ont permis de faire mes études. Je remercie mon frère Gino pour ses encouragements et je lui souhaite une bonne continuation dans ces études. Je regrette l'absence de tous mes grands-parents à ma soutenance. Remerciements spéciaux pour ma compagne Élise. Merci de m'avoir soutenu, supporté et donné la force de réaliser cette thèse. Je sais que parfois ça a été difficile mais je n'aurais pas réussi cette thèse

sans toi. Je te remercie aussi pour avoir pris le temps de me relire de nombreuses fois (incluant ces remerciements) et pour avoir réalisé certains schémas. Pour finir, je dois admettre que cette thèse n'est pas ma plus belle réussite de ces dernières années. Merci Callie ! Surtout garde ta joie de vivre et essaye de laisser papa et maman dormir de temps en temps.

« Careful. We don't want to learn from this. »

— Bill Watterson, *Calvin and Hobbes*, 1987

Préface

Plan de lecture

Cette dissertation est divisée en cinq parties, d'un ou deux chapitres, auxquelles se rajoutent une conclusion et des annexes. Tous les chapitres sont volontairement courts d'une dizaine de pages pour faciliter une lecture rapide.

La première partie, composée des deux premiers chapitres, sert d'introduction à cette dissertation. Le [chapitre 1](#) introduit la description à N corps et présente de manière pédagogique l'interaction onde-particule avec un modèle N -corps simple. Le [chapitre 2](#) introduit les tubes à ondes progressives, leurs usages, fabrications et fonctionnements.

La deuxième partie établit notre modèle théorique. Le [chapitre 3](#) présente les bases du modèle discret (notre modèle de réduction) que nous utiliserons dans quasiment tous les autres chapitres. Il décrit aussi la propagation des ondes avec notre approche. Le [chapitre 4](#) présente notre modèle hamiltonien N -corps combiné au modèle discret. Il décrit aussi la propagation des particules et les couplages avec les ondes.

La troisième partie, avec le [chapitre 5](#), introduit notre algorithme DIMOHA. Nous y décrivons le fonctionnement de ce dernier et nous présentons les résultats obtenus sur des simulations de tubes à ondes progressives. Ces résultats incluent des comparaisons avec des codes existants et des mesures expérimentales.

Dans la quatrième partie, nous étudions l'échange de moment onde-particule. Le [chapitre 6](#) est une suite directe du [chapitre 4](#). Nous y vérifions que notre modèle hamiltonien N -corps admet des quantités physiques conservées en utilisant le lagrangien associé et le théorème de Noether pour obtenir le moment conjugué. Nous y proposons aussi une reformulation de la puissance électromagnétique pour le modèle discret. Au [chapitre 7](#), nous proposons une résolution de la controverse Abraham-Minkowski pour les guides d'onde et évoquons l'universalité de cette controverse.

La cinquième partie étend l'usage du modèle discret. Le [chapitre 8](#) décrit une version en domaine fréquentiel du modèle discret et sa comparaison avec un modèle de TOP établi. Enfin, avant de conclure, le [chapitre 9](#) décrit une version tridimensionnelle du modèle discret avec un modèle d'hélice ainsi qu'un deuxième calcul de la puissance électromagnétique.

L'[appendice A](#) propose un rappel sur la dynamique du pendule, modèle de base dans la compréhension intuitive de l'interaction onde-particule, et nous permet aussi de présenter l'intérêt des intégrateurs symplectiques avec un exemple. L'[annexe B](#) propose des démonstrations de calculs.

Un lecteur pressé pourra aussi se reporter aux publications (listées à la fin du document avant la bibliographie) issues du travail de cette thèse.

Introductions historiques

Le traitement scientifique réalisé dans ce document est à la croisée de la mécanique classique hamiltonienne, de l'électrodynamique classique, de la physique des plasmas et de l'ingénierie des tubes électroniques. Au début de chaque chapitre, nous proposons des résumés historiques introduisant ces disciplines, entrant plus ou moins en résonance avec le contenu du chapitre associé. Le lecteur remarquera que ces introductions sont trop courtes pour être exhaustives. Nous proposons les résumés suivants : une introduction sur la mécanique à N -corps, la physique des plasmas et le chaos hamiltonien au [chapitre 1](#) ; un résumé sur l'histoire des télécommunications avant et après l'apparition des tubes à ondes progressives et leurs applications spatiales au [chapitre 2](#) ; une introduction sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique, ainsi qu'au modèle discret de Kuznetsov au [chapitre 3](#) ; une esquisse de l'histoire de la mécanique classique au [chapitre 4](#) ; une précision au [chapitre 5](#) sur les évolutions théoriques ayant mené à notre code ; un résumé sur l'histoire du concept de moment et des controverses *vis viva* et d'Abraham-Minkowski au [chapitre 7](#) ; un résumé, au [chapitre 8](#), sur les développements théoriques ayant mené à l'invention du tube à ondes progressives, ainsi que les modèles théoriques conçus pour les étudier ; un résumé sur l'histoire de la structure hélicoïdale en électrodynamique, pour l'étude des tubes à ondes progressives et du développement des solveurs numériques au [chapitre 9](#) ; et finalement, en [appendice A](#), un résumé sur l'histoire des pendules et des méthodes numériques temporelles.

Remarques

Quantité de mouvement et moment

Bien qu'ils soient fréquemment utilisés, les définitions physiques des termes « quantité de mouvement, moment, et impulsion » (*momentum*, *moment*, *impulse*) peuvent être confondues, probablement à cause d'hésitations historiques dans la terminologie, d'abus de langage et d'anglicismes. Dans cette dissertation, nous étudions l'échange de moment de l'interaction onde-particule ; une définition des termes s'impose donc. Nous appellerons quantité de mouvement, moment mécanique ou moment cinématique (*quantity of motion*, *mechanical momentum* ou *kinetic momentum*) le produit de la masse par la vitesse

$$m\dot{q},$$

d'une particule. Nous appellerons moment conjugué de Lagrange ou moment canonique (*conjugate momentum* ou *canonical momentum*) ou impulsion la quantité définie par

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

avec L le lagrangien. Dans les cas simples de la mécanique classique et en l'absence de champ électromagnétique, la quantité de mouvement et le moment conjugué coïncident, ce qui peut porter à confusion. On remarquera que dans la littérature anglaise, ces deux définitions sont souvent simplement dénommées *momentum*. D'autres dénominations existent aussi.

Pour la lumière dans le vide, lorsque la vitesse de phase v_{ph} vaut c , la quantité de mouvement d'un photon $\hbar\omega/c$ est égale à son moment conjugué, et la densité de quantité de mouvement « mécanique » d'un champ électromagnétique $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$ est identique à sa densité de moment conjugué, mais cela n'est plus vrai lorsque $v_{\text{ph}} \neq c$. Cette distinction entre quantité de mouvement mécanique et moment conjugué est cruciale dans la résolution de la controverse Abraham-Minkowski au [chapitre 7](#). C'est pour cette raison que nous insistons sur la différence entre les deux notions. La plupart du temps, nous emploierons le terme de moment, même s'il est moins populaire que quantité de mouvement ou impulsion, car l'échange de moment peut être mécanique ou canonique.

Le moment cinématique (quantité de mouvement) ne doit pas être confondu avec le moment cinétique (*angular momentum*, non utilisé dans ce document) qui correspond au produit vectoriel $\mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{q}})$, avec \mathbf{r} un vecteur position, ni confondu avec le moment d'une force (*torque*, non utilisé dans ce document) défini par le produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathfrak{F}$. Le moment conjugué, que ce soit pour une particule ou un champ, est souvent appelé impulsion dans la littérature ; toutefois nous éviterons ce terme, car l'impulsion est aussi utilisée pour définir la variation de la quantité de mouvement lors d'une percussion.

Controverse Abraham-Minkowski

La controverse Abraham-Minkowski a été et reste encore sujette à polémique. De nombreux articles sur le sujet sont encore débattus. Nous ne débattons pas de l'intérêt, ni des applications de cette controverse, et nous ne privilégierons pas une théorie (Abraham ou Minkowski) par rapport à l'autre. Nous nous contenterons de dire que la notion de quantité de mouvement des champs dans un guide d'onde était mal définie et nous proposons deux solutions, une avec Abraham et une avec Minkowski, ainsi que les contextes où nous les utilisons.

Étymologiquement parlant, nous gardons les notions de « controverse » (contestation sur une question) et de « dilemme » (deux propositions contradictoires) Abraham-Minkowski car elles sont historiques. Toutefois, la controverse n'existe plus réellement, et il n'y a pas de dilemme puisque les théories d'Abraham et de Minkowski sont toutes les deux vraies et équivalentes, répondant à des questions différentes.

Autres remarques

En présence, respectivement en l'absence, du faisceau d'électrons, les champs électromagnétiques sont dit chauds, respectivement froids.

En régime harmonique, pour représenter les variables dépendant du temps et de l'espace, nous choisissons la convention d'espace-temps de Fourier suivante

$$\mathfrak{F}(z, t) = \Re\left(\tilde{\mathfrak{F}}(\beta, \omega) e^{-i\omega t + i\beta z}\right),$$

avec β le nombre d'onde et ω la pulsation.

Traditionnellement, le formalisme lagrangien est abordé avant le formalisme hamiltonien. Toutefois, la construction de notre modèle nous conduit à faire l'inverse pour rester cohérent.

Financements

Cette thèse est co-financée par le Centre National d'Études Spatiales (CNES), par Thales AVS/MIS, et soutenue scientifiquement par les moyens du laboratoire PIIM, université d'Aix-Marseille-CNRS.

Première partie

**Introduction : interaction
onde-particule et tubes
hyperfréquences**

“[...] the way that elementary particles such as electrons [...] and photons all take each other into account in their very core. The notion is a mathematical one, but for a good metaphor, recall how your own identity depends on the identities of your close friends and relatives, and how theirs in turn depends on yours and on their close friends' and relatives' identities, and so on, and so on.”

— Douglas R. Hofstadter, *Metamagical Themas*, 1985

1

Interaction onde-particule par la dynamique N -corps

Ce chapitre propose une description intuitive de l'interaction onde-particule s'appuyant sur la dynamique à N -corps. Ce modèle intuitif correspond à un analogue de notre modèle présenté au [chapitre 4](#).

De la mécanique à N -corps,...

C'est en voulant calculer la dynamique de « $N \geq 2$ » corps célestes, chacun en interaction gravitationnelle avec les autres, que [Newton \(1687\)](#), dans ses *Principia*, posa le fameux problème à N -corps. Pour $N = 2$, il démontre que les corps décrivent des ellipses autour de leur centre de gravité commun. Par contre, Newton sous-entend que le simple problème à trois corps (le système Soleil-Terre-Lune) est insoluble. Ce problème fut alors considéré comme un important défi à tel point que le Roi Oscar II de Suède établit un prix pour sa résolution. Ce prix fut octroyé à [Poincaré \(1890\)](#), qui ne résolut pourtant pas le problème initial mais démontra que les trajectoires pouvaient être chaotiques et posa des bases importantes, amenant plus tard à la théorie du chaos.

à la physique des plasmas,...

Prenez un morceau de l'univers dans une fiole et observez sa composition. Un cosmologue vous dira que dans votre fiole il y a 72% d'énergie sombre (*dark energy*), justifiant l'expansion accélérée de l'univers au travers d'une forme d'énergie agissant comme une force gravitationnelle répulsive, et 23% de matière sombre (*dark matter*) agissant comme une masse additionnelle aux galaxies, modifiant leurs mouvements de rotation. Il existe de nombreuses théories essayant de justifier ces deux phénomènes, mais, actuellement, aucune ne fait consensus. Les 5% restants sont ce que les physiciens des particules appellent la matière baryonique et leptonique et composent tout l'univers visible et connu, c'est-à-dire les étoiles, les planètes, nous, etc. Les radiations électromagnétiques sont négligeables. Parmi ce faible pourcentage de matière, il y en a 99% que nous appelons plasma. Les plasmas¹ sont un

¹Du grec ancien : *plásma* « forme ».

des quatre états fondamentaux de la matière (avec les solides, liquides et gaz) composée de particules chargées électriquement.

Lorsque [Tonks et Langmuir \(1929\)](#) commencèrent à étudier les filaments de tungstène pour les lampes à incandescence, ils mirent en place les bases d'une nouvelle discipline : la physique des plasmas. Dans un premier temps, cette discipline prit de l'ampleur progressivement avec l'étude de l'ionosphère terrestre responsable de la réflexion des ondes radio, mais aussi de l'astrophysique (vents solaires, formation stellaire, milieu interstellaire, etc.) qui mena notamment au développement de la magnétohydrodynamique (MHD) par Alfvén dans les années 1940. La physique des plasmas est aussi au cœur de la création de la bombe à hydrogène en 1952 et des projets de fusion thermonucléaire contrôlée après leurs déclassifications en 1958. C'est à partir des années 1960 et avec le développement des lasers de plus en plus puissants que l'interaction laser-plasma commence à être étudiée. De nos jours, l'on retrouve les plasmas froids (10^4 – 10^5 K) dans de nombreuses applications, telles que les tubes d'éclairage fluorescents, les écrans à plasma, les propulseurs électriques (*Hall thruster*), dans les industries pour les traitements métallurgiques ou thermiques, les soudures, ou le traitement des déchets ou des polluants, et, plus récemment, pour quelques traitements médicaux.

L'un des phénomènes les plus connus en physique des plasmas est probablement l'amortissement des ondes de charge d'espace, aussi appelé l'amortissement Landau¹ (*Landau damping*). Découvert théoriquement par [Landau \(1946\)](#), il fallut attendre près de deux décennies avant que [Malmberg et Wharton \(1964\)](#) observent expérimentalement cet effet. Historiquement, Landau étudia cet amortissement en utilisant ce qui est probablement l'équation la plus connue de la physique des plasmas : l'équation de [Vlasov \(1945\)](#). En réalité, cette équation était déjà utilisée par [Jeans \(1915\)](#) pour étudier la dynamique stellaire et est toujours appelée, entre autres,² l'équation de Boltzmann sans collision par la communauté astrophysique.

¹Mouhot et Villani 2011

²Hénon 1982

au hamiltonien N -corps auto-cohérent en physique des plasmas.

Pour étudier l'instabilité faisceau-plasma, le modèle cinétique Vlasov-Poisson (un standard en plasma) requiert une résolution très fine en vitesse (du corps et de la queue de la fonction de distribution) posant de nombreux problèmes techniques notamment pour la modélisation numérique (ce qui était d'autant plus problématique dans les années 1970). Pour pallier ce problème, [Onishchenko et al \(1970\)](#) et [O'Neil et al \(1971, 1972\)](#) s'intéressèrent à un modèle intuitif à faible nombre de degrés de liberté en utilisant un traitement particulier à N particules. Leurs équations furent réécrites par [Mynick et Kaufman \(1978\)](#) en utilisant un hamiltonien auto-cohérent, repris par la suite par de nombreux auteurs.³ On notera que, si on fait tendre N vers l'infini dans l'approche hamiltonienne N -corps, on peut revenir⁴ à la description vlasovienne.

³Antoni 1993; Tennyson et al 1994; Antoni et al 1998

⁴Firpo et Elskens 1998; Elskens et al 2014

1.1 Modèles d'interaction

L'interaction entre ondes et particules chargées est l'un des processus les plus importants en physique. Sans parler de la mécanique quantique¹ (dans ce travail, les effets quantiques sont négligeables), cette interaction est reliée aux aspects fondamentaux de l'électrodynamique classique et de l'optique, que ce soit dans le vide² ou dans les milieux.³ Elle est aussi au cœur de la physique des plasmas dont les plasmas froids,⁴ comme ceux utilisés dans les processus industriels ou les moteurs à plasmas, et chauds, comme en fusion par confinement magnétique⁵ (*Magnetic Confinement Fusion (MCF)*) ou la fusion par confinement inertiel⁶ (*Inertial Confinement Fusion (ICF)*). Toujours en plasma, elle est à la base de la synchronisation onde-particule,⁷ de l'amortissement (ou croissance) Landau⁸ (*Landau damping or growth*) ou de l'interaction laser-plasma.⁹ De plus, cette interaction est un facteur clé de la caractérisation des accélérateurs de particules,¹⁰ des tubes électroniques sous vide,¹¹ et des lasers à électrons libres.¹²

Pourtant, une description complète et détaillée des champs électromagnétiques est toujours un défi car ces champs sont, par définition, des fonctions de l'espace et du temps, mettant en jeu un grand nombre de paramètres et requérant une modélisation assez fine. Ce défi est d'autant plus grand lorsque l'on prend en compte toutes les particules chargées, interagissant avec les champs, ce qui ajoute autant de variables de positions et de vitesses, c'est-à-dire de degrés de liberté. Il devient rapidement indispensable d'utiliser des descriptions réduisant le nombre de variables dynamiques, donc réduisant le nombre de degrés de liberté.

Les prédictions sur l'interaction champ-matière, se déroulant dans les tubes électroniques, tels que les tubes à ondes progressives du [chapitre 2](#), sont réalisées avec les mêmes outils que pour étudier les évolutions d'un plasma, parce que le faisceau d'électrons peut être vu comme un plasma à lui tout seul, composé d'une seule espèce. On peut généralement découper les modèles d'interaction en deux grandes parties : le circuit (propagation des ondes) et le faisceau (propagation des particules).

1.1.1 Partie circuit : propagation des champs

La première partie est la description de la propagation des ondes, aussi appelée le **circuit**. Pour étudier les champs électromagnétiques, il existe une large variété d'approches. La plus directe est de résoudre directement les équations de Maxwell-Lorentz en espace-temps, mais cette approche inclut trop de degrés de liberté et est donc extrêmement coûteuse numériquement (en temps de calcul et matériels). Pour les champs électromagnétiques, il existe trois catégories principales de modèle de réduction :

- ◇ Les modèles regroupant les variables phénoménologiques ("**lumped**" *models*) tels que les modèles des télégraphistes utilisant des circuits *RLC* ou des éléments non-linéaires comme les transistors, diodes, etc. Pour les tubes à ondes progressives, le modèle de Pierce (cf. [section 8.3](#)) est un bon exemple de cette catégorie.
- ◇ Les **représentations en Fourier** ou données en termes de champ élémentaire. Pour les TOPs, on trouve dans cette catégorie les modèles fréquentiels d'enveloppe (cf. [chapitre 8](#)) et le modèle discret de Kuznetsov.
- ◇ Les **méthodes des éléments finis** (*finite elements*) ou des **différences finies** (*finite differences*) représentant les champs par des maillages plus ou moins fins. Pour les modélisations en temps (domaine temporel), c'est généralement cette catégorie qui est privilégiée (souvent associée avec une représentation *particle-in-cell (PIC)* de la matière).

¹Halzen et Martin 1984

²Jackson 1999; Spohn 2004; Rohrllich 2007

³Landau et al 1984

⁴Nicholson 1983; Rax 2005

⁵Chen 2010

⁶Bénisti 2016

⁷Doveil et al 2005a

⁸Landau 1946; O'Neil et al 1971

⁹Kruer 2003

¹⁰Davidson et Qin 2001

¹¹Eichmeier et

Thumm 2008;

Carter 2018; Doveil 2018

¹²Bonifacio et al

1990; Marshall

1985; Pellegrini

2010

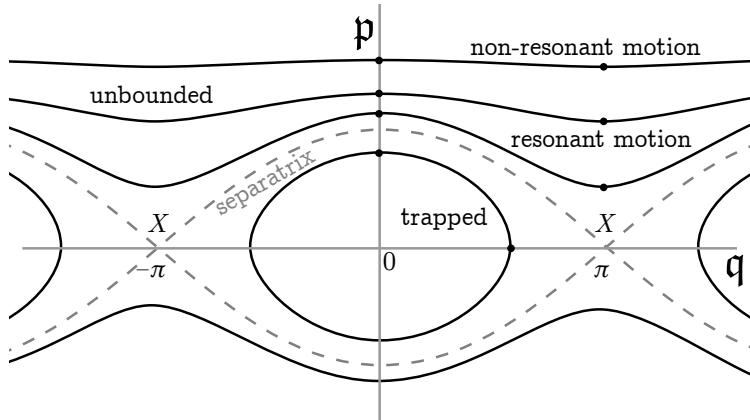


FIGURE 1.1 – Minenna *et al* (2019a). Portrait de phase (p, q) du pendule pour un électron dans une onde. La largeur de « l’œil de chat », délimité par la séparatrice (courbe discontinue), est proportionnelle à $\sqrt{\mathcal{U}}$. Ce portrait est dans le référentiel de l’onde, donc $p = 0$ correspond au synchronisme avec l’onde (si $v_{\text{phs}} = \text{cte}$). Plus le moment de la particule s’éloigne de $p = 0$, moins sa dynamique est affectée. Elle entre en résonance lorsque la dynamique est suffisamment affectée par l’onde (quand la vitesse de phase et la vitesse moyenne de la particule coïncident), c’est-à-dire à peu près lorsque $|p| \lesssim 2\sqrt{\mathcal{U}}$.

Le mérite des modèles de réduction repose dans l’équilibre entre précision des prédictions et coût (en temps, prix du matériel et effort d’analyse numérique) des simulations numériques. On notera qu’il est parfois possible de développer un modèle analytique à partir de ces catégories (surtout avec les deux premières). Ces catégories peuvent servir de base à l’écriture d’un solveur numérique, qui peut être en domaine temporel, en domaine fréquentiel, ou hybride.

1.1.2 Partie faisceau : dynamique des particules

La deuxième partie des modèles d’interaction est la partie matérielle, dite de **faisceau**. En général, il y a trois classes d’approches¹ pour décrire l’évolution de la matière :

- ◇ La plus connue est la **description fluide** (et par extension la magnétohydrodynamique MHD) où les variables de densités de fluides évoluent à partir de l’équation de continuité. Puisque les fluides ne sont pas créés ou détruits, la densité locale de fluide change en un point donné en ajoutant ou retirant des petits paquets de matière. Cette approche est réputée plus facile comparée aux autres mais elle résout mal² les effets dépendant de la vitesse (tels que l’effet Landau ou le regroupement de particules).
- ◇ La **description cinétique**³ (*kinetic theory*), par exemple la description vlasovienne, est une approche qui prend en compte le mouvement des particules au travers d’une fonction de distribution sur l’espace cinétique (x, v) . Le but est d’étudier l’évolution de la distribution des vitesses. Les théories cinétiques ne cherchent pas toujours à décrire le mouvement exact de chaque particule mais essayent d’en déduire les caractéristiques moyennes du plasma, considéré comme continu. Cette approche peut s’avérer très utile pour étudier les larges groupes, comme les 10^{23} particules présentes dans un tokamak.⁴ L’approche cinétique sert de base aux codes *particle-in-cell* (PIC).

¹En négligeant les effets quantiques.

²Nicholson 1983

³Du grecque ancien : *kinētikós*, « qui met en mouvement ».

⁴Chen 2010

◇ La plus complexe à mettre en place est la description en **particules discrètes** (dite description N -corps, N -body, ou *many-body*) car chaque particule du système est gouvernée par les lois fondamentales de la dynamique (comme la force de Lorentz). Les fonctions de distribution continues de la description cinétique deviennent des distributions. Cette approche est un cauchemar à numériser à cause de l'immense nombre de degré de liberté mis en jeu. Toutefois, et paradoxalement, cette description permet une caractérisation remarquablement intuitive et pédagogique pour comprendre l'interaction onde-particule. On utilise notamment cette description dans les manuels de nombreux domaines de la physique tels que l'électrodynamique classique¹ (par exemple, la dynamique d'un électron plongé dans un champ électrostatique), la caractérisation des lasers à électrons-libres² (LEL, *free electron laser*) et la physique des plasmas,³ incluant l'étude du synchronisme onde-particule et du chaos hamiltonien.⁴ On notera que cette description est commune en astrophysique et en cosmologie.

Dans ce document, nous utiliserons la description N -corps. Le N du N -corps est la somme de N_e particules résonantes et de M ondes (dans la limite finie où $M \ll N$).

Nous proposons dans cette section un exemple pour la mécanique à N -corps. Cet exemple (modèle aux conditions initiales) nous sert d'analogie à notre approche plus complète (modèle aux conditions limites, cf. chapitre 4). On remarquera que cet exemple est utilisé comme base à de nombreux modèles N -corps⁵ tels que ceux décrivant la synchronisation onde-particule responsable de l'amortissement Landau (voir section 1.5).

¹Landau *et al* 1984; Jackson 1999

²Marshall 1985; Bonifacio *et al* 1990; Freund and Antonsen 1992

³Nicholson 1983; Elskens et Escande 2003; Escande *et al* 2018

⁴Elskens et Escande 2003; Doveil *et al* 2007; Escande 2018

⁵Escande *et al* 1996; Elskens et Escande 2003; Escande 2018

1.2 Faisceau d'électrons libres en interaction avec une onde sinusoïdale

La base de l'analogie de notre modèle repose sur le pendule (non-linéaire) décrit en [appendice A.1](#). Ici, nous appliquons la formulation du pendule à un faisceau d'électrons libres en interaction avec une onde sinusoïdale. Ce modèle est utilisé⁶ pour représenter intuitivement la dynamique dans les lasers à électrons libres (LEL, *Free Electron Laser*). La physique de l'interaction onde-particule dans les LEL est similaire aux tubes à onde progressive (voir [chapitre 2](#)). Dans le jargon des tubistes, on dit que ce modèle est à **gain faible** car on considère l'amplitude du champ comme constante (malgré le transfert de moment par les électrons), et à **grand signal** car le mouvement des électrons est fortement perturbé.

On considère donc un faisceau d'électrons à la vitesse initiale $v_{el,0}$ en résonance avec un champ électrique sinusoïdal $\mathcal{E}_z(z, t) = \mathcal{E}_{z,0} \sin(\kappa z - \omega t)$ dirigé selon l'axe z du faisceau, avec une vitesse de phase $v_{ph} = \omega/\kappa$ telle que $v_{ph} \simeq v_{el,0}$ permette l'accélération des électrons. L'utilisation de la force électrique $m_e \ddot{z} = -e\mathcal{E}_z$ nous permet de réécrire l'équation du mouvement de chaque électron comme

$$\ddot{z}' = \frac{-e\mathcal{E}_{z,0}}{m_e} \sin(\kappa z'), \quad (1.1)$$

analogue à l'équation (A.1) en annexe, après un changement de variable $z' = z - v_{ph}t$ pour se placer dans le référentiel où le champ est immobile, et avec e la charge électrique d'un électron, et m_e la masse d'un électron. Comme le montre la [figure A.2](#) en appendice, des zones d'accélération des particules apparaissent aux positions $q = \kappa z' \in [-\pi + 2n\pi, 0 + 2n\pi]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et des zones de décélération apparaissent en $q = \kappa z' \in [0 + 2n\pi, \pi + 2n\pi]$. Cet effet provoque le regroupement des particules (*electron bunching*, l'effet est observable sur les diagrammes d'Applegate : position en fonction du temps).

⁶Marshall 1985

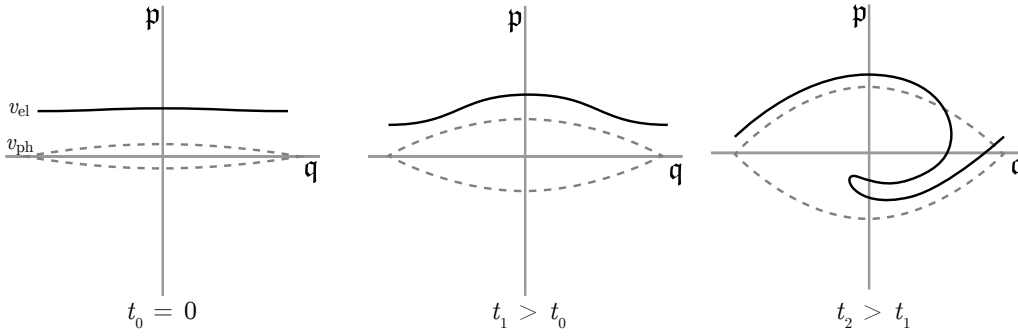


FIGURE 1.2 – [Minenna *et al* \(2019a\)](#). Échange de quantité de mouvement/moment canonique entre une onde et un faisceau de particules pour un système auto-cohérent, inspiré de [Firpo *et al* \(2001\)](#). La largeur de « l’œil de chat » (courbe traitillée) est proportionnelle à $\sqrt{\mu} \propto \mathfrak{T}^{1/4}$. Au temps t_0 (image de gauche), on considère un faisceau monocinétique de vitesse v_{el} , où les particules sont représentées par la courbe noire continue. Après avoir ajouté une onde avec une vitesse de phase $v_{ph} \lesssim v_{el,0}$, les trajectoires commencent à être modulées. Certaines particules sont accélérées, d’autres sont ralenties. À cause de la synchronisation des particules avec l’onde, il s’avère que l’effet de décélération domine, et donc que la quantité de mouvement totale des particules diminue. Le moment perdu est transférée à l’onde qui est donc amplifiée (ce qui augmente la taille de « l’œil de chat », image centrale). Ce processus d’amplification se poursuit jusqu’à ce que les particules soient piégées (image de droite) lorsqu’elles traversent la séparatrice. Cela initie le régime non-linéaire. L’effet inverse se produit si on prend $v_{ph} \gtrsim v_{el,0}$: les particules vont gagner du moment et l’amplitude de l’onde va décroître (voir [Doveil *et al* \(2005a\)](#); [Escande \(2010\)](#)). On remarque que cet exemple exprime l’amplification en temps, alors que, dans un tube à onde progressive, l’amplification est spatiale. Pour les TOPs, ces effets non-linéaires (tels qu’à t_2) sont étudiés depuis l’apparition de ces appareils (voir [Cutler \(1956\)](#)).

On note alors la vitesse des particules dans le référentiel co-mouvant avec l’onde comme

$$\dot{j}' = \sqrt{(\dot{j}'_0)^2 + \frac{2\epsilon\mathcal{E}_{\dot{j},0}}{m_\epsilon\kappa} (\cos(\kappa\dot{j}') - \cos(\kappa\dot{j}'_0))}, \quad (1.2)$$

où $\dot{j}'_0 = v_{el,0} - v_{ph}$ et $\dot{j}'_0 = \dot{j}_0$. On peut donc tracer un portrait de phase identique à la [figure 1.1](#), où la demi-largeur de la séparatrice (\simeq segment vertical en 0) est $\sqrt{2|\epsilon\mathcal{E}_{\dot{j},0}|/(m_\epsilon\kappa)}$. On peut aussi avec ce modèle calculer l’énergie cédée par l’onde au faisceau. Notons la variation d’énergie cinétique

$$\Delta\mathfrak{T} = \frac{1}{2}m_\epsilon(\dot{j}^2 - \dot{j}'_0^2). \quad (1.3)$$

On développe le membre entre parenthèses, soit $\dot{j}^2 - \dot{j}'_0^2 \simeq 2v_{ph}(\dot{j}' - \dot{j}'_0)$ en considérant $\dot{j} \simeq v_{ph}$, au premier ordre. En faisant la moyenne de la variation d’énergie (1.3) sur le temps d’interaction, on obtient l’énergie transférée de l’onde au faisceau

$$\mathfrak{T}_{trans} = m_\epsilon v_{ph} \langle \dot{j}' - \dot{j}'_0 \rangle. \quad (1.4)$$

En utilisant (1.2), on peut trouver¹ une vitesse \dot{j}'_0 optimale pour maximiser soit le transfert ¹[Plouin 2004](#) d’énergie de l’onde vers les électrons, soit l’inverse.

Pourtant ce modèle est incomplet. Il ne prend pas en compte les modifications de l’onde engendrées par le faisceau.

Remarque 1.2.1 (Résonance) En mécanique hamiltonienne, le mot « résonance » a un sens géométrique. « L’œil de chat » dans l’espace de phase (fig. 1.1) est souvent appelé « îlot de résonance » (*resonance island*) ou juste résonance. La succession périodique des yeux de chat dans l’espace crée une chaîne d’îlots (*island chain*) et la « résonance » qualifie alors toute la chaîne.

1.3 Modèle hamiltonien auto-cohérent

Le système précédent est incomplet pour décrire correctement l’interaction onde-particule car il néglige l’évolution des champs (la partie circuit d’un modèle d’interaction). Il faut donc ajouter les équations d’évolution des ondes. Une théorie prenant en compte l’action de l’onde sur les électrons et la rétroaction des électrons sur l’onde est appelé **auto-cohérente** (*self-consistent*). Nous présentons dans cette section le modèle qui servira d’analogie à notre approche. Notons aussi que le modèle de cette section est électrostatique.

Repartons du hamiltonien du pendule $H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \mathcal{U} \cos q$ (voir [appendice A](#)), mais, maintenant, ajoutons l’énergie des oscillateurs harmoniques correspondant à l’oscillation libre des ondes. On obtient alors le **hamiltonien auto-cohérent**¹ (ici pour un champ électrostatique et des constantes de couplage unitaires)

$$H(p, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}, \varphi)_{\{r,s\}} = \sum_r \frac{p_r^2}{2} + \sum_s \omega_s \mathfrak{J}_s - \sum_r \sum_s \mathcal{U}_s \cos(\kappa_s \mathfrak{J}_r - \varphi_s), \quad (1.5)$$

dans le référentiel du laboratoire, pour des particules (r) et des ondes (s), où l’énergie électrostatique (et l’action) des ondes est proportionnelle au carré de leur amplitude $\mathcal{U}_s \propto \sqrt{\mathfrak{J}_s}$, où les ondes ont une phase (angle) φ_s et une pulsation angulaire $\omega_s = \kappa_s v_{\text{ph},s}$ pour $v_{\text{ph},s}$ la vitesse de phase et κ_s le nombre d’onde. La dynamique de ce système est schématisée par la [figure 1.2](#). La transition abrupte entre le hamiltonien du pendule et (1.5) est mieux détaillée par [Antoni et al \(1998\)](#) et [Elskens et Escande \(2003\)](#).

Cette approche hamiltonienne conserve le caractère réversible de la dynamique. Comme (1.5) est invariant par translation de l’origine du temps ($t' := t + \mathfrak{b}, \forall \mathfrak{b}$), la dynamique conserve l’énergie totale H . Et puisque ce hamiltonien est aussi invariant par translation spatiale ($\mathfrak{J}'_r := \mathfrak{J}_r + \mathfrak{c}, \varphi'_s := \varphi_s + \kappa_s \mathfrak{c}, \forall \mathfrak{c}$), alors la dynamique conserve aussi la quantité de mouvement totale

$$\mathfrak{p}_{\text{tot}} = \sum_r \mathfrak{p}_r + \sum_s \kappa_s \mathfrak{J}_s. \quad (1.6)$$

Cette quantité de mouvement totale est une simple somme des quantités de mouvement des particules et des ondes. L’interaction onde-particule est un effet fondé sur l’échange de moment, tel que schématisé par la [figure 1.2](#). La [figure 1.6](#) présente le résultat d’une simulation du hamiltonien (1.5) pour une onde et 200 particules en utilisant le code PARONHA.² La séparatrice de l’onde $s = 1$ (courbe rouge) en z suit $\omega/\kappa \pm 2(2\mathfrak{J})^{1/4} |\cos(\kappa_s \mathfrak{J} - \varphi)/2|$, avec l’amplitude de l’onde $\sqrt{2\mathfrak{J}}$. Les paramètres initiaux sont 200 particules (r), $\mathfrak{p}_r(t = 0) = 0.5$, réparties aléatoirement sur $[-\pi, \pi]$, avec pour l’onde $\mathfrak{J}(t = 0) = 0$, $v_{\text{ph}} = -0.5$, $\omega = -0.5$, et $\kappa = 1$. Dans notre formalisme, le piégeage (et donc le régime non linéaire) intervient lorsque les particules traversent la séparatrice de l’onde. On notera qu’avec ce modèle électrostatique, la quantité de mouvement (masse fois vitesse) des particules est égale au moment canonique (ce qui est vrai dans ce modèle mais ne le sera plus dans les chapitres suivants).

¹Mynick et Kaufman 1978; Antoni et al 1998; Elskens et Escande 2003

²Elskens, communication privée

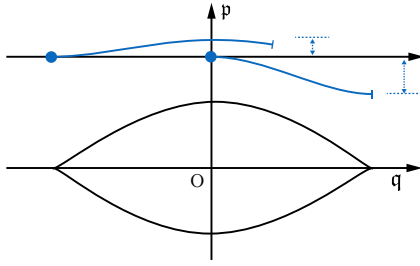


FIGURE 1.3 – Inspiré d’Escande *et al* (2018). Représentation de la synchronisation onde-particule. Le portrait de phase montre l’effet de la synchronisation sur deux particules avec la même vitesse initiale mais démarrant avec un déphasage de π dans leur position. Si on suppose un faisceau initial mono-cinétique avec $v_{ph} \approx v_{el,0}$ comme à la première image ($t_0 = 0$) de la figure 1.2, on peut voir qu’en moyenne les particules vont perdre leur quantité de mouvement. Si on avait pris initialement $v_{ph} > v_{el,0}$, l’effet inverse se serait produit : les particules auraient gagné de la quantité de mouvement. Grâce à la synchronisation, les particules vont, en moyenne, rapprocher leur vitesse de la vitesse de phase.

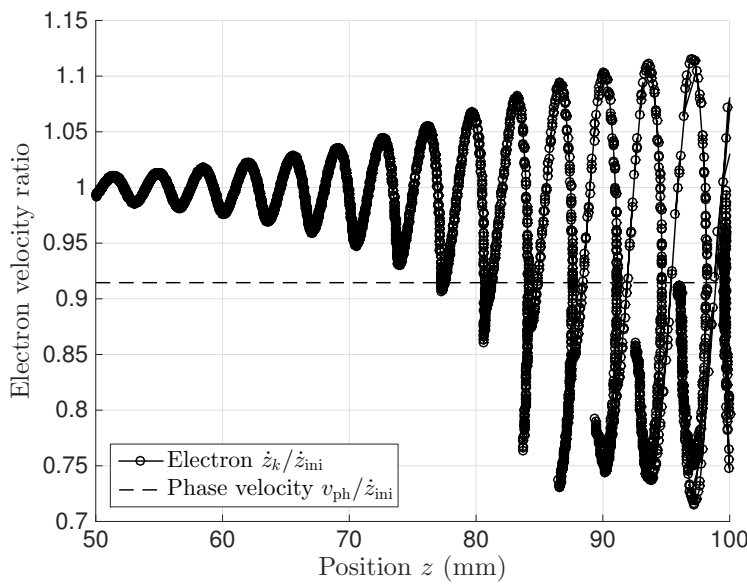


FIGURE 1.4 – Minenna *et al* (2018). Vitesse des électrons (divisée par la vitesse initiale $v_{el,0}$) en fonction de la position selon une simulation unidimensionnelle en temps d’un tube à onde progressive (sans *tapers* ni atténuateurs) à partir d’un modèle hamiltonien auto-cohérent décrit au chapitre 4. Le TOP choisi est fictif, mais très proche d’un tube industriel spatial en bande Ku (12–18 GHz). Les paramètres initiaux (tels que courant et potentiel de cathode, impédances de couplage et vitesse de phase) sont choisis pour que l’amplification atteigne la saturation de puissance avant la fin du tube, et les effets de charge d’espace sont pris en compte. Chaque point représente une macro-particule. Au début du tube, les particules sont émises avec la même vitesse $v_{el,0}$ (faisceau mono-cinétique). Les particules avec $v_{el}(t) < v_{el,0}$ ont donné de leur moment à l’onde et, puisqu’il y a plus de particules en dessous de $v_{el}(t) = v_{el,0}$, l’onde est amplifiée. La courbe traitillée représente la vitesse de phase v_{ph} de l’onde (divisée par la vitesse initiale $v_{el,0}$). Les effets non-linéaires (piégeage) débutent approximativement lorsque $z = 80$ mm (quand certaines particules ont traversé la séparatrice centrée sur v_{ph}).

En régime linéaire, la synchronisation onde-particule impose, entre autres, que les particules en résonance avec une onde vont, en moyenne, rapprocher leurs vitesses de la vitesse de phase.³ Cet effet est observable sur la figure 1.3 et est à la base de nombreux phénomènes en physique, dont le fonctionnement des tubes à ondes progressives.³ Macor *et al* 2005

Ce hamiltonien auto-cohérent, bien qu’il nous serve simplement d’analogie, est utilisé dans d’autres contextes, notamment pour décrire le système faisceau-plasma¹ (cf. section 1.5),¹ Elskens et Escande 2003; Escande 2018 la physique des lasers à électrons libres² ou l’interaction onde-particule dans un tube à ondes progressives.³

1.4 Interaction entre ondes et électrons dans un tube à ondes progressives

Suivant la section précédente, le processus physique apparaissant dans un tube à onde progressive (TOP), décrit au chapitre 2, est facile à comprendre (voir figure 1.4). La structure à onde lente (c-à-d. la ligne à retard) est conçue pour imposer une quasi-résonance entre la vitesse de phase de l’onde v_{ph} le long de l’axe longitudinal et la vitesse des électrons v_{el} émis depuis une cathode. Par exemple, la vitesse de phase dans un TOP à hélice est environ

²Chaix et Iracane 1994

³Hartmann *et al* 1995; Tsunoda *et al* 1987b

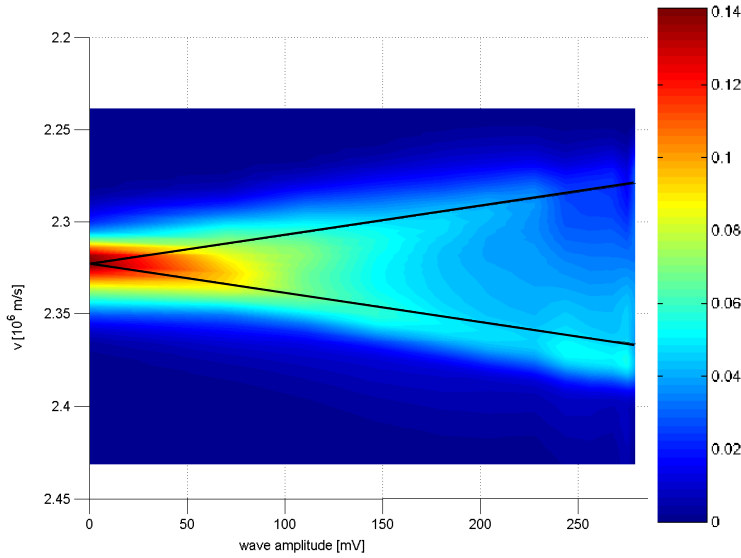


FIGURE 1.5 – Première observation expérimentale de la synchronisation non-linéaire responsable de l’amortissement Landau pour une seule onde (voir [Doveil *et al* \(2005a\)](#)). Mesure provenant du TOP du PIIM (Aix-Marseille Université, CNRS). L’axe des ordonnées est orienté vers le bas. Le faisceau est injecté à $v_{el,0} = 2.32 \times 10^6$ m/s en présence d’une onde avec une vitesse de phase $v_{ph} = 3.45 \times 10^6$ m/s. La couleur visualise la fonction de distribution en vitesse moyenne en fonction de l’amplitude de l’onde. Les droites symétriques marquent la portée de la modulation linéaire de la vitesse du faisceau. La synchronisation se manifeste dans une correction quadratique tirant la vitesse du faisceau vers la vitesse de phase de l’onde (ici nous avons $v_{el,0} < v_{ph}$).

$v_{ph} \simeq cd/(2\pi a)$, avec a le rayon et d le pas de l’hélice, et c la vitesse de la lumière dans le vide (voir [figure 2.2](#)). Pour les tubes spatiaux, on a $v_{ph}/c \simeq 0.10$. Pour assurer l’amplification de l’onde, on doit juste avoir $v_{el} \gtrsim v_{ph}$. La synchronisation onde-particule force les vitesses électroniques à se rapprocher de la vitesse de phase. Durant l’interaction, la quantité de mouvement totale (1.6) est conservée, donc les électrons perdent en moyenne leur quantité de mouvement au bénéfice de l’onde qui s’amplifie. Nous disons que cet effet est linéaire (car le gain de l’amplification est linéaire) jusqu’à ce que les électrons aient perdu assez de moment pour traverser la séparatrice dans leurs espaces (p, z) individuels et soient piégées. On notera qu’à la différence du modèle de la section précédente, l’amplification de l’onde dans un tube à onde progressive est spatiale et non temporelle.

Des modèles plus réalistes peuvent inclure la propagation d’une onde électromagnétique (dite de circuit) en plus des effets de charge d’espace (c-à-d. la répulsion coulombienne des électrons entre eux à cause de leurs charges de même signe). Dans les TOPs, c’est l’onde de circuit qui domine la dynamique du faisceau. La charge d’espace est modérément significative dans les tubes, car elle réduit le *bunching* d’électron et donc impose de construire des lignes à retard légèrement plus longues. On remarquera aussi que, dans un vrai TOP, l’émission électronique n’est pas unidirectionnelle ni mono-cinétique, la vitesse de phase n’est pas constante et des pertes apparaissent.

Le fonctionnement des TOPs est parfois assimilé¹ à l’effet Tcherenkov (Čerenkov ou *Vavilov-Cherenkov radiation (VCR)*), puisqu’il s’agit de l’émission d’un rayonnement et du ralentissement d’une particule chargée électriquement intervenant lorsque cette particule se déplace plus vite que la vitesse de la lumière dans ce milieu (vitesse de phase). ¹[Pierce 1955](#)

1.5 Lien entre la physique des plasmas et les tubes à ondes progressives

Le modèle de la [section 1.3](#) décrit très bien la propagation d’ondes de Langmuir s couplées de façon significative avec des particules dites du faisceau (*beam*) dont la vitesse est proche de leurs vitesses de phase, et faiblement couplées avec d’autres particules (*bulk*) du plasma (cas de l’instabilité *bump-on-tail*). On parle de système faisceau-plasma. L’amplitude des ondes \mathcal{U}_s est alors déterminée² à partir de celle des oscillations des particules « de fond » ²[Elskens et Escande 2003](#)

et de leur fonction diélectrique ϵ .

Pour étudier ce système, on peut utiliser un tube à ondes progressives (TOP), présenté au [chapitre 2](#), permettant des expériences dans un environnement mieux contrôlé. En effet, le *bulk* du plasma, qui est le milieu de propagation de nos ondes, est fortement bruité et difficile à contrôler, alors que ce plasma peut être ingénieusement remplacé par un guide d'onde comme la ligne à retard d'un TOP. Le taux de croissance de l'onde dans le premier cas est fixé par la fonction de distribution du plasma, tandis que dans le second cas, il peut se calculer à partir de l'impédance Z_c de la structure (en régime linéaire). Quantitativement, le paramètre clé de la caractérisation du couplage faisceau-guide d'onde est le paramètre sans dimension de Pierce C_p (voir [section 8.3.3](#)) qui donne le taux de croissance de l'onde (l'amplification est spatiale dans un TOP). Pour une onde se propageant dans la ligne à retard d'un tube à ondes progressives en interaction avec un faisceau, ce paramètre vaut $C_p = \sqrt[3]{I_0 Z_c / (4V_0)}$ (voir équation (8.24)), avec V_0, I_0 le potentiel et le courant de cathode. Pour un plasma, le **paramètre de Pierce** est donné¹ par l'identification

$$C_p^3(s) = -\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} \frac{n_b}{n_p} \left[\frac{v_{el,0}}{\omega_s} \kappa_s^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa_s} \Big|_{\omega_s, \kappa_s, 0} \right]^{-1}, \quad (1.7)$$

avec n_b, n_p les densités du faisceau et du plasma, $v_{el,0}$ la vitesse initiale du faisceau, ω_p la pulsation plasma et $\epsilon(f_0)$ la fonction diélectrique du plasma liée à la fonction de distribution f_0 . Dans le cas d'un faisceau froid (*cold beam*, faisceau initial mono-cinétique), le taux de croissance de l'onde (*wave growth rate*) est $\gamma_{\max, s} \simeq 2^{1/3} \sqrt{3} C_p \omega_s$. Dans le cas d'un faisceau chaud (*warm beam*), le taux de croissance vaut $C_p^3 \partial_v f_0(v_{ph})$.

Le remplacement du plasma par un TOP permet une analyse détaillée de l'interaction auto-cohérente entre des ondes instables et un faisceau d'électrons froid² ou chaud.³ Depuis 1994, un TOP de 4 mètres⁴ (l'un des plus longs du monde) est utilisé à Marseille pour étudier expérimentalement les modèles faisceau-plasma. À la place du collecteur, un analyseur trochoïdal⁵ permet de mesurer la distribution en énergie du faisceau. Ce TOP a permis d'observer expérimentalement⁶ le mécanisme de synchronisation (cf. [figure 1.5](#)), en accord avec la théorie N -corps hamiltonienne.⁷ Il a aussi permis l'observation de caractéristiques importantes du chaos hamiltonien,⁸ de tester de nouvelles méthodes de contrôle du transport chaotique,⁹ ainsi que de tester le chauffage de particules par des ondes.¹⁰

1.6 Objectifs : description N -corps en physique des plasmas et échange de moment

La description N -corps n'a jamais été, à notre connaissance, utilisée pour modéliser en entier des appareils expérimentaux en physique des plasmas. Pour cette discipline, la dynamique en particules discrètes est limitée à l'interprétation intuitive de certains phénomènes. C'est aussi une description pédagogique que l'on trouve de nombreux manuels (p. ex., pour décrire le mouvement d'une seule particule chargée dans un champ électromagnétique). Mais le nombre de degrés de liberté en jeu rend difficile l'utilisation de la description N -corps pour des cas appliqués, ce qui amène les physiciens des plasmas à privilégier des modèles cinétiques ou fluides.

L'un des objectifs de cette thèse est de démontrer la viabilité de l'approche N -corps. Notamment, nous emploierons cette approche pour simuler des tubes à ondes progressives industriels. Nous pouvons le faire car nous combinons à cette approche un modèle de réduction

¹O'Neil *et al* 1971;
Tsunoda 1982;
Tsunoda *et al* 1991

²Dimonte *et al*
Malmberg 1978

³Tsunoda *et al*
1987a, 1991

⁴Doveil 2018

⁵Guyomarc'h *et al*
Doveil 2000

⁶Doveil *et al* 2005a

⁷Elskens *et al*
Escande 2003;
Doveil *et al* 2006;
Santos *et al*
Elskens 2017

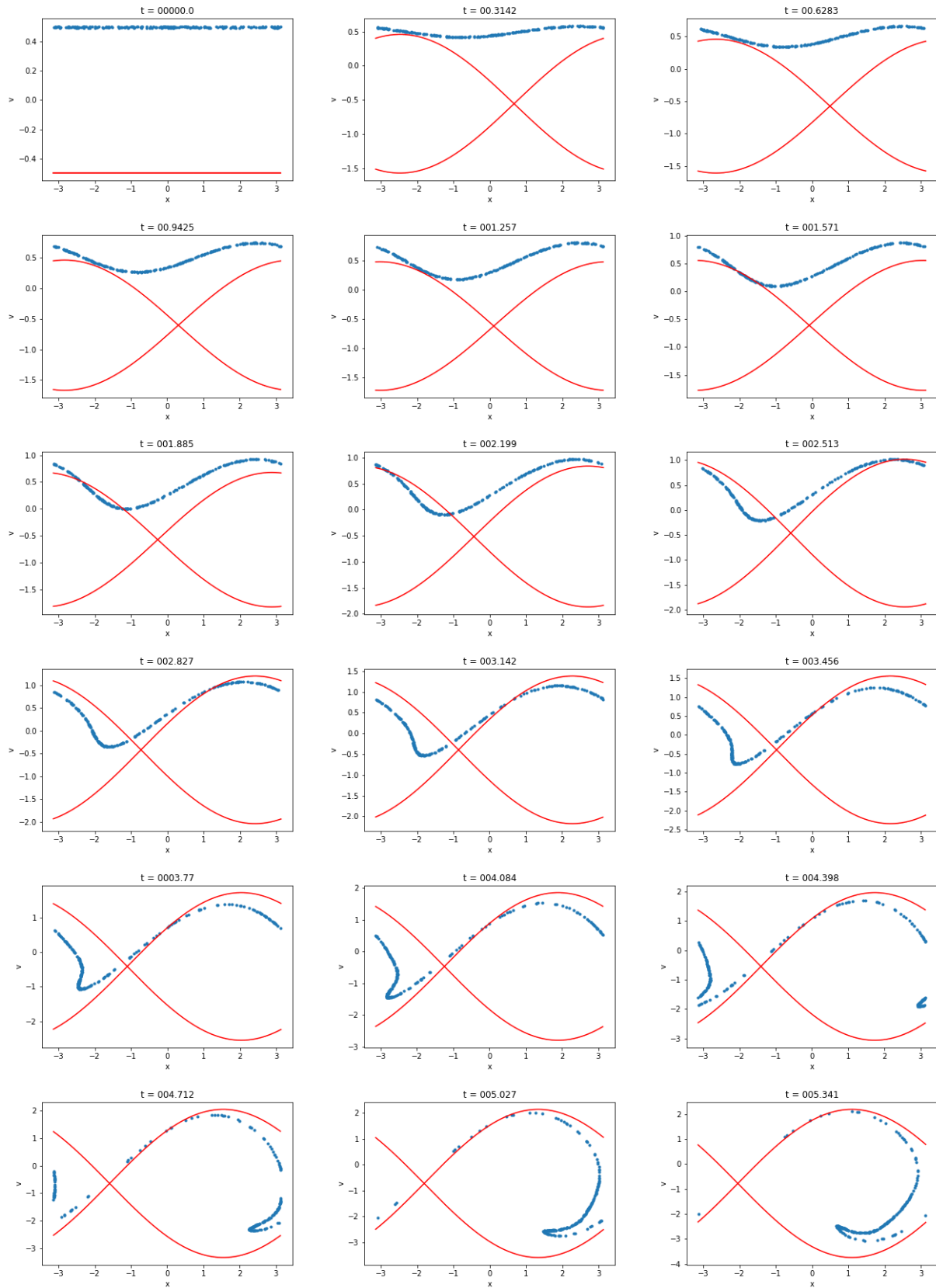
⁸Doveil *et al* 2005c;
Macor *et al* 2005;
Doveil *et al* 2006,
2007

⁹Macor *et al* 2007

¹⁰Doveil *et al* 2011

que nous appelons le modèle discret (présenté au [chapitre 3](#)). Notre théorie hamiltonienne N -corps est décrite au [chapitre 4](#) et nos résultats de simulations sont présentés au [chapitre 5](#).

Dans notre contexte, l'interaction onde-particule repose sur un échange de moment, qu'il soit mécanique (quantité de mouvement) ou conjugué. L'équation (1.6) présente la conservation du moment pour l'analogie ci-dessus. Un autre des objectifs de cette thèse est d'étudier cet échange avec notre théorie hamiltonienne N -corps et de l'observer dans nos simulations. C'est ce que nous faisons au [chapitre 6](#). L'étude de cet échange nous amènera aussi à étudier la controverse Abraham-Minkowski. Cette controverse porte sur la définition de la quantité de mouvement mécanique ou du moment conjugué de la lumière dans les milieux diélectriques. Au [chapitre 7](#), nous proposons une extension de cette controverse aux guides d'onde sous vide grâce à une approche N -corps et suggérons son application aux plasmas.



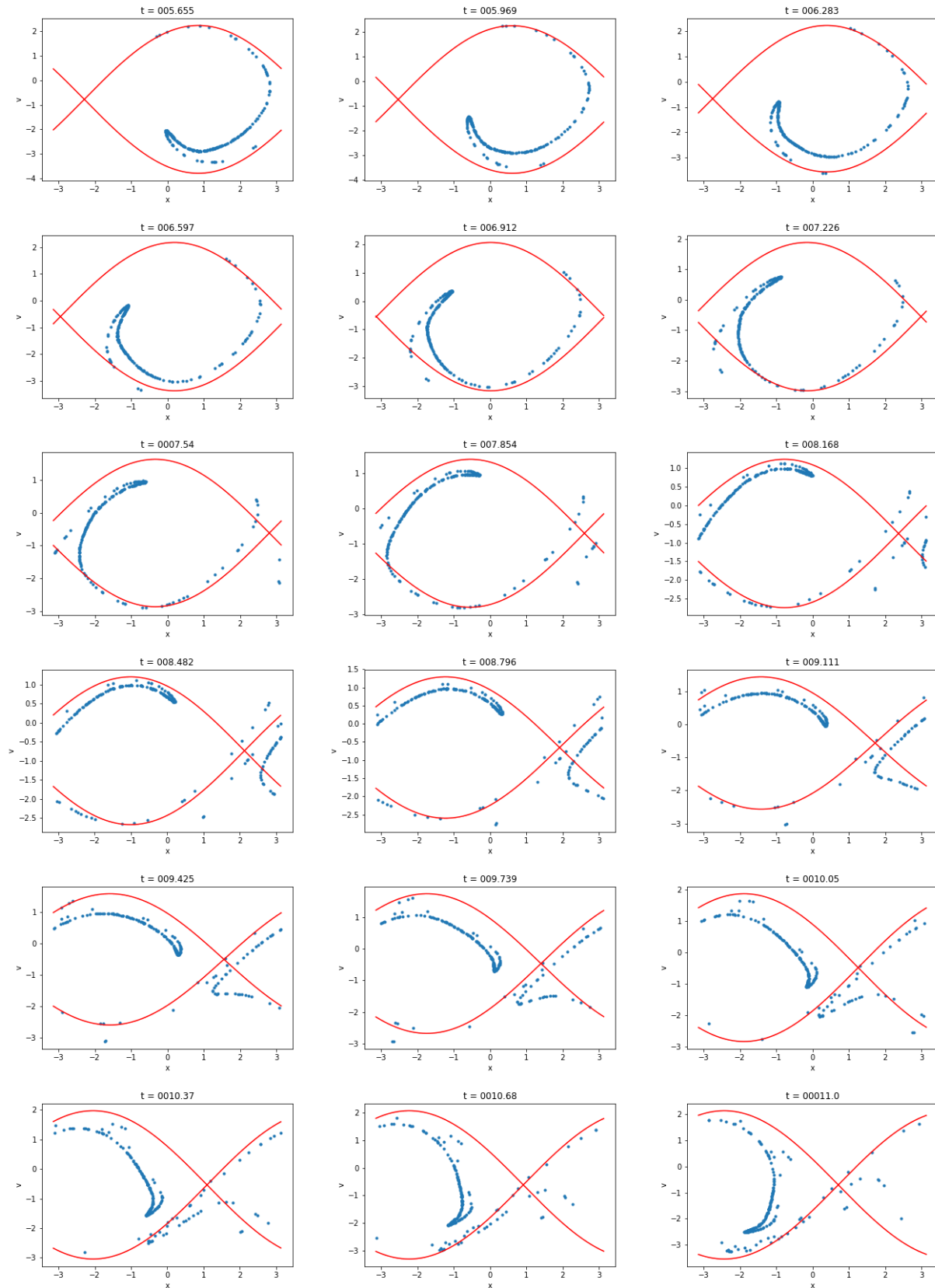


FIGURE 1.6 – Piégeage d'un faisceau de particules dans une onde selon le hamiltonien (1.5). Vitesse des électrons (points bleus) en fonction de leur position (avec des conditions de frontières périodiques).

« Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic. »

— Arthur C. Clarke's third law, *Profiles of the Future*, 1973

2

Tubes à ondes progressives

Ce chapitre propose une introduction sur le fonctionnement et les utilisations des tubes à ondes progressives (TOP).

Du début des télécommunications sans fil,...

Si les communications à longues portées existent depuis l'utilisation des signaux de fumée, des tambours, du langage sifflé, des balises, du sémaphore, etc., elles ont pris une autre ampleur avec l'apparition des appareils radio. L'histoire des radio-télécommunications¹ commence lorsque [Hertz \(1888\)](#) observe pour la première fois la propagation des ondes de Maxwell dans l'air. Il suffira de quelques années seulement pour que débute l'exploitation commerciale des premières radios, d'abord pour des transmissions radio-télégraphiques, comme la première transmission transatlantique en 1901 par Marconi, puis vocales, comme le premier coup de téléphone transatlantique en 1915 par AT&T. L'arrivée des tubes électroniques à vide, inventés indépendamment par Fleming en 1904 et de Forest en 1906, permet d'améliorer grandement les performances de la nouvelle technologie, à la fois pour la réception et l'amplification. Les tubes deviendront indispensables notamment pour l'amplification des transmissions filaires ou hertziennes dès les années 1910 et pour les applications radar (*Radio Detection And Ranging*) à partir des années 1930 et 1940. Dans la même période apparaît timidement la télévision. Ce nouveau médium requiert l'émission d'un important flux d'information, ce qui nécessite des sources haute fréquence et donc des tubes plus performants, c-à-d. avec une grande bande passante, ce qui est l'opposé des premiers tubes qui étaient « résonnants ».

¹[Minenna et al 2019a](#)

à l'invention du tube à ondes progressives,...

La paternité du tube à ondes progressives (TOP) est à partager, indépendamment, entre [Haefl \(1936\)](#),² [Lindenblad \(1942\)](#) et [Kompfner \(1946\)](#), qui ont tous les trois su reconnaître les qualités et avantages des TOPs. Pourtant, ce sont les noms de Kompfner et de Pierce qui sont restés les plus connus, notamment après avoir popularisé l'appareil auprès des laboratoires de recherche et des industries. Après 1946, la démocratisation des TOPs se répand très

²[Copeland 2015](#)

rapidement car l'appareil est idéal pour l'amplification des signaux télécoms : puissance de sortie importante pour les hautes fréquences, large bande passante et faible bruit. Les TOPs sont utilisés dans les réseaux hertziens dès 1952 pour le relais radio Manchester–Edinburgh au Royaume-Uni et dès 1953 pour la ligne Paris–Lille en France. Il s'ensuivra l'apparition du réseau de distribution mondiale de la télévision : l'une des toutes premières toiles mondiales.

et ses applications spatiales.

La connexion mondiale d'un réseau de télévision permit la retransmission en direct d'événements importants, comme les jeux olympiques ou le couronnement de la reine Élisabeth II, à travers les continents. Mais cette expansion se retrouva bloquée par la courbure de la Terre. En effet, les relais radio avaient besoin d'établir un lien direct et visuel entre deux stations,¹ ce qui empêchait toute émission à travers les océans. L'idée de placer les relais dans l'espace émergea alors peu à peu. Après la mise en orbite de *Sputnik 1* en 1957, élément déclencheur de la conquête spatiale, l'idée sera enfin concrétisée. Le satellite *Telstar 1* lancé en 1962, construit sous l'impulsion de Pierce et Kompfner, sera le tout premier satellite de communication, dont l'amplification du signal est assurée par un TOP embarqué. Depuis le milieu des années 60, et encore de nos jours, les satellites de communication commerciaux et les sondes spatiales envoyées en espace lointain sont majoritairement équipés de TOPs. Parmi eux, on distinguera notamment les sondes jumelles *Voyager* qui ont plus de 40 ans et qui continuent de nous transmettre des informations (rayons cosmiques, magnétométrie) grâce à leurs TOPs embarqués, mais aussi des missions plus récentes comme *Rosetta* (atterrissage sur une comète) ou *New Horizon* (survol de Pluton).

¹ À haute fréquence, l'ionosphère ne réfléchit plus les ondes.

2.1 Rôles des tubes à ondes progressives

Les tubes à ondes progressives² (TOPs) ou en anglais *traveling-wave tubes*³ (*TWTs*), schématisés par la figure 2.1, sont une catégorie de tubes électroniques sous vide (*thermionic valves*, *vacuum electronic tubes*, ou *electron tubes*), au même titre que les klystrons (source de puissance pour les accélérateurs de particules), les gyrotrons (utilisés au chauffage du plasma pour la fusion) et les magnétrons. Ils sont utilisés pour l'amplification de signaux de télécommunication, et ont été utilisés pour la détection d'onde radio-fréquence. La majorité des TOPs fonctionnent à des fréquences élevées, entre 1 et 100 GHz (voir table 2.1) pour les tubes commerciaux, même si certains fonctionnent à basse fréquence comme le TOP du PIIM⁴ (entre 10 et 100 MHz) et que le record pour un prototype de TOP actuellement⁵ soit de 1 THz.

²Pierce 1950; Gilmour 1994, 2011; Lemoine 2017; Minenna et al 2019a

³Certains auteurs l'écrivent à l'anglaise en mettant deux *l* à *travelling*.

⁴Guyomarc'h 1996

⁵Tucek 2016

La première utilisation des TOPs fut comme amplificateurs des relais radio à micro-ondes entre les années 1950 et 1990, notamment pour la télévision. Depuis les années 1960, les TOPs sont embarqués dans la plupart des satellites de communication et sondes spatiales. Les TOPs sont caractérisés par une large bande passante (atteignant parfois deux octaves) et une importante puissance de sortie (plusieurs centaines de watts) qui en font des appareils idéaux pour les applications radar et télécom. L'une des ambitions actuelles à court terme dans le développement des TOPs est de réaliser des appareils commerciaux fonctionnant au-delà de 20 GHz (bande sub-THz). Ceux-ci permettront d'améliorer les réseaux de communication tels que la cinquième génération (5G) du réseau télécom, ou l'internet par satellite.

Parmi les amplificateurs, on notera deux types prédominants et rivaux⁶ : les tubes électroniques sous vide (*vacuum tubes*), tel que les TOPs, triodes, klystrons et magnétrons, et les amplificateurs à état solide (*solid-state power amplifiers* (*SSPAs*)), comme les transistors. Pour les télécommunications spatiales,⁷ le TOP domine le marché depuis bientôt 60 ans en raison

⁶Lemoine 2018

⁷Minenna et al 2019a

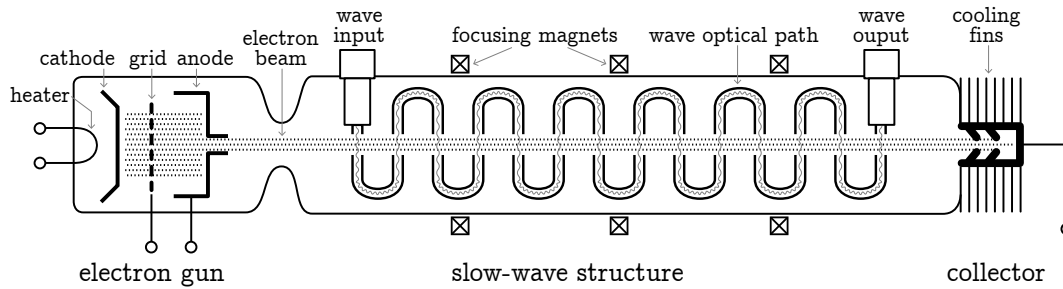


FIGURE 2.1 – Minenna *et al* (2019a). Schéma d'un tube à ondes progressives (TOP). L'appareil est divisé en trois parties : le canon à électrons, la structure à onde lente (où se produit l'interaction) et le collecteur.

de ses performances (rendement, bruit, robustesse, durée de vie, masse) et de ses régimes de fonctionnement (forte puissance à haute fréquence), malgré son prix (entre 40 000 et 150 000 euros le tube spatial).

Les TOPs sont l'un des tubes sous vide les plus durs à fabriquer en raison de la précision d'horloger requise pour construire des structures millimétriques. L'augmentation des fréquences de fonctionnement (liées au débit d'information transmise) impose des contraintes sur les nouveaux tubes telles que l'absorption atmosphérique extrêmement forte au-delà de la centaine de GHz (requérant des TOPs plus puissants) ou les difficultés à fabriquer des tubes de plus en plus petits (la fréquence étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde). L'assemblage des divers composants d'un TOP prend entre 1 et 2 mois. Le tube est ensuite mis sous ultravide (*ultra-high vacuum (UHV)*), en dessous de 10^{-8} Pa. Enfin, un ajustement des caractéristiques du tube (chaque TOP est unique) suivi d'un déverminage (test du tube sous diverses conditions) est réalisé et prend entre 5 et 6 mois. Par exemple, pour un TOP spatial, le confinement du faisceau est réalisé avec des aimants permanents (moins chers et lourds que des bobines) ajustés et collés à la main.

Un exemple de grand TOP destiné à la recherche est celui utilisé au laboratoire de physique des interactions ioniques et moléculaires (PIIM) de Marseille. Il s'agit d'un tube à hélice, avec des antennes mobiles, utilisé pour l'étude de l'interaction onde-électrons. Ce tube est long de quatre mètres pour permettre l'utilisation d'un générateur d'onde de forme arbitraire, plus précis qu'un générateur haute fréquence, mais imposant des fréquences faibles, donc de grandes longueurs d'onde.

2.2 Fonctionnement des tubes à ondes progressives

Il existe deux classes d'interaction entre une onde électromagnétique et un faisceau d'électron : soit le faisceau interagit avec une onde stationnaire (*standing wave*) comme pour les klystrons, soit il interagit avec une onde en mouvement (*travelling wave*) comme pour les TOPs. Ces deux classes diffèrent par les conditions à mettre en place pour déclencher l'interaction.

Comme schématisé par la [figure 2.1](#), les tubes à ondes progressives comportent trois parties sous vide : un canon à électrons, une ligne à retard et un collecteur.

2.2.1 Canon à électrons

Le canon à électrons, souvent nommé cathode sans considération pour le reste du canon, émet les électrons de masse m_e et charge e avec pour rapport $\eta = |e|/m_e$. La cathode est combinée à une anode et un diaphragme pour focaliser le faisceau. La cathode est caractérisée

IUT	IEEE	Frequency	Used for
High frequency Dekametric waves	HF	3-30 MHz	Shortwave broadcasting, amateur radio, over-the-horizon radio (reflected off the ionosphere)
Very high freq. Metric waves	VHF	30-300 MHz	FM and TV broadcasting
Ultra high freq. Decimetric waves 0.3-3 GHz	UHF	0.3-1 GHz	TV broadcasting, microwave communication, modern radars, direct-broadcast satellite (DBS), radio astronomy, mobile phone, wifi, bluetooth, GPS, satellite radio
	L	1-2 GHz	
Super high freq. Centimetric waves 3-30 GHz	S	2-4 GHz	
	C	4-8 GHz	
	X	8-12 GHz	
	Ku	12-18 GHz	
	K	18-27 GHz	
Extremely high freq. Millimetric waves 30-300 GHz	Ka	27-40 GHz	
	V	40-75 GHz	
	W	75-110 GHz	
	mm (G)	0.11-0.3 THz	
Tremendously high freq. Sub-millimetric / Far infrared		0.3-3 THz	Condensed-matter physics, terahertz communication

TABLE 2.1 – Nomenclature des bandes de fréquence micro-onde selon l’*Institute of Electrical and Electronics Engineers IEEE (2003)* et l’*International Telecommunication Union IUT* (qui délimite l’ensemble du spectre radio de 3 Hz à 3 THz). La bande mm est souvent appelé bande G. D’autres organismes utilisent parfois leurs propres nomenclatures et leurs propres gammes de fréquence.

par une tension d’accélération V_0 (potentiel électrique) et un courant I_0 . Dans cette dissertation, le faisceau émis est considéré comme mono-cinétique et entièrement confiné sur l’axe z même si ce n’est pas exactement le cas. L’énergie cinétique initiale $\mathfrak{T} = m_e v_{e1,0}^2 / 2$ du faisceau est égale à la différence $\mathfrak{U} = -eV_0$ d’énergie potentielle entre la cathode et la grille de la triode. Dans le régime classique, on trouve que la **vitesse initiale des électrons** est

$$v_{e1,0} = \sqrt{2\eta V_0}; \quad (2.1)$$

dans le cas relativiste, on aura

$$v_{e1,0} = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{\mathfrak{U}}{m_e c^2}\right)^{-2}}, \quad (2.2)$$

en utilisant $\mathfrak{T} = m_e c^2 (\gamma_0 - 1)$, avec $\gamma_0 = (1 - \frac{v_{e1,0}^2}{c^2})^{-1/2}$ le facteur de Lorentz, et c la vitesse de la lumière dans le vide. Pour un tube à ondes progressives spatial, on aura $v_{e1,0} \simeq 0.15c$, donc l’approximation non relativiste reste acceptable, même si nous utiliserons un modèle N -corps relativiste pour améliorer la précision.

2.2.2 Ligne à retard

Le principe de fonctionnement des TOPs est de permettre l’interaction onde-matière par leurs designs. En effet, pour autoriser une telle interaction, les électrons doivent avoir une vitesse proche de la vitesse de phase de l’onde à amplifier. L’invariance de Lorentz implique que toute masse peut être considérée au repos dans un référentiel donné alors que la lumière gardera sa vitesse c , dans le vide, quel que soit le référentiel. Nous voyons donc immédiatement l’intérêt de ralentir l’onde, plutôt que d’essayer d’accélérer les particules. On peut ralentir la lumière en augmentant son chemin optique. On parle alors de ligne à retard (*delay line*), aussi appelée structure à onde lente (*slow-wave structure, SWS*). Le cœur d’un TOP, là où se déroule l’interaction onde-particule, est le guide d’onde, c-à-d. la ligne à retard. Dans cette dissertation, nous nous concentrerons sur cette dernière.

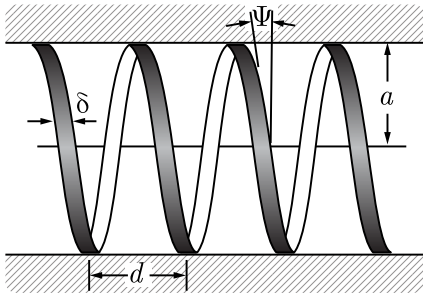


FIGURE 2.2 – Minenna *et al* (2019a). Hélice d'un tube à ondes progressives. L'hélice est entourée par un milieu diélectrique, de permittivité relative ϵ_r , comme que le fourreau protégeant l'hélice et maintenant le vide.

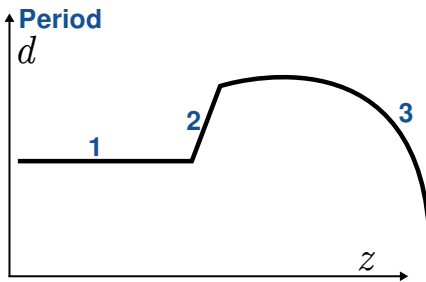


FIGURE 2.3 – Variation de pas, dite *pitch tapering*, typique d'un TOP commercial à hélice. Le pas d de chaque période change le long de l'axe z . À chaque nouvelle période, où le pas varie, est associée une nouvelle relation de dispersion. Dans la zone 1, on laisse l'interaction onde-particule démarrer. La zone 2 sert à augmenter le regroupement (*bunching*) des électrons. Et dans la zone 3, le pas est réduit pour baisser la vitesse de phase de l'onde, permettant ainsi de garder la résonance et d'éviter le piégeage alors que les électrons perdent de plus en plus leur vitesse le long du tube.

Bien que leurs fonctionnements soient identiques, on distinguera deux catégories principales de TOPs, les tubes à hélice (*helix*) et les tubes à cavités couplées (*coupled cavities*), incluant les guides repliés (ligne à méandres ou *folded waveguides*). La différence réside dans la forme de la structure à onde lente. D'autres géométries existent mais elles sont marginales en comparaison de celles-ci. Nous travaillerons principalement sur les TOPs à hélice, notamment parce que c'est la forme utilisée pour les tubes spatiaux et le tube du PIIM. Dans les tubes à hélice, le guide d'onde est hélicoïdal (voir figure 2.2). Pour un rayon a de l'hélice et un pas (*pitch*) d donnés, la vitesse de phase de l'onde sera de l'ordre de $v_{ph}/c \simeq d/(2\pi a)$. En réalité, de nombreux détails modifient cette vitesse comme, par exemple, les montants supportant l'hélice. De plus, les guides d'onde d'un TOP sont des milieux dispersifs. On regardera plutôt la relation de dispersion du tube pour obtenir la vitesse de phase. Aux extrémités de la ligne à retard, on trouve une antenne d'injection du signal à amplifier et une antenne de sortie. Autour du guide d'onde, on trouve une bobine magnétique ou des aimants permanents pour confiner le faisceau d'électrons le long du tube. Pour amplifier l'onde, on s'assure que $v_{ph} \gtrsim v_{el,0}$ où la vitesse d'éjection à la cathode est ajustée pour maximiser le gain du TOP.

Dans un souci d'optimisation du gain des tubes industriels, il est possible d'altérer la périodicité de la ligne à retard. Cette altération se caractérise par une variation du pas d que l'on appelle *pitch tapering* ou *taper* (voir figure 2.3). En jouant sur ce pas, on va favoriser la formation de paquets d'électrons et modifier la vitesse de phase de l'onde. La première raison pour jouer sur le pas est que, à la fin du tube, les électrons ont transmis une partie de leurs quantités de mouvement à l'onde : ils sont ralentis. Pour garder la synchronisation, on peut modifier la forme du guide d'onde pour réduire la vitesse de phase. Dans un TOP à hélice, puisque $v_{ph}/c \simeq d/(2\pi a)$, cela revient à réduire le pas de l'hélice (voir zone 3 de la figure 2.3). On notera que, pour un TOP à hélice, la variation du rayon est aussi utilisée. Par abus de langage, nous désignerons par *taper* toutes les variations de la géométrie d'une cellule pour modifier la relation de dispersion et l'impédance de celle-ci.

La propagation des ondes dans le cœur de la ligne à retard est normalement bien décrite avec la relation de dispersion et l'impédance du tube. Par contre, les deux extrémités de la ligne à retard constituent des ruptures d'impédances.¹ Il y a donc réflexion d'une partie du signal et, compte tenu du gain du tube, un risque d'oscillation critique. En effet, l'onde

¹Lemoine 2017

inverse (rétrograde) qui est réfléchi va se coupler avec les électrons dits « retour » (électrons réfléchis à grande vitesse du collecteur pour revenir dans la ligne à retard) et peut s'amplifier. La réflexion est généralement quantifiée par un coefficient appelé le taux d'onde stationnaire (TOS, ou *voltage standing-wave ratio* (VSWR)). Ce problème de désadaptation des entrées et sorties d'un TOP peut générer un gain de boucle très élevé : on dit que le tube oscille. Pour s'en prémunir, un moyen simple est d'introduire un atténuateur (*sever*, généralement juste une couche de résine sur les montants) au tiers de la ligne à retard pour absorber les ondes. Si l'atténuateur est suffisamment court, l'onde directe est rapidement rétablie grâce au couplage avec le faisceau. Par contre, l'onde inverse (rétrograde) est fortement atténuée.

Il est aussi possible de générer un gain de boucle en ayant un faisceau suffisamment intense pour que les coefficients de couplage avec l'onde inverse soient assez importants. C'est le mode *backward wave oscillator* (BWO). On peut s'en prémunir en réduisant le courant de cathode I_0 .

Dans cette dissertation, seule la physique de la ligne à retard nous intéressera. Au [chapitre 8](#), nous présentons un modèle analytique assez simple (dit modèle de Pierce) permettant de comprendre intuitivement l'interaction onde-particule dans les TOPs.

2.2.3 Collecteurs

Finalement, à la fin du tube est placé un collecteur d'électrons récupérant la puissance résiduelle en capturant les électrons. Pour les tubes industriels, le collecteur est déprimé par étages (avec des tensions successives), permettant d'augmenter le rendement du tube. On notera que les collecteurs déprimés augmentent le taux d'électrons retour.

Le TOP du PIIM possède à la place un analyseur trochoïdal¹ donnant la fonction de distribution en vitesse du faisceau en sortie du tube. ¹Guyomarc'h et Doveil 2000

2.3 Gain, puissance et rendement des TOPs

L'amplification de l'onde dans un tube à ondes progressives se caractérise par son **gain**, exprimé en décibels

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}, \quad (2.3)$$

avec P_{out} la puissance de l'onde à l'antenne de sortie et P_{in} la puissance à l'antenne d'entrée. Pour un TOP à hélice spatiale, le gain peut atteindre 50 dB. Il est d'usage d'exprimer la puissance en dBm en fonction logarithmique d'une puissance en mW

$$P_{[\text{dBm}]} = 10 \log_{10} P_{[\text{mW}]}, \quad (2.4)$$

soit 1 mW pour 0 dBm, avec réciproquement $P_{[\text{mW}]} = 10^{P_{[\text{dBm}]} / 10}$. Le calcul de la puissance générée est l'une des caractéristiques les plus importantes dans la conception des tubes à ondes progressives. En effet, pour les ingénieurs travaillant à leur fabrication, la qualité d'un TOP se détermine notamment par le rapport de la puissance de l'onde en sortie (en excluant les harmoniques) avec la puissance électrique apportée à la cathode : il s'agit du **rendement d'interaction global**² (*overall tube efficiency*) ²Gilmour 1994

$$\eta_{\text{ov}} = \frac{P_{\text{out}} - P_{\text{in}}}{P_{\text{use}}}, \quad (2.5)$$

où la puissance électrique totale utilisée par le tube est $P_{\text{use}} = P_0 + P_h + P_{\text{sol}} - P_{\text{rec}}$, avec $P_0 = V_0 I_0$ la puissance du canon à électrons à la cathode pour V_0 et I_0 , la tension et le courant électrique à la cathode, P_h la puissance pour chauffer la cathode, P_{sol} la puissance utilisée par les aimants solénoïdaux pour confiner le faisceau et P_{rec} la puissance récupérée par le collecteur. Les valeurs de η_{ov} sont généralement comprises entre $\sim 30\%$ et 70% . Devant le gain important de puissance d'un tube hyperfréquence, on négligera P_{in} devant P_{out} . Ainsi, on peut définir le **rendement d'interaction** (*beam efficiency*)

$$\eta_e = \frac{P_{\text{out}} + P_{\text{cir}}}{P_0}, \quad (2.6)$$

où P_{cir} correspond aux pertes RF par l'hélice : l'atténuation du signal le long du tube car l'hélice n'est pas un parfait conducteur. Les valeurs de η_e sont généralement comprises entre $\sim 1\%$ et 50% .

2.4 Objectifs : modélisation des tubes à ondes progressives

Bien que le développement des TOPs date des années 1940, la modélisation de ces derniers reste difficile de nos jours, surtout en régime non-linéaire. En effet, l'onde traversant un TOP est modulée en amplitude (c'est le rôle d'un amplificateur), en phase (sachant que l'information d'un signal de télécommunication est codée dans cette phase) et en fréquence (génération d'harmoniques et de raies d'intermodulations indésirables). En plus, à forte puissance, les TOPs génèrent des instabilités critiques amplifiées par la présence de défauts dans le tube.¹

¹Lemoine 2017

La principale finalité de la collaboration entre le laboratoire PIIM, le CNES et Thales, qui finance cette thèse, est de modéliser numériquement les tubes à ondes progressives. Cela inclut les TOPs spatiaux (avec des particularités industrielles) de 15 cm fabriqués par Thales et utilisés par le CNES pour les télécommunication spatiales, mais aussi le TOP de 4 m du PIIM utilisé pour la recherche en physique des plasmas. La modélisation doit reproduire l'interaction onde-particule responsable de l'amplification des champs, aussi bien en régime linéaire qu'en régime non-linéaire. En outre, les simulations doivent être capables de reproduire aussi bien la distorsion des signaux de télécommunication que la propagation des ondes en régime chaotique. Cela implique que les simulations doivent être réalisées en domaine temporel et être suffisamment rapides pour simuler les signaux longs.

Actuellement, il existe deux principales approches pour simuler numériquement les TOPs.

- Les codes en domaine fréquentiel (voir [chapitre 8](#)), souvent à partir de circuits équivalents ou de modèles d'enveloppe. Ces codes sont des standards industriels car ils sont rapides (au pire quelques minutes) et assez précis dans une bonne partie des cas simples. Mais ces codes sont connus pour avoir des problèmes à reproduire l'interaction onde-particule (voir [section 8.1.3](#)). De plus, ils ne représentent les champs que comme des fonctions cosinus (au mieux des sommes de fonctions cosinus) mais ne peuvent pas modéliser des champs à forme arbitraire (régime chaotique, signaux de télécommunication, etc).
- Les codes généralistes tridimensionnels en temps (domaine temporel) du type *particle-in-cell* (PIC), souvent combinés à une méthode des éléments finis pour les champs électromagnétiques. Ces codes permettent de combler les lacunes des codes fréquentiels. Sur le papier, ces codes répondent à tous nos besoins. En pratique, ces codes sont extrêmement lents (les simulations peuvent durer plusieurs jours voire quelques mois

pour des cas simples) et ils sont difficiles à mettre en place car chaque nouveau tube requiert un nouveau maillage. À notre connaissance, il n'y a eu qu'une seule modélisation réussie² d'un TOP à hélice en domaine temporel avec un code PIC. L'utilisation des codes PIC pour simuler des TOPs à cavités couplées et à guide replié est plus courante, surtout car les codes fréquentiels ont plus de difficultés à les simuler. Mais le temps d'exécution de ces codes les rend inutilisables pour des signaux longs. ²Safi *et al* 2018

Dans cette dissertation, nous proposons une troisième approche avec la description N -corps. À l'aide d'un modèle de réduction appelé le modèle discret et présenté au [chapitre 3](#), nous proposons une théorie hamiltonienne N -corps décrite au [chapitre 4](#). Cette théorie est appliquée à des simulations unidimensionnelles (1D) en domaine temporel au [chapitre 5](#).

Au [chapitre 8](#), nous décrivons une version en domaine fréquentiel du modèle discret. Cette version peut être utilisée pour construire des modèles analytiques ou des codes fréquentiels de l'interaction onde-particule. Au [chapitre 9](#), nous décrivons une version tridimensionnelle (3D) du modèle discret, reposant sur la géométrie hélicoïdale (la plus utilisée pour les TOPs), et ouvrant la voie vers des codes 3D.

Nous proposerons aussi une définition de la puissance électromagnétique en temps au travers du modèle discret. La puissance est une caractéristique clé dans la caractérisation des TOPs et, à notre connaissance, celle-ci n'est jamais exprimée en temps mais en fréquence. Au [chapitre 6](#), nous proposons une approximation 1D de cette puissance, et, au [chapitre 9](#), nous proposons une expression 3D reposant sur la géométrie hélicoïdale.

Deuxième partie

Modèle discret hamiltonien

N -corps

“I’m not afraid of death. I’m an old physicist. I’m afraid of time.”

— *Interstellar*, 2014

3

Modèle discret de Kuznetsov

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle discret de Kuznetsov qui est utilisé, entre autres, pour réduire fortement le nombre de degrés de liberté du champ électromagnétique. Ce modèle est applicable à toutes les structures tri-dimensionnelles, périodiques dans une direction. La forme exacte et les subtilités de ces structures ne sont pas importantes. Ce chapitre ne couvre que la propagation des ondes et leur décomposition suivant le modèle discret. Le traitement de la dynamique des particules est effectué dans le chapitre suivant.

De l'électromagnétisme,...

L'attribution des premières observations en électro- et magnétostatique peut être imputée au philosophe grec Thalès de Milet (625 av. J.-C.–546 av. J.-C.), souvent cité comme le « père de la science », après avoir remarqué la capacité de l'ambre¹ à attirer les matériaux légers ou la poussière, et après avoir étudié les propriétés d'aimantation de minéraux naturellement magnétisés.² L'électromagnétisme restera un phénomène mystérieux jusqu'à la Renaissance bien qu'utilisé pour certaines applications, notamment la boussole. En 1600, le savant et médecin anglais Gilbert, aussi néologiste de l'adjectif « électrique », sera un pionnier dans l'étude de l'électromagnétisme. Pendant les 17^e, 18^e et 19^e siècles, de nombreux progrès sont accomplis notamment avec l'apparition des générateurs électriques, des composants électriques, tels que les condensateurs (p. ex. la bouteille de Leyde en 1745) ou les batteries (comme celles de Galvani et Volta), et des premières lois (p. ex. la loi de Coulomb en 1785). C'est sans conteste à [Maxwell \(1865\)](#) (sur la base des travaux comme ceux de Fresnel, Ampère ou Faraday) et sa théorie de l'unification de l'électromagnétisme (seconde grande unification en physique après celle de Newton) que l'on doit l'une des plus grandes avancées dans le domaine, notamment avec les quatre équations fondatrices qui portent son nom. Vingt-trois ans plus tard, [Hertz \(1888\)](#) découvre que les ondes électromagnétiques se propagent dans l'air.

¹L'ambre et l'alliage Or-Argent se traduisent en grec ancien par *ēlektron*.

²Études réalisées sur des aimants venant de Magnésie.

au mouvement d'une particule chargée.

À la fin du 19^e siècle, Lorentz définit la force qui porte son nom et commence à utiliser des électrons dans ces modèles. Quelques années plus tard, en 1898, Thomson découvre alors expérimentalement ces électrons et ouvre la porte vers la physique subnucléaire. Par la suite, Abraham et Lorentz développèrent³ un modèle des équations du mouvement relativiste pour les électrons juste avant les articles d'Einstein sur la relativité restreinte. ³Yaghjian 2006

Le modèle discret de Kuznetsov.

En s'appuyant sur les travaux de Gelfand (1950), Kuznetsov (1980) propose une décomposition des champs dans un milieu périodique que l'on appelle le **modèle discret**. Ses travaux seront très vite utilisés¹ pour étudier les bords de la bande de transmission (près des fréquences de coupure) des tubes à onde progressive (TOPs) à cavités couplées. Depuis lors, ce modèle est encore employé par l'université de Saratov, notamment pour modéliser² des TOPs à cavités couplées en domaine fréquentiel. En parallèle, cette décomposition sera utilisée pour simuler les TOPs à hélice industriels, en domaine temps, par une collaboration³ entre l'entreprise Thales AVS/MIS à Vélizy, France, et l'équipe Turbulence Plasma du laboratoire PIIM, université d'Aix-Marseille-CNRS, en remplacement d'une approche par les circuits équivalents.⁴ Depuis 2013, le modèle discret est utilisé⁵ pour construire une description hamiltonienne auto-cohérente des champs. Cette construction est étendue au chapitre 4 à un modèle d'interaction N -corps.⁶

¹Kuznetsov et Kuznetsov 1984; Kuznetsov et al 2004

²Ryskin et al 2007, 2009; Terentyuk 2016; Terentyuk et al 2017

³Bernardi et al 2011a,b; Bernardi 2011

⁴Aïssi 2008; Aïssi et al 2009

⁵André et al 2013

⁶Minenna 2016; Minenna et al 2018

3.1 Champ électromagnétique dans une structure périodique

Dans ce chapitre, nous décrivons les bases du modèle discret. Cette théorie nous servira surtout pour réduire le nombre de degrés de liberté d'un système ondes-particules grâce à une décomposition des champs électromagnétiques dans des structures périodiques. Les principaux avantages du modèle sont détaillés à la fin du chapitre (section 3.5). La figure 3.1 représente la structure périodique quelconque considérée.

3.1.1 Équations de Maxwell

Dans les tubes électroniques (dits tubes à vide), les champs électromagnétiques sont en interaction avec un fluide chargé. La densité de ce dernier étant faible, on peut considérer qu'il ne constitue pas un milieu de propagation à part entière (qui aurait une permittivité et une perméabilité relatives non unitaires). Les champs électromagnétiques sont engendrés par les **équations de Maxwell dans le vide avec sources**⁷ (particules chargées ou fluide à faible densité)

⁷Jackson 1999; Landau et al 1984

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), & \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{tot}}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), & \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où \mathbf{E}_{tot} est le champ électrique, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ le champ magnétique, \mathbf{J} et ρ les densités de courant et de charge, ϵ_0 la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. La célérité de la lumière dans le vide est $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Les champs électromagnétiques dérivent

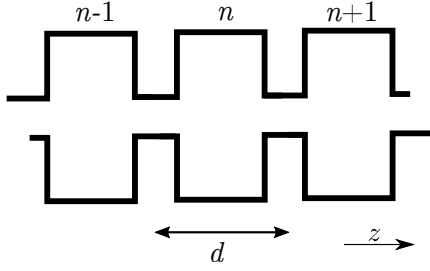


FIGURE 3.1 – Le système périodique considéré. Chaque période (aussi appelée cavité ou cellule), numérotée $n \in \mathbb{Z}$, a un volume \mathcal{V}_0 , une longueur (pas spatial) d le long de l'axe longitudinal z et une relation de dispersion Ω_β^s . Dans les premières étapes du modèle discret, il n'est pas nécessaire de définir plus spécifiquement la forme de la structure tant que celle-ci est périodique dans une direction.

du potentiel scalaire $\phi_{sc}(\mathbf{r}, t)$ et du potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tels que

$$\mathbf{E}_{tot}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi_{sc}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

$$\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (3.3)$$

Le choix de jauge n'est pas explicitement défini dans ce chapitre, mais dans les chapitres suivants nous utiliserons la jauge de Coulomb $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$. La partie $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}$ du champ électrique est souvent appelée champ de circuit, alors que la partie $\mathbf{E}_{sc} = -\nabla\phi_{sc}$ est appelée champ de charge d'espace.

Définition 3.1.1 (Champs à froid) Dans le jargon des tubistes, les champs se propageant dans un tube sans faisceau électronique ($\mathbf{J} = 0$) sont souvent appelés champs à froid (*cold field*) ou système sans faisceau (*beamless*).

3.1.2 Conditions de bord

Avant de décrire la décomposition des champs, on commence par définir les particularités géométriques du guide d'onde employé (voir figure 3.1). On considère avoir une structure de **périodes uniformes**, indexées par $n \in \mathbb{Z}$, le long de l'axe z avec une longueur périodique (*pitch* ou pas spatial) d . En supposant que le guide d'onde est un conducteur métallique parfait, on écrit les **conditions de bord** (ou de paroi) sur les parois

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_\perp = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_\perp = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{S}, \quad (3.4)$$

pour des champs respectant les équations de Maxwell (3.1), où \mathcal{S} est la surface du mur interne et \mathbf{e}_\perp est le vecteur unitaire normal à la surface. La forme exacte des cellules n'est pas nécessaire. Le point important de ce modèle est de conserver l'invariance par translation selon la longueur des cellules permettant d'introduire la condition de Floquet (énoncée plus bas). Une version du modèle discret avec une géométrie hélicoïdale, telle que pour les tubes à hélice, est étudiée au chapitre 9.

3.1.3 Modes de propagation

Les transformées des champs électriques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétiques $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ peuvent être décomposées en fonctions exponentielles simples caractérisées par la pulsation Ω_β (*angular frequency*) et le nombre d'onde (ou constante de propagation, *wave number*, *phase constant*) β . Dans la **représentation harmonique** (ou en domaine fréquentiel), les champs sont décomposés en une ou plusieurs fréquences. Par exemple, dans les modèles d'enveloppe, le champ électrique est exprimé comme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\Omega_\beta t}]$. Dans ce chapitre, nous n'utiliserons cette représentation que pour les champs à froid (système sans faisceau) car elle est inadé-

quate pour correctement exprimer les variations temporelles d'un système auto-cohérent. Toutefois, le modèle discret peut être exprimé en domaine harmonique (voir [chapitre 8](#)). Dans cette dissertation, nous utiliserons majoritairement la **représentation temporelle** avec le modèle discret de Kuznetsov non-linéaire et ses variables dépendantes du temps $V(t)$ and $I(t)$ (voir les sections suivantes).

Dans une structure à onde lente (ligne à retard), la **vitesse de phase** de l'onde caractérise le lien entre la pulsation et le nombre d'onde

$$v_{\text{ph}} = \frac{\Omega_{\beta}}{\beta} \neq c, \quad (3.5)$$

où le **nombre d'onde** dans la première zone de Brillouin, homogène à l'inverse d'une distance, est

$$\beta \in [-\pi/d, \pi/d], \quad (3.6)$$

avec d la longueur de la période (pas spatial) et $\varphi = \beta d$ le déphasage par pas. Pour assurer la résonance dans l'amplificateur, on doit permettre à la vitesse des électrons de presque coïncider avec la vitesse de phase $v_{\text{ph}} \simeq v_e$.

Remarque 3.1.2 (Indice de réfraction dans un guide d'onde) Dans les guides d'onde tels que les structures à onde lente, la vitesse de phase de l'onde est inférieure à la célérité de la lumière dans le vide, générant un indice de réfraction $n_{\text{ph}} = c/v_{\text{ph}}$ supérieur à un. Il s'agit là d'un indice géométrique dépendant de la forme du guide d'onde. Bien que son effet sur la propagation des ondes soit le même, il ne doit pas être confondu avec l'indice de réfraction généré par la permittivité et perméabilité relative d'un quelconque milieu. Notre milieu de propagation reste le vide.

Pour être plus précis, dans un guide d'onde, les champs électromagnétiques sont impactés par la forme géométrique du guide et par les propriétés d'interfaces des matériaux (conditions de bord). Pour les caractériser, il est courant d'utiliser une autre forme des équations de Maxwell appelée **équations des ondes électromagnétiques**¹

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad (3.7)$$

$$\square \mathbf{H} = 0, \quad (3.8)$$

pour les champs à froid (système sans faisceau, $\mathbf{J} = 0$ et $\rho = 0$), et avec l'opérateur de d'Alembert $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. Les équations (3.7) et (3.8) ont un nombre infini de solutions linéairement indépendantes, ou modes, pour des champs, fixées par la géométrie transverse du guide. Ces modes sont donnés par les fonctions propres \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s du champ, où $s \in \mathbb{Z}$ catalogue ces solutions. Par exemple, dans un guide d'onde rectangulaire,² on peut définir les modes transverses électriques ($\text{TE}_{s',s''}$) ou transverses magnétiques ($\text{TM}_{s',s''}$). Chaque mode s est associé à une valeur propre $\Omega_{\beta}^s \in \mathbb{R}$ de la pulsation. On remarquera que, dans nos applications, il existe généralement un mode dominant $s = 0$ permettant de négliger les autres. Nous verrons dans le [chapitre 9](#) l'intérêt de garder cet indice.

¹Il suffit d'appliquer l'opérateur rotationnel aux équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère (3.1).

²Jackson 1999

3.1.4 Transformée de Gel'fand et condition de Floquet

La propagation d'un champ dans un guide d'onde peut être exprimée en fonction du nombre d'onde β . Si cette structure est périodique, comme pour les tubes à onde progressive,

nous pouvons utiliser une décomposition spéciale des champs appelée la **transformée- β de Gel'fand**³ (*Gel'fand transform or mapping*), définie par

³Gel'fand 1950

$$\mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) e^{in\beta d} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_n(\mathbf{r}) e^{in\beta d}, \quad (3.9)$$

pour tout champ \mathfrak{G} quelconque, avec $n \in \mathbb{Z}$ la $n^{\text{ème}}$ période (ou cellule) de la structure. La fonction $\mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r})$ existe si la fonction $\mathfrak{G}(\mathbf{r})$ approche zéro suffisamment vite pour $z \rightarrow \pm\infty$. La transformée de Gel'fand (1950) est probablement plus populaire sous le nom de représentation kq (*Kq-Representation*) en physique de l'état solide depuis les travaux de Zak (1967). Cette transformation garantit que \mathfrak{G}_β vérifie la **condition de Floquet**¹ (aussi appelée condition de Bloch)

¹Largement utilisée pour étudier les TOPs, comme dans Crepeau et McIsaac (1964).

$$\mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) = \mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r}) e^{-in\beta d}, \quad (3.10)$$

signifiant que la translation d'un champ \mathfrak{G}_β à l'intérieur d'une structure périodique induit un déphasage $\varphi = \beta d$ à chaque pas. En d'autres mots, les champs \mathfrak{G}_β entrant dans une cellule sont les mêmes en sortie à un déphasage près. On remarquera que tous les champs \mathfrak{G} se propageant dans la structure ne satisferont pas forcément la condition de Floquet ($\mathfrak{G}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) \neq \mathfrak{G}(\mathbf{r}) e^{-in\beta d}$ en général), mais grâce à la transformée- β de Gel'fand, les champs \mathfrak{G}_β satisfont cette condition. La condition de Floquet est aussi invariante par la transformation $\beta \rightarrow \beta + \frac{2\pi n'}{d}$, avec $n' \in \mathbb{Z}$, puisque $e^{i2\pi n n'} = 1$. On a donc la propriété

$$\mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r}) = \mathfrak{G}_{\beta + \frac{2\pi n'}{d}}(\mathbf{r}), \forall n' \in \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

qui nous sera utile au [chapitre 9](#).

Les champs originaux peuvent être reconstruits en intégrant (3.9)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r}) d(\beta d) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{G}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) e^{in\beta d} d(\beta d) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\beta d} d(\beta d) \quad (3.13)$$

$$= 2\pi \mathfrak{G}(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

On obtient alors la **transformée- β inverse de Gel'fand**

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) = \mathfrak{G}_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{G}_\beta(\mathbf{r}) e^{-in\beta d} d(\beta d). \quad (3.15)$$

Cette expression est une transformée de Fourier spatiale et donc l'équation (3.9) est la transformée inverse (et discrète) de Fourier appliquée à des champs vérifiant la condition de Floquet. Avec le modèle discret, on notera les coefficients de Fourier (\mathfrak{G}_n), dite représentation par cellule, comme la contribution de l'onde pour le mode de propagation s à la cellule n . Cette représentation par cellule s'obtient à partir de la représentation- β (\mathfrak{G}_β). Il sera très utile de passer d'une représentation à l'autre. La relation (3.9) sera utilisée pour reformuler les équations de Maxwell dans la base associée à (3.10), et simplifiera les calculs pour les champs électromagnétiques. Les champs électriques et magnétiques respectant la condition de Floquet sont aussi des solutions des équations de Helmholtz (3.18) et (3.19) plus bas.

On notera que, pour l'intégrale en β (3.15), les notations $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots d(\beta d)$ et $\frac{d}{2\pi} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \dots d\beta$, sont équivalentes mais nous préférons la première. Par contraste avec Ryskin et al (2009) et

André *et al* (2013), on utilise la phase $\beta d \in [-\pi, \pi]$ par pas, au lieu de $\in [0, 2\pi]$, pour assurer plus de symétrie dans les calculs. En particulier si $\mathfrak{G} \in \mathbb{R}$, alors nous avons la réciprocity $\mathfrak{G}_\beta^* = \mathfrak{G}_{-\beta}$ (voir section 3.3.2).

En dernier point, il sera utile de savoir que la transformée- β inverse de Gel'fand du produit de deux facteurs en représentation- β , avec le même nombre d'onde, est la convolution discrète

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{B}_\beta e^{-in\beta d} d(\beta d) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_{n'} \mathfrak{B}_{n-n'} = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_{n-n'} \mathfrak{B}_{n'}, \quad (3.16)$$

comme démontré en annexe B.1.

3.2 Décomposition des champs électromagnétiques

On applique maintenant la transformée- β (3.9) aux équations de Maxwell (3.1) et, après un réarrangement, on les réécrit comme

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_\beta}{\partial t}(\mathbf{r}, t), & \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) &= \rho_\beta(\mathbf{r}, t), \\ \text{rot } \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_\beta}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_\beta(\mathbf{r}, t), & \mu_0 \text{div } \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec \mathbf{E}_β le champ électrique, \mathbf{H}_β le champ magnétique, et \mathbf{J}_β et ρ_β les densités de courant et de charge.

3.2.1 Équations de Helmholtz et champs en représentation- β

Remarque 3.2.1 (Notation SANS SERIF) On utilisera la notation sans serif pour distinguer les fonctions propres \mathbf{E}_β^s et \mathbf{H}_β^s (utilisées plus bas), des champs physiques \mathbf{E}_β et \mathbf{H}_β , ainsi que les variables temporelles V_β^s et I_β^s (utilisées plus bas), des potentiels V et courants I , surtout quand $s = 0$.

On note \mathbf{E}_β^s et \mathbf{H}_β^s les modes propres (similaires aux éléments finis) pour un mode de propagation (s, β) donné et pour les champs de carré sommable deux fois continument dérivables. En utilisant la transformée- β de Gel'fand, on peut utiliser les équations de Maxwell pour des champs froids sous leur forme harmonique pour obtenir les **équations de Helmholtz**¹

¹Kuznetsov 1980

$$\text{rot } \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) = -i\mu_0 \Omega_\beta^s \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}), \quad (3.18)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}) = i\epsilon_0 \Omega_\beta^s \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}), \quad (3.19)$$

avec des champs solénoïdaux,

$$\text{div } \mathbf{E}_\beta^s = 0, \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{H}_\beta^s = 0, \quad (3.20)$$

vérifiant la condition de Floquet² et les conditions de bord (3.4). Bien entendu, les valeurs propres Ω_β^s des équations de Helmholtz correspondent à la relation de dispersion (c-à-d. le diagramme de Brillouin) du mode s .

Puisque les équations (3.18)-(3.19) correspondent aussi aux équations de Maxwell avec des termes de source nuls, les fonctions \mathbf{E}_β^s et \mathbf{H}_β^s constituent une bonne base de Hilbert pour exprimer les champs physiques \mathbf{E}_β et \mathbf{H}_β radiatifs de la structure à onde lente. Grâce aux

équations de Helmholtz, nous pouvons effectuer une décomposition spectrale de ces champs avec les amplitudes complexes $V_\beta^s, I_\beta^s \in \mathbb{C}$, nous donnant les champs électromagnétiques dans la représentation- β

$$\mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} V_\beta^s(t) \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}, t) = i \sum_{s \in \mathbb{Z}} I_\beta^s(t) \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}), \quad (3.22)$$

qui respectent les équations de Maxwell (3.17), avec un facteur arbitraire i sur la deuxième équation pour assurer la réciprocité avec les champs réels (voir section 3.3.2) et pour simplifier la consistance entre les équations de Maxwell et l'approche hamiltonienne (voir chapitre 4). Cette décomposition est exacte. Dans le vide, $V_\beta^s = I_\beta^s$, mais, en présence d'un faisceau, les amplitudes temporelles doivent être distinctes $V_\beta^s \neq I_\beta^s$ (voir remarque 3.2.3).

En partant des équations des champs propres (3.21)-(3.22) et en utilisant la transformée- β inverse de Gel'fand (3.15), nous pouvons reformuler¹ le **champ électrique** de circuit

¹André et al 2013

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} V_\beta^s(t) \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) d(\beta d), \quad (3.23)$$

et le **champ magnétique**

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} i I_\beta^s(t) \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}) d(\beta d), \quad (3.24)$$

en représentation- β .

3.2.2 Équations d'évolution en représentation- β

Pour compléter le modèle, il reste à ajouter un terme de source $-\nabla\phi_{sc}$ au champ électrique, avec le potentiel scalaire de charge d'espace ϕ_{sc} du faisceau souvent associé à l'équation de Poisson électrostatique $\Delta\phi_{sc}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$. Le champ électrique total résultant est la somme des champs de circuit et de charge d'espace

$$\mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{sc,\beta}(\mathbf{r}, t) = \overbrace{\sum_{s \in \mathbb{Z}} V_\beta^s(t) \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r})}^{\text{circuit}} - \overbrace{\nabla\phi_{sc,\beta}(\mathbf{r}, t)}^{\text{charge d'espace}}. \quad (3.25)$$

Pour le champ magnétique, on gardera (3.22).

En repartant des équations de Maxwell (3.17) en représentation- β et de la décomposition des champs définie par les relations (3.22) et (3.25), nous obtenons les relations d'évolution temporelle

$$-\sum_{s \in \mathbb{Z}} I_\beta^s(t) \Omega_\beta^s \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{dV_\beta^s(t)}{dt} \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{J}_\beta(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} - \frac{\partial \nabla\phi_{sc,\beta}}{\partial t}, \quad (3.26)$$

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} V_\beta^s(t) \Omega_\beta^s \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{dI_\beta^s(t)}{dt} \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}), \quad (3.27)$$

qui sont une reformulation de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday. Les sommes disparaîtront en ne considérant qu'un seul mode de propagation.

3.2.3 Normalisation et contributions par cellule

Le volume d'une période (ou cellule) est noté \mathcal{V}_0 , tandis que le domaine total du système est noté $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$. Nous définissons un facteur de normalisation²

$$N_{\beta}^s \delta_{s'}^s = \mu_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_{\beta}^s \cdot \mathbf{H}_{\beta}^{s'*} d^3 \mathbf{r} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_{\beta}^s \cdot \mathbf{E}_{\beta}^{s'*} d^3 \mathbf{r}, \quad (3.28)$$

avec \mathcal{V}_0 le volume d'une cellule et dans le cas où les parois de notre système sont parfaitement conductrices. La présence du symbole de Kronecker $\delta_{s'}^s$ résulte du fait que les modes $s \neq s'$ sont orthogonaux si les valeurs propres sont non-dégénérées. La démonstration de cette orthogonalité est donnée en [annexe B.2](#). Pour le reste de cette dissertation, on supposera que $s = s'$ et le facteur $\delta_{s'}^s$ sera omis car il ne joue aucun rôle. Nous remarquons que cette normalisation est utilisée pour des champs propres ayant le même nombre d'onde, donc pour $\mathbf{E}_{\beta}^s \cdot \mathbf{E}_{\beta'}^{s'*}$ si et seulement si $\beta = \beta'$.

On divulguera prématurément que, plus tard, dans le formalisme hamiltonien, nous poserons que cette normalisation est égale à la valeur propre des équations de Helmholtz

$$\Omega_{\beta}^s = N_{\beta}^s, \quad (3.29)$$

permettant, en outre, d'imposer aux amplitudes V_{β}^s et I_{β}^s d'être les variables généralisées canoniques des champs. Cette égalité très commode sera établie au [chapitre 4](#). Pour le moment, nous gardons la distinction entre les deux termes.

Remarque 3.2.2 La normalisation N_{β}^s peut s'identifier par analogie à deux fois l'énergie électrostatique $W = (\epsilon_0/2) \int_{\mathcal{V}_0} |\mathbf{E}|^2 d^3 \mathbf{r}$, stockée dans une cellule (et aussi deux fois l'énergie magnétique), en notant cependant que les fonctions propres \mathbf{E}_{β}^s et \mathbf{H}_{β}^s n'ont pas forcément les dimensions des champs électromagnétiques physiques (voir la [remarque 3.3.1](#)).

Considérant ce facteur de normalisation, nous pouvons multiplier l'équation (3.26) par le complexe conjugué $\mathbf{E}_{\beta}^{s'*}$ et multiplier l'équation (3.27) par $\mathbf{H}_{\beta}^{s'*}$. Nous intégrons ensuite sur le volume pour obtenir les évolutions temporelles¹ de V_{β}^s et I_{β}^s

$$\frac{dV_{\beta}^s(t)}{dt} + \Omega_{\beta}^s I_{\beta}^s(t) = -\frac{1}{N_{\beta}^s} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{J}_{\beta}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{\beta}^{s'*}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}, \quad (3.30)$$

$$\frac{dI_{\beta}^s(t)}{dt} - \Omega_{\beta}^s V_{\beta}^s(t) = 0. \quad (3.31)$$

Le terme de source impliquant $\nabla \phi_{sc}$ a disparu de (3.30). En effet, nous avons d'abord exprimé le champ électrique radiatif par le rotationnel du champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Ampère à froid (3.19)

$$\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \partial_t (\nabla \phi_{sc, \beta}) \cdot \mathbf{E}_{\beta}^{s'*}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{i}{\Omega_{\beta}^s} \partial_t \int_{\mathcal{V}_0} (\nabla \phi_{sc, \beta}) \cdot \nabla \times \mathbf{H}_{\beta}^{s'*}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (3.32)$$

Puis, en utilisant l'identité² $\nabla \cdot (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cdot (\nabla \times \mathfrak{B}) - \mathfrak{B} \cdot (\nabla \times \mathfrak{A})$, et le **théorème de flux-divergence** (théorème de Green-Ostrogradski)

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\nabla \cdot \mathfrak{A}) d^3 \mathbf{r} = \oint_{\partial \mathcal{V}_0} (\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_{\perp}) d^2 \mathbf{r}, \quad (3.33)$$

²Cette normalisation vient directement de la référence [Ryskin et al \(2007\)](#). Dans [Kuznetsov \(1980\)](#), elle valait $\delta_{s'}^s$ seulement.

¹[André et al 2013](#)

²[Abramowitz et Stegun 1965; NIST 2019](#)

on remarque que les termes en $\nabla\phi_{sc}$ s'annulent à cause des conditions de paroi (3.4) et de Floquet (3.10).

Pour finir, il suffit¹ de transformer l'intégrale du deuxième terme de l'équation (3.30) en une intégrale sur le domaine complet \mathcal{V}_Z par l'utilisation de la condition de Floquet et la transformée- β

$$\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{J}_\beta(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int_{\mathcal{V}_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z, t) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) e^{in\beta d} d^3\mathbf{r} \quad (3.34)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z, t) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_z) d^3\mathbf{r} \quad (3.35)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_Z} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (3.36)$$

3.2.4 Équations d'évolution en représentation par cellule

La transformée- β inverse de Gelfand (3.15) peut être appliquée à toutes les expressions dans la représentation- β , respectivement $\Omega_\beta^s, V_\beta^s, I_\beta^s, \mathbf{E}_\beta^s, \mathbf{H}_\beta^s, \dots$, pour trouver leurs expressions associées dans la représentation par cellule, respectivement $\Omega_n^s, V_n^s, I_n^s, \mathbf{E}_n^s, \mathbf{H}_n^s, \dots$. En utilisant cette transformée sur le couple d'équations (3.30) et (3.31), on peut réécrire les équations d'évolution temporelle des champs²

$$\frac{dV_n^s}{dt} + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \Omega_{n'}^s I_{n-n'}^s = - \int_{\mathcal{V}_Z} \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_{-n}^s d^3\mathbf{r}, \quad (3.37)$$

$$\frac{dI_n^s}{dt} - \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \Omega_{n'}^s V_{n-n'}^s = 0, \quad (3.38)$$

déterminant l'évolution des amplitudes temporelles V_n^s et I_n^s dans la représentation par cellule. Nous définissons le champ \mathbf{F}_{-n}^s par la relation³

$$\mathbf{F}_{-n}^s \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{E}_\beta^{s*}}{N_\beta^s} e^{-in\beta d} d(\beta d), \quad (3.39)$$

avec $\mathbf{F}_\beta^s = \mathbf{E}_\beta^s / N_\beta^s$. Les équations (3.37) et (3.38) sont une réécriture des équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday (voir section 3.4).

Remarque 3.2.3 (Variables temporelles distinctes) Le modèle discret est introduit par Kuznetsov (1980), Ryskin *et al* (2009) et Bernardi *et al* (2011a,b) avec les notations

$$\mathbf{C}_\beta^s(t) = \mathbf{V}_\beta^s(t) = \mathbf{I}_\beta^s(t), \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_n^s(t) = \mathbf{V}_n^s(t) = \mathbf{I}_n^s(t), \quad (3.40)$$

où les deux variables temporelles des champs électromagnétiques sont les mêmes. Or on remarque immédiatement qu'en présence d'un faisceau ($\mathbf{J} \neq 0$) les équations (3.30) et (3.31), ou (3.37) et (3.38), sont incohérentes avec l'utilisation d'un unique C. Il est primordial de choisir deux variables distinctes. Par contre, en régime harmonique (voir section 8.4), on aura

$$\tilde{\mathbf{V}}_\beta^s = \tilde{\mathbf{I}}_\beta^s \frac{\omega}{\Omega_\beta^s}, \quad (3.41)$$

avec $\mathbf{V}_\beta^s(t) = \tilde{\mathbf{V}}_\beta^s e^{i\omega t}$ et $\mathbf{I}_\beta^s(t) = \tilde{\mathbf{I}}_\beta^s e^{i\omega t}$ et on pourra prendre $\Omega_\beta^s = \omega$ lors de la résonance des modes propres avec la pulsation d'excitation de l'onde. On se retrouve alors avec une seule

¹André *et al* 2013

²André *et al* 2013

³Notons une coquille dans André *et al* (2013) : dans (3.39), l'exposant doit être négatif.

équation d'évolution (voir équation (8.33)) similaire à Ryskin *et al* (2009) et Bernardi *et al* (2011a).

3.3 Champs électromagnétiques en représentation par cellule

Finalement, on peut réécrire les champs électromagnétiques réels dépendant des coordonnées spatiales à la place du nombre d'onde. La transformée inverse de Gel'fand (3.15) des équations (3.22) et (3.25) redonne les champs électromagnétiques en représentation par cellule

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s,n} V_n^s(t) \mathbf{E}_{-n}^s(\mathbf{r}), \quad (3.42)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{s,n} I_n^s(t) \mathbf{H}_{-n}^s(\mathbf{r}), \quad (3.43)$$

où \mathbf{E}_n^s et $\mathbf{H}_n^s \in H^1(\mathcal{V}_0, \mathbb{C}^3)$ sont des bases dans l'espace de Hilbert des champs solénoïdaux de carré sommable, et respectant les conditions de bord respectives. Ces dernières relations peuvent être reformulées par la condition de Floquet¹ pour avoir les champs électromagnétiques dans le modèle discret²

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s,n} V_n^s(t) \mathbf{E}_0^s(\mathbf{r} - nd\mathbf{e}_z), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{s,n} I_n^s(t) \mathbf{H}_0^s(\mathbf{r} - nd\mathbf{e}_z). \quad (3.45)$$

Ainsi, les champs électromagnétiques, à la position arbitraire \mathbf{r} , sont des superpositions de champs propres \mathbf{E}_{-n}^s et \mathbf{H}_{-n}^s , avec des amplitudes V_n^s et I_n^s . Les champs physiques sont exprimés en fonction de toutes les cellules de la structure infinie. En effet, \mathbf{E}_0^s , \mathbf{F}_0^s et \mathbf{H}_0^s sont non nuls en dehors de la période $(n - 1/2)d \leq z \leq (n + 1/2)d$. En 1D, ils oscillent et s'atténuent comme une fonction sinus cardinal, et leur valeurs dépendent de la structure géométrique (voir section 6.5). Si on connaît la géométrie, on peut retrouver les champs propres et on a alors uniquement besoin de calculer les amplitudes V_n^s et I_n^s , ce qui est possible avec un modèle d'interaction (voir chapitre 4 pour un modèle N -corps et chapitre 8 pour un modèle fluide).

Si on a besoin d'inclure le champ de charge d'espace, on construira alors le champ électrique total comme

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{sc}} = \sum_{s,n} V_n^s(t) \mathbf{E}_{-n}^s(\mathbf{r}) - \nabla \phi_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t). \quad (3.46)$$

Toutefois, pour la suite de cette dissertation, nous préférons éviter de mélanger le champ de circuit \mathbf{E} et le champ de charge d'espace \mathbf{E}_{sc} .

Remarque 3.3.1 (Analyse dimensionnelle) Avec l'apparition des variables Ω_n^s , V_n^s , I_n^s , \mathbf{E}_n^s et \mathbf{H}_n^s (et leurs analogues dans la représentation- β), on peut se demander, avant toute application, à quelles grandeurs physiques ces variables sont associées. Dans cette dissertation, pour utiliser le formalisme hamiltonien au chapitre suivant, nous imposerons aux coefficients de couplage Ω_n^s et N_n^s (3.28) d'être homogènes à une pulsation. Dans ce cas, les variables temporelles V_n^s et I_n^s ont la dimension d'une racine carrée d'une action.

¹ $\mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r} + nd\mathbf{e}_z) = \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) e^{-in\beta d}$

² André *et al* 2013

Dans les références [Ryskin et al \(2007, 2009\)](#) et [Terentyuk \(2016\)](#), on définit \mathbf{N}_n^s homogène à une énergie (de sorte que (3.28) soit proportionnel à l'énergie électrique et magnétique stockée). Ainsi les \mathbf{V}_n^s et \mathbf{I}_n^s sont sans dimension et les \mathbf{E}_n^s , respectivement \mathbf{H}_n^s , ont les dimensions d'un champ électrique, respectivement magnétique.

3.3.1 Potentiel vecteur

Pour plus tard, nous devons exprimer la décomposition du potentiel vecteur. Puisque $\text{rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{H}$, on obtient le lien entre les champs propres en représentation β

$$\mu_0 \mathbf{H}_\beta^s = \text{rot } \mathbf{A}_\beta^s, \quad (3.47)$$

et son équivalent en représentation par cellule

$$\mu_0 \mathbf{H}_n^s = \text{rot } \mathbf{A}_n^s. \quad (3.48)$$

À partir de l'équation (3.22), on déduit alors le **potentiel vecteur**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{s,n} \mathbf{I}_n^s(t) \mathbf{A}_{-n}^s(\mathbf{r}) + \nabla \mathfrak{J}(\mathbf{r}, t), \quad (3.49)$$

où \mathfrak{J} est une fonction quelconque respectant le choix de jauge du système. Pour la suite, on prendra la jauge de Coulomb avec $\nabla \mathfrak{J} = 0$. Au [chapitre 4](#), avec $\mathbf{N}_\beta^s = \Omega_\beta^s$, on aura le lien entre les champs de base

$$-i \mathbf{A}_n^s(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_n^s(\mathbf{r}), \quad (3.50)$$

$$-i \mathbf{A}_\beta^s(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_\beta^s(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_\beta^s}{\mathbf{N}_\beta^s}, \quad (3.51)$$

pour notre modèle N -corps.

Remarque 3.3.2 (Potentiel vecteur dans un milieu) On remarquera que les amplitudes temporelles \mathbf{I}_n^s du potentiel vecteur \mathbf{A} (3.49) et celles du champ magnétique \mathbf{H} (3.43) sont identiques car nous avons une propagation des champs dans le vide. Dans un milieu quelconque, le passage entre potentiel vecteur et champ magnétique fait intervenir la perméabilité magnétique du milieu et impose de prendre des amplitudes distinctes.

3.3.2 Conditions de réciprocité

Puisque $\Omega_\beta^s > 0$, on a

$$\Omega_\beta^s = \Omega_\beta^{s*} = \Omega_{-\beta}^s > 0, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{N}_\beta^s = \mathbf{N}_\beta^{s*} = \mathbf{N}_{-\beta}^s > 0, \quad (3.53)$$

en accord avec $\mathbf{N}_\beta^s \in \mathbb{R}$ provenant de la définition (3.28). Grâce au nombre imaginaire dans l'équation (3.43) et à notre choix $\mathbf{E}_\beta^{s*} = \mathbf{E}_{-\beta}^s$, les composantes en β du champ électrique

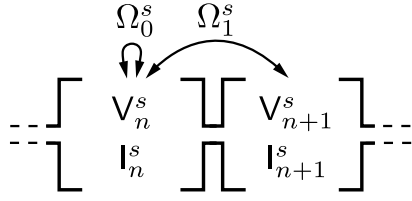


FIGURE 3.2 – Représentation de la propagation d'une onde avec le modèle discret. Les termes $\Omega_{n_1-n_2}^s$ définissent le couplage entre les cellules n_1 et n_2 .

respectent les conditions de réciprocité suivantes

$$\mathbf{E}_\beta^{s*} = \mathbf{E}_{-\beta}^s, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{H}_\beta^{s*} = -\mathbf{H}_{-\beta}^s, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{V}_\beta^{s*} = \mathbf{V}_{-\beta}^s, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{I}_\beta^{s*} = \mathbf{I}_{-\beta}^s, \quad (3.57)$$

qui sont déduites grâce aux équations de Helmholtz. Ces conditions nous seront utiles par la suite. On remarque aussi qu'avec ces conditions les \mathbf{V}_n^s , \mathbf{I}_n^s , \mathbf{E}_n^s , \mathbf{F}_n^s , $i\mathbf{H}_n^s$, $i\mathbf{A}_n^s$, Ω_n^s , et \mathbf{N}_n^s sont des quantités réelles. On en déduit¹ aussi

¹Minenna 2016

$$\mathbf{V}_\beta^s(t) = \frac{1}{\mathbf{N}_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{I}_\beta^s(t) = \frac{1}{\mathbf{N}_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (3.58)$$

en notant le rôle différent des champs physiques \mathbf{E}_β (3.21) et \mathbf{H}_β (3.22) et des fonctions propres \mathbf{E}_β^s , \mathbf{H}_β^s .

On notera que ce choix de conditions de réciprocité impose l'utilisation d'une relation de dispersion Ω_β^s réelle et donc qui ne peut pas contenir d'atténuations dans la partie imaginaire. Nous ajoutons des atténuations avec l'utilisation de coefficients de perte à la section 3.4.3.

3.4 Propagation des champs avec le modèle discret

Dans cette section, nous décrivons la propagation des champs électromagnétiques (3.42)-(3.43) avec le modèle discret.

3.4.1 Chaîne d'oscillateurs

On reprend les équations de Maxwell-Ampère (3.37) et de Maxwell-Fadaday (3.38) sans sources

$$\frac{d\mathbf{V}_n^s}{dt} = - \sum_{n'} \Omega_{n-n'}^s \mathbf{I}_{n'}^s, \quad (3.59)$$

$$\frac{d\mathbf{I}_n^s}{dt} = \sum_{n'} \Omega_{n-n'}^s \mathbf{V}_{n'}^s. \quad (3.60)$$

On remarque que le couple d'équation (3.59)-(3.60) représente une chaîne d'oscillateurs harmoniques infinie (voir figure 3.1) où les facteurs $\Omega_{n-n'}^s$ sont les coefficients de couplage entre les cellules n et n' . On rappelle que les Ω_n^s sont les transformées- β inverses de Gelfand de la relation de dispersion (c-à-d. la valeur propre des équations de Helmholtz) $\Omega_\beta^s = \sum_n \Omega_n^s e^{in\beta d}$, et donc dépendent de la géométrie du guide d'onde.

Puisque, pour un mode s donné, les termes de couplage $\Omega_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega_\beta^s e^{-in\beta d} d(\beta d)$ proviennent de l'intégration de la relation de dispersion, on remarquera que la valeur numérique de ces termes dépend de l'échantillon donné pour la relation de dispersion et que

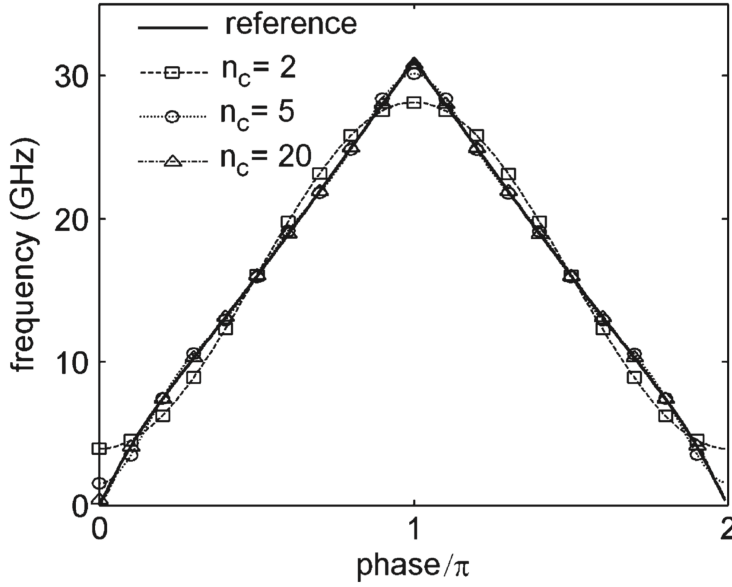


FIGURE 3.3 – Bernardi *et al* (2011a). Relation de dispersion (noir) typique de la ligne à retard d'un TOP à hélice et approximations pour plusieurs valeurs de $n_c = N_{\text{ph}}$ d'après le modèle discret.

les points manquants doivent être interpolés. Cela signifie que le modèle discret requiert la plus large relation de dispersion possible (incluant toute la zone de Brillouin) et non pas juste la fréquence d'intérêt de la bande de transmission (comme c'est le cas pour les modèles fréquentiels). C'est un des avantages du modèle discret : la propagation des ondes prend intrinsèquement en compte toutes les fréquences.

3.4.2 Portée de couplage

À partir des transformées de Gel'fand, nous avons introduit les termes de couplage

$$\Omega_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega_{\varphi/d}^s e^{-in\varphi} d\varphi, \quad (3.61)$$

avec le déphasage $\varphi = \beta d$, et, réciproquement, la pulsation

$$\Omega_{\varphi/d}^s = \Omega_{\beta}^s(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_n^s e^{in\varphi}. \quad (3.62)$$

Nous allons maintenant décrire leurs constructions à partir de la relation de dispersion (diagramme de Brillouin) du guide d'onde.

Dans le modèle discret, la relation de dispersion est décomposée en base de Fourier. Or pour les TOPs, le diagramme de Brillouin ressemble à une fonction cosinus. Cela rend la décomposition de la ligne extrêmement réduite, car les grands coefficients de Fourier deviennent rapidement négligeables ($\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n^s = 0$). En d'autres termes, on peut limiter la série (3.62) à un nombre $|n| \leq N_{\text{ph}}$ fini, et donc le champ à la cellule n sera couplé jusqu'aux cellules $n \pm N_{\text{ph}}$. Pour les TOPs à cavités couplées, le diagramme de Brillouin est quasiment un cosinus et ne nécessite qu'une portée de $N_{\text{ph}} \approx 1$. Pour les tubes à hélice, il faut prendre plus de termes $N_{\text{ph}} \approx 5 - 20$. L'erreur commise à la fois pour les TOPs à cavités couplées et à hélice avec cette troncature est de moins de 1%¹ (cf. figure 3.3). La portée de couplage N_{ph} devra être augmentée autour des singularités de la relation de dispersion. Avec cette

¹Bernardi *et al* 2011a; Bernardi 2011

troncature, l'équation (3.62) devient

$$\Omega_\beta^s \approx \sum_{n=-N_{\text{ph}}}^{N_{\text{ph}}} \Omega_n'^s e^{in\beta d} = \Omega_0'^s + \sum_{n=1}^{N_{\text{ph}}} 2\Omega_n'^s \cos(n\beta d), \quad (3.63)$$

avec $\Omega_n'^s$ les valeurs approchées des Ω_n^s .

Pour être utilisé, le modèle discret requiert impérativement la relation de dispersion Ω_β^s pour chaque mode de propagation s considéré. Cette relation de dispersion peut être estimée par des solveurs numériques tels que HELICOF, HELMOTH-3D, HFSS¹, CST et MAXWELL3D, ou elle peut être directement mesurée expérimentalement.

¹Aloisio et Waller
2005

3.4.3 Atténuateurs et pertes

Dans les tubes à ondes progressives et autres appareils expérimentaux, la propagation des ondes est réduite à cause des pertes telles que les effets de peau ou les pertes diélectriques. Pour les tubes industriels, des atténuateurs locaux sont volontairement ajoutés pour améliorer leurs caractéristiques.

Dans les modèles fréquentiels d'enveloppe, avec des champs décomposés en $e^{i\omega t - i\beta z}$ (voir section 8.1.2), on définit la perte spatiale par

$$\frac{dC^s}{dz} = -i\beta C^s - \alpha'(s)C^s, \quad (3.64)$$

avec $C^s(z) = \hat{C}_0^s e^{-i\gamma z}$ le facteur d'enveloppe spatiale des champs, $\gamma = \beta - i\alpha'$ le nombre d'onde perturbé et α' le coefficient d'atténuation spatiale.

En suivant ce schéma, on veut définir les pertes pour le modèle discret. Si on inclut un courant $\sigma \mathbf{E}$ (loi d'Ohm) dans l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}$ sans faisceau, on peut réécrire l'équation d'évolution (3.59) comme²

²Bernardi *et al*
2011a,b

$$\frac{dV_n^s}{dt} = - \sum_{n'} \Omega_{n-n'}^s I_{n'}^s - \alpha(s) V_n^s, \quad (3.65)$$

avec α le coefficient d'atténuation temporelle de l'onde provenant de σ (si σ est indépendant de l'espace). Ce coefficient est mesurable ou calculable avec des solveurs numériques à froid. Pour les TOPs, il est courant d'employer des coefficients d'atténuation spatiaux. On cherche donc le lien entre α et α' . Dans une approximation monochromatique et fréquentielle du modèle discret (voir section 8.4), on imposera que $V_n^s(t) = \tilde{V}_0^s e^{-in\beta d} e^{i\omega t}$ avec ω et β fixés. En rappelant que $\Omega_\beta^s = \sum_n \Omega_n^s e^{in\beta d}$, les équations (3.60) et (3.65) mènent à la relation de dispersion avec pertes

$$\omega^2 = (\Omega_\beta^s)^2 - i\omega\alpha, \quad (3.66)$$

avec $\omega(\beta) = \Omega_\beta^s$ sans pertes. La série de Taylor $\omega(\beta - i\alpha') = \Omega_\beta^s - i\alpha v_g + \dots$ mène à

$$\alpha = 2\alpha' v_g(\beta), \quad (3.67)$$

au premier ordre, avec $v_g = \partial_\beta \omega$ la vitesse de groupe. Dans les cas où les atténuations varient (p. ex. un atténuateur local dans un TOP industriel), on pourra utiliser des α_n par cellule dans (3.65).

3.5 Avantages du modèle discret

Le premier avantage du modèle discret est qu'il permet une réduction drastique du nombre de degrés de liberté pour les champs. En effet, l'usage de la base de fonctions propres \mathbf{E}_β^s , \mathbf{H}_β^s et l'inversibilité de la transformée- β permettent de décomposer le champ électromagnétique dans une structure périodique suivant les relations (3.44) et (3.45) avec des termes V_n^s , et I_n^s , où n est le numéro de cellule. Par exemple, dans un tube à ondes progressives composé de 200 périodes (cellules), pour un mode dominant $s = 0$, les champs pourront être décomposés en 200 termes V_n , et I_n , ce qui revient à dire que le système possède 200 degrés de liberté, les \mathbf{E}_n , \mathbf{H}_n et \mathbf{A}_n étant des constantes (vis-à-vis du temps) associées à la géométrie du tube. La différence est drastique comparée avec les codes *particle-in-cell* (PIC) où les champs à eux seuls doivent être décrits par des millions de degrés de liberté. Toutefois, le modèle discret est censé décrire une structure infinie dans l'axe de propagation, mais, comme nous l'avons vu à la section 3.4.2, le couplage entre cellules de plus en plus éloignées tend vers zéro et des conditions de bord dégressives peuvent être mises en place ne perturbant presque pas la dynamique générale. On notera aussi que le modèle discret s'applique en théorie uniquement aux structures périodiques. Cependant, nous l'utiliserons avec succès au chapitre 5 pour des TOPs dont la périodicité est légèrement variable (variation du pas et du rayon : *taper*). Notre hypothèse "adiabatique" est que la variation est assez faible entre cellules voisines. Toutefois, la principale limite du modèle est que la longueur d'onde doit être supérieure au pas d'une cellule.

Initialement, le modèle discret fut développé¹ pour étudier le comportement en bord de bande de transmission des TOPs à cavités couplées. En effet, près des fréquences de coupure, lorsque l'impédance de Pierce tend vers l'infini, les tubes génèrent des oscillations critiques qui ne sont pas reproduites par les modèles de circuit équivalent et les modèles fréquentiels (voir section 8.1.3). Or, l'une des premières critiques adressées à ces modèles est qu'ils sont limités à quelques harmoniques données et qu'ils violent les équations de Maxwell.² Ce n'est pas un problème pour le modèle discret, car, grâce à sa construction en domaine temps, les amplitudes V_n^s et I_n^s prennent en compte toutes les harmoniques (toute la relation de dispersion est utilisée dans la propagation des champs, voir section 3.4). En plus, le modèle discret est un modèle rigoureux qui se fonde sur les équations de Maxwell (3.1) et les respecte. Cette robustesse a été déjà suggérée théoriquement³ et nos simulations⁴ (voir chapitre 5) vont dans ce sens. Le modèle discret permet une description exacte des caractéristiques dispersives des modes de propagation à froid de la ligne. L'approche linéaire du modèle discret, permettant une caractérisation simple et rapide des tubes à onde progressive, notamment en régime linéaire (petit signal), est détaillée au chapitre 8. À la section 8.5, une comparaison analytique⁵ entre un modèle classique de TOP (modèle de Pierce) et le modèle discret en régime fréquentiel est réalisée, permettant de valider ce dernier.

On remarquera aussi que le modèle discret n'impose aucune forme tridimensionnelle pré-établie pour la structure observée, tant que celle-ci est périodique dans la direction z . Ce modèle est donc adapté à toutes les formes de guide d'onde utilisées pour les TOPs telles que les cavités couplées ou les guides repliés. La seule contrainte est de déterminer les formes de champ \mathbf{E}_n^s , \mathbf{H}_n^s et \mathbf{A}_n^s et les coefficients $\Omega_{n_1-n_2}^s$ pour chaque géométrie, mais cela peut se résoudre soit par des modèles analytiques, soit par des mesures expérimentales, soit avec des solveurs numériques 3D. Le modèle discret est donc très flexible là où d'autres modèles (p. ex. les modèles de circuit équivalent) requièrent un redéveloppement pour chaque nouvelle ligne à retard. Nous étudions la structure hélicoïdale par un modèle analytique au chapitre 9.

¹Kuznetsov et Kuznetsov 1984; Kuznetsov et al 2004; Ryskin et al 2007, 2009; Terentyuk 2016; Terentyuk et al 2017; Minenna et al 2019b

²Théveny et al 2016; Théveny 2016

³Ryskin et al 2009; Minenna et al 2019b

⁴Minenna et al 2019c,d

⁵Minenna et al 2019b

L'apport du modèle discret par rapport aux autres solutions temporelles est qu'il permet une analyse unidimensionnelle précise. Le principal souci des simulations numériques est le coût de calcul à la fois en temps et en prix des machines. Or généralement, les approches temporelles, telles que les codes PIC, requièrent de réaliser les simulations en trois dimensions (au moins en 2.5D). Avec le modèle discret, il est possible de faire des simulations en 1D (voir [chapitre 5](#)), réduisant d'autant l'effort de calcul numérique. Cette performance est d'autant plus importante pour des activités industrielles telles que la conception de nouveaux TOPs. Pour utiliser le modèle 1D, nous proposerons une approximation (voir [section 6.5](#)) pour déterminer les formes de champ longitudinales $E_{n,z}^s$ et $A_{n,z}^s$.

Un dernier avantage du modèle est qu'il n'impose aucune limite sur la description du faisceau électronique. C'est la partie champ du modèle d'interaction. On pourra le combiner avec une approche N -corps (voir [chapitre 4](#)) ou une description fluide (voir [chapitre 8](#)).

« Je suis de ceux qui pensent que la Science a une grande beauté [...] Un savant dans son laboratoire n'est pas seulement un technicien : c'est aussi un enfant placé en face des phénomènes naturels qui l'impressionnent comme un conte de fées. Nous ne devons pas laisser croire que tout progrès scientifique se réduit à des mécanismes, des machines, des engrenages, qui d'ailleurs ont aussi leur beauté propre. [...] Je ne crois pas non plus que, dans notre monde, l'esprit d'aventure risque de disparaître. Si je vois autour de moi quelque chose de vital, c'est précisément cet esprit d'aventure qui paraît indéfectible et s'apparente à la curiosité [...]. »

— Marie Skłodowska-Curie, rapportée par Ève Curie, *Madame Curie*, 1938

4

Dynamique hamiltonienne N -corps pour le modèle discret

Nous avons vu la décomposition des champs électromagnétique avec le modèle discret au [chapitre 3](#). Dans ce chapitre, nous ajoutons la dynamique des particules chargées au système en utilisant la description à N -corps. La dynamique totale est exprimée grâce au formalisme hamiltonien, offrant de nombreuses propriétés de conservation. On notera que la description de notre modèle dans le formalisme lagrangien est réalisée au [chapitre 6](#).

La mécanique classique.

La mécanique classique porte¹ sur l'étude du comportement des corps matériels, à savoir : les conditions mises en œuvre pour qu'ils soient au repos (statique) ; comment ils se déplacent (cinématique) et pourquoi ils le font ainsi (dynamique). Les premières réflexions sur le mouvement des corps sont attribuées aux philosophes grecs, tels qu'Aristote ou Archimède. Le début de la mécanique classique moderne revient à Galilée pour ses travaux sur le principe d'inertie et sur le calcul d'orbites célestes. Ce fut [Newton \(1687\)](#) qui posa, avec ses trois lois fondamentales, les bases mathématiques et physiques de la mécanique, aidé des travaux de Kepler. En 1760, Euler écrivit les premiers systèmes avec des coordonnées généralisées. Ses idées furent reprises par Lagrange pour développer la formulation lagrangienne, largement utilisée pour reformuler la mécanique newtonienne. C'est au 19^e siècle que sera développé le formalisme hamiltonien.

¹Gignoux et Silvestre-Brac 2002

4.1 Modèles N -corps en électrodynamique et en plasmas

Pour étudier l'interaction onde-particule, les descriptions cinétiques sont très communes car elles permettent de caractériser le mouvement global des particules. L'une de ces descriptions, et probablement la plus connue en physique des plasmas, utilise l'équation de Vlasov,¹ aussi appelée équation de Boltzmann sans collisions. La dynamique des particules est décrite à partir de fonctions de distribution $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, pour chaque espèce, évoluant dans l'espace cinétique à six dimensions. Le milieu étant perçu comme « continu », on note la limite cinétique $N_e \rightarrow \infty$, avec N_e le nombre de particules chargées. La description N -corps (N -body, ou *many-body*), quant à elle, peut être vue comme une « version finie », où $N_e < \infty$. Avec une approche N -corps, il est possible² de revenir à la limite cinétique de la description vlasovienne, tant que les couplages sont assez lisses.

L'un des bénéfices majeurs des descriptions cinétiques, qui servent de base aux codes *particle-in-cell* (PIC), est qu'elles permettent d'utiliser des fonctions lisses obéissant à des équations aux dérivées partielles, alors que la dynamique N -corps a longtemps été jugée impraticable à cause du nombre excessif de degrés de liberté mis en jeu. En effet, l'approche N -corps requiert en théorie de prendre en compte la dynamique individuelle de toutes les particules. Cela rend cette description peu attrayante pour étudier les grands systèmes (comme des TOPs longs de plusieurs centimètres, voire plusieurs mètres).

Paradoxalement, la description N -corps est utilisée dans de nombreux cours de physique pour introduire intuitivement l'électrodynamique classique³ (comme la dynamique d'une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique), la physique des lasers à électrons libres⁴ ou les phénomènes microscopiques en physique des plasmas⁵ (comme l'amortissement Landau ou le chaos hamiltonien, voir [section 1.3](#)). De plus, la description N -corps est très courante en astrophysique et en cosmologie,⁶ tandis que l'utilisation de modèles cinétiques y est récente et moins répandue.

Le modèle décrit à la [section 1.3](#) est analogue à l'approche décrite dans ce chapitre. Toutefois, nous allons plus loin que l'introduction intuitive : nous proposons un modèle N -corps applicable à la simulation de vraies expériences (en l'occurrence les tubes à ondes progressives). Notre approche est une alternative viable à la description vlasovienne.

Dans notre système, la dynamique N -corps s'étend aux N_e particules (électrons) indexées $1 \leq r \leq N_e$ et M ondes. On remarquera que pour une structure donnée, la propagation des ondes autorise théoriquement un nombre infini de modes, solutions de l'équation d'onde.

4.2 Formalisme hamiltonien

La base du formalisme hamiltonien dit que le mouvement d'une particule peut être caractérisé par sa **coordonnée généralisée** q_r et son **moment conjugué** p_r , aussi appelé moment canonique. Ce dernier est défini comme la dérivée du lagrangien L par rapport à la vitesse généralisée

$$\mathbf{p}_r \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r}, \quad (4.1)$$

pour chaque particule indexée par $1 \leq r \leq N_e$. Cette définition du moment canonique permet d'exprimer le formalisme hamiltonien par rapport aux vecteurs \mathbf{q}_r et \mathbf{p}_r dans l'espace de phase à $2N_e\mathcal{D}$ dimensions (où \mathcal{D} est le nombre de degrés de liberté par particule).

¹Jeans 1915; Vlasov 1945; Hénon 1982; Nicholson 1983

²Firpo et Elskens 1998; Elskens *et al* 2014

³Landau *et al* 1984; Griffiths 1999; Jackson 1999

⁴Bonifacio *et al* 1990; Freund and Antonsen 1992

⁵Elskens et Escande 2003; Escande *et al* 2018

⁶Binney et Tremaine 1964

Si on a déjà le lagrangien, on peut définir le **hamiltonien** à partir de la **transformation de Legendre**

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)_{\{r \in [1, N_e]\}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{r=1}^{N_e} \mathbf{p}_r^T \dot{\mathbf{q}}_r - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (4.2)$$

où H est une fonction de $(\mathbb{R}^{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}})^{N_e}$ dans \mathbb{R} et où la dimension \mathcal{D} des coordonnées \mathbf{q}_r et moments généralisés \mathbf{p}_r correspond au nombre de degrés de liberté par particule. À partir du hamiltonien, on peut décrire l'évolution temporelle du mouvement d'un système dépendant du temps en écrivant les équations d'évolution, aussi appelées **équations canoniques de Hamilton**,

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_r}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_r}. \quad (4.4)$$

Les variables \mathbf{p}_r et \mathbf{q}_r sont dites canoniques si elles satisfont les égalités suivantes

$$[\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_{r'}] = 0, [\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_{r'}] = 0, [\mathbf{q}_r, \mathbf{p}_{r'}] = \delta_{rr'}, \quad (4.5)$$

où l'on note le **crochet de Poisson canonique** de deux fonctions \mathfrak{F} et \mathfrak{G}

$$[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}] \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_r \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathbf{q}_r} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathbf{p}_r} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathbf{p}_r} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathbf{q}_r} \right), \quad (4.6)$$

avec notre convention imposant que $\dot{\mathfrak{z}} = [\mathfrak{z}, H] + \partial_t \mathfrak{z}$.

4.3 Dynamique des N_e particules dans un champ

Dans ce chapitre, nous décidons de considérer la partie matière comme un système de N_e particules chargées (description N -corps). La dynamique des particules est représentée par les points $(\dot{\mathbf{q}}_r, \mathbf{q}_r)$ dans l'espace de phase \mathbb{R}^{6N_e} , et catalogués par l'indice r . On admettra n'avoir qu'une seule espèce : des électrons.

4.3.1 Force de Lorentz

Le cinquième pilier de l'électrodynamique classique, après les quatre équations macroscopiques de Maxwell, est la **force de Lorentz**, qui représente l'action d'un champ électromagnétique sur une particule chargée (ici relativiste)¹

¹Jackson 1999

$$\mathbf{F}_{L,r}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r, t) = \frac{d(m_e \gamma_r \dot{\mathbf{q}})}{dt} = e\mathbf{E}(\mathbf{q}_r, t) + e \dot{\mathbf{q}}_r(t) \times \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{q}_r, t), \quad (4.7)$$

avec e la charge électrique (négative pour des électrons), m_e la masse, et γ_r le facteur relativiste de Lorentz défini par (4.10). La densité de courant du chapitre précédent est devenue discrète

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_r^{N_e} e \dot{\mathbf{q}}_r(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_r(t)). \quad (4.8)$$

4.3.2 Hamiltonien des particules

Le hamiltonien d'un système est le générateur de l'évolution de celui-ci en présence d'une 2-forme de Poisson. Pour construire la partie matière, nous choisissons des variables généralisées canoniques : les particules du système sont caractérisées par leurs positions $\mathbf{q}_r(t)$ et leurs moments canoniques $\mathbf{p}_r(t) = \gamma_r(\dot{\mathbf{q}}_r)m_e\dot{\mathbf{q}}_r(t) + e\mathbf{A}(\mathbf{q}_r, t)$. Le **hamiltonien des particules**² relativistes en interaction avec le champ radiatif dérivant d'un quadri-vecteur (ϕ_{sc}, \mathbf{A}) est

$$H_{el}(\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r)_{\{r \in [1, N_e]\}} = \sum_r^{N_e} \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_r - e\mathbf{A}|^2} + \frac{1}{2} \sum_{r' \neq r} e \phi_{sc}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_{r'}). \quad (4.9)$$

Tant qu'aucune action extérieure n'intervient, ce hamiltonien est une constante du mouvement. Le premier terme de (4.9) correspond¹ à $\gamma_r m_e c^2$ avec le **facteur de Lorentz**

$$\gamma_r = \left(1 - \frac{|\dot{\mathbf{q}}_r|^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \gamma_r^2 \frac{|\dot{\mathbf{q}}_r|^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{(m_e c)^2} |\mathbf{p}_r - e\mathbf{A}|^2}, \quad (4.10)$$

puisque $\gamma_r m_e \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{p}_r - e\mathbf{A}$ pour des particules relativistes. On remarquera aussi que ce hamiltonien engendre la force de Lorentz. En effet, en comparant $\dot{\mathbf{p}}_r|^{el} = \frac{d\gamma_r m_e \dot{\mathbf{q}}_r}{dt}|^{el} + e\dot{\mathbf{A}}$ à (4.12), on retrouve bien (4.7). Le second membre de (4.9) $e \sum_{r' \neq r} \phi_{sc}(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k'})/2$ correspond à la partie électrostatique (dite de charge d'espace ou énergie potentielle) associée au champ électrostatique $\mathbf{E}_{sc} = -\nabla\phi_{sc}$, souvent obtenu à partir de l'équation de Poisson $\nabla^2\phi_{sc} = -\rho/\epsilon_0$, avec ϕ_{sc} le potentiel scalaire. Dans ce chapitre, nous utiliserons une autre approche pour calculer le champ de charge d'espace (voir section 4.6.2).

Les variables $\mathbf{q}_r, \mathbf{p}_r$ sont canoniques et respectent donc la relation (4.5). Les variables $\mathbf{q}_r, \mathbf{p}_r$ obéissent aux équations du mouvement (4.3)-(4.4)

$$\dot{\mathbf{q}}_r|^{el} = \frac{\partial H_{el}}{\partial \mathbf{p}_r} = \frac{c^2 (\mathbf{p}_r|^{el} - e\mathbf{A})}{\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_r|^{el} - e\mathbf{A}|^2}} = \frac{1}{\gamma_r m_e} (\mathbf{p}_r|^{el} - e\mathbf{A}), \quad (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_r|^{el} = -\frac{\partial H_{el}}{\partial \mathbf{q}_r} = \frac{e}{\gamma_r m_e} (\mathbf{p}_r|^{el} - e\mathbf{A}) \cdot \nabla_r \mathbf{A} - e \nabla_r \phi_{sc}, \quad (4.12)$$

avec $\nabla_r = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_r}$. On utilisera la notation $|^{el}$ pour une variable obéissant uniquement au hamiltonien des particules H_{el} et non pas au hamiltonien total du système. On remarquera que le couplage avec les champs électromagnétiques se fait au travers du potentiel vecteur \mathbf{A} mais que le hamiltonien (4.9) ne décrit pas l'évolution des champs (cf. section suivante).

4.4 Dynamique des M ondes en interaction avec le faisceau

On ajoute maintenant les champs électromagnétiques (partie circuit) dans notre système grâce au théorème de **Poynting** (1884) et on réécrit le hamiltonien des champs en utilisant le modèle discret.

4.4.1 Hamiltonien électromagnétique du modèle discret

Le **hamiltonien des champs électromagnétiques**² dans le vide

$$H_{em} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_z} (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) d^3\mathbf{r}, \quad (4.13)$$

²Landau et Lifshitz 1975; Jackson 1999

¹À ne pas confondre avec l'énergie cinétique $m_e c^2 (\gamma_r - 1)$ et l'énergie des masses au repos $m_e c^2$. Dans le cas non relativiste, on pourra remplacer ce premier terme par $\frac{1}{2m_e} |\mathbf{p}_r - e\mathbf{A}|^2$.

est obtenu grâce au théorème de Poynting³ en partant des équations de Maxwell dans le vide, avec \mathcal{V}_Z le volume total. On fait donc l'hypothèse raisonnable que le faisceau n'engendre pas de permittivité ni de perméabilité relative significatives pour perturber les champs. Avec le théorème de Poynting, on notera aussi le **vecteur de Poynting**⁴

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (4.14)$$

utilisé plus tard.

Le hamiltonien des champs électromagnétiques (4.13) peut être réécrit avec la décomposition des champs du modèle discret. En utilisant les équations du champ (3.23)-(3.24) en représentation- β , nous obtenons que

$$H_{\text{em}} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathcal{V}_Z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\epsilon_0 \mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_{\beta'}^{s*} \mathbf{E}_\beta^s \cdot \mathbf{E}_{\beta'}^{s*} + \mu_0 \mathbf{I}_\beta^s \mathbf{I}_{\beta'}^{s*} \mathbf{H}_\beta^s \cdot \mathbf{H}_{\beta'}^{s*}) d(\beta d) d(\beta' d) d^3 \mathbf{r}. \quad (4.15)$$

En réalité, cette expression fait intervenir une double somme \sum_{s_1, s_2} sur les modes de propagation distincts, mais, comme démontré en annexe B.2, nous avons $\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s_2*} d^3 \mathbf{r} = 0$ et $\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{H}_\beta^{s_2*} d^3 \mathbf{r} = 0$ pour $s_1 \neq s_2$.

Avec la normalisation (3.28) et la relation de Parseval

$$\sum_n |\mathbf{E}(\mathbf{r} + n d \mathbf{e}_x)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{E}_\beta(\mathbf{r})|^2 d(\beta d), \quad (4.16)$$

on réécrit le hamiltonien électromagnétique en représentation- β

$$H_{\text{em}}(\mathbf{V}^s, \mathbf{I}^s)_{\{s \in \mathbb{Z}\}} = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_\beta^{s*} \mathbf{N}_\beta^s + \mathbf{I}_\beta^s \mathbf{I}_\beta^{s*} \mathbf{N}_\beta^s) d(\beta d), \quad (4.17)$$

ou en représentation par cellule¹

¹André *et al* 2013

$$H_{\text{em}}(\mathbf{V}^s, \mathbf{I}^s)_{\{s \in \mathbb{Z}\}} = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (\mathbf{V}_{n_1}^s \mathbf{V}_{n_2}^s + \mathbf{I}_{n_1}^s \mathbf{I}_{n_2}^s) \mathbf{N}_{n_1 - n_2}^s, \quad (4.18)$$

avec \mathbf{N}_n^s la transformée- β de Gel'fand (3.15) de \mathbf{N}_β^s . Ce calcul est donné en annexe B.3.

Comme on le sait, le hamiltonien d'un système est le générateur des évolutions, mais avec la décomposition des champs, la question est de savoir quelles sont les variables qui évoluent. Puisque maintenant les amplitudes $\mathbf{V}_n^s(t)$ et $\mathbf{I}_{n_1}^s(t)$ expriment les seules dépendances temporelles des champs, cela veut dire qu'elles sont des variables généralisées de notre système. On impose $\mathbf{V}_n^s(t)$ comme le « moment » canonique généralisé conjugué à la « coordonnée » généralisée $\mathbf{I}_{n_1}^s(t)$. Elles obéissent alors aux équations différentielles du mouvement sous la forme canonique de Hamilton (en représentation par cellule)

$$\left. \frac{d\mathbf{V}_n^s}{dt} \right|^{\text{em}} = - \frac{\partial H_{\text{em}}}{\partial \mathbf{I}_{n_1}^s} = - \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{I}_{n'}^s \Big|^{\text{em}} \mathbf{N}_{n - n'}^s, \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{I}_{n_1}^s}{dt} \right|^{\text{em}} = \frac{\partial H_{\text{em}}}{\partial \mathbf{V}_n^s} = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_{n'}^s \Big|^{\text{em}} \mathbf{N}_{n - n'}^s, \quad (4.20)$$

pour un hamiltonien à froid (sans faisceau). On utilisera la notation $\Big|^{\text{em}}$ pour une variable obéissant uniquement au hamiltonien électromagnétique H_{em} et non pas au hamiltonien

total du système. C'est notre choix de normalisation (3.28) qui assure que les variables sont canoniques. On a donc les crochets de Poisson (voir (4.6))

$$[V_{n_1}^s, V_{n_2}^{s'}] = [I_{n_1}^s, I_{n_2}^{s'}] = 0, \quad (4.21)$$

$$[I_{n_1}^s, V_{n_2}^{s'}] = \delta_{s'}^s \delta_{n_2}^{n_1}. \quad (4.22)$$

Le formalisme lagrangien du modèle discret est décrit à la section 6.1.

4.4.2 Hamiltonien complet et retour aux équations de Maxwell

Le système onde-particule complet est décrit par le hamiltonien total

$$H_{\text{tot}} = H_{\text{em}} + H_{\text{el}}, \quad (4.23)$$

soit la somme des parties champs (4.18) et matière (4.9). On rappellera que, dans le hamiltonien des particules, le potentiel vecteur est décomposé selon la relation (3.49),¹ et donc que le hamiltonien des particules (4.9) dépend aussi des I_n^s . Les **équations d'évolution** du système nous sont données comme les équations de Hamilton ${}^1 \mathbf{A} = \sum_{s,n} i I_n^s \mathbf{A}_n^s$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \frac{\partial H_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{p}_r} = \frac{c^2 (\mathbf{p}_r - e \mathbf{A})}{\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_r + e \mathbf{A}|^2}} = \frac{1}{\gamma_r m_e} (\mathbf{p}_r - e \mathbf{A}), \quad (4.24)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{q}_r} = \frac{e}{\gamma_r m_e} (\mathbf{p}_r - e \mathbf{A}) \cdot \nabla_r \mathbf{A} - e \nabla_r \phi_{\text{sc}}, \quad (4.25)$$

$$\frac{dI_n^s}{dt} = \frac{\partial H_{\text{tot}}}{\partial V_n^s} = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} V_{n'}^s N_{n-n'}^s, \quad (4.26)$$

$$\frac{dV_n^s}{dt} = -\frac{\partial H_{\text{tot}}}{\partial I_n^s} = -\sum_{n' \in \mathbb{Z}} I_{n'}^s N_{n-n'}^s - \sum_r^{N_e} i e \dot{\mathbf{q}}_r \cdot \mathbf{A}_n^s, \quad (4.27)$$

avec $\nabla_r = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_r}$. On constate que pour respecter les équations de Maxwell, le couple (4.26)-(4.27) doit être égal aux équations d'évolution (3.37)-(3.38) obtenues à partir de Maxwell. En rappelant la discrétisation de la densité de courant (4.8), la comparaison des deux couples nous impose les relations²

$$\mathbf{N}_\beta^s = \Omega_\beta^s, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{N}_n^s = \Omega_n^s, \quad (4.29)$$

$$-i \mathbf{A}_n^s(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{-n}^s(\mathbf{r}), \quad (4.30)$$

$$-i \mathbf{A}_\beta^s(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_\beta^s(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_\beta^s}{\mathbf{N}_\beta^s}, \quad (4.31)$$

et nous force à choisir la jauge Weyl $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ pour le potentiel vecteur (3.49). Ce choix de jauge est fait pour le champ électrique de circuit (décomposé par le modèle discret) mais ne tient pas compte de la partie charge d'espace. Par la suite, la notation en \mathbf{N} sera remplacée par les Ω et la notation en \mathbf{F} (voir éq. (3.39)) sera remplacée par les \mathbf{A} . Le coefficient de Fourier

$$\Omega_{n_1-n_2}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega_\beta^s e^{-i(n_1-n_2)\beta d} d(\beta d) \quad (4.32)$$

remplace $\mathbf{N}_{n_1-n_2}^s$ dans (4.18), et s'interprète comme le coefficient de couplage entre la cellule n_1 et la cellule n_2 dans le système (voir section 3.4).

² André et al 2013

4.5 Évolution temporelle et intégrateurs numériques symplectiques

Le formalisme hamiltonien permet d'exprimer les trajectoires dans l'espace de phase en fonction du temps. Pour décrire l'évolution des variables canoniques, la voie la plus directe passe par la construction analytique de ces fonctions, si on les connaît. Dans notre cas, on peut les calculer à partir de conditions initiales connues en utilisant leurs propriétés de variations temporelles. En effet, l'évolution pour notre système nous est entièrement donnée par les équations de Hamilton (4.24) à (4.27). Avec ces équations, on peut réaliser un intégrateur numérique³ symplectique (voir [appendice A](#)). Cet intégrateur sera caractérisé par une méthode numérique (*mapping*), aussi appelée le flot discret ou numérique (*discrete or numerical flow*), telle que $\Phi_h : \xi|_t \mapsto \xi|_{t+h}$, où h est le pas de temps, qui fait évoluer nos variables canoniques du temps t au temps $t + h$.

³Hairer et Hairer 2001; Hairer et al 2003, 2010

L'étude numérique d'un système hamiltonien permet souvent d'utiliser des méthodes symplectiques. Les plus connues (voir [appendice A](#)) sont les méthodes de Vogelaere, dites Euler symplectiques, ou de Störmer-Verlet, dites saute-monton (*leap-frog*). La discrétisation temporelle du système et son application numérique impliquent des erreurs indésirables surtout pour des simulations en « temps long » et avec des pas h grands. Grâce à leurs propriétés de conservation, les méthodes symplectiques¹ peuvent limiter ces erreurs. L'[appendice A](#) présente un exemple simple d'intégrateur symplectique pour le pendule non-linéaire.

¹Arnold 1976

Dans cette section, nous séparons notre hamiltonien total en trois générateurs élémentaires, respectivement les hamiltoniens de charge d'espace, des champs et des particules. La combinaison de chaque partie, dans une méthode à pas fractionné,² définit l'intégrateur complet et son ordre dépend de la complexité de la combinaison. On remarquera que, pour notre hamiltonien total, nous pourrions proposer une infinité de méthodes numériques différentes.

²Hairer et al 2010

4.5.1 Charge d'espace

Ici, nous ne considérons que le hamiltonien de charge d'espace (*space charge*) $H_{sc} = e \sum_{r' \neq r} \phi_{sc}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_{r'})/2$, provenant de (4.9), comme notre générateur élémentaire. Celui-ci ne modifie que les moments canoniques des particules. Il n'y a donc qu'une seule équation de Hamilton non nulle

$$\dot{\mathbf{p}}_r|^{sc} = -\frac{\partial H_{sc}}{\partial \mathbf{q}_r} = -e \sum_{r' \neq r} \nabla_r \phi_{sc}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_{r'}), \quad (4.33)$$

constante dans le temps. À partir de cette équation, on peut discrétiser l'évolution des moments canoniques entre le temps t et le temps $t + h$ comme $\mathbf{p}_r|_{t+h}^{sc} = \mathbf{p}_r|_t^{sc} + h\dot{\mathbf{p}}_r|_t^{sc}$ qui est exacte car $\dot{\mathbf{q}}_r = 0$ dans cette partie. En rappelant que $\mathbf{p}_r = \gamma_r m_e \dot{\mathbf{q}}_r + e\mathbf{A}$, et que $|_n^s|^{sc}$ et $\mathbf{q}_r|^{sc}$ sont constants dans cette méthode, on obtient

$$m_e \gamma_r|_{t+h}^{sc} \dot{\mathbf{q}}_r|_{t+h}^{sc} = m_e \gamma_r|_t^{sc} \dot{\mathbf{q}}_r|_t^{sc} + h\eta \sum_{r' \neq r} \nabla_r \phi_{sc}(\mathbf{q}_r|_t^{sc} - \mathbf{q}_{r'}|_t^{sc}), \quad (4.34)$$

avec h le pas de temps et $\eta = |e|/m_e > 0$. Plus important, l'équation (4.34) est exacte pour H_{sc} . Le modèle de charge d'espace et l'expression de son potentiel scalaire ϕ_{sc} sont donnés à la [section 4.6.2](#).

4.5.2 Propagation à froid des champs

Pour intégrer le champ de vecteur $\dot{\eta} = \eta(\eta)$, on utilisera ci-après l'équation intégrale

$$\mathfrak{H}_h(\eta) = \eta|_t + \int_0^h \eta(\mathfrak{H}_{t'}(\eta)) dt', \quad (4.35)$$

avec le flot \mathfrak{H}_h pour le pas de temps h tel que $\mathfrak{H}_h(\eta) = \eta|_{t+h}$.

Dans cette méthode, seul le hamiltonien des champs électromagnétiques (4.18) est considéré. On écrit de façon vectorielle les équations de Hamilton (4.20) et (4.19) de H_{em} comme

$$\frac{dV^{s,(n_1)}}{dt} \Big|_{\text{em}} = -\Omega_{(n_2)}^{s,(n_1)} I^{s,(n_2)} \Big|_{\text{em}}, \quad (4.36)$$

$$\frac{dI^{s,(n_1)}}{dt} \Big|_{\text{em}} = \Omega_{(n_2)}^{s,(n_1)} V^{s,(n_2)} \Big|_{\text{em}}, \quad (4.37)$$

avec les vecteurs $V^{s,(n_1)} = (V_1^s, V_2^s, \dots)^\top$, $I^{s,(n_1)} = (I_1^s, I_2^s, \dots)^\top$ et la matrice $\Omega_{(n_2)}^{s,(n_1)}$ correspondant aux coefficients de couplage entre les cellules n_1 et n_2 . On définit alors la matrice de couplage carrée

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{(n_2)}^{s,(n_1)} \\ \Omega_{(n_2)}^{s,(n_1)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Pour simplifier les écritures, on regroupe alors toutes les amplitudes temporelles V_n^s et I_n^s sous un seul vecteur $VI^{s,(n)} = (V_1^s, V_2^s, \dots, I_1^s, I_2^s, \dots)^\top$. En utilisant l'équation intégrale, on discrétise les équations d'évolution

$$VI^{s,(n)} \Big|_{t+h}^{\text{em}} = VI^{s,(n)} \Big|_t^{\text{em}} + \int_t^{t+h} \mathcal{M} VI^{s,(n)} \Big|_{t'}^{\text{em}} dt' = \exp(h \mathcal{M}) VI^{s,(n)} \Big|_t^{\text{em}}, \quad (4.39)$$

sous la forme matricielle exacte avec une exponentielle matricielle. On notera que cette représentation matricielle des couplages nous permettra d'incorporer facilement par la suite les atténuations calculées à la section 3.4.3. Dans ce chapitre, nous n'ajoutons pas encore les pertes.

On remarquera que le hamiltonien électromagnétique du système provoque aussi l'évolution des vitesses des particules. En effet, nous avons vu que le potentiel vecteur \mathbf{A} (3.49) dépend des $I_n^s(t)$ et donc de leurs variations temporelles. Or, puisque $\dot{\mathbf{p}}_r|_{\text{em}} = 0$ en ne considérant que H_{em} , on a $\mathbf{p}_r|_{t+h}^{\text{em}} = \mathbf{p}_r|_t^{\text{em}}$, qui se réécrit comme l'évolution des vitesses

$$m_e \gamma_r \Big|_{t+h}^{\text{em}} \dot{\mathbf{q}}_r \Big|_{t+h}^{\text{em}} = m_e \gamma_r \Big|_t \dot{\mathbf{q}}_r \Big|_t + e \sum_{s,n} i \mathbf{A}_{-n}^s(\mathbf{q}_r) \left(I_n^s \Big|_{t+h}^{\text{em}} - I_n^s \Big|_t^{\text{em}} \right), \quad (4.40)$$

qui est exacte pour H_{em} . On notera que les positions restent constantes et que les $I_n^s|_{t+h}^{\text{em}}$ sont donnés par (4.39). Les \mathbf{A}_n^s sont déterminés à partir de la géométrie de la structure. Nous les donnons pour une géométrie unidimensionnelle à la section 6.5 et une géométrie hélicoïdale 3D au chapitre 9.

4.5.3 Propagation des particules et couplages

Finalement, dans cette méthode, nous ne considérerons que le hamiltonien des particules (4.9) sans la charge d'espace. Puisque $\gamma_r m_e c^2$ est constant pour chaque r , cela impose aux γ_r et par extension aux normes des vitesses d'être des constantes du mouvement. Pour chaque

particule, les positions évoluent de façon exacte en suivant

$$\mathbf{q}_r|_{t+h}^{\text{el}} = \mathbf{q}_r|_t^{\text{el}} + h \dot{\mathbf{q}}_r|_t^{\text{el}}. \quad (4.41)$$

Concernant les champs, seuls les termes V_n^s évoluent. Les l_n^s sont constants puisque $\frac{\partial H_{\text{el}}}{\partial V_n^s} = 0$. On a donc l'équation de Hamilton

$$\left. \frac{dV_n^s}{dt} \right|_{\text{el}} = - \frac{\partial H_{\text{el}}}{\partial l_n^s} = - \sum_r^{N_e} i e \dot{\mathbf{q}}_r|_t^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}_n^s. \quad (4.42)$$

Sous forme intégrale, et après un changement de variable $t \mapsto \mathbf{q}_r$, on a donc le sous-pas exact

$$V_n^s|_{t+h}^{\text{el}} = V_n^s|_t^{\text{el}} - \sum_r^{N_e} i e \int_{\mathbf{q}_r|_t^{\text{el}}}^{\mathbf{q}_r|_{t+h}^{\text{el}}} \mathbf{A}_{-n}^s(\mathbf{q}_r') \cdot d\mathbf{q}_r'. \quad (4.43)$$

4.5.4 Méthode à pas fractionné

En concaténant les trois méthodes précédentes, nous trouvons les coordonnées généralisées et les moments canoniques discrets à chaque itération. La succession des sous-pas est libre. Les méthodes des trois fractions précédentes nous ont permis d'écrire deux versions de l'algorithme : une symplectique d'ordre 1 et une symplectique d'ordre 2. Le fait d'avoir des sous-pas exacts implique qu'ils sont symplectiques, de sorte que leur composition l'est également. L'appendice A présente un exemple de construction d'un intégrateur symplectique pour le pendule non-linéaire. Pour des raisons de protections industrielles, la combinaison et les subtilités des intégrateurs que nous utilisons pour DIMOHA ne sont pas dévoilées dans ce document. Nous ne discuterons pas non plus la commutation des intégrateurs.

4.6 Modèle unidimensionnel

Pour rendre praticable notre modèle discret, nous le projetons sur l'axe longitudinal z et nous proposons un modèle de charge d'espace adapté.

4.6.1 Couplage onde-particule

Pour résoudre les équations (4.24)-(4.27), nous prenons

$$A_{\beta,z}^s(z) = -i\beta \sqrt{\frac{v_g Z_c}{\Omega_\beta^s d}} e^{-i\beta z}, \quad (4.44)$$

pour le potentiel vecteur (responsable du couplage avec les particules) avec $A_\beta^s = \mathbf{A}_\beta^s \cdot \mathbf{e}_z$. Le détail des calculs pour obtenir (4.44) est donné à la section 6.5 pour une approximation 1D, et à la section 9.3 en utilisant un modèle d'hélice tridimensionnel. On remarque que (4.44) ne dépend que de la relation de dispersion (déjà indispensable pour déterminer la propagation des champs, voir section 3.4) et de l'impédance. Avec la transformée- β inverse de Gel'fand (3.15), la forme de champ du potentiel vecteur est

$$A_{n,z}^s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_{\beta,z}^s(z) e^{-in\beta d} d(\beta d). \quad (4.45)$$

Les formes de champ des $A_{n,z}^s$ ressemblent à un sinus cardinal, une fonction assez lisse. Au lieu d'utiliser les électrons individuels, on peut alors utiliser un agrégat d'électrons que

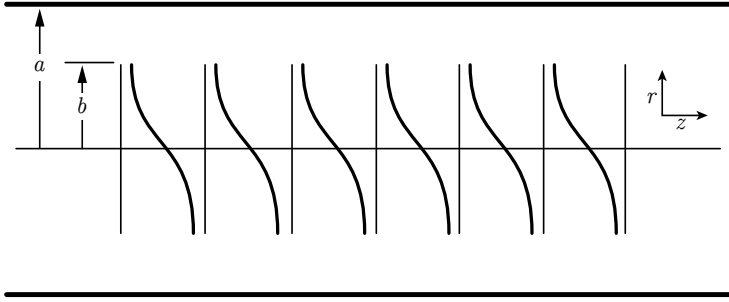


FIGURE 4.1 – Inspiré de Rowe (1965). Représentation du modèle 1D de disques pour la charge d'espace

nous appelons macro-particule. Cela nous permet de réduire drastiquement le nombre de particules de notre modèle N -corps. Chaque macro-électron de charge e et masse m_e (et d'indice k) est caractérisé par sa position q_k et sa vitesse \dot{q}_k le long de l'axe z .

4.6.2 Modèle de charge d'espace de Rowe et faisceau

Pour représenter notre charge d'espace en 1D, nous utilisons le modèle de disques de Rowe (1965) (voir figure 4.1). Ce modèle était utilisé auparavant par Tien *et al* (1955) pour les TOPs et par Webber (1958) pour des klystrons. De plus, Bernardi *et al* (2011a) envisagèrent dans leurs travaux d'utiliser ce modèle associé avec le modèle discret. Dans ce modèle, le champ de charge d'espace est donné par

$$E_{sc}(q_k) = \sum_{k' \neq k}^{N_e} \frac{2e}{\pi \epsilon_0 b^2} \exp\left(-\left|\frac{q_k - q_{k'}}{b/2}\right|\right) \text{sign}\left(\frac{q_k - q_{k'}}{b/2}\right), \quad (4.46)$$

pour un cylindre de faisceau de rayon b . Les effets du rayon de l'hélice a sont négligés dans ce modèle. La charge d'espace est dynamique car elle dépend de la position de chaque particule à un instant donné. Toutefois, dans notre algorithme (voir chapitre 5), nous pré-calculerons à l'avance la matrice de charge d'espace pour un maillage de positions données et appliquons aux particules les termes de charge d'espace liés au point du maillage le plus proche. Le temps de calcul est grandement réduit et l'erreur générée dépend de la finesse du maillage pris (voir section 5.3.4).

4.7 Avantages de notre modèle N -corps

Le modèle hamiltonien N -corps 1D présenté dans ce chapitre est une alternative aux descriptions cinétiques telles que les équations de Vlasov et aux modèles fluides. Remarquons que nous n'avons pas vu dans ce chapitre si notre approche est applicable pour des structures centimétriques voire métriques. Toutefois, comme nous le verrons avec les simulations au chapitre 5, ce modèle est significativement plus rapide que les codes PIC basés sur les descriptions cinétiques (voir les avantages du modèle discret à la section 5.8). Notamment, les termes de couplage provenant des formes de champ du potentiel vecteur sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de seulement 100 000 macro-électrons au lieu de simuler les plusieurs milliards d'électrons d'un TOP. Nous notons aussi que notre hamiltonien complet (champs et N corps) est intuitif et facile à utiliser pour quelques particules (voir son analogue à la section 1.3).

Un avantage majeur du formalisme hamiltonien est qu'il permet de construire des intégrateurs symplectiques qui respectent des propriétés de conservation et permettent d'augmenter le pas de temps numérique h sans ajouter trop d'erreur aux simulations (voir appendice A).

On notera aussi que ce modèle permet d'étudier plusieurs modes de propagation en ajoutant des termes supplémentaires grâce à l'indice s .

Le principal problème avec l'approche hamiltonienne est qu'elle ne prend pas en compte les phénomènes de dissipation, pertes et défauts qui surviennent dans les vrais tubes. Il est donc impossible de conserver la nature symplectique du système. Toutefois, après avoir caractérisé ces défauts, on pourra admettre que les erreurs générées sont faibles dans les régimes de fonctionnement normaux des tubes. Un autre problème est la nécessité d'utiliser une géométrie périodique. En effet, les champs propres de base doivent respecter la condition de Floquet. On pourra toutefois étudier les systèmes avec de légers changements de pas en considérant l'erreur générée comme faible.

Les résultats numériques tirés de notre théorie sont présentés au [chapitre 5](#). Au [chapitre 6](#), nous étendrons cette théorie au formalisme lagrangien pour pouvoir exprimer la conservation du moment total du système.

Troisième partie

Simulation d'un tube à onde progressive avec le modèle discret

“Beware of bugs in the above code ; I have only proved it correct, not tried it.”

— Donald E. Knuth’s website

5

Simulations de tubes à ondes progressives avec DIMOHA

Le *chapitre 4* a mis en place notre théorie N -corps. Dans ce chapitre, nous utilisons cette dernière pour construire l’algorithme DIMOHA et pour simuler des tubes à ondes progressives. La première partie décrit notre algorithme et la seconde présente nos résultats.

L’algorithme DIMOHA.

Pour répondre aux problématiques liées aux tubes à ondes progressives, le modèle discret a été choisi comme base théorique à des simulations numériques. Dans ce but, le modèle discret a été développé durant les thèses de [Bernardi \(2011\)](#)¹ et [Théveny \(2016\)](#)² au travers d’une collaboration entre l’industriel Thales et le laboratoire PIIM, université d’Aix-Marseille-CNRS. Récemment, une approche hamiltonienne N -corps³ fut établie car elle est mieux adaptée pour les phénomènes non-linéaires et elle permet de construire des intégrateurs symplectiques. À partir de cette théorie, nous avons écrit l’algorithme DIMOHA⁴ (pour *DIScrete MOdel with Hamiltonian Approach*) avec le financement du CNES, de Thales AVS/MIS et du PIIM. Parce que cet algorithme présente un intérêt industriel pour les fabricants de TOPs et les opérateurs télécoms, il a été déposé à l’agence de protection des programmes (APP). En accord avec les différents co-financeurs, certains détails sur le fonctionnement de DIMOHA sont volontairement omis.

¹Bernardi *et al* 2011a,b

²Théveny *et al* 2016

³André *et al* 2013; Minenna 2016; Minenna *et al* 2018

⁴Minenna 2017; Minenna *et al* 2019d

5.1 Approches usuelles pour simuler un TOP

Bien que la technologie ait plus de 70 ans, la modélisation d’un tube à ondes progressives (TOP) reste de nos jours un défi, notamment à cause du nombre de paramètres mis en jeu et parce qu’en régime non-linéaire, les hautes puissances à haute fréquence génèrent des instabilités critiques. Ce phénomène s’amplifie avec le développement de nouveaux tubes à plus hautes fréquences. Actuellement, pour modéliser les TOPs, il existe deux domaines de

résolution : les codes en domaine temporel (*time domain*) et ceux en domaine fréquentiel (*frequency or steady-state domain*).

5.1.1 Codes en domaine temporel

En principe, les codes en domaine temporel permettent d'étudier la majorité des problèmes d'un TOP, notamment les réflexions, oscillations, non-linéarités, générations d'harmonique et de raies d'intermodulation, distorsions des signaux multi-fréquences. Généralement, ces codes utilisent un maillage 3D d'éléments finis (millions de points) pour discrétiser les équations de Maxwell couplées à une dynamique *particle-in-cell* (PIC) du faisceau se fondant sur les théories cinétiques. Comme exemples, on peut citer les codes CST,¹ KARAT,² MAFLA,³ ou MAGIC3D.⁴ Le problème majeur de ces codes est le temps de calcul faramineux rendant cette approche peu attrayante notamment pour des activités industrielles ou du traitement du signal (requérant des longues simulations de plusieurs micro- voire millisecondes physiques, soit des millions voire des milliards de pas de temps). En plus de cela, à chaque nouveau tube, le maillage doit être refait, ce qui limite la flexibilité de ces codes.

Pour donner un ordre de grandeur, il a fallu au minimum 12 heures à Safi *et al* (2018) avec le code PIC CST pour simuler 5 ns d'un TOP à hélice, sachant que très peu de modélisations de TOP à hélice ont été réalisées à ce jour à cause de la difficulté pour réaliser le maillage. Et il faut 1000 heures⁵ avec MAGIC3D pour simuler 10 ns d'un TOP à cavités couplées (simulation plus longue qu'une hélice). La première étape pour caractériser un TOP est de réaliser un diagramme AM/AM (puissance de sortie en fonction de la puissance d'entrée pour une fréquence), ce qui nécessite une vingtaine de simulations (durant entre 5 et 10 ns chacune), pour chaque fréquence. Les codes en domaine temporel actuels requièrent donc plusieurs mois d'utilisation. À notre connaissance, ces codes n'ont jamais été utilisés pour reproduire la distorsion de signaux télécoms dans un TOP.

¹Safi *et al* 2018; CST

²Tarakanov 1992

³Weiland *et al* 1997

⁴Goplen 1995

⁵F. André, communication privée

5.1.2 Codes en domaine fréquentiel

Les codes en domaine fréquentiel sont beaucoup plus rapides et donc s'affranchissent du coût de calcul. En plus, les approches fréquentielles sont plus flexibles à un changement de géométrie du tube. Ces codes reposent généralement sur des modèles d'enveloppe ou sur des modèles de circuit équivalent (voir section 8.1). On peut citer comme exemples les codes d'enveloppe MVTRAD,⁶ CHRISTINE⁷ ou BWIS.⁸ Pourtant, ces codes ont d'importantes difficultés à simuler les TOPs (voir section 8.1), notamment en régime non-linéaire et en bord de bande. Par définition, ces codes sont inadaptés pour simuler des signaux multi-porteuses et il leur est impossible de reproduire les réflexions et oscillations d'un tube et de simuler des signaux télécoms.

⁶Waller 1999

⁷Antonsen and Levush 1997

⁸Li *et al* 2009

On notera que certains codes comme MVTRAD sont des hybrides avec une représentation en enveloppe des champs et un faisceau *particle-in-cell* (simulé à chaque cellule sur une période temporelle). Cela rend MVTRAD capable d'étudier les saturations et une ou deux périodes de piégeage en régime non-linéaire. Toutefois, la nature fréquentielle de la représentation des champs dans MVTRAD le rend sujet aux problématiques de ce domaine (voir section 8.1).

5.2 Algorithme DIMOHA

Comme alternative aux codes PIC temporels et aux codes fréquentiels, nous proposons une troisième option : nous utilisons la dynamique *N*-corps du chapitre 4 pour construire

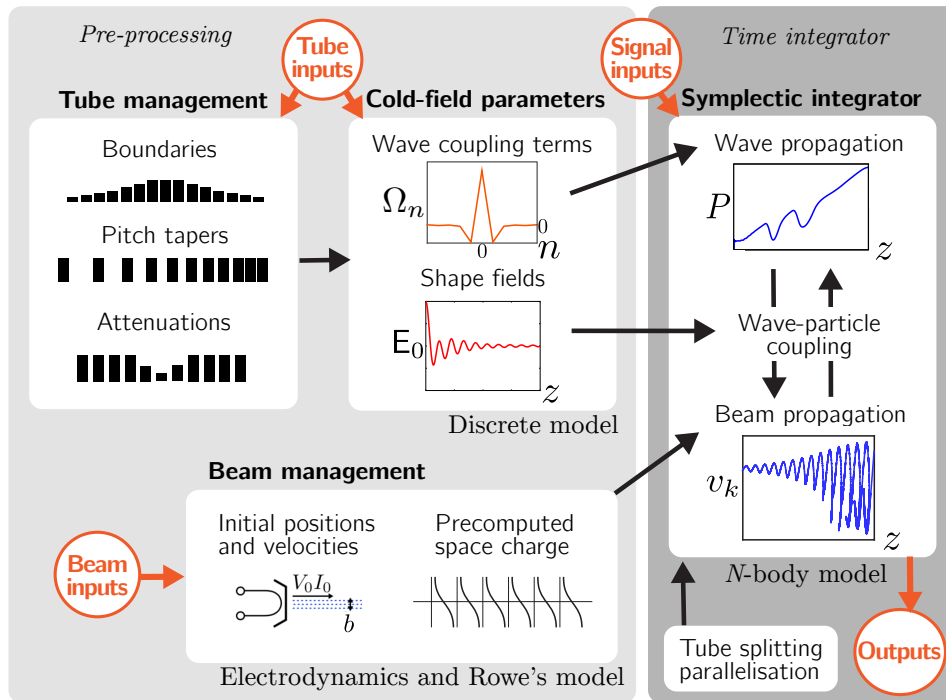


FIGURE 5.1 – Minenna *et al* (2019d). Déroulement des processus de DIMOHA. L’algorithme est divisé en trois parties : (i) le pré-traitement qui calcule les paramètres à froid (*cold-field parameters*); (ii) l’intégrateur temporel; (iii) le post-traitement (non représenté) qui réalise les diagnostics comme le calcul de la puissance. Les entrées et sorties sont listées à la table 5.1.

un code en domaine temporel, l’objectif étant d’avoir un code significativement plus rapide qu’un code PIC pour la même précision. Pourtant, par nature, la description N -corps est jugée impraticable pour de vrais tubes. Cette description implique normalement un plus grand nombre de degrés de liberté que les PICs car la dynamique de toutes les particules doit être prise en compte. Pour les structures périodiques, comme les TOPs, on surmonte cette lenteur grâce au modèle discret qui réduit drastiquement le nombre de degrés de liberté. Pour un TOP spatial, la réduction est extrême ($\sim 100\,000$ degrés de liberté) en comparaison des PICs qui impliquent plusieurs millions de degrés de liberté. À cela s’ajoute le fait que notre approche est 1D, alors que généralement les codes temporels doivent simuler la totalité de la ligne à retard en 3D.

Notre modèle de réduction, présenté au chapitre 3, est combiné avec un modèle hamiltonien N -corps auto-cohérent, présenté au chapitre 4. L’approche hamiltonienne nous permet un meilleur contrôle sur les propriétés de conservation dont les invariants de Poincaré-Cartan.¹ À partir de ce modèle, nous avons construit un algorithme symplectique² DIMOHA³ pour *Discrete MOdel with HAmiltonian approach*.

L’algorithme DIMOHA reproduit l’interaction onde-particule dans la ligne à retard d’un TOP et inclut diverses caractéristiques des tubes industriels (dont le *pitch tapering*, les *severs* et les pertes réparties). Sa vocation principale est de servir à la recherche sur l’interaction onde-particule mais aussi d’être un outil pour la conception de TOPs et l’analyse de signaux par des opérateurs télécoms. Un premier prototype opérationnel a été construit sur Matlab⁴ (ou son alternative libre Octave⁵). Pour améliorer le temps de calcul, la version actuelle est écrite en fortran. Cette version est modifiée pour prendre en compte les caractéristiques des tubes industriels. Elle utilise les bibliothèques MPI,⁶ pour la parallélisation processeurs/CPU

¹Arnold 1976

²Hairer *et al* 2010; Saitoh *et al* 2001

³Minenna *et al* 2019c

⁴www.mathworks.com

⁵www.gnu.org/software/octave/

⁶www.open-mpi.org

Inputs	
Tube (per cell) :	Pitch d , dispersion relation $\omega(\beta)$, impedance $Z_c(\beta)$ and attenuation α_n
Beam (cathode) :	Current I_0 , potential V_0 , beam diameter b
Signal :	Injected 1D electric field in time at the tube inlet
Simulation parameters	
t_{\max}	Duration of the interaction
h	Time step size
δ	Initial spacing between macro-electrons
N_{os}	Number of grid meshes per cell
N_{ph}	Range of coupling between cells
Outputs	
1D electric field in time inside the tube	
1D distribution function of electrons (positions, velocities)	

TABLE 5.1 – Entrées (*inputs*) et sorties (*outputs*) de DIMOHA. En émission monochromatique, seules la fréquence et la puissance de l'onde injectée sont requises.

du code, Lapack, pour les opérations matricielles, et `fftw`, pour les transformées de Fourier discrètes (base des transformées de Gelfand).

La [figure 5.1](#) présente le déroulement des deux premières parties de DIMOHA. La première partie (*pre-processing*) calcule les paramètres à froid du modèle discret à partir de la géométrie du tube. La seconde partie (*time integrator*) est le cœur de l'algorithme : l'intégrateur temporel. Cet intégrateur modélise l'interaction onde-particule dans la ligne à retard jusqu'à un temps t_{\max} donné. Une dernière partie (*post-processing*) effectue les diagnostics finaux après l'interaction. Les entrées (*inputs*) et sorties (*outputs*) de DIMOHA sont données par la [table 5.1](#).

5.3 Initialisation des paramètres à froid

La première partie de DIMOHA, décrite dans cette section, sert au calcul des paramètres à froid (indépendants du temps) et au pré-calcul (voir ci-dessous) de la charge d'espace en utilisant les données du tube et du faisceau (*tube and beam inputs*) de la [table 5.1](#). Ces entrées s'obtiennent soit à l'aide d'un solveur numérique, soit analytiquement, soit à partir de mesures expérimentales.

La première étape de DIMOHA est de lire les entrées. Les entrées "faisceau", "signal" et les paramètres de simulations sont lus par la routine `load_input`. Les entrées "tube" sont lues dans des routines `load_bil` et `load_don` (les *.bil* et *.don* sont les extensions utilisées par Thales pour caractériser leurs tubes).

5.3.1 Maillage 1D du tube

Les simulations sont réalisées en utilisant deux maillages spatiaux le long de l'axe z , prenant en compte la variation de pas (*pitch tapering*) et de rayon et générés dans la routine `cons_taper`. Le premier maillage, nommé z_{cell} et de taille n_{cell} , contient la position de toutes les cellules. Le second maillage est un sur-échantillonnage (*oversampling*, noté os) du premier. Pour chaque cellule, on redéfinit N_{os} nouveaux points pour créer la grille z_{field} de taille n_{field} . On remarque que pour les TOPs spatiaux, la valeur de N_{os} n'a pas besoin d'être très grande ($N_{\text{os}} = 20$ dans nos simulations). L'avantage d'un facteur de sur-échantillonnage N_{os} identique pour chaque cellule du tube est qu'il permet de gérer plus facilement les variations de pas des tubes industriels.

5.3.2 Termes de couplage et atténuateurs

Comme nous l'avons vu à la [section 3.4](#), la propagation des champs électromagnétiques avec le modèle discret s'interprète comme une chaîne d'oscillateurs harmoniques dont la portée peut être tronquée au N_{ph} -ième terme. La principale modification de DIMOHA par rapport à la théorie est l'utilisation de tubes industriels dont les pas et les rayons de l'hélice peuvent varier, brisant ainsi la périodicité du système. On estime que la brisure reste assez faible. Toutefois, chaque nouvelle période spatiale (i) du tube aura une relation de dispersion $\Omega_{\beta}^{s,(i)}$ et une impédance $Z_c^{(i)}(s, \beta)$ différentes. Pour garder la symétrie entre les couplages des cellules n_1 vers n_2 (qui doivent être égaux aux couplages des cellules n_2 vers n_1), on réécrit (3.59) en imposant à la main la pondération suivante

$$\Omega_{(n_2)}^{(n_1)} = \frac{\Omega_{n_1-n_2}^{(n_1)} + \Omega_{n_1-n_2}^{(n_2)}}{2}, \quad (5.1)$$

dans l'équation (4.36).

Pour le mode $s = 0$, la routine `coldField_eachCell` calcule alors les coefficients de couplage $\Omega_{(n)}^{s,(i)}$ à chaque cellule i , à partir de sa relation de dispersion $\Omega_{\beta} = \sum_{n=-N_{\text{ph}}}^{N_{\text{ph}}} \Omega_n e^{in\beta d}$ et en utilisant une méthode des moindres carrés.¹ La portée de couplage N_{ph} est estimée à la [section 3.4.2](#). Pour calculer avec précision les Ω_n , notre modèle requiert une relation de dispersion très large (p. ex. contenant toutes les harmoniques pouvant apparaître). Les points manquants sont interpolés par une méthode linéaire ou cubique. ¹Théveny 2016

Les coefficients d'atténuation α_n utilisés dans l'équation (3.65) sont introduits sous forme d'une matrice diagonale $\alpha_{(n)}^{(i)}$. Ces atténuations prennent en compte les atténuateurs locaux (*severs*) et les pertes réparties selon les données du tube. Puisque la dynamique de la propagation des champs est analogue à une chaîne d'oscillateurs harmoniques infinie (voir [section 3.4](#)), une coupure abrupte du tube aux bords mènerait à une réflexion totale du signal. Pour éviter cela, on utilise une couche absorbante analogue à une *perfectly matched layer* (PML) se traduisant pas l'allongement virtuel du TOP pour ajouter des termes α_n croissant à mesure que l'on s'éloigne du vrai tube. Pour un TOP spatial, l'atténuation progressive est donnée par

$$\alpha_n = \alpha_{\text{PML}} \cos^2 \left(\frac{(n-j)\pi}{2n_{\text{PML}}} \right) \quad \text{si } 1 \leq n \leq n_{\text{PML}} \text{ ou } -n_{\text{PML}} \leq n - n_{\text{cell}} \leq 0, \quad (5.2)$$

avec $j \in \{1, n_{\text{cell}}\}$, α_{PML} un coefficient d'atténuation assez grand et n_{PML} la portée de la partie fictive du tube telle que $n_{\text{PML}} + 1 = n_{\text{in}}$ la première cellule du tube simulé et $n_{\text{cell}} - n_{\text{PML}} - 1 = n_{\text{out}}$ la dernière cellule du tube. En accord avec l'équation (4.38) de la propagation des champs, on définit finalement la matrice carrée de couplage dans DIMOHA

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\alpha_{(n)}^{(i)} & -\Omega_{(n)}^{(i)} \\ \Omega_{(n)}^{(i)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

de taille $(2n_{\text{cell}} \times 2n_{\text{cell}})$, construite dans la routine `coldField_matCouplage`. La matrice de couplage \mathcal{M} est la plus importante de notre système avec la matrice $\mathcal{A}_{(n)}^{(z_{\text{field}})}$ ci-dessous.

5.3.3 Formes de champs

Avant de calculer les amplitudes temporelles, nous devons obtenir les formes de champ de base $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n, \mathbf{A}_n$ pour le mode dominant $s = 0$. En 1D, le système est projeté le long de l'axe z et on néglige le champ magnétique interne ($\mathbf{H}_{\perp,n}(z) = 0$, voir (9.30), (9.31) et (9.32)). Dans

DIMOHA, les $E_{n,z}(z)$ et $A_{n,z}(z)$ sont représentés sous forme de matrices $\mathcal{E}_{(n)}^{(z_{\text{field}})}$ et $\mathcal{A}_{(n)}^{(z_{\text{field}})}$, toutes deux de taille $(n_{\text{field}} \times n_{\text{cell}})$ et construites dans la routine `coldField_eachCell`. Ces matrices sont obtenues à partir d'une transformation de Fourier rapide (FFT) des équations (6.73) et (6.74) sur l'échantillon de $\beta d \in [0, \pi]$. La matrice $\mathcal{E}_{(n)}^{(z_{\text{field}})}$ ne servira qu'à réécrire le champ électrique

$$E_z(z_{\text{field}}, t) = \mathcal{E}_{(n)}^{(z_{\text{field}})} \mathbf{V}^{(n)}(t), \quad (5.4)$$

pour $s = 0$, en accord avec (3.44), avec le vecteur $\mathbf{V}^{(n_1)} = (V_1, V_2, \dots)^T$. La matrice $\mathcal{A}_{(n)}^{(z_{\text{field}})}$ quant à elle sera utilisée dans l'intégrateur temporel.

5.3.4 Faisceau et charge d'espace

On suppose que le faisceau au niveau de la cathode ($z = 0$) est mono-cinétique et est composé de macro-électrons émis de façon homogène. En paramètre d'entrées de DIMOHA, on posera δ la distance spatiale (espacement) initial entre chaque macro-électron. Plus δ est grand, moins il y a de macro-électrons dans la simulation et plus leur charge est grande. La charge électrique négative des macro-électrons du faisceau est $e = -|I_0|\delta/v_{\text{el},0}$, avec I_0 le courant de cathode. Même si la correction relativiste est faible, notre algorithme est construit avec des variables relativistes. La vitesse initiale du faisceau est

$$v_{\text{el},0} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{|eV_0|}{m_e c^2}\right)^2}, \quad (5.5)$$

donnée par l'équation (2.2), avec V_0 le potentiel de cathode, e la charge d'un électron et m_e la masse d'un électron. On a donc imaginé un faisceau monocinétique composé d'une ligne de macro-électrons également espacés. Il est possible de modifier individuellement la vitesse de chaque macro-électron pour générer, p. ex., un faisceau pulsé d'électrons ou avoir une fonction de distribution gaussienne. Le faisceau est initialisé dans la routine `cons_Beam` de DIMOHA.

Pour la charge d'espace, nous utiliserons le modèle de Rowe (voir section 4.6.2) dans la routine `cons_SpaceCharge` de DIMOHA. À partir de l'équation (4.46)¹, nous construisons une matrice de charge d'espace, de taille $(n_{\text{field}} \times n_{\text{field}})$,

$$\text{SC}_{(z'_{\text{field}})}^{(z_{\text{field}})} = \frac{2e}{\pi \epsilon_0 b^2} \exp\left(-\left|\frac{z_{\text{field}} - z'_{\text{field}}}{b/2}\right|\right) \text{sign}\left(\frac{z_{\text{field}} - z'_{\text{field}}}{b/2}\right), \quad (5.6)$$

avec e la charge des macro-électrons et b le rayon du faisceau. Cette matrice est statique et pré-calculée avant l'intégration sur le maillage z_{field} . Durant l'intégration temporelle, après chaque déplacement des particules, on leur assigne la position la plus proche dans la grille z_{field} . Ainsi, la force de la charge d'espace est calculée au point du maillage le plus proche de leur position. Cette astuce permet de calculer très rapidement les effets de charge d'espace sans introduire de variable dynamique. Notre modèle de disque reste toutefois assez approximatif mais dans un TOP le champ de circuit domine largement le champ de charge d'espace.

5.4 Intégrateur et diagnostics

La seconde et principale partie de DIMOHA est son intégrateur temporel. Cet intégrateur résout les équations d'évolution (4.24)-(4.27) du système et nous donne les amplitudes

$V_n(t)$, $I_n(t)$ des champs et les positions $q_k(t)$ et vitesses $\dot{q}_k(t)$ 1D des macro-particules. L'évolution est calculée de $t = 0$ à t_{\max} pour un pas de temps h donné. En régime monochromatique, h est donné par $h = 1/(N_{\Delta t}F)$, avec $N_{\Delta t}$ le nombre de divisions temporelles par période $1/F$, et t_{\max} est posé assez grand pour que l'interaction onde-particule se stabilise. Dans ce régime, l'onde est excitée dans l'intégrateur en posant $V_{n_{\text{in}}}(t) = U \cos(2\pi Ft)$, à la cellule d'entrée n_{in} pour la fréquence F voulue avec le U adéquat en fonction de la puissance d'entrée P_{in} voulue. En régime multi-porteuses, on pose $V_{n_{\text{in}}}(t) = \sum_{\chi} U_{\chi} \cos(2\pi F_{\chi}t)$, avec les fréquences et puissances voulues.

Avec le formalisme hamiltonien, nous avons construit un algorithme symplectique¹ assurant sa robustesse et permettant d'augmenter le pas de temps h sans induire trop d'erreurs. L'algorithme est parallélisé en multi-processeurs. Cette parallélisation est réalisée en divisant spatialement le tube entre les *threads* alloués auxquels on associe une section de l'espace correspondante $z_{\text{cell}}^{\text{thread}}$ et $z_{\text{field}}^{\text{thread}}$ de nos deux maillages. ¹Arnold 1976

La dernière partie de DIMOHA nous sert pour les diagnostics, notamment le calcul de la puissance, du spectre de fréquence et de la fonction de distribution (position, vitesse) du faisceau. La puissance électromagnétique est calculée pour chaque fréquence par (6.44) en utilisant une transformation de Fourier rapide en temps du champ électrique sur une période temporelle $1/F$.

Pour valider DIMOHA, nous avons effectué plusieurs validations (voir ci-après).

5.5 Comparaison avec un code fréquentiel

En domaine temps, une comparaison entre DIMOHA et MVTRAD a été effectuée.² MVTRAD³ ²Minenna et al 2018 est un code fréquentiel spécialisé conforme à l'état de l'art et utilisé par Thales pour la conception de TOPs depuis une vingtaine d'année (ce code est régulièrement amélioré). La propagation des champs est représentée par un modèle d'enveloppe comme celui présenté à la section 8.1.2. Le faisceau est représenté par un modèle cinétique PIC 2.5D où le faisceau est recalculé pour chaque cellule sur une période de temps RF. Cela rend MVTRAD capable d'étudier les premières zones de piégeage en régime non-linéaire (et donc de calculer la puissance à saturation d'un TOP). ³Waller 1999

Notre comparaison est présentée au chapitre 6 car nous utilisons les mêmes simulations pour analyser le moment canonique et la puissance des champs électromagnétiques avec le modèle discret. Cette comparaison est réalisée pour un tube sans défaut, sans pertes ni atténuateurs et sans variations de pas (*taper*). Seule l'interaction onde-particule et la charge d'espace sont considérées. Le régime choisi est en milieu de bande de transmission du tube et plus précisément dans un régime où MVTRAD marche très bien. Les paramètres initiaux sont ajustés pour observer une oscillation de piégeage (MVTRAD ne converge plus au-delà).

5.6 Comparaison avec un tube industriel à hélice

Notre première comparaison⁴ avec des mesures a été réalisée pour un tube commercial de Thales : un TOP à hélice en bande Ku (10–13 GHz) avec variation du pas, qui possède des atténuateurs locaux (*severs*) et 140 W de puissance de sortie. Ce tube est utilisé dans des satellites de communication. ⁴Minenna et al 2019c,d

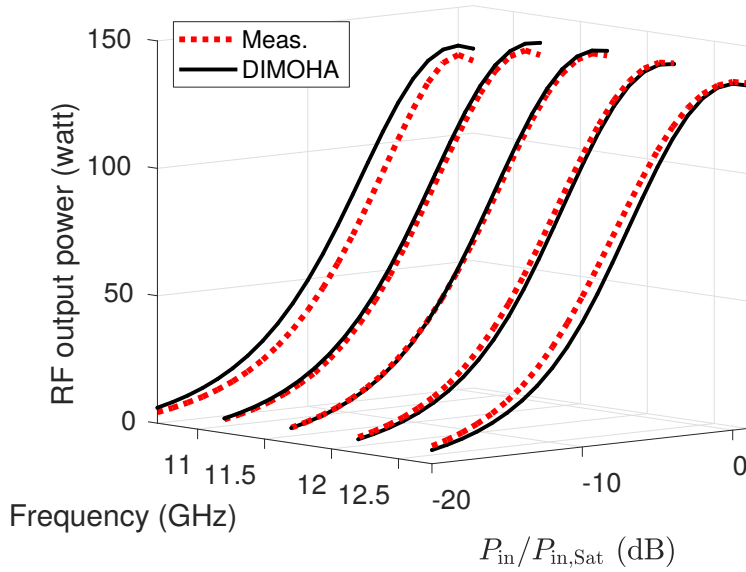


FIGURE 5.2 – Minenna *et al* (2019d). Comparaison de DIMOHA (lignes noires) et des mesures à partir d'un TOP commercial en bande Ku (lignes pointillées rouges). La puissance de sortie est donnée pour différentes fréquences en fonction de la puissance d'entrée. L'axe horizontal se lit comme $10 \log_{10}(P_{in}/P_{in,sat})$ en dB avec $P_{in,sat}$ la puissance à saturation. L'erreur typique de la mesure est de 1 W.

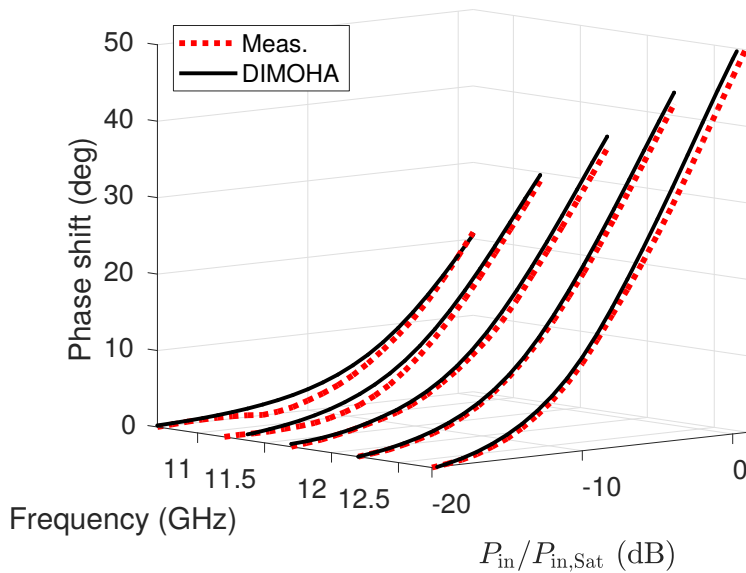


FIGURE 5.3 – Minenna *et al* (2019d). Même comparaison que pour la figure 5.2. Le déphasage non-linéaire est donné pour différentes fréquences en fonction de la puissance d'entrée. L'erreur typique de la mesure est de 0.5° .

5.6.1 Diagrammes AM/AM et AM/PM

La figure 5.2 montre la puissance de sortie pour différentes fréquences en fonction de la puissance d'entrée (diagramme AM/AM). La puissance est la première caractéristique qui définit un amplificateur. $P_{in,sat}$ représente la puissance à saturation (puissance maximum). La figure 5.3 montre le déphasage de l'onde à diverses fréquences (diagramme AM/PM). La phase de sortie est la deuxième caractéristique qui définit un amplificateur pour les télécoms. Dans notre contexte, le déphasage représente la différence de phase pour une puissance d'entrée P_{in} donnée par rapport à la puissance d'entrée à -20 dBm sous la saturation $P_{in,sat}$.

Le tube à hélice utilisé possède environ 200 périodes. On doit donc calculer 200 couples $V_n(t), I_n(t)$. Pour les simulations des figures 5.2 et 5.3, il y a 20 points pour chaque fréquence. Nous avons pris un espacement de $\delta = 10^{-6}$ m. De ce fait, la simulation implique approximativement 150 000 macro-électrons, menant à un total de $150\,000 + 200$ degrés de liberté. Nos posons $t_{max} = 5$ ns avec le pas de temps $h = 334$ fs. La résolution choisie des δ et h est assez fine pour assurer la convergence numérique de la puissance à ± 0.1 W. Il a fallu moins de 10 minutes à DIMOHA pour simuler chaque point avec un ordinateur person-

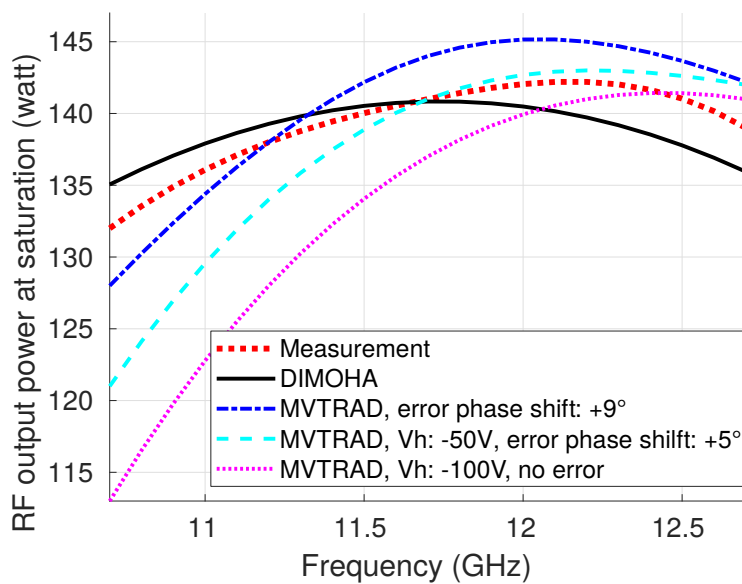


FIGURE 5.4 – Comparaison entre DIMOHA (courbe noire continue), MVTRAD (courbes traitillées bleue, cyan et magenta) et des mesures d'un TOP à hélice en bande Ku (courbe pointillée rouge). L'accord entre les mesures et DIMOHA est excellent. Pour MVTRAD, le potentiel de cathode V_0 est ajusté par un petit V_h entre 0 et -100 V pour avoir, soit la bonne puissance mais avec un déphasage plus important, soit la bonne phase mais alors la puissance de sortie dévie par rapport à la mesure. Comme le montre la figure 5.3, le déphasage est identique à la mesure avec DIMOHA.

nel (8 *threads* avec un Intel®Xeon® E5640 à 2.66 GHz). Sur un cluster HPC,¹ cela a pris ¹MESO 2 minutes (32 *threads* avec un Intel®Xeon® Gold 6142 à 2.6 GHz). Ce temps de calcul est un net progrès en comparaison avec les 12 heures requises par point par Safi *et al* (2018) avec CST pour le même tube et la même précision.

5.6.2 Comparaison avec un code fréquentiel

Nous proposons aussi une comparaison de ce même tube avec MVTRAD.¹ Ce dernier est ¹Waller 1999 un code industriel en domaine fréquentiel utilisé pour le design de TOP. Pourtant, ce code n'est pas exempt des problématiques des modèles fréquentiels présentées à la section 8.1.3 comme nous le montrons ci-après.

La figure 5.4 présente la puissance à saturation pour différentes fréquences de la bande passante du même tube en bande Ku. La comparaison est faite entre les mesures, DIMOHA et MVTRAD. Comme le montre cette figure, le potentiel de cathode V_0 pour MVTRAD est ajusté entre 0, -50 et -100 V pour les trois courbes traitillées. Cette modulation modifie la vitesse initiale du faisceau et donc modifie le couplage onde-particule. Comme le montre la figure 5.4, avec MVTRAD, soit on reproduit correctement la puissance de sortie à saturation du TOP, soit on reproduit le déphasage généré par l'appareil. L'ajustement de V_0 permet de retrouver un bon déphasage au détriment de la puissance. Cet ajustement est fait de manière empirique. D'un autre côté, DIMOHA reproduit extrêmement bien les mesures, tant pour la puissance que pour le déphasage (voir les figures 5.2 et 5.3).

Le TOP à hélice en bande Ku que nous utilisons est un des tubes que MVTRAD reproduit le mieux. On conclut donc que DIMOHA est plus précis que MVTRAD. On notera toutefois que chaque point avec MVTRAD prend environ 20 secondes à calculer et que, dans ce cas précis, les déviations montrées à la figure 5.4 restent assez faibles.

5.6.3 Simulations multi-porteuses

L'un des avantages principaux de DIMOHA est que la décomposition des champs électromagnétiques en temps (et non pas en enveloppe) permet à l'algorithme de travailler avec toutes sortes de signaux (dont les signaux de télécommunication) en régime non linéaire. Pour démontrer cet aspect, nous proposons un cas relativement simple : un signal avec deux

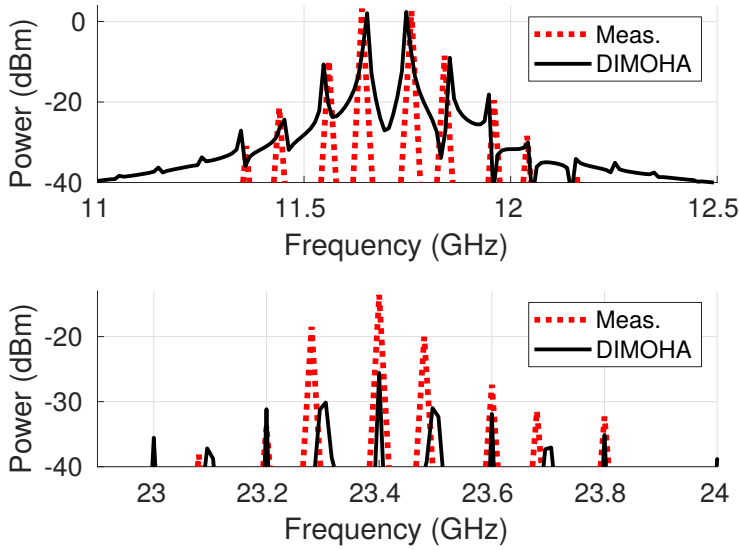


FIGURE 5.5 – Minenna *et al* (2019d). Comparaison de DIMOHA (lignes noires) et des mesures à partir d'un TOP commercial en bande Ku (lignes pointillées rouges). La puissance de sortie moyenne est donnée en fonction de la fréquence après $t_{\max} = 100$ ns. Les entrées sont $F_1 = 11.65$ GHz et $F_2 = 11.75$ GHz et les deux fréquences ont la même puissance d'entrée $P_{\text{in}} = -10$ dBm. Le graphe du dessus montre les deux fréquences principales et toutes les harmoniques générées à proximité. Celui du dessous montre les secondes harmoniques.

porteuses, une à $F_1 = 11.65$ GHz et l'autre à $F_2 = 11.75$ GHz. On pose alors

$$V_{\text{in}}(t) = U(\cos(2\pi F_1 t) + \cos(2\pi F_2 t)), \quad (5.7)$$

pour la puissance d'entrée $P_{\text{in}} = -10$ dBm. La figure 5.5 montre le spectre de sortie pour ce cas en utilisant le même tube en bande Ku qu'avant. Ici, la puissance de sortie est obtenue en utilisant l'équation (6.44), où l'enveloppe du champ électrique \tilde{E}_z est obtenue en faisant la transformée de Fourier rapide (FFT) de l'équation (3.42)¹ sur $t_{\max} = 100$ ns (en soustrayant les 5 premières ns pour laisser le signal se stabiliser). On remarque que DIMOHA reproduit l'amplification des deux raies fondamentales à F_1 et F_2 (les deux raies les plus intenses de la figure du dessus), mais aussi toutes les raies d'intermodulation (figure du dessus) et toutes les secondes harmoniques (figure de dessous), en accord avec la mesure. Pour les secondes harmoniques, la calibration du banc d'essai n'est pas optimale à ces fréquences. Pour $t_{\max} = 100$ ns avec un pas de temps $h = 83$ fs, le temps de calcul avec DIMOHA est de 5 heures avec un ordinateur personnel (8 threads avec un Intel®Xeon® E5640 à 2.66 GHz).

Ce cas simple ouvre la porte vers des cas plus complexes comme du multi-porteuses avec des raies d'émissions plus espacées ou de la modulation digitale comme la modulation par changement de phase (*phase-shift keying* (PSK)).

5.7 Comparaisons avec des tubes à cavités couplées

Puisque nous utilisons le modèle discret unidimensionnel, aucune suppositions ne sont faites sur la structure de la ligne à retard. DIMOHA est donc capable de simuler d'autres types de géométrie, tant que nous avons la relation de dispersion et l'impédance des cellules. On utilise maintenant DIMOHA pour modéliser deux tubes à cavités couplées différents, dont un TOP à guide replié.

5.7.1 Tube à guide replié TWEETHER

Le projet TWEETHER² est un projet européen Horizon 2020 regroupant plusieurs organismes universitaires et industriels, dont Thales. La finalité du projet est le développement des technologies et des réseaux de cinquième génération (5G) en Europe. Pour amplifier les ondes millimétriques, un prototype de TOP (le tube TWEETHER) en bande W (92–96

$${}^1 E_z = \sum_n V_n E_{-n}$$

²TWEETHER; André *et al* 2017, 2018

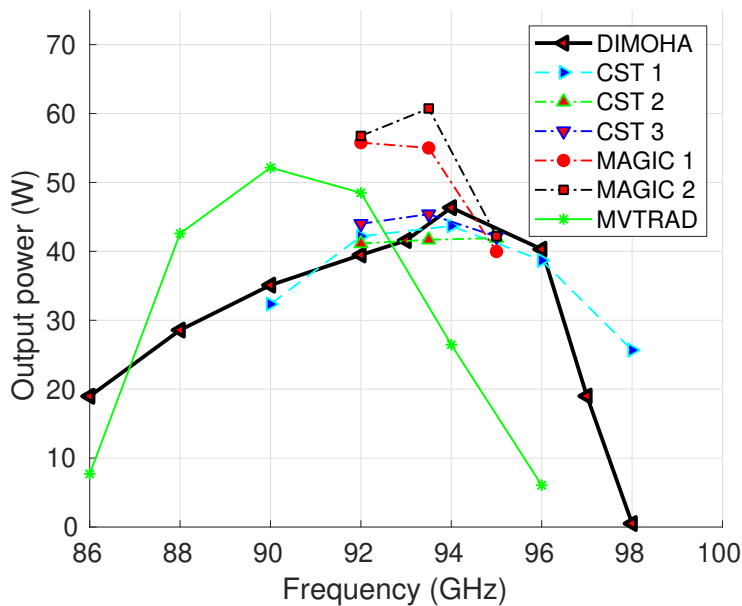


FIGURE 5.6 – Puissance de sortie à saturation pour différentes fréquences à partir des codes DIMOHA, CST et MAGIC3D en domaine temporel et MVTRAD en domaine fréquentiel. Pour chaque simulation, les coefficients d'atténuations sont légèrement modifiés. Les simulations DIMOHA et MVTRAD utilisent les mêmes coefficients que la simulation CST 1. Les simulations CST 2 et MAGIC3D 1 utilisent les mêmes coefficients. De même pour CST 3 et MAGIC3D 2.

GHz) est en développement. Actuellement, les dimensions et caractéristiques du tube sont établies et des prototypes sont en fabrication. Ce tube est un TOP à guide replié (*folded waveguide*) de 130 mm avec un atténuateur (*sever*) central. La relation de dispersion³ du tube, son impédance et ses pertes ont été estimées par un solveur numérique.

³André et al 2017

Comme le montre la figure 5.6, le tube TWEETHER a été simulé en régime non-linéaire à l'aide de trois codes temporels distincts : les codes PIC¹ CST² et MAGIC3D,³ et DIMOHA, et aussi simulé avec le code fréquentiel MVTRAD. Pour les trois simulations avec CST et les deux avec MAGIC3D, les conductivités du mur en cuivre (coefficients d'atténuations) sont légèrement modifiées. Ces coefficients sont identiques pour les simulations DIMOHA, MVTRAD et CST 1 ; les simulations CST 2 et MAGIC3D 1 ; et les simulations CST 3 et MAGIC3D 2. DIMOHA prédit une très large bande passante (86–97 GHz). À 95 GHz, l'accord entre les trois simulations est excellent. Entre 90 et 96 GHz, l'accord avec CST reste très bon malgré l'écart avec MAGIC3D. Nous pensons que les désaccords entre CST et DIMOHA à 97-98 GHz proviennent du manque d'information d'entrée de ce dernier. La relation de dispersion n'a pas été calculée au-delà de 98 GHz, or le modèle discret requiert le plus de point possible après pour calculer les coefficients de couplage (voir section 3.4). Les points manquants ont été extrapolés, ce qui est un processus délicat. Un des points importants de la figure 5.6 est que les simulations avec MVTRAD montrent un fort décalage de la bande passante qui n'est pas observé avec par les codes temporels ainsi qu'une plus faible largeur de bande. Pour les guides repliés, MVTRAD est connu⁴ pour être moins fiable.

¹F. André, communication privée

²CST

³Goplen 1995

⁴F. André, communication privée

La figure 5.7 présente la puissance de sortie (diagramme AM/AM) et le déphasage de sortie (diagramme AM/PM) en fonction de la puissance d'entrée pour le tube TWEETHER à $F = 93$ GHz simulé avec DIMOHA. La résolution des simulations est affinée pour assurer la convergence du code à ± 0.1 W. La figure 5.8 montre la puissance électromagnétique de la fréquence fondamentale ($F = 93$ GHz) en fonction de la position z dans la ligne à retard pour $P_{in} = 8$ dBm. L'atténuateur central (*sever*) positionné entre 55 et 64 mm réduit l'intensité de l'onde. Les oscillations de l'onde à 0 mm sont typiques de DIMOHA. En effet, l'excitation de l'onde $V_{n_{in}}(t) = U \cos(2\pi Ft)$, avec l'amplitude U adéquate, se fait sur la totalité d'une cellule. Cela génère de faibles oscillations indésirables près de la cellule d'entrée. Pour éviter ces oscillations, nous avons testé, par ailleurs et avec succès, une méthode⁵ ex-

⁵D. Safi, communication privée

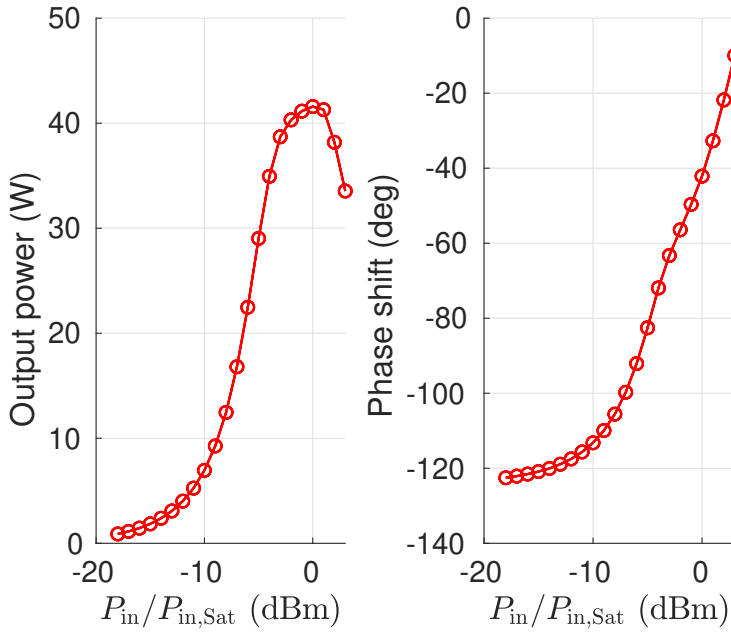


FIGURE 5.7 – Simulation de la puissance de sortie (courbe AM/AM) et du déphasage de sortie (courbe AM/PM) en fonction de la puissance d'entrée avec DIMOHA pour $F = 93$ GHz.

citant constructivement les 5 cellules après n_{in} et destructivement les 5 cellules avant n_{in} . Cette méthode est prometteuse mais nous ne l'utilisons pas car nous n'arrivons pas à ajuster correctement la puissance d'entrée voulue sans passer par une méthode essai-erreur.

Chaque point sur la [figure 5.7](#) correspond à une simulation telle que celle de la [figure 5.8](#). Il nous faut environ une dizaine de points pour faire un diagramme AM/AM correct et trouver la puissance à saturation. Avec DIMOHA, chaque point a pris 2 heures avec un ordinateur personnel (8 *threads* avec un Intel®Xeon® E5640 à 2.66 GHz). En comparaison, il a fallu environ 1000 heures par point avec MAGIC3D et environ 10 minutes avec MVTRAD. Des mesures préliminaires¹ sur un tube TWEETHER indiquent que sa bande passante est très large, au moins de 6 GHz, voire 8 GHz, ce qui est en accord avec les simulations de DIMOHA (voir [figure 5.6](#)). Pour nos simulations, nous avons pris une portée de couplage de $N_{ph} = 1$.

¹F. André, communication privée

5.7.2 Tube à cavités couplées

Nous considérons aussi un autre type de TOP : un TOP à cavités couplées dit *staggered double-grating* fonctionnant en sous-THz avec une très grande bande passante. Le tube en question est présenté par [Karetnikova et al \(2018\)](#) avec toutes les informations requises (relation de dispersion, impédance, pertes) pour le simuler avec DIMOHA (voir [table 5.1](#)). C'est un tube assez court (2.5 cm) et sans atténuateur central (*sever*). Par contre, à haute fréquence, le pas de temps doit être réduit. Une des particularités de ce tube est que la relation de dispersion est donnée pour chaque demi-cellule. Pour utiliser DIMOHA, nous avons simplement doublé le nombre de cellules du tube avec un pas $d \mapsto d/2$ et avec une portée de couplage de $N_{ph} = 2$.

La [figure 5.9](#) présente la comparaison en régime linéaire (la puissance d'entrée est assez faible) entre DIMOHA et des simulations réalisées par [Karetnikova et al \(2018\)](#) utilisant CST,² KARAT³ et leur code 1D provenant d'un modèle fréquentiel. Le gain est donné par (2.3). L'accord entre CST et DIMOHA en milieu de bande (200-240 GHz) est remarquable. Chaque point n'a pris que 23 minutes avec DIMOHA avec $h = 18$ fs avec un ordinateur personnel (8 *threads* avec un Intel®Xeon® E5640 à 2.66 GHz). Aux bords de bande, des désaccords significatifs avec DIMOHA apparaissent. Selon nous, cela provient du manque d'information d'entrée de ce dernier. La relation de dispersion provenant de [Karetnikova et al \(2018\)](#) ne s'étend que

²CST
³Tarakanov 1992

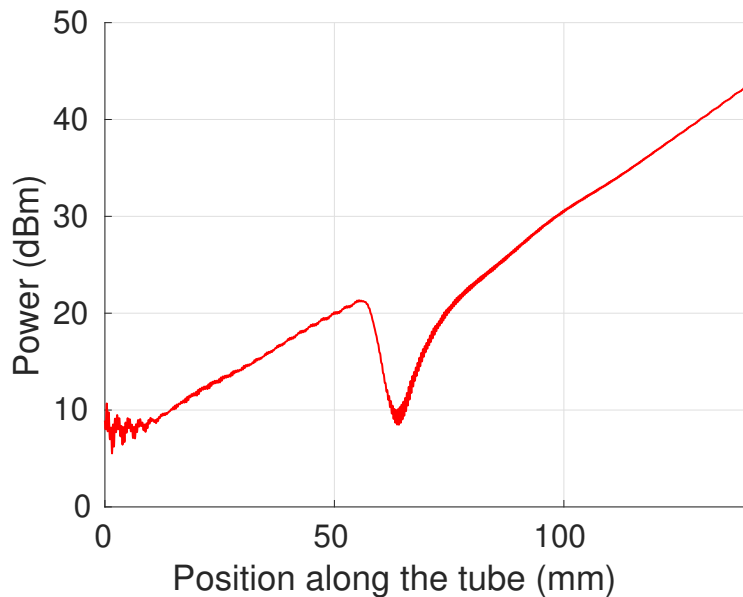


FIGURE 5.8 – Puissance électromagnétique moyenne de la fréquence fondamentale ($F = 93$ GHz) en fonction de la position z dans la ligne à retard pour $P_{in} = 8$ dBm avec DIMOHA. Dans cette simulation, le système n'est pas entré en régime non-linéaire.

de 177 à 260 GHz. Or le modèle discret requiert le plus de point possible de la relation de dispersion pour calculer les coefficients de couplage (voir section 3.4). Les points manquants ont donc été extrapolés. De plus, les modèles de charge d'espace sont différents : Karetnikova *et al* (2018) utilisent un faisceau rectangulaire alors que nous utilisons un faisceau cylindrique (voir section 4.6.2). On remarque quand même que des mesures expérimentales⁴ sur d'autres TOPs à cavités couplées ne montrent pas de pics sur les bords de bande.

⁴Hu *et al* (2014).
F. André, communication privé

5.8 Avantages de DIMOHA

Notre algorithme DIMOHA est un outil prometteur à la fois pour la recherche sur l'interaction onde-particule mais aussi pour le design industriel de tubes électroniques, tels que les tubes à ondes progressives, ou encore l'analyse de signaux de télécommunication pour les opérateurs. Pour la recherche, DIMOHA peut étudier la dynamique non-linéaire de l'interaction onde-particule.

D'un point de vue industriel, DIMOHA possède de nombreux avantages. Son premier avantage est sa robustesse, sa rapidité et sa précision. Notre code est extrêmement rapide : entre 200 et 500 fois plus rapide que les codes alternatifs PIC testés pour une précision similaire. De plus, il est meilleur en précision que MVTRAD (un code fréquentiel en amélioration permanente depuis plus de vingt ans et actuellement une référence pour le design des TOPs à Thales) bien que ce dernier soit plus rapide. On rappellera que notre modèle DIMOHA nous sert pas à déterminer la relation de dispersion ou l'impédance d'un guide d'onde. Pour cela, il faut passer par un modèle ou solveur prenant en compte la géométrie du tube.

DIMOHA est aussi très flexible et peut être pris en main assez rapidement. Le nombre de paramètres d'entrée reste assez faible (voir table 5.1). En plus, comme le modèle discret 1D n'impose aucune exigence sur la structure utilisée (si elle est périodique), notre algorithme peut simuler n'importe quelle géométrie de tube. Nous avons testé DIMOHA sur des TOPs de 2.5 cm à 15 cm, pour des fréquences allant de la dizaine de GHz au sous-THz et pour des TOPs à hélice et à cavités couplées, dont un guide replié. D'autres géométries, et peut-être d'autres types d'instrument (gyrotrons, lasers à électrons libres), devraient être accessibles avec notre approche. En outre, il peut reproduire la puissance, la phase de sortie et le gain d'un TOP mais aussi simuler des signaux complexes comme du multi-porteuses

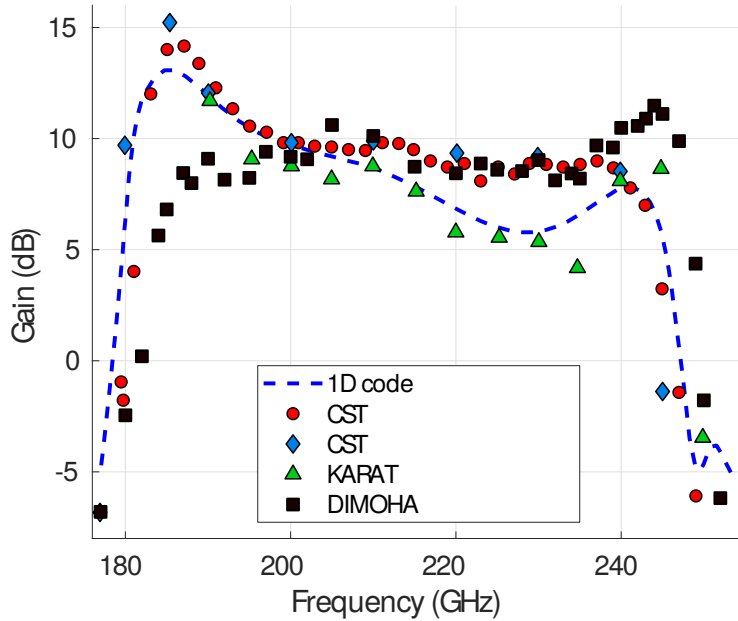


FIGURE 5.9 – *Minenna et al (2019d)*. Comparaison entre DIMOHA (carrés noirs), CST (cercles rouges et losanges bleus), KARAT (triangles verts) et le code 1D (courbe traitillée bleue) de *Karetnikova et al (2018)* en régime linéaire.

ou un signal de télécommunication, ainsi qu’observer la génération d’harmonique, de raies d’inter-modulation et des effets de distorsions. Nous avons validé DIMOHA pour un signal 2-porteuses.

Des différences existent entre les mesures et DIMOHA. Nous estimons que dernier est améliorable sur les points suivants :

- La gestion des défauts n’est pas optimale. Il faut s’assurer que la variation de pas, très importante sur certains tubes, ne génère pas d’erreur. La gestion des atténuateurs (*severs*) est plutôt simpliste et doit pouvoir s’améliorer. De plus, certains défauts majeurs comme les désadaptations des antennes d’entrée et de sortie ne sont pas pris en compte alors que celles-ci peuvent générer des oscillations critiques. Dans le jargon des tubistes, on parle de taux d’onde stationnaire (TOS, *voltage standing-wave ratio (VSWR)*).
- La gestion de la charge d’espace est approximative. On doit pouvoir construire un meilleur modèle.
- La gestion de l’injection de l’onde peut être améliorée (voir les oscillations à 0 mm de la [figure 5.8](#)). L’excitation de l’onde se fait pour le moment sur une cellule entière. Nous avons pu tester une méthode d’excitation destructive/constructive de part et d’autre de la cellule d’entrée.

De plus, la formulation 1D du modèle nous empêche d’étudier les défauts dans le confinement du faisceau et les asymétries 3D.

Comme DIMOHA est flexible et rapide, nous envisageons de l’utiliser pour étudier de nombreux cas. Notre prochain défi est la modélisation du TOP de 4 mètres du PIIM. Ce tube est utilisé pour étudier l’interaction onde-particule non-linéaire et le chaos hamiltonien. Nous souhaitons aussi étudier la distorsion des signaux télécoms (multi-porteuse et modulation digitale) dans la ligne à retard. Enfin, notre validation de DIMOHA s’est surtout concentrée sur les TOPs à hélice. Nous souhaitons réaliser une analyse complète des TOPs à cavités couplées.

Quatrième partie

Échange de moment entre ondes
et particules



— Randall Munroe, <http://www.xkcd.com/643>
(permission for a not-for-profit publication).

6

Moment conjugué et puissance électromagnétique pour le modèle discret unidimensionnel

Ce chapitre est une suite au [chapitre 4](#) dans lequel nous avons établi une théorie hamiltonienne N -corps unidimensionnelle avec le modèle discret. Maintenant, nous vérifions que cette théorie admet des quantités physiques conservées. Pour cela, nous écrivons le lagrangien associé et utilisons le théorème de Noether pour obtenir le moment conjugué du système. Nous proposons aussi une reformulation de la puissance électromagnétique pour le modèle discret.

6.1 Lagrangien du modèle discret

Pour pouvoir utiliser le théorème de Noether, et ainsi écrire la conservation du moment conjugué du système, nous employons le formalisme lagrangien (lié au principe d'action stationnaire). On repart du modèle discret hamiltonien N -corps unidimensionnel du [chapitre 4](#). Avec la projection sur l'axe z de propagation, nos variables généralisées sont $(q, \dot{q}) \mapsto \{q_r, \dot{q}_r, l_n^s, \dot{l}_n^s\}$, et en employant la transformation de Legendre (4.2), on obtient le **lagrangien total** du système

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{em}} + L_{\text{el}} = \sum_r^{N_e} p_r \dot{q}_r + \sum_{s,n} V_n^s \dot{l}_n^s - H_{\text{tot}}, \quad (6.1)$$

avec H_{tot} la somme des hamiltoniens des champs (4.18) et des particules (4.9). Le **lagrangien électromagnétique**, associé à (4.18), est

$$L_{\text{em}}(l^s, \dot{l}^s)_{\{s \in \mathbb{Z}\}} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\dot{l}_{n_1}^s \mathcal{U}_{n_1 - n_2}^s \dot{l}_{n_2}^s - l_{n_1}^s \Omega_{n_1 - n_2}^s l_{n_2}^s \right), \quad (6.2)$$

où nous notons \mathcal{U} la matrice inverse de Ω , de sorte que $\sum_{n'} \mathcal{U}_{n_1-n'}^s \Omega_{n'-n_2}^s = \delta_{n_2}^{n_1}$, et en rappelant que $\Omega_n^s = N_n^s$. On remarquera qu'en inversant la décomposition des champs, il est possible de revenir à l'expression classique tri-dimensionnelle¹ $L_{\text{em}} = 1/2 \int_{\mathcal{V}_z} (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 - \mu_0 |\mathbf{H}|^2) d^3\mathbf{r}$, et vice-versa. Nous ne prenons pas en compte les atténuations et pertes. ¹Jackson 1999

Le **lagrangien des particules** sur l'axe z de propagation est

$$L_{\text{el},z}(q_r, \dot{q}_r, \mathbf{l}^s)_{\{r \in [1, N_e], s \in \mathbb{Z}\}} = - \sum_r \frac{m_e c^2}{\gamma_r} + \sum_r \sum_{s,n} e i \mathbf{l}_n^s \dot{q}_r \mathbf{A}_n^s - \frac{1}{2} \sum_{r' \neq r} e \phi_{\text{sc}}(q_r - q_{r'}), \quad (6.3)$$

avec e la charge (négative) des électrons et $\gamma_r = [1 - \frac{\dot{q}_r^2}{c^2}]^{-\frac{1}{2}}$ le facteur de Lorentz donné par (4.10). On a donc les équations d'évolution des variables généralisées en représentation par cellule

$$p_r = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \dot{q}_r} = \gamma_r m_e \dot{q}_r + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e i \mathbf{l}_n^s \mathbf{A}_n^s = \gamma_r m_e \dot{q}_r + e A, \quad (6.4)$$

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial q_r} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e i \mathbf{l}_n^s \dot{q}_r \frac{\partial \mathbf{A}_n^s}{\partial q_r} - e \frac{\partial \phi_{\text{sc}}}{\partial q_r}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{V}_n^s = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{l}_n^s} = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{l}_{n'}^s \mathcal{U}_{n-n'}^s, \quad (6.6)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_n^s = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{l}_n^s} = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{l}_{n'}^s \Omega_{n-n'}^s + \sum_r \dot{q}_r i \mathbf{A}_n^s, \quad (6.7)$$

avec p_r le moment conjugué des particules et \mathbf{V}_n^s l'équivalent de ce moment pour les champs avec notre normalisation. On rappellera que la décomposition du potentiel vecteur A est donnée par (3.49). Les équations (6.6)-(6.7) deviennent en représentation- β

$$\mathbf{V}_\beta^{s*} = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{l}_\beta^s} = \frac{\mathbf{l}_\beta^{s*}}{\Omega_\beta^s}, \quad (6.8)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_\beta^{s*} = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{l}_\beta^s} = \mathbf{l}_\beta^{s*} \Omega_\beta^s + \sum_r \dot{q}_r i \mathbf{A}_\beta^s, \quad (6.9)$$

grâce à la transformée- β inverse de Gel'fand (3.15).

6.2 Application du théorème de Noether

En mathématiques et en physique théorique, les lois de conservation sont indissociables de la compréhension des systèmes étudiés, et le théorème de [Noether \(1918\)](#) est probablement l'outil le plus profond et le plus influent utilisé pour décrire ces conservations. Pour un système possédant des propriétés de symétrie continues, toute translation infinitésimale qui laisse le lagrangien invariant implique l'existence d'une quantité conservée. Considérons la transformation infinitésimale de $q(t)$ en $q'(t) = q(t) + \varepsilon \delta q(t)$. Si le lagrangien est invariant au voisinage de $\varepsilon = 0$, soit $L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$, alors la quantité

$$\mathcal{J}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{dq'}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (6.10)$$

est une constante du mouvement, soit $\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} + [\mathcal{J}, H] = 0$.

6.2.1 Invariance du lagrangien

Nous appliquons le théorème de Noether sur notre lagrangien total. Par choix, nous décidons de travailler en β plutôt qu'avec la représentation par cellule (dans laquelle nous formulons les équations d'évolution). Il est nécessaire de commencer par regarder comment agissent les translations de l'espace sur les coefficients complexes l_β^s , avant d'appliquer le théorème de Noether. Grâce à la section uniforme du guide d'onde, nous considérerons la dépendance spatiale sous forme exponentielle $E_\beta^s(z) = \hat{E}_\beta^s e^{-i\beta z}$. La translation infinitésimale ε de la position induit la variation de la coordonnée canonique $l_\beta^s \mapsto l_\beta^s = l_\beta^s e^{-i\beta\varepsilon}$. Il s'agit simplement du déphasage occasionné par la translation. Les transformations infinitésimales des coordonnées généralisées et leur effet sur les vitesses sont au premier ordre

$$\delta q_r = \varepsilon, \quad (6.11)$$

$$\delta l_\beta^s = -i\beta\varepsilon l_\beta^s, \quad (6.12)$$

$$\delta \dot{q}_r = 0, \quad (6.13)$$

$$\delta \dot{l}_\beta^s = -i\beta\varepsilon \dot{l}_\beta^s. \quad (6.14)$$

La variation infinitésimale du lagrangien est

$$\delta L_{\text{tot},z} = \sum_r \left(\frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial l_\beta^s} \delta l_\beta^s + \frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial \dot{l}_\beta^s} \delta \dot{l}_\beta^s \right) d(\beta d), \quad (6.15)$$

où $L_{\text{tot},z}$ est la somme de (6.2) et (6.3). On remarquera que le potentiel de charge d'espace agissant sur toutes les particules est invariant par la translation de l'origine des z et donc ne contribue pas à (6.15). Par simple substitution, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial \varepsilon} &= \sum_r \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[e l_\beta^s \dot{q}_r \frac{1}{\Omega_\beta^s} \frac{\partial E_\beta^s}{\partial q_r} - i\beta l_\beta^s l_\beta^{s*} \Omega_\beta^s \right. \\ &\quad \left. + i e \beta l_\beta^s \dot{q}_r \frac{1}{\Omega_\beta^s} E_\beta^s - i\beta \dot{l}_\beta^s \Omega_\beta^s l_\beta^{s*} \right] d(\beta d), \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_r \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[e l_\beta^s \dot{q}_r \frac{1}{\Omega_\beta^s} \frac{\partial E_\beta^s}{\partial q_r} + i e \beta l_\beta^s \dot{q}_r \frac{1}{\Omega_\beta^s} E_\beta^s \right] d(\beta d) \\ &\quad - \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\beta \Omega_\beta^s \left[l_\beta^s l_\beta^{s*} - \mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_\beta^{s*} \right] d(\beta d), \end{aligned} \quad (6.17)$$

en utilisant l'équation (4.31)¹ pour remplacer la forme de champ du potentiel vecteur par celle du champ électrique et l'équation (6.6) pour remplacer les l_β^s par \mathbf{V}_β^s . En rappelant que $E_\beta^s(z) = \hat{E}_\beta^s e^{-i\beta z}$, on remarque que la première intégrale dans (6.17) s'annule d'elle-même. La seconde intégrale s'annule aussi en considérant les relations de parité $\mathbf{V}_\beta^{s*} = \mathbf{V}_{-\beta}^s$, $l_\beta^{s*} = l_{-\beta}^s$ et $\Omega_\beta^s = \Omega_{-\beta}^s$ (voir section 3.3.2). En effet,

$$\int_{-\pi}^{\pi} i\beta \mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_\beta^{s*} \Omega_\beta^s d(\beta d) = \int_{-\pi}^{-\pi} i(-\beta) \mathbf{V}_{-\beta}^s \mathbf{V}_{-\beta}^{s*} \Omega_{-\beta}^s d(\beta d) = - \int_{-\pi}^{\pi} i\beta \mathbf{V}_\beta^{s*} \mathbf{V}_\beta^s \Omega_\beta^s d(\beta d), \quad (6.18)$$

et de même pour l'intégrale avec $l_\beta^s l_\beta^{s*}$. Puisque l'équation (6.17) s'annule, le lagrangien $L_{\text{tot},z}$ est invariant par translation et l'action totale est inchangée. Selon le théorème de Noether, cela implique l'existence d'une quantité conservée : le moment canonique total.

6.2.2 Moment conjugué canonique

D'après le théorème de Noether, si le lagrangien est invariant par translation, alors

$$\frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial \varepsilon} = \frac{dp_{\text{tot},z}}{dt} = 0, \quad (6.19)$$

avec $p_{\text{tot},z}$ le moment conjugué canonique total du système. En utilisant les relations d'évolution (3.44) et (3.45), en représentation- β , on réécrit (6.17)

$$\frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial \varepsilon} = \sum_r^{N_e} \frac{\partial L_{\text{tot},z}}{\partial q_r} + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\beta \left[V_{\beta}^{s*} i_{\beta}^s + \dot{V}_{\beta}^s I_{\beta}^{s*} \right] d(\beta d), \quad (6.20)$$

avec $\dot{p}_r = \partial_{q_r} L_{\text{tot},z}$. On obtient donc le **moment conjugué canonique total** du système sur l'axe longitudinal

$$p_{\text{tot},z}(t) = \sum_r^{N_e} p_r + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\beta V_{\beta}^{s*} I_{\beta}^s d(\beta d), \quad (6.21)$$

en accord avec (6.10). L'équation (6.21) est simplement la somme des moments conjugués canoniques des particules et du moment conjugué canonique de l'onde.

Pour passer en représentation par cellule, on doit trouver comment réécrire l'intégrale du nombre d'onde β . On définit donc une transformée de Fourier modifiée (à cause de la présence du i)

$$B_n^s = -B_{-n}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\beta e^{-in\beta d} d(\beta d), \quad (6.22)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{nd}, \quad \forall n \neq 0, \quad (6.23)$$

avec $B_0^s = 0$. On finit par obtenir le **moment conjugué électromagnétique canonique** de l'onde (second terme de (6.21)), en représentation par cellule¹

$$p_{\text{em},z}(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2} V_{n_1}^s I_{n_2}^s B_{n_1 - n_2}^s. \quad (6.24)$$

On notera pour plus tard (voir chapitre 7) l'analogie lointaine avec la relation de de Broglie quantique $\hbar\beta$ en rappelant que, dans l'application de notre modèle, nous imposons à V_n^s, I_n^s d'être chacun homogène à la racine carrée d'une action. Au chapitre 7, nous appellerons (6.24) le moment de Minkowski p_{Mink} .

6.3 Moment canonique des champs en régime monochromatique

En régime monochromatique (dit *continuous wave (CW)* dans le jargon des tubistes), on se limite à une onde parfaitement sinusoïdale avec une seule fréquence ($\sin(\omega t)$). Nous utiliserons cette approximation pour simplifier l'expression du moment conjugué et la puissance des champs. Mais dans un premier temps, nous devons exprimer la vitesse de groupe avec le modèle discret.

¹Minenna et al
2018

6.3.1 Vitesse de groupe dans le modèle discret

La **vitesse de groupe** des champs est la dérivée de la relation de dispersion

$$v_g(\beta) = \frac{\partial \Omega_\beta^s}{\partial \beta}. \quad (6.25)$$

Pour les guides d'ondes, la vitesse de groupe est souvent donnée en régime harmonique par¹ $v_g = \langle P \rangle d / W_{\text{em}}$ avec $\langle P \rangle$ la puissance électromagnétique harmonique (8.28) et W l'énergie électromagnétique stockée. ¹Pierce 1950; Watkins 1958; Jackson 1999

On souhaite exprimer la vitesse de groupe en utilisant le modèle discret. On commence par dériver la normalisation (3.28) (car nous avons posé $N_\beta^s = \Omega_\beta^s$)

$$\frac{\partial \Omega_\beta^s}{\partial \beta} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*} + \mathbf{E}_{s\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{s\beta}^*}{\partial \beta} \right) d^3 \mathbf{r}. \quad (6.26)$$

Les dérivées des champs s'obtiennent par les dérivées des équations de Helmholtz (3.18)-(3.19)

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} = -i\mu_0 \Omega_\beta^s \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} - i\mu_0 v_g \mathbf{H}_\beta^s, \quad (6.27)$$

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} = i\epsilon_0 \Omega_\beta^s \frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} + i\epsilon_0 v_g \mathbf{E}_\beta^s, \quad (6.28)$$

que nous remplaçons dans (6.26). En utilisant la dérivée de la condition de Floquet $\partial_\beta \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r} + d\mathbf{e}_z) = \partial_\beta (\mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r})e^{-i\beta d}) = e^{-i\beta d} (\partial_\beta \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) - id \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}))$ et le théorème de la divergence, on peut finir par exprimer²

$$v_g(s, \beta) = \frac{d}{\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{S}} \Re(\mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z d^2 \mathbf{r}. \quad (6.29)$$

Le calcul complet est donné en annexe B.4. Nous définissons \mathcal{S} comme une section transverse dans le tube, p. ex. la base du cylindre (en $z = 0$). L'intégrale sur une cellule correspond à la somme des intégrales surfaciques effectuées sur la longueur de la cellule (d dans notre cas). Observant que la vitesse de groupe ne peut pas dépendre de l'abscisse associée à \mathcal{S} , on note que le membre de droite de (6.29) n'en dépend pas, et on réexprime ainsi la vitesse de groupe comme la moyenne du membre de droite,

$$v_g(\beta) = \frac{1}{\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \Re(\mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z d^3 \mathbf{r}. \quad (6.30)$$

Ce résultat n'est pas surprenant car, en rappelant que le flux du vecteur de Poynting est $P_z = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z d\mathcal{S}$, on retrouve l'analogie avec $v_g = \langle P \rangle / W_{\text{em}}$, en admettant que Ω_β^s est analogue à l'énergie stockée.

6.3.2 Moment canonique des champs

Un aspect important de la vitesse de groupe (6.30) est qu'elle nous permet d'établir l'identité bien utile pour le **nombre d'onde** associé au modèle discret temporel

$$\beta = \frac{n_{\text{ph}} n_g}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} \Re(\mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z d^3 \mathbf{r}, \quad (6.31)$$

valable pour tout guide d'onde sous vide. On note l'**indice de réfraction** (*refractive index*)

$$n_{\text{ph}}(s, \beta) = \frac{c}{v_{\text{ph}}}, \quad (6.32)$$

avec la vitesse de phase $v_{\text{ph}} = \Omega_{\beta}^s / \beta$, et l'**indice de réfraction de groupe** (*group index*)

$$n_{\text{g}}(s, \beta) = \frac{c}{v_{\text{g}}}. \quad (6.33)$$

Nous définissons alors le **nombre d'onde de réfraction monochromatique**¹

¹Minenna *et al*
2018

$$K_{\beta}^s = \frac{v_{\text{g}} \Omega_{\beta}^s}{c^2} = \frac{\beta}{n_{\text{ph}} n_{\text{g}}} \quad (6.34)$$

$$= \frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} \Re(\mathbf{E}_{\beta}^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\beta}^s(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r}, \quad (6.35)$$

où $\mathbf{E}_{\beta}^s, \mathbf{H}_{\beta}^s$ sont normalisés par (3.28). Comme nous le verrons plus tard, ce noyau sera utile pour calculer la puissance électromagnétique sans avoir besoin d'analyser la forme tridimensionnelle de la ligne à retard. Il nous suffit d'avoir la relation de dispersion (cette dernière étant de toute façon indispensable pour établir la propagation des ondes avec le modèle discret). Pour passer en représentation par cellule, on observera que la transformée de Fourier inverse (3.9) de la pulsation $\Omega_{\beta}^s = \sum_n \Omega_n^s e^{in\beta d}$ permet de récrire la vitesse de groupe comme $v_{\text{g}} = i \sum_n n d \Omega_n^s e^{in\beta d}$. Le nombre d'onde de réfraction monochromatique (6.34) s'obtient à partir d'une transformation de Fourier modifiée

$$K_n^s = -K_{-n}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i K_{\beta}^s e^{-in\beta d} d(\beta d), \quad (6.36)$$

$$= \frac{d}{c^2} \sum_{n_1} (n_1 - n) \Omega_{n-n_1}^s \Omega_{n_1}^s. \quad (6.37)$$

Il est possible de réduire notre approche au **régime monochromatique** (aussi appelé *continuous waveform CW*) lorsque l'on considère les champs comme des ondes sinusoïdales (p. ex., un simple $\cos(\omega t)$) en temps avec une seule pulsation $\omega = 2\pi F$. Les applications dans ce régime sont très variées, car c'est le cas le plus simple à étudier. Par exemple, le domaine harmonique peut être vu comme la superposition d'une multitude de régimes monochromatiques dont les champs sont exprimés en $e^{i\omega t}$. Dans ce régime, les vitesses de phase et de groupe, et respectivement leurs indices de réfraction, deviennent des constantes par rapport au nombre d'onde (un seul ω est considéré). Ainsi, en intégrant (6.34) avec les indices constants, on obtient l'approximation d'indice constant en régime monochromatique

$$\mathbf{B}_n^s \approx n_{\text{ph}} n_{\text{g}} K_n^s. \quad (6.38)$$

Le moment conjugué canonique des champs électromagnétiques (6.24) se réduit à²

²Minenna *et al*
2018

$$p_{\text{em},z}(t) \approx n_{\text{ph}} n_{\text{g}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2} V_{n_1}^s |V_{n_2}^s| K_{n_1 - n_2}^s. \quad (6.39)$$

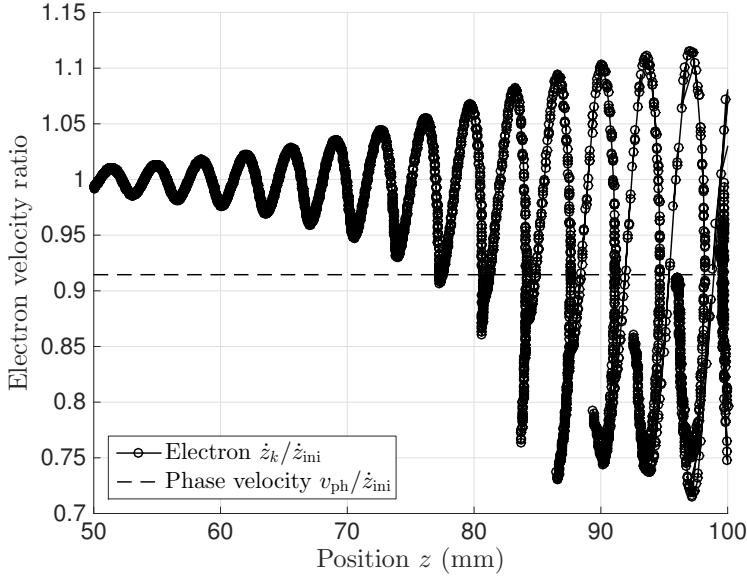


FIGURE 6.1 – [Minenna et al \(2018\)](#). Rapport de vitesse des électrons $\dot{q}_r(t)/v_{el,0}$ en fonction de la position dans une simulation unidimensionnelle en temps d'un tube à onde progressive (sans *tapers* ni atténuateurs) avec DIMOHA. Le TOP choisi est fictif, mais proche d'un tube industriel spatial en bande Ku (12–18 GHz). Chaque point représente une macro-particule. La droite traitillée représente la vitesse de phase $v_{ph}/v_{el,0}$ de l'onde. Les effets non-linéaires (piégeage) débutent approximativement lorsque $z = 80$ mm.

En remplaçant (6.31) dans (6.21) et en recomposant les champs électromagnétique avec (3.42)-(3.43), le moment conjugué canonique¹ des champs dans un guide d'onde devient²

$$p_{em,z}(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i\beta |l_{\beta}^s| V_{\beta}^{s*} d(\beta d) = \frac{n_{ph}n_g}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r}, \quad (6.40)$$

dans le cas monochromatique, avec sa densité (à une jauge \mathcal{C} près)

$$g_{em,z}(z, t) = \frac{n_{ph}n_g}{c^2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{e}_z + \text{div } \mathcal{C}. \quad (6.41)$$

L'apparition du terme $n_{ph}n_g$ dans la définition du moment conjugué renvoie à la controverse Abraham-Minkowski (voir [chapitre 7](#)). On notera que, dans ce contexte, le moment canonique des champs ne peut pas s'exprimer comme $\frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r}$, que l'on voit dans la plupart des cours de physique fondamentaux.³

6.3.3 Validation de notre algorithme DIMOHA

Un des moyens de vérifier les propriétés de conservation de DIMOHA (voir [chapitre 5](#)) est de tester la conservation du moment canonique total (6.21). On rappelle que $p_{tot,z}$ est, en théorie, conservé d'après l'application du théorème de Noether (voir [section 6.2](#)) et que cette conservation est essentielle pour s'assurer de la cohérence de nos simulations.

Pour avoir une représentation locale, on discrétise le moment électromagnétique canonique total (6.39) par cellule sous la forme

$$p_{em,n,z}(t) \approx \frac{1}{2} n_{ph}n_g \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n'} \left(V_n^s |l_{n'}^s| - V_{n'}^s |l_n^s| \right) K_{n-n'}^s. \quad (6.42)$$

Le passage de l'équation (6.39) à (6.42) est le même que pour la puissance par cellule (6.68) ci-dessous. On doit alors calculer le moment canonique des particules par cellule pour le comparer à (6.42). On note que dans un TOP, la vitesse d'injection $\dot{q}_r(0) = v_{el,0}$ (donnée à partir de la cathode (2.2)) des particules est très grande et que, globalement, celles-ci ne perdent que 10% de leur vitesse (voir [figure 6.1](#)). On ne regarde donc que la différence de moment pour les particules. On note donc le moment canonique perdu (échangé avec l'onde)

¹[Minenna et al 2018, 2019e](#)

²On notera une erreur dans [Minenna et al \(2018\)](#). Ce terme n'est pas le moment canonique dans un milieu.

³[Feynman et al 1964; Landau et Lifshitz 1975; Griffiths 1999; Jackson 1999](#)

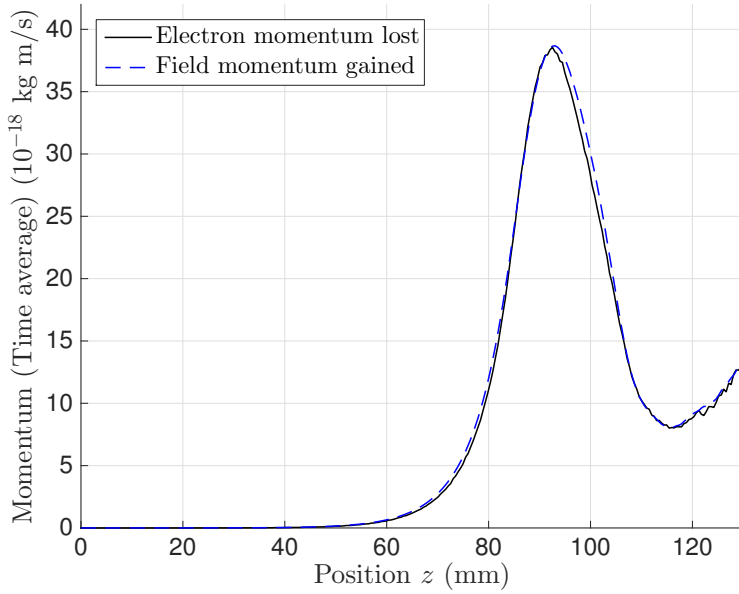


FIGURE 6.2 – Minenna *et al* (2018). Conservation du moment total par cellule, en fonction de la position, pour l'interaction onde-particule pour la même simulation que la figure 6.1 et la figure 6.3. Courbe continue noire : moyenne temporelle sur une période RF ($1/F$) du moment des particules perdu (6.43). Courbe traitillée bleue : moyenne temporelle sur une période RF ($1/F$) du moment de l'onde (6.42). L'échelle en 10^{-18} N s résulte du fait que la masse des électrons est très faible et le moment des champs est pondéré par c^{-2} .

des particules par cellule comme

$$-p_{\text{el},n,z}^{\text{xchg}} = - \sum_{r'(n)} (p_{r'}(t) - p_{\text{el},0}), \quad (6.43)$$

avec $r'(n) : |q_{r'} - nd| < d/2$ pour les particules dans la cellule n . L'amplification de l'onde étant de presque 50 dB dans un TOP (voir figure 6.3), on négligera la soustraction du moment initial de l'onde (infime devant le moment final). On remarquera que le théorème de Noether s'applique à un système invariant par translation et que, puisque nos simulations sont ouvertes sur les bords, on s'attend à des variations.

Pour notre simulation avec DIMOHA, on prend un tube fictif, sans défaut (pas d'atténuations, ni de variation de pas à part les atténuations de bord, en dehors du tube simulé) mais très proche d'un tube industriel spatial en bande Ku (12–18 GHz). La fréquence de l'onde est de 12 GHz. Les paramètres de fonctionnement (tels que courant et potentiel de cathode, impédances de couplage et vitesse de phase) sont choisis pour que l'amplification atteigne la saturation de puissance avant la fin du tube, et les effets de charge d'espace sont pris en compte. La vitesse initiale est de $v_{\text{el},0} = 4.56 \times 10^7$ m/s pour les macro-particules de charge $103\,270e$ avec un espacement entre elles de $\delta = 10^{-5}$ m. Comme le montre la figure 6.1, au début du tube, les particules sont émises avec la même vitesse $v_{\text{el},0}$ (faisceau mono-cinétique). Les particules ralenties, avec $\dot{q}_r(t) < v_{\text{el},0}$, ont transféré leur moment perdu à l'onde et, puisqu'il y a plus de particules en-dessous de $\dot{q}_r(t) = v_{\text{el},0}$, l'onde est amplifiée (voir section 1.3). La droite traitillée représente la vitesse de phase v_{ph} de l'onde. Les effets non-linéaires (piégeage) débutent approximativement lorsque $z = 80$ mm (quand certaines particules ont traversé la séparatrice centrée sur v_{ph}). La figure 6.2 présente notre comparaison des moments en utilisant la même simulation. À cause de la variation du nombre de particules dans chaque cellule, nous faisons une moyenne temporelle de (6.42) et (6.43). L'accord entre les deux est très bon. On remarquera que l'on peut remplacer $n_{\text{ph}}n_gK_n^s$ par B_n^s dans (6.42) : le résultat est quasiment le même et la différence est indistinguable par rapport à la figure 6.2.

6.4 Puissance électromagnétique

Pour caractériser un appareil d'amplification tel que les tubes à ondes progressives, la puissance est probablement le paramètre le plus important, et notamment le rendement d'interaction¹ (rapport entre la puissance de l'onde amplifiée et la puissance électrique dépensée par l'appareil). Généralement, elle est calculée à partir d'une approche harmonique pour une fréquence (donc en régime monochromatique) où la puissance harmonique vaut²

$$\langle P \rangle(\beta) = \frac{|\tilde{E}_z|^2}{2\beta^2 Z_c(\beta)}, \quad (6.44)$$

avec Z_c l'impédance de circuit de la ligne à retard. En domaine fréquentiel, le champ électrique de circuit devient $E_z(z) = \Re[\tilde{E}_{z,c} e^{-i\beta z}]$. On retrouvera cette relation à la [section 8.3.4](#).

Dans cette section, nous proposons plutôt un calcul en domaine temporel grâce au modèle discret et à partir du flux du vecteur de Poynting. En effet, les expressions en domaine temporel sont bien adaptées pour observer, par exemple, les oscillations d'onde et les réflexions transitoires de la puissance, qui sont normalement impossibles à voir avec des modèles fréquentiels. Le calcul dans cette section est unidimensionnel mais nous emploierons la géométrie hélicoïdale au [chapitre 9](#) pour calculer la puissance avec moins d'approximations.

Remarque 6.4.1 (Conservation de l'énergie) Une autre façon de définir la puissance est donnée par la dérivée temporelle de l'énergie (c-à-d. le hamiltonien). En prenant l'énergie totale H_{tot} comme la somme des énergies mécaniques et électromagnétique, on obtient la puissance totale (sans la charge d'espace)

$$P_{\text{tot}}(t) = \frac{dH_{\text{tot}}}{dt} = \int_{V_z} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int_{V_z} \frac{d}{dt} [\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2] \, d^3\mathbf{r}. \quad (6.45)$$

En effet, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ est la densité de puissance associée à la force de Lorentz. Pour le modèle discret, en utilisant (3.30) et la dérivée de (4.17), on démontre que l'équation (6.45) s'annule et donc que l'énergie totale de notre système est conservée.

6.4.1 Flux du vecteur de Poynting

La **puissance électromagnétique**, en domaine temporel, est obtenue à partir du flux du vecteur de Poynting sous la forme¹

$$P_z(z, t) = \int_{S(z)} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \quad (6.46)$$

le long de l'axe z , avec S la section transverse du guide d'onde à l'abscisse z . Les décompositions des champs (3.42)-(3.43) dans le modèle discret permettent d'obtenir directement

$$P_z(z, t) = \sum_s \sum_{n_1, n_2} V_{n_1}^s(t) I_{n_2}^s(t) \mathcal{R}_{n_1, n_2}^s(z), \quad (6.47)$$

avec

$$\mathcal{R}_{n_1, n_2}^s(z) = \int_{S(z)} (\mathbf{E}_{-n_1}^s(\mathbf{r}) \times i\mathbf{H}_{-n_2}^s(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{e}_z \, dS, \quad (6.48)$$

en rappelant que les indices négatifs viennent de la convention technique de la décomposition. On notera que l'annexe B.2 démontre que $\int_{V_0} (\mathbf{E}_\beta^{s_1} \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} = 0$ si $s_1 \neq s_2$ pour des tubes de section uniforme. Nous notons donc (6.47) avec une seule somme sur les modes de propagation s . Le principal problème pour exprimer la puissance est que les termes $\mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s$ dépendent de la géométrie de la structure périodique. Pour déterminer $\mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s$, on doit trouver la dépendance en z ou \mathbf{r} des champs de base $\mathbf{E}_n^s, \mathbf{H}_n^s$, ou, de manière équivalente, des champs propres $\mathbf{E}_\beta^s, \mathbf{H}_\beta^s$. Nous utiliserons deux méthodes pour exprimer ces termes : une première en 1D avec l'approximation monochromatique (voir ci-dessous) et une seconde au chapitre 9 avec l'utilisation de la géométrie hélicoïdale pour déterminer les fonctions de base $\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})$.

Dans les deux cas de figure, que l'on soit en 1D ou en 3D, on suppose que la dépendance en z des champs propres est telle que

$$\mathbf{E}_\beta^s(x, y, z) = e^{-i\beta z} \mathbf{E}_\beta^s(x, y), \quad (6.49)$$

$$\mathbf{H}_\beta^s(x, y, z) = e^{-i\beta z} \mathbf{H}_\beta^s(x, y), \quad (6.50)$$

en coordonnées cartésiennes. En représentation- β , l'équation (6.48) devient

$$\mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta_2(z-n_2d) - \beta_1(z-n_1d))} \mathfrak{t}_{\beta_1, \beta_2}^s d(\beta_1d) d(\beta_2d) \right], \quad (6.51)$$

avec

$$\mathfrak{t}_{\beta_1, \beta_2}^s = \int_S \left(\mathbf{E}_{\beta_1}^{s*}(x, y) \times i\mathbf{H}_{\beta_2}^s(x, y) \right) \cdot \mathbf{e}_z dS, \quad (6.52)$$

indépendant de z . On remarque alors la difficulté pour calculer $\mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s$ (ou son équivalent $\mathfrak{t}_{\beta_1, \beta_2}^s$) : le produit vectoriel intervient sur deux nombres d'onde $\beta_1 \neq \beta_2$ (voir ci-dessous).

Pour la suite, il sera utile de noter que

$$\lim_{\beta_2 \rightarrow \beta_1} \mathfrak{t}_{\beta_1, \beta_2}^s = \mathfrak{t}_{\beta_1, \beta_1}^s = i \frac{K_{\beta_1}^s c^2}{d} = i \int_S \Re \left(\mathbf{E}_{\beta_1}^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\beta_1}^s(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{e}_z dS, \quad (6.53)$$

en accord avec (6.35).

6.4.2 Puissance électromagnétique par cellule

Puisque le modèle discret permet une discrétisation par période, nous posons la contribution de la $n^{\text{ième}}$ cellule à la puissance électromagnétique comme

$$P_n(t) = \sum_s \sum_{n_1, n_2} V_{n_1}^s(t) |I_{n_2}^s(t)| \mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s, \quad (6.54)$$

avec le facteur géométrique

$$\mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s = \frac{1}{d} \int_{(n-1/2)d}^{(n+1/2)d} \mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s(z) dz. \quad (6.55)$$

On remarque alors que l'intégrale (6.55) est identique à l'intégrale d'une fonction porte Π sur la totalité de la longueur de la structure, soit que $\int_{(n-1/2)d}^{(n+1/2)d} \mathfrak{G}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z/d - n) \mathfrak{G}(z) dz$ pour tout \mathfrak{G} , avec $\Pi(y) = 1$ si $|y| < 1/2$ et $\Pi(y) = 0$ si $|y| > 1/2$. La transformée de Fourier

d'une fonction porte est un sinus cardinal $\text{sinc } u = \sin(u)/u$, on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z/d - n) e^{-id(\beta_2 - \beta_1)z} dz = \frac{1}{d} \text{sinc} \left(\frac{d}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right) e^{-ind(\beta_2 - \beta_1)}, \quad (6.56)$$

après le changement de coordonnée $z/d - n \mapsto z'$. La puissance électromagnétique par cellule (6.54) devient, en représentation- β ,

$$P_{n,z}(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{V}_{\beta_1}^{s*}(t) \mathbf{l}_{\beta_2}^s(t) \mathbf{k}_{\beta_1, \beta_2}^s \frac{1}{d} \text{sinc} \left(\frac{d}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right) e^{-ind(\beta_2 - \beta_1)} d(\beta_1 d) d(\beta_2 d) \right]. \quad (6.57)$$

On remarque donc que l'équation (6.57) fait intervenir deux nombres d'onde β_1 et β_2 (provenant de la transformée de Fourier de n_1 et n_2). Ici, on ne peut pas imposer que $\beta_1 = \beta_2$ (donc supposer l'interférence destructive entre différents nombres d'onde) car on ne considère qu'une seule cellule $(n - 1/2)d < z < (n + 1/2)d$, et non pas la structure entière $-\infty < z < \infty$. Forcer l'égalité $\beta_2 = \beta_1$ dans l'équation (6.57) ferait disparaître l'exponentielle et mènerait à la perte de l'indice n : la puissance à la cellule n serait donc composée d'une double somme sur n_1 et n_2 mais indépendante de n , ce qui n'a pas de sens.

6.4.3 Approximation unidimensionnelle et monochromatique de la puissance

Pour calculer l'équation (6.57), on propose une résolution 1D. À partir de (6.54) et (6.57), on réécrit (6.55) comme

$$\mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{k}_{\beta_1, \beta_2}^s \frac{1}{d} \text{sinc} \left(\frac{d}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right) e^{-i(n_1 - n)\beta_1 d} e^{i(n_2 - n)\beta_2 d} d(\beta_1 d) d(\beta_2 d) \right], \quad (6.58)$$

en rappelant que la transformée- β inverse de Gel'fand d'un produit en représentation- β est donnée en annexe B.1. Sans connaître la valeur de $\mathbf{k}_{\beta_1, \beta_2}^s$ il est difficile de résoudre cette intégrale. Au chapitre 9, nous proposons une résolution exacte pour un modèle tridimensionnel d'hélice. Pour ce chapitre, nous proposons une résolution abrupte en utilisant le régime monochromatique. En supposant que $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ n'est pas très grand (approximation monochromatique), on peut approcher la fonction sinus cardinal de notre intégrale par une fonction porte

$$\text{sinc} \left(\frac{d}{2} \Delta\beta \right) \approx \Pi \left(\frac{d}{2} \Delta\beta \right). \quad (6.59)$$

Ce remplacement nous permet de résoudre l'équation (6.58). Bien entendu, ce choix arbitraire est très approximatif et nous aurions pu prendre une autre fonction.

Avec un changement de variable dans l'intégrale, on obtient que

$$\mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s \approx \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{k}_{\beta_1, \beta_1 + \Delta\beta}^s \frac{1}{d} \Pi \left(\frac{d\Delta\beta}{2} \right) e^{-i(n_1 - n_2)\beta_1 d} e^{i(n_2 - n)\Delta\beta d} d(\beta_1 d) d(d\Delta\beta) \right] \quad (6.60)$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{k}_{\beta_2 - \Delta\beta, \beta_2}^s \frac{1}{d} \Pi \left(\frac{d\Delta\beta}{2} \right) e^{-i(n_1 - n_2)\beta_2 d} e^{i(n_1 - n)\Delta\beta d} d(d\Delta\beta) d(\beta_2 d) \Big], \quad (6.61)$$

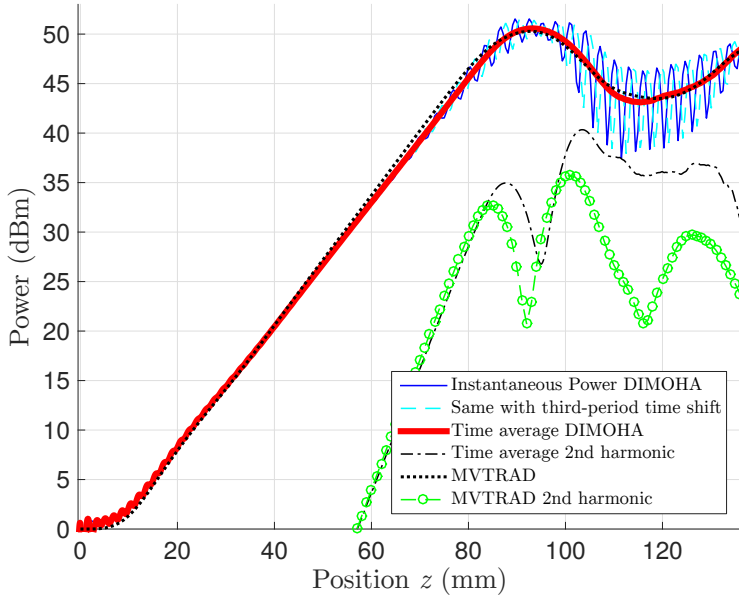


FIGURE 6.3 – Minenna *et al* (2018). Amplification spatiale de la puissance électromagnétique pour un tube à ondes progressives fictif (sans défauts). La simulation est la même que pour la figure 6.1 et la figure 6.2. L'onde est excitée à $F = 12$ GHz pour $P_{em}(0, t) = 1$ mW (soit 0 dBm). La courbe rouge et la courbe discontinue noire correspondent à la puissance harmonique (6.44) à la fréquence d'excitation et, respectivement, à la seconde harmonique ($2F$) avec DIMOHA. Les courbes bleue et cyan correspondent à la puissance instantanée (6.68) à $t_{max} = 6$ ns et, respectivement, à un tiers de période plus tard $t_{max} + 1/(3F)$. Une comparaison avec le code fréquentiel MVTRAD est réalisée. La courbe pointillée noire correspond à la puissance harmonique de la fondamentale, et les points verts correspondent à la puissance de la seconde harmonique avec MVTRAD.

avec $\mathfrak{k}_{\beta_1, \beta_2}^s = \mathfrak{k}_{\beta_1, \beta_1 + \Delta\beta}^s = \mathfrak{k}_{\beta_2 - \Delta\beta, \beta_2}^s$. Puisque

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Pi\left(\frac{d\Delta\beta}{2}\right) e^{-2i(n_1 - n)\Delta\beta d/2} d\left(\frac{d\Delta\beta}{2}\right) = \text{sinc}(\pi(n_1 - n)), \quad (6.62)$$

Dans le cas monochromatique ($\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 \rightarrow 0$), on arrive finalement à

$$\mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s \approx \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{k}_{\beta_1, \beta_1 + \Delta\beta}^s \frac{1}{d} \text{sinc}(\pi(n_2 - n)) e^{-i(n_1 - n_2)\beta_1 d} d(\beta_1 d) \right. \quad (6.63)$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{k}_{\beta_2 - \Delta\beta, \beta_2}^s \frac{1}{d} \text{sinc}(\pi(n_1 - n)) e^{-i(n_1 - n_2)\beta_2 d} d(\beta_2 d) \right], \quad (6.64)$$

$$\approx \mathcal{K}_{n_1 - n_2}^s c^2 \frac{1}{2} \left(\text{sinc}(\pi(n_1 - n)) + \text{sinc}(\pi(n_2 - n)) \right), \quad (6.65)$$

où \mathcal{K}_n^s est le nombre d'onde de réfraction monochromatique donné par (6.37), ne dépendant directement que de la relation de dispersion du système, et non pas de la géométrie tridimensionnelle de la structure périodique. La puissance électromagnétique à la $n^{\text{ième}}$ cellule devient simplement¹ (les deux expressions de droite sont égales)

¹Minenna *et al* 2018

$$P_n(t) \approx \frac{1}{2} \frac{c^2}{d} \sum_s \sum_{n_1, n_2} \mathcal{V}_{n_1}^s(t) \mathcal{I}_{n_2}^s(t) \mathcal{K}_{n_1 - n_2}^s \left(\text{sinc}(\pi(n_1 - n)) + \text{sinc}(\pi(n_2 - n)) \right). \quad (6.66)$$

À cause des valeurs du sinus cardinal, cela revient au même que de poser

$$\mathcal{K}_{n_1 - n, n_2 - n}^s = \frac{1}{d} \int_{(n - \frac{1}{2})d}^{(n + \frac{1}{2})d} \mathfrak{K}_{n_1, n_2}^s(z) dz \approx \frac{1}{2} c^2 \mathcal{K}_{n_1 - n_2}^s (\delta_{n_1}^n + \delta_{n_2}^n), \quad (6.67)$$

soit

$$P_n(t) \approx \frac{1}{2} \frac{c^2}{d} \sum_s \sum_{n_1} \left(\mathcal{V}_{n_1}^s(t) \mathcal{I}_{n_1}^s(t) - \mathcal{V}_{n_1}^s(t) \mathcal{I}_n^s(t) \right) \mathcal{K}_{n - n_1}^s. \quad (6.68)$$

6.4.4 Simulation de la puissance avec DIMOHA

Nous avons donc deux moyens de calculer la puissance avec DIMOHA. Le premier est d'utiliser la puissance harmonique (6.44) où \tilde{E}_z sera la transformée de Fourier temporelle sur une période $1/F$ du champ électrique 1D $E_z(z, t) = \sum_{s,n} V_n^s(t) E_{-n,z}^s(z)$ (il s'agit donc de l'enveloppe de (3.42) et avec les $E_{n,z}^s$ donnés à la section suivante). Le second moyen est de calculer directement la puissance temporelle par cellule (6.68).

Nous testons maintenant notre calcul de la puissance avec DIMOHA dans les mêmes conditions que pour le moment à la section 6.3.3. La figure 6.3 présente nos résultats pour les deux calculs de la puissance. La puissance temporelle (6.68) est représentée à deux instants : à $t_{\max} = 6$ ns (courbe bleue) et à $t_{\max} + 1/(3F)$ (courbe cyan) après un tiers de période en plus. On voit donc bien la propagation temporelle de cette puissance. Puisque les électrons sont regroupés (*bunching*) avec une période proche de $1/F$ (voir figure 6.1), de larges oscillations apparaissent en régime non-linéaire quand la modulation de la vitesse des électrons est importante. La transformée de Fourier temporelle de la puissance en temps (non représentée sur la figure) redonne quasiment la puissance harmonique.

La figure 6.3 présente aussi une comparaison de la puissance harmonique entre DIMOHA et le code fréquentiel MVTRAD. L'accord entre les deux est excellent pour la puissance fondamentale. Des différences apparaissent pour la seconde harmonique mais, pour ce régime et avec ce type de tube, les mesures expérimentales qui pourraient départager les deux codes sont difficiles à réaliser avec précision. Pour DIMOHA et MVTRAD, nous sommes en dessous de l'incertitude expérimentale (lorsque l'on compare avec un vrai tube).

6.5 Fonction propre unidimensionnelle des champs

Puisque nous avons défini la puissance, nous pouvons maintenant calculer la valeur des champs propres $E_{\beta,z}^s(z)$ et $A_{\beta,z}^s(z)$ ainsi que des formes de champs $E_{n,z}^s(z)$ et $A_{n,z}^s(z)$ en une dimension. Comme ces termes sont indépendants du temps, on peut utiliser l'approche fréquentielle (voir le modèle discret en domaine fréquentiel à la section 8.4).

En domaine fréquentiel, on impose que la variation temporelle des amplitudes du champ électromagnétique (3.23)-(3.24) devienne

$$V_{\beta}^s(t) = \tilde{V}_{\beta}^s e^{i\omega t}, \quad (6.69)$$

$$I_{\beta}^s(t) = \tilde{I}_{\beta}^s e^{i\omega t}. \quad (6.70)$$

On réécrit donc le champ électrique (3.23) unidimensionnel au carré comme

$$|\tilde{E}_z|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{V}_{\beta}^s \tilde{V}_{\beta}^{s*} E_{\beta}^s E_{\beta}^{s*} d(\beta d), \quad (6.71)$$

en imposant le régime monochromatique. D'un autre côté, on redéfinit la puissance électromagnétique à partir du flux du vecteur de Poynting (6.46) comme

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{c^2}{d} \sum_s \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{V}_{\beta}^s \tilde{V}_{\beta}^{s*} \frac{\Omega_{\beta}^s v_g}{d} d(\beta d). \quad (6.72)$$

avec $\tilde{V}_{\beta}^s = i\tilde{I}_{\beta}^s$, un facteur 1/2 en domaine fréquentiel et en utilisant la vitesse de groupe (6.29).

En remplaçant les équations (6.71) et (6.72) dans (6.44), on obtient le champ propre¹

$$\mathbf{E}_{\beta,z}^s(z) = \beta \sqrt{\frac{\Omega_\beta^s v_g Z_c}{d}} e^{-i\beta z}. \quad (6.73)$$

Cette fonction s'obtient uniquement à partir des paramètres à froid du tube, c-à-d., Ω_β^s , $Z_c(\beta)$ et d . On notera que l'on retrouve aussi cette équation pour le champ longitudinal sur l'axe du modèle 3D hélicoïdal présenté au chapitre 9. En rappelant (4.31),² on a

$$\mathbf{A}_{\beta,z}^s(z) = -i\beta \sqrt{\frac{v_g Z_c}{\Omega_\beta^s d}} e^{-i\beta z}. \quad (6.74)$$

La transformée- β inverse de Gel'fand (3.15) nous permet finalement d'obtenir les formes de champs

$$\mathbf{E}_{n,z}^s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}_{\beta,z}^s(z) e^{-in\beta d} d(\beta d), \quad (6.75)$$

$$\mathbf{A}_{n,z}^s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{A}_{\beta,z}^s(z) e^{-in\beta d} d(\beta d). \quad (6.76)$$

¹Minenna *et al* (2018). Notons l'absence d'un facteur 2 dans la racine. Ce facteur, présent dans les références Ryskin *et al* (2007); Bernardi *et al* (2011a), est probablement dû à l'oubli du 1/2 dans la puissance harmonique. Nos mesures numériques confirment l'absence de ce facteur.

² $-i\mathbf{A}_\beta^s = \frac{\mathbf{E}_\beta^s}{\Omega_\beta^s}$

6.6 Avantages du modèle discret N -corps

Nous avons écrit le lagrangien de notre théorie hamiltonienne à N corps (présentée au chapitre 4). Puisque ce lagrangien est invariant par translation, nous avons pu appliquer le théorème de Noether. Nous avons aussi exprimé la conservation de moment canonique. On rappelle que la dynamique de l'interaction onde-particule repose sur l'échange de moment entre ondes et particules. Il était crucial de démontrer cette conservation dans notre dynamique. Nous avons aussi examiné la conservation de moment canonique avec notre algorithme DIMOHA. Cela nous permet d'affirmer la consistance de ce dernier. De plus, la remarque 6.4.1 met en avant la conservation de l'énergie de notre modèle N -corps.

La représentation des champs, et donc toutes les quantités associées, change avec le modèle discret. Il est alors nécessaire de ré-exprimer celles-ci. Nous avons proposé de nouvelles expressions pour la puissance électromagnétique et pour le moment canonique de l'onde en fonction des amplitudes V_n^s, I_n^s du modèle discret.

Avoir une puissance exprimée en domaine temps est important. Celle-ci est généralement calculée pour une fréquence donnée (voir (6.44)), ce qui limite son usage à des signaux monochromatiques ou à des signaux décomposés spectralement. Avec une représentation en temps, on peut obtenir l'intensité temporelle, p. ex. d'un signal de télécommunication. Par contre, dans ce chapitre, pour avoir une expression unidimensionnelle, nous avons dû utiliser l'approximation monochromatique. Cela réduit l'importance de notre expression. Pour remédier à ce problème, il faut être capable d'exprimer les termes $\mathcal{R}_{n_1, n_2}^s(z)$ de l'équation (6.48). Au chapitre 9, nous proposons une résolution exacte de la puissance en domaine temps, s'abstrayant de l'approximation monochromatique, pour un modèle tridimensionnel d'hélice.

On remarquera aussi que Ryskin *et al* (2007, 2009) et Terentyuk (2016) proposent aussi un calcul de la puissance électromagnétique en utilisant le modèle discret. Leur but est notamment d'exprimer la puissance totale comme la somme de la puissance du faisceau avec la puissance stockée dans une cellule plus la puissance entrant dans la cellule moins la puissance sortant de la cellule.

“If you thought that science was certain — well, that is just an error on your part.”

— Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law*, 1965

7

Universalité de la controverse Abraham-Minkowski

Dans ce chapitre, nous traitons de la définition de la quantité de mouvement mécanique et du moment canonique de la lumière et notamment pour les guides d'ondes. Nous n'utiliserons pas explicitement le modèle discret mais une formulation plus générale des champs. Une partie des calculs de ce chapitre sont redondants avec le [chapitre 6](#) mais la finalité est différente.

Du concept de moment,...

D'après la physique aristotélicienne,¹ les objets sont mus par deux mouvements : le mouvement naturel qui ramène les objets vers leur milieu naturel (une pierre qui tombe vers la Terre), et le mouvement violent impulsé par un objet à un autre. Toutefois, l'interruption de l'action qui déplace l'objet entraîne l'arrêt de celui-ci. Pour justifier la trajectoire parabolique d'un lancer de pierre, Aristote explique que la pierre provoque en se déplaçant une raréfaction de l'air derrière elle qui se re-remplit immédiatement, poussant la pierre en avant. Bien qu'Aristote fit consensus jusqu'à Galilée, cette notion sera contestée, notamment par Philoponus qui proposa les bases de la doctrine de l'impetus : lorsque la pierre est lancée, on lui communique un *impetus* qui entretient le mouvement jusqu'à l'épuisement de cet *impetus* au profit du mouvement naturel. Au XIV^e siècle, Buridan décrit l'impetus de manière très similaire à ce qui deviendra plus tard la quantité de mouvement. Notamment, en l'absence de résistance, l'*impetus* d'un objet maintient constante sa vitesse le long d'une ligne droite (on reconnaît les prémices de l'inertie). Buridan définit aussi l'*impetus* comme étant proportionnel à la fois au poids et à la vitesse, même si l'*impetus* était décrit comme une force avec le même statut physique que la gravité, la légèreté, ou le magnétisme. Le concept d'impetus fut abandonné après la description du mouvement inertiel par Galilée, et après la définition de la quantité de mouvement $m\dot{q}$ par Descartes.

¹Sayili 1987

à la controverse *vis viva*,...

Au 17^e siècle, Leibniz pose une des premières formulations de la conservation de l'énergie. Il nomme notamment *vis viva*² (latin pour « force vive ») la quantité $m\dot{q}^2$ qui est aujourd'hui une forme obsolète de l'énergie cinétique. S'ensuit une controverse entre Leibniz et Descartes concernant la définition de la force d'un objet. En effet, les notions de quantité de mouvement et de *vis viva* étaient toutes les deux assimilées au concept de force. La controverse sera résolue au 18^e siècle par Boscovich et d'Alembert qui dissocièrent les concepts d'énergie, de quantité de mouvement et de force. ²Ittis 1971

et à la controverse Abraham-Minkowski.

La controverse Abraham-Minkowski peut être vue comme une version moderne, dans le contexte de l'électrodynamique, de la controverse *vis viva*. Après des suggestions de Kepler, Maxwell (1891) détermine la pression de radiation qu'exerce la lumière du soleil sur la terre. Ce fut Poynting (1884) qui détermina que le flux d'énergie électromagnétique était le produit vectoriel des champs électriques et magnétiques. Dans le vide, il est facile d'identifier le vecteur de Poynting à la densité de quantité de mouvement électromagnétique. Mais dans les milieux diélectriques, l'expression correcte de la quantité de mouvement des champs devient plus difficile à établir. Deux propositions contradictoires pour cette expression sont alors faites à un an d'intervalle. Pour Minkowski (1908), la densité de quantité de mouvement électromagnétique dépend du produit vectoriel du déplacement électrique et de l'induction magnétique, alors que pour Abraham (1909), elle dépend du produit vectoriel des champs électriques et magnétiques. Depuis, le débat a été reformulé de manière équivalente par la mécanique quantique pour exprimer la quantité de mouvement d'un photon. Selon l'approche de Minkowski, respectivement d'Abraham, le moment de ce photon sera proportionnel, respectivement inversement proportionnel, à l'indice de réfraction du milieu (voir ci-dessous).

Une telle contradiction phénoménologique devrait pouvoir être résolue par des expériences. Et effectivement, durant un siècle, de nombreuses expériences¹ ont bien été menées en ce sens, mais celles-ci concluaient, soit dans le sens de Minkowski (p. ex. Ashkin et Dziedzic (1973) ou, plus récemment, Campbell *et al* (2005)), soit dans celui d'Abraham (p. ex. Walker *et al* (1975) ou, plus récemment, Mansuripur (2009)). Le cœur de la controverse est finalement résolu par Barnett (2010) lorsqu'il démontre que les deux théories sont correctes. Depuis lors, cette résolution est globalement acceptée mais la controverse reste toujours étudiée. ¹Brevik 1979; Pfeifer *et al* 2007; Barnett et Loudon 2010

7.1 Controverse Abraham-Minkowski

Dans ce chapitre, nous notons k le nombre d'onde, au lieu de β ailleurs.

7.1.1 Quantité de mouvement de la lumière

La question posée² est simple :

Quelle est la quantité de mouvement de la lumière (photon ou champ électromagnétique) traversant un milieu diélectrique (par exemple de l'eau ou du verre) ?

Cette question semble assez simple pour apparaître dans un cours de physique élémentaire. Et pourtant, elle est à l'origine d'un débat plus que centenaire appelé la controverse Abraham-Minkowski. Selon la théorie de Minkowski,³ la quantité de mouvement de la lumière est ²Leonhardt 2006; Cho 2010 ³Minkowski 1908, 1910

proportionnelle à l'indice de réfraction $n_{\text{ph}} = c/v_{\text{ph}}$. Pour un photon, on aura

$$p_{\text{Mink}} = \frac{n_{\text{ph}}}{c} \hbar \omega, \quad (7.1)$$

avec \hbar la constante de Planck réduite. À l'opposé, selon la théorie d'Abraham,¹ cette quantité de mouvement est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction

$$p_{\text{Abra}} = \frac{1}{n_{\text{ph}} c} \hbar \omega. \quad (7.2)$$

La problématique est la même pour les champs électromagnétiques que pour les photons (voir section 7.1.2). Malgré de nombreux travaux théoriques et expérimentaux,² il fallut un siècle avant que des contributions récentes³ proposent une solution de la controverse, arguant que les deux théories sont correctes. Bien que la résolution soit largement acceptée,⁴ ce dilemme est encore activement étudié dans les matériaux diélectriques.⁵ Par exemple, il a été récemment étendu⁶ au spin et au moment angulaire de la lumière avec pour application les polaritons et les plasmons de surface à l'interface des matériaux diélectriques, mais aussi les guides d'onde diélectriques (fibres optiques) et des fils métalliques (plasmonique). Dans ce chapitre, nous étendons le dilemme au delà des matériaux.

L'origine de la controverse Abraham-Minkowski provient de la différence entre la quantité de mouvement mécanique et le moment canonique. Dans le formalisme hamiltonien, la **quantité de mouvement mécanique** (dite moment mécanique, *mechanical momentum* ou *kinetical momentum*) d'une particule (r) est définie comme le produit de la masse par la vitesse

$$\mathbf{p}_{\text{kin},r} = m \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (7.3)$$

dont l'évolution est souvent liée à une force. D'un autre côté, le **moment canonique** (*canonical momentum*, moment conjugué de Lagrange, ou *conjugate momentum*), est défini par la relation

$$\mathbf{p}_{\text{can},r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r}, \quad (7.4)$$

intimement liée à l'action, avec L le lagrangien. Dans les autres chapitres, nous avons utilisé la notation $\mathbf{p}_{\text{can},r} = \mathbf{p}_r$. Dans la littérature anglaise, ces deux définitions sont souvent simplement dénommées *momentum* et il existe encore d'autres dénominations (p. ex. *pseudomomentum* pour le moment canonique). D'un point de vue personnel, une appellation cohérente pour la quantité de mouvement mécanique serait le « moment cartésien ».

Dans les cas simples de la mécanique newtonienne classique et en l'absence de champ électromagnétique, la quantité de mouvement et le moment conjugué d'une particule coïncident, ce qui peut porter à confusion. Cela n'est plus le cas en physique quantique ou en électrodynamique. Dans notre contexte, en présence d'un champ magnétique, le moment canonique⁷ d'une particule est $\mathbf{p}_{\text{can},r} = \mathbf{p}_{\text{kin},r} + e\mathbf{A}(\mathbf{q}_r)$, avec e la charge et \mathbf{A} le potentiel vecteur tel que $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

La différence entre les deux termes vient de l'implication du champ. On s'attend donc à observer une différence entre la quantité de mouvement mécanique et le moment canonique de la lumière : c'est précisément là d'où provient la controverse. Pour les champs électromagnétiques et les photons, le moment canonique est l'expression de Minkowski \mathbf{p}_{Mink} (moment

¹Abraham 1909, 1910

²Jones et Richards (1954); Peierls (1976); Jones (1978); Brevik (1979); Pfeifer *et al* (2007). Voir aussi Griffiths (2012) et McDonald (2017) pour plus de 300 références sur le sujet.

³Hinds et Barnett 2009; Barnett 2010; Barnett et Loudon 2010

⁴Milonni et Boyd 2010; Kemp 2011; Garrison and Chiao 2004; Philbin 2012; Dodin et Fisch 2012

⁵Silveirinha 2017; Brevik 2018

⁶Bliokh *et al* 2017a,b; Picardi *et al* 2018

⁷Jackson 1999; Griffiths 1999

de Minkowski) tandis que la quantité de mouvement mécanique (moment mécanique) des champs est l'expression d'Abraham \mathbf{p}_{Abra} (moment d'Abraham).

7.1.2 Résolution de la controverse dans les milieux diélectriques

Dans les milieux diélectriques, on admettra¹ que la densité de quantité de mouvement mécanique, dite d'Abraham, est

$$\mathbf{g}_{\text{Abra}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}, \quad (7.5)$$

et que la densité de moment canonique, dite de Minkowski, est

$$\mathbf{g}_{\text{Mink}} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (7.6)$$

pour les champs électromagnétiques. On notera les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} , le déplacement $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, l'induction $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, la permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, la perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0$, et la célérité de la lumière dans le vide $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. De la même manière, on admettra² aussi que la quantité de mouvement mécanique, dite d'Abraham, est

$$p_{\text{Abra}} = \frac{\hbar k}{n_{\text{ph}} n_{\text{g}}} = \frac{\hbar \omega}{n_{\text{g}} c}, \quad (7.7)$$

(on notera le remplacement de n_{ph} par n_{g} par rapport à (7.2)), et que le moment canonique, dit de Minkowski, est

$$p_{\text{Mink}} = \hbar k = n_{\text{ph}} \hbar \frac{\omega}{c}, \quad (7.8)$$

pour un photon,³ avec $k = \omega/v_{\text{ph}} = n_{\text{ph}} \omega/c$ le nombre d'onde, ω la pulsation et v_{ph} la vitesse de phase. L'indice de réfraction est $n_{\text{ph}} = c/v_{\text{ph}}$, et l'indice de groupe dans un milieu dispersif est $n_{\text{g}} = c/v_{\text{g}}$, avec la vitesse de groupe $v_{\text{g}} = \partial_k \omega$. Puisque

$$n_{\text{g}} = n_{\text{ph}} + \omega \frac{\partial n_{\text{ph}}}{\partial \omega}, \quad (7.9)$$

on peut considérer que $n_{\text{g}} \approx n_{\text{ph}}$, pour des fréquences basses ou si n_{ph} est indépendant de la pulsation ω comme dans les milieux non-dispersifs. Pour les photons, il y a alors un rapport n_{ph}^2 entre la quantité de mouvement mécanique et le moment canonique. Si on définit $n_{\text{ph}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, et $v_{\text{ph}} = (\epsilon \mu)^{-1/2}$ (pour un milieu homogène, isotrope, non-dispersif et indépendant du temps), on obtient le même rapport n_{ph}^2 pour les champs classiques. Dans les milieux dispersifs, un rapport $n_{\text{ph}} n_{\text{g}}$ est admis pour les photons⁴ et parfois utilisé⁵ pour les champs classiques, même si aucun consensus n'est établi pour les champs.

D'après Barnett (2010),⁶ dans les matériaux diélectriques et magnétiques, les deux quantités sont liées par deux expressions égales du moment total

$$\mathbf{p}_{\text{can}}^{\text{matter}} + \mathbf{p}_{\text{Mink}} = \mathbf{p}_{\text{kin}}^{\text{matter}} + \mathbf{p}_{\text{Abra}}, \quad (7.10)$$

avec $\mathbf{p}_{\text{can}}^{\text{matter}}$ le moment canonique de la matière et $\mathbf{p}_{\text{kin}}^{\text{matter}}$ la quantité de mouvement mécanique de la matière. L'équation (7.10) résout la controverse en montrant que chacune des deux théories donne une expression pour le moment total.

¹Pfeifer *et al* 2007; Milonni et Boyd 2010; Kemp 2011

²Pfeifer *et al* 2007; Milonni et Boyd 2010; Kemp 2011

³Certains auteurs posent $k = \omega/c$ avec $p_{\text{Mink}} = n_{\text{ph}} \hbar k$, $p_{\text{Abra}} = \hbar k/n_{\text{g}}$.

⁴Garrison and Chiao 2004

⁵Jones 1978; Pfeifer *et al* 2007; Philbin 2012; Dodin et Fisch 2012

⁶Hinds et Barnett 2009; Barnett et Loudon 2010

Remarque 7.1.1 Pour observer rapidement la controverse pour un photon, on peut utiliser l'analogie simple de Leonhardt (2006). On rappelle que l'énergie d'un photon est $E_0 = \hbar\omega$. Ensuite, en utilisant l'expression de de Broglie $p = \hbar k$, avec le nombre d'onde $k = \omega/v_{\text{ph}} = n_{\text{ph}}\omega/c$, on obtient que $p = n_{\text{ph}}E_0/c$, qui est la formule de Minkowski. D'un autre côté, si on utilise la formule d'équivalence masse-énergie d'Einstein $E_0 = m_\omega c^2$, avec la quantité de mouvement du photon $p = m_\omega v_{\text{ph}}$, avec m_ω la masse effective du photon, on trouve que $p = E_0/(n_{\text{ph}}c) = \hbar k/n_{\text{ph}}^2$ qui est la formule d'Abraham. On retrouve donc bien un facteur n_{ph}^2 entre les deux expressions. Le problème provient du fait que $\hbar k$ est le moment canonique, alors que $\hbar k/n_{\text{ph}}^2$ est la quantité de mouvement mécanique du photon.

7.1.3 Extension de la controverse

Il pourrait sembler que le dilemme n'intervienne que lorsque la lumière se propage dans un milieu, et donc que l'effet provienne de la permittivité ou la perméabilité du matériau. Pourtant, ce n'est pas le cas. Le mécanisme clé du dilemme Abraham-Minkowski est la modification de la vitesse de l'onde ou du photon par rapport à la célérité de la lumière dans le vide, ou, ce qui est équivalent, la modification du nombre d'onde, peu en importe la raison. Bien que le dilemme n'ait été observé que dans la matière, dans ce chapitre nous présentons deux systèmes où les causes de la modification de la vitesse de la lumière sont complètement différentes. Le premier système considère la propagation des champs électromagnétiques à l'intérieur du guide d'onde dispersif métallique d'un tube électronique. Le second système considère les ondes de Langmuir dans les plasmas dans le contexte de l'amortissement Landau. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le premier système car les définitions de force et d'énergie dans le vide sont très bien établies. De plus, nous avons développé l'algorithme DIMOHA et l'avons validé au chapitre 5 avec des mesures expérimentales. Nous pouvons utiliser ce dernier pour observer la controverse dans un tube à ondes progressives. Pour les deux systèmes, la résolution du dilemme va plus loin que la résolution pour les matériaux, puisqu'elle implique un moment circulant (moment passant, coulant ou *flowing momentum*) associé au tenseur de contrainte de Maxwell. Nous rappelons que nous utilisons la description N -corps.

Peu importe la cause, lorsque la vitesse de la lumière est ralentie, cela conduit à un indice de réfraction $n_{\text{ph}} = c/v_{\text{ph}}$, avec la vitesse de phase v_{ph} , et, pour les systèmes dispersifs (n_{ph} dépendant de la fréquence), un indice de groupe $n_g = c/v_g$, avec la vitesse de groupe v_g . Dans la matière, les deux indices (et vitesses) sont liés naturellement à la permittivité et la perméabilité. Dans les guides d'onde, tels que les cavités résonantes d'une ligne à retard, c'est la géométrie de l'appareil qui détermine les deux vitesses. La relation de dispersion peut s'obtenir¹ à partir des équations de Maxwell dans le vide sans source en résolvant les équations d'ondes avec les conditions de bord des parois métalliques. Par exemple, l'hélice métallique d'un tube à ondes progressive (TOP) (voir chapitre 9) peut ralentir la vitesse de phase d'un facteur 7. La figure 7.1 présente la puissance de sortie pour les mesures d'un TOP spatial en comparaison avec l'algorithme DIMOHA utilisé ci-dessous. Des grands indices de réfraction (p. ex. $n \approx 7$) sont courants dans les guides d'ondes, rendant la différence entre les moments d'Abraham et de Minkowski plus spectaculaire. Les effets sur la décélération de la propagation de l'onde sont les mêmes que pour la matière, mais il est plus simple d'étudier la controverse dans les guides d'ondes car nous pouvons partir des équations de Maxwell dans le vide. On considérera un faisceau se propageant en interaction avec l'onde ($|\mathbf{v}| \simeq v_\phi$). Pour

¹Jackson 1999

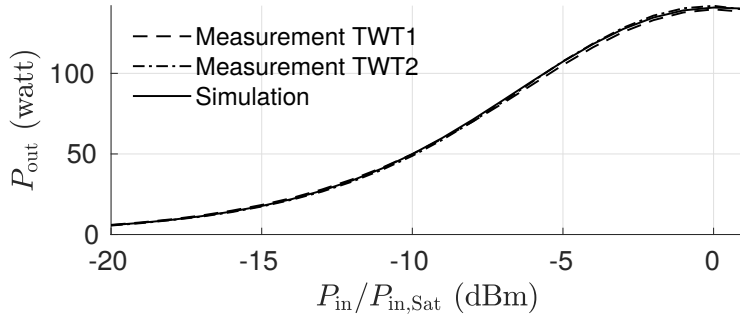


FIGURE 7.1 – [Minenna et al \(2019e\)](#). Comparaison de la puissance de sortie entre les mesures de deux tubes à ondes progressives (construits avec les mêmes spécifications) et notre algorithme temporel DIMOHA. Il s'agit du même TOP en bande Ku que celui utilisé à la [section 5.6](#). L'erreur typique des mesures est d'1 W.

un faisceau d'intensité modérée, les particules ne modifient pas la relation de dispersion du guide d'onde, et donc l'échange de moment ne modifie pas l'indice de réfraction.

7.2 Résolution pour les guides d'onde

Retrouver les expressions d'Abraham et Minkowski pour les guides d'onde requiert une définition des indices de réfraction et de groupe dans ce domaine. Nous proposons d'utiliser la décomposition du modèle discret du [chapitre 3](#) en séparant les dépendances spatiales (\mathbf{r}) et temporelles (t) des champs électromagnétiques

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \mathcal{V}_k(t) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}), \quad (7.11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_k i\mathcal{I}_k(t) \mathcal{H}_k(\mathbf{r}), \quad (7.12)$$

avec k le nombre d'onde lié à la propagation de l'onde dans le guide d'onde. Le nombre imaginaire i dans l'équation (7.12) simplifie la connexion entre les équations d'évolution provenant de Maxwell et de Hamilton. Une somme au lieu de l'intégrale sur les nombres d'onde k est choisie par commodité. En théorie, une somme sur tous les modes de propagation (s dans les autres chapitres) est nécessaire mais, par simplicité, seul le mode dominant est considéré ici ($s = 0$). En utilisant la jauge de Weyl, le champ électrique devient $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$, avec le potentiel vecteur $\mathbf{A} = \sum_k i\mathcal{I}_k \mathcal{A}_k$. Puisque l'on travaille dans le vide, nous utilisons les mêmes coefficients \mathcal{I}_k pour le champ magnétique et pour le potentiel vecteur.

Avec cette décomposition des champs, on obtient les équations de Helmholtz (Maxwell sans source) $\text{rot } \mathcal{E}_k = -i\mu_0\omega_k \mathcal{H}_k$, et $\text{rot } \mathcal{H}_k = i\epsilon_0\omega_k \mathcal{E}_k$, avec les valeurs propres (pulsations) ω_k . On normalise les champs propres $\mathcal{E}_k, \mathcal{H}_k$, par

$$\Omega_k = \int_{V_0} \epsilon_0 |\mathcal{E}_k(\mathbf{r})|^2 dV = \int_{V_0} \mu_0 |\mathcal{H}_k(\mathbf{r})|^2 dV. \quad (7.13)$$

Avec cette décomposition les équations d'évolution de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday deviennent respectivement

$$\dot{\mathcal{V}}_k(t) = \partial_t \mathcal{V}_k = -\mathcal{I}_k(t) \omega_k + \sum_i e \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \frac{\mathcal{E}_k^*(\mathbf{q}_i)}{\Omega_k}, \quad (7.14)$$

$$\dot{\mathcal{I}}_k(t) = \partial_t \mathcal{I}_k = \mathcal{V}_k(t) \omega_k. \quad (7.15)$$

On peut alors réexprimer l'énergie¹ (hamiltonien) des champs électromagnétiques dans le vide $\frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) dV$ comme²

¹Jackson 1999

²André et al 2013;
Minenna et al 2018

$$H_{\text{em}} = \sum_k \frac{1}{2} \left(\mathcal{V}_k(t) \mathcal{V}_k^*(t) + \mathcal{I}_k(t) \mathcal{I}_k^*(t) \right) \Omega_k. \quad (7.16)$$

Dans cette représentation, \mathcal{V}_k et \mathcal{I}_k sont les variables canoniques avec \mathcal{V}_k le « moment conjugué » et \mathcal{I}_k la « coordonnée généralisée ». La normalisation (7.13) assure que leurs crochets de Poisson sont canoniques en posant $\omega_k = \Omega_k$.

La dynamique des particules chargées (r) dans les champs électromagnétiques est dictée par la force de Lorentz $m\ddot{\mathbf{q}}_r = -e\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_r) + e\dot{\mathbf{q}}_r \times \mu_0\mathbf{H}$, menant à l'énergie des particules¹ (hamiltonien de couplage) $H_{\text{cpl}} = \sum_i (2m)^{-1} |\mathbf{p}_{\text{can},r} - e\mathbf{A}(\mathbf{q}_r)|^2$. Les expressions relativistes laissent inchangé le moment des champs. À partir de l'énergie totale (hamiltonien auto-cohérent) $H_{\text{tot}} = H_{\text{em}} + H_{\text{cpl}}$, les équation de Hamilton sont les équations (7.14)-(7.15) si $-i\omega_k \mathcal{A}_k = \mathcal{E}_k^*$, en accord avec la jauge de Weyl et en posant $\Omega_k = \omega_k$.

Le lagrangien du système est obtenu avec la transformation de Legendre (4.2), sous la forme $L_{\text{tot}} = \sum_r \mathbf{p}_{\text{can},r} \cdot \dot{\mathbf{q}}_r + \sum_k \mathcal{V}_k \dot{\mathcal{I}}_k - H_{\text{tot}}$. Ce lagrangien est invariant par les translations spatiales $\mathbf{q}_r \mapsto \mathbf{q}_r + \delta_r$ et $\mathcal{I}_k \mapsto \mathcal{I}_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta_r}$. Donc, la variation infinitésimale de celui-ci, c-à-d. la force généralisée du système

$$\frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \delta_r} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_r \dot{\mathbf{p}}_{\text{can},r} + \sum_k i\mathbf{k} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \right), \quad (7.17)$$

doit s'annuler. L'application du théorème de Noether mène à la formulation d'un premier moment total conservé dans les guides d'onde

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum_r \mathbf{p}_{\text{can},r} + \sum_k i\mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \mathbf{k}, \quad (7.18)$$

qui correspond à la somme des moments canoniques des ondes et des particules, avec le moment de Minkowski dans les guides d'onde

$$\mathbf{p}_{\text{Mink}}^{\text{wg}} = \sum_k i\mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \mathbf{k}. \quad (7.19)$$

D'un autre côté, la dérivée de la normalisation (7.13) permet de calculer la vitesse de groupe $v_g = \partial_k \omega_k$, avec $\omega_k = \Omega_k$. En utilisant la dérivée des équations de Helmholtz, l'identité $\mathfrak{B} \cdot (\nabla \times \mathfrak{A}) = \nabla \cdot (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) + \mathfrak{A} \cdot (\nabla \times \mathfrak{B})$, pour les fonctions arbitraires \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , et le théorème de la divergence, on obtient $\mathbf{v}_g = (1/\omega_k) \int_V \mathcal{E}_k^*(\mathbf{r}) \times \mathcal{H}_k(\mathbf{r}) dV + \text{c.c.}$, avec c.c. dénotant le complexe conjugué. Un simple réarrangement, avec $\omega_k = kv_\phi = kc/n_{\text{ph}}$ et $v_g = c/n_g$, amène à la relation pour le vecteur d'onde

$$\mathbf{k} = \frac{n_{\text{ph}} n_g}{c^2} \int_V \mathcal{E}_k^*(\mathbf{r}) \times \mathcal{H}_k(\mathbf{r}) dV + \text{c.c.}, \quad (7.20)$$

dans le régime monochromatique où les indices de réfraction et de groupe sont considérés comme des constantes. Ainsi, l'équation (7.19) mène à la densité de moment de Minkowski

$$\mathbf{g}_{\text{Mink}}^{\text{wg}}(\mathbf{r}, t) = \frac{n_{\text{ph}} n_g}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (7.21)$$

pour les guides d'onde dispersifs dans le régime monochromatique (voir la différence avec les matériaux à la section 7.1.2).

D'un autre côté, le moment d'Abraham est obtenu comme dans le vide en utilisant la reformulation² de la densité de force de Lorentz

¹Jackson 1999;
Landau et al 1984

²Jackson 1999;
Griffiths 1999

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \partial_t(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2, \quad (7.22)$$

obtenue à partir des équations de Maxwell avec sources, avec le tenseur de contraintes de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}$, et la densité de moment d'Abraham

$$\mathbf{g}_{\text{Abra}}^{\text{wg}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (7.23)$$

identique à celle pour les matériaux (voir [section 7.1.2](#)). Pour les guides d'onde, on utilise la décomposition (7.11)-(7.12) et l'équation du vecteur d'onde (7.20) pour réexprimer l'équation (7.23) comme le moment d'Abraham

$$\mathbf{p}_{\text{Abra}}^{\text{wg}} = \sum_k \frac{1}{n_{\text{ph}} n_{\text{g}}} i \mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \mathbf{k}. \quad (7.24)$$

Le dernier élément manquant pour résoudre le dilemme Abraham-Minkowski dans les guides d'onde est le lien entre les deux moments (7.19) et (7.24). Nous obtenons ce lien grâce aux deux bilans de force du système : le premier provenant du moment canonique de Noether (7.17), $\sum_r \dot{\mathbf{p}}_{\text{can},r} + \dot{\mathbf{p}}_{\text{Mink}} = 0$, et le second provenant de la force de Lorentz (7.22), $\sum_r \dot{\mathbf{p}}_{\text{kin},r} + \dot{\mathbf{p}}_{\text{Abra}} - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = 0$. En comparant les deux, on obtient une seconde formulation pour le moment total conservé

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum_r \mathbf{p}_{\text{can},r} + \mathbf{p}_{\text{Mink}} = \sum_r \mathbf{p}_{\text{kin},r} + \mathbf{p}_{\text{Abra}} + \mathbf{p}_{\text{flow}}, \quad (7.25)$$

qui est la relation clé pour résoudre le dilemme. Dans notre représentation des champs, cela nous donne le moment circulant comme

$$\mathbf{p}_{\text{flow}} = \sum_k \left(1 - \frac{1}{n_{\text{ph}} n_{\text{g}}}\right) i \mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \mathbf{k} + \sum_{r,k} e i \mathcal{I}_k \mathcal{A}_k(\mathbf{q}_r), \quad (7.26)$$

qui est exactement la différence requise pour valider l'équation (7.25).

Plus important, l'utilisation de la force de Lorentz fait introduire la dérivée temporelle¹ [¹Griffiths 1999](#) $\dot{\mathbf{p}}_{\text{flow}} = - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$ du moment circulant quittant le volume V . Dès qu'une amplification ou une atténuation se passe, le système n'est plus spatialement homogène car le champ exerce un effort. De ce fait, le bilan de force doit être complété avec le tenseur de contraintes de Maxwell. En effet, la dérivée temporelle de l'équation (7.26) coïncide avec l'intégrale de la divergence du tenseur de contrainte² [²Jackson 1999; Griffiths 1999](#)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}. \quad (7.27)$$

La différence clé entre l'équation (7.25) et la résolution du dilemme dans les matériaux³ [³Barnett 2010; Barnett et Loudon 2010](#) est l'ajout du moment circulant, qui devient cruciale pour les amplificateurs à guides d'onde (alors qu'il peut disparaître dans un milieu passif).

Remarque 7.2.1 On notera qu'avec les nouvelles formes pour Abraham et Minkowski, on peut forcer la quantification en posant $i \mathcal{V}_k^* \mathcal{I}_k \mapsto \hat{N}_k \hbar$, dans les équations (7.19) et (7.24), pour quantifier les champs classiques en termes de photons avec l'opérateur \hat{N}_k . Bien que sommaire et ne reposant sur aucune démonstration, cette procédure montre que le débat se poursuivra pour les photons. En utilisant cette transformation, le moment de Minkowski, et respectivement Abraham, pour un seul photon prend la forme connue $p_{\text{Mink}} = \hbar k$, et respectivement $p_{\text{Abra}} = \hbar k / (n_{\text{ph}} n_{\text{g}})$ (voir [section 7.1.2](#)).

7.3 Validation avec notre algorithme DIMOHA

Pour valider les deux expressions de l'échange de moment total (7.25), nous utilisons notre algorithme DIMOHA (voir chapitre 5). Cette validation a déjà été faite à la section 6.3.3 pour l'échange de moment canonique avec notre théorie N -corps du modèle discret. Nous reprenons cette approche en y ajoutant l'échange de moment mécanique.

Comme DIMOHA utilise une représentation des champs par cellule, nous devons adapter nos expressions des moments d'Abraham et de Minkowski. Pour le moment de Minkowski (7.19), nous reprenons l'équation (6.42) par cellule

$$p_{\text{Mink},n,z}^{\text{wg}}(t) \approx \frac{1}{2} n_{\text{ph}} n_{\text{g}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n'} \left(V_n^s I_{n'}^s - V_{n'}^s I_n^s \right) K_{n-n'}^s, \quad (7.28)$$

qui avait été obtenue avec l'application du théorème de Noether pour notre théorie N -corps du modèle discret. Cette équation repose sur l'approximation monochromatique du chapitre précédent. Nous posons le moment d'Abraham par cellule comme

$$p_{\text{Abra},n,z}^{\text{wg}}(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n'} \left(V_n^s I_{n'}^s - V_{n'}^s I_n^s \right) K_{n-n'}^s, \quad (7.29)$$

respectant (7.24). L'amplification de l'onde étant de presque 50 dB dans notre TOP (voir figure 7.1), on négligera le moment initial de l'onde (infime devant le moment final). Dans un TOP, la vitesse d'injection $\dot{q}_r(0) = v_{\text{el},0}$ (donnée à partir de la cathode (2.2)) des particules est très grande. On ne regarde donc que la différence de moment pour les particules. Exactement comme l'équation (6.43), on note le moment canonique perdu (échangé avec l'onde) des particules par cellule comme

$$-p_{\text{can},n,z}^{\text{xchg}} = - \sum_{r'(n)} \left(p_{r'}(t) - p_{\text{el},0} \right), \quad (7.30)$$

et on prendra la quantité de mouvement mécanique perdue (échangée avec l'onde) des particules par cellule

$$-p_{\text{kin},n,z}^{\text{xchg}} = - \sum_{r'(n)} \gamma_{r'} m_e \left(\dot{q}_{r'}(t) - v_{\text{el},0} \right), \quad (7.31)$$

avec $r'(n) : |q_{r'} - nd| < d/2$ pour les particules dans la cellule n et en rappelant que DIMOHA est relativiste. Pour le moment circulant par cellule dans la représentation du modèle discret, on pose

$$p_{\text{flow},n,z} \approx \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n'} \left(n_{\text{ph}} n_{\text{g}} - 1 \right) \left(V_n^s I_{n'}^s - V_{n'}^s I_n^s \right) K_{n-n'}^s + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{r'(n)} \sum_{n'} \text{eil}_{n'}^s A_{n'}^s(q_{r'}(t)), \quad (7.32)$$

à partir de l'équation (7.26), dans l'approximation monochromatique du chapitre précédent. On remarquera que le théorème de Noether s'applique à un système invariant par translation et que, puisque nos simulations sont ouvertes sur les bords, on s'attend à quelques écarts.

Pour notre simulation avec DIMOHA, on prend un tube fictif avec des caractéristiques similaires aux TOPs simulés à la figure 7.1 avec un grand $n_{\text{ph}} n_{\text{g}}$. La simulation est réalisée après avoir retiré toutes les caractéristiques spécifiques des tubes réels (pertes dans le guide d'onde, ajustements industriels, adaptations imparfaites) pour limiter l'interaction à l'échange de moment (7.25). Les paramètres de fonctionnement (tels que courant et potentiel de cathode, impédances de couplage et vitesse de phase) sont choisis pour que l'amplification atteigne la

saturation de puissance avant la fin du tube. À cause de la variation du nombre de particules dans chaque cellule, nous faisons une moyenne temporelle de nos différents moments.

La [figure 7.2](#) montre un exemple d'échange de moment par cellule dans un TOP en utilisant des paramètres similaires à la [figure 7.1](#). Comme on peut le voir, l'échange de moment, qu'il soit canonique ou mécanique, est respecté. Dans les TOPs à hélice, les champs sont quasiment longitudinaux, menant à une très faible différence entre la quantité de mouvement mécanique et le moment canonique des particules. De plus, comme le moment d'Abraham est largement plus petit que le moment de Minkowski dans les tubes à électrons typiques à cause du large facteur $n_{ph}n_g$, le moment circulant ne peut absolument pas être ignoré.

7.4 Occurrence pour les plasmas

Le dilemme ne s'étend pas qu'aux guides d'onde sous vide mais devrait apparaître aussi pour tout système onde-particule (avec $v_{ph} \neq c$) impliquant un échange de moment. Probablement, le phénomène le plus fameux dans ces systèmes est l'amortissement Landau¹ (et la croissance Landau (*bump-on-tail instability*) qui a la même origine²) en physique des plasmas (système faisceau-plasma). Dans ce contexte, le milieu de propagation des ondes de Langmuir est un plasma, et la relation de dispersion provient des fonctions de distribution des électrons (*bulk*) en vitesse et position. L'interaction entre les ondes et les électrons du faisceau (*beam*) est l'élément clé de l'amortissement Landau. On rappelle qu'au [chapitre 1](#), nous avons vu le lien entre l'amortissement Landau et les guides d'onde et que cette connexion est déjà établie depuis des décennies.³ En plus de la transition vers le chaos,⁴ la synchronisation non-linéaire entre des ondes et un faisceau d'électrons est étudiée⁵ avec un TOP. Dans les deux cas, la physique est essentiellement la même, reposant sur l'échange de moment, mais la différence majeure est l'origine de la relation de dispersion pour la propagation des ondes.

Pour étudier l'amortissement Landau, l'approche N -corps hamiltonienne⁶ a déjà démontré que la dynamique conserve un moment total analogue à l'équation (7.18). Cette conservation a été démontrée expérimentalement⁷ et théoriquement⁸ (voir [section 1.3](#)), sans identifier le moment de Minkowski. On notera que, dans ce cas, les ondes de Langmuir sont considérées comme électrostatiques, ce qui implique que la quantité de mouvement mécanique et le moment canonique des particules sont égaux ($\mathbf{p}_{can,r} = \mathbf{p}_{kin,r}$). Pourtant, le dilemme Abraham-Minkowski s'applique toujours grâce au crucial moment circulant. Pour trouver le moment d'Abraham et le moment circulant, on peut utiliser une densité de force similaire à l'équation (7.22), mais maintenant avec un tenseur de contraintes de Maxwell dépendant de la fonction de distribution diélectrique. Cette approche a déjà été suivie dans les plasmas par Klíma et Petržílka (1972, 1978) pour obtenir le moment d'Abraham et le moment circulant. On notera que Klíma et Petržílka (1975) étaient près d'obtenir à la fois Abraham et Minkowski pour les fluides diélectriques avec cette approche.

7.5 Universalité de la controverse

La représentation de l'échange de moment (mécanique ou canonique) pour les guides d'onde sous vide était mal modélisée. Pour les guides d'onde sous vide des tubes électroniques et pour les plasmas, on peut obtenir deux formulations différentes de la conservation du moment total : une avec le moment canonique (Minkowski) provenant d'un système hamiltonien ou de sa force associée et une avec la quantité de mouvement mécanique (Abraham) provenant d'une reformulation de la force impliquant le tenseur de contraintes de

- ¹Landau 1946; Mouhot et Villani 2011
²Escande et al 2018
³Dimonte 1977; Tsunoda et al 1991
⁴Doveil et al 2005b
⁵Doveil et al 2005a
⁶Mynick et Kaufman 1978; Elskens et Escande 2003
⁷Doveil et al 2005a
⁸Elskens et Escande 2003; Escande et al 2018

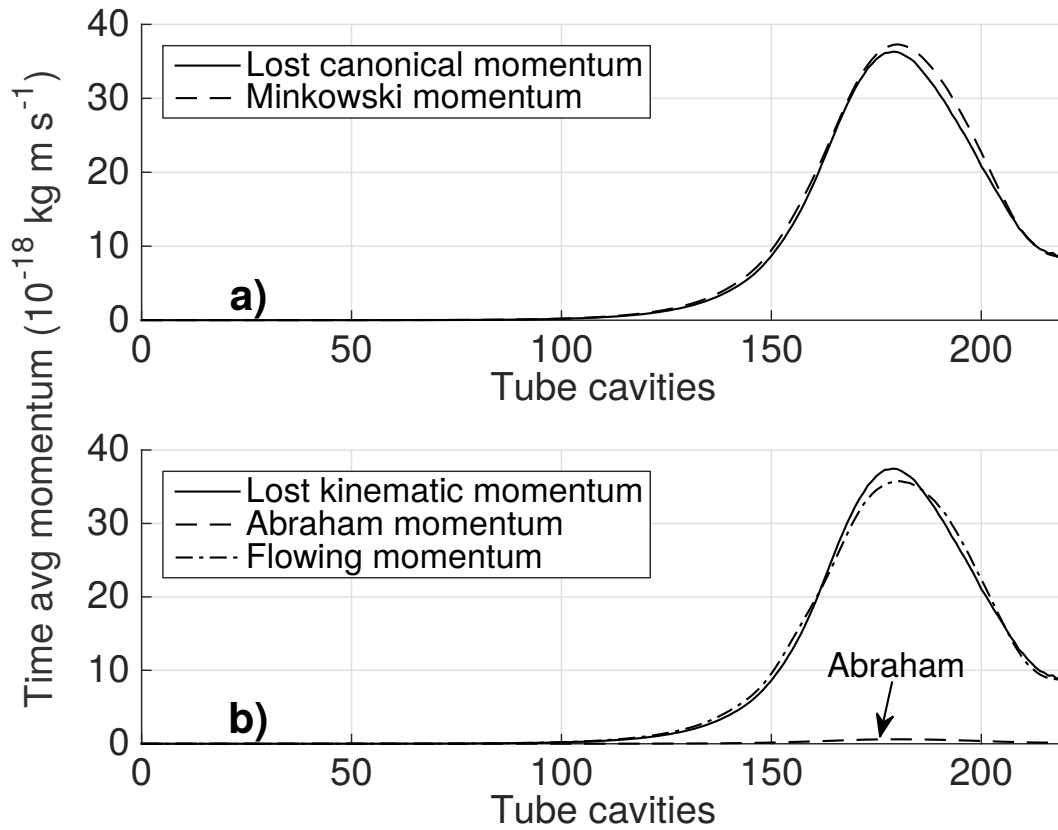


FIGURE 7.2 – Conservation du moment (moyenne par période temporelle $2\pi/\omega_k$) par cavité (cellule du guide d'onde) pour un tube à ondes progressives. La simulation est faite en régime monochromatique avec l'algorithme DIMOHA. Ce tube est fictif (sans pertes) mais les caractéristiques du guide d'onde (telles que les dimensions et la relation de dispersion) sont similaires à celui de la figure 7.1. Pour nous assurer de la conservation du moment total, nous avons adapté la simulation pour ne considérer que l'échange onde-particule dans le système et nous avons retiré toutes les pertes et les interactions externes. La vitesse du faisceau d'électrons est ajustée pour être plus rapide que la vitesse de phase (donnée par la géométrie de la structure) afin d'imposer une amplification de l'onde depuis le début. Après 175 cavités, le piégeage non-linéaire des particules (voir chapitre 1) commence à réduire le moment de l'onde. a) Conservation de l'expression (7.25) $\sum_r \mathbf{p}_{\text{can},r} + \mathbf{p}_{\text{Mink}}$ par cavité. Ligne continue : moment canonique perdu (transféré à l'onde) par les particules (représenté positivement) simulé en faisant la moyenne temporelle de (7.30). Ligne discontinue : moment de Minkowski simulé en faisant la moyenne temporelle de (7.32). b) Conservation de l'expression (7.25) $\sum_r \mathbf{p}_{\text{kin},r} + \mathbf{p}_{\text{Abra}} + \mathbf{p}_{\text{flow}}$ par cavité. Ligne continue : quantité de mouvement mécanique perdu (transféré à l'onde) par les particules (représenté positivement) simulé en faisant la moyenne temporelle de (7.31). Ligne discontinue : moment d'Abraham simulé en faisant la moyenne temporelle de (7.29). Ligne traitillée : moment circulant (*flowing*) sortant des cavités, simulé en faisant la moyenne temporelle de (7.32). La conservation du moment total (7.25) est observée puisque le moment perdu (transféré à l'onde) par les particules coïncide avec le moment de l'onde. Dans cet exemple, le rapport entre les moments de Minkowski et Abraham est de $n_{\text{ph}}n_g = 62.2$, avec $n = 7.2$ et $n_g = 8.6$, en accord avec les paramètres du tube. L'échelle en 10^{-18} N s résulte du fait que la masse des électrons est très faible et le moment des champs est pondéré par c^{-2} (caché dans les K_n^s , voir équation (6.37)).

Maxwell. On peut donc conclure que le dilemme Abraham-Minkowski s'applique aux guides d'onde et aux plasmas.

Ce dilemme est déjà bien établi pour les matériaux diélectriques¹, incluant des observations récentes² dans les systèmes de plasmons et polaritons, les fibres optiques cylindriques et les fils diélectriques. Trouver deux moments de la lumière dans les guides d'onde sous vide, au-delà du cas standard de la matière, implique que la différence entre Abraham et Minkowski est une problématique universelle, pertinente pour de nombreux domaines de la physique. Étudier l'échange de moment dans l'interaction onde-particule requiert de prendre en compte le dilemme. Ce dernier résulte de la modification de la vitesse de phase dans la propagation de l'onde et nous nous attendons à voir ce débat apparaître dans de nombreux domaines où la dynamique résulte d'un échange de moment entre ondes et particules. De plus, comme les simulations de la [figure 7.2](#) sont réalisées avec notre algorithme DIMOHA et que nous voulons l'utiliser pour des applications industrielles, la distinction entre les approches d'Abraham et Minkowski (avec le tenseur de contraintes) est pertinente pour les tubes électroniques actuels.

Pour les guides d'onde et les plasmas, à la différence des matériaux, la résolution de la controverse implique de prendre en compte le moment circulant, signifiant que le dilemme met aussi en évidence l'impact du tenseur de contraintes de Maxwell sur l'expression du moment de la lumière.

¹Brevik 1979; Pfeifer *et al* 2007; Barnett et Loudon 2010; Milonni et Boyd 2010; Kemp 2011
²Bliokh *et al* 2017a,b; Picardi *et al* 2018

Cinquième partie

Approches fréquentielle et
tridimensionnelle du modèle
discret

“The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not ‘Eureka!’, but ‘That’s funny ...’ ”

— Isaac Asimov, rapportée par le *quote of the day* du logiciel fortune (Unix), Juin 1987

8

Modèle discret linéaire en domaine fréquentiel

Dans ce chapitre, au lieu d'utiliser le modèle N -corps pour représenter les particules, nous emploierons le traditionnel modèle de faisceau fluide en régime linéaire. Une comparaison entre le modèle de Pierce (un standard pour les TOPs) et le modèle discret est aussi réalisée, permettant de valider analytiquement ce dernier. Ce travail sur le modèle discret en domaine fréquentiel a été réalisé en collaboration avec N. M. Ryskin et A. G. Terentyuk de l'université de Saratov.

Des bases théoriques avant l'invention du TOP,...

Pour développer un tube à onde progressive, deux éléments fondamentaux doivent être associés : une ligne à retard pour guider l'onde et un faisceau d'électrons pour le transfert d'impulsion. La modification de la vitesse de phase par le guide d'onde permet à l'onde d'être synchrone avec la vitesse des particules. La première ligne à retard fut construite par [Hertz \(1888\)](#). S'ensuivirent les premiers travaux théoriques sur les guides d'onde par [Thomson \(1893\)](#), [Rayleigh \(1897\)](#) et [Pocklington \(1897\)](#). Les premières cathodes datent aussi de la fin du 19^e siècle avec les études sur l'émission thermionique, redécouverte plusieurs fois au moins par Becquerel, Thomson, Richardson, et Edison. Il s'agit simplement de l'émission d'un flux d'électrons provenant d'un filament métallique chauffé. Ce sont les travaux d'Edison sur cet effet qui permirent l'amélioration de la lampe à incandescence classique. Après avoir travaillé pour l'*Edison Electrical Light Company*, Fleming, alors en poste à la *Marconi company*, réalisa que « l'effet Edison » pouvait s'appliquer pour détecter les ondes radio et construisit, en 1904, le premier tube à vide, aussi appelé *Fleming valve* ou *thermionic tube*. Dans les années 30, l'émergence des applications radar permit l'apparition des premiers appareils micro-ondes tels que le klystron et le magnétron. C'est en étudiant ce dernier que [Posthumus \(1935\)](#) chez *Philips* rédigea l'une des toutes premières théories sur l'interaction électron-onde progressive, lorsqu'il remarqua que la vitesse axiale de l'onde doit se synchroniser avec la vitesse moyenne des électrons, permettant le transfert d'énergie des particules vers l'onde.

à l'invention du tube à onde progressive,...

Les deux premiers inventeurs des tubes à ondes progressives, [Haeff \(1936\)](#) et [Lindenblad \(1942\)](#), avaient compris le raisonnement physique derrière les TOPs, c'est-à-dire le besoin de synchroniser vitesse électronique et vitesse de phase. Lindenblad est même allé plus loin en comprenant que, comme les électrons perdent de la vitesse à la fin du tube, il peut être intéressant de baisser la vitesse de phase en réduisant le pas d de l'hélice pour que l'amplification dure plus longtemps : une méthode encore pratiquée de nos jours et appelée *taper* ou *pitch tapering*. Toutefois les travaux de Haeff et Lindenblad, limités à quelques brevets, furent largement ignorés et oubliés. Pendant la seconde guerre mondiale, [Kompfner \(1946\)](#), travaillant alors sur les sources radio-fréquences pour les radars de l'amirauté britannique, se rendit compte qu'il était difficile d'améliorer la sensibilité des klystrons de l'époque, car le couplage onde-particule était trop faible. Cela le conduisit à concevoir son tube à onde progressive en 1942.

et au développement des premier modèles théoriques sur les TOPs.

À la fin de la guerre, Kompfner rencontra Pierce, employé aux *Bell Labs*. Bien que les *Bell Labs* s'intéressassent aux applications radars pendant la guerre, c'était avant tout le cadre de recherche de la société de communication téléphonique *AT&T*. Pierce réalisa le potentiel que les TOPs pouvaient avoir pour les communications et entreprit de formuler un modèle théorique associé. Lorsque Kompfner, Pierce et leurs collègues respectifs présentèrent leurs résultats préliminaires à la 4th *IRE Electron Tube Conference*, en 1946, l'engouement pour l'appareil se répandit à travers les institutions travaillant sur les tubes à vide. Les premières publications dans des revues à comité de lecture sur une théorie autour des TOPs furent réalisées par [Blanc-Lapierre et Lapostolle \(1946\)](#), [Bernier \(1947\)](#) et [Pierce et Field \(1947\)](#). À la fin de l'année 1950, plus de 100 papiers et brevets avaient été publiés sur les TOPs. Un condensé des papiers théoriques fut réalisé par [Pierce \(1950\)](#). Son modèle, devenu populaire dans la communauté des tubistes, encore référencé aujourd'hui et considéré comme le premier modèle théorique, est un modèle linéaire que l'on appelle modèle des circuits équivalents de Pierce. L'un des tout premiers modèles non-linéaires sur les tubes sera introduit par [Nordsieck \(1953\)](#) et complété par [Rowe \(1965\)](#). Comme pour celui de Pierce, l'évolution de l'onde est décrite dans le modèle Nordsieck-Rowe par les équations des télégraphistes. De nos jours, les modèles analytiques les plus utilisés sont les modèles fréquentiels d'amplification d'ondes froides,¹ ou CoWAMs pour *Cold Wave Amplification Models*, qui ont pour base le théorème de réciprocité de Lorentz et les équations de Maxwell (même si ces dernières ne sont pas complètement respectées, voir [section 8.1.3](#)). Le modèle discret de Kuznetsov, que nous avons développé dans le domaine temporel dans cette dissertation (cf. [chapitre 3](#)), fut à l'origine développé en domaine fréquentiel² dans le but d'étudier les tubes à onde progressives à cavités couplées.

¹[Waller 1999](#)

²[Kuznetsov 1980;](#)
[Kuznetsov et](#)
[Kuznetsov 1984;](#)
[Kuznetsov et al](#)
[2004](#)

8.1 Modèles fréquentiels actuels

Dans le jargon des tubistes, on distinguera les modèles à **gain fort** où l'amplification est importante, des modèles à **gain faible**. On distinguera aussi les modèles à **petit signal** (régime linéaire), lorsque les électrons sont faiblement perturbés, des modèles à **grand signal** (régime non-linéaire). Pour simuler la dynamique de l'interaction onde-particule dans les TOPs, il existe deux domaines de résolution pour représenter les champs (partie circuit du modèle d'interaction) :

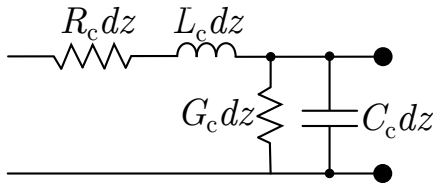


FIGURE 8.1 – Représentation des équations des télégraphistes.

- ◇ La résolution en **domaine temporel** n'est pas censée faire d'approximation sur la fréquence fondamentale du signal ni même sur la forme de l'onde. Cette approche est réputée fiable mais trop longue et coûteuse (numériquement) pour les activités industrielles.
- ◇ La résolution en **domaine fréquentiel** (ou harmonique) où les variables d'intérêt sont exprimées en $e^{i\omega t}$.

Il est important de noter qu'un modèle fréquentiel pour le champ peut être combiné avec une représentation temporelle PIC du faisceau (sur une période RF), permettant une représentation grand signal (en régime non-linéaire) de la dynamique onde-particule. C'est par exemple le cas pour le code MVTRAD¹ qui peut être utilisé pour simuler le gain à saturation d'un TOP. ¹Waller 1999

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la résolution en domaine fréquentiel. Nous emploierons une version en régime harmonique du modèle discret et une représentation fluide du faisceau en petit signal. Puisque nous sommes en régime linéaire, il est commode d'incorporer le taux de croissance spatial de l'onde dans le nombre d'onde $\beta \in \mathbb{C}$.

8.1.1 Modèles de circuit équivalent

Les modèles utilisant des circuits équivalents sont parmi les plus vieux modèles pour étudier les structures électromagnétiques et sont encore régulièrement utilisés de nos jours à cause de leur robustesse et de leur simplicité. Les modèles de circuits équivalents sont donc fondés sur les **équations des télégraphistes** (*telegrapher's equations*), aussi appelées modèle de Heaviside (1894) du nom de leur inventeur. Il s'agit simplement de substituer le système à étudier par un circuit électrique fictif (voir figure 8.1) établi à partir de composants électroniques linéaires (condensateurs, inductances, résistances, et conducteurs). La substitution est précise car ces composants respectent les équations de Maxwell. L'enjeu pour le physicien est de choisir correctement le modèle qui reproduit le mieux son système. En se fondant sur les lois de Kirchhoff (1845), on peut alors décrire les évolutions du potentiel électrique $V_c(z, t)$ et courant $I_c(z, t)$ du circuit par les équations

$$\frac{\partial V_c}{\partial z} = -L_c \frac{\partial I_c}{\partial t} - R_c I_c, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial I_c}{\partial z} = -C_c \frac{\partial V_c}{\partial t} - G_c V_c, \tag{8.2}$$

avec L_c l'inductance linéaire, C_c la capacité linéaire, R_c la résistance linéaire, et G_c la conductance linéaire. Dans un modèle sans perte, on imposera $R_c = 0$ et $G_c = 0$. En régime harmonique, on aura $V_c(z, t) = \Re(\tilde{V}_c(z) e^{i\omega t})$, de même pour I_c .

Remarque 8.1.1 Il est possible d'utiliser le modèle des télégraphistes pour caractériser, en domaine temporel, un tube à onde progressive. En partant des expressions de Poynting, de l'énergie électrique $|V_c|^2/(2C_c)$, et de l'énergie magnétique $|I_c|^2/(2L_c)$ (avec le terme de puissance en $\Re(V_c I_c^*)/2$), on peut arriver à un système d'équations matricielles en V_c et I_c

dépendantes du temps. Ce système d'équations ressemble beaucoup à l'ensemble (3.30)-(3.31) utilisé au chapitre 3, d'où notre utilisation de la notation V et I (écrite en sans serif pour bien distinguer la nature des termes). À l'origine, l'utilisation du modèle discret était étroitement liée à un modèle de circuits équivalents (voir Théveny (2016)).

Historiquement, le premier modèle théorique d'interaction onde-particule pour les TOPs est le modèle de circuit équivalent de Pierce appartenant à la catégorie des "lumped" models (voir section 8.3). C'est un modèle à gain fort car l'amplification du champ est importante. Le modèle de Pierce à trois ondes¹ (*Pierce's three-wave theory*) en régime petit signal est toujours utilisé² de nos jours avec succès pour décrire les TOPs notamment grâce à sa précision dans ce régime et à sa simplicité. Dans ce modèle, les trois ondes sont l'onde directe de circuit (*forward circuit wave*, qui est le mode du guide d'onde qui nous intéresse), et les ondes rapide et lente de charge d'espace du faisceau (*fast and slow space-charge waves*). Tant que le TOP opère dans le régime d'amplification linéaire, dit régime petit signal, comme c'est le cas pour la majorité des dispositifs de télécommunications, alors ce modèle fréquentiel est suffisamment précis. Son extension, le modèle de Pierce à quatre ondes³ (*Pierce's four-wave theory*), décrit à la section 8.3, est tout aussi utilisée,⁴ car il contient en plus l'onde inverse de circuit (*backward circuit wave*).

Il existe d'autres modèles de circuit équivalent, basés sur les équations des télégraphistes. Par exemple, il y a le modèle théorique non-linéaire développé par Nordsieck (1953) et repris par Rowe (1965) qui a la particularité d'étudier le faisceau d'électrons avec le formalisme lagrangien (modèle à gain fort et grand signal). On trouve aussi des modèles multi-lignes.⁵ Pour l'étude des TOPs, on trouve une multitude de codes d'interaction basés sur les circuits équivalents tels que PAWAIC,⁶ ou TESLA.⁷ On notera que l'approche avec un électron ponctuel (donc $N_e = 1$) combiné à un modèle de circuit équivalent a déjà été considérée⁸ pour modéliser les TOPs.

8.1.2 Modèles fréquentiels d'enveloppe

Le modèle de Pierce n'est pas le seul standard pour étudier les TOPs. On trouve notamment les modèles fréquentiels d'enveloppe, dits d'amplification d'ondes froides CoWAMs (pour *Cold Wave Amplification Models*). Dans cette approximation, les champs électromagnétiques à chaud (en présence du faisceau) sont écrits simplement comme une somme de modes froids (champs sans faisceau) modulés par un facteur d'enveloppe variant lentement le long de l'axe de propagation z . On a donc

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{hot}}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_s C'^s(z) \tilde{\mathbf{E}}^s(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{E}}_{\text{sc}}(\mathbf{r}), \quad (8.3)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{hot}}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_s C''^s(z) \tilde{\mathbf{H}}^s(\mathbf{r}, \omega), \quad (8.4)$$

avec s le mode de propagation de l'onde et $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_{\text{sc}}(\mathbf{r})$ le champ de charge d'espace (utilisé ci-dessous). Généralement dans les CoWAMs, le facteur d'enveloppe est simplifié en posant des amplitudes spatiales identiques ($C^s = C'^s = C''^s$). En l'absence de faisceau, le facteur d'enveloppe devient unitaire et les champs sont dits froids. On remarquera immédiatement la différence avec les équations (3.44)-(3.45) du modèle discret. Les modèles fréquentiels d'enveloppe servent de base à de nombreux codes numériques, tel que MVTRAD,⁹ CHRISTINE¹⁰ et BWIS.¹¹ Pour calculer la puissance électromagnétique, ces modèles utilisent le théorème de réciprocité de Lorentz (1896).

¹Pierce 1947, 1950; Gilmour 1994

²Qiu *et al* 2018; Tamma et Capolino 2014; Wong *et al* 2018

³Pierce 1950; Gilmour 1994; Louisell 1960

⁴Qiu *et al* 2018; Datta *et al* 2011; Booske et Converse 2004; Simon *et al* 2017; Pchelnikov 2018

⁵Figotin et Reyes 2013

⁶Setayesh et Abiri 2018; Setayesh *et al* 2018

⁷Vlasov *et al* 2002

⁸Pierce 1955

⁹Waller 1999

¹⁰Antonsen and Levush 1997

¹¹Li *et al* 2009

8.1.3 Problématiques des modèles fréquentiels

Pourtant, les modèles fréquentiels ont des problèmes dans certains cas pour reproduire la dynamique d'un TOP. Plusieurs articles récents¹ posent la question de combien d'ondes (donc combien d'harmoniques d'espace) doivent être prises en compte dans la théorie de Pierce pour avoir un gain réaliste en régime linéaire. En outre, ces modèles échouent à décrire les TOPs aux fréquences de coupure (*cutoff*), c-à-d. aux bords de bande de la relation de dispersion (bande de transmission), là où l'impédance de circuit de Pierce tend vers l'infini. Cette situation, largement étudiée,² est critique dans les TOPs car c'est la cause de génération d'oscillations indésirables. C'est d'ailleurs pour tenter de résoudre ce problème que le modèle discret, décrit au chapitre 3, sera pour la première fois utilisé.³ On remarquera que ce problème est généralement associé avec l'étude des TOPs à cavités couplées.

D'un autre côté, un problème majeur avec les modèles fréquentiels est qu'ils violent⁴ les équations de Maxwell quand le couplage est fort. C'est peut-être cette violation qui justifie les écarts à la théorie de Pierce (basée sur les équations des télégraphistes) en bord de bande. On peut montrer rapidement cette violation pour les modèles d'enveloppe. En partant de l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\text{hot}}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_{\text{hot}}(\mathbf{r}, \omega)$ et l'équation de Helmholtz $\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}^s(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}^s(\mathbf{r}, \omega)$ (sans distinction entre les valeurs propres et la fréquence d'excitation), on obtient que

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\text{hot}} = \sum_s \left[\frac{dC'^s}{dz} \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{E}}^s - iC'^s\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}^s \right], \quad (8.5)$$

en rappelant que le champ de charge d'espace est un gradient. On ajoute $i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_{\text{hot}}(\mathbf{r}, \omega)$ à l'équation pour avoir

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\text{hot}} + i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_{\text{hot}} = \sum_s \left[\frac{dC'^s}{dz} \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{E}}^s + i(C''^s\omega - C'^s\omega)\mu_0\tilde{\mathbf{H}}^s \right]. \quad (8.6)$$

L'équation de Maxwell-Faraday impose que le membre de gauche de (8.6) soit nul. Cette affirmation est correcte pour un champ électrique purement longitudinal, $\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{E}}^s = 0$ (ou pour un modèle unidimensionnel), et si on force $C'^s = C''^s$.

Dans le cas tridimensionnel avec un champ électrique non longitudinal, si on impose $C'^s = C''^s$ (comme c'est le cas pour la majorité des CoWAMs), alors on doit nécessairement avoir $\partial_z C'^s = 0$, ce qui implique une absence totale d'amplification de l'onde. Pour ne pas violer les équations de Maxwell, il faut prendre $C'^s \neq C''^s$. Toutefois, l'erreur induite en négligeant $C''^s - C'^s$ est modérée.⁵

¹Qiu *et al* 2018; Simon *et al* 2017; Soltani et Abiri 2016

²Miller *et al* 1994; Bessudnova et Rozhnev 2000; Hung *et al* 2015; Antoulinakis *et al* 2018

³Kuznetsov et Kuznetsov 1984; Kuznetsov *et al* 2004

⁴André *et al* 2015; Théveny *et al* 2016; Théveny 2016

⁵Théveny *et al* 2016

8.2 Modèle faisceau fluide

Dans ce chapitre, nous détaillons deux modèles d'interaction : celui de Pierce et le modèle discret en domaine fréquentiel. Pour les deux, nous employons la même description de l'évolution du faisceau. Au chapitre 4, nous avons utilisé une description N -corps. Nous aurions pu aussi utiliser une description cinétique. Ces deux approches en domaine temporel sont toutefois coûteuses numériquement. Dans ce chapitre, nous utiliserons une description fluide⁶ en domaine fréquentiel car elle est très simple à combiner avec les modèles fréquentiels, et elle fut historiquement utilisée dans le modèle de Pierce, ce qui permettra une comparaison de ce dernier avec le modèle discret.

⁶Pierce 1950; Louisell 1960; Gilmour 1994

Le modèle faisceau fluide est fondé sur l'équation de continuité et l'équation de Poisson. La première hypothèse du modèle faisceau fluide est que le faisceau est faiblement perturbé par la présence de l'onde. Dans le jargon des tubistes, on parle de modèle à petit signal car il ne permet pas d'étudier les effets non-linéaires (notamment le piégeage), et donc d'atteindre une amplification importante dans les TOPs. Toutefois, comme une partie des TOPs pour les télécommunications ne sont pas utilisés en régime non-linéaire (la non-linéarité nuit à la netteté des signaux), cette limitation du modèle reste parfaitement acceptable dans le design de tubes à faible amplification. Par contre, l'augmentation des performances des TOPs rend de plus en plus indispensable l'utilisation de modèles en régime non-linéaire.

8.2.1 Ondes de charge d'espace

Dans un premier temps, on considère uniquement le faisceau sans la partie circuit. Le faisceau d'électrons est décrit comme un fluide en écoulement stationnaire uniformément faiblement perturbé transportant des ondes de charge d'espace le long de l'axe longitudinal z . Les variables temporellement et spatialement dépendantes sont exprimées par la représentation d'espace-temps de Fourier comme¹ $\mathfrak{F}(z, t) = \Re(\tilde{\mathfrak{F}}(\beta, \omega) e^{i\varphi})$, avec $\varphi = \beta z - \omega t$ la phase locale, $\beta = \omega/v_{\text{ph}}$ le nombre d'onde, ω la pulsation et v_{ph} la vitesse de phase. Comme on pourra étudier des régimes non résonants, on définit aussi la constante de propagation des électrons $\beta_e = \omega/v_0$, et leurs vitesses $v_0 + \Re(\tilde{v} e^{i\varphi})$. La vitesse initiale du faisceau (non relativiste) $v_0 = \sqrt{2V_0\eta}$, donnée par (2.1), s'obtient en comparant l'énergie cinétique $m_e v_0^2/2$ et l'énergie potentielle eV_0 , avec $V_0 > 0$ le potentiel de cathode (faisceau en courant continu, *direct current dc*), et $\eta = |e|/m_e$. Les densités de charge des particules sont $\rho_0 + \Re(\tilde{\rho} e^{i\varphi})$, avec la densité initiale $\rho_0 = I_0/(v_0 \mathcal{S}_b) < 0$, dépendant du courant de cathode $I_0 < 0$, et de la section du faisceau \mathcal{S}_b .

¹Notons une faute de frappe dans [Minenna et al \(2019b\)](#) : $e^{-i\varphi}$ doit se lire $e^{i\varphi}$

En régime linéaire, en combinant la relation entre les densités de charge et de courant perturbées $\tilde{J}_z = \rho_0 \tilde{v} + v_0 \tilde{\rho}$ et **l'équation de continuité** (*continuity equation*)

$$\frac{\partial \tilde{J}_z}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = 0, \quad (8.7)$$

c'est-à-dire $i\beta \tilde{J}_z - i\omega \tilde{\rho} = 0$, on obtient que

$$(\omega - \beta v_0) \mathcal{S}_b \tilde{J}_z = -\omega \frac{|I_0|}{2V_0} \tilde{V}_b, \quad (8.8)$$

avec $\tilde{V}_b = v_0 \tilde{v}/\eta$ la perturbation du potentiel du faisceau. On remarquera que l'équation de continuité reste inchangée en présence des ondes de circuit, donc on gardera l'équation (8.8) dans les sections suivantes. Si on ne considère que les ondes de charges d'espace dans le système, alors **l'équation du mouvement d'Euler**

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) v = -\eta E_{\text{sc},z} \quad (8.9)$$

devient, en la linéarisant,

$$\left(-i\omega + i\beta v_0 \right) \frac{\tilde{V}_b}{v_0} = -\tilde{E}_{\text{sc},z}, \quad (8.10)$$

où le champ de charge d'espace provient de **l'équation de Poisson**

$$\frac{\partial E_{\text{sc},z}}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.11)$$

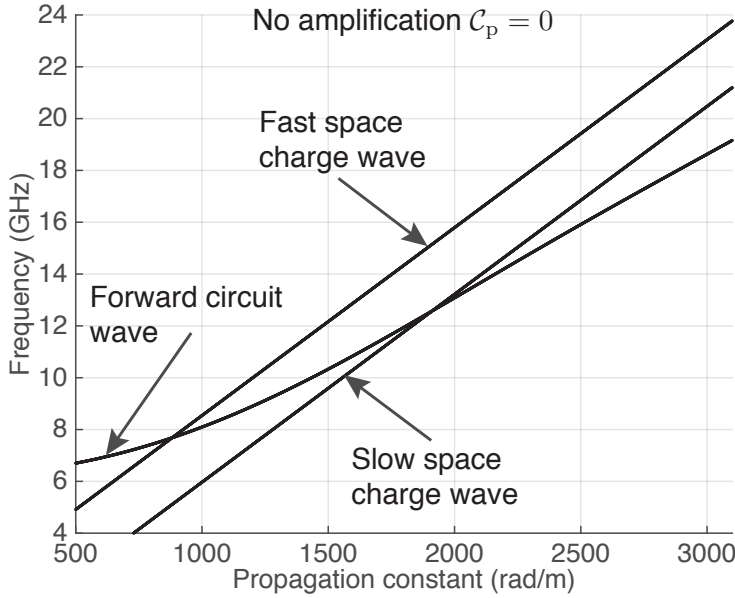


FIGURE 8.2 – Minenna *et al* (2019a) Diagramme de Brillouin (relation de dispersion) typique d'un TOP en bande Ku (12–18 GHz) à froid (sans couplage). Il s'agit des solutions de (8.25) pour le modèle de Pierce ou, autrement dit, des solutions de (8.42) pour le modèle discret, avec $C_p = 0$ (comme si l'impédance de Pierce $Z_c = 4C_p^3 V_0 / |I_0|$ tendait vers zéro). Les solutions sont purement réelles. L'onde directe (*forward*) est aussi le mode à froid du guide d'onde (dépendant de la géométrie du tube). Les deux ondes de charge d'espace sont données par (8.16).

soit $i\beta \tilde{E}_{sc,z} = \tilde{\rho} / \epsilon_0$. Grâce à l'équation de continuité, on a aussi $\tilde{E}_{sc,z} = i\tilde{J}_z / (\epsilon_0 \omega)$. On introduit alors la **pulsation plasma du faisceau d'électrons**²

²Nicholson 1983

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\eta |\rho_0|}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\eta |I_0|}{\epsilon_0 v_0 \mathcal{S}_b}}. \quad (8.12)$$

Cela nous permet d'obtenir

$$i\tilde{E}_{sc,z} = -\frac{\tilde{J}_z}{\epsilon_0 \omega} = \frac{\omega_p^2}{\eta \rho_0} \frac{\tilde{J}_z}{\omega} = \frac{\omega_p^2 v_0^2 \mathcal{S}_b}{v_0 \eta I_0} \frac{\tilde{J}_z}{\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega v_0} \frac{2V_0}{I_0} \mathcal{S}_b \tilde{J}_z. \quad (8.13)$$

D'un autre côté, la relation entre le champ de charge d'espace et le courant d'électrons peut être réécrite en termes de la modulation du potentiel de charge d'espace \tilde{V}_{sc} et reliée linéairement avec la modulation du courant de faisceau \tilde{I}_b , de sorte que

$$\tilde{E}_{sc,z} = -i\beta \tilde{V}_b = -i\beta Z_b \tilde{I}_b = -i\beta Z_b \int_{\mathcal{S}_b} \tilde{J}_z dx dy, \quad (8.14)$$

avec Z_b l'impédance caractéristique du faisceau. En comparant (8.13) et (8.14), on trouve immédiatement l'**impédance caractéristique du faisceau perturbé**¹ comme

$$Z_b(\beta) = -\frac{\omega_p^2}{\omega v_0} \frac{2V_0}{|I_0|}, \quad (8.15)$$

en rappelant que $2V_0 / |I_0| = v_0 / (|\rho_0| \eta \mathcal{S}_b)$. Le rapport $V_0 / |I_0|$ est l'impédance du faisceau à la cathode (*dc*) dans le cas d'un faisceau non perturbé ($\tilde{J}_z = \tilde{V}_b = 0$).

Si on injecte (8.8) dans (8.10), on trouve alors la **relation de dispersion de Bohm-Gross**² à froid

$$(\omega - \beta v_0)^2 = \omega_p^2, \quad (8.16)$$

pour les ondes de charge d'espace seulement. Cette relation est représentée sur la figure 8.2.

¹Minenna *et al* 2019a. Cette impédance est notée $\frac{\omega_p}{\omega} \frac{2V_0}{|I_0|}$ dans (Louisell, 1960, eq. (2.41)), mais Louisell travaillait alors dans le référentiel du faisceau, au lieu d'être comme nous dans le référentiel du laboratoire.

²Bohm et Gross 1949

Remarque 8.2.1 Dans un contexte plasma, le terme « froid » pour le faisceau signifie que l'on néglige la température (et la pression) du faisceau dans le référentiel balistique co-mouvant. Il s'agit donc d'un faisceau mono-cinétique.

8.2.2 Couplage avec les ondes lentes de circuit

Maintenant, on considère que le faisceau est couplé avec un modèle de propagation des ondes (dit le circuit) quelconque. L'évolution des variables de circuit, comme le champ électrique de circuit E_z , se fera en utilisant, au choix, les modèles des sections suivantes. Pour représenter l'onde de circuit, on ajoute simplement le terme $-\tilde{E}_z$ à droite de l'équation du mouvement (8.10). En combinant les équations (8.8) et (8.13), on trouve¹

$$\tilde{E}_z = -i \frac{1}{\omega v_0} \left[(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2 \right] \frac{2V_0}{|I_0|} \mathcal{S}_b \tilde{J}_z. \quad (8.17)$$

Or, de la même manière que (8.14), ce champ est égal à

$$\tilde{E}_z = -i\beta \tilde{V}_c = -i\beta Z_{cb} \tilde{I}_b, \quad (8.18)$$

avec l'impédance circuit-faisceau Z_{cb} correspondant à la réponse du potentiel de circuit aux oscillations de courant. On réécrit donc **l'impédance circuit-faisceau**²

$$Z_{cb}(\beta) = \frac{(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2}{\omega \beta v_0} \frac{2V_0}{|I_0|}. \quad (8.19)$$

À la résonance, quand $\beta_e = \beta$ (soit que la vitesse de phase est égale à la vitesse du faisceau), Z_{cb} joue le rôle de l'impédance de faisceau comme s'il n'y avait que des ondes de charge d'espace. Dans un tube à onde progressive, on augmente la vitesse du faisceau par rapport à la vitesse de phase (cf. chapitre 1), de sorte que $\beta_e \neq \beta$ généralement. Notons que l'équation (8.19) sera comparée aux autres modèles des sections suivantes.

On remarquera que, dans ce modèle, le traitement du faisceau est très incomplet. Le facteur de réduction plasma (*plasma reduction factor*) ou le paramètre de charge d'espace de Pierce³ QC , dépendant de la géométrie du tube et des modes, sont totalement ignorés. Nous justifions cette simplification parce que le but de ce chapitre est de présenter les bases de la description fluide et de réaliser une comparaison entre le modèle discret et le modèle de Pierce : l'impédance circuit-faisceau (8.19) sera la même pour ces deux théories de circuit.

8.3 Modèle de Pierce

Dans cette section, nous présentons brièvement le modèle de circuit équivalent de Pierce car c'est un modèle simple et intuitif pour calculer le taux de croissance linéaire d'un TOP et il nous servira pour une comparaison avec le modèle discret en domaine harmonique. Le modèle à quatre ondes de Pierce⁴ (*Pierce's four wave theory*) est un modèle fréquentiel en régime linéaire (petit signal) qui se compose d'une combinaison des équations des télégraphistes (8.1)-(8.2) et du modèle fluide de la section 8.2 (voir figure 8.3). Dans ce modèle 1D, toujours exploité aujourd'hui,⁵ la ligne à retard est remplacée par un circuit équivalent unidimensionnel et le faisceau d'électron est considéré comme un fluide respectant l'équation d'Euler du mouvement et la relation de continuité.

¹On notera une coquille dans Ryskin *et al* (2007) : il manque un signe moins devant ω_p^2 .

²Minenna *et al* 2019a

³Pierce 1950; Gilmour 1994; Simon *et al* 2017

⁴Pierce et Field 1947; Pierce 1947, 1950; Gilmour 1994

⁵Qiu *et al* 2018; Datta *et al* 2011; Booske et Converse 2004; Simon *et al* 2017; Pchelnikov 2018

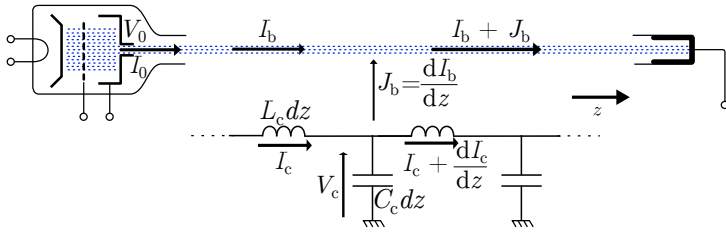


FIGURE 8.3 – Principe du modèle de Pierce : un circuit équivalent et son interaction avec un faisceau d'électrons dans un tube à onde progressive. L'hélice est remplacée par le circuit équivalent.

8.3.1 Impédance de circuit-faisceau

Toujours avec la représentation espace-temps $\mathfrak{F}(z, t) = \Re(\tilde{\mathfrak{F}}(\beta, \omega) e^{i\varphi})$, avec $\varphi = -\beta z + \omega t$, on peut, à partir des équations des télégraphistes (8.1)-(8.2) sans pertes, écrire les évolutions des potentiel \tilde{V}_c et courant \tilde{I}_c de circuit couplés à un courant de faisceau \tilde{I}_b , comme⁶

$$-i\beta\tilde{V}_c = -iL\omega\tilde{I}_c, \quad (8.20)$$

$$-i\beta\tilde{I}_c = -iC\omega\tilde{V}_c + i\beta\tilde{I}_b. \quad (8.21)$$

Sans faisceau ($\tilde{I}_b = 0$), le nombre d'onde non-couplé est $\beta_0 = \omega\sqrt{CL}$, et on notera $L\omega = Z_c\beta_0$ grâce à la définition classique de l'impédance caractéristique $Z_c = \tilde{V}_c/\tilde{I}_c = \sqrt{L/C}$ que Pierce définit comme l'impédance de circuit. On combine (8.21) et (8.20) pour obtenir¹

$$Z_{cb}(\beta) = \frac{\beta_0\beta}{\beta_0^2 - \beta^2} Z_c, \quad (8.22)$$

avec l'impédance de circuit-faisceau $Z_{cb} = \tilde{V}_c/\tilde{I}_b$. Nous insistons sur le fait que le nombre d'onde β_0 et l'impédance de circuit Z_c sont des paramètres, dits à froid, ne dépendant pas de la présence du faisceau.

¹Le développement de Pierce amène directement à (8.24), de sorte qu'il n'exprime jamais Z_{cb} . Or nous avons besoin de l'impédance circuit-faisceau pour notre comparaison (cf. section 8.5).

8.3.2 Combinaison avec le modèle fluide

En imposant que l'équation (8.19) soit égale à l'équation (8.22), on arrive à

$$\frac{|I_0|}{2V_0} Z_c = \frac{(\beta_e - \beta)^2 - \beta_p^2}{\beta_e\beta} \frac{\beta_0^2 - \beta^2}{\beta_0\beta}, \quad (8.23)$$

avec $\beta_e = \omega/v_0$ and $\beta_p = \omega_p/v_0$. On définit alors le paramètre de gain de Pierce²

$$C_p = \left(\frac{|I_0|}{4V_0} Z_c \right)^{1/3}, \quad (8.24)$$

de manière à réécrire (8.23) comme la relation de dispersion à chaud³ (admettant des solutions complexes)

$$C_p^3 = \frac{(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2}{2\omega\beta v_0} \frac{\omega^2 - \beta^2 v_{ph,0}^2}{\omega\beta v_{ph,0}}, \quad (8.25)$$

du modèle à quatre ondes de Pierce, avec $\beta_p = \omega_p/v_0$ et la vitesse de phase sans faisceau $v_{ph,0} = 1/\sqrt{CL}$. L'équation (8.25) est le produit de deux parties, une venant du faisceau et une venant du circuit. L'équation du 4^e degré mène aux quatre modes naturels de propagation.

²Pierce 1950

³Gilmour 1994

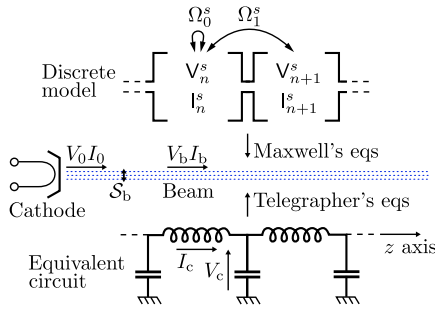


FIGURE 8.4 – Minenna *et al* (2019b). Interaction onde-particule où la ligne à retard d'un guide d'onde est représentée soit avec le modèle discret (dessus) soit avec un circuit équivalent (dessous). On suppose que le faisceau est un fluide faiblement perturbé de section transversale S_b . Les variables V_c, V_b, V_0 et I_c, I_b, I_0 sont les potentiels et courants de circuit, de faisceau et de cathode (faisceau dc) respectivement. V_n^s et I_n^s sont les amplitudes temporelles des champs électromagnétiques à la cellule n (voir équations (3.42)-(3.43)) pour le mode de propagation s . Les Ω_n^s sont les coefficients de couplage entre les cellules de portée n' (voir section 3.4).

8.3.3 Solutions de l'équation de propagation

Dans le modèle de Pierce, la dépendance sinusoidale des ondes est donnée en temps par $e^{i\omega t}$, et en espace par⁴ $e^{-i\beta z}$ avec la partie imaginaire de β (associée au taux de croissance) dépendant du paramètre de Pierce C_p . La pulsation plasma ω_p est ignorée ici. On notera alors quatre solutions, β_j , avec $1 \leq j \leq 4$ (onde couplée au faisceau), à l'équation (8.25) : trois ondes directes (*forward*) où le nombre d'onde devient

$$\beta_{1,2,3} = \beta_e - i\beta_e C_p \delta_{1,2,3}, \quad (8.26)$$

avec $\delta_{1,2} = \pm\sqrt{3}/2 - i/2$, et $\delta_3 = i$; et une quatrième onde inverse (*backward*)

$$\beta_4 = -\beta_e + \beta_e C_p^3/4. \quad (8.27)$$

La solution β_1 correspond à une onde croissante selon z , β_2 à une onde décroissante, β_3 à une onde d'amplitude constante, et β_4 à une onde d'amplitude constante se propageant dans le sens opposé à celui des électrons (dite onde rétrograde). Ces solutions sont couplées avec le faisceau et donnent les diagrammes de dispersion de couplage¹ (dits à chaud).

¹Briggs 1964

8.3.4 Puissance électromagnétique

La puissance électromagnétique est l'une des caractéristiques principales des TOPs. Historiquement, l'une des formulations les plus répandues passe par l'approche par circuits équivalents. Dans ce chapitre, nous n'utiliserons pas cette puissance mais nous en aurons besoin ailleurs. En régime harmonique, la propagation de l'onde de circuit est donnée par $\tilde{E}_z = i\beta\tilde{V}_c$, avec \tilde{V}_c le potentiel du circuit. En partant directement de la puissance électrique² $\tilde{V}_c^2/(2Z_c)$, on peut aussi définir la **puissance harmonique** de l'onde (moyenne temporelle sur une période $2\pi/\omega$) comme

$$\langle P \rangle(\beta) = \frac{|\tilde{E}_z|^2}{2\beta^2 Z_c(\beta)}, \quad (8.28)$$

identique à l'équation (6.44) déjà utilisée auparavant. Cette puissance est calculée à une fréquence donnée (équivalente à un nombre d'onde donné).

Remarque 8.3.1 (Impédance de circuit) L'impédance de circuit Z_c est souvent appelée, à tort selon nous, impédance de couplage. En regardant l'équation (8.24), on pourrait penser que, dans un cas sans faisceau ($V_0 = I_0 = 0$), $Z_c = 4V_0 C_p^3/|I_0|$ soit mal définie. Pourtant, l'impédance de circuit est aussi donnée par l'équation (8.28) qui est indépendante du faisceau. Le paramètre de Pierce C_p compense les effets de l'impédance de faisceau non perturbée $V_0/|I_0|$. C'est donc C_p qui exprime le couplage avec le faisceau et non pas Z_c .

²Avec un facteur 1/2 en régime harmonique.

8.4 Modèle discret linéaire

Le modèle discret de Kuznetsov, présenté en domaine temporel au [chapitre 3](#), était originellement linéarisé en domaine fréquentiel³ pour étudier les TOPs à cavités couplées en régime linéaire (petit signal). Les amplitudes temporelles du champ électromagnétique (3.23)-(3.24) deviennent alors

$$\mathbf{V}_\beta^s(t) = \tilde{\mathbf{V}}_\beta^s e^{i\omega t}, \quad (8.29)$$

$$I_\beta^s(t) = \tilde{I}_\beta^s e^{i\omega t}. \quad (8.30)$$

On prendra aussi la densité de charge comme $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_0 + \Re(\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r})e^{i\omega t})$. De facto, les évolutions temporelles de \mathbf{V}_β^s et I_β^s (3.30)-(3.31) (respectivement Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday) deviennent

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{(\Omega_\beta^s)^2 - \omega^2}{\omega} \tilde{\mathbf{V}}_\beta^s \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) = \frac{-i}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{J}}_\beta(\mathbf{r}) - \omega \nabla \tilde{\phi}_\beta(\mathbf{r}), \quad (8.31)$$

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \tilde{I}_\beta^s = \sum_{s \in \mathbb{N}} (-i) \frac{\Omega_\beta^s}{\omega} \tilde{\mathbf{V}}_\beta^s, \quad (8.32)$$

grâce à l'orthogonalité des champs propres. Comme démontré à la [section 3.2.3](#), le terme de charge d'espace $\nabla \tilde{\phi}_\beta$ disparaîtra¹ par l'intégration sur le volume avec les conditions de bord. Ensuite, on fait le produit scalaire de l'équation (8.31) avec le complexe conjugué \mathbf{E}_β^{s*} et on intègre sur le volume (avec une projection sur les modes (s, β)) pour obtenir

$$\frac{(\Omega_\beta^s)^2 - \omega^2}{\omega} \tilde{\mathbf{V}}_\beta^s = -i S_b \int_0^d \tilde{J}_{z,\beta}(z) F_{z,\beta}^{s*}(z) dz, \quad (8.33)$$

pour un faisceau de section uniforme et de petit rayon. Les termes $F_{z,\beta}^{s*}(z) = \mathbf{E}_{z,\beta}^{s*}(z)/N_\beta^s$ sont liés aux fonctions propres du potentiel vecteur (voir équation (4.31)) et $N_\beta^s = \Omega_\beta^s$ avec notre normalisation (3.28). L'équation (8.33), dérivée de Maxwell, remplace les équations des télégraphistes dans l'évolution de la propagation des ondes. Pour ne pas nous limiter à certaines solutions de la propagation, nous étudions les cas hors résonances, donc lorsque $\Omega_\beta^s \neq \omega$. On peut voir Ω_β^s comme la relation de dispersion à froid pour tous les nombres d'onde (c-à-d. les valeurs propres des équations de Helmholtz) et ω la fréquence angulaire de l'onde amplifiée.

8.4.1 Impédance de circuit-faisceau

Pour compléter le modèle d'interaction, nous utilisons le modèle de faisceau fluide (partie faisceau), de la [section 8.2](#), pour représenter le faisceau électronique faiblement perturbé, mais cette fois-ci en représentant le champ de circuit (8.17) par l'équation du modèle discret (3.42).² On pose aussi que la densité de charge est modulée spatialement en z par $\tilde{J}_z(z) = {}^2\mathbf{E} = \sum_{s,n} \mathbf{V}_n^s \mathbf{E}_{-n}^s \hat{J}_z e^{-i\beta z}$. Utilisant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\beta',z}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{J}_z(z + nd) e^{in\beta'd} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{J}_z e^{-i\beta z + i(\beta' - \beta)nd} \\ &= \hat{J}_z e^{-i\beta z} \sum_{\mathbf{b} \in (2\pi/d)\mathbb{Z}} \delta\left(\frac{\beta' - \beta - \mathbf{b}}{2\pi}\right), \end{aligned} \quad (8.34)$$

³Kuznetsov 1980; Kuznetsov et Kuznetsov 1984; Kuznetsov et al 2004; Ryskin et al 2009; Terentyuk 2016; Minenna et al 2019b

¹André et al 2013

pour tout nombre d'onde β' , avec δ la distribution de Dirac. On fait de même pour l'amplitude du champ électrique

$$\tilde{V}_{\beta'}^s = \sum_{\mathfrak{b}} \hat{V}_{\mathfrak{b}}^s \delta(\beta' - \beta - \mathfrak{b}) \frac{2\pi}{d}. \quad (8.35)$$

L'équation (8.33) devient

$$\frac{(\Omega_{\beta+\mathfrak{b}}^s)^2 - \omega^2}{\omega} \hat{V}_{\mathfrak{b}}^s = -i S_{\mathfrak{b}} \hat{J}_z \int_{-d/2}^{d/2} e^{-i(\beta+\mathfrak{b})z} F_{z,\beta+\mathfrak{b}}^{s*}(z) dz. \quad (8.36)$$

Dans l'expression du champ électrique en représentation- β (3.23),¹ l'intégration sur βd ne se fait que sur $[-\pi, \pi]$, donc la somme se réduit au seul terme $\mathfrak{b} = 0$ (en effet, un seul mode $s = 0$ nous intéresse pour l'onde), donc on omettra l'indice \mathfrak{b} . Puisque les champs propres de Gelfand satisfont $E_{z,\beta}^s(z) = \hat{E}_z^s e^{-i\beta z}$ (avec $F_{z,\beta}^{s*}(z) = \hat{E}_z^{s*} e^{i\beta z} / N_{\beta}^s$) pour notre modèle 1D, on a la perturbation du champ de circuit comme

$$\tilde{E}_z = \hat{V}^s E_{z,\beta}^s(z) e^{i\beta z} = \hat{V}^s \hat{E}_z^s. \quad (8.37)$$

Finalement, on obtient donc une reformulation de l'équation (8.36) comme²

$$\frac{(\Omega_{\beta}^s)^2 - \omega^2}{\omega} \hat{V}^s = -i S_{\mathfrak{b}} \hat{J}_z d \frac{\hat{E}_z^{s*}}{N_{\beta}^s}. \quad (8.38)$$

On reformule aussi l'équation (8.17) avec les relations (8.34) et (8.37).

D'un autre côté, nous avons déjà vu que l'impédance de circuit du modèle discret provenant de (6.73) (obtenue à partir de (8.28)) est³

$$Z_c(\beta) = \frac{|E_{z,\beta}^s(r=0)|^2 d}{\beta^2 v_g N_{\beta}^s}, \quad (8.39)$$

avec $v_g(s, \beta)$ la vitesse de groupe. On remarque que notre impédance de circuit tend vers l'infini au bord de la bande passante lorsque la vitesse de groupe s'annule. L'impédance de circuit-faisceau pour le modèle discret est obtenue à partir de (8.18) et (8.37)

$$Z_{cb}(\beta) = -\frac{i}{\beta} \frac{\hat{V}^s \hat{E}_z^s}{S_{\mathfrak{b}} \hat{J}_z}, \quad (8.40)$$

pour un faisceau de section uniforme. En insérant cette équation dans (8.38), avec (8.39), on réécrit l'impédance de circuit-faisceau sous la forme

$$Z_{cb}(\beta) = \frac{\omega \beta v_g}{\omega^2 - (\Omega_{\beta}^s)^2} Z_c, \quad (8.41)$$

qui nous sera utile pour la comparaison.

8.4.2 Combinaison avec le modèle fluide

En combinant les équations (8.19) et (8.41) avec la définition (8.24), la relation de dispersion à chaud du modèle discret est

$$\mathcal{C}_p^3 = \frac{(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2}{2\omega \beta v_0} \frac{\omega^2 - (\Omega_{\beta}^s)^2}{\omega \beta v_g}. \quad (8.42)$$

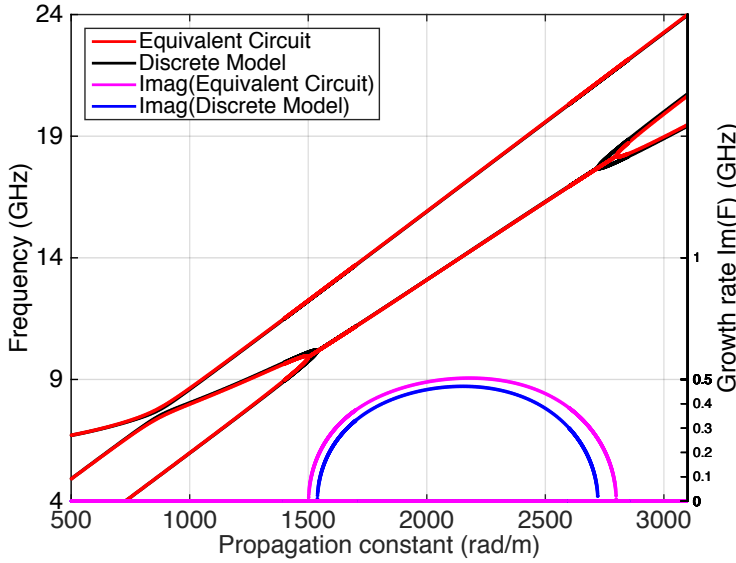


FIGURE 8.5 – Minenna *et al* (2019b). Diagramme de Brillouin (relation de dispersion) typique d'un TOP en bande Ku (12–18 GHz) à chaud (avec couplage $C_p > 0$). La constante de propagation (*propagation constant*) est le nombre d'onde. Ordonnée de gauche : partie réelle de la fréquence (pour les courbes rouges et noires). Ordonnée de droite : partie imaginaire de la fréquence (pour les courbes magenta et bleues). Les courbes rouges et magenta sont les solutions à (8.25) pour le modèle de Pierce. Les courbes noires et bleues sont les solutions à (8.42) pour le modèle discret. Les deux modèles donnent des résultats quasiment identiques sauf aux bords de bande (un zoom est donné à la figure 8.6). La relation de dispersion à froid est donnée par la figure 8.2. On remarque que la bande passante (taux de croissance non nul) du tube est de 10–18 GHz.

Même si elles ont l'air similaire, les équations (8.25) et (8.42) ne sont pas identiques.

8.5 Comparaison entre le modèle discret et le modèle de Pierce

La comparaison entre le modèle discret et le modèle de Pierce (voir figure 8.4) est possible car on a défini la relation de dispersion à chaud. De plus, comme on a pris le même modèle fluide pour la partie faisceau, la comparaison se limite à la partie circuit des deux modèles.

8.5.1 Comparaison sans couplage et au premier ordre

On considère d'abord le cas où le paramètre de Pierce tend vers zéro, $C_p = 0$. Les quatre solutions des relations de dispersion (8.25) et (8.42) sont identiques (solution à froid, voir figure 8.2). En effet, les solutions pour l'onde directe (*forward*) et inverse (*backward*) du circuit sont $\omega = \pm \beta v_{ph,0}$, avec $\beta = \pm \beta_e$.

On prend maintenant le couplage avec le faisceau en compte, mais avec C_p petit. Si on développe en série de Taylor les numérateurs des secondes fractions de (8.25) et (8.42), on obtient au premier ordre

$$\omega^2 - \beta^2 v_{ph,0}^2 = 2\omega v_{ph,0} (\beta - \beta_0) + \dots \quad (8.43)$$

$$\omega^2 - (\Omega_\beta^s)^2 = 2\omega v_g (\beta - \beta_0) + \dots \quad (8.44)$$

à proximité de la résonance avec l'onde ($\omega \simeq \Omega_\beta^s$, soit $\beta \simeq \beta_0$). Donc, au premier ordre, les équations (8.25) et (8.42) sont égales. On notera que l'équation (8.43) est solution du modèle de Pierce à trois ondes lorsque $v_{ph,0}$ est constant. On peut conclure qu'avec cette approximation, le modèle discret et le modèle de Pierce sont identiques lorsque la relation de dispersion est légèrement perturbée. Cette approximation est d'autant plus pertinente que la plupart des TOPs actuels fonctionnent en régime linéaire avec C_p petit.

8.5.2 Comparaison au second ordre et plus

En dehors de l'approximation au premier ordre, on peut s'attendre à des différences entre les deux modèles. Les différences les plus grandes entre les ondes non-couplées et couplées

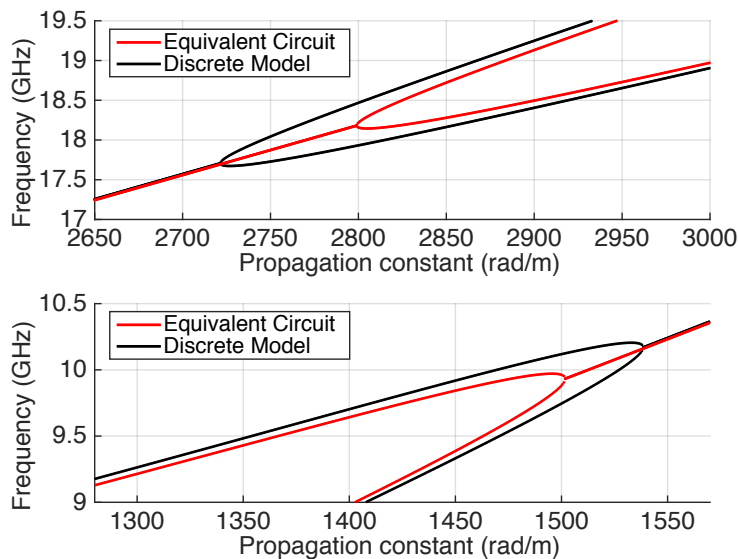


FIGURE 8.6 – Minenna *et al* (2019b). Détail de la figure 8.5 pour la partie réelle uniquement. La constante de propagation (*propagation constant*) est le nombre d’onde. Les courbes rouges sont les solutions à (8.25) pour le modèle de Pierce. Les courbes noires sont les solutions à (8.42) pour le modèle discret.

apparaissent aux bords des bandes passantes (aux limites où le taux de croissance tend vers zéro, $\Im(\beta) \rightarrow 0$).

Pour établir les différences entre les deux modèles, on a utilisé un solveur symbolique pour calculer les quatre solutions des équations (8.25) et (8.42). Comme exemple, nous utilisons la relation de dispersion à froid typique d’un TOP à hélice en bande Ku (12–18 GHz) donnée par la figure 8.2. Le résultat est présenté par la figure 8.5, et son zoom à la figure 8.6. Il s’agit de la relation de dispersion à chaud pour nos deux modèles avec les parties réelle et imaginaire de la fréquence en fonction du nombre d’onde (aussi appelé constante de propagation). On remarquera que, contrairement à l’usage, nous avons résolu les équations (8.25) et (8.42) pour ω en fonction des β à froid, ce qui nous donne des $\omega(\beta)$ complexes (donc l’amplification est considérée en temps). La partie imaginaire non nulle des ω (c-à-d. le taux de croissance) définit la bande passante du tube (entre 10 et 18 GHz pour notre exemple, en dehors de ces fréquences il n’y a pas d’amplification).

La figure 8.5 montre la grande similarité entre le modèle discret et le modèle de Pierce à quatre ondes qui se superposent presque. La courbe du haut correspond à l’onde de charge d’espace rapide, celle du dessous correspond à l’onde de charge d’espace lente. Entre les deux se trouve l’onde directe de circuit. L’onde rétrograde de circuit, avec des fréquences ou nombres d’onde négatifs, n’est pas montrée. Entre 10 et 18 GHz, les solutions réelles pour l’onde de charge d’espace lente et l’onde directe de circuit se superposent. Pour les deux, on a une partie imaginaire non nulle (c-à-d. le taux de croissance) qui définit la bande passante du tube. Un zoom aux bords de bande est présenté à la figure 8.6, montrant de légères variations sur la partie réelle $\Re(F)$ entre le modèle de Pierce et le modèle discret, surtout sur la taille de la bande passante. La différence de taux de croissance $\Im(F)$ est plus importante ($\sim 5\text{-}10\%$). Une conclusion sur la validité des deux modèles est donnée à la section suivante.

8.6 Avantages du modèle discret en régime linéaire

La comparaison analytique réalisée dans ce chapitre démontre que le modèle discret en domaine fréquentiel et le modèle de circuit équivalent de Pierce donnent des résultats identiques sans amplification ($C_p = 0$) et à l’approximation linéaire du premier ordre (Pierce à trois ondes). Au second ordre ou plus (Pierce à quatre ondes), les deux théories restent qua-

siment identiques surtout en milieu de bande passante. Puisque la théorie de Pierce est bien établie et encore utilisée, cela valide le modèle discret en régime linéaire.

On notera que notre comparaison a fait intervenir l'impédance de circuit-faisceau, qui, à notre connaissance, n'a jamais été utilisée dans l'étude des TOPs. L'intérêt d'utiliser cette impédance est que l'on peut facilement séparer les parties circuit et faisceau de nos modèles d'interaction. Cela rend les comparaisons entre différentes théories plus faciles à réaliser.

L'un des avantages majeurs du modèle discret en domaine fréquentiel, en plus de combiner les avantages du modèle en domaine temporel (cf. [chapitre 3](#)), est qu'il permet d'étudier l'interaction onde-particule avec la même rapidité et simplicité que les modèles fréquentiels. Notamment, il permet une résolution analytique du système en régime linéaire avec quasiment la même précision que le modèle de Pierce. On notera qu'en domaine fréquentiel, comme pour le domaine temporel du [chapitre 3](#), le modèle discret ne prend pas en compte la forme du guide d'onde. Cette dernière est cachée dans les valeurs de la relation de dispersion. On peut donc facilement représenter la ligne à retard avec un modèle 1D.

Toutefois, à la section précédente, on a identifié des différences entre le modèle de Pierce à quatre ondes et le modèle discret. Juste avec leurs descriptions analytiques, il nous est impossible de dire lequel des deux, s'il y en a un, a raison. Pourtant, le modèle de Pierce est connu¹ pour avoir d'importants écarts en bord de bande, là où l'impédance de circuit tend vers l'infini. On pourra aussi argumenter que les équations des télégraphistes sont une version approximative des équations de Maxwell et que les modèles fréquentiels peuvent violer Maxwell quand le couplage est fort (voir [section 8.1.3](#)). D'un autre côté, le modèle discret en domaine fréquentiel, directement obtenu à partir de Maxwell, ne souffre, selon nous, d'aucune approximation, à part pour la troncature sur le nombre de modes. En outre, des comparaisons entre MVTRAD (qui souffre des mêmes problèmes que les modèles fréquentiels) et DIMOHA ont montré que ce dernier avait un meilleur accord avec des mesures expérimentales. Nous affirmons donc que le modèle discret est meilleur en bord de bande. Il a d'ailleurs été construit initialement dans ce but. Donc, l'un des avantages du modèle discret est de pouvoir étudier avec précision les régimes opérant aux bords de bande de la relation de dispersion.

On notera que la description fluide utilisée est approximative, mais comme nous avons utilisé celle-ci pour les deux modèles, notre comparaison est indépendante du comportement du faisceau. On notera aussi qu'une comparaison entre les modèles d'enveloppe MVTRAD et BWIS et une ancienne version du modèle discret a été réalisée par [Théveny \(2016\)](#). Cette comparaison montre le même type de déviation que l'on peut voir sur la [figure 8.6](#).

La limite du raisonnement de ce modèle est facile à comprendre : le faisceau est faiblement perturbé et sa vitesse reste en moyenne v_0 . Or, pour avoir amplification, il faut que les électrons en moyenne ralentissent. De plus, la présence d'harmoniques a été négligée. Ce modèle permet de comprendre le fonctionnement des TOPs à bas niveau en régime linéaire mais est impuissant à quantifier leurs fonctionnements en régime non-linéaire.

¹[Qiu et al 2018](#);
[Simon et al 2017](#);
[Soltani et Abiri 2016](#)

“But the key question is, no matter how much you absorb of another person, can you ever have absorbed so much of them that when that primary brain perishes, you can feel that that person did not totally perish from the earth, because they (or at least a significant fraction of them) are still instantiated in your brain, because they still live on in a ‘second neural home’? [...] In the wake of a human being’s death, what survives is a set of afterglows, some brighter and some dimmer, in the collective brains of all those who were dearest to them. [...] Though the primary brain has been eclipsed, there is, in those who remain and who are gathered to remember and reactivate the spirit of the departed, a collective corona that still glows. This is what human love means.”

— Douglas R. Hofstadter, *I am a strange loop*, 2007

9

Structure hélicoïdale tridimensionnelle pour le modèle discret

Un des avantages majeurs du modèle discret, présenté au [chapitre 3](#) et au [chapitre 4](#), est la séparation des champs entre les variables temporelles et les variables spatiales. Pour calculer ces dernières, nous avons vu une approche unidimensionnelle reposant sur la relation de dispersion. Dans ce chapitre, nous utilisons un modèle analytique de la géométrie hélicoïdale pour calculer les fonctions spatiales tridimensionnelles. Nous proposons aussi un calcul de la puissance plus rigoureux que l’approximation donnée au [chapitre 6](#).

La structure hélicoïdale en électrodynamique,...

Vingt ans après le développement de la théorie de l’électromagnétisme, en partie introduite par [Maxwell \(1865\)](#), [Hertz \(1888\)](#) fut le premier à observer expérimentalement les ondes électromagnétiques se propageant dans l’air. En poursuivant ses recherches, c’est aussi [Hertz \(1889\)](#) qui réalisa les premiers guides d’onde, dont la première hélice métallique, avec pour idée de mesurer la vitesse des ondes. Mais Hertz n’étudia pas à proprement parler la structure hélicoïdale. Les premiers fondements analytiques sur les guides d’onde furent accomplis par [Thomson \(1893\)](#), [Rayleigh \(1897\)](#) et [Pocklington \(1897\)](#). Le modèle analytique de Pocklington suppose que le fil de l’hélice est fin (*thin wire*) et parfaitement conducteur de sorte que la vitesse de phase est réduite d’un facteur $\sin \Psi$ (voir [figure 9.1](#)). Ce sera [Ollendorff \(1926\)](#) qui sera à l’origine des modèles d’hélice en feuille (*sheath model*) : l’hélice est remplacée par des feuilles conductrices de courant anisotropes. Cette approche est particulièrement utile pour décrire le mode de propagation le plus bas $m = 0$ (cf. ci-après). Ce fut après l’apparition du tube à ondes progressives que l’intérêt pour la géométrie hélicoïdale s’intensifia,¹ notamment avec l’utilisation des modèles d’hélice en ruban.

pour l’étude des tubes à ondes progressives,...

Les premiers prototypes de tubes à ondes progressives construits d’abord par [Lindenblad \(1942\)](#) puis par [Kompfner \(1946\)](#) utilisaient une simple hélice comme structure à onde lente.

¹Voir [Sensiper \(1955\)](#) pour un résumé plus complet.

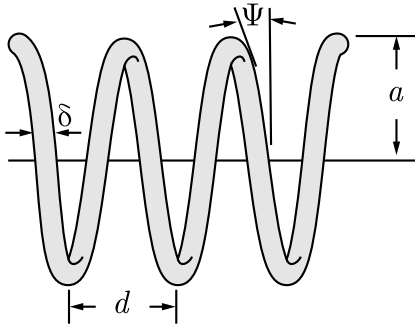


FIGURE 9.1 – Hélice d’un tube à ondes progressives. Le pas de l’hélice est noté d , son rayon est noté a et l’épaisseur de l’hélice est notée δ . L’angle de pas Ψ est donné par (9.1). Le faisceau passe au milieu de l’hélice.

Avant eux, le premier tube à ondes progressives inventé par [Haeff \(1936\)](#) utilisait deux hélices parallèles avec le faisceau d’électrons se propageant entre elles. Depuis lors, la structure hélicoïdale reste la géométrie de prédilection des TOPs. On parlera de deux modèles analytiques pour caractériser l’hélice. Le premier, et le plus simple, est le modèle d’hélice en feuille² qui fut rapidement généralisé vers une version plus complète : le modèle d’hélice en ruban.³ Ces modèles sont encore utilisés de nos jours, parfois sous des versions améliorées,⁴ même si les solveurs numériques sont maintenant majoritaires.

²[Cutler 1948](#);

[Pierce 1950](#)

³[Sensiper 1951](#),
[1955](#); [Tien 1953](#)

⁴[D’Agostino et al 1998](#); [Chernin et al 1999](#)

et développement des solveurs numériques.

La structure tridimensionnelle (3D) d’un TOP est en réalité complexe à décrire analytiquement, et les modèles évoqués dans ce chapitre sont tous simplifiés. Avec le développement des capacités de calculs en informatique, des résolveurs numériques sont apparus, permettant de simuler en 3D des TOPs et d’en déterminer les paramètres à froid (relation de dispersion, impédances, ...). La majorité d’entre eux utilise une approche *particle-in-cell* (PIC) pour étudier le faisceau. Toutefois, dans le modèle discret, l’interaction onde-particule ne fait intervenir que la partie temporelle des champs, laissant donc la possibilité de calculer les variables spatiales avec des modèles analytiques.

9.1 Hélice du tube

Pour étudier la propagation des champs dans un environnement tridimensionnel, on doit, en premier lieu, définir les **paramètres à froid** du champ (*cold field parameters*) dépendant de la géométrie du système tels que la relation de dispersion, l’impédance de circuit, et, pour le modèle discret, les formes de champs \mathbf{E}_n^s et \mathbf{H}_n^s . La structure 3D d’un TOP est complexe à décrire analytiquement car il faut retrouver les solutions aux équations de Maxwell. Le modèle d’hélice que nous utilisons dérive des travaux de [Sensiper \(1955\)](#), [Tien \(1953\)](#) et [Crepeau et McIsaac \(1964\)](#).

Dans ce chapitre, nous utiliserons m l’indice de l’harmonique de l’onde, au lieu d’utiliser s le mode de propagation (voir ci-dessous).

9.1.1 Hélice métallique

L’hélice d’un TOP est représentée à la [figure 9.1](#). Le système considéré est sans pertes. Le cylindre de l’hélice est supposé infini dans les deux directions et périodique de pas d le long de l’axe z avec $z \in \mathbb{R}$. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on définit l’**angle d’inclinaison** (ou de pas, *pitch angle*)¹ par

$$\Psi = \cot^{-1} \frac{2\pi a}{d}, \quad (9.1)$$

¹Les modèles où $\Psi = 0$ sont appelés *sheath ring*, et ceux où $\Psi = \pi$ sont appelés *sheath tube*.

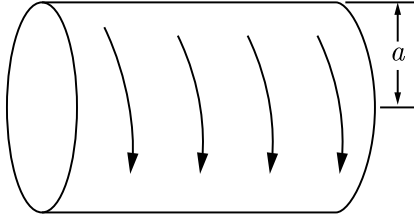


FIGURE 9.2 – Le modèle d’hélice en feuille de rayon a , inspiré de Tien (1953). L’hélice est représentée par un cylindre infini idéal et composé de feuilles anisotropes conductrices de courant le long de la direction d’enroulement.

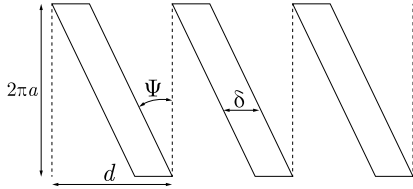


FIGURE 9.3 – Le modèle d’hélice en ruban, inspiré de Tien (1953). L’hélice est représentée par des bandes conductrices fines de longueur $2\pi a \cos \Psi$ et de largeur δ .

avec a le rayon du cylindre représenté à la figure 9.1. Comme le système est périodique, les champs électromagnétiques peuvent être exprimés comme des superpositions linéaires de champs satisfaisant la condition de Floquet (voir équation (3.10))

$$\mathbf{E}_\beta(r, \theta, z + nd) = \mathbf{E}_\beta(r, \theta, z) e^{-in\beta d}, \tag{9.2}$$

$$\mathbf{H}_\beta(r, \theta, z + nd) = \mathbf{H}_\beta(r, \theta, z) e^{-in\beta d}, \tag{9.3}$$

en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec $\beta \in [-\pi/d, \pi/d]$ le nombre d’onde fondamental. On considère que les champs sont spatialement décomposés¹, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , par²

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_\beta^m(r) e^{-im\theta} e^{-i\beta_m z}, \tag{9.4}$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}_\beta^m(r) e^{-im\theta} e^{-i\beta_m z}, \tag{9.5}$$

avec $m \in \mathbb{Z}$ le numéro des harmoniques spatiales, et \mathbf{E}^m et \mathbf{H}^m les $m^{\text{ièmes}}$ coefficients de Fourier du champ électromagnétique. Le mode de propagation s des chapitres 3 et 4 est maintenant noté m . On redéfinit aussi le nombre d’onde (c-à-d. la constante de propagation) par

$$\beta_m = \beta + \frac{2\pi m}{d} = \beta + m \frac{\cot \Psi}{a} \in \mathbb{R}, \tag{9.6}$$

pour tenir compte dans (9.4)-(9.5) de la symétrie hélicoïdale de la frontière $(z - z_0)/d = (\theta - \theta_0)/(2\pi)$.

¹Sensiper 1955; Crepeau et McIsaac 1964

²On trouve aussi dans la littérature une décomposition avec deux nombres m et m' (par exemple en $e^{-im'\theta} e^{-i\beta_m z}$, avec m l’harmonique et m' l’indice axial). Le s du chapitre 3 et du chapitre 4 dénotait alors les nombres m et m' . Pour une hélice d’un TOP, l’approximation $m = m'$ est largement suffisante.

9.1.2 Conditions de bord

Les champs électromagnétiques, satisfaisant les équations de Maxwell (3.1), sont décomposés spatialement comme

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z, \tag{9.7}$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, z) = H_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + H_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + H_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z. \tag{9.8}$$

On définit les vecteurs unitaires \mathbf{e}_{\parallel} et \mathbf{e}_{\perp} , respectivement parallèle et perpendiculaire au fil de l'hélice et reliés aux vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_{θ} et \mathbf{e}_z par

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{e}_z \sin \Psi + \mathbf{e}_{\theta} \cos \Psi, \quad (9.9)$$

$$\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{e}_z \cos \Psi - \mathbf{e}_{\theta} \sin \Psi. \quad (9.10)$$

Pour l'hélice, la liaison entre les deux régions, interne avec $r \in [0, a]$ (indice i) et externe avec $r \in [a, \infty[$ (indice o), se fait grâce aux conditions de continuité¹ appropriées pour $r = a$ ¹Sensiper 1951

$$E_{\parallel}^i(a) = E_{\parallel}^o(a) = 0, \quad (9.11)$$

$$E_{\perp}^i(a) = E_{\perp}^o(a), \quad (9.12)$$

$$H_{\parallel}^i(a) = H_{\parallel}^o(a), \quad (9.13)$$

en supposant que le fil est un conducteur parfait, et où les indices \parallel et \perp font référence aux composantes parallèle et perpendiculaire au fil. En termes de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on obtient

$$E_z^i(a) = E_z^o(a), \quad (9.14)$$

$$E_{\theta}^i(a) = E_{\theta}^o(a), \quad (9.15)$$

$$E_z^i(a) = -E_{\theta}^i(a) \cot \Psi, \quad (9.16)$$

$$E_z^o(a) = -E_{\theta}^o(a) \cot \Psi, \quad (9.17)$$

$$H_z^i(a) + H_{\theta}^i(a) \cot \Psi = H_z^o(a) + H_{\theta}^o(a) \cot \Psi, \quad (9.18)$$

où les exposants i et o dénotent respectivement les quantités à l'intérieur et l'extérieur de l'hélice. Pour des géométries d'hélice plus complètes, il est possible d'ajouter d'autres conditions de bord, dépendant du mode de propagation, par exemple, si on impose un mode transverse magnétique,² ou transverse électrique.³

$${}^2 H_z(r, \theta, z) = 0$$

$${}^3 E_z(r, \theta, z) = 0$$

9.1.3 Modèles d'hélice en feuille et d'hélice en ruban

Pour l'hélice, on distinguera deux régions : à l'intérieur de l'hélice lorsque $r \in [0, a]$ avec l'indice i, et à l'extérieur de l'hélice lorsque $r \in [a, \infty[$ avec l'indice o. On considèrera les deux modèles suivants pour la structure :

- Le modèle d'hélice en feuille⁴ (*sheath helix*) est le modèle le plus simple pour schématiser une hélice (voir figure 9.2). Il se limite au mode fondamental $m = 0$ et l'hélice est représentée par des feuilles conductrices idéales de courant anisotropes. ⁴Ollendorff 1926; Cutler 1948; Pierce 1950
- Le modèle d'hélice en ruban (*tape helix*, voir figure 9.3) est une alternative plus complète qui fait intervenir toutes les harmoniques d'espace m . L'hélice est représentée par des rubans conducteurs inclinés et fins, avec δ l'épaisseur radiale du fil. Lorsque $a \leq r \leq a + \delta$, il est possible de considérer un milieu diélectrique de permittivité relative $\epsilon_r \neq 1$, tel que le fourreau protégeant l'hélice et maintenant le vide (voir figure 2.2). Certains auteurs⁵ ont déjà considéré un modèle en ruban plus complet entouré d'une stratification radiale de différent diélectriques, voire prenant en compte des montants. ⁵D'Agostino et al 1998; Chernin et al 1999

Nous utiliserons principalement le modèle d'hélice en feuille, notamment pour sa simplicité et parce que l'impédance de ce modèle est déjà établie, ce qui validera nos calculs avec le modèle discret.

9.2 Modèle discret pour la géométrie hélicoïdale

On rappelle les équations de Helmholtz (3.18)-(3.19)

$$\text{rot } \mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r}) = -i\mu_0\Omega_\beta^m \mathbf{H}_\beta^m(\mathbf{r}), \quad (9.19)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_\beta^m(\mathbf{r}) = i\epsilon_0\Omega_\beta^m \mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r}), \quad (9.20)$$

avec $\text{div } \mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{H}_\beta^m(\mathbf{r}) = 0$, pour les champs propres $\mathbf{E}_\beta^m, \mathbf{H}_\beta^m$ respectant la condition de Floquet.¹ On précise que les champs propres sont décomposés comme

$$\mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{E}_{r,\beta}^m(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{E}_{\theta,\beta}^m(r)\mathbf{e}_\theta + \mathbf{E}_{z,\beta}^m(r)\mathbf{e}_z \right) e^{-im\theta} e^{-i\beta_m z}, \quad (9.21)$$

$$\mathbf{H}_\beta^m(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{H}_{r,\beta}^m(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{H}_{\theta,\beta}^m(r)\mathbf{e}_\theta + \mathbf{H}_{z,\beta}^m(r)\mathbf{e}_z \right) e^{-im\theta} e^{-i\beta_m z}. \quad (9.22)$$

$${}^1 \mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r} + nd\mathbf{e}_z) = \mathbf{E}_\beta^m(\mathbf{r}) e^{-in\beta d}.$$

Le premier objectif de ce chapitre est de résoudre les équations de Helmholtz pour la géométrie hélicoïdale. En utilisant l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

et l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (9.24)$$

on peut, par exemple, obtenir la composante en z du champ propre électrique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E}_{z,\beta}^m(r) \right) - \left((\beta_m^2 - k^2)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \mathbf{E}_{z,\beta}^m(r) = 0, \quad (9.25)$$

avec le nombre d'onde du vide $k(s) = \Omega_\beta^s \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \Omega_\beta^s / c$.

9.3 Modèle discret pour l'hélice en feuille

On commence par utiliser le modèle d'hélice en feuille où $m = 0$. On définit le nombre d'onde transverse (*transverse constant* ou *radial phase constant*)

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad (9.26)$$

avec, pour $m = 0$, le nombre d'onde du vide $k = \Omega_\beta \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \Omega_\beta / c$ et $\Omega_\beta = \Omega_\beta^0$

À l'intérieur de l'hélice, pour $0 \leq r < a$, les solutions des équations (9.19)-(9.20) sont

$$E_{\beta,r}^i(r) = i \frac{\beta}{\gamma} A_{\beta}^i I_0'(\gamma r), \quad (9.27)$$

$$E_{\beta,\theta}^i(r) = -i \frac{\Omega_{\beta} \mu_0}{\gamma} B_{\beta}^i I_0'(\gamma r), \quad (9.28)$$

$$E_{\beta,z}^i(r) = A_{\beta}^i I_0(\gamma r), \quad (9.29)$$

$$H_{\beta,r}^i(r) = i \frac{\beta}{\gamma} B_{\beta}^i I_0'(\gamma r), \quad (9.30)$$

$$H_{\beta,\theta}^i(r) = i \frac{\Omega_{\beta} \epsilon_0}{\gamma} A_{\beta}^i I_0'(\gamma r), \quad (9.31)$$

$$H_{\beta,z}^i(r) = B_{\beta}^i I_0(\gamma r). \quad (9.32)$$

En dehors de l'hélice, pour $r \in [a, \infty[$, les solutions sont

$$E_{\beta,r}^o(r) = i \frac{\beta}{\gamma} A_{\beta}^o K_0'(\gamma r), \quad (9.33)$$

$$E_{\beta,\theta}^o(r) = -i \frac{\Omega_{\beta} \mu_0}{\gamma} B_{\beta}^o K_0'(\gamma r), \quad (9.34)$$

$$E_{\beta,z}^o(r) = A_{\beta}^o K_0(\gamma r), \quad (9.35)$$

$$H_{\beta,r}^o(r) = i \frac{\beta}{\gamma} B_{\beta}^o K_0'(\gamma r), \quad (9.36)$$

$$H_{\beta,\theta}^o(r) = i \frac{\Omega_{\beta} \epsilon_0}{\gamma} A_{\beta}^o K_0'(\gamma r), \quad (9.37)$$

$$H_{\beta,z}^o(r) = B_{\beta}^o K_0(\gamma r). \quad (9.38)$$

Les facteurs I_m et K_m sont les fonctions de Bessel modifiées à l'ordre m de première et deuxième espèces respectivement, avec les notations $I_m'(x) = \partial_x I_m$ et $K_m'(x) = \partial_x K_m$ (voir annexe B.5). En utilisant la décomposition des champs (3.44)-(3.45) du modèle discret, les champs propres (9.27)-(9.38) sont donnés par Watkins (1958), au choix des constantes $A_{\beta}^i, A_{\beta}^o, B_{\beta}^i, B_{\beta}^o$ près.

Le lien entre les constantes $A_{\beta}^i, A_{\beta}^o, B_{\beta}^i, B_{\beta}^o$ est donné par les conditions de bord (9.14)-(9.18). En effet, si $r = a$, l'application des conditions de bord aux équations (9.27)-(9.38) nous permet d'obtenir¹ les proportionnalités

$$A_{\beta}^o = \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} A_{\beta}^i, \quad (9.39)$$

$$B_{\beta}^o = \frac{I_1(\gamma a)}{K_1(\gamma a)} B_{\beta}^i, \quad (9.40)$$

$$B_{\beta}^i = -\frac{I_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a)} \frac{i\gamma}{\Omega_{\beta} \mu_0} \frac{1}{\cot \Psi} A_{\beta}^i, \quad (9.41)$$

$$B_{\beta}^o = -\frac{K_0(\gamma a)}{K_1(\gamma a)} \frac{i\gamma}{\Omega_{\beta} \mu_0} \frac{1}{\cot \Psi} A_{\beta}^o, \quad (9.42)$$

et la condition de compatibilité

$$\left(\frac{1}{\cot \Psi} \right)^2 = \frac{I_1(\gamma a) K_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a) K_0(\gamma a)} \frac{(\Omega_{\beta})^2 \epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}. \quad (9.43)$$

Pour une hélice donnée, dont on connaît le rayon a et la relation de dispersion Ω_{β} (valeur propre des équations de Helmholtz qui est fixée par la condition de compatibilité pour le

¹Sensiper 1951

modèle d'hélice en feuille), il nous manque uniquement les valeurs des A_β^i pour pouvoir exprimer complètement les équations (9.27)-(9.38). On notera que, puisque $I_0(0) = 1$, cela implique que

$$E_{\beta,z}^i(0) = A_\beta^i. \quad (9.44)$$

9.3.1 Régime monochromatique

Puisque les champs propres $\mathbf{E}_\beta^{m=0}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_\beta^{m=0}(\mathbf{r})$ sont indépendants du temps (et donc aussi les valeurs de A_β^i), on exprime les champs en régime harmonique comme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}]$ (voir chapitre 8). Dans ce régime, la moyenne du flux du vecteur de Poynting (puissance harmonique) est¹ $\langle P \rangle = \int_S \frac{1}{2} \Re[\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{e}_z dS$. Comme vu au chapitre 6, ¹Jackson 1999 dans l'approximation monochromatique, on peut réécrire la puissance moyenne dans la représentation- β

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Re \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{V}_\beta^m \tilde{V}_\beta^{m*} \frac{c^2}{d} \mathcal{K}_\beta^m d(\beta d) \quad (9.45)$$

$$= \frac{|\tilde{E}_z|^2}{2\beta^2 Z_c(\beta)} \quad (9.46)$$

avec

$$\lim_{\beta_2 \rightarrow \beta_1} \mathfrak{f}_{\beta_1, \beta_2}^m = \mathfrak{f}_{\beta_1, \beta_1}^m = i \frac{\mathcal{K}_\beta^m c^2}{d} = i \int_S \Re(\mathbf{E}_\beta^{m*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_\beta^m(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z dS. \quad (9.47)$$

En ne considérant que l'harmonique fondamentale $m = 0$ (on omet l'exposant m), le produit vectoriel de (9.47) se réduit à

$$\frac{\mathcal{K}_\beta c^2}{d} = 2\pi \int_0^a [\mathbf{E}_{\beta,r}^{i*} \mathcal{H}_{\beta,\theta}^i - \mathbf{E}_{\beta,\theta}^{i*} \mathcal{H}_{r,\beta}^i] r dr + 2\pi \int_a^\infty [\mathbf{E}_{\beta,r}^{o*} \mathcal{H}_{\theta,\beta}^o - \mathbf{E}_{\beta,\theta}^{o*} \mathcal{H}_{\beta,r}^o] r dr, \quad (9.48)$$

où l'intégrale sur θ est égale à 2π . Avec les solutions des champs propres (9.27)-(9.38) pour les conditions de bord (9.39)-(9.43), l'équation (9.48) devient

$$\frac{\mathcal{K}_\beta c^2}{d} = \frac{\beta \Omega_\beta \epsilon_0}{(\gamma)^2} \pi a^2 |A_\beta^i|^2 F(\gamma a), \quad (9.49)$$

avec le facteur sans dimension de réduction de l'impédance²

²Cutler 1948;
Pierce 1950

$$F(\gamma a) = \left(1 + \frac{I_0(\gamma a) K_1(\gamma a)}{I_1(\gamma a) K_0(\gamma a)}\right) \left(I_1^2(\gamma a) - I_0(\gamma a) I_2(\gamma a)\right) + \left(\frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)}\right)^2 \left(1 + \frac{I_1(\gamma a) K_0(\gamma a)}{I_0(\gamma a) K_1(\gamma a)}\right) \left(K_0(\gamma a) K_2(\gamma a) - K_1^2(\gamma a)\right). \quad (9.50)$$

9.3.2 Impédance de circuit

Comme le champ sur l'axe du cylindre est longitudinal, le carré de la norme du champ électrique (3.23) vaut

$$|\tilde{E}_z(0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{V}_\beta \tilde{V}_\beta^* |A_\beta^i|^2 d(\beta d) \quad (9.51)$$

pour $r = 0$ et dans l'approximation monochromatique $\beta_1 = \beta_2$. On injecte (9.51) dans la puissance harmonique (9.46) et (9.45) pour obtenir l'impédance de circuit

$$Z_c(\beta) = \frac{1}{\pi a^2 \epsilon_0} \frac{\gamma^2}{\Omega_\beta \beta^3} \left[F(\gamma a) \right]^{-1} \quad (9.52)$$

dans le modèle d'hélice en feuille. La même équation que (9.52) a déjà été donnée par Pierce (1950), mais à partir de champs réels avec le modèle d'hélice en feuille. Bien que nous utilisons le même modèle d'hélice, notre approche est différente car nous utilisons des champs décomposés par le modèle discret (nous résolvons les équations de Helmholtz (9.19)-(9.20) au lieu de résoudre les équations d'onde (3.7)-(3.8) comme Pierce l'a fait). Puisque nous retrouvons l'équation (9.52), nous concluons que notre approche est cohérente. On rappellera que ce qui est propre au modèle discret est la discrétisation par cellule des champs.

Nous pouvons maintenant trouver les valeurs des A_β^i . Puisque $c^2 K_\beta = \Omega_\beta v_g$, l'équation (9.49) se réécrit comme

$$|A_\beta^i|^2 = \frac{v_g}{d} \frac{(\gamma)^2}{\epsilon_0 \beta \pi a^2} \left[F(\gamma a) \right]^{-1}. \quad (9.53)$$

Avec l'impédance de circuit (9.52), on trouve le champ propre électrique sur l'axe z

$$E_{\beta,z}^i(0) = A_\beta^i = \beta \sqrt{\frac{v_g \Omega_\beta}{d} Z_c(\beta)}, \quad (9.54)$$

qui est exactement égal à l'équation (6.73) utilisée dans l'approximation 1D. Puisque A_β^i est indépendant du temps, cette relation est vraie pour les régimes harmoniques et temporels.

9.4 Puissance électromagnétique en régime non-monochromatique

Au chapitre 6, nous avons proposé une approximation 1D et monochromatique de la puissance électromagnétique. Nous résolvons maintenant l'équation (6.55) de manière plus rigoureuse. Dans le modèle d'hélice en feuille ($m = 0$), l'équation (6.52) devient donc

$$\mathfrak{k}_{\beta_1, \beta_2} = 2\pi i \left(\int_0^a \Re \left[E_{\beta_1, r}^{i*} H_{\beta_2, \theta}^i - E_{\beta_1, \theta}^{i*} H_{\beta_2, r}^i \right] r dr + \int_a^\infty \Re \left[E_{r, \beta_1}^{o*}(r) H_{\beta_2, \theta}^o - E_{\beta_1, \theta}^{o*} H_{\beta_2, r}^o \right] r dr \right), \quad (9.55)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi i a}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\frac{\Omega_{\beta_1} \mu_0 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2} B_{\beta_1}^{i*} B_{\beta_2}^i - \frac{\beta_1 \Omega_{\beta_2} \epsilon_0}{\gamma_1 \gamma_2} A_{\beta_1}^{i*} A_{\beta_2}^i \right) \left(\gamma_1 I_1(\gamma_2 a) I_2(\gamma_1 a) - \gamma_2 I_1(\gamma_1 a) I_2(\gamma_2 a) \right) \\ &+ \frac{2\pi i a}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\frac{\Omega_{\beta_1} \mu_0 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2} B_{\beta_1}^{o*} B_{\beta_2}^o - \frac{\beta_1 \Omega_{\beta_2} \epsilon_0}{\gamma_1 \gamma_2} A_{\beta_1}^{o*} A_{\beta_2}^o \right) \left(\gamma_2 K_0(\gamma_2 a) K_1(\gamma_1 a) - \gamma_1 K_0(\gamma_1 a) K_1(\gamma_2 a) \right), \quad (9.56) \end{aligned}$$

avec $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1^2 - k^2}$ et $\gamma_2 = \sqrt{\beta_2^2 - k^2}$. Nous pouvons donc ré-exprimer la puissance électromagnétique en temps avec le modèle discret.

Pour valider cette relation, nous nous proposons de calculer cette puissance avec DIMOHA. En faisant la moyenne temporelle du résultat obtenu, nous devrions pouvoir la comparer avec des mesures expérimentales. Pour éprouver le régime non-monochromatique, nous proposons de tester des signaux multi-porteuses. Ce travail est toujours en cours.

9.5 Modèle discret pour l'hélice en ruban

Pour le modèle d'hélice en ruban ($m \in \mathbb{Z}$), on définit les nombres d'onde transverses

$$\gamma_m = \sqrt{\beta_m^2 - k^2}, \quad (9.57)$$

lorsque $r \in [0, a]$, pour le nombre d'onde du vide $k(m) = \Omega_\beta^m \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \Omega_\beta^m / c$. Lorsque $r \in [a, \infty[$, on aura

$$\gamma_m^o = \sqrt{\beta_m^2 - (k^o)^2}, \quad (9.58)$$

pour le nombre d'onde du mode m dans le diélectrique $k^o(m) = \Omega_\beta^m \sqrt{\mu_0 \epsilon}$ et $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

À l'intérieur de l'hélice, pour $0 \leq r < a$, les solutions des équations de (9.19)-(9.20) sont

$$E_{\beta,r}^{i,m}(r) = i \frac{\beta_m}{\gamma_m} A_\beta^{i,m} I_m'(\gamma_m r) + \frac{\Omega_\beta^m \mu_0}{\gamma_m^2} \frac{m}{r} B_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r), \quad (9.59)$$

$$E_{\beta,\theta}^{i,m}(r) = \frac{\beta_m}{\gamma_m^2} \frac{m}{r} A_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r) - i \frac{\Omega_\beta^m \mu_0}{\gamma_m} B_\beta^{i,m} I_m'(\gamma_m r), \quad (9.60)$$

$$E_{\beta,z}^{i,m}(r) = A_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r), \quad (9.61)$$

$$H_{\beta,r}^{i,m}(r) = i \frac{\beta_m}{\gamma_m} B_\beta^{i,m} I_m'(\gamma_m r) - \frac{\Omega_\beta^m \epsilon_0}{\gamma_m^2} \frac{m}{r} A_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r), \quad (9.62)$$

$$H_{\beta,\theta}^{i,m}(r) = \frac{\beta_m}{\gamma_m^2} \frac{m}{r} B_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r) + i \frac{\Omega_\beta^m \epsilon_0}{\gamma_m} A_\beta^{i,m} I_m'(\gamma_m r), \quad (9.63)$$

$$H_{\beta,z}^{i,m}(r) = B_\beta^{i,m} I_m(\gamma_m r). \quad (9.64)$$

À l'extérieur de l'hélice, pour $r \in [a, \infty[$, les solutions des équations des champs propres sont

$$E_{\beta,r}^{o,m}(r) = i \frac{\beta_m}{\gamma_m^o} A_\beta^{o,m} K_m'(\gamma_m^o r) + \frac{\Omega_\beta^m \mu_0}{(\gamma_m^o)^2} \frac{m}{r} B_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r), \quad (9.65)$$

$$E_{\beta,\theta}^{o,m}(r) = \frac{\beta_m}{(\gamma_m^o)^2} \frac{m}{r} A_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r) - i \frac{\Omega_\beta^m \mu_0}{\gamma_m^o} B_\beta^{o,m} K_m'(\gamma_m^o r), \quad (9.66)$$

$$E_{\beta,z}^{o,m}(r) = A_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r), \quad (9.67)$$

$$H_{\beta,r}^{o,m}(r) = i \frac{\beta_m}{\gamma_m^o} B_\beta^{o,m} K_m'(\gamma_m^o r) + \frac{\Omega_\beta^m \epsilon}{(\gamma_m^o)^2} \frac{m}{r} A_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r), \quad (9.68)$$

$$H_{\beta,\theta}^{o,m}(r) = \frac{\beta_m}{(\gamma_m^o)^2} \frac{m}{r} B_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r) + i \frac{\Omega_\beta^m \epsilon}{\gamma_m^o} A_\beta^{o,m} K_m'(\gamma_m^o r), \quad (9.69)$$

$$H_{\beta,z}^{o,m}(r) = B_\beta^{o,m} K_m(\gamma_m^o r). \quad (9.70)$$

Le lien entre les constantes $A_\beta^{i,m}$, $A_\beta^{o,m}$, $B_\beta^{i,m}$ et $B_\beta^{o,m}$ est donné par les conditions de frontière (9.14)-(9.18). En utilisant la décomposition des champs (3.44)-(3.45) du modèle discret, nous retrouvons les champs propres (9.59)-(9.70) de Crepeau et McIsaac (1964), au choix près des constantes $A_\beta^{i,m}$, $A_\beta^{o,m}$, $B_\beta^{i,m}$, $B_\beta^{o,m}$. Il sera possible par la suite d'exprimer la puissance pour le modèle d'hélice en ruban.

9.6 Avantages et perspectives du modèle discret pour la géométrie hélicoïdale

L'utilisation du modèle discret implique la séparation des amplitudes temporelles V_n^s, I_n^s et des formes spatiales $\mathbf{E}_n^s, \mathbf{H}_n^s$ des champs. Pour déterminer la valeur des amplitudes tempo-

relles, on utilisera un modèle d'interaction tel que le modèle N -corps présenté au [chapitre 4](#) ou le modèle fluide présenté au [chapitre 8](#). Si la propagation des champs est dictée par le modèle discret, ce dernier n'impose aucune contrainte sur la structure à utiliser (tant qu'elle est périodique dans une direction). Le calcul des formes spatiales repose sur la connaissance de la géométrie du système. Au [chapitre 6](#), nous avons proposé une résolution unidimensionnelle. Dans ce chapitre, nous avons utilisé un modèle d'hélice pour identifier les $\mathbf{E}_n^s, \mathbf{H}_n^s$. Ce travail valide aussi notre approximation 1D des $E_{\beta,z}^s$.

La simulation 3D d'un TOP a de nombreux avantages, comme pouvoir prédire la distribution en vitesse et en position des particules en sortie de la ligne à retard, et notamment améliorer les collecteurs. Le principal intérêt d'un modèle discret tri-dimensionnel est de pouvoir modéliser n'importe quelle structure en 3D sans ajouter plus de degrés de liberté pour les champs que pour le modèle 1D. Les $\mathbf{E}_n^s, \mathbf{H}_n^s$ sont des constantes de la géométrie et seules les variables V_n^s, I_n^s sont dépendantes du temps. On peut donc, par exemple, imaginer une version 3D de DIMOHA. On remarquera qu'avant de réaliser cette version 3D, il faudra repenser toute la propagation du faisceau en 3D et cela imposera de nombreuses contraintes. Par exemple, le modèle de charge d'espace en disque de la [section 4.6.2](#) sera inutilisable, et le confinement du faisceau par le champ magnétique extérieur devra être incorporé. Cela ajoutera énormément de paramètres aux simulations et il n'est pas certain que l'approche N -corps reste la meilleure solution. On pourra toutefois imaginer un modèle discret 2.5D avec un faisceau PIC comme le fait MVTRAD, qui devrait être aussi rapide que ce dernier mais bénéficier de la robustesse du modèle discret.

L'approche que nous avons utilisée dans ce chapitre peut servir de base pour définir les formes spatiales pour d'autres géométries telles que les guides à cavités couplées ou les guides repliés pour les TOPs. Il est aussi envisageable, au lieu de développer une résolution analytique, de passer par un solveur 3D pour définir les fonctions spatiales des champs.

Toutefois, le travail présenté dans ce chapitre est incomplet. Il nous reste à vérifier numériquement notre calcul de la puissance en temps pour le modèle d'hélice en feuille, et à finir les calculs théoriques pour le modèle d'hélice en ruban.

Sixième partie

Conclusions et Annexes

“Are you suggesting that coconuts migrate?”

— *Monty Python and the Holy Grail*, 1975

10

Conclusions et perspectives

Bref résumé

Pour résumer très brièvement cette dissertation, l'étude de l'échange de moment, mécanique ou canonique, entre ondes et particules nous permet de formuler deux conclusions majeures :

- En électrodynamique et en physique des plasmas, la description à N -corps est une alternative viable, sous certaines conditions, pour étudier des dispositifs expérimentaux centimétriques, voire métriques. L'astuce indispensable est de pouvoir appliquer un modèle de réduction du nombre de degrés de liberté au système. Dans notre contexte, la combinaison du modèle discret (un modèle de réduction) à notre approche N -corps 1D nous permet de bénéficier d'une méthode 200 à 500 fois plus rapide que les codes *particle-in-cell* pour la même précision.
- Quand la vitesse de la lumière est modifiée par rapport à sa célérité dans le vide ($v_{\text{ph}} \neq c$), peu importe la cause de cette modification, il existe deux formules différentes donnant le moment de la lumière, une canonique et une mécanique. Ce fait, déjà établi en optique pour les milieux diélectriques sous l'appellation de controverse Abraham-Minkowski, est démontré dans cette dissertation pour les guides d'ondes sous vide, et fortement suggéré pour les plasmas. Nous suggérons aussi l'universalité de cette controverse en physique.

Conclusions

Dans cette dissertation, nous avons approfondi le modèle discret de Kuznetsov, un modèle de réduction du nombre de degrés de liberté permettant de ré-exprimer les champs électromagnétiques. Ce modèle possède de nombreux avantages. En premier, on notera l'exactitude de la décomposition des champs, équations (3.42)-(3.43) pour les structures périodiques, et son accord avec les équations de Maxwell. Cette décomposition permet d'interpréter la

propagation des ondes dans la structure périodique comme une chaîne d'oscillateurs dont les termes de couplage entre cellules, s'annulant rapidement en s'éloignant, ne sont que les transformées de Fourier de la relation de dispersion du guide d'onde (voir [section 3.4](#)). Plus important encore, cette représentation de la propagation des ondes réduit la description temporelle de tout le champ électromagnétique à un très faible nombre de degrés de liberté. Ce nombre est seulement égal au nombre de périodes du système (p. ex. un TOP spatial possède $n \approx 100$ périodes, ce qui représente 100 degrés de liberté pour les champs). Les défauts majeurs du modèle discret ne sont pas très contraignants à gérer avec un TOP : en théorie, la structure doit être infinie, mais les couplages entre cellules s'annulent rapidement, et nous travaillons avec des longueurs d'onde supérieures à la longueur des cellules. De plus, ce modèle de réduction est, dans une certaine limite, adaptable aux modifications industrielles, telles que les variations de pas (*taper*) et les atténuateurs (*severs*), comme le montrent nos simulations au [chapitre 5](#). Avec le modèle discret, les couplages pour la propagation des ondes prennent en compte naturellement toute la relation de dispersion ce qui nous laisse suggérer sa meilleure rigueur en comparaison avec les approches fréquentielles actuelles (voir [chapitre 8](#)). De plus, on notera la flexibilité du modèle à toute sorte de structure (tant que l'on connaît la relation de dispersion) et la possibilité de l'utiliser pour des représentations unidimensionnelles ou tri-dimensionnelles. Le modèle discret n'impose aucune contrainte sur la forme de la structure étudiée, à part sa périodicité le long de l'axe longitudinal. Cela est un bon avantage quand on sait que certains modèles de circuits équivalents doivent être réécrits lorsque la géométrie change.

L'utilisation du modèle discret se fait par la résolution de la décomposition des champs (3.42)-(3.43). La valeur des amplitudes temporelles V_n^s et I_n^s s'obtient avec un modèle d'interaction : nous avons proposé un modèle N -corps au [chapitre 4](#) et un modèle fluide au [chapitre 8](#). Pour déterminer les formes de champs \mathbf{E}_n^s , \mathbf{H}_n^s et \mathbf{A}_n^s , nous avons proposé un calcul unidimensionnel au [chapitre 6](#) et un calcul tri-dimensionnel au [chapitre 9](#) reposant sur la géométrie hélicoïdale.

Pour valider le modèle discret analytiquement, nous avons construit une version en domaine fréquentiel de ce dernier et nous l'avons comparée à un modèle fréquentiel (le modèle de Pierce) déjà bien établi (voir [chapitre 8](#)). Cette comparaison a démontré que notre modèle en version fréquentielle et le modèle de Pierce sont identiques à l'ordre 1 et quasiment identiques aux ordres supérieurs. Des différences apparaissent dans les régimes d'opération où le modèle de Pierce n'est pas précis. Les comparaisons au [chapitre 5](#) entre MVTRAD, qui souffre des mêmes problèmes, et DIMOHA donnent raison à ce dernier et donc à notre modèle. La version fréquentielle du modèle discret combine la rigueur du modèle discret avec l'adaptabilité et la facilité d'exécution des modèles fréquentsiels. Ce modèle permet aussi, en théorie, d'étudier le comportement en bord de bande de transmission des TOPs à cavités couplées où apparaissent des oscillations critiques.

Au [chapitre 9](#), nous avons construit une version tri-dimensionnelle du modèle discret pour la géométrie hélicoïdale. Bien que le modèle d'hélice que nous utilisons soit simple, notre approche ouvre la voie vers la construction de versions 3D plus complètes et pour d'autres géométries. On pourra utiliser des approches analytiques ou bien utiliser des solveurs numériques pour exprimer les champs propres spatiaux. Cela nous permettra de réaliser des modèles d'interaction plus complets prenant en compte les déviations radiales du faisceau, notamment en construisant des codes d'interaction 3D.

Au [chapitre 6](#), nous avons exprimé la conservation du moment canonique entre ondes et particules de notre théorie hamiltonienne N -corps, avec la décomposition du modèle discret. Cette conservation renforce la robustesse théorique de notre approche. De plus, nous avons

vérifié cette conservation avec notre algorithme DIMOHA afin d'affirmer la consistance de ce dernier. Il est aussi envisageable d'ajouter à notre théorie l'échange de moment avec les parois du système et ainsi mieux prendre en compte les pertes.

Dans cette dissertation, nous avons aussi proposé de nouvelles expressions de la puissance électromagnétique en temps, associées à la décomposition du modèle discret. Une première expression unidimensionnelle a été proposée au [chapitre 6](#) en utilisant l'approximation monochromatique. Au [chapitre 9](#), nous avons proposé une formulation exacte de cette puissance en domaine temps, s'abstrayant de l'approximation monochromatique, pour un modèle tridimensionnel d'hélice.

Plus important encore, le modèle discret est un modèle de réduction du nombre de degrés de liberté. Combiné avec une approche N -corps hamiltonienne auto-cohérente 1D, le modèle discret nous permet d'étudier facilement la dynamique onde-particule en régime non-linéaire, et le formalisme hamiltonien offre d'importantes propriétés de conservation. Notamment, les termes de couplages provenant des formes de champs du potentiel vecteur sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de seulement 100 000 macro-électrons au lieu de simuler les plusieurs milliards d'électrons d'un TOP. Le formalisme hamiltonien nous a permis de construire l'algorithme symplectique DIMOHA et de démontrer la viabilité de l'approche N -corps dans notre cas.

Notre algorithme DIMOHA est un outil prometteur à la fois pour la recherche sur l'interaction onde-particule mais aussi pour le design industriel de tubes électroniques, tels que les tubes à ondes progressives, ou encore l'analyse de signaux de télécommunication pour les opérateurs. Pour la recherche, il peut étudier la dynamique non-linéaire et la turbulence dans les TOPs, et par analogie, dans les plasmas. Notre algorithme possède de nombreux avantages. DIMOHA est capable de simuler les TOPs en domaine temporel et est significativement plus rapide que les codes *particle-in-cell* testés pour une précision similaire. De plus, il est meilleur en précision que MVTRAD (un code fréquentiel utilisé pour le design industriel). Nous en concluons que les codes temporels présentent un intérêt à des fins de conception (ce qui n'était pas admis il y a peu¹). DIMOHA est aussi très flexible et peut être pris en main assez rapidement (le nombre de paramètres d'entrée reste assez faible). Notre algorithme peut aussi simuler n'importe quelle géométrie de TOP. Nous avons testé DIMOHA sur des TOPs de 2.5 cm à 15 cm, pour des fréquences allant de la dizaine de GHz au sous-THz et pour des TOPs à hélice et à cavités couplées, dont un guide replié. D'autres géométries, et peut-être d'autres types de machine (gyrotrons, lasers à électrons libres), devraient être accessibles avec notre approche. En outre, il peut reproduire la puissance, la phase de sortie et le gain d'un TOP, mais aussi simuler des signaux complexes comme du multi-porteuses ou un signal de télécommunication, ainsi qu'observer la génération d'harmonique, de raies d'inter-modulation et des effets de distorsions. Nous avons validé DIMOHA pour un signal 2-porteuses (cas relativement simple).

¹Bernardi 2011

Enfin, l'étude de l'échange de moment entre ondes et particules nous a amené à étudier la définition de la quantité de mouvement mécanique et du moment canonique des champs électromagnétiques dans les guides d'onde sous vide. Cela nous a permis de prouver l'occurrence de la controverse Abraham-Minkowski dans les guides d'onde. En effet, nous avons pu écrire deux expressions du moment total de notre système et, avec notre algorithme DIMOHA sur un cas validé, nous avons pu simuler l'échange de moment qui soit mécanique ou canonique. Plus important encore, nous avons introduit le « moment circulant » dans notre système qui provient directement du tenseur de contrainte de Maxwell. En outre, nous avons suggéré que la controverse Abraham-Minkowski s'applique aussi pour les plasmas, impliquant donc que cette controverse est universelle.

Perspectives

Le travail présenté dans cette dissertation peut être poursuivi sur de nombreux aspects. D'un point de vue théorique, il reste un important travail à faire sur la puissance électromagnétique en temps avec le modèle discret. Nous n'avons pas réussi à proposer une expression exacte (non limitée au régime monochromatique) pour la puissance dans un modèle unidimensionnel. Notre approche tri-dimensionnelle, avec le modèle d'hélice en feuille, n'a pas été validée numériquement. Nous pensons que cela peut se faire avec DIMOHA pour des signaux multi-porteuses. On rappellera que pour le moment dans DIMOHA, les courbes de rendements sont calculées avec la puissance harmonique de l'onde (moyenne temporelle sur une période RF). De plus, le modèle d'hélice, présenté au [chapitre 9](#), est très avancé mais n'est pas complet. Il manque des validations numériques de notre théorie. Dans le même esprit, on peut imaginer étudier analytiquement d'autres géométries de ligne à retard, comme les TOPs à cavités couplées, ou combiner DIMOHA à un solveur numérique qui donnerait les valeurs des formes de champs pour une géométrie donnée.

D'un point de vue numérique, DIMOHA n'est encore qu'un prototype prometteur. Il peut être grandement amélioré sur de nombreux points. On notera, par exemple, la gestion des pertes, la gestion de l'injection de l'onde ou le modèle de charge d'espace qui peuvent être améliorés. Des versions alternatives de DIMOHA sont aussi envisagées. Il serait intéressant de combiner la version fréquentielle du modèle discret avec une propagation PIC 2.5D du faisceau, sur une période RF, comme le fait MVTRAD. La finalité est de réaliser un code aussi rapide que MVTRAD mais avec la robustesse et la précision du modèle discret. On peut aussi envisager une version 3D en domaine temporel qui concurrencerait directement les codes PIC actuels. Nous avons déjà une théorie 3D simple pour la partie circuit (champ) pour une hélice. Toutefois, nous n'avons pas étudié la propagation 3D du faisceau et nous ne sommes pas certains que la description N -corps soit alors plus efficace qu'une description cinétique. En effet, notre modèle de disque pour la charge d'espace n'est pas suffisant en 3D et il faudrait prendre en compte le champ magnétique externe guidant le faisceau le long de la ligne à retard.

Il est aussi prévu d'exploiter DIMOHA pour étudier de nombreux cas. Par exemple, on prévoit d'étudier la distorsion des signaux de télécommunication avec DIMOHA. De plus, il est également possible d'étudier la formation de structure chaotique dans les TOPs. Un cas simple à réaliser est de faire boucler le tube, c-à-d. connecter la sortie du signal RF du TOP à son entrée.

Finalement, nous n'avons pas démontré l'occurrence de la controverse Abraham-Minkowski pour les plasmas. Il serait intéressant de prouver que dans un plasma, il existe deux moments totaux équivalents, et voir comment le moment circulant intervient dans ce système.



Pendule non linéaire et intégrateurs symplectiques

Cet appendice sert de rappel sur la dynamique du pendule, modèle de base dans la compréhension intuitive de l'interaction onde-particule, et nous permet surtout de présenter l'intérêt des intégrateurs symplectiques avec un exemple.

Le pendule dans l'histoire,...

Le mouvement pendulaire¹ a longtemps été un parent pauvre dans la physique aristotélicienne car c'est un mouvement qui n'est ni uniforme, ni rectiligne. Au 17^e siècle, Galilée, l'inventeur des pendules selon l'encyclopédie de Diderot, utilise des pendules pour démontrer sa loi sur la chute des corps. En 1656, Huygens invente le pendule d'horlogerie. Par la suite, Newton invente son fameux pendule de Newton pour illustrer sa troisième loi sur l'action et la réaction. Ce dernier, avec Eötvös plus tard, s'attaque au principe d'équivalence. Au 18^e siècle, le pendule devient un instrument de gravimétrie notamment utilisé par Maupertuis pendant son expédition en Laponie. Le pendule entre au Panthéon en 1851, lorsque Foucault voulut démontrer la rotation de la Terre sur elle-même. Depuis le siècle dernier, le pendule, bien que détrôné en métrologie par les horloges à quartz et des appareils plus sophistiqués, reste un outil théorique indispensable à la description de l'interaction onde-particule ou du chaos. Le pendule est aussi un paradigme pour l'analyse numérique.

et des méthodes numériques.

Pour analyser le pendule et ses alternatives plus complexes, ainsi que pour résoudre les problèmes à N -corps, les premières méthodes numériques apparurent rapidement, comme celles d'Euler (1768) ou de Vogelaere (1956). L'une des méthodes les plus connues est la méthode de Störmer-Verlet, dite de saute-mouton. Cette méthode² fut utilisée par Störmer² Hairer *et al* 2010 (1907) en astronomie puis par Verlet (1967) en dynamique moléculaire. Ironiquement, Verlet s'intéressa plus tard à l'histoire des sciences et découvrit précisément « sa » méthode chez différents auteurs en mécanique classique, notamment dans les *Principia* de Newton (1687).

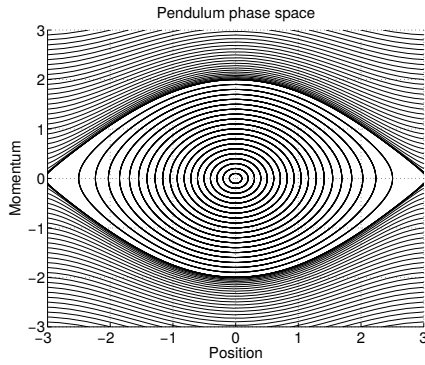


FIGURE A.1 – Portrait de phase (p, q) du pendule pour l'interaction onde-particule. La demi-largeur de « l'œil de chat », délimité par la séparatrice (ligne noire épaisse), est proportionnelle à $2\sqrt{\mathcal{U}}$. Ce portrait est dans le référentiel de l'onde, donc $p = 0$ correspond au synchronisme avec l'onde. Plus l'impulsion de la particule s'éloigne de $p = 0$, moins sa dynamique est affectée par l'onde. Elle entre en résonance lorsque la dynamique est suffisamment affectée par l'onde (quand la vitesse de phase et de la particule coïncident), c'est-à-dire à peu près lorsque $|p| \lesssim 3\sqrt{\mathcal{U}}$.

A.1 Pendule non-linéaire mathématique

Partons d'un système composé d'une seule particule chargée en mouvement rectiligne, de coordonnée $z = q/\kappa$, et d'impulsion p , soumise à un potentiel électrostatique de nombre d'onde κ . Son équation du mouvement est

$$\ddot{q} = -\mathcal{U} \sin q, \quad (\text{A.1})$$

avec l'amplitude \mathcal{U} du potentiel (normalisée compte tenu de la masse de la particule, de sa charge et de κ) et la phase du potentiel plaçant le fond du puits à l'origine. On remarque que ce système obéit aux mêmes relations que le pendule mécanique idéal si on pose $\mathcal{U} = g/l$, avec g l'accélération gravitationnelle, l la longueur du pendule et q l'angle avec la verticale.

L'énergie cinétique de la particule de masse unitaire est $p^2/2$ et son énergie potentielle est $-\mathcal{U} \cos q$, donc la somme des deux est l'énergie totale qui est aussi le hamiltonien

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \mathcal{U} \cos q. \quad (\text{A.2})$$

Puisque ce hamiltonien est indépendant du temps, la trajectoire de la particule est une courbe dans l'espace de phase (p, q) . La [figure A.1](#) représente les orbites typiques de la particule pour diverses valeurs de H . La [figure A.2](#) montre la variation de l'énergie potentielle en fonction de la position. Si la particule est positionnée dans $[0, \pi]$ avec une vitesse positive, elle fait face à une barrière de potentiel en π et son mouvement est ralenti à cause de l'effet du champ. Si la particule est dans $[-\pi, 0]$, elle est dans un puits de potentiel dont le fond est 0 et est accélérée. En fonction de la valeur de H , on a trois mouvements possible (outre les 2 solutions stationnaires) :

- ◇ Pour $H > \mathcal{U}$, la particule a un mouvement de circulation (rotation si q est considérée modulo 2π) dans l'espace de phase. Elle n'est pas confinée et peut atteindre toutes les positions possibles q , à la manière d'un pendule en rotation perpétuelle dans une direction (vers la droite si $p > 0$, vers la gauche sinon). Dans le cas où $H \gg \mathcal{U}$, la particule ne voit presque pas le champ et son mouvement est très peu modifié. Si $H \gtrsim \mathcal{U}$, la particule est proche de la résonance avec le champ et son impulsion est modulée significativement en fonction de l'onde. Par exemple, pour $H = 2\mathcal{U}$, $|p|$ varie entre $\sqrt{\mathcal{U}}$ et $\sqrt{6\mathcal{U}}$.
- ◇ Pour $-\mathcal{U} < H < \mathcal{U}$, la particule est piégée dans le puits de potentiel et forme une courbe fermée dans l'espace de phase qui n'atteint jamais les positions $-\pi$ et π . Pour le pendule, cela correspond à un mouvement de libration entre deux points, sans jamais avoir assez d'énergie pour effectuer un tour complet. Là encore, on distingue deux

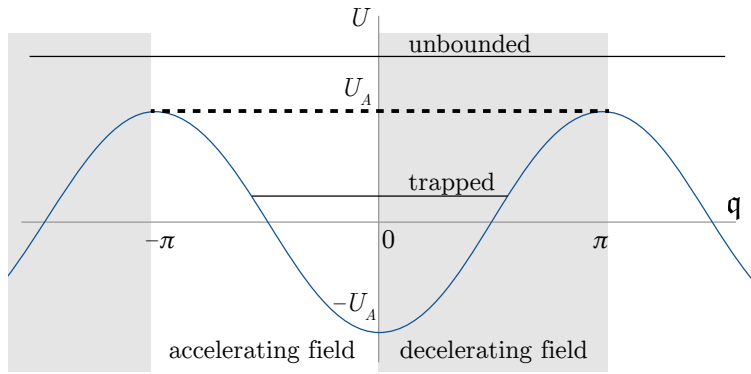


FIGURE A.2 – Variation de l'énergie dans un potentiel électrostatique associée à la figure A.1.

cas : lorsque $1 - H/\mathfrak{U} \ll 1$, la particule est proche de la séparatrice, subit des changements d'impulsion importants, et passe beaucoup de temps près des points $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$; alors que si $1 - H/\mathfrak{U} \sim \mathcal{O}(1)$, la particule est « profondément piégée » et oscille doucement autour du point $(0, 0)$.

- ◇ Pour $H = \mathfrak{U}$, la particule est sur la séparatrice constituée de deux orbites instables formant un « œil de chat » dans l'espace de phase et séparant les mouvements de rotation et de libration (elle asymptote l'équilibre instable pour $t \rightarrow \pm\infty$).

La résonance onde-particule (ou du pendule) décrite ci-dessus correspond au cas paradigme¹ [Chirikov 1979;](#)
des résonances non-linéaires en mécanique classique. [Escande 1985, 2018](#)

A.2 Méthodes numériques

Nous souhaitons maintenant modéliser numériquement le pendule au cours du temps. Pour cela, nous utiliserons plusieurs méthodes numériques différentes. La plus simple de toutes les méthodes numériques pour un système où $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$ est la méthode explicite d'Euler (1768)² d'ordre 1. Partant des équations d'évolution du système $\dot{p} = -\sin q$ et $\dot{q} = p$ ²[Hairer et al 2010](#) (avec $\kappa = 1$ et $\mathfrak{U} = 1$), nous les discrétisons sur un intervalle de temps h pour obtenir

$$p|_{t+h} = p|_t - h \sin q|_t, \tag{A.3}$$

$$q|_{t+h} = q|_t + h p|_t, \tag{A.4}$$

où les variables au temps $t+h$ ne dépendent que des variables au temps t . Par contraste avec (A.3) et (A.4), la méthode d'Euler implicite³ d'ordre 1 est ³[Hairer et al 2010](#)

$$p|_{t+h} = p|_t - h \sin q|_{t+h}, \tag{A.5}$$

$$q|_{t+h} = q|_t + h p|_{t+h}, \tag{A.6}$$

cette fois-ci avec des dépendances envers les variables au temps $t+h$.

D'un autre côté, nous proposons de construire une méthode dite symplectique. Une transformation symplectique⁴ préserve les aires de l'espace de phase (p, q) . À partir du principe de Hamilton, on peut construire un intégrateur numérique assurant cette propriété. L'intégrateur est donc « plus robuste ». Nous proposons un exemple. Nous partons du lagrangien du système $L(q, \dot{q}) = \dot{q}^2/2 + \cos q$ et appliquons le principe d'action stationnaire, soit $\delta\mathcal{A} = 0$ pour une perturbation δq de la trajectoire $(\mathcal{A}(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}) = \mathcal{A}(q, \dot{q}) + \delta\mathcal{A})$ avec l'action ⁴[Arnold 1976](#)

$\mathcal{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int L dt$. On obtient donc au premier ordre

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{(\dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}})^2}{2} + \cos(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}) \right] dt - \int \left[\frac{\dot{\mathbf{q}}^2}{2} + \cos \mathbf{q} \right] dt \\ &= \int \left[\dot{\mathbf{q}} \delta \dot{\mathbf{q}} - (\sin \mathbf{q}) \delta \mathbf{q} \right] dt = \int \left[-\ddot{\mathbf{q}} - \sin \mathbf{q} \right] \delta \mathbf{q} dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On revient donc à l'équation du mouvement $\ddot{\mathbf{q}} = -\sin \mathbf{q}$. Notre objectif est de discrétiser le principe d'action.¹ Prenons

¹Kraus 2013;
Hairer et al 2010

$$\mathcal{A}_h(\mathbf{q}|_0, \mathbf{q}|_h, \mathbf{q}|_{2h}, \dots) = \sum_{i=0}^{i_{\max}-1} \frac{(\mathbf{q}|_{(i+1)h} - \mathbf{q}|_{ih})^2}{2h^2} h + \sum_{i=0}^{i_{\max}-1} \cos \mathbf{q}|_{ih} h \quad (\text{A.8})$$

pour un pas temporel h , avec $i_{\max} = t_{\max}/h$ et imposons au premier ordre $\delta \mathcal{A}_h = 0$ avec $\mathbf{q}|_0$ et $\mathbf{q}|_{t_{\max}}$ fixés :

$$\sum_{i=1}^{i_{\max}-1} \left[- \left(\frac{\mathbf{q}|_{(i+1)h} - \mathbf{q}|_{ih}}{h} - \frac{\mathbf{q}|_{ih} - \mathbf{q}|_{(i-1)h}}{h} \right) - h \sin \mathbf{q}|_{ih} \right] \delta \mathbf{q}|_{ih} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Avec des perturbations $\delta \mathbf{q}|_{ih}$ indépendantes, l'équation (A.9) impose que, pour tout i ,

$$\frac{\mathbf{q}|_{t+h} - \mathbf{q}|_t}{h} - \frac{\mathbf{q}|_t - \mathbf{q}|_{t-h}}{h} + h \sin \mathbf{q}|_t = 0, \quad (\text{A.10})$$

et on définit $\mathbf{p}|_t = (\mathbf{q}|_{t+h} - \mathbf{q}|_t)/h$ comme pour la méthode d'Euler explicite. On arrive finalement à la méthode d'Euler symplectique² d'ordre 1, aussi appelée méthode (partitionnée) de de Vogelaere (1956) du pendule

²Hairer et al 2010

$$\mathbf{p}|_{t+h} = \mathbf{p}|_t - h \sin \mathbf{q}|_{t+h}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{q}|_{t+h} = \mathbf{q}|_t + h \mathbf{p}|_t, \quad (\text{A.12})$$

construite à partir du principe de Hamilton. Les équations (A.11)-(A.12) correspondent spécifiquement à l'application chaotique de Chirikov-Taylor (*standard map*) de paramètre $\kappa = h^2$ si on pose $\mathbf{p}' = \mathbf{p}h$. L'équation (A.11) correspond exactement à (A.3) de la méthode Euler explicite sauf pour le terme en $\mathbf{q}|_{t+h}$. C'est ce détail qui, pour notre exemple, assure que la méthode est symplectique. On notera dans cette exemple que l'équation (A.11) est égale à l'équation (A.5) de la méthode implicite et que l'équation (A.12) est égale à l'équation (A.4) de la méthode explicite. De la même manière, on peut écrire une deuxième méthode d'Euler symplectique³ d'ordre 1

³Hairer et al 2010

$$\mathbf{p}|_{t+h} = \mathbf{p}|_t - h \sin \mathbf{q}|_t, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{q}|_{t+h} = \mathbf{q}|_t + h \mathbf{p}|_{t+h}. \quad (\text{A.14})$$

En fait, ces deux méthodes symplectiques dérivent d'une fonction génératrice.⁴

⁴Gignoux et
Silvestre-Brac 2002

La figure A.3 présente le portrait de phase du pendule obtenu avec, soit la méthode d'Euler explicite (A.3)-(A.4) d'ordre 1, soit la méthode d'Euler symplectique (A.11)-(A.12) d'ordre 1. Le pas de temps est $h = 0.3$. On remarque immédiatement que la méthode explicite génère une application dilatant les volumes dans l'espace de phase ; cette méthode est dite instable. Pour le même pas de temps, la méthode symplectique conserve les surfaces dans l'espace de phase. Elle n'ajoute pas « d'énergie » au système. Bien entendu, en réduisant le pas de temps, les deux méthodes se rapprocheront de la solution analytique idéale, ce

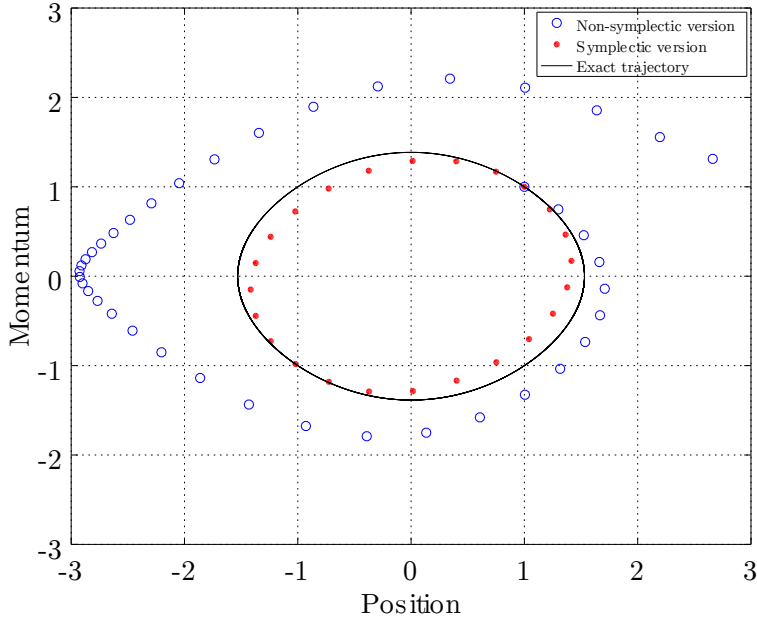


FIGURE A.3 – Portrait de phase $[p, q]$ du problème du pendule avec deux intégrateurs numériques : le premier construit avec la méthode d’Euler explicite (A.3)-(A.4) (cercles bleus) et le second construit avec la méthode d’Euler symplectique (A.11)-(A.12) (points rouges). Pour les deux intégrateurs, on prend un pas de temps de $h = 0.3$ et on ne considère qu’une particule démarrant du point $(1, 1)$. On représente la particule à chaque pas de temps. La ligne noire représente la trajectoire exacte que la particule est censée suivre.

qui veut dire que cet effet sur la méthode explicite sera moindre. Mais réduire le pas de temps signifie augmenter le nombre de calculs et donc augmenter le temps d’exécution. Pour un même pas de temps donné, la méthode symplectique sera « plus robuste⁵ ». Avec un intégrateur symplectique, on peut, jusqu’à une certaine mesure, augmenter le pas de temps et donc réduire le temps d’exécution sans ajouter trop d’erreur aux calculs. L’illustration ici est seulement d’ordre 1, mais, par exemple, une méthode de Runge-Kutta non symplectique d’ordre 4 souffrira des mêmes inconvénients. En électrodynamique, le bénéfice des fameuses méthodes de Yee (différences finies) pour résoudre les équations de Maxwell, provient aussi de la nature symplectique de ces équations.⁶

⁵Gignoux et Silvestre-Brac 2002

⁶Saitoh et al 2001

Dans ce domaine, le formalisme hamiltonien est important, car il permet de construire facilement un intégrateur symplectique. Connaissant le hamiltonien $H(p, q)$, on pourra utiliser des méthodes connues telles que les méthodes (partitionnés) de Vogelaere (Euler symplectiques) d’ordre 1

$$p|_{t+h} = p|_t - h \nabla_q H(p|_{t+h}, q|_t), \tag{A.15}$$

$$q|_{t+h} = q|_t + h \nabla_p H(p|_{t+h}, q|_t), \tag{A.16}$$

ou son adjointe

$$p|_{t+h} = q|_t - h \nabla_q H(p|_t, q|_{t+h}), \tag{A.17}$$

$$q|_{t+h} = q|_t + h \nabla_p H(p|_t, q|_{t+h}), \tag{A.18}$$

ou les méthodes de Störmer-Verlet aussi appelées saute-mouton (*leap-frog*)

$$p|_{t+h/2} = p|_t - \frac{h}{2} \nabla_q H(p|_{t+h/2}, q|_t), \tag{A.19}$$

$$q|_{t+h} = q|_t + \frac{h}{2} \left(\nabla_p H(p|_{t+h/2}, q|_t) + \nabla_p H(p|_{t+h/2}, q|_{t+h}) \right), \tag{A.20}$$

$$p|_{t+h} = p|_{t+h/2} - \frac{h}{2} \nabla_q H(p|_{t+h/2}, q|_{t+h}), \tag{A.21}$$

ou

$$\mathbf{q}|_{t+h/2} = \mathbf{q}|_t + \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}|_t, \mathbf{q}|_{t+h/2}), \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{p}|_{t+h} = \mathbf{p}|_t - \frac{h}{2} \left(\nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}|_t, \mathbf{q}|_{t+h/2}) + \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}|_{t+h}, \mathbf{q}|_{t+h/2}) \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{q}|_{t+h} = \mathbf{q}|_{t+h/2} + \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}|_{t+h}, \mathbf{q}|_{t+h/2}), \quad (\text{A.24})$$

qui sont des méthodes symplectiques d'ordre 2. Elles sont construites¹ en utilisant la symétrisation des méthodes d'Euler symplectiques d'ordre 1 par leur méthode adjointe. ¹Hairer *et al* 2010

B

Démonstrations et relations utiles

Cette annexe présente le détail de certains calculs utilisés dans cette dissertation.

B.1 Transformée- β inverse de Gel'fand d'un produit

La transformée inverse de Gel'fand du produit de deux facteurs est la convolution discrète donnée par l'équation (3.16).

Démonstration. On rappelle l'expression du peigne de Dirac III en série de Fourier

$$\text{III}_{\frac{2\pi}{d}}(\beta' - \beta) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\beta' - \beta)d}, \quad (\text{B.1})$$

avec $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$, et la propriété fondamentale du peigne

$$\mathfrak{G}_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{G}_{\beta'} \text{III}_{\frac{2\pi}{d}}(\beta' - \beta) d(\beta'd), \quad (\text{B.2})$$

pour \mathfrak{G}_β arbitraire. En posant $\mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{B}_\beta$ en représentation- β , alors on a, en représentation par cellule,

$$\mathfrak{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{C}_\beta e^{-in\beta d} d(\beta d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{B}_\beta e^{-in\beta d} d(\beta d) \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{B}_{\beta'} \text{III}_{\frac{2\pi}{d}}(\beta - \beta') e^{-in\beta'd} d(\beta'd) d(\beta d) \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{B}_{\beta'} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{-in'(\beta - \beta')d} e^{-in\beta'd} d(\beta'd) d(\beta d) \quad (\text{B.5})$$

$$= \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_\beta e^{-in'\beta d} d(\beta d) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}_{\beta'} e^{-i(n-n')\beta'd} d(\beta'd) \quad (\text{B.6})$$

$$= \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_{n'} \mathfrak{B}_{n-n'}, \quad (\text{B.7})$$

et on peut inverser les indices n' et $n - n'$ si nécessaire de sorte que

$$\mathfrak{C}_n = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_{n-n'} \mathfrak{B}_{n'} . \quad (\text{B.8})$$

□

B.2 Orthogonalité des modes

Lorsque $s_1 \neq s_2$ et que les valeurs propres Ω_β^s sont simples, on peut démontrer que $\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} = 0$ et que $\int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{E}_\beta^{s_1} \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} = 0$, peu importe la géométrie du système. Ces deux égalités seront utiles pour exprimer la normalisation (3.28), liée à l'énergie, et la puissance électromagnétique. Elles permettent l'emploi d'un delta de Kronecker $\delta_{s_2}^{s_1}$ (caché dans cette dissertation).

B.2.1 Preuve pour l'énergie électromagnétique

Démonstration. Dans un premier temps, on rappelle l'identité

$$\nabla \cdot (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{B} \cdot (\nabla \times \mathcal{A}) - \mathcal{A} \cdot (\nabla \times \mathcal{B}) , \quad (\text{B.9})$$

et la condition de bord $\mathbf{E} \times \mathbf{e}_\perp = \mathbf{0}$ sur la paroi métallique. Nous appliquons cette identité à $\mathcal{A} = \mathbf{E}_\beta^{s_1}$, $\mathcal{B} = \nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_2*}$ pour trouver

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_2*}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.10})$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_1} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_2*})) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.11})$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 (\Omega_\beta^{s_2})^2 \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} , \quad (\text{B.12})$$

avec la disparition d'un terme dans (B.11) à cause de la condition de bord (et de l'utilisation du théorème de flux-divergence). On obtient (B.12) parce que $\mathbf{E}_\beta^{s_2*}$ obéit aux équations de Helmholtz (3.18)-(3.19). Le même argument implique aussi (B.12) avec $(\Omega_\beta^{s_1})^2$. Puisque $\Omega_\beta^{s_1} \neq \Omega_\beta^{s_2}$ pour des modes non-dégénérés, on doit avoir $\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} = 0$, quelle que soit la géométrie du système. Par la même technique, on trouvera $\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta^{s_1} \cdot \mathbf{H}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} = 0$ pour le champ magnétique. □

B.2.2 Preuve pour la puissance électromagnétique

La puissance totale est la somme des puissances de tous les modes de propagation individuels s et, pour une structure cylindrique (c-à-d. de section uniforme), il n'y a pas de termes mixtes. Cela a déjà été démontré pour les harmoniques spatiales d'un modèle d'hélice par [Watkins \(1958\)](#). Nous montrons ici que les modes $s_1 \neq s_2$ avec le même nombre d'onde β ne contribuent pas pour la puissance électromagnétique.

Démonstration. Dans un premier temps, on rappelle l'identité $(\mathcal{A} \times (\nabla \times \mathcal{B})) \cdot \mathbf{e}_z = \mathcal{A} \cdot \partial_z \mathcal{B} - (\mathcal{A} \cdot \nabla) \mathcal{B}_z$. Pour des \mathcal{A} solénoïdaux, cela implique que $\int_{\mathcal{V}_0} (\mathcal{A} \times (\nabla \times \mathcal{B})) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} = \int_{\mathcal{V}_0} \mathcal{A} \cdot \partial_z \mathcal{B} d^3\mathbf{r} - \int_{\partial\mathcal{V}_0} \mathbf{e}_\perp \cdot \mathcal{A} \mathcal{B}_z d^2\mathbf{r}$. On pose

$$\mathcal{G}_z = - \int_{\mathcal{V}_0} [(\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \times (\nabla \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*})] \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{\Omega_\beta^{s_1} \Omega_\beta^{s_2}}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} [\mathbf{H}_\beta^{s_1} \times \mathbf{E}_\beta^{s_2*}] \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} , \quad (\text{B.14})$$

pour deux modes s_1 and s_2 , où la deuxième ligne vient des équations de Helmholtz (3.18)-(3.19). En prenant $\mathcal{A} = \nabla \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}$, $\mathcal{B} = \mathbf{E}_\beta^{s_1}$ dans (B.13), on a

$$\mathcal{G}_z = \int_{\mathcal{V}_0} (\nabla \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}) \cdot \partial_z \mathbf{E}_\beta^{s_1} d^3\mathbf{r} - \int_{\partial\mathcal{V}_0} \mathbf{e}_\perp \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}) \mathbf{E}_{\beta,z}^{s_1} d^2\mathbf{r}. \quad (\text{B.15})$$

Le deuxième terme disparaît avec les conditions de bord d'une structure de section uniforme. On a donc que

$$\mathcal{G}_z = -i\epsilon_0 \Omega_\beta^{s_2} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_2*} \cdot \partial_z \mathbf{E}_\beta^{s_1} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{B.16})$$

On réécrit (B.16) comme

$$\mathcal{G}_z = \frac{\Omega_\beta^{s_2}}{\Omega_\beta^{s_1}} \left(i\epsilon_0 \Omega_\beta^{s_1} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^{s_2} \cdot \partial_z \mathbf{E}_\beta^{s_1*} d^3\mathbf{r} \right)^* \quad (\text{B.17})$$

où l'intégrale donne

$$\mathcal{G}_z = \frac{\Omega_\beta^{s_2}}{c^2 \Omega_\beta^{s_1}} \Omega_\beta^{s_1} \Omega_\beta^{s_2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{H}_\beta^{s_2} \times \mathbf{E}_\beta^{s_1*})^* \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} = \frac{(\Omega_\beta^{s_2})^2}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{H}_\beta^{s_2*} \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r}. \quad (\text{B.18})$$

De la même manière, en prenant $\mathcal{A} = \nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}$, $\mathcal{B} = \mathbf{H}_\beta^{s_2*}$, on a

$$\mathcal{G}_z = - \int_{\mathcal{V}_0} (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \cdot \partial_z \mathbf{H}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} + \int_{\partial\mathcal{V}_0} \mathbf{e}_\perp \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \mathbf{H}_{\beta,z}^{s_2*} d^2\mathbf{r} \quad (\text{B.19})$$

$$= i\mu_0 \Omega_\beta^{s_1} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta^{s_1} \cdot \partial_z \mathbf{H}_\beta^{s_2*} d^3\mathbf{r} - i\mu_0 \Omega_\beta^{s_1} \int_{\partial\mathcal{V}_0} (\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{H}_\beta^{s_1}) \mathbf{H}_{\beta,z}^{s_2*} d^2\mathbf{r} \quad (\text{B.20})$$

où la surface de la dernière intégrale implique deux types de frontières. $\mathbf{H}_\beta^{s_1}$ est tangent au mur conducteur et donc les termes de paroi disparaissent. Sur les sections transverses, $\mathbf{H}_\beta^{s_1} \mathbf{H}_{\beta,z}^{s_2*}$ est périodique sur z avec la période d , donc l'intégrale disparaît aussi. Cela ne laisse que l'intégrale sur le volume qui se réécrit par parties comme

$$\mathcal{G}_z = -i\mu_0 \Omega_\beta^{s_1} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta^{s_2*} \cdot \partial_z \mathbf{H}_\beta^{s_1} d^3\mathbf{r} = \frac{(\Omega_\beta^{s_1})^2}{c^2} \int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{H}_\beta^{s_2*} \times \mathbf{E}_\beta^{s_1}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r}. \quad (\text{B.21})$$

Puisque les équations (B.18) et (B.21) sont égales, cela signifie que si $\Omega_\beta^{s_1} \neq \Omega_\beta^{s_2}$ pour $s_1 \neq s_2$, on doit avoir $\int_{\mathcal{V}_0} (\mathbf{E}_\beta^{s_1} \times \mathbf{H}_\beta^{s_2*}) \cdot \mathbf{e}_z d^3\mathbf{r} = 0$. \square

B.3 Hamiltonien électromagnétique

Le hamiltonien des champs électromagnétiques (4.13) peut se réécrire comme (4.18) avec le modèle discret.

Démonstration. Pour le champ électrique uniquement, on a

$$\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_z} |\mathbf{E}|^2 d^3\mathbf{r} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_z} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d^3\mathbf{r} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}(\mathbf{r} + n'd\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r} + n'd\mathbf{e}_z) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.22})$$

$$= \sum_{n'} \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{V}_0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\beta'}^*(\mathbf{r}) e^{in'(\beta-\beta')d} d(\beta d) d(\beta' d) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.23})$$

$$= \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_\beta^*(\mathbf{r}) d(\beta d) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.24})$$

$$= \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s, s'} \mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_{\beta'}^{s'*} \mathbf{E}_\beta^s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\beta'}^{s'*}(\mathbf{r}) d(\beta d) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_\beta^s \mathbf{V}_\beta^{s*} \mathbf{N}_\beta^s d(\beta d) \quad (\text{B.26})$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_{n_1}^s \mathbf{V}_{n_2}^{s*} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{N}_\beta^s e^{-i(n_2-n_1)\beta d} d(\beta d) \quad (\text{B.27})$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_{n_1}^s \mathbf{V}_{n_2}^{s*} \mathbf{N}_{n_1-n_2}^s, \quad (\text{B.28})$$

avec $\mathbf{V}_n^{s*} = \mathbf{V}_n^s$ dans notre décomposition des champs (voir section 3.3.2). Les étapes sont les mêmes pour le champ magnétique. \square

B.4 Vitesse de groupe

Avec le modèle discret, on peut réécrire la vitesse de groupe comme (6.29) ou (6.30).

Démonstration. On rappelle la normalisation (3.28),

$$\Omega_\beta^s = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^s \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*} d^3\mathbf{r} = \mu_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{H}_\beta^s \cdot \mathbf{H}_\beta^{s*} d^3\mathbf{r}, \quad (\text{B.29})$$

et donc la vitesse de groupe est

$$v_g(s, \beta) = \frac{\partial \Omega_\beta^s}{\partial \beta} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*} + \mathbf{E}_\beta^s \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_\beta^{s*}}{\partial \beta} \right) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.30})$$

$$= \mu_0 \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} \cdot \mathbf{H}_\beta^{s*} + \mathbf{H}_\beta^s \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^{s*}}{\partial \beta} \right) d^3\mathbf{r}. \quad (\text{B.31})$$

Pour des champs froids, les dérivées des équations de Helmholtz (3.18)-(3.19) sont

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} = -i\mu_0 \Omega_\beta^s \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} - i\mu_0 v_g \mathbf{H}_\beta^s, \quad (\text{B.32})$$

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} = i\epsilon_0 \Omega_\beta^s \frac{\partial \mathbf{E}_\beta^s}{\partial \beta} + i\epsilon_0 v_g \mathbf{E}_\beta^s. \quad (\text{B.33})$$

On a alors (voir identité (B.9))

$$v_g(s, \beta) = \frac{1}{i\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \left[(\nabla \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s - i\epsilon_0 v_g \mathbf{E}_\beta^s) \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*} - \mathbf{E}_\beta^s \cdot (\nabla \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*} + i\epsilon_0 v_g \mathbf{E}_\beta^{s*}) \right] d^3 \mathbf{r} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} \times \mathbf{E}_\beta^{s*} \right) + \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^s}{\partial \beta} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^{s*}) \right. \\ &\quad \left. - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{H}_\beta^{s*}}{\partial \beta} \times \mathbf{E}_\beta^s \right) - \frac{\partial \mathbf{H}_\beta^{s*}}{\partial \beta} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_\beta^s) \right] d^3 \mathbf{r} - \frac{2\epsilon_0 v_g}{\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{E}_\beta^s \cdot \mathbf{E}_\beta^{s*} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

On obtient alors

$$v_g = (i\Omega_\beta^s)^{-1} \int_{\mathcal{V}_0} \left[\nabla \cdot (\partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s \times \mathbf{E}_\beta^{s*} - \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*} \times \mathbf{E}_\beta^s) \right] d^3 \mathbf{r} + v_g - 2v_g, \quad (\text{B.36})$$

soit

$$2v_g = (i\Omega_\beta^s)^{-1} \int_{\mathcal{V}_0} \left[\nabla \cdot (\partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s \times \mathbf{E}_\beta^{s*} - \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*} \times \mathbf{E}_\beta^s) \right] d^3 \mathbf{r} \quad (\text{B.37})$$

$$= -(i\Omega_\beta^s)^{-1} \int_{\mathcal{V}_0} \left[\nabla \cdot (\mathbf{E}_\beta^{s*} \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s - \mathbf{E}_\beta^s \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*}) \right] d^3 \mathbf{r} \quad (\text{B.38})$$

$$= (i\Omega_\beta^s)^{-1} \int_{\partial \mathcal{V}_0} \left[\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{E}_\beta^{s*} \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s - \mathbf{E}_\beta^s \times \partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*}) \right] d^2 \mathbf{r}. \quad (\text{B.39})$$

On calcule la dérivée de la condition de Floquet

$$\partial_\beta \mathbf{E}(\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x) = \partial_\beta (\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\beta d}) = e^{-i\beta d} (\partial_\beta \mathbf{E}(\mathbf{r}) - id\mathbf{E}(\mathbf{r})). \quad (\text{B.40})$$

On choisit de borner la cellule \mathcal{V}_0 par des section planes \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_d d'abscisses $z = 0$ et $z = d$, et on obtient finalement que

$$v_g = \frac{1}{2i\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{S}_0 + d\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_z \cdot \left(\mathbf{E}_\beta^{s*} \times (\partial_\beta \mathbf{H}_\beta^s - id\mathbf{H}_\beta^s) - \mathbf{E}_\beta^s \times (\partial_\beta \mathbf{H}_\beta^{s*} + id\mathbf{H}_\beta^{s*}) \right) d^2 \mathbf{r} \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{d}{2\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{e}_z \cdot \left(\mathbf{E}_\beta^{s*} \times \mathbf{H}_\beta^s - \mathbf{E}_\beta^s \times \mathbf{H}_\beta^{s*} \right) d\mathcal{S} \quad (\text{B.42})$$

$$= \frac{d}{\Omega_\beta^s} \int_{\mathcal{S}_0} \Re \left(\mathbf{E}_\beta^{s*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_\beta^s(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{e}_z d\mathcal{S}. \quad (\text{B.43})$$

□

B.5 Fonctions de Bessel modifiées

On rappelle quelques propriétés utiles sur les fonctions de Bessel modifiées (voir [Watson \(1922\)](#), [Abramowitz et Stegun \(1965\)](#) ou [NIST \(2019\)](#)). Nous avons

$$I_{m=0}(0) = 1, \quad (\text{B.44})$$

$$I_{m \neq 0}(0) = 0, \quad (\text{B.45})$$

$$I'_0(x) = I_1(x), \quad (\text{B.46})$$

$$K'_0(x) = K_1(x), \quad (\text{B.47})$$

avec les notations $I'_m(x) = \partial_x I_m$ et $K'_m(x) = \partial_x K_m$. On utilise aussi les intégrales

$$\int_0^a I_1^2(\gamma r) r \, dr = \frac{a^2}{2} \left(I_1^2(\gamma a) - I_0(\gamma a) I_2(\gamma a) \right), \quad (\text{B.48})$$

$$\int_a^\infty K_1^2(\gamma r) r \, dr = \frac{a^2}{2} \left(K_0(\gamma a) K_2(\gamma a) - K_1^2(\gamma a) \right), \quad (\text{B.49})$$

$$\int_0^a I_\nu(\gamma_1 r) I_\nu(\gamma_2 r) r \, dr = \frac{a}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\gamma_1 I_\nu(\gamma_2 a) I_{\nu+1}(\gamma_1 a) - \gamma_2 I_\nu(\gamma_1 a) I_{\nu+1}(\gamma_2 a) \right), \quad (\text{B.50})$$

$$\int_a^\infty K_\nu(\gamma_1 r) K_\nu(\gamma_2 r) r \, dr = \frac{a}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\gamma_2 K_{\nu-1}(\gamma_2 a) K_\nu(\gamma_1 a) - \gamma_1 K_{\nu-1}(\gamma_1 a) K_\nu(\gamma_2 a) \right), \quad (\text{B.51})$$

qui se déduisent aisément de

$$Z'_\nu(z) = Z_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} Z_\nu(z), \quad (\text{B.52})$$

$$= Z_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} Z_\nu(z), \quad (\text{B.53})$$

où $Z_\nu = I_\nu$ ou K_ν .

Publications et communications

Sauf indication contraire, les références ci-dessous sont dans la langue du titre dans leur version originale.

Publications dans des journaux avec comité de lecture :

- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F. et DOVEIL F., « Electromagnetic power and momentum in N -body hamiltonian approach to wave-particle dynamics in a periodic structure », *Europhysics Lett. (EPL)*, 2018, 122, n° 4, 44002 (7 pp), doi : [10.1209/0295-5075/122/44002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/122/44002).
- MINENNA D. F. G., ANDRÉ F., ELSKENS Y., AUBOIN J-F., DOVEIL F., PUECH J. et DUVERDIER É., « The traveling-wave tube in the history of telecommunication », *Eur. Phys. J. H*, 2019, 44, n° 1, pp. 1-36, doi : [10.1140/epjh/e2018-90023-1](https://doi.org/10.1140/epjh/e2018-90023-1).
- MINENNA D. F. G., TEREYUK A. G., ANDRÉ F., ELSKENS Y. et RYSKIN N. M., « Recent discrete model for small-signal analysis of traveling-wave tubes », *Phys. Scr.*, 2019, 94, n° 5, 055601 (8 pp), doi : [10.1088/1402-4896/ab060e](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab060e).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F., POYÉ A., PUECH J. et DOVEIL F., « DIMOHA : a time-domain algorithm for traveling-wave tube simulations », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2019, 66, n° 9, pp. 4042-4047, doi : [10.1109/TED.2019.2928450](https://doi.org/10.1109/TED.2019.2928450).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., DOVEIL F. et ANDRÉ F., « Universality of the Abraham-Minkowski dilemma for photon momenta beyond dielectric materials and implications for wave-particle systems », soumission en cours, arXiv : [1902.06431](https://arxiv.org/abs/1902.06431).
- MINENNA D. F. G., POYÉ A., BRADFORD P., WOOLSEY N. et TIKHONCHUK V. T., « Impact of the target holder on return currents and GHz electromagnetic pulses in short-pulse laser interactions », soumission en cours.
- ANDRÉ F., LE T., ZIMMERMANN R., ULISSE G., KROZER V., LETIZIA R., MINENNA D. F. G. et PAOLONI C., « Technology and Assembly of a W-band Traveling Wave Tube for New 5G High Capacity Networks », soumission en cours.

Communication orales à des conférences : (le nom de l'orateur est souligné)

- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y. et ANDRÉ F., *Electron-wave momentum exchange and time domain simulations applied to traveling wave tubes*, présentation à la 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017), London, 2017, acte de conférence sur doi : [10.1109/IVEC.2017.8289689](https://doi.org/10.1109/IVEC.2017.8289689).
- DOVEIL F., ELSKENS Y. et MINENNA D. F. G., *Wave-Particle Interaction studied in a Traveling Wave Tube*, présentation invitée au 19th International Congress on Plasma Physics (ICPP 2018), Vancouver, 2018.
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F., PUECH J., POYÉ A., DOVEIL F. et PEREIRA T., *DIMOHA : Traveling-wave tube simulations including band edge and multiple-carriers operations*, présentation à la 20th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2019), Busan, 2019, acte de conférence sur doi : [10.1109/IVEC.2019.8744984](https://doi.org/10.1109/IVEC.2019.8744984).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., DOVEIL F., ANDRÉ F. et POYÉ A., *Nonlinear wave-particle interaction in helix traveling-wave tubes using N-body simulations in time domain*, présentation à la 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics (EPS 2019), Milan, 2019, acte de conférence sur url : <http://ocs.ciemat.es/EPS2019PAP/html/>.
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., DOVEIL F., POYÉ A. et ANDRÉ F., *Practical applications of the self-consistent hamiltonian N-body approach for wave-particle interactions*, présentation au 6th International Workshop on the Theory and Applications of the Vlasov Equation (VLASOVIA 2019), Strasbourg, 2019.

Affiches : (le nom du présentateur est souligné)

- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y. et ANDRÉ F., *Hamiltonian description of electron-wave interaction for time domain simulations applied to traveling-wave tubes*, 9th ITER International School (IIS 2017), Aix-en-Provence, 2017.
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y. et ANDRÉ F., *Degree-of-freedom reduction for nonlinear N-body wave-particle interaction, Collisionless Boltzmann (Vlasov) Equation and Modeling of Self-Gravitating Systems and Plasmas*, CIRM, Marseille, 2017.
- MINENNA D. F. G., ANDRÉ F., DOVEIL F., ELSKENS Y. et PUECH J., *Interaction onde-particule et modélisation en domaine temps des tubes à ondes progressives*, Journées Jeunes Chercheurs CNES JC², CNES, Toulouse, 2018.
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F., DOVEIL F. et POYÉ A., *Description N-corps de l'interaction onde-particule dans une structure périodique*, 22^e Rencontre du Non-Linéaire (RNL), Paris, acte de conférence (Non-Linéaire Publications, Saint-Étienne du Rouvray), 2019, pp. 45-50, hal : [02145165](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02145165).

MINENNA D. F. G., POYÉ A. et TIKHONCHUK V. T., *Impact du temps de chargement des cibles par lasers et du courant de neutralisation sur les impulsions électromagnétiques GHz*, *Forum Interaction Laser Plasma 2019 (Forum-ILP 2019)*, Fréjus, 2019.

Dépôt de logiciel :

MINENNA D. F. G., ANDRÉ F., ELSKENS Y. et POYÉ A., *DIMOHA*, 2019, certifié par l'Agence de Protection des Programmes, IDDN.FR.001.110018.000.R.P.2019.000.20600.

Bibliographie

Sauf indication contraire, les références ci-dessous sont dans la langue du titre dans leur version originale.

- ABRAHAM M., « Zur Elektrodynamik bewegten Körper », *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1909, 28, 1-28, doi : [10.1007/BF03018208](https://doi.org/10.1007/BF03018208), traduction anglaise : url : [https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Electrodynamics_of_Moving_Bodies_\(Abraham\)](https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Electrodynamics_of_Moving_Bodies_(Abraham)).
- ABRAHAM M., « Sull'elettrodinamica di Minkowski », *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1910, 30, 33-46, doi : [10.1007/BF03014862](https://doi.org/10.1007/BF03014862), traduction anglaise : url : https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Electrodynamics_of_Minkowski.
- ABRAMOWITZ, M. et STEGUN I. A., *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*, (Dover, New York), 1965.
- AÏSSI A., *La modélisation des tubes à onde progressive à hélice en domaine temporel*, thèse de doctorat, (Université de Provence, Marseille), 2008, tel : 00406576.
- AÏSSI A., ANDRÉ F. et DOVEIL F., « Time-Domain Model of a Traveling-Wave Tube », *J. Plasma Fusion Res. SERIES*, 2009, 8, pp. 869-872, url : http://www.jspf.or.jp/JPFERS/index_vol8-5.html.
- ALOISIO M. et WALLER P., « Analysis of helical slow-wave structures for space TWTs using 3-D electromagnetic simulators », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2005, 52, n° 5, pp. 749-754, doi : [10.1109/TED.2005.845866](https://doi.org/10.1109/TED.2005.845866).
- ANDRÉ F. et AÏSSI A., « The Equivalent Matrices of a Periodic Structure », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2010, 57, pp. 1687-1695, doi : [10.1109/ted.2010.2049070](https://doi.org/10.1109/ted.2010.2049070).
- ANDRÉ F., BERNARDI P., RYSKIN N. M., DOVEIL F. et ELSKENS Y., « Hamiltonian description of self-consistent wave-particle dynamics in a periodic structure », *Europhysics Lett. (EPL)*, 2013, 103, n° 2, 28004 (5 pp), doi : [10.1209/0295-5075/103/28004](https://doi.org/10.1209/0295-5075/103/28004).
- ANDRÉ F., THÉVENY S., DOVEIL F. et ELSKENS Y., « First comparison of new TWT discrete model with existing models », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), Beijing*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2015, doi : [10.1109/IVEC.2015.7223798](https://doi.org/10.1109/IVEC.2015.7223798).
- ANDRÉ F., KOHLER S., KROZER V., TRUNG LE Q., LETIZIA R., PAOLONI C., SABA AWI A., ULISSE G. et ZIMMERMAN R., « Fabrication of W-band TWT for 5G small cells backhaul », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), London*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2017, doi : [10.1109/IVEC.2017.8289653](https://doi.org/10.1109/IVEC.2017.8289653).
- ANDRÉ F., TRUNG LE Q., ULISSE G., KROZER V., LETIZIA R., ZIMMERMAN R. et PAOLONI C., « W-band TWT for high capacity transmission hub for small cells backhaul », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), Monterey*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2018, doi : [10.1109/IVEC.2018.8391607](https://doi.org/10.1109/IVEC.2018.8391607).
- ANTONI M., *Dynamique microscopique des plasmas*, thèse de doctorat, (Université de Provence, Marseille), 1993.
- ANTONI M., ELSKENS Y. et ESCANDE D. F., « Explicit reduction of N-body dynamics to self-consistent particle-wave interaction », *Phys. Plasmas*, 1998, 5, pp. 841-852, doi : [10.1063/1.872651](https://doi.org/10.1063/1.872651).
- ANTONSEN T. M. JR. et LEVUSH B., *CHRISTINE : A multifrequency parametric simulation code for traveling wave tube amplifiers*, (Naval Res. Lab Washington DC, Vacuum Electron. Branch, Washington, DC, USA), Tech. Rep. NRL/FR/6840-97-9845, 1997.
- ANTOULINAKIS F., WONG P., JASSEM A. et LAU Y. Y., « Absolute instability and transient growth near the band edges of a traveling wave tube », *Phys. Plasmas*, 2018, 25, 072102 (7 pp), doi : [10.1063/1.5028385](https://doi.org/10.1063/1.5028385).
- ARNOLD V. I., *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, (Mir, Moscou), 1976.
- ASHKIN A. et DZIEDZIC J. M., « Radiation pressure on a free liquid surface. », *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 30, pp. 139-142, doi : [10.1103/PhysRevLett.30.139](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.139).
- BARNETT S. M., « Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma. », *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104, 070401 (4 pp), doi : [10.1103/PhysRevLett.104.070401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.070401).
- BARNETT S. M. et LOUDON R., « The enigma of optical momentum in a medium. », *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2010, 368, pp. 927-939, doi : [10.1098/rsta.2009.0207](https://doi.org/10.1098/rsta.2009.0207).
- BÉNISTI D., « Envelope equation for the linear and nonlinear propagation of an electron plasma wave, including the effects of Landau damping, trapping, plasma inhomogeneity, and the change in the state of wave », *Phys. Plasmas*, 2016, 23, n° 10, 102105, doi : [10.1063/1.4963854](https://doi.org/10.1063/1.4963854), Erratum : *Phys. Plasmas*, 2017, 24, n° 1, 019901, doi : [10.1063/1.4973832](https://doi.org/10.1063/1.4973832).

- BERNARDI P., ANDRÉ F., DAVID J-F., LE CLAIR A. et DOVEIL F., « Efficient Time-Domain Simulations of a Helix Traveling-Wave Tube », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2011, 58, n° 6, pp. 1761-1767, doi : [10.1109/ted.2011.2125793](https://doi.org/10.1109/ted.2011.2125793).
- BERNARDI P., ANDRÉ F., DAVID J-F., LE CLAIR A. et DOVEIL F., « Control of the Reflections at the Terminations of a Slow Wave Structure in the Nonstationary Discrete Theory of Excitation of a Periodic Waveguide », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2011, 58, n° 11, pp. 4093-4097, doi : [10.1109/ted.2011.2163410](https://doi.org/10.1109/ted.2011.2163410).
- BERNARDI P., *Utilisation et amélioration du modèle discret d'excitation d'un guide d'onde périodique pour la simulation pratique du tube à onde progressive en domaine temporel*, thèse de doctorat, (Université de Provence, Marseille), 2011, tel : [00708349](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00708349).
- BERNIER J., « Essai de théorie du tube électronique à propagation d'ondes », *Ann. Radioélec.*, 1947, 2, n° 7, pp. 87-101.
- BERTRAND P., GHIZZO A., KARTTUNEN S. J., PÄTTIKANGAS T. J. H., SALOMAA R. R. E. et SHOUCRI M., « Twostage electron acceleration by simultaneous stimulated Raman backward and forward scattering », *Phys. Plasmas*, 1995, 2, p. 3115, doi : [10.1063/1.871144](https://doi.org/10.1063/1.871144).
- BESSUDNOVA N. O. et ROZHNEV A. G., « The effect of space charge on electron-wave instabilities near cut-off frequencies of the slow-wave structure », *Tech. Phys. Lett.*, 2000, 26, pp. 418-419, doi : [10.1134/1.1262864](https://doi.org/10.1134/1.1262864).
- BINNEY J. et TREMAINE S., *Galactic Dynamics*, (Princeton University Press, Princeton), 2008.
- BLANC-LAPIERRE A. et LAPOSTOLLE P., « Contribution à l'étude des amplificateurs à ondes progressives », *Ann. Télécommun.*, 1946, 1, n° 12, pp. 283-302, doi : [10.1007/BF03016682](https://doi.org/10.1007/BF03016682).
- BLIOKH K. Y., BEKSHAEV A. Y. et NORI F., « Optical Momentum, Spin, and Angular Momentum in Dispersive Media », *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119, 073901, doi : [10.1103/PhysRevLett.119.073901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.073901).
- BLIOKH K. Y., BEKSHAEV A. Y. et NORI F., « Optical momentum and angular momentum in complex media : from the Abraham-Minkowski debate to unusual properties of surface plasmon-polaritons », *New J. Phys.*, 2017, 19, 123014 (23 pp), doi : [10.1088/1367-2630/aa8913](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8913).
- BOHM D. et GROSS E. P., « Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behavior », *Phys. Rev.*, 1949, 75, n° 12, pp. 1851-1864, doi : [10.1103/PhysRev.75.1851](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1851).
- BONIFACIO R., CASAGRANDE F., CERCHIONI G., DE SALVO SOUZA L., PIERINI P. et PIOVELLA N., « Physics of the high-gain FEL and superradiance », *Riv. Nuovo Cim.*, 1990, 13, n° 9, pp. 1-69, doi : [10.1007/BF02770850](https://doi.org/10.1007/BF02770850).
- BOOSKE J. H. et CONVERSE M. C., « Insights from one-dimensional linearized Pierce theory about wideband traveling-wave tubes with high space charge », *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2004, 32, pp. 1066-1072, doi : [10.1109/TPS.2004.828790](https://doi.org/10.1109/TPS.2004.828790).
- BRIGGS R. J., *Electron-stream interaction with plasmas*, (M.I.T. press, Cambridge, Massachusetts), 1964.
- BREVIK I., « Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor », *Phys. Rep.*, 1979, 52, 133-201, doi : [10.1016/0370-1573\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90074-7).
- BREVIK I., « Analysis of recent interpretations of the Abraham-Minkowski problem », *Phys. Rev. A*, 2018, 98, 043847 (5 pp), doi : [10.1103/PhysRevA.98.043847](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.043847).
- CAMPBELL G. K., LEANHARDT A. E., MUN J., BOYD M., STREED E. W., KETTERLE W. et PRITCHARD D. E., « Photon recoil momentum in dispersive media », *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94, 170403 (4 pp), doi : [10.1103/PhysRevLett.94.170403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.170403).
- CARTER R. G., *Microwave and RF vacuum electronic power sources*, (Cambridge univ. press, Cambridge), 2018.
- CHAIX P. et IRACANE D., « Stochastic electronic motion and high-efficiency free electron lasers », dans BENKADDA S.(éd) DOVEIL F.(éd) et ELSKENS Y.(éd), *Transport, Chaos and Plasma Physics*, (World Scientific, Singapore), 1994, pp. 370-373.
- CHEN F. F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, (Springer, New York), 2010, 2nd ed.
- CHERNIN D., ANTONSEN T. M. et LEVUSH B., « Exact Treatment of the Dispersion and Beam Interaction Impedance of a Thin Tape Helix Surrounded by a Radially Stratified Dielectric », *IEEE Trans. Electron Devices*, 1999, 46, pp. 1472-1483, doi : [10.1109/16.772493](https://doi.org/10.1109/16.772493).
- CHIRIKOV B. V., « A universal instability of many-dimensional oscillator systems », *Phys. Rep.*, 1979, 52, n° 5, pp. 263-379, doi : [10.1016/0370-1573\(79\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1).
- CHO A., « Century-Long Debate Over Momentum of Light Resolved? », *Science*, 2010, 327, 1067, doi : [10.1126/science.327.5969.1067](https://doi.org/10.1126/science.327.5969.1067).

- CUTLER C. C., « Experimental Determination of Helical-Wave Properties », *Proc. IRE*, 1948, 36, pp. 230-233, doi : [10.1109/JR-PROC.1948.233590](https://doi.org/10.1109/JR-PROC.1948.233590).
- CUTLER C. C., « The Nature of Power Saturation in Traveling Wave Tubes », *Bell Syst. Tech. J.*, 1956, 35, n° 4, pp. 841-876, doi : [10.1002/j.1538-7305.1956.tb03805.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1956.tb03805.x).
- COPELAND J. et HAEFF A. A., « The True History of the Traveling Wave Tube », *IEEE Spectrum*, 2015, 52, n° 9, pp. 38-43, doi : [10.1109/MSPEC.2015.7226611](https://doi.org/10.1109/MSPEC.2015.7226611).
- CREPEAU P. J. et MCISAAC P. R., « Consequences of Symmetry in Periodic Structures », *Proc. IEEE*, 1964, 52, n° 1, pp. 33-43, doi : [10.1109/PROC.1964.2740](https://doi.org/10.1109/PROC.1964.2740).
- CST Particle Studio. Comput. Simulation Technol., Framingham, MA, USA, 2017, url : <https://www.cst.com/products/cstps>.
- D'AGOSTINO S., EMMA F. et PAOLONI C., « Accurate analysis of helix slow-wave structures », *IEEE Trans. Electron Devices*, 1998, 45, pp. 1605-1613, doi : [10.1109/16.701495](https://doi.org/10.1109/16.701495).
- DATTA S. K., KUMAR L. et BASU B., « Pierce-Type One-Dimensional Eulerian Hydrodynamic Analysis of a Plasma-Filled Helix Traveling-Wave Tube », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2011, 58, pp. 882-890, doi : [10.1109/TED.2010.2102032](https://doi.org/10.1109/TED.2010.2102032).
- DAVIDSON R. C. et QIN H., *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*, (Imperial College press, London), 2001.
- DIMONTE G., *Destruction of trapped particle oscillations*, thèse de doctorat, (University of California San Diego, La Jolla, California), 1977.
- DIMONTE G. et MALMBERG J. H., « Destruction of trapping oscillations », *Phys. Fluids*, 1978, 21, pp. 1188-1206, doi : [10.1063/1.862358](https://doi.org/10.1063/1.862358).
- DODIN I. Y. et FISCH N. J., « Axiomatic geometrical optics, Abraham-Minkowski controversy, and photon properties derived classically », *Phys. Rev. A*, 2012, 86, 053834, doi : [10.1103/PhysRevA.86.053834](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.053834).
- DOVEIL F., ESCANDE D. F. et MACOR A., « Experimental observation of nonlinear synchronization due to a single wave », *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94, 085003 (4 pp), doi : [10.1103/physrevlett.94.085003](https://doi.org/10.1103/physrevlett.94.085003).
- DOVEIL F., MACOR A. et AUHMANI KH., « Wave-particle interaction investigated in a travelling wave tube », *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2005, 47, A261-A271, doi : [10.1088/0741-3335/47/5A/018](https://doi.org/10.1088/0741-3335/47/5A/018).
- DOVEIL F., AUHMANI KH., MACOR A. et GUYOMARC'H D., « Experimental observation of resonance overlap responsible for Hamiltonian chaos », *Phys. Plasmas*, 2005, 12, 010702 doi : [10.1063/1.1824040](https://doi.org/10.1063/1.1824040).
- DOVEIL F., MACOR A. et ELSKENS Y., « Direct observation of a 'devil's staircase' in wave-particle interaction », *Chaos*, 2006, 16, n° 3, 033103 (9 pp), doi : [10.1063/1.2216850](https://doi.org/10.1063/1.2216850).
- DOVEIL F. et MACOR A., « Wave-particle interaction and Hamiltonian dynamics investigated in a traveling wave tube », *Phys. Plasma*, 2006, 13, n° 5, 055704 (6 pp), doi : [10.1063/1.2177201](https://doi.org/10.1063/1.2177201).
- DOVEIL F., MACOR A. et AÏSSI A., « Observation of Hamiltonian chaos and its control in wave particle interaction », *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2007, 49, pp. 125-135, doi : [10.1088/0741-3335/49/12B/S12](https://doi.org/10.1088/0741-3335/49/12B/S12).
- DOVEIL F. et MACOR A., « Two regimes of self-consistent heating of charged particles », *Phys. Rev. E*, 2011, 84, p. 045401 (R) (4 pp), doi : [10.1103/PhysRevE.84.045401](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.045401).
- DOVEIL F., ELSKENS Y. et MINENNA D. F. G., *Wave-Particle Interaction studied in a Traveling Wave Tube*, présentation invitée au 19th International Congress on Plasma Physics (ICPP 2018), Vancouver, 2018.
- EICHMEIER J. A. (éd) et THUMM M. (éd), *Vacuum electronics – Components and devices*, (Springer, Berlin), 2008.
- ELSKENS Y. et ESCANDE D. F., *Microscopic dynamics of plasmas and chaos*, (IoP publishing, Bristol), 2003.
- ELSKENS Y., ESCANDE D. F. et DOVEIL F., « Vlasov equation and N-body dynamics », *Eur. Phys. J. D*, 2014, 68, 218 (7 pp), doi : [10.1140/epjd/e2014-50164-9](https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50164-9).
- ESCANDE D. F., « Stochasticity in classical hamiltonian systems : universal aspects », *Phys. Rep.*, 1985, 121, n° 3-4, pp. 165-261, doi : [10.1016/0370-1573\(85\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90019-5).
- ESCANDE D. F., ZEKRI S. et ELSKENS Y., « Intuitive and rigorous derivation of spontaneous emission and Landau damping of Langmuir waves through classical mechanics », *Phys. Plasmas*, 1996, 3, n° 10, pp. 3534-3539, doi : [10.1063/1.871943](https://doi.org/10.1063/1.871943).

- ESCANDE D. F., « Wave-particle interaction in plasmas : A qualitative approach », dans DAUXOIS T.(éd), RUFFO S.(éd) et CUGLIANDOLO L. F.(éd), *Long-range interacting systems*, (Oxford univ. press, Oxford), 2010 pp. 469-506.
- ESCANDE D. F., « Contributions of plasma physics to chaos and nonlinear dynamics », *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2016, 58, p. 113001 doi : [10.1088/0741-3335/58/11/113001](https://doi.org/10.1088/0741-3335/58/11/113001).
- ESCANDE D. F., « From thermonuclear fusion to Hamiltonian chaos », *Eur. Phys. J. H*, 2018, 43, pp. 397-420 doi : [10.1140/epjh/e2016-70063-5](https://doi.org/10.1140/epjh/e2016-70063-5).
- ESCANDE D. F., BÉNISTI D., ELSKENS Y., ZARZOSO D. et DOVEIL F., « Basic microscopic plasma physics form N -body mechanics, A tribute to Pierre-Simon de Laplace », *Rev. Mod. Plasma Phys.*, 2018, 2, 9 (68 pp), doi : [10.1007/s41614-018-0021-x](https://doi.org/10.1007/s41614-018-0021-x).
- EULER L., *Institutionum calculi integralis, volumen primum*, (Impensis Academiae Imperialis Scientiarum, Petropoli), 1768.
- FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B. et SANDS M., *The Feynman Lectures on Physics, vol. 2*, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts), 1964.
- FIGOTIN A. et REYES G., « Multi-transmission-line-beam interactive system », *J. Math. Phys.*, 2013, 54, 111901 (35 pp), doi : [10.1063/1.4832486](https://doi.org/10.1063/1.4832486).
- FIRPO M-C. et ELSKENS Y., « Kinetic limit of N-body description of wave-particle self-consistent interaction », *J. Stat. Phys.*, 1998, 93, pp. 193-209, doi : [10.1023/B:JOSS.0000026732.51044.87](https://doi.org/10.1023/B:JOSS.0000026732.51044.87).
- FIRPO M-C., DOVEIL F., ELSKENS Y., BERTRAND P., POLENI M. et GUYOMARC'H D., « Long-time discrete particle effects versus kinetic theory in the self-consistent single-wave model », *Phys. Rev. E*, 2001, 64, 026407 (10 pp), doi : [10.1103/PhysRevE.64.026407](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.026407).
- FREUND H. P. et ANTONSEN T. M. JR, *Principes of Free-Electron Lasers*, (Springer, Dordrecht), 1992.
- GARRISON J. C. et CHIAO R. Y., « Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in an ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric », *Phys. Rev. A*, 2004, 70, 053826 (8 pp), doi : [10.1103/PhysRevA.70.053826](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.053826).
- GEL'FAND I. M., « Eigenfunction expansions for an equation with periodic coefficients », *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1950, 73, pp. 1117-1120, en russe.
- GIGNOUX C. et SILVESTRE-BRAC B., *Mécanique : de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*, (EDP Sciences, Les Ulis), 2002.
- GILMOUR A. S. JR, *Principles of traveling wave tubes*, (Artech House radar library, Boston), 1994.
- GILMOUR A. S. JR, *Klystrons, Traveling Wave Tubes, Magnetrons, Crossed-Field Amplifiers, and Gyrotrons*, (Artech House radar library, Boston), 2011.
- GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley), 1980, 3rd ed.
- GOPLIN B., LUDEKING L., SMITHE D. et WARREN G., « User-configurable MAGIC for electromagnetic PIC calculations », *Comput. Phys. Commun.*, 1995, 87, n° 1-2, pp. 54-86, doi : [10.1016/0010-4655\(95\)00010-D](https://doi.org/10.1016/0010-4655(95)00010-D).
- GRIFFITHS D. J., *Introduction to Electrodynamics*, (Prentice Hall, New Jersey), 1999, 3rd ed.
- GRIFFITHS D. J., « Resource Letter EM-1 : Electromagnetic Momentum », *Am. J. Phys.*, 2012, 80, n° 1, pp. 7-18, doi : [10.1119/1.3641979](https://doi.org/10.1119/1.3641979).
- GUYOMARC'H D., *Un tube à onde progressive pour l'étude de la turbulence plasma*, thèse de doctorat, (Université de Provence, Aix-Marseille I), 1996.
- GUYOMARC'H D. et DOVEIL F., « A trochoidal analyzer to measure the electron beam energy distribution in a traveling wave tube », *Rev. Sci. Instrum.*, 2000, 71, n° 11, pp. 4087-4091, doi : [10.1063/1.1319339](https://doi.org/10.1063/1.1319339).
- HAEFF A. V., *Device for and method of controlling high frequency currents*, 1936, U.S. Patent 2,064,469, demandé le 23 octobre 1933, délivré le 15 décembre 1936.
- HAIRER E. et HAIRER M., *GniCodes – Matlab Programs for Geometric Numerical Integration*, (10th LMS-EPSRC Numerical Analysis Summer School, University of Durham), 2002, doi : [10.1007/978-3-642-55692-0_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-55692-0_5).
- HAIRER E., LUBICH C. et WANNER G., « Geometric numerical integration illustrated by the Störmer-Verlet method », *Acta Num.*, 2003, 12, pp. 399-450, doi : [10.1017/S0962492902000144](https://doi.org/10.1017/S0962492902000144).

- HAIRER E., LUBICH C. et WANNER G., *Geometric numerical integration : Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, (Springer, New York), 2010.
- HALZEN F. et MARTIN A. D., *Quarks & Leptons : An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (John Wiley & Sons, New York), 1984.
- HARTMANN D. A., DRISCOLL C. F., O'NEIL T. M. et SHAPIRO V. D., « Measurements of the weak warm beam instability », *Phys. Plasma*, 1995, 2, pp. 654-677, doi : [10.1063/1.871418](https://doi.org/10.1063/1.871418).
- HEAVISIDE O., *Electrical Papers*, (Macmillan and Co., New York), 1894.
- HÉNON M., « Vlasov equation? », *Astron. Astrophys.*, 1982, 114, pp. 211-212, Bibcode : [1982A&A...114..211H](https://arxiv.org/abs/1982A&A...114..211H).
- HERTZ H. R., « Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen », *Wied. Ann.*, 1888, 34, pp. 551-569, doi : [10.1002/andp.18882700708](https://doi.org/10.1002/andp.18882700708).
- HERTZ H. R., « Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie », *Wied. Ann.*, 1889, 36, pp. 1-22, doi : [10.1002/andp.18882720102](https://doi.org/10.1002/andp.18882720102).
- HINDS E. A. et BARNETT S. M., « Momentum exchange between light and a single atom : Abraham or Minkowski? », *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102, 050403 (4 pp), doi : [10.1103/PhysRevLett.102.050403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.050403).
- HU Y., FENG J., CAI J., WU X., DU Y., LIU J., CHEN J. et ZHANG X., « Design and Experimental Study of a Widebandwidth W-Band Folded Waveguide Continuous-Wave TWT », *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2014, 42, n° 10, pp. 3380-3386, doi : [10.1109/TPS.2014.2350477](https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2350477).
- HUNG D. M. H., RITTERSDORF I. M., ZHANG P., CHERNIN D., LAU Y. Y., ANTONSEN T. M. JR., LUGINSLAND J. W., SIMON D. H. et GILGENBACH R. M., « Absolute Instability near the Band Edge of Traveling-Wave Amplifiers », *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115, 124801 (5 pp), doi : [10.1103/PhysRevLett.115.124801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.124801).
- IEEE, 521-2002 - *IEEE Standard Letter Designations for Radar-Frequency Bands*, 2003, doi : [10.1109/IEEESTD.2003.94224](https://doi.org/10.1109/IEEESTD.2003.94224).
- ILTIS C., « Leibniz and the vis viva controversy », *Isis*, 1971, 62, n° 1, 21-35, url : <https://www.jstor.org/stable/228997>.
- JACKSON J. D., *Classical electrodynamics*, (Wiley, New York), 1999, 3rd ed.
- JEANS J. H., « On the Theory of Star-Streaming and the Structure of the Universe », *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1915, 76, n° 2, pp. 70-84, doi : [10.1093/mnras/76.2.70](https://doi.org/10.1093/mnras/76.2.70).
- JONES R. V. et RICHARDS J. C. S., « The pressure of radiation in a refracting medium », *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1954, 221, 480-498, doi : [10.1098/rspa.1954.0043](https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0043).
- JONES R. V., « Radiation pressure of light in a dispersive medium », *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1978, 360, 365-371, doi : [10.1098/rspa.1978.0073](https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0073).
- KARETNIKOVA T. A., ROZHNEV A. G., RYSKIN N. M., FEDOTOV A. E., MISHAKIN S. V. et GINZBURG N. S., « Gain Analysis of a 0.2-THz Traveling-Wave Tube With Sheet Electron Beam and Staggered Grating Slow Wave Structure », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2018, 65, n° 6, pp. 2129-2134, doi : [10.1109/TED.2017.2787960](https://doi.org/10.1109/TED.2017.2787960).
- KEMP B. A., « Resolution of the Abraham–Minkowski debate : implications for the electromagnetic wave theory of light in matter », *J. Appl. Phys.*, 2011, 109, 111101, doi : [10.1063/1.3582151](https://doi.org/10.1063/1.3582151).
- KLÍMA R. et PETRŽÍLKA V. A., « On the momentum of quasi-monochromatic waves in a plasma », *Czech. J. Phys. B*, 1972, 22, n° 10, 896-905, doi : [10.1007/BF01690197](https://doi.org/10.1007/BF01690197).
- KLÍMA R. et PETRŽÍLKA V. A., « On the radiation pressure of electromagnetic wave packets in nondispersive fluid dielectrics », *Ann. Phys.*, 1975, 92, n° 2, 395-405, doi : [10.1016/0003-4916\(75\)90110-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(75)90110-4).
- KLÍMA R. et PETRŽÍLKA V. A., « On radiation pressure forces in cold magnetised plasma », *J. Phys. A : Math. Gen.*, 1978, 11, n° 8, 1687-1695, doi : [10.1088/0305-4470/11/8/028](https://doi.org/10.1088/0305-4470/11/8/028).
- KOMPFNER R., « The Traveling Wave Valve », *Wireless World*, 1946, 52, n° 11, pp. 369-372.
- KRAUS M., *Variational Integrators in Plasma Physics*, thèse de doctorat, (Technical University of Munich), 2013.
- KRUER W. L., *The physics of laser plasma interactions*, (Westview Press, Boulder), 2003.

- KUZNETSOV S. P., « On one form of excitation equations of a periodic waveguide », *Sov. J. Commun. Technol. Electron.*, 1980, 25, pp. 419-421, traduction du russe *Radiotekhnika i Elektronika*, 1980, 25, pp. 419-421.
- KUZNETSOV A. P. et KUZNETSOV S. P., « Nonlinear nonstationary equation of interaction between an electron beam and electromagnetic field near the Brillouin zone boundary », *Radiophys. Quantum Electron*, 1984, 27, n° 12, pp. 1575-1583, doi : [10.1007/BF01039225](https://doi.org/10.1007/BF01039225), traduction du russe *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika*, 1980, 27, n° 12, pp. 1575-1583.
- KUZNETSOV A. P., KUZNETSOV S. P., ROZHNEV A. G., BLOKHINA E. V. et BULGAKOVA L. V., « Wave theory of a traveling-wave tube operated near the cutoff », *Radiophys. Quantum Electron*, 2004, 47, pp. 356-373, doi : [10.1023/B:RAQE.0000046310.29763.c1](https://doi.org/10.1023/B:RAQE.0000046310.29763.c1).
- LANDAU L. D., « On the vibrations of the electronic plasma », *J. Phys. USSR*, 1946, 10, pp. 25-34, version originale russe : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1946, 16, pp. 574-586.
- LANDAU L. D. et LIFSHITZ E. M., *Classical theory of fields*, (Elsevier, Amsterdam), 1975, traduction française : *Tome II : Théorie des champs*, (Mir, Moscou), 1989.
- LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M. et PITAEVSKII L. P., *Electrodynamics of Continuous Media*, (Elsevier, Amsterdam), 1984, traduction française : *Tome VIII : Électrodynamique des Milieux Continus*, (Mir, Moscou), 1959.
- LEMOINE T., « Tubes électroniques hyperfréquences, Tubes à onde progressive », *Techniques de l'ingénieur Hyperfréquences. Circuits et émetteurs de puissance*, 2017, réf. e1622, (24 pp), url : <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/electronique-photonique-th13/hyperfréquences-circuits-et-emetteurs-de-puissance-42281210/tubes-electroniques-hyperfréquences-e1622/>.
- LEMOINE T., « Comparaison entre amplificateurs état solide et tubes électroniques », *Techniques de l'ingénieur Hyperfréquences. Circuits et émetteurs de puissance*, 2018, réf. e1624, (12 pp), url : <https://www.techniques-ingenieur-fr/base-documentaire/electronique-photonique-th13/hyperfréquences-circuits-et-emetteurs-de-puissance-42281210/comparaison-entre-amplificateurs-etat-solide-et-tubes-electroniques-e1624/>.
- LEONHARDT U., « Momentum in an uncertain light », *Nature*, 2006, 444, 823-824.
- LI B., YANG Z. H., LI J. Q., ZHU X. F., HUANG T., HU Q., HU Y. L., XU L., MA J. J., LIAO L. et XIAO L., « Theory and Design of Microwave-Tube Simulator Suite », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2009, 56, n° 5, pp. 919-927, doi : [10.1109/TED.2009.2015413](https://doi.org/10.1109/TED.2009.2015413).
- LIFSHITZ E. M. et PITAEVSKII L. P., *Physical Kinetics*, (Butterworth-Heinemann, Amsterdam), 1981, traduction française : *Tome X : Cinétique physique*, (Mir, Moscou), 1990.
- LINDENBLAD N. E., *Electron discharge device system*, 1942, U.S. Patent 2,300,052, demandé le 4 mai 1940, délivré le 27 octobre 1942.
- LORENTZ H. A., « Het theorema van Poynting over energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voorplanting van het licht », *Versl. Kon. Ak. Wet.*, 1896, 4, pp. 176-187.
- LOUISELL W. H., *Coupled mode and parametric electronics*, (Wiley, New York), 1960.
- MACOR A., DOVEIL F. et ELSKENS Y., « Electron climbing a < devil's staircase > in wave-particle interaction », *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95, 264102 (4 pp), doi : [10.1103/PhysRevLett.95.264102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.264102).
- MACOR A., DOVEIL F., CHANDRE C., CIRAIOLO G., LIMA R. et VITTOT M., « Channelling chaotic transport in a wave-particle experiment », *Eur. Phys. J. D*, 2007, 41, pp. 519-530, doi : [10.1140/epjd/e2007-00205-7](https://doi.org/10.1140/epjd/e2007-00205-7), Erratum : *Eur. Phys. J. D*, 2007, 44, 201, doi : [10.1140/epjd/e2006-00260-6](https://doi.org/10.1140/epjd/e2006-00260-6).
- MALMBERG J. H. et WHARTON C. B., « Collisionless Damping of Electrostatic Plasma Waves », *Phys. Rev. Lett.*, 1964, 13, n° 6, pp. 184-186, doi : [10.1103/PhysRevLett.13.184](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.184).
- MANSURIPUR M., « Comment on 'Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light' », *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 103, 019301, doi : [10.1103/PhysRevLett.103.019301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.019301).
- MARSHALL T. C., *Free-Electron Lasers*, (Macmillan Publishing Company, New York), 1985.
- MAXWELL J. C., « A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1865, 155, pp. 459-512, doi : [10.1098/rstl.1865.0008](https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008).
- MAXWELL J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 2, (Clarendon Press, Oxford), 1891.

- MCDONALD K. T., « Bibliography on the Abraham-Minkowski debate », (update of Sept. 29, 2017). url : <http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/ambib.pdf>.
- MesoCentre, Aix-Marseille Université, url : <https://mesocentre.univ-amu.fr/en/>
- MILLER S. M., ANTONSEN T. M. JR., LEVUSH B., BROMBORSKY A., ABE D. K. et CARMEL Y., « Theory of relativistic backward wave oscillator operating near cutoff », *Phys. Plasmas*, 1994, 1, pp. 730-740, doi : [10.1063/1.870818](https://doi.org/10.1063/1.870818).
- MILONNI P. W. et BOYD R. W., « Momentum of light in a dielectric medium », *Adv. Opt. Photonics*, 2010, 2, pp. 519-553, doi : [10.1364/AOP.2.000519](https://doi.org/10.1364/AOP.2.000519).
- MINENNA D. F. G., *Description hamiltonienne de l'interaction ondes-électrons dans un guide d'onde périodique*, thèse de Master, (Aix-Marseille Université), 2016.
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y. et ANDRÉ F., « Electron-wave momentum exchange and time domain simulations applied to traveling wave tubes », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), London*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2017, doi : [10.1109/IVEC.2017.8289689](https://doi.org/10.1109/IVEC.2017.8289689).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F. et DOVEIL F., « Electromagnetic power and momentum in N-body hamiltonian approach to wave-particle dynamics in a periodic structure », *Europhysics Lett. (EPL)*, 2018, 122, n° 4, 44002 (7 pp), doi : [10.1209/0295-5075/122/44002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/122/44002).
- MINENNA D. F. G., ANDRÉ F., ELSKENS Y., AUBOIN J-F., DOVEIL F., PUECH J. et DUVERDIER É., « The traveling-wave tube in the history of telecommunication », *Eur. Phys. J. H*, 2019, 44, n° 1, 1-36, doi : [10.1140/epjh/e2018-90023-1](https://doi.org/10.1140/epjh/e2018-90023-1).
- MINENNA D. F. G., TEREYUK A. G., ANDRÉ F., ELSKENS Y. et RYSKIN N. M., « Recent discrete model for small-signal analysis of traveling-wave tubes », *Phys. Scr.*, 2019, 94, n° 5, 055601 (8pp), doi : [10.1088/1402-4896/ab060e](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab060e).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F., PUECH J., POYÉ A., DOVEIL F. et PEREIRA T., « DIMOHA : Traveling-wave tube simulations including band edge and multiple-carriers operations », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), Busan*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2019, doi : [10.1109/IVEC.2019.8744984](https://doi.org/10.1109/IVEC.2019.8744984).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., ANDRÉ F., POYÉ A., PUECH J. et DOVEIL F., « DIMOHA : a time-domain algorithm for traveling-wave tube simulations », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2019, 66, n° 9, pp. 4042-4047, doi : [10.1109/TED.2019.2928450](https://doi.org/10.1109/TED.2019.2928450).
- MINENNA D. F. G., ELSKENS Y., DOVEIL F. et ANDRÉ F., « Universality of the Abraham-Minkowski dilemma for photon momenta beyond dielectric materials and implications for wave-particle systems », 2019, soumission en cours, arXiv : [1902.06431](https://arxiv.org/abs/1902.06431).
- MINKOWSKI H., « Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1908, pp. 53-111, url : <http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=GDZPPN00250152X>.
- MINKOWSKI H., « Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern », *Math. Ann.*, 1910, 68, n° 4, pp. 472-525, doi : [10.1007/BF01455871](https://doi.org/10.1007/BF01455871).
- MOUHOT C. et VILLANI C., « On Landau damping », *Acta Math.*, 2011, 207, 29-201, doi : [10.1007/s11511-011-0068-9](https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9).
- MYNICK H. E. et KAUFMAN A. N., « Soluble theory of nonlinear beam-plasma interaction », *Phys. FL*, 1978, 21, 653-663, doi : [10.1063/1.862273](https://doi.org/10.1063/1.862273).
- NEWTON I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, (J. Societatis Regiæ ac Typis J. Streater, Londini), 1687.
- NICHOLSON D. R., *Introduction to Plasma Theory*, (Wiley, New York), 1983.
- NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Release 1.0.22 of 2019-03-15, OLVER F. W. J.(éd), OLDE DAALHUIS A. B.(éd), LOZIER D. W.(éd), SCHNEIDER B. I.(éd), BOISVERT R. F.(éd), CLARK C. W.(éd), MILLER B. R.(éd) et SAUNDERS B. V.(éd), url : <http://dlmf.nist.gov/>.
- NOETHER E., « Invariante Variationsprobleme », *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen*, 1918, pp. 235-257, traduction anglaise : arXiv : [physics/0503066](https://arxiv.org/abs/physics/0503066).
- NORDSIECK A., « Theory of the Large Signal Behavior of Traveling-Wave Amplifiers », *Proc. IRE*, 1953, 41, n° 5, pp. 630-637, doi : [10.1109/JRPROC.1953.274404](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1953.274404).
- O'NEIL T. M., WINFREY J. H. et MALMBERG J. H., « Nonlinear Interaction of a Small Cold Beam and a Plasma », *Phys. FL*, 1971, 14, n° 6, pp. 1204-1212, doi : [10.1063/1.1693587](https://doi.org/10.1063/1.1693587).
- O'NEIL T. M., WINFREY J. H. et MALMBERG J. H., « Nonlinear Interaction of a Small Cold Beam and a Plasma. Part II », *Phys. FL*, 1972, 15, pp. 1514-1522, doi : [10.1063/1.1694117](https://doi.org/10.1063/1.1694117).

- OLLENDORFF F., *Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik*, (Springer, Berlin, Heidelberg), 1926, doi : [10.1007/978-3-642-92068-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-92068-4).
- ONISHCHENKO I.N., LINETSKII A.R., MATSIBORKO N.G., SHAPIRO V.D. et SHEVCHENKO V.I., « Contribution to the nonlinear theory of excitation of a monochromatic plasma wave by an electron beam », *ZhETF Pis Red*, 1970, 12, 281-285, traduction anglaise : *JETP Lett.*, 1970, 12, 281-285, Bibcode : [1970JETPL..12..281O](https://arxiv.org/abs/1970JETPL..12..281O).
- PAULI W., *Theory of relativity*, (Pergamon press, London), 1958.
- PCHELNIKOV Y. N., « Calculation of Pierce's Parameters C and Q by Differentiation of the TWT "Hot" Dispersion Relation », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2018, 65, pp. 2272-2279, doi : [10.1109/TED.2018.2794267](https://doi.org/10.1109/TED.2018.2794267).
- PELLEGRINI C., « The history of X-ray free-electron lasers », *Eur. Phys. J. H*, 2012, 37, pp. 659-708, doi : [10.1140/epjh/e2012-20064-5](https://doi.org/10.1140/epjh/e2012-20064-5).
- PEIERLS R., « The momentum of light in a refracting medium », *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1976, 347, 475-491, doi : [10.1098/rspa.1976.0012](https://doi.org/10.1098/rspa.1976.0012).
- PFEIFER R. N. C., NIEMINEN T. A., HECKENBERG N. R. et RUBINSZTEIN-DUNLOP H., « Colloquium : Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media », *Rev. Mod. Phys.*, 2007, 79, 1197-1216, doi : [10.1103/RevModPhys.79.1197](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.1197), Erratum : *Rev. Mod. Phys.*, 2009, 81, p. 443, doi : [10.1103/RevModPhys.81.443](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.443)
- PHILBIN T. G., « Electromagnetic energy momentum in dispersive media », *Phys. Rev. A*, 2011, 83, 013823 (6 pp), doi : [10.1103/PhysRevA.83.013823](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.013823), Erratum : *Phys. Rev. A*, 2012, 85, 059902(E), doi : [10.1103/PhysRevA.85.059902](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.059902).
- PICARDI M. F., BLOKH K. Y., RODRIGUEZ-FORTUÑO F. J., ALPEGGIANI F. et NORI F., « Angular momenta, helicity, and other properties of dielectric-fiber and metallic-wire modes », *Optica*, 2018, 5, pp. 1016-1026, doi : [10.1364/OPTICA.5.001016](https://doi.org/10.1364/OPTICA.5.001016).
- PIERCE J. R. et FIELD L. M., « Traveling-wave tubes », *Proc. IRE*, 1947, 35, pp. 108-111, doi : [10.1109/JRPROC.1947.226216](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1947.226216).
- PIERCE J. R., « Theory of the beam-type as amplifier at microwaves », *Proc. IRE*, 1947, 35, pp. 111-124, doi : [10.1109/JRPROC.1947.226217](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1947.226217).
- PIERCE J. R., *Traveling wave tubes*, (Van Nostrand, New York), 1950.
- PIERCE J. R., « Interaction of Moving Charges with Wave Circuits », *J. Appl. Phys.*, 1955, 26, pp. 627-638, doi : [10.1063/1.1722056](https://doi.org/10.1063/1.1722056).
- PLOUIN J., *Injection d'harmonique dans un Tube à Ondes Progressives : amélioration de la puissance de sortie*, thèse de doctorat, (École Polytechnique, Palaiseau), 2004, tel : [00007146](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007146).
- POCKLINGTON H. C., « Electrical oscillations in wires », *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1897, 9, pp. 324-332, url : <https://archive.org/details/proceedingsofcam9189598camb/page/324>.
- POINCARÉ H., « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique », *Acta Math.*, 1890, 13, pp. 1-270, doi : [10.1007/BF02392507](https://doi.org/10.1007/BF02392507).
- POSTHUMUS K., « Oscillations in split anode magnetron », *Wireless Engineer*, 1935, 12, n° 138, pp. 126-132.
- POYNTING J. H., « On the transfer of energy in the electromagnetic field », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1884, 175, pp. 343-361, doi : [10.1098/rstl.1884.0016](https://doi.org/10.1098/rstl.1884.0016).
- QIU H.-J., HU Y.-L., HU Q., ZHU X.-F. et LI B., « Analytic exploration of the accuracy of Pierce's three-wave beam-wave interaction theory of traveling-wave tubes », *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2018, 46, pp. 2505-2511, doi : [10.1109/TPS.2018.2840095](https://doi.org/10.1109/TPS.2018.2840095).
- RAX J.-M., *Physique des plasmas : cours et applications*, (Dunod, Paris), 2005.
- RAYLEIGH (Lord), « On the passage of electric waves through tubes, or the vibrations of dielectric cylinders », *Phil. Mag.*, 1897, 43, n° 261, pp. 125-132, doi : [10.1080/14786449708620969](https://doi.org/10.1080/14786449708620969).
- ROHRLICH F., *Classical charged particles*, (World Scientific, Singapore), 2007.
- ROWE J. E., *Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena*, (Academic Press Inc., New York, NY), 1965.
- RYSKIN N. M., TITOV V. N. et YAKOVLEV A. V., « Non-stationary nonlinear modeling of an electron beam interaction with a coupled cavity structure », dans *Modeling in applied electrodynamics and electronics*, (Saratov Univ. Press), 2007, pp. 46-61.

- RYSKIN N. M., TITOV V. N. et YAKOVLEV A. V., « Nonstationary nonlinear discrete model of a coupled-cavity traveling-wave-tube amplifier », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2009, 56, pp. 928-934, doi : [10.1109/ted.2009.2016690](https://doi.org/10.1109/ted.2009.2016690).
- SAFI D., BIRTEL P., MEYNE S. et JACOB A. F., « A Traveling-Wave Tube Simulation Approach With CST Particle Studio », *IEEE Trans. Electron Devices*, 2018, 65, n° 6, pp. 2257-2263, doi : [10.1109/TED.2018.2798810](https://doi.org/10.1109/TED.2018.2798810).
- SAITOH I., SUZUKI Y. et TAKAHASHI N., « The Symplectic Finite Difference Time Domain Method », *IEEE Trans. Magn.*, 2001, 37, n° 5, pp. 3251-3254, doi : [10.1109/20.952588](https://doi.org/10.1109/20.952588).
- SANTOS D. D. A. et ELSKENS Y., « Phase mixing importance for both Landau instability and damping », *J. Plasma Phys.*, 2017, 83, 705830106 (18pp), doi : [10.1017/S002237781700006X](https://doi.org/10.1017/S002237781700006X).
- SAYILI A., « Ibn Sīnā and Buridan on the Motion of the Projectile », *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1987, 500, pp. 477-482, doi : [10.1111/j.1749-6632.1987.tb37219.x](https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1987.tb37219.x).
- SENSIPER S., *Electromagnetic wave propagation on helical conductors*, thèse de doctorat, (Massachusetts Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics), 1951, url : <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/4865>.
- SENSIPER S., « Electromagnetic Wave Propagation on Helical Structures (A Review and Survey of Recent Progress) », *Proc. IRE*, 1955, 43, pp. 149-161, doi : [10.1109/jrproc.1955.278072](https://doi.org/10.1109/jrproc.1955.278072).
- SETAYESH A. AND ABRISHAMIAN M. S., « New Version of "PaWaIC" Helix-TWT Particle-Wave Interaction Code Based on Pseudospectral Analytical Time-Domain Technique With Collocated Space and Time-Marching Scheme : "PaWaIC-PSATD-CSaT" », *IEEE Trans. Electron Dev.*, 2018, 65, n° 2, pp. 716-723, doi : [10.1109/TED.2017.2786083](https://doi.org/10.1109/TED.2017.2786083).
- SETAYESH A., FARHANG H. AND ABRISHAMIAN M. S., « A Novel Dispersive Time-Domain Interaction Code for Helix TWT by Collocated Space and Staggered Time Scheme Pseudospectral Analytical Time-Domain Method », *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 2018, 66, n° 12, pp. 5176-5182, doi : [10.1109/TMTT.2018.2875110](https://doi.org/10.1109/TMTT.2018.2875110).
- SIGNORE R., *Histoire du pendule*, (Vuibert, Paris), 2011.
- SILVEIRINHA M. G., « Reexamination of the Abraham-Minkowski dilemma », *Phys. Rev. A*, 2017, 96, 033831 (11 pp), doi : [10.1103/PhysRevA.96.033831](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.033831).
- SIMON D. H., WONG P., CHERNIN D., LAU Y. Y., HOFF B., ZHANG P., DONG C. F. et GILGENBACH R. M., « On the evaluation of Pierce parameters C and Q in a traveling wave tube », *Phys. Plasmas*, 2017, 27, 033114 (6 pp), doi : [10.1063/1.4978474](https://doi.org/10.1063/1.4978474).
- SOLTANI H. B. AND ABIRI H., « Five-wave equation for small-signal analysis of traveling-wave tubes considering the effects of axial periodicity of the interaction structure », *IEEE Trans. Electron Dev.*, 2016, 63, pp. 2149-2155, doi : [10.1109/TED.2016.2544783](https://doi.org/10.1109/TED.2016.2544783).
- SPOHN H., *Dynamics of charged particles and their radiation field*, (Cambridge univ. press, Cambridge), 2004.
- STÖRMER C., « Sur les trajectoires des corpuscules électrisés », *Arch. Sci. Phys. Nat., Genève*, 1907, 24, pp. 5-18, 113-158, 221-247.
- TAMMA V. A. et CAPOLINO F., « Extension of the Pierce model to multiple transmission lines interacting with an electron beam », *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2014, 42, pp. 899-910, doi : [10.1109/TPS.2014.2308575](https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2308575).
- TARAKANOV V. A., *User's Manual for Code KARAT*, (Springfield, VA, USA : Berkley Res.), 1992.
- Projet TWEETHER, url : <https://tweether.eu>.
- TENNYSON J. L., MEISS J. D. et MORRISON P. J., « Self-consistent chaos in the beam-plasma instability », *Physica D* 1994, 71, pp. 1-17, doi : [10.1016/0167-2789\(94\)90178-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90178-3).
- TERENTYUK A. G., *Discrete model of the folded waveguide slow-wave structure*, mémoire de Master en russe, (Saratov Univ., Saratov), 2016.
- TERENTYUK A. G., ROZHNEV A. G. et RYSKIN N. M., « Discrete model of a folded-waveguide traveling-wave tube », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), London*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2017, doi : [10.1109/IVEC.2017.8289668](https://doi.org/10.1109/IVEC.2017.8289668).
- THÉVENY S., ANDRÉ F. et ELSKENS Y., « On frequency and time domain models of traveling wave tubes », 2016, hal : [01340471](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340471).
- THÉVENY S., *Approches fréquentielle et temporelle de la dynamique des tubes à ondes progressives*, thèse de doctorat, (Aix-Marseille Université), 2016.
- THIRRING W., *Classical Mathematical Physics : Dynamical Systems and Field Theories*, (Springer, New York), 2013, 3rd ed.
- THOMSON J. J., *Recent researches in electricity and magnetism*, (Clarendon Press, Oxford), 1893.

- TIEN P. K., « Traveling-Wave Tube Helix Impedance », *Proc. IRE*, 1953, 41, pp. 1617-1623, doi : [10.1109/jrproc.1953.274189](https://doi.org/10.1109/jrproc.1953.274189).
- TIEN P. K., WALKER L. R. et WOLONTIS V. M., « A large-signal theory of traveling-wave amplifiers », *Proc. IRE*, 1955, 43, pp. 260-277, doi : [10.1109/JRPROC.1955.278131](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1955.278131).
- TONKS L. et LANGMUIR I., « Oscillations in ionized gases », *Phys. Rev.*, 1929, 33, n° 2, pp. 195-210, doi : [10.1103/PhysRev.33.195](https://doi.org/10.1103/PhysRev.33.195).
- TSUNODA S. I., *Wave enhancement due to a static electric field*, thèse de doctorat, (University of California San Diego, La Jolla, California), 1982 .
- TSUNODA S. I., DOVEIL F. et MALMBERG J. H., « Experimental test of the quasilinear theory of the interaction between a weak warm electron beam and a spectrum of waves », *Phys. Rev. Lett.* 1987, 58, pp. 1112-1115, doi : [10.1103/PhysRevLett.58.1112](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1112).
- TSUNODA S. I., DOVEIL F. et MALMBERG J. H., « Nonlinear Interaction between a Warm Electron Beam and a Single Wave », *Phys. Rev. Lett.* 1987, 59, pp. 2752-2755, doi : [10.1103/PhysRevLett.59.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.2752).
- TSUNODA S. I., DOVEIL F. et MALMBERG J. H., « Experimental test of quasilinear theory », *Phys. Fluids B*, 1991, 3, pp. 2747-2757, doi : [10.1063/1.859911](https://doi.org/10.1063/1.859911).
- TUCEK J. C., BASTEN M. A., GALLAGHER D. A. et KREISCHER K. E., « Operation of a compact 1.03 THz power amplifier », *Proc. IEEE Int. Vacuum Electron. Conf. (IVEC), Monterey*, (IEEE, Piscataway, NJ), 2016, doi : [10.1109/IVEC.2016.7561772](https://doi.org/10.1109/IVEC.2016.7561772).
- VERLET L., « Computer 'experiments' on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules », *Phys. Rev.*, 1967, 159, pp. 98-103, doi : [10.1103/PhysRev.159.98](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.98).
- VLASOV A. A., « On the Kinetic Theory of an Assembly of Particles with Collective Interaction », *J. Phys. USSR*, 1945, 9, pp. 25-40, en russe.
- VLASOV A. N., ANTONSEN T. M. JR., CHERNIN D. P., LEVUSH B. et WRIGHT E. L., « Simulation of microwave devices with external cavities using MAGY », *IEEE Trans. Plasma Science* 2002, 30, n° 3, pp. 1277-1291, doi : [10.1109/TPS.2002.801600](https://doi.org/10.1109/TPS.2002.801600).
- DE VOGELAERE R., « Methods of integration which preserve the contact transformation property of the Hamiltonian equations », *Report No. 4*, (Dept. Math., Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, USA), 1956, url : <https://curate.nd.edu/show/6395w665s0q>.
- WALLER P., *Modélisation numérique de l'interaction et diagnostic expérimental du faisceau d'électrons dans un Tube à Ondes Progressives spatiales*, thèse de doctorat, (Université de Paris 7), 1999.
- WALKER G. B., LAHOZ D. G. et WALKER G., « Measurement of the Abraham force in a barium titanate specimen », *Can. J. Phys.*, 1975, 53, pp. 2577-2586.
- WATKINS D. A., *Topics in Electromagnetic Theory*, (John Wiley & Sons, New York), 1958.
- WATSON G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge), 1922.
- WEBBER S. E., « Large signal analysis of the multicavity klystron », *IRE Trans. Electron Devices*, 1958, 5, n° 4, pp. 98-108, doi : [10.1109/T-ED.1958.14438](https://doi.org/10.1109/T-ED.1958.14438).
- WEILAND T. et al, « MAFIA Version 4 », *AIP Conf. Proc.*, 1997, 391, pp. 65-70, doi : [10.1063/1.52369](https://doi.org/10.1063/1.52369).
- WONG P. Y., CHERNIN D. et LAU Y. Y., « Modification of Pierce's Classical Theory of Traveling-Wave Tubes », *IEEE Electron Dev. Lett.*, 2018, 39, pp. 1238-1241, doi : [10.1109/LED.2018.2851544](https://doi.org/10.1109/LED.2018.2851544).
- YAGHJIAN A. D., *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere, Updating the Lorentz-Abraham Model*, (Springer, New York, NY), 2006.
- ZAK J., « Finite Translations in Solid-State Physics », *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19, n° 24, pp. 1385-1387, doi : [10.1103/PhysRevLett.19.1385](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1385).
- ZEKRI S., *Approche Hamiltonienne de la Turbulence Faible de Langmuir*, thèse de doctorat, (Université de Provence, Aix-Marseille I), 1993.

Résumé

On s'intéresse à l'interaction onde-particule au travers d'une description N -corps (souvent jugée difficile à mettre en œuvre à cause du nombre de degrés de libertés mis en jeu). L'évolution de notre système repose sur un hamiltonien composé de la partie électromagnétique $\int_V (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) / 2 dV$, de la partie particules $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|^2 / (2m)$ et d'une partie de charge d'espace. Pour les guides d'onde périodiques, nous employons une technique de réduction, appelée le « modèle discret », pour diminuer drastiquement le nombre de degrés de libertés. Ce modèle décompose les champs électromagnétiques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n V_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ avec des amplitudes temporelles et des formes de champs dépendant de la géométrie de la structure. Cette même technique permet d'obtenir des termes de couplage lisses rendant possible l'utilisation de macro-particules. Notre hamiltonien est ré-exprimé avec le modèle discret pour obtenir une théorie N -corps auto-cohérente unidimensionnelle capable de décrire les effets non-linéaires (oscillations, piègeages et chaos) de l'interaction onde-particule en domaine temporel.

En appliquant le théorème de Noether, nous étudions aussi l'échange de moment canonique à l'origine de l'interaction. Une reformulation de la puissance électromagnétique en domaine temporel est proposée dans la représentation du modèle discret. De plus, notre théorie est validée analytiquement avec un modèle robuste de circuit équivalent. Nous étudions aussi une version tridimensionnelle de notre théorie reposant sur la géométrie hélicoïdale.

Notre hamiltonien sert de base à la construction d'un intégrateur numérique symplectique. Cet algorithme est utilisé pour modéliser diverses géométries de tubes à ondes progressives (du MHz au sous-THz, avec des tubes à hélice et à guides repliés, et longs de quelques centimètres à plusieurs mètres). Une validation de notre algorithme est réalisée avec des mesures expérimentales. Notre algorithme permet aussi l'étude de ces tubes, notamment des effets non-linéaire ainsi que la distorsion de signaux de télécommunication.

Finalement, nous montrons que, lorsque la vitesse de phase d'un champ électromagnétique n'est pas égale à la célérité de la lumière dans le vide, alors ce champ admet une quantité de mouvement mécanique et un moment conjugué distincts. Ce phénomène, au cœur de la controverse Abraham-Minkowski, n'avait été observé que dans les milieux diélectriques. Nous étendons sa portée aux guides d'ondes et aux plasmas et suggérons l'universalité de ce dilemme.

Abstract

We investigate the wave-particle dynamics using an N -body description (often deemed impossible due to the number of degrees of freedom involved). The evolution of our system rests on a hamiltonian composed of an electromagnetic part $\int_V (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) / 2 dV$, a particle part $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|^2 / (2m)$ and a space charge part. For periodic waveguides, we use a model reduction, called the “discrete model”, to drastically reduce the number of degrees of freedom. This model decomposes electromagnetic fields $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n V_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ and $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_n I_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ with time amplitudes and field shapes depending on the geometry. This technique enables us to obtain smooth coupling terms, enabling the use of macro-particles. Our hamiltonian is reformulated with the discrete model to obtain a one-dimensional N -body self-consistent theory able to describe non-linear effects (oscillations, trapping and chaos) of the wave-particle interaction in time domain.

Applying Noether's theorem, we investigate the canonical momentum exchange at the origin of the interaction. A reformulation of the electromagnetic power in time domain is proposed using the discrete model's representation. Moreover, our theory is validated analytically against a robust equivalent circuit model. We also investigate a tridimensional version of our theory resting on the helix geometry.

Our hamiltonian provides the basis to build a numerical symplectic integrator. This algorithm is used to simulate several traveling-wave tube geometries (for MHz to sub-THz, with helix and folded waveguide tubes, from centimeters to meters long). Our algorithm is benchmarked against experimental measurements. It also allows the investigation of nonlinear effects in tubes as well as the analysis of the distortion of telecommunication signals.

Finally, we demonstrate that, when the phase velocity of an electromagnetic field is not equal to the speed of light in vacuum, then this field has distinct kinematic and canonical momenta. This phenomenon, at the heart of the Abraham-Minkowski controversy, was only observed in dielectric materials so far. We extend its scope to vacuum waveguides and to plasmas, and we suggest its universality.