

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
ET UNIVERSIDAD DE SEVILLA

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601

Mathématiques et Sciences et Technologies

de l'Information et de la Communication

Spécialité : Mathématiques et leurs Interactions

Par

María CUMPLIDO CABELLO

**Sous-groupes paraboliques et généricité
dans les groupes d'Artin-Tits de type sphérique**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 3 septembre 2018.

Unité de recherche : UMR 6625 du CNRS (Institut de Recherche Mathématique de Rennes)

UFR Mathématiques /

Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla

Rapporteurs avant soutenance :

Ruth CHARNEY

François DIGNE

Professor, Brandeis University

Professeur émérite, Université de Picardie

Composition du Jury :

Président : Ivan MARIN

Professeur, Université de Picardie

Examineurs : Tara BRENDLE

François DIGNE

Eddy GODELLE

Juan GONZÁLEZ-MENESES

Juan SOUTO

Professor, University of Glasgow

Professeur émérite, Université de Picardie

Professeur, Université de Caen

Profesor titular, Universidad de Sevilla

Directeur de recherche, CNRS, Université de Rennes 1

Dir. de thèse : Bert WIEST

Co-dir. de thèse : Juan GONZÁLEZ-MENESES

Maitre de conférences, Université de Rennes 1

Profesor titular, Universidad de Sevilla

Remerciements

These acknowledgements are written in the four languages I use to communicate with the people to whom I want to express my gratitude.

A lo largo de estos tres años de doctorado, han sido muchas las personas que me han apoyado, que me han dado fuerzas para continuar, me han hecho ver lo que quiero y lo que no quiero ser y que me han hecho crecer en todos los aspectos de mi vida. Todas ellas, en mayor o menor proporción, han contribuido a que pudiera llevar esta tesis a cabo, y por eso las siguientes líneas son para ellas.

First of all, I want to thank my advisors, Bert Wiest and Juan González-Meneses, for their dedication, availability and generosity. Bert, merci pour m'avoir donné l'opportunité de venir travailler à Rennes et pour m'avoir accueillie dans un pays étranger, merci de te soucier de moi dans les moments difficiles, et pour affronter le stress avec autant de sympathie. Juan, nos conocemos desde hace ocho años, y tengo tantas cosas que agradecerle que no sé por dónde empezar. Gracias por confiar en mí y abrirme las puertas de la investigación científica y de los grupos de trenzas, por sacar siempre un rato para hablar aunque no tuvieras tiempo, por tranquilizarme cuando los nervios podían conmigo, por preocuparte en que mejore. Gracias por tu nobleza y tu saber estar, por ser una persona que todos sentimos cercana y buena. Gracias por ser mi mentor, mi padre y mi amigo.

Besides my advisors, I thank my thesis committee : Prof. Tara Brendle, Prof. Eddy Godelle, Prof. Ivan Marin, Prof. Juan Souto and especially Prof. François Digne, (together with Prof. Ruth Charney, the referees of this thesis) has helped considerably to improve it.

Moving to another city and starting over can be something really difficult. I am lucky to have found people that made this process easier. Nèstor, gracias por ser uno de los primeros en descubrirme la vida rennesa, por aconsejarme, por ser tan divertido a la vez que tranquilo y gracias por los frisbees. Türkü, my first office mate, you know very well how difficult living in Northern France might be for a Mediterranean girl. Thanks for our conversations in which, despite our limited English, we could understand that we were feeling similar things. Thanks for making me feel that I was not alone and for sharing your emotions, your joy and sadness in a trully unique way. Fede, grazie di aprirmi, con Türkü e con Christian, le porte di casa tua quando ho avuto bisogno. Grazie per la tua risata sorda e il benessere che gravita in torno a te, per essere un genio che tutti vogliono bene. Io quando sarò grande voglio essere come te. Christian, merci pour tes valeurs, pour rendre le monde un peu meilleur avec calme et humilité, et pour tes commentaires toujours au moment précis. On continuera à lutter pour que les restaurants français arrêtent de penser que les végétariens mangent du poisson. Elisa, gracias por ser la mujer libre, fuerte y brillante que eres, por ser luchadora y decir siempre lo que quieres y lo que te molesta, por trabajar activamente y dar la cara por una sociedad más igualitaria y feminista, porque se me ocurren pocos referentes mejores que tú y porque tu amistad, tus consejos, tus historias y tu comprensión son un tesoro. Axel, ce n'est pas important si c'est trop long. Merci pour tout le bonheur partagé dans autant de restaurants, surtout dans les crêperies. Merci pour avoir essayé de réparer mon vélo et désolée pour l'amende ! Je te remercie pour Fargo, Disney et Astérix, pour être un exemple de dépassement de soi et parce que "tu est pas mal". Et surtout, merci d'être dans les moments dont j'ai eu besoin et pour faire des efforts

pour me comprendre. Tu est mon français préféré.

Vincent, merci parce que à tes côtés on est toujours bien, et à Yvan, pour ses cheveux de princesse. À Youenn, pour un jour de badminton exceptionnel. À Arame, ma chère cobureau, pour son énorme sourire et son énorme coeur, et pour être une femme courageuse qui traverse le monde pour accomplir ses rêves. À Thi, pour être la personne à qui une bière profite le plus, à Camille, pour avoir eu avec Thi l'idée d'apporter des gâteaux au Pampers. Gracias a Jesús David por regalarme ese bello libro. À Olivier pour son avion en papier. Thanks to Olga and Valente, for our evenings this last year. À Damien et Charles, car les écouter parler de politique et de leur compromis social si calmement est délicieux. À Arnaud, pour être la piplette clé de l'IRMAR, et à Ophélie, pour supporter mon intensité. À Andrés, José Andrés, Felipe, Ana María, Tiago, Blandine, Tristan, Salomé, Loubna, Alexandre B., Cyril, Maycol, Carolina, Mercedes, Mario, merci. Je remercie aussi Barbara, pour organiser les apéros des mathématiciennes, et Nicoletta, pour se soucier de notre sécurité. Merci à Mariko, pour être si bonne avec moi dans ma première expérience comme professeur de TP et pour être un exemple de comment on peut concilier le professionnalisme avec la bonne humeur. Merci à Françoise, parce que ses bonjours de chaque matin m'ont fait me sentir partie de l'IRMAR. Je remercie Frank pour une agréable journée chez lui avec sa famille, et Victor, pour avoir toujours des choses intéressantes à partager avec tout le monde. Merci à Marie-Aude, car elle est toujours gentille et nous fait nous sentir comme une famille, à Nelly, Chantal, Hélène et à toute l'équipe administrative pour son efficacité et sa gentillesse. Merci à mes élèves, pour me rendre utile.

Gracias a Carmen F., por haber sido prácticamente mi hermana durante mi primer año en Rennes, gracias a Jessica, por haberlo sido durante el segundo, y gracias a mi hermana Marta, por haber sido mi amiga durante el tercero. A Xuxi, gracias por llenar de arte gaditano Rennes, aunque fuese por pocos meses. Carlos, gracias por ser mi apoyo andaluz con el que compartir las penas, por hacerme partícipe de tu crecimiento personal y, sobre todo, por querer activamente ser mi amigo. And thanks to Jonathan, for bringing positive energy into my life everytime I see him.

Gracias a todas las personas que el doctorado me ha permitido conocer y que ya tienen un hueco en mi memoria y en mi corazón. Gracias a mi abuelo académico Luis, por invitarme a Dijon y hacerme recuperar una pasión por las matemáticas que creía olvidada y por confiar en mí y brindarme la oportunidad de trabajar con él. A mi hermano académico Matthieu y a mi tío académico Bruno, por introducirme en la vida académica más allá del doctorado. A Rubén, por tantas conferencias juntos con nuestros grupos de Artin. Yago, gracias porque a pesar de los conciertos y la natación, tuviste tiempo para invitarme a Madrid e interesarte por mis cositas matemáticas. Pep, gracias por tu palabras de ánimo y tu interés en mi carrera, por ser tan bueno, simpático y compartir tu sabiduría friki con el mundo. A Laura, porque es fácil quererte (y por un día maravilloso en Nueva York). A Julio, porque descubrir a personas como él me hace tener fe en la humanidad. A Bruno, Aitor y Federico, porque subir al Glacier 3000 con vosotros ha sido de las cosas más chulas que he hecho en mucho tiempo. Thanks to Roman for being such a special person and taking such amazing pictures. Thanks to Benjamin, for showing that Bielefeld exists. Gracias Sheila, porque nuestro reencuentro fue un regalo del destino y me alegro de tenerte en mi vida de nuevo. A todos los que han hecho que las conferencias y mis escapadas académicas en el extranjero hayan sido mejores, gracias.

Gracias a mis amigos en la distancia, que siempre permanecen. À ma chère Gianna, parce que je sais que je peux compter toujours sur elle. Al mio caro Simone, perche ti sento sempre vicino e non ti dimentichi di me. A Alejandro, porque aunque todo cambie, espero que siempre haya un vínculo de amistad que nos una.

Gracias a toda la gente del Departamento de Álgebra de Sevilla, que hace que siempre sea el lugar a donde quiero volver. En general, gracias al grupo de whatsapp lunch time, por tanto material de entretenimiento. Gracias a mi sis Marithania, por ser la compañera de conferencia preferida (nadie más canta coplas y canciones de catequesis conmigo), por ser el mejor ejemplo a seguir, por sus consejos y por escuchar mis secretos y mis inseguridades. A Laura, porque gracias a ella mi primer año de doctorado en Sevilla fue mucho más divertido. A Helena, porque me ha enseñado que en esta vida hay que luchar por vivir donde te gusta y hacer las cosas que te apasionan, aunque sean pequeñas (y que se puede vivir sin conexión a internet). A Jorge, por ser una de las personas más guays que he conocido, y por compartir, junto con Alberto, referencias frikis de calidad. A Mayca, por ser una compañera de despacho tan alegre y simpática, con la que poder reír y compartir cualquier cosa. Gracias a Soto, por proveerme con nuevos pseudónimos como Miss Cumplido o MC, y a Tornero, por reemplazar mis miedos con palabras de ánimo. A Miguel, por inspirarnos con sus ideas y principios, y a Fernando, por ser simplemente auténtico e irremplazable, y porque seré fan suya hasta el fin de los tiempos. A Ramón, gracias por el sustantivismo y por ser un portugueseiro, por las imborrables horas de charla que nunca se agotan y por enseñarme que "robar" no es tan terrible. Gracias, por los gyntonics, las piscinas, los conciertos y los karaokes. A todos los que llenan el departamento de vida y de pasteles, Guadalupe, Alberto, Lola, Antonio, Luis, Paco, Sara, Mari Paz, Mari Cruz, gracias.

Por supuesto, a todas las demás personas que han hecho que me sienta tan afortunada de poder pasar mis estancias en Sevilla. A mi Álex, que es mi mejor amigo y la mejor persona con la que se puede vivir, que siempre tiene una anécdota divertida o unas palabras de cariño para cuando estoy triste. Álex, en los once años que han pasado desde que nos conocemos, y en estos tres años de tesis, todo han sido buenos momentos, en mis recuerdos contigo no cabe la melancolía, porque siempre estás presente, siempre a mi lado, acompañándome, sin juzgarme. Sora-nee, Ponysama, cada tontería, cada lágrima derramada en tu hombro, cada risa, cada pizza, cada sueño, cada frustración que compartimos hacen que seas una de las personas más importantes de mi vida, y no puedo más que darte las gracias por ser mi amigo. A Carmen, mi mejor amiga, la de los buenos consejos, la libertad personalizada, la que hace Galois "to flama" y triangula "to guapo", la que se lleva bien con todo el mundo pero quiere a unos pocos privilegiados. Gracias por estar para recogerme cada vez que me tropiezo con una piedra en el camino, aunque te desespere. Gracias por venir a verme a Rennes, por acompañarme a Polonia. Gracias por quererme en mis transiciones y por ser de las pocas personas que lo valoran y lo aprecian, por ayudarme a ser mejor. Gracias también a Gema, la mejor persona que he conocido durante estos tres años, por su empatía y sororidad, porque si todos fuesen como ella muchos de los problemas del mundo ya estarían resueltos. Gracias por escuchar mis aventuras y desventuras en tiempo real, por dejarme rondar a tus tortillas veganas, por ser tan divertida, tan auténtica, tan sincera y tan buena, por dejarme aprender tanto de ti y junto a ti. Estimado "cabeza" Miguel, simplemente tengo que decirle que agradézcole y congratúlome de nuestras interacciones, y de saber que el cotilleo ha de perdurar. A Ana Alicia, porque siempre te dice que sí a los planes. A Luis, gracias por tu apoyo y compañía, y porque verte crecer y convertirte

en investigador es realmente inspirador. A David, gracias por tantos ratitos de felicidad durante mi primer año de tesis, aunque muchos hayan tenido que ser textiles. A Dani, gracias por cuidarnos a mí y a mi Doña Bella de mis amores, por enseñarme que nunca es tarde para hacer lo que te gusta, que se pueden tener ocho oficios diferentes y que estar un poquito loco puede ser la clave de la felicidad.

Por último, gracias a mi familia. A la familia que se elige, por los que siento y de los que recibo tanto cariño : A mi tita María, mis titos Elena y Luis, a mi primo Luisete y mis primas Laura y María. De nuevo agradezco a mi hermana Marta, por esforzarse en comprenderme y apoyarme. A mis padres, Ana y Moisés, porque son los que soportan y sufren todas mis dudas, mis miedos y mis desilusiones, una y otra vez, a pesar de todas las cargas que llevan a las espaldas. Porque a ellos les debo mis valores y mis ideas, aunque luego diferamos en algunas de ellas, y a ellos les debo mi formación académica y personal. Gracias por quererme tanto y hacerlo sin atarme, apoyándome en mis viajes y decisiones laborales. A mi Tita Elo, gracias por acogerme en su casa en Bilbao y transmitirme un poco de su maravillosa filosofía de vida. Y gracias a mi abuela Chari, que en estos tres años me ha enseñado que hay que ser feliz y hacer feliz a los demás en el momento presente, sin conformarse nunca con lo bueno que hicimos en el pasado, porque los recuerdos se deforman y pueden desaparecer en los próximos cinco minutos.

Table des matières

0	Introduction	1
0.1	Conjecture de généricité	3
0.2	Sous-groupes paraboliques de groupes d’Artin–Tits de type sphérique	5
0	Introducción	9
0.1	Conjetura de genericidad	11
0.2	Subgrupos parabólicos de grupos de Artin–Tits de tipo esférico	13
1	Définitions et résultats préliminaires	17
1.1	Structure de Garside	17
1.1.1	Formes normales	18
1.1.2	Ensembles sommitaux	20
1.2	Les groupes d’Artin–Tits	21
1.2.1	Sous-groupes paraboliques	23
1.2.2	Correspondance entre sous-groupes paraboliques et courbes	26
I	Conjecture de généricité	27
2	Conjecture de généricité dans des groupes modulaires	29
2.1	Le complexe de courbes	29
2.2	Proportion des éléments pseudo-Anosov	30
2.2.1	Démonstrations	31
2.3	Éléments pseudo-Anosovs dans des sous-groupes du groupe modulaire	32
3	Conjecture de généricité dans des groupes d’Artin–Tits	35
3.1	Complexe de longueur supplémentaire	35
3.2	Proportion des actions loxodromiques	36
3.2.1	Démonstrations	37
II	Sous-groupes paraboliques d’un groupe d’Artin–Tits de type sphérique	43
4	Standardisateur minimal d’un sous-groupe parabolique	45
4.1	Standardisation d’un système de courbes	46

4.1.1	Détection des points d'inflexion avec des coordonnées de Dynnikov . . .	46
4.1.2	Procédure de standardisation	49
4.2	Standardisation d'un sous-groupe parabolique	51
4.3	Complexité	54
5	Intersection de sous-groupes paraboliques	59
5.1	Résultats techniques et préliminaires	60
5.1.1	Structures de Garside alternatives	60
5.1.2	Résultats préliminaires pour les groupes d'Artin–Tits de type sphérique	60
5.1.3	Cyclages twistés et ensembles sommitaux	62
5.1.4	Conjugués positifs d'éléments dans un sous-groupe parabolique . . .	66
5.2	Résultats principaux	72
5.2.1	La clôture parabolique d'un élément arbitraire	72
5.2.2	Intersection de sous-groupes paraboliques	77
5.2.3	Le treillis des sous-groupes paraboliques	82
5.3	Complexe des sous-groupes paraboliques irréductibles	83
	Bibliographie	89

Introduction

OBÉLIX : Et pour prouver que nous sommes des dieux, tu veux que nous fassions toutes ces bêtises ?

CÉSAR : Pas exactement, tout ça est un peu démodé... Je vous ai préparé, avec l'aide de mes conseillers, une nouvelle série d'épreuves...

René Goscinny, *Les XII travaux d'Astérix*

Sommaire

0.1 Conjecture de généricité	3
0.2 Sous-groupes paraboliques de groupes d'Artin–Tits de type sphérique	5

Dans cette thèse on va étudier certaines propriétés des groupes de tresses et leurs généralisations. On peut définir une *tresse* à n brins (Artin, 1947) dans un cylindre, comme une collection des chemins disjoints (qui ne peuvent que descendre) liant n points en haut avec n points en bas (Figure 1). On dit que deux tresses sont équivalentes si on peut déformer continûment l'une vers l'autre. La multiplication de deux tresses se réalise de la façon suivante : on pose ses cylindres correspondants l'un sur l'autre et on redimensionne verticalement (Figure 2).

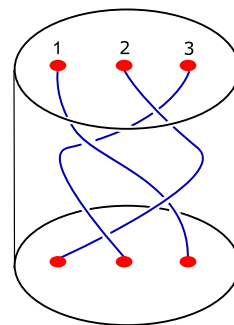


FIGURE 1 – Une tresse.

L'ensemble de classes d'équivalence des tresses à n brins avec la multiplication décrite s'appelle *groupe de tresses* à n brins, $\mathcal{B}_n$ (noté aussi A_{n-1}).

L'intérêt du groupe de tresses réside en raison notamment de sa versatilité au moment de le définir (Farb & Margalit, 2012, Chapitre 9). Si on projette les chemins qui représentent les brins d'une tresses sur le disque inférieur du cylindre, ces chemins définissent une manière de bouger les points à l'intérieur du disque. Cela nous amène à des définitions géométriques du groupe de tresses, de telle sorte que $\mathcal{B}_n$ peut être considéré comme le groupe fondamental de l'espace de configuration de n points dans le plan, ou comme le groupe modulaire ou *mapping class group* du disque avec n trous, $\mathcal{D}_n$. C'est-à-dire, $\mathcal{B}_n$ est défini comme le groupe d'automorphismes de $\mathcal{D}_n$ (à déformation continue près) qui fixent le bord et préservent l'orientation.

Par ailleurs, on peut aussi définir le groupe de tresses de façon complètement algébrique.

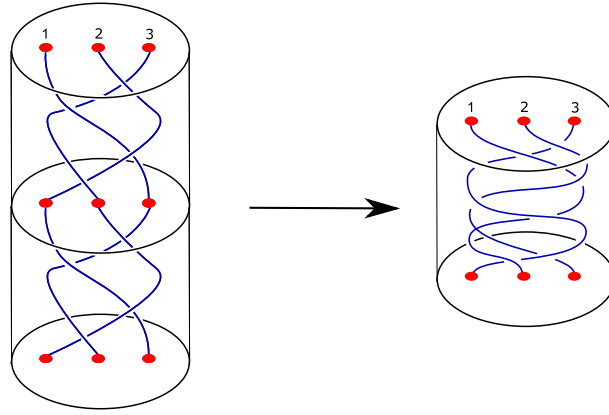


FIGURE 2 – Multiplication de deux tresses.

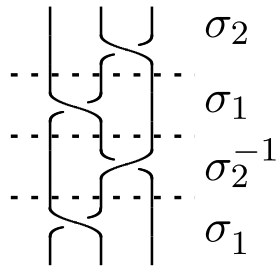


FIGURE 3 – Tresse de la Figure 1 séparée en croisements de brins consécutifs.

Remarquons que toute tresse peut être construite à partir de petites tresses élémentaires dans lesquelles il a seulement une paire de brins consécutifs qui se croisent (Figure 3).

Cela nous amène à définir, pour le groupe de tresses à n brins, un ensemble $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ où chaque σ_i (resp. σ_i^{-1}) est la tresse dans laquelle le brin à la i -ème position passe au-dessus (resp. au-dessous) du brin à la $i + 1$ -ème position. La présentation classique de $\mathcal{B}_n$ (Artin, 1947) utilise comme générateurs ces croisements :

$$\mathcal{B}_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \right. \right\rangle$$

Cela correspond précisément à la présentation d'un groupe d'Artin–Tits, et plus précisément d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. Dans le premier chapitre de cette thèse on va définir et étudier ce dernier type de groupes et une structure associée à eux. Cette structure dite de Garside a des bonnes propriétés et ça nous donne des outils pour travailler dans le groupe.

Ainsi, le groupe de tresses établit un lien entre les groupes modulaires et les groupes d'Artin–Tits. Il advient souvent qu'il y a des propriétés du groupe de tresses qui sont aussi valables pour les groupes d'Artin–Tits de type sphérique. Toutefois, la définition géométrique du groupe de tresses permet de faire des démonstrations de résultats qui ne peuvent pas se “transporter” aux groupes d'Artin–Tits. Par conséquent, essayer de généraliser ces résultats est une tâche non triviale. La première partie de cette thèse abordera la conjecture de généricité pour les groupes modulaires et sa conjecture analogue pour les groupes

d’Artin–Tits de type sphérique, qui disent que la “plupart” des éléments dans ces groupes ont une certaine propriété que l’on va voir tout à l’heure. Dans la deuxième partie on étudiera les sous-groupes paraboliques des groupes d’Artin–Tits de type sphérique, qui sont l’outil essentiel pour le procès de généralisation, puisqu’ils sont l’analogue des courbes simples fermées non-dégénérées dans les surfaces. Préalablement, on pourra trouver un chapitre avec des définitions fondamentales et résultats bien connus sur des groupes d’Artin–Tits et théorie de Garside. Les chapitres 2, 3, 4 et 5 correspondent respectivement aux articles suivants :

- María Cumplido, & Bert Wiest. 2018. A positive proportion of elements of mapping class groups is pseudo-Anosov. *Bull. Lond. Math. Soc.* **50**(3) 390–394.
- María Cumplido. 2019. On loxodromic actions of Artin–Tits groups *J. Pure Appl. Algebra.* **223** (1) 340–348.
- María Cumplido. 2018. On the minimal positive standardizer of a parabolic subgroup of an Artin–Tits group. *J. Algebraic Combin.* doi :10.1007/s10801-018-0837-z, à paraître.
- María Cumplido, Volker Gebhardt, Juan González-Meneses & Bert Wiest. 2017. On parabolic subgroups of Artin–Tits groups of spherical type. arXiv :1712.06727.

0.1 Conjecture de généricité

Soit $\mathcal{S}$ une surface. Le groupe modulaire de $\mathcal{S}$ se définit de la façon suivante :

Définition 0.1. Soit $\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})$ le groupe d’homomorphismes de $\mathcal{S}$ qui fixent point par point $\partial\mathcal{S}$ (le bord de $\mathcal{S}$) et qui préservent l’orientation. On définit le *groupe modulaire* de $\mathcal{S}$, $\text{Mod}(\mathcal{S})$, comme

$$\text{Mod}(\mathcal{S}) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})).$$

C’est-à-dire, $\text{Mod}(\mathcal{S})$ est le groupe de classes d’isotopie des éléments de $\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})$, où les isotopies fixent le bord point par point.

Définition 0.2. On dit qu’une courbe dans $\mathcal{S}$ est non-dégénérée si elle n’est pas homotope soit à un point, soit à une composante de $\partial\mathcal{S}$. Un *système de courbes* est une collection de classes d’isotopie de courbes simples, fermées, non-dégénérées, deux à deux non-isotopes.

Théorème 0.3 (Classification de Nielsen-Thurston). *Si $f \in \text{Mod}(\mathcal{S})$, alors un de ces trois cas est satisfait :*

- f est périodique, i.e., f^k est l’identité pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
- f est réductible, i.e., il y a un système de courbes dans $\mathcal{S}$ préservé par f .
- f est pseudo-Anosov, i.e., il y a deux feuilletages mesurés transverses $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$ (voir *Farb & Margalit, 2012, Section 11.2*), et un scalaire λ tels que

$$g(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}, \lambda^{-1} \cdot \mu_s), \quad g(\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \cdot \mu_u)$$

La *conjecture de généricité* affirme que “la plupart” des éléments de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ sont pseudo-Anosov. Afin de préciser qu’est-ce que cela veut dire, on doit spécifier une façon de prendre un “élément aléatoire” dans $\text{Mod}(\mathcal{S})$.

Il y a au moins deux méthodes standard pour faire cela, toutes les deux concernant le graphe de Cayley Γ de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ par rapport à Σ .

Définition 0.4. Soit G un groupe muni d'une partie génératrice Σ . Le *graphe de Cayley* de G par rapport à Σ est noté $\Gamma(G, \Sigma)$. Ses sommets sont les éléments de G et il y a une arête orientée étiquetée par $s \in \Sigma$ entre $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$ si $g_1 \cdot s = g_2$.

On définit une métrique dans un graphe de Cayley Γ , en fixant la longueur de chaque arête à 1. On définit la distance $d_\Gamma(a, b)$ entre deux sommets a et b comme la longueur minimale parmi les longueurs des chemins qui lient a et b dans Γ .

Prenons alors $\Gamma := \Gamma(\text{Mod}(\mathcal{S}), \Sigma)$. Une première méthode pour donner une interprétation de genericité est d'effectuer une marche aléatoire dans Γ , en commençant par le sommet identité. Dans ce cadre, la conjecture affirmait que la probabilité d'obtenir un élément pseudo-Anosov tend (exponentiellement vite) vers 1 quand la longueur de la marche aléatoire tend vers l'infini. Cette conjecture a été prouvée et aussi généralisée bien au-delà du contexte des groupes modulaires, dans (Rivin, 2008; Maher, 2012; Sisto, n.d.).

Pour la deuxième méthode, considérons la boule $B_\Gamma(1, R)$ dans Γ ayant pour rayon R centrée en le sommet identité 1. Maintenant la conjecture affirme que la proportion des éléments pseudo-Anosov parmi les sommets de la boule tend vers 1 quand le rayon tend vers l'infini :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{éléments pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} = 1.$$

Cet affirmation est encore une conjecture malgré la démonstration faite dans (Caruso & Wiest, 2017) pour le groupe de tresses.

Le résultat principal du Chapitre 2 établit que pour un certain R suffisamment grand, la proportion d'éléments pseudo-Anosov est toujours positive :

Corollaire 2.5. *Si $\mathcal{S}$ est une surface fermée de genre plus grand que 1, alors*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{éléments pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} > 0.$$

On verra aussi que cette résultat se généralise à une grande famille de sous-groupes de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ (Théorème 2.13).

Il est naturel de se demander s'il y a des résultats similaires pour groupes d'Artin–Tits de type sphérique. Soit alors A un groupe d'Artin–Tits de type sphérique muni d'une partie génératrice Σ_A (voir Section 1.2). Le groupe A agit sur un complexe $\mathcal{C}_{AL}$ décrit dans (Calvez & Wiest, 2016) qui s'appelle complexe de longueur supplémentaire. Dans (Calvez & Wiest, 2016) il est aussi prouvé que si une tresse α agit sur $\mathcal{C}_{AL}$ loxodromiquement, c'est-à-dire, que si l'orbite de tout élément de $\mathcal{C}_{AL}$ par α est quasi-isométrique aux entiers, alors α est pseudo-Anosov. En fait, on croit qu'il s'agit d'une équivalence. Donc, si on note $\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL})$ l'ensemble des éléments de A qui agissent loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$, on peut conjecturer :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|}{|B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|} = 1.$$

Cette conjecture a été démontré par (Calvez & Wiest, 2017), même pour la version qui utilise de marches aléatoires. Cependant, la conjecture n’est prouvée que pour une partie génératrice spécifique, à savoir celle dite “de Garside” (l’ensemble des éléments simples au sens du Chapitre 1). Dans le Chapitre 3 on étudiera la généricité d’éléments loxodromiques dans un cadre plus général, à savoir pour un sous-groupe G de A et pour toute partie génératrice finie Σ de G .

Dans le Lemme 3.6 on donne une condition pour que les boules de $\Gamma(G, \Sigma)$ ayant un rayon suffisamment grand aient une proportion positive des éléments agissant loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$. Ce résultat est plus faible que la conjecture de généricité, mais il est valable pour tout système de générateurs. Le résultat principal du chapitre montre que cette condition est satisfaite pour les groupes d’Artin–Tits de type sphérique irréductibles (voir Figure 1.1), pour ses sous-groupes colorés et pour certains de ses sous-groupes commutateurs :

Théorème 3.4 *Soit G un groupe d’Artin–Tits de type sphérique irréductible, son sous-groupe coloré (voir Définition 1.26) ou le sous-groupe commutateur de $I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n ou H_n (voir classification dans la Figure 1.1). Soit Σ une partie génératrice quelconque de G . Alors on a que*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|}{|B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|} > 0$$

0.2 Sous-groupes paraboliques de groupes d’Artin–Tits de type sphérique

Prenons un système de courbes dans $\mathcal{D}_n$. Remarquons qu’ici la condition d’être non-dégénérée implique que les courbes contiennent plus d’un mais pas tous les points du disque. D’après la théorie de Nielsen–Thurston (Thurston, 1988), on peut décomposer une tresse le long d’un système de courbes invariantes afin que chacune des composantes soit ou bien périodique, ou bien pseudo-Anosov. Le cas le plus simple apparaît quand le système est standard.

Définition 0.5. Une courbe simple et fermée dans $\mathcal{D}_n$ est dite *standard* si elle est isotope à un cercle ayant son centre sur l’axe réel. Un système de courbes est dit standard s’il n’est composé que de classes d’isotopie de courbes standard.

Quand on conçoit une tresse comme un automorphisme de $\mathcal{D}_n$, on a une action naturelle sur les systèmes de courbes (Figure 4).

Dans (Lee & Lee, 2008), il est montré que pour tout système de courbes $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}_n$ il existe une unique tresse positive et minimale qui transforme $\mathcal{C}$ dans un système standard. Dans la première partie du Chapitre 4 on donne un algorithme pour calculer cet élément appelé *standardisateur minimal*. Cet algorithme (Algorithme 1) est inspiré par l’algorithme de Dynnikov et Wiest pour calculer une tresse étant donné son diagramme de courbes (Dynnikov & Wiest, 2007) et les modifications faites dans (Caruso, 2013) par Sandrine Caruso. Il a pour entrée le système de courbes décrit de façon très efficace, en termes de ses coordonnées de Dynnikov réduites (Dehornoy *et al.*, 2008, Chapitre 7). Sa complexité computationnelle est $O(n^2 m \log(m))$, où m est la somme des valeurs absolues des coordonnées de $\mathcal{C}$.

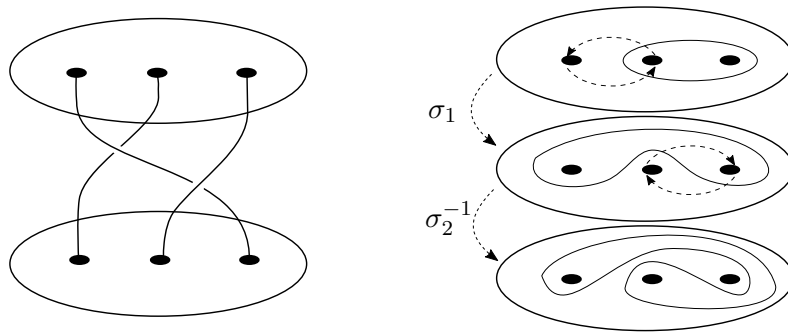


FIGURE 4 – La tresse $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ et comment elle agit sur une courbe dans $\mathcal{D}_3$.

Les sous-groupes paraboliques de groupes d'Artin–Tits de type sphérique sont les analogues des systèmes de courbes non-imbriquées. Non-imbriqué veut dire que les courbes ne s'entourent pas les unes les autres. Observons que, dans le cadre des systèmes de courbes non-imbriquées standard, on peut associer à chaque système l'ensemble de générateurs (les croisements de brins consécutifs) entourés par les courbes du système (Figure 5). Cela nous ramène à la définition de *sous-groupe parabolique standard*, A_X , du groupe de tresses, qui est tout simplement le sous-groupe engendré par un sous-ensemble $X \subseteq \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$.

Remarquons que toute courbe simple fermée c peut être définie comme une courbe standard c' déformée par une tresse α . Supposons que A_X est le sous-groupe parabolique standard associé à la classe d'isotopie de c' . Alors, déformer c' par α se traduit en conjuguer A_X par α . Cela nous permet de définir le sous-groupe parabolique associé à c comme $P := \alpha A_X \alpha^{-1}$. Ainsi, on définit un *sous-groupe parabolique* comme le conjugué d'un sous-groupe parabolique standard. Comme nous le verrons plus tard, cette définition est étendue à tous les groupes d'Artin–Tits de type sphérique.

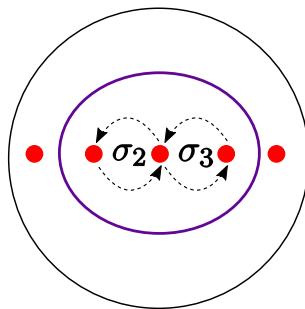


FIGURE 5 – Le sous-groupe parabolique associé à la courbe est celui engendré par $\{\sigma_2, \sigma_3\}$

Dans la deuxième partie du Chapitre 4 on donne un algorithme Théorème 4.20 pour calculer le standardisateur minimal d'un sous-groupe parabolique dont l'existence et unicité seront prouvées par construction. Cet algorithme est basé sur le calcul de la forme normale d'un élément, z_P , appelé élément central de Garside (Définition 1.35). Ce calcul est de complexité quadratique dans la longueur canonique (Définition 1.11) de z_P . De plus, on démontre que l'ensemble des standardisateurs minimaux d'un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique est un treillis (Corollaire 4.23).

Dans le Chapitre 5 on définira le complexe des sous-groupes paraboliques irréductibles

(ceux qui correspondent à une seule courbe) en tant qu'extension du complexe de courbes :

Définition 5.40. Soit A_S un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. On définit le *complexe de sous-groupes paraboliques irréductibles* comme un complexe simplicial dans lequel un simplexe de dimension d est un ensemble $\{P_0, \dots, P_d\}$ de sous-groupes paraboliques tels que les éléments centraux de Garside z_{P_i} et z_{P_j} (Définition 1.35) commutent pour tout $0 \leq i, j \leq d$.

Comme nous l'avons déjà dit, cet ensemble constituerait un bon outil de travail lorsqu'on généralise des résultats obtenus en travaillant avec le complexe de courbes. Le complexe de courbes a une propriété très importante, la δ -hyperbolicité.

Définition 0.6. On dit qu'un espace métrique est δ -hyperbolique si tout triangle composé de géodésiques est δ -fin. C'est-à-dire, si pour chacun de ces triangles, tout côté est contenu dans la réunion des δ -voisinages des deux autres côtés (voir Figure 6).

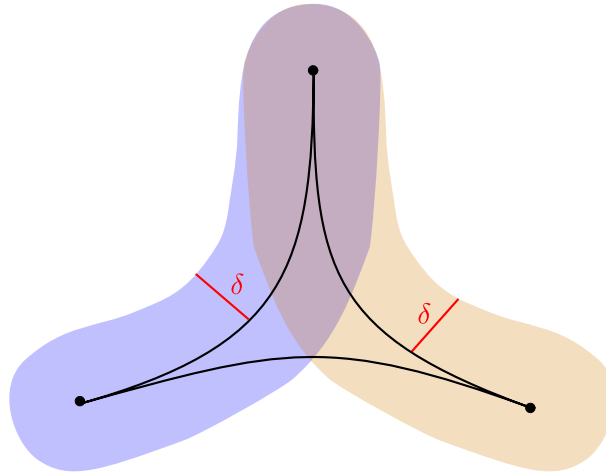


FIGURE 6 – Triangle δ -fin.

Ainsi donc, on conjecture que notre nouveau complexe a aussi cette propriété :

Conjecture 5.41 *Le complexe de sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique est δ -hyperbolique.*

Le résultat principal du chapitre montre que l'intersection de sous-groupes paraboliques est un sous-groupe parabolique :

Théorème 5.34. *Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. Alors $P \cap Q$ est aussi un sous-groupe parabolique.*

Ce théorème apparemment simple n'est pas du tout trivial et constitue un outil intéressant lors de la traduction de techniques géométriques dans des groupes d'Artin–Tits. Sa preuve se fonde sur la Proposition 5.26, qui dit que pour tout élément α il existe un unique sous-groupe parabolique minimal P_α contenant α , qu'on appelle clôture parabolique. Le nom *clôture parabolique* vient de la théorie des groupes de Coxeter, d'où sort la théorie des groupes d'Artin–Tits. Dans un groupe de Coxeter (voir Section 1.2), la clôture parabolique d'un ensemble est l'intersection de tous les sous-groupes paraboliques contenant cet ensemble. On sait (Qi, 2007) que, si un groupe de Coxeter est de rang fini, cette intersection est un sous-groupe parabolique, donc elle est le plus petit sous-groupe parabolique (par rapport à l'inclusion) contenant l'ensemble.

Pour montrer le [Théorème 5.34](#) on passe par deux résultats intéressants concernant les clôtures paraboliques des puissances d'un certain élément :

Théorème 5.28. *Soit A_S un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. Si $\alpha \in A_S$ et m est un entier différent de zéro, alors $P_{\alpha^m} = P_\alpha$.*

Corollaire 5.29. *Soit A_S un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. Si α appartient à un sous-groupe parabolique P , et $\beta \in A_S$ est tel que $\beta^m = \alpha$ pour un certain entier m différent de zéro, alors $\beta \in P$.*

Par ailleurs, le théorème nous permettra de montrer le résultat suivant :

Théorème 5.37. *L'ensemble des sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique forme un treillis par rapport à l'ordre partiel déterminé par l'inclusion.*

Introducción

*Bienvenidos al concierto, gracias por estar aquí.
Vuestro impulso nos hará seres eléctricos.*

Miguel Ríos, *Bienvenidos*

Sumario

0.1	Conjetura de genericidad	11
0.2	Subgrupos parabólicos de grupos de Artin–Tits de tipo esférico .	13

El propósito de esta tesis es estudiar propiedades y resultados de los grupos de trenzas y sus diferentes generalizaciones. Una *trenza* con n cuerdas (Artin, 1947) se puede definir como un conjunto de n caminos disjuntos en un cilindro que unen n puntos en el disco superior del cilindro con n puntos en el disco inferior y que además descenden monótonamente (Figura 1). Decimos que dos trenzas son iguales si podemos deformar continuamente una en la otra. La multiplicación de dos trenzas se realiza de la manera siguiente: ponemos los cilindros correspondientes uno encima del otro y reescalamos verticalmente (Figura 2).

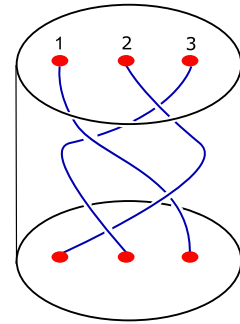


Figura 1 – Una trenza.

El conjunto de clases de equivalencias de las trenzas de n cuerdas junto con la multiplicación descrita forma el denominado *grupo de trenzas* con n cuerdas, $\mathcal{B}_n$ (denotado también A_{n-1}).

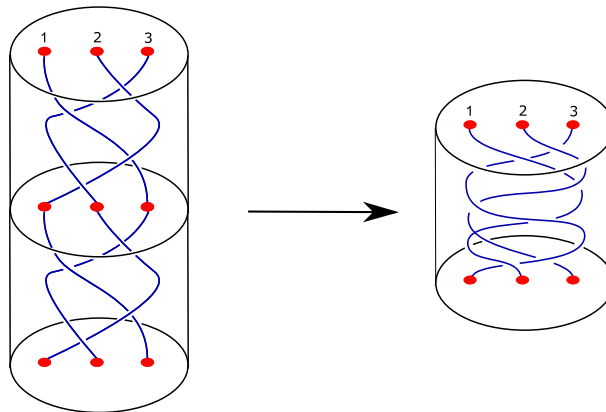


Figura 2 – Multiplicación de dos trenzas.

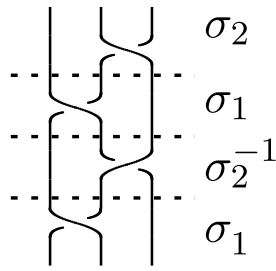


Figura 3 – Trenza de la Figura 1 separada en cruces de cuerdas consecutivas.

El interés del grupo de trenzas radica, entre otras razones, en su versatilidad a la hora de ser definido (Farb & Margalit, 2012, Chapter 9). Si proyectamos los caminos que representan las cuerdas de la trenza en el disco inferior, estos caminos definen una manera de mover los puntos dentro del disco. Esto nos lleva a definiciones geométricas del grupo de trenzas, de manera que $\mathcal{B}_n$ puede ser visto como el espacio de configuración de n puntos en el plano o como el grupo modular o *mapping class group* del disco con n agujeros, $\mathcal{D}_n$, es decir, el grupo de automorfismos de $\mathcal{D}_n$ (salvo deformación continua) que fijan el borde y preservan la orientación.

Por otra parte, también podemos definir el grupo de trenzas manera completamente algebraica. Nótese que toda trenza puede ser construída a partir de trenzas elementales en las cuales se cruza únicamente un par de cuerdas consecutivas (Figura 3). Esto nos lleva a definir, para el grupo de trenzas de n cuerdas, un conjunto $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ donde cada σ_i (resp. σ_i^{-1}) es la trenza en la que cuerda en la posición i pasa por encima (resp. por debajo) de la cuerda en la posición $i + 1$. La presentación clásica de $\mathcal{B}_n$ (Artin, 1947) utiliza como generadores estos cruces y es la siguiente:

$$\mathcal{B}_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \right. \right\rangle$$

Esta es precisamente la presentación de un grupo de Artin–Tits, y más precisamente, de un grupo de Artin–Tits de tipo esférico. En el primer capítulo de esta tesis definiremos y estudiaremos este último tipo de grupos y una estructura asociada a ellos. Esta estructura, denominada de Garside y nos provee de buenas herramientas para trabajar en el grupo.

Así pues, el grupo de trenzas constituye un nexo de unión entre los grupos modulares y los grupos de Artin–Tits. A menudo ocurre que muchas de las propiedades que se satisfacen para los grupos de trenzas, se satisfacen también para todos los grupos de Artin–Tits de tipo esférico. Sin embargo, la definición geométrica del grupo de trenzas da lugar a demostraciones de resultados que no se pueden “transportar” a los grupos de Artin–Tits. Por tanto, es un problema no trivial tratar de generalizar estos resultados. La primera parte de esta tesis tratará sobre la conjetura de genericidad para grupos modulares y su conjetura análoga para grupos de Artin–Tits de tipo esférico, las cuales estableces que “la mayoría” de elementos en estos grupos tienen una cierta propiedad, como veremos más adelante. La segunda parte se centrará en los subgrupos parabólicos de los grupos de Artin–Tits de tipo esférico, que son la herramienta esencial para el proceso de generalización, puesto que son el análogo de las curvas cerradas simples no generadas en las superficies. Previo a estas dos partes, el lector podrá encontrar un capítulo de conceptos fundamentales con resultados bien conocidos sobre grupos de Artin y teoría de Garside. Los capítulos 2, 3, 4

y 5 corresponden respectivamente a los siguientes artículos de investigación:

- María Cumplido, & Bert Wiest. 2018. A positive proportion of elements of mapping class groups is pseudo-Anosov. *Bull. Lond. Math. Soc.* **50**(3) 390–394.
- María Cumplido. 2019. On loxodromic actions of Artin–Tits groups *J. Pure Appl. Algebra.* **223** (1) 340–348.
- María Cumplido. 2018. On the minimal positive standardizer of a parabolic subgroup of an Artin–Tits group. *J. Algebraic Combin.* doi:10.1007/s10801-018-0837-z, por aparecer.
- María Cumplido, Volker Gebhardt, Juan González-Meneses & Bert Wiest. 2017. On parabolic subgroups of Artin–Tits groups of spherical type. arXiv:1712.06727.

0.1 Conjetura de genericidad

Sea $\mathcal{S}$ una superficie. El grupo modular de $\mathcal{S}$ se define de la siguiente manera:

Definición 0.1. Sea $\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})$ el grupo de homeomorfismos de $\mathcal{S}$ que dejan fijo punto a punto a $\partial\mathcal{S}$ (el borde de $\mathcal{S}$) y que preservar la orientación. Definimos el *grupo modular* de $\mathcal{S}$, $\text{Mod}(\mathcal{S})$, como

$$\text{Mod}(\mathcal{S}) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})).$$

Es decir, $\text{Mod}(\mathcal{S})$ es el grupo de clases de isotopía de los elementos de $\text{Homeo}^+(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S})$, donde las isotopías dejan fijo el borde punto a punto.

Definición 0.2. Decimos que una curva en $\mathcal{S}$ es no degenerada si no es homotópica a un punto o a una componente de $\partial\mathcal{S}$. Un *sistema de curvas* es una colección de clases de isotopía de curvas simples, cerradas, no degeneradas, no isotópicas dos a dos.

Teorema 0.3 (Clasificación de Nielsen-Thurston). *Si $f \in \text{Mod}(\mathcal{S})$, entonces uno de los tres casos siguientes se satisface:*

- f es periódico, i.e., f^k es la identidad para algún $k \in \mathbb{N}$.
- f es reducible, i.e., hay un sistema de curvas en $\mathcal{S}$ preservado por f .
- f es pseudo-Anosov, i.e., existen dos foliaciones transversales medibles $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$ (ver *Farb & Margalit, 2012, Sección 11.2*), y un escalar λ tales que

$$g(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}, \lambda^{-1} \cdot \mu_s), \quad g(\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \cdot \mu_u)$$

La *conjetura de genericidad* afirma que la “mayoría” de los elementos en $\text{Mod}(\mathcal{S})$ son pseudo-Anosov. Esencialmente hay dos maneras diferentes de dar un significado preciso a esta afirmación y ambas utilizan el grafo de Cayley de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ con respecto a uno de sus sistemas generadores, Σ .

Definición 0.4. Sea G un grupo con un sistema generador S . El *grafo de Cayley* de G con respecto a S se denota $\Gamma(G, S)$. Sus vértices son los elementos de G y existe una arista etiquetada por $s \in S$ entre $g_1 \in G$ y $g_2 \in G$ si $g_1 \cdot s = g_2$.

Dotamos de una métrica a un grafo de Cayley Γ , fijando la longitud de cada arista en 1. Definimos la distancia $d_\Gamma(a, b)$ entre dos vértices a y b como la mínima de las longitudes de los caminos que los unen en Γ .

Consideremos entonces $\Gamma := \Gamma(\text{Mod}(\mathcal{S}), \Sigma)$. El primer método consiste en efectuar una marcha aleatoria en Γ comenzando en el vértice trivial. En este caso la conjetura de genericidad afirma que cuando la longitud de la marcha tiende a infinito, la probabilidad de obtener un elemento pseudo-Anosov tiende a 1 (exponencialmente rápido). Esta conjetura ha sido probada y generalizada más allá de los grupos modulares (Rivin, 2008; Maher, 2012; Sisto, n.d.).

Para la segunda interpretación hemos de considerar la bola $B_\Gamma(1, R)$ en Γ de radio R centrada en el elemento trivial. En este caso se cree que la proporción de elementos de pseudo-Anosov dentro la bola tiende a 1 cuando R tiende a infinito:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{elementos pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} = 1.$$

Esta conjetura sigue abierta, salvo la prueba para el grupo de trenzas (Caruso & Wiest, 2017).

El resultado principal del Capítulo 2 establece que para un R suficientemente grande, la proporción de elementos pseudo-Anosov es siempre positiva:

Corolario 2.5 *Si $\mathcal{S}$ es una superficie cerrada de género mayor o igual que dos, entonces se tiene que*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{elementos pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} > 0.$$

También veremos que este resultado se cumple para una amplia familia de subgrupos de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ (Teorema 2.13).

Es natural preguntarnos si existen resultados similares para grupos de Artin–Tits de tipo esférico (ver Sección 1.2). Sea entonces A un grupo de Artin–Tits de tipo esférico equipado con un sistema de generadores Σ_A . A actúa sobre un complejo $\mathcal{C}_{AL}$ descrito en (Calvez & Wiest, 2016) y denominado complejo de longitud suplementaria. También en (Calvez & Wiest, 2016) se demuestra que si una trenza α actúa sobre $\mathcal{C}_{AL}$ loxodrómicamente, es decir, que si la órbita de todo elemento de $\mathcal{C}_{AL}$ por α es quasi-isométrica a los enteros, entonces α es pseudo-Anosov. De hecho, se cree que se da la equivalencia. Por tanto, si denotamos $\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL})$ al conjunto de elementos de A que actúan loxodromicamente sobre $\mathcal{C}_{AL}$, podemos conjeturar lo siguiente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|}{|B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|} = 1.$$

Esta conjetura fue probada en (Calvez & Wiest, 2017), incluso para la versión que utiliza marchas aleatorias. Sin embargo, la conjetura solo se prueba para un sistema de generadores específico, denominado “de Garside” (el conjunto de elementos simples indicado en

Capítulo 1). En el Capítulo 3 nos centraremos en estudiar la genericidad de elementos loxodrómicos de un subgrupo G de A para todo sistema generador finito Σ de G .

En el Lema 3.6 se da una condición para que las bolas en $\Gamma(G, \Sigma)$ con un radio suficientemente grande tengan una proporción positiva de elementos que actúan loxodrómicamente sobre $\mathcal{C}_{AL}$. Este resultado es más débil que la conjetura de genericidad, pero se cumple para todo sistema de generadores. El resultado principal del capítulo demuestra que esta condición se cumple para los grupos de Artin–Tits de tipo esférico irreducibles (que no tienen descomposición no trivial en producto directo; ver Figura 1.1), para sus subgrupos coloreados (Definición 1.26) y para algunos de sus subgrupos conmutadores:

Teorema 3.4 *Sea G un grupo de Artin–Tits de tipo esférico irreducible, su subgrupo coloreado (ver Definición 1.26) o el subgrupo conmutador de $I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n or H_n (ver clasificación en Figura 1.1). Sea Σ un sistema generador cualquiera de G . Entonces se tiene que*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|}{|B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|} > 0$$

0.2 Subgrupos parabólicos de grupos de Artin–Tits de tipo esférico

Consideremos un sistema de curvas en $\mathcal{D}_n$. Observemos que aquí la condición de curva no degenerada implica que estas contienen más de uno, pero no todos los puntos de $\mathcal{D}_n$. Según la teoría de Nielsen–Thurston (Thurston, 1988), podemos descomponer una trenza a lo largo de un sistema de curvas invariantes de manera que cada una de la componentes resultantes sea o bien periódica, o bien pseudo-Anosov. El caso más simple se da cuando el sistema resulta ser estándar.

Definición 0.5. Una curva simple y cerrada en $\mathcal{D}_n$ se dice *estándar* si es isotópica a un círculo centrado en el eje real. Un sistema de curvas se dice estándar si está compuesto únicamente por clases de isotopía de curvas estándar.

Cuando concebimos una trenza como un automorfismo de $\mathcal{D}_n$, se tiene una acción natural sobre los sistemas de curvas (Figura 4).

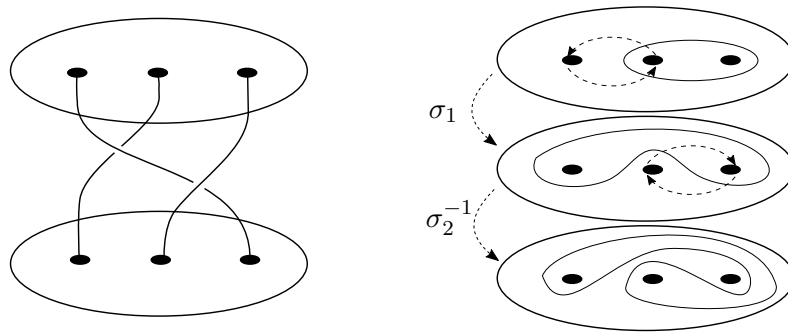


Figura 4 – La trenza $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ y cómo actúa sobre una curva en D_3 .

En (Lee & Lee, 2008), se prueba que para todo sistema de curvas $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}_n$ existe una única trenza positiva minimal que transforma $\mathcal{C}$ en un sistema estándar. En la primera parte del

Capítulo 4 se da un algoritmo para calcular este denominado estandarizador minimal. Este algoritmo (Algoritmo 1) está inspirado en el algoritmo de Dynnikov y Wiest para calcular la expresión de una trenza dado su diagrama de curvas (Dynnikov & Wiest, 2007) y en las modificaciones hechas en (Caruso, 2013) por Sandrine Caruso. Tiene como entrada el sistema de curvas descrito de manera muy eficiente con coordenadas de Dynnikov reducidas (Dehornoy *et al.*, 2008, Capítulo 7) y tiene complejidad $O(n^2 m \log(m))$, donde m es la suma de los valores absolutos de las coordenadas de $\mathcal{C}$.

Los subgrupos parabólicos de grupos de Artin-Tits de tipo esférico son los análogos algebraicos de los sistemas de curvas no-anidadas. Por no anidadas se entiende que las curvas no se rodean las unas a las otras. Obsérvese que podemos asociar a un sistema estándar, el conjunto de generadores (los cruces de cuerdas consecutivas) del grupo de trenzas rodeados por las curvas del sistema (Figura 5). Esto nos lleva a la definición de *subgrupo parabólico estándar*, A_X , del grupo de trenzas, que no es más que un subgrupo generado por un subconjunto $X \subseteq \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$.

Nótese que podemos definir cualquier curva simple cerrada c como una curva estándar c' deformada por una trenza α . Pongamos que A_X es el subgrupo parabólico estándar asociado a la clase de isotopía de c' . Entonces, deformar c' por α se traduce en conjugar A_X por α . De esta forma, podemos definir el subgrupo parabólico asociado a c como $P := \alpha A_X \alpha^{-1}$. Así, se define un *subgrupo parabólico* como el conjugado de un subgrupo parabólico estándar. Como veremos más adelante, esta definición se extiende a todo grupo de Artin-Tits de tipo esférico.

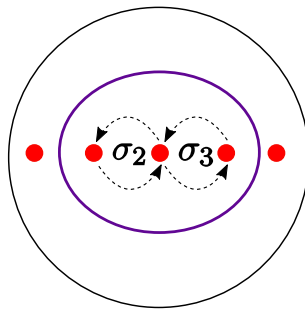


Figura 5 – El subgrupo parabólico asociado a la curva es el generado por $\{\sigma_2, \sigma_3\}$

En la segunda parte del Capítulo 4 se da un algoritmo (Teorema 4.20) para calcular el estandarizador minimal de un subgrupo parabólico P , cuya existencia y unicidad se prueban por construcción. Este algoritmo se basa en el cálculo de la forma normal de un elemento central, z_P , llamado elemento central de Garside (Definición 1.35). El cálculo tiene complejidad cuadrática en la longitud canónica (Definición 1.11) de z_P . Además, se demuestra que el conjunto de estandarizadores minimales de un subgrupo parabólico de un grupo de Artin-Tits de tipo esférico forma un retículo (Corolario 4.23).

En el Capítulo 5, definiremos el complejo de subgrupos parabólicos irreducibles (los que corresponden a una sola curva) como extensión del complejo de curvas:

Definición 5.40. Sea A_S un grupo de Artin-Tits de tipo esférico. Definimos el *complejo de subgrupos parabólicos irreducibles* como un complejo simplicial en el cual un símplice de

dimensión d es un conjunto $\{P_0, \dots, P_d\}$ de subgrupos parabólicos tales que los elementos centrales de Garside z_{P_i} y z_{P_j} (Definición 1.35) conmutan para todo $0 \leq i, j \leq d$.

Como hemos dicho anteriormente, este conjunto constituiría una buena herramienta de trabajo a la hora de generalizar resultados obtenidos al trabajar con complejos de curvas. El complejo de curvas tiene una propiedad muy importante, la δ -hiperbolicidad.

Definición 0.6. Decimos que un espacio métrico es δ -hiperbólico si cada triángulo formado por geodésicas es δ -fino. Es decir, si en cada uno de estos triángulos, cada lado está contenido en la unión de los δ -entornos de los otros dos lados (ver Figura 6).

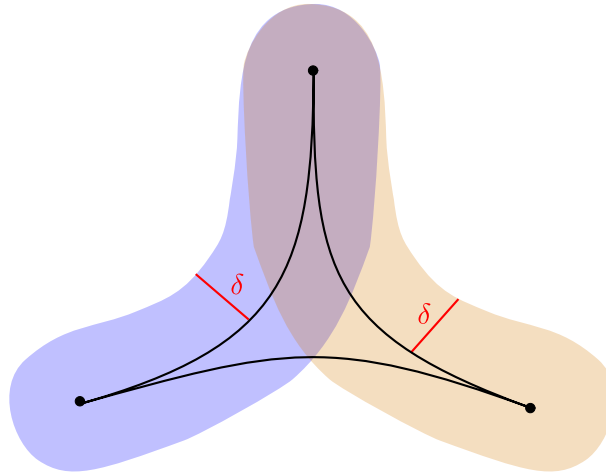


Figura 6 – Triángulo δ -fino.

Así pues, conjeturamos que nuestro nuevo complejo también tiene esta propiedad:

Conjetura 5.41. *El complejo de subgrupos parabólicos de un grupo de Artin–Tits de tipo esférico es δ -hiperbólico.*

El resultado principal de este capítulo demuestra que la intersección de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico:

Teorema 5.34. *Sean P y Q dos subgrupos parabólicos de un grupo de Artin–Tits de tipo esférico. Entonces $P \cap Q$ también es un subgrupo parabólico.*

Este teorema aparentemente simple no es nada trivial y constituye una herramienta interesante a la hora de traducir técnicas geométricas a grupos de Artin–Tits.

Su demostración se basa en probar que para todo elemento α existe un único subgrupo parabólico P_α que lo contiene, al que llamamos clausura parabólica (Teorema 5.26). El nombre de *clausura parabólica* viene de la teoría de los grupos de Coxeter, de la cual proviene la teoría de los grupos de Artin–Tits. En un grupo de Coxeter (ver Sección 1.2), la clausura parabólica de un conjunto es la intersección de todos los subgrupos parabólicos que contienen a este conjunto. Se sabe (Qi, 2007) que, si un grupo de Coxeter tiene rango finito, esta intersección es un subgrupo parabólico, así que es el subgrupo parabólico más pequeño (respecto a la inclusión) que contiene el conjunto.

Para probar el Teorema 5.34, pasamos por dos resultados interesantes sobre las clausuras parabólicas de las potencias de un elemento:

Teorema 5.28. *Sea A_S un grupo de Artin–Tits de tipo esférico. Si $\alpha \in A_S$ y m es un entero diferente de cero, entonces $P_{\alpha^m} = P_\alpha$.*

Corolario 5.29. *Sea A_S un grupo de Artin–Tits de tipo esférico. Si α pertenece a un subgrupo parabólico P , y $\beta \in A_S$ es tal que $\beta^m = \alpha$ para algún entero m diferente de cero, entonces $\beta \in P$.*

Por otra parte, el teorema nos llevará a probar el siguiente resultado:

Teorema 5.37. *El conjunto de subgrupos parabólicos de un grupo de Artin–Tits de tipo esférico forma un retículo con respecto al orden parcial determinado por la inclusión.*

Définitions et résultats préliminaires

- *Pues no sé, chico, yo no le veo más que ventajas a esto de ser intelectual.*

- *Pues entonces conviene que empecemos por el materialismo dialéctico. Por tener una base, ¿sabes?*

José Luis Cuerda, *Amanece que no es poco*

Sommaire

1.1	Structure de Garside	17
1.1.1	Formes normales	18
1.1.2	Ensembles sommitaux	20
1.2	Les groupes d'Artin-Tits	21
1.2.1	Sous-groupes paraboliques	23
1.2.2	Correspondance entre sous-groupes paraboliques et courbes	26

Dans toute cette thèse, on étudiera différents propriétés des groupes d'Artin-Tits de type sphérique et, plus précisément, des groupes de tresses. Il est bien connu que ces groupes ont structure de Garside. Ce chapitre est consacré aux définitions et résultats classiques dont on aura besoin. On verra aussi des résultats spécifiques sur les sous-groupes paraboliques, puisqu'on les utilisera dans plusieurs chapitres.

1.1 Structure de Garside

On dit que G est un *groupe de Garside* avec structure de Garside (G, G_+, Δ) s'il admet un sous-monoïde G_+ d'éléments positifs tel que $G_+ \cap G_+^{-1} = \{1\}$ et un élément spécial $\Delta \in G_+$, appelé *élément de Garside*, satisfaisant les conditions suivantes :

- Il existe une relation d'ordre partiel dans G , $\preceq$, définie par $a \preceq b \Leftrightarrow a^{-1}b \in G_+$ telle que pour tout $a, b \in G$ il y a un unique pgcd $a \wedge b$ et un unique ppcm $a \vee b$. Cet ordre est appelé *ordre préfixe* (on dit que a est un préfixe de b) et il est invariant par multiplication à gauche.
- L'ensemble $[1, \Delta] = \{a \in G \mid 1 \preceq a \preceq \Delta\}$ s'appelle ensemble d'*éléments simples* et il engendre G .
- $\Delta^{-1}G_+\Delta = G_+$.
- Le monoïde G_+ est atomique. Cela veut dire que si on définit l'ensemble d'*atomes* de G_+ comme l'ensemble des éléments $a \in G_+$ qui ne sont pas décomposables, i.e.,

tels qu'il n'y a pas des $b, c \in G_+$ non-triviaux tels que $a = bc$, alors pour tout $x \in G_+$ le nombre d'atomes de la forme a_i dans la décomposition $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ est borné supérieurement.

Le monoïde G_+ induit une autre relation d'ordre partiel invariante par multiplication à droite, l'ordre *suffixe*, $\succ$. Cet ordre est défini par $a \succ b \Leftrightarrow ab^{-1} \in G_+$ (on dit que b est un suffixe de a), et pour tout $a, b \in G$ il existe un unique pgcd ($a \vee^\dagger b$) et un unique ppcm ($a \wedge^\dagger b$).

Exemple 1.1. La structure de Garside classique pour le groupe de tresses B_n est (B_n, B_n^+, Δ_n) où

$$\Delta_n = \sigma_1 \vee \cdots \vee \sigma_{n-1} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1.$$

Dans ce cadre, les éléments simples sont aussi appelés *tresses de permutation* (Elrifai & Morton, 1994), car l'ensemble des tresses simples est en correspondance bijective avec l'ensemble des permutations de n éléments.

Remarque 1.2. Observons que $G_+ \Delta = \Delta G_+$ implique que l'ensemble de préfixes de Δ coïncide avec son ensemble de suffixes.

Notation 1.3. La conjugaison de x par Δ sera notée

$$\tau(x) = \Delta^{-1} x \Delta.$$

Définition 1.4. On dit qu'un groupe G muni d'une structure de Garside est de *type fini* si son ensemble d'éléments simples $[1, \Delta]$ est fini.

1.1.1 Formes normales

Les formes normales sont des façons uniques d'écrire un élément et servent, par exemple, à résoudre le problème du mot. Elles sont très utiles et on les utilisera de manière récurrente.

Définition 1.5. On définit le *complément à droite* d'un élément simple a par $\partial(a) = a^{-1} \Delta$ et son *complément à gauche* par $\partial^{-1}(a) = \Delta a^{-1}$.

Remarque 1.6. Observons que $\partial^2 = \tau$ et remarquons que, si a est simple, alors $\partial(a)$ est aussi simple, c'est-à-dire, $1 \preceq \partial(a) \preceq \Delta$. Ceci car $\partial(a) \tau(a) = \partial(a) \Delta^{-1} a \Delta = \Delta$ et car $\partial(a)$ et $\tau(a)$ sont positifs.

Définition 1.7. Étant donné deux éléments simples a, b , on dit que son produit $a \cdot b$ est *pondéré à gauche* (resp. *pondéré à droite*) si $ab \wedge \Delta = a$ (resp. $ab \wedge^\dagger \Delta = b$). Cela revient à dire que $\partial(a) \wedge b = 1$ (resp. $a \wedge^\dagger \partial^{-1}(b) = 1$).

Définition 1.8. On dit que l'écriture $\Delta^k x_1 \cdots x_r$ d'un élément x est en *forme normale à gauche* si $k \in \mathbb{Z}$, $x_i \notin \{1, \Delta\}$ est un élément simple pour $i = 1, \dots, r$, et $x_i \cdot x_{i+1}$ est pondéré à gauche pour $0 < i < r$.

De façon analogue, $x_1 \cdots x_r \Delta^k$ est en *forme normale à droite* si $k \in \mathbb{Z}$, $x_i \notin \{1, \Delta\}$ est un élément simple pour $i = 1, \dots, r$, et $x_i \cdot x_{i+1}$ est pondéré à droite pour $0 < i < r$.

Proposition 1.9 (Dehornoy & Paris, 1999, Corollary 7.5). *Les formes normales à gauche et à droite sont uniques.*

Remarque 1.10. Soient $\Delta^k x_1 \cdots x_r$ et $y_1 \cdots y_{r'} \Delta^{k'}$ les formes normales à gauche et à droite d'un élément x . D'un côté, $k = \max\{p \mid \Delta^p \preccurlyeq x\}$ et $k + r = \min\{p \mid x \preccurlyeq \Delta^p\}$. D'un autre côté $k' = \max\{p \mid x \succcurlyeq \Delta^p\}$ et $k' + r' = \min\{p \mid \Delta^p \succcurlyeq x\}$. Nous affirmons que $k = k'$ et $r = r'$.

En effet, remarquons que $\Delta^m \preccurlyeq x$ si et seulement si $x = \Delta^m x'$, $x' \in G_+$, qui est équivalent à $x = (\Delta^m x' \Delta^{-m}) \Delta^m$. Comme $\Delta^m x' \Delta^{-m} \in G_+$, on obtient $x \succcurlyeq \Delta^m$. Donc, $k = k'$. De façon similaire, $k + r = k' + r'$ car $x \preccurlyeq \Delta^m$ si et seulement si $\Delta^m \succcurlyeq x$ (Remarque 1.2).

Définition 1.11. Soient $\Delta^k x_1 \cdots x_r$ et $y_1 \cdots y_{r'} \Delta^{k'}$ les formes normales à gauche et à droite d'un élément x . On définit l'*infimum*, la *longueur canonique* et le *suprémum* de x respectivement par $\inf(x) = k$, $\ell(x) = r$ and $\sup(x) = k + r$.

Définition 1.12. Si $x = \Delta^k x_1 \cdots x_r$ est en forme normale à gauche alors on définit le facteur initial et le facteur final de x comme $\iota(x) = \Delta^k x_1 \Delta^{-k}$ et $\varphi(x) = x_r$ respectivement. On dit que x est *rigide* si $\varphi(x)$ et $\iota(x)$ sont pondérés à gauche.

Proposition 1.13. (*Elrifai & Morton, 1994, Lemma 4.5*) Si $x = \Delta^k x_1 \cdots x_r$ est en forme normale à gauche alors

$$x^{-1} = \Delta^{-(k+r)} \partial^{-2(k-r+1)-1}(x_r) \partial^{-2(k-r+2)-1}(x_{r-1}) \cdots \partial^{-2k-1}(x_1)$$

est aussi en forme normale à gauche. De la même façon, si $x = x_1 \cdots x_r \Delta^k$ est en forme normale à droite, alors

$$x^{-1} = \partial^{2k+1}(x_r) \partial^{2(k+1)+1}(x_{r-1}) \cdots \partial^{2(k+r-1)+1}(x_1) \Delta^{-(k+r)}$$

est en forme normale à droite.

Outre les formes normales à gauche et à droite, on a les *formes normales mixtes*, introduites par Ruth Charney en 1995, qui seront aussi d'une grande utilité.

Définition 1.14. (*Charney, 1995, Théorème 2.6*) Soient $x = x_1 \cdots x_s y = y_1 \cdots y_t$ deux éléments positifs en forme normale à gauche, alors on dit que $\alpha = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1} y_1 \cdots y_t$ est en *forme normale négative-positive* si $x \wedge y = 1$. Soient $x = x_1 \cdots x_s y = y_1 \cdots y_t$ deux éléments positifs en forme normale à droite, alors on dit que $\alpha = x_1 \cdots x_s y_t^{-1} \cdots y_1^{-1}$ est en *forme normale positive-négative* si $x \wedge^\dagger y = 1$.

Si on écrit tout simplement $\alpha = x^{-1} y$ ou $\alpha = x y^{-1}$, on dira que la forme normale est *courte*.

Ces décompositions sont uniques et elles sont liées aux formes normales à gauche et à droite d'un élément α de la façon suivante : Si $x \neq 1$ et $y \neq 1$ alors $\inf(x) = \inf(y) = 0$; sinon il y aurait des annulations. Dans ce cas, si on écrit $x_i^{-1} = \partial(x_i) \Delta^{-1}$ pour $i = 1, \dots, s$, et on passe en conjuguant tous les Δ^{-1} à la gauche, on obtient $\alpha = \Delta^{-s} \tilde{x}_s \cdots \tilde{x}_1 y_1 \cdots y_t$, où $\tilde{x}_i = \tau^{-i}(\partial(x_i))$. Cette expression est précisément la forme normale à gauche de α . Si x est trivial, alors $\alpha = y_1 \cdots y_t$ où les premiers p facteurs peuvent être égaux à Δ , donc la forme normale à gauche est $\alpha = \Delta^p y_{p+1} \cdots y_t$. Si y est trivial, alors $\alpha = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}$ où il y a un certain nombre d'éléments (disons k) parmi les facteurs plus à droite qui peuvent être égaux à Δ^{-1} . La forme normale à gauche de α dans ce cas serait $\alpha = \Delta^{-s} \tilde{x}_s \cdots \tilde{x}_{k+1}$.

Notons que si $x \neq 1$ alors $\inf(\alpha) = -s$, et si $y \neq 1$ alors $\sup(\alpha) = t$.

La forme normale négative-positive peut être calculée à partir de toute décomposition de α de la forme $\alpha = \beta^{-1}\gamma$, où β et γ sont des éléments positifs : On aura juste besoin d'annuler $\delta = \beta \wedge \gamma$ au milieu (une méthode pour calculer le ppcm peut être trouvée dans (Gebhardt & González-Meneses, 2010a, Section 4.1.3)). Autrement dit, écrivons $\beta = \delta x$ et $\gamma = \delta y$; alors $\alpha = \beta^{-1}\gamma = x^{-1}\delta^{-1}\delta y = x^{-1}y$, où il n'y a plus d'annulations possibles. Finalement, pour obtenir la forme normale négative-positive de α , on calcule les formes normales à gauche de x et y .

Des raisonnements analogues s'appliquent pour la forme normale positive-négative et la forme normale à droite.

1.1.2 Ensembles sommitaux

Définition 1.15 (Elrifai & Morton (1994)). Soit $\Delta^k x_1 \cdots x_r$ avec $r > 0$ la forme normale à gauche de x . Le *cyclage* de x est défini par

$$\mathbf{c}(x) = \iota(x)^{-1}x\iota(x) = \Delta^k x_2 \cdots x_r \iota(x).$$

Le *décyclage* de x est $\mathbf{d}(x) = \varphi(x)x\varphi(x)^{-1} = \varphi(x)\Delta^k x_1 \cdots x_{r-1}$.

Si $r = 0$, on définit $\mathbf{c}(x) = \mathbf{d}(x) = x$.

Les cyclages et décyclages sont utilisés pour calculer des sous-ensembles importants de la classe de conjugaison d'un élément que l'on appelle *ensembles sommitaux*. Ces ensembles sont finis si l'ensemble des éléments simples est fini.

Définition 1.16. Étant donné $\alpha \in G$, on note α^G la classe de conjugaison de α dans G , et par $C^+(\alpha)$ l'ensemble des conjugués positifs de α .

Définition 1.17 (Garside, 1969). Étant donné $\alpha \in G$, l'*ensemble sommital* de α , noté $SS(\alpha)$, est l'ensemble de tous les conjugués de α avec infimum maximal.

Définition 1.18 (Elrifai & Morton, 1994; Picantin, 2001). Étant donné $\alpha \in G$, l'*ensemble super-sommital* de α , noté $SSS(\alpha)$, est l'ensemble de tous les conjugués de α avec infimum maximal et supremum minimal. De façon équivalente, $SSS(\alpha)$ est l'ensemble des conjugués de α avec longueur canonique minimale.

Définition 1.19 (Gebhardt, 2005, Définition 1.17). Étant donné $\alpha \in G$, l'*ensemble ultra-sommital* de α , noté $USS(\alpha)$, est l'ensemble de tous les éléments $\beta \in SSS(\alpha)$ tels que $\mathbf{c}^k(\beta) = \beta$ pour un certain $k > 0$.

Définition 1.20 (Lee, 2000). Soit α un élément dans un groupe de Garside G . L'*ensemble super-sommital réduit* de α est

$$RSSS(\alpha) = \{x \in \alpha^G : \mathbf{c}^k(x) = x = \mathbf{d}^t(x) \text{ pour des certains } k, t > 0\}.$$

Définition 1.21 (Birman et al., 2007, Définition 2.22). Soit α un élément dans un groupe de Garside G . L'*ensemble super-sommital stable* de α est $SU(\alpha) = \{x \in \alpha^G : x^m \in USS(x^m) \forall m \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 1.22. (Gebhardt & González-Meneses, 2010b, Définition 8) On définit le préfixe préféré de x comme

$$\mathbf{p}(x) = \iota(x) \wedge \iota(x^{-1}).$$

Le *glissement cyclique* de x se définit comme le conjugué de x par son préfixe préféré :

$$\mathbf{s}(x) = \mathbf{p}(x)^{-1} x \mathbf{p}(x).$$

Définition 1.23. (Gebhardt & González-Meneses, 2010b, Définition 9) L'ensemble de *circuits glissants* de x est défini par l'expression suivante :

$$SC(x) = \{y \in x^G \mid \mathbf{s}^m(y) = y \text{ for some } m \geq 1\}$$

Proposition 1.24 (Gebhardt & González-Meneses, 2010b, Proposition 2). Soit $x \in G$. Alors on a les inclusions suivantes

$$SC(x) \subseteq RSSS(x) \subseteq USS(x) \subseteq SSS(x) \subseteq SS(x)$$

1.2 Les groupes d'Artin-Tits

Soit $\Sigma = \{\sigma_i \mid i \in N = \{1, \dots, n\}\}$ une partie génératrice finie et $M = (m_{s,t})_{s,t \in N}$ une matrice symétrique, dite de Coxeter, avec $m_{s,s} = 1$ et $m_{s,t} \in \{2, \dots, \infty\}$ pour $s \neq t$. Le système d'Artin-Tits associé à M est (A, Σ) , où A est un groupe, dit *groupe d'Artin-Tits*, avec la présentation suivante :

$$A = \langle \Sigma \mid \underbrace{\sigma_s \sigma_t \sigma_s \dots}_{m_{s,t} \text{ éléments}} = \underbrace{\sigma_t \sigma_s \sigma_t \dots}_{m_{s,t} \text{ éléments}} \quad \forall s, t \in \Sigma, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty \rangle.$$

Remarque 1.25. Notons que dans les relations de la présentation précédente les générateurs apparaissent avec des exposants positifs, donc on peut définir A^+ comme le monoïde donné par la même présentation. En plus, A^+ se plonge sur A (Paris, 2002, Théorème 1.1). Ainsi, les générateurs de la forme σ_i sont des atomes. C'est pourquoi Σ est appelé partie génératrice *atomique*.

Si on ajoute à la présentation de A les relations σ_i^2 , on obtient le *groupe de Coxeter* W_A associé à (A, Σ) :

$$W_A = \langle \Sigma \mid s^2 = 1 \forall i \in \Sigma; \underbrace{\sigma_s \sigma_t \sigma_s \dots}_{m_{s,t} \text{ éléments}} = \underbrace{\sigma_t \sigma_s \sigma_t \dots}_{m_{s,t} \text{ éléments}} \quad \forall s, t \in \Sigma, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty \rangle.$$

On dit que A (ou que (Σ, A)) est de *type sphérique* quand son correspondant groupe de Coxeter est fini.

A peut être représenté par un *graphe de Coxeter*, noté Γ_A . L'ensemble des sommets de Γ_A est Σ , et il y a une arête liant deux sommets $\sigma_s, \sigma_t \in \Sigma$ si $m_{s,t} \geq 3$. Cette arête sera étiquetée par $m_{s,t}$ si $m_{s,t} \geq 4$. On dit que A est *irréductible* si Γ_A est connexe. Il est bien connu (Coxeter, 1935) que les groupes d'Artin-Tits de type sphérique irréductibles sont classifiés en dix types différents. Cette classification est décrite dans la Figure 1.1 à l'aide de graphes de Coxeter. Si A est réductible, alors il y a une partition non-triviale $\Sigma = X_1 \cup \dots \cup X_k$ telle que A est isomorphe à $A_{X_1} \times \dots \times A_{X_k}$, où tout A_{X_j} est irréductible (chaque X_j est juste l'ensemble des sommets d'une composante connexe de Γ_A). Chaque A_{X_j} est appelé *composante irréductible* de A .

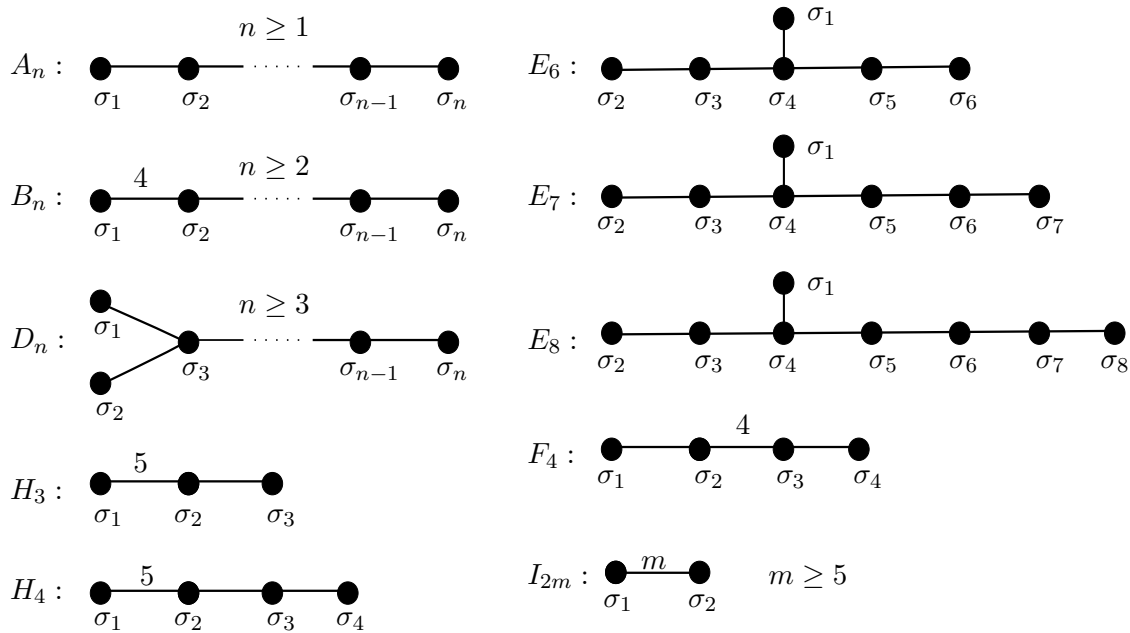


FIGURE 1.1 – Classification des groupes d'Artin-Tits de type sphérique.

Définition 1.26. Soit (A, S) un système d'Artin-Tits où A est un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. Son sous-groupe d'Artin-Tits *coloré* (ou *pur*) $CA \subset A$ est défini de la façon suivante :

$$CA := \ker(p : A \longrightarrow W_A)$$

où p est la projection canonique de A sur son groupe de Coxeter associé W_A .

Il convient de souligner que si A est le groupe de tresses à n brins, alors son groupe de Coxeter est le groupe symétrique, puisque chaque tresse induit une permutation des points dans $\mathcal{D}_n$. Le groupe d'Artin-Tits coloré dans ce cas est ce qu'on appelle le groupe de tresses *pures* à n brins. Il est composé des tresses qui induisent une permutation triviale, c'est-à-dire, des tresses dont le i -ème point dans le disque supérieure est lié au i -ème point dans le disque inférieure.

Proposition 1.27 (Brieskorn & Saito, 1972; Deligne, 1972; Dehornoy & Paris, 1999). Soit (Σ, A) un système d'Artin-Tits de type sphérique. Alors A possède une structure de Garside de type fini (A, A^+, Δ_Σ) , que l'on appelle structure de Garside classique.

Proposition 1.28 (Brieskorn & Saito, 1972; Deligne, 1972). Dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique, les éléments simples de la structure de Garside classique sont les éléments positifs qui sont sans facteur carré, c'est-à-dire, les éléments positifs qui ne peuvent pas être écrits comme un mot positif contenant le carré d'un générateur atomique, σ_i^2 pour un certain i .

Proposition 1.29 (Brieskorn & Saito, 1972, Lemme 5.1, Théorème 7.1). Soit (Σ, A) un

système d'Artin-Tits de type sphérique. Alors un élément de Garside pour A est

$$\Delta_\Sigma = \bigvee_{\sigma_i \in \Sigma} (\sigma_i) = \bigvee_{\sigma_i \in \Sigma}^{\gamma} (\sigma_i),$$

et A^+ est engendré par Σ . En plus, Δ_Σ^e engendrent le centre de A , $Z(A) = \{x \in A \mid g^x = g, \forall g \in A\}$, pour un certain $e \in \{1, 2\}$.

1.2.1 Sous-groupes paraboliques

Le long la deuxième partie de cette thèse on va travailler avec des sous-groupes spécifiques, les sous-groupes paraboliques, qui sont l'analogue algébrique des système des courbes non-imbriqués pour les groupes de tresses.

Définition 1.30. Soit (A, Σ) un système d'Artin-Tits de type sphérique. Un *sous-groupe parabolique standard*, A_X , est le sous-groupe de A engendré par un certain $X \subseteq \Sigma$. On dit que un sous-groupe P est *parabolique* s'il est conjugué à un sous-groupe parabolique standard, c'est-à-dire, $P = \alpha^{-1} A_X \alpha$ pour un certain sous-groupe parabolique standard A_X et un certain $\alpha \in A$.

Notation 1.31. Il est possible d'avoir $P = \alpha^{-1} A_Y \alpha = \beta^{-1} A_Z \beta$ pour différents $Y, Z \subset \Sigma$ et différents $\alpha, \beta \in A$. On écrira le conjugué d'un sous-groupe parabolique P par un élément α comme

$$P^\alpha = \alpha^{-1} P \alpha.$$

pour exprimer la conjugaison et on écrira $P = A_Y^\alpha$ pour préciser que les données pour la définition de P sont le sous-ensemble Y et l'élément α .

Proposition 1.32 (Van der Lek (1983)). *Un sous-groupe parabolique standard A_X d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique est un groupe d'Artin-Tits de type sphérique dont le système d'Artin-Tits est (A_X, X) .*

Notation 1.33. D'après la Proposition 1.32 et la Proposition 1.27, on peut utiliser tous les opérations valables pour les groupes de Garside dans un sous-groupe parabolique standard A_X d'un groupe de Artin-Tits de type sphérique. Pour spécifier que l'opération s'effectue par rapport à la structure de Garside (A_X, A_X^+, Δ_X) , on ajoutera aux opérations le sous-indice X . Par exemple, la conjugaison par Δ_X , le cyclage et le décyclage par rapport à cette structure seront notés τ_X , $\mathbf{c}_X$ et $\mathbf{d}_X$ respectivement.

Définition 1.34. Soit $P = A_X^\alpha$ un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. On dit que P est *irréductible* si A_X est irréductible.

Dans chaque sous-groupe parabolique il y a un élément clé, appelé élément central de Garside, qui nous permettra de simplifier notre travail.

Définition 1.35. Soit A_X un sous-groupe parabolique standard d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. On appelle *élément central de Garside* de A_X , noté z_X , la plus petite puissance positive de Δ_X qui est centrale, à savoir Δ_X ou bien Δ_X^2 .

L'*élément central de Garside* d'un sous-groupe parabolique quelconque $P = A_X^\alpha$ sera défini par l'expression $z_P := z_X^\alpha$.

Proposition 1.36 (Godelle, 2003, Proposition 2.1). *Soient $X, Y \subseteq \Sigma$ et $g \in A$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $g^{-1}A_Xg \subseteq A_Y$;
2. $g^{-1}z_Xg \in A_Y$;
3. $g = xy$ où $y \in A_Y$ et x conjugue X vers un sous-ensemble de Y .

La proposition précédente est une généralisation du (Paris, 1997, Theorem 5.2) et on verra qu'elle implique que conjuguer des sous-groupes paraboliques standards est équivalent à conjuguer leurs éléments centraux de Garside.

Lemme 1.37. *Soient $X, Y \subset \Sigma$ et soient $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ et $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$ les partitions de X et Y , respectivement, induites par les composantes indécomposables de A_X et A_Y . Alors, pour tout $g \in A$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $g^{-1}A_Xg = A_Y$.
2. $m = n$ et $g = xy$, où $y \in A_Y$ et les parties de Y peuvent être réordonnées pour avoir $x^{-1}X_i x = Y_i$ pour $i = 1, \dots, n$.
3. $m = n$ et $g = xy$, où $y \in A_Y$ et les parties de Y peuvent être réordonnées pour avoir $x^{-1}A_{X_i}x = A_{Y_i}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. Supposons que $g^{-1}A_Xg = A_Y$. Par la Proposition 1.36, on peut décomposer $g = xy$ où $y \in A_Y$ et x conjugue l'ensemble X vers un sous-ensemble de Y . Or, la conjugaison par y induit un automorphisme de A_Y ; ainsi, x conjugue A_X isomorphiquement vers A_Y , donc il conjugue X vers tout l'ensemble Y . Comme les composantes connexes de Γ_X (resp. Γ_Y) sont déterminés par des relations de commutation entre les lettres de X (resp. Y), la conjugaison par x envoie des composantes indécomposables de A_X vers des composantes indécomposables de A_Y . Par conséquent, $m = n$ et $x^{-1}X_i x = Y_i$ pour $i = 1, \dots, n$ (en réordonnant les composantes indécomposables de Y de façon convenable). Ainsi, la première assertion implique la deuxième.

Finalement, la deuxième assertion implique la troisième trivialement et la troisième assertion implique la première, car on a $A_X = A_{X_1} \times \dots \times A_{X_n}$ et $A_Y = A_{Y_1} \times \dots \times A_{Y_n}$. $\square$

Lemme 1.38. *Soient $X, Y \subseteq \Sigma$, $g \in A$. Alors,*

$$g^{-1}A_Xg = A_Y \iff g^{-1}z_Xg = z_Y.$$

Démonstration. Supposons que $g^{-1}z_Xg = z_Y$. Alors, en utilisant la Proposition 1.36, on a $g^{-1}A_Xg \subseteq A_Y$ et aussi $gA_Yg^{-1} \subseteq A_X$. Comme la conjugaison par g est un isomorphisme de A , la dernière inclusion est équivalente à $A_Y \subseteq g^{-1}A_Xg$. Donc, $g^{-1}A_Xg = A_Y$, comme désiré.

Réciproquement, supposons que $g^{-1}A_Xg = A_Y$. En utilisant le Lemme 1.37, on peut décomposer $g = xy$ où $y \in A_Y$ et x est tel que $x^{-1}A_{X_i}x = A_{Y_i}$, où A_{X_i} et A_{Y_i} sont des composantes indécomposables de A_X et A_Y pour $i = 1, \dots, n$. Comme la conjugaison par x définit un isomorphisme entre A_{X_i} et A_{Y_i} , on déduit que $x^{-1}Z(A_{X_i})x = Z(A_{Y_i})$. Donc, on a $x^{-1}z_{X_i}x = \Delta_{Y_i}^{k_i}$ pour un certain $k_i \in \mathbb{Z}$, puisque le centre A_{Y_i} est cyclique (Proposition 1.29). Soit $z_{X_i} = \Delta_{X_i}^{\varepsilon_i}$ et $z_{Y_i} = \Delta_{Y_i}^{\zeta_i}$. Comme A_{X_i} et A_{Y_i} sont isomorphes,

on a $\varepsilon_i = \zeta_i$. Remarquons aussi que, dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique, les relations sont homogènes et donc $k_i = \varepsilon_i = \zeta_i$, ce qui implique que $x^{-1}z_{X_i}x = z_{Y_i}$. Soit

$$e = \max\{\varepsilon_i \mid z_{X_i} = \Delta_{X_i}^{\varepsilon_i}\} = \max\{\zeta_i \mid z_{Y_i} = \Delta_{Y_i}^{\zeta_i}\},$$

et notons $d_{X_i} = \Delta_{X_i}^e$ et $d_{Y_i} = \Delta_{Y_i}^e$ pour $i = 1, \dots, n$. Observons que d_{X_i} est égal soit à z_{X_i} soit à $(z_{X_i})^2$, et la même chose s'applique pour chaque d_{Y_i} . De ce fait, $x^{-1}d_{X_i}x = d_{Y_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Comme $z_X = \prod_{i=1}^n d_{X_i}$ et $z_Y = \prod_{i=1}^n d_{Y_i}$, on déduit que $x^{-1}z_Xx = z_Y$. Ainsi, $g^{-1}z_Xg = y^{-1}(x^{-1}z_Xx)y = y^{-1}z_Yy = z_Y$. $\square$

Remarque 1.39. L'élément z_P est bien défini : si $P = \alpha^{-1}A_X\alpha = \beta^{-1}A_Y\beta$, alors on a $\beta\alpha^{-1}A_X\alpha\beta^{-1} = A_Y$, donc par le [Lemme 1.38](#) $\beta\alpha^{-1}z_X\alpha\beta^{-1} = z_Y$ et $\alpha^{-1}z_X\alpha = \beta^{-1}z_Y\beta$.

Afin de démontrer les résultats sur les sous-groupes paraboliques, on va définir des objets qui généralisent aux groupes d'Artin-Tits de type sphérique quelques opérations utilisés dans la théorie de tresses :

Définition 1.40. Soit (A, Σ) un système d'Artin-Tits de type sphérique et soit $X \subset \Sigma$, $t \in \Sigma$. On définit

$$r_{X,t} = \Delta_{X \cup \{t\}} \Delta_X^{-1}, \quad r_{t,X} = \Delta_X^{-1} \Delta_{X \cup \{t\}}.$$

Remarque 1.41. Au cas où $t \notin X$, la définition de $r_{X,t}$ est équivalente à la définition de ruban élémentaire positif ([Godelle, 2003](#), Définition 0.4). Observons que si $t \in X$, $r_{X,t} = 1$. Sinon, remarquons que $\Delta_{X \cup \{t\}} = r_{X,t} \Delta_X$ est simple, et les éléments simples sont sans facteur carré ([Proposition 1.28](#)). Or, Δ_X peut commencer avec n'importe quelle lettre de X ; donc, si $t \notin X$, la seule lettre qui est suffixe de $r_{X,t}$ est t . En particulier, $r_{X,t} \succcurlyeq t$. De façon analogue, $t \preccurlyeq r_{t,X}$.

Proposition 1.42. Il y a deux uniques sous-ensembles $Y, Y' \subset X \cup \{t\}$ tels que $r_{X,t}X = Yr_{X,t}$ et $Xr_{t,X} = r_{t,X}Y'$.

Démonstration. Étant donné $Z \subset \Sigma$, la conjugaison par Δ_Z permute les éléments de Z . Notons Y l'image de X sous la permutation de $X \cup \{t\}$ induite par la conjugaison par $\Delta_{X \cup \{t\}}$. Alors

$$r_{X,t}Xr_{X,t}^{-1} = \Delta_{X \cup \{t\}} \Delta_X^{-1} X \Delta_X \Delta_{X \cup \{t\}}^{-1} = \Delta_{X \cup \{t\}} X \Delta_{X \cup \{t\}}^{-1} = Y.$$

La preuve pour $r_{t,X}$ est analogue. $\square$

Lemme 1.43. Soient (A, Σ) un système d'Artin-Tits de type sphérique, $X \subseteq S$ et $t \in S$, alors les éléments $r_{X,t}$ et $r_{t,X}$ peuvent être caractérisés par la propriété suivante :

$$\Delta_X \vee t = r_{X,t} \Delta_X = \Delta_X r_{t,X}$$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition de Δ_X ([Proposition 1.29](#)), qui est le plus petit commun multiple des éléments dans X , et de la définition de $\Delta_{X \cup \{t\}} = r_{X,t} \Delta_X = \Delta_X r_{t,X}$, qui est le plus petit commun multiple des éléments dans $X \cup \{t\}$. $\square$

Remarque 1.44. Dans la deuxième partie de cette thèse, il y aura des résultats énoncés juste pour $r_{X,t}$ ou pour $r_{t,X}$. Heureusement, tous les résultats montrés pour $r_{X,t}$ ont normalement une version valable pour $r_{t,X}$ (et vice-versa) dont la preuve est analogue.

1.2.2 Correspondance entre sous-groupes paraboliques et courbes

On a dit dans l'introduction que les systèmes de courbes non-dégénérées dans $\mathcal{D}_n$ sont en correspondance avec les sous-groupes paraboliques propres du groupe de tresses à n brins, c'est-à-dire, les sous-groupes paraboliques de $\mathcal{B}_n$ qui sont différents de A et de $\{1\}$. En particulier, les classes d'isotopie des courbes simples fermées non-dégénérées sont en correspondance avec les *sous-groupes paraboliques irréductibles propres*. On va expliquer cela avec plus de détails (les explications pour les systèmes de courbes non-imbriqués sont analogues). On définit la correspondance par

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'isotopie de} \\ \text{courbes simples fermées} \\ \text{non-dégénérées dans } \mathcal{D}_n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-groupes paraboliques} \\ \text{irréductibles propres de } B_n \end{array} \right\}$$

de façon que, pour une courbe c , son image $\varphi(c)$ est l'ensemble des tresses qui peuvent être représentées par un automorphisme de $\mathcal{D}_n$ dont le support est entouré par C .

Voyons que l'image de φ ne contient que des sous-groupes paraboliques irréductibles. Supposons que $\mathcal{D}_n$ est représenté par un sous-ensemble du plan complexe, dont le bord est un cercle, et dont les trous correspondent aux nombres réels $1, \dots, n$. Soit C_m un cercle entourant les trous $1, \dots, m$ où $1 < m < n$. Alors $\varphi(C_m)$ est un sous-groupe de B_n qui est isomorphe à B_m . En fait, il est le sous-groupe parabolique standard A_{X_m} , où $X_m = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}\}$. D'une manière générale, si on considère une courbe simple fermée non-dégénérée c dans $\mathcal{D}_n$, on peut toujours définir un automorphisme α de $\mathcal{D}_n$ tel que $\alpha(c) = C_m$ pour un certain $1 < m < n$. Cet automorphisme α représente une tresse, et donc par construction $\varphi(c)$ est précisément le sous-groupe parabolique irréductible $\alpha A_{X_m} \alpha^{-1}$.

Il est clair que φ est surjectif car, étant donné un sous-groupe parabolique irréductible $P = \alpha A_X \alpha^{-1}$, on peut prendre un cercle c' dans $\mathcal{D}_n$ entourant les trous consécutifs susceptibles d'être bougés par les générateurs dans X , et ça implique que $\varphi(\alpha^{-1}(c')) = P$. L'injectivité de φ est une conséquence d'un lemme du quatrième chapitre :

Lemme 4.16 *Soient $P = A_X^\alpha$ et $Q = A_Y^\beta$ deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique. Alors, on a*

$$g^{-1}Pg = Q \iff g^{-1}z_Pg = z_Q.$$

Pour les groupes de tresses, soient C une courbe simple fermée non-dégénérée et $P = \varphi(C)$ son sous-groupe parabolique irréductible correspondant. L'élément central z_P est soit un conjugué d'un générateur atomique (si C entoure deux trous), soit le twist de Dehn le long la courbe C (si C entoure plus de deux trous). Donc, si C_1 et C_2 sont tels que $\varphi(C_1) = \varphi(C_2)$ alors soit z_P , soit z_P^2 est le twist de Dehn le long C_1 et aussi le twist de Dehn le long C_2 . Deux twists de Dehn le long des courbes non-dégénérées correspondent au même élément du groupe modulaire si et seulement si ses courbes correspondantes sont isotopes (Franco & González-Meneses, 2003, Fait 3.6), donc C_1 et C_2 sont isotopes. Ceci termine la démonstration que φ est injective.

Ainsi, au lieu de parler de courbes, dans un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique on parlera de sous-groupes paraboliques irréductibles. Le groupe A agit (à droite) sur l'ensemble de sous-groupes paraboliques par conjugaison. Cette action correspond à l'action des tresses sur les classes d'isotopie des courbes simples fermées non-dégénérées.

Première partie

Conjecture de généricité

Conjecture de généricité dans des groupes modulaires

*Porque tú siempre existes dondequiera
pero existes mejor donde te quiero
porque tu boca es sangre
y tienes frío
tengo que amarte amor
tengo que amarte*

Mario Benedetti, *Corazón coraza*

Sommaire

2.1	Le complexe de courbes	29
2.2	Proportion des éléments pseudo-Anosov	30
2.2.1	Démonstrations	31
2.3	Éléments pseudo-Anosovs dans des sous-groupes du groupe modulaire	32

Les résultats de ce chapitre correspondent à un travail en collaboration avec Bert Wiest.

Soit $\text{Mod}(\mathcal{S})$ le groupe modulaire d'une surface fermée $\mathcal{S}$ (avec $\text{genre}(\mathcal{S}) \geq 2$), muni d'une partie génératrice finie quelconque Σ . Le groupe $\text{Mod}(\mathcal{S})$ agit sur le complexe de courbes de la surface. Dorénavant, on entendra par *courbe* la classe d'isotopie d'une courbe simple fermée.

2.1 Le complexe de courbes

Définition 2.1. Les classes d'isotopie des courbes de $\mathcal{S}$ forment un complexe simplicial, appelé *complexe de courbes*, noté $\mathcal{CC}$ et défini comme suit : un simplexe de dimension d est un ensemble de $d+1$ (classes d'isotopie de) courbes qui admettent une réalisation de $d+1$ courbes disjointes.

Le 1-squelette du complexe de courbes est appelé le *graphe de courbes*, dont les sommets sont les courbes, et il y a une arête liant deux sommets représentant deux courbes si elles peuvent être isotopées afin d'être disjointes.

Définition 2.2. On donne une structure métrique au complexe de courbes en fixant la longueur de chaque arête à 1. On note $d_{\mathcal{CC}}(a, b)$ la *distance entre deux courbes* a et b , qui

est définie comme la longueur la plus petite parmi les longueurs des chemins qui relient les sommets a et b dans $\mathcal{CC}$.

Les concepts qui suivent sont nécessaires pour comprendre la preuve du théorème principal de ce chapitre :

Définition 2.3. Un ensemble de courbes $\mathcal{C}$ *remplit* $\mathcal{S}$ si toute autre courbe de la surface intersecte $\mathcal{C}$.

Définition 2.4. Soit c une courbe dans $\mathcal{S}$ et choisissons une orientation pour c . Considérons un voisinage tubulaire N de c , qui doit être homéomorphe à un anneau. L'action de réaliser une volte de 360° dans N et l'étendre à toute la surface $\mathcal{S}$ est un automorphisme noté T_c et appelé *twist de Dehn* autour de c (voir Figure 2.1).

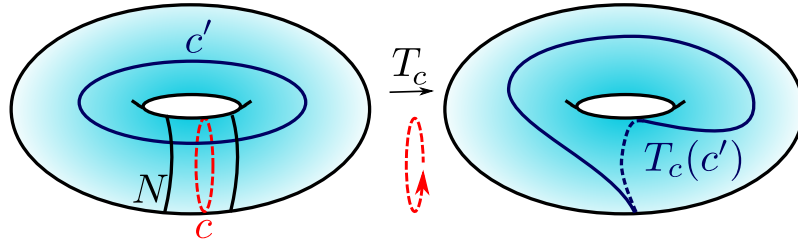


FIGURE 2.1 – Twist de Dehn autour de c et comment ça déforme la courbe c' .

2.2 Proportion des éléments pseudo-Anosov

Considérons la boule $B_\Gamma(1, R)$ de centre l'identité et de rayon R dans le graphe de Cayley $\Gamma := \Gamma(\text{Mod}(\mathcal{S}), \Sigma)$. Rappelons que la conjecture de généricité affirme que la proportion des éléments pseudo-Anosov parmi les sommets de la boule tend vers 1 quand le rayon tend vers l'infini :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{éléments pseudo-Anosov dans } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} = 1$$

Dans ce chapitre on va démontrer le résultat suivant :

Corollaire 2.5.

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{éléments pseudo-Anosov dans } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} > 0$$

La preuve est assez facile, et n'utilise que des ingrédients bien connus, à savoir un théorème classique de Albert Fathi (Fathi, 1987), et l'hyperbolicité acylindrique de l'action du groupe modulaire sur le complexe de courbes (Bowditch, 2008).

On en déduira le Corollaire 2.5 de façon presque immédiate à partir du théorème technique suivant :

Théorème 2.6. *Il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{F}$ de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ tel que pour tout élément g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, au moins une des classes d'applications $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}\}$ est pseudo-Anosov.*

Les démonstrations du [Corollaire 2.5](#) et du [Théorème 2.6](#) seront expliqués dans la [Sous-section 2.2.1](#). Dans la [Section 2.3](#) on montrera qu'il y a des résultats analogues pour une grande famille de *sous-groupes* des groupes modulaires, par exemple pour les sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, et pour le groupe de Torelli.

2.2.1 Démonstrations

Premièrement, on énonce les deux résultats importants sur lesquels sont basées nos preuves.

Théorème 2.7 ([Fathi, 1987](#), Théorème 0.1). *Si $g \in \text{Mod}(\mathcal{S})$ et c est une courbe simple fermée dans $\mathcal{S}$ telle que les courbes $\{g^n(c) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ remplissent $\mathcal{S}$, alors $T_c^k \circ g$ est toujours pseudo-Anosov, à exception d'au plus sept valeurs consécutifs de k . En particulier, soit g , soit $T_c^7 \circ g$, (ou les deux) sont pseudo-Anosov.*

Théorème 2.8 ([Bowditch, 2008](#), Théorème 1.3). *$\text{Mod}(\mathcal{S})$ agit acylindriquement sur le complexe de courbes, c'est-à-dire, pour tout $r \geq 0$, il existe $R(r), N(r) \geq 0$ tels que pour n'importe quel couple de sommets a, b du complexe de courbes avec $d_{\mathcal{CC}}(a, b) > R(r)$ il y a au plus $N(r)$ éléments différents g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ tels que $d_{\mathcal{CC}}(a, g(a)) < r$ et $d_{\mathcal{CC}}(b, g(b)) < r$.*

Lemme 2.9. *Il existent deux courbes a, b dans $\mathcal{S}$ telles que pour tous sauf un nombre fini d'éléments g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, soit a et $g(a)$ remplissent $\mathcal{S}$, soit b et $g(b)$ remplissent $\mathcal{S}$ (ou tous les deux).*

Démonstration. Remarquons que deux courbes remplissent $\mathcal{S}$ si et seulement si, dans le complexe de courbes $\mathcal{CC}$, elles sont à distance plus grande que 3.

On doit appliquer le [Théorème 2.8](#) au cas $r = 3$. Comme $\mathcal{CC}$ est de diamètre infini ([Masur & Minsky, 1999](#), Théorème 1.1), on a le droit de choisir arbitrairement deux courbes a et b dans $\mathcal{S}$, avec la restriction $d_{\mathcal{CC}}(a, b) > R(3)$. Le [Théorème 2.8](#) dit que pour tous sauf un nombre fini (au plus $N(3)$) d'éléments g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, l'action de g sur la courbe déplace au moins un des deux sommets, a ou b , par au moins 3. Cela termine la preuve. $\square$

Démonstration du Théorème 2.6 On définit $\mathcal{F}' = \{1_{\mathcal{G}} \cup T_a^7 \cup T_b^7\}$. Le [Théorème 2.7](#) et le [Lemme 2.9](#) impliquent : pour tout élément g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, sauf un nombre fini, au moins une des classes d'applications de $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}'\}$ est pseudo-Anosov.

Maintenant on doit s'occuper du nombre fini des élément de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, disons $\{g_1, \dots, g_N\}$, où $N \leq N(3)$. Pour chaque g_i , on choisit un $f_i \in \mathcal{G}$ tel que $f_i \circ g_i$ n'est pas un élément exceptionnel. Alors pour tout i , au moins une des classes d'applications $\{f \circ f_i \circ g_i \mid f \in \mathcal{F}'\}$ est pseudo-Anosov. Par conséquent, on a complété la démonstration du [Théorème 2.6](#), avec

$$\mathcal{F} = \{1, T_a^7, T_b^7\} \bigcup_{i=1, \dots, N} \{f_i, T_a^7 \circ f_i, T_b^7 \circ f_i\}$$

$\square$

Démonstration du Corollaire 2.5 Soit $R' = \max \{d_{\Gamma}(1, f) \mid f \in \mathcal{F}\} + 1$. Le [Théorème 2.6](#) nous dit que l'union de toutes le boules ayant pour rayon R' centrées en les sommets pseudo-Anosovs de Γ est tout le graphe de Cayley Γ .

Pour $R > R'$, les centres des boules de rayon R' , couvrant $B_{\Gamma}(1, R - R')$, doivent être placées dans $B_{\Gamma}(1, R)$. Donc, l'union des boules de rayon R' centrées en les sommets pseudo-Anosov

de $B_\Gamma(1, R)$ contient $B_\Gamma(1, R - R')$. On obtient

$$|B_\Gamma(1, R')| \cdot |\text{  l ments pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)| \geq |B_\Gamma(1, R - R')|$$

et alors

$$\frac{|\text{  l ments pseudo-Anosov de } \text{Mod}(\mathcal{S}) \cap B_\Gamma(1, R)|}{|B_\Gamma(1, R)|} \geq \frac{|B_\Gamma(1, R - R')|}{|B_\Gamma(1, R)|} \cdot \frac{1}{|B_\Gamma(1, R')|}$$

Les deux facteurs peuvent être bornés inférieurement indépendamment de R . En fait, comme tous les sommets de Γ ont pour valence au plus $2|\Sigma|$ et le nombre d'éléments dans une boule dans un graphe de Cayley croît au plus de façon exponentielle par rapport à son rayon, on a l'estimation

$$|B(1, R')| \leq 1 + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R'} \leq (2|\Sigma|)^{R'+1}.$$

Notons $E(k) = \{x \mid d(1, x) = R - R' + k\}$.   cause de la croissance exponentielle des boules, on sait aussi que $|E(k)|$ est borné supérieurement par $|B(1, R - R')| \cdot (2|\Sigma|)^k$, pour $1 \leq k \leq R'$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \frac{|B(1, R)|}{|B(1, R - R')|} &\leq \frac{|B(1, R - R')| + E(1) + \cdots + E(R')}{|B(1, R - R')|} \\ &\leq \frac{|B(1, R - R')|}{|B(1, R - R')|} + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R'} \\ &\leq 1 + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R'} \\ &\leq (2|\Sigma|)^{R'+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la $\liminf$ étudiée dans le [Corollaire 2.5](#) est au moins $(2|\Sigma|)^{-2(R'+1)}$. $\square$

Remarque 2.10. Après une première mise en ligne de ce résultat, Mladen Bestvina nous a gentiment indiqué qu'il y a une démonstration complètement différente du [Théorème 2.6](#). Cette preuve s'applique aussi à des autre contextes, par exemple pour démontrer que les éléments totalement irréductibles ont une densité positive dans $\text{Out}(F_n)$. La clé est l'existence ([Bestvina & Fujiwara, 2007](#)) des quasi-morphismes homogènes $\varphi: \text{Mod}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont non-bornés, mais tel que $|\varphi|$ est uniformément borné par une constante C dans tous les éléments réductibles et périodiques. Après il faut fixer un quasi-morphisme φ , et quelques éléments f de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ avec $\varphi(f) > C + \Delta$ et $\varphi(f^{-1}) < -C - \Delta$ (où Δ note le défaut de φ). Alors pour tout $g \in \mathcal{G}$, soit $f^{-1} \circ g$ soit $f \circ g$ est pseudo-Anosov. Pour le détails du contexte de $\text{Out}(F_n)$ voir ([Bestvina & Feighn, 2010](#)), en particulier la Remarque 4.33.

2.3  l ments pseudo-Anosovs dans des sous-groupes du groupe modulaire

Tout au long de cette section, on va noter $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, et $\Gamma_{\mathcal{H}}$ sera le graphe de Cayley de $\mathcal{H}$ par rapport à une partie génératrice. Rappelons que $\text{Mod}(\mathcal{S})$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn. Ceci est montré dans ([Dehn, 1987](#)) et

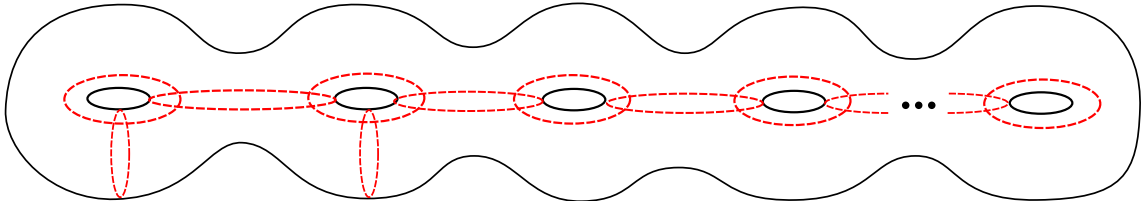


FIGURE 2.2 – Pour engendrer le groupe modulaire d’une surface de genre g on a besoin de $2g + 1$ générateurs, qui sont précisément les twists de Dehn le long le courbe rouges du dessin.

(Lickorish, 1964), mais c’était dans (Humphries, 1979) où on trouve le nombre minimal de twists de Dehn dans Σ (voir Figure 2.2). On s’intéressera au cas où $\mathcal{H}$ remplit la condition suivante :

Condition (*) Il existent des sommets a, b du complexe de courbes $\mathcal{CC}$ et des entiers $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$ tels que

- $d_{\mathcal{CC}}(a, b) \geq R(3)$ et
- $T_a^{k_a}, T_b^{k_b} \in \mathcal{H}$

où $R(3)$ est le nombre utilisé dans la preuve du Lemme 2.9.

Exemple 2.11. Tous les sous-groupes d’indice fini dans $\text{Mod}(\mathcal{S})$ satisfont la Condition (*) : Prenons des courbes a et b satisfaisant $d_{\mathcal{CC}}(a, b) \geq R(3)$ comme dans la preuve du Lemme 2.9. Soit $\mathcal{H}$ un groupe d’indice fini dans $\text{Mod}(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{H}$ est de type fini, pour tout twist de Dehn $T_c \in \Sigma$, il y a un nombre $k_c \in \mathbb{Z}$ tel que $T_c^{k_c} \in \mathcal{H}$. Cela implique que pour tout élément g de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ et en particulier pour T_a et T_b , on a $g^k \in \mathcal{H}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.12 (Farb & Margalit, 2012, Chapitre 6). Notons le *groupe symplectique entier* par

$$\text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) = \{A \in \text{GL}(2g, \mathbb{Z}) \mid A^T J A = J\}$$

où J est la matrice de dimension $2g \times 2g$ suivante :

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{array} \right).$$

On définit le *groupe de Torelli* $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ comme le noyau d’une représentation

$$\Psi : \text{Mod}(\mathcal{S}) \longrightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}),$$

appelée *représentation symplectique* de $\text{Mod}(\mathcal{S})$. Ce groupe contient exactement les éléments qui agissent de façon triviale sur la première homologie de la surface $\mathcal{S}$.

$\mathcal{T}$ contient tous les twists de Dehn le long les courbes séparantes de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{CC}$ est de diamètre infini et toute courbe est à distance au plus 1 d’une séparante, on peut choisir a et b telles qu’elles soient courbes séparantes à distance plus grande que $R(3)$. Donc, $\mathcal{T}$ satisfait la Condition (*).

De la même façon que dans l'exemple pr c dent, les groupes d'indice fini du groupe de Torelli satisfont aussi la Condition (*).

Théorème 2.13. *Supposons que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\text{Mod}(\mathcal{S})$, le groupe modulaire de $\mathcal{S}$, qui satisfait la Condition (*) précédente. Alors les éléments pseudo-Anosovs ont densité positive dans $\mathcal{H}$: Il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$ tel que pour tout élément g de $\mathcal{H}$, au moins une des classes d'applications de $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}\}$ est pseudo-Anosov. En plus,*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{éléments pseudo-Anosovs de } \mathcal{H} \cap B_{\Gamma_{\mathcal{H}}}(1, R)|}{|B_{\Gamma_{\mathcal{H}}}(1, R)|} > 0$$

Démonstration La preuve ressemble beaucoup à celle du Théorème 2.6. Cette fois on choisit les sommets a et b de Σ , et les entiers k_a et k_b tels qu'ils satisfaisaient la Condition (*). On peut remplacer k_a et k_b par des multiples d'eux-mêmes, donc on suppose en plus que $k_a, k_b \geq 7$.

Définir $\mathcal{F}' = \{1_{\mathcal{H}} \cup T_a^{k_a} \cup T_b^{k_b}\}$, le Théorème 2.7 et le Lemme 2.9 impliquent que pour tout g de $\mathcal{H}$, sauf un nombre fini de cas exceptionnels, au moins une des classes d'applications de $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}'\}$ est pseudo-Anosov.

Pour chaque élément exceptionnel $g_i \in \mathcal{H}$, on choisit un $f_i \in \mathcal{H}$ tel que $f_i \circ g_i \in \mathcal{H}$ est non-exceptionnel. Maintenant on peut appliquer le même argument que dans la démonstration du Théorème 2.6 et on aura que pour tout $g \in \mathcal{H}$, au moins une des classes d'applications de $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}'\}$ est pseudo-Anosov, où

$$\mathcal{F} = \left\{1, T_a^{k_a}, T_b^{k_b}\right\} \bigcup_{i=1, \dots, N} \left\{f_i, T_a^{k_a} \circ f_i, T_b^{k_b} \circ f_i\right\}$$

Finalement, on déduit que la limite inférieure de la proportion d'éléments pseudo-Anosov dans des boules suffisamment grandes du graphe de Cayley de $\mathcal{H}$ est strictement positive de façon complètement analogue à la preuve du Corollaire 2.5. Il faut juste remplacer $\text{Mod}(\mathcal{S})$ par $\mathcal{H}$ et Γ par $\Gamma_{\mathcal{H}}$. $\square$

Remarque 2.14. On peut démontrer le Théorème 2.6 en utilisant une version plus faible du théorème de (Bowditch, 2008). En effet, il suffit de savoir qu'il existe un élément de $\text{Mod}(\mathcal{S})$ qui agit de façon faiblement proprement discontinue (Przytycki & Sisto, 2017). Toutefois, pour la preuve du Théorème 2.13, on a besoin du théorème de Bowditch complet.

Conjecture de généricité dans des groupes d’Artin–Tits de type sphérique

For most of history, Anonymous was a woman.

Virginia Woolf, *A Room of One’s Own*

Sommaire

3.1	Complexe de longueur supplémentaire	35
3.2	Proportion des actions loxodromiques	36
3.2.1	Démonstrations	37

Soit A un groupe d’Artin–Tits de type sphérique muni d’une partie génératrice Σ_A . Le groupe A agit sur un complexe $\mathcal{C}_{AL}$ décrit dans (Calvez & Wiest, 2016) qui s’appelle complexe de longueur supplémentaire.

3.1 Complexe de longueur supplémentaire

Définition 3.1 (Calvez & Wiest, 2016, Définition 1). Soit G un groupe de Garside. On dit que $y \in G$ est un *élément absorbable* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\inf(y) = 0$ ou $\sup(y) = 0$.
2. Il existe un certain $x \in G$ tel que $\inf(xy) = \inf(x)$ et $\sup(xy) = \sup(x)$.

Dans ce cas on dit que x *absorbe* y .

Définition 3.2 (Calvez & Wiest, 2016, Définition 2). Soit (G, G_+, Δ) une structure de Garside. On définit le *complexe de longueur supplémentaire*, $\mathcal{C}_{AL}(G, G_+, \Delta)$ (abrégé $\mathcal{C}_{AL}$), comme le graphe connexe qui suit :

- Les sommets sont en correspondance bijective avec $G/\langle\Delta\rangle$, c’est-à-dire, les classes d’équivalence $g\Delta^{\mathbb{Z}} = \{g\Delta^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Chaque classe v a un seul représentant avec infimum 0, qu’on note $\bar{v}$.
- Deux sommets v et w sont connectés par une arête si et seulement si on a une des deux situations suivantes :
 1. Il y a un élément $m \neq 1, \Delta$ simple tel que $vm = w$.

2. Il y a un élément absorbable $y \in G$ tel que $vy = w$.

Comme précédemment, on donne une structure métrique à ce complexe en fixant la longueur de chaque arête à 1.

Ce complexe partage avec le complexe des courbes la propriété très importante d'être δ -hyperbolique :

Théorème 3.3 (Calvez & Wiest, 2016, Théorème 4). *Pour toute structure de Garside (G, G_+, Δ) , le complexe $\mathcal{C}_{AL}$ est 60-hyperbolique.*

3.2 Proportion des actions loxodromiques

On note $\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL})$ l'ensemble des éléments de A qui agissent loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$. Rappelons que la conjecture de généricité du chapitre précédent a un résultat analogue,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|}{|B_{\Gamma(A, \Sigma_A)}(1, R)|} = 1.$$

qui a été démontré par (Calvez & Wiest, 2017), mais seulement pour le système de générateurs de Garside. Dans le Lemme 3.6 on donnera une condition valable pour tout système de générateurs. Si un sous-groupe G de A , muni d'une partie génératrice finie Σ , satisfait cette condition, alors les boules de $\Gamma(G, \Sigma)$ ayant un rayon suffisamment grand ont une proportion positive d'éléments agissant loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$. Le résultat principal de ce chapitre montre que cette condition est satisfaite pour les groupes d'Artin–Tits de type sphérique irréductibles, pour ses sous-groupes colorés et pour certains de ses sous-groupes commutateurs :

Théorème 3.4. *Soit G un groupe d'Artin–Tits de type sphérique irréductible, son sous-groupe coloré (voir Définition 1.26) ou le sous-groupe commutateur de $I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n ou H_n (voir classification dans la Figure 1.1). Soit Σ une partie génératrice finie quelconque de G . Alors on a*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|}{|B_{\Gamma(G, \Sigma)}(R)|} > 0$$

Notre résultat technique principal se base sur le lemme suivant :

Lemme 3.5 (Calvez & Wiest, 2017). *Pour tout atome $a \in A$, il existe un élément $x_a \in A$ qui agit loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$ tel que les formes normales à droite et à gauche de x_a coïncident et $\iota(x_a) = \varphi(x_a) = a$.*

De plus, si $g \in A$ est rigide et sa forme normale contient le sous-mot $w_a := x_a^{390}$, alors g agit loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$.

Ce lemme est un résumé de plusieurs résultats démontrés par Calvez et Wiest. Pour tout atome a , l'élément x_a est construit dans le (Calvez & Wiest, 2017, Théorème 3.1). La deuxième partie du lemme est montrée dans le (Calvez & Wiest, 2017, Lemme 5.3).

Lemme 3.6. *Soit G un sous-groupe de A . Supposons qu'il y a un ensemble fini X d'éléments de G tel que pour tout $g \in G$ il existe $x \in X$ tel que $g \cdot x$ est rigide et sa forme*

normale contient le sous-mot w_a . Soit $B(R) := B_{\Gamma(G, \Sigma)}(1, R)$, où Σ est une partie génératrice finie de G . Alors il y a des constantes $\varepsilon, R_0 > 0$ qui dépendent de Σ , telles que, pour tout $R > R_0$,

$$\frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)|}{|B(R)|} > \varepsilon$$

Démonstration. Définissons $\|x\|_{\Sigma} = \min\{n \mid x = a_1 \cdots a_n, a_i \in \Sigma \cup \Sigma^{-1} \forall i\}$ comme la longueur de x par rapport à Σ . Soit $R_0 = \max\{\|x\|_{\Sigma} \mid x \in X\}$ le maximum des longueurs, par rapport au système de générateurs Σ , de tous les éléments de X . Par le [Lemme 3.5](#), pour tout $g \in G$, $g \cdot x$ agit loxodromiquement sur $\mathcal{C}_{AL}$, pour un certain $x \in X$. Par conséquent, $d(g, \text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL})) \leq R_0$, pour tout $g \in G$. En particulier pour tout $g \in B(R - R_0)$, il y a un élément loxodromique qui est à distance au plus R_0 de g et qui se trouve dans $B(R)$. Alors,

$$|B(R - R_0)| \leq |\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)| \cdot |B(R_0)|,$$

ce qui implique que

$$\frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)|}{|B(R)|} \geq \frac{|B(R - R_0)|}{|B(R)|} \cdot \frac{1}{|B(R_0)|}.$$

En outre, comme le nombre des éléments dans une boule dans un graphe de Cayley croît au plus de façon exponentielle par rapport à son rayon, on a

$$|B(R_0)| \geq 1 + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R_0} \leq (2|\Sigma|)^{R_0+1}.$$

On peut voir que le nombre d'éléments dans $E(k) = \{x \mid d(1, x) = R - R_0 + k\}$ est borné supérieurement par $|B(R - R_0)| \cdot (2|\Sigma|)^k$, pour $1 \leq k \leq R_0$. Donc on a

$$\begin{aligned} \frac{|B(R)|}{|B(R - R_0)|} &\leq \frac{|B(R - R_0)| + E(1) + \cdots + E(R_0)}{|B(R - R_0)|} \\ &\leq \frac{|B(R - R_0)|}{|B(R - R_0)|} + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R_0} \\ &\leq 1 + 2|\Sigma| + (2|\Sigma|)^2 + \cdots + (2|\Sigma|)^{R_0} \\ &\leq (2|\Sigma|)^{R_0+1}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, $\varepsilon = \frac{1}{(2|\Sigma|)^{2(R_0+1)}}$ est le nombre recherché. □

3.2.1 Démonstrations

Le [Théorème 3.4](#) est une synthèse des trois théorèmes suivants, qui seront montrés séparément.

Théorème 3.7. *Soit (A, Σ_A) un système d'Artin-Tits de type sphérique irréductible et Σ une partie génératrice finie quelconque de A . Soit $B(R) := B_{\Gamma(A, \Sigma)}(1, R)$. Alors il y a des constantes $\varepsilon, R_0 > 0$ qui dépendent de Σ' , telles que pour tout $R > R_0$,*

$$\frac{|\text{Lox}(A, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)|}{|B(R)|} > \varepsilon$$

Démonstration. On veut montrer que le [Lemme 3.6](#) peut être appliqué dans ce cas. En d'autres termes, il faut vérifier que pour tout $g \in G$ on peut trouver un $x \in G$ tel que $g \cdot x$ est rigide et sa forme normale à gauche contient le sous-mot w_a . On doit aussi prouver que la longueur de x est bornée supérieurement, afin de garantir la finitude de la famille X décrite dans le [Lemme 3.6](#). L'élément désiré x sera construit comme le produit $x = w_z \cdot w_a \cdot w_r$, où w_z , w_a et w_r sont des mot en forme normale à gauche dont l'infimum est égal à zéro. De plus, il faut que tout le mot $w_g \cdot w_z \cdot w_a \cdot w_r$ soit en normale à gauche, où w_g est la forme normale de g .

Avant d'entrer dans les détails de la preuve, on va décrire la fonction de chaque facteur de x . Le premier mot w_z garantit que le produit $g \cdot x$ est en forme normale à gauche ; w_a est l'élément mentionné dans le [Lemme 3.6](#) ; finalement, w_r fournit la rigidité de l'élément $g \cdot x$.

On rappelle que par le [Lemme 3.5](#), $\iota(w_a) = \varphi(w_a) = a$. Soient b et s des atomes tels que $\varphi(g) \succ b$ et $s \not\prec \iota(g)$. Maintenant le but est d'écrire

$$w_z = \mathbf{b} \cdot w'_z \cdot \mathbf{a}, \quad w_r = \mathbf{a} \cdot w'_r \cdot \Delta \mathbf{s}^{-1}.$$

où le premier et le dernier facteur des formes normales de w_z et w_r sont indiqués en caractères gras. Afin d'aider à visualiser l'idée de la démonstration, il faut garder en tête que $g \cdot x$ doit être de la forme

$$\underbrace{\iota(g) \cdots \varphi(g)}_{w_g} \cdot \underbrace{\mathbf{b} \cdots \mathbf{a}}_{w_z} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdots \mathbf{a}}_{w_a} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdots (\Delta \mathbf{s}^{-1})}_{w_r}.$$

Des mots w_z et w_r avec ces caractéristiques peuvent être construits avec moins de 6 éléments simples. Ce fait est montré dans ([Caruso, 2017](#), Lemma 3.4) pour le groupe de tresses et dans ([Gebhardt & Tawn, 2016](#), Propositions 57-65) pour les autres groupes d'Artin-Tits de type sphérique irréductibles. Ainsi, x peut être construit et sa longueur est bornée, comme on voulait le démontrer. $\square$

On veut montrer cela aussi pour des sous-groupes colorés des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Comme on l'a dit dans l'introduction, les tresses qui agissent loxodromiquement sur le complexe de longueur supplémentaire correspondant sont pseudo-Anosov. Donc en particulier, le théorème suivant démontre que le groupe de tresses pures a une proportion positive d'éléments pseudo-Anosov.

Théorème 3.8. *Soit $G \subseteq A$ le sous-groupe coloré d'un groupe d'Artin-Tits, muni d'une partie génératrice finie Σ quelconque. Définissons $B(R) := B_{\Gamma(G, \Sigma)}(1, R)$. Alors il y a de constantes $\varepsilon, R_0 > 0$ qui dépendent de Σ , telles que pour tout $R > R_0$,*

$$\frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)|}{|B(R)|} > \varepsilon$$

Démonstration. On va montrer qu'on peut appliquer le [Lemme 3.6](#), c'est-à-dire, que pour tout $g \in G$ on peut trouver un $x \in G$ tel que $g \cdot x$ est rigide et sa forme normale à gauche contient le sous-mot w_a . Le choix de l'atome a dépend de A : on choisit spécifiquement $a = \sigma_2$ pour $B_n, H_3, H_4, F_4, I_{2m}$, $a = \sigma_3$ pour D_n et $a = \sigma_4$ pour E_6, E_7, E_8 . Pour A_n , on peut choisir comme a n'importe quel atome $\sigma_i, i = 1, \dots, n$. On doit aussi prouver que

A	A_n						B_n		
a	σ_1		$\sigma_i, i = 2, \dots, n-1$		σ_n		σ_2		
s'	σ_1	$\Sigma_{n,1}$	σ_i	$\Sigma_{1,n}$	σ_n	$\Sigma_{1,n}$	σ_1	σ_2	$\Sigma_{2,n}$
$\tilde{s}$	σ_1	$\Sigma_{1,n}^{(2)} \Sigma_{n,1} \sigma_1^2$	σ_i	$\Sigma_{i,1}^{(2)} \Sigma_{1,n} \Sigma_{n,i}^{(2)}$	σ_n	$\Sigma_{n,1}^{(2)} \Sigma_{n,1} \sigma_1^2$	$\sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2$	σ_2	$\sigma_2^2 \Sigma_{2,n} \Sigma_{n,2}^{(2)}$

A	D_n			$E_i, i = 6, 7, 8$			H_3		
a	σ_3			σ_4			σ_2		
s'	σ_1	σ_3	$\Sigma_{2,n}$	σ_1	σ_4	$\Sigma_{2,n}$	σ_1	σ_2	σ_3
$\tilde{s}$	$\sigma_3^2 \sigma_1^3 \sigma_3^2$	σ_3	$\Sigma_{3,2}^{(2)} \Sigma_{2,n} \Sigma_{n,3}^{(2)}$	$\sigma_4^2 \sigma_1^3 \sigma_4^2$	σ_4	$\Sigma_{4,2}^{(2)} \Sigma_{2,n} \Sigma_{n,4}^{(2)}$	$\sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2$	σ_2	$\sigma_2^2 \sigma_1^3 \sigma_2^2$

A	H_4			F_4				I_{2m}	
a	σ_2			σ_2				σ_2	
s'	σ_1	σ_2	$\Sigma_{2,4}$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
$\tilde{s}$	$\sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2$	σ_2	$\Sigma_{2,4}^{(2)} \Sigma_{4,2} \sigma_2^2$	$\sigma_2^2 \sigma_1^3 \sigma_2^2$	σ_2	$\sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_2^2$	$\sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4 \sigma_2^2$	$\sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2^2$	σ_2

TABLEAU 3.1 – Chaque $\tilde{s} \in A$ se projette sur un générateur s' du groupe de Coxeter associé à A , noté W_A . Alors, avec les mots de la forme $\tilde{s}$ on peut construire, pour tout $p \in W_A$, un élément de A qui se projette sur p et dont la forme normale a comme premier et dernier facteur l'atome a .

la longueur de x est bornée supérieurement, afin de garantir la finitude de la famille X décrite dans le [Lemme 3.6](#). On va suivre la même procédure que dans le [Théorème 3.7](#).

On rappelle que par le [Lemme 3.5](#), $\iota(w_a) = \varphi(w_a) = a$. Soient b et s des atomes tels que $\varphi(g) \succ b$ et $s \not\prec \iota(g)$ et soit $p : A \rightarrow W_A$ la projection canonique de A sur son groupe de Coxeter. $g \cdot x$ doit être de la forme :

$$\underbrace{\overbrace{\iota(g)}^{s \not\prec} \cdots \overbrace{\varphi(g)}^{\succ b}}_{w_g} \cdot \underbrace{b \cdots a}_{w_z} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{w_a} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{w_p} \cdot \underbrace{a \cdots (\Delta s^{-1})}_{w_r},$$

où w_p assure que $g \cdot x$ est coloré.

On a déjà vu que w_z et w_r sont constructibles et de longueur bornée. Alors le seul pas manquant est de construire, pour tout $w \in W_A$, un mot en forme normale à gauche w_p dont le premier et dernier facteur soient égaux à a et tel que $p(w_p) = w$. Pour faire cela, on va choisir un système de générateurs Σ' pour W_A , et on va trouver pour chaque $s' \in \Sigma'$ un élément $\tilde{s} \in p^{-1}(s')$ tel que son premier et dernier facteur soient égaux à a . Par conséquent, avec les éléments de la forme $\tilde{s}$ il est possible de construire un w_p qui ait les propriétés désirées. Afin de construire cet élément $\tilde{s}$, soient

$$\Sigma_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j & \text{if } i < j \\ \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_j & \text{if } j < i \end{cases}, \quad \Sigma_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^2 \cdots \sigma_j^2 & \text{if } i < j \\ \sigma_i^2 \sigma_{i-1}^2 \cdots \sigma_j^2 & \text{if } j < i \end{cases}$$

Au [Tableau 3.1](#) on étudie chaque classe possible pour A (voir [Figure 1.1](#)). Voici quelques remarques concernant ce tableau.

Pour le cas où A est le groupe de tresses à $n+1$ brins, $A = A_n$, le groupe de Coxeter associé est le groupe symétrique. Donc, pour engendrer une permutation arbitraire il faut

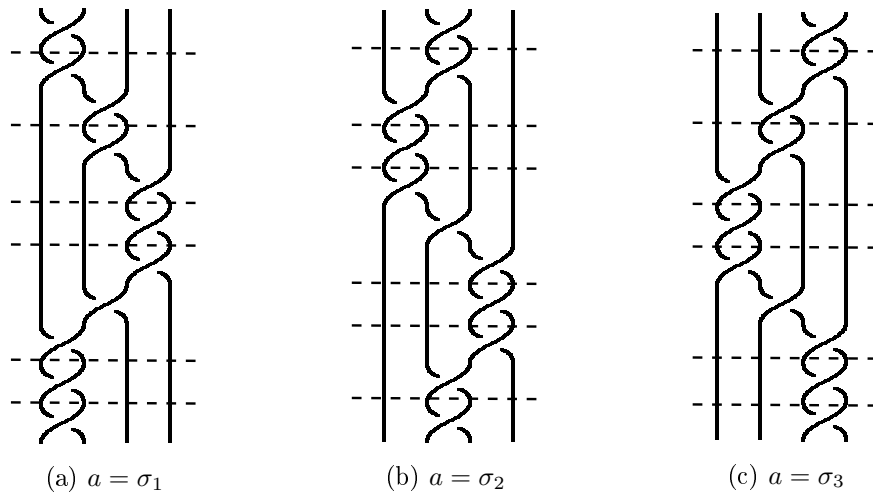


FIGURE 3.1 – Des exemples d'éléments $\tilde{s}$ de A_3 qui se projettent sur un 4-cycle et dont la forme normale a comme premier et dernier facteur l'atome a . Les lignes pointillées séparent les facteurs des formes normales.

un $(n+1)$ -cycle et une transposition de deux éléments adjacents dans le $(n+1)$ -cycle. On choisit comme transposition $(1\ 2)$, qui est représentée dans Σ par le générateur σ_1 . Comme $(n+1)$ -cycle, on va prendre soit $(1\ 2 \dots n+1)$, soit $(n+1\ n \dots 1)$, qui sont représentés respectivement par $\sigma_1 \dots \sigma_n$ et $\sigma_n \dots \sigma_1$. Dans la Figure 3.1, on peut voir des exemples de préimages convenables $\tilde{s}$ associées aux éléments de Σ .

Si $A = B_n$, alors on choisit $a = \sigma_2$ et $\Sigma' = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_n\}$ car $s' = \sigma_2$ et $s' = \sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_n$ engendrent un groupe symétrique sur n éléments. Ensuite on peut procéder avec ces générateurs de la même façon que dans le groupe de tresses. Un argument similaire s'applique aussi pour H_3 , H_4 , D_n , E_6 , E_7 et E_8 . Les autres éléments de la forme $\tilde{s}$ sont calculés de façon explicite.

Finalement, il faut remarquer que la longueur de w_p est aussi bornée car le groupe de Coxeter W_A est fini par définition. Cela termine la preuve. $\square$

Théorème 3.9. *Soit G le sous-groupe commutateur de $I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n ou de H_n muni d'une partie génératrice finie Σ . Définissons $B(R) := B_{\Gamma(G, \Sigma)}(1, R)$. Alors il y a des constants $\varepsilon, R_0 > 0$ qui dépendent de Σ , telles que pour tout $R > R_0$,*

$$\frac{|\text{Lox}(G, \mathcal{C}_{AL}) \cap B(R)|}{|B(R)|} > \varepsilon$$

Démonstration. Soit (A, Σ_A) un système d'Artin-Tits de type sphérique irréductible et notons A' le sous-groupe commutateur de A , engendré par $\{u^{-1}v^{-1}uv \mid u, v \in A\}$. Considérons le noyau K (finiment engendré) de l'homomorphisme $e : A \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $e(\sigma_i) = 1, \forall \sigma_i \in \Sigma_A$. Pour tout A on a $A' \subseteq K$. Toutefois, si on pose $A = I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n , H_n , on a $A/A' = A_{\text{ab}} = \mathbb{Z}$ (Bellingeri *et al.*, 2008, Proposition 1). Par conséquent, $A' = K$, c'est-à-dire, A' est égal au sous-groupe d'éléments avec somme d'exposants nulle. Afin d'avoir un ensemble fini S de générateurs de A' , notons qu'un élément de A' peut s'écrire comme

$x = \Delta^{-k}y$, où $k \geq 0$, $y \in A^+$. Si $e(\Delta) = p$, alors $e(y) = p \cdot k$. Ainsi, on peut écrire

$$x = \Delta^{-1}a_1 \cdot \Delta^{-1}a_2 \cdots \Delta^{-1}a_k, \quad e(a_i) = p, a_i \in A^+, \forall i = 1, \dots, k.$$

Cela veut dire qu'on peut choisir $S = \{\Delta^{-1}a \mid a \in A^+, e(a) = p\}$, qui est fini.

Définissons w_g comme la forme normale à gauche d'un élément $g \in A'$ et soit a un atome tel que $\varphi(w_g) \succ a$. On veut montrer que pour tout $g \in A'$ on peut trouver $x \in A'$ tel que $g \cdot x$ est rigide et dont la forme normale à gauche contient le sous-mot w_a . On va suivre le schéma du [Théorème 3.7](#) et du [Théorème 3.8](#), compte tenu du fait que Δ^{2h} est central pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Alors $g \cdot x$ doit être de la forme :

$$\Delta^{-2h} \cdot \underbrace{\overbrace{\iota(g)}^{s \not\succeq} \cdots \overbrace{\varphi(g)}^{\succ a}}_{w_g} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{w_a} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{w_c} \cdot \underbrace{a \cdots (\Delta s^{-1})}_{w_r}$$

Soit $d = -e(w_g \cdot w_a \cdot w_r)$ et rappelons que $e(\Delta) = p$. Si on trouve un mot w_c et $h \in \mathbb{Z}$ tel que $e(\Delta^{-2h}w_c) = d$, pour un certain $h \in \mathbb{Z}$, et tel que $\iota(w_c) = \varphi(w_c) = a$, alors on peut définir

$$x = \Delta^{-2h} \cdot w_a \cdot w_c \cdot w_r.$$

Alors on peut écrire $g \cdot x$ comme $\Delta^{-2h} \cdot w_g \cdot w_a \cdot w_c \cdot w_r$, qui est rigide et contient w_a , comme désiré. Si $d \geq 0$, alors $h = 0$ et $w_c = a^d$ remplit les conditions. Sinon, on choisit $h = d$ et $w_c = a^{d(1+2p)}$. Finalement, remarquons que h et la longueur de w_c dépendent de d , qui dépend de la longueur de w_a et w_r . Mais on sait déjà que les longueurs de w_a et w_r sont bornées comme dans les théorèmes précédents. Ainsi, x est borné et on peut appliquer le [Lemme 3.6](#). $\square$

Remarque 3.10. Dans le théorème précédent, on ne s'intéresse qu'aux sous-groupes commutateurs de $I_{2(2m+1)}$, A_n , D_n , E_n et H_n parce qu'ils sont les seuls cas dans lesquels le sous-groupe commutateur est bien compris et finiment engendré ([Orevkov, 2012](#)).

Notons que $I'_{2(2m)}$ est infiniment engendré. D'autre part, B'_3 et F'_4 sont finiment engendrés, mais la question de la finitude de sa présentation est encore ouverte. B'_n ($n > 3$) est finiment engendré et finiment présenté, mais la preuve ne suit pas le schéma de la preuve précédente. En fait, pour $A = I_{2(2m)}$, B_n , F_4 on a que $A/A' = \mathbb{Z}^2$ ([Bellingeri et al., 2008](#), Proposition 1). Toutefois, on conjecture que ces groupes ont aussi une proportion positive d'éléments agissant loxodromiquement.

Remarque 3.11. Les résultats sur la conjecture de généricité de cette première partie de la thèse sont étés faits simultanément avec des travaux de Wen-yuan Yang, qui prouve un résultat plus général en utilisant des techniques différentes. Yang montre ([Yang, 2018](#), Proposition 2.21) que tout groupe finiment engendré agissant proprement sur un espace métrique géodésique ayant au moins un élément contractant ([Yang, 2018](#), Section 2.2) a une proportion positive d'éléments contractants. Comme il explique dans son article, ceci implique la proportion positive d'éléments loxodromiques dans des groupes agissant sur des espaces hyperboliques, qui ont au moins un élément WPD-loxodromique, ce qui est notre cas ([Calvez & Wiest, 2017](#), Théorème 2). Notons aussi que les éléments contractants des groupes modulaires sont précisément les éléments pseudo-Anosov ([Sisto, n.d.](#), Théorème 1.1).

Deuxième partie

Sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique

Standardisateur minimal d'un sous-groupe parabolique

“But I don’t want to go among mad people,” Alice remarked. “Oh, you can’t help that,” said the Cat, “we’re all mad here. I’m mad. You’re mad.”
“How do you know I’m mad?” said Alice. “You must be,” said the Cat, “or you wouldn’t have come here.”

Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Sommaire

4.1	Standardisation d’un système de courbes	46
4.1.1	Détection des points d’inflexion avec des coordonnées de Dynnikov	46
4.1.2	Procédure de standardisation	49
4.2	Standardisation d’un sous-groupe parabolique	51
4.3	Complexité	54

Dans la [Section 4.1](#) de ce chapitre on va construire une méthode pour calculer la plus petite tresse positive qui transforme un système de courbes donné en un système standard ; autrement dit, le standardisateur minimal. On sait qu’un tel élément existe grâce au résultat suivant :

Théorème 4.1 ([Lee & Lee, 2008](#), Théorème 4.2). *Étant donné un système de courbes $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}_n$, son ensemble de standardisateurs*

$$\text{St}(\mathcal{S}) = \{\alpha \in \mathcal{B}_n^+ : \mathcal{S}^\alpha \text{ est standard} \}$$

est un sous-treillis de $\mathcal{B}_n^+$. Ainsi, $\text{St}(\mathcal{S})$ contient un unique élément $\preceq$ -minimal.

Ensuite, dans la [Section 4.2](#) on va étendre ce résultat et le calcul de l’élément minimal à tous les groupes d’Artin–Tits de type sphérique, sachant que les systèmes de courbes trouvent leur généralisation dans les sous-groupes paraboliques (voir [Définition 1.30](#)). On verra que pour calculer la standardisateur d’un sous-groupe parabolique P d’un groupe d’Artin–Tits de type sphérique, il suffit de calculer la forme normale positive-négative de son élément central de Garside z_P (voir [Définition 1.35](#)).

4.1 Standardisation d'un système de courbes

4.1.1 Détection des points d'inflexion avec des coordonnées de Dynnikov

Afin de décrire une courbe fermée non dégénérée C dans $\mathcal{D}_n$, on utilisera une notation introduite dans (Fenn *et al.*, 1999). Rappelons que le diamètre de $\mathcal{D}_n$ est $[0, n+1]$ et que les trous de $\mathcal{D}_n$ sont placés dans $1, 2, \dots, n \in \mathbb{R}$. Choisissons un point dans C et une orientation pour C . On va obtenir un mot $W(C)$ représentant C dans l'alphabet $\{\smile, \frown, 0, 1, \dots, n\}$, en parcourant la courbe, commençant et finissant le parcours au point choisi. Pour chaque arc dans le demi-plan inférieur, on écrit le symbol $\smile$, pour chaque arc dans le demi-plan supérieur, le symbol $\frown$, et pour chaque intersection de C avec le segment réel $(m, m+1)$, le nombre m . On peut voir un exemple de cette notation dans la Figure 4.1.

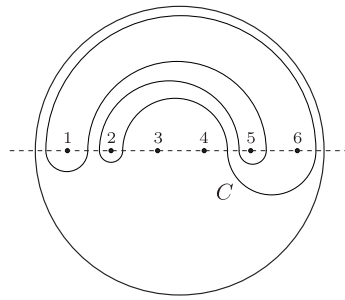


FIGURE 4.1 – $W(C) = 0 \frown 6 \smile 4 \frown 2 \smile 1 \frown 4 \smile 5 \frown 1 \smile$.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de isotopie de courbes. On définit $W(\mathcal{C})$ comme le mot associé à un représentant réduit C^{red} , c'est-à-dire, une courbe dans $\mathcal{C}$ d'intersection minimale avec l'axe réel. C^{red} est unique à isotopie près de $\mathcal{D}_n$ en fixant l'ensemble de points du diamètre réel (Fenn *et al.*, 1999), et $W(\mathcal{C})$ est unique à permutation cyclique et inversion près.

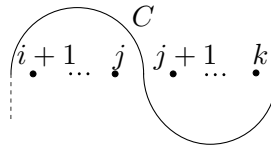
Remarque 4.2. Si une courbe C n'a pas intersection minimale avec l'axe réel, alors $W(C)$ contient un sous-mot de la forme $p \smile p \frown$ ou $p \frown p \smile$. Par conséquent, la courbe peut être isotopée en “poussant” cet arc afin de pas intersecter l'axe réel. Cela équivaut à effacer de $W(C)$ le sous-mot mentionné avant. En fait, on va obtenir $W(\mathcal{C})$ si on efface de $W(C)$ tous les sous-mots de cette forme. Le processus d'effacer $p \smile p \frown$ (resp. $p \frown p \smile$) de $W(C)$ s'appelle *relaxation* de l'arc $p \smile p$ (resp. $p \frown p$).

Définition 4.3. Soit C une courbe simple fermée non dégénérée. On dit qu'il y a un *point d'inflexion* (resp. *point d'inflexion inversé*) de C en j si on peut trouver dans $W(\mathcal{C})$, à permutation cyclique et inversion près, un sous-mot de la forme $i \frown j \smile k$ (resp. $i \smile j \frown k$) sous la condition $0 \leq i < j < k \leq n$ (Figure 4.2).

On dit que un système de courbes a un point d'inflexion en j si l'une de ses courbes a un point d'inflexion en j .

Remarque 4.4. Dans la suite, lorsqu'on parlerons d'un sous-mot d'un certain mot, on voudra dire à permutation cyclique et inversion près.

L'algorithme qu'on décrit dans la Section 4.1 prend un système de courbes $\mathcal{S}$ et le “démêle” de la manière (positive) la plus courte. Autrement dit, il donne la tresse positive la plus courte α telle que $\mathcal{S}^\alpha$ est standard, c'est-à-dire, l'élément minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$. Les

FIGURE 4.2 – Un point d'inflexion en j dans une courbe C .

points d'inflexion sont l'ingrédient clé de l'algorithme. On démontrera que si un système de courbes $\mathcal{S}$ a un point d'inflexion en j , alors σ_j est un préfixe de l'élément minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$. Cela permet de démêler $\mathcal{S}$ en cherchant ses points d'inflexion et en appliquant à la courbe le σ_j correspondant jusqu'au moment où il n'y a plus de points d'inflexion. Le but de cette section est de décrire une entrée convenable pour cet algorithme et de montrer le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Un système de courbes est standard si et seulement si son représentant réduit n'a pas de points d'inflexion.*

On vient de décrire une courbe simple fermée non dégénérée dans $\mathcal{D}_n$ à l'aide du mot $W(C)$. Il y a une façon différente et normalement plus efficace de déterminer un système de courbes $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}_n$: ses coordonnées de Dynnikov (Dehornoy *et al.*, 2008, Chapter 7). La méthode pour établir les coordonnées de C est la suivante. On prend une triangulation de $\mathcal{D}_n$ comme montré dans la Figure 4.3 et notons x_i le nombre de fois que le système de courbes $\mathcal{S}$ intersecte l'arête e_i . Les coordonnées de Dynnikov du système de courbes sont données par le t -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{3n-4})$. Il existe une version réduite de ces coordonnées, à savoir $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$, où

$$a_i = \frac{x_{3i-1} - x_{3i}}{2}, \quad b_i = \frac{x_{3i-2} - x_{3i+1}}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, n-2$$

et $a_0 = a_{n-1} = 0$, $b_0 = -x_0$ et $b_{n-1} = x_{3n-4}$. Voir un exemple dans la Figure 4.4.

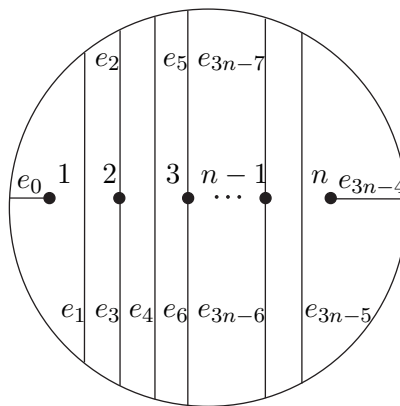


FIGURE 4.3 – Triangulation utilisée pour définir les coordonnées de Dynnikov.

Par ailleurs, il y a des formules pour déterminer comment ces coordonnées changent quand-on applique $\sigma_j^{\pm 1}$ à la courbe correspondant, pour $0 < j < n$.

Proposition 4.6 (Dehornoy *et al.*, 2002, Proposition 8.5.4). *Pour $c = (a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$, on a*

$$c^{\sigma_k^{-1}} = (a'_0, b'_0, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}),$$

avec $a'_j = a_j$, $b'_j = b_j$ pour $j \notin \{k-1, k\}$, et

$$\begin{aligned} a'_{k-1} &= a_{k-1} + (\delta^+ + b_{k-1})^+, \\ a'_k &= a_k - (\delta^+ - b_k)^+, \\ b'_{k-1} &= b_{k-1} - (-\delta')^+ + \delta^+, \\ b'_k &= b_k + (-\delta')^+ - \delta^+, \end{aligned}$$

où $\delta = a_k - a_{k-1}$, $\delta' = a'_k - a'_{k-1}$ et $x^+ = \max(0, x)$.

On a aussi

$$c^{\sigma_k} = c^{\lambda \sigma_k^{-1} \lambda}$$

avec $(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})^\lambda = (-a_1, b_1, \dots, -a_{n-1}, b_{n-1})$.

Remarque 4.7. Il faut remarquer que l'usage de σ_k^{-1} dans la première equation précédente s'explique par l'orientation des croisements des brins (voir [Introduction](#)). En fait, on prend l'orientation opposée à celle prise dans ([Dehornoy et al., 2002](#)).

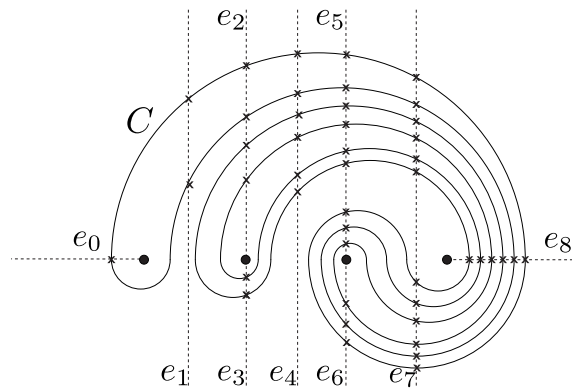


FIGURE 4.4 – Les coordonnées de Dynnikov et les coordonnées de Dynnikov réduites de C sont respectivement $(x_0, \dots, x_8) = (1, 2, 4, 2, 6, 9, 3, 12, 6)$; $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) = (0, -1, 1, -2, 3, -3, 0, 6)$.

Voyons maintenant comment détecter un point d'inflexion d'un système de courbes $\mathcal{S}$ avec ces coordonnées. Tout d'abord, observons qu'il ne peut pas y avoir un point d'inflexion en 0 ou en n . Il est facile de vérifier qu'il y a un point d'inflexion en 1 si et seulement si $x_2 < x_3$ ([Figure 4.5a](#)). En fait, si R est le nombre de sous-mots de la forme $0 \frown 1 \smile k$ pour un certain $1 < k \leq n$, alors $x_3 = x_2 + 2R$. Symétriquement, il y a un point d'inflexion en $n-1$ si et seulement si $x_{3n-6} < x_{3n-7}$.

Un point d'inflexion en i , pour $1 < i < n-1$, est détecté en comparant les coordonnées a_{i-1} et a_i ([Figure 4.5b](#)). Remarquons que les arcs qui n'intersectent pas e_{3i-2} , n'affectent ni a_{i-1} ni a_i , et les arcs qui n'intersectent pas la droite réelle n'affectent pas la différence $a_{i-1} - a_i$. Donc, il y a un point d'inflexion de $\mathcal{S}$ en i si et seulement si $a_{i-1} - a_i > 0$. Avec un argument similaire on peut prouver qu'il y a un point d'inflexion inversé de $\mathcal{S}$ en i si et seulement si $a_{i-1} - a_i < 0$. De plus, chaque point d'inflexion (resp. point d'inflexion inversé) en i augmente (resp. diminue) de 1 la différence $a_{i-1} - a_i$. On vient de prouver le résultat suivant :

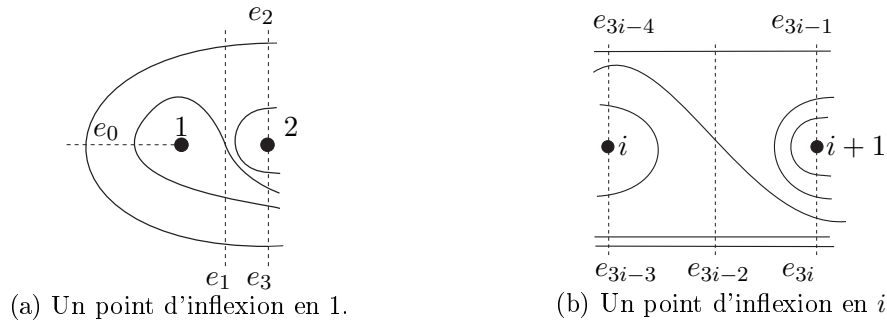


FIGURE 4.5 – Détection de points d'inflexion avec les coordonnées de Dynnikov.

Lemme 4.8 (Point d'inflexion avec des coordonnées de Dynnikov). *Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes dans $\mathcal{D}_n$ ayant pour coordonnées de Dynnikov $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Pour $j = 1, \dots, n-1$ il y a exactement R points d'inflexion (resp. points d'inflexion inversés) de $\mathcal{S}$ en j si et seulement si $a_{j-1} - a_j = R$ (resp. $a_{j-1} - a_j = -R$).*

Lemme 4.9. *Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes comme ci-dessus. Alors $\mathcal{S}$ est symétrique par rapport à l'axe réel si et seulement si $a_i = 0$, pour $0 < i < n$.*

Démonstration. Il suffit d'observer qu'une symétrie par rapport à l'axe réel n'affecte pas les coordonnées b_i et change le signe de chaque a_i , pour $0 < i < n$. $\square$

Lemme 4.10. *Un système de courbes est standard si et seulement s'il est symétrique par rapport à l'axe réel.*

Démonstration. Pour tout $m = 0, \dots, n$, on peut ordonner le nombre fini d'éléments qu'il y a dans $\mathcal{S} \cap (m, m+1)$ de gauche à droite, comme des nombres réels. Étant donné un arc $a \frown b$ de $W(\mathcal{S})$, supposons qu'il joint le i -ème élément de $\mathcal{S} \cap (a, a+1)$ avec le j -ème élément de $\mathcal{S} \cap (b, b+1)$. La symétrie par rapport à l'axe réel préserve l'ordre des intersections avec la droite réelle. D'où l'image $a \smile b$ de l'arc supérieur mentionné rejoindra aussi le i -ème élément de $\mathcal{S} \cap (a, a+1)$ avec le j -ème élément de $\mathcal{S} \cap (b, b+1)$. Cela implique que les deux arcs $a \frown b$ et $a \smile b$ forment une seule courbe standard $a \frown b \smile$. Puisqu'on peut faire ce processus pour tout arc supérieur de $\mathcal{S}$, on conclut que $\mathcal{S}$ est standard. La réciproque est triviale. $\square$

Démonstration de la Proposition 4.5. Si le système de courbes est standard, alors il est clair qu'il n'a pas de points d'inflexion. Réciproquement, s'il n'a pas de points d'inflexion, par le Lemme 4.8 la suite $a_0, \dots, a_{n-1}$ ne diminue pas. Comme $a_0 = a_{n-1} = 0$, la suite doit être constante. Par le Lemme 4.9 et le Lemme 4.10, le système de courbes est standard. $\square$

4.1.2 Procédure de standardisation

Décrivons maintenant un algorithme qui prend les coordonnées de Dynnikov d'un système de courbes $\mathcal{S}$ et calcule l'élément minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$. L'algorithme fera ce qui suit : Il commence avec le donnée $\beta = 1$. Il vérifie si la courbe a un point d'inflexion en j . Si c'est le cas, il multiplie β par σ_j et recommence la procédure avec le système $\mathcal{S}^{\sigma_j}$. Un exemple simple est donné dans la Figure 4.6. La façon formelle est décrite dans l'Algorithme 1.

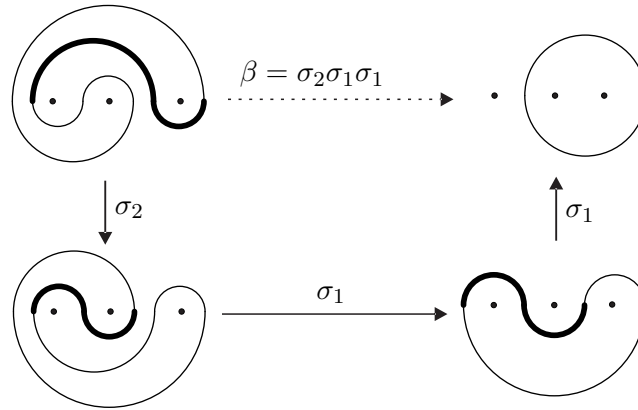


FIGURE 4.6 – Un exemple simple de comment trouver le standardisateur minimal d'une courbe.

Algorithme 1 : Algorithme de standardisation

Entrée : Le coordonnées reduites $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ d'un système de courbes $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}_n$.

Sortie : L'élément $\preceq$ -minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$.

$c = (a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$;

$\beta = 1$;

$j = 1$;

while $j < n$ **do**

if $c[a_j] < c[a_{j-1}]$ **then**

$c = c^{\sigma_j}$; (utiliser Proposition 4.6)

$\beta = \beta \cdot \sigma_j$;

$j = 1$;

else

$j = j + 1$;

return β ;

La minimalité de la sortie de l'algorithme est garantie par le théorème suivant, qui prouve que σ_j est un préfixe du standardisateur minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$, étant donné que $\mathcal{S}$ a un point d'inflexion en j .

Théorème 4.11. *Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes ayant un point d'inflexion en j . Alors σ_j est un préfixe α , pour toute tresse positive α telle que $\mathcal{S}^\alpha$ est standard.*

Afin de démontrer le théorème, on a besoin d'un résultat de (Calvez, 2012).

Définition 4.12. On dit qu'une tresse simple s est *compatible* avec un pont d'inflexion en j si les brins j et $j + 1$ de s ne se croisent pas en s . Autrement dit, si $\sigma_j \not\preceq s$ (par le Lemme 4.15).

Lemme 4.13 (Calvez, 2012, Lemma 8). *Soient s_1 et s_2 deux tresses simples telles que $s_1 s_2$ est en forme normale à gauche. Soit C une courbe ayant un point d'inflexion en j compatible avec s_1 . Alors, il y a un point d'inflexion de C^{s_1} compatible avec s_2 .*

Remarque 4.14. Le lemme précédent est aussi valable pour un système de courbes, en utilisant la même démonstration.

Lemme 4.15 (Elrifai & Morton, 1994, Lemma 2.4). *Soit s une tresse de permutation. Les brins aux positions j et $j + 1$ se croissent dans s si et seulement si $\sigma_j \preccurlyeq s$.*

Démonstration du Théorème 4.11. Supposons que $\alpha \in \mathcal{B}_n^+$ est tel que $\mathcal{S}^\alpha$ est standard et $\sigma_j \not\preccurlyeq \alpha$. Soit $s_1 \cdots s_r$ la forme normale de α . Notons qu'il n'y a pas de Δ^p dans la forme normale. Sinon, σ_j serait un préfixe de α , car il est un préfixe de Δ . Par le Lemme 4.15, les brins j et $j + 1$ de s_1 ne se croissent pas parce que σ_j n'est pas un préfixe de α . Donc, s_1 est compatible avec un point d'inflexion en j et par le Lemme 4.13, $\mathcal{S}^{s_1}$ a un point d'inflexion compatible avec s_2 . Par induction, $\mathcal{S}^{s_1 \cdots s_m}$ a un point d'inflexion compatible avec s_{m+1} , pour $m = 2, \dots, r$, où s_{r+1} est la tresse triviale (notons que le Lemme 4.13 est aussi valable si s_2 est la tresse triviale). Par conséquent, $\mathcal{S}^\alpha$ a un point d'inflexion, c'est-à-dire, il n'est pas standard, ce qui est absurde. $\square$

L'Algorithme 1 décrit la procédure détaillée pour calculer l'élément minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$. À chaque pas, soit la courbe résultant a un point d'inflexion, obtenant une nouvelle lettre de l'élément minimal de $\text{St}(\mathcal{S})$, soit elle est standard et on a fini. Le processus doit s'arrêter à un moment donné car les relations de $\mathcal{B}_n^+$ sont homogènes, ce qui implique que tous les représentants de l'élément minimal ont la même longueur, qui plus précisément est le nombre de points d'inflexion trouvés pendant la procédure.

Remarquons que le Théorème 4.11 garantit que la sortie de l'Algorithme 1 soit un préfixe de tous les standardisateurs de $\mathcal{S}$. Cela fournit une preuve alternative de l'existence et unicité d'un élément minimal dans $\text{St}(\mathcal{S})$.

4.2 Standardisation d'un sous-groupe parabolique

On va donner maintenant un algorithme pour trouver le standardisateur minimal d'un sous-groupe parabolique $P = X^\alpha$ d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique ayant une partie génératrice Σ et une structure de Garside (A, A^+, Δ) . L'existence et unicité d'un tel élément seront montrées par construction.

Lemme 4.16. *Soient $P = A_X^\alpha$ et $Q = A_Y^\beta$ deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique. Alors, on a*

$$g^{-1}Pg = Q \iff g^{-1}z_Pg = z_Q.$$

Démonstration. On a que $g^{-1}Pg = A_Y$ si et seulement si $\beta g^{-1}\alpha^{-1}A_X\alpha g\beta^{-1} = A_Y$. Par le Lemme 1.38, cela équivaut à $\beta g^{-1}\alpha^{-1}z_X\alpha^{-1}g\beta^{-1} = z_Y$, i.e., $g^{-1}z_Pg = z_Q$. $\square$

Corollaire 4.17. *Soit $P = A_X^\alpha$ un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique. Alors on a que*

$$N_A(P) = Z_A(z_P),$$

c'est-à-dire, le normalisateur de P dans A équivaut au centralisateur de l'élément z_P dans A .

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme 4.16 avec $P = Q$. $\square$

Grâce au [Lemme 4.16](#), on sait que pour trouver le standardisateur minimal d'un sous-groupe parabolique $P = A_X^\alpha$, il ne faut que trouver l'élément minimal conjuguant z_P vers un certain z_Y . Soit $C^+(z_P) = \{s \in A^+ \mid s = u^{-1}z_P u, u \in A\}$ l'ensemble des éléments positifs conjugués à z_P (ce qui coïncide avec l'ensemble des éléments positifs conjugués à z_X). Tout d'abord, on va calculer le conjuguant minimal de z_P vers cet ensemble. Autrement dit, le plus petit élément u tel que $u^{-1}z_P u \in A^+$.

Proposition 4.18. *Si $x = ab^{-1}$ est en forme normale positive-négative courte ([Définition 1.14](#)) et x est conjugué à un élément positif, alors b est un préfixe de tout élément positif qui conjugue x vers $C^+(x)$.*

Démonstration. Supposons que ρ est un élément positif tel que $\rho^{-1}x\rho$ est positif. Alors $1 \preceq \rho^{-1}x\rho$. En multipliant de gauche à droite par $x^{-1}\rho$ on obtient $x^{-1}\rho \preceq \rho$ et, comme ρ est positif, $x^{-1} \preceq x^{-1}\rho \preceq \rho$. Par conséquent, $x^{-1} \preceq \rho$ ou, autrement dit $ba^{-1} \preceq \rho$. D'autre part, par définition de forme normale positive-négative, on a que $a \wedge^{\dagger} b = 1$, qui équivaut à dire que $a^{-1} \vee b^{-1} = 1$ ([Gebhardt & González-Meneses, 2010a](#), Lemme 1.3). En multipliant par la gauche par b , on obtient $ba^{-1} \vee 1 = b$.

Finalement, observons que $ba^{-1} \preceq \rho$ et aussi que $1 \preceq \rho$. Donc, $b = ba^{-1} \vee 1 \preceq \rho$. Comme b est un préfixe de ρ pour tout ρ positif conjuguant x vers un élément positif, on obtient le résultat désiré. $\square$

Lemme 4.19. *Soit A_X un sous-groupe parabolique standard et soient $\alpha \in A^+$, $t \in \Sigma$. Si $\alpha\Delta_X^k \succcurlyeq t$, alors $\alpha \succcurlyeq r_{X,t}$ pour tout $k > 0$.*

Démonstration. Comme le résultat est évident pour $t \in X$ ($r_{X,t} = 1$), supposons que $t \notin X$. Trivialement, $\alpha\Delta_X^k \succcurlyeq \Delta_X$. Comme $\alpha\Delta_X^k \succcurlyeq t$, on a $\alpha\Delta_X^k \succcurlyeq \Delta_X \vee^{\dagger} t$. Par définition, $\Delta_X \vee^{\dagger} t = \Delta_{X \cup \{t\}} = r_{X,t}\Delta_X$. Donc, $\alpha\Delta_X^k \succcurlyeq r_{X,t}\Delta_X$ et alors $\alpha \succcurlyeq r_{X,t}$, car $\succcurlyeq$ est invariant par multiplication à droite. Comme $r_{X,t} \succcurlyeq t$ (voir [Remarque 1.41](#)), le résultat découle par récurrence. $\square$

Théorème 4.20. *Soit $P = A_X^\alpha$ un sous-groupe parabolique. Si $z_P = ab^{-1}$ est en forme normale positive-négative courte, alors b est le standardisateur $\preceq$ -minimal de P .*

Démonstration. Par la [Proposition 4.18](#) on sait que b est un préfixe de tout élément positif conjuguant z_P vers un élément positif, ce qui garantit sa minimalité. On sait aussi par le [Lemme 4.16](#) que tout standardisateur de P doit conjuguer z_P vers un élément positif, concrètement vers l'élément central de Garside d'un certain sous-groupe parabolique standard. Donc il ne reste plus qu'à montrer que b lui-même conjugue z_P vers l'élément central de Garside d'un certain sous-groupe parabolique standard. Supposons que α est positif, car il y a toujours quelque $k \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^{2k}\alpha$ est positif et, comme Δ^2 se trouve dans le centre de A , $P = A_X^\alpha = A_X^{\Delta^{2k}\alpha}$.

On obtient la forme normale positive-négative courte de $z_P = \alpha z_X \alpha^{-1}$ par annulation du plus grand commun suffixe de αz_X et α . Supposons que $t \in \Sigma$ est tel que $\alpha \succcurlyeq t$ et $\alpha z_X \succcurlyeq t$. Si $t \notin X$, alors $r_{X,t} \neq 1$ et par le [Lemme 4.19](#) on a que $\alpha \succcurlyeq r_{X,t}$, i.e., $\alpha = \alpha_1 r_{X,t}$ pour un certain $\alpha_1 \in A_\Sigma$. Donc,

$$\alpha z_X \alpha^{-1} = \alpha_1 r_{X,t} z_X r_{X,t}^{-1} \alpha_1^{-1} = \alpha_1 z_{X_1} \alpha_1^{-1}$$

pour un certain $X_1 \subset \Sigma$. Dans ce cas-là, on réduit la longueur du conjuguant (par la longueur de $r_{X,t}$). Si $t \in X$, t commute avec z_X , ce qui revient à dire que

$$\alpha z_X \alpha^{-1} = \alpha_1 t z_X t^{-1} \alpha_1^{-1} = \alpha_1 z_{X_1} \alpha_1^{-1},$$

où α_1 est une lettre plus court que α et $X_1 = X$.

On peut répéter le même processus pour $\alpha_i z_{X_i} \alpha_i^{-1}$, où $X_i \subset \Sigma$, $t_i \in \Sigma$ est tel que $\alpha_i \succ t_i$ et $\alpha_i z_{X_i} \succ t_i$. Comme la longueur du conjuguant diminue à chaque pas, la procédure devra s'arrêter à un moment donné. Le résultat sera la forme normale positive-négative de z_P , qui aura la forme :

$$z_P = (\alpha_k z_{X_k}) \alpha_k^{-1}, \quad \text{for } k \in \mathbb{N}, X_k \subset \Sigma.$$

Alors, il est clair que $\alpha_k = b$ conjugue z_P vers z_{X_k} , qui est l'élément central de Garside d'un sous-groupe parabolique standard. Ainsi, b est le standardisateur $\preceq$ -minimal de P . $\square$

On finit cette section avec un résultat concernant les classes de conjugaison des éléments de la forme z_P . Comme tous les éléments de la forme z_X , $X \subseteq \Sigma$, sont rigides (Définition 1.12), en utilisant le théorème suivant on peut montrer que l'ensemble des circuits glissants de z_P équivaut à son ensemble des conjugués positifs.

Théorème 4.21 (Gebhardt & González-Meneses, 2010b, Théorème 1). *Soit G un groupe de Garside de type fini. Si $x \in G$ est conjugué à un élément rigide, alors $SC(x)$ est l'ensemble des conjugués rigides de x .*

Corollaire 4.22. *Soit $P = A_X^\alpha$ un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. Alors*

$$\begin{aligned} C^+(z_P) &= SS(z_P) = SSS(z_P) = USS(z_P) = RSSS(z_P) = SC(z_P) \\ &= \{z_Y \mid Y \subseteq \Sigma, z_Y \text{ conjugué de } z_X\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Par le Théorème 4.21 et la Proposition 1.24, il suffit de prouver que $C^+(z_P)$ n'est composé que d'éléments rigides de la forme z_Y . Soit $P' = A_X^\beta$ et supposons que $z_{P'} \in C^+(z_P)$. Comme $z_{P'}$ est positif, si ab^{-1} est la forme normale positive-négative courte de $z_{P'}$, alors $b = 1$. Par le Théorème 4.20, 1 est le standardisateur minimal de P' , ce qui implique que P' est standard. Par conséquent, tous les conjugués positifs de $z_{P'}$ sont égaux à z_Y pour un certain Y et ils sont ainsi rigides. $\square$

Corollaire 4.23. *Soit $P = A_X^\alpha$ un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. Alors l'ensemble de standardisateurs positifs de P ,*

$$\text{St}(P) = \{\alpha \in A^+, \mid P^\alpha = A_Y, \text{ for some } Y \subseteq \Sigma\},$$

est un sous-treillis de A^+ .

Démonstration. Soient s_1 et s_2 deux standardisateurs positifs de P et soient $\alpha := s_1 \wedge s_2$ et $\beta := s_1 \vee s_2$. Par le Corollaire 4.22 et, par exemple, (Gebhardt & González-Meneses, 2010b, Proposition 7, Corollaire 7), on obtient que $\alpha^{-1} z_P \alpha = z_Y$ et $\beta^{-1} z_P \beta = z_Z$ pour certains $Y, Z \subseteq \Sigma$. Ainsi, $\alpha, \beta \in \text{St}(P)$, comme on voulait démontrer. $\square$

4.3 Complexité

Dans cette section on va décrire la complexité computationnelle des algorithmes pour calculer les standardisateurs minimaux de courbes et sous-groupes paraboliques. Commençons avec l'Algorithme 1, qui calcule le standardisateur minimal d'un système de courbes.

La complexité de l'Algorithme 1 dépendra de la longueur de la sortie, ce qui est le nombre des pas de l'algorithme. Afin de borner cette longueur, on va calculer celle d'une certaine tresse positive appartenant à $\text{St}(\mathcal{S})$. Cela bornera la longueur du standardisateur minimal de $\mathcal{S}$.

La façon usuelle de décrire la longueur (où la complexité) d'un système de courbes consiste à dénombrer les intersections avec l'axe réel, i.e., $\ell(\mathcal{S}) = \#(\mathcal{S} \cap \mathbb{R})$. Pour les nombres entiers $0 \leq i < j < k \leq n$, on définit la tresse suivante (voir Figure 4.7) :

$$s(i, j, k) = (\sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1})(\sigma_{j+1} \sigma_j \cdots \sigma_{i+2}) \cdots (\sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \cdots \sigma_{i+k-j})$$

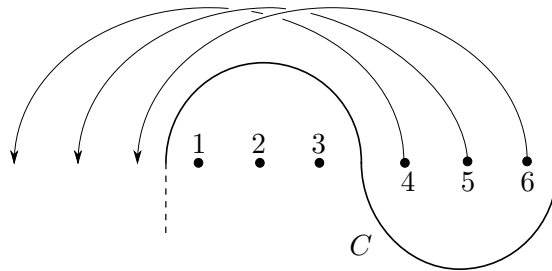


FIGURE 4.7 – Application de $s(0, 3, 6)$.

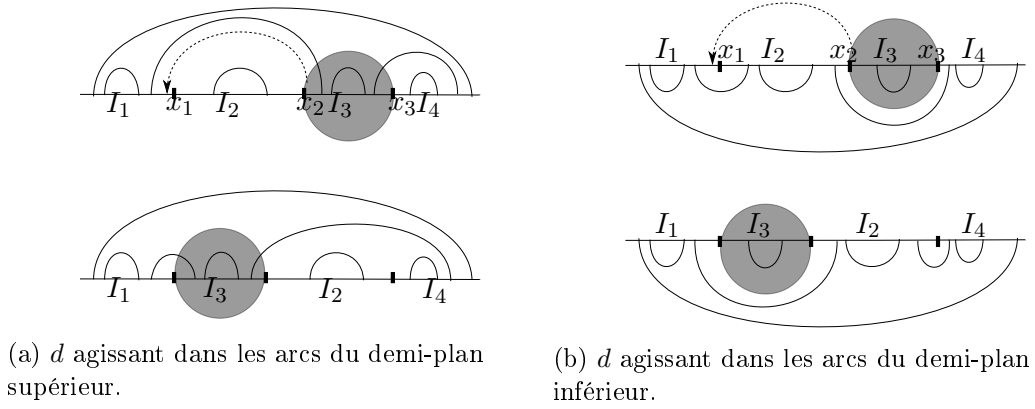
Lemme 4.24. Appliquer $s = s(i, j, k)$ à un système de courbes $\mathcal{S}$, quand $i \frown j \smile k$ est un point d'inflexion, diminue la longueur du système de courbes au moins de deux.

Démonstration. On va décrire les arcs des courbes de $\mathcal{S}$ d'une nouvelle manière, en associant un nombre réel $c_p \in (0, n+1)$ à chacune des intersections de $\mathcal{S}$ avec l'axe réel, où p est la position de l'intersection par rapport aux autres intersections : c_1 est l'intersection la plus à gauche et $c_{\ell(\mathcal{S})}$ est celle la plus à droite. Comme ça, on va obtenir un ensemble de mots représentant les courbes de $\mathcal{S}$, dans l'alphabet $\{\smile, \frown, c_1, \dots, c_{\ell(\mathcal{S})}\}$, en parcourant la courbe, commençant et finissant au même point. Comme précédemment, on écrit un symbole $\smile$ pour chaque arc dans le demi-plan inférieur, et un symbole $\frown$ pour chaque arc dans le demi-plan supérieur. On définit aussi la fonction suivante, qui envoie cet alphabet vers l'alphabet qu'on avait introduit au début du chapitre :

$$L: \{\smile, \frown, c_1, \dots, c_{\ell(\mathcal{S})}\} \longrightarrow \{\smile, \frown, 0, \dots, n\}$$

$$L(\smile) = \smile, \quad L(\frown) = \frown, \quad L(c_p) = \lfloor c_p \rfloor.$$

Prenons un disque D tel que $\partial(D)$ intersecte l'axe réel en deux points, x_2 et x_3 . Considérons un autre point x_1 sur l'axe réel tel que $L(x_1) < L(x_2)$. Supposons qu'il n'y a pas d'arcs de $\mathcal{S}$ dans le demi-plan supérieur qui intersectent l'arc $x_1 \frown x_2$ et qu'il n'y a pas d'arcs de $\mathcal{S}$ dans le demi-plan inférieur qui intersectent l'arc $x_2 \smile x_3$. Notons $I_1 = (0, x_1)$, $I_2 = (x_1, x_2)$, $I_3 = (x_2, x_3)$ et $I_4 = (x_3, n+1)$ et définissons $|I_t|$ comme le nombre des trous qui se trouvent dans l'intervalle I_t .

FIGURE 4.8 – La manière dont l'automorphisme $d(x_1, x_2, x_3)$ agit dans les arcs de C .

Considérons un automorphisme de $\mathcal{D}_n$, appelé $d = d(x_1, x_2, x_3)$, qui est la composition d'une isotopie qui prend D et le bouge, à travers le demi-plan supérieur, vers le disque avec rayon ε et centre x_1 , qui ne contient pas ni points de la forme c_p ni de trous, suivi d'un automorphisme qui fixe la droite réelle comme ensemble et ramène les trous aux positions $1, \dots, n$. Cela correspond à "placer l'intervalle I_3 entre les intervalles I_1 et I_2 ". Premièrement, on peut voir dans la Figure 4.8 que la seule modification dont les arcs de $\mathcal{S}$ peuvent être soumis est le décalage de ses points finals. Par hypothèse, il n'y a pas d'arcs dans le demi-plan supérieur qui connectent I_2 avec I_j pour $j \neq 2$, et il n'y a pas d'arcs dans le demi-plan inférieur qui connectent I_3 avec I_j pour $j \neq 3$. Tout autre arc est transformé par d en un seul arc et donc il n'y a pas d'arcs qui se transforment. Algébriquement, prenons un arc de $\mathcal{S}$, $c_a \frown c_b$ (resp. $c_a \smile c_b$), tel que $L(c_a) = \tilde{a}$ et $L(c_b) = \tilde{b}$. Alors, son image par d est $c'_a \frown c'_b$ (resp. $c'_a \smile c'_b$) où

$$L(c'_p) = \begin{cases} \tilde{p} & \text{if } c_p \in I_1, I_4, \\ \tilde{p} + |I_3| & \text{if } c_p \in I_2, \\ \tilde{p} - |I_2| & \text{if } c_p \in I_3, \end{cases} \quad \text{pour } p = a, b.$$

Une fois qu'on a appliqué cet automorphisme, peut-être que la courbe n'est pas réduite. Dans ce cas, il faudra relaxer les arcs inutiles et la complexité de $\mathcal{S}$ diminuera.

Maintenant, considérons un point d'inflexion $i \frown j \smile k$ donné de $\mathcal{S}$ et l'ensemble

$$B = \{c_p \frown c_q \smile c_r \mid L(c_p) < L(c_q) < L(c_r) \text{ and } L(c_q) = j\},$$

et choisissons l'élément de B avec le plus grand indice q , qui est aussi celui avec les plus petits p et r . On définit x_1, x_2 et x_3 tels que $x_1 \in (c_{p-1}, c_p) \cap (L(c_p), L(c_p) + 1)$, $x_2 \in (c_q, c_{q+1}) \cap (j, j + 1)$ et $x_3 \in (c_{r-1}, c_r) \cap (L(c_r), L(c_r) + 1)$. Alors, la tresse $s(L(c_p), j, L(c_r))$ est représentée par l'automorphisme $d(x_1, x_2, x_3)$ (voir Figure 4.9). Observons que le choix du point d'inflexion de B garantit la non-existence d'arcs de C intersectant $x_1 \frown x_2$ ou $x_2 \smile x_3$. Après l'échange de I_2 et I_3 , l'arc $c_q \smile c_r$ sera transformé en $c'_q \smile c'_r$, où $L(c'_q) = L(c'_r) = L(c_r)$, et donc il sera aussi relaxé, réduisant la longueur de $\mathcal{S}$ au moins de deux. $\square$

L'automorphisme $s = s(i, j, k)$ nécessite au plus $(k - j) \cdot (j - i)$ générateurs et ce nombre est borné par $n^2/4$, car $(k - j) + (j - i) \leq n$ et $(u + v)^2 \geq 4uv$. Par conséquent, la sortie de

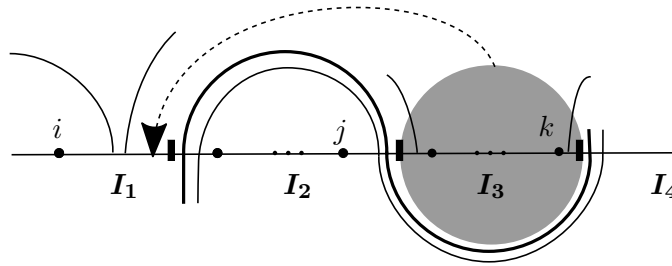


FIGURE 4.9 – Appliquer $s(i, j, k)$ à une courbe est équivalent à permuter ses intersections avec l'axe réel et après mettre la courbe en position minimale.

notre algorithme a au plus $\frac{1}{8}\ell(\mathcal{S}) \cdot n^2$ lettres, car on a démontré que s réduit la longueur du système de courbes à chaque pas. Notre prochain objectif est de borner ce nombre en termes de la sortie de l'algorithme, c'est-à-dire, en termes des coordonnées de Dynnikov réduites.

Définition 4.25. On dit qu'il y a une *épingle à gauche* (resp. une *épingle à droite*) de $\mathcal{C}$ en j si on peut trouver dans $W(\mathcal{C})$, à permutation cyclique et inversion près, un sous-mot de la forme $i \frown j - 1 \smile k$ (resp. $i \frown j \smile k$) pour des certains $i, k > j - 1$ (resp. $i, k < j$) (voir la Figure 4.10).

Proposition 4.26. Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes dans $\mathcal{D}_n$ ayant par coordonnées de Dynnikov réduites $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Alors $\ell(\mathcal{S}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (2|a_i| + |b_i|)$.

Démonstration. Chaque intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe réel correspond à un sous-mot de $W(\mathcal{C})$ de la forme $i \frown j \smile k$ ou $i \smile j \frown k$. Si $i < j < k$, le sous-mot correspond à un point d'inflexion ou, respectivement, à un point d'inflexion inversé. Si $i, k > j$, il y a une épingle à gauche en $j + 1$. Semblablement, si $i, k < j$, il y a une épingle à droite en j .

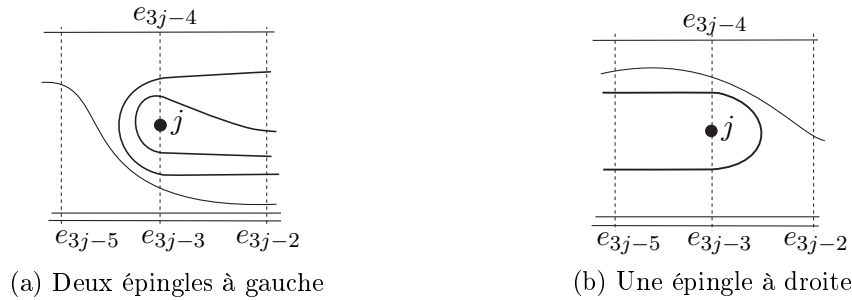


FIGURE 4.10 – Détection des épingles avec des coordonnées de Dynnikov.

Rappelons que par le Lemme 4.8 on sait déjà comment détecter des points d'inflexion avec des coordonnées de Dynnikov réduites. En fait, il y a exactement R points d'inflexion (y compris les inversés) en i si et seulement si $|a_{i-1} - a_i| = R$. On veut détecter aussi des épingles afin de déterminer $\ell(\mathcal{S})$. Observons dans la Figure 4.10 que les seuls types d'arcs qui peuvent apparaître dans la région entre les lignes e_{3j-5} et e_{3j-2} sont des épingles (à gauche ou à droite) et d'arcs intersectant e_{3j-5} et e_{3j-2} . Les arcs intersectant e_{3j-5} et e_{3j-2} ne modifient pas la différence $x_{3j-5} - x_{3j-2}$ tandis que chaque épingle à gauche la fait diminuer par 2 et chaque épingle à droite la fait augmenter par 2. On remarque que dans la région mentionnée il ne peut pas avoir d'épingles à gauche et à droite en même

temps. Donc, il y a précisément R épingles à gauche (resp. à droite) en j si et seulement si $b_{j-1} = -R$ (resp. $b_{j-1} = R$). Ainsi, comme $a_0 = a_{n-1} = 0$,

$$\ell(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{i-1} - a_i| + \sum_{j=0}^{n-1} |b_j| \leq \sum_{i=1}^{n-1} (|a_{i-1}| + |a_i|) + \sum_{j=0}^{n-1} |b_j| = \sum_{i=0}^{n-1} (2|a_i| + |b_i|).$$

□

Corollaire 4.27. *Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes dans $\mathcal{D}_n$ ayant par coordonnées de Dynnikov réduites $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Alors, la longueur du standardisateur minimal de $\mathcal{S}$ est au plus*

$$\frac{1}{8} \sum_{i=0}^{n-1} (2|a_i| + |b_i|) \cdot n^2.$$

Démonstration. Par le [Lemme 4.24](#), la longueur du standardisateur minimal de $\mathcal{S}$ est au plus $\frac{1}{8}\ell(\mathcal{S})n^2$. Le résultat découle en considérant la borne de $\ell(\mathcal{S})$ donnée dans la [Proposition 4.26](#). □

Remarque 4.28. Afin de vérifier que cette borne est computationnellement optimale, il faut trouver un cas dans lequel on doit éliminer un seul point d'inflexion à chaque pas de l'algorithme, c'est-à-dire, on veut trouver une famille de systèmes de courbes $\{\mathcal{S}_k\}_{k>0}$ telle que la longueur du standardisateur minimal de $\mathcal{S}_k$ est quadratique dans n et linéaire dans $\ell(\mathcal{S})$. Soit $n = 2t + 1$, $t \in \mathbb{N}$. Considérons le système de courbes suivant dans $\mathcal{D}_n$,

$$\mathcal{S}_0 = \{t \smile n \frown\}$$

et la tresse $\alpha = s(0, t, n-1)$. Maintenant définissons $\mathcal{S}_k = (\mathcal{S}_0)^{\alpha^{-k}}$. On appelle spirale avec k demi-tours à la courbe $\mathcal{S}_k$ (voir [Figure 4.11](#)) et elle est telle que $\ell(\mathcal{S}_k) = 2(k+1)$. En utilisant l'[Algorithme 1](#), on voit que le standardisateur minimal de cette courbe est α^k , qui a $k \cdot t^2$ facteurs. Donc, le nombre de facteurs de le standardisateur minimal de $\mathcal{S}_k$ est d'ordre $O(\ell(\mathcal{S}_k) \cdot n^2)$.

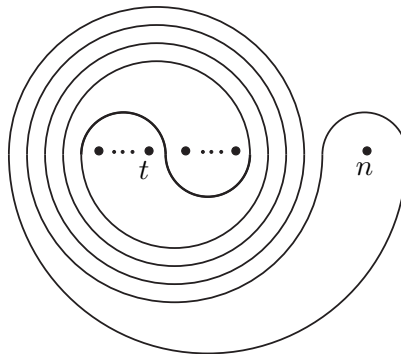


FIGURE 4.11 – La courbe $\mathcal{S}_5$.

Corollaire 4.29. *Soit $\mathcal{S}$ un système de courbes dans $\mathcal{D}_n$ ayant par coordonnées de Dynnikov réduites $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Soit $m = \sum_{i=0}^{n-1} (|a_i| + |b_i|)$. Alors, la complexité du calcul du standardisateur minimal de $\mathcal{S}$ est $O(n^2 m \log(m))$.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que

$$\ell(\mathcal{S}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (2|a_i| + |b_i|) \leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} (|a_i| + |b_i|) = 2m,$$

et que la transformation décrite dans la [Proposition 4.6](#) nécessite d'un nombre fini d'opérations basiques (addition et maximum). Appliquer σ_j aux coordonnées de Dynnikov modifie seulement quatre de ses coordonnées, et chaque maximum ou addition entre deux nombres est linéaire dans le nombre de chiffres de ses arguments. Cela implique qu'appliquer σ_j à la courbe a un coût de $O(\log(M))$, où $M = \max\{|a_i|, |b_i| \mid i = 0, \dots, n-1\}$. D'après le [Corollaire 4.27](#), le nombre d'itérations exécutées est $O(n^2m)$. Donc, comme $M \leq m$, la complexité de calculer le standardisateur minimal de $\mathcal{S}$ est $O(n^2m \log(m))$. $\square$

Pour trouver la complexité de l'algorithme qui calcule le standardisateur minimal d'un sous-groupe parabolique $P = (X, \alpha)$ d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique A , il faut juste savoir le coût de calculer la forme normale positive-négative courte de z_P . Si $x_r \cdots x_1 \Delta^{-p}$ avec $p > 0$ est la forme normale à droite de z_P , alors sa forme normale positive-négative est $(x_r \cdots x_{p+1})(x_p \cdots x_1 \Delta^{-p})$. Par conséquent, il suffit de calculer la forme normale à droite de z_P pour calculer le standardisateur minimal de P . Il est bien connu que ce calcul a complexité quadratique (pour une preuve, voir ([Dehornoy, 2008](#))). D'où, on a le suivant :

Proposition 4.30. *Soit $P = (X, \alpha)$ un sous-groupe parabolique d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique, et soit $\ell = \ell(\alpha)$ la longueur canonique de α . La complexité de calculer le standardisateur minimal de P est $O(\ell^2)$.*

Intersection de sous-groupes paraboliques

*“Relax” said the night man, “we are programmed to receive.
You can check out any time you like, but you can never
leave!”*

Eagles, *Hotel California*

Sommaire

5.1 Résultats techniques et préliminaires	60
5.1.1 Structures de Garside alternatives	60
5.1.2 Résultats préliminaires pour les groupes d’Artin–Tits de type sphérique	60
5.1.3 Cyclages twistés et ensembles sommitaux	62
5.1.4 Conjugués positifs d’éléments dans un sous-groupe parabolique	66
5.2 Résultats principaux	72
5.2.1 La clôture parabolique d’un élément arbitraire	72
5.2.2 Intersection de sous-groupes paraboliques	77
5.2.3 Le treillis des sous-groupes paraboliques	82
5.3 Complexe des sous-groupes paraboliques irréductibles	83

Dans ce chapitre, fruit d’une collaboration avec Volker Gebhardt, Juan González-Meneses et Bert Wiest, on montre que dans un groupe d’Artin–Tits de type sphérique l’intersection de deux sous-groupes paraboliques est un sous-groupe parabolique ([Théorème 5.34](#)). En plus, on démontre que l’ensemble de sous-groupes paraboliques est un treillis par rapport à l’inclusion ([Théorème 5.37](#)).

Pour obtenir ces résultats, on montrera que tout élément dans un groupe d’Artin–Tits de type sphérique admet un unique sous-groupe parabolique minimal le contenant, qu’on appelle la clôture parabolique ([Proposition 5.26](#)). On verra aussi que la clôture parabolique d’un élément coïncide avec les clôtures paraboliques de ses puissances et racines ([Théorème 5.28](#)).

Dans la [Section 5.3](#), on va définir le complexe simplicial des sous-groupes paraboliques irréductibles et on va le proposer comme l’analogue du complexe de courbes pour les groupes d’Artin–Tits de type sphérique. Finalement, on conjecture que ce complexe est δ -hyperbolique.

Pour simplifier les notations, le long de ce chapitre on va considérer le système d’Artin–Tits de type sphérique (A, Σ) avec élément de Garside Δ .

5.1 Résultats techniques et préliminaires

5.1.1 Structures de Garside alternatives

Le groupe d'Artin–Tits A admet d'autres structures de Garside de type (A, A^+, Δ^N) , qui sont obtenues en remplaçant l'élément de Garside Δ par une puissance positive non triviale Δ^N . Pour voir ça en détail, rappelons que $\Delta^p \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \Delta^q$ est équivalent à $\Delta^q \succcurlyeq \alpha \succcurlyeq \Delta^p$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, donc les préfixes positifs de Δ^N coïncident avec les suffixes positifs de Δ^N , et rappelons que $s \preccurlyeq \Delta \preccurlyeq \Delta^N$ pour tout $s \in \Sigma$, donc les diviseurs de Δ^N engendrent A .

Les éléments simples par rapport à cette structure de Garside sont les préfixes positifs de Δ^N (qui, en général, ne sont plus sans facteur carré si $N > 1$). La forme normale négative-positive d'un élément par rapport à la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) peut être obtenue à partir de celle par rapport à la structure (A, A^+, Δ) , en regroupant les facteurs simples de la partie positive et négative en groupes de N facteurs. (Si nécessaire, on “remplit” les groupes les plus à l'extérieur avec des copies de l'identité jusqu'à avoir N facteurs).

La forme normale mixte est très utile pour savoir si un élément appartient à un sous-groupe parabolique standard propre. Si on a $\alpha \in A_X$, avec $X \subseteq \Sigma$, et $\alpha = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1} y_1 \cdots y_t$ est la forme normale négative-positive de α dans A_X , alors les facteurs simples $x_1, \dots, x_s$ et $y_1, \dots, y_t$, qui appartiennent à A_X , sont aussi des éléments simples dans A tels que $x_1 \cdots x_s$ et $y_1 \cdots y_t$ sont en forme normale à gauche dans A . Donc, l'expression précédente est aussi la forme normale négative-positive de α dans A . En conséquence, étant donné $\alpha \in A$, on aura $\alpha \in A_X$ si et seulement si tous les facteurs dans la forme normale négative-positive de α appartiennent à A_X . Par conséquent, si $x \neq 1$, $\inf(\alpha) = \inf_X(\alpha) = -s$, et si $y \neq 1$, alors $\sup(\alpha) = \sup_X(\alpha) = t$. On utilisera ce fait de façon récurrente, mais parfois on aura besoin que la forme normale mixte d'un élément coïncide avec sa forme normale mixte courte. C'est pourquoi on utilisera les structures de Garside alternatives.

Supposons que $\alpha = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1} y_1 \cdots y_t$ est en forme normale négative-positive, pour la structure de Garside classique de A . Si on prend $N \geq \max(s, t)$, alors $x = x_1 \cdots x_s \preccurlyeq \Delta^N$ et $y = y_1 \cdots y_t \preccurlyeq \Delta^N$. Cela veut dire que x et y sont des éléments simples par rapport à la structure de Garside dans laquelle Δ^N est l'élément de Garside. Ainsi donc, pour tout $\alpha \in A$, on peut considérer une structure de Garside de A telle que la forme normale négative-positive de α est $x^{-1}y$, où x et y sont des éléments simples.

5.1.2 Résultats préliminaires pour les groupes d'Artin–Tits de type sphérique

Cette section se concentre sur des nouvelles propriétés des groupes d'Artin–Tits de type sphérique dont on aura besoin. Les propriétés dans cette section sont spécifiques des groupes d'Artin–Tits et ne se généralisent pas aux groupes de Garside de façon directe.

Lemme 5.1. *Si $X \subsetneq \Sigma$, et $t \in \Sigma \setminus X$, alors*

- (a) $t \preccurlyeq r_{t,X}$
- (b) *Si $s \in \Sigma$ avec $s \preccurlyeq r_{t,X}$, alors $s = t$.*

Démonstration. On commence par démontrer (b). Rappelons-nous du fait que l'ensemble des préfixes d'un élément de Garside avec la structure de Garside classique coïncide avec son ensemble de suffixes. Si $s \in \Sigma$ avec $s \preceq r_{t,X}$, alors on a $s \preceq r_{t,X} \preceq \Delta_{X \cup \{t\}}$, et par conséquent $s \in X \cup \{t\}$. Par ailleurs, $\Delta_X r_{t,X}$ est un élément simple par le [Lemme 1.43](#), donc sans facteur carré, et $\Delta_X \succcurlyeq u$ pour tout $u \in X$, donc $s \notin X$ et la démonstration de (b) est finie. Pour la preuve de (a), comme $t \notin X$, on a $t \not\preceq \Delta_X$ et alors $r_{t,X} \neq 1$ par le [Lemme 1.43](#). Cela veut dire que $r_{t,X}$ doit commencer avec quelque lettre. Si on regarde la partie (b), cette lettre doit être t . $\square$

On définit le *support* d'un élément positif $\alpha \in A$, noté $\text{supp}(\alpha)$, comme l'ensemble de générateurs $s \in \Sigma$ qui apparaissent dans tout mot positif représentant α . Cela est bien défini pour deux raisons : Premièrement, deux mots positifs représentent le même élément dans A si et seulement si on peut transformer le premier en le second en appliquant les relations de la présentation de A , c'est-à-dire, si et seulement si les deux mots représentent le même élément dans le monoïde A^+ défini par la même présentation que A ([Paris, 2002](#)). D'autre part, grâce à la forme des relations de la présentation de A^+ , appliquer une relation à un mot ne modifie pas l'ensemble des générateurs qui y apparaissent, donc tous les mots qui représentent un élément de A^+ impliquent le même ensemble de générateurs.

Pour un élément qui ne soit pas nécessairement positif $\alpha \in A$, on définit son *support* comme $\text{supp}(\alpha) = \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y)$, où $\alpha = x^{-1}y$ est la forme normale positive-négative de α .

Le lemme suivant a été démontré dans ([Digne & Gomi, 2001](#), Lemme 1) and ([Godelle, 2001](#), Lemme 2.3.2) en utilisant des résultats sur les groupes de Coxeter :

Lemme 5.2. *Soit α un élément simple (par rapport à la structure de Garside usuelle) de A . Soient $t, s \in \Sigma$. Alors :*

$$\left. \begin{array}{l} t \not\preceq \alpha \\ t \preceq \alpha s \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha s = t\alpha$$

Démonstration. Comme les relations qui définissent A^+ sont homogènes, la longueur de α comme mot par rapport à Σ est bien définie. On fera la démonstration par récurrence sur la longueur de α . Si $\alpha = 1$, le résultat est immédiat, donc on va supposer $\alpha \neq 1$ et que le résultat est vrai pour les éléments de longueur plus petite.

Soit $a \in \Sigma$ tel que $a \preceq \alpha$. Il y a une relation dans A de la forme $atat \cdots = tata \cdots$, où les mots de chaque côté ont longueur $m = m(a, t)$. Notons ρ_i la i -ème lettre du mot $atat \cdots$, pour $i = 1, \dots, m$. Cela veut dire, $\rho_i = a$ si i est impair, et $\rho_i = t$ si i est pair. Rappelons que $\rho_1 \cdots \rho_m = a \vee t$. Par ailleurs, $\rho_1 \cdots \rho_m = t\rho_1 \cdots \rho_{m-1}$.

On a $t \preceq \alpha s$ et $a \preceq \alpha \preceq \alpha s$, et donc $a \vee t = \rho_1 \cdots \rho_m \preceq \alpha s$. Il faut remarquer que $\rho_1 \cdots \rho_m = a \vee t \not\preceq \alpha$ (car $t \not\preceq \alpha$), mais $\rho_1 = a \preceq \alpha$. Par conséquent, il y a un certain k , avec $0 < k < m$, tel que $\rho_1 \cdots \rho_k \preceq \alpha$ et $\rho_1 \cdots \rho_{k+1} \not\preceq \alpha$.

Écrivons $\alpha = \rho_1 \cdots \rho_k \alpha_0$. Alors $\rho_{k+1} \not\preceq \alpha_0$, mais $\rho_{k+1} \preceq \alpha_0 s$. Par l'hypothèse de récurrence, $\alpha_0 s = \rho_{k+1} \alpha_0$. Ainsi $\alpha s = \rho_1 \cdots \rho_{k+1} \alpha_0$, où $k+1 \leq m$.

On peut montrer que $k+1 = m$. Sinon, comme $\rho_1 \cdots \rho_m \preceq \alpha s = \rho_1 \cdots \rho_{k+1} \alpha_0$, on aurait $\rho_{k+2} \preceq \alpha_0$, et alors $\rho_1 \cdots \rho_k \rho_{k+2} \preceq \alpha$, ce qui n'est pas possible car $\rho_k = \rho_{k+2}$ et α est simple (et sans facteur carré).

Ainsi $k + 1 = m$ et $\alpha s = \rho_1 \cdots \rho_m \alpha_0 = t \rho_1 \cdots \rho_{m-1} \alpha_0 = t \alpha$, comme on voulait démontrer. $\square$

Remarque 5.3. Le résultat précédent n'est pas vrai si α n'est pas simple (avec la structure de Garside usuelle). Par exemple, si on considère le groupe d'Artin–Tits $\langle a, b \mid abab = baba \rangle$, et les éléments $\alpha = aaba$ et $t = s = b$, on a $b \not\preceq \alpha$, mais

$$\alpha b = aabab = ababa = babaa,$$

donc $b \preceq \alpha b$, mais $\alpha b \neq b \alpha$ parce que $\alpha = aaba \neq abaa$.

On finit cette section avec une propriété importante concernant les éléments centraux z_P .

Lemme 5.4. *Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $z_P z_Q = z_Q z_P$
2. $(z_P)^m (z_Q)^n = (z_Q)^n (z_P)^m$ pour certains $n, m \neq 0$
3. $(z_P)^m (z_Q)^n = (z_Q)^n (z_P)^m$ pour tous $n, m \neq 0$

Démonstration. Si z_P et z_Q commutent, il est clair que $(z_P)^m$ et $(z_Q)^n$ commutent pour tous $n, m \neq 0$. Réciproquement, supposons que $(z_P)^m$ et $(z_Q)^n$ commutent pour certains $n, m \neq 0$.

Par (Godelle, 2003, Proposition 2.1), si $X, Y \subseteq \Sigma$ et $m \neq 0$, alors on a $u^{-1}(z_X)^m u \in A_Y$ si et seulement si $u = vy$ avec $y \in A_Y$ et $v^{-1}Xv = Y$.

Par conséquent, si $u^{-1}(z_X)^m u = (z_X)^m$ on peut prendre $Y = X$, de telle façon que y commute avec z_X et v induit une permutation de X , ce qui implique $v^{-1}A_X v = A_X$ et donc $v^{-1}z_X v = z_X$. Ainsi $u^{-1}z_X u = y^{-1}v^{-1}(z_X)vy = y^{-1}z_X y = z_X$.

Maintenant rappelons que $(z_P)^m (z_Q)^n = (z_Q)^n (z_P)^m$. Comme $\alpha^{-1}P\alpha = A_X$ pour un certain $\alpha \in A$ et un certain $X \subseteq \Sigma$, on peut conjuguer l'égalité précédente par α pour obtenir $(z_X)^m (\alpha^{-1}z_Q\alpha)^n = (\alpha^{-1}z_Q\alpha)^n (z_X)^m$, qui implique $z_X (\alpha^{-1}z_Q\alpha)^n = (\alpha^{-1}z_Q\alpha)^n z_X$ par la même raison du paragraphe précédent. Si on conjugue en sens inverse, on obtient $z_P (z_Q)^n = (z_Q)^n z_P$.

Prenons $\beta \in A$ tel que $\beta^{-1}Q\beta = A_Y$ pour un certain $Y \subseteq \Sigma$. En conjuguant l'inégalité du paragraphe précédent par β , on a $(\beta^{-1}z_P\beta)(z_Y)^n = (z_Y)^n(\beta^{-1}z_P\beta)$, ce qui implique $(\beta^{-1}z_P\beta)z_Y = z_Y(\beta^{-1}z_P\beta)$. Si on conjugue dans le sens inverse, on finit par obtenir $z_P z_Q = z_Q z_P$. $\square$

5.1.3 Cyclages twistés et ensembles sommitaux

Soit $\alpha \in A$ be un élément dont la forme normale à gauche est $\Delta^p \alpha_1 \cdots \alpha_r$ avec $r > 0$.

Le *cyclage twisté* de α est défini par $\tilde{c}(\alpha) = \tau^{-1}(c(\alpha))$. C'est le conjugué de α par $\iota(\alpha)\Delta^{-1}$, qui est l'inverse d'un élément simple. (On peut penser à $\tilde{c}$ comme une conjugaison à gauche par un élément simple). Remarquons que l'élément conjuguant est

$$\iota(\alpha)\Delta^{-1} = \Delta^p \alpha_1 \Delta^{-(p+1)}.$$

Le lemme suivant nous dit que le cyclage twisté est en fait plus naturel que le cyclage du point de vue des formes normales mixtes. Il faut remarquer que sa preuve marche aussi si on utilise la structure de Garside alternative avec élément de Garside Δ^n , pour un certain $n > 1$.

Lemme 5.5. *Si $\alpha = x^{-1}y = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_t$ est la forme normale négative-positive d'un élément de A , et $x \neq 1$, alors l'élément conjuguant pour le cyclage twisté est précisément x_s^{-1} . Ainsi,*

$$\tilde{\mathbf{c}}(\alpha) = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_tx_s^{-1}.$$

Démonstration. On a déjà vu que l'élément conjuguant pour le cyclage twisté de α est $\Delta^{-s}\alpha_1\Delta^{s-1}$, où α_1 est le premier facteur différent de Δ dans sa forme normale à gauche, c'est-à-dire, $\alpha_1 = \tilde{x}_s = \tau^{-s}(\partial(x_s)) = \Delta^s\partial(x_s)\Delta^{-s}$.

Par conséquent, l'élément conjuguant est $\Delta^{-s}\Delta^s\partial(x_s)\Delta^{-s}\Delta^{s-1} = \partial(x_s)\Delta^{-1} = x_s^{-1}$. $\square$

Il est facile de déduire des définitions des ensembles sommitaux (Sous-section 1.1.2) que $\mathbf{c}$ et τ commutent. En fait, pour tout $\beta \in A$, les élément conjuguants pour les conjugaisons $\beta \mapsto \mathbf{c}(\tau(\beta))$ et $\beta \mapsto \tau(\mathbf{c}(\beta))$ sont le même. Donc, on a $\mathbf{c}^k(\beta) = \beta$ pour un certain $k > 0$ si et seulement si $\tilde{\mathbf{c}}^t(\beta) = \beta$ pour un certain $t > 0$. Cela veut dire que le cyclage twisté peut être utilisé pour définir l'ensemble ultra-sommital et l'ensemble super-sommital réduit.

Il est bien connu (Elrifai & Morton, 1994; Gebhardt, 2005) que quand on applique des cyclages itérés, en commençant par $\alpha \in A$, on obtient un élément α' dont l'infimum est maximal dans sa classe de conjugaison. Alors, en appliquant des décyclages itérés à α' on obtient un élément α'' dont le supremum est minimal dans sa classe de conjugaison, donc $\alpha'' \in SSS(\alpha)$. Finalement, quand on applique des cyclages itérés à α'' jusqu'à obtenir un élément répété α''' , on a $\alpha''' \in USS(\alpha)$. Si encore on applique des décyclages itérés à α''' jusqu'à trouver un élément répété, on obtient $\hat{\alpha} \in RSSS(\alpha)$.

Selon (Birman et al., 2007), pour conjuguer $\hat{\alpha}$ à $SU(\alpha)$, on a juste besoin d'appliquer les éléments conjuguants pour le cyclage et décyclage itérés à certains puissances de $\hat{\alpha}$. Par conséquent, tous les ensembles sommitaux sont non-vides (et finis), et en plus on a :

Lemme 5.6. *Soit α un élément dans un groupe de Garside G avec élément de Garside Δ , et soit I égal à $SSS(\alpha)$, $USS(\alpha)$, $RSSS(\alpha)$, où $SU(\alpha)$. On peut conjuguer α vers $\beta \in I$ en utilisant une séquence de conjugaisons :*

$$\alpha = \alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_m = \beta$$

où, pour $i = 0, \dots, m-1$, l'élément conjuguant de α_i vers α_{i+1} est de la forme $\alpha_i^p \Delta^q \wedge \Delta^r$ pour certains entiers p, q et r .

Démonstration. On a besoin de montrer que les élément conjuguants, soit pour le cyclage, soit pour le décyclage, d'une puissance x^k d'un élément x sont de la forme $x^p \Delta^q \wedge \Delta^r$ pour certains p, q et r .

Si x^k est une puissance de Δ , l'élément conjuguant est trivial, et donc le résultat s'en-suit. Sinon, supposons que $\Delta^m x_1 \cdots x_n$ est la forme normale de x^k . Alors $x^k \Delta^{-m} = \tau^{-m}(x_1) \cdots \tau^{-m}(x_n)$, où la décomposition précédente est en forme normale. Par conséquent, $x^k \Delta^{-m} \wedge \Delta = \tau^{-m}(x_1) = \iota(x^k)$ et l'élément conjuguant pour le cyclage a la forme désirée.

D'autre part, $\Delta^{m+n-1} \wedge x^k = \Delta^m x_1 \cdots x_{n-1}$. Alors on a $x_n^{-1} = x^{-k}(\Delta^{m+n-1} \wedge x^k) = x^{-k} \Delta^{m+n-1} \wedge 1$. Comme x_n^{-1} est l'élément conjuguant pour le décyclage de x^k , le résultat est démontré. $\square$

Les ensembles $C^+(\alpha)$, $SSS(\alpha)$, $USS(\alpha)$, $RSSS(\alpha)$ et $SU(\alpha)$ partagent une propriété importante, qui normalement s'appelle *convexité*. Rappelons que β^x est égal à $x^{-1}\beta x$ et que $\wedge$ note le pgcd dans le treillis associé à l'ordre préfixe $\preccurlyeq$.

Lemme 5.7. (Franco & González-Meneses, 2003, Propositions 4.8 et 4.12), (Gebhardt, 2005, Theorem 1.18) *Soit α un élément d'un groupe de Garside G et soit I égal à $C^+(\alpha)$, $SSS(\alpha)$, $USS(\alpha)$, $RSSS(\alpha)$, où $SU(\alpha)$. Si $\alpha, \alpha^x, \alpha^y \in I$ alors $\alpha^{x \wedge y} \in I$.*

Remarque 5.8. La convexité de $SU(\alpha)$ n'est pas montrée dans (Birman et al., 2007), mais elle découle immédiatement de la convexité de $USS(\alpha)$.

Remarque 5.9. La convexité de $RSSS(\alpha)$ découle également de la convexité de $USS(\alpha)$, en tenant en compte le suivant : Un élément x appartient à une orbite fermée par décyclage si et seulement si x^{-1} appartient à une orbite fermée par cyclage twisté. En fait, l'élément conjuguant pour le cyclage twisté de x^{-1} est égal à l'élément conjuguant pour le décyclage de x . Donc les éléments dans $RSSS(\alpha)$ sont les éléments x , conjugués à α , tels que x et x^{-1} tous les deux appartiennent à des orbites fermés par cyclage. Cela implique la convexité de $RSSS(\alpha)$. Remarquons que cela implique aussi $SU(\alpha) \subseteq RSSS(\alpha)$.

L'ensemble I normalement est obtenu en calculant le graphe dirigé $\mathcal{G}_I$, dont ses sommets sont les éléments de I , et dont ses flèches correspondent aux *conjuguants positifs minimaux*. C'est-à-dire, il y a une flèche étiquetée par x , partant d'un sommet u et arrivant à un autre sommet v si et seulement si :

1. $x \in A^+$, $x \neq 1$;
2. $u^x = v$; et
3. $u^y \notin I$ pour tout préfixe propre non-trivial y de x .

Grâce à ce propriété de convexité, on peut voir que le graphe $\mathcal{G}_I$ est fini et connexe, et que l'étiquette de chaque flèche est un élément simple. C'est pourquoi ce graphe peut être construit à partir d'un seul sommet, en conjuguant de façon itérative les sommets connus par des éléments simples, jusqu'à on ne puisse pas obtenir des nouveaux éléments de I .

On aura besoin d'utiliser une structure de Garside différent (A, A^+, Δ^n) pour des valeurs positives de n distinctes. Afin de préciser la structure de Garside qu'on utilise, on écrira I_n dans ce cas, au lieu de I , pour un ensemble sommital donné. Par exemple, étant donné $n \geq 1$ et un élément $\alpha \in A$, on écrira $SSS_n(\alpha)$, $USS_n(\alpha)$, $RSSS_n(\alpha)$ et $SU_n(\alpha)$ pour faire référence respectivement à l'ensemble super-sommital, ultra-sommital, super-sommital réduit et ultra-sommital stable de α par rapport à la structure (A, A^+, Δ^n) . Il faut remarquer que tous ces ensembles sont finis et ne contiennent que des conjugués de α . En plus, l'ensemble $C^+(\alpha)$ est indépendant de la structure de Garside utilisée, donc $C_n^+(\alpha) = C^+(\alpha)$ pour tout $n > 0$.

Dans la suite on va prouver que dans un ensemble sommital I il y a toujours un élément appartenant à I_n pour tout $n > 1$.

Définition 5.10. Soit $\alpha \in A$ et soit I égal à SSS , USS , $RSSS$, où SU . Alors on définit $I_\infty(\alpha) = \bigcap_{n \geq 1} I_n(\alpha)$.

Proposition 5.11. *Pour tout $\alpha \in A$, l'ensemble $I_\infty(\alpha)$ n'est pas vide.*

Démonstration. On écrit I_n au lieu de $I_n(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pour tout $N \geq 1$, soit $I_{\leq N} = \bigcap_{n=1}^N I_n$. On va montrer que $I_{\leq N} \neq \emptyset$ par récurrence sur N .

Si $N = 1$ alors $I_{\leq N} = I_1$, qui n'est pas vide. On suppose alors que $N > 1$ et qu'il y a un élément $\beta \in I_{\leq (N-1)}$. Si on utilise la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) , on peut conjuguer β vers un élément $\gamma \in I_N$ en appliquant certains conjugaisons convenables

$$\beta = \beta_0 \rightarrow \beta_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \beta_m = \gamma.$$

Par [Lemme 5.6](#), pour tout $i = 0, \dots, m-1$ l'élément qui conjugue β_i vers β_{i+1} est de la forme $\beta_i^p \Delta^{Nq} \wedge \Delta^{Nr}$ pour certains entiers p, q et r . Rappelons que $\beta \in I_{\leq (N-1)}$. On veut démontrer que, si on applique un tel élément conjuguant à β , l'élément obtenu β_1 appartiendra aussi à $I_{\leq (N-1)}$. Si on répète le raisonnement m fois, on déduira que $\gamma \in I_{\leq (N-1)} \cap I_N = I_{\leq N}$, so $I_{\leq N} \neq \emptyset$.

Si $\beta \in I_n$ pour un certain n , alors $\beta^{\beta^p \Delta^{Nq}} = \beta^{\Delta^{Nq}} = \tau^{Nq}(\beta) \in I_n$, et aussi $\beta^{\Delta^{Nr}} = \tau^{Nr}(\beta) \in I_n$. Par le [Lemme 5.7](#) on voit que $\beta_1 \in I_n$. Par conséquent, si $\beta \in I_{\leq (N-1)}$ alors $\beta_1 \in I_{\leq (N-1)}$, comme on voulait démontrer.

Ainsi, on a montré que $I_{\leq N} \neq \emptyset$ pour tout $N \geq 1$. Comme l'ensemble I_1 est fini et on a une chaîne décroissant monotone

$$I_1 = I_{\leq 1} \supseteq I_{\leq 2} \supseteq I_{\leq 3} \supseteq \cdots,$$

cette chaîne doit se stabiliser à partir d'un certain $N \geq 1$, et donc $I_\infty = I_{\leq N} \neq \emptyset$. □

On finit cette section en rappelant un outil important pour étudier les propriétés de l'ensemble ultra-sommital : La *transportée*.

Définition 5.12 ([Gebhardt, 2005](#)). Soit α un élément d'un groupe de Garside G et $v, w \in USS(\alpha)$. Soit $x \in A$ un élément conjuguant v vers w , c'est-à-dire, $x^{-1}vx = w$. Pour tout $i \geq 0$, on écrit $v^{(i)} = \mathbf{c}^i(v)$ et $w^{(i)} = \mathbf{c}^i(w)$. La *transportée* de x en v est l'élément $x^{(1)} = \iota_S(v)^{-1}x\iota_S(w)$, qui conjugue $v^{(1)}$ vers $w^{(1)}$.

On peut définir de façon itérative $x^{(i)}$ comme la transportée de $x^{(i-1)}$ en $v^{(i-1)}$. C'est-à-dire, la i -ème *transportée* de x en v , notée $x^{(i)}$, est l'élément suivant, conjuguant $v^{(i)}$ vers $w^{(i)}$:

$$x^{(i)} = \left(\iota(v)\iota(v^{(1)}) \cdots \iota(v^{(i-1)}) \right)^{-1} x \left(\iota(w)\iota(w^{(1)}) \cdots \iota(w^{(i-1)}) \right).$$

Lemme 5.13 ([Gebhardt, 2005](#), Lemme 2.6). *Soit α un élément d'un groupe de Garside G et $v, w \in USS(\alpha)$. Pour tout élément x tel que $x^{-1}vx = w$, il y a un certain entier $N > 0$ tel que $v^{(N)} = v$, $w^{(N)} = w$ et $x^{(N)} = x$.*

On remarque que dans ([Gebhardt, 2005](#)) on suppose que x est un élément positif, mais, comme dit dans le chapitre précédent, en multipliant x par une puissance centrale de l'élément de Garside Δ , on peut toujours supposer que x est positif.

On peut récrire [Lemme 5.13](#) de la façon suivante :

Lemme 5.14. *Soit α un élément d'un groupe de Garside G , et soit $v, w \in \text{USS}(\alpha)$. Soient m et n les longueurs des orbites par cyclage de v et w , respectivement. Notons $C_t(v)$ (respectivement $C_t(w)$) le produit de t éléments conjuguants consécutifs pour le cyclage, commençant en v (respectivement commençant en w). Alors, pour tout x tel que $x^{-1}vx = w$, il y a un commun multiple positif N de m et n tel que $x^{-1}C_{kN}(v)x = C_{kN}(w)$ pour tout $k > 0$.*

Démonstration. Par le Lemme 5.13, il y a un certain $N > 0$ tel que $v^{(N)} = v$, $w^{(N)} = w$ et $x^{(N)} = x$. La première propriété implique que N est un multiple de m . La deuxième, que N est un multiple de n . Finalement, par la définition de transportée, la troisième propriété veut juste dire $x^{-1}C_N(v)x = C_N(w)$.

Voyons que, comme N est un multiple de la longueur m de l'orbite de v par cyclage, on a $C_{kN}(v) = C_N(v)^k$ pour tout $k > 0$. De façon analogue, $C_{kN}(w) = C_N(w)^k$ pour tout $k > 0$. Donc $x^{-1}C_{kN}(v)x = x^{-1}C_N(v)^kx = C_N(w)^k = C_{kN}(w)$. $\square$

Corollaire 5.15. *Soit α un élément d'un groupe de Garside G , et soit $v, w \in \text{USS}(\alpha)$. Pour tout $t > 0$, notons $\tilde{C}_t(v)$ (respectivement $\tilde{C}_t(w)$) le produit de t éléments conjuguants consécutifs pour le cyclage twisté, commençant en v (respectivement en w). Alors, pour tout x tel que $x^{-1}vx = w$, il y a un entier positif M tel que $x^{-1}\tilde{C}_M(v)x = \tilde{C}_M(w)$, où $\tilde{C}_M(v)$ commute avec v et $\tilde{C}_M(w)$ commute avec w .*

Démonstration. Par définition de cyclage et cyclage twisté, on a $\tilde{C}_t(v) = C_t(v)\Delta^{-t}$ et $\tilde{C}_t(w) = C_t(w)\Delta^{-t}$ pour tout $t > 0$.

On sait par le Lemme 5.14 qu'il y a un certain entier N tel que $x^{-1}C_{kN}(v)x = C_{kN}(w)$ pour tout $k > 0$. Si on prend k suffisamment grand, de façon que Δ^{kN} soit central, et on écrit $M = kN$, on a :

$$x^{-1}\tilde{C}_M(v)x = x^{-1}C_M(v)\Delta^{-M}x = x^{-1}C_M(v)x\Delta^{-M} = C_M(w)\Delta^{-M} = \tilde{C}_M(w).$$

En plus, par le Lemme 5.14 on sait que $C_M(v)$ commute avec v , donc $\tilde{C}_M(v) = C_M(v)\Delta^{-M}$ commute aussi avec v . De la même manière, $\tilde{C}_M(w)$ commute avec w . $\square$

5.1.4 Conjugués positifs d'éléments dans un sous-groupe parabolique

Supposons qu'un élément α appartient à un sous-groupe parabolique propre $P \subsetneq A$ et qu'il a un conjugué positif. Dans cette section, on va montrer que tous les conjugués positifs de α appartient à un sous-groupe parabolique standard propre, déterminé par leurs supports correspondants.

En plus, on va montrer que le support d'un conjugué positif de α est *préservé par conjugaison*, c'est-à-dire, si α' et α'' sont deux conjugués positifs de α , dont leurs supports sont respectivement X et Y , alors tout élément conjuguant α' vers α'' va aussi conjuguer A_X vers A_Y .

Cela nous permettra aussi de définir un sous-groupe parabolique spécial associé à α , qui sera le plus petit sous-groupe parabolique (par inclusion) contenant α .

Lemme 5.16. *Si $\alpha \in A_X \subseteq A$ où $X \subsetneq \Sigma$, alors soit $\mathbf{c}(\alpha) \in A_Y$, soit $Y = X$, soit $Y = \tau(X)$.*

Démonstration. Soit $x^{-1}y = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_t$ la forme normale négative-positif de α dans A . Comme cette forme est précisément la forme normale négative-positif de α dans A_X , on a $\text{supp}(x) \subseteq X$ et $\text{supp}(y) \subseteq X$.

Supposons que $x = 1$, donc $y = y_1 \cdots y_t$. Il est clair que $y_1 \neq \Delta$, car $X \subsetneq \Sigma$. Alors $\mathbf{c}(\alpha) = \alpha^{y_1} = y_2 \cdots y_t y_1$, donc $\mathbf{c}(\alpha) \in A_X$. Remarquons que si $y_1 \neq \Delta_X$ ou si α est une puissance de Δ_X , alors on a $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}_X(\alpha)$, et sinon on peut avoir $\mathbf{c}(\alpha) \neq \mathbf{c}_X(\alpha)$.

Maintenant supposons que $x \neq 1$. On a vu dans le [Lemme 5.5](#) que

$$\tilde{\mathbf{c}}(\alpha) = x_{s-1}^{-1} \cdots x_1^{-1} y_1 \cdots y_t x_s^{-1},$$

donc $\tilde{\mathbf{c}}(\alpha) = \tau^{-1}(\mathbf{c}(\alpha)) \in A_X$, ce qui implique que $\mathbf{c}(\alpha) \in A_{\tau(X)}$. Il faut remarquer que dans ce cas $\mathbf{c}(\alpha)$ n'est pas nécessairement égal à $\mathbf{c}_X(\alpha)$, mais $\tilde{\mathbf{c}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{c}}_X(\alpha)$. $\square$

Lemme 5.17. *Si $\alpha \in A_X \subseteq A$ où $X \subsetneq \Sigma$, soit $k > 0$, et soit $c = \iota(\alpha^k)$ l'élément conjuguant pour le cyclage de α^k . Alors $\alpha^c \in A_Y$, où soit $Y = X$, soit $Y = \tau(X)$.*

Démonstration. On peut supposer que α est non-trivial. Soit $x^{-1}y = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_t$ la forme normale négative-positif de α^k dans A . Comme cela est précisément la forme normale négative-positif de α^k dans A_X , tous les facteurs appartiennent à A_X .

Si $x = 1$ alors $c = y_1 \in A_X$, donc $\alpha^c \in A_X$. Sinon, on a vu dans le [Lemme 5.5](#) que $x_s^{-1} \in A_X$ est l'élément conjuguant pour le cyclage twisté de α^k , ce qui implique que $c = x_s^{-1}\Delta$ par définition de cyclage twisté. Comme $\alpha^{x_s^{-1}} \in A_X$, on a $\alpha^c \in A_{\tau(X)}$ comme on affirmait. $\square$

Lemme 5.18. *Si $\alpha \in A_X \subseteq A$ où $X \subsetneq \Sigma$, alors $\mathbf{d}(\alpha) \in A_Y$, où soit $Y = X$, soit $Y = \tau(X)$.*

Démonstration. En regardant les éléments conjuguants pour le décyclage et cyclage twisté, il est évident que pour tout élément α , on a $\mathbf{d}(\alpha) = (\tilde{\mathbf{c}}(\alpha^{-1}))^{-1}$. Comme $\alpha \in A_X$, alors $\alpha^{-1} \in A_X$ et $\tilde{\mathbf{c}}(\alpha^{-1}) \in A_Y$, où soit $Y = X$ soit $Y = \tau(X)$. Ainsi, $\mathbf{d}(\alpha) = (\tilde{\mathbf{c}}(\alpha^{-1}))^{-1} \in A_Y$. $\square$

Grâce au [Lemme 5.16](#) et au [Lemme 5.18](#), on voit que si $\alpha \in A_X$, alors on obtient $\alpha'' \in A_X \cap \text{SSS}(\alpha)$, où α'' est obtenu à partir de α par cyclages et décyclages itérés (et peut-être une conjugaison par Δ à la fin). Notons que si α est conjugué à un élément positif, alors α'' est positif (car l'infimum de α'' est maximal dans sa classe de conjugaison).

Supposons que $\alpha'' \in A_X$ est positif. On veut étudier le graphe $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$. On sait déjà qu'il y a un sommet $\alpha'' \in C^+(\alpha)$ qui appartient à sous-groupe parabolique standard propre. Voyons que celui est le cas pour tous les éléments dans $C^+(\alpha)$.

Proposition 5.19. *Soit $v \in C^+(\alpha)$ avec $\text{supp}(v) = X \subsetneq \Sigma$. Alors l'étiquette de chaque flèche de $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ partant de v soit appartient à A_X , soit est une lettre $t \in \Sigma$ qui commute avec toute lettre dans X , soit est égale à $r_{t,X}$ pour une certaine lettre $t \in \Sigma$ adjacente à X dans Γ_Σ .*

Démonstration. Soit x l'étiquette d'une flèche dans $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ partant de v . Soit $t \in \Sigma$ tel que $t \preceq x$. On va séparer la preuve dans trois cas.

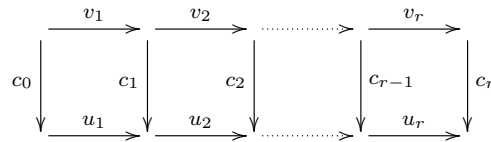
Cas 1 : Supposons que $t \in X$. Comme Δ_X conjugue v vers un élément positif $\tau_X(v)$, la propriété de convexité implique que $\Delta_X \wedge x$ conjugue aussi v vers un élément positif. Comme x est minimal par rapport à cette propriété, $\Delta_X \wedge x$ doit être soit trivial, soit égal à x . Toutefois, $\Delta_X \wedge x$ n'est peut pas être trivial car $t \preceq \Delta_X \wedge x$. Par conséquent, $\Delta_X \wedge x = x$, ce qui veut dire $x \preceq \Delta_X$. Ainsi, $x \in A_X$.

Cas 2 : Supposons que $t \notin X$ et que t n'est pas adjacent à X . Alors t commute avec toutes les lettres de X , ce qui implique que $v^t = v$ est un élément positif. Donc, par la minimalité de x , on a $x = t$.

Cas 3 : Supposons que $t \notin X$ et que t est adjacent à X . On doit montrer que $x = r_{t,X}$.

On va déterminer x de façon algorithmique, en commençant avec $t \preceq x$, et en ajoutant lettres jusqu'à avoir l'élément conjuguant x .

Écrivons $v = v_1 \cdots v_r$, où $v_i \in X$ pour $i = 1, \dots, r$, et soit c_0 tel que $t \preceq c_0 \preceq x$ et $c_0 \preceq r_{t,X}$. Considérons le diagramme suivant, dans lequel deux éléments qui partagent les mêmes sommets de départ et d'arrivée représentent le même élément :



Les éléments c_1 et u_1 sont définis par la condition $c_0 \vee v_1 = c_0 u_1 = v_1 c_1$. Cela correspond au premier carré. Alors c_2 et u_2 sont déterminés par la condition $c_1 \vee v_2 = c_1 u_2 = v_2 c_2$, qui correspond au deuxième carré, etcétera.

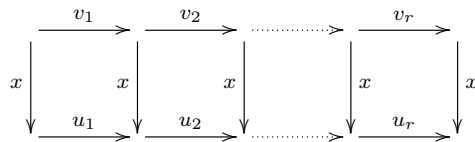
Considérons les affirmations suivantes qui seront prouvées plus tard :

Affirmation 1 : $c_0 \vee (v_1 \cdots v_i) = (v_1 \cdots v_i) c_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Affirmation 2 : $t \preceq c_0 \preceq c_1 \preceq c_2 \preceq \cdots \preceq c_r \preceq x$ et $c_r \preceq r_{t,X}$.

Ces affirmations nous donnent une procédure pour calculer x : On commence avec $c_0 = t = x_0$, et on calcule $c_1, c_2, \dots, c_r =: x_1$. Si x_1 est plus long que x_0 , on recommence le processus en prenant $c_0 = x_1$, et on calcule $c_1, \dots, c_r =: x_2$. On continue tant que x_i est plus long que x_{i-1} . Comme tous les éléments obtenus sont préfixes de x , le processus doit s'arrêter et on a $x_{k-1} = x_k$ pour un certain k . D'ailleurs, l'Affirmation 1 implique que $x_k \preceq v x_k$, donc v^{x_k} est un élément positif. Maintenant remarquons que $x_k \preceq x$. Par conséquent, on que $x_k = x$ grâce à la minimalité de x .

Arrivés à ce point de l'itération, quelque-chose d'intéressant va se passer. On peut substituer $c_0 = x$ dans le diagramme précédent et obtenir :



Cela arrive car chaque flèche verticale est un préfixe de la suivante, et car la première et dernière flèche coïncident, donc toutes les flèches verticales doivent être la même. Alors $v_i x = x u_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Comme toutes les relations dans la présentation de A sont homogènes, chaque u_i est une seule lettre, et donc x conjugue tout l'ensemble X vers un

ensemble $Y \subsetneq \Sigma$ (car $\text{supp}(v) = X$). Mais alors $x^{-1}\Delta_X x$ est un élément positif, c'est-à-dire, $x \preceq \Delta_X x$. Par conséquent $t \preceq x \preceq \Delta_X x$. Par le [Lemme 1.43](#), $\Delta_X r_{t,X} = \Delta_X \vee t \preceq \Delta_X x$, donc on a que $r_{t,X} \preceq x$. Finalement, par la minimalité de x , on a $x = r_{t,X}$, comme on voulait démontrer.

Maintenant on va faire les preuves des Affirmations 1 et 2 :

Preuve de l’Affirmation 1 : On va démontrer par récurrence sur i que $c_0 \vee (v_1 \cdots v_i) = (v_1 \cdots v_i)c_i$. Cela est vrai pour $i = 1$ par définition de c_1 , don on suppose que $i > 1$ et que l’affirmation est vraie pour $i - 1$. Alors $c_0 \vee (v_1 \cdots v_i) = v_1 \cdots v_i d$. On a

$$(v_1 \cdots v_{i-1})c_{i-1} = c_0 \vee (v_1 \cdots v_{i-1}) \preceq c_0 \vee (v_1 \cdots v_i) = (v_1 \cdots v_i)d,$$

et par conséquent

$$(v_1 \cdots v_{i-1})v_i c_i = (v_1 \cdots v_{i-1})v_i \vee (v_1 \cdots v_{i-1})c_{i-1} \preceq (v_1 \cdots v_{i-1})v_i d.$$

Cela implique $c_i \preceq d$. Mais $(v_1 \cdots v_i)c_i$ est un multiple commun de c_0 et $v_1 \cdots v_i$ par construction, donc $d = c_i$ et l’affirmation est montrée.

Preuve de l’Affirmation 2 : par hypothèse, on a $c_0 \preceq r_{t,X}$. On va montrer par récurrence sur i que $c_i \preceq r_{t,X}$ pour tout $i \geq 0$. Supposons que $c_{i-1} \preceq r_{t,X}$ pour un certain i . Comme $X^{r_{t,X}} = Y$ pour un certain $Y \subsetneq \Sigma$ par la [Proposition 1.42](#), on déduit que $v_i^{r_{t,X}}$ est positif, c'est-à-dire, $r_{t,X} \preceq v_i r_{t,X}$. Donc $c_{i-1} \preceq v_i r_{t,X}$ et finalement $v_i c_i = c_{i-1} \vee v_i \preceq v_i r_{t,X}$, donc $c_i \preceq r_{t,X}$.

D’autre part, on montre que $c_{i-1} \preceq c_i$ pour $i \geq 1$: Comme v_i est une seule lettre appartenant à X , et t est la seule lettre initiale de $r_{t,X}$ par le [Lemme 5.1](#), $t \notin X$ implique que $v_i \not\preceq c_{i-1}$, donc $u_i \neq 1$. Écrivons le mot $c_{i-1}u_i$ comme $c_{i-1}u'_i s$, où s est une seule lettre. Comme $c_{i-1}u_i = c_{i-1} \vee v_i$, on voit que $v_i \not\preceq c_{i-1}u'_i$ et $v_i \preceq c_{i-1}u'_i s$. Remarquons que c_{i-1} est un élément simple par rapport à la structure de Garside usuelle, car il est un préfixe de $r_{t,X}$, donc $c_{i-1}u'_i$ est simple car il est un préfixe de $c_{i-1} \vee v_i$, qui est aussi simple. Par le [Lemme 5.2](#), on obtient que $c_{i-1}u'_i s = v_i c_{i-1}u'_i$. Cela veut dire que $v_i c_i = c_{i-1}u_i = c_{i-1}u'_i s = v_i c_{i-1}u'_i$, ce qui implique que $c_{i-1} \preceq c_i$.

Finalement, on démontre que $c_r \preceq x$: Comme $x^{-1}vx$ est positif, on a que $c_0 \preceq x \preceq vx$, et aussi $vc_0 \preceq vx$. Par conséquent, $c_0 \vee vc_0 \preceq vx$. Mais notons que par l’Affirmation 1, $c_0 \vee v = vc_r$, donc $vc_r = c_0 \vee v \preceq c_0 \vee vc_0 \preceq vx$. Ainsi, $c_r \preceq x$. $\square$

Exemple 5.20. Dans la [Figure 5.1](#) on peut voir le graphe $\mathcal{G}_{C+(\alpha)}$ pour $\alpha = \sigma_1 \sigma_2$ dans le groupe de tresses à 5 brins (le groupe d’Artin–Tits de type A_4). On voit le 6 sommets correspondants aux conjugués positifs de $\sigma_1 \sigma_2$, et les trois types de flèches expliqués dans le [Proposition 5.19](#). Par exemple, les flèches partant de $\sigma_1 \sigma_2$ sont étiquetées par σ_1 (type 1), σ_4 (type 2) et $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$ (type 3).

Corollaire 5.21. *Soit $\alpha \in A$ un élément non-trivial qui appartient à un sous-groupe parabolique propre et est conjugué à un élément positif. Alors tous les conjugués positifs de α appartiennent à un sous-groupe parabolique standard propre. En plus, si v et w sont conjugués positifs de α avec $\text{supp}(v) = X$ et $\text{supp}(w) = Y$, alors pour tout $x \in A$ tel que $x^{-1}vx = w$, on a $x^{-1}z_X x = z_Y$ (et donc $x^{-1}A_X x = A_Y$).*

Démonstration. Grâce aux hypothèses données, on sait qu’on peut conjuguer α vers un élément positif $v \in A_X$, où $X \subsetneq \Sigma$: Tout d’abord on calcule un conjugué de α dans

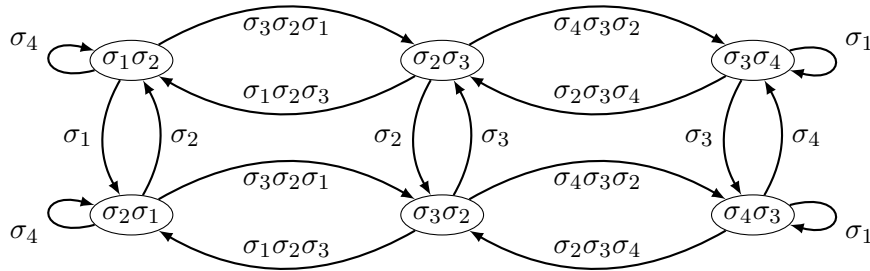


FIGURE 5.1 – Le graphe $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ for $\alpha = \sigma_1 \sigma_2$ dans le groupe de tresses à 5 brins.

un sous-groupe parabolique standard propre, après on applique des cyclages twistés et décyclages jusqu'à arriver à un conjugué super-sommital. Cet élément sera positif et, par le Lemme 5.16 et le Lemme 5.18, contenu dans un sous-groupe parabolique standard propre.

Par la Proposition 5.19, il y a trois types de flèches dans $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ partant de v . Pour chacun des trois cas, considérons le sommet d'arrivée v^x d'une flèche avec étiquette x partant de v :

1. $x \in A_X$. Dans ce cas $v^x \in A_X$.
2. $x = t \notin X$ où t n'est pas adjacent à X . Dans ce cas $v^x = v \in A_X$.
3. $x = r_{t,X}$, où $t \notin X$ est adjacent à X . Alors $x^{-1}Xx = Z$ pour un certain sous-ensemble propre $Z \subsetneq \Sigma$. Donc $v^x \in A_Z$.

Ainsi, pour tous les cas, v^x appartient à un sous-groupe parabolique standard propre. On peut appliquer le même raisonnement à chaque sommet de $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ et, comme $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ est connexe, tous les sommets de $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ appartiennent à un sous-groupe parabolique standard propre.

Maintenant notons $X = \text{supp}(v)$ et $Y = \text{supp}(v^x)$, où x est l'étiquette d'une flèche dans $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$ partant de v .

Si $x \in A_X$, on a $Y = \text{supp}(v^x) \subseteq X$. Si $Y \subsetneq X$, alors v^x serait un élément positif appartenant à un sous-groupe parabolique standard propre de A_X . Par conséquent, si on prend A_X comme le groupe global d'Artin–Tits, tous les conjugués positifs de v^x dans A_X appartiendraient à un sous-groupe parabolique standard propre de A_X , ce qui n'est pas le cas, car v lui-même n'est satisfait pas la propriété. Donc $Y = X$ et $\text{supp}(v^x) = X$. En plus, comme $x \in A_X$, on a $x^{-1}z_Xx = z_X$.

Si $x = t \notin X$ où t n'est pas adjacent à X , alors x commute avec toutes les lettres de X , donc on a $v^x = v$, d'où $Y = X$, et aussi $x^{-1}z_Xx = z_X$.

Finalement, si $x = r_{t,X}$ où $t \notin X$ est adjacent à X , alors $x^{-1}Xx = Z$ pour un certain $Z \subsetneq \Sigma$. Or, v contient toutes les lettres de X , donc v^x contient toutes les lettres de Z , c'est-à-dire, $Z = Y$. Ainsi $x^{-1}Xx = Y$, ce qui implique que $x^{-1}A_Xx = A_Y$ et donc $x^{-1}z_Xx = z_Y$.

Si on applique cet argument à toutes les flèches dans $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$, on obtient que l'étiquette de toute flèche partant du sommet u_0 et arrivant au sommet u_1 conjugue $z_{\text{supp}(u_0)}$ vers $z_{\text{supp}(u_1)}$. Cela peut être étendu aux chemins dans $\mathcal{G}_{C^+(\alpha)}$: Si un chemin va de u_0 vers u_k , l'élément associé au chemin conjugue $z_{\text{supp}(u_0)}$ vers $z_{\text{supp}(u_k)}$.

Maintenant supposons que v et w sont deux conjugués positifs de α , où $\text{supp}(v) = X$ et $\text{supp}(w) = Y$, et que $x \in A$ est tel que $x^{-1}vx = w$. Alors v et w sont des sommets de $\mathcal{G}_{C+(\alpha)}$. On peut supposer que x est positif, à multiplication par une puissance centrale de Δ près. Si on décompose x comme produit de conjuguants minimaux, on voit que x est l'élément associé à un chemin dans $\mathcal{G}_{C+(\alpha)}$ qui commence en v et finit en w . Ainsi, $x^{-1}z_Xx = z_Y$, comme on voulait démontrer. $\square$

Exemple 5.22. Considérons qu'on a la même situation que dans l'Exemple 5.20 et la Figure 5.1. On voit que tous les conjugués positifs de $\sigma_1\sigma_2$ appartiennent à un sous-groupe parabolique standard propre, à savoir à $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, à $\langle\sigma_2, \sigma_3\rangle$, ou à $\langle\sigma_3, \sigma_4\rangle$. On peut aussi vérifier que les étiquettes des flèches dans le graphe $\mathcal{G}_{C+(\alpha)}$ conjuguent les éléments centraux des sous-groupes paraboliques standard (minimaux) qui contiennent les conjugués de $\sigma_1\sigma_2$ (voir Figure 5.2).

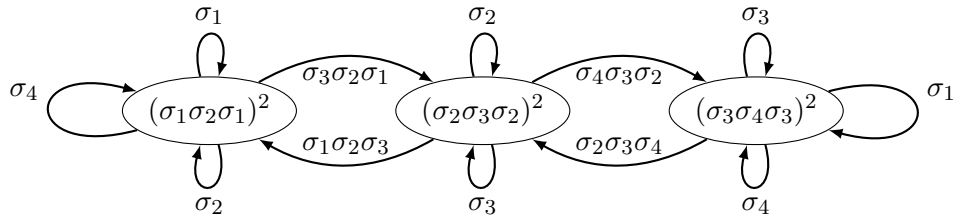


FIGURE 5.2 – L'action des éléments conjuguants de la Figure 5.1 sur les éléments centraux z , des sous-groupes paraboliques standard (minimaux) qui contiennent les conjugués positifs de $\sigma_1\sigma_2$.

Le résultat du Corollaire 5.21 nous permet d'introduire un concept important :

Définition 5.23. Soit $\alpha \in A$ conjugué à un élément positif $\alpha' = \beta^{-1}\alpha\beta \in A^+$. Soit $X = \text{supp}(\alpha')$. On définit la *clôture parabolique* de α comme le sous-groupe $P_\alpha = \beta A_X \beta^{-1}$.

Proposition 5.24. Sous les hypothèses qui précèdent, la clôture parabolique P_α est bien défini, et il est le plus petit sous-groupe parabolique (par inclusion) contenant α .

Démonstration. Supposons que $\alpha'' = \gamma^{-1}\alpha\gamma$ est un autre conjugué positif de α , et notons $Y = \text{supp}(\alpha'')$. On doit voir que $\beta A_X \beta^{-1} = \gamma A_Y \gamma^{-1}$. On a $(\alpha')^{\beta^{-1}\gamma} = \alpha''$. Si α appartient à un sous-groupe parabolique propre, on peut appliquer le Corollaire 5.21, et donc A_X et A_Y tout les deux sont sous-groupes paraboliques standards propres. L'élément conjuguant $\beta^{-1}\gamma$ envoie z_X vers z_Y , et alors il envoie A_X vers A_Y par le Lemme 4.16. Par conséquent $\beta A_X \beta^{-1} = \gamma A_Y \gamma^{-1}$, c'est-à-dire, P_α est bien défini. Si α n'appartient pas à un sous-groupe parabolique propre, aucun de ses conjugués peut appartenir à un sous-groupe parabolique propre, donc $A_X = A_Y = A$. Alors on a $\beta A_X \beta^{-1} = \beta A \beta^{-1} = A = \gamma A \gamma^{-1} = \gamma A_Y \gamma^{-1}$, donc P_α est aussi bien défini (et est égal à A) dans ce cas-là.

Maintenant soit P un sous-groupe parabolique contenant α . Soit $x \in A$ tel que $x^{-1}Px$ est standard, c'est-à-dire, $x^{-1}Px = A_Z$ pour un certain $Z \subseteq \Sigma$. Alors $x^{-1}\alpha x \in A_Z$ et on peut obtenir un autre conjugué $\alpha' = y^{-1}x^{-1}\alpha xy \in A_Z \cap SSS(\alpha)$, où $y \in A_Z$, en appliquant des cyclages twistés et décyclages. Comme α est conjugué à un élément positif, tous les éléments de $SSS(\alpha)$ sont positifs, donc α' est positif. Par conséquent, si on note $X = \text{supp}(\alpha')$, on a $A_X \subseteq A_Z$. Si on conjugue dans le sens contraire, on a

$P_\alpha = xyA_Xy^{-1}x^{-1} \subseteq xyA_Zy^{-1}x^{-1} = xA_Zx^{-1} = P$. Ainsi, P_α est contenu dans tout sous-groupe parabolique contenant α , comme on voulait démontrer. $\square$

5.2 Résultats principaux

5.2.1 La clôture parabolique d'un élément arbitraire

Dans la section précédente on a défini la clôture parabolique d'un élément donné $\alpha \in A$, étant donné que α est conjugué à un élément positif. Dans cette section on va voir comment étendre cette définition à tout élément $\alpha \in A$. C'est-à-dire, on verra que pour tout élément $\alpha \in A$ il y a un sous-groupe parabolique P_α qui est le plus petit sous-groupe parabolique (par inclusion) contenant α .

Au lieu d'utiliser les conjugués positifs de α (qui peuvent être inexistantes), on va définir P_α en utilisant un des ensemble sommitaux définis précédemment : $RSSS_\infty(\alpha)$. On verra que le support des éléments dans $RSSS_\infty(\alpha)$ est aussi *préservé par conjugaison*, donc il peut être utilisé pour définir le plus petit sous-groupe parabolique contenant α .

Définition 5.25. Soit $\alpha \in A$. Soit $\alpha' \in RSSS_\infty(\alpha)$, où $\alpha' = \beta^{-1}\alpha\beta$. Si on note $Z = \text{supp}(\alpha')$, on peut définir la clôture parabolique de α comme $P_\alpha = \beta A_Z \beta^{-1}$.

Proposition 5.26. *Sous les hypothèses qui précèdent, la clôture parabolique P_α est bien définie, et elle est le plus petit sous-groupe parabolique (par inclusion) contenant α .*

Démonstration. Écrivons $\alpha' = x^{-1}y$ dans sa forme normale négative-positive, et rappelons que $Z = \text{supp}(\alpha') = \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y)$. Si α n'appartient pas à un sous-groupe parabolique propre, ses conjugués n'appartiennent non plus, donc $\text{supp}(v) = S$ pour tout $v \in RSSS_\infty(\alpha)$ et $P_\alpha = A$ est bien défini, qui est en fait le plus petit sous-groupe parabolique contenant α . Par conséquent on peut supposer que α appartient à un certain sous-groupe parabolique propre.

Si α est conjugué à un élément positif, alors tous les éléments dans $SSS(\alpha)$ seront positifs. Comme $RSSS_\infty(\alpha) \subseteq RSSS(\alpha) \subseteq SSS(\alpha)$, l'élément α' est positif et $Z = \text{supp}(\alpha')$. Donc la nouvelle définition de P_α coïncide avec la définition donnée dans la section précédente. Ainsi, par le [Proposition 5.24](#), P_α est bien défini et il est le plus petit sous-groupe parabolique contenant α .

Supposons que α^{-1} est conjugué à un élément positif. Comme on a $\beta \in SSS(\alpha)$ si et seulement si $\beta^{-1} \in SSS(\alpha^{-1})$, l'inverse de chaque élément de $RSSS(\alpha) \subseteq SSS(\alpha)$ est positif. Dans ce cas $Z = \text{supp}((\alpha')^{-1})$, et P_α coïncide avec la définition de $P_{\alpha^{-1}}$ de la section précédente. Donc P_α est bien défini, et il est le plus petit sous-groupe parabolique contenant α^{-1} , et donc le plus petit contenant α .

Alors on peut supposer que α appartient à un sous-groupe parabolique propre, et que la forme normale négative-positive de α' est de la forme $\alpha' = x^{-1}y = x_s^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_t$, avec $s, t > 0$ (c'est-à-dire, $x, y \neq 1$).

Soit $N = \max(s, t)$, et utilisons la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) . Par rapport à cette structure, x et y sont des éléments simples et, comme $\alpha' \in RSSS_\infty(\alpha)$, α' et $(\alpha')^{-1}$ tous les deux appartiennent à ses ensemble ultra-sommitaux respectifs.

Afin de montrer que P_α est bien défini, soit $\alpha'' = \gamma^{-1}\alpha\gamma \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$. On doit démontrer que tout élément g qui conjugue α' vers α'' , conjugue A_Z vers A_U , où $Z = \text{supp}(\alpha')$ et $U = \text{supp}(\alpha'')$. On va montrer cela en construisant des éléments positifs avec des supports Z et U , respectivement, qui sont aussi conjugués par g . Alors notre affirmation découlera par le [Corollaire 5.21](#).

Comme on est en train d'utiliser la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) , on a que $\alpha' = x^{-1}y$ est en forme normale négative-positive, où x et y sont des éléments simples, et aussi que $\alpha'' = u^{-1}v$ est en forme normale négative-positive, où u et v sont des éléments simples, car α' et α'' tous les deux appartiennent à $\mathcal{SSS}_N(\alpha)$, donc ils ont le même infimum et supremum.

Soit alors g un élément tel que $g^{-1}\alpha'g = \alpha''$, et rappelons que $\alpha', \alpha'' \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha) \subseteq USS_\infty(\alpha) \subseteq USS_N(\alpha)$. Par le [Corollaire 5.15](#), il existe un entier positif M tel que $g^{-1}\tilde{C}_M(\alpha')g = \tilde{C}_M(\alpha'')$, où $\tilde{C}_M(\alpha')$ (respectivement $\tilde{C}_M(\alpha'')$) est le produit des éléments conjuguants pour M cyclages twistés consécutifs de α' (respectivement α'') par rapport à la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) .

Par le [Lemme 5.5](#), $\tilde{C}_M(\alpha')$ est l'inverse d'un élément positif, disons $w_1(\alpha') := \tilde{C}_M(\alpha')^{-1}$. Rappelons que $\alpha' \in A_Z$, donc les facteurs qui composent $\tilde{C}_M(\alpha')$ appartiennent à A_Z , et alors $w_1(\alpha') \in A_Z^+$. De la même façon, $\tilde{C}_M(\alpha'')$ est l'inverse d'un élément positif, disons $w_1(\alpha'') := \tilde{C}_M(\alpha'')^{-1} \in A_U^+$. Donc on a $g^{-1}w_1(\alpha')g = w_1(\alpha'')$, où $w_1(\alpha') \in A_Z^+$ et $w_1(\alpha'') \in A_U^+$.

À partir de $g^{-1}\alpha'g = \alpha''$ on obtient $g^{-1}(\alpha')^{-1}g = (\alpha'')^{-1}$. Comme $\alpha', \alpha'' \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$, on déduit que $(\alpha')^{-1}, (\alpha'')^{-1} \in USS_\infty(\alpha^{-1}) \subseteq USS_N(\alpha^{-1})$. Par conséquent, on peut appliquer le [Corollaire 5.15](#) et donc il y a un entier positif T tel que $g^{-1}\tilde{C}_T((\alpha')^{-1})g = \tilde{C}_T((\alpha'')^{-1})$ comme avant. Si on note $w_2(\alpha') = \tilde{C}_T((\alpha')^{-1})^{-1}$ et $w_2(\alpha'') = \tilde{C}_T((\alpha'')^{-1})^{-1}$, on a $g^{-1}w_2(\alpha')g = w_2(\alpha'')$, où $w_2(\alpha') \in A_Z^+$ et $w_2(\alpha'') \in A_U^+$.

On note $w(\alpha') = w_1(\alpha')w_2(\alpha') \in A_Z^+$ et $w(\alpha'') = w_1(\alpha'')w_2(\alpha'') \in A_U^+$. Par construction, $g^{-1}w(\alpha')g = w(\alpha'')$. Maintenant on va montrer que $\text{supp}(w(\alpha')) = Z$ et $\text{supp}(w(\alpha'')) = U$.

Observons que l'élément conjuguant pour le cyclage twisté de $\alpha' = x^{-1}y$ dans la structure de Garside (A, A^+, Δ^N) est x^{-1} . Par le [Lemme 5.5](#), x est un suffixe de $w_1(\alpha')$. D'ailleurs, l'élément conjuguant pour le cyclage twisté de $(\alpha')^{-1} = y^{-1}x$ est y^{-1} . Donc, y est un suffixe de $w_2(\alpha')$. Cela implique que $Z = \text{supp}(\alpha') = \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(w_1(\alpha')) \cup \text{supp}(w_2(\alpha')) = \text{supp}(w(\alpha')) \subseteq Z$. Ainsi, $\text{supp}(w(\alpha')) = Z$. Par le même raisonnement, $\text{supp}(w(\alpha'')) = U$.

On peut alors appliquer le [Corollaire 5.21](#), car $g^{-1}w(\alpha')g = w(\alpha'')$, pour conclure que $g^{-1}A_Zg = A_U$, comme on voulait démontrer. Cela signifie que P_α est bien défini, parce que quand on prend $g = \beta^{-1}\gamma$ (un élément conjuguant de α' vers α'') on a :

$$\beta A_Z \beta^{-1} = \beta g A_U g^{-1} \beta^{-1} = \gamma A_U \gamma^{-1},$$

donc on peut utiliser soit α' , soit α'' pour définir P_α .

Maintenant montrons que P_α est le plus petit sous-groupe parabolique (par rapport à l'inclusion) contenant α . Supposons que P est un sous-groupe parabolique contenant α , et soit $a \in A$ un élément tel que $a^{-1}Pa = A_X$ est standard. Alors $a^{-1}\alpha a \in A_X$. On peut alors appliquer cyclages twistés et décyclages à cet élément (pour toutes les structures de Garside), afin que l'élément résultant, noté $\hat{\alpha}$, appartient à $R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$. Le produit

de tous les éléments conjuguants, qu'on notera b , appartiendra à A_X , donc on aura $\hat{\alpha} = b^{-1}a^{-1}\alpha ab \in A_X \cap R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$.

Soit $Y = \text{supp}(\hat{\alpha})$. Par définition, on a $P_\alpha = abA_Yb^{-1}a^{-1}$. Mais d'autre part, comme $\hat{\alpha} \in A_X$, toutes les lettres dans la forme normale négative-positive de $\hat{\alpha}$ appartiennent à A_X . Par conséquent $A_Y \subseteq A_X$, et finalement on a :

$$P_\alpha = abA_Yb^{-1}a^{-1} \subseteq abA_Xb^{-1}a^{-1} = aA_Xa^{-1} = P.$$

Ainsi, P_α est contenu dans tout sous-groupe parabolique contenant α , comme on voulait démontrer. $\square$

Dans cette section on verra que la clôture parabolique P_α d'un élément $\alpha \in A$ se comporte comme on l'attend quand on le conjugue et quand on prend des puissances et des racines. Le comportement par rapport à la conjugaison découle directement de la définition :

Lemme 5.27. *Pour tout $\alpha, x \in A$, on a $P_{x^{-1}\alpha x} = x^{-1}P_\alpha x$.*

Démonstration. Il faut remarquer que la conjugaison préserve les sous-groupes paraboliques et l'inclusion. Ainsi, la conjugaison par x envoie le plus petit sous-groupe parabolique contenant α vers le plus petit sous-groupe parabolique contenant $x^{-1}P_\alpha x$. $\square$

Le comportement de P_α quand on prend des puissances ou des racines n'est pas si évident, mais il est aussi comme on l'attend :

Théorème 5.28. *Soit A un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. Si $\alpha \in A$ et m est un entier différent de zéro, alors $P_{\alpha^m} = P_\alpha$.*

Démonstration. Grâce au [Lemme 5.27](#), on peut en conjuguant se ramener à $\alpha \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$. En plus on peut conjuguer α par les éléments conjuguants pour les cyclages twistés et décyclages de sa m -ème puissance (pour toutes les structures de Garsides convenables), afin d'envoyer α^m vers $R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha^m)$. Par le [Lemme 5.6](#), ces éléments conjuguants sont le pgcd de deux éléments qui conjuguent α vers des autres dans $R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$. Donc, par la convexité de $R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$, ils maintiennent α dans $R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$. En résumé, on peut supposer $\alpha \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha)$ et $\alpha^m \in R\mathcal{SSS}_\infty(\alpha^m)$, à conjugaison près. On peut aussi supposer que m est positif, car $P_{\alpha^{-m}} = P_{\alpha^m}$ par définition.

En tenant en compte les hypothèses qui précèdent, on va déterminer les sous-groupes paraboliques associés à α et à α^m en utilisant ses supports correspondants. Donc, on doit montrer que $\text{supp}(\alpha) = \text{supp}(\alpha^m)$.

Si soit α , soit α^{-1} , est positif, le résultat est clair. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire, on a $\alpha = x_1^{-1}y_1$ en forme normale négative-positive avec $x_1, y_1 \neq 1$. En plus, si on utilise une structure de Garside convenable, on peut supposer que x_1 et y_1 sont des éléments simples.

On utilisera le résultat suivant ([Birman et al., 2007](#), Theorem 2.9) : Si $\alpha \in USS(\alpha)$, $\inf(\alpha) = p$, $\ell(\alpha) > 1$ et $m \geq 1$, on a

$$\alpha^m \Delta^{-mp} \wedge \Delta^m = C_m(\alpha). \quad (5.1)$$

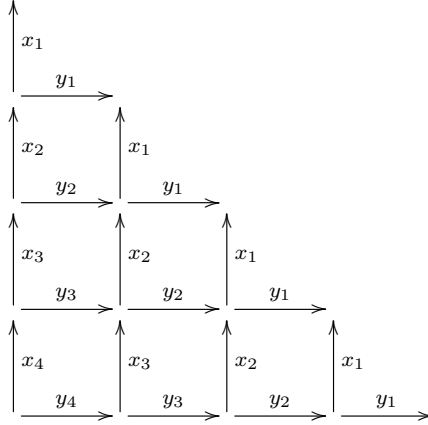


FIGURE 5.3 – Comment transformer $\alpha^4 = (x_1^{-1}y_1)^4$ en $x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}y_4y_3y_2y_1$. Autour de chaque carré, le produit $x_i^{-1}y_i$ est la forme normale négative-positive de $y_{i-1}x_{i-1}^{-1}$.

Autrement dit, si on considère l'élément positif $\alpha^m \Delta^{-mp}$, et on calcule les premiers m facteurs dans la forme normale à gauche (les facteurs de la forme Δ inclus), le produit de ces m facteurs est égal au produit des premiers m éléments conjuguants pour cyclages itérés de α .

On remarque qu'on utilise une structure de Garside (A, A^+, Δ^N) telle que $\alpha = x_1^{-1}y_1$, où x_1 et y_1 sont des éléments simples non-triviaux. Donc le Δ dans (5.1) c'est Δ^N dans notre cas. Remarquons aussi que α satisfait les hypothèses de (5.1), car $\alpha \in RSSS_\infty(\alpha) \subseteq USS_\infty(\alpha) \subseteq USS_N(\alpha)$, et parce que la forme normale à gauche de α est $\Delta^{-1}\tilde{x}_1y_1$, donc $\inf(\alpha) = -1$ et $\ell(\alpha) = 2$.

On va reformuler le résultat de (Birman *et al.*, 2007) qu'on a écrit tout à l'heure en termes des formes normales négative-positives. Comme ça, notre énoncé sera plus intéressant.

Écrivons $\alpha^m = x_1^{-1}y_1x_1^{-1}y_1 \cdots x_1^{-1}y_1$ (voir Figure 5.3). Appliquer un cyclage twisté à α est conjuguer par x_1^{-1} , et on obtient $\alpha_2 = y_1x_1^{-1}$, dont la forme normale négative-positive sera de la forme $\alpha_2 = x_2^{-1}y_2$. Alors on aura :

$$\alpha^m = x_1^{-1}(x_2^{-1}y_2x_2^{-1}y_2 \cdots x_2^{-1}y_2)y_1$$

Maintenant on peut appliquer un cyclage twisté à α_2 (en conjuguant par x_2^{-1}), et on obtient $\alpha_3 = x_3^{-1}y_3$. On voit que :

$$\alpha^m = x_1^{-1}x_2^{-1}(x_3^{-1}y_3 \cdots x_3^{-1}y_3)y_2y_1.$$

Si on répète le processus m fois, à la fin on va obtenir :

$$\alpha^m = x_1^{-1}x_2^{-1} \cdots x_m^{-1}y_m \cdots y_2y_1.$$

C'est-à-dire, on a exprimé α^m comme un produit d'un élément négatif par un élément positif, où le négatif est le produit des m premiers éléments conjuguants pour le cyclage twisté itéré de α . On veut voir que (Birman *et al.*, 2007, Theorem 2.9) est équivalent au fait qu'il n'y pas d'annulations entre $x_1^{-1}x_2^{-1} \cdots x_m^{-1}$ et $y_m \cdots y_2y_1$.

En fait, d'un côté, comme $p = -1$, on a l'élément $\alpha^m \Delta^{-pm} = \alpha^m \Delta^m$, qui est :

$$\begin{aligned} \alpha^m \Delta^m &= x_1^{-1} \cdots x_m^{-1} y_m \cdots y_1 \Delta^m \\ &= (x_1^{-1} \Delta) (\Delta^{-1} x_2^{-1} \Delta^2) \cdots (\Delta^{m-1} x_m^{-1} \Delta^m) \tau^m(y_m \cdots y_1). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $i = 1, \dots, m$, on a $\alpha_i = \tilde{c}^{i-1}(\alpha) = \tau^{-i+1} \circ c^{i-1}(\alpha)$, donc $c^{i-1}(\alpha) = \tau^{i-1}(\alpha_i) = \tau^{i-1}(x_i)^{-1} \tau^{i-1}(y_i)$. Cela veut dire que l' i -ème élément conjuguant pour le cyclage itéré de α est $\tau^{i-1}(x_i)^{-1} \Delta = \Delta^{i-1} x_i^{-1} \Delta^i$.

Donc, par le (Birman *et al.*, 2007, Theorem 2.9) le produit des m premiers facteurs de la forme normale à gauche de $\alpha^m \Delta^m$ est égal à $(x_1^{-1} \Delta) (\Delta^{-1} x_2^{-1} \Delta^2) \cdots (\Delta^{m-1} x_m^{-1} \Delta^m)$, c'est-à-dire, à $x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_m^{-1} \Delta^m$. Autrement dit :

$$\alpha^m \Delta^m \wedge \Delta^m = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_m^{-1} \Delta^m.$$

Comme le plus grand commun préfixe est préservé par multiplication à droite par n'importe quelle puissance de Δ , on obtient :

$$\alpha^m \wedge 1 = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_m^{-1}.$$

Mais le plus grand commun préfixe d'un élément et 1 est précisément la partie négative de sa forme normale négative-positive, donc cela montre qu'il n'y a pas d'annulations entre $x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_m^{-1}$ et $y_m \cdots y_2 y_1$, comme on voulait démontrer.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \text{supp}(\alpha^m) &= \text{supp}(x_m \cdots x_1) \cup \text{supp}(y_m \cdots y_1) \\ &\supseteq \text{supp}(x_1) \cup \text{supp}(y_1) = \text{supp}(\alpha). \end{aligned}$$

Il est clair que $\text{supp}(\alpha^m) \subseteq \text{supp}(\alpha)$, car il n'y a pas des nouvelles lettres qui peuvent apparaître quand on calcule la forme normale négative-positive de α^m commençant avec m copies de la forme normale négative-positive de α . Ainsi, finalement on a $\text{supp}(\alpha^m) = \text{supp}(\alpha)$, comme on voulait démontrer. $\square$

Ce comportement de P_α par rapport à prendre des puissances ou des racines nous permet de montrer une conséquence intéressante : Toutes les racines d'un élément dans un sous-groupe parabolique appartiennent au même sous-groupe parabolique.

Corollaire 5.29. *Soit A un groupe d'Artin-Tits de type sphérique. Si α appartient à un sous-groupe parabolique P , et $\beta \in A$ est tel que $\beta^m = \alpha$ pour un certain entier m différent de zéro, alors $\beta \in P$.*

Démonstration. Comme α est une puissance de β , le Théorème 5.28 nous dit que $P_\alpha = P_\beta$. De plus $\alpha \in P$ implique $P_\alpha \subseteq P$, car P_α est le sous-groupe parabolique minimal contenant α . Donc $\beta \in P_\beta = P_\alpha \subseteq P$. $\square$

5.2.2 Intersection de sous-groupes paraboliques

Dans cette section on va montrer un des résultats principaux du papier : L'intersection de deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique A est aussi un sous-groupe parabolique.

On utilisera la clôture parabolique P_α d'un élément $\alpha \in A$, mais on va aussi avoir besoin de quelques résultats techniques qui expliquent comment se comporte la forme normale à gauche d'un élément positif (dans laquelle quelques facteurs sont Δ_X pour un certain $X \subseteq \Sigma$) par rapport à la multiplication par un autre élément, :

Lemme 5.30. *Soit $X \subseteq \Sigma$ non-vide, et soit $\alpha \in A^+$ un élément simple tel que $\Delta_X \alpha$ est simple. Alors il y a un sous-ensemble $Y \subseteq \Sigma$ et une décomposition $\alpha = \rho\beta$ dans A^+ , tels que $X\rho = \rho Y$ et tels que la forme normale à gauche de $\Delta_X(\Delta_X \alpha)$ est $(\rho\Delta_Y)(\Delta_Y\beta)$.*

Démonstration. On va procéder par récurrence sur la longueur $|\alpha|$ de α comme un mot dans Σ . Si $|\alpha| = 0$, alors $\Delta_X(\Delta_X \alpha) = \Delta_X \Delta_X$, qui est déjà en forme normale à gauche, et le résultat est obtenu en prenant $Y = X$ et $\rho = \beta = 1$. Supposons alors que $|\alpha| > 0$ et que le résultat est vrai quand α est plus court.

Soit $Z \subseteq \Sigma$ l'ensemble des lettres initiales de $\Delta_X \alpha$. C'est-à-dire, $Z = \{\sigma_i \in \Sigma : \sigma_i \preceq \Delta_X \alpha\}$. Il est clair que $X \subseteq Z$, car chaque lettre de X est un préfixe de Δ_X .

Notons que l'ensemble des lettres finales de Δ_X est précisément X . Donc, si $Z = X$ la décomposition $\Delta_X(\Delta_X \alpha)$ est déjà en forme normale à gauche, donc le résultat s'obtient en prenant $X = Y$, $\rho = 1$ et $\beta = \alpha$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un certain $t \in Z$ qui n'est pas dans X . Alors $t \preceq \Delta_X \alpha$ donc $t \vee \Delta_X = \Delta_X r_{t,X} \preceq \Delta_X \alpha$. En annulant le Δ_X de la gauche on a $r_{t,X} \preceq \alpha$, so $\alpha = r_{t,X} \alpha_1$.

On sait que $Xr_{t,X} = r_{t,X}T$ pour un certain $T \subsetneq \Sigma$. Par conséquent :

$$\Delta_X(\Delta_X \alpha) = \Delta_X(\Delta_X r_{t,X} \alpha_1) = (r_{t,X} \Delta_T)(\Delta_T \alpha_1).$$

Considérons l'élément $\Delta_T(\Delta_T \alpha_1)$. Comme α_1 est plus court que α , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour avoir que $\alpha_1 = \rho_1 \beta$, où $T\rho_1 = \rho_1 Y$ pour un certain $Y \subsetneq \Sigma$, et la forme normale à gauche de $\Delta_T(\Delta_T \alpha_1)$ est $(\rho_1 \Delta_Y)(\Delta_Y \beta)$.

On affirme que la forme normale à gauche de $\Delta_X(\Delta_X \alpha)$ est $(\rho \Delta_Y)(\Delta_Y \beta)$, où $\rho = r_{t,X} \rho_1$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_X(\Delta_X \alpha) &= \Delta_X(\Delta_X r_{t,X} \rho_1 \beta) = (r_{t,X} \Delta_T)(\Delta_T \rho_1 \beta) \\ &= (r_{t,X} \rho_1 \Delta_Y)(\Delta_Y \beta) = (\rho \Delta_Y)(\Delta_Y \beta). \end{aligned}$$

Après, on voit que $\rho \Delta_Y = \Delta_X \rho$ est simple, car il est un préfixe de $\Delta_X \alpha$, qui est simple. Finalement, l'ensemble des lettres finales de $\rho \Delta_Y$ contient l'ensemble des lettres finales de son suffixe $\rho_1 \Delta_Y$, qui contient l'ensemble des lettres initiales de $\Delta_Y \beta$ (car le produit $(\rho_1 \Delta_Y)(\Delta_Y \beta)$ est en forme normale à gauche), d'où la preuve de notre affirmation.

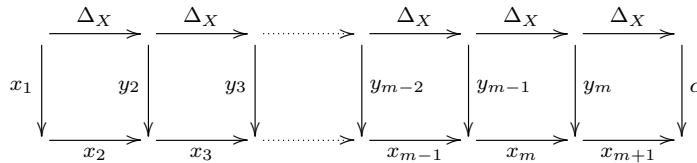
Pour finir il faut juste remarquer que $X\rho = Xr_{t,X} \rho_1 = r_{t,X} T \rho_1 = r_{t,X} \rho_1 Y = \rho Y$. $\square$

Lemme 5.31. *Soit $X \subseteq \Sigma$ non-vide, et soit $m > r > 0$. Soit $\alpha \in A^+$ tel que $\sup(\alpha) = r$, et soit $x_1 x_2 \cdots x_{m+r}$ la forme normale à gauche de $(\Delta_X)^m \alpha$ (où certains facteurs initiaux*

peuvent être égaux à Δ et certains facteurs finaux peuvent être triviaux). Alors il y a un sous-ensemble $Y \subseteq \Sigma$ et une décomposition $\alpha = \rho\beta$ dans A^+ , tels que $X\rho = \rho Y$ et :

1. $x_1 \cdots x_r = (\Delta_X)^r \rho = \rho (\Delta_Y)^r$.
2. $x_i = \Delta_Y$ pour $i = r+1, \dots, m-1$.
3. $x_m \cdots x_{m+r} = \Delta_Y \beta$.

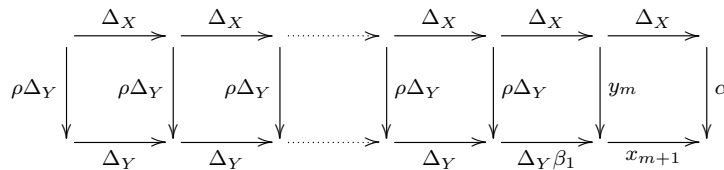
Démonstration. Supposons d'abord que α est un élément simple, donc $r = 1$. Par la règle du domino (Dehornoy, 2015, Définition III 1.57, Proposition V 1.52) (voir aussi Dehornoy & Gebhardt, 2014, Lemme 1.32), la forme normale à gauche de $(\Delta_X)^m \alpha$ est calculée comme suit :



où les x_i et les y_i sont définis de droite à gauche, de la façon suivante : Tout d'abord, la forme normale à gauche de $\Delta_X \alpha$ est $y_m x_{m+1}$ (ici x_{m+1} peut être trivial). Alors la forme normale à gauche de $\Delta_X y_m$ est $y_{m-1} x_m$, et etcétera. Autour de chaque carré, le chemin qui va en bas et après à droite représente la forme normale à gauche du chemin qui va à droite et après en bas.

Par construction, $\Delta_X \preceq y_m$. Donc, par le lemme qui précède, la forme normale à gauche de $\Delta_X y_m$ est $(\rho \Delta_Y)(\Delta_Y \beta_1)$, pour un certain $Y \subseteq \Sigma$ et un certain ρ qui conjugue X vers Y . Par conséquent, $y_{m-1} = \rho \Delta_Y = \Delta_X \rho$, et $x_m = \Delta_Y \beta_1$.

Maintenant, si on a $y_k = \Delta_X \rho$ pour un certain k , comme la forme normale à gauche de $\Delta_X(\Delta_X \rho)$ est $(\rho \Delta_Y)(\Delta_Y)$, on déduit que $y_{k-1} = \rho \Delta_Y = \Delta_X \rho$ et $x_k = \Delta_Y$. Ainsi, le diagramme précédent est :



Par construction, $\alpha = \rho \beta_1 x_{m+1}$. Cela montre le résultat pour $r = 1$.

Le cas $r > 1$ découle du cas précédent plus la règle du domino. Si $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ est en forme normale à gauche, pour calculer la forme normale à gauche de $(\Delta_X)^m \alpha$ il faut compléter les carrés du diagramme dans la Figure 5.4 (ligne par ligne, de droite à gauche), où, dans chaque carré, le chemin qui va en bas en après à droite est la forme normale à gauche du chemin qui va à droite et après en bas.

Par construction, les sous-ensembles $X = Y_0, Y_1, \dots, Y_r = Y$ de Σ et les éléments $\rho_1, \dots, \rho_r$ satisfont $Y_{i-1} \rho_i = \rho_i Y_i$. Cela implique que les premiers r facteurs dans la forme normales de $(\Delta_X)^m \alpha$ sont :

$$(\rho_1 \Delta_{Y_1})(\rho_2 \Delta_{Y_2}) \cdots (\rho_r \Delta_{Y_r}) = (\Delta_X)^r \rho = \rho (\Delta_Y)^r,$$

où $\rho = \rho_1 \cdots \rho_r$. En plus, $x_i = \Delta_Y$ pour $i = r+1, \dots, m-1$, comme on peut voir dans le diagramme. Finalement, on voit que $x_m = \Delta_Y \beta_r$ et

$$(\Delta_X)^m \alpha = \rho (\Delta_Y)^{m-1} x_m \cdots x_{m+r} = (\Delta_X)^{m-1} \rho x_m \cdots x_{m+r}.$$

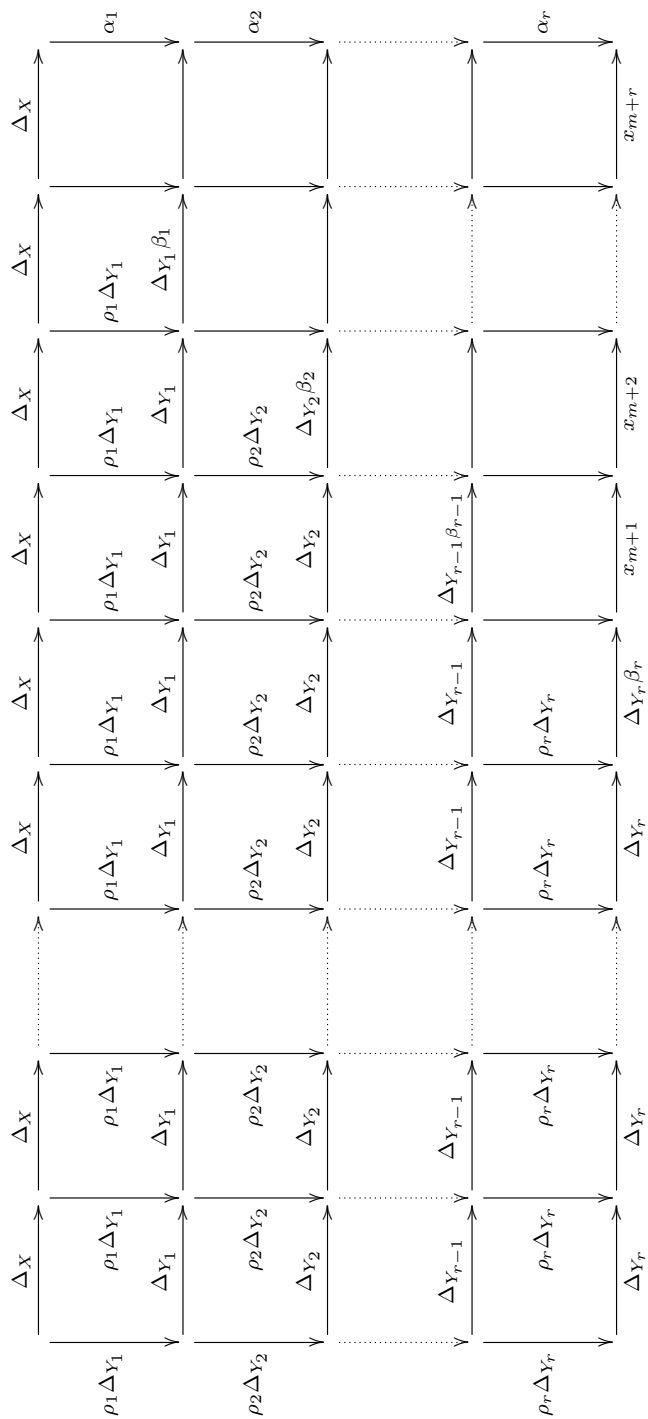


FIGURE 5.4 – Comment calculer la forme normale à gauche de $(\Delta_X)^m \alpha$ dans le preuve de Lemme 5.31.

Donc $\rho x_m \cdots x_{m+r} = \Delta_X \alpha = \Delta_X \rho \beta = \rho \Delta_Y \beta$ et $x_m \cdots x_{m+r} = \Delta_Y \beta$, comme on voulait démontrer. $\square$

Ainsi, si on multiplie une grande puissance $(\Delta_X)^m$ par un certain élément α qui est un produit de r facteurs simples, la forme normale du résultat a encore $m - r - 1$ facteurs de la forme Δ_Y pour un certain Y .

Pour les résultats à venir, on aura besoin d'une procédure spéciale pour comparer des éléments dans A . Afin de définir cette procédure, on introduit le concept suivant :

Définition 5.32. Pour tout élément $\gamma \in A$, conjuguons γ vers $\gamma' \in R\text{SSS}_\infty(\gamma)$. Soit $U = \text{supp}(\gamma')$. Alors on définit $\varphi(\gamma) = |\Delta_U|$ comme la longueur de l'élément Δ_U en tant que mot avec les générateurs atomiques.

Proposition 5.33. *L'entier $\varphi(\gamma)$ est bien défini. En plus, si γ est conjugué à un élément positif, alors $\varphi(\gamma) = |\Delta_X|$, où $X = \text{supp}(\beta)$ pour tout élément positif β conjugué à γ .*

Démonstration. Supposons que $\gamma', \gamma'' \in R\text{SSS}_\infty(\gamma)$, et soient $U = \text{supp}(\gamma')$ et $V = \text{supp}(\gamma'')$. Alors $P_{\gamma'} = A_U$ et $P_{\gamma''} = A_V$, et tout élément x conjuguant γ' vers γ'' doit aussi conjuguer A_U vers A_V . Donc $x^{-1}z_U x = z_V$, par le [Lemme 4.16](#). Cela implique que $|z_U| = |z_V|$. En plus, comme A_U est conjugué à A_V , on a $z_U = \Delta_U^e$ et $z_V = \Delta_V^e$ pour le même $e \in \{1, 2\}$. Donc $|\Delta_U| = |\Delta_V|$, ce qui démontre que $\varphi(\gamma)$ est bien défini.

Par ailleurs, si γ est conjugué à un élément positif β , et $X = \text{supp}(\beta)$, alors $P_\beta = A_X$. On peut alors appliquer le même raisonnement à γ' et β afin d'avoir que $\varphi(\gamma) = |\Delta_X|$. $\square$

On peut finalement démontrer le résultat le plus important de ce chapitre :

Théorème 5.34. *Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique. Alors $P \cap Q$ est aussi un sous-groupe parabolique.*

Démonstration. Si soit P , soit Q , est égal à A ou à $\{1\}$, le résultat est vrai trivialement. Donc, supposons que tous les deux sous-groupes paraboliques sont propres.

Si $P \cap Q = \{1\}$ le résultat est vrai. On va donc supposer qu'il y a un certain élément non-trivial $\alpha \in P \cap Q$. On prend α tel que $\varphi(\alpha)$ est maximal (remarquons que $\varphi(\alpha)$ est borné supérieurement par $|\Delta|$).

Soit P_α la clôture parabolique de α . Par le [Proposition 5.26](#), on sait que $P_\alpha \subseteq P$, et aussi $P_\alpha \subseteq Q$, donc $P_\alpha \subseteq P \cap Q$. En plus, si on conjugue P_α , P et Q par un élément convenable, on peut supposer que P_α est standard, donc $P_\alpha = A_Z \subseteq P \cap Q$ pour un certain $Z \subsetneq \Sigma$. Notons que $\Delta_Z \in P_\alpha \subseteq P \cap Q$.

On montrera que $P \cap Q = P_\alpha$, c'est-à-dire, $P \cap Q = A_Z$.

Prenons un élément $w \in P \cap Q$. Afin de montrer que $w \in A_Z$, on va considérer sa clôture parabolique P_w , qu'on l'écrira T . Par les arguments qui précèdent, on a $T \subseteq P \cap Q$ et, en particulier, $z_T \in P \cap Q$. Remarquons que T est conjugué à A_X pour un certain $X \subsetneq \Sigma$, donc z_T est conjugué (par le même élément conjuguant) à l'élément positif z_X . Comme le support de z_X est X , on a $P_{z_X} = A_X$, et si on conjugue en sens opposé on obtient $P_{z_T} = T$. Par conséquent, si on montre que $z_T \in A_Z$, cela impliquera que $T \subseteq A_Z$ et alors $w \in A_Z$, comme on le voulait.

Maintenant on doit démontrer que $z_T \in A_Z$. Soit $a^{-1}b$ la forme normale négative-positive de z_T . On va construire une famille infinie d'éléments dans $P \cap Q$, en utilisant z_T et Δ_Z . Pour tout $m > 0$, considérons $\beta_m = z_T(\Delta_Z)^m = a^{-1}b(\Delta_Z)^m$. Par construction $\beta_m \in P \cap Q$ pour tout $m > 0$.

Supposons que $a = a_1 \cdots a_r$ et $b = b_1 \cdots b_s$ sont les formes normales à gauche de a et b , respectivement. Alors

$$\beta_m = a_r^{-1} \cdots a_1^{-1} b_1 \cdots b_s (\Delta_Z)^m.$$

La forme normale négative-positive de β_m se calcule en faisant toutes les annulations possibles au milieu de l'expression précédente. Comme tous les facteurs sont des éléments simples, on obtient que $\inf(\beta_m) \geq -r$ et $\sup(\beta_m) \leq s + m$.

Rappelons que $\varphi(\alpha) = |\Delta_Z|$ est maximal entre les éléments dans $P \cap Q$. On note $n = \varphi(\alpha) = |\Delta_Z|$. Pour tout $m > 0$, choisissons $\tilde{\beta}_m \in R\text{SSS}_\infty(\beta_m)$.

Affirmation Il existe $M > 0$ tel que $\tilde{\beta}_m$ est positive pour tout $m > M$.

Soit $U_m = \text{supp}(\tilde{\beta}_m)$. Par la maximalité de $\varphi(\alpha)$ on sait que $|\Delta_{U_m}| \leq n$. Donc la longueur de chaque élément simple dans la forme normale de $\tilde{\beta}_m$ doit être au plus n .

Soit $x_m^{-1}y_m$ la forme normale négative-positive de $\tilde{\beta}_m$. Or, $\tilde{\beta}_m \in R\text{SSS}_\infty(\beta_m) \subseteq \text{SSS}(\beta_m)$, donc x_m est un élément positif composé par au plus r éléments simples, et y_m est un élément positif composé par au plus $s + m$ éléments simples.

Étant donné $m > 0$, supposons qu'aucun des facteurs dans la forme normale à gauche de y_m est égal à Δ_{U_m} . Cela veut dire que la longueur de chaque facteur de y_m est au plus $n - 1$, donc $|y_m| \leq (n - 1)(s + m)$, c'est-à-dire, $|y_m| \leq (n - 1)m + k$ où k est une constante indépendante de m . Par conséquent, la somme des exposants de $\tilde{\beta}_m$ comme produit de générateurs atomiques et leurs inverses est $s(\tilde{\beta}_m) = |y_m| - |x_m| \leq |y_m| \leq (n - 1)m + k$.

Mais cette somme des exposants est invariante par conjugaison, donc $s(\tilde{\beta}_m) = s(\beta_m) = |b| - |a| + nm$. Cela veut dire, $s(\tilde{\beta}_m) = nm + K$ pour une constante K indépendante de m . Alors on a $nm + K \leq (n - 1)m + k$, c'est-à-dire, $m \leq k - K$.

Si on note $M = k - K$, alors pour tout $m > M$, la forme normale à gauche de y_m a un facteur égal à Δ_{U_m} . Rappelons que $U_m = \text{supp}(\tilde{\beta}_m)$, donc $\tilde{\beta}_m \in A_{U_m}$. Cela veut dire que la forme normale à gauche de y_m commence avec Δ_{U_m} . Mais on ne peut pas avoir d'annulations entre x_m^{-1} et y_m , donc cela implique que $x_m = 1$. Ainsi, $\tilde{\beta}_m$ est positif pour tout $m > M$. Cela finit la preuve de l'affirmation.

On a montré que, si $m > M$, l'élément β_m est conjugué à un élément positif. Les bonnes nouvelles sont qu'on peut conjuguer β_m vers un élément positif $\hat{\beta}_m$, en utilisant un élément conjuguant c_m dont la longueur soit bornée par une constante indépendante de m . En fait, on a juste besoin d'appliquer des cyclages itérés à β_m jusqu'à son infimum soit non-négatif. Comme $\inf(\beta_m) \geq -r$, on a juste besoin de faire monter l'infimum au plus r fois, et grâce à (Birman *et al.*, 2001) on sait que cela peut être fait avec au plus $r|\Delta| - r$ cyclages. Par conséquent, on peut prendre $\sup(c_m) \leq r|\Delta| - r$, disons $\sup(c_m) \leq N$, un nombre qui est indépendant de m .

Maintenant on a $\hat{\beta}_m = c_m^{-1}\beta_m c_m = c_m^{-1}a^{-1}b(\Delta_Z)^m c_m \in A^+$. On va essayer de décrire le support de l'élément positif $\hat{\beta}_m$.

Considérons l'élément $(\Delta_Z)^m c_m$. Par le Lemme 5.31, si m est suffisamment grand on peut décomposer $c_m = \rho_m d_m$ afin d'avoir $\Delta_Z \rho_m = \rho_m \Delta_{Y_m}$ (en fait $Z \rho_m = \rho_m Y_m$) pour un

certain $Y_m \subsetneq \Sigma$, et la forme normale à gauche de $(\Delta_Z)^m c_m$ finit avec $m - N - 1$ copies de Δ_{Y_m} suivies par quelques facteurs dont le produit vaut $\Delta_{Y_m} d_m$. Notons que en posant m suffisamment grand, on peut avoir autant de copies de Δ_{Y_m} qu'on veut.

La partie négative de l'écriture ci-dessus de $\widehat{\beta}_m$ est $c_m^{-1} a^{-1}$, qui est le produit de au plus $N + r$ facteurs simples inversés. Comme $\widehat{\beta}_m$ est positive, cette partie négative doit s'annuler complètement avec la partie positive. Plus précisément, elle s'annule avec les premiers $N + r$ facteurs simples de la forme normale à gauche de $b(\Delta_Z)^m c_m$.

Mais les premiers $N + r$ facteurs simples de $b(\Delta_Z)^m c_m$ sont un préfixe du produit de b multiplié par les premiers $N + r$ facteurs de $(\Delta_Z)^m c_m$. Rappelons qu'on peut prendre m suffisamment grand afin d'avoir dans $(\Delta_Z)^m c_m$ toutes les copies de Δ_{Y_m} désirées. Donc, pour m suffisamment grand on peut décomposer $b(\Delta_Z)^m c_m = A \Delta_{Y_m} d_m$, où A est un élément positif contenant les facteurs simples nécessaires pour absorber $c_m^{-1} a^{-1}$ complètement. C'est-à-dire, $A = a c_m B$ pour un certain élément positif B . Donc, $\widehat{\beta}_m = B \Delta_{Y_m} d_m$.

Maintenant rappelons-nous que $\rho_m^{-1} \Delta_Z \rho_m = \Delta_{Y_m}$, donc $|\Delta_{Y_m}| = n$. D'ailleurs, comme $\widehat{\beta}_m$ est positif, son support détermine $\varphi(\beta_m)$. Par conséquent, si $U = \text{supp}(\widehat{\beta}_m)$, on a $|\Delta_U| \leq n$. Puisque $Y_m \subseteq U$, on voit que $n = |\Delta_{Y_m}| \leq |\Delta_U| \leq n$, donc $|\Delta_{Y_m}| = |\Delta_U| = n$ et alors $Y_m = U = \text{supp}(\widehat{\beta}_m)$. En particulier, cela implique que $d_m \in A_{Y_m}$.

Mais on sait que $\widehat{\beta}_m = c_m^{-1} \beta_m c_m$, où $\widehat{\beta}_m$ est positif. Donc le sous-groupe parabolique minimal contenant β_m est $c_m A_{Y_m} c_m^{-1} = \rho_m d_m A_{Y_m} d_m^{-1} \rho_m^{-1} = \rho_m A_{Y_m} \rho_m^{-1} = A_Z$.

Ainsi, $\beta_m \in A_Z$ pour un certain m suffisamment grand. Comme $\beta_m = z_T (\Delta_Z)^m$, on conclut que $z_T \in A_Z$, comme on voulait démontrer. $\square$

5.2.3 Le treillis des sous-groupes paraboliques

On continue ce chapitre avec une conséquence simple mais intéressante du résultat principal de la section précédente : L'ensemble des sous-groupes paraboliques forme un treillis par rapport à l'inclusion.

Proposition 5.35. *Soit A un groupe d'Artin-Tits de type sphérique et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de A . Si π est un prédicat dans $\mathcal{P}$ tel que la conjonction de $\pi(P)$ et $\pi(Q)$ implique $\pi(P \cap Q)$ pour tous $P, Q \in \mathcal{P}$, alors l'ensemble $\mathcal{P}_\pi = \{P \in \mathcal{P} : \pi(P)\}$ contient un unique élément minimal par rapport à l'inclusion, à savoir*

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}_\pi} P.$$

Démonstration. Tout d'abord on rappelle que pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on a $P \cap Q \in \mathcal{P}$ par le [Théorème 5.34](#), donc $\pi(P \cap Q)$ est défini.

L'ensemble $\mathcal{P}_\pi$ est partialement ordonné par inclusion. On démontrera que

$$R = \bigcap_{P \in \mathcal{P}_\pi} P$$

est l'unique élément minimal dans $\mathcal{P}_\pi$. Il est clair par définition que R est contenu dans tout élément de $\mathcal{P}_\pi$, donc il manque à montrer que R est un élément de $\mathcal{P}_\pi$.

Notons que l'ensemble $\mathcal{P}$ de sous-groupes paraboliques dans A est un ensemble dénombrable, puisque tout élément $P \in \mathcal{P}$ peut être déterminé par un sous-ensemble $X \subseteq \Sigma$ et

un élément $\alpha \in A$ tel que $\alpha^{-1}P\alpha = A_X$. Comme il y a un nombre fini de sous-ensembles de S et A est dénombrable, $\mathcal{P}$ est dénombrable.

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{P}_\pi$ est aussi dénombrable, et on peut énumérer ses éléments : $\mathcal{P}_\pi = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$. On pose

$$T_n = \bigcap_{i=0}^n P_i.$$

Par le [Théorème 5.34](#) et les hypothèses sur π , l'intersection de n'importe quel nombre d'éléments dans $\mathcal{P}_\pi$ est contenu dans $\mathcal{P}_\pi$, donc on a $T_n \in \mathcal{P}_\pi$ pour tout $n \geq 0$.

On a alors la chaîne décroissante suivante d'éléments de $\mathcal{P}_\pi$

$$T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \cdots$$

où l'intersection de tous les sous-groupes paraboliques dans cette chaîne est égal à R .

On finit la preuve en remarquant que on ne peut pas trouver une chaîne infinie de sous-groupes paraboliques distincts imbriqués dans A , car si $\alpha^{-1}A_X\alpha \subsetneq \beta^{-1}A_Y\beta$ alors $|X| < |Y|$. Donc, il y a au plus $|S|+1$ sous-groupes paraboliques imbriqués différents dans chacune des chaînes. Ainsi, il existe $N \geq 0$ tel que $T_N = T_{N+k}$ pour tout $k > 0$, et alors

$$R = \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i = T_N = \bigcap_{i=0}^N P_i,$$

donc R est un élément de $\mathcal{P}_\pi$. □

Exemple 5.36. Soit A un groupe d'Artin–Tits de type sphérique et $\alpha \in A$. En appliquant le [Proposition 5.35](#) avec le prédicat $\pi(P) = (\alpha \in P)$, on voit que la clôture parabolique P_α définie dans le [Proposition 5.26](#) est l'intersection de tous sous-groupes paraboliques contenant α .

Théorème 5.37. *L'ensemble des sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique est un treillis par rapport à l'ordre partial induit par l'inclusion.*

Démonstration. Soit A un groupe d'Artin–Tits de type sphérique, et soit $\mathcal{P}$ be l'ensemble de sous-groupes paraboliques de A . Cet ensemble est partialement ordonné par rapport à l'inclusion. Supposons qu'on a $P, Q \in \mathcal{P}$.

Par le [Théorème 5.34](#), $P \cap Q$ est le seul sous-groupe parabolique maximal parmi les sous-groupes paraboliques qui sont contenus dans P et Q à la fois.

Si on applique le [Proposition 5.35](#) avec le prédicat $\pi(T) = (P \cup Q \subseteq T)$ on montre qu'il y a un unique sous-groupe parabolique minimal parmi les sous-groupes paraboliques contenant P et Q . □

5.3 Complexe des sous-groupes paraboliques irréductibles

Notre objectif final est de étendre formellement la notion de *complexe de courbes* (voir [Définition 2.1](#)) du groupe de tresses $\mathcal{B}_n$ aux groupes d'Artin–Tits de type sphérique. Dans la [Section 1.2.2](#) on a vu qu'il y a une bijection entre les classe d'isotopie des courbes simples

fermés non-dégénérées et les sous-groupes paraboliques irréductibles. Maintenant on a besoin de traduire la notion d'être disjoint (la condition d'adjacence dans le complexe de courbes) à notre construction algébrique.

Il faut remarquer que deux courbes disjointes ne correspondent pas nécessairement à deux sous-groupes paraboliques ayant intersection triviale. En fait, deux courbes disjointes imbriquées correspondent à deux sous-groupes paraboliques ayant intersection non-triviale, puisqu'un contient l'autre. Inversement, deux sous-groupes paraboliques irréductibles ayant intersection triviale peuvent correspondre à deux courbes non-disjointes. (Par exemple, les courbes engendrées par les deux sous-groupes cycliques de $\mathcal{B}_n$ ayant pour générateurs σ_1 et σ_2 respectivement, s'intersectent.)

Une traduction algébrique très simple du concept “courbes disjointes” est la suivante : Deux sous-groupes paraboliques irréductibles différents P et Q de $\mathcal{B}_n$ correspondent à des courbes disjointes si et seulement si une parmi les trois conditions suivantes est satisfaite :

1. $P \subsetneq Q$.
2. $Q \subsetneq P$.
3. $P \cap Q = \{1\}$ et $pq = qp$ pour tout $p \in P$, $q \in Q$.

Donc, on peut dire que deux sous-groupes paraboliques irréductibles P et Q dans un groupe d'Artin-Tits A sont *adjacents* si P et Q satisfont une des trois conditions qui précèdent, c'est-à-dire, si un est contenu dans l'autre ou s'ils ont intersection triviale et ils commutent.

Toutefois, cette caractérisation n'est pas complètement satisfaisante, car elle contient trois cas différents. Heureusement, on va pouvoir trouver une caractérisation équivalente beaucoup plus simple en considérant les éléments centraux de Garside. Rappelons que grâce au [Lemme 4.16](#), si on veut étudier les éléments qui conjuguent un sous-groupe parabolique P vers un autre sous-groupe parabolique Q , on peut remplacer P et Q par les éléments z_P et z_Q . Comme ça, il sera beaucoup plus simple de travailler avec un élément que avec tout un sous-groupe.

Théorème 5.38. . Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques irréductibles distincts d'un groupe d'Artin-Tits A de type sphérique. Alors on a $z_P z_Q = z_Q z_P$ si et seulement si une parmi les trois conditions suivantes est vérifiée :

1. $P \subsetneq Q$.
2. $Q \subsetneq P$.
3. $P \cap Q = \{1\}$ et $xy = yx$ pour tout $x \in P$ et $y \in Q$.

Démonstration. Si $P \subsetneq Q$ alors $z_P \in Q$ et z_Q est central dans Q , et donc les éléments commutent. De façon similaire, si $Q \subsetneq P$ alors z_P et z_Q commutent. En plus, si la troisième condition est satisfaite chaque élément de P commute avec chaque élément de Q , donc z_P et z_Q commute.

Réciproquement, supposons que z_P et z_Q commutent. On peut aussi supposer $\{1\} \neq P \subsetneq A$ et $\{1\} \neq Q \subsetneq A$, puisque sinon soit la Condition 1, soit la Condition 2 est satisfait. On va montrer un résultat qui est un peu plus fort que ce dont on a besoin : P et Q peuvent être conjugués *simultanément* vers des sous-groupes paraboliques standards irréductibles A_X et A_Y (pour certains sous-ensembles $X, Y \subseteq \Sigma$). En plus, une des affirmations suivantes est satisfaite :

1. $X \subsetneq Y$.
2. $Y \subsetneq X$.
3. $X \cap Y = \emptyset$, et tous les éléments de X commutent avec tous les éléments de Y .

Observons que les quatre propriétés dans l'énoncé du [Théorème 5.38](#) sont préservées par conjugaison. Donc, on peut supposer que P est standard à conjugaison près.

On décompose z_Q en forme normale positive-négative. À savoir, $z_Q = ab^{-1}$ où a et b sont des éléments positifs tels que $a \wedge^{\natural} b = 1$. L'ordre suffixe est préservé par multiplication à droite, donc on peut multiplier à droite l'équation précédente par b^{-1} , et on a $(ab^{-1}) \wedge^{\natural} 1 = b^{-1}$, c'est-à-dire, $z_Q \wedge^{\natural} 1 = b^{-1}$.

On sait que z_Q commute avec z_P , et 1 aussi commute avec z_P . Donc $z_Q z_P z_Q^{-1}$ et $1 z_P (1)^{-1}$ sont des éléments positifs (on en train de supposer que P est standard, donc z_P est positif). Par convexité ([Lemme 5.7](#) appliqué à l'ordre suffixe), $(z_Q \wedge^{\natural} 1) z_P (z_Q \wedge^{\natural} 1)^{-1}$ est positif, c'est-à-dire, $b^{-1} z_P b$ est positif.

Mais par le [Corollaire 5.21](#) et par le [Corollaire 4.22](#) on sait que chaque conjugué positif de z_P est le générateur du centre d'un sous-groupe parabolique standard irréductible. Ce qui veut dire que $b^{-1} z_P b = z_X$ pour un certain $X \subsetneq \Sigma$.

D'autre part, dans le [Théorème 4.20](#) il est montré que si $z_Q = ab^{-1}$ est en forme normale positive-négative, alors b est le standardisateur minimal de Q , c'est-à-dire, b est le plus petit élément positif qui conjugue Q vers un sous-groupe parabolique standard, donc $b^{-1} z_Q b = z_Y$ pour un certain $Y \subsetneq \Sigma$.

Par conséquent, quand on conjugue z_P et z_Q par b , on obtient des éléments z_X et z_Y , qui sont des générateurs des centres de deux certains sous-groupes paraboliques standards. Alors on peut supposer que P et Q tous les deux sont standards et irréductibles, à conjugaison près.

On aura besoin de montrer l'affirmation suivante :

Affirmation : Soit A un groupe d'Artin-Tits arbitraire. Soient $s_0, \dots, s_k \in \Sigma$ des générateurs atomiques tels que s_i ne commute pas avec s_{i+1} , et $s_i \neq s_{i+2}$ pour tout i . Si un élément $\alpha \in A^+$ est représenté par un mot positif w qui contient une sous-suite $s_0 s_1 \dots s_k$, alors tous les mots positifs représentant α contiennent la même sous-suite.

Preuve de l'affirmation : Grâce à ([Paris, 2002](#)) on sait que les monoïdes d'Artin s'injectent dans leurs groupes. Cela implique que tout mot positif représentant α est obtenu à partir de w après un nombre fini de transformations, dont chacune remplace un sous-mot $sts \dots$ (ayant $m(s, t)$ lettres) avec $tst \dots$ (ayant aussi $m(s, t)$ lettres). On doit juste montrer que le mot obtenu à partir de w après une seule transformation contient la sous-suite $s_0 \dots s_k$. Si $m(s, t) = 2$, la transformation remplace st avec ts . Mais le sous-mot st peut intersecter la sous-suite $s_0 \dots s_k$ dans au plus une lettre (car s_i et s_{i+1} ne commutent pas pour tout i), donc la sous-suite survie après la transformation. Si $m(s, t) \geq 3$ alors le sous-mot $sts \dots$ intersect la sous-suite $s_0 \dots s_k$ de w dans au plus deux lettres consécutives (car $s_i \neq s_{i+2}$ pour tout i). Cet intersection est soit $(s_i, s_{i+1}) = (s, t)$, soit $(s_i, s_{i+1}) = (t, s)$. Dans tous les deux cas, la sous-suite survit après la transformation, puisque $tst \dots$ contient les deux sous-suites possibles. Cela finit la preuve de l'affirmation.

On est en train de supposer que P et Q sont différents sous-groupes paraboliques standards propres de A , donc $P = A_X$ et $Q = A_Y$, où $X, Y \subsetneq \Sigma$ et Γ_X et Γ_Y sont des graphes

connexes. On suppose aussi que z_P et z_Q (c'est-à-dire, z_X et z_Y) commutent. Pour finir la preuve, on va supposer que aucune des conditions de l'énoncé est satisfaite et on va arriver à une contradiction.

Si $X \cap Y = \emptyset$, il y a $a \in X$ et $b \in Y$ qui sont adjacents dans Γ_S , car la Condition 3 n'est pas satisfaite.

Sinon, comme la Condition 1 n'est pas satisfaite et Γ_X est connexe, il y a $a \in X \setminus Y$ et $s_1 \in X \cap Y$ qui sont adjacents dans Γ_S . En plus, comme Condition 2 n'est pas satisfaite et Γ_Y est connexe, il y a $b \in Y \setminus X$ et un chemin simple $s_1, s_2, \dots, s_k = b$ dans Γ_Y .

Dans tous les cas, on a un chemin $a = s_0, s_1, \dots, s_k = b$ qui satisfait les hypothèse de l'affirmation précédente, où $a \in X \setminus Y$, $b \in Y \setminus X$, et $s_1, \dots, s_k \in Y$.

Considérons l'élément $z_P z_Q$, qui est égal à $z_X z_Y$. c'est un élément positif, et n'importe quel représentant de z_X contient la lettre a . D'ailleurs, notons $A_i = \{s_1, \dots, s_i\}$ pour $i = 1, \dots, k$. Alors $\Delta_{A_k} \preceq \Delta_Y \preceq z_Y$, et on a une décomposition

$$\Delta_{A_k} = \Delta_{A_1} r_{s_2, A_1} r_{s_3, A_2} \cdots r_{s_k, A_{k-1}}$$

où le produit des i premiers facteurs est précisément Δ_{A_i} , pour $i = 1, \dots, k$. Il faut remarquer que $s_1 = \Delta_{A_1}$ et que s_i est la première lettre de $r_{s_i, A_{i-1}}$ (par le Lemme 5.1) pour $i = 2, \dots, k$. Donc, la suite $s_0, \dots, s_k$ est une sous-suite de $z_X z_Y$.

Grâce à l'affirmation précédente, tout mot positif représentant $z_X z_Y$ doit contenir la sous-suite $s_0, \dots, s_k$. Maintenant choisissons un représentant de $z_Y z_X$ qui est la concaténation d'un mot représentant z_Y et un mot représentant z_X . Dans un tel représentant, les lettres b sont placées à gauche des lettres a . Ainsi, ce mot ne contient pas la sous-suite $s_0, \dots, s_k$ et donc $z_X z_Y \neq z_Y z_X$, c'est-à-dire, $z_P z_Q \neq z_Q z_P$. Cela est une contradiction qui finit la preuve. $\square$

Remarque 5.39. Considérons deux classes d'isotopie de courbes simples fermées non-dégénérées C_1 et C_2 dans le disque $\mathcal{D}_n$, et ses sous-groupes paraboliques correspondants $P = \varphi(C_1)$ et $Q = \varphi(C_2)$ dans $\mathcal{B}_n$. Alors C_1 et C_2 peuvent être isotopées afin d'être disjointes si et seulement si leurs twists de Dehn correspondants commutent (Franco & González-Meneses, 2003, Fait 3.9). Il est connu que le centralisateur d'un générateur σ_i est égal au centralisateur de σ_i^2 . Donc C_1 et C_2 peuvent être isotopées pour être disjointes si et seulement si z_P et z_Q commutent, ce qui équivaut, par le Théorème 5.38, au trois conditions de son énoncé.

On peut finalement étendre la notion de *complexe de courbes* à tous les groupes d'Artin–Tits de type sphérique, en remplaçant les courbes par des sous-groupes paraboliques irréductibles.

Définition 5.40. Soit A un groupe d'Artin–Tits de type sphérique. On définit le *complexe de sous-groupes paraboliques irréductibles* comme un complexe simplicial dans lequel un simplexe de dimension d est un ensemble $\{P_0, \dots, P_d\}$ de sous-groupes paraboliques tels que les éléments centraux de Garside z_{P_i} et z_{P_j} commutent pour tout $0 \leq i, j \leq d$.

Remarquons que, par définition, le complexe de sous-groupes paraboliques irréductibles est un *complexe de drapeaux*, c'est-à-dire, tout sous-graphe complet de son 1-squelette est le 1-squelette d'un de ses simplexes. Ainsi, tout l'information sur le complexe est contenue dans son 1-squelette, le *graphe de sous-groupes paraboliques irréductibles*.

De la même façon que dans le complexe de courbes de $\mathcal{D}_n$ (ou n'importe quelle autre surface), on peut définir une distance dans le complexe de sous-groupes paraboliques irréductibles, qui est déterminée par la distance dans le 1-squelette, en sachant que toutes les arêtes ont pour longueur 1. Notons que l'action de A sur ce complexe (par conjugaison dans les sous-groupes paraboliques) est une action par isométries, car la conjugaison préserve la commutation des éléments.

On pense que ce complexe peut être un outil important pour étudier des propriétés des groupes d'Artin–Tits de type sphérique. On finit cette thèse en conjecturant un résultat important, qui permettrait d'étendre beaucoup des propriétés du groupe de tresses aux groupes d'Artin–Tits de type sphérique :

Conjecture 5.41. *Le complexe de sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin–Tits de type sphérique est δ -hyperbolique.*

Bibliographie

- Emil Artin. 1947. Theory of Braids. *Ann. of Math.(2)*, **48**, 101–126. (Cité en pages [1](#), [2](#), [9](#) et [10](#).)
- Paolo Bellingeri, Sylvain Gervais, & John Guaschi. 2008. Lower central series of Artin-Tits and surface braid groups. *J. Algebra*, **319**, 1409–1427. (Cité en pages [40](#) et [41](#).)
- Mladen Bestvina, & Mark Feighn. 2010. A hyperbolic $Out(F_n)$ -complex. *Groups Geom. Dyn.*, **4**(1), 31–58. (Cité en page [32](#).)
- Mladen Bestvina, & Koji Fujiwara. 2007. Quasi-homomorphisms on mapping class groups. *Glas. Mat. Ser. III*, **42(62)**(1), 213–236. (Cité en page [32](#).)
- Joan S. Birman, Ki Hyoung Ko, & Sang Jin Lee. 2001. The Infimum, Supremum, and Geodesic Length of a Braid Conjugacy Class. *Adv. Math.*, **164**, 41–56. (Cité en page [81](#).)
- Joan S. Birman, Volker Gebhardt, & Juan González-Meneses. 2007. Conjugacy in Garside groups. I. Cyclings, powers and rigidity. *Groups Geom. Dyn.*, **1**(3), 221–279. (Cité en pages [20](#), [63](#), [64](#), [74](#), [75](#) et [76](#).)
- Brian Bowditch. 2008. Tight geodesics in the curve complex. *Invent. Math.*, **171**(2), 281–300. (Cité en pages [30](#), [31](#) et [34](#).)
- Egbert Brieskorn, & Kyoji Saito. 1972. Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. *Invent. Math.*, **17**(4), 245–271. (Cité en page [22](#).)
- Matthieu Calvez. 2012. Dual Garside structure and reducibility of braids. *J. Algebra*, **356**(1), 355–373. (Cité en page [50](#).)
- Matthieu Calvez, & Bert Wiest. 2016. Curve graphs and Garside groups. *Geom. Dedicata*, **188**(1), 195–213. (Cité en pages [4](#), [12](#), [35](#) et [36](#).)
- Matthieu Calvez, & Bert Wiest. 2017. Acylindrical hyperbolicity and Artin-Tits groups of spherical type. *Geom. Dedicata*, **191**(1), 199–215. (Cité en pages [5](#), [12](#), [36](#) et [41](#).)
- Sandrine Caruso. 2013. *Algorithmes et généricité dans les groupes de tresses*. Ph.D. thesis, Université Rennes 1. (Cité en pages [5](#) et [14](#).)
- Sandrine Caruso. 2017. On the genericity of pseudo-Anosov braids I : rigid braids. . *J. Groups, Geometry and Dynamics*, **11**(2), 533–547. (Cité en page [38](#).)
- Sandrine Caruso, & Bert Wiest. 2017. On the genericity of pseudo-Anosov braids II : conjugations to rigid braids. *J. Groups, Geometry and Dynamics*, **11**(2), 549–565. (Cité en pages [4](#) et [12](#).)
- Ruth Charney. 1995. Geodesic automation and growth functions for Artin groups of finite type. *Math. Ann.*, **301**, 307–324. (Cité en page [19](#).)
- Harold S. M. Coxeter. 1935. The Complete Enumeration of Finite Groups of the Form $r_i^2 = (r_i r_j)^{k_{ij}} = 1$. *J. Lond. Math. Soc.*, **1-10**(1), 21–25. (Cité en page [21](#).)

- Max Dehn. 1987. *Papers on Group Theory and Topology*. Springer New York. (Cité en page 32.)
- Patrick Dehornoy. 2008. Efficient solutions to the braid isotopy problem. *Discrete Appl. Math.*, **156**(16), 3091–3112. (Cité en page 58.)
- Patrick Dehornoy. 2015. *Foundations of Garside theory*. EMS Tracts in Mathematics, vol. 22. European Mathematical Society (EMS), Zürich. Avec François Digne, Eddy Godelle, Daan Krammer et Jean Michel. (Cité en page 78.)
- Patrick Dehornoy, & Volker Gebhardt. 2014. Algorithms for Garside calculus. *J. Symb. Comp.*, **63**, 68–116. (Cité en page 78.)
- Patrick Dehornoy, & Luis Paris. 1999. Gaussian Groups and Garside Groups, two Generalisations of Artin Groups. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **79**(3), 569–604. (Cité en pages 18 et 22.)
- Patrick Dehornoy, Ivan Dynnikov, Dale Rolfsen, & Bert Wiest. 2002. *Why are braids orderable ?* Panoramas et Synthèses, vol. 14. Paris : Société Mathématique de France. (Cité en pages 47 et 48.)
- Patrick Dehornoy, Ivan Dynnikov, Dale Rolfsen, & Bert Wiest. 2008. *Ordering braids*. Mathematical surveys and monographs, vol. 148. American Mathematical Society. (Cité en pages 5, 14 et 47.)
- Pierre Deligne. 1972. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent. Math.*, **17**, 273–302. (Cité en page 22.)
- François Digne, & Yasushi Gomi. 2001. Presentation of pure braid groups. *J. Knot Theory Ramifications*, **10**(04), 609–623. (Cité en page 61.)
- Ivan Dynnikov, & Bert Wiest. 2007. On the complexity of braids. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **9**(4), 801–840. (Cité en pages 5 et 14.)
- Elsayed A. Elrifai, & Hugh R. Morton. 1994. Algorithms for positive braids. *Q. J. Math.*, **45**(4), 479–497. (Cité en pages 18, 19, 20, 51 et 63.)
- Benson Farb, & Dan Margalit. 2012. *A primer on mapping class groups*. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ : Princeton University Press. (Cité en pages 1, 3, 10, 11 et 33.)
- Albert Fathi. 1987. Dehn twists and pseudo-Anosov diffeomorphisms. *Invent. Math.*, **87**(1), 129–151. (Cité en pages 30 et 31.)
- Roger Fenn, Michael T. Greene, Dale Rolfsen, Colin Rourke, & Bert Wiest. 1999. Ordering the braid groups. *Pacific J. Math.*, **191**(1), 49–74. (Cité en page 46.)
- Nuno Franco, & Juan González-Meneses. 2003. Conjugacy problem for braid groups and Garside groups. *J. Algebra*, **266**, 112–132. (Cité en pages 26, 64 et 86.)
- Frank A. Garside. 1969. The braid group and other groups. *Q. J. Math.*, **20**(1), 235–254. (Cité en page 20.)

- Volker Gebhardt. 2005. A new approach to the conjugacy problem in Garside groups. *J. Algebra*, **292**, 282–302. (Cité en pages 20, 63, 64 et 65.)
- Volker Gebhardt, & Juan González-Meneses. 2010a. Solving the conjugacy problem in Garside groups by cyclic sliding. *J. Symbolic Comput.*, **45**(6), 629–656. (Cité en pages 20 et 52.)
- Volker Gebhardt, & Juan González-Meneses. 2010b. The cyclic sliding operation in Garside groups. *Math. Z.*, **265**, 85–114. (Cité en pages 21 et 53.)
- Volker Gebhardt, & Stephen Tawn. 2016. On the penetration distance in Garside monoids. *J. Algebra*, **451**, 544–576. (Cité en page 38.)
- Eddy Godelle. 2001. *Normalisateurs et centralisateurs des sous-groupes paraboliques dans les groupes d’Artin–Tits*. Ph.D. thesis, Université de Picardie–Jules Verne. (Cité en page 61.)
- Eddy Godelle. 2003. Normalisateur et groupe d’Artin de type sphérique. *J. Algebra*, **269**(1), 263–274. (Cité en pages 24, 25 et 62.)
- Stephen P. Humphries. 1979. Generators for the mapping class group. *Pages 44–47 of : Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg. (Cité en page 33.)
- Eon-Kyung Lee, & Sang-Jin Lee. 2008. A Garside-theoretic approach to the reducibility problem in braid groups. *J. Algebra*, **320**(2), 783–820. (Cité en pages 5, 13 et 45.)
- Sang-Jin Lee. 2000. *Algorithmic solutions to decision problems in the braid groups*. Ph.D. thesis, Advanced Institute of Science and Technology, Korea. (Cité en page 20.)
- W. B. R. Lickorish. 1964. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60**(04), 769. (Cité en page 33.)
- Joshep Maher. 2012. Exponential decay in the mapping class group. *J. Lond. Math. Soc.*, **86**(2), 366–386. (Cité en pages 4 et 12.)
- Howard A. Masur, & Yair N. Minsky. 1999. Geometry of the complex of curves I : Hyperbolicity. *Invent. Math.*, **138**(1), 103–149. (Cité en page 31.)
- Stepan Yu. Orevkov. 2012. On Commutator Subgroups of Artin Groups. *Dokl. Math.*, **85**(1), 117–119. (Cité en page 41.)
- Luis Paris. 1997. Parabolic Subgroups of Artin Groups. *J. Algebra*, **196**(2), 369–399. (Cité en page 24.)
- Luis Paris. 2002. Artin monoids inject in their groups. *Comment. Math. Helv.*, **77**(3), 609–637. (Cité en pages 21, 61 et 85.)
- Matthieu Picantin. 2001. The Conjugacy Problem in Small Gaussian Groups. *Communications in Algebra*, **29**(3), 1021–1039. (Cité en page 20.)
- Piotr Przytycki, & Alessandro Sisto. 2017. A note on acylindrical hyperbolicity of mapping class groups. *Adv. Stud. Pure Math.*, **73**, 255–264. (Cité en page 34.)

- Dongwen Qi. 2007. A note on parabolic subgroups of a Coxeter group. *Expo. Math.*, **25**, 77–81. (Cité en pages 7 et 15.)
- Igor Rivin. 2008. Walks on groups, counting reducible matrices, polynomials, and surface and free group automorphisms. *Duke Math J.*, **142**(2), 353–379. (Cité en pages 4 et 12.)
- Alessandro Sisto. Contracting elements and random walks. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. doi :10.1515/crelle-2015-0093, to appear. (Cité en pages 4, 12 et 41.)
- William P. Thurston. 1988. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**(2), 417–432. (Cité en pages 5 et 13.)
- Harm Van der Lek. 1983. *The Homotopy Type of Complex Hyperplane Complements*. Ph.D. thesis, Nijmegen. (Cité en page 23.)
- Wen-yuan Yang. 2018. Statistically Convex-Cocompact Actions of Groups with Contracting Elements. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, feb. (Cité en page 41.)

Titre : Sous-groupes paraboliques et genericité dans les groupes d'Artin-Tits de type sphérique

Mots clés : groupe de tresses, groupe modulaire, groupes d'Artin, théorie de Garside

Résumé : Dans la première partie de cette thèse on étudiera la conjecture de genericité: dans le graphe de Cayley du groupe modulaire d'une surface fermée on regarde une boule centrée à l'identité et on s'intéresse à la proportion de sommets pseudo-Anosov dans cette boule. La conjecture de genericité affirme que cette proportion doit tendre vers 1 quand le rayon de la boule tend vers l'infini. On montre qu'elle est bornée inférieurement par un nombre strictement positif et on montre des résultats similaires pour une grande classe de sous-groupes du groupe modulaire. On présente aussi des résultats analogues pour des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, en sachant que dans ce cas, être pseudo-Anosov est analogue à agir loxodromiquement sur un complexe delta-hyperbolique convenable.

Dans la deuxième partie on donne des résultats sur les sous-groupes paraboliques des groupes d'Artin-Tits de type sphérique: le standardisateur minimal d'une courbe dans le disque troué est la tresse minimale positive qui la fait devenir ronde. On construit un algorithme pour le calculer d'une façon géométrique. Ensuite, on généralise le problème pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique.

On montre aussi que l'intersection de deux sous-groupes paraboliques est un sous-groupe parabolique et que l'ensemble de sous-groupes paraboliques est un treillis par rapport à l'inclusion. Finalement, on définit le complexe simplicial des sous-groupes paraboliques irréductibles, et on le propose comme l'analogue du complexe de courbes.

Title : Parabolic subgroups and genericity in Artin-Tits groups of spherical type

Keywords : braid groups, mapping class group, Artin groups, Garside theory

Abstract: In the first part of this thesis we study the genericity conjecture: In the Cayley graph of the mapping class group of a closed surface we look at a ball of large radius centered on the identity vertex, and at the proportion of pseudo-Anosov vertices among the vertices in this ball.

The genericity conjecture states that this proportion should tend to one as the radius tends to infinity. We prove that it stays bounded away from zero and prove similar results for a large class of subgroups of the mapping class group. We also present analogous results for Artin-Tits groups of spherical type, knowing that in this case being pseudo-Anosov is analogous to being a loxodromically acting element.

In the second part we provide results about parabolic subgroups of Artin-Tits groups of spherical type: The minimal standardizer of a curve on a punctured disk is the minimal positive braid that transforms it into a round curve. We give an algorithm to compute it in a geometrical way. Then, we generalize this problem algebraically to parabolic subgroups of Artin-Tits groups of spherical type.

We also show that the intersection of two parabolic subgroups is a parabolic subgroup and that the set of parabolic subgroups forms a lattice with respect to inclusion. Finally, we define the simplicial complex of irreducible parabolic subgroups, and we propose it as the analogue of the curve complex for mapping class groups.