N° d'ordre NNT : 2018LYSET014

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

l'École Nationale des Travaux Publics de l'État

École Doctorale N° 162 MEGA
Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité : Acoustique

Soutenue publiquement le 20/12/2018, par

Pascal FOSSAT

Homogénéisation périodique de plaques raidies à résonance interne

---

Devant le jury composé de :

M. Karam SAB	Professeur	École des Ponts Paris Tech	Président du jury
M. Mabrouk BEN TAHAR	Professeur	UTC Compiègne	Rapporteur
M. Patrice CARTRAUD	Professeur	École Centrale de Nantes	Rapporteur
Mme Marie-Annick GALLAND	Professeur	École Centrale de Lyon - LMFA	Examinatrice
M. Claude BOUTIN	Chercheur	École Nat. Travaux Publics de l'État	Directeur de thèse
M. Mohamed ICHCHOU	Professeur	École Centrale de Lyon - LTDS	Co-Directeur de thèse

Abstract

This work is devoted to the modeling of two types of contrasted structured plates that exhibit non-conventional dynamic behavior : the first one corresponds to periodic unidirectionally stiffened plates and the second one corresponds to orthogonally stiffened plates. The different regimes of behavior are specified, according to the mechanical and geometrical parameters of the beam and the plate. The dynamic behavior of such stiffened plates is established by up-scaling, through multi-scale asymptotic method, the linear local description of the plate and the stiffening beams coupled together. The behavior is derived from the three-dimensional elastodynamic laws of the materials combined with asymptotic expansions formulation. The study focuses on situations of inner resonance that corresponds to specific mechanical contrasts between the beam and plate parameters.

The analysis clearly evidences the enriched kinematics of such plate and yields to a synthetic and analytic macroscopic representation that encompasses the flexural and torsional mechanisms, as well as guided waves. In the case of unidirectionally ribbed plates, an effective hybrid beam/plate model is obtained and the analytical expressions of effective parameters are specified. It results in a beam-like operator that provides a simple understanding of the behavior taking into account inner resonance. This atypical model accounts from the coexistence of two types of dynamic regimes. The unusual dispersion features of flexural and torsional waves arise from frequency dependent parameters, namely, the effective mass, the effective rotational inertia and the effective torsional spring rigidity associated with the plate.

The theory is then extended to an orthogonally ribbed plate, and yields a non-conventional plate model with frequency dependent parameters. These results allow investigating the atypical dispersion equation with respect to the geometrical and mechanical contrasts of the structural components. The validity and robustness of the model are also verified by comparing theoretical predictions with finite element based computations, namely the WFEM (*Wave Finite Element Method*). Comparisons show that mechanisms identified numerically are correctly predicted by the proposed homogenized model.

Finally, two mock-ups are considered experimentally, corresponding to uni-directionally ribbed plate with geometrical contrast and orthogonally ribbed plates involving geometrical and mechanical contrasts. The out-of-plane displacement field under random excitation is measured using a scanning laser vibrometer, then post-processed using the IWC (*Inhomogeneous Wave Correlation*) method. This is performed for various internal boundary conditions and added mass to highlight the ability of the homogenized model to describe different configurations. A good agreement is found between the experimental measurements and the analytical predictions. The presented approach can be used to describe the motion of ribbed panels of industrial interest and/or to design structures having specific atypical features in a given frequency range.

Keywords : ribbed plates, asymptotic homogenization, composite materials, periodic structures, inner resonance media.

Résumé

Ce travail est consacré à la description macroscopique de deux types de plaques structurées contrastées dont le comportement dynamique est atypique : le premier cas correspond à une plaque raidie dans une direction par des raidisseurs régulièrement espacés, le second correspond au cas d'une plaque bi-raidie dans les deux directions par un treillis périodique de poutres. Les différents régimes de comportement sont spécifiés en fonction des paramètres mécaniques et géométriques des raidisseurs et de la plaque. Le comportement dynamique de ces plaques est établi en faisant émerger, par homogénéisation asymptotique, la description locale et globale. Le modèle est construit à partir des équations élasto-dynamiques tri-dimensionnelles du matériau combinées à des développements asymptotiques. Le travail se concentre sur des situations de résonance interne qui correspondent à des contrastes spécifiques entre les paramètres de la plaque et du raidisseur.

L'analyse met clairement en évidence les cinématiques enrichies de la plaque et aboutit à un modèle analytique macroscopique qui inclut les mécanismes de torsion et de flexion. Dans le cas de la plaque mono-raidie, un modèle hybride fait intervenir des paramètres effectifs dont les expressions analytiques sont précisées. Ce modèle est analogue à un modèle de poutre et permet d'appréhender le comportement de la plaque en incluant la résonance interne. Ce modèle non conventionnel montre la coexistence de deux régimes dynamiques. Les caractéristiques de dispersion atypique associées aux ondes de flexion et de torsion proviennent de paramètres effectifs dépendants de la fréquence, comme la masse effective, l'inertie de rotation effective, et la rigidité de torsion effective associées à la plaque.

Cette théorie est ensuite étendue au cas de la plaque bi-raidie, et conduit à un opérateur de type plaque non conventionnel incluant des paramètres effectifs. Ces résultats permettent d'examiner des courbes de dispersion atypiques en fonction des contrastes géométriques et mécaniques entre les différents composants. La validité des modèles et leur robustesse sont vérifiées en comparant les résultats analytiques à des simulations numériques de type éléments finis WFEM. Les comparaisons montrent que les mécanismes observables numériquement sont bien décrits par le modèle analytique proposé.

Enfin, deux maquettes sont utilisées pour la validation expérimentale : une correspondant à une plaque mono-raidie comportant un contraste géométrique, et l'autre correspondant à la plaque bi-raidie impliquant des contrastes géométrique et mécanique. Les réponses mesurées par vibromètre laser sont traitées par corrélation d'onde IWC. Les mesures sont reproduites pour plusieurs conditions limites de plaques internes et différentes valeurs de masse ajoutées pour montrer la performance du modèle homogénéisé. Une très bonne corrélation apparaît entre les mesures expérimentales et les prédictions issues du modèle. Cette approche peut être utilisée pour décrire le comportement de panneaux raidis industriels et pour concevoir des structures ayant des propriétés spécifiques à certaines fréquences.

Mots-clés : plaques raidies, homogénéisation asymptotique, matériaux composites, structures périodiques, milieux à résonance interne.

Remerciements

Cette thèse, financée par le LabEx CeLyA de l'Université de Lyon, a été préparée au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, entre le Laboratoire Génie Civil et Bâtiment de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État et le site de l'École Centrale de Lyon.

Je veux tout d'abord exprimer ma gratitude à mes deux directeurs de thèse, messieurs Claude Boutin, Chercheur à l'École Nationale des Travaux Publics de l'État, et Mohamed Ichchou, Professeur à l'École Centrale de Lyon, pour m'avoir dirigé tout au long de ce travail. Leurs qualités de chercheurs ont été très enrichissantes, et je les remercie encore pour leur confiance et leur patience.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres du jury, pour leurs responsabilités de rapporteurs et d'examinateurs, et pour le temps et l'attention qu'ils ont consacrés à l'examen de ce travail ; Patrice Cartraud, Professeur à l'École Centrale de Nantes, au sein du Laboratoire GeM (Institut de recherche en génie civil et mécanique), Mabrouk Ben Tahar, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, au sein du Laboratoire Roberval, et Karam Sab, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, au sein du Laboratoire Navier, Marie- Annick Galland, Professeur à l'École Centrale de Lyon, au sein du LMFA (Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique). Leur participation à ce jury est pour moi un grand plaisir et je leur en suis reconnaissant.

Je dois également remercier l'ensemble des membres de l'équipe qui ont contribué à la bonne ambiance de travail, avec une mention particulière à Christophe Droz et Rodolfo Venegas, avec qui j'ai entretenu des discussions riches d'enseignements, et que je remercie pour leurs conseils avisés et l'expérience qu'ils m'ont faits partager. Je remercie également Stéphane Lemahieu pour son efficacité et son aide à la mise en place de la partie expérimentale.

Je réserve enfin une pensée chaleureuse à mes proches pour leur soutien fidèle, et qui n'ont cessé de m'encourager à aller de l'avant.

Table des matières

Abstract iii

Résumé v

Remerciements vii

1 Introduction générale 1
- 1.1 Contexte et objectif . . . 1
- 1.2 Organisation du manuscrit . . . 2

2 État de l'art 3
- 2.1 Plaques raidies en ingénierie . . . 4
- 2.2 Homogénéisation périodique . . . 6
- 2.3 Propagation des ondes dans les structures périodiques . . . 7
  - 2.3.1 Application à la compression d'une poutre bi-composite . . . 8
  - 2.3.2 Approche analytique exacte . . . 8
  - 2.3.3 Homogénéisation asymptotique . . . 9
  - 2.3.4 Méthode des matrices de transfert . . . 10
  - 2.3.5 Méthode propagative WFEM . . . 11
  - 2.3.6 Extension à la flexion d'une poutre bi-composite . . . 14
- 2.4 Outils d'identification des nombres d'onde . . . 19
  - 2.4.1 Transformée de Fourier discrète : DFT . . . 19
  - 2.4.2 Corrélation avec des ondes inhomogènes : IWC . . . 20
- 2.5 Remarques finales . . . 21

3 Plaque raidie 23
- 3.1 Analyse physique . . . 24
  - 3.1.1 Structure étudiée . . . 24
  - 3.1.2 Définition physique de la résonance interne dans la plaque raidie . . . 24
  - 3.1.3 Ligne de conduite du processus asymptotique . . . 29
- 3.2 Homogénéisation de la plaque raidie avec résonance interne . . . 29
  - 3.2.1 Modèles asymptotiques de poutre et de plaque . . . 29
  - 3.2.2 Modèle asymptotique pour la poutre $\mathcal{B}$ . . . 30
  - 3.2.3 Modèle asymptotique pour la plaque $\mathcal{P}$ . . . 31
  - 3.2.4 Modèle asymptotique de la plaque raidie . . . 32
- 3.3 Synthèse du comportement en flexion . . . 37
- 3.4 Caractéristiques de dispersion en flexion . . . 37

3.4.1 Ondes de flexion avec poutres actives . . . 37
3.4.2 Caractéristiques de dispersion avec poutres passives . . . 39
3.4.3 Limite de validité du modèle hybride en flexion . . . 41
3.5 Comportement en torsion . . . 41
3.5.1 Condition co-dynamique et couplage asymétrique en torsion . . . 42
3.5.2 Comportement en torsion de la plaque raidie . . . 43
3.5.3 Modèle homogénéisé en torsion . . . 44
3.5.4 Dispersion des ondes de torsion . . . 45
3.5.5 Limite de validité du modèle hybride en torsion . . . 47
3.6 Conclusions intermédiaires . . . 48

4 Plaque bi-raidie **51**
4.1 Structure étudiée . . . 52
4.1.1 Condition co-dynamique pour la plaque bi-raidie . . . 53
4.1.2 Couplage asymétrique . . . 53
4.1.3 Dimensionnements compatibles avec la résonance interne . . . 54
4.2 Homogénéisation du treillis de poutres . . . 55
4.2.1 Discrétisation de l'équilibre dynamique . . . 55
4.2.2 Développements en statique . . . 60
4.2.3 Extension en dynamique . . . 65
4.3 Introduction de la dynamique locale . . . 67
4.3.1 Couplage entre le treillis de poutres et les plaques internes . . . 67
4.3.2 Plaques internes entraînées par le treillis de poutres . . . 67
4.3.3 Conditions limites internes . . . 68
4.3.4 Formulation homogénéisée du comportement de la plaque bi-raidie en flexion 69
4.3.5 Plaques internes CFCF . . . 71
4.3.6 Plaques internes CFFF . . . 71
4.3.7 Plaques internes CCCC . . . 72
4.3.8 Plaques internes circulaires . . . 74
4.4 Caractéristiques de dispersion . . . 77
4.5 Plaques internes avec masselottes . . . 78
4.5.1 Cas CFCF . . . 78
4.5.2 Cas CFFF . . . 80
4.6 Remarques finales . . . 81

5 Exploitation des modèles et validation numérique **83**
5.1 Plaques mono-raidies étudiées . . . 84
5.2 Caractéristiques de dispersion de la plaque mono-raidie . . . 84
5.2.1 Ondes associées aux modes symétriques . . . 84
5.2.2 Ondes associées aux modes antisymétriques . . . 86
5.2.3 Modèle de guide d'onde inter-raidisseurs . . . 87
5.2.4 Comparaisons avec la Wave Finite Element Method . . . 89
5.2.5 Courbes de dispersion dans la plaque $\mathcal{R}_2$ . . . 96
5.2.6 Influence de l'amortissement . . . 96
5.3 Validation sur des plaques mono-raidies finies . . . 100
5.3.1 Réponses en fréquence de la plaque mono-raidie finie . . . 100
5.3.2 Reconstruction du nombre d'onde de flexion . . . 102
5.3.3 IWC à partir de réponses calculées par éléments finis . . . 105
5.4 Étude de la plaque bi-raidie . . . 106

5.5 Vérifications préliminaires hors intervalles de résonances internes . . . 106
5.5.1 Validation sur le treillis orthogonal . . . 106
5.5.2 Espaces des nombres d'onde pour le treillis et la plaque bi-raidie . . . 107
5.6 Caractéristiques de dispersion de la plaque bi-raidie . . . 108
5.6.1 Influence des conditions limites des plaques internes résonantes . . . 108
5.6.2 Masse ajoutée sur les plaques internes . . . 111
5.7 Remarques finales . . . 115

6 Validation expérimentale 117
6.1 Structures étudiées et instrumentation . . . 118
6.1.1 Assemblage et protocole de mesure . . . 118
6.1.2 Montage et instrumentation . . . 120
6.1.3 Mesures préliminaires . . . 122
6.2 Plaque mono-raidie . . . 123
6.2.1 Estimation du nombre d'onde : excitation de type bruit blanc . . . 123
6.2.2 Estimation du nombre d'onde : excitation impulsionnelle de type Ricker . 123
6.2.3 Signaux temporels sous excitation sinusoïdale . . . 125
6.3 Plaque bi-raidie . . . 126
6.3.1 Identification des fréquences propres et des résonances locales . . . 126
6.3.2 Courbe de dispersion préliminaire dans le treillis seul . . . 127
6.3.3 Influence des conditions limites internes sur les courbes de dispersion . . . 130
6.3.4 Influence de la masse ajoutée sur les courbes de dispersion . . . 134
6.4 Remarques finales . . . 140

7 Conclusion générale et perspectives 141
7.1 Conclusion . . . 141
7.2 Perspectives . . . 144

Bibliographie 145

A Modèles asymptotiques 151
A.1 Homogénéisation d'une poutre composite . . . 151
A.2 Développements pour l'élément poutre $\mathcal{B}$ . . . 154
A.2.1 Formulation du problème . . . 154
A.2.2 Comportement asymptotique . . . 155

B Découplage des problèmes plan et hors-plan 159

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte et objectif

Les plaques composites aux propriétés vibroacoustiques optimisées se présentent de manière pratique sous forme de structures fortement hétérogènes. Ces plaques composites combinent plusieurs constituants ayant des propriétés différentes faites de différents matériaux et présentent souvent une structure périodique, comme par exemple, les panneaux alvéolés de type nid d'abeilles, les plaques sandwich multi-couches, les plaques raidies, ou les treillis de poutres. Ces structures sont utilisées dans l'industrie automobile ou aérospatiale, en génie civil, où une structure plane peut être rigidifiée par des raidisseurs régulièrement espacés. L'estimation de leur comportement dynamique revêt un intérêt particulier d'un point de vue théorique et pratique.

Les structures pour lesquelles la cellule unitaire présente de forts contrastes mécanique et géométrique sont difficiles à modéliser numériquement. En effet, l'approche la plus utilisée pour déterminer le comportement de ces structures périodiques consiste à les simuler numériquement par la méthode des éléments finis. Si le nombre de périodes est faible, les résultats sont précis. Si les cellules sont nombreuses et la structure hétérogène, la discrétisation est plus exigeante et les temps de calculs deviennent longs, surtout en dynamique. Cet aspect est limitant quand il s'agit de dimensionner, de faire des études de sensibilité, ou d'évaluer l'effet d'un certain paramètre.

Cette limitation apparaît déjà en régime statique et devient encore plus problématique en régime dynamique, où le phénomène de résonance interne peut se manifester. La résonance interne intervient lorsque le milieu présente une dynamique aux niveaux microscopique et macroscopique simultanément. Dans ce cas, le comportement dynamique global présente des bandes de fréquences où les paramètres effectifs sont singuliers. La réduction de modèles par homogénéisation est un moyen de décrire ces situations et de définir explicitement le comportement macroscopique équivalent.

L'objectif de ce travail est de construire des modèles homogénéisés, et de justifier leur pertinence pour décrire des structures composites périodiques de type plaques raidies à résonances locales. L'homogénéisation permet de prendre en compte les mécanismes à l'échelle locale et de les faire émerger à l'échelle globale. Il s'agit donc de proposer des modèles analytiques pour modéliser les phénomènes physiques, et de donner un panorama interprétatif le plus complet possible, en particulier pour les effets de dispersion atypique liés à la résonance interne.

1.2 Organisation du manuscrit

Un premier chapitre axé sur l'étude bibliographique met en évidence deux aspects : *i)* l'étude des structures contrastées périodiques est liée à la thématique des métamatériaux, *ii)* les méthodes semi-analytiques et numériques pour les décrire donnent de nombreux résultats montrant les phénomènes d'atténuation sans toujours apporter de cadre phénoménologique et de modèles analytiques expliquant les mécanismes physiques.

Le second chapitre porte sur la construction du modèle de plaque raidie dans une direction par homogénéisation asymptotique. Cette approche permet de décrire les ondes guidées dans la plaque, la flexion et la torsion dans le renfort en présence de résonance interne. Il apporte une interprétation complète aux courbes de dispersion.

La troisième partie expose la construction du modèle de plaque raidie par des raidisseurs orthogonaux. Une méthode d'homogénéisation discrète, complétée par les conclusions du second chapitre permet d'enrichir le modèle de treillis de poutres en y ajoutant la dynamique locale des plaques internes résonantes, pour différentes conditions limites.

Le quatrième chapitre est le volet numérique de ce travail. L'objectif est de comparer les modèles analytiques des deux chapitres précédents à des simulations numériques. Il expose la mise en œuvre de méthodes de types éléments finis sur des dimensionnements compatibles avec la résonance interne, et illustrant les situations décrites analytiquement.

Le cinquième chapitre propose une validation expérimentale des modèles analytiques. Le but est de comparer les nombres d'ondes expérimentaux et analytiques, en identifiant les fréquences de résonance interne. Deux maquettes sont étudiées et permettent d'appréhender les différentes configurations détaillées analytiquement.

Enfin, une conclusion générale synthétise les principales étapes du processus de construction des modèles et donne une vue d'ensemble des apports de cette thèse en termes de compréhension des mécanismes. Des pistes d'approfondissements et des idées de futurs travaux sont aussi suggérées.

Chapitre 2

État de l'art

Ce premier chapitre expose le sujet et introduit les notions utilisées dans le manuscrit. Il aborde l'homogénéisation de structures hétérogènes en se focalisant sur les aspects de périodicité et de contraste. Il explique le positionnement de l'homogénéisation par rapport aux modèles de plaques classiques, les hypothèses, et l'apport méthodologique face à des méthodes numériques. À titre d'illustration, différentes méthodes classiques utilisées pour l'étude des structures périodiques sont mises en œuvre sur un exemple simple.

Sommaire

2.1 Plaques raidies en ingénierie 4
2.2 Homogénéisation périodique 6
2.3 Propagation des ondes dans les structures périodiques 7
2.3.1 Application à la compression d'une poutre bi-composite 8
2.3.2 Approche analytique exacte 8
2.3.3 Homogénéisation asymptotique 9
2.3.4 Méthode des matrices de transfert 10
2.3.5 Méthode propagative WFEM 11
2.3.6 Extension à la flexion d'une poutre bi-composite 14
2.4 Outils d'identification des nombres d'onde 19
2.4.1 Transformée de Fourier discrète : DFT 19
2.4.2 Corrélation avec des ondes inhomogènes : IWC 20
2.5 Remarques finales 21

2.1 Plaques raidies en ingénierie

De nombreuses structures utilisées en ingénierie sont de type plaque, par exemple les panneaux composites de type sandwich, les plaques raidies, les treillis de poutres, les plaques perforées, ondulées, ou encore stratifiées. Compte tenu de leur large champ d'applications, l'étude de la propagation des ondes et la compréhension des comportements dynamique revêt une importance majeure dans la communauté de la vibro-acoustique.

La première équation de plaque fine isotrope en flexion est formulée dans les travaux de Navier en 1823, bien que la rigidité de flexion n'y soit pas encore correctement définie. Celle-ci sera établie par Poisson (1828). En 1850, Kirchhoff publie une thèse sur une théorie de plaques minces Kirchhoff (1850), dans laquelle la théorie de l'élasticité tri-dimensionnelle est réduite à un modèle bi-dimensionnel. Des simplifications provenant de l'extension directe des modèles de poutres et de plaques pour les déplacements plan et hors-plan sont introduites par Love (1888). Les analyses de différents problèmes de stabilité de plaques en flexion sont détaillés dans un ouvrage fondamental de Timoshenko (1951).

Des études complémentaires concernant la statique de plaques de différentes formes avec différentes conditions limites sont menées par exemple par Huber (1929). En complément du modèle de Kirchhoff-Love associé aux plaques minces, Reissner (1945) développe une théorie de plaques épaisses qui inclut les déformations dues au forces de cisaillement. L'ouvrage de référence de Leissa (1969) sur les plaques présente de nombreux résultats concernant les fréquences et les déformées de plaques de différentes formes et pour différentes conditions limites.

Les plaques anisotropes ont aussi fait l'objet de nombreuses études. Cette anisotropie peut provenir soit du matériau lui-même, auquel cas on parle d'anisotropie naturelle, soit de la géométrie et/ou de la structure interne de la plaque, comme pour les plaques raidies, ondulées, stratifiées, alvéolées, les treillis, pour lesquelles on parle d'anisotropie structurelle. Les modèles de comportement décrivent la statique et la dynamique, en considérant toutefois que la longueur d'onde est bien plus grande que l'épaisseur de la plaque et que le contraste est faible. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropes sont développées par Boussinesq (1879). Huber (1929) développe une théorie de plaques orthotropes et résout les problèmes avec différents types de chargements (moments, forces distribuées). La contribution de Lekhnitskii (1968) à la théorie porte sur l'analyse de comportements de plaques anisotropes linéaires et non linéaires.

Les modèles cités ci-dessus rentrent dans le cadre de l'approche phénoménologique. En complément de cette approche, d'autres modèles utilisant des méthodes asymptotiques ont été établis.

Les fondements théoriques de ces méthodes se trouvent dans les travaux de Bensoussan et al. (1978) et Sanchez-Palencia (1980). Cette méthode est utilisée par Kohn and Vogelius (1984) pour analyser la flexion de plaques élastiques fines homogènes avec variation de section, et par Caillerie and Nedelec (1984) pour analyser des plaques et des coques périodiques inhomogènes. La méthode d'homogénéisation asymptotique a été largement utilisée pour construire des théories de plaques homogènes Trabucho and Viaño (1996); Ciarlet (1997) et des plaques composites périodiques Caillerie and Nedelec (1984). Kalamkarov et al. (2009) présente une large variété de problèmes d'élasticité de composites fins, de plaques raidies, et de coques (Caillerie and Nedelec (1984); Bakhvalov and Panasenko (1989); Panasenko (2005)). Une analyse très complète des modèles de plaques et coques est fournie par Lewiński and Telega (2000); Kalamkarov et al. (2009); Altenbach et al. (2010).

Ce résumé n'est qu'un bref aperçu du contexte historique et des travaux successifs sur les théories de plaques. Le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de Sab and Lebée (2015), dans lequel la chronologie des développements des modèles est expliquée en détails.

Les modèles classiques de plaques sont adaptés aux structures homogènes ou faiblement hétérogènes. Elles sont aussi représentatives de plaques dont les propriétés mécaniques ou les paramètres géométriques des constituants sont faiblement contrastés. Les difficultés apparaissent en étendant ces modèles à des situations dans lesquelles les contrastes de propriétés sont élevés. En effet, en situation de forts contrastes, la pertinence des théories ci-dessus en régime dynamique devient discutable car le contraste de propriétés mécaniques entre les constituants conduit en particulier à des situations de résonance interne atypique.

Une étude de référence sur la dynamique d'une plaque hétérogène mono-raidie est proposée par Fahy and Lindqvist (1976) en considérant séparément la plaque et le raidisseur, et en suivant les hypothèses de Ungar (1961) que seule une dynamique de flexion existe dans la plaque, et d'une dynamique couplée de flexion/torsion existe dans le raidisseur. La plaque et le raidisseur sont deux éléments distincts et leur couplage permet de formuler de manière analytique les équations de dispersion sous forme de problème aux valeurs propres. La résolution numérique de ces équations conduit aux courbes de dispersion. Cette approche n'aboutit pas à un modèle de plaque, mais donne les équations de dispersion qui doivent être résolues numériquement. Une description de type guide d'ondes est utilisée par Orrenius and Finnveden (1996) qui, à partir d'une plaque bordée de deux raidisseurs, propose une formulation faible. L'introduction de fonctions d'interpolation mène alors aux équations de dispersion. La résolution numérique de ces équations permet d'identifier des zones pilotées par la flexion ou la torsion des raidisseurs.

Des études semi-analytiques et des modèles numériques ont été développées pour étudier la dynamique des plaques raidies. Le modèle le plus accessible est celui de la plaque orthotrope équivalente avec une masse moyenne et une rigidité effective, mais ne s'applique qu'en statique et ne permet pas de décrire la dynamique de la plaque. Avec le développement de méthodes de type éléments finis, une approche numérique basée sur la théorie de Floquet-Bloch appliquée à une cellule structure périodique permet d'en obtenir les propriétés de dispersion de manière systématique. Cette méthode propagative appelée WFEM est par exemple décrite dans les articles de Mead (1973); Waki et al. (2009). Cette méthode éléments finis WFE est mise en œuvre par Ichchou et al. (2008) sur une cellule périodique de plaque mono-raidie et confirme en partie la validité des courbes de dispersion obtenue par Fahy and Lindqvist (1976). Dans le cas de plaques raidies selon deux axes, la méthode WFEM est utilisée par Mead (1986); Mead et al. (1988) pour explorer la propagation d'ondes dans une plaque raidie par un treillis orthogonal de poutres. Il montre que le comportement dynamique en basses fréquences est similaire à celui de la grille, et les caractéristiques des surfaces de dispersion confirment la nature orthotrope et résonante de la plaque. La méthode WFEM améliorée par des méthodes de réduction modale CWFEM (*Condensed Wave Finite Element Method*) est utilisée par Droz et al. (2016), qui prédit le comportement vibratoire de la plaque bi-raidie, en identifiant la dynamique locale sur les courbes de dispersion. De nombreux articles traitent de structures de type plaques/membranes bi-raidie accordables Chen et al. (2017); Langfeldt et al. (2018) et montrent la possibilité de placer les résonances locales sur un grand intervalle de fréquences.

Le point commun de ces approches numériques mentionnées précédemment est qu'elles apportent des résultats numériques précis pour des géométries données. Elles ont pour objectif la détermination des caractéristiques de dispersion sur des cas particulier mais n'ont pas vocation à

construire des modèles génériques prenant en compte la dynamique locale. De plus, la modélisation numérique de grandes structures possédant de forts contrastes géométriques et mécaniques s'avère délicate Waki et al. (2009). En effet, elle se heurte à des problèmes mal conditionnés qui entraînent des erreurs de discrétisation Mace et al. (2005) et/ou des effets de repliement Ichchou et al. (2007). Le besoin de formulations permettant d'identifier le modèle sous-jacent qui émerge à partir de la physique intervenant à l'intérieur de la cellule est alors crucial. La réduction de modèles par homogénéisation périodique est un moyen de contourner ces difficultés et de définir explicitement le comportement macroscopique à partir des phénomènes à l'échelle microscopique.

2.2 Homogénéisation périodique

Cette méthode d'homogénéisation asymptotique est introduite par Bensoussan et al. (1978); Sanchez-Palencia (1980); Auriault et al. (2009). Cette méthode prend en compte la physique à l'échelle microscopique dans le modèle macroscopique, et les paramètres effectifs sont complètement déterminés par la cellule périodique. La pertinence de la description macroscopique est assurée en considérant les phénomènes physiques aux échelles locale et globale. La méthode consiste à considérer un domaine incluant un grand nombre de cellules, et les phénomènes fluctuant à l'échelle macroscopique de taille caractéristique L bien plus grande que la taille l de la cellule unitaire. On définit alors le paramètre d'échelle $\epsilon = l/L$. Si $\epsilon << 1$, on dit que les échelles sont séparées. Une caractéristique de ces méthodes d'homogénéisation est qu'elles utilisent des moyennes locales pour définir les grandeurs macroscopiques. Celles-ci ne sont pas introduites de façon arbitraire mais résultent des équations d'équilibre du milieu. Ce point est important : la forme du modèle homogénéisé n'est pas supposée a priori, mais émerge de la microstructure. Les résultats obtenus par homogénéisation sont d'autant plus pertinents que l'hypothèse de séparation d'échelles est respectée.

Le principe de l'homogénéisation est de faire les développements asymptotiques des champs du problème sur le paramètre d'échelle adimensionnel $\epsilon = l/L$. Le modèle homogénéisé se construit en remplaçant ces développements dans les équations d'équilibre et en résolvant successivement les problèmes aux différents ordres de ϵ. Le comportement macroscopique équivalent est obtenu pour $\epsilon \to 0$ et fait donc intervenir les premiers termes non nuls des développements. Les termes d'ordres supérieurs signifient que l'hétérogénéité du milieu résulte d'une somme infinie de champs de déplacements d'amplitudes successivement décroissantes. Au niveau macroscopique, au lieu d'obtenir des équations d'équilibre (de mécanique continue) homogénéisées, on obtient de nouvelles équations d'équilibre qui font intervenir des dérivées spatiales d'ordres supérieurs et qui représentent l'influence de l'hétérogénéité de la microstructure sur le comportement macroscopique du matériau. Il est donc possible d'améliorer la précision du modèle effectif en prenant en compte ces termes d'ordres supérieurs : Boutin and Auriault (1993); Boutin (1996); Smyshlyaev and Cherednichenko (2000); Andrianov et al. (2008); Kalamkarov et al. (2009).

Cette méthode d'homogénéisation basée sur des développements asymptotiques permet aussi de traiter le cas de milieux réticulés, pour en donner un modèle continu équivalent. Ces structures peuvent être modélisées en considérant des éléments poutres au niveau local, comme c'est le cas pour la méthode d'homogénéisation de milieux discrets périodiques HPDM (*Homogenization of Periodic Discrete Media*). L'homogénéisation asymptotique des milieux discrets bidimensionnels, dans la continuité des travaux de Noor (1988); Bakhvalov and Panasenko (1989); Tollenaere and Caillerie (1998), est introduite par Boutin and Hans (2003), puis enrichie par des effets de résonance interne par Chesnais et al. (2007, 2015b,a). En considérant que la taille de la cellule

est petite comparée à la longueur d'onde, les variations d'efforts entre deux cellules sont faibles. Les variables aux nœuds sont écrites comme des valeurs particulières de fonctions continues. Le processus d'homogénéisation s'appuie sur les développements de ces fonctions. Le modèle final homogénéisé retenu consiste en une solution au premier ordre, qui peut être complétée par une série de termes d'ordres supérieurs.

Les matériaux composites ont souvent une configuration périodique avec une période plus petite que leurs dimensions globales. L'homogénéisation asymptotique apparaît alors comme une méthode d'analyse adaptée. Pour rappel, l'avantage décisif de cette approche est de construire le modèle macroscopique sans présupposer la forme du modèle final. Cela permet aussi de traiter le cas de composites très contrastés et de mettre en évidence leur comportement non conventionnel comme les milieux généralisés Soubestre and Boutin (2012), ou les milieux à résonance interne . Par exemple, dans les composites 3D, la résonance interne d'inclusions souples dans une matrice rigide, la masse effective devient tensorielle et prend des valeurs négatives dans des intervalles fréquentiels centrés autour des fréquences de résonance interne Auriault and Bonnet (1985); Boutin (1996); Auriault and Boutin (2012). Cet effet apparaît aussi dans les milieux réticulés Chesnais et al. (2012).

2.3 Propagation des ondes dans les structures périodiques

Les structures à matrices périodiques apparaissent en premier lieu en physique de la matière où les études de la structure atomique et de solides cristallins ont amorcé les premiers modèles. Les premières formulations établies sont des modèles masse-ressort, et pour les systèmes périodiques infinis, la théorie de Floquet-Bloch permet de réduire l'analyse à une cellule unitaire périodique. Cette approche est connue sous le nom de Floquet-Bloch, et réunit les théorèmes de Floquet (1883) et de Bloch (1929). Elle a été documentée puis enrichie par Brillouin (1953).

Le point clé est que la propagation d'ondes dans un réseau infini constitué de cellules identiques peut être entièrement formulée à partir d'une cellule élémentaire (théorie de Floquet-Bloch). Plus précisément, cette théorie stipule que le nombre d'onde associé à l'onde traversant la cellule est indépendant de la position de la cellule dans la structure, puisque cette dernière est infinie. Le nombre d'onde au sein de la cellule est alors lié à la fréquence de l'onde par une relation de dispersion. Les diagrammes de dispersion sont caractérisés par des bandes interdites correspondant à des intervalles fréquentiels dans lesquels les ondes ne se propagent pas. La relation de dispersion est primordiale pour comprendre la propagation des ondes à travers le milieu périodique.

Il existe deux types de bandes interdites associées à deux mécanismes différents : celles de type diffraction de Bragg (dont le mécanisme est décrit par Bragg (1915)), et celles de type résonance locale, décrite analytiquement dans l'article précurseur de Auriault and Bonnet (1985), et largement étudié depuis les années 1990, par exemple : Sigalas and Economou (1992); Liu et al. (2000); Goffaux et al. (2002); Hein et al. (2010). Concernant la diffraction de Bragg, les bandes interdites représentent des zones d'interférences destructives entre les ondes incidentes et réfléchies qui se produisent lorsque les longueurs d'ondes sont du même ordre de grandeur que la cellule périodique. Le mécanisme de résonance locale se produit lorsque la fréquence de l'onde coïncide avec une fréquence propre du résonateur.

Ces caractéristiques d'atténuation sont importantes pour la conception de filtres, en acoustique, en mécanique, ou même en électromagnétisme, et trouvent donc des applications pour l'étude de métamatériaux (Maldovan and Thomas (2009); Cui et al. (2009); Deymier (2013)).

La tendance actuelle est d'étudier les systèmes à résonances locales car ils permettent de concevoir des bandes interdites en basses fréquences, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde est supérieure aux dimensions de la cellule périodique. Ce phénomène élastodynamique est mis en évidence en dynamique des structures, sur des poutres et des plaques périodiques contrastées car le fait d'associer un résonateur (ou un réseau de résonateurs) permet d'y introduire de la dispersion. L'intérêt croissant pour les matériaux composites, les structures périodiques et les métamatériaux a conduit à introduire de nombreuses méthodes, qui ne sont pas davantage détaillées ici. Ces méthodes incluent par exemple les développements en ondes planes Elachi (1976), les méthodes de type éléments finis Mead (1973), les matrices de transfert Leckie and Pestel (1960). L'article de Hussein et al. (2014) expose et compare ces méthodes du point de vue de la conception de métamatériaux.

Les deux sections suivantes mettent en œuvre les méthodes évoquées ci-dessus sur un exemple simple de propagation d'ondes longitudinales et de flexion dans une poutre composite.

2.3.1 Application à la compression d'une poutre bi-composite

Cette section se propose de comparer plusieurs méthodes sur une structure périodique simple. La structure étudiée est une poutre composite illustrée figure 2.1, il s'agit d'un barreau périodique de période $l = l_1 + l_2$, et constitué de deux matériaux : $A(\rho_1, E_1, l_1, S_1)$, et $B(\rho_2, E_2, l_2, S_2)$.

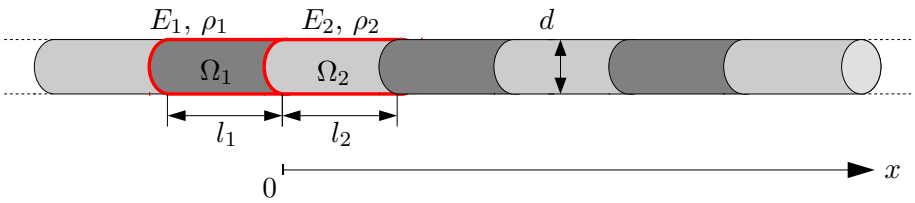


FIGURE 2.1 – Notations et repère pour la poutre composite périodique

L'illustration porte sur le cas de la compression et de la flexion, en considérant $\rho_1 = 2700$ kg.m^{-3}, $E_1 = 69$ GPa, $l_1 = 1$ m, $d_1 = 0.02$ m, $\rho_2 = 1200$ kg.m^{-3}, $E_1 = 3$ GPa, $l_1 = 1$ m, $d_1 = 0.02$ m, ce qui correspond à de l'aluminium et du plexiglas. Les courbes de dispersion sont obtenues par quatre méthodes différentes : une méthode analytique exacte 2.3.2, une méthode analytique d'homogénéisation fondée sur les développements asymptotiques 2.3.3, une méthode basée sur les matrices de transfert 2.3.4, et une méthode numérique propagative basée sur des éléments finis 2.3.5.

2.3.2 Approche analytique exacte

L'équation classique pour des ondes longitudinales dans Ω_1 et Ω_2 est $E_i\partial_x^2 u - \rho_i\omega^2\partial_t^2 u = 0$, avec $i = 1, 2$ Pour un mouvement harmonique de pulsation ω, la forme de solution s'écrit $u(x,t) = U(x)\exp(i\omega t)$ et il vient $\partial_x^2 U(x) + k_i^2 U(x) = 0$ avec $k_i^2 = \omega\sqrt{\rho_i/E_i}$. En appliquant le théorème de Floquet, la solution s'exprime comme une onde caractérisée par sa constante de propagation μ, c'est à dire $U_i(x) = A_i\exp(i(k_i-\mu)x) + B_i\exp(-i(k_i+\mu)x)$. Il faut ensuite écrire les conditions de Floquet aux extrémités de la cellule d'une part, et les conditions de continuité

à la jonction Ω_1/Ω_2 d'autre part :

$$\begin{cases} U_1(-l_1) = U_2(l_2) \\ E_1 d_x U_1(-l_1) = E_1 d_x U_1(l_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_1(0^-) = U_2(0^+) \\ E_1 d_x U_1(0^-) = E_2 d_x U_2(0^+) \end{cases}$$

Ces quatre conditions de continuité donnent un système homogène de quatre équations

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ z_1 & -z_1 & -z_2 & z_2 \\ e^{-i(k_1-\mu)l_1} & e^{i(k_1+\mu)l_1} & -e^{i(k_2-\mu)l_2} & -e^{-i(k_2+\mu)l_2} \\ z_1 e^{-i(k_1-\mu)l_1} & -z_1 e^{i(k_1+\mu)l_1} & -z_2 e^{i(k_2-\mu)l_2} & -z_2 e^{-i(k_2+\mu)l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui possède une solution non triviale si son déterminant est nul. L'équation caractéristique associée est alors :

$$\cos(\mu(l_1+l_2)) = \cos(k_1 l_1)\cos(k_2 l_2) - \frac{z_1^2+z_2^2}{2z_2 z_1}\sin(k_1 l_1)\sin(k_2 l_2) \tag{2.1}$$

avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde, $c = \sqrt{E/\rho}$ la célérité, et $z = \rho c$ l'impédance. L'équation 2.1 est établie pour la première fois par Krein and Liubarskii (1961).

2.3.3 Homogénéisation asymptotique

Ce cas est une application simplifiée en une dimension de l'étude du stratifié périodique étudié par Auriault and Bonnet (1985). L'équation régissant les ondes longitudinales dans un élément poutre s'écrit $E^{(a)}\partial_x^2 u^{(a)} = \rho^{(a)}\omega^2\partial_t^2 u^{(a)}$. La continuité des déplacements $u^{(1)} = u^{(2)}|_0$ d'une part, et des contraintes $E^{(1)}\partial_x u^{(1)} = E^{(2)}\partial_x u^{(2)}|_0$ d'autre part permet de résoudre le problème. Le processus d'homogénéisation asymptotique débute par l'introduction d'un petit paramètre ϵ tel que $\epsilon = l/L$. La taille microscopique l correspond à la longueur de la cellule élémentaire, et la taille macroscopique L est associée à la longueur totale de la poutre. Pour séparer les composantes des échelles micro- et macroscopique dans la solution, il convient d'introduire une variable lente x, et une variable rapide $y = x/\epsilon$ et de chercher les déplacements sous la forme d'un développement asymptotique $u^{(a)} = u_0^{(a)}(x) + \epsilon u_1^{(a)}(x,y) + \epsilon^2 u_2^{(a)}(x,y) + \dots$ Le premier terme u_0 représente la partie homogénéisée de la solution. Ce terme varie lentement sur l'ensemble de l'échantillon du matériau et ne dépend pas de la variable rapide y. Les termes suivants $u_i^{(a)}, i = 1,2,3,\dots$ sont des corrections de l'ordre ϵ^i.La périodicité spatiale du milieu et la séparation d'échelles impliquent la même périodicité pour $u_i^{(a)}$ par rapport à y $u_i^{(a)}(x,y) = u_i^{(a)}(x,y+l)$. Au regard des nouvelles variables, la dérivée par rapport à x devient $\partial_x = \partial_x + \epsilon^{-1}\partial_y$.

En remplaçant les nouvelles variables, la forme du développement asymptotique et l'opérateur gradient dans l'équation du mouvement et ses conditions limites, puis en regroupant les termes par ordre de ϵ, on obtient des problèmes locaux dont la résolutions conduit aux équations d'onde macroscopiques aux différents ordres :

$$(\epsilon^0) \qquad \langle E\rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + O(\epsilon^2) = \langle\rho\rangle\,\omega^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$(\epsilon^2) \qquad \langle E\rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \epsilon^2 L^2 \langle E\rangle_2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + O(\epsilon^4) = \langle\rho\rangle\,\omega^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

où les termes $\langle E\rangle_0$ et $\langle E\rangle_2$ sont les modules d'Young effectifs aux ordre ϵ^0 et ϵ^2 :

$$\langle E\rangle_0 = \frac{E^{(1)}E^{(2)}}{(1-c)E^{(2)} + cE^{(1)}}; \qquad \langle E\rangle_2 = \frac{1}{12}c^2(1-c)^2 \frac{\langle E\rangle_0^3 \left(E^{(2)}\rho^2 - E^{(1)}\rho^1\right)^2}{\langle\rho\rangle^2 \left(E^{(1)}E^{(2)}\right)^2} \tag{2.4}$$

L'expression de $\langle E\rangle_0$ est identique à celle du module élastique effectif d'un matériau multi-couche. Cette valeur est obtenue par une moyenne arithmétique. L'expression du module effectif à l'ordre ϵ^2 est démontrée par Boutin and Auriault (1993); Andrianov et al. (2008); Chen and Fish (2000). Le terme $\langle\rho\rangle = (1-c)\rho^1 + c\rho^2$ est la masse volumique homogénéisée, avec c la fraction de volume du composant Ω^2, $c = l_2/l = 2A/L$, $A = l_2/(2\epsilon)$.

Le terme d'ordre ϵ^2 dans (2.3) traduit l'effet de dispersion causée par l'interaction de l'onde avec les hétérogénéités locales du composite. Si le matériau est homogène ($c = 0, 1$) ou si les impédances acoustiques des composants sont identiques $E^{(2)}\rho^2 = E^{(1)}\rho^1$, alors $\langle E\rangle_2$ s'annule et l'effet de dispersion disparaît. L'égalité des impédances acoustique signifie que l'onde n'est pas réfléchie aux interfaces.

En considérant une solution harmonique $u_0 = e^{ikx}$, l'équation de dispersion associée à l'équation d'onde macroscopique d'ordre ϵ^0 est

$$\langle E\rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \langle\rho\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad k = \omega\sqrt{\frac{\langle\rho\rangle}{\langle E\rangle_0}} \tag{2.5}$$

2.3.4 Méthode des matrices de transfert

La méthode des matrices de transfert décrit la variation du vecteur d'état, en deux positions différentes le long du guide d'onde, par l'intermédiaire d'une matrice de transmission. La méthode est originellement décrite par Leckie and Pestel (1960) et l'obtention de cette matrice est détaillée dans Pestel and Leckie (1963). Cette méthode est sensible au mauvais conditionnement numérique comme démontré par Mead (1996).Chaque élément de la poutre bi-composite de la figure 2.1 est modélisé comme une poutre d'Euler-Bernoulli. L'équation classique d'un élément poutre d'Euler-Bernoulli admet comme forme de solution $u_k = A_k \sin(k_k x) + B_k \cos(k_k x)$ avec $k = \omega/c$ et $k = \sqrt{\rho_i/E_i}$. On définit pour chaque segment un vecteur d'état contenant les dérivées successives du déplacement. Ce vecteur a donc pour contient donc le déplacement, la rotation, le moment de flexion et l'effort tranchant et il est obtenu par l'intermédiaire d'une matrice de transfert T :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ E_k u'_k \end{pmatrix} = (T_k) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$$

où T_k est la matrice de transfert du segment k telle que :

$$T_k = \begin{pmatrix} \sin(\beta_k L) & \cos(\beta_k L) & \sinh(\beta_k L) & \cosh(\beta_k L) \\ E_k k_k \cos({}_k L) & -E_k k_k \sin(k_k L) & E_k k_k \cosh(k_k L) & E_k k_k \sinh(k_k L) \end{pmatrix}$$

Pour un élément k :

$$\begin{pmatrix} u_k(l_k) \\ E_k u'_k(l_k) \end{pmatrix} = (R_k) \begin{pmatrix} u_k(0) \\ E_k u'_k(0) \end{pmatrix}$$

avec $R_k = T_k(l_k)T_k(0)^{-1}$ la matrice de transfert entre les deux extrémités d'un élément. À l'interface avec le segment suivant $k+1$, la continuité du déplacement, de la rotation, du moment fléchissant et de l'effort tranchant s'applique donc :

$$u_k(l_k) = u_{k+1}(0) \qquad E_k u'_k(l_k) = E_k u'_{k+1}(0)$$

et la relation entre les vecteurs d'état aux deux extrémités de la cellule est :

$$\begin{pmatrix} u_{k+1}(l_{k+1}) \\ E_k u'_{k+1}(l_{k+1}) \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} u_k(0) \\ E_k u'_k(0) \end{pmatrix}$$

où $R = R_1 R_2$ est la matrice de transfert entre les extrémités droites et gauche de la cellule. Pour une onde de constante de propagation μ, les vecteurs d'état de part et d'autre de la cellule sont liés par $\lambda = \exp(\mu)$, avec λ la valeur propre de la matrice de transfert R. L'équation de dispersion est déterminé par la résolution du problème aux valeurs propres de la matrice de transfert.

2.3.5 Méthode propagative WFEM

Le comportement dynamique d'une structure peut être interprété soit en termes de modes (ondes stationnaires), soit en termes d'ondes libres. Le point de vue modal est à la base de nombreuses méthodes de réduction de modèles tandis que les approches propagatives s'utilisent pour la dynamique de structures périodiques en s'appuyant sur la théorie de Bloch. Cette méthode propagative est appelée WFEM (*Wave Finite Element Method*). Il existe aussi une description couplée modale/propagative appelée CWFEM (*Condensed Wave Finite Element Method*) Zhou et al. (2015). Cette méthode décrit la cellule unitaire en termes de modes grâce à la synthèse modale CMS (*Component Mode Synthesis*), et la WFEM exploite la périodicité de la cellule pour en extraire les caractéristiques de propagation : bandes passantes/interdites, directivité sélective, surfaces des lenteurs.

L'approche propagative WFE est utilisée pour modéliser des structures périodiques uni- ou bi-dimensionnelles, et l'exposition qui en est faite ci-après est empruntée à Waki et al. (2009).

Le point de départ de la méthode est l'obtention du modèle éléments finis d'un petit segment du guide d'onde, représenté sur la figure 2.2, avec pour seule contrainte que les nœuds et degrés de liberté soient ordonnés identiquement sur les côtés gauche et à droit du segment ; les nœuds internes peuvent être supprimés par condensation dynamique.

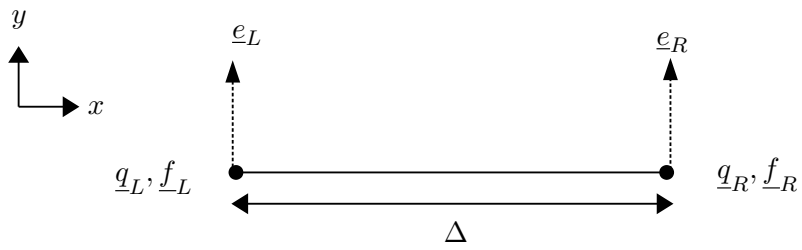


FIGURE 2.2 – Modèle éléments finis d'un élément du guide d'onde et repère local associé

En supposant une dépendance temporelle $\exp(i\omega t)$, l'équation du mouvement sur le segment de la figure 2.2 est :

$$Dq = f + e \qquad \text{avec } D = K + i\omega C - \omega^2 M \tag{2.6}$$

et q, f et e sont des vecteurs $(2n \times 1)$ contenant respectivement les degrés de liberté nodaux, les forces nodales internes et externes. D, M, C et K sont respectivement les matrices de raideur dynamique, de masse, d'amortissement visqueux, de raideur des segments, et n et le nombre de degrés de liberté de chaque côtés du segment. La matrice de raideur dynamique D (*Dynamic stiffness matrix*) peut être décomposée pour faire apparaître l'influence des nœuds à gauche et à droite du segment. En notant L et R les côtés respectivement gauche et droit du segment, (2.6) se transforme :

$$\begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LR} \\ D_{RL} & D_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Lorsqu'une onde se propage librement suivant l'axe x du guide d'onde ($e = 0$), la constante de propagation $\lambda = \exp(-ik\Delta)$ donne la relation entre les degrés de liberté nodaux gauches et droits et les forces :

$$q_R = \lambda q_L \qquad f_R = -\lambda f_L \tag{2.8}$$

La constante de propagation λ relie tous les degrés de liberté et les forces nodales internes sur les deux côtés du segment. En remplaçant (2.8) dans l'expression matricielle (2.7), le problème aux valeurs propres en λ obtenu est :

$$\lambda \begin{pmatrix} q_L \\ f_L \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} q_L \\ f_L \end{pmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} -D_{LR}^{-1} D_{LL} & D_{LR}^{-1} \\ -D_{RL} + D_{RR} D_{LR}^{-1} D_{LL} & -D_{RR} D_{LR}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

où T est la matrice de transfert. Pour des guides d'onde complexes ayant plusieurs degrés de liberté à chaque nœud, la résolution de ce système demande quelques précautions car des problèmes numériques liés à la discrétisation, aux troncatures, ou au conditionnement des matrices, peuvent survenir Waki et al. (2009). Les valeurs propres λ_j apparaissent par paires réciproques λ_j^+ et $\lambda_j^- = 1/\lambda_j^+$, avec des nombres d'ondes k_j^+ et $k_j^- = -k_j^+$, correspondant respectivement à des ondes aller et retour. À ces valeurs propres sont associés des vecteurs propres ϕ_j^+ et ϕ_j^- appelés modes d'onde, et décomposés suivant :

$$\phi_j = \begin{pmatrix} \phi_q \\ \phi_f \end{pmatrix}_j \qquad \text{avec } j = 1, \ldots, n \tag{2.10}$$

Les ondes se propageant dans les x positifs sont caractérisées par $|\lambda_j^+| \leq 1$:

$$Re\left(f_L^t \frac{d}{dt} q_L \right) = Re(i\omega f_L^t q_L) < 0 \qquad \text{si } |\lambda_j^+| = 1 \tag{2.11}$$

La dérivée temporelle de (2.11) signifie que si l'onde se propage dans les x positifs, son amplitude doit décroître, ou que si son amplitude reste constante, alors il y a une transmission de puissance suivant les x positifs. Mace (1984) montre que cette équation inclut aussi les ondes évanescentes dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance et qui ne transfèrent pas d'énergie. Elles contribuent à la réponse du système, mais se transforment en ondes propagatives ou évanescentes. Les modes d'onde peuvent être regroupés dans des matrices :

$$\Phi^{\pm} = [\phi_1^{\pm} \ldots \phi_n^{\pm}], \qquad \Phi = [\Phi^+ \quad \Phi^-] \tag{2.12}$$

Les modes d'onde à gauche sont aussi obtenus :

$$\psi_j = [\psi_f \quad \psi_q]_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2.13}$$

et regroupés dans des matrices :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{bmatrix} \qquad \text{avec } \Psi^{\pm} = \begin{bmatrix} \psi_1^{\pm} \\ \vdots \\ \psi_n^{\pm} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Les modes d'onde gauche et droit sont ensuite normalisés tels que $\Psi^{\pm}\Phi^{\pm} = 1$. Les vecteurs propres droits et les vecteurs propres gauches sont utilisés pour former les matrices

$$\Phi_q^{\pm} = [\phi_{q,1}^{\pm} \ldots \phi_{q,n}^{\pm}] \qquad \Psi_q^{\pm} = \begin{bmatrix} \psi_{q,1}^{\pm} \\ \vdots \\ \psi_{q,n}^{\pm} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Les expressions sont identiques pour $\Phi_f^{\pm}$ et $\Psi_f^{\pm}$. Ces matrices, et leur propriétés d'orthogonalité, définissent les transformations entre le domaine physique dans lequel le mouvement est décrit par q et f, et le domaine d'ondes dans lequel le mouvement est décrit par les amplitudes a^+ et a^- des ondes aller et retour.

$$\begin{bmatrix} q_L \\ f_L \end{bmatrix} = \Phi a \qquad \text{avec } a = \begin{bmatrix} a^+ \\ a^- \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

En analyse modale seules les paires m d'ondes sont retenues, et $\Phi_{q,f}^{\pm}$ et $\Psi_{q,f}^{\pm}$ sont des matrices de dimensions respectives $(n \times m)$ et $(m \times n)$.

Si un point d'excitation f_e appliqué au guide d'onde, celui-ci génère des ondes aller et des ondes retour d'amplitudes a^+ et a^- qui se propagent du point d'excitation vers les directions des x positifs et des x négatifs. Les amplitudes de ces ondes sont données dans Waki et al. (2009) par :

$$a^+ = \Psi_q^+ f_e, \qquad \text{et} \qquad a^- = -\Psi_q^- f_e \tag{2.17}$$

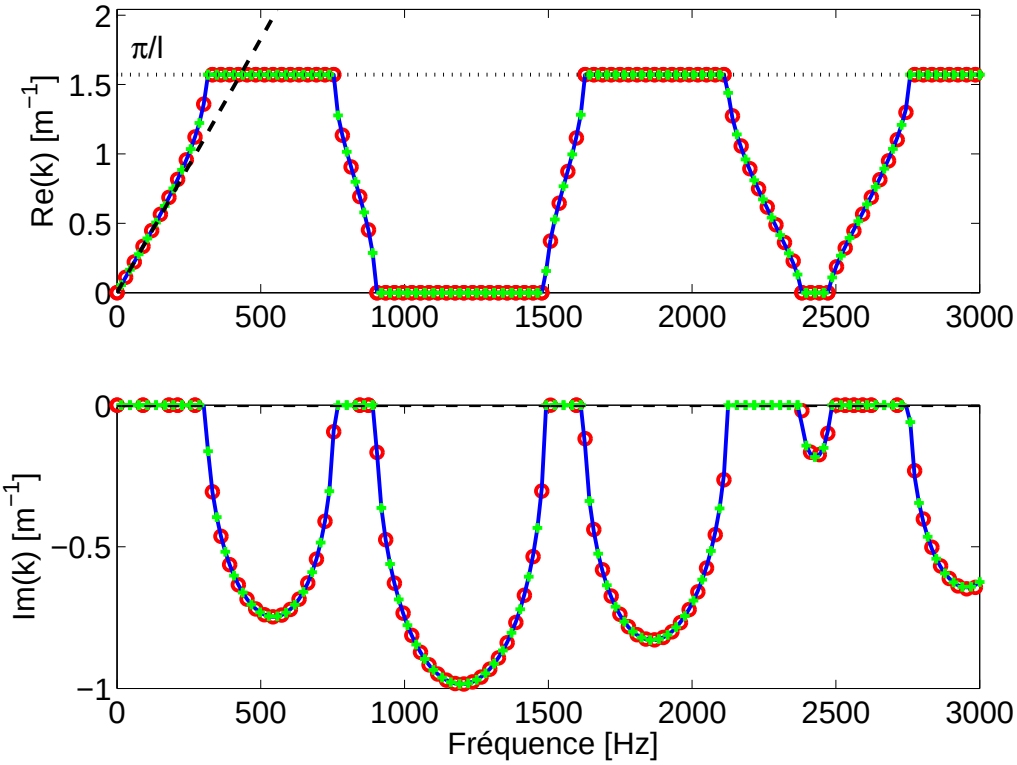


FIGURE 2.3 – Diagramme de dispersion des ondes de compression dans la cellule unitaire : analytique exact (−), modèle homogénéisé (−−), matrices de transfert (+), éléments finis WFEM (o)

Les courbes de dispersion obtenues par les quatre méthodes précédentes sont représentées sur la figure 2.3. La partie réelle du nombre d'onde représente le déphasage par unité de longueur, tandis que la partie imaginaire représente l'atténuation par unité de longueur. Les courbes de dispersion sont tracées uniquement pour les ondes aller avec $Re(k) > 0$ puisque les nombres d'onde des ondes aller et retour sont symétriques par rapport à l'axe x, leur relation de dispersion est opposée. Lorsque le nombre d'onde est purement réel, les ondes se propagent. Lorsque le nombre d'onde est complexe, il traduit une atténuation exponentielle des ondes. Lorsque le

nombre d'onde est purement imaginaire, les ondes élastiques ne se propagent plus. La partie réelle de k est limitée à la première zone de Brillouin $[-\pi/l; \pi/l]$. Ces propriétés permettent d'identifier les bandes interdites et d'illustrer le phénomène de filtrage fréquentiel. Le modèle homogénéisé obtenu montre que le comportement macroscopique est homogène et que la masse et la rigidité effectives sont simplement les moyennes arithmétiques des masses et des rigidités des différents constituants de la poutre. Cette description est valable en basses fréquences. En effet, parmi les limitations, on trouve le fait que toutes les informations relatives aux échelles de longueur internes sont perdues et que les phénomènes de dispersion ne sont accessibles qu'à l'aide de correcteurs d'ordres supérieurs et ne concernent que la gamme de fréquences inférieures à la limite de diffraction. L'article de Boutin and Auriault (1993) démontre que les termes d'ordres supérieurs introduisent successivement des effets de polarisation, de dispersion de la vitesse et d'atténuation. Une application de ces résultats sur une poutre bi-composite en compression et en flexion est proposée par Sun (2016).

La dynamique de la poutre composite en torsion n'est pas présentée ici puisque celle-ci est pilotée par une équation de degrés 2, analogue à la compression, avec un module de cisaillement G à la place du module d'Young E. Les bandes interdites dans la poutre bi-composite en torsion sont mises en évidence par Yu et al. (2006).

2.3.6 Extension à la flexion d'une poutre bi-composite

Les méthodes présentées ci-avant pour l'analyse des vibrations longitudinales de la poutre illustrée sur la figure. 2.1 sont maintenant étendues aux vibrations de flexion.

Calcul analytique exact

La méthode présentée en section 2.3.2 est ici étendue en flexion. L'équation de flexion dans A et B est $EI_{A,B}\partial_x^4 u - \rho S_{A,B}\omega^2\partial_t^2 u = 0$. Pour un mouvement harmonique de pulsation ω, la solution $u(x,t) = U(x)\exp(i\omega t)$ et $EI_{A,B}\partial_x^4 U(x) + \rho S_{A,B}\omega^2 U(x) = 0$ ou encore $\partial_x^4 U(x) + k_{A,B}^4 U(x) = 0$ avec $k_{A,B}^4 = \omega\sqrt{\rho S_{A,B}/EI_{A,B}}$. En appliquant le théorème de Floquet, la solution s'exprime comme une onde caractérisée par sa constante de propagation μ, c'est à dire $U_i(x) = A_i\exp(i(k_i - \mu)x) + B_i\exp(-i(k_i+\mu)x) + C_i\exp((k_i-\mu)x) + D_i\exp(-(k_i+\mu)x)$. Il faut ensuite écrire les conditions de Floquet aux extrémités de la cellule d'une part, et les conditions de continuité à la jonction A/B d'autre part, pour le déplacement, la rotation, le moment fléchissant et l'effort tranchant :

$$\begin{cases} U_1(-l_1) = U_2(l_2) \\ d_x U_1(-l_1) = d_x U_2(l_2) \\ -EI_1 d_x^2 U_1(-l_1) = -EI_2 d_x^2 U_2(l_2) \\ EI_1 d_x^3 U_1(-l_1) = EI_2 d_x^3 U_2(l_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_1(0^-) = U_2(0^+) \\ d_x U_1(0^-) = d_x U_2(0^+) \\ -EI_1 d_x^2 U_1(0^-) = -EI_2 d_x^2 U_2(0^+) \\ EI_1 d_x^3 U_1(0^-) = EI_2 d_x^3 U_2(0^+) \end{cases}$$

Ces huit conditions de continuité donnent un système homogène de huit équations linéaires.

Homogénéisation asymptotique

Pour cette approche, chacun des deux segments est modélisé comme un élément poutre de type Euler dont l'équation dynamique en flexion s'écrit $EI\partial_x^4 u + \rho S\partial_t^2 u = 0$. La procédure d'homogénéisation asymptotique est détaillée en annexe A.1. L'équation finale homogénéisée sur une cellule de longueur l est :

$$\frac{\partial T^0}{\partial x} = <\rho S> \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial x} M^0 = -T^0; \qquad M^0(x) = -\langle EI(y)\rangle \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}$$

et sous forme condensée, $< EI(y) > \partial_x^4 u^0 + < \rho S > \partial_t^2 u^0 = 0$. Cette équation est unidimensionnelle, d'ordre 4 comme l'équation initiale, et fait apparaître deux coefficients homogénéisés : un paramètre effectif de rigidité de flexion $< EI(y) >$ l'ordre $O(\epsilon^0)$ et un paramètre effectif de masse linéique $< \rho S >$ explicités 2.18. De manière exactement analogue à la section 2.3.3, ces paramètres correspondent à la moyenne sur la longueur de la cellule, soit :

$$< EI >= \frac{E_1 I_1 E_2 I_2}{(1-c)E_2 I_2 + cE_1 I_1} \quad ; \quad < \rho S >= (1-c)\rho_1 S_1 + c\rho_2 S_2 \tag{2.18}$$

où c est la fraction de volume du composant B, $c = l_2/l$. Si les sections sont identiques, alors $I_1 = I_2$ et l'équation homogénéisée se simplifie $< E(y) > I\partial_{xxxx}^4 u^0 =< \rho > S\partial_{tt}^2 u^0$

Méthode des matrices de transfert

La méthode présentée en section 2.3.4 est ici étendue en flexion. L'équation classique d'un élément poutre d'Euler-Bernoulli admet comme forme de solution $u_k = A_k \sin(\beta_k x) + B_k \cos(\beta x) + C_k \sinh(\beta_k x) + D \cosh(\beta_k x)$ avec $\beta_k^4 = \omega^2 \rho_k S_k / E_k I_k$. On définit pour chaque segment un vecteur d'état contenant les dérivées successives du déplacement. Ce vecteur contient donc le déplacement, la rotation, le moment de flexion et l'effort tranchant et il est obtenu par l'intermédiaire d'une matrice de transfert T :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_k' \\ -E_k I_k u_k'' \\ E_k I_k u_k''' \end{pmatrix} = (T_k) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \\ D_k \end{pmatrix}$$

où T_k est la matrice de transfert du segment k telle que :

$$T_k = \begin{pmatrix} \sin(\beta_k L) & \cos(\beta_k L) & \sinh(\beta_k L) & \cosh(\beta_k L) \\ \beta_k \cos(\beta_k L) & -\beta_k \sin(\beta_k L) & \beta_k \cosh(\beta_k L) & \beta_k \sinh(\beta_k L) \\ -E_k I_k \beta_k^2 \sin(\beta_k L) & E_k I_k \beta_k^2 \cos(\beta_k L) & E_k I_k \beta_k^2 \sinh(\beta_k L) & E_k I_k \beta_k^2 \cosh(\beta_k L) \\ E_k I_k \beta_k^3 \cos(\beta_k L) & -E_k I_k \beta_k^3 \sin(\beta_k L) & E_k I_k \beta_k^3 \cosh(\beta_k L) & E_k I_k \beta_k^3 \sinh(\beta_k L) \end{pmatrix}$$

Pour un élément k :

$$\begin{pmatrix} u_k(l_k) \\ u_k'(l_k) \\ -E_k I_k u_k''(l_k) \\ E_k I_k u_k'''(l_k) \end{pmatrix} = (R_k) \begin{pmatrix} u_k(0) \\ u_k'(0) \\ -E_k I_k u_k''(0) \\ E_k I_k u_k'''(0) \end{pmatrix}$$

avec $R_k = T_k(l_k) T_k(0)^{-1}$ la matrice de transfert entre les deux extrémités d'un élément. A l'interface avec le segment suivant $k+1$, la continuité du déplacement, de la rotation, du moment fléchissant et de l'effort tranchant s'applique donc :

$$\begin{aligned} u_k(l_k) &= u_{k+1}(0) & \qquad u_k'(l_k) &= u_{k+1}'(0) \\ -E_k I_k u_k''(l_k) &= -E_{k+1} I_{k+1} u_{k+1}''(0) & \qquad E_k I_k u_k'''(l_k) &= E_{k+1} I_{k+1} u_{k+1}'''(0) \end{aligned}$$

et la relation entre les vecteurs d'état aux deux extrémités de la cellule est :

$$\begin{pmatrix} u_{k+1}(l_{k+1}) \\ u_{k+1}'(l_{k+1}) \\ -E_{k+1} I_{k+1} u_{k+1}''(l_{k+1}) \\ E_{k+1} I_{k+1} u_{k+1}'''(l_{k+1}) \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} u_k(0) \\ u_k'(0) \\ -E_k I_k u_k''(0) \\ E_k I_k u_k'''(0) \end{pmatrix}$$

où $R = R_1 R_2$ est la matrice de transfert entre les extrémités droites et gauche de la cellule. Pour une onde de flexion de constante de propagation μ, les vecteurs d'état de part et d'autre de la cellule sont liés par $\lambda = \exp(\mu)$, avec λ la valeur propre de la matrice de transfert R. L'équation de dispersion est déterminée par la résolution du problème aux valeurs propres de la matrice de transfert.

Les courbes de dispersion de flexion de la poutre composite périodique obtenues par les méthodes détaillées ci-avant sont comparées sur la figure 2.4. Les commentaires faits sur la figure 2.3 sont aussi valables pour les diagrammes de dispersion des ondes de flexion. La partie réelle du nombre d'onde est toujours limitée à la première zone de Brillouin $[-\pi/l; \pi/l]$. Le modèle homogénéisé obtenu montre que la masse effective et la rigidité de flexion sont simplement les moyennes arithmétiques des masses et rigidités de flexion des différents constituants de la poutre. Cette description est valable en basses fréquences et ne permet pas de prédire les propriétés de dispersion. Le modèle homogénéisé construit ici ne permet pas d'identifier les bandes interdites de la structure.

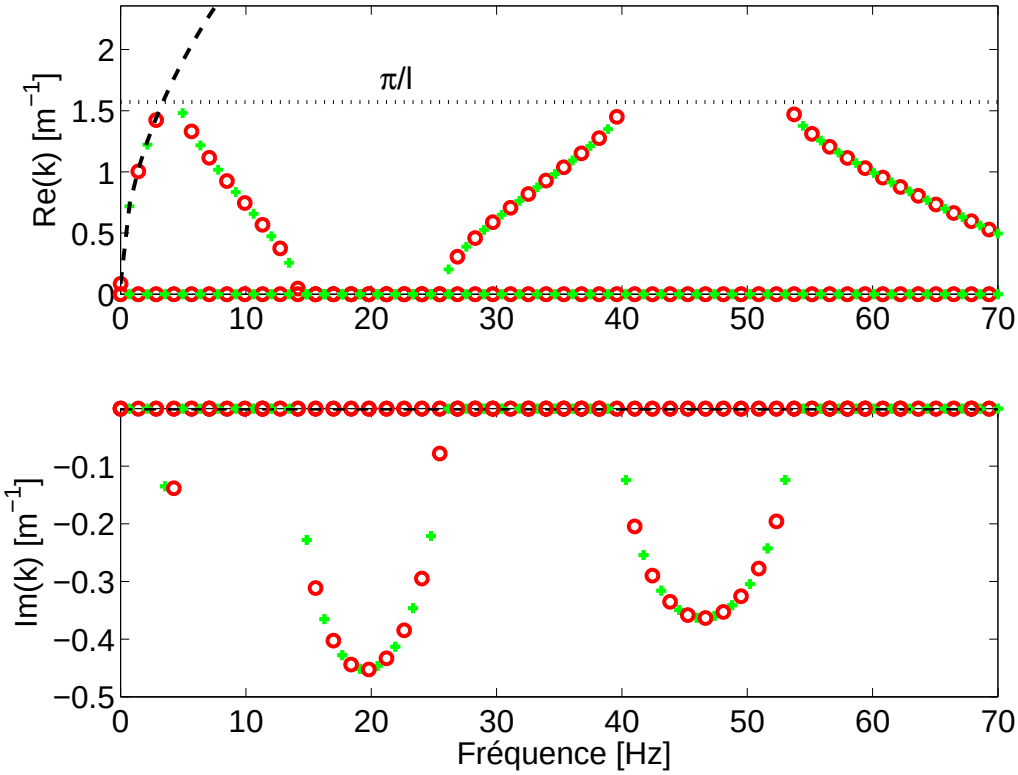


FIGURE 2.4 – Diagramme de dispersion des ondes des flexion dans la cellule unitaire : modèle homogénéisé (−−), matrices de transfert (+), éléments finis WFEM (o)

Il est intéressant d'apporter une interprétation au diagramme de dispersion en traçant la réponse forcée de la poutre. Les résultats ci-après sont obtenus avec une poutre de 10 cellules en conditions encastrée-libre, avec excitation harmonique du côté encastré. La réponse mesurée à la troisième cellule est représentée sur la figure 2.5. Les maximums de la fonction de transfert indiquent les fréquences de résonances. Au contraire, certains intervalles ne contiennent pas de résonances : ceux-ci correspondent aux bandes interdites identifiées sur le diagramme de dispersion de la figure 2.4, associés au guide d'ondes infini. Ces intervalles sont indépendants des conditions limites et de la longueur de la poutre, correspondant au guide d'ondes fini.

La déformée de la poutre en fonction de son abscisse est illustrée sur la figure 2.6, pour deux fréquences : 22 Hz et 35 Hz, la première étant à l'intérieur d'une bande interdite, la seconde à l'extérieur. Les amplitudes de déformation associées à ces deux fréquences sont représentées en fonction de la longueur de la poutre. La première observation est qu'à l'intérieur de la bande interdite, l'onde est atténuée de manière exponentielle, tandis qu'en dehors de la bande interdite, celle-ci se propage librement. Aussi, le diagramme de dispersion de la figure 2.4, la partie imaginaire du nombre d'onde à 22 Hz est de -0.413i. L'amplitude de cette onde évanescente est alors donnée par $e^{(-i(-0.413i)x)}$, avec x l'abscisse de la poutre, et permet de retrouver précisément l'enveloppe du profil de déformation de l'onde. Le déplacement de la poutre est alors localisé proche de l'excitation et presque nul loin de la source. Ce type de comportement sera aussi observé dans la suite du manuscrit.

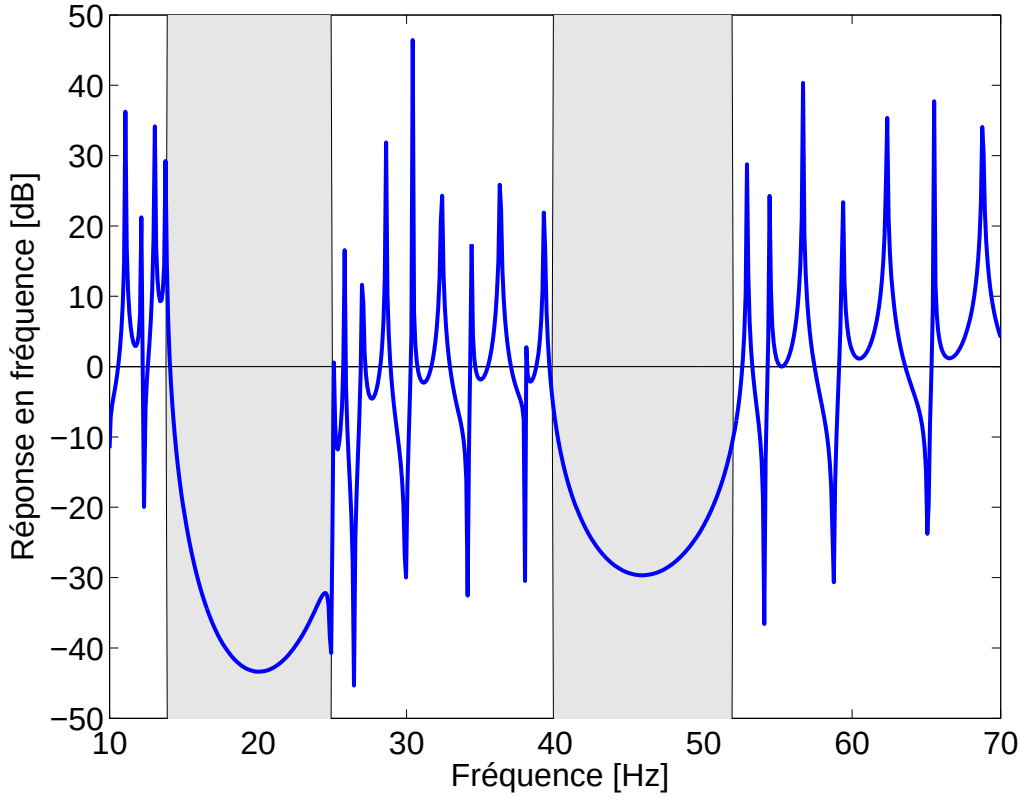


FIGURE 2.5 – Réponse en fréquences de la poutre composite encastrée-libre, avec 20 cellules (–), zone d'atténuation (▬)

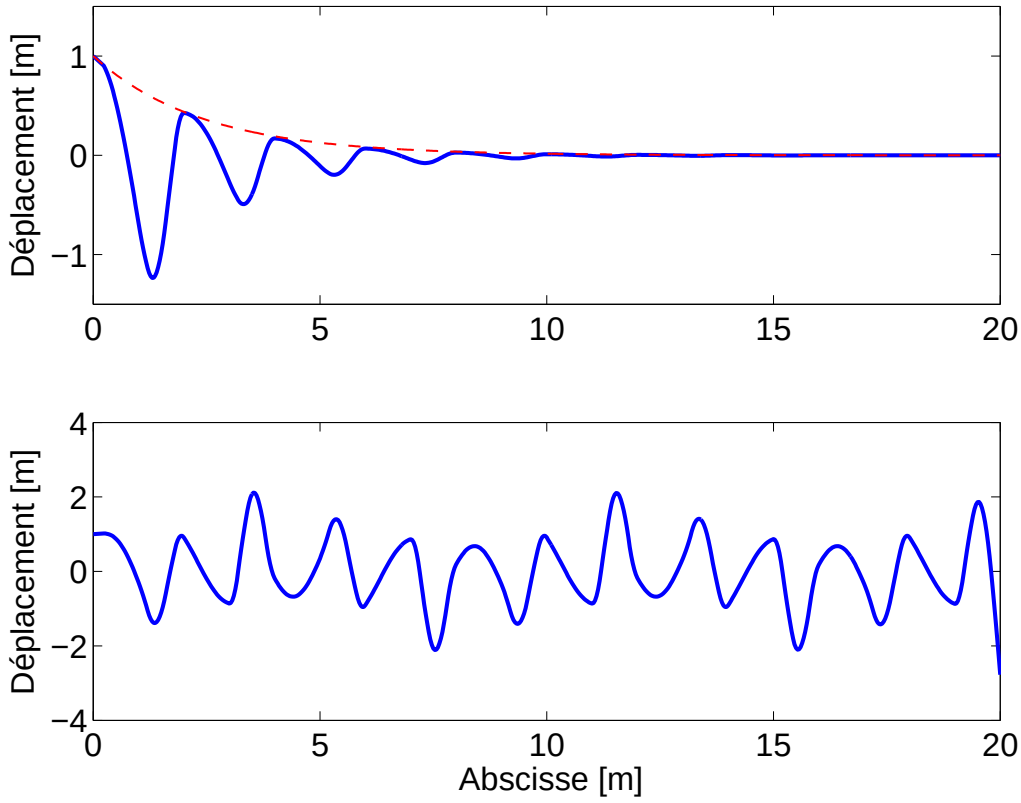


FIGURE 2.6 – Déformées de la poutre encastrée-libre à 22 Hz (haut) et 35 Hz (bas), (–), onde évanescente et enveloppe du signal (– –)

2.4 Outils d'identification des nombres d'onde

Dans ce préambule, il convient aussi de décrire brièvement les outils qui seront utilisés dans ce manuscrit pour l'estimation des nombres d'onde à partir de données numériques et expérimentales. Il s'agit de la transformée de Fourier bi-dimensionnelle et la méthode de corrélation avec des ondes inhomogènes IWC (*Inhomogeneous Wave Correlation*). Les rappels qui en sont faits ci-après sont très largement empruntés à Briggs and Henson (1995); Berthaut (2004); Berthaut et al. (2005).

2.4.1 Transformée de Fourier discrète : DFT

La transformée de Fourier est l'opération la plus simple et la plus directe à mettre en œuvre lorsqu'il s'agit d'accéder au contenu fréquentiel d'un signal temporel. De la même manière, cette méthode permet d'identifier les composantes spectrales d'un champ spatial. La définition et les propriétés de la transformée de Fourier discrète en 2D sont rappelées ici. Elle s'appuie sur deux hypothèses :

- le champ de déplacement $w(x, y)$ est connu sur une grille uniforme $(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y)_{0\leq i\leq N_1-1, 0\leq j\leq N_2-1}$. Δx et Δy sont les pas de discrétisation suivant x et y, et N_1 et N_2 sont le nombres de points suivant x et y,
- en dehors de cette grille, le champ est supposé 2D-périodique ($\backslash$ désigne le reste de la division euclidienne), soit :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, w(i\Delta x, j\Delta y) = w(i\backslash N_1\Delta x, j\backslash N_2\Delta y)$$

La famille de fonctions exponentielles de nombres d'onde discrets

$$(k_{xp} = p\Delta k_x, k_{yq} = q\Delta k_y)_{\substack{0\,\leq\, p\,\leq\, N_1\,-\,1,\\ 0\,\leq\, q\,\leq\, N_2\,-\,1}}$$

avec $\Delta k_x = 2\pi/N_1\Delta x$ et $\Delta k_y = 2\pi/N_2\Delta y$ une base de fonctions complexes, qui décompose le champ w sous la forme :

$$w(x_i, y_j) = \sum_{p=0}^{N_1-1}\sum_{q=0}^{N_2-1} W(k_{xp}, k_{yq}) \exp(i(k_{xp}x_i + k_{yq}y_j))$$

La transformée de Fourier discrète $W(k_{xp}, k_{yq})$ est alors définie comme

$$W(k_{xp}, k_{yq}) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} w(x_i, y_j) \exp(-i(k_{xp}x_i + k_{yq}y_j)) \tag{2.19}$$

Cet opérateur a deux principaux avantages et deux inconvénients importants. Ces atouts sont d'être *i)* rapide, car l'utilisation d'un algorithme FFT (*Fast Fourier Transform*) permet un traitement presque instantané, et *ii)* bijective, car il est possible de passer du champ spatial à sa transformée de Fourier discrète, et réciproquement par transformée de Fourier discrète inverse (*Inverse DFT*) sans perte d'information. Un premier inconvénient est le repliement, car du fait de la discrétisation du champ w en $\Delta_{x,y}$, sa DFT est $\frac{2\pi}{\Delta_{x,y}}$-périodique :

$$W(k_x, k_y) = W(k_x + \tfrac{2\pi}{\Delta_x}, k_y) = W(k_x, k_y + \tfrac{2\pi}{\Delta_y})$$

Cela engendre un mauvais traitement des nombres d'onde compris à l'extérieur du domaine $[-\pi/\Delta_x,\ \pi/\Delta_x]$ et $[-\pi/\Delta_y,\ \pi/\Delta_y]$. Une seconde limitation est la nécessité de fenêtrage, car le champ physique w étant connu sur un espace fini discrétisé, une onde de composantes (k_x, k_y), apparaîtra dans la DFT non pas comme une distribution de Dirac, mais comme un sinus cardinal avec des lobes secondaires.

2.4.2 Corrélation avec des ondes inhomogènes : IWC

En basses fréquences, le comportement de la structure est décrit par une somme de modes de la structure, ce qui rend l'approche modale adaptée. À moyennes et hautes fréquences, où la densité modale devient importante, l'approche modale devient inefficace et il faut une description propagative de la dynamique pour identifier les paramètres de la propagation des ondes. De la même manière que la méthode de Mc Daniel (McDaniel and Shepard (2000); McDaniel et al. (2000)), l'IWC a été développée pour s'affranchir des limitations de la description modale. Ces deux méthodes sont basées sur l'hypothèse que le champ spatial solution du problème libre ne dépend pas seulement des fréquences propres, mais de toutes les fréquences. L'originalité de la méthode IWC est de décrire le champ en utilisant des ondes inhomogènes, ce qui permet de s'affranchir des fortes variations et d'estimer l'amortissement structurel. Le principe est de projeter le champ vibratoire de la plaque (calculé numériquement ou mesuré expérimentalement) sur un champ d'ondes inhomogènes virtuel et d'en calculer la ressemblance par un processus d'optimisation, à l'aide d'un indice de corrélation appelé IWC.

En introduisant des ondes inhomogènes paramétrées par leur nombre d'onde k, leur direction de propagation θ, et leur coefficient d'atténuation γ, le champ d'ondes planes p est donc décrit par :

$$p_{(k,\theta,\gamma)}(x,y) = \exp(-ik(1+i\gamma)(x\cos(\theta)+y\sin(\theta)))$$

L'indice de corrélation entre le champ harmonique, c'est-à-dire la transformée de Fourier du champ spatial w, et chaque onde paramétrée t, s'écrit en fonction des paramètres de propagation :

$$IWC(k,\theta,\gamma) = \frac{\left|\int_x\int_y w\ p^*_{(k,\theta,\gamma)}dxdy\right|}{\sqrt{\int_x\int_y |w|^2\ dxdy\ .\ \int_x\int_y \left|p_{(k,\theta,\gamma)}\right|^2\ dxdy}} \tag{2.20}$$

avec t^* le conjugué de t. L'opérateur $IWC(k,\theta,\gamma)$ mesure donc la contribution de l'onde t au champ complet w, soit la part d'énergie de cette onde par rapport à l'énergie totale du champ. L'expression de cet opérateur valable dans l'espace des nombres d'onde est analogue à celle du MAC (*Modal Assurance Criterion*) dans le domaine modal (voir Ewins (1984)). En pratique, on considère que le champ w est connu en des points discrets. Les intégrales de surface dans (2.20) sont remplacées par une somme finie et pondérée par la fonction de cohérence :

$$IWC(k,\theta,\gamma) = \frac{\left|\sum_n w(x_i,y_i)\ p^*_{(k,\theta,\gamma)}\mathrm{COH}_i S_i\right|}{\sqrt{\sum_n |w(x_i,y_i)|^2\ \mathrm{COH}_i S_i\ .\ \sum_n \left|p_{(k,\theta,\gamma)}\right|^2\ \mathrm{COH}_i S_i}}$$

avec COH_i la fonction de cohérence de la mesure au point M_i, et S_i l'estimation de la surface autour de ce point. La fonction de cohérence est donc utilisée pour peser l'estimation du nombre d'onde. Pour rappel, la fonction de cohérence $\mathrm{COH}_{es}(\omega)$ s'exprime à partir de l'interspectre entrée/sortie $S_{es}(\omega)$ et des densités spectrales de puissance des signaux d'entrée $S_{ee}(\omega)$ et de sortie $S_{ss}(\omega)$ sous la forme $\mathrm{COH}_{es}(\omega) = |S_{es}(\omega)|^2 / S_{ee}(\omega)S_{ss}(\omega)$. C'est une fonction réelle et positive, comprise entre 0 et 1. Sa propriété fondamentale est que s'il existe, à une fréquence donnée ω_0, une relation linéaire entre l'entrée et la sortie, alors les deux séquences sont cohérentes et $\mathrm{COH}_{xy}(\omega_0) \approx 1$. C'est donc un indicateur de la causalité entre l'entrée et la sortie du système. Dans un contexte expérimental, il permet de s'assurer que la réponse du système provient bien de la perturbation qui y a été introduite.

L'opérateur IWC est limité par le repliement lié à la discrétisation du champ, et par la fenêtre, pour les même raisons que la transformée de Fourier. Dans les modèles de poutres et de plaques, l'équation de dispersion, à fréquence fixée, est une bijection entre k et θ.

Pour une fréquence f et un angle θ donnés, une seule onde est identifiée en maximisant la fonction $(k, \theta) \mapsto IWC(k, \theta, \gamma)$. L'algorithme crée d'abord un vecteur contenant des valeurs discrètes de l'angle θ. Pour chaque angle, le maximum de l'IWC est attribué à un couple (k_i, γ_i). L'algorithme crée ensuite d'une part la fonction qui à θ associe la valeur $k(\theta)$ et d'autre part la fonction qui à θ associe la valeur $\gamma(\theta)$, définies sur l'ensemble des valeurs discrètes de θ_i.

Sachant que le champ proche correspond essentiellement à des ondes inhomogènes, c'est-à-dire des nombres d'onde imaginaires, l'introduction d'un amortissement permet de différencier le champ proche du champ lointain. L'algorithme IWC peut donc éliminer les nombres d'onde associés à des amortissements trop importants, c'est à dire le champ proche. Cela permet d'utiliser le champ vibratoire de toute la surface et de s'affranchir de la position de la source. En revanche, concernant l'amortissement, les vérifications de Berthaut (2004) et Egreteau (2011) montrent que la méthode *semble* sensible aux conditions limites, si bien qu'il n'est pas possible de conclure clairement quant à la signification de cet amortissement, ni d'affirmer qu'il est indépendant des conditions limites. Dans la suite de ce manuscrit, les estimations d'amortissement obtenues par IWC seront comparées à celles de l'amortissement η identifié par la méthode Mc Daniel, dont la définition $\eta = |Im(k^4)/Re(k^4)|$ l'associe au facteur de perte du matériau McDaniel and Shepard (2000). Aussi, bien que l'IWC soit fondée des hypothèses moyennes et hautes fréquences (densité et recouvrement modal importants), Berthaut (2004) montre que la méthode reste applicable en situation de recouvrement modal faible.

Cette méthode a été utilisée par Van Belle et al. (2017) pour reconstruire expérimentalement des courbes de dispersion à partir de mesures effectuées sur une plaque recouverte de résonateurs masse-ressort. Les résultats expérimentaux concordent avec les simulations numériques, notamment autour des résonances locales.La méthode IWC est aussi valide dans le cas unidimensionnel et sera utilisée sur des données numériques 5 et pour la validation expérimentale du chapitre 6.

2.5 Remarques finales

Ce premier chapitre situe le contexte de l'étude et introduit les références bibliographiques concernant les modèles de plaques, l'homogénéisation, les notions relatives aux structures périodiques, ainsi que les méthodes qui seront utilisées par la suite. Les deux chapitres suivants détaillent la construction des modèles asymptotiques homogénéisés de plaque périodique mono- et bi-raidie en considérant des situations de contrastes. Ils sont inspirés des idées de couplage poutre/plaque de Fahy and Lindqvist (1976), de l'homogénéisation de milieux à résonance interne Auriault and Bonnet (1985); Boutin and Hans (2003); Chesnais et al. (2012), et des modèles asymptotiques de poutres et plaques Trabucho and Viaño (1996); Ciarlet (1997). Ces modèles sont ensuite validés numériquement par la méthode WFEM pour un cas similaire à l'étude d' Ichchou et al. (2008); Droz et al. (2016); Zhou et al. (2018), puis expérimentalement par la méthode de corrélation d'ondes inhomogènes développée par Berthaut (2004).

Chapitre 3

Plaque raidie

Ce chapitre est consacré à la construction d'un modèle homogénéisé de plaque raidie en situation de résonance interne. L'analyse préalable des phénomènes physiques sous l'hypothèse de grandes longueurs d'onde permet de déterminer des conditions de co-résonance et de couplage asymétrique entre la poutre et la plaque. L'analyse dimensionnelle permet ensuite de discuter les contrastes géométriques et/ou mécaniques favorables à la résonance interne. Les objectifs sont alors *i)* de mettre en œuvre le processus asymptotique pour construire séparément les modèles homogénéisés de poutre et de plaque et de les assembler en justifiant leur couplage, *ii)* de modéliser analytiquement les mécanismes présents à l'échelle globale, enrichis par la dynamique de plaque à l'échelle locale, *iii)* de mettre en évidence l'effet de résonance interne de la plaque sur la propagation des ondes de flexion et de torsion par l'intermédiaire de paramètres effectifs déterminés explicitement.

Sommaire

3.1 Analyse physique 24
3.1.1 Structure étudiée 24
3.1.2 Définition physique de la résonance interne dans la plaque raidie 24
3.1.3 Ligne de conduite du processus asymptotique 29
3.2 Homogénéisation de la plaque raidie avec résonance interne 29
3.2.1 Modèles asymptotiques de poutre et de plaque 29
3.2.2 Modèle asymptotique pour la poutre $\mathcal{B}$ 30
3.2.3 Modèle asymptotique pour la plaque $\mathcal{P}$ 31
3.2.4 Modèle asymptotique de la plaque raidie 32
3.3 Synthèse du comportement en flexion 37
3.4 Caractéristiques de dispersion en flexion 37
3.4.1 Ondes de flexion avec poutres actives 37
3.4.2 Caractéristiques de dispersion avec poutres passives 39
3.4.3 Limite de validité du modèle hybride en flexion 41
3.5 Comportement en torsion 41
3.5.1 Condition co-dynamique et couplage asymétrique en torsion 42
3.5.2 Comportement en torsion de la plaque raidie 43
3.5.3 Modèle homogénéisé en torsion 44
3.5.4 Dispersion des ondes de torsion 45
3.5.5 Limite de validité du modèle hybride en torsion 47
3.6 Conclusions intermédiaires 48

3.1 Analyse physique

3.1.1 Structure étudiée

La plaque raidie périodique étudiée est illustrée en figure 3.1 et se compose de plaques identiques (notées $\mathcal{P}$) encastrées à des poutres droites et identiques régulièrement espacées (notées $\mathcal{B}$). La période Ω comprend une poutre et un élément plaque, i. e. $\Omega = \mathcal{B} \bigcup \mathcal{P}$, considérés homogènes. Le contour de la section de la poutre S_b est noté ∂S_b et $\Gamma_b = \Gamma_b^- \bigcup \Gamma_b^+$ est l'interface plaque/poutre (où $^+$ et $^-$ font référence à la direction normale selon $\underline{a}_2$ et $-\underline{a}_2$ respectivement). De la même manière, l'interface plaque/poutre est $\Gamma_p = \Gamma_p^- \bigcup \Gamma_p^+$. Ainsi, l'interface de la cellule Ω avec deux périodes adjacentes est $\Gamma_\Omega = \Gamma_b^- \bigcup \Gamma_p^+$, et l'interface interne est Γ_b^+ qui coïncide avec Γ_p^- de normale sortante opposée. La poutre $\mathcal{B}$ est caractérisée par sa longueur L, son épaisseur l et la largeur b, les deux dernières étant du même ordre, i.e. $b = O(l)$. Le matériau de $\mathcal{B}$ est élastique isotrope, de module d'Young E_b, coefficient de Poisson ν_b, et densité ρ_b. La plaque $\mathcal{P}$ est de longueur L, d'épaisseur d, de largeur D, est constituée d'un matériau élastique isotrope de module d'Young E_p, de coefficient de Poisson ν_p, et de densité ρ_p. Au regard de la géométrie de la poutre $\mathcal{B}$ et de la plaque $\mathcal{P}$ trois petits paramètres sont introduits :

— l'inverse de l'élancement de la poutre $\mathcal{B}$ défini par

$$\epsilon_b = l/L \ll 1$$

— l'inverse de l'élancement de la plaque $\mathcal{P}$ donné par

$$\epsilon_p = d/D \ll 1$$

— l'inverse de l'élancement de la cellule Ω donné par le rapport entre la largeur de la plaque et la longueur de la poutre qui définit le contraste géométrique ε de la plaque raidie

$$\varepsilon = D/L \ll 1$$

De plus, le contraste de propriétés mécaniques des matériaux constituants la poutre $\mathcal{B}$ et la plaque $\mathcal{P}$ sont spécifiés par les rapports de modules et de masse volumique E_p/E_b and ρ_b/ρ_p. La plaque raidie est caractérisée par un jeu de cinq paramètres adimensionnels, $\{\epsilon_b,\ \epsilon_p,\ \varepsilon,\ E_p/E_b,\ \rho_b/\rho_p\}$.

Le modèle sera construit en considérant un régime harmonique et du fait de la linéarité, le terme de dépendance temporelle $\exp(i\omega t)$ est omis ci-après.

3.1.2 Définition physique de la résonance interne dans la plaque raidie

L'analyse s'inspire de l'étude de composites élastiques périodiques en situation de résonance interne développée par Auriault and Bonnet (1985); Auriault and Boutin (2012). Dans ces milieux, le mécanisme de résonance interne correspond aux situations où les phénomènes dynamiques coexistent à l'échelle microscopique de la cellule et à l'échelle macroscopique de la structure. Les articles cités ci-avant montrent que ce régime spécifique appelé régime co-dynamique apparaît lorsque les matériaux hétérogènes ont des propriétés mécaniques suffisamment contrastées. Dans un bi-composite, l'élément rigide transmet la grande longueur d'onde en suivant un régime local quasi-statique, tandis qu'à la même fréquence, l'autre élément subit un régime local dynamique. Cette description met en évidence les deux caractéristiques essentielles du régime de résonance interne : *i)* la co-existence, à la même fréquence, d'une grande longueur d'onde et d'une courte longueur d'onde dans les différents constituants, et son corollaire, *ii)* un régime

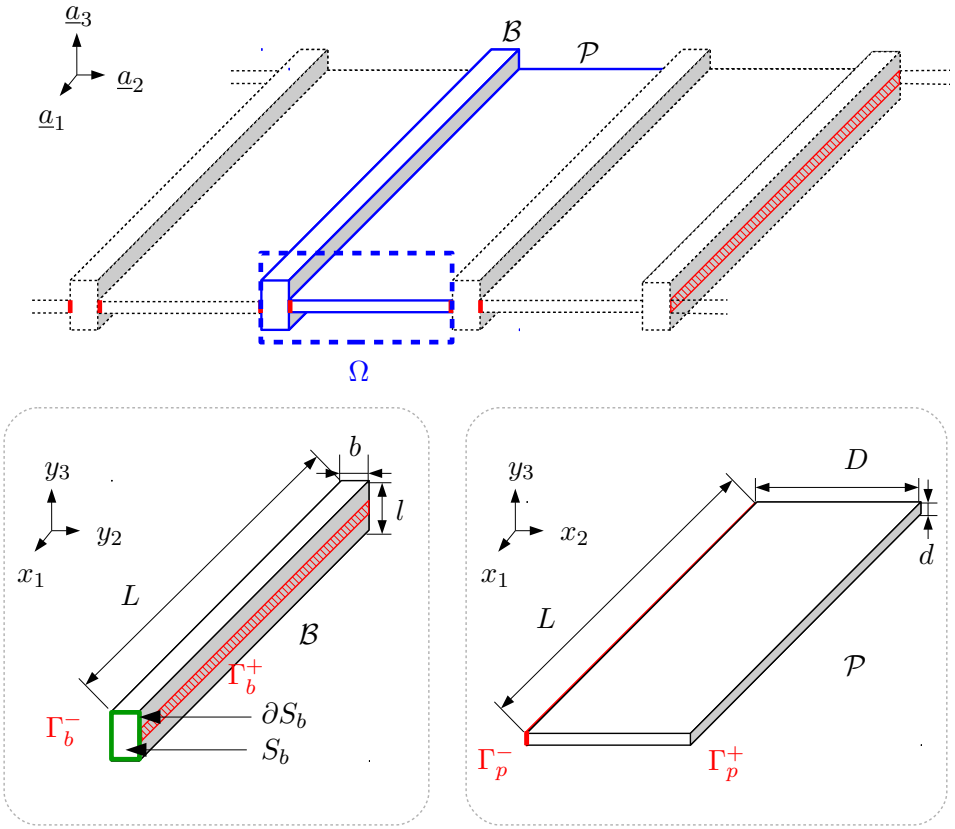


FIGURE 3.1 – Plaque raidie périodique à l'étude avec cellule Ω et repères locaux de coordonnées associées à la poutre $\mathcal{B}$ et la plaque $\mathcal{P}$ en contact à l'interface Γ.

spécifique à l'échelle de la période quasi-statique dans le constituant rigide qui génère un régime dynamique avec une cinématique non homogène dans le constituant souple. Ainsi, les déplacements des deux constituants diffèrent à l'ordre dominant. Ces particularités indiquent que les constituants jouent des rôles différents et que leur couplage n'est donc pas symétrique. Cette asymétrie implique que l'un est forçant et l'autre forcé. L'élément forçant est celui qui porte la grande longueur d'onde tandis que l'élément forcé est soumis aux longueurs d'ondes à l'origine de la résonance interne.

Le même principe s'applique au cas des vibrations hors-plan de la plaque raidie. Les poutres rigides jouent le rôle d'éléments forçants qui transmettent la grande longueur d'onde, alors que les plaques (souples) subissent la résonance locale. Cette idée permet d'exprimer les conditions pour atteindre le régime co-dynamique en fonction des paramètres mécaniques et géométriques. Ces conditions sont basées sur l'analyse dimensionnelle. L'approche est cependant moins directe que dans le cas de composites élastiques en raison *i)* des différents petits paramètres liés aux géométries de poutre et de plaque, et *ii)* des différentes orientations de l'onde dans la poutre et la plaque, comme expliqué ci-après.

Condition co-dynamique

Le premier prérequis pour avoir des paramètres mécaniques et géométriques compatibles avec la résonance interne est d'obtenir une condition co-dynamique. L'équation dynamique de

flexion de la poutre $\mathcal{B}$ seule selon son axe $\underline{a}_1$ est donné par :

$$E_b I_b \partial^4_{x_1} U = -\Lambda_b \omega^2 U$$

où U est le déplacement transverse selon $\underline{a}_3$, $I_b = bl^3/12$ est le moment d'inertie autour de $\underline{a}_2$, $S_b = bl$ est la section de la poutre, et $\Lambda_b = \rho_b S_b$ sa masse linéique. En conséquence, la longueur d'onde réduite en flexion (longueur d'onde divisée par 2π) $\mathcal{L}_\omega$ est donnée par :

$$\mathcal{L}^4_\omega = O\left(\frac{E_b I_b}{\Lambda_b \omega^2}\right)$$

La fréquence de résonance fondamentale de la poutre de longueur L est de l'ordre de :

$$\omega^2_b = O\left(\frac{E_b I_b}{\Lambda_b L^4}\right)$$

Pour la plaque $\mathcal{P}$, ses résonances locales apparaissent suivant la période, définie le long de $\underline{a}_2$ et de longueur D. Il faut donc considérer l'équation dynamique unidimensionnelle décrivant la flexion de la plaque $\mathcal{P}$ le long de l'axe $\underline{a}_2$:

$$E'_p I_p \partial^4_{x_2} w = -\Lambda_p \omega^2 w$$

où w est le déplacement hors-plan $\underline{a}_3$, $E'_p I_p$ est la rigidité de flexion, avec $E'_p = E_p/(1-\nu^2)$ le module de plaque corrigé pour correspondre à des déformations planes, $I_p = d^3/12$ le moment d'inertie autour de l'axe $\underline{a}_1$, et $\Lambda_p = \rho_p d$ sa masse surfacique. Alors, la résonance fondamentale de la plaque de longueur D est de l'ordre de :

$$\omega^2_p = O\left(\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p D^4}\right)$$

La situation de résonance interne est atteinte lorsque la poutre et la plaque résonnent dans la même gamme de fréquences, soit $\omega_b = O(\omega_p)$, ce qui donne :

$$\frac{E_b l^2}{\rho_b L^4} = O\left(\frac{E'_p d^2}{\rho_p D^4}\right), \text{ soit} \qquad \frac{E_b \rho_p}{E'_p \rho_b} = O\left(\frac{d^2}{l^2}\frac{L^4}{D^4}\right) = O\left(\frac{\epsilon^2_p}{\epsilon^2_b \varepsilon^2}\right) \tag{3.1}$$

Remarque : une relation similaire à un facteur modal près serait obtenue en considérant des modes supérieurs au lieu des modes fondamentaux. Pour des plaques infinies, la condition de régime co-dynamique implique qu'à la fréquence $O(\omega_p)$, la poutre $\mathcal{B}$ est en régime dynamique. En conséquence, la taille caractéristique de son mouvement n'est plus la longueur réelle de la poutre mais :

$$\mathcal{L}^4_{\omega_p} = O\left(\frac{E_b I_b}{E'_p I_p}\frac{\Lambda_p}{\Lambda_b} D^4\right)$$

Condition de couplage asymétrique

Comme précisé précédemment, la résonance interne implique nécessairement une cinématique non homogène due à un couplage asymétrique. En effet, un couplage symétrique introduirait un régime similaire entre les éléments. Il se produirait alors un comportement global conforme à une cinématique homogène, mais incompatible avec la résonance interne.

En situation de couplage asymétrique, la poutre est l'élément forçant qui impose son déplacement à la plaque, qui est le système forcé. En retour, les forces exercées par la plaque sur la poutre agissent comme une source surfacique qui charge la poutre. De ce fait, d'après

l'équilibre transverse i.e. selon a_3, de la poutre chargée par la plaque, le couplage asymétrique poutre/plaque impose :

$$\partial_{x_1} T_b = O(T_p) \qquad \text{i.e.} \qquad O\left(\frac{T_b}{L}\right) = O(T_p) \tag{3.2}$$

où T_b est l'effort tranchant transverse (en kN) dans la poutre $\mathcal{B}$ et T_p est l'effort linéique transverse dans la plaque $\mathcal{P}$ (en kN/m). De plus, puisque la poutre est le système forçant, son équation constitutive reste inchangée par la force extérieure. En prenant un comportement de poutre de type Euler, T_b peut être évalué

$$T_b = O(E_b I_b \partial^3_{x_1} U) = O\left(E_b \frac{bl^3}{12}\frac{U}{L^3}\right) \qquad ; \qquad \partial_{x_1} T_b = O\left(E_b \frac{bl^3}{12}\frac{U}{L^4}\right)$$

Puisque la plaque vibre suivant la direction $\underline{a}_2$ de largeur D, le comportement de plaque mince de type Kirchhoff-Love permet d'estimer T_p comme :

$$T_p = O(E'_p I_p \partial^3_{x_2} w) = O\left(E'_p \frac{d^3}{12}\frac{w}{D^3}\right)$$

Les déplacements de la poutre et de la plaque sont identiques à leur jonction, ce qui amène à considérer que $w = O(U)$. Alors, l'équation (3.1) avec $b = O(l)$ requiert :

$$O\left(E_b \epsilon_b^4\right) = O\left(E'_p \epsilon_p^3\right) \tag{3.3}$$

Dimensionnements compatibles avec la résonance interne

Les conditions (3.1) et (3.3) peuvent être satisfaites pour différents choix des cinq paramètres adimensionnels décrivant la plaque raidie, et donnent ainsi des situations rigoureuses compatibles avec la résonance interne. Parmi les différentes options, deux combinaisons offrent la possibilité de dimensionnements réalistes pour des applications pratiques.

Un premier choix consiste à supposer que l'élancement de la poutre et du même ordre que celui de la plaque, et que les masses volumiques de la poutre et de la plaque sont du même ordre, soit

$$\epsilon_b = O(\epsilon_p) = \epsilon \ll 1 \qquad \text{d'où} \qquad l/L = O(d/D) \ll 1 \qquad ; \qquad \frac{\rho_b}{\rho_p} = O(1)$$

Cette relation indique aussi que $\varepsilon = D/L = O(d/l)$. Alors, les conditions (3.1) et (3.3) imposent :

$$\frac{E'_p \rho_b}{E_b \rho_p} = \frac{D^2}{L^2} = O(\varepsilon^2) \qquad ; \qquad \frac{E'_p}{E_b} = \frac{l}{L} = \frac{d}{D} = O(\epsilon) \tag{3.4}$$

qui signifie que le module de la plaque est plus petit que celui de la poutre et que les rapports de densités étant du même ordre de grandeur, $\epsilon = \varepsilon^2$. Finalement, nous avons :

$$\varepsilon^2 = \epsilon \qquad \text{tel que} \qquad d/l = O(D/L) = O(\sqrt{E'_p/E_b}) \ll 1$$

Le dimensionnement (3.4) décrit une plaque fine et étroite en comparaison respectivement de l'épaisseur et de la longueur de la poutre. Ainsi, lorsque les conditions (3.4), qui relient les paramètres géométriques aux rapports de rigidités et de densités, sont respectées, la situation de résonance interne apparaît autour des fréquences propres communes de la plaque et de la poutre. Pour finir, un dimensionnement simple favorisant la résonance interne est donc :

$$\left\{\epsilon_b = \epsilon_p = \epsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{\epsilon}, \quad E'_p/E_b = \epsilon, \quad \rho_b/\rho_p = O(1)\right\}$$

Le cas où la plaque et la poutre sont faites du même matériau est une autre possibilité simple. Dans ce cas ($E_p = E_b$, $\rho_p = \rho_b$) et les conditions (3.1) et (3.3) requièrent

$$\frac{d^2}{l^2}\frac{L^4}{D^4} = \frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_b^2 \varepsilon^2} = O(1) \qquad ; \qquad \frac{l^4}{L^4}\frac{D^3}{d^3} = \frac{\epsilon_b^4}{\epsilon_p^3} = O(1) \tag{3.5}$$

soit finalement

$$\varepsilon = D/L = O(\sqrt{d/l}) \ll 1 \qquad \text{et} \qquad dD = O(l^2)$$

Ces deux dernières relations définissent la géométrie de la plaque raidie résonante avec des valeurs données d'épaisseurs d et l.

Dans les deux cas, la plaque est bien plus déformable en flexion que la poutre en raison de sa faible épaisseur et/ou module d'Young (dans la première situation $d/l = O(\varepsilon)$; $E_p/E_b = O(\varepsilon^2)$; et dans la seconde $d/l = O(\varepsilon^2)$; $E_p/E_b = 1$). Cela est cohérent avec le fonctionnement de poutre forçante et de plaque forcée.

Remarque complémentaire sur la condition de co-dynamique

Le comportement singulier de la plaque raidie est associé aux modes propres et fréquences propres de la plaque. De ce fait, pour une plaque raidie finie de longueur L, il est possible d'atteindre différentes situations de co-dynamique selon le mode de poutre ou de plaque considéré.

Pour une plaque raidie encastrée à ses extrémités, la taille $\mathcal{L}_{nJ}$ telle que le $n^{\text{-ième}}$ mode symétrique de la plaque se trouve à la même fréquence que celle du $J^{\text{-ième}}$ mode en *flexion* de la poutre, s'exprime comme $\omega_{sn} = \omega_J$. Par définition :

$$\omega_{sn} = \delta_{\mathcal{P}}^2 \sqrt{\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p}} \qquad ; \qquad \omega_J = \delta_{\mathcal{B}}^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\Lambda_b}}$$

d'où, avec une très bonne approximation dès le second mode, $\delta_{\mathcal{P}} D \approx (2n - 1/2)\pi$, $\delta_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_{nJ} \approx (J + 1/2)\pi$. Cela implique

$$\mathcal{L}_{nJ} \approx D \frac{J + 1/2}{2n - 1/2} \sqrt[4]{\frac{E_b I_b \Lambda_p}{E'_p I_p \Lambda_b}} \tag{3.6}$$

Le même raisonnement permet de déterminer la longueur $\mathcal{L}'_{nK}$ telle que la fréquence ω_{tm} du $m^{\text{-ième}}$ mode antisymétrique de la plaque coïncide avec la fréquence du $K^{\text{-ième}}$ mode en *torsion* de la plaque. Dans ce cas

$$\omega_{tm} = \delta_{\mathcal{P}}^2 \sqrt{\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p}} \qquad ; \qquad \omega_K = \delta'_{\mathcal{B}} \sqrt{\frac{G_b \mathcal{I}_b}{\rho_b J_b}}$$

et, on trouve $\delta_{\mathcal{P}} D = (2m + 1/2)\pi$, $\delta'_{\mathcal{B}} \mathcal{L}'_{mK} = K\pi$, tel que

$$\mathcal{L}'_{mK} = D \frac{K}{2m + 1/2} \sqrt[4]{\frac{E_b I_b}{\Lambda_b}} \sqrt{\frac{\rho_b J_b}{G_b \mathcal{I}_b}} \tag{3.7}$$

La distinction entre comportement en flexion et en torsion sera traitée en détails par la suite.

3.1.3 Ligne de conduite du processus asymptotique

Un avantage décisif de la méthode d'homogénéisation est sa capacité à décrire des systèmes avec de forts contrastes de propriétés, et dans lesquels les variables "lentes" interagissent avec des variables "rapides". En général, ce couplage rend le problème difficile à résoudre analytiquement, et aboutit à des formulations numériques mal conditionnées. L'approche asymptotique permet de séparer les deux jeux de variables et de résoudre les problèmes séparément. Cela permet de déterminer un modèle effectif dont les paramètres résultent directement de la microstructure, et sont facilement calculables. Cette modélisation est intéressante d'un point de vue théorique et pratique.

La méthode d'homogénéisation se base sur l'hypothèse de séparation d'échelle, qui signifie que la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la taille de la période. Elle s'exprime explicitement en utilisant des développements asymptotiques des variables et respecte le dimensionnement de l'analyse dimensionnelle précédente. L'application de cette méthode dans des milieux périodiques amène à la résolution de problèmes locaux sur la cellule, Sanchez-Palencia (1980); Auriault et al. (2009). Dans le cas présent, le couplage asymétrique implique que la poutre impose son déplacement à la plaque et reçoit, en retour, les contraintes exercées par la plaque. Réciproquement, la plaque est sujette au déplacement de la poutre, et impose ses contraintes. Ceci permet de décomposer la procédure de résolution en trois étapes :

1. construction du modèle de poutre basé sur le paramètre ϵ_b, (section 3.2.2)
2. construction du modèle de plaque basé sur le paramètre ϵ_p, (section 3.2.3)
3. construction du modèle de plaque raidie basé sur le paramètre ε, (section 3.2.4)

Les rapports d'échelles ϵ_b et ε sont définis en considérant la longueur L de la poutre comme taille caractéristique des variations à grande échelle. Cette définition est pertinente pour une description basses fréquences, pour l'analyse des premiers modes. Mais, en hautes fréquences, la taille caractéristique sera la longueur d'onde réduite dans la poutre à la fréquence de résonance de la plaque $\mathcal{L}_{\omega_p}$ au lieu de L.

3.2 Homogénéisation de la plaque raidie avec résonance interne

3.2.1 Modèles asymptotiques de poutre et de plaque

Cette partie se concentre sur les deux premières étapes. L'élaboration des modèles de poutre et plaque est une application directe de la méthode asymptotique dédiée aux formulations de la théorie des poutre et des plaques provenant de *i)* l'élasticité tridimensionnelle du milieu isotrope, *ii)* des conditions d'élancement, *iii)* du chargement spécifique par des forces volumiques et/ou surfacique, dans le prolongement des travaux de Trabucho and Viaño (1996); Ciarlet (1997). D'autres contributions dans le même esprit concernent les composites contrastés de type poutre ou plaque Soubestre and Boutin (2012), Boutin and Viverge (2016). Cette procédure asymptotique, désormais classique, est détaillée en annexe A. Nous ne donnerons ici que les principales étapes nécessaires à la compréhension physique.

En effet, dans les modèles de poutre et de plaque issus de la procédure asymptotique, il faut identifier soigneusement les ordres de grandeur des variables physiques (déplacements, contraintes, déformations) qui déterminent la qualité des conditions de couplage. Ces conditions doivent s'exprimer à l'interface en utilisant les variables de poutre et de plaque. Il faut aussi souligner qu'en plus des petits paramètres de plaque et de poutre qui peuvent être différents, la

géométrie du problème est telle que x_1 (respectivement y_3) est une variable macroscopique (respectivement microscopique) pour la poutre et la plaque, tandis que la variable spatiale associée à l'axe $\underline{a}_2$ est microscopique dans la poutre mais macroscopique dans la plaque.

3.2.2 Modèle asymptotique pour la poutre $\mathcal{B}$

La poutre droite et homogène $\mathcal{B}$ satisfait le critère d'élancement pour $\epsilon_b = l/L \ll 1$. Le repère orthonormé de référence $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ montré en figure 3.1 est orienté en suivant les axes principaux d'inertie et son origine coïncide avec le centre de masse de la section. L'approche asymptotique est basée sur le fait que la géométrie permet de différencier les directions axiale et transverse ; elle suggère aussi que les phénomènes varient dans l'axe selon L et dans la section selon l , et cela a trois conséquences :

— les variables d'espace adimensionnelles liées à la différence des tailles caractéristiques dans l'axe et la section sont $(x_1/L, x_2/l, x_3/l)$. Le repère de variables d'espace approprié est alors (x_1, y_2, y_3), où $y_\alpha = (L/l)x_\alpha = \epsilon_b^{-1} x_\alpha$ (par convention, les indices grecs prennent les valeurs 2 et 3, e.g. $\underline{y} = y_\alpha \underline{a}_\alpha$). De ce fait, pour une quantité φ exprimée en fonction de $(x_1, \underline{y})$ l'opérateur gradient $\nabla\varphi(\underline{x}) = (\partial_{x_i}\underline{a}_i)\varphi(\underline{x})$ devient $\nabla\varphi(x_1, \underline{y}) = (\partial_{x_1}\underline{a}_1 + \epsilon_b^{-1}\partial_{y_\alpha}\underline{a}_\alpha)\varphi(x_1, \underline{y})$. Les autres opérateurs différentiels sont eux aussi modifiés en conséquence. L'équation d'équilibre contient alors des termes d'ordres de grandeurs différents en ϵ_b.

— la spécificité de la direction axiale conduit à décomposer le tenseur (symétrique) des déformations $(\underline{\underline{e}}^{\mathcal{B}})$ ou des contraintes $(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}})$ en tenseurs réduits, par exemple pour les contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}} = \sigma_{\mathrm{N}}\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + (\underline{\sigma}_{\mathrm{T}} \otimes \underline{a}_1 + \underline{a}_1 \otimes \underline{\sigma}_{\mathrm{t}}) + \underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{S}}$$

où les trois tenseurs réduits sont :
$\sigma_{\mathrm{N}} = \sigma_{11}$: la contrainte *scalaire axiale*
$\underline{\sigma}_{\mathrm{T}} = \sigma_{1\alpha}\underline{a}_\alpha$: la contrainte 2D *vectorielle* exercée *hors-plan* de la section
$\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{S}} = \sigma_{\alpha\beta}(\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\beta \otimes \underline{a}_\alpha)/2$: la contrainte 2D *tensorielle dans le plan* de la section.

— l'existence de termes d'ordres de grandeur différents dans l'équation d'équilibre implique de chercher les variables sous forme de développement asymptotique en puissance de ϵ_b, par exemple $\varphi(x_1, \underline{y}) = \varphi^{(0)}(x_1, \underline{y}) + \epsilon_b\varphi^{(1)}(x_1, \underline{y}) + \epsilon_b^2\varphi^{(2)}(x_1, \underline{y}) + \dots$.

Le processus asymptotique consiste à introduire les développements dans les équations d'équilibre. Séparer ensuite les termes selon leur ordre de grandeur génère une série de problèmes à résoudre successivement. La résolution se fait en traitant alternativement le problème correspondant à l'équilibre dans la section, et le problème d'équilibre dans l'axe, et ainsi de suite. La première solution non triviale portant sur x_1 donne l'ordre dominant de la description de la poutre (voir annexe A.2). En suivant cette procédure, la cinématique d'Euler-Bernoulli en flexion suivant $\underline{a}_3$ émerge à l'ordre dominant :

$$\underline{u}^{(0)}(x_1, \underline{y}) = U(x_1)\underline{a}_3 \quad ; \quad \underline{u}^{(1)}(x_1, \underline{y}) = -y_3\partial_{x1}U\underline{a}_1$$

En ce qui concerne les trois tenseurs réduits, il apparaît que leur ordre de grandeur diffère à l'ordre dominant, soit :

$$\sigma_N = \epsilon_b O\left(E_b\frac{U}{L}\right) \quad ; \quad \underline{\sigma}_T = \epsilon_b^2 O\left(E_b\frac{U}{L}\right) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_S = \epsilon_b^3 O\left(E_b\frac{U}{L}\right)$$

Ainsi, à l'ordre dominant, le tenseur de contrainte dans la poutre $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}} = \epsilon_b \sigma_N^{(1)} \underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + \epsilon_b^2 \sigma_{T1\alpha}^{(2)} (\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_\alpha + \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_1) + \epsilon_b^3 \sigma_{S\alpha\beta}^{(3)} (\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\beta \otimes \underline{a}_\alpha) \tag{3.8}$$

tel que le vecteur contrainte sur la surface Γ en contact avec la plaque prend la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}}.\underline{a}_2 = \epsilon_b^2 \sigma_{T12}^{(2)} \underline{a}_1 + \epsilon_b^3 (\sigma_{S22}^{(3)}.\underline{a}_2 + \sigma_{S23}^{(3)}.\underline{a}_3)$$

À l'issue de la procédure asymptotique, et en se restreignant à l'ordre dominant, les vibrations transverses de la poutre $\mathcal{B}$ suivant $\underline{a}_3$ sont décrites par les équations suivantes, représentant l'équilibre des forces selon l'axe $\underline{a}_3$, l'équilibre des moments autour de $\underline{a}_2$, et la loi constitutive en flexion :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} T^{\mathcal{B}} + \left(\displaystyle\int_{\Gamma_b^+} \sigma_{S23} - \int_{\Gamma_b^-} \sigma_{S23} \right) = -\Lambda_b \omega^2 U(x_1) \\ \partial_{x_1} M^{\mathcal{B}} + \left(\displaystyle\int_{\Gamma_b^+} y_3 \sigma_{T12} - \int_{\Gamma_b^-} y_3 \sigma_{T12} \right) - T_3^{\mathcal{B}} = 0 \\ M^{\mathcal{B}} = -E_b I_b \partial_{x_1}^2 U(x_1) \end{cases} \tag{3.9}$$

Le couplage avec la plaque apparaît via les termes entre parenthèses décrivant les actions de contact sur Γ_b. Il s'agit d'une force de cisaillement associée aux contraintes $\sigma_{S23} = \epsilon_b^3 \sigma_{S23}^{(3)}$ et d'un moment autour de $\underline{a}_2$ associé à la contrainte $\sigma_{T12} = \epsilon_b^2 \ \sigma_{T12}^{(2)}$.

Remarque : La contrainte $\sigma_{S22} = \epsilon_b^3 \sigma_{S22}^{(3)}$ normale à Γ n'a pas d'effet puisqu'à l'ordre dominant, la section de la poutre subit un mouvement de corps rigide sans déformation dans son plan. En particulier, Γ_b^- et Γ_b^+ suivent le même déplacement $U(x_1)$.

3.2.3 Modèle asymptotique pour la plaque $\mathcal{P}$

La plaque satisfait le critère d'élancement pour $\epsilon_p = d/D \ll 1$, et sa géométrie différencie naturellement les directions dans son plan $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ et hors-plan $\underline{a}_3$; les variations dans le plan apparaissent suivant D tandis que les variations hors-plan varie suivant d. En conséquence, les variables d'espaces décrivant la plaque sont (x_1, x_2, y_3), où $y_3 = (D/d)x_3 = \epsilon_p^{-1} x_3$, tel que l'opérateur gradient $\nabla\varphi(\underline{x}) = (\partial_{x_i} \underline{a}_i)\varphi(\underline{x})$ devient $\nabla\varphi(x_1, x_2, y_3) = (\partial_{x_1}\underline{a}_1 + \partial_{x_2}\underline{a}_2 + \epsilon_p^{-1}\partial_{y_3}\underline{a}_3)\varphi(x_1, x_2, y_3)$. Cela induit des termes de différents ordres de grandeur et implique de chercher les variables sous forme de développements asymptotiques en puissance de ϵ_p, par exemple, $\varphi(x_1, x_2, y_3) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2, y_3) + \epsilon_p \varphi^{(1)}(x_1, x_2, y_3) + \epsilon_p^2 \varphi^{(2)}((x_1, x_2, y_3) + \dots$.
Conformément à la géométrie plane, le tenseur de contraintes $(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}})$ est décomposé (la même décomposition s'applique au tenseur de déformations) sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{p}} + (\underline{\sigma}_{\mathrm{t}} \otimes \underline{a}_3 + \underline{a}_3 \otimes \underline{\sigma}_{\mathrm{t}}) + \sigma_{\mathrm{n}} \underline{a}_3 \otimes \underline{a}_3$$

où les tenseurs réduits de la plaque sont (avec les indices $a, b = \{1, 2\}$) :

$\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{p}} = \sigma_{ab}(\underline{a}_a \otimes \underline{a}_b + \underline{a}_b \otimes \underline{a}_a)/2$: le *tenseur* 2D de rang 2 de contrainte (ou déformation) *dans le plan* de la plaque,

$\underline{\sigma}_{\mathrm{t}} = \sigma_{1a}\underline{a}_a$: le *vecteur* 2D de contrainte (déformation) exercé *hors-plan* de la plaque,

$\sigma_{\mathrm{n}} = \sigma_{33}$: la contrainte (ou déformation) normale *scalaire hors-plan*

Cette formulation du problème permet d'amorcer la procédure asymptotique, et la progression est similaire à celle de la poutre. La principale différence formelle vient du fait que la variable spatiale associée à $\underline{a}_2$ est microscopique dans la poutre mais macroscopique dans la plaque. La résolution à l'ordre dominant fait émerger le comportement classique de Kirchhoff-Love où la

variable cinématique dominante est le déplacement hors-plan $w(x_1, x_2)\underline{a}_3$ de la plaque $\mathcal{P}$. Les tenseurs réduits de contraintes sont d'ordres différents :

$$\underline{\underline{\sigma}}_p = \epsilon_p O\left(E'_p \frac{w}{D}\right) \quad ; \quad \underline{\sigma}_t = \epsilon_p^2 O\left(E'_p \frac{w}{D}\right) \quad ; \quad \sigma_n = \epsilon_p^3 O\left(E'_p \frac{w}{D}\right)$$

et leurs développements sont impairs (respectivement pairs) en puissance de ϵ_p pour $\underline{\underline{\sigma}}_p$ et σ_n (respectivement $\underline{\sigma}_t$). Ainsi, à l'ordre dominant, le tenseur de contraintes dans la plaque $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}} = \epsilon_p \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}_{pab}(\underline{a}_a \otimes \underline{a}_b + \underline{a}_b \otimes \underline{a}_a) + \epsilon_p^2 \sigma^{(2)}_{t3a}(\underline{a}_3 \otimes \underline{a}_1 + \underline{a}_1 \otimes \underline{a}_3) + \epsilon_p^3 \sigma_n^{(3)} \underline{a}_3 \otimes \underline{a}_3 \tag{3.10}$$

Par conséquent, le vecteur contrainte à la jonction Γ_p avec la poutre, est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}}.\underline{a}_2 = \epsilon_p(\sigma^{(2)}_{p12}\underline{a}_1 + \sigma^{(2)}_{p22}\underline{a}_2) + \epsilon_p^2 \sigma^{(3)}_{t32}.\underline{a}_3$$

Le processus asymptotique donne, à l'ordre dominant, que le déplacement hors-plan suivant $\underline{a}_3$ de l'élément plaque $\mathcal{P}$ est décrit par l'ensemble d'équations (3.11) exprimant respectivement, l'équilibre dans le plan des forces transverses suivant $\underline{a}_3$, l'équilibre dans le plan du tenseur de moments orientés selon les axes du plan, et la loi constitutive en flexion :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathrm{div}}(\underline{T}^{\mathcal{P}}) = -\Lambda_p \omega^2 w \\ \widetilde{\underline{\mathrm{div}}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}}) + \underline{T}^{\mathcal{P}} = 0 \\ \underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}} = E'_p I_p((1-\nu_p)\widetilde{\underline{\underline{e}}}(\widetilde{\underline{\nabla}} w) + \nu_p \widetilde{\Delta} w \underline{\underline{I}}_P) \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans les équations précédentes, le "tilde" matérialise les opérateurs différentiels réduits aux variations dans le plan. Ainsi,

$$\widetilde{\underline{\nabla}} = \partial_{x_1}\underline{a_1} + \partial_{x_2}\underline{a_2}; \quad \widetilde{\underline{\underline{e}}}(\underline{u}) = \frac{\widetilde{\nabla}(\underline{u}) +^t \widetilde{\nabla}(\underline{u})}{2}; \quad \widetilde{\mathrm{div}}(\underline{T}) = \partial_{x_1} T_1 + \partial_{x_2} T_2$$

3.2.4 Modèle asymptotique de la plaque raidie

Au regard des éléments ci-dessus, il est possible d'utiliser la méthode d'homogénéisation asymptotique pour déterminer le modèle de plaque raidie. L'hypothèse de séparation d'échelles signifie que la longueur d'onde portée par la poutre de taille caractéristique L (l'élément forçant) est beaucoup plus grande que la dimension D de la période Ω, conformément au petit paramètre $D/L = \varepsilon \ll 1$.

Il s'ensuit que le gradient du déplacement le long de x_1 et x_2 sont significativement différents, soit $\partial_{x_1} U = O(U/L) \ll \partial_{x_2} w = O(w/D)$ tel que, puisque $w = O(U)$:

$$\partial_{x_1} w = O(\varepsilon \partial_{x_2} w) \ll \partial_{x_2} w \tag{3.12}$$

De plus, en raison de la séparation d'échelles et de la périodicité de la cellule Ω, les variables physiques prennent les même valeurs de chaque côté de Ω, soit sur Γ_b^- et Γ_p^+. D'autre part, par construction, les modèles de poutre (3.9) et de plaque (3.11) expriment déjà l'équilibre dynamique de chacun des constituants $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$, si bien que pour satisfaire l'équilibre dynamique de la cellule complète Ω, il reste à formuler l'équilibre à la jonction Γ qui spécifiera la nature du couplage poutre/plaque. Par suite, le champ dynamique dans la plaque doit être déterminé explicitement. On définit pour cela deux modes de fonctionnement : un premier régime dans lequel le déplacement transverse de la poutre est non nul et induit la dynamique locale de la

plaque, et un second régime dans lequel le déplacement transverse de la poutre est nul, et seule la plaque encastrée sur deux côtés opposés est en mouvement.

Remarque : La procédure standard d'homogénéisation consisterait à introduire les variables spatiales adéquates pour la plaque raidie ($x_1, y_2' = \frac{D}{L}x_2 = \varepsilon^{-1}x_2$), et à changer le gradient dans le plan $\underline{\widetilde{\nabla}}\varphi(x_1, x_2)$ par $\underline{\widetilde{\nabla}}\varphi(x_1, y_2') = (\partial_{x_1}\underline{a}_1 + \varepsilon^{-1}\partial_{y_2'}\underline{a}_2)\varphi(x_1, y_2')$, et (iii) chercher les variables physiques sous forme de développements en puissance de ε, par exemple : $\varphi(x_1, y_2') = \varphi^{(0)}(x_1, y_2') + \varepsilon\varphi^{(1)}(x_1, y_2') + \dots$, et finalement remplacer ces expressions dans le modèle de plaque (3.11). Cependant, les termes à l'ordre dominant étant les seuls nécessaires, il est possible de proposer une résolution directe.

Régime dynamique de la plaque avec poutres actives

Il s'agit maintenant de préciser les conditions limites à l'ordre dominant sur les extrémités de la plaque Γ_p. Par continuité, les déplacements de la poutre et de la plaque sont identiques à leur interface, soit $w_{\Gamma_p^-} = U_{\Gamma_b^+}$, et , par périodicité, $w_{\Gamma_p^+} = U_{\Gamma_b^-}$. Mais puisque la section de poutre est soumise à un mouvement de corps rigide à l'ordre dominant, il vient $U_{\Gamma_b^-} = U_{\Gamma_b^+}$. Ceci implique une condition de Dirichlet sur Γ_p qui est $W(x_1, x_{2|\Gamma_p}) = U(x_1)$, où $W(x_1, x_2)$ représente le terme dominant de l'expression de w, soit $w^{(0)}(x_1, x_2)$. De plus, en rappelant que la section de poutre ne subit pas de déformation dans son plan à l'ordre dominant, le mouvement de la plaque encastrée à l'interface Γ_p est normal à $\underline{a}_2$. Alors, la condition d'encastrement s'applique aux extrémités de la plaque, soit $\partial_{x_2}W(x_1, x_{2|\Gamma_p}) = 0$.

La condition (3.12) $\partial_{x_1}W \ll \partial_{x_2}W$ établit que dans la plaque, les dérivées par rapport à x_1 sont négligeables comparées aux dérivées par rapport à x_2. L'équation de plaque bidimensionnel (3.11) se réduit donc à une équation 1D impliquant x_2 seulement. Finalement, l'ensemble d'équations élasto-dynamiques décrivant la plaque $\mathcal{P}$ en condition de séparation d'échelle et de périodicité se simplifie en :

$$\text{dans } \mathcal{P} \quad \begin{cases} \partial_{x_2}T^{\mathcal{P}} = -\Lambda_p\omega^2 W \\ \partial_{x_2}M^{\mathcal{P}} + T^{\mathcal{P}} = 0 \\ M^{\mathcal{P}} = E_p'I_p\partial_{x_2}^2 W \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_p \quad \begin{cases} \forall x_1 \\ W(x_1, x_{2|\Gamma}) = U(x_1) \\ \partial_{x_2}W(x_1, x_{2|\Gamma}) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Il en résulte que *i)* x_1 joue le rôle d'un paramètre apparaissant seulement dans la condition limite, et *ii)* les équations (3.13) forment un système linéaire où le déplacement $U(x_1)$ est le terme forçant. Donc, $W(x_1, x_2)$ prend la forme

$$W(x_1, x_2) = U(x_1)\phi_\omega(x_2) \tag{3.14}$$

où $\phi_\omega(x_2)$ est la solution fréquentielle de l'équation classique harmonique de flexion dans laquelle apparaissent les nombres d'onde de flexion δ (et le nombre d'onde de flexion adimensionnel δ^*).

$$\delta^4 = \Lambda_p\omega^2/(E_p'I_p) \quad ; \quad \delta^* = \delta D/2$$

$$\partial_{x_2}^4\phi_\omega - \delta^4\phi_\omega = 0\,; \quad \phi_\omega(x_{2|\Gamma}) = 1\,; \quad \partial_{x_2}\phi_\omega(x_{2|\Gamma}) = 0 \tag{3.15}$$

La résolution de (3.15) est directe. En cherchant ϕ_ω de la forme

$$\phi_\omega(x_2) = C_1\sin(\delta x_2) + C_2\cos(\delta x_2) + C_3\sinh(\delta x_2) + C_4\cosh(\delta x_2)$$

et en exprimant les conditions limites, la solution du système linéaire obtenu est :

$$\phi_\omega(x_2) = \frac{\cosh(\delta x_2)\sin(\delta^*) + \cos(\delta x_2)\sinh(\delta^*)}{\cosh(\delta^*)\sin(\delta^*) + \cos(\delta^*)\sinh(\delta^*)}; \quad -\frac{D}{2} < x_2 < \frac{D}{2}; \quad \delta^* = \frac{\delta D}{2} \tag{3.16}$$

L'expression de $\phi_\omega(x_2)$ met en évidence le caractère résonant de la réponse de la plaque. En effet, les amplitudes deviennent infinies lorsque le dénominateur s'annule. Cela se produit à des fréquences spécifiques associées aux modes impairs, qui sont symétriques, de la plaque bi-encastrée. Étant donné la symétrie des conditions limites de forçage, les modes asymétriques ne participent pas au mouvement forcé ϕ_ω. Il est utile pour la suite d'introduire $\langle\phi_\omega\rangle$ la valeur moyenne de ϕ_ω

$$\langle\phi_\omega\rangle = \frac{1}{D}\int_{-D/2}^{D/2} \phi_\omega(x_2)\mathrm{d}x_2 = \frac{2}{\delta^*}\frac{1}{\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*)} \tag{3.17}$$

Remarque : Les fréquences propres $\{\omega_I\}$ associées aux modes propres $\{\Psi^I\}$ de la plaque encastrée en flexion cylindrique sont données par une série de racines $\{\delta_I^*\}$, $\{I = 1, 2, 3, \ldots\}$ issue de l'équation transcendante

$$F(2\delta^*) = 0 \quad \text{où} \quad F(2\delta^*) = \cosh(2\delta^*)\cos(2\delta^*) - 1$$

Puisque cette équation s'exprime aussi comme

$$F(2\delta^*) = (\cosh(\delta^*)\sin(\delta^*) + \cos(\delta^*)\sinh(\delta^*)) \times (\cosh(\delta^*)\sin(\delta^*) - \cos(\delta^*)\sinh(\delta^*))\,,$$

elle présente les mêmes racines que $f_+(\delta^*)f_-(\delta^*) = 0$ avec $f_\pm(\delta^*) = \tan(\delta^*) \pm \tanh(\delta^*)$. En conséquences, les racines $\{\delta_I^*\}$ sont séparées en deux familles dont l'une $\{\delta_{2n+1}^*\}$ racines de $f_+(\delta^*) = 0$ associées aux $n^{\text{-ième}}$ mode impair ($I = 2n-1$) symétrique $\Psi_s^n = \Psi^{2n-1}$, et l'autre $\{\delta_{2n}^*\}$ racines de $f_-(\delta^*) = 0$ associées aux $n^{\text{-ième}}$ mode pair ($I = 2n$) asymétrique $\Psi_t^n = \Psi^{2n}$. Pour $I > 1$ les $\{\delta_I^*\}$ sont estimées avec une bonne précision par $\{\delta_I^*\} \approx \frac{\pi}{2}(I + \frac{1}{2})$. Les solutions de l'équation fréquentielle et leur séparation en parties paire et impaire sont illustrées sur la figure 3.2. Il en résulte que les fréquences propres $\{\omega_{sn}\}$ des modes symétriques prennent des valeurs proches de

$$\omega_{sn} \approx \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}} \qquad , \qquad n = (1), 2, 3, \ldots$$

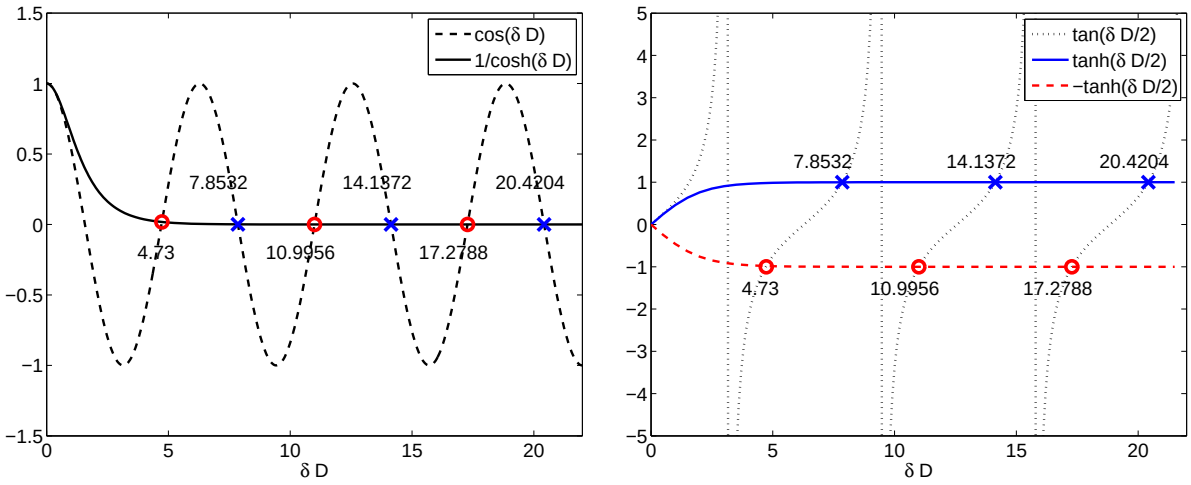
tandis que les fréquences propres $\{\omega_{tn}\}$ des modes asymétriques prennent des valeurs proches de

$$\omega_{tn} \approx \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}} \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les pulsations propres successives sont déterminées par $\omega_n = (\delta_n D)^2\sqrt{E_p' I_p/\Lambda_p D^4}$, avec pour $\delta D >> 1$, $\delta_n \approx \frac{\pi}{2}(2k+1)$, comme justifié ci-après :

$\delta_n D$ (Newton-Raphson)	4,7300	7,8532	10,9956	14,1372	17,2788	20,4204
$\delta_n D \approx \pi/2 + k\pi$	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372	17.2788	20.4204

Remarque : pour les modes symétriques, l'équation de la poutre de longueur $L/2$ est encastrée-supportée. Pour les modes antisymétriques, c'est celle de la poutre encastrée-glissière.



(a) (b)

FIGURE 3.2 – Représentation graphique des solutions des équations, (a) $\cos(\delta D)\cosh(\delta D)-1=0$ (a), et (b) $\tan(\delta D/2)\pm\tanh(\delta D/2)=0$ et intersections trouvées par la méthode de Newton-Raphson

Couplage poutre/plaque

Cette partie présente le calcul des termes de couplage impliqués dans l'équation d'équilibre de la poutre (3.9). Les modèles distincts de poutre et de plaque permettent d'identifier les contraintes pilotantes dans la poutre à associer aux contraintes dans la plaque. D'après les modèles asymptotiques, l'état de contrainte dans la poutre $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}} = \epsilon_b\sigma_N^{(1)} + \epsilon_b^2\underline{\underline{\sigma}}_T^{(2)} + \epsilon_b^3(\sigma_N^{(3)}, \underline{\underline{\sigma}}_S^{(3)})$ s'écrit sous forme explicite :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}} = \left(\epsilon_b\sigma_N^{(1)} + \epsilon_b^2 \left[\begin{array}{c|cc} & \boxed{\sigma_{T12}^{(2)}} & \sigma_{T13}^{(2)} \\ \hline \sigma_{T21}^{(2)} & & \\ \sigma_{T31}^{(2)} & & \end{array}\right] + \epsilon_b^3 \left[\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & \sigma_{S22}^{(3)} & \sigma_{S32}^{(3)} \\ & \boxed{\sigma_{S32}^{(3)}} & \sigma_{S33}^{(3)} \end{array}\right] \right)$$

De la même manière, l'état de contrainte dans la plaque $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}} = \epsilon_p\underline{\underline{\sigma}}_p^{(1)} + \epsilon_p^2\underline{\underline{\sigma}}_t^{(2)} + \epsilon_p^3(\underline{\underline{\sigma}}_p^{(3)}, \sigma_n^{(3)})$ s'écrit sous forme explicite :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}} = \left(\epsilon_p \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_{p11}^{(1)} & \boxed{\sigma_{p12}^{(1)}} & \\ \sigma_{p21}^{(1)} & \sigma_{p22}^{(1)} & \\ \hline & & \end{array}\right] + \epsilon_p^2 \left[\begin{array}{cc|c} & & \sigma_{t13}^{(2)} \\ & & \sigma_{t23}^{(2)} \\ \hline \sigma_{t31}^{(2)} & \boxed{\sigma_{t32}^{(2)}} & \end{array}\right] + \epsilon_p^3\sigma_n^{(3)} \right)$$

L'étape de couplage consiste *i)* à écrire la continuité des contraintes en termes du même ordre de grandeur, et *ii)* à déduire les efforts appliqués à la poutre à partir du champ connu dans la plaque.

Les composantes encadrées doivent être continues aux interfaces des deux éléments. La continuité des contraintes se traduit par $\epsilon_b^2\sigma_{T12}^{(2)} \Leftrightarrow \epsilon_p\sigma_{p12}^{(1)}$ d'une part, et $\epsilon_b^3\sigma_{S32}^{(3)} \Leftrightarrow \epsilon_p^2\sigma_{t32}^{(2)}$ d'autre part.

Or, cet équilibrage terme à terme ne peut se faire que si les contraintes sont du même ordre.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}} = E_b \left[\begin{array}{c|c|c} \epsilon_b & \boxed{\epsilon_b^2} & \epsilon_b^2 \\ \hline \epsilon_b^2 & \epsilon_b^3 & \epsilon_b^3 \\ \epsilon_b^2 & \boxed{\epsilon_b^3} & \epsilon_b^3 \end{array}\right] \qquad \underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}} = E_p \left[\begin{array}{cc|c} \epsilon_p & \boxed{\epsilon_p} & \epsilon_p^2 \\ \epsilon_p & \epsilon_p & \epsilon_p^2 \\ \hline \epsilon_p^2 & \boxed{\epsilon_p^2} & \epsilon_p^3 \end{array}\right] \tag{3.18}$$

Il faut ici remarquer que la continuité des contraintes non nulles intégrées $\int_{\Gamma_b} \sigma_{S23} = \int_{\Gamma_b^-} \epsilon_b^3 \sigma_{S23}^{(3)}$ et $\int_{\Gamma_p^+} \sigma_{t23} = \int_{\Gamma_p} \epsilon_p^2 \sigma_{t32}^{(2)}$ requiert que les termes soient du même ordre. C'est effectivement le cas dans l'équation (3.3), qui est alors satisfaite. Ainsi, sachant que les valeurs de référence qui normalisent les contraintes sont $E_b U/L$ dans la poutre et $E_p U/D$ dans la plaque, alors,

$$\int_{\Gamma_b} \epsilon_b^3 \sigma_{S23}^{(3)} = O\left(l \left(\frac{l}{L}\right)^3 E_b \frac{U}{L}\right) \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_p} \epsilon_p^2 \sigma_{t32}^{(2)} = O\left(d \left(\frac{d}{D}\right)^2 E_p \frac{U}{D}\right)$$

de sorte qu'en égalisant les ordres des deux termes, l'équation (3.3) est retrouvée. De plus, à partir de l'équation de plaque (3.13)

$$T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} - T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} = -\int_{-D/2}^{D/2} \partial_{x_2} T^{\mathcal{P}} \mathrm{d}x_2 = \Lambda_p \omega^2 \int_{-D/2}^{D/2} W \mathrm{d}x_2 = \Lambda_p D \langle \phi_\omega \rangle \omega^2 U(x_1) \tag{3.19}$$

Le champ de déplacement dans la plaque permet de déduire l'état de contraintes, et donc la force et le moment sur le bord de la plaque. La contrainte σ_{p12} dans le plan est :

$$\sigma_{p12} = -E'_p y_3 (1-\nu_p) \partial^2_{x_1 x_2} W$$

et en raison des conditions d'encastrement $\partial_{x_2} W = 0$ sur Γ_p, la contrainte de cisaillement et le couple autour de $\underline{a}_2$ sont nuls aux bords de la plaque Γ_p^+ et Γ_p^-, soit $\sigma_{p12|\Gamma_p^\pm} = 0$ donc $\int_{\Gamma_p^\pm} y_3 \sigma_{p12} = 0$. La force de cisaillement transverse aux extrémités de la plaque est :

$$T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^\pm} = \int_{\Gamma_p^\pm} \sigma_{t23} = E'_p I_p (\partial^3_{x_2} W)_{|\Gamma_p^\pm} = E'_p I_p U(x_1) (\partial^3_{x_2} \phi_\omega)_{|\Gamma_p^\pm}$$

En exprimant la continuité des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}}.\underline{a}_2 = \underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}}.\underline{a}_2$ à l'interface (c'est à dire l'équilibre de l'interface) et en considérant la périodicité, il vient :

$$\sigma_{T12|\Gamma_b^\mp} = \sigma_{p12|\Gamma_p^\pm} = 0 \qquad ; \qquad \sigma_{S23|\Gamma_b^\mp} = \sigma_{t23|\Gamma_p^\pm}$$

Alors, le moment et la force exercés par la plaque sur la poutre (bilan (3.9)) s'écrivent :

$$\begin{gathered} \int_{\Gamma_b^+} y_3 \sigma_{T12} - \int_{\Gamma_b^-} y_3 \sigma_{T12} = \int_{\Gamma_p^-} y_3 \sigma_{p12} - \int_{\Gamma_p^+} y_3 \sigma_{p12} = M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} - M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} = 0 \\ \int_{\Gamma_b^+} \sigma_{S23} - \int_{\Gamma_b^-} \sigma_{S23} = \int_{\Gamma_p^-} \sigma_{t23} - \int_{\Gamma_p^+} \sigma_{t23} = T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} - T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} \end{gathered} \tag{3.20}$$

Les résultats ci-dessus (3.20)-(3.19) montrent que la plaque n'introduit pas de moment autour de $\underline{a}_2$ sur la poutre, mais exerce une force sous forme d'inertie dépendante de la fréquence provenant de $\langle \phi_\omega \rangle$. Cette expression est injectée dans (3.9) et donne le modèle effectif de la plaque raidie, où $U(x_1)$ est l'unique descripteur cinématique.

Régime dynamique de la plaque avec poutres passives

L'analyse ci-avant supposait implicitement que les poutres bougent et déterminent la dynamique de toute la plaque raidie. Ce mécanisme disparaît lorsque le forçage est nul, c'est à dire quand les poutres sont passives, soit $U(x_1) = u^{(0)} = 0$. Un autre mode de propagation avec poutres passives est cependant possible. Celui-ci est simplement défini par le modèle de plaque (3.11) complété par les conditions limites d'encastrement sur Γ_p, où le déplacement transverse $W(x_1, x_2) = w^{(0)}(x_1, x_2)$ est la seule variable pilotante. Pour garantir que la poutre reste immobile, les forces exercées par les plaques de part et d'autre de la section de la poutre doivent se compenser. Cela implique que le mouvement de deux plaques adjacentes est de signe opposé. Ainsi, la cinématique de toute la plaque raidie est déterminée.

3.3 Synthèse du comportement en flexion

L'analyse du mouvement de flexion de la plaque raidie se conclut donc par une formulation hybride qui met en évidence deux types de comportements de flexion. Le premier est associé aux poutres actives qui font vibrer la plaque, alors que le second est associé uniquement au mouvement des plaques.

— soit les poutres sont actives $U(x_1) \neq 0$, ce qui donne les modes globaux associés à l'inertie de flexion de la poutre et une inertie effective qui inclut la masse statique de la poutre et la masse effective de la plaque qui dépend de la fréquence. Cette dernière représente la contribution de la plaque au régime local dynamique. Cette situation décrit le régime co-dynamique et l'équation correspondante pour le déplacement transverse $U(x_1)$ de la poutre est :

$$E_b I_b \partial_{x_1}^4 U(x_1) = \omega^2(\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle)U(x_1) \tag{3.21}$$

— soit les poutres sont passives $U(x_1) = 0$, ce qui donne les modes guidés pilotés par l'inertie de flexion et la masse surfacique de la plaque. L'équation correspondante pour le déplacement de la plaque $w(x_1, x_2)$ est :

$$E'_p I_p \widetilde{\Delta}^2 w = \Lambda_p \omega^2 w \quad \text{avec} \quad w(x_1, x_{2|\Gamma_p}) = 0/\Gamma_p; \quad \partial_{x_2} w(x_1, x_{2|\Gamma_p}) = 0/\Gamma_p \tag{3.22}$$

3.4 Caractéristiques de dispersion en flexion

3.4.1 Ondes de flexion avec poutres actives

Cette partie met en évidence la forte dépendance fréquentielle de la masse apparente adimensionnelle $\langle\phi_\omega\rangle$ de $\mathcal{P}$ qui intervient dans la masse effective de la plaque raidie $\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle$. Selon l'expression (3.17) et connaissant $\omega = \delta^2\sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}}$ et $\delta^* = \delta D/2$, il vient :

— $\langle\phi_\omega\rangle \to 1$ quand $\delta D \to 0$ soit lorsque $\omega \to 0$, ce qui est cohérent avec le fait qu'en statique, la masse apparente de $\mathcal{P}$ est sa masse réelle.

— $\langle\phi_\omega\rangle \to \pm\infty$ quand $\tan(\delta D/2) + \tanh(\delta D/2) = 0$ qui correspond aux fréquences $\{\omega_{sn}\}$ des modes symétriques. Quand $\omega \to \omega_{sn}^-$, la masse apparente de $\mathcal{P}$ tend vers l'infini positif, et vers l'infini négatif pour $\omega \to \omega_{sn}^+$

— $\langle\phi_\omega\rangle = 0$ quand $\delta^* = \pi(2n+1)$, soit $\omega_{0n} = (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}}$. Alors, dans l'intervalle $[\omega_{sn}, \omega_{0n}]$ la masse apparente de $\mathcal{P}$ est négative.

En pratique, les singularités de $\langle\phi_\omega\rangle$ sont atténuées par des effets de dissipation inévitables. Ils peuvent être intégrés via un amortissement structurel η introduit comme une partie imaginaire corrective du module élastique qui devient $(1+i\eta)E_p$. Les quantités deviennent alors complexes à cause de l'amortissement, et le lissage et d'autant plus grand que η est grand.

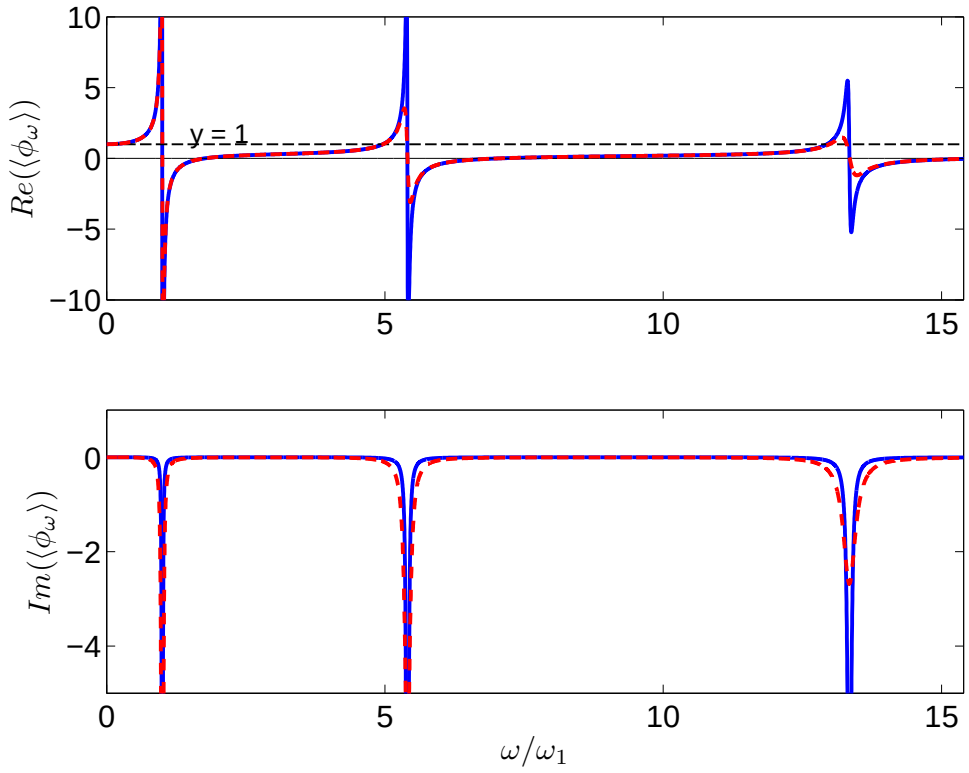


FIGURE 3.3 – Parties réelle et imaginaire de la masse apparente adimensionnelle $\langle\phi_\omega\rangle$ de la plaque en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_{s1}, avec amortissement matériel $\eta = 0.5\%$ (−) , et $\eta = 2\%$ (−−).

Les propriétés de $\langle\phi_\omega\rangle$ sont illustrées sur la figure 3.3 qui représente les variations de masse apparente en parties réelle et imaginaire en fonction de la pulsation normalisée (par rapport à la fondamentale). Le tracé se limite aux trois premiers modes symétriques. Hormis au voisinage des modes propres, $\langle\phi_\omega\rangle$ est globalement bornée entre 0 et 1 et la masse modale diminue lorsque la fréquence ω augmente. Entre deux fréquences propres, la plaque paraît alors plus légère qu'elle ne l'est en réalité.

En considérant une onde harmonique de la forme $U(x_1) = \exp(ik_\omega x_1)$ se propageant suivant x_1, l'équation de dispersion des ondes décrites par (3.21) est déterminée par le nombre d'onde de flexion k_ω qui s'écrit :

$$k_\omega^4 = \omega^2 \frac{\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle}{E_b I_b} \tag{3.23}$$

Du fait de la résonance interne de la plaque $\mathcal{P}$ contenue dans le terme de masse $\langle\phi_\omega\rangle$, la relation de dispersion diffère significativement du cas de flexion classique où $k \sim \sqrt{\omega}$. Dans la plaque raidie, les changements surviennent au voisinage des modes propres de $\mathcal{P}$. En l'absence

d'atténuation, le nombre d'onde de flexion deviendrait infiniment grand au voisinage de ω_{sn}^- et infiniment petit au voisinage de ω_{sn}^+, correspondant alors respectivement à des longueurs d'onde infiniment courtes et infiniment grandes. En particulier, des ondes de flexion dont la vitesse de phase décroit (comparées à celles dans la poutre $\mathcal{B}$ seule, pour lesquelles la vitesse de phase est toujours croissante) apparaissent autour ω_{sn}^-, où $\langle\phi_\omega\rangle \gg 1$, et k est réel. De plus, dans l'intervalle $[\omega_{sn}, \omega_{0n}]$ dans lequel $\langle\phi_\omega\rangle < 0$, apparaissent *i)* soit de ondes de flexion très atténuées (à caractère oscillant, similaires aux ondes thermiques) si $|\langle\phi_\omega\rangle| \gg 1$ car $\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle < 0$ donc $k^4 < 0$ et k est complexe, *ii)* soit des ondes de flexion purement propagatives lorsque $|\langle\phi_\omega\rangle| \ll 1$ car $\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle > 0$ donc $k^4 > 0$, et k est réel. Ces grandeurs sont illustrées sur la figure 3.4.

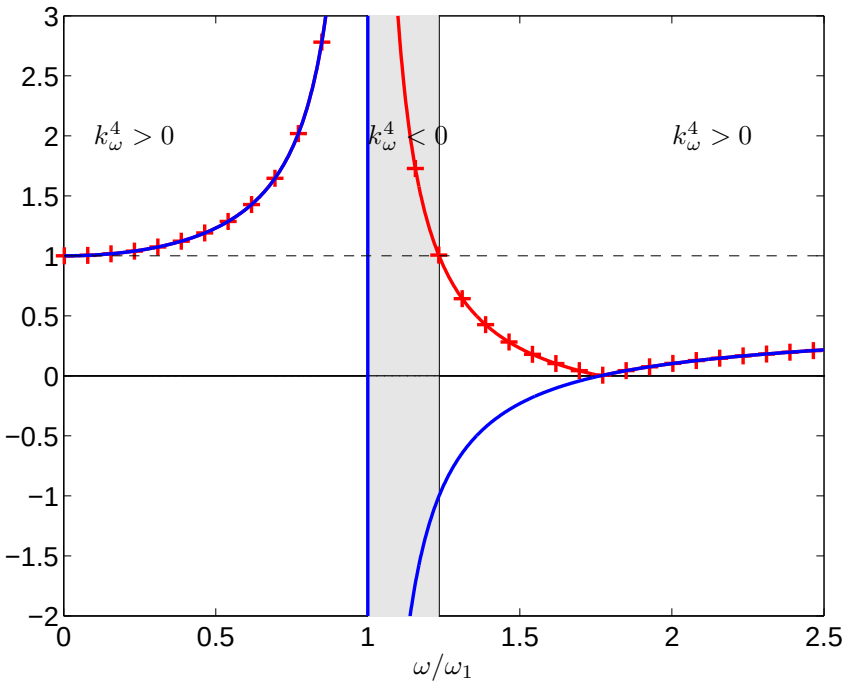


FIGURE 3.4 – Partie réelle (−) et module (− + −) de la masse apparente adimensionnelle $\langle\phi_\omega\rangle$ en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_1, zone d'atténuation (■)

La mise en évidence numérique de ces caractéristiques est détaillée dans le chapitre 5.

3.4.2 Caractéristiques de dispersion avec poutres passives

Examinons le second mécanisme, lorsque les poutres sont passives (3.22). La plaque est encastrée sur ses deux côtés opposés, mais un mouvement à grande longueur d'onde est possible suivant la longueur L. Les caractéristiques de dispersion peuvent être approchées en supposant la forme du champ dans la plaque, de la même manière qu'une approximation de Rayleigh. En cherchant une solution à variables séparées de la forme

$$w(x_1, x_2) = \exp(ik'_\omega x_1)\Psi(x_2) \qquad \text{où} \qquad \Psi(x_{2|\Gamma_p}) = 0 \quad ; \quad \partial_{x_2}\Psi(x_{2|\Gamma_p}) = 0$$

la fonction $\Psi(x_2)$ fluctue selon la largeur de la plaque D, alors que $\exp(ik'_\omega x_1)$ varie selon $L \gg D$. À l'ordre dominant, l'équation de plaque se réduit au cas 1D (identique à (3.13) sauf pour la condition limite nulle de Ψ et $\partial_{x_2}\Psi$) :

$$E'_p I_p \partial^4_{x_2}\Psi = \Lambda_p \omega^2 \Psi \qquad \Psi(x_{2|\Gamma_p}) = 0 \quad ; \quad \partial_{x_2}\Psi(x_{2|\Gamma_p}) = 0$$

Il s'agit du problème aux valeurs propres classique de la plaque encastrée sur ses deux côtés opposés. Les solutions sont les modes (symétriques et asymétriques) $\Psi^I(x_2)$ associés à la série de fréquences ω_I. De là, $w(x_1, x_2)$ apparaît comme les modes propres selon x_2 modulés par la grande longueur d'onde selon x_1. Le nombre d'onde selon x_1 peut être déterminé en remplaçant l'expression de $w(x_1, x_2)$, dans l'opérateur bi-laplacien (3.22) décrivant la plaque $\mathcal{P}$. Pour chaque mode propre Ψ^I, et après simplification du terme $\exp(ik'_\omega x_1)$:

$$E'_p I_p \left[(k'^I_\omega)^4 \Psi^I - 2(k'^I_\omega)^2 \partial^2_{x_2} \Psi^I + \partial^4_{x_2} \Psi^I\right] = \Lambda_p \omega^2 \Psi^I$$

et, puisque, $E'_p I_p \partial^4_{x_2} \Psi^I = \Lambda_p \omega_I^2 \Psi^I$:

$$E'_p I_p \left[(k'^I_\omega)^4 \Psi^I - 2(k'^I_\omega)^2 \partial^2_{x_2} \Psi^I\right] = \Lambda_p (\omega^2 - \omega_I^2) \Psi^I \tag{3.24}$$

Nous proposons deux façons d'identifier une équation de dispersion approchée des modes guidés :

— la première approche consiste à intégrer cette équation sur x_2, et en remarquant que $\int \partial^2_{x_2} \Psi^I = [\partial_{x_2} \Psi(x_2)]_{|\Gamma_p} = 0$, il vient

$$E'_p I_p (k'^I_\omega)^4 \langle \Psi^I \rangle = \Lambda_p (\omega^2 - \omega_I^2) \langle \Psi^I \rangle$$

de sorte que l'équation de dispersion approchée associée au mode Ψ^I est

$$(k'^I_\omega)^4 = \frac{\Lambda_p}{E'_p I_p} (\omega^2 - \omega_I^2) \tag{3.25}$$

— La seconde approche consiste à approcher la forme des modes propres qui sont donnés par ($0 \leq x_2 \leq D$ et $\delta^*_I = \delta(\omega_I) D/2$) :

$$\Psi^I(x_2) = \cos\left(\delta^*_I \left(\frac{2x_2}{D} - 1\right)\right) + \frac{\sin(\delta^*_I)}{\sinh(\delta^*_I)} \cosh\left(\delta^*_I \left(\frac{2x_2}{D} - 1\right)\right);\ (I = 2n = 2, 4, 6, \ldots)$$

$$\Psi^I(x_2) = \sin\left(\delta^*_I \left(\frac{2x_2}{D} - 1\right)\right) - \frac{\sin(\delta^*_I)}{\sinh(\delta^*_I)} \sinh\left(\delta^*_I \left(\frac{2x_2}{D} - 1\right)\right);\ (I = 2n{+}1 = 1, 3, 5, \ldots)$$

où les valeurs de δ^*_I sont les racines de $\tan(\delta^*_I) + (-1)^I \tanh(\delta^*_I) = 0$. Puisque les racines δ^*_I sont proches de la suite $\frac{\pi}{2}(I + \frac{1}{2})$ la déformée modale est approximée par $\Psi^I(x_2) \approx \sin(I\pi \frac{x_2}{D})$ telle que $\partial^2_{x_2} \Psi^I \approx -(\frac{I\pi}{D})^2 \Psi^I$. Ces expressions sont compatibles avec l'inversion de signe entre deux plaques adjacentes (section 3.2.4). En reportant ces expressions dans (3.24), l'équation de dispersion des ondes guidées est

$$(k'^I_\omega)^4 + 2(k'^I_\omega)^2 \left(\frac{I\pi}{D}\right)^2 - \frac{\Lambda_p}{E'_p I_p} (\omega^2 - \omega_I^2) \approx 0 \tag{3.26}$$

Les équations (3.25) ou (3.26) définissent de manières approchées les branches des modes guidés. Ceux-ci se manifestent pour les modes symétriques et asymétriques. Ces caractéristiques seront illustrées au chapitre 5. En particulier, nous verrons lors de la validation par éléments finis (section 5.1) que (3.26) fournit une meilleure estimation que (3.25). L'ensemble (numéroté par le numéro du mode propre I) d'équations (3.26) définit les branches des modes guidés. Les caractéristiques de ces ondes sont définies par la nature des racines de l'équation (3.26) qui dépend fortement de la fréquence. Le discriminant est négatif pour $\omega < \omega_{cI}$ et positif ensuite, ω_{cI} étant donné par :

$$\omega^2_{cI} = \omega_I^2 \left(1 - \frac{I^4}{(I + \frac{1}{2})^4}\right) < \omega_I^2$$

Chacune de ces ondes guidées commence donc à se propager aux fréquences de coupures définies par les fréquences propres de la plaque encastrée. Pour les fréquences inférieures à ω_{cI}, les nombres d'ondes sont complexes et correspondent à des ondes propagatives fortement atténuées. Pour des fréquences dans l'intervalle $[\omega_{cI}, \omega_I]$, les nombres d'onde sont purement imaginaires et les ondes sont évanescentes. Enfin, pour les fréquences supérieures aux fréquences propres de la plaque ω_I, il existe une racine réelle positive et l'onde se propage sans amortissement. Ces ondes guidées se répartissent alternativement entre modes symétrique et asymétrique. Leurs caractéristiques sont illustrées en section 5.1.

3.4.3 Limite de validité du modèle hybride en flexion

Il est utile de rappeler les conditions de validité du modèle. Comme pour les modèles respectifs de poutre et de plaque, la fréquence doit être suffisamment basse pour remplir la condition d'élancement et de planéité en régime dynamique. Cette exigence est traduite par des restrictions sur les longueurs d'onde réduites $\mathcal{L}_{\mathcal{B}_\omega} > l$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_\omega} > d$ qui donnent :

$$\omega^2 < \text{Min}\left\{ \frac{E_b I_b}{\Lambda_b l^4} , \frac{E'_p I_p}{\Lambda_p d^4} \right\} \tag{3.27}$$

Dans le cas de la plaque raidie, la séparation d'échelle doit être satisfaite i.e. $k_\omega D > 1$, qui correspond à un intervalle de fréquence tel que

$$\omega^2 < \frac{E_b I_b}{(\Lambda_b + \Lambda_p D \langle \phi_\omega \rangle) D^4} \tag{3.28}$$

Le modèle (3.21) avec poutres actives s'applique seulement si les conditions (3.27)-(3.28) sont satisfaites. Cependant, le modèle (3.22) avec poutres passives et ondes guidées dans la plaque s'applique si la seule condition (3.27) est satisfaite.

3.5 Comportement en torsion

L'analyse dimensionnelle et la procédure asymptotique peuvent être reproduites pour étudier le comportement dynamique en torsion en situation de résonance interne. La figure 3.5 montre la cinématique de torsion de la plaque raidie : la poutre $\mathcal{B}$ en torsion impose sa rotation aux plaques, chaque plaque $\mathcal{P}$ est alors sollicitée en flexion et exerce une force de cisaillement et un couple sur la poutre. Les conditions à remplir pour atteindre cette situation sont identifiées en exprimant la condition de régime co-dynamique et de couplage asymétrique.

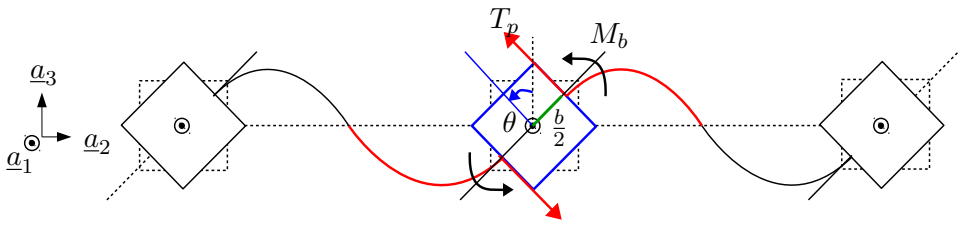


FIGURE 3.5 – Cinématique de torsion avec couple appliqué par la plaque et moment introduit dans la poutre

3.5.1 Condition co-dynamique et couplage asymétrique en torsion

L'équation dynamique de la poutre $\mathcal{B}$ en torsion (non liée à la plaque) suivant l'axe $\underline{a}_1$ s'écrit (voir figure 3.5) :

$$G_b\mathcal{I}_b\partial^2_{x_1}\theta = -\rho_b J_b\omega^2\theta$$

avec θ l'angle de rotation, $G_b\mathcal{I}_b$ la rigidité de torsion et $\rho_b J_b$ le moment polaire, avec $G_b = E_b/2(1+\nu_b)$, $\mathcal{I}_b = O(l^4)$, $J_b = O(l^4)$. La longueur d'onde réduite en torsion $\mathcal{L}'_\omega$ est :

$$\mathcal{L}'^2_\omega = O\left(\frac{G_b\mathcal{I}_b}{\rho_b J_b\omega^2}\right)$$

Au mode fondamental de torsion ω'_b de la poutre de longueur L', $\mathcal{L}'_\omega = L'$ telle que :

$$\omega'^2_b = O\left(\frac{G_b\mathcal{I}_b}{\rho_b J_b L'^2}\right)$$

Concernant la plaque $\mathcal{P}$, de la même manière qu'en flexion, sa fréquence de résonance en torsion est d'ordre : $\omega_p^2 = O\left(\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p D^4}\right)$. En considérant la situation de co-résonance où les fréquences fondamentales de poutre $\mathcal{B}$ et de plaque $\mathcal{P}$ sont du même ordre, $\omega'_b = \omega_p$,

$$O\left(\frac{G_b\mathcal{I}_b}{\rho_b J_b L^2}\right) = O\left(\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p D^4}\right)$$

la condition de co-dynamique est alors :

$$\frac{G_b\mathcal{I}_b}{\rho_b J_b L'^2} = O\left(\frac{E'_p d^2}{\rho_p D^4}\right) \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{G_b\rho_p}{E'_p\rho_b} = O\left(\frac{d^2L'^2}{D^4}\right) = O\left(\frac{\epsilon_p^2}{\varepsilon^2}\right) \tag{3.29}$$

Il faut aussi établir la condition de couplage asymétrique précisant que l'action exercée par la plaque sur la poutre est perçue comme un chargement externe. Alors, en considérant l'équilibre en torsion suivant a_1 (le moment de torsion est noté $\mathcal{M}_b$ dans $\mathcal{B}$), on a

$$\partial_{x_1}\mathcal{M}_b = O(M_p) \qquad \text{i.e.} \quad O\left(\frac{\mathcal{M}_b}{L}\right) = O(M_p)$$

avec

$$\mathcal{M}_b = G_b\mathcal{I}_b\partial_{x_1}\theta = O\left(G_b\mathcal{I}_b\frac{\theta}{L}\right) = O\left(G_b l^4\frac{\theta}{L'}\right), \text{ et } \quad M_p = O\left(E'_p I_p\partial^2_{x_2}w\right) = O\left(E'_p\frac{d^3}{12}\frac{w}{D^2}\right)$$

De plus, les variables cinématiques de torsion et flexion sont reliées par $\theta = O(w/D)$. On a alors

$$\frac{G_b l^4}{DL'^2} = O\left(\frac{E'_p d^3}{D^2}\right) \qquad \text{soit} \qquad O\left(G_b\epsilon_b^4\right) = \varepsilon^2 O\left(E'_p\epsilon_p^3\right) \tag{3.30}$$

Si la plaque raidie est constituée de deux matériaux distincts pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ avec $\epsilon_b = l/L = d/D = \epsilon_p = \epsilon$, (et $\varepsilon = D/L = d/l$) les conditions (3.29) et (3.30) sont satisfaites lorsque

$$\frac{E'_p\rho_b}{G_b\rho_p} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{\epsilon^2}\right) \qquad ; \qquad \frac{E'_p}{G_b} = O\left(\frac{\epsilon}{\varepsilon^2}\right) \tag{3.31}$$

Si la plaque raidie est homogène avec $E_p = E_b$, $\rho_p = \rho_b$, (3.29) et (3.30) imposent sur

$$\frac{d}{D} = O\left(\frac{D}{L}\right) = O\left(\frac{l^{4/3}}{L^{4/3}}\right) \tag{3.32}$$

Les conditions de résonance interne en torsion (3.29) et (3.30) diffèrent de celles en flexion (3.1) et (3.3). Ceci est dû au fait que la rigidité de flexion est plus faible (d'un facteur ϵ_b^2) que la rigidité de torsion. De ce fait, pour une poutre de longueur donnée, les fréquences fondamentales en flexion et torsion diffèrent de ϵ_b. Néanmoins, dans le cas de dimensions infinies (ou de longueurs suffisamment grandes), les résonances internes en flexion et en torsion peuvent apparaître, mais seront associées à des longueurs d'onde très différentes dans la poutre.

3.5.2 Comportement en torsion de la plaque raidie

De manière similaire à la flexion, la mise à l'échelle est faite en introduisant les relations (3.29) et (3.30). Les développements sont très similaires. Seuls les points clés sont présentés ici. D'abord, le modèle asymptotique de poutre $\mathcal{B}$ chargée en torsion s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_{x_1}\mathcal{M}^{\mathcal{B}} + \displaystyle\int_{\Gamma_b} y_2\sigma_{S32}.n_2 - \int_{\Gamma_b} y_3\sigma_{S22}.n_2 = -\rho_b J_b\omega^2\theta(x_1) \\ \mathcal{M}^{\mathcal{B}} = G_b\mathcal{I}_b\partial_{x_1}\theta(x_1) \end{cases} \tag{3.33}$$

où les deux intégrales de (3.33) représentent l'action de la plaque sur la poutre, et n_2 est la composante de la normale sortante à la section de la poutre et prend les valeurs ± 1 sur $\Gamma_b^{\pm}$.

Par ailleurs, la plaque $\mathcal{P}$ en flexion est décrite par le bilan (3.11). En condition de séparation d'échelle (3.12), la description se réduit à la formulation unidimensionnelle (3.13) sauf pour les conditions limites. Ces dernières expriment que *i)* la section de la poutre subit, à l'ordre dominant, un mouvement de corps rigide tel que Γ_b^- et Γ_b^+ sont entraînés par la même rotation $\theta(x_1)$, et que *ii)* puisque $l \ll D$, le déplacement vertical de l'interface plaque/poutre est $O(\theta l)$, ce qui est négligeable par rapport au déplacement de la plaque $W = O(\theta D)$. Le problème de plaque s'écrit alors :

$$\text{dans } \mathcal{P} \quad \begin{cases} \partial_{x_2}T^{\mathcal{P}} = -\Lambda_p\omega^2 W \\ \partial_{x_2}M^{\mathcal{P}} - T^{\mathcal{P}} = 0 \\ M^{\mathcal{P}} = -E_p'I_p\partial_{x_2}^2 W \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_p \quad \begin{cases} \forall x_1 \\ W(x_1, x_{2|\Gamma}) = 0 \\ \partial_{x_2}W(x_1, x_{2|\Gamma}) = \theta(x_1) \end{cases} \tag{3.34}$$

La solution de ce problème linéaire dans lequel la rotation $\theta(x_1)$ est le terme forçant prend la forme $W(x_1, x_2) = D\theta(x_1)\psi(x_2)$ où $\psi_\omega(x_2)$ est la solution de

$$\partial_{x_2}^4\psi_\omega + \delta^4\psi_\omega = 0\,; \quad \psi_\omega(x_{2|\Gamma_p}) = 0\,; \quad \partial_{x_2}\psi_\omega(x_{2|\Gamma_p}) = 1/D$$

La résolution classique donne (pour rappel $\delta^4 = \Lambda_p\omega^2/(E_p'I_p)$ et $\delta^* = \delta D/2$)

$$\psi_\omega(x_2) = \frac{\sinh(\delta x_2)\sin(\delta^*) - \sin(\delta x_2)\sinh(\delta^*)}{2\delta^*(\cosh(\delta^*)\sin(\delta^*) - \cos(\delta^*)\sinh(\delta^*))} \quad ; \quad -D/2 < x_2 < D/2 \tag{3.35}$$

Des amplitudes infinies apparaissent lorsque le dénominateur de $\psi_\omega(x_2)$ s'annule. Cela se produit aux fréquences propres des modes pairs, qui sont asymétriques (remarquons que $\langle\psi_\omega\rangle = 0$), de la plaque encastrée. Conformément aux conditions limites antisymétriques, les modes symétriques de la plaque encastrée ne participent pas au mouvement forcé ψ_ω. Il est utile pour la suite d'introduire les paramètres J_ω^* et C_ω^* définis par :

$$J_\omega^* = \langle\frac{x_2}{D}\psi_\omega\rangle = \frac{1}{D}\int_{-D/2}^{D/2}\frac{x_2}{D}\psi_\omega(x_2)\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{(2\delta^*)^2}\frac{\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*) - 2/\delta^*}{\coth(\delta^*) - \cot(\delta^*)} \tag{3.36}$$

$$C_\omega^* = D^3\partial_{x_2}^3\psi_{\omega|\frac{D}{2}} = (2\delta^*)^2\ \frac{\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*)}{\coth(\delta^*) - \cot(\delta^*)} \tag{3.37}$$

Le couplage poutre/plaque est établi à partir de la continuité des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{B}}.\underline{a}_2 = \underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{P}}.\underline{a}_2$ et de la périodicité pour donner $\sigma_{S22|\Gamma_b^{\mp}} = \sigma_{p22|\Gamma_p^{\pm}}$ et $\sigma_{S23|\Gamma_b^{\mp}} = \sigma_{t23|\Gamma_p^{\pm}}$. Ainsi, l'action de la plaque sur la poutre définie par (3.33) se transforme en

$$\int_{\Gamma_b} y_2 \sigma_{S32}.n_2 = \int_{\Gamma_b^+} \frac{b}{2}\sigma_{S23} - \int_{\Gamma_b^-} -\frac{b}{2}\sigma_{S23} = \frac{b}{2}\left(\int_{\Gamma_p^-} \sigma_{t23} + \int_{\Gamma_p^+} \sigma_{t23}\right) = \frac{b}{2}\left(T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} + T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+}\right) \quad (3.38)$$

$$-\int_{\Gamma_b} y_3 \sigma_{S22}.n_2 = -\int_{\Gamma_b^+} y_3\sigma_{S22} + \int_{\Gamma_b^-} y_3\sigma_{S22} = -\int_{\Gamma_p^-} y_3\sigma_{p22} + \int_{\Gamma_p^+} y_3\sigma_{p22} = -M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} + M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} \quad (3.39)$$

Ces équations montrent que le moment effectif agissant sur la poutre comprend le moment produit par la somme des efforts tranchants de part et d'autre de la plaque, et le moment différentiel entre chaque côté. À partir de (3.34), il vient d'une part

$$\int_{-D/2}^{D/2} x_2 \partial_{x_2} T^{\mathcal{P}} \mathrm{d}x_2 = -\Lambda_p \omega^2 \int_{-D/2}^{D/2} x_2 W \mathrm{d}x_2 = -\Lambda_p D^3 \langle \frac{x_2}{D}\psi_\omega \rangle \omega^2 \theta(x_1) \quad (3.40)$$

et d'autre part, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_{-D/2}^{D/2} x_2 \partial_{x_2} T^{\mathcal{P}} \mathrm{d}x_2 &= \int_{-D/2}^{D/2} \partial_{x_2}(x_2 T^{\mathcal{P}}) \mathrm{d}x_2 - \int_{-D/2}^{D/2} T^{\mathcal{P}} \mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{D}{2}(T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} + T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-}) - \int_{-D/2}^{D/2} \partial_{x_2} M^{\mathcal{P}} \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

Finalement, en ré-exprimant la dernière intégrale :

$$M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} - M^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} = \frac{D}{2}(T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} + T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-})| + \Lambda_p D^3 \langle \frac{x_2}{D}\psi_\omega \rangle \omega^2 \theta(x_1) \quad (3.41)$$

et en remarquant que $T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^+} = T^{\mathcal{P}}_{|\Gamma_p^-} = -E'_p I_p \partial^3_{x_2} \psi_{\omega|\frac{D}{2}} D\theta(x_1)$, on a

$$\int_{\Gamma_b} y_2 \sigma_{S32}.n_2 - \int_{\Gamma_b} y_3 \sigma_{S22}.n_2 = \left(-E'_p I_p (D+b) D \partial^3_{x_2} \psi_{\omega|\frac{D}{2}} + \Lambda_p D^3 \langle \frac{x_2}{D}\psi_\omega \rangle \omega^2\right) \theta(x_1)$$

3.5.3 Modèle homogénéisé en torsion

Cette dernière expression remplacée dans (3.33) donne le modèle effectif en torsion. Il fait intervenir la rotation de la poutre $\theta(x_1)$ comme seule variable cinématique et prend la forme suivante :

— le cas où la poutre est active, soit $\theta(x_1) \neq 0$, donne les modes globaux associés au terme d'inertie de rotation effective atypique généré par le couplage plaque/poutre - qui inclut l'inertie de rotation statique de la poutre et l'inertie de rotation effective de la plaque, ainsi qu'une rigidité de torsion effective dépendante de la fréquence. Cette situation décrit le régime co-dynamique poutre/plaque et l'équation correspondante pour la rotation de la poutre $\theta(x_1)$ est :

$$G_b \mathcal{I}_b \partial^2_{x_1} \theta = -\omega^2 \left(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J^*_\omega\right) \theta + \frac{E'_p I_p (D+b)}{D^2} C^*_\omega \theta \quad (3.42)$$

où les paramètres effectifs J^*_ω et C^*_ω sont calculés en (3.36) et (3.37) et sont :

$$J^*_\omega = \frac{1}{(2\delta^*)^2}\frac{\coth(\delta^*)+\cot(\delta^*)-2/\delta^*}{\coth(\delta^*)-\cot(\delta^*)} \quad ; \quad C^*_\omega = (2\delta^*)^2\,\frac{\coth(\delta^*)+\cot(\delta^*)}{\coth(\delta^*)-\cot(\delta^*)}$$

Comme dans le cas de la flexion globale, cette analyse suppose que la poutre tourne et qu'elle pilote la dynamique de toute la plaque raidie.

— Cependant, si la poutre est immobile, soit $\theta(x_1) = 0$, les vibrations dans la plaque sont tout de même possibles. Ces dernières sont régies par (3.11) avec des conditions d'encastrement sur Γ_p, et correspondent à des ondes guidées antisymétriques avec poutres passives, déjà décrites par (3.22). Pour garantir la compensation des couples des deux côtés de la plaque, les mouvements sont alternativement W et $-W$ d'une plaque à l'autre.

L'équation associée aux ondes de torsion (3.42) est atypique. En effet, les termes J^*_ω et C^*_ω apparaissent comme une inertie de torsion et une rigidité de torsion effectives, et sont tous deux de nature élasto-inertielle en raison du régime élasto-dynamique de la plaque. Du fait des effets de résonance, ces termes sont fortement dépendants de la fréquence, avec des singularités. Précisément, les expressions (3.36) et(3.37) permettent d'établir que :

— $J^*_\omega \to -\frac{1}{60}$ lorsque $\delta^* \to 0$ i.e. quand $\omega \to 0$. Alors, la contribution de la plaque en flexion quasi-statique à l'inertie de rotation est négative et prend la valeur $-\frac{1}{5}\frac{\Lambda_p D^3}{12}$,

— $C^*_\omega \to 12$ lorsque $\delta^* \to 0$. Alors, la plaque en flexion quasi-statique exerce un couple de rappel correspondant à un ressort de torsion de rigidité positive $\frac{12E'_pI_p(D+b)}{D^2}$,

— J^*_ω et $C^*_\omega \to \pm\infty$ lorsque $\tan(\delta^*) = \tanh(\delta^*)$ i. e. aux fréquences propres $\{\omega_{tn}\}$ des modes asymétriques. Lorsque $\omega \to \omega^-_{tn}$ (resp. ω^+_{tn}), J^*_ω et $C^*_\omega \to -\infty$ (resp. $+\infty$),

— $J^*_\omega = 0$ lorsque $\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*) = 2/\delta^*$. Cela se produit aux fréquences ω_{t_0n} qui sont estimées par $\omega_{t_0n} \approx (2n+\frac{3}{2})^2\left(\frac{\pi}{D}\right)^2\sqrt{\frac{E_pI_p}{\Lambda_p}}$ (très proche de $\omega_{s(n+1)}$ for $n > 1$). Dans les intervalles $[\omega_{t_0n}, \omega_{tn}]$, l'inertie de rotation effective de $\mathcal{P}$ est négative.

— $C^*_\omega = 0$ lorsque $\tanh(\delta^*) + \tan(\delta^*) = 0$, i.e. aux fréquences propres ω_{sn} des modes symétriques. Dans les intervalles $[\omega_{sn}, \omega_{tn}]$ la rigidité apparente du ressort de torsion de la plaque $\mathcal{P}$ est positif, ce qui veut dire qu'au lieu d'exercer un couple de rappel, la plaque exerce un couple répulsif.

Les propriétés de J^*_ω et C^*_ω qui émergent de leur caractère élasto-inertiel sont illustrées sur les figures 3.6 et 3.7 pour deux valeurs d'amortissement. Ces termes sont présentés normalisés par leur valeurs statiques respectives sur la figure 3.8. Ces figures mettent en évidence la dépendance fréquentielle et le caractère résonant de J^*_ω et C^*_ω aux fréquences $\{\omega_{tn}\}$, ainsi que leurs valeurs statiques respectivement négative et positive. Dans les intervalles entre les résonances, les variations de la rigidité du ressort de torsion sont bien plus grandes que celles de l'inertie de rotation effective.

3.5.4 Dispersion des ondes de torsion

La dispersion des ondes de torsion de la forme $\theta(x_1) = \theta\exp(i\kappa_\omega x_1)$ est déterminée par le nombre d'onde de torsion κ_ω. Ce dernier est donné par l'équation (3.42), et s'exprime sous la

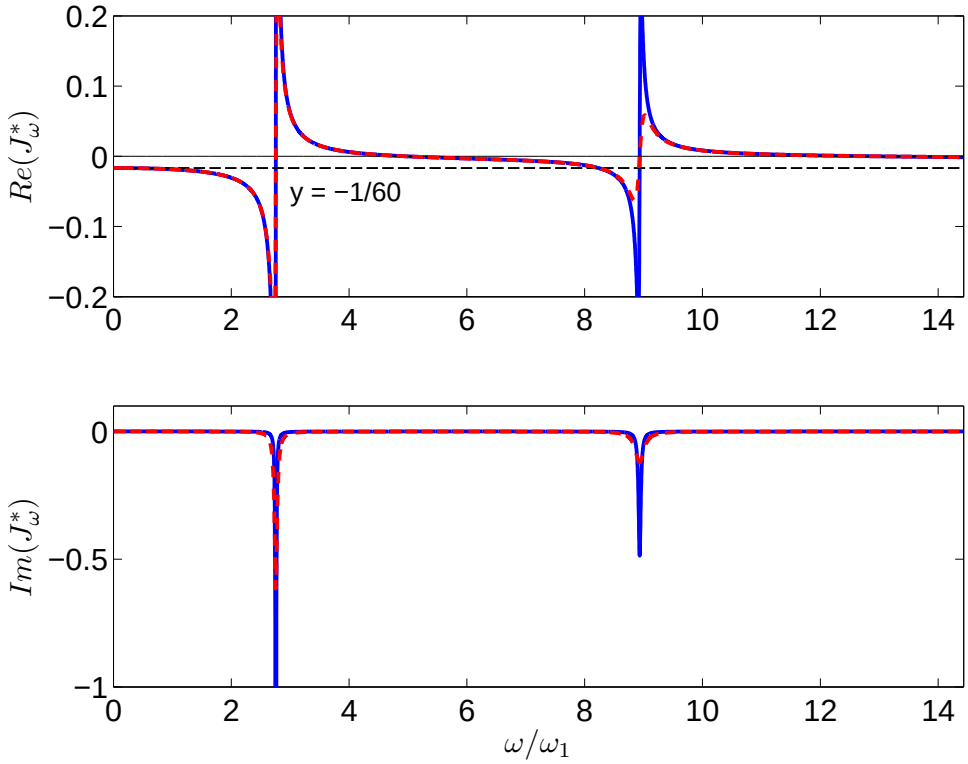


FIGURE 3.6 – Parties réelle et imaginaire de l'inertie de rotation apparente adimensionnelle de la plaque J^*_ω en fonction de la pulsation adimensionnelle ω/ω_{t1} ; avec amortissement structurel $\eta = 0.5\%$ $(-)$, et $\eta = 2\%$ $(--)$

forme :

$$\kappa^2_\omega = \frac{\omega^2\left(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J^*_\omega\right) - \frac{E'_p I_p (D+b)}{D^2} C^*_\omega}{G_b \mathcal{I}_b} \tag{3.43}$$

Contrairement au cas classique d'ondes de torsion non dispersives, la résonance interne de la plaque $\mathcal{P}$ contenue dans les termes J^*_ω et C^*_ω, induit une dispersion atypique. En raison de l'interaction complexe entre $\omega^2 J^*_\omega$ et C^*_ω, l'interprétation complète des propriétés demanderait la connaissance de tous les paramètres physiques. Des exemples seront donnés en section 5.1. Cependant, il est d'ores et déjà possible de remarquer :

— quand $\omega \to 0$ alors $\kappa^2_\omega \to -12\frac{E'_p I_p (D+b)}{D^2 G_b \mathcal{I}_b} < 0$. Le nombre d'onde est imaginaire est les ondes correspondantes sont évanescentes jusqu'à leur fréquence de coupure,

— les effets de dispersion notables s'observent au voisinage des fréquences propres des modes antisymétriques. De plus, suivant la valeur des paramètres, des intervalles fréquentiels d'ondes évanescentes et propagatives se succèdent lorsque κ^2_ω prend des valeurs négatives ou positives,

— aux fréquences des modes symétriques $J^*_\omega \approx 0$ et $C^*_\omega = 0$. Dans ce cas, l'onde de torsion dans la plaque devrait être semblable à celle se propageant dans la poutre seule.

Nous ne revenons pas sur les caractéristiques des ondes guidées avec les poutres passives qui ont déjà été décrites par (3.22). Il est possible de séparer les ondes guidées en deux catégories :

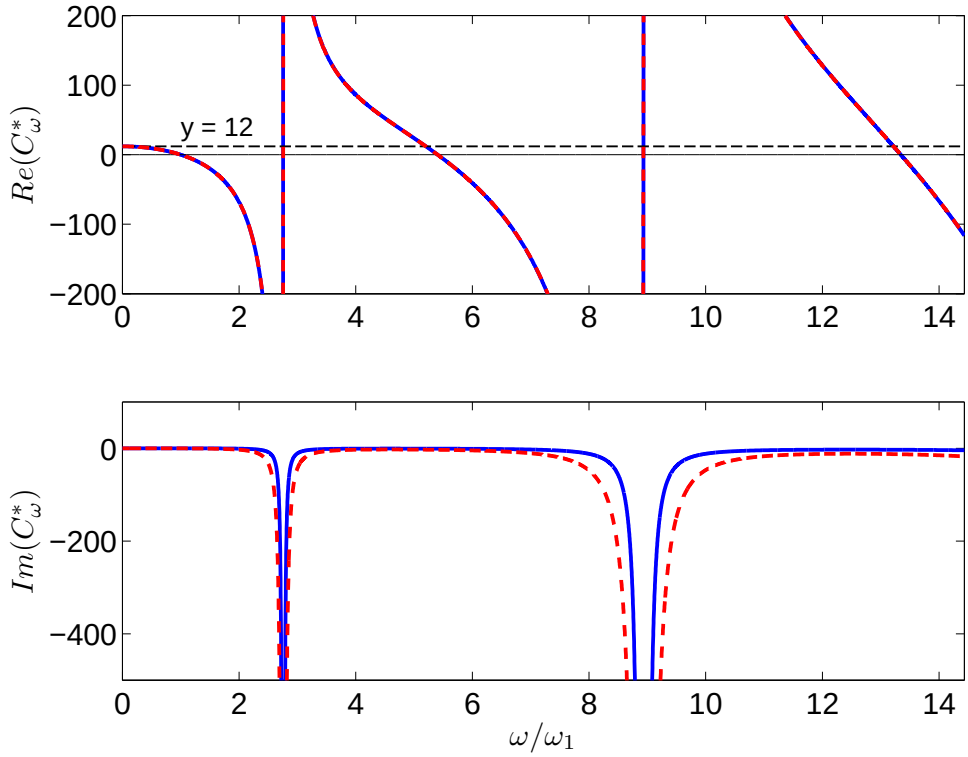


FIGURE 3.7 – Parties réelle et imaginaire de la rigidité de torsion apparente adimensionnelle de la plaque C^*_ω en focntion de la pulsation adimensionnelle ω/ω_{t1} ; avec amortissement structurel $\eta = 0.5\%$ $(-)$, et $\eta = 2\%$ $(--)$

celles associées aux modes symétriques qui interviennent sur la flexion de la poutre, et celles associées aux modes antisymétriques qui interviennent dans la torsion de la poutre. Dans les deux cas, les poutres sont passives et imposent un encastrement sur les plaques.

3.5.5 Limite de validité du modèle hybride en torsion

La validité du modèle hybride en torsion impose les restrictions classiques sur les longueurs d'onde réduites dans la poutre et la plaque, soit $\mathcal{L}'_{\mathcal{B}_\omega} > l$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_\omega} > d$ qui donnent :

$$\omega^2 < \text{Min}\left\{ \frac{G_b \mathcal{I}_b}{\rho_b J_b l^2} \, , \, \frac{E'_p I_p}{\Lambda_p d^4} \right\} \tag{3.44}$$

et la condition de séparation d'échelle pour la géométrie de plaque i.e., $\kappa_\omega D > 1$, qui correspond aux intervalles de fréquences tels que

$$\omega^2 < \frac{E'_p I_p (D+b) C^*_\omega + G_b \mathcal{I}_b}{(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J^*_\omega)\, D^2} \tag{3.45}$$

La modélisation (3.43) avec poutres actives requiert les conditions (3.44) et (3.45), tandis que l'équation (3.22) avec poutres passives et ondes guidées requiert seulement $\omega^2 < \frac{E'_p I_p}{\Lambda_p d^4}$.

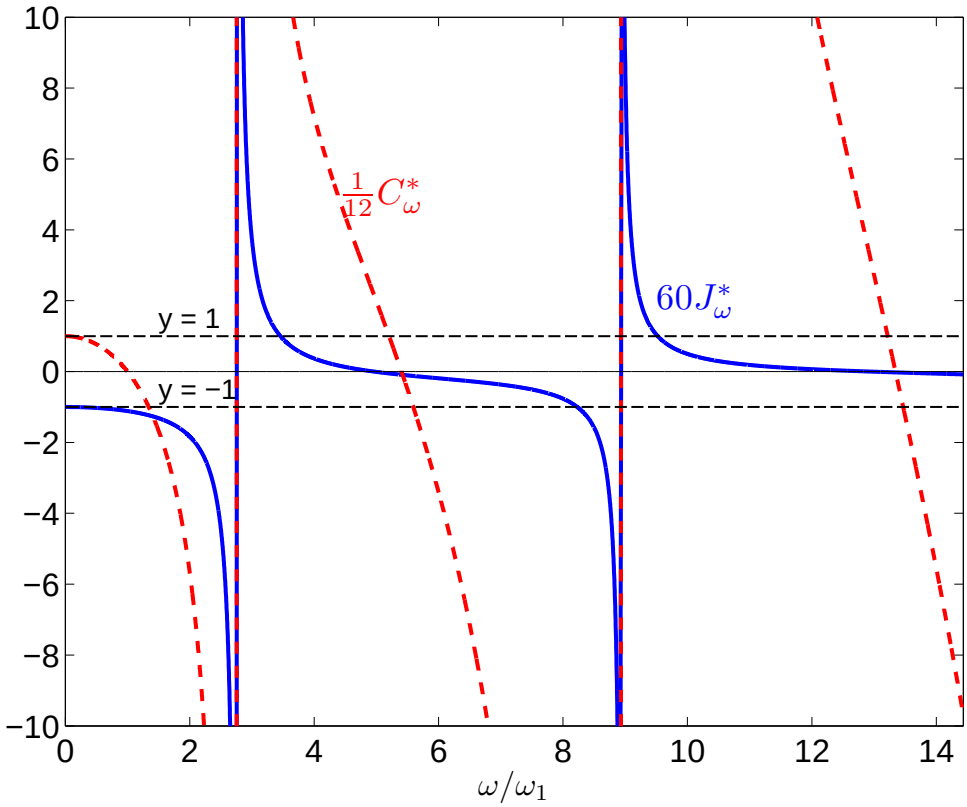


FIGURE 3.8 – Partie réelles de l'inertie de rotation apparente adimensionnelle normalisée $\langle \frac{x_2}{D}\psi_\omega \rangle$ (−), et de la rigidité de torsion apparente adimensionnelle normalisée $D^3\partial^3_{x_2}\psi_{\omega|\frac{D}{2}}$ (−−) en fonction de la pulsation adimensionnelle ω/ω_{t1}

3.6 Conclusions intermédiaires

L'homogénéisation asymptotique appliquée à une plaque raidie périodique permet de prédire son comportement macroscopique en présence de résonance interne. L'approche micro-macro fournit un cadre théorique pour analyser le comportement de panneaux ayant des contrastes de propriétés mécaniques et/ou géométrique. Ces contrastes nécessitent de considérer des situations de co-résonance et de couplage asymétrique entre la poutre et la plaque.

En faisant l'hypothèse de la séparation d'échelles, la procédure aboutit à un modèle analytique homogénéisé constitué des équations (3.21), (3.22), (3.42) dont les paramètres effectifs sont déterminés analytiquement à partir des paramètres géométriques et mécaniques de la structure (voir tableau 3.1). Ce modèle hybride permet d'identifier distinctement les mécanismes de flexion et de torsion dans le raidisseur, ainsi que les modes de guide d'onde inter-raidisseurs. Le comportement dynamique inclut plusieurs mécanismes attribués à des cinématiques enrichies :

— pour les cinématiques de flexion et torsion, deux opérateurs différentiels décrivent *i)* des ondes pour lesquelles la plaque et la poutre sont en mouvement, et *ii)* des ondes guidées pour lesquelles seule la plaque est en mouvement,

— les ondes de flexion avec poutres actives sont affectées par le terme de masse effective de la plaque résonante, qui prend des valeurs positives ou négatives. Cet effet de plaque

résonante se traduit sur la dispersion par des singularités associées aux modes propres symétriques. En particulier, il apparaît des intervalles de fréquences où les ondes sont fortement atténuées,

— les ondes de torsion avec poutres actives sont affectées par une inertie de rotation effective et une rigidité de torsion effective apportées par la plaque. Ces deux contributions élasto-inertielles sont dépendantes de la fréquence et se combinent. De ce fait, le nombre d'onde de torsion présente des caractéristiques atypiques, avec des fréquences de coupure et des zones d'atténuation associées aux modes anti-symétriques de la plaque. Il est intéressant de souligner que seules des ondes évanescentes existent en basses fréquences,

— les ondes guidées sont alternativement associées aux modes symétriques et anti-symétriques et ne sont propagatives qu'au delà des fréquences propres correspondantes.

L'hypothèse de séparation d'échelles, avec les conditions de co-résonance et de couplage asymétrique, se formulent en termes de règles de dimensionnement pour concevoir des plaques ayant des caractéristiques spécifiques à certaines fréquences.

L'extension à une plaque raidie dans les deux directions est proposée au chapitre 4. Les modèles construits sont exploités et validés numériquement au chapitre 5, et comparés à des mesures expérimentales au chapitre 6.

Flexion	Équation : $E_b I_b \partial_{x_1}^4 U(x_1) = \omega^2(\Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle)U(x_1)$ Paramètre de masse effective : $\langle\phi_\omega\rangle = \dfrac{2}{\delta^*}\dfrac{1}{\coth(\delta^*)+\cot(\delta^*)}$
Torsion	Équation : $G_b\mathcal{I}_b\partial_{x_1}^2\theta = -\omega^2\left(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J_\omega^*\right)\theta + \dfrac{E_p' I_p (D+b)}{D^2} C_\omega^*\,\theta$ Paramètres d'inertie de rotation et de rigidité de torsion effectives : $\begin{cases} J_\omega^* = \dfrac{1}{(2\delta^*)^2}\dfrac{\coth(\delta^*)+\cot(\delta^*)-2/\delta^*}{\coth(\delta^*)-\cot(\delta^*)} \\ C_\omega^* = (2\delta^*)^2\ \dfrac{\coth(\delta^*)+\cot(\delta^*)}{\coth(\delta^*)-\cot(\delta^*)} \end{cases}$
Modes guidés	Équation : $E_p' I_p \widetilde{\Delta}^2 w = \Lambda_p \omega^2 w$ Conditions limites : $w(x_1, x_{2\|\Gamma_p}) = 0/\Gamma_p; \quad \partial_{x_2} w(x_1, x_{2\|\Gamma_p}) = 0/\Gamma_p$

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif du modèle homogénéisé associé à la plaque raidie : équations macroscopiques et paramètres effectifs

Chapitre 4

Plaque bi-raidie

Ce chapitre poursuit la construction de modèles homogénéisés en étendant l'étude au cas de plaques raidies dans deux directions (bi-raidie). En suivant la même ligne de conduite qu'au chapitre précédent, le processus d'homogénéisation s'organise en plusieurs étapes : *i)* la mise en œuvre d'une méthode d'homogénéisation adaptée aux milieux discrets permet d'abord de formuler un modèle pour le comportement hors-plan d'un treillis de poutres orthogonales seul, *ii)* le couplage entre le treillis et les plaques internes est ensuite introduit en reconsidérant le treillis chargé par des efforts et des moments exercés par les plaques qui y sont rattachées, *iii)* le calcul de la contribution dynamique des plaques résonantes soumises au déplacements du treillis. L'équation de dispersion est alors déterminée pour différentes conditions limites de plaques internes. Le modèle est aussi enrichi en considérant l'ajout de masses sur les plaques internes pour placer la résonance interne sur un large intervalle fréquentiel.

Sommaire

4.1 Structure étudiée . . . 52
4.1.1 Condition co-dynamique pour la plaque bi-raidie . . . 53
4.1.2 Couplage asymétrique . . . 53
4.1.3 Dimensionnements compatibles avec la résonance interne . . . 54
4.2 Homogénéisation du treillis de poutres . . . 55
4.2.1 Discrétisation de l'équilibre dynamique . . . 55
4.2.2 Développements en statique . . . 60
4.2.3 Extension en dynamique . . . 65
4.3 Introduction de la dynamique locale . . . 67
4.3.1 Couplage entre le treillis de poutres et les plaques internes . . . 67
4.3.2 Plaques internes entraînées par le treillis de poutres . . . 67
4.3.3 Conditions limites internes . . . 68
4.3.4 Formulation homogénéisée du comportement de la plaque bi-raidie en flexion . . . 69
4.3.5 Plaques internes CFCF . . . 71
4.3.6 Plaques internes CFFF . . . 71
4.3.7 Plaques internes CCCC . . . 72
4.3.8 Plaques internes circulaires . . . 74
4.4 Caractéristiques de dispersion . . . 77
4.5 Plaques internes avec masselottes . . . 78
4.5.1 Cas CFCF . . . 78
4.5.2 Cas CFFF . . . 80
4.6 Remarques finales . . . 81

4.1 Structure étudiée

La plaque bi-raidie notée $\mathcal{R}$ à l'étude est schématisée sur la figure 4.1 et se compose de plaques internes $\mathcal{P}$ identiques et solidaires d'une grille de poutres orthogonales $\mathcal{G}$. Le repère défini par les vecteurs $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ est tel que $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$ sont dans le plan selon les axes du treillis, tandis que $\underline{e}_z$ est le vecteur hors-plan.

La poutre est caractérisée par sa longueur L_k, tandis que l'élément poutre $\mathcal{B}$ est caractérisé par sa longueur l_k, son épaisseur h_k, sa largeur b_k, et sa section A_k avec $k = x, y$, et $h = O(b)$. Le matériau constitutif de $\mathcal{B}$ est élastique linéaire isotrope, et possède un module d'Young $E_b = O(E_k)$, un coefficient de Poisson ν_k, et une masse volumique ρ_k. Les plaques internes $\mathcal{P}$ sont de dimensions $l_x \times l_y$, et d'épaisseur d, possèdent un module d'Young E_p, un coefficient de Poisson ν_p, et une masse volumique ρ_p.

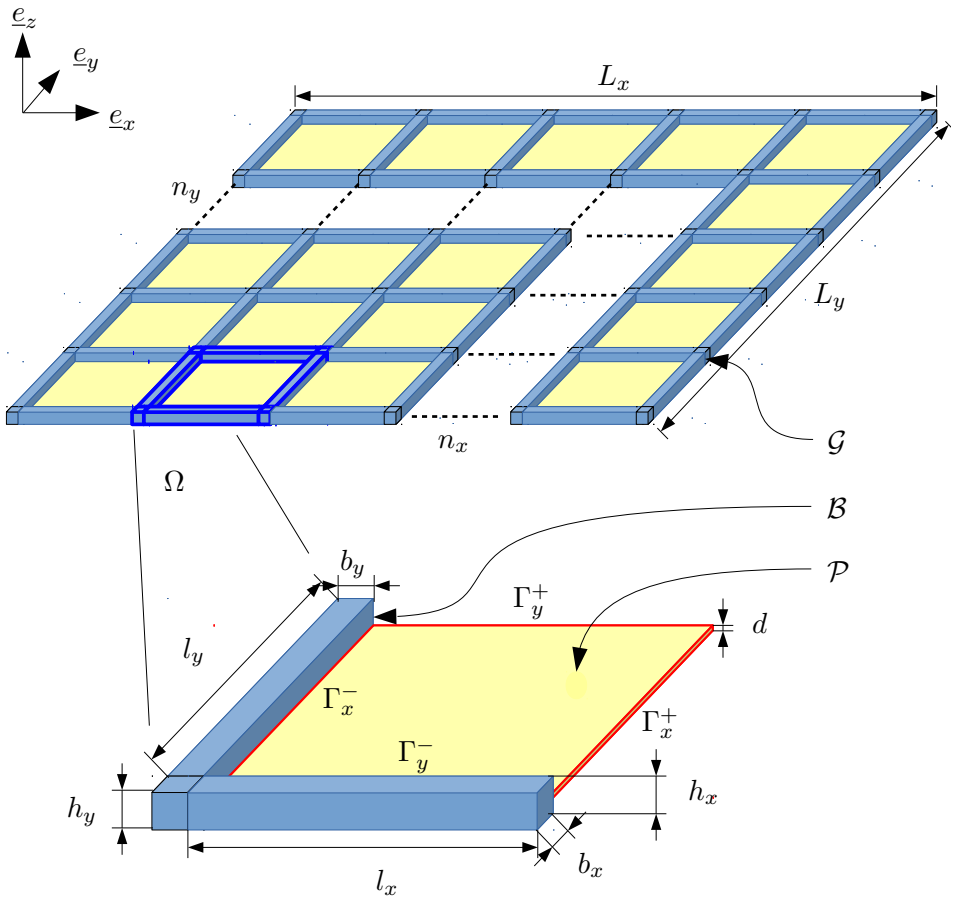


FIGURE 4.1 – Schéma de la plaque bi-raidie étudiée et cellule unitaire Ω

L'élancement de l'élément poutre est calculé sur la période. Les paramètres n_x et n_y désignent respectivement le nombre de périodes dans la direction x et y. À partir de la géométrie des poutres $\mathcal{B}$, du treillis $\mathcal{G}$ et d'une plaque interne $\mathcal{P}$, trois petits paramètres sont définis par

- l'inverse de l'élancement de la poutre $\mathcal{B}$: $\epsilon_b = b_k/l_k \ll 1, k = x, y$
- l'inverse de l'élancement de la plaque $\mathcal{P}$: $\epsilon_p = d/l_k \ll 1, k = x, y$
- l'inverse de la petitesse de la cellule Ω, soit, le rapport des dimensions l_k de la micro-plaque et des dimensions L_k de la macro-plaque : $\varepsilon = l/L \ll 1$ avec $l = O(l_k)$ et $L = O(L_k)$, et

$k = x, y$

Les contrastes de propriétés mécaniques des matériaux constituant le treillis $\mathcal{G}$ et la plaque $\mathcal{P}$ sont spécifiés par les rapports de modules et de masses volumiques E_p/E_b et ρ_b/ρ_p. Ainsi, la plaque raidie est caractérisée par cinq paramètres sans dimensions $\{\epsilon_b, \epsilon_p, \varepsilon, E_p/E_b, \rho_b/\rho_p\}$.

4.1.1 Condition co-dynamique pour la plaque bi-raidie

L'obtention de la condition co-dynamique est exactement analogue à celle décrite pour la plaque raidie. L'équation dynamique décrivant la flexion du treillis seul $\mathcal{G}$ selon ses axes $\underline{a}_1$ et $\underline{a}_2$ est donné par (voir les axes de la figure 4.1) :

$$O(E_k I_k \Delta^4 U) = O(\Lambda_g \omega^2 U)$$

où U est le déplacement transverse selon $\underline{a}_3$, $I_k = h_k^3/12$ est le moment d'inertie de flexion de la grille dans la direction k, et $\Lambda_g = \rho_b * h$ sa masse surfacique. Alors, la longueur d'onde réduite de flexion $\mathcal{L}_\omega$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_\omega^4 = O\left(\frac{E_k I_k}{\Lambda_g \omega_g^2}\right)$$

La résonance fondamentale ω_g du treillis de dimensions $L_x \times L_y$ est telle que $\mathcal{L}_{\omega_g} = L_k$ et par conséquent :

$$\omega_g^2 = O\left(\frac{E_k I_k}{\Lambda_g L_l^4}\right)$$

Pour la plaque interne $\mathcal{P}$, les résonances locales apparaissent suivant la période l_k. Il faut donc considérer l'équation dynamique de flexion de $\mathcal{P}$, avec l'opérateur bi-laplacien variant à l'échelle l_k. Il vient alors :

$$O(E'_p I_p \Delta^4 w) = O(\Lambda_p \omega^2 w)$$

où w est le déplacement hors-plan de la plaque suivant $\underline{a}_3$, $E'_p I_p$ sa rigidité de flexion, avec $E'_p = E_p/(1-\nu_p^2)$ le module de plaque, $I_p = d^3/12$ son moment d'inertie de flexion, et $\Lambda_p = \rho_p d$ sa masse surfacique. Alors, la résonance fondamentale de la plaque de longueur l_k est de l'ordre de :

$$\omega_p^2 = O\left(\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p l^4}\right)$$

En considérant un régime co-dynamique entre le treillis $\mathcal{G}$ et les plaques internes $\mathcal{P}$, i.e. $O(\omega_g) = O(\omega_p)$, il vient la relation suivante :

$$\frac{E_k h_k^2}{\rho_k L_k^4} = O\left(\frac{E'_p d^2}{\rho_p l^4}\right) \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{E_k \rho_p}{E'_p \rho_k} = O\left(\frac{d^2}{h_k^2}\frac{L_k^4}{l^4}\right) = O\left(\frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_b^2 \varepsilon^4}\right) \tag{4.1}$$

4.1.2 Couplage asymétrique

En reprenant les arguments énoncés pour la plaque mono-raidie, la condition de couplage asymétrique treillis/plaque présentée ici correspond au cas ou le treillis est le système forçant qui impose ses déplacements aux plaques internes (système forcé). En écrivant l'équilibre transverse du treillis chargé par les plaques internes, le couplage treillis/plaque requiert :

$$\mathrm{div}(\underline{T}_\mathcal{G}) = O(T_p) \tag{4.2}$$

où $T_\mathcal{G}$ est l'effort transverse dans le treillis $\mathcal{G}$ (en kN/m) et T_p l'effort transverse dans la plaque interne $\mathcal{P}$ (en kN/m). Puisque le treillis est le système forçant, son équation constitutive reste

inchangée par la force extérieure. En prenant un comportement de plaque interne de type Kirchhoff (plaque mince puisque $\epsilon_p \ll 1$), et en notant $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, l'effort $T_\mathcal{G}$ et $\mathrm{div}(T_\mathcal{G})$ sont estimés par :

$$T_\mathcal{G} = O(E_k I_k \mathrm{div}(\nabla^2 U)) = O\left(E_k I_k \frac{U}{L_k^3}\right) \quad ; \quad \mathrm{div}(T_\mathcal{G}) = O\left(E_k I_k \frac{U}{L_k^4}\right)$$

Puisque la plaque de dimensions l_x et $l_y = O(l)$, T_p est évalué comme :

$$T_p = O(E'_p I_p \mathrm{div}(\nabla^2 w)) = O\left(E'_p \frac{d^3}{12}\frac{w}{l^3}\right)$$

La continuité des déplacements à la jonction entre le treillis et la plaque implique $w = O(U)$. Alors, à partir de (4.2) et en rappelant que $O(b_k) = O(h_k)$, on déduit la condition :

$$O\left(E\frac{bh^3}{L^4}\right) = O\left(E'_p \frac{d^3}{l^3}\right) \quad \text{i.e.} \quad \frac{E'_p}{E} = O\left(\frac{l^3}{d^3}\frac{l^4}{L^4}\right) = O\left(\varepsilon^4 \frac{h^2}{d^2}\right) \tag{4.3}$$

4.1.3 Dimensionnements compatibles avec la résonance interne

De la même manière que pour la plaque mono-raidie, les conditions (4.1) et (4.3) peuvent être utilisées pour dimensionner la plaque bi-raidie, et se placer ainsi dans des conditions optimales de résonance interne.

Parmi les différentes options, deux combinaisons offrent la possibilité de dimensionnements réalistes pour des applications pratiques.

En supposant que l'élancement de l'élément poutre et du même ordre que celui de la plaque interne, et que les masses volumiques du treilis et de la plaque sont du même ordre, soit

$$\epsilon_b = O(\epsilon_p) = \epsilon \ll 1 \quad \text{d'où} \quad l/L = O(d/D) \ll 1 \quad ; \quad \frac{\rho_b}{\rho_p} = O(1)$$

Cette relation indique aussi que $\varepsilon = l/L$. Alors, les conditions (4.1) et (4.3) imposent :

$$\frac{E'_p \rho_b}{E_b \rho_p} = \frac{L^4}{l^4} = O(\varepsilon^4) \quad ; \quad \frac{E'_p}{E_b} = \frac{b}{l} = \frac{d}{l} = O(\epsilon) \tag{4.4}$$

qui signifie que le module de la plaque est plus petit que celui de la poutre et que les rapports de densités étant du même ordre de grandeur, $\epsilon = \varepsilon^4$. Finalement, nous avons :

$$\varepsilon^4 = \epsilon \quad \text{tel que} \quad O(L/l) = O(\sqrt[4]{E'_p/E_b}) \ll 1$$

Le dimensionnement (4.4) décrit une plaque fine en comparaison de l'épaisseur, mais pas nécessairement étroite en comparaison de la longueur de l'élément poutre. Ainsi, lorsque les conditions (4.4), qui relient les paramètres géométriques aux propriétés mécaniques sont respectées, la situation de résonance interne apparaît autour des fréquences propres communes de la plaque et de la poutre. Pour finir, un dimensionnement simple favorisant la résonance interne est donc :

$$\left\{\epsilon_b = \epsilon_p = \epsilon, \quad \varepsilon = \sqrt[4]{\epsilon}, \quad E'_p/E_b = \epsilon, \quad \rho_b/\rho_p = O(1)\right\}$$

Le cas où le treillis et les plaques internes sont constitués du même matériau est une autre possibilité simple. Dans ce cas ($E_p = E_b$, $\rho_p = \rho_b$) et les conditions (4.1) et (4.3) requièrent

$$\frac{d^2}{b^2}\frac{L^4}{l^4} = \frac{\epsilon_p^2}{\epsilon_b^2 \varepsilon^4} = O(1) \quad ; \quad \frac{b^4}{l^4}\frac{l^3}{d^3} = \frac{\epsilon_b^4}{\epsilon_p^3} = O(1) \tag{4.5}$$

soit finalement $\varepsilon = l/L \ll 1$. Ces deux dernières relations définissent la géométrie de la plaque bi-raidie résonante avec des valeurs données d'épaisseurs d pour les plaques internes et h pour les raidisseurs.

Dans ces deux situations, la plaque est bien plus déformable en flexion que la poutre en raison de sa faible épaisseur et/ou du module d'Young. Cela est cohérent avec le fonctionnement de poutre forçante et de plaque forcée.

4.2 Homogénéisation du treillis de poutres

La méthode d'homogénéisation des milieux discrets périodiques est mise en œuvre sur le treillis de poutre. L'objectif est d'obtenir une description continue équivalente associée dans le cas de vibrations transversales pour construire le modèle continu associé à ses vibrations transversales. Cette formulation analytique est adaptée à une étude paramétrique et met en évidence les mécanismes régissant le comportement global. La méthode HPDM s'articule suivant les étapes décrites au chapitre d'introduction, et détaillées ci-après.

4.2.1 Discrétisation de l'équilibre dynamique

Le mouvement hors-plan des éléments locaux est décrit par des poutres d'Euler-Bernoulli. Les mouvements de chaque point connecté à un même nœud sont identiques et définissent les variables cinématiques nodales discrètes du système. La discrétisation consiste à intégrer l'équation de poutre en prenant comme conditions limites des déplacements et des rotations inconnus aux extrémités. On obtient alors une expression explicite des efforts et des moments exercés par l'élément sur ses extrémités, en fonction de variables cinématiques discrètes. L'équation d'équilibre étant satisfaite sur chaque élément, il reste à exprimer l'équilibre des forces et des moments à chaque nœud. De cette manière, l'équilibre de toute la structure est réduit à l'équilibre sur un nombre restreint de nœuds, et ce sans perte d'information.

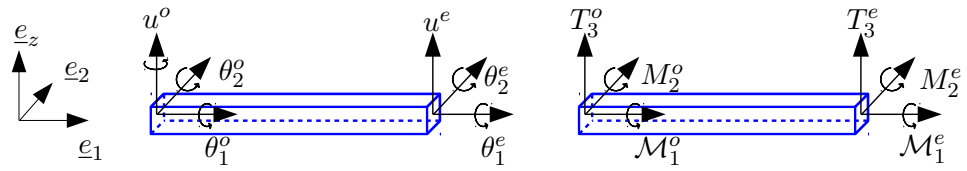


FIGURE 4.2 – Notations pour un élément du treillis : variables cinématiques, efforts et moments pour la description hors-plan

Dans le repère local de l'élément, les variables associées au mouvement hors plan du treillis sont u le déplacement transverse ($\underline{e}_z$ mouvement hors-plan de la grille), et θ_2, θ_1, les rotations autour des axes $\underline{e}_2$ (gradient de la déflexion) et $\underline{e}_1$ (torsion). Les axes ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) définissant le plan, ils seront associés à ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$) ou ($\underline{e}_y$, $\underline{e}_x$), selon l'orientation de l'élément.

Pour chaque élément poutre, les cinématiques d'extension (ou de torsion) sont liées aux efforts normaux (ou aux moments de torsion), et les cinématiques de moments fléchissants et d'efforts tranchants sont liées aux déplacements hors-plan et rotations autour des axes définissant le plan. En exprimant les variables à gauche et à droite du segment, pour chacun des six degrés de liberté de chaque nœud, on montre que les variables intervenant dans les mouvements plan

et hors-plan sont découplées. Cette vérification préliminaire est présentée en annexe B. De plus, pour un élément poutre de type Euler, les directions axiales et transverses sont découplées, les cinématiques de flexion et torsion sont indépendantes et sont décrites par :

— vibrations de flexion :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = \Lambda\omega^2 u(s) \\ \dfrac{dM}{ds} = -T(s) \end{cases} \qquad M(s) = -EI\frac{d^2u(s)}{ds^2} \qquad \frac{d^4u}{ds^4} = \delta^4 u(s) \qquad \delta^4 = \frac{\Lambda\omega^2}{EI}$$

— vibrations de torsion :

$$\frac{d\mathcal{M}_1}{ds} = -\rho J\omega^2\theta_1(s) \qquad \mathcal{M}_1(s) = G\mathcal{I}\frac{d\theta_1}{ds}; \qquad \frac{d^2\theta_1}{ds^2} = -\gamma^2\theta_1(s) \qquad \gamma^2 = \frac{\rho J\omega^2}{G\mathcal{I}}$$

Les longueurs d'onde de flexion et de torsion, i.e., $\lambda_b = 2\pi/\delta$ et $\lambda_t = 2\pi/\gamma$ sont liées par la relation : $\lambda_b^4/\lambda_t^2 = (EI/\Lambda)/(\rho J/G\mathcal{I}) = O(A)$, où A est la section de l'élément poutre. Alors $\lambda_b/\lambda_t = O(\sqrt{A}/\lambda_b)$ impose que la longueur d'onde de flexion est bien plus petite que celle de torsion, puisque la théorie des poutres implique que l'épaisseur de la poutre est plus petite la longueur d'onde. Il est d'ailleurs possible d'en obtenir une estimation sans dimension faisant intervenir l'élancement $l/\sqrt{A}$:

$$\frac{(2\pi l/\lambda_b)^4}{(2\pi l/\lambda_t)^2} = \frac{(\delta l)^4}{(\gamma l)^2} \approx \left(\frac{l}{\sqrt{A}}\right)^2 \gg 1 \tag{4.6}$$

Ces équations sont intégrées en considérant comme conditions limites des valeurs inconnues de déplacements et de rotations à l'origine $u^o, \theta_2^o, \theta_1^o$ et à l'extrémité $u^e, \theta_2^e, \theta_1^e$ de l'élément. De cette manière, les variables duales associées aux mécanismes de flexion et de torsion s'expriment :

$$\begin{cases} M^o = M(u^o, u^e, \theta^o, \theta^e) \\ M^e = M(u^e, u^o, -\theta^e, -\theta^o) \end{cases} ; \begin{cases} T^o = T(u^o, u^e, \theta^o, \theta^e) \\ T^e = T(-u^e, -u^o, \theta^e, \theta^o) \end{cases} ; \begin{cases} \mathcal{M}^o = \mathcal{M}(\theta^o, \theta^e) \\ \mathcal{M}^e = -\mathcal{M}(\theta^o, \theta^e) \end{cases} \tag{4.7}$$

Pour la suite, on retiendra le formalisme matriciel suivant : en notant le vecteur force $\underline{f} = (T, M_2, \mathcal{M}_1)$ et le vecteur déplacement $\underline{v} = (u_3, \theta_2, \theta_1)$, les forces nodales s'expriment sous la forme :

$$\underline{f}^o = \underline{\underline{D}}^{oo}\underline{v}^o + \underline{\underline{D}}^{oe}\underline{v}^e \qquad ; \qquad \underline{f}^e = \underline{\underline{D}}^{eo}\underline{v}^o + \underline{\underline{D}}^{ee}\underline{v}^e \tag{4.8}$$

où $\underline{\underline{D}}^{oo}, \underline{\underline{D}}^{oe}, \underline{\underline{D}}^{eo}, \underline{\underline{D}}^{ee}$ dans (4.8) sont les matrices de rigidité dynamiques définies comme suit :

$$\underline{\underline{D}}^{oo} = \begin{pmatrix} \frac{EI}{\Delta}f_1(\delta l) & \frac{EI}{\Delta}f_3(\delta l) & 0 \\ \frac{EI}{\Delta}f_3(\delta l) & \frac{EI}{\Delta}f_2(\delta l) & 0 \\ 0 & 0 & G\mathcal{I}g_1(\gamma l) \end{pmatrix}; \qquad \underline{\underline{D}}^{ee} = \begin{pmatrix} -\frac{EI}{\Delta}f_1(\delta l) & \frac{EI}{\Delta}f_3(\delta l) & 0 \\ \frac{EI}{\Delta}f_3(\delta l) & -\frac{EI}{\Delta}f_2(\delta l) & 0 \\ 0 & 0 & -G\mathcal{I}g_1(\gamma l) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{oe} = \begin{pmatrix} -\frac{EI}{\Delta}f_4(\delta l) & \frac{EI}{\Delta}f_6(\delta l) & 0 \\ -\frac{EI}{\Delta}f_6(\delta l) & -\frac{EI}{\Delta}f_5(\delta l) & 0 \\ 0 & 0 & -G\mathcal{I}g_2(\gamma l) \end{pmatrix} = -{}^T\underline{\underline{D}}^{eo}$$

où Δ et f, g sont les fonctions associées aux composantes de la matrice de rigidité :

$$\begin{cases} \Delta = 1 - \cosh(\delta l)\cos(\delta l) & \\ f_1(\delta l) = \delta^3(\cosh(\delta l)\sin(\delta l) + \sinh(\delta l)\cos(\delta l)) & f_4(\delta l) = \delta^3(\sin(\delta l) + \sinh(\delta l)) \\ f_2(\delta l) = \delta(\cosh(\delta l)\sin(\delta l) - \sinh(\delta l)\cos(\delta l)) & f_5(\delta l) = \delta(\sin(\delta l) - \sinh(\delta l)) \\ f_3(\delta l) = \delta^2(\sin(\delta l)\sinh(\delta l)) & f_6(\delta l) = \delta^2(\cosh(\delta l) - \cos(\delta l)) \\ g_1(\gamma l) = -\gamma\cot(\gamma l) & g_2(\gamma l) = \gamma/\sin(\gamma l) \end{cases} \tag{4.9}$$

Séparation d'échelle et état quasi-statique local : Du fait de la séparation d'échelle, les longueurs d'onde de flexion et torsion d'un élément sont plus petites que leurs longueurs, telles que $\delta l \ll 1$ et $\gamma l \ll 1$ (ici l vaut pour l_x ou l_y). Cela signifie que la poutre est en régime local quasi-statique et que les matrices de rigidités dynamiques peuvent être développées selon δl et γl.

$$\underline{\underline{D}}^{oo} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\mathcal{I}}{l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13EI\delta^4 l}{35} & -\frac{11EI\delta^4 l^2}{210} & 0 \\ -\frac{11EI\delta^4 l^2}{210} & -\frac{EI\delta^4 l^3}{105} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G\mathcal{I}l\gamma^2}{3} \end{pmatrix} + O(\delta^4, \gamma^2)$$

D'ailleurs, des développements contiennent uniquement des termes en puissance de $(\delta l)^4 = \omega^2 \Lambda l^4/EI$ et $(\gamma l)^2 = \omega^2 J l^2/G\mathcal{I}$, c'est à dire en puissance de ω^2. La matrice dynamique $\underline{\underline{D}}^{ij}$ prend alors la forme suivante :

$$\underline{\underline{D}}^{ab} = \underline{\underline{K}}^{ab} + \omega^2 \underline{\underline{M}}^{ab} + O(\omega^4) \qquad ; \qquad \{a, b\} = \{o, e\} \tag{4.10}$$

avec

$$\underline{\underline{K}}^{oo} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\mathcal{I}}{l} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{M}}^{oo} = \begin{pmatrix} -\frac{13\Lambda l}{35} & -\frac{11\Lambda l^2}{210} & 0 \\ -\frac{11\Lambda l^2}{210} & -\frac{\Lambda l^3}{105} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho J l}{3} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Conformément à la relation (4.6), les termes de torsion (i.e. γ et J) dans $\omega^2 \underline{\underline{M}}^{ab}$ sont plus petits que les termes de flexion (i.e. δ et Λ) d'un facteur de l'ordre de A/l^2.

Formulation discrète de l'équilibre du treillis : Ces matrices sont définies dans le repère local de l'élément. Puisque les éléments sont orthogonaux, l'orientation φ de l'élément dans le repère global doit être introduite en définissant une matrice de rotation $\underline{\underline{P}}_{\varphi}$. Le vecteur force généralisé $\underline{F} = \underline{\underline{P}}_{\varphi} \underline{f}$ est formulé dans le repère global comme une fonction de $\underline{V} = \underline{\underline{P}}_{\varphi} \underline{v}$ avec les matrices de rigidités $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ij} = \underline{\underline{P}}_{\varphi}\, \underline{\underline{D}}^{ij}\, \underline{\underline{P}}_{-\varphi}$. Les relations force-déplacement (4.8) deviennent alors :

$$\underline{F}^o = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{oo} \underline{V}^o + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{oe} \underline{V}^e \qquad ; \qquad \underline{F}^e = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{eo} \underline{V}^o + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ee} \underline{V}^e \tag{4.12}$$

L'équilibre des efforts et des moments au nœud (m, p) avec les notations de la figure 4.3 permet de prendre en compte explicitement la géométrie de la cellule. Les nœuds sont rigides et sans masse.

Le problème hors-plan fait intervenir l'équilibre des efforts suivant z, et des moments autour de x et y (contrairement au problème plan qui fait intervenir l'équilibre des efforts suivant x et y et des moments autour de z). Les segments $p(E_x, G_x, l_x, h_x, b_x, J_x, I_x, \mathcal{I}_x)$ sont différents des segments $m(E_y, G_y, l_y, h_y, b_y, J_y, I_y, \mathcal{I}_y)$. Pour la structure schématisée sur la figure 4.3, l'équation d'équilibre au nœud (m, p) est liée au mouvement des nœuds adjacents (4.12), et celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} &\underline{F}^e(\underline{V}^{(m,p-1)}, \underline{V}^{(m,p)}) - \underline{F}^o(\underline{V}^{(m,p)}, \underline{V}^{(m,p+1)}) + \\ &\underline{F}^e(\underline{V}^{(m-1,p)}, \underline{V}^{(m,p)}) - \underline{F}^o(\underline{V}^{(m,p)}, \underline{V}^{(m+1,p)}) = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Les équations d'équilibre (4.13) sont vectorielles dont les composantes définissent respectivement l'équilibre des forces suivant z, l'équilibre des moments autour de x et autour de y comme suit :

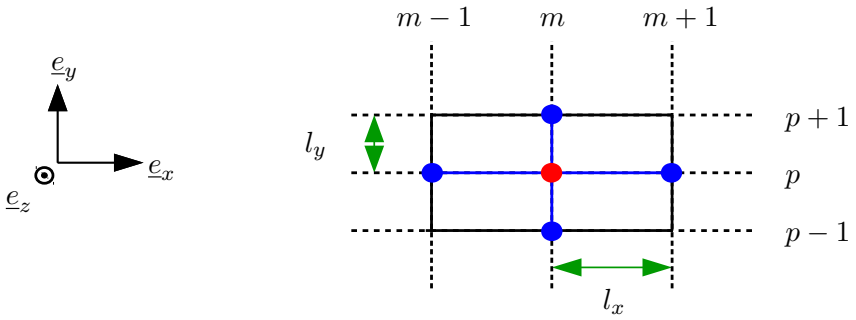


FIGURE 4.3 – Notations (structure)

Efforts suivant z :

$$T_3^e(u^{(m-1,p)}, u^{(m,p)}, \theta_2^{(m-1,p)}, \theta_2^{(m,p)}) - T_3^o(u^{(m,p)}, u^{(m+1,p)}, \theta_2^{(m,p)}, \theta_2^{(m+1,p)}) + T_3^e(u^{(m,p-1)}, u^{(m,p)}, -\theta_1^{(m,p-1)}, -\theta_1^{(m,p)}) - T_3^o(u^{(m,p)}, u^{(m,p+1)}, -\theta_1^{(m,p)}, -\theta_1^{(m,p+1)}) = 0 \quad (4.14)$$

Moments autour de x :

$$\mathcal{M}_1^e(\theta_1^{(m-1,p)}, \theta_1^{(m,p)}) + M_2^e(-u^{(m,p-1)}, -u^{(m,p)}, \theta_2^{(m,p-1)}, \theta_2^{(m,p)}) - \mathcal{M}_1^o(\theta_1^{(m,p)}, \theta_1^{(m+1,p)}) - M_2^o(-u^{(m,p)}, -u^{(m,p+1)}, \theta_2^{(m,p)}, \theta_2^{(m,p+1)}) = 0 \quad (4.15)$$

Moments autour de y :

$$\mathcal{M}_1^e(\theta_1^{(m,p-1)}, \theta_1^{(m,p)}) + M_2^e(u^{(m-1,p)}, u^{(m,p)}, \theta_2^{(m-1,p)}, \theta_2^{(m,p)}) - \mathcal{M}_1^o(\theta_1^{(m,p)}, \theta_1^{(m,p+1)}) - M_2^o(u^{(m,p)}, u^{(m+1,p)}, \theta_2^{(m,p)}, \theta_2^{(m+1,p)}) = 0 \quad (4.16)$$

En remplaçant les efforts tranchants et les moments par leurs expressions en termes de déplacements et de rotation (4.8), les équations d'équilibres (4.13) deviennent des équations aux différences finies. Par exemple, l'équation d'équilibre des efforts suivant z devient :

$$\frac{12E_xI_x}{l_x^3}\left[u^{(m-1,p)} - 2u^{(m,p)} + u^{(m+1,p)} + \frac{l_x}{2}\left(\theta_y^{(m-1,p)} - \theta_y^{(m+1,p)}\right)\right] + \frac{12E_yI_y}{l_y^3}\left[u^{(m,p-1)} - 2u^{(m,p)} + u^{(m,p+1)} + \frac{l_y}{2}\left(\theta_x^{(m,p+1)} - \theta_x^{(m,p-1)}\right)\right] = 0 \quad (4.17)$$

et de même pour les équilibres de moments autour de x :

$$\frac{G_x\mathcal{I}_x}{l_x}\left[\theta_x^{(m-1,p)} - 2\theta_x^{(m,p)} + \theta_x^{(m+1,p)}\right] + \frac{6E_yI_y}{l_y^2}\left[-u^{(m,p-1)} + u^{(m,p+1)} - \frac{l_y}{3}\left(\theta_y^{(m,p-1)} + 4\theta_y^{(m,p)} + \theta_y^{(m,p+1)}\right)\right] = 0 \quad (4.18)$$

et autour de y :

$$\frac{G_y\mathcal{I}_y}{l_y}\left[\theta_y^{(m-1,p)} - 2\theta_y^{(m,p)} + \theta_y^{(m,p+1)}\right] + \frac{6E_xI_x}{l_x^2}\left[-u^{(m-1,p)} + u^{(m+1,p)} - \frac{l_x}{3}\left(\theta_x^{(m-1,p)} + 4\theta_x^{(m,p)} + \theta_x^{(m+1,p)}\right)\right] = 0 \quad (4.19)$$

Pour ces deux dernières, il suffit de traiter l'équation des moments autour de x puisque celle des moments autour de y est déduite en inversant le rôle des axes x et y associés à θ_x et θ_y.

En raison de la séparation d'échelle, le déplacement relatif de deux nœuds adjacents est supposé petit. De ce fait, les variables nodales sont considérées comme des valeurs discrètes de fonctions continues des variables d'espace x et y :

$$\begin{aligned} u^{(m,p)} &= U(\epsilon, x = ml_x, y = pl_y) \\ \theta_x^{(m,p)} &= \Theta_x(\epsilon, x = ml_x, y = pl_y) \\ \theta_y^{(m,p)} &= \Theta_y(\epsilon, x = ml_x, y = pl_y) \end{aligned}$$

Ces fonctions sont supposées converger lorsque $\epsilon \to 0$ et sont recherchées sous la forme de développements asymptotique en puissance de ϵ. Puisque le treillis est orthogonal et périodique, $l_y = \epsilon L$ dans la direction y et $l_x = \epsilon l^* L$ avec $l^* = l_x/l_y = O(1)$ dans la direction x. Ces valeurs sont petites et les incréments des variables discrètes d'un nœud à l'autre sont exprimés en série de Taylor de variables continues. Ceci permet de transformer la formulation en différences finies de variables discrètes en formulation différentielle de variables macroscopiques continues. Comme l'ordre relatif des termes successifs des développements de Taylor est ϵ^2, il suffit de développer les variables en puissances paires de ϵ. Certaines formes apparaissent systématiquement et sont explicitées ci-après :

$$\begin{aligned} &X^{(m-1,p)} - 2X^{(m,p)} + X^{(m+1,p)} \\ &\quad = l_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x,y) + l_p^4 \frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} X(x,y) + l_p^6 \frac{2}{6!} \frac{\partial^6}{\partial x^6} X(x,y) \\ &\quad = \epsilon^2 l^{*2} L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \epsilon^4 l^{*4} L^4 \frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} X + O(\epsilon^6) \\ &\quad = \epsilon^2 l^{*2} L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^{(0)} + \epsilon^4 l^{*4} L^4 \left(\frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} X^{(0)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^{(2)} \right) + O(\epsilon^6) \end{aligned} \tag{4.20}$$

et de manière similaire pour

$$\begin{aligned} &X^{(m,p-1)} - 2X^{(m,p)} + X^{(m,p+1)} \\ &\quad = \epsilon^2 L^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} X^{(0)} + \epsilon^4 L^4 \left(\frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} X^{(0)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^{(2)} \right) + O(\epsilon^6) \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} &X^{(m+1,p)} - X^{(m-1,p)} \\ &\quad = 2\epsilon l^* L \frac{\partial}{\partial x} X^{(0)} + \epsilon^3 l^{*3} L^3 \left(\frac{2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} X^{(0)} + 2 \frac{\partial}{\partial x} X^{(2)} \right) \\ &\qquad + \epsilon^5 l^{*5} L^5 \left(\frac{2}{5!} \frac{\partial^5}{\partial x^5} X^{(0)} + \frac{2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} X^{(2)} + 2 \frac{\partial}{\partial x} X^{(4)} \right) + O(\epsilon^7) \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} &X^{(m,p+1)} - X^{(m,p-1)} \\ &\quad = 2\epsilon L \frac{\partial}{\partial y} X^{(0)} + \epsilon^3 L^3 \left(\frac{2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} X^{(0)} + 2 \frac{\partial}{\partial y} X^{(2)} \right) \\ &\qquad + \epsilon^5 L^5 \left(\frac{2}{5!} \frac{\partial^5}{\partial y^5} X^{(0)} + \frac{2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} X^{(2)} + 2 \frac{\partial}{\partial y} X^{(4)} \right) + O(\epsilon^7) \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} X^{(m,p-1)} + 4X^{(m,p)} + X^{(m,p+1)} \\ = 6X^{(0)} + \epsilon^2 L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} X^{(0)} + X^{(2)} \right) \\ + \epsilon^4 L^4 \left(\frac{2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} X^{(0)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} X^{(2)} + X^{(4)} \right) + O(\epsilon^6) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Développer les variables de cette manière inclut implicitement les ordres des dérivées macroscopiques tels que $\partial_y X^{(0)} = O(X^{(0)}/L)$ et $\partial_x X^{(0)} = O(X^{(0)}/l^* L) = O(X^{(0)}/L)$, conformément au fait que L est la taille caractéristique d'évolution du phénomène à l'échelle macroscopique.

Normalisation : Les propriétés de la cellule sont maintenant introduites par une étape de normalisation, dans le but de décrire la physique locale. En accord avec le fait que la méthode asymptotique est basée sur le développement et l'identification des termes de même ordre de ϵ dans les équations d'équilibre, la normalisation consiste à évaluer les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques par rapport à ϵ. Cette normalisation garantit que la nature des mécanismes identifiés sur le système discret de différences finies, est conservée quand $\epsilon \to 0$, qui représente le modèle homogénéisé. Dans le cas présent, les contrastes sont tels que :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\rho_y}{\rho_x} = O(1), \qquad \frac{l_y}{l_x} = \frac{h_y}{b_y} = \frac{h_x}{b_x} = O(1), \qquad \frac{h_y}{l_y} = \frac{h_x}{l_x} = O(\epsilon) \tag{4.25}$$

En remplaçant les expressions (4.20)-(4.24) avec les ordres de grandeur des paramètres (4.25) dans les équations d'équilibre (4.13), trois équations en puissances de ϵ émergent. Ensuite, en réorganisant les termes en puissances de ϵ, puis en résolvant successivement les équations à chaque ordre, les équilibres de moments autour de x et y permettent de simplifier l'équilibre des efforts suivant z. En conséquence, l'équation à l'ordre dominant émerge d'abord en impliquant les mécanismes dominants.

Sur un intervalle de fréquences tel que la longueur d'onde réduite de flexion $\lambda_b/(2\pi)$ est beaucoup plus grande que la taille des éléments poutre, alors la longueur macroscopique est $L = O(\lambda_b/(2\pi)) = O(1/\delta)$. Il vient $(\delta L)^4 = \omega^2 \frac{\Lambda}{EI} L^4 = O(1)$, qui donne l'ordre de grandeur des termes inertiels par rapport aux termes de flexion :

$$\omega^2 \Lambda U = O\left(EI \frac{U}{L^4} \right) \quad \text{et donc} \quad \omega^2 l \Lambda U = \frac{EI}{l} \frac{U}{L^2} \frac{l^2}{L^2} = \varepsilon^2 O\left(\frac{EI}{l} \partial_x^2 U \right)$$

De ce fait, pour prendre en compte correctement les grandes longueurs d'onde, les termes d'inertie dans les développements (4.17),(4.18),(4.19) doivent être rééchelonnés de ε^2. Pour rappel, les termes d'inertie de torsion sont plus petits que ceux de flexion, d'un facteur $O(A/l^2)$. Ce facteur est petit mais indépendant de ε. Rigoureusement, les termes d'inertie de torsion seront aussi rééchelonnés de ε^2 même s'ils sont négligeables.

Par souci de simplicité et de comparaison avec les modèles existants, ces étapes sont décrites dans la section suivante pour l'obtention du modèle statique. La situation dynamique sera traitée dans un second temps.

4.2.2 Développements en statique

La description macroscopique est explicitée pour les moments autour de x et y, puis pour les efforts suivant z.

Les développements précédents sont introduits dans les équations aux différences finies (4.17), (4.18), (4.19) décrivant l'équilibre aux nœuds. Cela donne les équations d'équilibre à chaque ordre, dont la résolution par substitutions successives définit l'équation de comportement macroscopique.

L'équation d'équilibre des **moments autour de x** devient, aux deux premiers ordres :

$$\begin{cases} (\epsilon^0) & \dfrac{6E_yI_y}{l_y}\left[2\left(\dfrac{\partial U^0}{\partial y}-\Theta_x^0\right)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial U^0}{\partial y}=\Theta_x^0 \\ (\epsilon^2) & \dfrac{6E_yI_y}{l_y}\left[2\left(\dfrac{\partial U^2}{\partial y}-\Theta_x^2\right)+\dfrac{l_y^2}{3}\left(\dfrac{\partial^3 U^0}{\partial y^3}-\dfrac{\partial^2\Theta_x^0}{\partial y^2}\right)\right]+G_x\mathcal{I}_x l_x\ \dfrac{\partial^2\Theta_x^0}{\partial x^2}=0 \end{cases} \tag{4.26}$$

L'équilibre des termes d'ordre ϵ^0 génère une équation imposant une condition cinématique. Cette condition cinématique identifie la rotation autour de x au gradient de la déflexion le long de y, ce qui est cohérent avec une cinématique de poutre d'Euler. L'équilibre des termes d'ordre ϵ^2 produit une deuxième équation qui relie les variables d'ordre 2 aux termes d'ordre 0.

L'équation d'équilibre des **moments autour de y** se déduit en replaçant y par x et inversement.

$$\begin{cases} (\epsilon^0) & \dfrac{6E_xI_x}{l_x}\left[2\left(\dfrac{\partial U^0}{\partial x}-\Theta_y^0\right)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial U^0}{\partial x}=\Theta_y^0 \\ (\epsilon^2) & \dfrac{6E_xI_x}{l_x}\left[2\left(\dfrac{\partial U^2}{\partial x}-\Theta_y^2\right)+\dfrac{l_x^2}{3}\left(\dfrac{\partial^3 U^0}{\partial x^3}-\dfrac{\partial^2\Theta_y^0}{\partial x^2}\right)\right]+G_y\mathcal{I}_y l_y\ \dfrac{\partial^2\Theta_y^0}{\partial y^2}=0 \end{cases} \tag{4.27}$$

L'équilibre des termes d'ordre ϵ^0 génère une équation imposant une seconde condition cinématique. Celle-ci identifie la rotation autour de y au gradient de la déflexion le long de x.

Enfin, l'équation d'équilibre des **efforts suivant z** devient, aux deux premiers ordres :

$$\begin{cases} (\epsilon^0) & \dfrac{12E_xI_x}{l_x}\left[\dfrac{\partial^2 U^0}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\Theta_y^0}{\partial x}\right]+\dfrac{12E_yI_y}{l_y}\left[\dfrac{\partial^2 U^0}{\partial y^2}-\dfrac{\partial\Theta_x^0}{\partial y}\right]=0 \\ (\epsilon^2) & \dfrac{12E_xI_x}{l_x}\left[\dfrac{\partial^2 U^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\Theta_y^2}{\partial x}+l_x^2\dfrac{2}{4!}\dfrac{\partial^4 U^0}{\partial x^4}-l_x^2\dfrac{1}{3!}\dfrac{\partial^3\Theta_y^0}{\partial x^3}\right]+ \\ & \qquad \dfrac{12E_yI_y}{l_y}\left[\dfrac{\partial^2 U^2}{\partial y^2}-\dfrac{\partial\Theta_x^2}{\partial y}+l_y^2\dfrac{2}{4!}\dfrac{\partial^4 U^0}{\partial y^4}-l_y^2\dfrac{1}{3!}\dfrac{\partial^3\Theta_x^0}{\partial y^3}\right]=0 \end{cases} \tag{4.28}$$

Synthèse : les développements des équations d'équilibre des moments autour de x (4.26) et y (4.27) à l'ordre ϵ^0 et ϵ^2 (contenant des termes de flexion et de torsion) permettent de simplifier l'équilibre des efforts suivant z (4.28), qui s'annule à l'ordre ϵ^0 puisque :

$$\frac{12E_xI_x}{l_x}\underbrace{\left[\frac{\partial^2 U^0}{\partial x^2}-\frac{\partial\Theta_y^0}{\partial x}\right]}_{=0}+\frac{12E_yI_y}{l_y}\underbrace{\left[\frac{\partial^2 U^0}{\partial y^2}-\frac{\partial\Theta_x^0}{\partial y}\right]}_{=0}=0 \tag{4.29}$$

et à l'ordre suivant ϵ^2, il reste :

$$\frac{12E_xI_x}{l_x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U^2}{\partial x}-\Theta_y^2\right)+\frac{l_x^2}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^4 U^0}{\partial x^4}-\frac{\partial^3\Theta_y^0}{\partial x^3}\right)\right] + \frac{12E_yI_y}{l_y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U^2}{\partial y}-\Theta_x^2\right)+\frac{l_y^2}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^4 U^0}{\partial y^4}-\frac{\partial^3\Theta_x^0}{\partial y^3}\right)\right]=0 \quad (4.30)$$

Les équilibres des moments suivant x et y à l'ordre ϵ^2 donnent des relations entre les variables d'ordre 2 et la dérivée du déplacement vertical d'ordre u^0 :

$$\frac{\partial U^2}{\partial y}-\Theta_x^2=\frac{-G_x\mathcal{I}_xl_xl_y}{12E_yI_y}\frac{\partial^2\Theta_x^0}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x}-\Theta_y^2=\frac{-G_y\mathcal{I}_yl_yl_x}{12E_xI_x}\frac{\partial^2\Theta_y^0}{\partial y^2}$$

puis, en utilisant les deux conditions cinématiques portant sur Θ_x^0 et Θ_y^0, il apparaît l'équation (4.31) dans laquelle le déplacement vertical u^0 est la seule variable macroscopique :

$$\frac{E_xI_x}{l_y}\frac{\partial^4U^0}{\partial x^4}+\frac{E_yI_y}{l_x}\frac{\partial^4U^0}{\partial y^4}+\left(\frac{G_x\mathcal{I}_x}{l_y}+\frac{G_y\mathcal{I}_y}{l_x}\right)\frac{\partial^4U^0}{\partial y^2\partial x^2}=0 \quad (4.31)$$

On obtient les efforts et les moments par unité de surface de la maille.

Pour se replacer dans le cadre usuel des plaques, ces résultats peuvent se reformuler de la manière suivante, où l'on introduit un vecteur d'efforts tranchants et un tenseur de moments de flexion et de torsion. Dans le modèle à l'ordre dominant, l'exposant $^{(0)}$ des variables est supprimé.

L'équation (4.31) est aussi écrite sous forme force-déplacement, qui émerge implicitement dès les équilibres (4.28), (4.26), (4.27) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{T}^{\mathcal{G}})=M_{xx,x,x}+M_{xy,y,x}+M_{yx,x,y}+M_{yy,y,y}=0 \\ \underline{T}^{\mathcal{G}}=-\underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}})=-\begin{pmatrix}M_{xx,x}+M_{xy,y}\\ M_{yx,x}+M_{yy,y}\end{pmatrix} \\ \underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}}=-\begin{pmatrix}M_{xx} & M_{xy}\\ M_{yx} & M_{yy}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{E_xI_x}{l_y}U_{,xx} & \frac{G_y\mathcal{I}_y}{l_x}U_{,xy}\\ \frac{G_x\mathcal{I}_x}{l_y}U_{,yx} & \frac{E_yI_y}{l_x}U_{,yy}\end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.32)$$

Ce modèle de plaque est plus riche que le modèle bi-laplacien de Kirchhoff $D\Delta^2 w=0$ pour une plaque isotrope. La présence de la rigidité de torsion sur les dérivées croisées confirme la nature orthotrope de la plaque équivalente obtenue. En faisant abstraction d'une dimension, il ne reste que de la flexion, et le terme central est du même ordre mais pas de même nature. Ce terme sur les dérivées croisées est lié au couplage flexion/torsion schématisé sur la figure 4.4.

Ce schéma montre que lorsqu'il y a, dans une poutre, une rotation due à un moment de flexion M, cela induit un moment de torsion $\mathcal{M}$ dans le segment adjacent, mais cette torsion résiste car il y a deux moments : *i)* le moment résistant de la poutre elle-même via torsion dans une inertie qu'il faut prendre en compte, *ii)* le moment de torsion réciproque récupéré par la poutre du fait de la déformation de la poutre adjacente.

Comparaison avec le modèle existant de plaque orthotrope en statique : L'équation 4.31 obtenue par homogénéisation est analogue à celle d'une plaque orthotrope équivalente

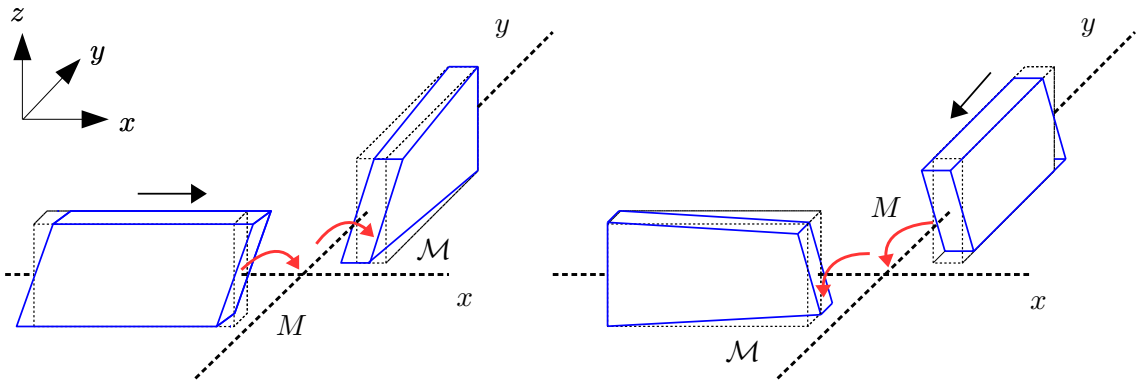


FIGURE 4.4 – Schéma du couplage réciproque flexion/torsion entre deux éléments poutre adjacents

proposée de Timoshenko and Woinowsky-Krieger (1959). Cette équation de plaque orthotrope équivalente est établie en considérant que l'équation d'une plaque naturellement orthotrope (constituée d'un matériau orthotrope), s'applique aussi à des plaques structurellement orthotropes. En effet, certaines structures faites de matériaux isotropes peuvent être de nature orthotrope, comme les treillis et les plaques ondulées ou raidies, pour lesquelles on parle d'orthotropie structurelle pouvant être approximée par une plaque orthotrope équivalente. Dans le cas de plaques mono- et bi-raidie, cette approximation est correcte si les raidisseurs sont suffisamment proches pour pouvoir décrire la plaque comme une plaque orthotrope homogène ayant des rigidités réparties sur sa surface.

Les principales étapes de la construction du modèle de plaque naturellement orthotrope sont rappelées ci-après, en supposant que les directions principales d'orthotropie du matériau coïncident avec les axes x et y définissant le plan de la plaque. Ces calculs sont classiques et sont empruntés à Timoshenko and Woinowsky-Krieger (1959) et Lekhnitskii (1968). Les relations contraintes-déformations d'une plaque isotrope ne sont plus valides dans ce cas. Il faut un nouvel ensemble de relations qui reflète les propriétés d'orthotropie du matériau :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} \qquad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \qquad \epsilon_x = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

avec E_x, E_y, ν_x, ν_y les modules d'Young et les coefficients de Poisson dans les direction x et y respectivement. G est le module de cisaillement, identique dans les cas isotrope et orthotrope :

$$G \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1+\sqrt{\nu_x \nu_y})}$$

Les rigidités de flexion D_x, D_y, D_{xy}, D_{xy}, et la rigidité de torsion D_s s'écrivent :

$$D_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}\frac{h^3}{12} \qquad D_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}\frac{h^3}{12} \qquad D_{xy} = D_{yx} = \frac{E_x\nu_y}{1-\nu_x\nu_y}\frac{h^3}{12} \qquad D_s = G\frac{h^3}{12}$$

et les moments permettent de calculer les forces de cisaillement :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = T_x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = T_y$$

$$\text{soit} \qquad T_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \text{et} \qquad T_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

avec $H = D_{xy} + 2D_s$. L'équation de la plaque orthotrope émerge :

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{4.33}$$

Cette équation est valide pour des plaques faites d'un matériau orthotrope (orthotropie naturelle) ainsi que pour des plaques rendues orthotropes du fait de leur structure (orthotropie structurelle). L'exploitation de (4.33) requiert les rigidités de flexion et torsion de la plaque, soit faite d'un matériau orthotrope, soit rendue orthotrope du fait de sa structure. La plaque structurellement orthotrope est réduite à une plaque naturellement orthotrope équivalente dont les propriétés élastiques sont les propriétés moyennes des composants de la plaque initiale. En particulier, cette équation peut être adaptée aux cas de plaques avec raidisseurs parallèles ou orthogonaux, ainsi que pour un treillis de poutres en utilisant des expressions de D_x, D_y, H équivalentes.

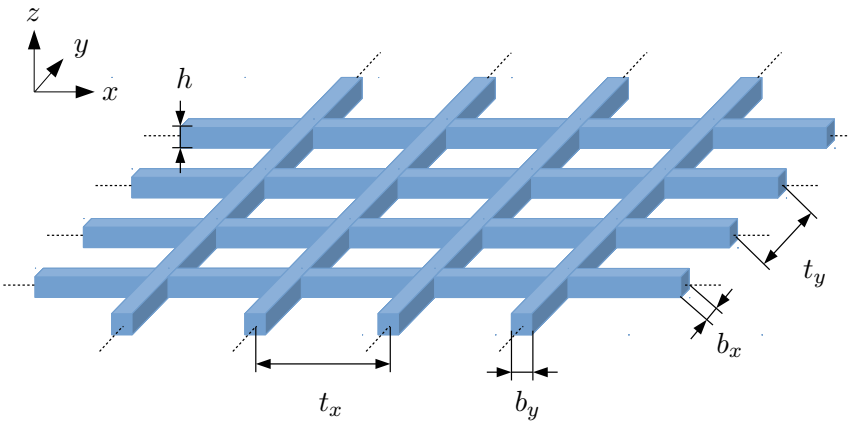


FIGURE 4.5 – Schéma du treillis de poutre $\mathcal{G}$ et notations utilisées par Timoshenko and Woinowsky-Krieger (1959)

Le treillis illustré sur la figure 4.5 se compose de poutres parallèles à l'axe x, espacées de t_y, ayant une rigidité de flexion $B_x = E_x I_x$ et une rigidité de torsion $C_x = G_x\mathcal{I}_x$, et de poutres parallèles à l'axe y, espacées de t_x, ayant une rigidité de flexion $B_y = E_y I_y$ et une rigidité de torsion $C_y = G_y\mathcal{I}_y$. Timoshenko précise par ailleurs que la taille des mailles doit être faible par rapport aux dimensions du treillis, ce qui est identique à notre hypothèse de séparation d'échelles. Ce système se transforme en une plaque orthotrope ayant des rigidités de flexion B_y/t_x et B_x/t_y par unité de longueur, et des rigidités de torsion C_x/t_y et C_y/t_x par unité de longueur, suivant les axes x et y respectivement. Les rigidités de flexion et torsion sont alors :

$$D_x = \frac{E_x I_x}{t_y}, \qquad D_y = \frac{E_y I_y}{t_x}, \qquad D_{xy} \approx 0, \qquad H = 2D_s = \frac{1}{2}\left(\frac{G_x\mathcal{I}_x}{t_y} + \frac{G_y\mathcal{I}_y}{t_x}\right)$$

La courbure des poutres dans une direction du plan est liée au moment par unité de longueur M_x et au moment de torsion M_{xy}, et de même dans l'autre direction. Ces équations sont introduites dans l'équation d'équilibre de la plaque pour donner une équation aux dérivées partielles d'ordre 4 comparable à celle d'une plaque orthotrope.

$$\frac{B_x}{t_y}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{C_x}{t_y} + \frac{C_y}{t_x}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{B_y}{t_x}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{4.34}$$

L'équation homogénéisée 4.31 régissant le déplacement transverse du treillis est identique à celle de la plaque équivalente orthotrope 4.34 établie par Timoshenko. Le modèle homogénéisé est à présent étendu en dynamique.

4.2.3 Extension en dynamique

En reprenant les équations d'équilibre (4.13) en y ajoutant la contribution des termes dynamiques de flexion et torsion portés respectivement par δ et γ, l'équation d'équilibre des **moments autour de x** devient :

$$\begin{cases} (\epsilon^0) & \dfrac{6E_yI_y}{l_y}\left[2\left(\dfrac{\partial U^0}{\partial y} - \Theta_x^0\right)\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial U^0}{\partial y} = \Theta_x^0 \\ (\epsilon^2) & \dfrac{6E_yI_y}{l_y}\left[2\left(\dfrac{\partial U^2}{\partial y} - \Theta_x^2\right) + \dfrac{l_y^2}{3}\left(\dfrac{\partial^3 U^0}{\partial y^3} - \dfrac{\partial^2 \Theta_x^0}{\partial y^2}\right)\right] + G_x\mathcal{I}_x l_x\left(\dfrac{\partial^2 \Theta_x^0}{\partial x^2}\right) + \omega^2\rho_x J_x l_x \Theta_x^0 = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

et celle des **moments autour de y** se déduit en replaçant y par x et inversement, pour donner, à l'ordre ϵ^0, une condition cinématique $\frac{\partial U^0}{\partial y} = \Theta_x^0$. L'équation d'équilibre des **efforts suivant z** devient

$$\begin{cases} (\epsilon^0) & \dfrac{12E_xI_x}{l_x}\left(\dfrac{\partial^2 U^0}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \Theta_y^0}{\partial x}\right) + \dfrac{12E_yI_y}{l_y}\left(\dfrac{\partial^2 U^0}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \Theta_x^0}{\partial y}\right) = 0 \\ (\epsilon^2) & \dfrac{12E_xI_x}{l_x}\left(\dfrac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \Theta_y^2}{\partial x}\right) + E_xI_xl_x\left(\dfrac{\partial^4 U^0}{\partial x^4} - 2\dfrac{\partial^3 \Theta_y^0}{\partial x^3}\right) + \omega^2\Lambda_x l_x u^0 \\ & + \dfrac{12E_yI_y}{l_y}\left(\dfrac{\partial^2 U^2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \Theta_x^2}{\partial y}\right) + E_yI_yl_y\left(\dfrac{\partial^4 U^0}{\partial y^4} - 2\dfrac{\partial^3 \Theta_x^0}{\partial y^3}\right) + \omega^2\Lambda_y l_y u^0 = 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

L'équation ϵ^0 des efforts s'annule et le report de la condition cinématique dans l'équation à l'ordre ϵ^2 donne :

$$\frac{\partial U^2}{\partial y} - \Theta_x^2 = \frac{-G_x\mathcal{I}_x l_x l_y}{12E_yI_y}\left(\frac{\partial^2 \Theta_x^0}{\partial x^2} + \gamma_x^2\Theta_x^0\right); \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x} - \Theta_y^2 = \frac{-G_y\mathcal{I}_y l_x l_y}{12E_xI_x}\left(\frac{\partial^2 \Theta_y^0}{\partial y^2} + \gamma_y^2\Theta_y^0\right)$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial y} - \Theta_x^2 = \frac{-G_x\mathcal{I}_x l_x l_y}{12E_yI_y}\frac{\partial^2 \Theta_x^0}{\partial x^2} - \omega^2\frac{\rho_x J_x l_x l_y}{12E_yI_y}\Theta_x^0; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x} - \Theta_y^2 = \frac{-G_y\mathcal{I}_y l_x l_y}{12E_xI_x}\left(\frac{\partial^2 \Theta_y^0}{\partial y^2} + \gamma_y^2\Theta_y^0\right)$$

qui est ensuite injectée dans l'équation à l'ordre ϵ^2 des efforts :

$$\frac{E_xI_x}{l_y}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{E_yI_y}{l_x}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x\mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y\mathcal{I}_y}{l_x}\right)\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + \omega^2\left(\frac{\rho_x J_x}{l_y}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\rho_y J_y}{l_x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x}\right)\omega^2 U \tag{4.37}$$

avec le terme de masse homogène à une masse surfacique. Le modèle est donc valable pour une plaque par unité de surface de maille. Le terme dynamique $\omega^2 U(l_x\rho_x J_x\partial_y^2 + l_y\rho_y J_y\partial_x^2)$ est représentatif de l'inertie de rotation de la section et (4.48) se réduit à (4.31) en l'absence de termes dynamiques, $\omega \to 0$. Par comparaison au cas statique, des termes d'ordres supérieurs apparaissent comme des correcteurs, mais dont la contribution devient non négligeable lorsque l'hypothèse de séparation d'échelles n'est plus respectée.

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{G}}) = \omega^2 \Lambda^{\mathcal{G}} U \qquad ; \qquad \Lambda^{\mathcal{G}} = \left(\dfrac{\Lambda_x}{l_y} + \dfrac{\Lambda_y}{l_x}\right) \\ \\ \underline{T}^{\mathcal{G}} = -\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}}) + \omega^2 \underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}}.\underline{\mathrm{grad}}(U) = \begin{pmatrix} M_{xx,x} + M_{xy,y} \\ M_{yx,x} + M_{yy,y} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \rho_y J_y U_{,x} \\ \rho_x J_x U_{,y} \end{pmatrix} = 0 \\ \\ \underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}} = -\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{E_x I_x}{l_y} U_{,xx} & \dfrac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} U_{,xy} \\ \dfrac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} U_{,yx} & \dfrac{E_y I_y}{l_x} U_{,yy} \end{pmatrix} ; \qquad \underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \rho_y J_y & 0 \\ 0 & \rho_x J_x \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.38}$$

En faisant abstraction d'une direction, (4.48) se réduit à l'équation de poutre de Bresse-Rayleigh, qui reprend l'équation d'Euler-Bernoulli en y incorporant un terme d'inertie de rotation ρJ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = \Lambda\omega^2 u(s) \\ T = -\dfrac{dM}{ds} + \omega^2 \rho J \dfrac{du}{ds} \\ M(s) = -EI\frac{d^2u(s)}{ds^2} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad EI\frac{d^4u}{dx^4} + \omega^2\rho J\frac{d^2u}{dx^2} = \Lambda_x\omega^2 u$$

Afin de finaliser le modèle de plaque bi-raidie, les modèles de treillis sont enrichis en introduisant la dynamique locale des plaques internes résonantes.

4.3 Introduction de la dynamique locale

4.3.1 Couplage entre le treillis de poutres et les plaques internes

En utilisant les résultats obtenus concernant le comportement de la plaque raidie en flexion (3.9) et en torsion (3.42), la contribution des plaques internes est introduite dans le treillis par l'intermédiaire d'une force $\mathcal{F}$ et d'un couple $\underline{\mathcal{C}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{G}}) = -\omega^2 \Lambda^{\mathcal{G}} U(x_1, x_2) - \mathcal{F} \\ \underline{T}^{\mathcal{G}} = \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}}) + \omega^2 \underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}}.\underline{\mathrm{grad}}(U) - \underline{\mathcal{C}} \end{cases} \tag{4.39}$$

où $\underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}}$ et $\underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}}$ restent identiques au cas du treillis seul et les termes de couplage $\mathcal{F}$, $\underline{\mathcal{C}}$, sont les actions de contact de la plaque sur le treillis qui s'expriment en termes de contraintes et d'efforts :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\mathcal{S}} \int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}\, \mathrm{ds} = -\frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\partial\mathcal{P}} \underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}}\, \mathrm{dl} \tag{4.40}$$

$$\underline{\mathcal{C}} = \frac{1}{S} \int_\Gamma \underline{x} \times \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}\, \mathrm{ds} = -\frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\partial\mathcal{P}} \underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}}\, \mathrm{dl} + \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{1}{2}(b_n^\perp \underline{n}^{\mathcal{P}})(\underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}})\, \mathrm{dl} \tag{4.41}$$

où $b_n^\perp$ se rapporte à la largeur de l'élément poutre orienté selon $\pm b_y$, respectivement $\pm b_x$, lorsque $\underline{n}^{\mathcal{P}} = \pm \underline{e}_x$ respectivement $\pm \underline{e}_y$.

Ces grandeurs dépendent des conditions limites appliquées aux plaques internes, et il reste maintenant à les évaluer explicitement en fonction de celles-ci. Les plaques internes sont soumises au déplacement vertical U du treillis, constant sur les bords de la cellule.

Remarque : le couple $z\sigma_{xy}$ résultant de la contrainte plan σ_{xy} s'annule à cause de la condition d'encastrement $\partial_y w = 0$ sur $\Gamma_x^\pm$, et de même pour la poutre perpendiculaire. La contrainte de cisaillement et le couple autour de x et y s'annulent. Si la plaque n'est pas solidaire de la poutre, la contrainte σ_{xy} est nulle puisque Γ est une surface libre.

4.3.2 Plaques internes entraînées par le treillis de poutres

On considère que la plaque interne $\mathcal{P}$ satisfait le critère d'élancement $\epsilon_p = d/l \ll 1$. L'équation de ses vibrations transverses est alors identique à celle introduite dans le chapitre précédent (section 3.2.3), soit

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{P}}) = -\omega^2 \Lambda'_p w \qquad \text{avec conditions limites sur } \partial\mathcal{P} = \Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm \\ \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}}) - \underline{T}^{\mathcal{P}} = 0 \\ \underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}} = -E'_p I_p((1-\nu_p)\underline{\underline{e}}(\underline{\nabla} w) + \nu_p \Delta w \underline{\underline{I}}_P) \end{cases} \tag{4.42}$$

Du fait des conditions (4.2) et (4.3) le système formé par le grillage avec les plaques internes résonantes est tel que la longueur d'onde dans la grille est grande comparée à la dimension l de la plaque. En conséquence, à l'ordre dominant, la cellule du grillage se déplace avec un mouvement de corps rigide défini par la déflexion uniforme U et la rotation dans le plan $\underline{\mathrm{grad}}(U)$. Ce mouvement es t imposé aux côtés de $\mathcal{P}$ encastrés à la grille. Pour rappel, l'accélération associée

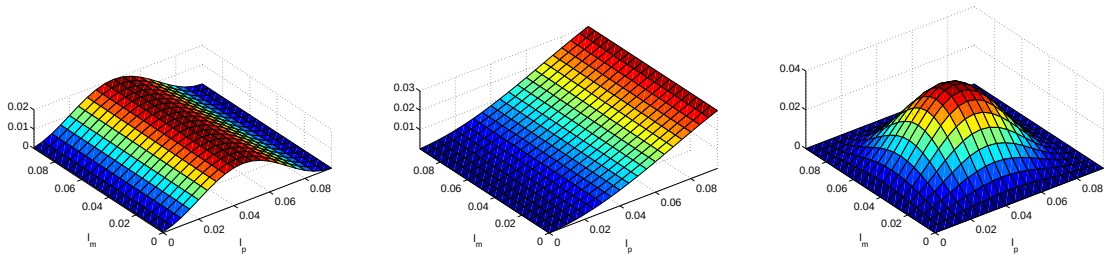
à la rotation est d'ordre $\omega^2|\underline{\text{grad}}(U)|^2 l = O(\omega^2 U)(U/L)(l/L)$, qui est plus petite d'un facteur $(U/L)(l/L)$ à l'accélération associée à la translation d'ordre $O(\omega^2 U)$. Alors, en condition de petites déformations $U/L \ll 1$ et de séparation d'échelle $l/L \ll 1$, à l'ordre dominant, la rotation de corps rigide peut être négligée, et seul le mouvement imposé par la déflexion uniforme U sera traitée.

La dynamique de la plaque interne dépend des conditions aux limites sur son contour. Afin d'explorer l'influence de celles-ci sur le comportement, les plaques internes $\mathcal{P}$ seront étudiées dans trois configurations différentes décrites ci-dessous. Les modèles seront aussi enrichis par la prise en compte de masselottes ajoutées sur les plaques. L'utilisation de différentes conditions limites et de masses ajoutées sur les plaques permet de placer la résonance interne dans une large gamme de fréquences.

4.3.3 Conditions limites internes

Les plaques internes seront successivement étudiées avec trois conditions limites différentes illustrées sur la figure 4.6 et abrégées comme suit :

- **CFCF** (*Clamped-Free-Clamped-Free*) pour la plaque encastrée sur deux côtés opposés et libres sur les deux autres côtés opposés, donc seulement solidaire des poutres orientées en x, et libre de contact des poutres selon y,
- **CFFF** (*Clamped-Free-Free-Free*) pour la plaque encastrée sur un côté et libre sur les trois autres, donc solidaire sur un seul des côté des poutres orientées en x,
- **CCCC** (*Clamped-Clamped-Clamped-Clamped*) pour la plaque encastrée sur ses quatre côtés, donc solidaire des poutres x et y de la grille.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.6 – Déformée modale du mode fondamental pour les conditions limites (a) CFCF, (b) CFFF, (c) CCCC

Quelles que soient les conditions limites considérées, le problème élasto-dynamique de plaque (3.11) (2D (configuration CCCC) ou 1D (configurations CFCF et CFFF)) est un problème linéaire dans lequel la déflexion de la grille $U(x, y)$ est le terme forçant, uniforme à l'échelle de la plaque interne $\mathcal{P}$. La déflexion de la plaque interne s'écrit alors :

$$w(x, y, \underline{\xi}) = U(x, y)\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi}) \tag{4.43}$$

où $\underline{\xi} = \xi_x \underline{e}_x + \xi_y \underline{e}_y$ se rapporte au repère local de chaque plaque interne $\mathcal{P}$-plate, et $\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi})$ est la déflexion pour un déplacement unitaire de la grille. La grandeur $\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi})$ est solution du problème (3.11) dans la configuration spécifiée par les conditions limites (^{bc}). Ce problème est posé pour une plaque interne indépendamment de la grille. La résolution peut se faire analytiquement dans

le cas CCCC et analytiquement dans les cas CFCF et CFFF.

La section suivante détaille le couplage entre les plaques internes et le treillis et aboutit à une formulation générale du mouvement de la plaque globale. Les calculs détaillés concernant les caractéristiques dynamiques de chaque condition limite seront explicités ensuite.

4.3.4 Formulation homogénéisée du comportement de la plaque bi-raidie en flexion

L'effet des plaques internes est contenu dans la force $\mathcal{F}$, (4.40), et le couple $\underline{\mathcal{C}}$, (4.41) et peut être déduit de la déflexion de la plaque $\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi})$.

Concernant la force $\mathcal{F}$: en utilisant l'équilibre des forces transverses de $\mathcal{P}$, (3.11)-a ,$\mathcal{F}$ est ré-exprimée comme :

$$\mathcal{S}\mathcal{F}(x,y) = -\int_{\partial\mathcal{P}} \underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}}\,\mathrm{dl} = -\int_{\mathcal{P}} \mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds} = \omega^2\Lambda_p'\int_{\mathcal{P}} w\,\mathrm{ds}$$

i.e., en introduisant la notation $\langle - \rangle = \frac{1}{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{P}} -\mathrm{ds}$ pour la valeur moyenne sur la plaque

$$\mathcal{F}(x,y) = \Lambda_p'\left\langle \phi_\omega^{bc}\right\rangle \omega^2 U(x,y) \tag{4.44}$$

Concernant le couple $\underline{\mathcal{C}}$: pour calculer $\underline{\mathcal{C}}$ défini par (4.41), l'équilibre des forces transverses (3.11)-a intégré puis multiplié par la coordonnée locale $\underline{\xi}$ donne :

$$\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi}\mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds} = \omega^2\Lambda_p'\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi} w\,\mathrm{ds} = \omega^2\Lambda_p' U(x,y)\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi}\phi_\omega^{bc}\mathrm{ds}$$

Avec le théorème de la divergence et l'équilibre des moments de $\mathcal{P}$ (3.11)-b, le terme de droite devient :

$$\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi}\mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds} = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{div}(\underline{\xi}\otimes\underline{T}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds} - \int_{\mathcal{P}} \underline{T}^{\mathcal{P}}\,\mathrm{ds} = \int_{\partial\mathcal{P}} (\underline{\xi}\otimes\underline{T}^{\mathcal{P}}).\underline{n}^{\mathcal{P}}\,\mathrm{dl} - \int_{\mathcal{P}} \mathrm{div}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds}$$

tel que

$$\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi}\mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{ds} = \int_{\partial\mathcal{P}} \underline{\xi}(\underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{dl} - \int_{\partial\mathcal{P}} \underline{\underline{M}}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}}\,\mathrm{ds}$$

Remarquons que $\underline{\xi}(\underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}}) = -(\frac{l_n}{2}\underline{n}^{\mathcal{P}})(\underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}})$ où l_n se rapporte à $\pm l_x$, respectivement $\pm l_y$, lorsque $\underline{n}^{\mathcal{P}} = \pm\underline{e}_x$ respectivement $\pm\underline{e}_y$). En remplaçant ces résultats dans (4.41), il vient :

$$\mathcal{S}\underline{\mathcal{C}} = \omega^2\Lambda_p'\int_{\mathcal{P}} \underline{\xi} w\,\mathrm{ds} + \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{1}{2}(l_n + b_n)\underline{n}^{\mathcal{P}}(\underline{T}^{\mathcal{P}}.\underline{n}^{\mathcal{P}})\,\mathrm{dl}$$

De plus, puisque $\underline{T}^{\mathcal{P}} = T_x^{\mathcal{P}}\underline{e}_x + T_y^{\mathcal{P}}\underline{e}_y$ with

$$T_x^{\mathcal{P}} = -E_p'I_p'\partial^3_{\xi_x} w(x,y,\underline{\xi}) = -E_p'I_p' U(x,y)\partial^3_{\xi_x}\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi}) \quad ; \quad T_y^{\mathcal{P}} = -E_p'I_p' U(x,y)\partial^3_{\xi_y}\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi})$$

alors

$$\underline{\mathcal{C}}(x,y) = \underline{K}_\omega^{bc} U(x,y) \qquad ; \qquad \underline{K}_\omega^{bc} = \omega^2\Lambda_p'\underline{H}_\omega^{bc} - \frac{E'I_p'}{\mathcal{S}}\underline{C}_\omega^{bc} \tag{4.45}$$

avec $\underline{K}_\omega^{bc}$ un paramètre effectif élasto-inertiel dépendant de la fréquence et faisant intervenir les vecteurs $\underline{H}_\omega^*$ et $\underline{C}_\omega^*$. Les composantes de ces vecteurs sont alors explicitées :

$$H_{\omega_x}^{bc} = \langle \xi_x\phi_\omega^{bc}(\underline{\xi})\rangle \quad ; \quad C_{\omega_x}^{bc} = \frac{l_x + b_y}{2}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \left(\partial^3_{\xi_x}\phi_\omega^{bc}|_{-\frac{l_x}{2},\xi_y} + \partial^3_{\xi_x}\phi_\omega^{bc}|_{\frac{l_x}{2},\xi_y}\right)\mathrm{d}\xi_y \tag{4.46}$$

et les composantes suivant y s'obtiennent en échangeant x et y.

L'analyse du mouvement de la plaque bi-raidie aboutit à une formulation englobant les mécanismes locaux de flexion et de torsion. Ces mécanismes font apparaître à l'échelle globale les modes associés *i)* à l'inertie de flexion du treillis enrichie par un terme atypique de masse effective associé aux plaques résonantes, et *ii)* à l'inertie de rotation du treillis couplée à une inertie de rotation effective et une raideur de torsion effective introduite par les plaques internes. En remplaçant (4.40) et (4.41) dans (4.39), on obtient le modèle effectif de la plaque bi-raidie qui décrit le comportement du treillis enrichi par la dynamique locale des plaques internes résonantes :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\underline{T}^{\mathcal{G}}) + \omega^2(\Lambda^{\mathcal{G}} + \Lambda'_p\langle\phi^{bc}_\omega\rangle)U = 0 \quad ; \quad \Lambda^{\mathcal{G}} = \dfrac{\Lambda_x}{l_y} + \dfrac{\Lambda_y}{l_x} \\ \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}}) - \underline{T}^{\mathcal{G}} - \omega^2 \underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}}.\underline{\mathrm{grad}}(U) + \underline{K}^{bc}_\omega U = 0 \\ \underline{\underline{M}}^{\mathcal{G}} = -\begin{pmatrix} \frac{E_xI_x}{l_y}\partial_x^2 U & \frac{G_yJ_y}{l_x}\partial_x\partial_y U \\ \frac{G_xJ_x}{l_y}\partial_y\partial_x U & \frac{E_yI_y}{l_x}\partial_y^2 U \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{J}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \rho_y J_y & 0 \\ 0 & \rho_x J_x \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.47}$$

La résonance interne apparaît par l'intermédiaire des paramètres effectifs $\langle\phi^{bc}_\omega\rangle$, et $\underline{K}^{bc}_\omega$ tous deux associés aux mouvement des plaques internes. Il y a donc un effet de masse apparente non conventionnel et un effet de rigidité lui aussi atypique qui relie le couple à la déflexion.

L'équation du mouvement prend alors la forme suivante, où le couple introduit une dérivée du premier ordre.

$$\begin{aligned} &\frac{E_xI_x}{l_y}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{E_yI_y}{l_x}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x\mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y\mathcal{I}_y}{l_x}\right)\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} \\ &+ \omega^2\left(\frac{\rho_y J_y}{l_x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + \left(K^{bc}_{\omega_x}\frac{\partial U}{\partial x} + K^{bc}_{\omega_y}\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \omega^2\left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p\langle\phi^{bc}_\omega\rangle\right)U \end{aligned} \tag{4.48}$$

Cette formulation reflète une situation de résonance interne et l'équation correspondante associée au treillis de poutres enrichie par la dynamique locale. Elle s'applique à différentes conditions limites de plaques internes. Il est maintenant possible de considérer successivement les conditions limites pour déterminer les paramètres $\langle\phi^{bc}_\omega\rangle$ et $\underline{K}^{bc}_\omega$, et détailler leurs propriétés.

Une première estimation des ordres de grandeur des deux termes non conventionnels de (4.48), permet d'établir, à partir de l'expression (4.46) de $\underline{K}^{bc}_\omega$ la relation suivante :

$$O(|K^{bc}_\omega|) = O\left(\omega^2\Lambda'_p l\langle\phi^{bc}_\omega\rangle\right) = O\left(\frac{E'I'_p}{l^3}\langle\phi^{bc}_\omega\rangle\right)$$

telle que

$$\frac{|K^{bc}_\omega||\nabla U|}{\Lambda'_p\langle\phi^{bc}_\omega\rangle U} = O\left(\frac{|K^{bc}_\omega|}{L\Lambda'_p\langle\phi^{bc}_\omega\rangle}\right) = O\left(\frac{l}{L}\right) \ll 1$$

L'effet non conventionnel apporté par le couple est d'un ordre inférieur à celui de l'inertie. De plus, en considérant des plaques internes avec des conditions limites symétriques (CCCC ou CFCF), alors la déflexion ϕ^{bc}_ω suit la même symétrie. Cela signifie que les couples exercés des deux côtés de l'élément poutre sont opposés et s'annulent, et que n'importe quelle condition symétrique donne $\underline{K}^{bc}_\omega = 0$. Pour ces raisons, seul l'effet de la masse effective sera considéré.

La détermination de ces paramètres se fait en considérant successivement les différentes conditions limites schématisées sur la figure 4.6. Nous commencerons pas les cas CFCF (section 4.3.5) et CFFF (section 4.3.6) car ils possèdent une solution analytique. En effet, la cellule étant en régime quasi-statique, le déplacement vertical identique sur le contour de la cellule, donc la plaque est toujours en flexion cylindrique. Le cas CCCC sera abordé en section 4.3.7 de manière numérique et analytique approchée.

4.3.5 Plaques internes CFCF

Dans ce cas, la plaque entraînée par la grille sur deux bords parallèles orientés selon y fonctionne en flexion cylindrique. En conséquence, l'équation bidimensionnelle de plaque (3.11) se réduit à une équation unidimensionnelle selon x uniquement. Les étapes de calculs sont présentées succinctement car cette partie est identique aux développements de la section 3.2.4. En conditions de séparation d'échelles et de périodicité, l'équation de plaque est identique à (3.13) :

$$\begin{cases} \partial_x T^{\mathcal{P}} = -\Lambda_p \omega^2 w; \qquad \partial_x M^{\mathcal{P}} - T^{\mathcal{P}} = 0; \qquad M^{\mathcal{P}} = -E'_p I_p \partial_x^2 w & \text{dans } \mathcal{P} \\ \forall y : \qquad w(y, x_{|\Gamma}) = U; \qquad \partial_x w(y, x_{|\Gamma}) = 0; & \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \tag{4.49}$$

Il en résulte que, *i)* y (ou x) jouent le rôle de paramètres impliqués dans la condition limite, et *ii)* les équations (4.49) forment un problème linéaire où le déplacement U est le terme forçant. Le champ $w(x)$ dans la plaque prend alors la forme :

$$w(x) = U\phi_\omega(x) \tag{4.50}$$

où $\phi_\omega(x)$ est la solution fréquentielle de l'équation de flexion mono-dimensionnelle harmonique dans laquelle apparaît le nombre d'onde de flexion $\delta^4 = \Lambda_p \omega^2/(E'_p I_p)$ défini par (et sous forme sans dimensions $\delta^* = \delta l_k/2$) :

$$\partial_x^4 \phi_\omega - \delta^4 \phi_\omega = 0 \quad ; \quad \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^\pm}) = 1 \quad ; \quad \partial_x \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^\pm}) = 0 \tag{4.51}$$

La résolution de (4.51) est directe puisqu'en cherchant ϕ_ω sous la forme

$$\phi_\omega(x) = C_1 \sin(\delta x) + C_2 \cos(\delta x) + C_3 \sinh(\delta x) + C_4 \cosh(\delta x) \tag{4.52}$$

et en utilisant les conditions limites, le système linéaire possède comme solution :

$$\phi_\omega(x) = \frac{\cosh(\delta x)\sin(\delta^*) + \cos(\delta x)\sinh(\delta^*)}{\cosh(\delta^*)\sin(\delta^*) + \cos(\delta^*)\sinh(\delta^*)} \quad ; \quad -\frac{l_k}{2} < x < \frac{l_k}{2} \tag{4.53}$$

En introduisant $\langle \phi_\omega \rangle$ la valeur moyenne de ϕ_ω

$$\langle \phi_\omega \rangle = \frac{1}{l_k} \int_{-l_k/2}^{l_k/2} \phi_\omega(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\delta^*} \frac{1}{\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*)} \tag{4.54}$$

Conformément à (4.54) et en rappelant que $\omega = \delta^2 \sqrt{\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p}}$ et $\delta^* = \delta l_k/2$, la masse apparente (4.54) possède les mêmes propriétés qu'à la section 3.4.

4.3.6 Plaques internes CFFF

Ici encore, l'encastrement sur un unique côté le long de y implique la flexion cylindrique de la plaque qui fonctionne alors en console. À nouveau, l'équation de plaque (3.11) devient mono-dimensionnelle. Les équations élasto-dynamiques décrivant la plaque interne $\mathcal{P}$ en conditions de

séparation d'échelles et de périodicité s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_x T^{\mathcal{P}} = -\Lambda_p \omega^2 w; \qquad \partial_x M^{\mathcal{P}} - T^{\mathcal{P}} = 0; \qquad M^{\mathcal{P}} = -E'_p I_p \partial_x^2 w \quad \text{dans } \mathcal{P} \\ \forall y : \quad \begin{cases} w(y, x_{|\Gamma_x^-}) = U \\ \partial_x w(y, x_{|\Gamma_x^-}) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \partial_x^2 w(y, x_{|\Gamma_x^+}) = 0 \\ \partial_x^3 w(y, x_{|\Gamma_x^+}) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \tag{4.55}$$

Seule la condition limite à l'encastrement diffère par rapport au cas précédent. Le principe de résolution est identique au cas précédent. Le champ $w(x)$ prend alors la même forme que (4.50) où $\phi_\omega(x)$ est à nouveau la solution de l'équation :

$$\partial_x^4 \phi_\omega - \delta^4 \phi_\omega = 0 \;\text{ avec }\; \delta^4 = \frac{\Lambda_p \omega^2}{E'_p I_p} \;\; ; \;\; \begin{cases} \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^-}) = 1\,; \quad \partial_x \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^-}) = 0 \\ \partial_x^2 \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^+}) = 0\,; \qquad \partial_x^3 \phi_\omega(x_{|\Gamma_x^+}) = 0 \end{cases} \tag{4.56}$$

La résolution de (4.56) est directe, mais l'intervalle de calcul des paramètres effectifs diffère du cas précédent. En effet, en l'absence de symétrie, l'intervalle à considérer est $[0; l_p]$, et non plus $[-l_p/2; l_p/2]$. En cherchant ϕ_ω sous la forme (4.52) et en ré-exprimant les conditions limites, le terme de masse apparente $\langle \phi_\omega \rangle$est défini par :

$$\langle \phi_\omega \rangle = \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} \phi_\omega(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\delta l_x} \frac{\cosh(\delta l_x)\sin(\delta l_x) + \cos(\delta l_x)\sinh(\delta l_x)}{1 + \cos(\delta l_x)\cosh(\delta l_x)} \tag{4.57}$$

et tracé sur la figure 4.7. À partir de l'expression (4.57) et en notant $\omega = \delta^2 \sqrt{\frac{E'_p I_p}{\Lambda_p}}$ les propriétés de la masse apparente sont les suivantes :

— $\langle \phi_\omega \rangle \to 1$ lorsque $\delta \to 0$ i.e. quand $\omega \to 0$, ce qui est cohérent avec le fait qu'en statique, la masse apparente de $\mathcal{P}$ est sa masse réelle.

— $\langle \phi_\omega \rangle \to \pm\infty$ quand $\cos(\delta l_k) + \cosh(\delta l_k) = -1$ qui correspond aux fréquences propres $\{\omega_n\}$ des modes de la plaque $\mathcal{P}$ en console. Quand $\omega \to \omega_n^-$, la masse apparente de $\mathcal{P}$ tend vers l'infini positif, et vers l'infini négatif pour $\omega \to \omega_n^+$

— $\langle \phi_\omega \rangle = 0$ quand $\delta l_k \approx \pi(n - 1/2)$, soit $\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_k}\right)^2 \sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}}$ entre ω_n et ω_{n+1}. Alors, dans l'intervalle $[\omega_n, \omega_{0n}]$ la masse apparente de $\mathcal{P}$ est négative.

4.3.7 Plaques internes CCCC

Pour ce cas, l'équation de plaque (3.11) est considérée sous sa forme complète. Les équations élasto-dynamiques décrivant la plaque $\mathcal{P}$ avec ses quatre côtés encastrés sont :

$$E'_p I_p \widetilde{\Delta}^2 w = \Lambda_p \omega^2 w; \qquad \begin{cases} w(\Gamma_x^\pm) = U(x,y)\,; \quad \partial_x w(x_{|\Gamma_x^\pm}) = 0 \\ w(\Gamma_y^\pm) = U(x,y)\,; \quad \partial_y w(y_{|\Gamma_y^\pm}) = 0 \end{cases} \tag{4.58}$$

L'ensemble (4.58) est un problème linéaire dans lequel le déplacement transverse du treillis $U(x, y)$ est le terme forçant homogène au premier ordre sur les bords de la plaque. La résolution de (4.58) n'est cependant pas directe puisque les conditions d'encastrement sur les quatre côtés

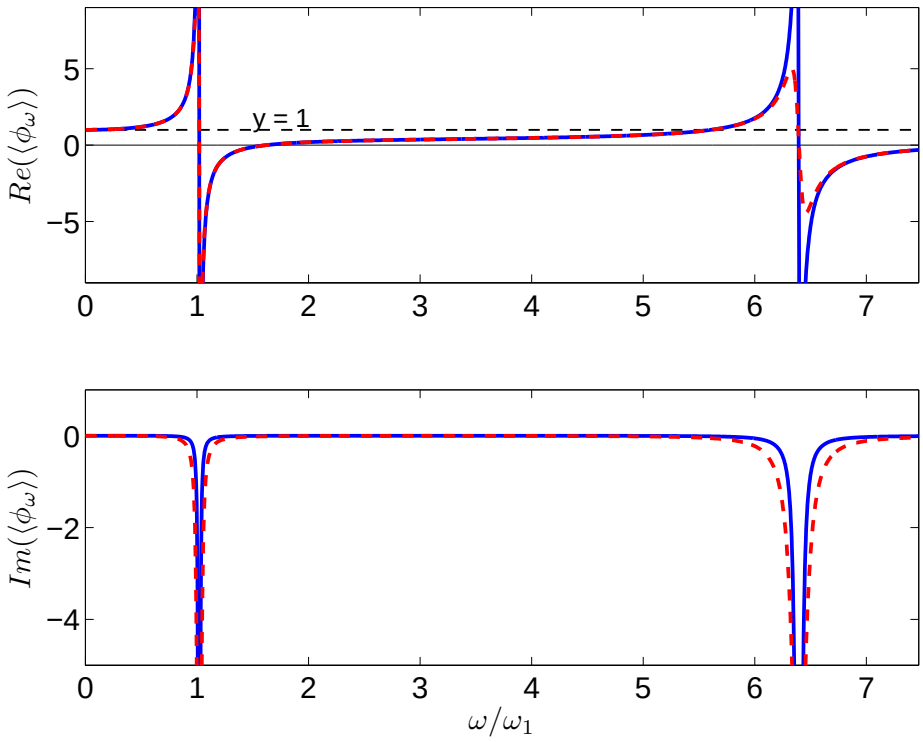


FIGURE 4.7 – Parties réelle et imaginaire de la masse apparente adimensionnelle $\langle\phi_\omega\rangle$ de la plaque CFFF en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_1, avec amortissement matériel $\eta = 0.5\%$ (−) , et $\eta = 2\%$ (−−).

ne sont pas compatibles avec une solution à variables séparées [1].

Le déplacement transverse de la plaque $w(x, y)$ est alors écrit comme une fonction de x et y. Il est toutefois possible d'introduire la grandeur $\langle\phi_\omega\rangle$, la valeur moyenne de ϕ_ω sur la surface de la plaque, sans que l'expression analytique soit connue :

$$\langle\phi_\omega\rangle = \frac{1}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} w(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.59}$$

Cette masse apparente $\langle\phi_\omega\rangle$ de la plaque CCCC sera calculée par éléments finis puis réintroduite dans le modèle homogénéisé. En utilisant les résultats du chapitre précédent, on sait

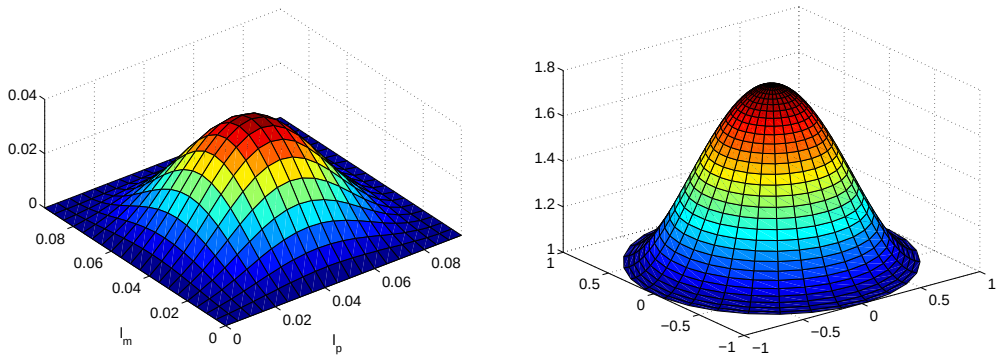
1. Par opposition au cas d'une plaque simplement supportée sur deux ou quatre côtés (solution de Navier ou Levy), il n'existe pas de solution exacte à variables séparées lorsque la plaque est encastrée ou libre sur plus de trois côtés, ou plus de deux côtés adjacents. En effet, pour des conditions limites autres que des supports simples, la recherche de solutions exactes de type Navier ou Levy se heurte à quelques difficultés mathématiques au niveau du choix de la fonction de forme qui vérifie simultanément l'équation différentielle et les conditions limites imposées. Cela est du au fait que le système formé par l'équation de plaque et ses conditions limites (libre ou encastrée) ne peut pas être séparé. Par exemple, si le déplacement d'une plaque complètement encastrée est décrit sous forme de variables séparées, et que l'on applique les huit conditions limites pour trouver les huit constantes, deux conditions limites sont incompatibles et mènent à une solution impossible. On démontre ainsi par l'absurde que l'hypothèse de séparation des solutions est erronée. Il existe cependant des solutions analytiques approximées donnant les modes propres et fréquences propres. L'ouvrage de Leissa (1969) apporte de nombreuses informations concernant le calcul de fréquences propres approchées de la plaque CCCC. D'après Wu et al. (2007), il semble aussi possible d'approximer le problème aux valeurs propres d'une plaque rectangulaire par des fonctions de Bessel préalablement réécrites en coordonnées cartésiennes, mais les résultats de fréquences propres présentés ne sont pas meilleurs que le calcul par éléments finis, comparé à la méthode de Rayleigh-Ritz

que $\langle\phi_\omega\rangle \to 1$ lorsque $\omega \to 0$ car la masse apparente de $\mathcal{P}$ en statique est sa masse réelle, et que la fonction possède des singularités aux fréquences associées à des modes propres de moyenne spatiale non nulle ($m = 1,\ n = 1, 3, 5, \ldots$). Le tableau 4.1 donne les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega l^2 \sqrt{\lambda_p / E'_p I_p}$ pour une plaque carrée de côté $l = l_x = l_y$. Ces fréquences sont calculées avec la méthode d' Arenas (2003), qui considère que la solution de l'équation de plaque est le produit de deux fonctions de x et y (produit de poutres).

		m			
		1	2	3	4
n	1	36.1087	73.7372	132.4831	211.3431
	2	73.7372	108.8499	165.9226	244.0287
	3	132.4831	165.9226	220.9063	297.4932
	4	211.3431	244.0287	297.4932	372.5179

TABLE 4.1 – Fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ calculées analytiquement pour une plaque encastrée carrée

Ces valeurs du tableau 4.1 sont classiques et la performance de la méthode est déjà reconnue, mais cette dernière étant fondée sur les modes propres d'une poutre bi-encastrée, elle n'est utilisable que pour la détermination des fréquences propres, si bien que la masse apparente ne peut être connue qu'aux fréquences propres (et non en fonction de la fréquence). En revanche, le problème d'une plaque circulaire encastrée sur son pourtour possède une solution analytique qui permet de calculer la masse apparente en fonction de la fréquence. Cette approximation est justifiée par le fait que le premier mode de plaques encastrées circulaire ou carrée sont proches, comme illustré sur la figure 4.8



(a) (b)

FIGURE 4.8 – Déformée modale du mode fondamental CCCC (a) et circulaire encastrée (b)

4.3.8 Plaques internes circulaires

La formulation empruntée à Leissa (1969) permet de poser le problème. Pour une plaque circulaire de rayon a, l'équation du mouvement pour des vibrations libres s'écrit :

$$D\nabla^4 w + \Lambda_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{où} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

À une fréquence donnée $w(r, \theta, t) = W(r, \theta)\exp(i\omega t)$, l'équation du mouvement devient $D\nabla^4 w - \Lambda_p \omega^2 W = 0$. En posant $\delta^4 = \Lambda_p \omega^2 / D$, l'équation peut s'écrire $(\nabla^2 + \delta^2)(\nabla^2 - \delta^2)W = 0$.

On sépare les variables $W(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ et on obtient :

$$r^2\left(\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)\frac{1}{R}\pm\delta^2\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=0$$

Cette expression est satisfaite seulement si chaque expression est égale à la même constante k^2, et on écrit :

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+R\left(\pm\delta^2-\frac{k^2}{r^2}\right)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+k^2\Theta=0$$

Les solutions en Θ sont $\Theta = A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$ avec θ constant. Pour des plaques fermées en θ, la solution Θ doit être une fonction 2π-périodique et $k = n = 0, 1, 2, \ldots$. Les solutions en R nécessitent d'introduire la variable ξ pour écrire l'équation de Bessel

$$\frac{d^2R}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dR}{d\xi}+R\left(1-\frac{k^2}{\xi^2}\right)=0 \qquad \text{avec} \qquad \xi=\begin{cases}\delta r \text{ pour } \ \delta^2\\ i\delta r \text{ pour } -\delta^2\end{cases}$$

dont les solutions sont sous forme de séries, et classifiées en fonctions de Bessel. Pour $\xi = \delta r$, la solution est en termes de fonctions de Bessel du premier et du second genre, respectivement $J_k(\delta r)$ et $Y_k(\delta r)$. Pour $\xi = i\delta r$, la solution est en termes de fonctions de Bessel modifiées (fonctions de Bessel avec argument imaginaire) du premier et du second genre, respectivement $I_k(\delta r)$ et $K_k(\delta r)$. Pour des plaques fermées suivant θ, soit $k = n$, la solution R est $R(r) = CJ_n(\delta r)+DI_n(\delta r)+EY_n(\delta r)+FK_n(\delta r)$. Les fonctions $Y_n(\delta r)$ et $K_n(\delta r)$ sont singulières en $\delta r = 0$ donc pour une plaque sans trou central, $E = F = 0$. La plaque est encastrée sur son bord, les conditions limites de déplacement et de rotation sont $w(r = a, \theta, t) = U$ et $\partial_r w(r = a, \theta, t) = 0$, soit $R(r = a) = U$ et $d_r R(r = a) = 0$ et la forme de solution se met sous forme :

$$\begin{pmatrix}J_n(\delta a) & I_n(\delta a)\\ d_rJ_n(\delta a) & d_rI_n(\delta a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix}$$

Cette équation est satisfaite lorsque le déterminant est nul, soit, après transformation :

$$J_n(\delta a)I_{n+1}(\delta a)+I_n(\delta a)J_{n+1}(\delta a)=0 \tag{4.60}$$

Les racines δa de l'équation (4.60) pour $n = 0$ sont déterminées numériquement par la méthode de Newton-Raphson : $\delta a \approx [3,1962\ ;\ 6,3064\ ;\ 9,4394\ ;\ 12.5771]$, et permettent de calculer les fréquences propres de la plaque par la relation :

$$f^c_{m,n=0}=\frac{(\delta a)^2_{m,n=0}}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{E'_pI_p}{\Lambda_p}}$$

Pour de grands arguments $\delta a \gg 1$, l'expression (4.60) devient $J_0(\delta a)+J_1(\delta a) = 0$, et en utilisant le développement asymptotique de $J_n(\delta a)$ pour $\delta a \gg 1$, il vient $\tan(\delta a-(2n+1)\pi/4) = -1$, qui donne une solution approchée $\delta a \approx (n+2m)\pi/2$, et finalement $\omega = (n+2m)^2\frac{\pi^2}{4a^2}\sqrt{E'_pI_p/\Lambda_p}$, avec $n = 0$, $m = 1, 2, 3$ et $f^c = (2m)^2\frac{\pi}{8a^2}\sqrt{E'_pI_p/\Lambda_p}$ avec $m = 1, 2, 3$.

Les conditions limites permettent de calculer les coefficients de la forme de solution $R(r)$ ci-avant, et, après intégration de celle-ci sur le rayon, d'obtenir la masse apparente de la plaque circulaire :

$$\langle\phi_\omega\rangle=\frac{1}{S}\int_0^a r\phi dr=\frac{4}{\delta a}\frac{I_1(\delta a)J_1(\delta a)}{I_1(\delta a)J_0(\delta a)+I_0(\delta a)J_1(\delta a)} \tag{4.61}$$

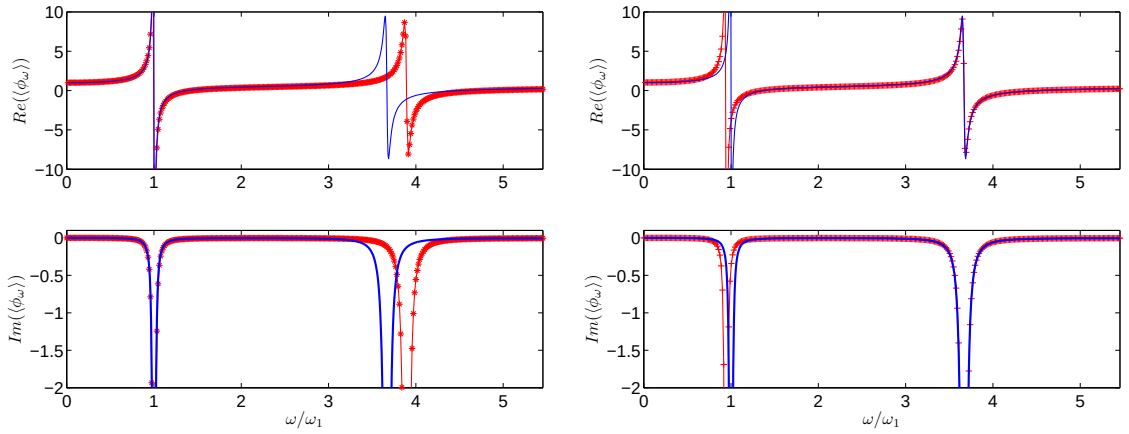
À partir de l'expression de (4.61), et en rappelant que $\omega = \frac{\delta^2}{a^2}\sqrt{\frac{E'_pI_p}{\Lambda_p}}$ on a :

— $\langle\phi_\omega\rangle \to 1$ lorsque $\delta \to 0$ i.e. quand $\omega \to 0$, car la masse statique de $\mathcal{P}$ est sa masse réelle.

— $\langle\phi_\omega\rangle \to \pm\infty$ lorsque $J_0(\delta a)I_1(\delta a) + I_0(\delta a)J_1(\delta a) = 0$ ce qui correspond aux fréquences propres $\{\omega_n\}$ de la plaque circulaire encastrée. Quand $\omega \to \omega_n^-$, la masse apparente de la plaque tend vers des valeurs infinies positives, tandis qu'elle tend vers des valeurs infinies négatives pour $\omega \to \omega_n^+$,

— $\langle\phi_\omega\rangle = 0$ lorsque $\delta l_p \approx m\pi$, i.e. aux fréquences $\omega_{0n} \approx \frac{(2m\pi)^2}{4a^2}\sqrt{\frac{E_p I_p}{\Lambda_p}}$ entre ω_n et ω_{n+1}. Alors, dans les intervalles $[\omega_n, \omega_{0n}]$ la masse apparente de $\mathcal{P}$ est négative.

Pour rappel, l'approximation proposée consiste à remplacer la masse apparente de la plaque CCCC calculée par éléments finis par la masse apparente de la plaque circulaire encastrée calculée analytiquement. Le rayon équivalent r_{eq1} de la plaque circulaire encastrée dont la première fréquence propre $f^c_{m=1,n=0}$ est identique à celle du premier mode de la plaque CCCC ($f_{m=1,n=1}$) est estimé par $r_{eq1} = 0.0532\ l_p$. Cette approximation convient parfaitement pour le premier mode, comme illustré sur la figure 4.9, et le calcul de la fréquence $f^c_{m=2,n=0}$ du second mode de la plaque circulaire de rayon r_{eq1} indique que l'erreur relative est de 6.1% par rapport à la fréquence $f_{m=1,n=3}$ du second mode de moyenne non nulle de la plaque CCCC. La fréquence du second mode est alors surestimée de 6.1%. Le rayon équivalent r_{eq2} de la plaque circulaire encastrée dont la seconde fréquence propre $f^c_{m=2,n=0}$ est identique à celle du second mode de la plaque CCCC ($f_{m=1,n=3}$) est estimé par $r_{eq2} = 0.0548\ l_p$. Le calcul de la fréquence $f^c_{m=1,n=0}$ du premier mode de la plaque circulaire de rayon r_{eq2} indique que l'erreur relative est de -5.7% par rapport à la fréquence $f_{m=1,n=1}$ du premier mode de la plaque CCCC. La fréquence du premier mode est alors sous-estimée de 5.7%, comme illustré sur la figure 4.9.



(a) (b)

FIGURE 4.9 – Parties réelle et imaginaire de la masse apparente adimensionnelle $\langle\phi_\omega\rangle$ de la plaque CCCC calculée par éléments finis (−) et de la plaque circulaire encastrée calculée analytiquement (∗) à partir de (4.61) pour r_{eq1} (a) et r_{eq2} (b), en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_1, avec amortissement matériel $\eta = 1\%$

4.4 Caractéristiques de dispersion

Considérons une onde harmonique de flexion se propageant dans la direction $\underline{n}_\theta = \cos(\theta)\underline{e}_x + \sin(\theta)\underline{e}_y$. Le mouvement $U(\underline{x}) = \exp(i(k_\theta \underline{n}_\theta.\underline{x})$ est piloté par (4.48).
Cependant, puisque (i) les termes associés aux moments polaires sont faibles par rapport aux inerties de translation, et (ii) les termes non conventionnel de couple sont d'ordre inférieurs à ceux d'inertie, alors ces deux termes peuvent être négligés à l'ordre dominant. Le nombre d'onde de flexion $k_\theta(\omega)$ est donné par :

$$k_\theta^4 \left(\frac{E_x I_x}{l_y} \cos^4(\theta) + \frac{E_y I_y}{l_x} \sin^4(\theta) + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \right) - \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right) = 0 \quad (4.62)$$

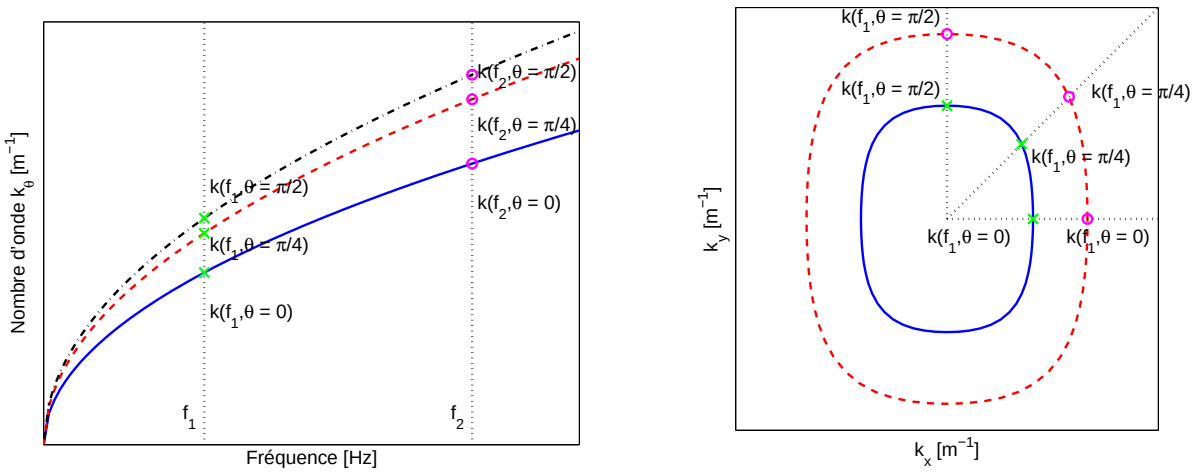
où le terme $\langle \phi_\omega^{bc} \rangle$ dépend des conditions limites des plaques internes et dont la valeur est rappelée dans le tableau 4.2 :

Conditions limites	**Paramètres effectifs** :
Plaque circulaire équivalente	$\langle \phi_\omega \rangle = \frac{4}{\delta a} \frac{I_1(\delta a) J_1(\delta a)}{I_1(\delta a) J_0(\delta a) + I_0(\delta a) J_1(\delta a)}$
Plaque interne CFCF	$\langle \phi_\omega \rangle = \frac{2}{\delta^*} \frac{1}{\coth(\delta^*) + \cot(\delta^*)}$
Plaque interne CFFF	$\langle \phi_\omega \rangle = \frac{1}{\delta l_p} \frac{\cosh(\delta l_p)\sin(\delta l_p) + \cos(\delta l_p)\sinh(\delta l_p)}{1 + \cos(\delta l_p)\cosh(\delta l_p)}$

TABLE 4.2 – Tableau récapitulatif du paramètre de masse effective $\langle \phi_\omega \rangle$

L'équation de dispersion (4.62) donne les nombres d'onde dans toute les directions du treillis. Pour des nombres d'ondes de valeurs (k_x, k_y), les surfaces formées par $\omega = f(k_x, k_y)$ sont les surfaces de dispersion. Pour une fréquence fixée, l'intersection de ces surfaces avec le plan de la fréquence donne le contour "iso-fréquence", appelé espace des nombres d'onde (*k-space*). Avec le repère orienté comme sur la figure 4.1, les nombres d'onde dans les axes du treillis sont $k_x = k(\theta = 0)$ et $k_y = k(\theta = \pi/2)$. Les caractéristiques de dispersion peuvent s'observer soit sur la courbe de dispersion montrant $k(\omega)$ à θ fixé, soit dans l'espace des nombres d'onde montrant $k(\theta)$ à ω fixée. Le principe de lecture est illustré sur la figure 4.10.

Du fait de la nature orthotrope de la plaque homogénéisée, la propagation dépend de la direction et en conséquence, le nombre d'onde dans le plan (k_x, k_y) ne décrira pas un cercle comme pour une plaque isotrope. De plus, la dynamique locale des plaques internes contenue dans $\langle \phi_\omega^{bc} \rangle$, perturbe l'équation de dispersion ci-dessus, qui diffère du cas classique où $k \propto \sqrt{\omega}$, et les comportements les plus atypiques sont attendus au voisinage des fréquences propres des



(a) (b)

FIGURE 4.10 – (a) Nombre d'onde dans les directions $\theta = 0$ ($-$), $\theta = \pi/4$ ($--$), $\theta = \pi/2$ ($-.-$) ; (b) Espace des nombres d'onde associé aux fréquences f_1 ($-$), et f_2 ($--$). Nombres d'onde à la fréquence f_1 ($\times$) et f_2 ($\circ$)

plaques internes.

Ces comportements seront mis en évidence ultérieurement lors de l'exploitation du modèle pour sa validation numérique et expérimentale.

4.5 Plaques internes avec masselottes

Des masses ajoutées sur les plaques internes permettent d'abaisser leurs fréquences de résonance et de décaler la résonance interne dans une large gamme de fréquences. La littérature fournit peu d'équations analytiques exactes sur les poutres ou les plaques avec masse ajoutée, mais principalement des raisonnements énergétiques de type Rayleigh. Toutefois, une équation analytique exacte de la poutre supportée-supportée avec une masse ajoutée en son centre est démontrée par Harris and Piersol (2002). On se propose alors d'étendre cette formulation à une équation analytique exacte pour le cas encastré-encastré et encastré-libre en considérant les mêmes hypothèses : *i)* la masse rigide est fixée de telle sorte qu'elle n'exerce pas de forces élastiques, *ii)* la fixation ne contraint pas la flexion, *iii)* la masse n'apporte pas de moment d'inertie.

4.5.1 Cas CFCF

La masse étant au centre, il est possible d'exploiter la symétrie, et seule la moitié du système est considérée. En $x = 0$, l'encastrement impose $\phi_\omega(x = 0) = \phi'_\omega(x) = 0$. La force de cisaillement à gauche de la masse est négative et s'écrit $F_S = -EI\phi'''_\omega$. Par symétrie, cette force est de même amplitude et de signe opposé du côté droit de la masse. La différence de cisaillement entre les deux côtés de la masse doit égaler le produit de la masse et son accélération $2EI\phi'''_\omega = m\ddot{y}$, avec ϕ'''_ω et $\ddot{y}$ considérés à mi-longueur. Pour des raisons de symétrie, la pente au centre est nulle (cette condition exclut les modes antisymétriques). En prenant une solution $y = \phi_\omega \cos(\omega_n t)$, l'équation du mouvement devient $2EI\phi'''_\omega = -m\omega_n^2\phi_\omega$. Les conditions limites permettent d'écrire

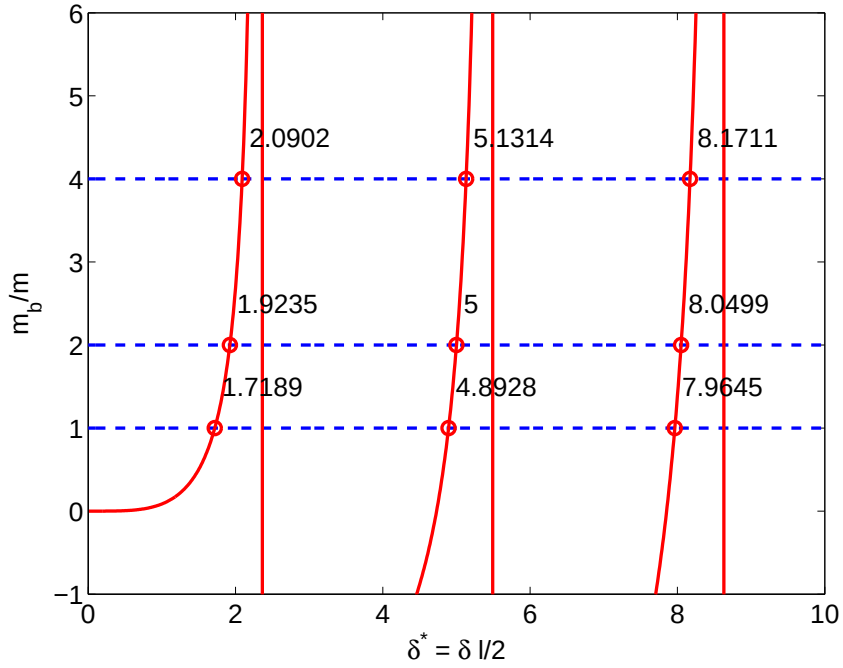


FIGURE 4.11 – Représentation graphique des racines δ^* de l'équation (4.63) en fonction du rapport m_b/m

la forme de solution (4.52) sous la forme :

$$\phi_\omega(x) = C_1\left(\sin(\delta x) - \sinh(\delta x)\right) + C_2\left(\cos(\delta x) - \cosh(\delta x)\right)$$

L'équation du mouvement et la condition de pente nulle au centre donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2EI\delta^3\left[C_1\left(-\cos(\delta^*) - \cosh(\delta^*)\right) + C_2\left(\sin(\delta^*) - \sinh(\delta^*)\right)\right] \\ \qquad = -m\omega_n^2\left[C_1\left(\sin(\delta^*) - \sinh(\delta^*)\right) + C_2\left(\cos(\delta^*) - \cosh(\delta^*)\right)\right] \\ \delta\left[C_1\left(\cos(\delta^*) - \cosh(\delta^*)\right) + C_2\left(-\sin(\delta^*) - \sinh(\delta^*)\right)\right] = 0 \end{cases}$$

La résolution donne l'équation fréquentielle associée :

$$2EI\delta^3\left[-\sin(\delta^*)\cosh(\delta^*) - \sinh(\delta^*)\cos(\delta^*)\right] = m\omega_n^2\left[\cosh(\delta^*)\cos(\delta^*) - 1\right]$$

soit, en fonction du rapport de masses :

$$\frac{m_b}{m} = \delta^* \frac{1 - \cosh(\delta^*)\cos(\delta^*)}{\sin(\delta^*)\cosh(\delta^*) + \sinh(\delta^*)\cos(\delta^*)} \tag{4.63}$$

avec $m_b = \rho_b V_b$ la masse de la poutre et $\delta^4 = \omega_n^2 m_b/EIl$ le nombre d'onde. Les premières solutions sont illustrées sur la figure 4.11. L'expression (4.63) contient l'équation fréquentielle d'une poutre bi-encastrée $1 - \cosh(\delta l)\cos(\delta l) = 0$, ainsi qu'un terme correcteur lié à la masse ajoutée.

Une comparaison des racines calculées analytiquement et par éléments finis (en adimensionalisant les fréquences par les caractéristiques de la poutre) est présentée dans le tableau 4.3 pour montrer la pertinence de la formulation (4.63).

		m_b/m			
		∞	4	2	1
Analytique (Newton-Raphson)	(1)	4.7300	4.1804	3.8471	3.4378
	(2)	10.9956	10.2627	9.9999	9.7855
Éléments finis	(1)	4.7300	4.1804	3.8471	3.4378
	(2)	10.9955	10.2627	9.9997	9.7854

TABLE 4.3 – Racines $2\delta^*$ de l'équation (4.63) calculées analytiquement et par éléments finis en fonction du rapport m_b/m, pour le premier mode symétrique (1), et le deuxième mode symétrique (2)

4.5.2 Cas CFFF

Dans ce cas, la masse est située à l'extrémité de la poutre, la symétrie n'est pas exploitable. En $x = 0$, l'encastrement impose $\phi_\omega(x = 0) = \phi'_\omega(x) = 0$. La force de cisaillement à gauche de la masse est négative et s'écrit $F_S = -EI\phi'''_\omega$. La force de cisaillement de la masse doit égaler le produit de la masse et son accélération $EI\phi'''_\omega = m\ddot{y}$, avec ϕ'''_ω et $\ddot{y}$ considérés à l'extrémité. On considère que le moment à l'extrémité libre est nul. En prenant une solution $y = \phi_\omega \cos(\omega_n t)$, l'équation du mouvement devient $EI\phi'''_\omega = -m\omega_n^2 X$. Les conditions limites permettent d'écrire la forme de solution (4.52) sous la forme $\phi_\omega(x) = C_1(\sin(\delta x) - \sinh(\delta x)) + C_2(\cos(\delta x) - \cosh(\delta x))$. L'équation du mouvement et la condition de moment nul à l'extrémité libre donne le système suivant :

$$\begin{cases} EI\delta^3 \left[C_1(-\cos(\delta l) - \cosh(\delta l)) + C_2(\sin(\delta l) - \sinh(\delta l))\right] \\ \qquad = -m\omega_n^2 \left[C_1(\sin(\delta l) - \sinh(\delta l)) + C_2(\cos(\delta l) - \cosh(\delta l))\right] \\ \delta^2 \left[C_1(-\sin(\delta l) - \sinh(\delta l)) + C_2(-\cos(\delta l) - \cosh(\delta l))\right] = 0 \end{cases}$$

La résolution donne l'équation fréquentielle associée :

$$EI\delta^3 \left(-1 - \cos(\delta l)\cosh(\delta l)\right) = m\omega_n^2 \left[\sinh(\delta l)\cos(\delta l) - \cosh(\delta l)\sin(\delta l)\right]$$

soit, en fonction du rapport de masses :

$$\frac{m_b}{m} = \delta l \, \frac{\sin(\delta l)\cosh(\delta l) - \cos(\delta l)\sinh(\delta l)}{1 + \cos(\delta l)\cosh(\delta l)} \tag{4.64}$$

avec $m_b = \rho_b V_b$ la masse de la poutre et $\delta^4 = \omega_n^2 m_b / EIl$ le nombre d'onde. Les premières solutions sont illustrées sur la figure 4.12. Lorsque la masse ajoutée m est nulle, l'équation (4.64) se réduit à l'équation classique de la poutre encastrée-libre $1 + \cos(\delta l)\cosh(\delta l) = 0$.

Une comparaison des racines calculées analytiquement et par éléments finis est présentée dans le tableau 4.4 pour montrer la pertinence de la formulation (4.64).

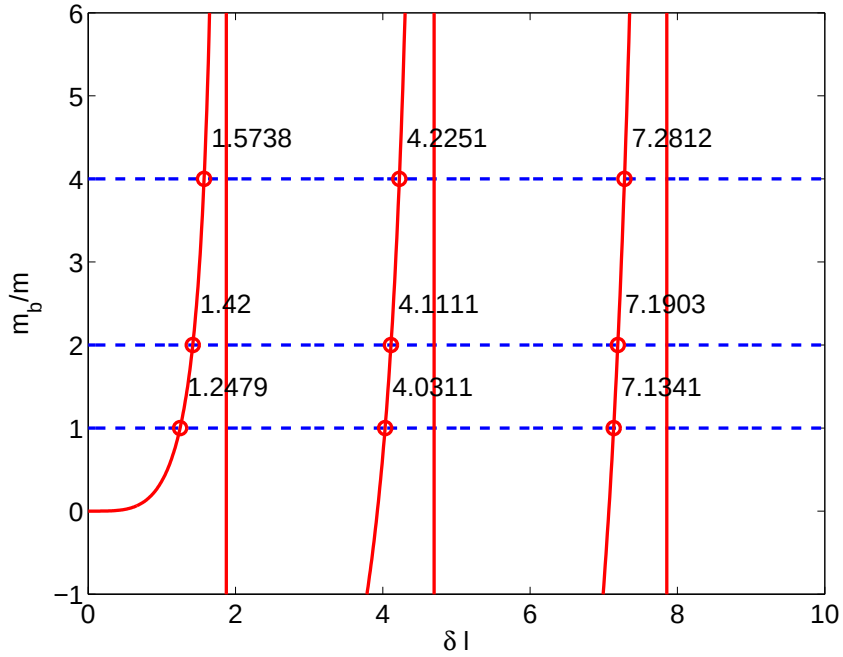


FIGURE 4.12 – Représentation graphique des racines δl de l'équation (4.64) en fonction du rapport m_b/m

		m_b/m			
		∞	4	2	1
Analytique (Newton-Raphson)	(1)	1.8751	1.5738	1.4200	1.2479
	(2)	4.6940	4.2251	4.1111	4.0311
Éléments finis	(1)	1.8751	1.5739	1.4198	1.2479
	(2)	4.6941	4.2251	4.1113	4.0310

TABLE 4.4 – Racines δl de l'équation (4.64) calculées analytiquement et par éléments finis en fonction du rapport m_b/m, pour le premier mode (1), et le deuxième mode (2)

4.6 Remarques finales

La méthode d'homogénéisation appliquée à la plaque bi-raidie permet de formuler un modèle homogénéisé décrivant son comportement en flexion, en y incluant les résonances locales des plaques internes. Les contrastes compatibles avec les situations de co-résonance et de couplage asymétrique entre le treillis et les plaques internes permettent de séparer la construction du modèle en deux étapes, d'abord l'homogénéisation du treillis de poutres, puis l'introduction de la dynamique locale.

La méthode d'homogénéisation des milieux discrets mène à un modèle analytique associé au comportement hors-plan du treillis de poutres seul, en considérant des éléments de type Euler. La formulation obtenue en statique inclut les rigidités de flexion et de torsion ainsi que le couplage flexion-torsion aux intersections, conformément à l'équation de plaque orthotrope équivalente établie par Timoshenko. L'extension du modèle de treillis en dynamique fait émerger une inertie de rotation, conformément au modèle de poutres de Rayleigh-Bresse. Cette méthode d'homogénéisation des milieux discrets pourrait permettre d'établir des modèles à partir de géométries variées comme des treillis à mailles triangulaires ou hexagonales. Quelle que soit la géométrie

modélisée, la pertinence du modèle est assurée tant que la condition de séparation d'échelles est respectée. Il serait possible d'enrichir le modèle de treillis en considérant des éléments locaux de type Rayleigh (flexion+inertie de rotation) ou Timoshenko (avec cisaillement seul ou flexion+cisaillement). Le formalisme matriciel utilisé ici est tout à fait adapté puisque seule la matrice de rigidité de l'élément poutre doit être changée.

L'introduction de la dynamique locale associée aux plaques internes résonantes est effectuée dans un second temps. La dynamique des plaques internes soumises au déplacement transverse des raidisseurs est ajoutée au modèle de treillis par l'intermédiaire des termes de couplage déjà introduits pour la plaque mono-raidie. Les développements du chapitre 3 donnent alors des arguments pour le calcul de ces termes de couplage et les paramètres effectifs sont déterminés analytiquement à partir des paramètres géométriques et mécaniques des plaques internes. Contrairement au cas de la plaque mono-raidie, le régime de propagation en modes guidés dans les plaques n'existe pas. Le comportement dynamique atypique en flexion est mis en évidence du fait de la cinématique inhomogène. En effet, les ondes de flexion dans le treillis sont affectées par la masse effective, l'inertie effective, et la rigidité de torsion effective des plaques internes. L'effet des plaques résonantes se manifeste par des singularités associées aux modes propres de la plaque et affecte les caractéristiques de dispersion. Précisément, trois types de conditions aux limites sont considérées pour les plaques internes : CFCF et CFFF qui sont calculables analytiquement, et CCCC pour laquelle une approximation de plaque circulaire est proposée. Cela permet d'introduire une dispersion atypique à diverses fréquences. L'ajout de masse ajoutée sur les plaques est aussi traité pour observer la résonance interne en couvrant un intervalle fréquentiel plus large.

Chapitre 5

Exploitation des modèles et validation numérique

Ce chapitre porte sur l'exploitation et la validation numérique des modèles homogénéisés établis aux chapitres 3 et 4. Après avoir utilisé les conditions de co-résonance et de couplage asymétrique pour spécifier les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques de dimensionnements réalistes, ce chapitre vise à *i)* mettre en œuvre des méthodes de type éléments finis pour calculer numériquement les courbes de dispersion et les comparer à celles issues des modèles homogénéisés, *ii)* identifier les fréquences de résonance interne et d'émergence des modes guidés pour les comparer à celles déterminées analytiquement, *iii)* mettre en évidence la nature propagative, évanescente, atténuée des ondes, ainsi que les couplages des mécanismes de flexion et de torsion avec les modes guidés.

Sommaire

5.1 Plaques mono-raidies étudiées 84
5.2 Caractéristiques de dispersion de la plaque mono-raidie 84
5.2.1 Ondes associées aux modes symétriques 84
5.2.2 Ondes associées aux modes antisymétriques 86
5.2.3 Modèle de guide d'onde inter-raidisseurs 87
5.2.4 Comparaisons avec la Wave Finite Element Method 89
5.2.5 Courbes de dispersion dans la plaque $\mathcal{R}_2$ 96
5.2.6 Influence de l'amortissement 96
5.3 Validation sur des plaques mono-raidies finies 100
5.3.1 Réponses en fréquence de la plaque mono-raidie finie 100
5.3.2 Reconstruction du nombre d'onde de flexion 102
5.3.3 IWC à partir de réponses calculées par éléments finis 105
5.4 Étude de la plaque bi-raidie 106
5.5 Vérifications préliminaires hors intervalles de résonances internes . 106
5.5.1 Validation sur le treillis orthogonal 106
5.5.2 Espaces des nombres d'onde pour le treillis et la plaque bi-raidie 107
5.6 Caractéristiques de dispersion de la plaque bi-raidie 108
5.6.1 Influence des conditions limites des plaques internes résonantes 108
5.6.2 Masse ajoutée sur les plaques internes 111
5.7 Remarques finales 115

5.1 Plaques mono-raidies étudiées

Dans cette section, les phénomènes décrits par le modèle homogénéisé, constitué des équations (3.21)-(3.22)-(3.42), sont illustrés et comparés à des simulations numériques à travers deux exemples. Le premier se concentre sur la propagation des ondes dans l'axe des renforts en situation infinie. Les courbes de dispersion sont d'abord calculées à partir du modèle homogénéisé, puis comparées à des approches numériques de type éléments finis (FEM) et éléments finis ondulatoire (WFEM). Le second porte sur l'analyse modale d'une plaque raidie de dimensions finies.

Les deux dimensionnements retenus correspondent aux deux options présentées en section 3.1.2 : plaque mono-raidie faite d'un même matériau avec plaques et poutres d'élancements différents, et une plaque mono-raidie faite de deux matériaux différents avec plaques et poutres de mêmes élancements. Ces dimensionnements sont désignés par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, et détaillés ci-après. La plaque $\mathcal{R}_1$ est constituée de poutres $\mathcal{B}_1$ et de plaques $\mathcal{P}_1$ faites d'aluminium, tandis que la plaque $\mathcal{R}_2$ se compose de poutres $\mathcal{B}_2$ en aluminium et de plaques $\mathcal{P}_2$ en plexiglas, beaucoup plus souple que l'aluminium. Les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 5.1.

	E, ν	ρ	Dimensions
$\mathcal{R}_1$			
Poutre $\mathcal{B}_1$	69×10^9 Pa, 0.3	2700 kg.m^{-3}	$l = b = 2.5$ cm
Plaque $\mathcal{P}_1$	69×10^9 Pa, 0.3	2700 kg.m^{-3}	$D = 18.78$ cm, $d = 3.3$ mm
$\mathcal{R}_2$			
Poutre $\mathcal{B}_2$	69×10^9 Pa, 0.3	2700 kg.m^{-3}	$l = b = 1$ cm
Plaque $\mathcal{P}_2$	3×10^9 Pa, 0.3	1200 kg.m^{-3}	$D = 12.3$ cm, $d = 1.8$ mm

TABLE 5.1 – Paramètres géométriques et propriétés mécaniques des plaques raidies étudiées

Les fréquences propres $f_I = \omega_I/(2\pi)$ des trois premiers modes symétriques et antisymétriques des plaques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :

$$f_{s1} = 519 \ ; \ f_{t1} = 1432 \ ; \ f_{s2} = 2808 \ ; \ f_{t2} = 4641 \ ; \ f_{s3} = 6934 \ ; \ f_{t3} = 9685 \text{ Hz} \quad \text{pour} \quad \mathcal{P}_1$$

$$f_{s1} = 208 \ ; \ f_{t1} = 573 \ ; \ f_{s2} = 1123 \ ; \ f_{t2} = 1857 \ ; \ f_{s3} = 2774 \ ; \ f_{t3} = 3874 \text{ Hz} \quad \text{pour} \quad \mathcal{P}_2$$

À partir des valeurs du tableau 5.1, les paramètres effectifs définis de manière théorique par homogénéisation permettent de calculer les courbes de dispersion pour $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (avec un coefficient d'amortissement structurel $\eta = 0.5\%$). L'analyse sera présentée en détails pour $\mathcal{R}_1$ et plus brièvement pour $\mathcal{R}_2$.

5.2 Caractéristiques de dispersion de la plaque mono-raidie

Les résultats sont présentés en séparant les ondes associées aux modes symétriques et antisymétriques, comme détaillé dans l'approche théorique (chapitre 3). Cela permet de comprendre les mécanismes de flexion de la poutre associés aux modes guidés symétriques, et de torsion de la poutre associés aux modes guidés antisymétriques.

5.2.1 Ondes associées aux modes symétriques

Les modes symétriques participent aux ondes de flexion dans le régime de poutres actives et aux ondes guidées dans la plaque avec poutres passives. Les parties réelle et imaginaire du

nombre d'onde de flexion lorsque les poutres sont actives (3.23) sont représentées sur la figure 5.1 en fonction de la fréquence jusqu'aux deux premiers modes propres symétriques de la plaque $\mathcal{P}_1$. On remarque que :

— en basses fréquences, le nombre d'onde correspond à celui de la poutre $\mathcal{B}$ dont la masse statique linéique serait corrigé par la masse de la plaque raidie. En effet, pour $\omega = 0$, la masse effective est la masse statique linéique de toute la structure (3.21),

— des variations significatives s'observent autour des fréquences propres f_{s1} et f_{s2} des modes symétriques de la plaque $\mathcal{P}$. Dans les intervalles de fréquences correspondant à une masse effective linéique négative $\Lambda_{eff} = \Lambda_b + \Lambda_p D\langle\phi_\omega\rangle$, les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde sont presque identiques (la différence provient de l'amortissement η introduit dans le modèle). Les ondes de flexion sont alors fortement atténuées,

— au voisinage de f_{s1} et f_{s2}, les ondes ne sont que très faiblement atténuées et leur vitesse de phase est plus faible que celles dans la poutre avec masse totale (limite basse), ou plus élevée (environ trois fois) que la vitesse dans la poutre seule (limite haute). En dehors des bandes fréquentielles de résonance, puisque la fréquence augmente, la masse modale de la plaque $\mathcal{P}$ diminue et le nombre d'onde tend vers celui de la poutre seule $\mathcal{B}$.

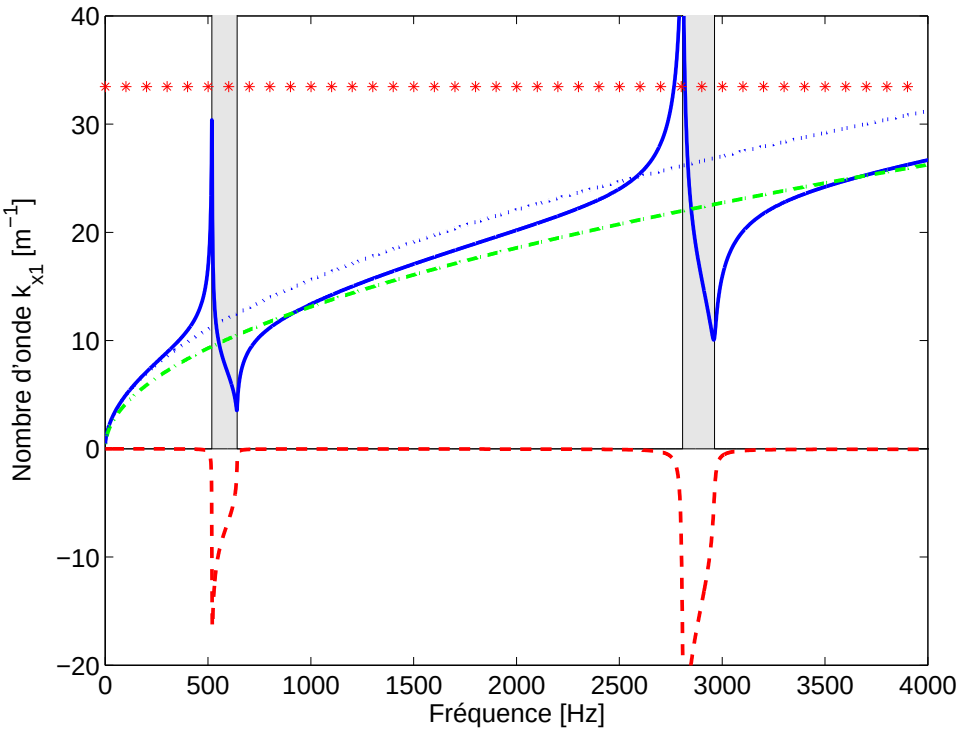


FIGURE 5.1 – Nombre d'onde de flexion dans l'axe des renforts de la plaque raidie $\mathcal{R}_1$ calculé à partir de (3.21), (partie réelle (−) et partie imaginaire (−−)). Nombre d'onde de flexion dans la poutre $\mathcal{B}$ seule (−.), et dans la poutre avec masse linéique statique de la plaque adjointe (···). Les intervalles de masse effective négative sont représentés en gris (■). La limite de validité du nombre d'onde de flexion dans la poutre seule est aussi tracé (∗)

5.2.2 Ondes associées aux modes antisymétriques

Les modes antisymétriques participent aux ondes de torsion en régime de poutres actives et aux ondes guidées antisymétriques dans la plaque avec poutres passives.

Les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde de torsion dans la poutre sont calculées à l'aide de (3.43) et représenté sur la figure 5.2. Il apparaît que :

— sur tout l'intervalle considéré, la contribution de la plaque $\mathcal{P}$ en flexion perturbe complètement le nombre d'onde de torsion de la poutre $\mathcal{B}$ seule,

— des bandes interdites (zones grises de la figure 5.2) où le nombre d'onde est purement imaginaire se localisent en basses fréquences, la suivante apparaissant après la première fréquence propre f_{tn} des modes antisymétriques de la plaque $\mathcal{P}$. Elles correspondent à des ondes de torsion évanescentes. Les fréquences de coupure sont déterminées par l'équation $\omega^2(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J^*_\omega) = E'_p I_p (D+b) C^*_\omega / D^2$ dont la résolution numérique donne 750 Hz, 1432 Hz, et 2463 Hz, en accord avec le calcul WFE direct.

— en dehors des zones évanescentes, une forte dispersion se produit au niveau des singularités associées aux fréquences propres des modes anti-symétriques f_{tn}.

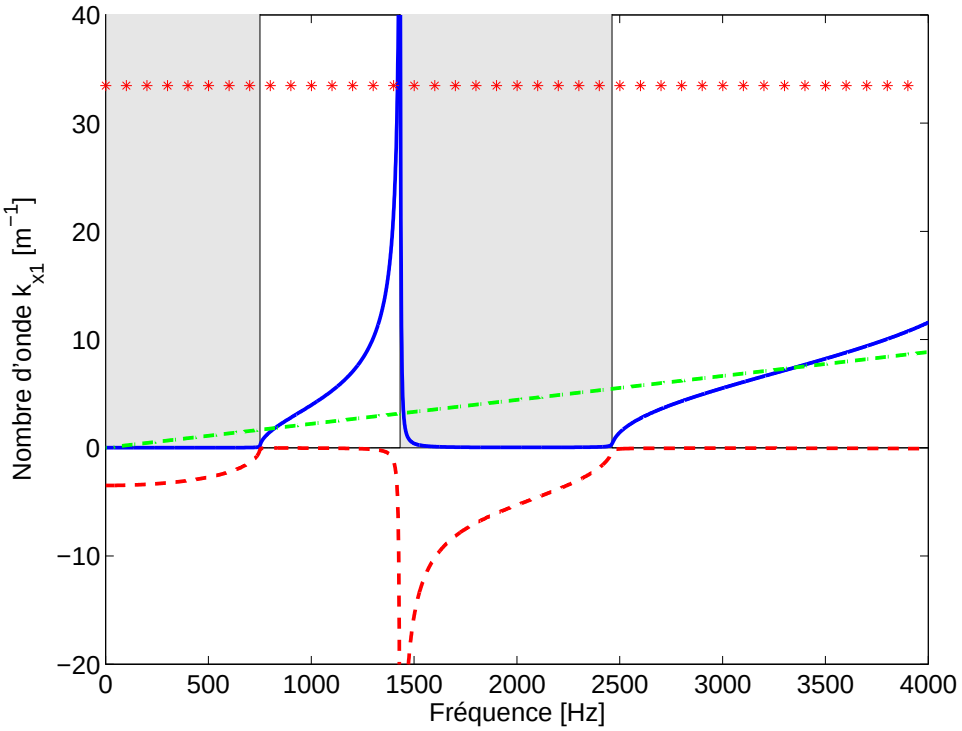


FIGURE 5.2 – Nombre d'onde de torsion (partie réelle (−) et imaginaire (−−)). Nombre d'onde de torsion dans la poutre $\mathcal{B}$ seule (−.). Intervalles où l'inertie de torsion effective est négative (■). Limite de validité du modèle de la poutre en flexion (∗)

5.2.3 Modèle de guide d'onde inter-raidisseurs

Le modèle de guide d'ondes inter-raidisseurs suppose que les guides d'ondes sont indépendants, et que la plaque interne est encastrée aux deux raidisseurs voisins immobiles.

Les courbes de dispersion associées aux guide d'ondes sont décrites par les expressions approchées (3.25) et (3.26), et sont illustrées sur la figure 5.3 dans le cas de la plaque $\mathcal{R}_1$.

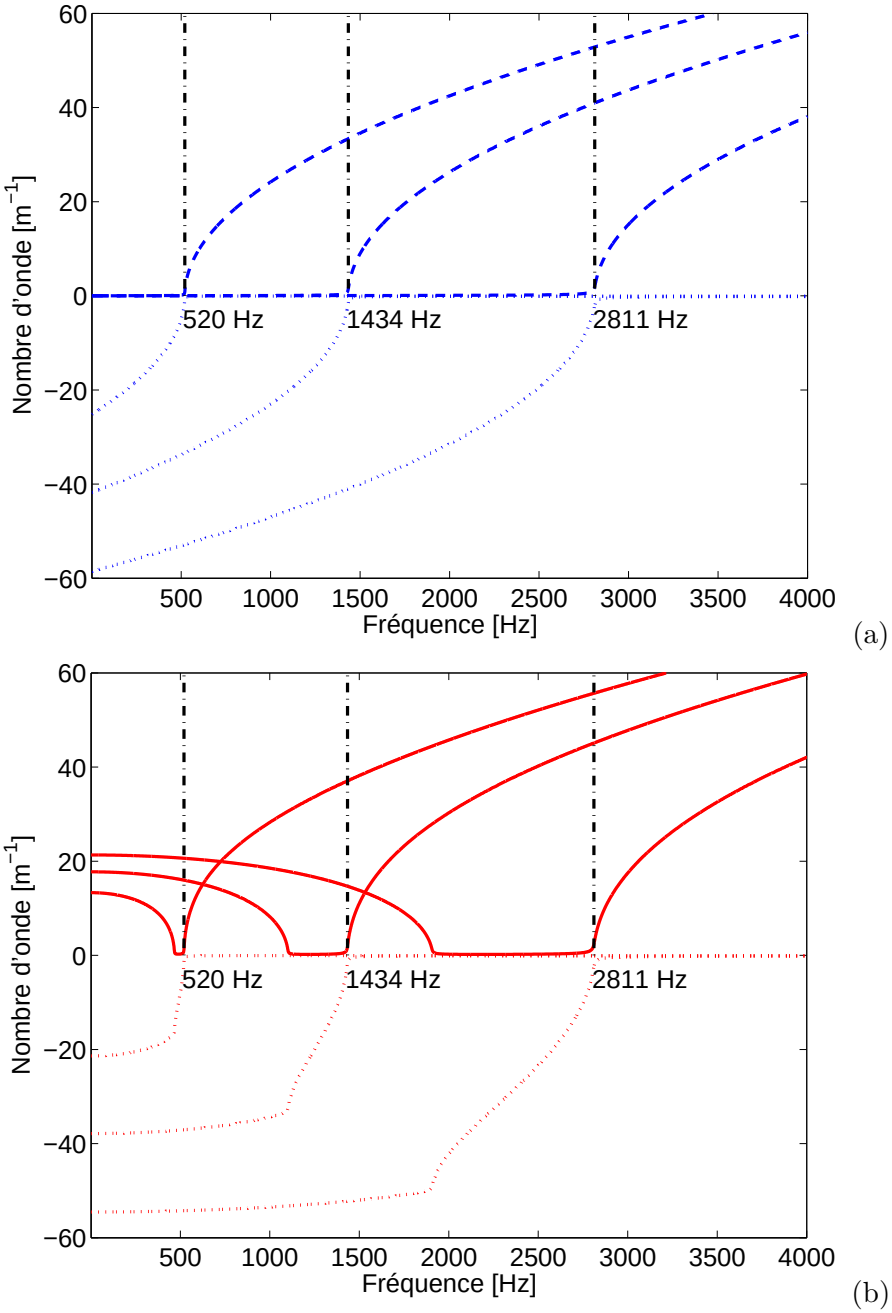


FIGURE 5.3 – Courbes de dispersion du guide d'onde estimées par (a) l'équation (3.25), partie réelle (−−) et imaginaire (···) et ; (b) l'équation (3.26) partie réelle (−) et imaginaire (···), avec le dimensionnement $\mathcal{R}_1$

La relation approchée (3.25) indique que les ondes guidées sont de nature évanescente jusqu'à leur fréquence de coupure, puis deviennent purement propagatives au delà. En effet la

figure 5.3(a) montre que le nombre d'onde est purement imaginaire avant la fréquence de coupure, et purement réel après cette fréquence. La figure 5.3(b) montre que le nombre d'onde est complexe avant la fréquence de coupure, et purement réel après cette fréquence. La seconde relation approchée (3.26) indique que les ondes sont d'abord très atténuées : leur partie imaginaire est plus grande que leur partie réelle, d'un facteur 1.6 pour le premier mode, 2.1 pour le deuxième, et 2.5 pour le troisième. Ces ondes deviennent ensuite purement évanescente dans un intervalle en deçà de leur fréquence de coupure. Au-delà des fréquences des modes propres de la plaque, ces ondes sont purement propagatives.

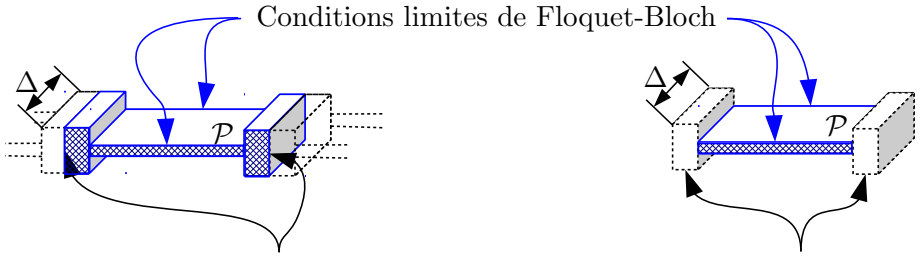
À ce stade, il n'est pas possible de déterminer quelle équation ((3.25) ou (3.26)) donne la meilleure estimation des courbes de dispersion des modes guidés. La section suivante compare les modèles analytiques avec les résultats obtenus par éléments finis.

5.2.4 Comparaisons avec la Wave Finite Element Method

La plaque raidie $\mathcal{R}_1$ est étudiée numériquement au moyen de la WFEM. Cette approche est fondée sur la théorie de Floquet-Bloch qui s'applique à des structures périodiques de manière exacte pour extraire les courbes de dispersion d'une cellule. La figure 5.4 montre les cellules utilisées pour le calcul des diagrammes de dispersion.

La cellule unitaire Ω utilisée pour le calcul numérique est représentée sur la figure 5.4 et possède une profondeur Δ. Elle est décrite par un modèle tri-dimensionnel et un matériau élastique linéaire isotrope. Des conditions de déphasage sont imposées sur les faces opposées de la cellule, sous la forme $u_b = \exp(-jk_{x_1}\Delta)u_f$ où u_f et u_b sont les déplacements des des faces avant et arrière, k_{x_1} est le nombre d'onde dans la direction $\underline{a}_1$. Pour une fréquence donnée, l'équilibre dynamique formulé à partir des matrices de masse et de raideur, mène à un problème aux valeurs propres dont la résolution permet d'obtenir les différentes branches du diagramme de dispersion. Par principe, ces approches numériques identifient tout les types d'ondes se propageant dans la structure.

L'implémentation de ce problème aux valeurs propres se fait au moyen de la WFEM Ichchou et al. (2008) améliorée par des méthodes de réduction modale examinées par Droz et al. (2014) et Zhou et al. (2015) regroupées sous la dénomination CWFEM (*Condensed Wave Finite Element Method*). Ces méthodes réduisent le nombre de degrés de liberté et condensent les matrices pour diminuer le temps de calcul. Par exemple, le temps de calcul est de 400 secondes pour la WFEM (7932 DDL), et 100 secondes pour la CWFEM (137 DDL).



(a) (b)

FIGURE 5.4 – Cellule périodique utilisée pour le calcul (a) du diagramme de dispersion complet Figure 5.5 , et (b) des modes guidés Figure 5.8

Le diagramme de dispersion des ondes se propageant dans l'axe des renforts est calculé par la méthode CWFEM puis montré sur la figure 5.5. En particulier :

— deux branches linéaires se distinguent facilement et sont attribuées aux ondes de compression et de cisaillement dans le plan. Celles-ci ne sont pas dispersives dans l'intervalle étudié. Leurs nombres d'onde k_c et k_s sont donnés par les valeurs moyennes de modules et de densités de la poutre $\mathcal{B}$ et de la plaque $\mathcal{P}$, soit

$$k_c = \omega\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\overline{\mu}}} \qquad \text{et} \qquad k_s = \omega\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\overline{E}}} \tag{5.1}$$

respectivement, où $\overline{E} = (E_b bl + E'_p dD)/S$, $\overline{\mu} = (\mu_b bl + \mu_p dD)/S$, $\overline{\rho} = (\rho_b bl + \rho_p dD)/S$, $S = bl + dD$.

— les autres branches correspondent à des ondes dispersives associées à des cinématiques hors-plan.

Cependant, l'identification des mécanismes de flexion ou de torsion à partir des courbes de dispersion uniquement n'est pas possible. Pour y parvenir, il faut adjoindre au diagramme de dispersion les cinématiques associées aux différentes branches. Ainsi, pour faciliter la lecture de la figure 5.5, les cinématiques associées aux modes guidée G1, G2, G3, aux ondes de flexion F1, F2, F3, aux ondes de torsion T1, T2, T3, aux ondes de cisaillement S et de compression C, sont illustrées à la figure 5.6

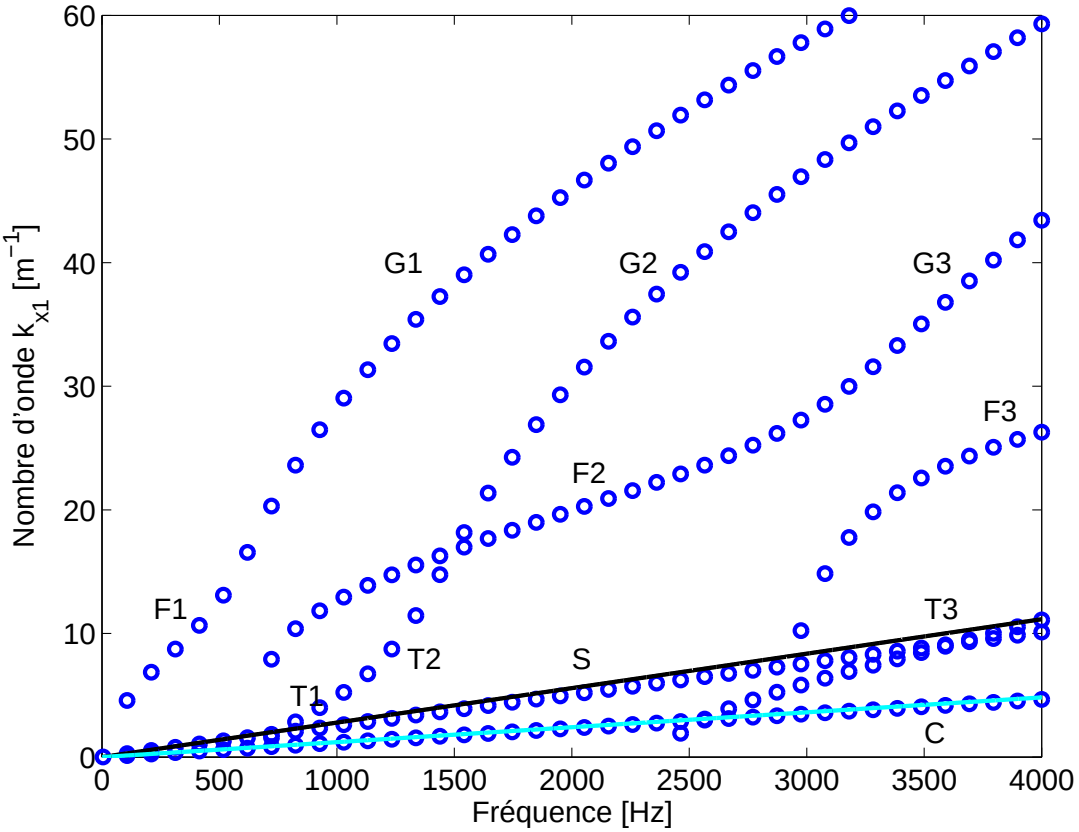
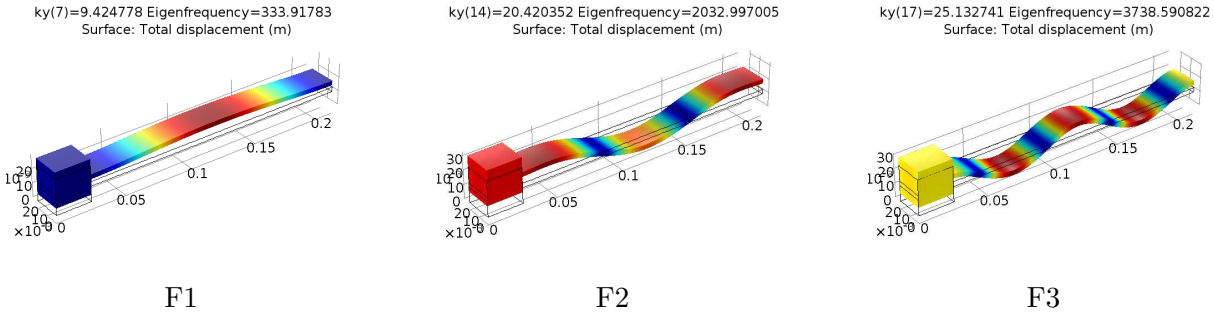
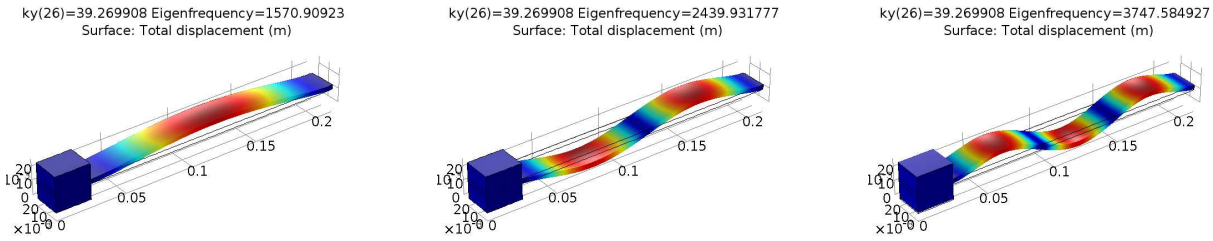


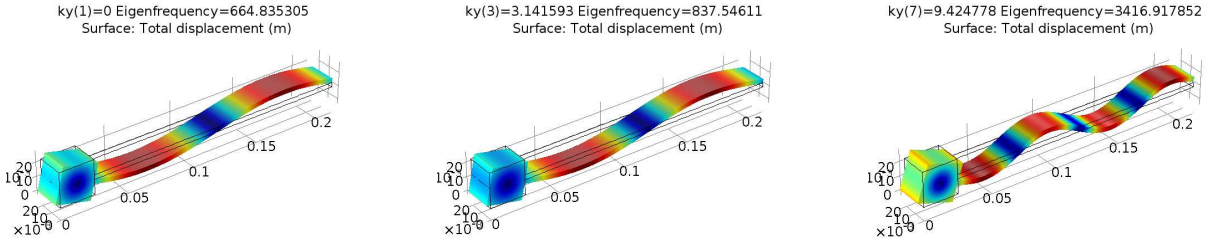
FIGURE 5.5 – Courbes de dispersion calculées par WFEM (−+) et CWFEM (∘), pour la plaque $\mathcal{R}_1$. Nombres d'onde de cisaillement (−) et de compression (−) estimés par (5.1).



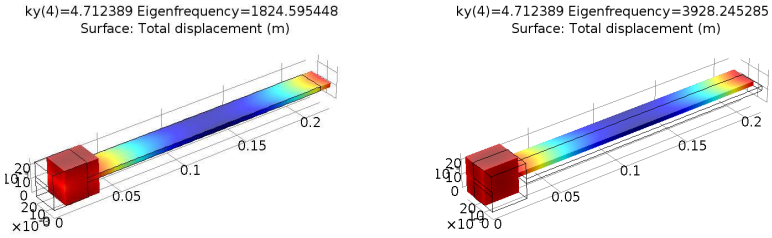
F1 F2 F3



G1 G2 G3



T1 T2 T3



S C

FIGURE 5.6 – Cinématiques associées au diagramme de dispersion de la figure 5.5

Validation préliminaire du modèle de guide d'onde

Les comparaisons avec les nombres d'ondes calculés par éléments finis sont montrées sur la figure 5.8 dans le cas des plaques $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Seule la partie purement réelle des solutions données par la seconde relation approchée (3.26) est conservée. Les deux formulations estiment correctement le déclenchement de l'onde à partir de sa pulsation ω_I, mais la seconde relation (3.26) est plus concordante avec le calcul éléments finis.

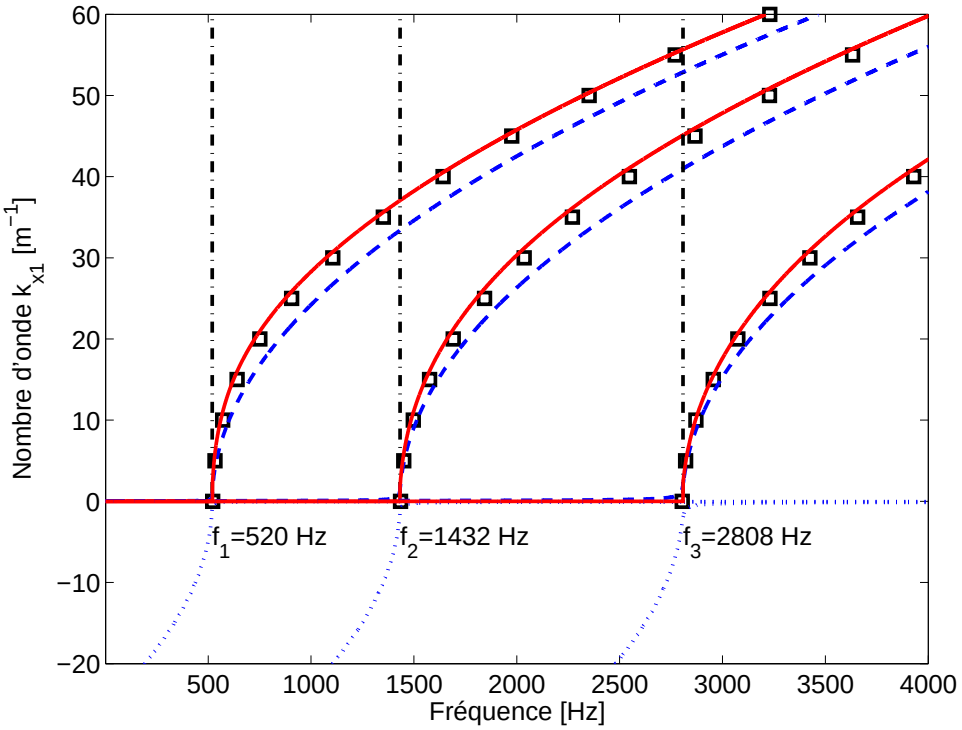


FIGURE 5.7 – Parties réelles des nombres d'onde des modes guidés estimées par les équations (3.25) (−−) et (3.26) (−), et par éléments finis (□) pour le dimensionnement $\mathcal{R}_2$

Comme pour les ondes dans la poutre, il est possible de séparer les modes guidés dans la plaque suivant que ceux-ci sont symétriques ou antisymétriques.

La figure 5.9 montre les nombres d'onde des modes guidés symétriques et antisymétriques calculés avec les expressions approchées (3.25) et (3.26). Les fréquences d'apparition des modes guidés sont les fréquences propres f_{s1} et f_{s2} des modes symétriques de la plaque. Pour les modes antisymétriques, les fréquences de coupure sont données par les fréquences propres f_{tn}. En deçà des fréquences de coupure, les nombres d'onde sont purement imaginaires (respectivement complexes) lorsqu'ils sont estimés par (3.25) (respectivement (3.26)). Au-delà des fréquences de coupure, les nombres d'onde sont purement réels et les ondes sont propagatives. Comme pour les nombres d'onde estimés par (3.26), seule la partie réelle est affichée.

Pour les deux approximations, les ondes sont atténuées en dessous des fréquences de coupures, et deviennent propagatives au delà. Selon l'approximation utilisée, seul le régime non propagatif diffère. Pour départager les deux approximations, il est préférable de de comparer leur précision dans le régime propagatif. On retiendra donc que l'approximation (3.26) est la plus juste.

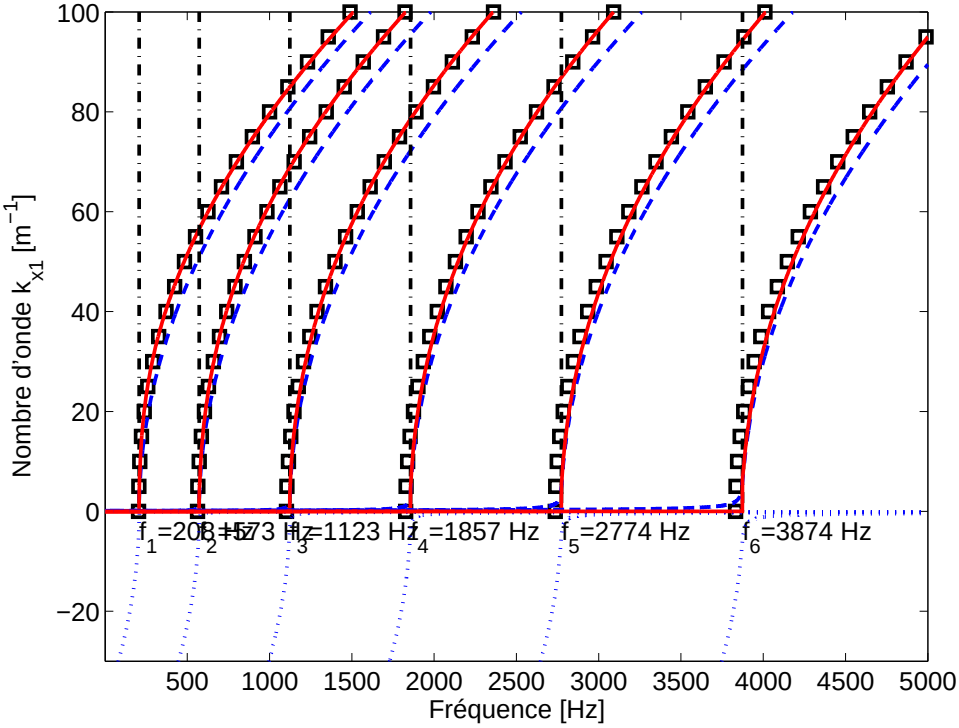
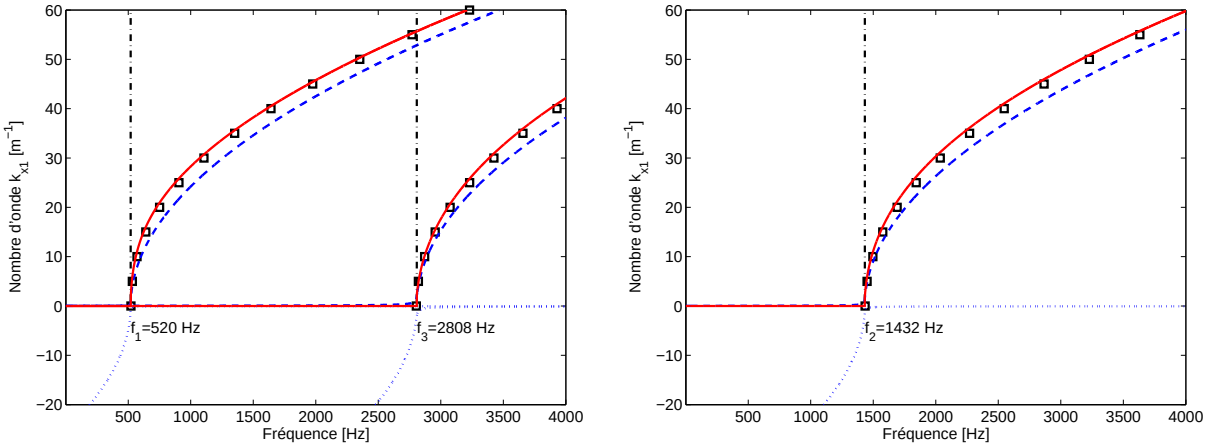


FIGURE 5.8 – Parties réelles des nombres d'onde des modes guidés estimées par les équations (3.25) (−−) et (3.26) (−), et par éléments finis (□) pour le dimensionnement $\mathcal{R}_2$



(a) (b)

FIGURE 5.9 – Nombres d'onde des modes guidées symétriques (a) et antisymétriques (b) de la plaque raidie $\mathcal{R}_1$ à partir de (3.25) (partie réelle (−−) et partie imaginaire (···)), et à partir de (3.26)) (partie réelle −). Les fréquences propres des modes propres symétriques de la plaque $\mathcal{P}$ sont indiqués par les lignes verticales. Le calcul éléments finis est superposé (□).

Validation du modèle complet

La figure 5.10 montre le diagramme de dispersion 5.5 superposé aux branches du modèle homogénéisé. Cette figure est ensuite présentée en séparant les ondes associées aux modes symétriques et antisymétriques.

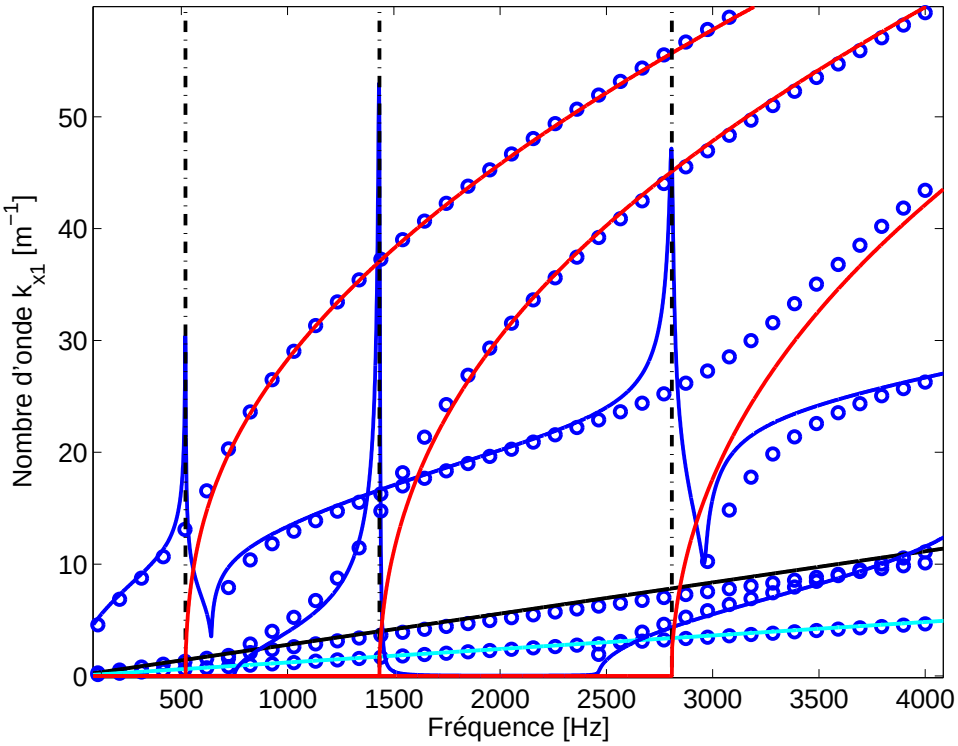


FIGURE 5.10 – Diagramme de dispersion complet. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (–) et torsion (–)) modes guidés (partie réelle (–)). Simulation CWFEM (○)

Les figures 5.11 et 5.12 comparent le modèle analytique avec les simulations numériques, pour les diagrammes de dispersion des modes symétriques et antisymétriques, et la concordance est très bonne. Le modèle homogénéisé permet de comprendre les caractéristiques de dispersion : les cinématiques de flexion sont clairement identifiées, avec les transitions entre les différentes branches, ainsi que les fréquences de coupure des modes guidés. L'activation de la cinématique de torsion à 750 Hz et 2460 Hz est correctement estimée par le modèle analytique.

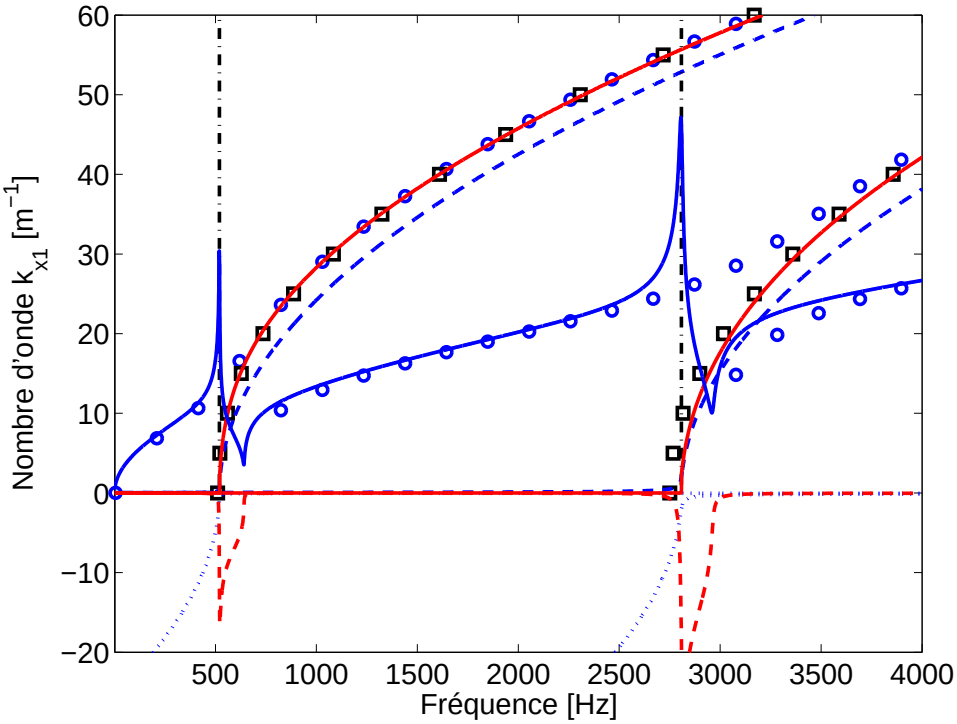


FIGURE 5.11 – Nombres d'onde des modes symétriques. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (−) et imaginaire (−−)) modes guidés (partie réelle (−−) et partie imaginaire (···). Simulation CWFEM (○)

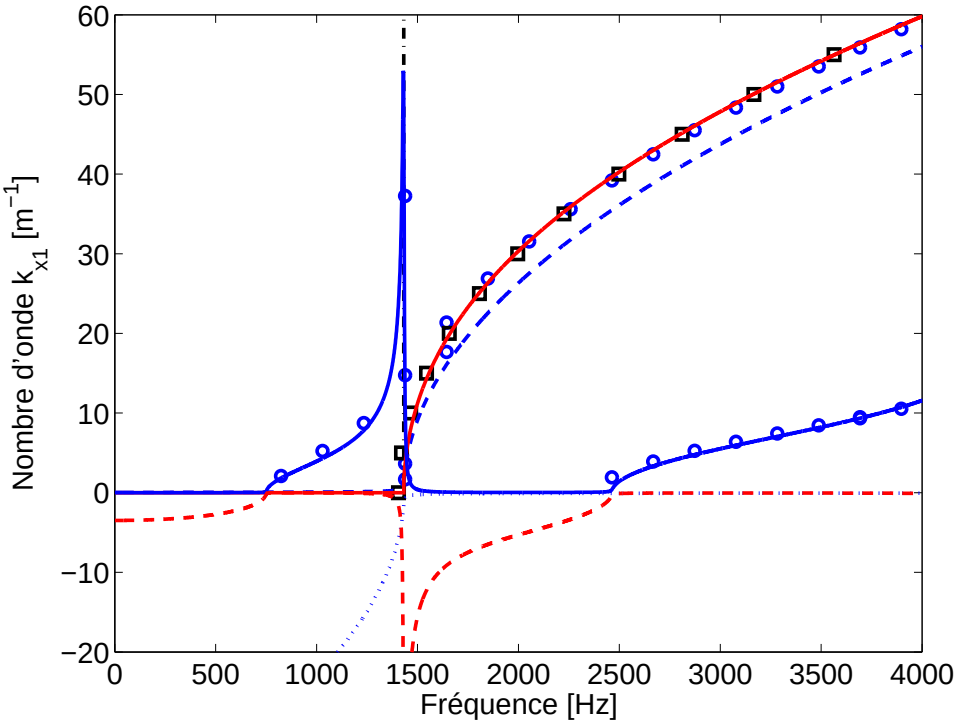


FIGURE 5.12 – Nombres d'onde des modes antisymétriques. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (−) et imaginaire (−−)) modes guidés (partie réelle (−−) et partie imaginaire (···). Simulation CWFEM (○)

5.2.5 Courbes de dispersion dans la plaque $\mathcal{R}_2$

La même analyse est menée pour le dimensionnement $\mathcal{R}_2$ (voir tableau 5.1). La figure 5.13 montre le diagramme de dispersion superposé aux branches du modèle homogénéisé.

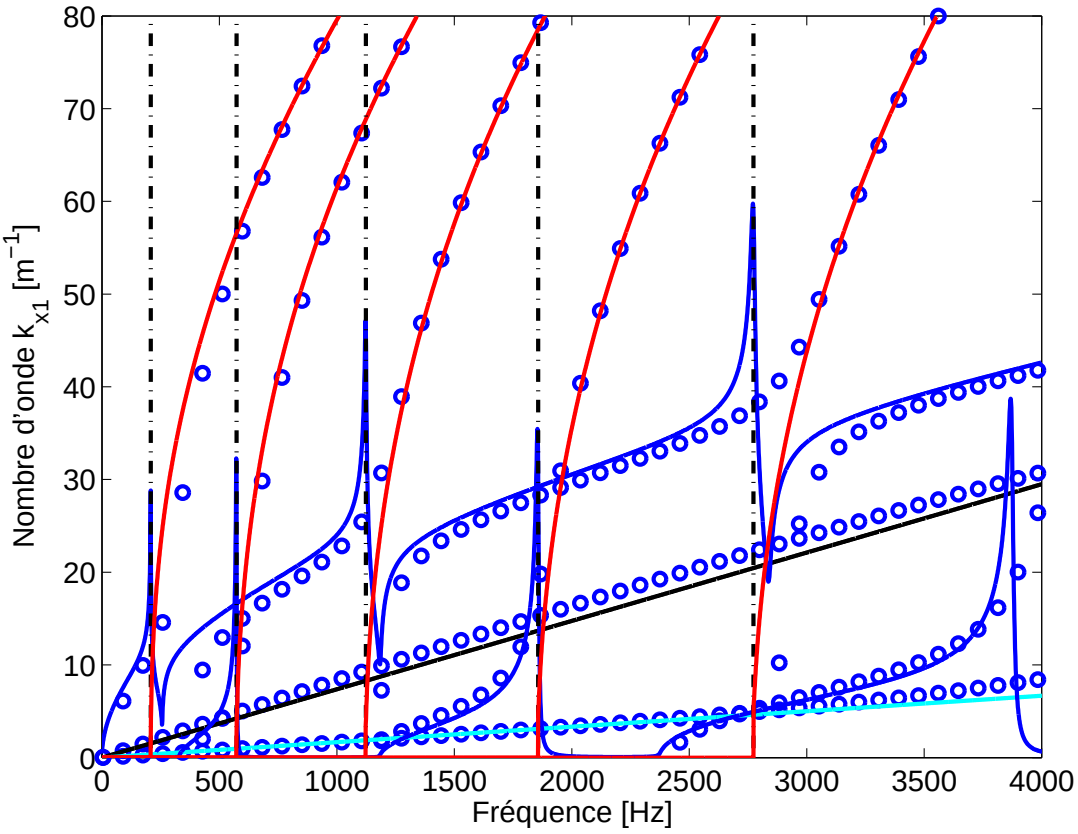


FIGURE 5.13 – Diagramme de dispersion complet. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (–) et torsion (–)) modes guidés (partie réelle (–)). Simulation CWFEM (○)

De la même manière que pour la plaque $\mathcal{R}_1$, les ondes sont séparées suivant que celles-ci sont associées aux modes symétriques ou antisymétriques. La comparaison entre les résultats théoriques et numériques pour les modes symétriques et asymétriques, est montrée sur les figures 5.14 et 5.15, où les nombres d'onde de flexion et de torsion sont nettement identifiés. Les fréquences de coupure pour le nombre d'onde de torsion sont données par l'équation $\omega^2(\rho_b J_b + \Lambda_p D^3 J^*_\omega) = E'_p I_p (D+b) C^*_\omega / D^2$ dont la résolution donne 328 Hz, 1184 Hz, 2373 Hz, 4191 Hz, en accord avec la prédiction numérique.

Les deux dimensionnements de plaques raidies $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ confirment la validité et la robustesse du modèle homogénéisé. Ce modèle apporte un cadre théorique et des interprétations physiques pour expliquer et compléter la lecture qualitative des courbes de dispersion établie par Fahy and Lindqvist (1976) et Ichchou et al. (2008).

5.2.6 Influence de l'amortissement

La figure 5.16 illustre de manière qualitative l'influence de l'amortissement dans la plaque η_p sur les courbes de dispersion, pour quelques valeurs allant de $\frac{1}{100}E_p \leq \eta_p \leq \frac{1}{20}E_p$. La figure 5.16 confirme que l'augmentation de l'amortissement s'accompagne d'une diminution des amplitudes

des résonances sur les branches de flexion et de torsion. Concernant les modes guidés, le déclenchement de l'onde est d'autant plus progressif que l'amortissement est grand. L'amortissement sera donc un paramètre déterminant pour des applications pratiques.

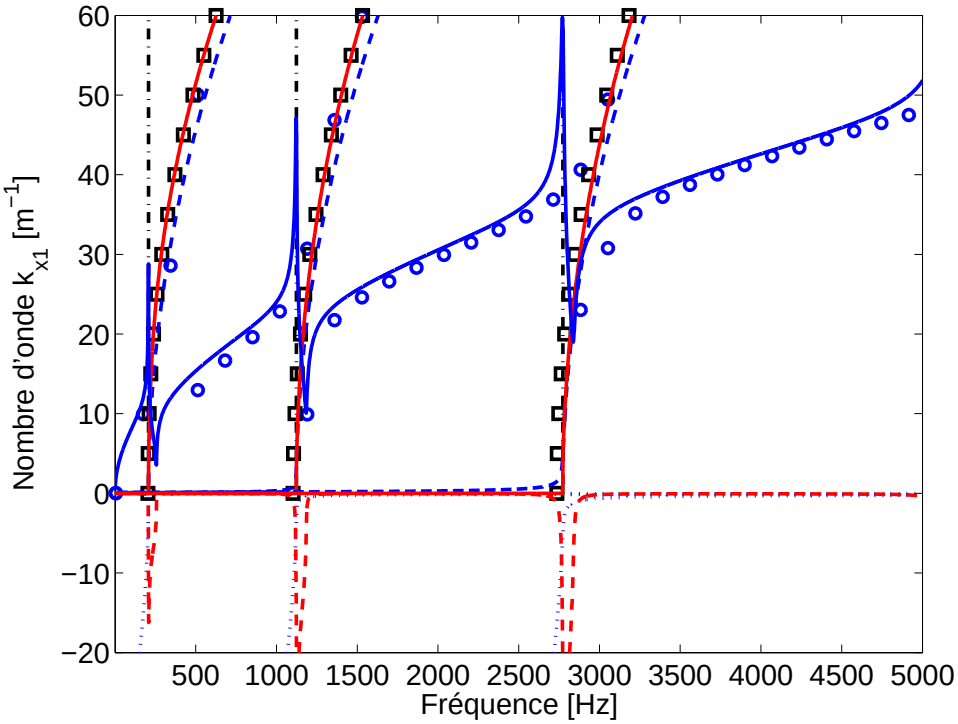


FIGURE 5.14 – Nombres d'onde des modes symétriques. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (–) et imaginaire (––)) modes guidés (partie réelle (––) et partie imaginaire(···). Simulation CWFEM (○)

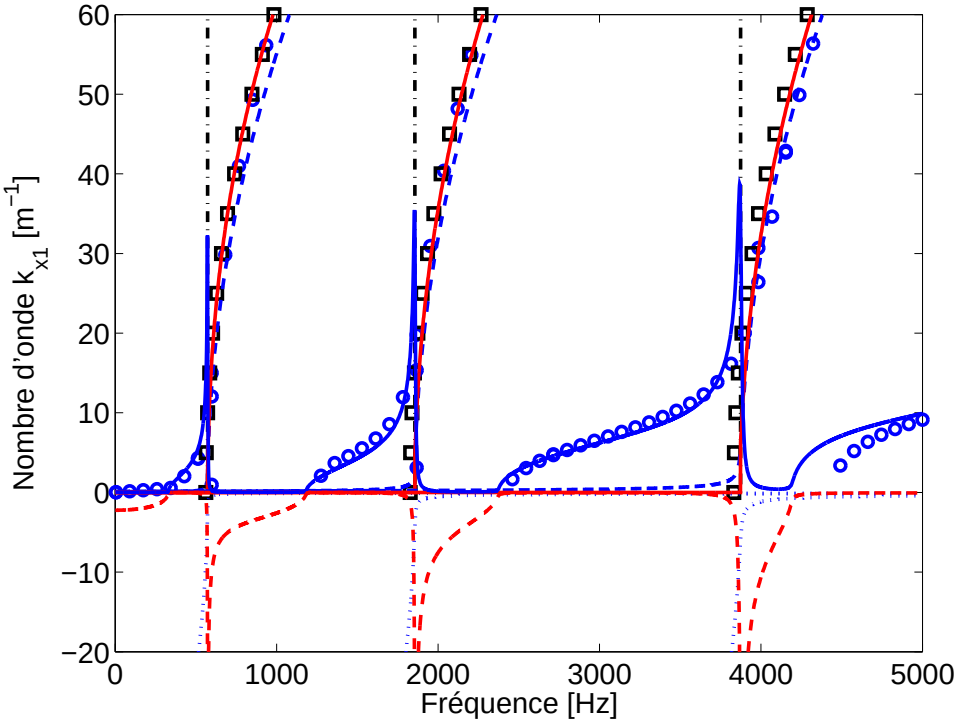


FIGURE 5.15 – Nombres d'onde des modes antisymétriques. Modèle homogénéisé avec résonance interne en flexion (partie réelle (–) et imaginaire (––)) modes guidés (partie réelle (––) et partie imaginaire(···). Simulation CWFEM (○)

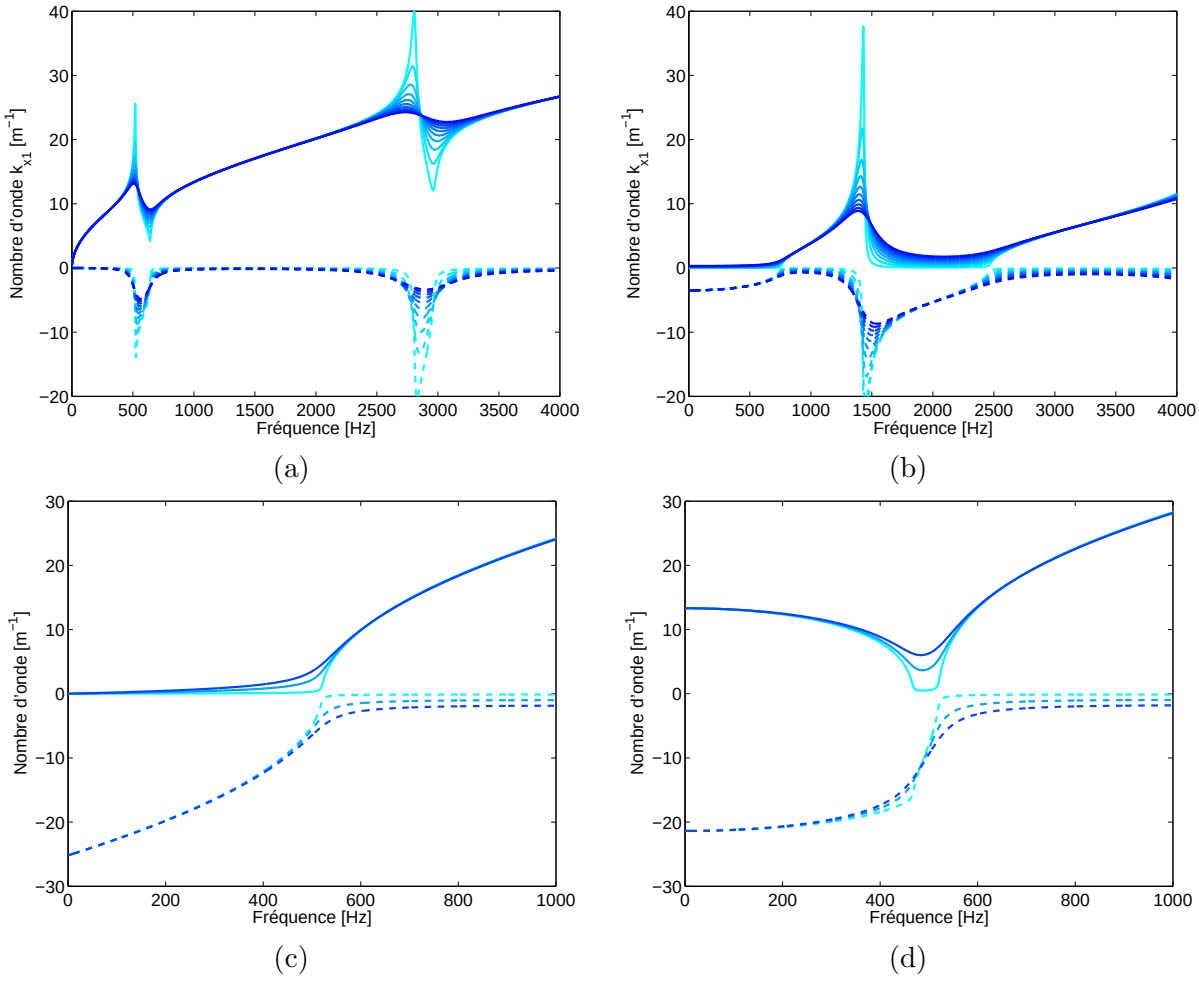


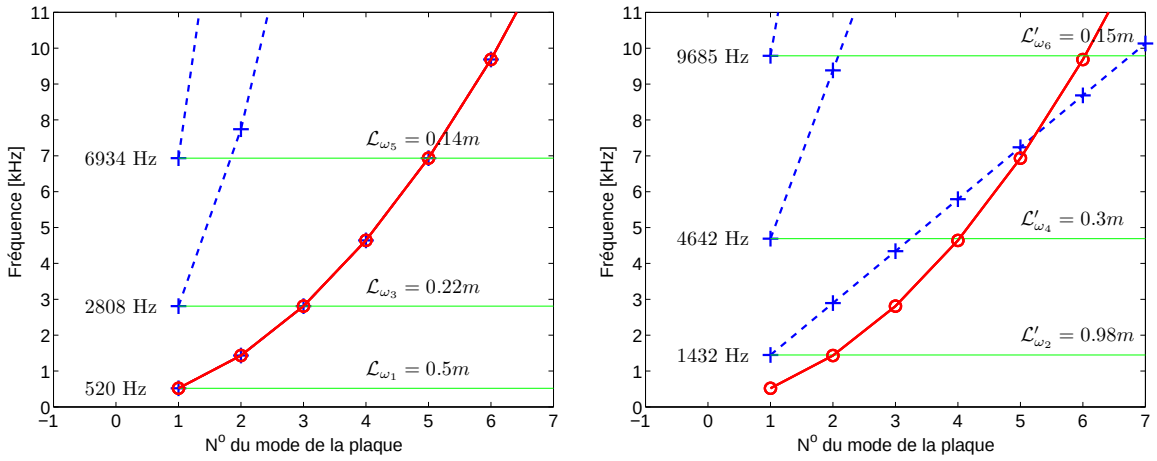
FIGURE 5.16 – Parties réelle (–) et imaginaire (- -) des nombres d'onde de flexion (a), et de torsion (b), nombres d'onde des modes guidés estimés par (3.25) (c) et par (3.26) (d), pour des coefficients d'amortissement croissants (du bleu clair au bleu foncé)

5.3 Validation sur des plaques mono-raidies finies

Cette section aborde maintenant le cas d'une structure finie dimensionnée en accord avec la condition co-dynamique détaillée au chapitre 3, en particulier en utilisant les équations 3.6 et 3.7.

La figure 5.17 propose une représentation graphique de la co-résonance en flexion et en torsion, pour la plaque $\mathcal{R}_1$ encastrée à ses extrémités. Les longueurs indiquées correspondent à $\mathcal{L}'_{n1}$, $\mathcal{L}'_{m1}$, $n, m = 1, 2, 3$ telles que le mode fondamental de la poutre coïncide avec un mode donné de la plaque. Par exemple, pour une plaque de longueur $\mathcal{L}_{31}$, le régime de co-résonance est atteint pour ω_{s3}. Aux fréquences $\{\omega_{s1}, \omega_{s2}\}$, la poutre est en régime quasi-statique, mais la résonance interne apparaît néanmoins dans la plaque. Ce sera aussi le cas pour les modes antisymétriques à $\{\omega_{t1}, \omega_{t2}, \ldots\}$ puisque les fréquences propres de la poutre en torsion sont plus élevées qu'en flexion. Enfin, aux fréquences ω_{sn}, $n > 3$ la poutre est en régime dynamique (mais pas nécessairement résonant) et la plaque est en résonance.

En prenant l'exemple de la plaque $\mathcal{R}_1$ de longueur $L = 0.5$ m, les fréquences propres en flexion pour la poutre et la plaque sont proches et apparaissent à [519 ; 1432 ; 2808 ; 4641 ;...] Hz, alors qu'elles diffèrent significativement en torsion car les fréquences propres de la poutre en torsion sont [2840 ; 5680 ;...] Hz. En considérant le premier mode de flexion de la plaque $\mathcal{P}$, les cinq paramètres adimensionnels sont $\{\epsilon_b = 0.05\,;\ \epsilon_p = 0.017,\ \varepsilon = 0.36,\ E_p/E_b = 1,\ \rho_b/\rho_p = 1\}$. La condition de couplage asymétrique (3.3) est respectée puisque $E_b\epsilon_b^4/E_p\epsilon_p^3 = 1.2 = O(1)$, et les paramètres adimensionnels sont suffisamment petits pour satisfaire la séparation d'échelle.



(a) (b)

FIGURE 5.17 – Distribution des fréquences propres associées à la plaque ($-\circ-$) et à la poutre ($-+-$) en flexion (a) et en torsion (b), avec les longueurs garantissant la co-résonance

Les modes symétriques conduisent à la condition de co-dynamique en flexion et donnent $\mathcal{L}_{\omega_{p;1,3,5}}$. Les modes anti-symétriques déterminent le dimensionnement respectant le régime co-dynamique lorsque la plaque contraint la poutre à une rotation, et donnent $\mathcal{L}'_{\omega_{p;2,4,6}}$.

5.3.1 Réponses en fréquence de la plaque mono-raidie finie

L'implémentation du modèle homogénéisé en flexion (3.21) permet d'estimer les fonctions de transfert (FRF *Frequency Response Function*) de la plaque raidie de manière analytique.

Une fonction de réponse en fréquence décrit une relation de cause à effet entre deux signaux, calculés analytiquement, numériquement, ou mesurés expérimentalement. Dans notre cas, elle exprime la réponse de la structure à une force appliquée. L'excitation de la structure en un point x_e avec une force connue F_ω et la mesure simultanée de sa réponse X_ω en un autre point x_r fournit la fonction de transfert $H_\omega = X_\omega(x_r)/F_\omega(x_e)$. Cette quantité est complexe et sert à identifier des informations telles que les fréquences de résonance, les déformées modales, ou encore l'amortissement modal. La suite porte sur la plaque $\mathcal{R}_1$, de longueur 0.5 m, encastrée aux deux extrémités, et en considérant des déplacements harmoniques identiques aux extrémités.

La réponse forcée analytique est comparée à celle obtenue par éléments finis sur la figure 5.18. Pour cette comparaison, le récepteur est placé au milieu de la poutre $x_r = 0.25$ m et la référence est prise au point d'excitation $x_e = 0$. La fonction de transfert en déplacements $H = U(x_r)/U(x_e)$ est définie comme le rapport des déplacements transverses en ces deux points.

Afin de compléter la visualisation des réponses, tout en mettant en évidence l'effet de la résonance interne, les réponses sont présentées sur la figure 5.18 en fonction de la fréquence et de la position du récepteur. L'extrémité où est appliquée le déplacement est le point de référence et le récepteur est localisé en un point quelconque le long du renfort. Ces réponses analytiques se lisent en fonction de la position du point de mesure sur la poutre (et sur sa demi-longueur seulement car les conditions limites sont symétriques). En l'absence de résonance interne, les modes symétriques apparaissent sous forme de bandes à 519 Hz et 2808 Hz. La prise en compte de la plaque résonante crée des intervalles fréquentiels dans lesquels les ondes sont très fortement atténuées. En régime co-dynamique, ces zones sont localisées sur les modes propres de la poutre. Des bandes interdites se répartissent sur toute la longueur de la poutre sauf en $x = 0$, au voisinage de l'excitation. En contrepartie deux pics d'amplitudes moindres sont créés de part et d'autre de l'antirésonance. Les deux pics de la figure 5.18(a) se retrouvent en rouge sur la figure 5.18(b) en bas, à la position 0.25 m.

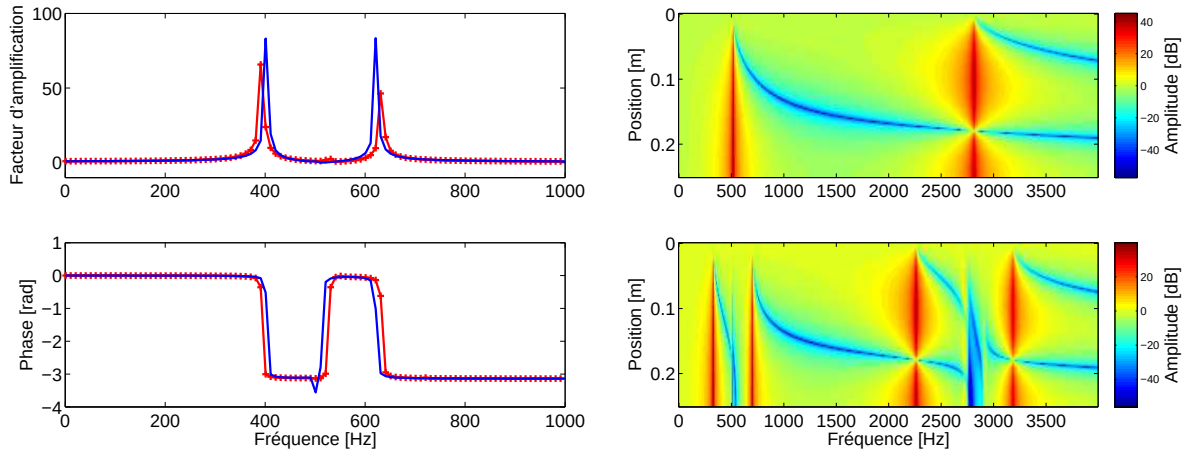


FIGURE 5.18 – (a) Fonction de transfert H sur la plaque raidie avec résonance interne : modèle homogénéisé ($--$), calcul éléments finis ($-+-$), (b) Représentation des réponses fréquentielles en fonction de la position du récepteur sur la poutre, calculées pour la poutre seule (haut) et avec la plaque résonante (bas), en situation CC

En complément de la figure 5.18, la figure 5.19 montre la flexion de la plaque homogénéisée à 520 Hz (dans la zone d'atténuation), 1500 Hz (hors de la zone d'atténuation), 2770 Hz (dans la zone d'atténuation) , 4000 Hz (hors de la zone d'atténuation), avec pour chacune des quatre

fréquences, le cas sans résonance interne et avec résonance interne. Pour les deux fréquences 1500 Hz et 4000 Hz, les FRFs sont quasi-identiques, les déplacements de la plaque avec et sans résonance interne sont du même ordre. En revanche, pour les deux fréquences 520 Hz et 2770 Hz associées aux résonances de la plaque interne, les réponses sont très différentes. En l'absence de résonance interne, le déplacement est celui du mode de flexion pur, alors qu'avec la résonance interne, celui-ci est complètement atténué. Il ne subsiste alors que l'effet de couche limite du déplacement aux extrémités. Ces observations se vérifient aussi sur la figure 5.20 dans le cas d'une plaque encastrée-libre.

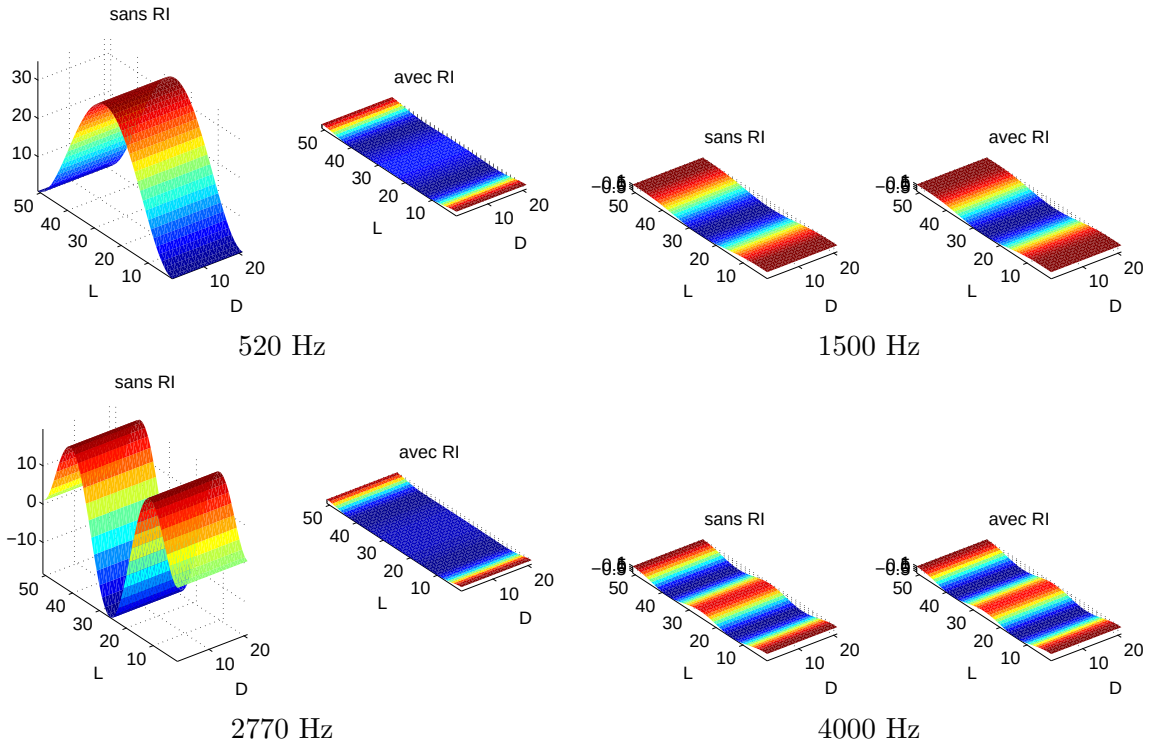


FIGURE 5.19 – Déformées de la plaque homogénéisée pour différentes fréquences choisies à partir de la figure 5.18, avec et sans résonance interne (RI)

Les antirésonances apparaissent exactement aux fréquences propres de la poutre car les mêmes conditions limites sont appliquées à la poutre et à la plaque, et que le dimensionnement satisfait le régime de co-dynamique. En associant au modèle (3.21) des conditions limites encastrée-libre et supportée-supportée, la distribution des fréquences propres de la poutre est modifiée, comme illustré sur la figure 5.21. Ces situations restent dans le cadre de la résonance interne, mais ne sont pas associées au régime de co-résonance.

5.3.2 Reconstruction du nombre d'onde de flexion

La courbe de dispersion associée aux ondes de flexion dans la poutre et affectées par la résonance locale de la plaque, comme représentée sur la figure 5.1, peut être reconstruite à partir des réponses en fréquences en utilisant la méthode IWC introduite en section 2.4.2. Le procédé est ici mis en œuvre sur des réponses analytiques, calculées pour une plaque en conditions encastrée-encastrée, encastrée-libre, et supporté-supportée. Ces réponses présentent donc les résonances aux fréquences propres correspondantes à ces différentes conditions limites. En revanche, la plaque interne demeurant identique, son effet reste localisé autour de 520 et 2800 Hz quelles que

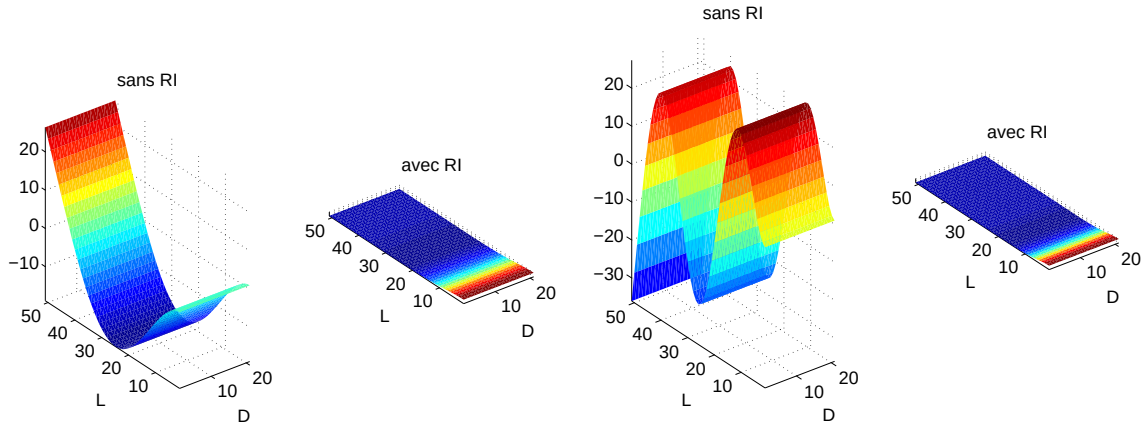


FIGURE 5.20 – Déformées de la plaque homogénéisée pour différentes fréquences choisies à partir de la figure 5.18, avec et sans résonance interne (RI)

soient les situations. La figure 5.18 représente, pour ces trois conditions limites, les réponses et les courbes de dispersion estimées par IWC en montrant systématiquement le cas sans résonance interne, et avec résonance interne. La courbe de dispersion dans la poutre seule est parfaitement estimée. La courbe de dispersion avec résonance interne estimée par IWC à partir des réponses analytiques est elle aussi parfaitement superposée à celle calculée analytiquement à l'aide de son expression (3.23). Pour chacune des trois conditions limites considérées, la concordance est excellente. Ce résultat démontre non seulement que l'IWC n'est pas sensible au conditions limites (propriété déjà vérifiée par Berthaut (2004)), mais que l'algorithme identifie correctement les zones de résonance interne.

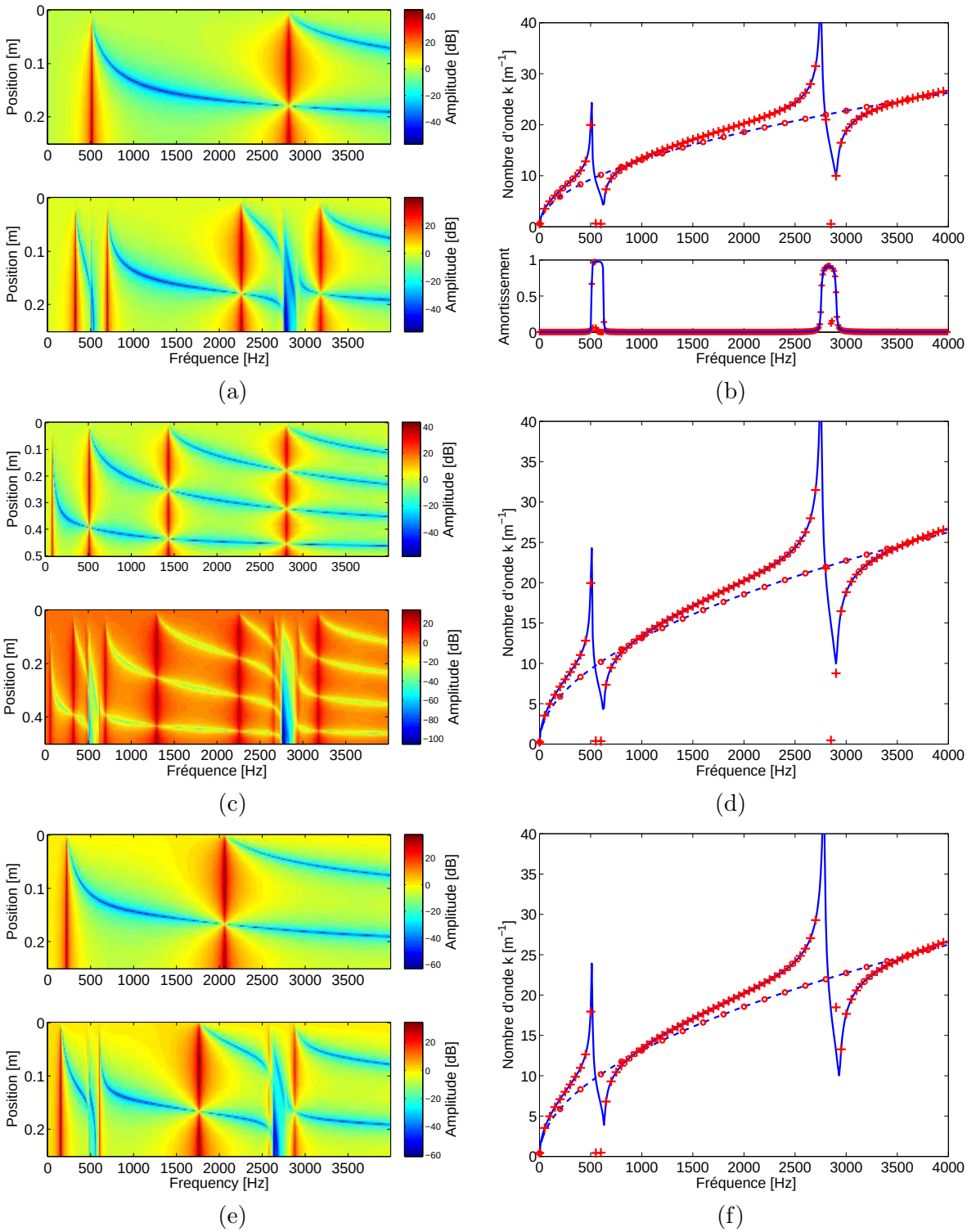


FIGURE 5.21 – Réponses fréquentielles en fonction de la position sur le raidisseur et nombre d'onde de flexion avec résonance interne [IWC (+), analytique (−)] et sans résonance interne [IWC (∘), analytique (−−)], pour les conditions limites (a-b) CC, (c-d) CF, (e-f) SS

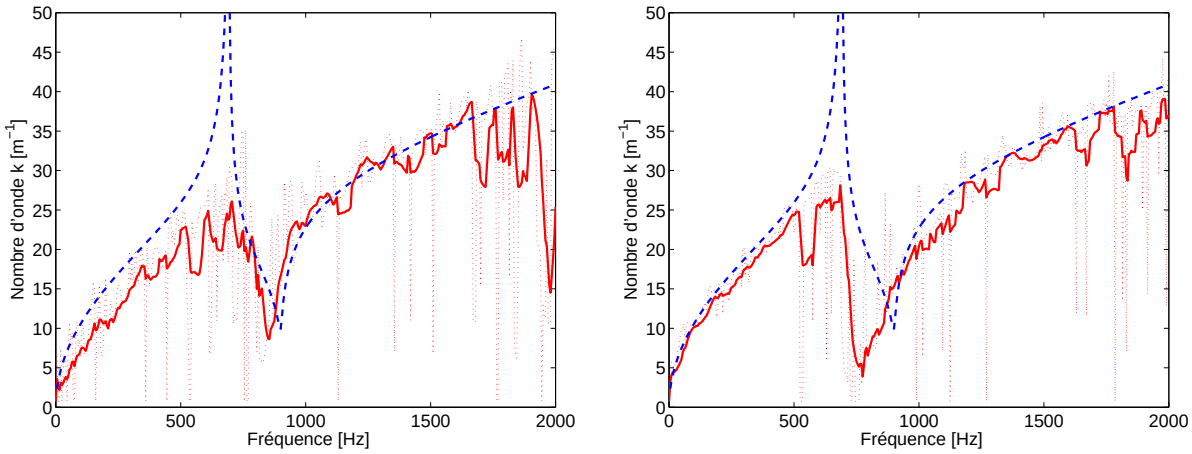
5.3.3 IWC à partir de réponses calculées par éléments finis

La modélisation porte sur la plaque mono-raidie expérimentale dont le dimensionnement est donné à la section 6.1. Les réponses sont calculées par éléments finis et servent de données d'entrée pour l'IWC. La plaque est sollicitée de deux manières :

— dans le premier cas, le point d'excitation est localisé à l'extrémité du raidisseur
— dans le second cas, l'excitation se fait à l'extrémité de tous les raidisseurs, la sollicitation est donc synchrone

La comparaison de ces deux configurations est montrée sur la figure 5.22, et comparé au modèle homogénéisé. Un amortissement structurel de $\eta = 1\%$ est introduit dans le modèle homogénéisé et la simulation éléments finis. Dans le cas de l'excitation sur un raidisseur, la courbe de dispersion est proche de celle prédite par le modèle homogénéisé, en particulier autour de l'anti-résonance de la plaque. Dans le cas de la sollicitation synchrone entre raidisseurs, la reconstruction obtenue est plus cohérente avec le modèle analytique. Cette observation se confirme en basses fréquences sur l'intervalle $[0\,;\,500]$ Hz, puis en hautes fréquences entre 1500 et 2000 Hz. L'anti-résonance apparaît plus nettement car la sollicitation synchrone entre raidisseurs est plus cohérente avec l'hypothèse de périodicité que l'excitation sur un unique raidisseur.

Ce résultat confirme la cohérence entre le modèle homogénéisé d'une part, et le modèle éléments finis d'autre part. La modélisation de la cellule unitaire avec des conditions limites périodiques permet de retrouver la courbe de dispersion associée à la structure infinie, et la modélisation de la plaque de dimensions finies permet de retrouver, à partir des caractéristiques globales, cette même courbe de dispersion.



(a) (b)

FIGURE 5.22 – Courbe de dispersion de flexion prédite par le modèle homogénéisé (——) et nombre d'onde reconstruit par IWC à partir du champ simulé par éléments finis : IWC (···), IWC avec moyenne glissante 10 Hz (—). (a) excitation sur un raidisseur, (b) excitation synchrone entre raidisseurs.

5.4 Étude de la plaque bi-raidie

Le dimensionnement est réalisé en faisant coïncider le premier mode de flexion d'un raidisseur avec le premier mode de flexion de la plaque interne en configuration CFCF. En choisissant des dimensions et des matériaux d'une plaque réalisable expérimentalement, cette condition est satisfaite en prenant par exemple $n_x = 5$ cellules et le dimensionnement détaillé ci-après, désigné par $\mathcal{R}_3$. La plaque $\mathcal{R}_3$ est constituée de raidisseurs identiques $\mathcal{B}_3$ en aluminium et de plaques internes $\mathcal{P}_3$ en plexiglas beaucoup plus souple que l'aluminium. Les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 5.2. Ces choix de matériaux et de dimensions permettent d'illustrer le cas de contrastes mécanique et géométrique.

	E, ν	ρ	Dimensions
$\mathcal{R}_3$			
Poutre $\mathcal{B}_3$	69×10^9 Pa, 0.3	2700 kg.m^{-3}	$h_k = b_k = 1$ cm, $L_k = 0.56$ m
Plaque $\mathcal{P}_3$	3×10^9 Pa, 0.3	1200 kg.m^{-3}	$l_k = 0.1$ m, $d = 1$ mm

TABLE 5.2 – Paramètres géométriques et propriétés mécaniques de la plaque bi-raidies étudiée

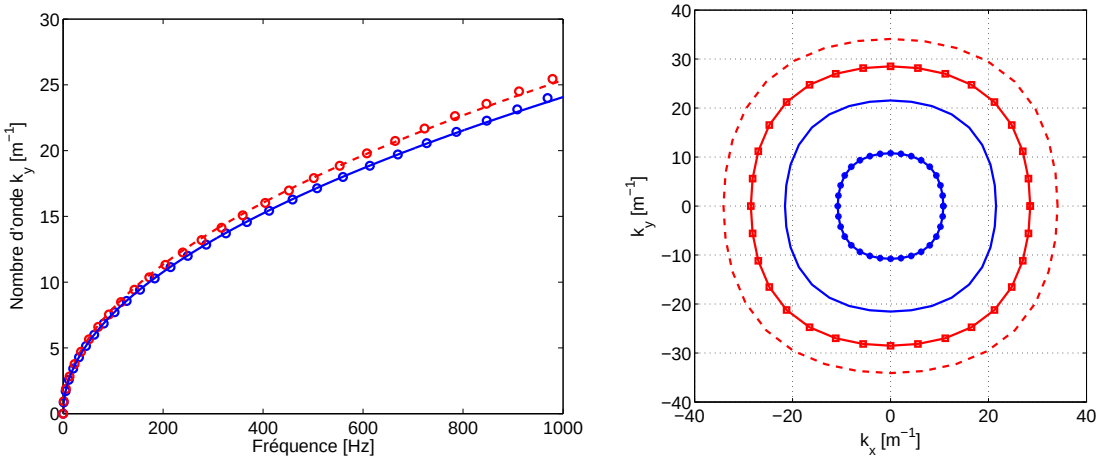
Les fréquences propres $f_I = \omega_I/(2\pi)$ dépendent des conditions limites et seront explicitées en détaillant successivement les différents cas. À partir des valeurs du tableau 5.2, les paramètres effectifs définis précédemment permettent de calculer les courbes de dispersion pour $\mathcal{R}_3$ (avec un coefficient d'amortissement structurel $\eta = 0.5\%$ dans les raidisseurs et $\eta_p = 1\%$ pour les plaques internes en plexiglas). L'analyse sera présentée pour les différentes conditions limites de plaques internes illustrées sur la figure 4.6.

5.5 Vérifications préliminaires hors intervalles de résonances internes

5.5.1 Validation sur le treillis orthogonal

Cette section reprend le modèle homogénéisé du treillis (4.48) associé au dimensionnement $\mathcal{R}_3$ décrit dans le tableau 5.2 afin de le valider par éléments finis. L'implémentation du problème et la procédure de résolution sont similaires à celle présentée en section 5.2.4, sur une cellule de treillis avec des conditions limites périodiques sur ses faces. Ce modèle est utilisé pour vérifier les nombres d'onde dans l'axe des raidisseurs $\theta = 0[\pi/2]$ et dans la direction oblique $\theta = \pi/4[\pi/2]$, et les courbes de dispersion associées à des ondes se propageant à 0 et 45 degrés dans le plan du treillis sont affichées sur la figure 5.23. La comparaison avec le modèle homogénéisé montre une bonne concordance pour les deux directions considérées.

La figure 5.23 montre aussi l'espace des nombres d'onde associés aux ondes de flexion, et pour différentes fréquences. Contrairement au cas d'une plaque isotrope où les caractéristiques de dispersion sont identiques quelle que soit la direction de propagation, les formes obtenues sont conformes aux résultats connus sur la plaque orthotrope. La vitesse de propagation dans la direction oblique est plus faible que suivant les raidisseurs, le nombre d'onde y est plus élevé, puisque la rigidité est plus grande.



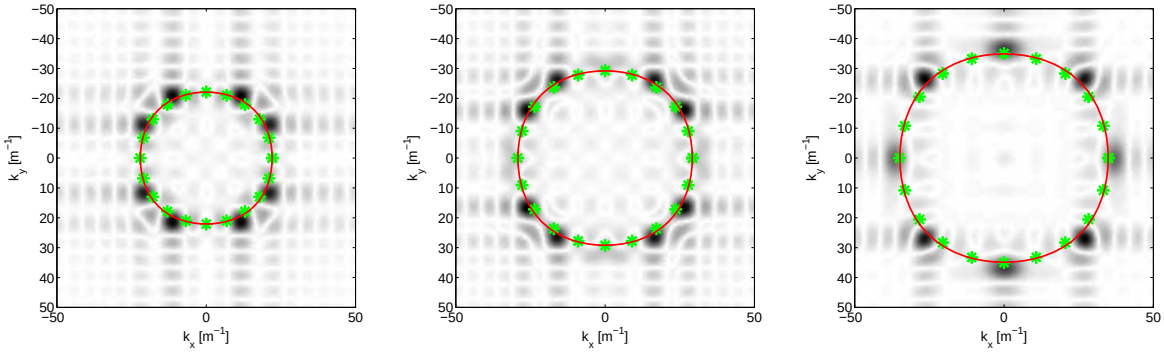
(a) (b)

FIGURE 5.23 – (a) Nombre d'onde dans la direction $\theta = 0$ ($-$), $\theta = \pi/4$ ($--$), calcul éléments finis ($\circ$) ; (b) Espace des nombres d'onde associé au treillis à 200 Hz ($-\bullet-$), 800 Hz ($-$), 1400 Hz ($-\square-$), 2000 Hz ($--$)

5.5.2 Espaces des nombres d'onde pour le treillis et la plaque bi-raidie

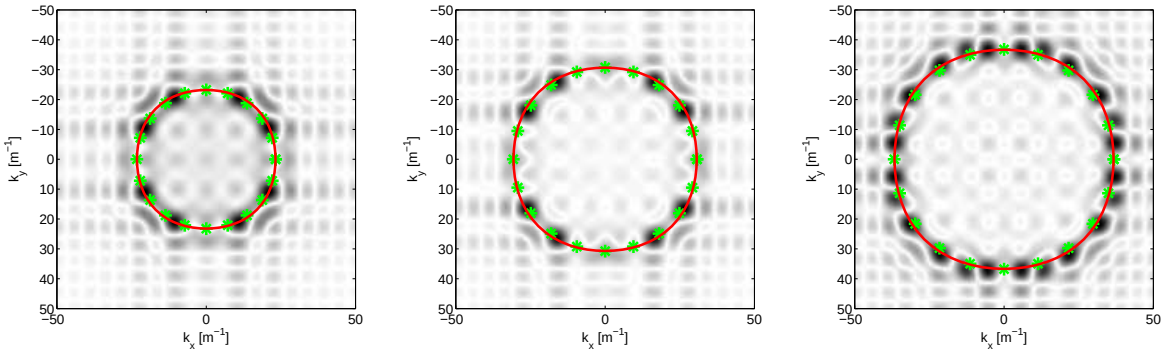
Cette partie montre les espaces des nombres d'onde associés au treillis et à la plaque bi-raidie avec plaques internes encastrées sur les quatre côtés. Ceci a pour objectif de valider le modèle homogénéisé donnant $k(\theta)$ à une fréquence fixée en utilisant les outils de traitement introduits en section 2.4. Pour les deux structures étudiées, le champ de déplacement transverse est calculé par éléments finis 3D en considérant les plaques de 20×20 cellules de côtés. Ces plaques bi-raidies sont libres sur leur pourtour et sollicitées par une source harmonique et ponctuelle située en leur centre. Le champ vibratoire est ensuite converti en plan d'ondes (k-space), au moyen de la transformée de Fourier 2D et de l'IWC. Concernant la transformée de Fourier 2D, un moyen d'augmenter la résolution du k-space est d'évaluer la transformée de Fourier en augmentant le nombre de points. De la même manière que le *zero padding* consiste à ajouter des zéros à la fin d'un signal temporel pour faire sa transformée de Fourier sur plus de points, et en améliorer la résolution fréquentielle, l'approche consiste ici à étendre les vecteurs k_x et k_y. En effet, l'équation 2.19 n'empêche pas de faire l'opération sur un vecteur contenant plus de points que les vecteurs du maillage spatial. Par exemple, pour une abscisse x définie de $-L_x/2$ à $L_x/2$ avec N_x points de mesures et un pas spatial Δ_x, le vecteur d'onde k_x est défini comme $[-\pi/\Delta_x : 2\pi/(N_x - 1)\Delta_x : \pi/\Delta_x]$ Le k-space est alors défini entre $-\pi N_x/L_x$ et $\pi N_x/L_x$ pour éviter le repliement spectral.

En choisissant trois fréquences suffisamment élevées pour observer distinctement les contours du plan d'onde, il est possible de superposer le résultat du modèle homogénéisé sur celui de la transformée de Fourier 2D et de l'IWC. Pour des fréquences 800 Hz, 1400 Hz, et 2000 Hz, les comparaisons pour le treillis seul sont montrées sur la figure 5.24 et les comparaisons pour la plaque bi-raidie sont montrées sur la figure 5.25. Dans les six cas présentés, la forme du contour dans le plan des nombres d'onde n'est pas parfaitement circulaire comme pour une plaque isotrope. Le nombre d'onde plus élevé en dehors des axes d'orthotropie ($k\pi/2$) indique que la vitesse de propagation des ondes y est plus faible. La concordance est très bonne et met en évidence la nature orthotrope de la plaque.



800 Hz 1400 Hz 2000 Hz

FIGURE 5.24 – Espace des nombres d'onde du treillis seul, DFT2D en arrière plan, modèle homogénéisé (−), IWC (∗)



800 Hz 1400 Hz 2000 Hz

FIGURE 5.25 – Espace des nombres d'onde de la plaque bi-raidie, DFT2D en arrière plan, modèle homogénéisé (−), IWC (∗)

5.6 Caractéristiques de dispersion de la plaque bi-raidie

5.6.1 Influence des conditions limites des plaques internes résonantes

Cette section propose les comparaisons entre les nombres d'ondes calculés analytiquement par le modèle homogénéisé et ceux calculés par la méthode éléments finis WFEM.

Plaques internes CFCF

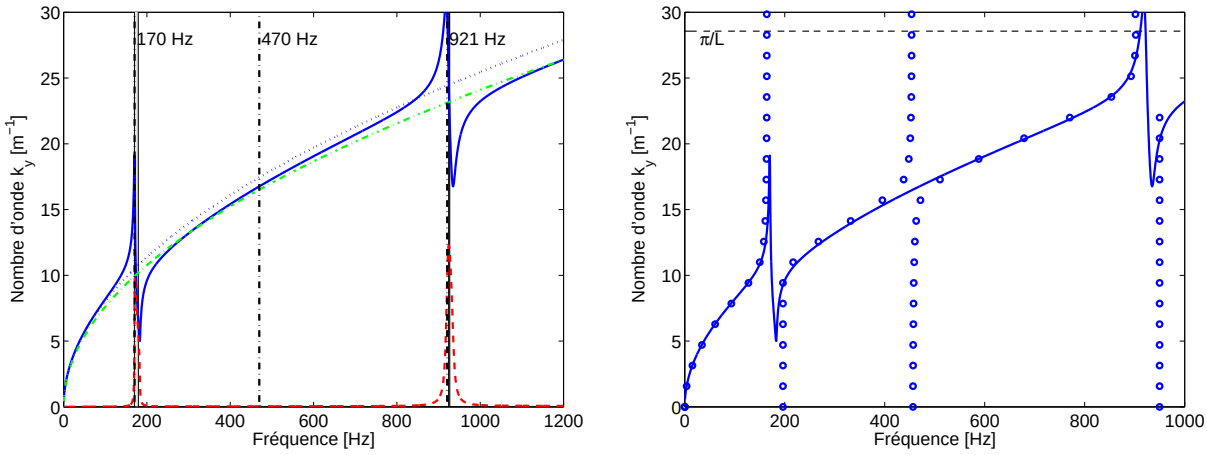
Dans cette configuration, les fréquences propres sont calculées analytiquement à partir des racines de l'équation fréquentielle associée à la poutre bi-encastrée $1 - \cos(\delta l_p)\cosh(\delta l_p)$. Les fréquences propres sont comparées à un modèle éléments finis 3D dans le tableau 5.3. La différence entre les fréquences théoriques numériques peut s'expliquer par l'hypothèse de flexion cylindrique. En effet, cette hypothèse néglige la faible variation suivant y, à défaut du calcul éléments finis, ce qui tend à modifier le comportement de la plaque de manière croissante avec la fréquence. Les fréquences calculées analytiquement sont toujours supérieures à celles estimées par éléments finis, et cet écart croît avec la fréquence.

D'une part, les fréquences de résonance des modes symétriques sont associées aux singularités du paramètre de masse apparente. D'autre part, les fréquences de résonance des modes

	$f_{n=0,m=1}$	$f_{n=0,m=2}$	$f_{n=0,m=3}$
Analytique	170.3 Hz	469.6 Hz	920.6 Hz
Éléments finis	169.2 Hz	466.8 Hz	915.9 Hz

TABLE 5.3 – Fréquences propres de la plaque CFCF obtenues analytiquement et par éléments finis

antisymétriques sont associées aux singularités des paramètres d'inertie effective et de raideur de torsion effective. Étant donné que l'équation homogénéisée des vibrations de flexion fait intervenir les rigidités de torsion $G\mathcal{I}$, l'équation de dispersion de flexion contient la contribution des mécanismes de torsion. En conséquence, la courbe de dispersion de flexion est perturbée aux fréquences des modes symétriques. La simulation WFEM prédit aussi une singularité au mode antisymétrique, comme montré sur la figure 5.26. Celle-ci n'est pas décrite par le modèle homogénéisé car elle est associée à une cinématique où la longueur d'onde est identique à la longueur de l'élément poutre, ce qui est contraire à l'hypothèse de séparation d'échelles. De plus, la comparaison avec la simulation par éléments finis confirme la validité du modèle analytique et la présence de dispersion atypique aux fréquences propres des modes symétriques uniquement.



(a) (b)

FIGURE 5.26 – Courbe de dispersion de flexion dans la plaque bi-raidie : (a) Nombre d'onde (partie réelle (−) et partie imaginaire (−−)). Nombre d'onde de flexion dans le treillis $\mathcal{G}$ seul (−.), et dans le treillis avec masse de la plaque interne inerte (···). Les intervalles de masse effective négative sont représentés en gris (■) ; (b) Courbe de dispersion analytique (−), et calcul éléments finis WFEM (○)

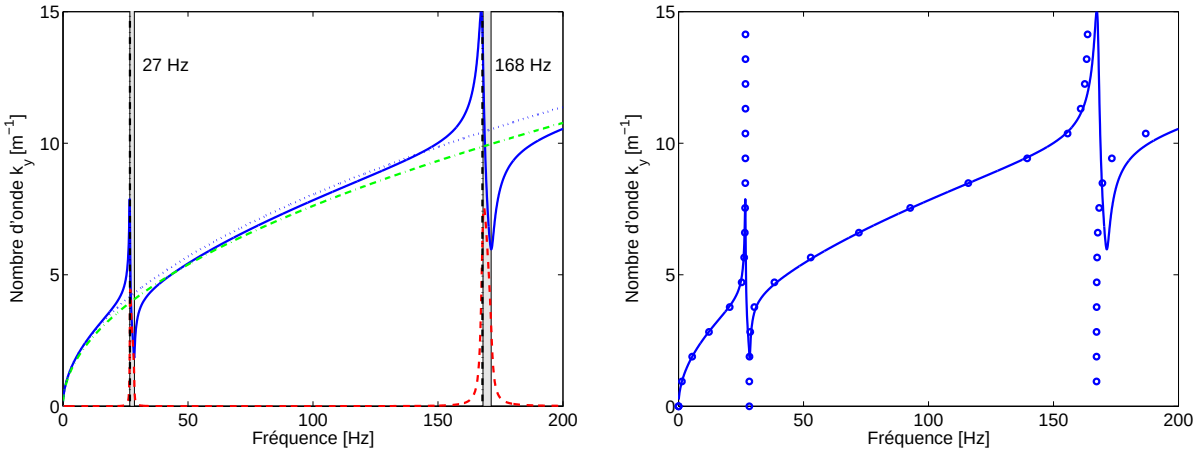
Plaques internes CFFF

Dans cette configuration, les fréquences propres sont calculées analytiquement à partir des racines de l'équation fréquentielle associée à la poutre encastrée-libre $1 + \cos(\delta l_p)\cosh(\delta l_p)$ (dénominateur de (4.57)). Les fréquences propres sont comparées à un modèle éléments finis 3D dans le tableau 5.4 :

De la même manière que précédemment, ces fréquences de résonance sont associées aux singularités de la courbe de dispersion en flexion, comme montré sur la figure 5.27. De plus, la comparaison avec la simulation par éléments finis confirme la validité du modèle analytique.

	$f_{n=0,m=1}$	$f_{n=0,m=2}$	$f_{n=0,m=3}$
Analytique	26.7 Hz	167.7 Hz	469.8 Hz
Éléments finis	26.4 Hz	162.2 Hz	466.7 Hz

TABLE 5.4 – Fréquences propres de la plaque CFFF obtenues analytiquement et par éléments finis



(a) (b)

FIGURE 5.27 – Courbe de dispersion de flexion dans la plaque bi-raidie : (a) Nombre d'onde (partie réelle (−) et partie imaginaire (−−)). Nombre d'onde de flexion dans le treillis $\mathcal{G}$ seul (−.), et dans le treillis avec masse de la plaque interne inerte (···). Les intervalles de masse effective négative sont représentés en gris (■) ; (b) Courbe de dispersion analytique (−), et calcul éléments finis WFEM (○)

Plaques internes CCCC

Dans cette configuration, les fréquences propres sont calculées analytiquement à partir du tableau 4.1. Les fréquences propres sont comparées à un modèle éléments finis 3D dans le tableau 5.5.

	$f_{n=0,m=1}$	$f_{n=0,m=2}$	$f_{n=0,m=3}$
Analytique	274.9 Hz	561.5 Hz	1008.9 Hz
Éléments finis	274.8 Hz	560.2 Hz	1008.5 Hz

TABLE 5.5 – Fréquences propres de la plaque CCCC obtenues analytiquement et par éléments finis

La courbe de dispersion de flexion tracée sur la figure 5.28 montre les singularités aux fréquences de résonance des modes $n = 0, m = 1, 3$. Ces derniers sont des modes de moyenne non nulle dont la contribution est incluse paramètre de masse apparente. En revanche, l'absence d'expressions analytiques pour les paramètres d'inertie effective et de raideur de torsion effective ne permet pas d'observer de singularité à la fréquence de résonance du mode $n = 0, m = 2$.
En conséquence, la courbe de dispersion analytique de flexion est perturbée seulement aux fréquences des modes de moyenne spatiale non nulle, contrairement à la courbe obtenue par WFEM, sur laquelle apparaît la résonance associée au mode $n = 0, m = 2$. La simulation par éléments

finis confirme néanmoins la validité du modèle analytique et la présence de dispersion atypique aux fréquences propres des modes de moyenne non nulle.

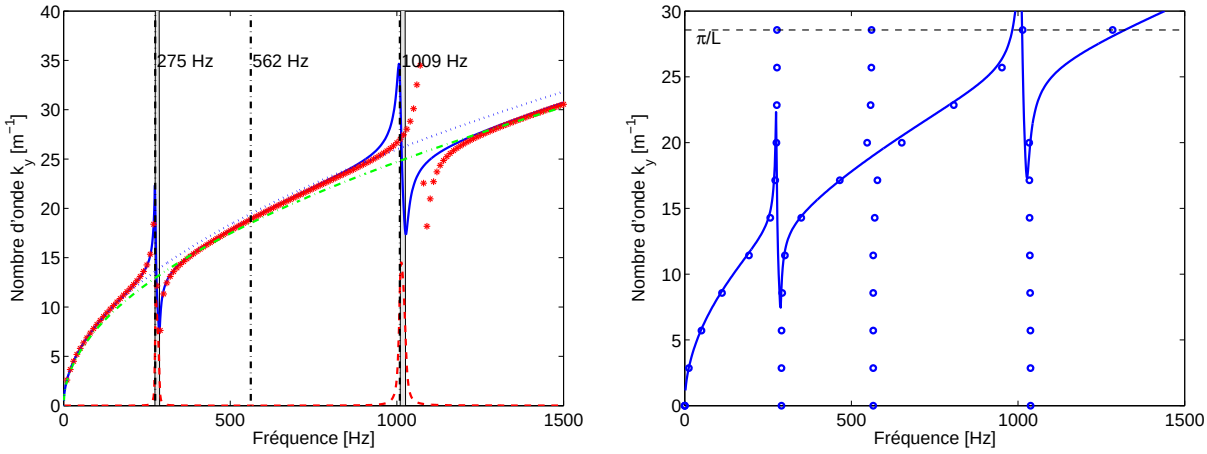


FIGURE 5.28 – Courbe de dispersion de flexion dans la plaque bi-raidie : (a) Nombres d'onde (partie réelle (−) et partie imaginaire (−−)). Nombre d'onde de flexion dans le treillis $\mathcal{G}$ seul (−·), et dans le treillis avec masse de la plaque interne inerte (···). Approximation plaque circulaire (∗). Les intervalles de masse effective négative sont représentés en gris (■) ; (b) Courbe de dispersion analytique (−), et calcul éléments finis WFEM (○)

5.6.2 Masse ajoutée sur les plaques internes

La masse unitaire des masselottes est de 3 grammes, ce qui représente 25% de la masse de la plaque interne, de 12 grammes. Dans le cas des plaques internes CCCC, il n'est pas possible d'estimer les fréquences propres en prenant une masse volumique équivalente. En effet, avec par exemple une masselotte, la masse volumique équivalente de la plaque interne alourdie est 1500 kg.m^{-3}. À partir du tableau 4.1 la première fréquence propre est 245 Hz, alors que le calcul par éléments finis sur la géométrie exacte donne 179 Hz. Cette approximation n'est pas utilisable. Dans la suite, seuls les cas CFCF et CFFF seront détaillés en exploitant les équations analytiques établies à la section 4.5. Cette dernière ayant déjà confronté les racines calculées analytiquement à celles calculées par éléments finis, la validité et la robustesse des formulations (4.63) et (4.64) n'est donc plus à démontrer. Ces deux expressions sont maintenant utilisées pour calculer les paramètres effectifs en fonction de l'ajout de masselottes de masses m de 3, 6, 9 grammes, par l'intermédiaire du rapport m_b/m valant alors 4, 2, 1.33.

Plaques internes CFCF avec masselottes

Compte tenu du dimensionnement choisi, les fréquences des premier et troisième mode de plaque sont obtenues analytiquement est présentées le tableau 6.3 : La masselotte étant située au centre la plaque (nœud de vibration), sa présence affecte uniquement les modes symétriques, mais pas les modes antisymétriques. Le paramètre de masse effective, dont les singularités sont associées aux modes symétriques, est alors le seul modifié par l'ajout de masse. Les paramètres d'inertie effective et de raideur de torsion effective présentant des résonances aux fréquences des modes antisymétriques ne sont pas concernés. Ce paramètre est alors tracé pour différentes valeurs de masse ajoutée, ce qui permet de visualiser le décalage des résonances vers les basses

	⊘ ($m_b/m = \infty$)	3 grammes ($m_b/m = 4$)	6 grammes ($m_b/m = 2$)	9 grammes ($m_b/m = 1.33$)
1^{er} mode	170.4	133.6	113.3	100.1
2^{nd} mode	469.6	469.6	469.6	469.6
$3^{ième}$ mode	920.7	803.2	762.5	742.1

TABLE 5.6 – Fréquences obtenues analytiquement en fonction de la masse ajoutée à la plaque en configuration CFCF

fréquences. La courbe de dispersion de flexion présente aussi des singularités à des fréquences décroissantes pour les modes impairs tandis que la fluctuation due au mode antisymétrique à 470 Hz reste inchangée.

Plaques internes CFFF avec masselottes

Compte tenu du dimensionnement choisi, les fréquences des deux premiers modes de plaque sont obtenues analytiquement et présentées dans le tableau 6.4 :

	⊘ ($m_b/m = \infty$)	3 grammes ($m_b/m = 4$)	6 grammes ($m_b/m = 2$)	9 grammes ($m_b/m = 1.33$)
1^{er} mode	26.7	18.9	15.4	13.3
2^{nd} mode	167.7	136.1	128.8	125.6

TABLE 5.7 – Fréquences obtenues analytiquement en fonction de la masse ajoutée à la plaque en configuration CFFF

Dans cette configuration, la masselotte est placée à l'opposé du côté encastré de la plaque. Ce cas ne permet pas de distinguer deux familles de modes symétriques et antisymétriques. Les développements de la section 4.3.6 montrent que le paramètre de masse effective présente des singularités. Ce paramètre est alors tracé pour différentes valeurs de masse ajoutée, ce qui permet de visualiser le décalage des résonances vers les basses fréquences. La courbe de dispersion de flexion présente aussi des singularités à des fréquences décroissantes.

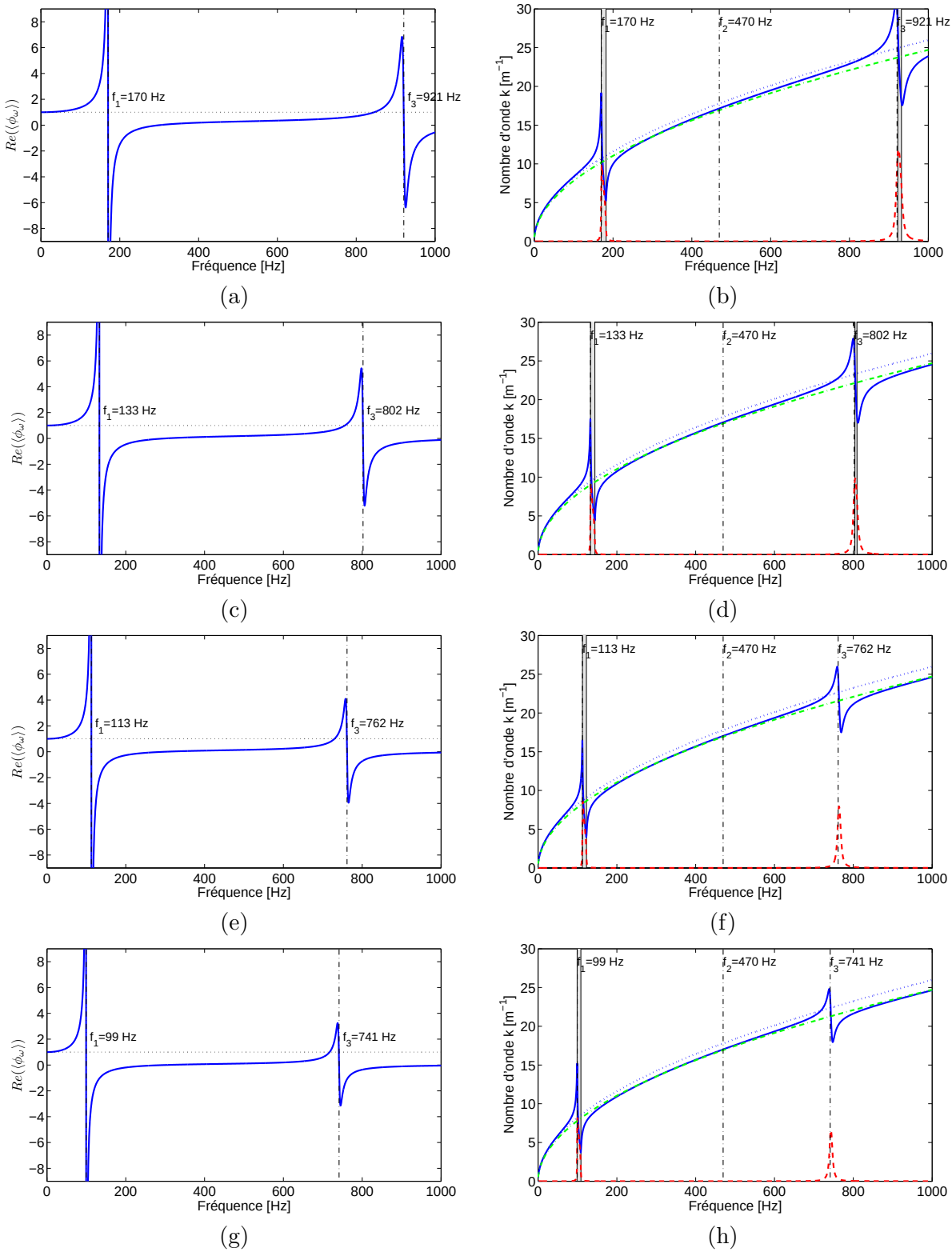


FIGURE 5.29 – Partie réelle de la masse apparente adimensionnelle $\langle \phi_\omega \rangle$ de la plaque (−) CFCF. Courbe de dispersion : partie réelle (−) et imaginaire (−−) nombre d'onde de flexion k. De haut en bas : sans masse ajoutée (a-b), 3 grammes (c-d), 6 grammes (e-f) 9 grammes (g-h).

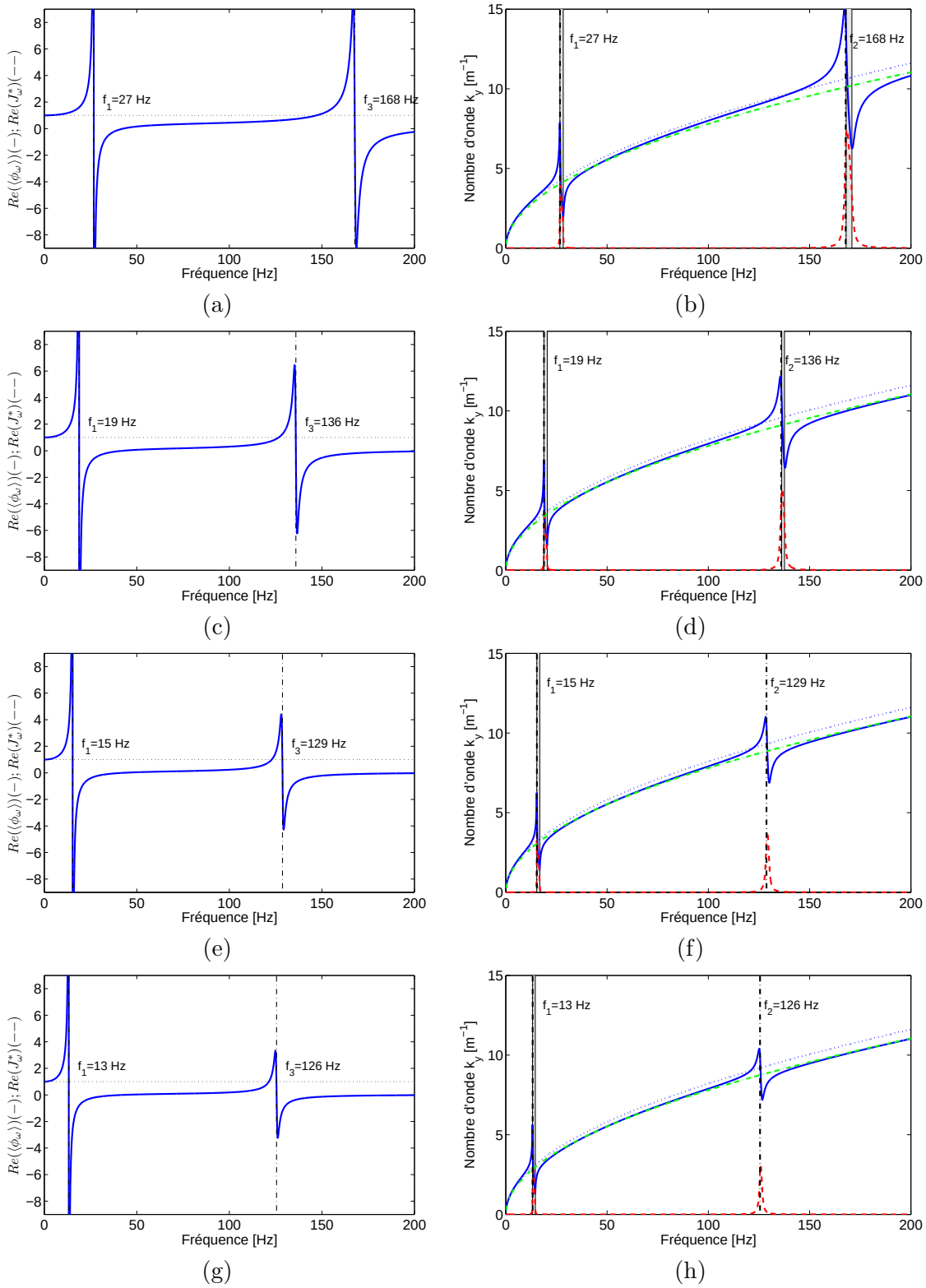


FIGURE 5.30 – Partie réelle de la masse apparente adimensionnelle $\langle \phi_\omega \rangle$ de la plaque (−) CFFF. Courbe de dispersion : nombre d'onde de flexion k. De haut en bas : sans masse ajoutée (a-b), 3 grammes (c-d), 6 grammes (e-f) 9 grammes (g-h).

5.7 Remarques finales

Ce chapitre de validation numérique compare les modèles homogénéisés de plaques mono- et bi-raidie construits aux chapitre 3 et 4 à des calculs réalisés par éléments finis. Ces modèles analytiques sont exploités en y associant d'abord des dimensionnements réalistes pour en extraire ensuite des grandeurs telles que les fréquences auxquelles apparaissent les différents mécanismes, les courbes de dispersion, et les réponses en fréquences.

Concernant la plaque simplement raidie, toutes les branches du diagramme de dispersion sont identifiées à partir du modèle homogénéisé et chacune d'entre elles est décrite par une équation de dispersion établie analytiquement sous forme directe et explicite. De plus, les estimations du modèle homogénéisé sont en très bon accord avec des simulations numériques de type éléments finis, pour deux dimensionnements réalistes incluant des contrastes mécanique et/ou géométrique. Le modèle homogénéisé décrit correctement les résonances locales affectant les nombres d'onde de flexion et de torsion, ainsi que les fréquences de coupure des modes guidés.

Concernant la plaque bi-raidie, une validation préliminaire du modèle de treillis construit par HPDM est réalisée en modélisant la propagation dans différentes directions. Les solutions analytiques sont présentées dans le plan de nombres d'onde (k_x, k_y) en y superposant les résultats de la transformée de Fourier bi-dimensionnelle et de l'IWC calculés à partir d'un champ spatial simulé par éléments finis. L'ajout de plaques internes résonantes à l'intérieur du treillis introduit une dispersion atypique localisée aux fréquences propres des ces dernières. En modifiant les conditions limites des plaques internes et en y ajoutant des masselottes, les effets non conventionnels sont introduits sur un large intervalle de fréquences. Ces aspects sont décrits analytiquement et coïncident avec les simulations numériques pour chacun des cas.

Cette validation numérique confirme la pertinence des modèles homogénéisés et donne des résultats prometteurs en vue de la validation expérimentale présentée au chapitre suivant.

Chapitre 6

Validation expérimentale

Ce chapitre est consacré à la validation expérimentale des modèles construits aux chapitres 3 et 4, et vient compléter la validation par éléments finis menée au chapitre 5. Deux maquettes sont étudiées : une première plaque simplement raidie avec contraste géométrique, et une seconde plaque bi-raidie avec contrastes géométrique et mécanique. Les objectifs sont *i)* de comparer les fréquences propres de la structure à celles déterminées analytiquement et numériquement, *ii)* d'identifier la résonance interne sur les réponses fréquentielles, *iii)* de reconstruire les courbes de dispersion des ondes de flexion et en estimer l'amortissement à partir des mesures pour les comparer aux modèles homogénéisés. La procédure expérimentale est d'abord exposée (section 6.1), puis mise en œuvre sur la plaque mono-raidie (section 6.2) et la plaque bi-raidie (section 6.3).

Sommaire

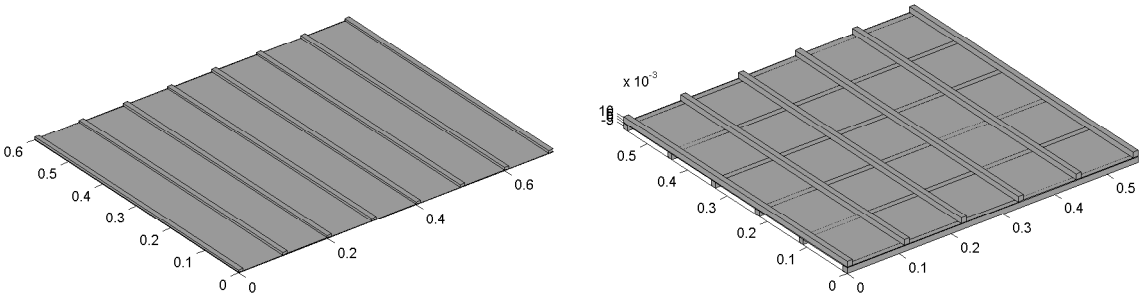
6.1 Structures étudiées et instrumentation 118
6.1.1 Assemblage et protocole de mesure 118
6.1.2 Montage et instrumentation 120
6.1.3 Mesures préliminaires 122
6.2 Plaque mono-raidie 123
6.2.1 Estimation du nombre d'onde : excitation de type bruit blanc 123
6.2.2 Estimation du nombre d'onde : excitation impulsionnelle de type Ricker 123
6.2.3 Signaux temporels sous excitation sinusoïdale 125
6.3 Plaque bi-raidie 126
6.3.1 Identification des fréquences propres et des résonances locales 126
6.3.2 Courbe de dispersion préliminaire dans le treillis seul 127
6.3.3 Influence des conditions limites internes sur les courbes de dispersion . . 130
6.3.4 Influence de la masse ajoutée sur les courbes de dispersion 134
6.4 Remarques finales 140

6.1 Structures étudiées et instrumentation

Les deux maquettes à l'étude sont schématisées sur la figure 6.1. L'une est une plaque mono-raidie entièrement constituée du même matériau. La seconde est une plaque bi-raidie et correspond exactement au dimensionnement $\mathcal{R}_3$ étudié numériquement. Les propriétés mécaniques et géométriques des maquettes sont données ci-après :

— pour la plaque mono-raidie avec raidisseurs et plaque en aluminium (notations de la figure 3.1) : $L = 60$ cm, $b = 10$ mm, $l = 5$ mm, distance inter-baguettes $D = 9$ cm. Plaque $750 \times 600 \times 1$ mm, dont la masse totale est 2.386 kg.

— pour la plaque bi-raidie avec raidisseurs en aluminium et plaque en polycarbonate (notations de la figure 4.1) : $L_k = 56$ cm, $h_k = b_k = 10$ mm, distance inter-baguettes $l_k = 10$ cm. Plaque $L_k = 56$ cm, $d = 1$ mm, dont la masse totale est 2.180 kg.



(a) (b)

FIGURE 6.1 – (a) Plaque mono-raidie ; (b) Plaque bi-raidie. (dimensions en m)

6.1.1 Assemblage et protocole de mesure

La plaque simplement raidie se compose d'une plaque raidie par des baguettes espacées régulièrement et collées à l'aide d'une résine époxy. Cette configuration permet d'illustrer le cas d'un contraste géométrique entre plaque et raidisseurs. Les raidisseurs sont tous du même côté de la plaque.

La plaque bi-raidie se compose d'une plaque en polycarbonate sur laquelle sont collées des baguettes en aluminium avec une résine époxy. Cette configuration permet d'illustrer le cas d'un contraste géométrique et mécanique. La plaque est raidie dans une direction par des baguettes collées d'un côté de la plaque, et dans la direction perpendiculaire par des baguettes collées de l'autre côté de la plaque (figure 6.2). Aucun boulon n'est ajouté aux intersections pour ne pas introduire d'hétérogénéité.

Pour la plaque bi-raidie, les trois conditions limites différentes des plaques internes illustrées sur la figure 4.6 nécessitent de dégrader successivement la structure. Dans un premier temps, les plaques internes sont encastrées sur leurs quatre côtés, ce qui correspond à la configuration CCCC. Deux côtés opposés seront ensuite découpés au plus proche des baguettes pour se placer en configuration CFCF, pour chacune des plaques internes. Un troisième côté sera lui aussi découpé pour que chacune des plaques soit en condition CFFF. La dernière étape consiste à enlever complètement les plaques pour ne conserver que le treillis (l'épaisseur de polycarbonate sous les raidisseurs subsiste).



(a) (b)

FIGURE 6.2 – Photo de la plaque sous presse pendant le collage des baguettes (a) d'abord d'un côté dans une direction, (b) puis de l'autre côté dans l'autre direction

Pour chacune des conditions limites internes, l'ajout de masselottes sur les plaques permettra d'abaisser leurs fréquences de résonance (cet aspect est décrit analytiquement en section 4.5). Les masses sont des couples d'aimants positionnés en vis-à-vis sur les deux faces opposées des plaques internes, comme illustré sur la figure 6.3. Il sont choisis suffisamment petits pour considérer que la masse ajoutée est ponctuelle et ne perturbe pas la cinématique de plaque. Ces aimants sont cylindriques, de 10 mm de diamètre et 5 mm de haut, et dont la densité moyenne est 7.6 g.cm^{-3} (donnée par le constructeur), soit un poids unitaire de 3 grammes (vérifié à l'aide d'une balance). De plus, leur force d'adhérence de 25 N assure que les aimants ne bougent pas au cours de l'essai. Une masselotte aimantée représente un quart du poids de la plaque interne (12 grammes).

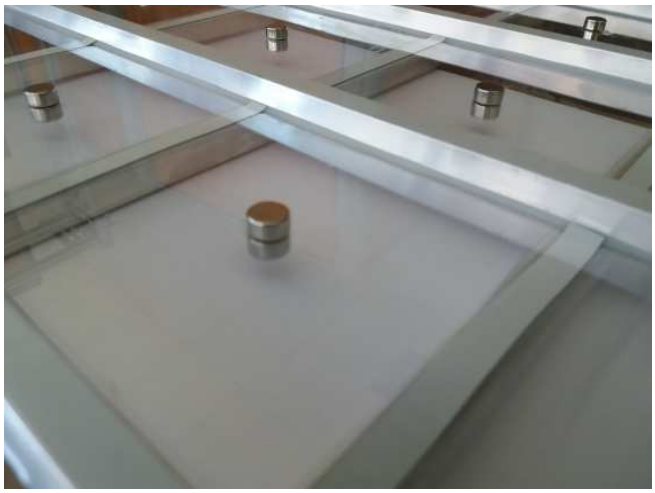


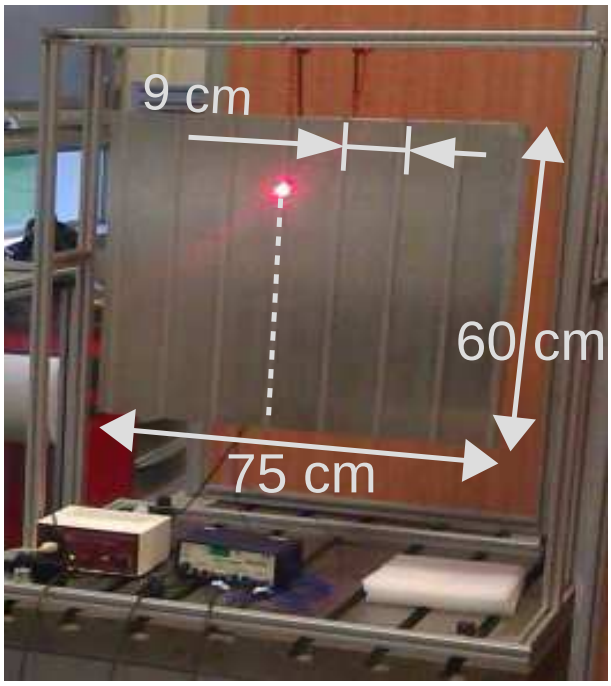
FIGURE 6.3 – Photo de la plaque bi-raidie avec masselottes ajoutées sur les plaques internes

6.1.2 Montage et instrumentation

Les plaques sont suspendues verticalement à un portique d'essai par du fil de nylon pour imiter des conditions limites libres sur leur pourtour. Le mode masse-ressort pendulaire hors-plan de chacune des deux plaques étudiées suspendues est estimé expérimentalement inférieur à 10 Hz. Au cours des essais, les plaques sont sollicitées par un pot vibrant, lui aussi suspendu, dont la tige est collée à l'extrémité haute du raidisseur central. Une tête d'impédance vissée entre la tige du pot vibrant et la plaque permet de contrôler la force et l'accélération d'entrée. Avant chaque essai, l'horizontalité et la verticalité de la plaque sont vérifiées à l'aide d'un niveau à bulle et d'un fil à plomb.

Le déplacement hors-plan de la plaque est mesuré par un vibromètre Laser situé face à la plaque. Cette mesure sans contact permet de connaître la vitesse d'un point à la surface de la plaque. Si la zone visée est suffisamment diffusante, une partie du rayon incident est renvoyée à la source, puis comparée par effet Doppler au rayon initial pour estimer la vitesse de la zone mesurée. Des pastilles réfléchissantes sont collées aux points de mesure pour améliorer le rapport signal/bruit. La masse ajoutée des pastilles est négligeable et ne sera pas prise en compte dans la suite.

Les réponses mesurées par le vibromètre et les fonctions de cohérence correspondantes seront les données d'entrée du post-traitement par la méthode IWC introduite à la section 2.4.2. Le dispositif expérimental est montré sur la figure 6.4 :



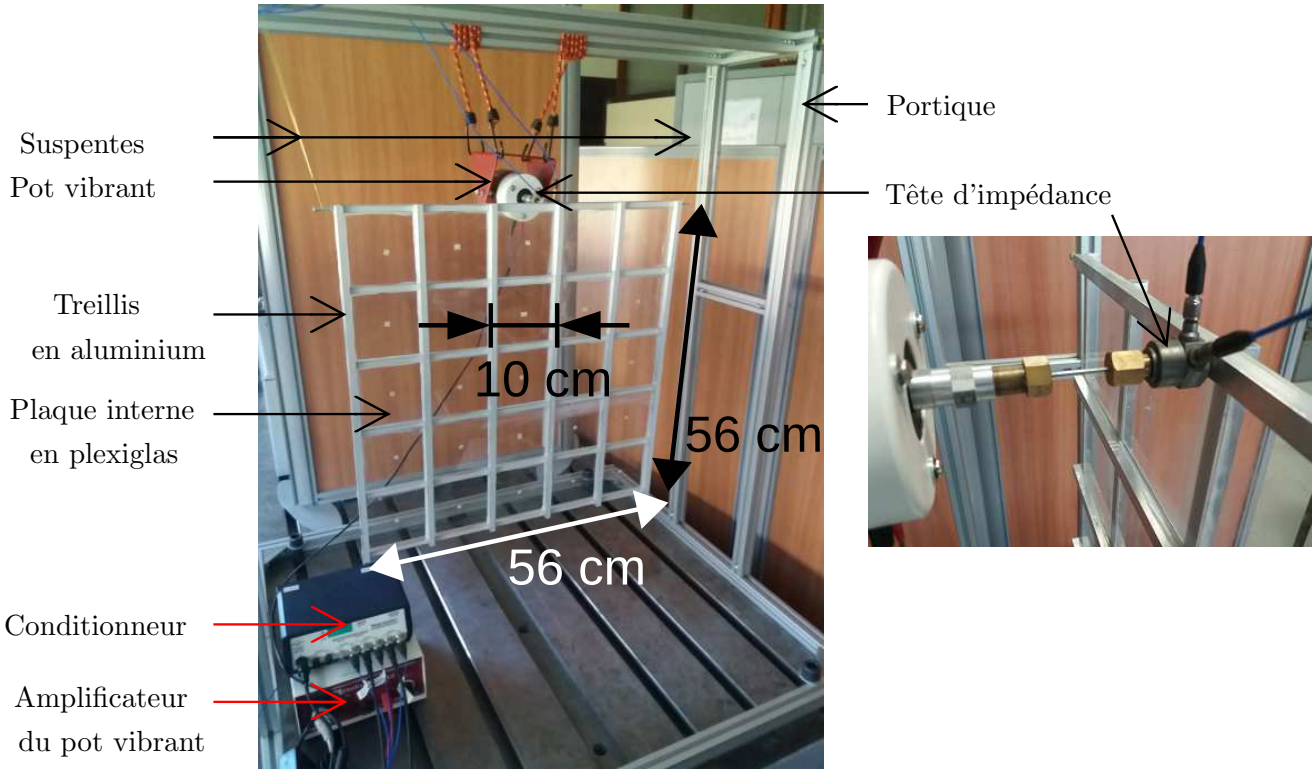


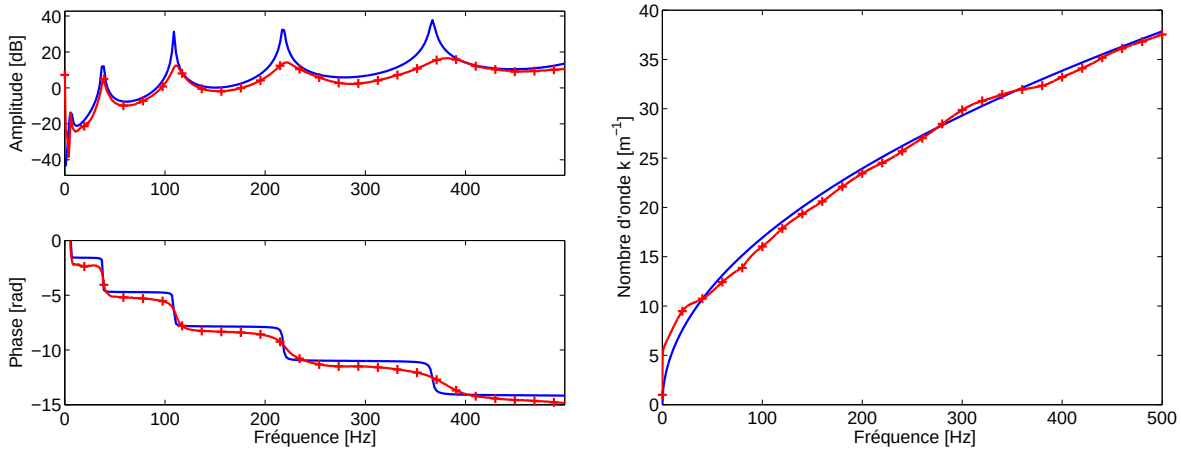
FIGURE 6.4 – Photos des plaques raidie (a), et bi-raidie (b) en configuration de mesure

6.1.3 Mesures préliminaires

Le protocole de mesure et le traitement par IWC sont ici illustrés sur le cas simple d'une poutre en plexiglass encastrée-libre de 47 cm de long, 4 cm de large, et 5 mm d'épaisseur. L'excitation se fait au plus proche de l'encastrement à l'aide d'un marteau d'impact muni d'un capteur de force PCB-208C02. L'excitation au marteau d'impact est une technique rapide et directe qui fournit des entrées de forces transitoires de courtes durées et large bande pour exciter simultanément toutes les fréquences dans la structure.

L'accéléromètre PCB-M353B18 est situé à l'extrémité libre. Les signaux transitent par un conditionneur PCB-482C, puis une carte NI USB-9215 pour être traités avec Matlab. En choisissant 2048 points et une fréquence d'échantillonnage de 2 kHz, l'acquisition temporelle dure une seconde à partir de l'impact, et 5 moyennes sont réalisées. Le traitement consiste à calculer les spectres puis à les diviser : la fonction de transfert retenue est le rapport de l'accélération mesurée sur la force injectée (inertance).

La comparaison avec la réponse analytique en module et en phase est montrée sur la figure 6.5. L'estimation du nombre d'onde par IWC nécessite de mesurer les réponses le long de la structure. Des mesures complémentaires de l'accélération en onze points espacés de 4 cm le long de la poutre permettent alors de déterminer le nombre d'onde de flexion, comme représenté sur la figure 6.5.



(a) (b)

FIGURE 6.5 – (a) Comparaison du module et de la phase de l'inertance à l'extrémité de la poutre : analytique (−) et expérimentale (− + −) ; (b) Nombre d'onde de flexion dans la poutre : expression analytique (−) et reconstruction expérimentale par IWC (− + −)

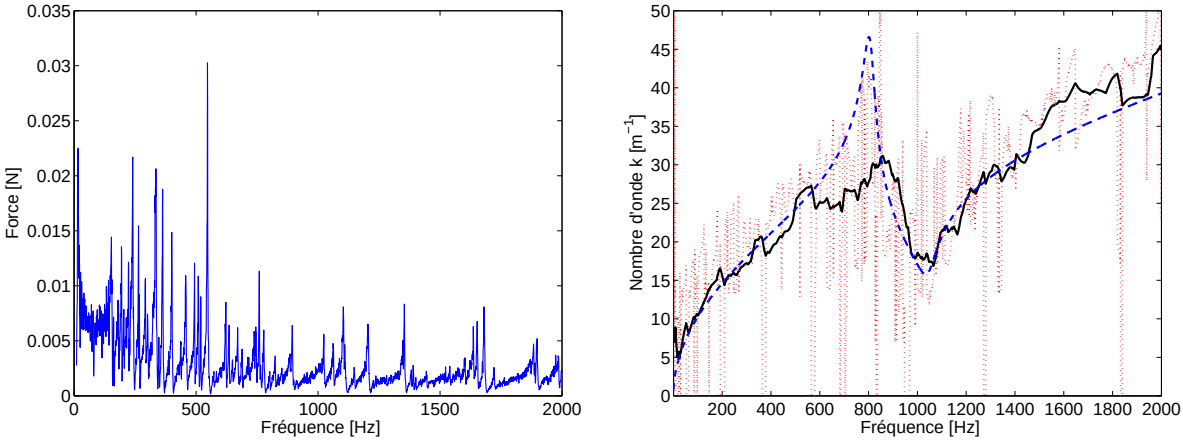
Ces mesures montrent que l'IWC permet d'estimer précisément la courbe de dispersion des ondes de flexion dans la poutre à partir de réponses mesurées en plusieurs points. Cette estimation ne nécessite pas la connaissance des propriétés mécaniques, les conditions limites, ni les dimensions de la structure. Pour ces raisons, l'IWC peut servir à identifier les paramètres mécaniques apparents. Pour assurer la pertinence de l'estimation, le pas de discrétisation spatiale ne devrait cependant pas être supérieur à une demi-longueur d'onde.

6.2 Plaque mono-raidie

6.2.1 Estimation du nombre d'onde : excitation de type bruit blanc

La plaque raidie est suspendue de sorte que les raidisseurs sont verticaux. Le laser balaie 21 points de haut en bas du raidisseur central, soit un pas spatial de 2,8 cm. Le signal d'excitation est un bruit jusqu'à 2 kHz, en considérant 3200 points fréquentiels, soit une résolution fréquentielle de 0.6 Hz. Pour chaque point, on exporte la mobilité (vitesse/force) et la fonction de cohérence correspondante. La fonction de cohérence n'est pertinente que si elle est associée à plusieurs moyennes, ici 50 en chaque point de mesure.

Les réponses mesurées sous bruit blanc sont traitées par IWC et la figure 6.6 montre la reconstruction de la courbe de dispersion. Le résultat brut est ensuite amélioré en utilisant une moyenne glissante sur une fenêtre de 90 Hz. La concordance avec la courbe analytique est correcte : la reconstruction est très pertinente jusqu'à 600 Hz, la résonance à 800 Hz n'est pas aussi marquée expérimentalement qu'analytiquement, probablement en raison de l'amortissement ; l'anti-résonance entre 900 et 1400 Hz est en revanche bien mieux estimée.



(a) (b)

FIGURE 6.6 – (a) Spectre normalisé du bruit relevé en sortie du pot vibrant ; (b) nombre d'onde analytique (−−) et nombre d'onde reconstruit par IWC à partir de FRF expérimentales : courbe non moyennée (···), et moyennée (−)

Ce premier résultat laisse supposer qu'une excitation impulsionnelle, contenant un spectre mieux centré en fréquence, permettrait d'améliorer la reconstruction autour de la résonance. Ce point est abordé dans la section suivante.

6.2.2 Estimation du nombre d'onde : excitation impulsionnelle de type Ricker

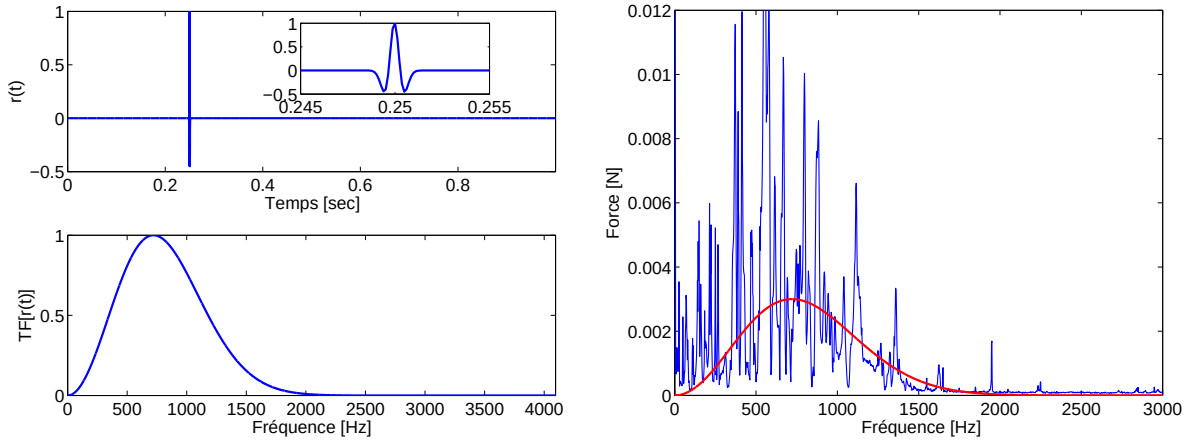
L'ondelette de type Ricker est définie comme la dérivée seconde d'une fonction gaussienne :

$$r(t) = U\left(e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2}\right)'' \qquad \text{soit} \qquad r(t) = \frac{U}{\tau^4} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}} \left(4(t-t_0)^2 - 2\tau^2\right)$$

et sa transformée de Fourier s'écrit $TF[r(t)] = R(\omega) = (U/\sqrt{2})\omega^2 e^{-\frac{\tau^2\omega^2}{4} + it_0\omega}/(\sqrt{1/\tau^2})$. La figure 6.7 montre le signal construit avec $N = 8192$ points et une fréquence d'échantillonnage $f_e = 8192$ Hz. L'axe temporel est $t = [0 : \Delta_t : (N-1)\Delta_t]$ où $\Delta_t = 1/f_e$ est le pas temporel, et

l'axe fréquentiel est $f = [0 : \Delta_f : (N-1)\Delta_f]$ où $\Delta_f = 1/N$ est la résolution fréquentielle.

La pulsation centrale ω_c détermine la largeur à mi-hauteur τ, en secondes. L'étude de Wang (2015) explique que τ se calcule de manière approchée avec $\tau = 0.88521/\omega_c$. Dans notre cas, la fréquence centrale est 800 Hz. Cette impulsion est tracée avec Matlab puis transférée dans le logiciel d'interface du vibromètre. Ce signal permet d'avoir une précision accrue autour de la fréquence ciblée, comme représenté sur la figure 6.7, qui montre le spectre expérimental relevé au point d'excitation. Le maximum d'amplitude du spectre théorique est atteint à la fréquence centrale.

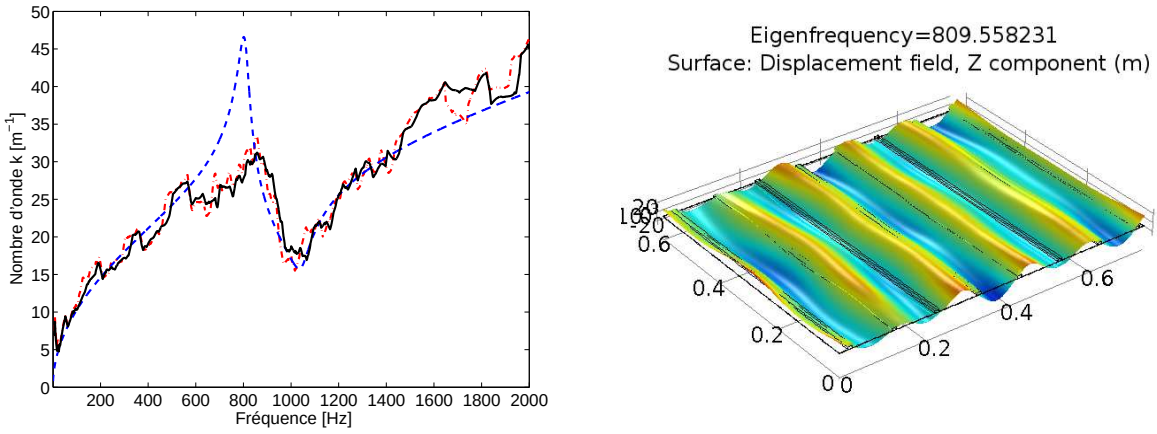


(a) (b)

FIGURE 6.7 – (a) Signal temporel et spectre normalisé du signal Ricker ; (b) Spectre du signal de la force recueilli au point d'excitation (−) et spectre théorique (−−)

Le nombre d'onde est montré sur la figure 6.8 et comparé à celui obtenu avec l'excitation bruit blanc. Le résultat est très proche et ne permet pas de conclure précisément quant au gain de précision obtenu avec le Ricker. De plus, une simulation par éléments finis permet de s'assurer que la résonance à 800 Hz est associée à un mouvement de flexion des plaques internes coïncidant avec le premier mode guidé, en accord avec le modèle analytique (section 5.2.1).

Les expériences sur la plaque bi-raidie se feront avec une excitation de type bruit blanc car elle permet une excitation large bande instantanément, contrairement au Ricker qui nécessite de créer un signal spécifique pour chaque fréquence ciblée.

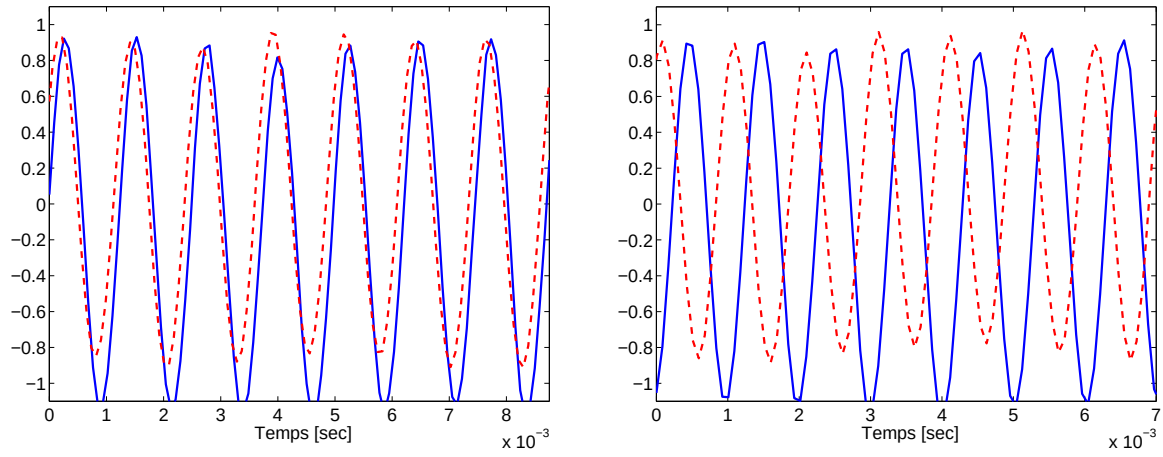


(a) (b)

FIGURE 6.8 – (a) Nombre d'onde analytique (−−) et nombre d'onde reconstruit par IWC à partir de FRF expérimentales avec excitation bruit blanc (−) et Ricker (− · −) ; (b) Simulation par éléments finis de la déformée du mode propre à 800 Hz

6.2.3 Signaux temporels sous excitation sinusoïdale

La visualisation des signaux temporels sous excitation harmonique permet ici de vérifier la cinématique inhomogène. Le signal temporel de la force injectée est relevé sur le raidisseur par la tête d'impédance, tandis que le signal de vitesse normale est mesuré sur la plaque par le vibromètre. Les deux points sont à la même latitude. À la résonance (800 Hz), les signaux sont en phase, alors qu'à l'anti-résonance (1000 Hz), les signaux sont en opposition de phase. La figure 6.9 montre la superposition des signaux temporels.



(a) (b)

FIGURE 6.9 – Signaux temporels normalisés des déplacements transverses relevés sur le raidisseur (−) et sur la plaque (−−), sous excitation sinusoïdale : (a) 800 Hz (résonance) et (b) 1000 Hz (anti-résonance)

6.3 Plaque bi-raidie

Cette section présente des résultats expérimentaux de réponses fréquentielles permettant d'identifier les fréquences propres de la structure et de les comparer aux résultats analytiques et numériques (section 6.3.1). La courbe de dispersion déterminée pour le treillis seul est d'abord présentée (section 6.3.2). Les estimations des courbes de dispersion en fonction des conditions limites sont comparées aux résultats analytiques (section 6.3.3). L'effet de la masse ajoutée sur les plaques est aussi abordé (section 6.3.4).

6.3.1 Identification des fréquences propres et des résonances locales

Le vibromètre balaie l'ensemble de la plaque selon un maillage régulier de 11×11 points. Cette discrétisation spatiale est suffisante pour différencier les premiers modes de la structure jusqu'à 1 kHz, ainsi que les premiers modes locaux des plaques internes.

L'objectif ici est de comparer les réponses suivant les différentes conditions limites internes pour identifier les fréquences propres de la structure d'une part, et les résonances locales d'autre part. À partir des réponses aux 121 points dans les configurations CCCC, CFCF, CFFF, il est possible de séparer les 96 points situés sur le treillis des 25 points situés au centre des plaques, et d'en moyenner la valeur absolue afin de visualiser la contribution relative des plaques résonantes par rapport au treillis. Le résultat est montré sur la figure 6.10 dans le cas CCCC. Les réponses obtenues en configuration CFCF et CFFF sont elles aussi séparées de la même manière pour procéder à l'identification des fréquences et vérifier si la résonance interne se manifeste. Pour ce faire, la figure 6.11 affiche seulement les moyennes sur les 25 points de plaques et les 96 points de treillis. Dans le cas CFCF, seules les fréquences associées aux modes de moyenne non nulles se manifestent.

Les premières fréquences propres de la structure sont déterminées à partir des FRF moyennées sur tous les points et reportées dans le tableau 6.1. Les fréquences propres du treillis sont aussi calculées par éléments finis. Cette simulation tient compte de l'épaisseur résiduelle de polycarbonate sous chaque raidisseur une fois que les plaques sont retirées, ce qui représente environ 76 grammes. Les valeurs de fréquences obtenues sont très cohérentes pour les quatre configurations testées.

La résonance locale des plaques internes apparaît clairement dans chacune des configurations CCCC, CFCF, et CFFF. Sur la figure 6.10, la dynamique locale (b) se détache nettement du treillis (c), notamment dans les intervalles de résonance où le facteur d'amplification moyen est 6 pour l'intervalle [200 280] Hz, et 5,5 pour l'intervalle [800 1000] Hz. En configuration CFCF, la résonance est très facilement identifiable, avec des facteurs d'amplification de 4.4 et 4.3 dans les intervalle autour des résonances. De même, en configuration CFFF, ces facteurs sont de 5.7 et 8.

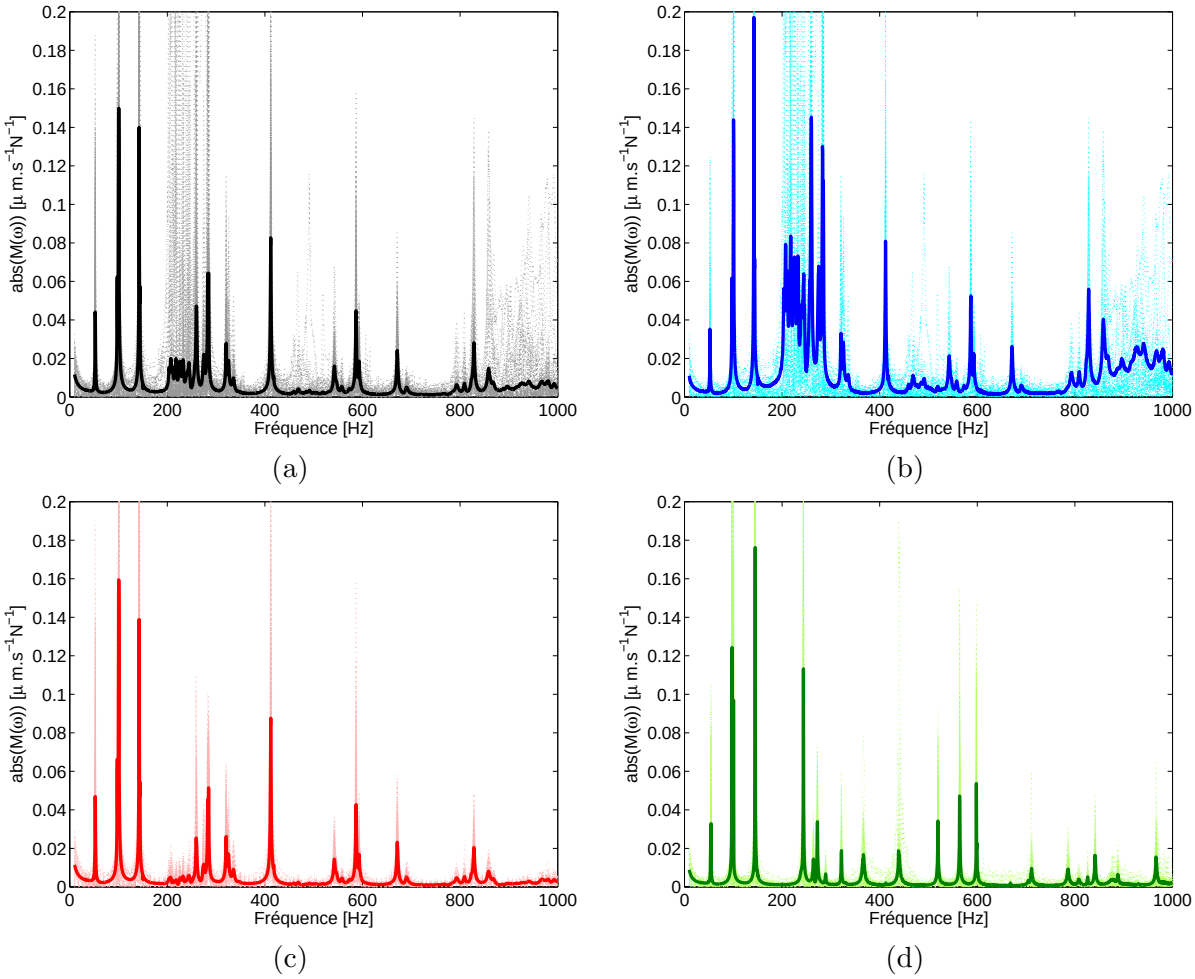


FIGURE 6.10 – FRF($\cdots$) et FRF moyennée (–), (a) en tous points de la plaque (121 pts) ; (b) sur les plaques (25 pts) ; (c) sur le treillis avec plaques internes (96 pts) ; (d) sur le treillis seul (96 pts)

	Fréquences [Hz]							
Treillis seul (num.)	56	100	151	266	287	329		511
Treillis seul (exp.)	54	97	145	264	289	322	367	519
Treillis et plaques CCCC (exp.)	52	100	142	259	282	320	411	
Treillis et plaques CFCF (exp.)	51	93	152	250	273	313		511
Treillis et plaques CFFF (exp.)	54	96	141	251	269	316	412	515

TABLE 6.1 – Comparaison des fréquences propres du treillis calculées numériquement par éléments finis et identifiées expérimentalement dans les différentes configurations

6.3.2 Courbe de dispersion préliminaire dans le treillis seul

Un résultat préliminaire concernant le treillis seul est ici présenté. La mesure est effectuée en mesurant le déplacement transverse le long d'un renfort, ce qui permet, après traitement par IWC, d'estimer les nombres d'onde de flexion et de reconstituer la courbe de dispersion. La comparaison avec la courbe de dispersion calculée à partir du modèle homogénéisé du treillis seul (4.48) est présentée sur la figure 6.12. L'épaisseur restante de polycarbonate sous les renforts

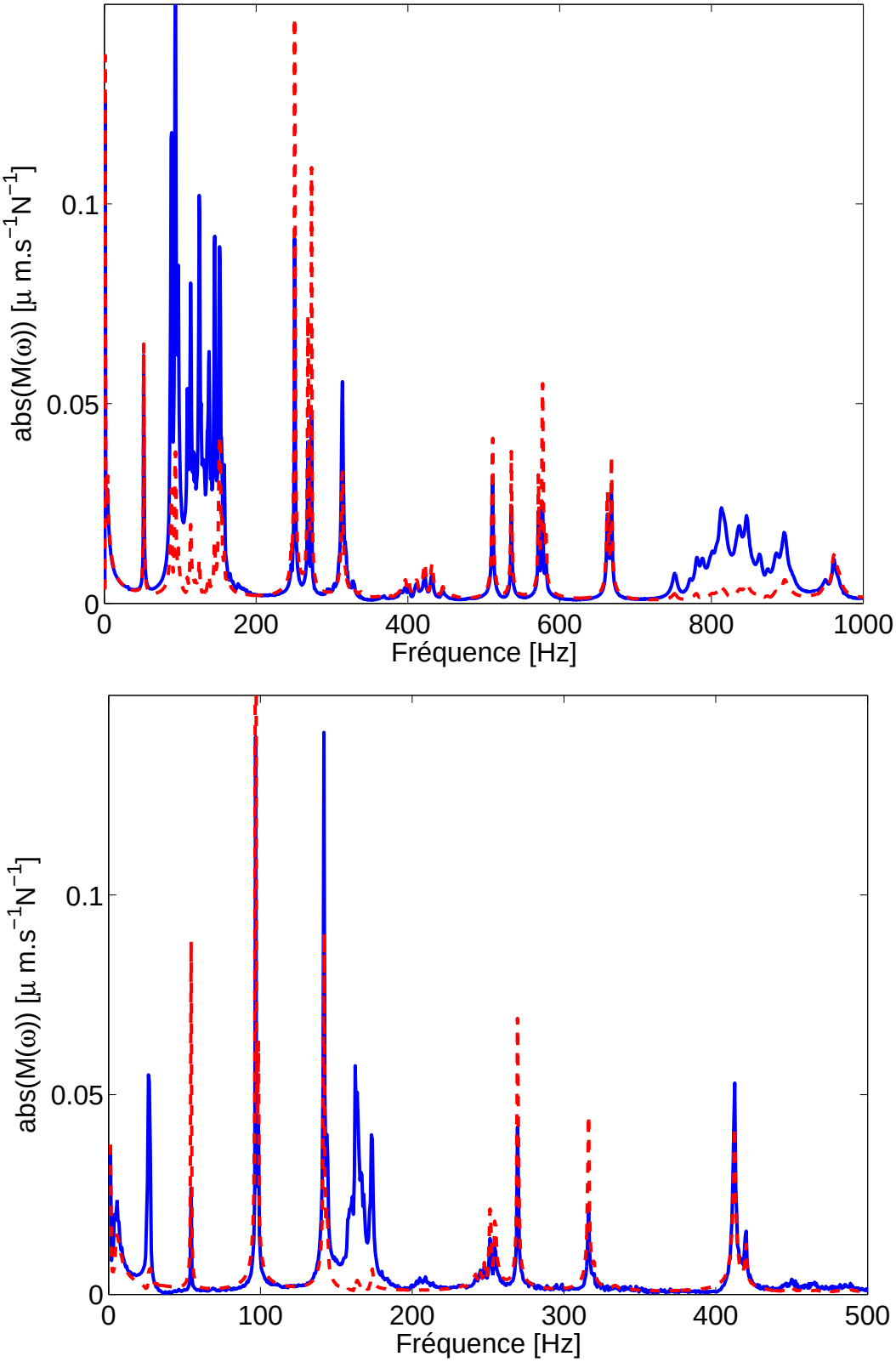


FIGURE 6.11 – FRF moyennées sur les plaques (—) et sur les raidisseurs (– –) pour deux types de conditions limites : CFCF (haut) et CFFF (bas)

est prise en compte à travers une masse volumique équivalente, et permet d'avoir une bonne concordance entre la reconstruction expérimentale et le modèle analytique.

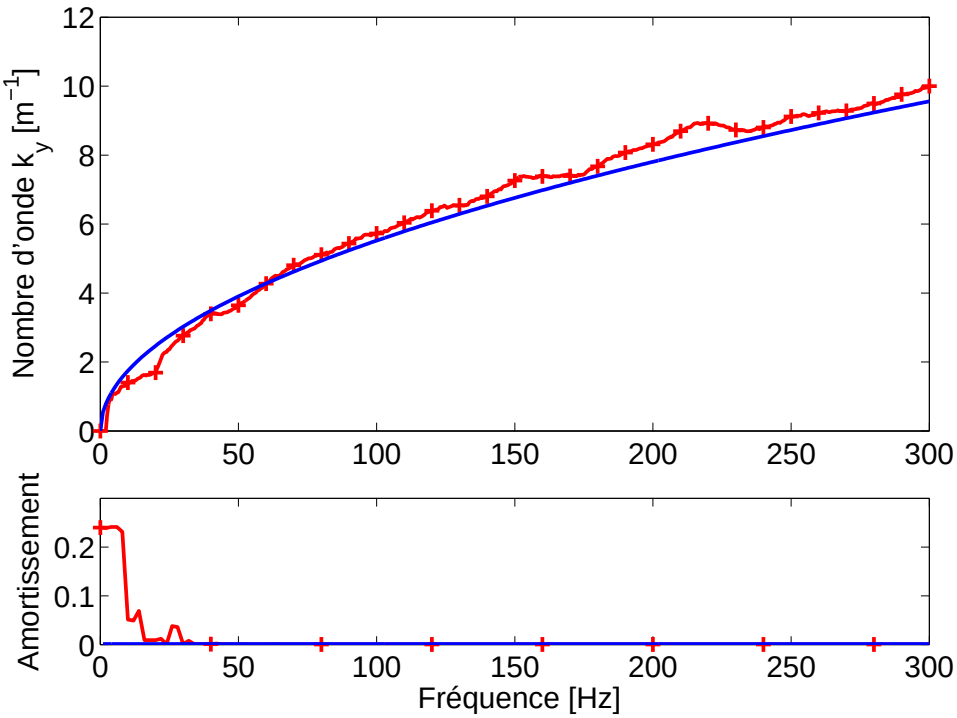


FIGURE 6.12 – Comparaison du nombre d'onde analytique (–) et reconstruit à partir des mobilités expérimentales (– + –) pour le treillis seul

6.3.3 Influence des conditions limites internes sur les courbes de dispersion

La plaque bi-raidie est suspendue et le pot vibrant est positionné en haut d'un raidisseur. Le laser balaie 19 points de haut en bas du raidisseur.L'objectif est de mettre en évidence expérimentalement les singularités apparaissant sur la courbe de dispersion. Pour rappel, ce comportement atypique provient du fait que les ondes de flexion dans le raidisseur sont affectées par la masse effective de la plaque résonante.

La courbe de dispersion estimée expérimentalement par IWC est comparée à la partie réelle de celle issue du modèle homogénéisé. L'amortissement estimé expérimentalement par IWC est comparé à la partie imaginaire du nombre d'onde analytique (qui correspond au facteur d'atténuation spatiale dans l'exponentielle).

La figure 6.13 montre des signaux bruts recueillis sur la plaque bi-raidie avec plaques internes CCCC. Ils sont associés à la fonction de transfert co-localisée, c'est à dire relevée au point d'excitation. La résonance interne s'identifie sur le module (voir section 6.3.1), et se retrouve nettement sur la phase de la réponse. Son effet est en revanche relativement faible sur la fonction de cohérence et laisse penser que la reconstruction du nombre d'onde par IWC (dont on rappelle qu'elle est pondérée par la fonction de cohérence) sera robuste. Les visualisations des réponses en d'autres points et pour différentes conditions limites internes confirment ces observations.

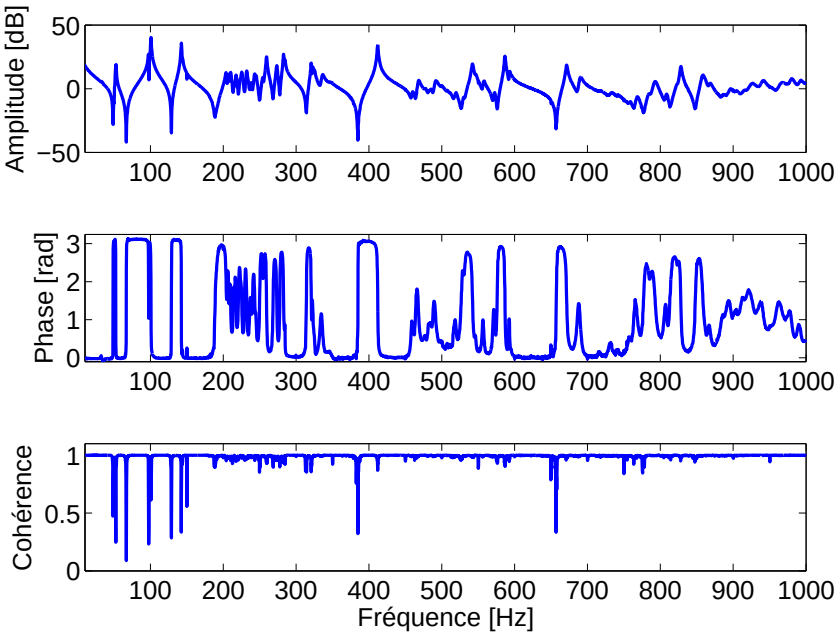


FIGURE 6.13 – Exemple de signaux expérimentaux bruts relevés au point d'excitation : mobilité en module et phase, et fonction de cohérence associée

Plaques internes CCCC : La figure 6.14 compare la courbe de dispersion issue du modèle homogénéisé et celle estimée expérimentalement. La mesure est effectuée en trois temps, d'abord avec un bruit blanc compris entre 10 et 500 Hz, puis entre 500 et 900 Hz, et enfin entre 900 et 1200 Hz. La figure 6.15 montre les agrandissements autour des deux singularités. Pour cette configuration, la largeur de la fenêtre de la moyenne glissante est 30 Hz. Les singularités associées à la résonance interne apparaissent nettement aux fréquences prédites analytiquement : 280 Hz et 1000 Hz.

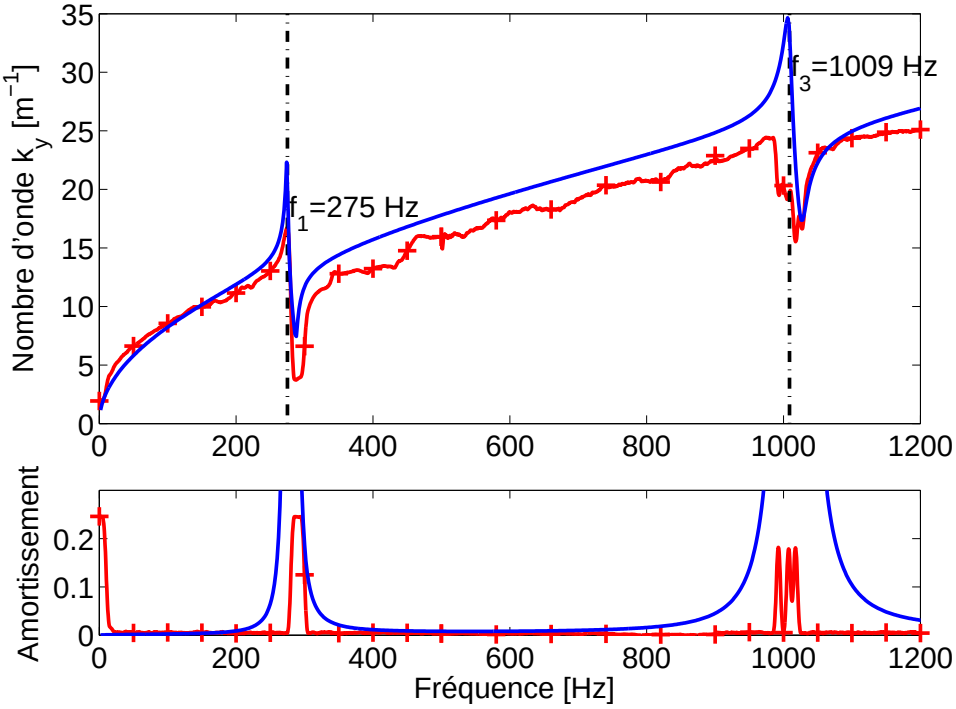


FIGURE 6.14 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des réponses expérimentales (− + −) avec plaques internes CCCC

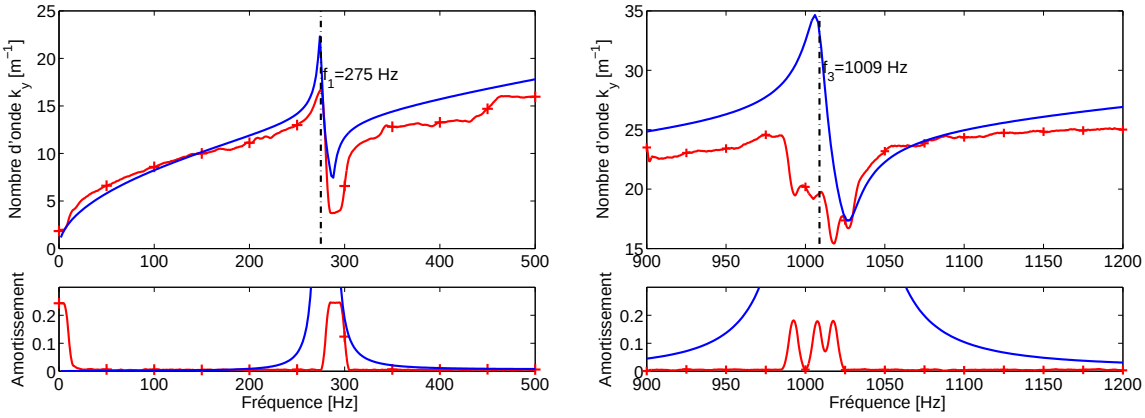


FIGURE 6.15 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des mobilités expérimentales (− + −). Agrandissement autour de la première singularité (a), et de la seconde (b)

Plaques internes CFCF : La figure 6.16 compare la courbe de dispersion issue du modèle homogénéisé et celle estimée expérimentalement. La mesure est effectuée en trois temps, avec un bruit blanc compris entre 10 et 300 Hz, puis entre 300 et 880 Hz, et enfin entre 880 et 1200 Hz. La figure 6.17 montre les agrandissements autour des deux singularités. Pour cette configuration, la largeur de la fenêtre de la moyenne glissante est 30 Hz. Les singularités associées à la résonance interne apparaissent nettement aux fréquences prédites analytiquement : 170 Hz et 921 Hz.

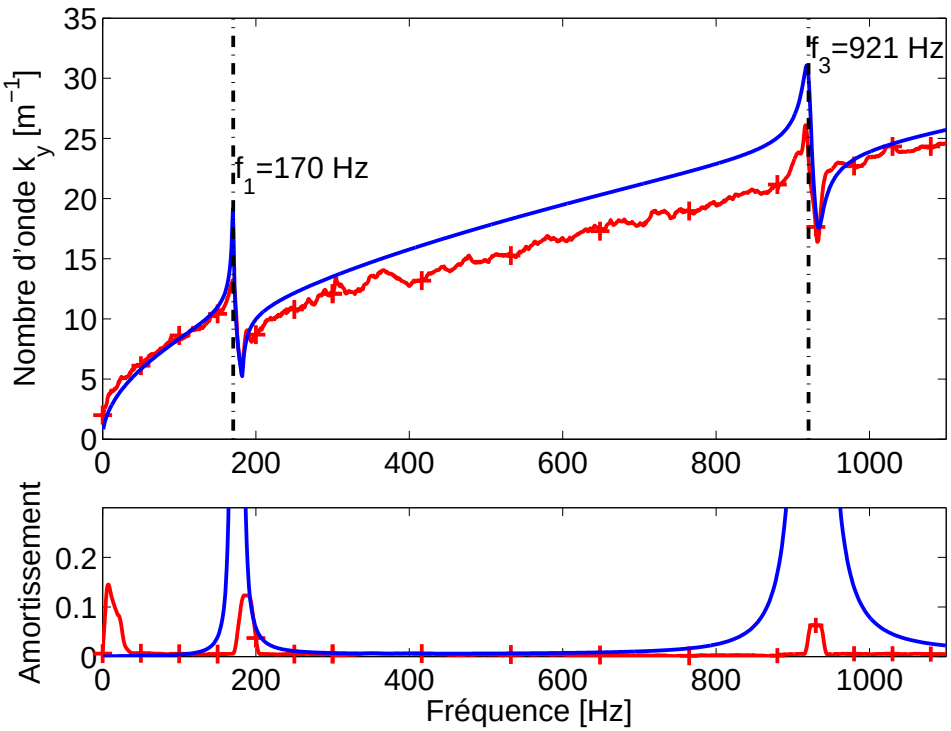
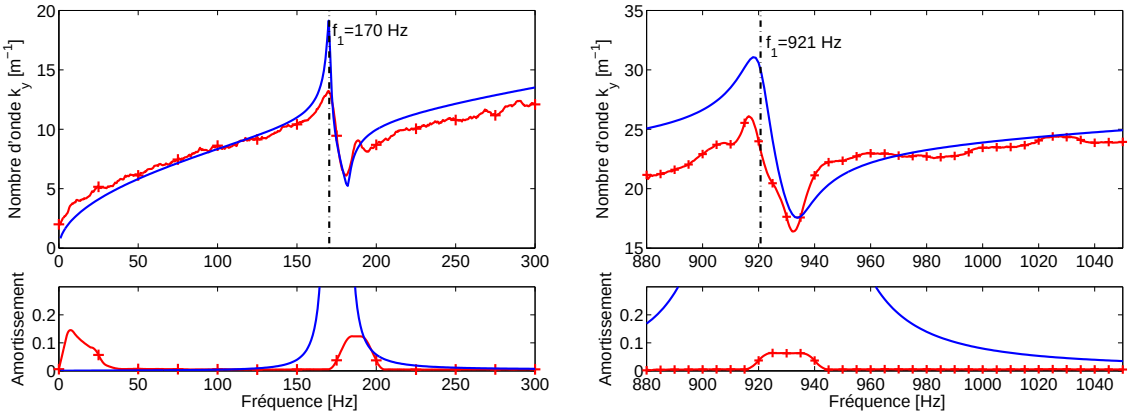


FIGURE 6.16 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des réponses expérimentales (− + −) avec plaques internes CFCF



(a) (b)

FIGURE 6.17 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des mobilités expérimentales (− + −). Agrandissement autour de la première singularité (a), et de la seconde (b)

Plaques internes CFFF : Pour cette configuration, la fréquence fondamentale de la plaque interne est recalculée en considérant que la découpe enlève 4 mm à la longueur de la plaque, qui devient alors ≈ 30 Hz théorique, la mesure est effectuée avec un bruit blanc compris entre 0 et 300 Hz. Les figures 6.18 et 6.19 comparent la courbe de dispersion issue du modèle homogénéisé et celle estimée expérimentalement. Pour cette configuration, la largeur de la fenêtre de la moyenne glissante est 10 Hz. Les singularités associées à la résonance interne apparaissent nettement aux fréquences prédites analytiquement : à 29 Hz et 182 Hz.

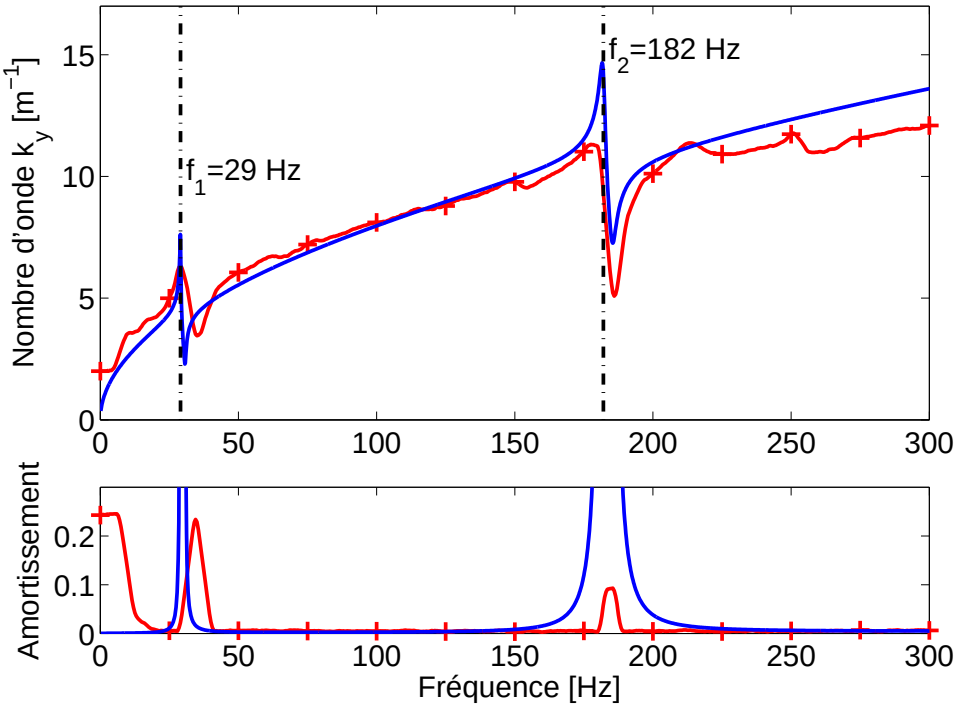
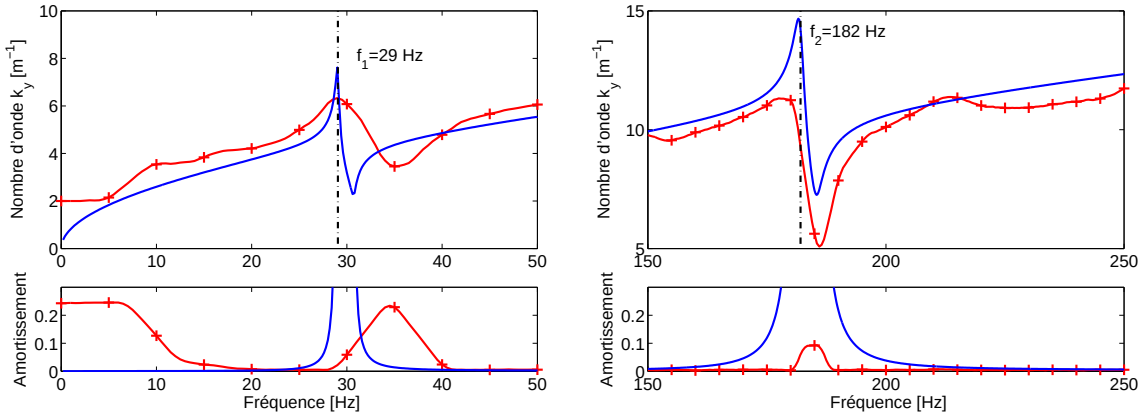


FIGURE 6.18 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des réponses expérimentales (− + −) avec plaques internes CFFF



(a) (b)

FIGURE 6.19 – Comparaison du nombre d'onde analytique (−) et reconstruit à partir des mobilités expérimentales (− + −). Agrandissement autour de la première singularité (a), et de la seconde (b)

6.3.4 Influence de la masse ajoutée sur les courbes de dispersion

Plaques internes CCCC

La figure 6.20 montre l'effet de l'ajout des masselottes sur les plaques internes en comparant les mobilités moyennées sur les plaques. La courbe du haut est identique à celle de la figure 6.10(b). Le décalage vers les basses fréquences de la première zone de résonance est beaucoup plus apparent que la seconde. Une comparaison des fréquences estimées par éléments finis et identifiées sur les courbes de dispersion expérimentales est présentée dans le tableau 6.2.

	Masse ajoutée			
	⊘	4 grammes	6 grammes	9 grammes
Analytique	274.9			
Éléments finis	274	150	130	105
Expérimental	275	150	128	108

TABLE 6.2 – Fréquences de résonance interne (en Hz) calculées par éléments finis et identifiées expérimentalement en fonction de la masse ajoutée à la plaque en configuration CCCC

La figure 6.21 montre les courbes de dispersion pour différentes valeurs de masse ajoutée sur les plaques internes. Les fréquences des résonances locales sont reportés dans le tableau 6.2. Le décalage en fréquence se manifeste nettement sur les réponses et sur les courbes de dispersion.

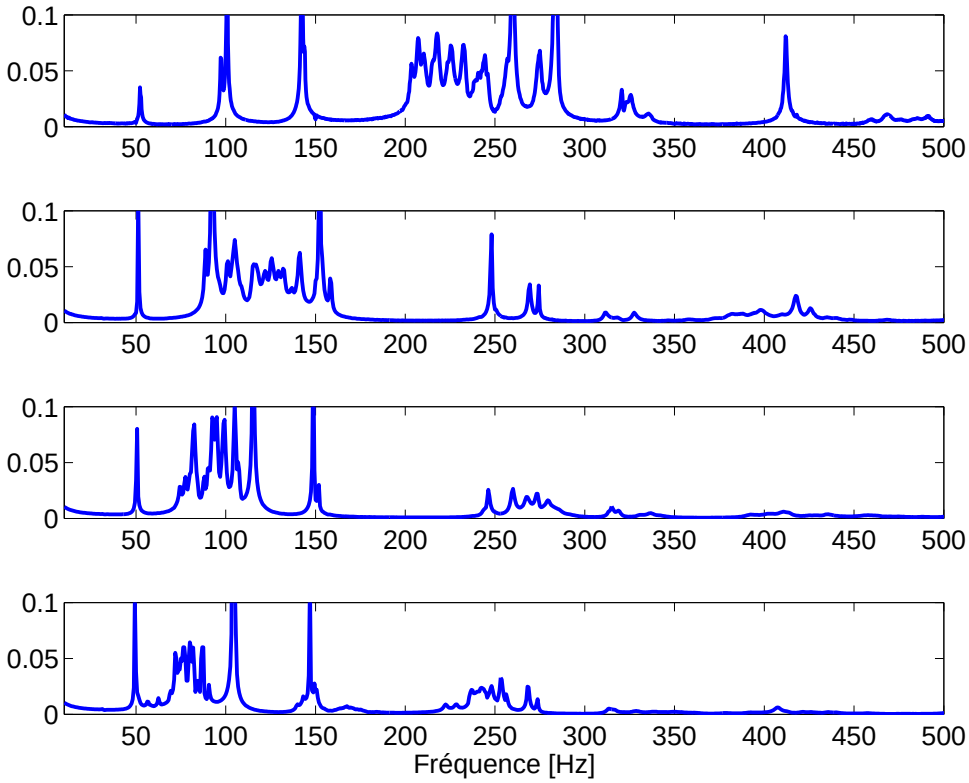


FIGURE 6.20 – Réponses moyennées : de haut en bas, sans masse ajoutée, 4 grammes, 6 grammes, 9 grammes, en configuration CCCC

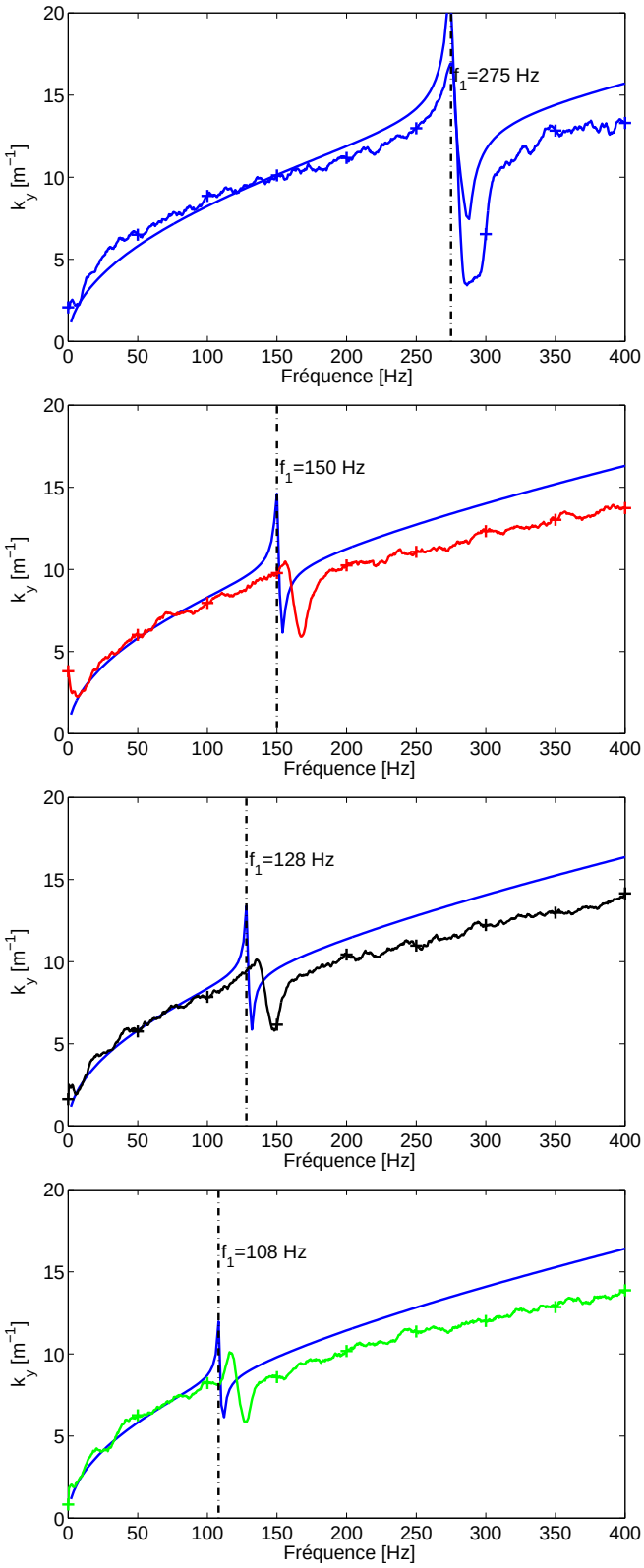


FIGURE 6.21 – Courbes de dispersion au voisinage de la première résonance locale (a) sans masse (− + −), (b) 4 grammes (− + −), (c) 6 grammes (− + −), (d) 9 grammes (− + −). Modèle homogénéisé analytique (−), en configuration CCCC

Plaques internes CFCF

La figure 6.22 montre l'effet de l'ajout des masselottes sur les plaques internes en comparant les mobilités moyennées. Le décalage vers les basses fréquences de la première zone de résonance est beaucoup plus apparent que la seconde.

Une comparaison des fréquences calculées analytiquement et identifiées sur les réponses expérimentales est présentée dans le tableau 6.3.

	Masse ajoutée			
	⊘	4 grammes	6 grammes	9 grammes
Analytique	170.3	126.4	113.3	100.1
Éléments finis	168	127	110	96.0
Expérimental	170	125	113	99

TABLE 6.3 – Fréquences de résonance interne (en Hz) calculées analytiquement, numériquement par éléments finis, et identifiées expérimentalement en fonction de la masse ajoutée à la plaque en configuration CFCF

L'effet de la masse ajoutée sur la courbe de dispersion est montré sur la figure 6.23.

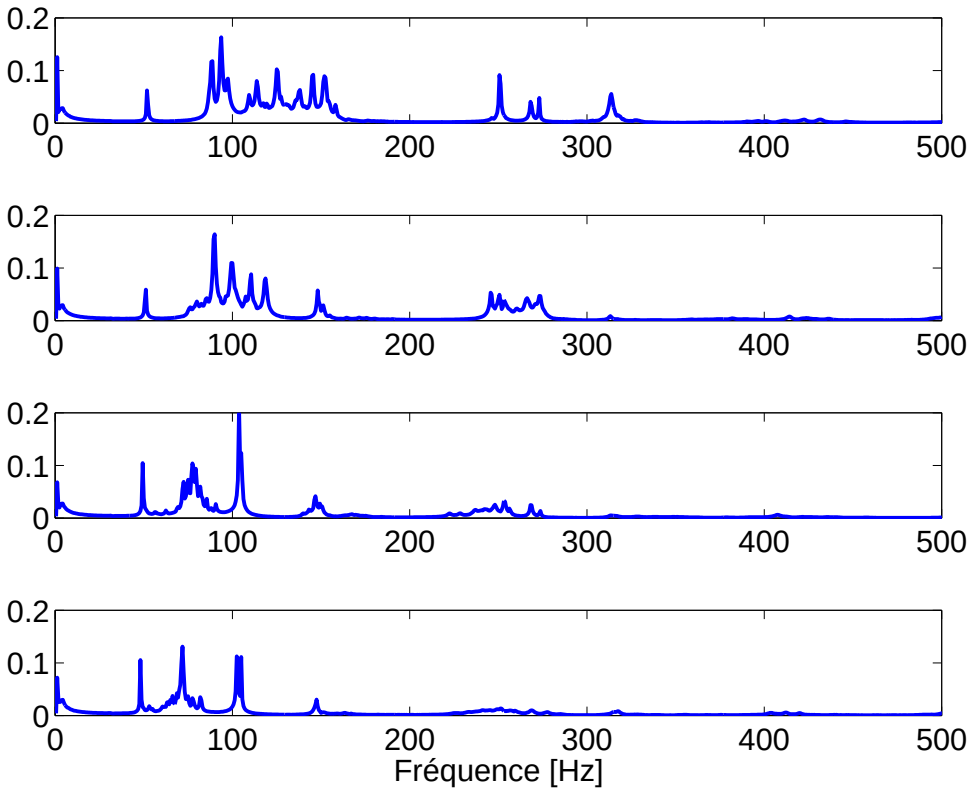


FIGURE 6.22 – Réponses moyennées : de haut en bas, sans masse ajoutée, 4 grammes, 6 grammes, 9 grammes, en configuration CFCF

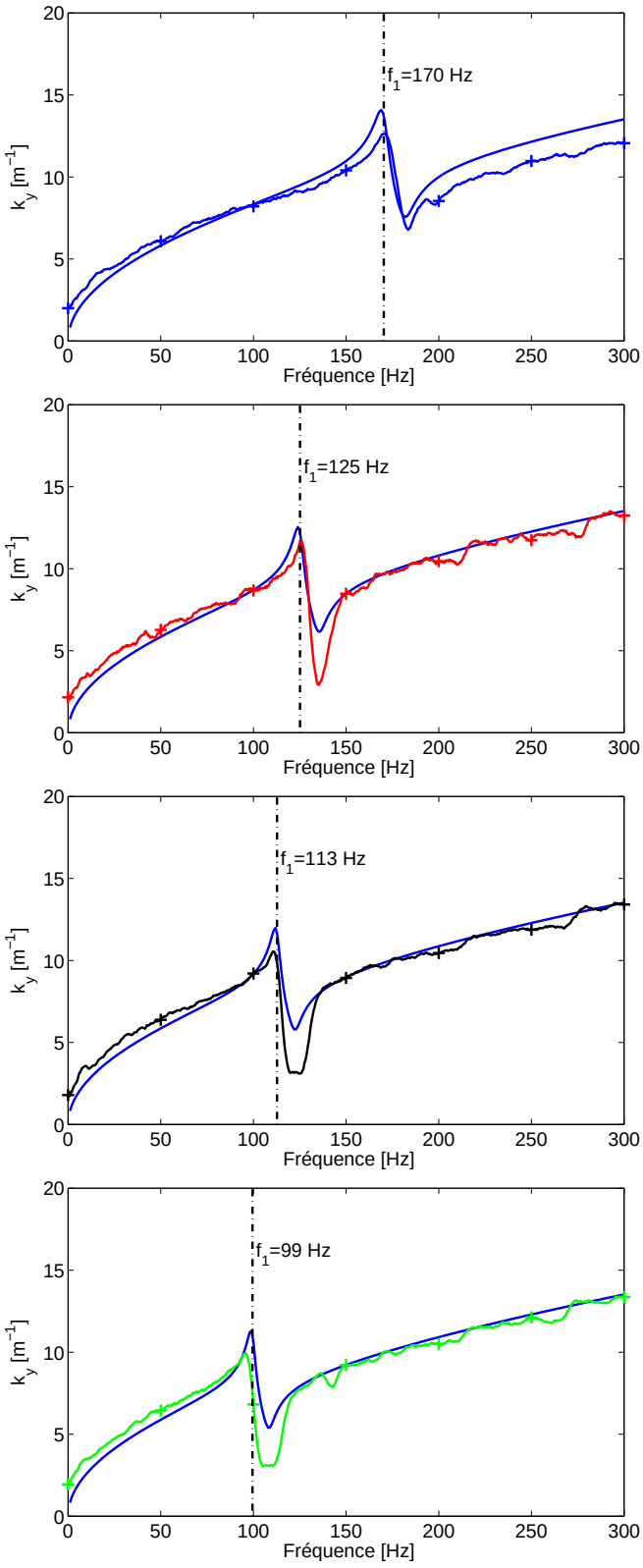


FIGURE 6.23 – Courbes de dispersion au voisinage de la première résonance locale (a) sans masse (− + −), (b) 4 grammes (− + −), (c) 6 grammes (− + −), (d) 9 grammes (− + −). Modèle homogénéisé analytique (−), en configuration CFCF

Plaques internes CFFF

Dans ce cas, la masse est positionnée à l'extrémité libre. La figure 6.24 montre l'effet de l'ajout des masselottes sur les plaques internes en comparant les mobilités moyennées. Le décalage vers les basses fréquences de la première zone de résonance est beaucoup plus apparent que la seconde. L'effet de la masse ajoutée sur les courbes de dispersion est montré sur la figure 6.25. Une comparaison des fréquences calculées analytiquement et identifiées sur les réponses expérimentales est présentée dans le tableau 6.4

	Masse ajoutée			
	⊘	4 grammes	6 grammes	9 grammes
Analytique	29.0	18.9	16.5	14.2
Éléments finis	30	18	16	13
Expérimental	29	19	17	14

TABLE 6.4 – Fréquences de résonance interne (en Hz) calculées analytiquement et identifiées expérimentalement en fonction de la masse ajoutée à la plaque en configuration CFFF

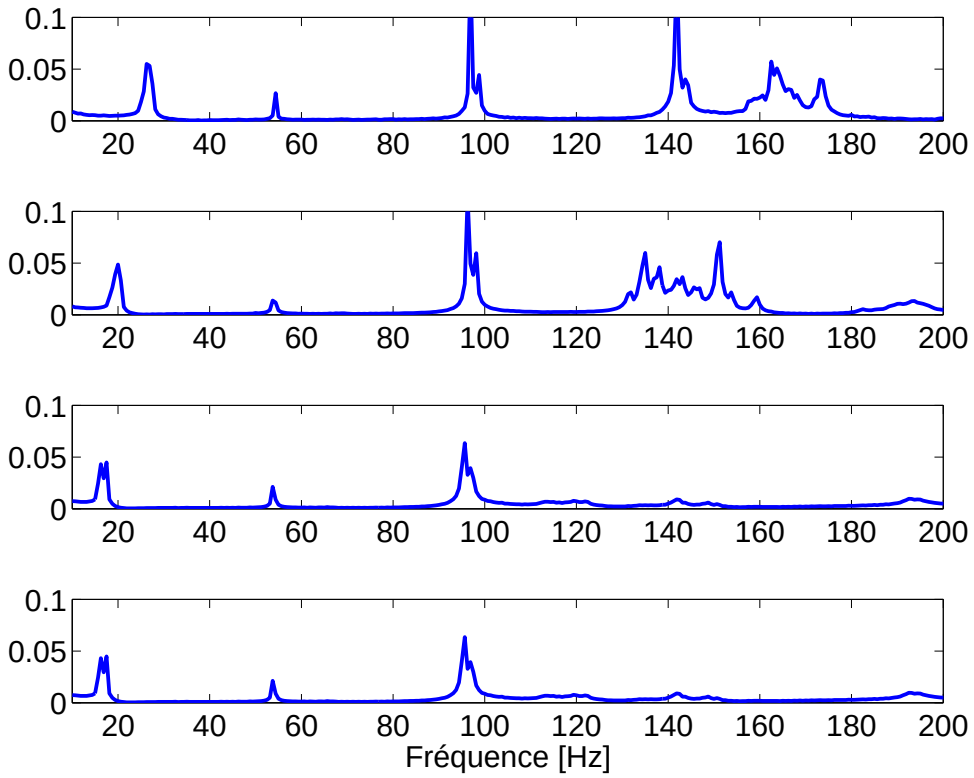


FIGURE 6.24 – Réponses moyennées : de haut en bas, sans masse ajoutée, 4 grammes, 6 grammes, 9 grammes, en configuration CFFF

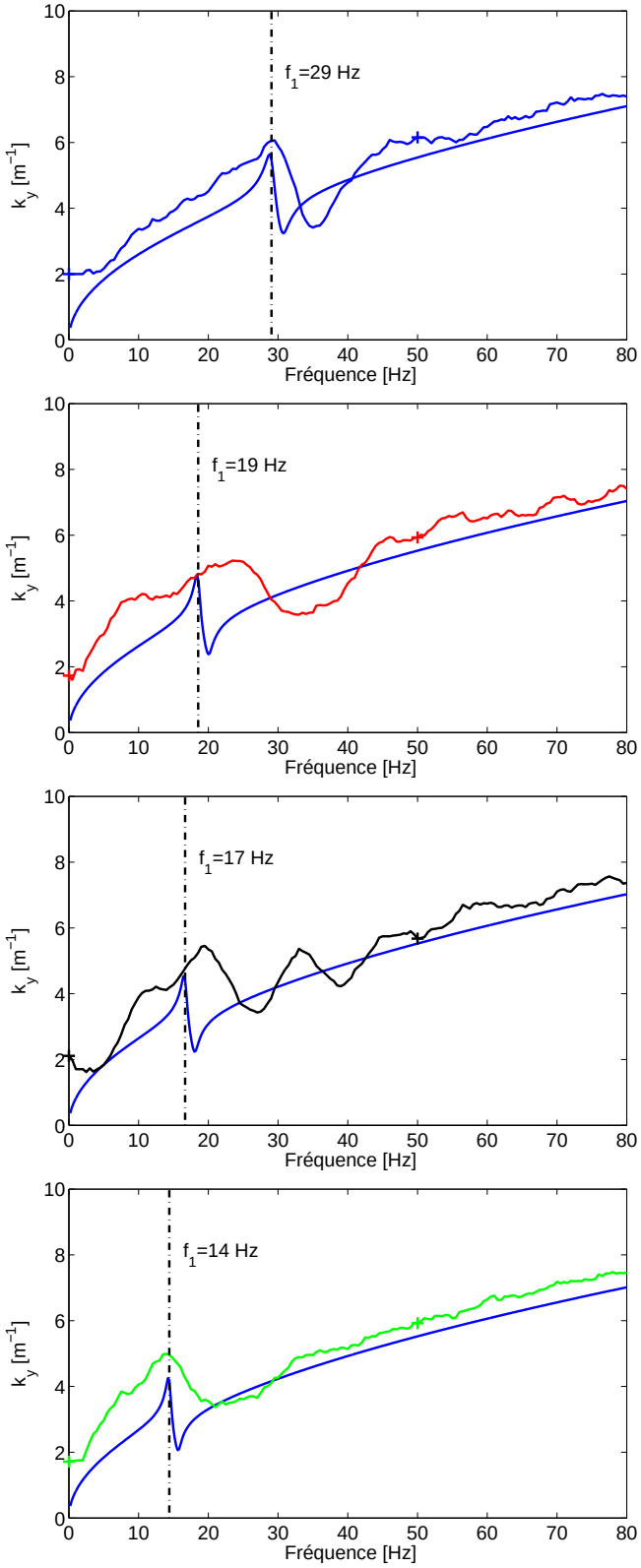


FIGURE 6.25 – Courbes de dispersion au voisinage de la première résonance locale (a) sans masse (− + −), (b) 4 grammes (− + −), (c) 6 grammes (− + −), (d) 9 grammes (− + −). Modèle homogénéisé analytique (−), en configuration CFFF

6.4 Remarques finales

Ce chapitre conclut le manuscrit par l'étude expérimentale de deux plaques : une première simplement raidie avec contraste géométrique, et une seconde bi-raidie avec contrastes géométrique et mécanique dimensionnée pour l'observation du régime co-dynamique.

Des mesures au vibromètre Laser ont permis de mesurer les réponses vibratoires et d'en extraire les informations pertinentes pour valider les modèles homogénéisés des chapitres 3 et 4. La visualisation de ces réponses permet de mettre clairement en évidence expérimentalement la situation de résonance interne. L'identification des fréquences propres de la structure et des résonances locales sur les réponses fréquentielles est très cohérente avec les valeurs déterminées analytiquement et par éléments finis, et expérimentalement sur les courbes de dispersion. La mise en œuvre de l'IWC sur les données expérimentales permet de reconstruire les courbes de dispersion en flexion.

Deux points importants émergent de cette validation expérimentale : d'une part, les singularités sur les courbes de dispersion sont très nettement identifiables et en accord avec les modèles homogénéisés, d'autre part, le système est décrit en considérant plusieurs conditions limites internes et des masselottes ajoutées sur les plaques pour cibler différentes fréquences de résonance. L'effet des masses ajoutées sur les plaques internes se discerne sur les réponses, bien que celles-ci soient d'autant plus amorties que la masse ajoutée est grande. Les courbes de dispersion expérimentales et analytiques sont toutes comparables aux modèles analytiques, et la corrélation est très satisfaisante. Les courbes de dispersion dans la configuration CFFF sont moins précises car les résonances attendues sont de très basses fréquences et s'approchent probablement de la limite de l'IWC.

Une analyse plus approfondie pourrait fournir des règles d'échantillonnage spatial pour une estimation optimale du nombre d'onde. Une étude sur une plaque bi-raidie contenant plus de cellules et de points de mesure permettrait d'obtenir l'espace des nombres d'onde pour visualiser les effets de propagation dans des directions spécifiques.

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

7.1 Conclusion

Les développements présentés dans cette étude ont permis d'améliorer la compréhension du comportement dynamique des plaques mono-raidies et bi-raidie périodiques en situation de résonance interne. La stratégie adoptée a consisté à mettre en œuvre la méthode d'homogénéisation asymptotique, qui permet de construire rigoureusement le milieu macroscopique équivalent à partir de la cellule unitaire. Le contraste de propriétés mécaniques entre les constituants conduit à des situations de résonance interne. Dans ces conditions, la longueur d'onde pour laquelle le régime dynamique est atteint à l'échelle macroscopique est la même que celle associée à la résonance à l'échelle microscopique. Dans ce cas, la longueur d'onde est grande par rapport à la taille caractéristique de la cellule, et c'est cette condition de séparation d'échelles qui permet d'homogénéiser la cellule. Les développements s'appuient sur les hypothèses de poutre élancée, de plaque mince, et de séparation d'échelle.

La théorie de l'homogénéisation asymptotique appliquée à une plaque mono-raidie périodique permet de prédire son comportement macroscopique en présence de résonance interne. L'approche micro-macro fournit un cadre théorique pour analyser le comportement de plaques raidies ayant de forts contrastes de propriétés mécaniques et /ou géométriques. Ces contrastes nécessitent de considérer des situations de co-résonance et de couplage asymétrique entre la poutre et la plaque. Ces aspects de co-dynamique et de couplage asymétrique permettent d'établir des conditions qui serviront de règles de dimensionnement. L'analyse dimensionnelle permet alors de définir des relations entre les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques de la plaque et de la poutre, et d'identifier des jeux de paramètres compatibles avec la résonance interne. Les possibilités proposées sont cohérentes avec un fonctionnement de poutre rigide et de plaque souple.

En faisant l'hypothèse de la séparation d'échelles, la méthode d'homogénéisation asymptotique aboutit à un modèle analytique homogénéisé constitué des équations dont les paramètres effectifs sont déterminés explicitement à partir des paramètres géométriques et mécaniques de la structure. Le comportement dynamique inclut plusieurs mécanismes attribués à des cinématiques inhomogènes. En effet, la résonance de la plaque enrichit les modèles équivalents par l'intermédiaire de termes effectifs dépendants de la fréquence et associés à la plaque résonante. La masse apparente de la plaque interne résonante n'est pas entraînée dans la même direction que les raidisseurs adjacents, ce qui produit des comportements atypiques liés à la masse effective ou à l'inertie effective.

Les différents comportements dynamiques mis en évidence dans la plaque mono-raidie sont :

— pour les cinématiques de flexion et torsion, deux opérateurs différentiels décrivent des ondes pour lesquelles la plaque et la poutre sont en mouvement, et des ondes guidées pour lesquelles seule la plaque est en mouvement,
— les ondes de flexion avec poutres actives sont affectées par le terme de masse effective de la plaque résonante, qui prend des valeurs positives ou négatives. Cet effet de plaque résonante se traduit sur la dispersion par des singularités associées aux modes propres symétriques. En particulier, il apparaît des intervalles de fréquences où les ondes sont fortement atténuées. En effet, proche des fréquences de résonance, la masse effective tend vers l'infini et la distance de pénétration des ondes est très faible,
— les ondes de torsion avec poutres actives sont affectées par une inertie de rotation effective et une rigidité effective de torsion apportées par la plaque. Ces deux contributions sont dépendantes de la fréquence. Elles se combinent de telle façon que le nombre d'onde de torsion présente des caractéristiques atypiques, avec des fréquences de coupure et des zones d'atténuation associées aux modes anti-symétriques de la plaque. Il est intéressant de souligner que seules des ondes évanescentes existent en basses fréquences,
— les ondes guidées décrites par le modèle de guide d'ondes inter-raidisseurs sont alternativement associées aux modes symétriques et anti-symétriques et ne sont propagatives qu'au delà des fréquences propres correspondantes.

L'étude de la plaque mono-raidie du chapitre 3 est étendue au cas de la plaque bi-raidie dans le chapitre 4. La plaque est alors raidie par un treillis de raidisseurs orthogonaux. Comme précédemment, les conditions de co-résonance et de couplage asymétrique sont utilisées pour identifier des règles de dimensionnement en fonction des contrastes géométriques et/ou mécaniques. À nouveau, la condition de couplage asymétrique implique que le treillis impose son déplacement aux plaques internes, et reçoit en retour les contraintes des plaques internes vibrantes. Cela permet de traiter séparément le treillis de poutres et la plaque.

Dans un premier temps, la méthode homogénéisation de milieux discrets HPDM (*Homogenization of Periodic Discrete Media*) est appliquée à un treillis de poutres pour construire le milieu continu équivalent à partir d'une cellule unitaire. Cette méthode est analytique et permet d'identifier l'opérateur différentiel associé aux vibrations transverses du treillis. En utilisant l'hypothèse de séparation d'échelles, les développements de Taylor des efforts nodaux d'une part, et les développements asymptotiques des variables d'autre part, permettent de construire l'équation du mouvement de la structure. L'équation obtenue est cohérente avec la nature orthotrope de la grille. Le modèle statique fait intervenir les rigidités de flexion et de torsion des raidisseurs dans chacune des deux directions ainsi que le couplage flexion/torsion. L'extension de ce modèle en dynamique fait apparaître un terme d'inertie et un terme d'inertie de rotation. Le modèle de treillis est alors l'équivalent en deux dimensions d'une poutre de Rayleigh.

La seconde étape consiste à examiner le couplage entre les plaques internes et le treillis. La dynamique des plaques internes soumises, sur leur contour, au déplacement transverse du treillis, est prise en compte par l'intermédiaire de paramètres effectifs. De la même manière que pour la plaque mono-raidie, à l'échelle d'une cellule, la masse de la plaque interne résonante n'est plus entraînée dans la même direction que le treillis. Cet effet est contenu dans des termes de masse effective, d'inertie effective, et de rigidité effective. L'introduction de ces termes de couplage dans le modèle de treillis dynamique est détaillée en s'appuyant sur les résultats du chapitre 3. Une différence par rapport au cas mono-raidie est toutefois mise en évidence.

Puisque l'équation de flexion de la plaque équivalente au treillis inclut les mécanismes de flexion et de torsion, la propagation des ondes de flexion est affectée non seulement par la masse apparente des plaques internes, mais aussi par leur inertie de rotation et leur rigidité de torsion effectives. Le modèle de flexion de la plaque bi-raidie est donc enrichi par trois paramètres effectifs. En revanche, la cinématique associée aux modes guidés est perdue. La courbe de dispersion associée à la propagation des ondes de flexion dans les raidisseurs présente des singularités.

Différentes conditions limites sur les plaques internes sont envisagées pour placer la résonance interne sur un intervalle fréquentiel plus large : plaques internes encastrées sur deux côtés opposés et libres sur les deux autres (CFCF), encastrées uniquement sur un côté (CFFF), et encastrées sur leur pourtour (CCCC). L'ajout de masselottes sur les plaques internes est un autre moyen de modifier les fréquences de résonances. Deux formulations analytiques sont alors proposées pour les cas CFCF et CFFF. Les racines issues de ces équations sont comparées à un calcul de fréquences propres par éléments finis, pour différentes valeurs de masse ajoutée n'excédant pas le poids de la plaque interne, et la concordance est excellente. Ces formulations sont directement introduites dans l'expression des paramètres effectifs et permettent d'obtenir la courbe de dispersion de manière analytique pour différentes valeurs de masse ajoutée.

Les estimations des modèles homogénéisés de plaques mono- et bi-raidies construits aux chapitres 3 et 4 sont ensuite comparées à des diagrammes de dispersion obtenus par la méthode propagative WFE. Toutes les branches du diagramme de dispersion sont identifiées à partir du modèle homogénéisé et chacune d'entre elle est décrite par une équation de dispersion établie analytiquement sous forme directe et explicite. La pertinence des modèles homogénéisés est ainsi démontrée pour trois dimensionnements réalistes incluant des contrastes : deux dimensionnements de plaques mono-raidies et un dimensionnement de plaque bi-raidie. Dans le cas de la plaque mono-raidie, le modèle analytique décrit bien les résonances locales apparaissant sur les branches de flexion et de torsion, ainsi que les fréquences de coupures des ondes de torsion et des modes guidés. La méthode IWC est aussi mise en œuvre sur les réponses calculées par le modèle homogénéisé, et permet de reconstruire la courbe de dispersion de flexion affectée par la résonance interne. Concernant la plaque bi-raidie, les prédictions du modèle homogénéisé sont validées pour différentes conditions limites de plaques internes, pour le treillis seul, et pour différentes directions de propagation, à l'aide de la transformée de Fourier bi-dimensionnelle et de l'IWC. Cette validation montre que les effets de dispersion atypique sont correctement prédits par le modèle.

Enfin, la validation expérimentale proposée s'appuie sur deux maquettes : une plaque mono-raidie entièrement faite d'aluminium, et une plaque bi-raidie dans laquelle un treillis en aluminium vient rigidifier une plaque en plexiglas. La mesure du déplacement hors-plan au moyen d'un vibromètre laser permet de mesurer les réponses vibratoires de la structure. L'observation préalable des réponses confirme les caractéristiques modales estimées par le modèle. Une méthode de corrélation par ondes inhomogènes permet d'estimer les nombres d'onde associés aux vibrations de flexion de chacune des deux plaques étudiées. L'effet des résonances locales sur le nombre d'onde est nettement identifié expérimentalement et la concordance avec les modèles homogénéisés est très satisfaisante. La validation est étendue aux différentes conditions limites de plaques internes décrites théoriquement, et pour différentes valeurs de masse ajoutée. Pour chacune des configurations étudiées, les résultats expérimentaux valident les modèles homogénéisés développés dans cette thèse.

7.2 Perspectives

Étant donné le large champ d'application des plaques raidies ou des matériaux composites périodiques, il serait intéressant de poursuivre l'étude autour des axes suivants :

Le modèle de treillis de poutres a été construit avec des éléments de type Euler-Bernoulli. Cette modélisation est correcte en basses fréquences. Cependant, si la longueur d'onde de flexion de l'élément poutre devient de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique de section, alors le mécanisme de cisaillement n'est plus négligeable et la description d'Euler est insuffisante. En conséquence, considérer des éléments de type Timoshenko au niveau local permettrait de repousser la limite de validité du modèle en hautes fréquences, ou de considérer des éléments pas nécessairement élancés.

Pour les structures de type treillis, en appliquant la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets, il n'y a pas de difficulté théorique à identifier le modèle continu équivalent à l'ordre dominant. La prise en compte des termes d'ordres supérieurs permettrait d'étendre le modèle à des cas dans lesquels la séparation d'échelles est faible.

L'analyse de l'influence de la cellule unitaire de différentes géométries ou matériaux sur le comportement dynamique permettrait d'identifier les situations introduisant de l'anisotropie dans le treillis. Un treillis constitué de cellules hexagonales serait une première étape vers la modélisation de plaques en nid d'abeilles bi- ou tri-dimensionnelles (Cartraud (2003)).

Une autre perspective serait la conception de plaques sandwich ou stratifiées avec résonance interne. Il est possible d'introduire des résonateurs locaux de différentes natures : des systèmes masses-ressort, des patchs piézoélectriques, des résonateurs de Helmholtz (sur une plaque avec des cavités internes résonantes, débouchantes ou non). Tous ces aspects sont traités dans la littérature, mais souvent d'un point de vue exclusivement numérique. L'avantage de l'homogénéisation est d'accéder à des modèles permettant de dimensionner des résonateurs performants à des fréquences spécifiques, ou de prédire le comportement vibroacoustique de structures déjà existantes.

Le modèle présenté pour les plaques raidies planes pourrait être étendu à des géométrie cylindrique. Les modèles éléments finis de plaques raidies incurvées ou cylindriques fournissent de nombreux résultats montrant les courbes de dispersions. Cela peut constituer une base de travail pour vérifier la validité d'un modèle homogénéisé.

L'obtention de modèles analytiques permettrait d'étudier la sensibilité de différents indicateurs vibroacoustiques, comme la puissance rayonnée ou le facteur de pertes par transmission, en fonction de la géométrie de la plaque, des matériaux utilisés, et surtout de l'amortissement, qui est une question centrale lorsqu'il s'agit d'applications pratiques. Ces études permettraient de quantifier l'effet de la résonance interne sur le rayonnement acoustique, et d'évaluer la performance de panneaux à résonance interne pour l'absorption acoustique.

Bibliographie

Altenbach, J., Altenbach, H., and Eremeyev, V. A. On generalized cosserat-type theories of plates and shells : a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*, 80(1) : 73–92, Jan 2010. ISSN 1432-0681. 10.1007/s00419-009-0365-3.

Andrianov, I. V., Bolshakov, V. I., Danishevs'kyy, V. V., and Weichert, D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 464(2093) : 1181–1201, 2008. ISSN 1364-5021. 10.1098/rspa.2007.0267.

Arenas, J. P. On the vibration analysis of rectangular clamped plates using the virtual work principle. *Journal of Sound and Vibration*, 266(4) :912 – 918, 2003. ISSN 0022-460X. 10.1016/S0022-460X(03)00056-7.

Auriault, J.-L. and Bonnet, G. Dynamique des composites élastiques périodiques. *Arch Mech.*, 37(4-5) :269–284, 1985. URL https://www.researchgate.net/publication/266226940_Dynamique_des_composites_elastiques_p

Auriault, J.-L. and Boutin, C. Long wavelength inner-resonance cut-off frequencies in elastic composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49(23–24) :3269 – 3281, 2012. ISSN 0020-7683. 10.1016/j.ijsolstr.2012.07.002.

Auriault, J.-L., Boutin, C., and Geindreau, C. *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media (ISTE)*. Wiley-ISTE, 1 edition, 8 2009. ISBN 9781848211612.

Bakhvalov, N. and Panasenko, G. *Homogenisation : Averaging Processes in Periodic Media ; Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials, Mathematics and its applications, vol. 36*. Springer Netherlands, 1989. ISBN 9789401075060.

Bensoussan, A., Lions, J.-L., and Papanicolaou, G. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. ISBN 0-444-85172-0.

Berthaut, J. *Contribution à l'identification large bande des structures anisotropes*. Thèse, École Centrale de Lyon, 2004. URL http://bibli.ec-lyon.fr/exl-doc/jberthau.pdf.

Berthaut, J., Ichchou, M., and Jezequel, L. K-space identification of apparent structural behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 280(3–5) :1125 – 1131, 2005. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2004.02.044.

Bloch, F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik*, 52 (7) :555–600, Jul 1929. ISSN 0044-3328. 10.1007/BF01339455.

Boussinesq, J. Complements à une étude sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. *J. de Math Pures et Appl*, 3, 1879. URL https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16423c/f164.image.n32.

Boutin, C. Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(7) :1023 – 1051, 1996. ISSN 0020-7683. 10.1016/0020-7683(95)00089-5.

Boutin, C. and Auriault, J. Rayleigh scattering in elastic composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 31(12) :1669 – 1689, 1993. ISSN 0020-7225. 10.1016/0020-7225(93)90082-6.

Boutin, C. and Hans, S. Homogenisation of periodic discrete medium : Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30(4) :303 – 320, 2003. ISSN 0266-352X. 10.1016/S0266-352X(03)00005-3.

Boutin, C. and Viverge, K. Generalized plate model for highly contrasted laminates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 55 :149 – 166, 2016. ISSN 0997-7538. 10.1016/j.euromechsol.2015.08.008.

Bragg, W. H. Bakerian lecture : X-rays and crystal structure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 215(523-537) : 253–274, 1915. ISSN 0264-3952. 10.1098/rsta.1915.0009.

Briggs, W. and Henson, V. *The DFT : An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995. ISBN 9781611971514.

Brillouin, L. *Wave Propagation in Periodic Structures : Electric Filters and Crystal lattices*. Dover Publications, 1953.

Caillerie, D. and Nedelec, J. C. Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 6(1) :159–191, 1984. ISSN 1099-1476. 10.1002/mma.1670060112.

Cartraud, P. *On Asymptotic Analysis and Homogenization of Periodic Structures*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes ; Ecole Centrale de Nantes, Dec. 2003. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00140089.

Chen, J.-S., Huang, Y.-J., and Chien, I.-T. Flexural wave propagation in metamaterial beams containing membrane-mass structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 131-132 : 500 – 506, 2017. ISSN 0020-7403. 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.054.

Chen, W. and Fish, J. A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *Journal of Applied Mechanics*, 68(2) :153 – 161, 2000. ISSN 0021-8936. 10.1115/1.1357165.

Chesnais, C., Hans, S., and Boutin, C. Wave propagation and diffraction in discrete structures : Effect of anisotropy and internal resonance. *PAMM*, 7(1) :1090401–1090402, 2007. 10.1002/pamm.200700875.

Chesnais, C., Boutin, C., and Hans, S. Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures : Generalized newtonian mechanics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(4) :2873–2886, 2012. 10.1121/1.4744975.

Chesnais, C., Boutin, C., and Hans, S. Wave propagation and non-local effects in periodic frame materials : Generalized continuum mechanics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(8) : 929–958, 2015a. 10.1177/1081286513511092.

Chesnais, C., Boutin, C., and Hans, S. Effects of the local resonance in bending on the longitudinal vibrations of reticulated beams. *Wave Motion*, 57(Supplement C) :1 – 22, 2015b. ISSN 0165-2125. 10.1016/j.wavemoti.2015.03.001.

Ciarlet, P. *Theory of Plates*. Mathematical Elasticity. Elsevier Science, 1997. ISBN 9780080535913.

Cui, T. J., Smith, D., and Liu, R. *Metamaterials : Theory, Design, and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2009. ISBN 1441905723.

Deymier, P. *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783642312328.

Droz, C., Lainé, J.-P., Ichchou, M., and Inquiété, G. A reduced formulation for the free-wave propagation analysis in composite structures. *Composite Structures*, 113 :134 – 144, 2014. ISSN 0263-8223. 10.1016/j.compstruct.2014.03.017.

Droz, C., Zhou, C., Ichchou, M., and Lainé, J.-P. A hybrid wave-mode formulation for the vibro-acoustic analysis of 2d periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 363(Supplement C) :285 – 302, 2016. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2015.11.003.

Egreteau, T. Développement numérique et implémentation experimentale d'une méthodologie d'identification de l'équation de dispersion dans les structures aéronautiques. Master's thesis, Université de Sherbrooke, 2011. URL `https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/5946`.

Elachi, C. Waves in active and passive periodic structures : A review. *Proceedings of the IEEE*, 64(12) :1666–1698, 1976. 10.1109/PROC.1976.10409.

Ewins, D. *Modal testing : theory and practice (Engineering dynamics series)*. Research Studies Press London, 1984. ISBN 9780863800177.

Fahy, F. and Lindqvist, E. Wave propagation in damped, stiffened structures characteristic of ship construction. *Journal of Sound and Vibration*, 45(1) :115 – 138, 1976. ISSN 0022-460X. 10.1016/0022-460X(76)90671-4.

Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12 :47–88, 1883.

Goffaux, C., Sánchez-Dehesa, J., Yeyati, A. L., Lambin, P., Khelif, A., Vasseur, J. O., and Djafari-Rouhani, B. Evidence of fano-like interference phenomena in locally resonant materials. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :225502, 2002. 10.1103/PhysRevLett.88.225502.

Harris, C. and Piersol, A. *Harris' Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill, 2002. ISBN 9780071370813.

Hein, S., Koch, W., and Nannen, L. Fano resonances in acoustics. *Journal of Fluid Mechanics*, 664 :238–264, 2010. 10.1017/S0022112010003757.

Huber, M. T. *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten : Gastvorlesungen in der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Februar 1929*. Nakładem Akademji nauk technicznych, 1929.

Hussein, M. I., Leamy, M. J., and Ruzzene, M. Dynamics of phononic materials and structures : Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) : 040802, 2014. 10.1115/1.4026911.

Ichchou, M., Akrout, S., and Mencik, J.-M. Guided waves group and energy velocities via finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 305(4) :931 – 944, 2007. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2007.05.007.

Ichchou, M., Berthaut, J., and Collet, M. Multi-mode wave propagation in ribbed plates : Part ii, predictions and comparisons. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5) :1196 – 1216, 2008. ISSN 0020-7683. 10.1016/j.ijsolstr.2007.08.020.

Kalamkarov, A. L., Andrianov, I. V., and Danishevs'kyy, V. V. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 62(3) :030802–20, 2009. ISSN 0022-460X. 10.1115/1.3090830.

Kirchhoff, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 :51–88, 1850. URL http://eudml.org/doc/147439.

Kohn, R. V. and Vogelius, M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 20(4) :333 – 350, 1984. ISSN 0020-7683. 10.1016/0020-7683(84)90044-1.

Krein, M. and Liubarskii, G. On the theory of transmission bands of periodic waveguides. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 25(1) :29 – 48, 1961. ISSN 0021-8928. 10.1016/0021-8928(61)90096-X.

Langfeldt, F., Gleine, W., and von Estorff, O. An efficient analytical model for baffled, multi-celled membrane-type acoustic metamaterial panels. *Journal of Sound and Vibration*, 417 : 359 – 375, 2018. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2017.12.018.

Leckie, F. and Pestel, E. Transfer-matrix fundamentals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2(3) :137 – 167, 1960. ISSN 0020-7403. 10.1016/0020-7403(60)90001-1.

Leissa, A. *Vibration of Plates*. NASA SP. National Aeronautics and Space Administration, 1969.

Lekhnitskii, S. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach, New York, 1968. ISBN 9780677206707.

Lewiński, T. and Telega, J. *Plates, Laminates, and Shells : Asymptotic Analysis and Homogenization*. Series on advances in mathematics for applied sciences. World Scientific, 2000. ISBN 9789810232061.

Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T., and Sheng, P. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485) :1734–1736, 2000. ISSN 0036-8075. 10.1126/science.289.5485.1734.

Love, A. E. H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179 :491–546, 1888.

Mace, B. Wave reflection and transmission in beams. *Journal of Sound and Vibration*, 97(2) : 237 – 246, 1984. ISSN 0022-460X. 10.1016/0022-460X(84)90320-1.

Mace, B. R., Duhamel, D., Brennan, M. J., and Hinke, L. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(5) : 2835–2843, 2005. 10.1121/1.1887126.

Maldovan, M. and Thomas, E. *Periodic Materials and Interference Lithography : For Photonics, Phononics and Mechanics*. Wiley, 2009. ISBN 9783527625406.

McDaniel, J., Dupont, P., and Salvino, L. A wave approach to estimating frequency-dependent damping under transient loading. *Journal of Sound and Vibration*, 231(2) :433 – 449, 2000. ISSN 0022-460X. 10.1006/jsvi.1999.2723.

McDaniel, J. G. and Shepard, J. W. S. Estimation of structural wave numbers from spatially sparse response measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(4) : 1674–1682, 2000. 10.1121/1.1310668.

Mead, D. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235 – 260, 1973. ISSN 0022-460X. 10.1016/0022-460X(73)90064-3.

Mead, D. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures ; applications to periodic timoshenko beams and stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 104(1) :9 – 27, 1986. ISSN 0022-460X. 10.1016/S0022-460X(86)80128-6.

Mead, D. Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from southampton, 1964–1995. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :495 – 524, 1996. ISSN 0022-460X. 10.1006/jsvi.1996.0076.

Mead, D., Zhu, D., and Bardell, N. Free vibration of an orthogonally stiffened flat plate. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1) :19 – 48, 1988. ISSN 0022-460X. 10.1016/0022-460X(88)90348-3.

Noor, A. K. Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41(7) :285–296, 1988.

Orrenius, U. and Finnveden, S. Calculation of wave propagation in rib-stiffened plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 198(2) :203 – 224, 1996. ISSN 0022-460X. 10.1006/jsvi.1996.0565.

Panasenko, G. *Multi-scale Modelling for Structures and Composites*. Springer, 2005. ISBN 9781402029813.

Pestel, E. and Leckie, F. *Matrix Methods in Elastomechanics*. McGraw-Hill, 1963. ISBN 9780070495203.

Poisson, S.-D. *Mémoire sur l'équilibre et mouvement des corps élastiques*. L'Académie des sciences, 1828.

Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech.*, pages A69–A77, 1945.

Sab, K. and Lebée, A. *Homogenization of heterogeneous thin and thick plates*. John Wiley & Sons, 2015. ISBN 1848216521.

Sanchez-Palencia, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory (Lecture Notes in Physics)*. Springer, spi edition, 6 1980. ISBN 9783540100003.

Sigalas, M. M. and Economou, E. N. Elastic and acoustic wave band structure. *Journal of Sound Vibration*, 158 :377–382, Oct. 1992. 10.1016/0022-460X(92)90059-7.

Smyshlyaev, V. P. and Cherednichenko, K. D. On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6) :1325 – 1357, 2000. ISSN 0022-5096. 10.1016/S0022-5096(99)00090-3.

Soubestre, J. and Boutin, C. Non-local dynamic behavior of linear fiber reinforced materials. *Mechanics of Materials*, 55(0) :16 – 32, 2012. ISSN 0167-6636. 10.1016/j.mechmat.2012.06.005.

Sun, X. *Elastic wave propagation in periodic structures through numerical and analytical homogenization techniques*. Thèse, École Centrale de Lyon, 2016. URL https://bibli.ec-lyon.fr/exl-doc/TH_T2516_xsun.pdf.

Timoshenko, S. *Theory of elasticity*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1951.

Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1959.

Tollenaere, H. and Caillerie, D. Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7) :699 – 705, 1998. ISSN 0965-9978. 10.1016/S0965-9978(98)00034-9.

Trabucho, L. and Viaño, J. Mathematical modelling of rods. In *Finite Element Methods (Part 2), Numerical Methods for Solids (Part 2)*, volume 4 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 487 – 974. Elsevier, 1996. 10.1016/S1570-8659(96)80006-8.

Ungar, E. E. Transmission of plate flexural waves through reinforcing beams ; dynamic stress concentrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33(5) :633–639, 1961. 10.1121/1.1908748.

Van Belle, L., Claeys, C., Deckers, E., and Desmet, W. On the impact of damping on the dispersion curves of a locally resonant metamaterial : Modelling and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, 409 :1 – 23, 2017. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2017.07.045.

Waki, Y., Mace, B., and Brennan, M. Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 327 (1–2) :92 – 108, 2009. ISSN 0022-460X. 10.1016/j.jsv.2009.06.005.

Wang, Y. Frequencies of the ricker wavelet. *Geophysics*, 80(2) :A31–A37, 2015. 10.1190/geo2014-0441.1.

Wu, J. H., Liu, A., and Chen, H. Exact solutions for free-vibration analysis of rectangular plates using bessel functions. *Journal of Applied Mechanics*, 74(6) :1247–1251, 2007. 10.1115/1.2744043.

Yu, D., Liu, Y., Wang, G., Cai, L., and Qiu, J. Low frequency torsional vibration gaps in the shaft with locally resonant structures. *Physics Letters A*, 348(3–6) :410 – 415, 2006. ISSN 0375-9601. 10.1016/j.physleta.2005.08.067.

Zhou, C. W., Lainé, J. P., Ichchou, M. N., and Zine, A. M. Wave finite element method based on reduced model for one-dimensional periodic structures. *International Journal of Applied Mechanics*, 07(02) :1550018, 2015. 10.1142/S1758825115500180.

Zhou, C. W., Sun, X. K., Lainé, J. P., Ichchou, M. N., Zine, A., Hans, S., and Boutin, C. Wave propagation feature in two-dimensional periodic beam lattices with local resonance by numerical method and analytical homogenization approach. *International Journal of Applied Mechanics*, 10(04) :1850042, 2018. 10.1142/S1758825118500424.

Annexe A

Modèles asymptotiques

A.1 Homogénéisation d'une poutre composite

La structure étudiée est une poutre composite illustrée figure 2.1 et chacun des deux segments est modélisé comme un élément poutre de type Euler. Les équations d'équilibre d'efforts et de moments, ainsi que les équations constitutives de la poutre d'Euler sont :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \rho S u \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = 0 \tag{A.2}$$

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A.3}$$

En prenant $x = \epsilon y$, le développement asymptotique choisi est de la forme

$$u(x,y) = u^0(x,y) + \epsilon u^1(x,y) + \epsilon^2 u^2(x,y) + \dots \tag{A.4}$$

et l'opérateur gradient se transforme et s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{soit :} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\epsilon^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \epsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Les équations (A.2) et (A.3) deviennent :

$$\begin{aligned} M = {} & \epsilon^{-2} EI(y) \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + \epsilon^{-1} EI(y) \left(\frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \epsilon^0 EI(y) \left(\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} \right) + \epsilon^1 EI(y) \left(\frac{\partial^2 u^3}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} \right) + \dots \end{aligned} \tag{A.5}$$

Le moment est alors ré-exprimé comme $M \to \epsilon^{-2}M^{-2} + \epsilon^{-1}M^{-1} + \epsilon^0 M^0 + \epsilon^1 M^{-1} + \dots$

$$\begin{aligned} -T = {} & \epsilon^{-3}\frac{\partial}{\partial y}M^{-2} + \epsilon^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial y}M^{-1} + \frac{\partial}{\partial x}M^{-2} \right) \\ & + \epsilon^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}M^0 + \frac{\partial}{\partial x}M^{-1} \right) + \epsilon^0 \left(\frac{\partial}{\partial y}M^1 + \frac{\partial}{\partial x}M^0 \right) + \epsilon^1 \left(\frac{\partial}{\partial y}M^2 + \frac{\partial}{\partial x}M^1 \right) + \dots \end{aligned} \tag{A.6}$$

L'effort tranchant est alors ré-exprimé comme $T = \epsilon^{-3}T^{-3} + \epsilon^{-2}T^{-2} + \epsilon^{-1}T^{-1} + \epsilon^{0}T^{0} + \dots$

Au plus petit ordre : M^{-2} et T^{-3} sont donnés par (A.2) et (A.3), et en utilisant (A.1), on a $\frac{\partial}{\partial y}T^{-3} = 0$ d'où $T^{-3}(x)$ est une fonction de x. En utilisant l'équation (A.2), on a

$$T^{-3}(x) = \frac{\partial}{\partial y}M^{-2} \qquad \text{d'où} \qquad M^{-2} = yT^{-3}(x) + M^{-2}(x)$$

Du fait de la périodicité sur une cellule de longueur l : $M(y) = M(y+l)$

$$yT^{-3}(x) + M^{-2}(x) = (y+l)T^{-3}(x) + M^{-2}(x)$$

$$0 = lT^{-3}(x)$$

donc $T^{-3}(x) = 0$. Aussi, $M^{-2}(x)$ est une fonction de x :

$$\frac{\partial}{\partial y}M^{-2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(EI(y)\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}\right)$$

et l'équation (A.5) donne :

$$M^{-2}(x) = EI(y)\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} \qquad \frac{M^{-2}(x)}{EI(y)} = \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial u^0}{\partial y} = \underbrace{\int_0^l \frac{M^{-2}(x)}{EI(y)}dy}_{0} + \frac{\partial u^0(0)}{\partial y}$$

En utilisant la condition de périodicité :

$$\frac{\partial u^0(0)}{\partial y} = \frac{\partial u^0(l)}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad M^{-2}(x)\int_0^l \frac{1}{EI(y)}dy = 0$$

donc

$$M^{-2}(x) = 0; \qquad \frac{\partial u^0}{\partial y} = a(x); \qquad u^0 = ya(x) + b(x)$$

d'où $u^0 = u^0(x)$ et $\frac{\partial u^0}{\partial y} = 0$. Au bilan, $T^{-3} = 0$, $M^{-2} = 0$

A l'ordre suivant , le raisonnement est exactement le même avec T^{-2},M^{-1} et u^1. De manière similaire, le bilan donne $T^{-2} = 0$, $M^{-1} = 0$.

A l'ordre suivant : avec l'équation (A.1), on a

$$\frac{\partial}{\partial y}T^{-1} = 0$$

d'où $T^{-1}(x)$ est une fonction de x. Avec l'équation l'équation (A.2), on a

$$T^{-1}(x) = \frac{\partial}{\partial y}M^{0} \qquad \text{d'où} \qquad M^{0}(x,y) = yT^{-1}(x) + M^{0}(x)$$

Du fait de la périodicité

$$T^{-1}(x) = 0$$

et $M^0(x)$ est une fonction de x. Avec l'équation l'équation (A.5)

$$M^{0}(x) = EI(y)\left(\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}\right) \qquad \frac{M^0(x)}{EI(y)} - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y} = \int_0^y \left[\frac{M^0(x)}{EI(y)} - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}\right] dy + \frac{\partial u^2(0)}{\partial y}$$

qui devient, en utilisant la condition de périodicité

$$M^0(x)\frac{1}{l}\int_0^l \frac{1}{EI(y)}dy - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = 0$$

$$u^2(x,y) = y\frac{\partial u^2}{\partial y}(0) + u^2(0)$$

d'où $u^2 = u^2(x)$.
A l'ordre suivant : avec l'équation (A.1), on a $\frac{\partial}{\partial y}T^0 = 0$ d'où $T^0(x)$ est une fonction de x. L'équation (A.2) donne d'une part

$$\frac{\partial}{\partial y}M^1 + \frac{\partial}{\partial x}M^0(x) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}M^0 = 0$$

et l'équation (A.5) donne d'autre part

$$M^1(x) = EI(y)\left(\frac{\partial^2 u^3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}\right)$$

Du fait de la périodicité,

$$M^1(x)\left\langle\frac{1}{EI(y)}\right\rangle - \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial u^3}{\partial y}(x) = 0 \qquad u^3(x,y) = y\frac{\partial u^3}{\partial y}(x) + u^3(0)$$

d'où $u^3 = u^3(x)$.
A l'ordre suivant , en utilisant l'équation (A.1), il vient

$$\frac{\partial}{\partial y}T^1 + \frac{\partial}{\partial x}T^0 = \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \qquad \underbrace{\int_0^l \frac{\partial}{\partial y}T^1}_{0} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^l T^0 - \int_0^l \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

il reste

$$\frac{\partial T^0}{\partial x} - <\rho S>\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} = 0$$

Avec l'équation (A.2), on a

$$\frac{\partial}{\partial x}M^0 = -T^0$$

A.2 Développements pour l'élément poutre $\mathcal{B}$

A.2.1 Formulation du problème

La cinématique de poutre est contrainte par le fait que les contraintes tangentielles sont négligeables sur $\partial S_b - \Gamma_b$. Le vecteur normal associé au contour ∂S_b est $\underline{n} = n_\alpha \underline{a}_\alpha$, d'où :

$$\sigma_{1\alpha} n_\alpha = 0/\partial S_b \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{1\alpha} = \mu(\partial_{x_\alpha} \tilde{u}_1 + \partial_{x_1} \tilde{u}_\alpha)$$

Puisque $\partial_{x_\alpha} \tilde{u}_1 = O(\tilde{u}_1/l)$ et $\partial_{x_1} \tilde{u}_\alpha = O(\tilde{u}_\alpha/L)$, l'annulation de la contrainte tangentielle $\sigma_{1\alpha}$ on ∂S_b implique, pour les composantes de $\tilde{u} = \tilde{u}_1 \underline{a}_1 + \tilde{u}_\alpha \underline{a}_\alpha$:

$$O\left(\frac{\tilde{u}_1}{l}\right) = O\left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{L}\right) \qquad \text{donc} \qquad O(\tilde{u}_1) = \epsilon_b O(\tilde{u}_\alpha)$$

Les déplacements suivant l'axe sont alors d'un ordre inférieur par rapport aux déplacements transverses. En conséquence, les déplacements sont normalisés en écrivant $u_1 = \epsilon_b u_1$ de sorte que $O(u_1) = O(u_\alpha)$:

$$\tilde{u} = \epsilon_b u_1 \underline{a}_1 + u_\alpha \underline{a}_\alpha \tag{A.7}$$

Conformément à la géométrie de la poutre, les tenseurs de déformations $\underline{\underline{e}}$ et de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ se décomposent en trois tenseurs réduits : $\underline{\underline{A}} = A_N \underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + (\underline{A}_T \otimes \underline{a}_1 + \underline{a}_1 \otimes \underline{A}_T) + \underline{\underline{A}}_S$ avec $A_N = A_{11}$ la contrainte/déformation axiale (scalaire), $\underline{A}_T = A_{1\alpha} \underline{a}_\alpha$ sont les contraintes/déformations hors du plan de la section (vecteur), $\underline{\underline{A}}_S = A_{\alpha\beta}(\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\beta \otimes \underline{a}_\alpha)$ sont les contraintes/déformations dans le plan de la section (tenseur). La loi constitutive élastique linéaire isotrope est $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda tr(\underline{\underline{e}}) + 2\mu \underline{\underline{e}}$, et en notant $\underline{\underline{I}}_S = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ le tenseur identité dans la section, les tenseurs de contraintes réduits deviennent :

$$\sigma_N = \lambda(tr(\underline{\underline{e}}_S) + e_N) + 2\mu e_N \qquad \underline{\sigma}_T = 2\mu \underline{e}_T \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S = \lambda(tr(\underline{\underline{e}}_S) + e_N)\underline{\underline{I}}_S + 2\mu \underline{\underline{e}}_S$$

L'équation d'équilibre local inclut les forces volumiques $\underline{b}$ et les forces de contact $\underline{f}$ ($\underline{f} = \underline{f}^+$ sur Γ_b^+et $\underline{f} = \underline{f}^-$ sur Γ_b^-) :

$$\underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{b} \ \text{ dan } \ S_b \qquad ; \qquad \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \ \partial S_b - \Gamma_b \\ \underline{f} & \text{sur } \ \Gamma_b \end{cases} \tag{A.8}$$

Exprimé dans la forme à double-échelle , (A.8) se sépare en un équilibre scalaire suivant l'axe de la poutre (selon $\underline{a}_1$) :

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial_{x_1}} + \epsilon_b^{-1} div_y(\underline{\sigma}_T) = b_1 \underline{a}_1 \ \text{ dans } \ S_b \qquad ; \qquad \underline{\sigma}_T.\underline{n} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \ \partial S_b - \Gamma_b \\ f_1 & \text{sur } \ \Gamma_b \end{cases} \tag{A.9}$$

et un équilibre vectoriel dans le plan de la section (dans le plan $(\underline{a}_2, \underline{a}_3)$) :

$$\frac{\partial \underline{\sigma}_T}{\partial_{x_1}} + \epsilon_b^{-1} \underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}_S) = b_\alpha \underline{a}_\alpha \ \text{ dans } \ S_b \qquad ; \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S.\underline{n} = \begin{cases} \underline{0} & \text{sur } \ \partial S_b - \Gamma_b \\ f_\alpha \underline{a}_\alpha & \text{sur } \ \Gamma_b \end{cases} \tag{A.10}$$

Pour satisfaire la séparation d'échelles, les termes de chargement $\underline{b}$ et $\underline{f}$ doivent être introduits aux ordres $b_1 = \epsilon_b b_1^1, b_\alpha = \epsilon_b^2 b_\alpha^2, f_1 = \epsilon_b^2 f_1^2, f_\alpha = \epsilon_b^3 f_\alpha^3$. En conséquence, les trois premiers problèmes issus de l'équilibre local sont identiques au cas statique non chargé. En dynamique, le terme de forces volumiques $\underline{b}$ dans (A.8) donne $\underline{b} = -\rho\omega^2 \underline{u}$ où la composante axiale est portée par u_1^1 et la composante transverse est portée par u_α^0, telles que $b_1^1 = -\rho\omega^2 u_1^1$ et $b_\alpha^2 = -\rho\omega^2 u_\alpha^0$.

Les équilibres globaux de forces et de moments agissant sur la section sont obtenus en intégrant les équilibres scalaire et vectoriel sur la section de la poutre S_b. Cela définit $N\underline{a}_1$ l'effort normal $N = \int_{S_b} \sigma_N ds$ et l'effort tranchant $\underline{T} = T_\alpha \underline{a}_\alpha = \int_{S_b} \underline{\sigma}_T ds$. Le moment de flexion autour de y_2 et y_3 : $\underline{M} = M_\alpha \underline{a}_\alpha = \int_{S_b} \underline{y}_\alpha \sigma_N ds, \alpha = 2,3$, et le moment de torsion autour de x_1 : $M_1 = \int_{S_b} \underline{y} \wedge \underline{\sigma}_T ds$. Les équilibres globaux pour l'effort normal et les efforts tranchants, les moments de flexion et de torsion, sont écrits dans la direction axiale $\underline{a}_1$: $\frac{dN}{dx_1} = \int_{S_b} b_1 ds + \int_{\Gamma_b} f_1 d\gamma$; $\frac{d\underline{M}_1}{dx_1} = \int_\Gamma \underline{y} \wedge b_\alpha$, et dans les directions transverses $(\underline{a}_2, \underline{a}_3)$: $\frac{d\underline{T}}{dx_1} = (\int_{S_b} b_\alpha ds + \int_{\Gamma_b} f_\alpha d\gamma)\underline{a}_\alpha$; $\frac{d\underline{M}}{dx_1} - \underline{T} = \int_{S_b} b_1 \underline{y} ds + \int_{\Gamma_b} f_1 \underline{y} d\gamma$. Pour obtenir la description complète, il reste à établir les lois constitutives.

A.2.2 Comportement asymptotique

L'objectif est ici de construire le comportement de poutre par l'approche asymptotique. Chaque champs du problème (déplacement, contrainte, déformation) est cherché sous forme d'un développement asymptotique en puissances de ϵ_b. En raison de la condition (A.7), les équations d'équilibres et les conditions limites contiennent des termes en puissances paire (A.9) ou impaires (A.10) de ϵ_b. Il est alors suffisant de développer u_i en puissances paires de ϵ_b :

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_b^{2i} (\epsilon_b u_1^{2i+1} \underline{a}_1 + u_\alpha^{2i} \underline{a}_\alpha), \text{ avec } \tilde{u}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_b^{2i+1} u_1^{2i+1}, \text{ et } \tilde{u}_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_b^{2i} u_\alpha^{2i} \tag{A.11}$$

De ce fait, les tenseurs réduits dans l'axe et dans la section (respectivement tangentiels) sont développés en puissances impaires (respectivement paires) de ϵ_b :

$$\begin{array}{ll} e_N = \epsilon_b^1 e_N^{(1)} + \epsilon_b^3 e_N^{(3)} + \dots & \sigma_N = \epsilon_b^{-1} \sigma_N^{(-1)} + \epsilon_b \sigma_N^{(1)} + \dots \\ \underline{e}_T = \epsilon_b^0 \underline{e}_T^{(0)} + \epsilon_b^2 \underline{e}_T^{(2)} + \dots & \underline{\sigma}_T = \epsilon_b^0 \underline{\sigma}_T^{(0)} + \epsilon_b^2 \underline{\sigma}_T^{(2)} + \dots \\ \underline{\underline{e}}_S = \epsilon_b^{-1} \underline{\underline{e}}_s^{(-1)} + \epsilon_b^1 \underline{\underline{e}}_S^{(1)} + \dots & \underline{\underline{\sigma}}_S = \epsilon_b^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_S^{(-1)} + \epsilon_b^1 \underline{\underline{\sigma}}_S^{(1)} + \dots \end{array}$$

Ces expressions (A.11) sont ensuite introduites dans les équations d'équilibres (A.9) et (A.10). Cela donne une suite de la forme $\sum_i \epsilon_b^i P^i = 0, \forall \epsilon_b << 1$, qui implique de résoudre successivement des problèmes de la forme $P^i = 0$. La résolution est faite en traitant alternativement un problème dans l'axe et dans la section.

Le premier problème issu de (A.10) à l'ordre ϵ_b^{-2} exprime l'équilibre dans le plan de la section du tenseur σ_S^{-1}, sans force externe :

$$\underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}_S^{-1}) = 0 \text{ dans } S_b; \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S^{-1} = 2\mu \underline{\underline{e}}_S^{-1} + \lambda(tr(\underline{\underline{e}}_S^{-1}))I_S \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S^{-1}.\underline{n} = 0 \text{ sur } \partial S_b$$

La résolution montre que le déplacement u^0 à l'ordre 0 est un mouvement de corps rigide de la section dans son plan, *i.e.* translation U^0 et rotation $\Omega^{-1} a_1$.

$$\underline{u}^0 = u_\alpha^0 \underline{a}_\alpha = U_\alpha^0(x_1)\underline{a}_\alpha + \Omega^{-1}\underline{a}_1 \wedge y$$

Par conséquent, $e_{Sy}(u^0) = 0$, $\underline{\underline{\sigma}}_S^{-1} = 0$ et $\sigma_N^{-1} = 0$. Comme la translation et la rotation sont deux mécanismes indépendants, on peut considérer que $\Omega^{-1} = 0$.

Le second problème issu de (A.9) à l'ordre ϵ_b^{-1} exprime l'équilibre axial de la section. Puisque $\sigma_N^{-1} = 0$, alors :

$$div_y(\underline{\sigma}_T^0) = 0 \text{ dans } S_b; \qquad \underline{\sigma}_T^0 = \mu(\partial_{y_\alpha} u_1^1 + \partial_{x_1} U_\alpha^0) a_\alpha \qquad \underline{\sigma}_T^0.\underline{n} = 0 \text{ sur } \partial S_b$$

dont la solution est cohérente avec la cinématique d'Euler-Bernoulli $\underline{u}^1 = u_1^1 \underline{a}_1$ avec $u_1^1 = -y_\alpha \partial_{x_1} U_\alpha^0 + U_1^1(x_1)$, tel que $\underline{e}_T^0 = \underline{0}$ et $\underline{\sigma}_T^0 = \underline{0}$, et finalement $\underline{\underline{e}}^0 = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{0}}$.

Le troisième problème issu de (A.10) à l'ordre ϵ_b^0 porte sur l'équilibre dans la section du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}_S^1$,

$$\underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}_S^1) = 0 \ \text{ dans } \ S_b; \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S^1 = 2\mu \underline{\underline{e}}_S^1 + \lambda(tr(\underline{\underline{e}}_S^1) + e_N^1) I_S \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S^1 . \underline{n} = 0 \ \text{ sur } \ \partial S_b$$

La résolution donne $\underline{\underline{e}}_S^1 = -\nu e_N^1 \underline{\underline{I}}$ et $\sigma_N^1 = E_b e_N^1$ où $e_N^1 = \partial_{x_1} u_1^1$ et $\underline{\underline{\sigma}}_S^0 = \underline{\underline{0}}$. L'intégration de σ_N^1 et $y_\alpha \sigma_N^1$ sur S_b donne respectivement l'effort normal N et la loi constitutive des moments de flexion $\underline{M}$:

$$N = \int_{S_b} \sigma_N^1 ds = E_b S_b \frac{dU_1^1}{dx_1}; \qquad \underline{M} = \int_{S_b} \sigma_N^1 y_\alpha ds \underline{a}_\alpha = -E_b I_{b\alpha} \frac{d^2 U_\alpha^0}{dx_1^2} \underline{a}_\alpha$$

Le quatrième problème issu de (A.9) à l'ordre ϵ_b concerne l'équilibre dans le plan de $\underline{\sigma}_T^2$ en présence d'un terme dynamique et d'une force de contact sur Γ :

$$\partial_{x_1} \sigma_N^1 + div_y(\underline{\sigma}_T^2) = -\rho\omega^2 u_1^1 \ \text{ dans } \ S_b \qquad \underline{\sigma}_T^2 = \mu(\partial_{y_\alpha} u_1^3 + \partial_{x_1} U_\alpha^2) \underline{a}_\alpha \qquad \underline{\sigma}_T^2 . \underline{n} = \begin{cases} 0 \ \text{ sur } \ \partial S_b - \Gamma_b \\ f_1 \ \text{ sur } \ \Gamma_b \end{cases}$$

L'intégration de l'équilibre axial sur S_b donne $\partial_{x_1} \int_{S_b} \sigma_N^1 + \int_{S_b} div_y(\underline{\sigma}_T^2) = -\rho\omega^2 \int_{S_b} u_1^1$. De plus, en notant :

$$\int_{S_b} div_y(\underline{\sigma}_T^2) = \int_{\Gamma_b} \underline{\sigma}_T^2 . n_{\Gamma_b} = \int_{\Gamma_b} f_1$$

avec n_2 la normale sortante à la section (de valeur ± 1 sur $\Gamma_b^\pm$), on obtient l'équilibre axial selon $\underline{a}_1$:

$$\partial_{x_1} N + \int_{\Gamma_b} f_1 = -\rho\omega^2 \int_{S_b} u_1^1$$

De manière similaire, l'équilibre des moments s'obtient en multipliant l'équilibre axial par y_α, et son intégration sur S_b amène :

$$\partial_{x_1} \int_{S_b} y_\alpha \sigma_N^1 + \int_{S_b} y_\alpha div_y \underline{\sigma}_T^2 = -\rho_b S_b \omega^2 \int_{S_b} y_\alpha u_1^1$$

En remarquant

$$\int_{S_b} y_\alpha div_y(\underline{\sigma}_T^2) = \int_S div_y(y_\alpha \underline{\sigma}_T^2) - \int_{S_b} \underline{\sigma}_T^2 \underline{grad}_y(y_\alpha)$$

D'une part

$$\int_{S_b} div_y(y_\alpha \underline{\sigma}_T^2) = \int_{\Gamma_b} y_\alpha (\underline{\sigma}_T^2 . \underline{a}_2) = \int_{\Gamma_b} y_\alpha f_1,$$

et d'autre part

$$\int_{S_b} \underline{\sigma}_T^2 \underline{grad}_y(y_\alpha) = \int_{S_b} \sigma_{T_{1\alpha}}^2 = \underline{T}_\alpha,$$

ce qui donne les moments suivant $\underline{a}_\alpha$:

$$\partial_{x_1} \underline{M} + \int_{\Gamma_b} y_\alpha f_1 - \underline{T}_\alpha = -\rho\omega^2 \int_{S_b} \underline{y} u_1^1$$

Le terme d'inertie est spécifié en précisant que

$$\int_{S_b} y_\alpha u_1^1 = \int_{S_b} \left(-y_\alpha y_\beta \frac{\partial U_\beta^0}{\partial x_1} + y_\alpha U_1^1(x_1) \right) = -\frac{\partial U_\alpha^0}{\partial x_1} \int_{S_b} y_\alpha^2 = E_b I_{b\alpha} \frac{\partial U^0}{\partial x_1}$$

Le cinquième problème issu de (A.10) à l'ordre ϵ_b^2 porte sur l'équilibre dans la section du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}_S^3$.

$$\partial_{x_1} \underline{\sigma}_T^2 + \underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}_S^3) = -\rho_b \omega^2 (U_\alpha \underline{a}_\alpha) \quad \text{dans} \quad S_b \qquad \underline{\underline{\sigma}}_S^3 . \underline{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial S_b - \Gamma_b$$

L'intégration sur la section S_b donne

$$\int_{S_b} \partial_{x_1} \underline{\sigma}_T^2 + \int_{S_b} \underline{div}_y(\underline{\underline{\sigma}}_S^3) = -\rho_b S_b \omega^2 U_\alpha \underline{a}_\alpha$$

D'une part, le premier terme est $\partial_{x_1} \underline{T}$, et d'autre part :

$$\int_{S_b} div_y(\underline{\underline{\sigma}}_S^3) = \int_{\Gamma_b} \underline{\underline{\sigma}}_S^3 n_\Gamma = \int_{\Gamma_b} f_\alpha \underline{a}_\alpha$$

Le terme a_α représentant la dynamique transverse apparaît dans l'éffort global sous la forme :

$$\partial_{x_1} \underline{T}_\alpha = -\rho_b S_b \omega^2 U_\alpha^0 \underline{a}_\alpha - \int_{\Gamma_b} f_\alpha \underline{a}_\alpha$$

Pour résumer, les équations d'équilibre pour la compression, les moments de flexion, l'équilibre des moments suivant $\underline{a}_\alpha$, et l'effort global sont :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} N + \displaystyle\int_{\Gamma_b} f_1 = -\rho \omega^2 \int_{S_b} u_1^1 \\ N = E_b S_b \dfrac{dU_1^1}{dx_1} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \partial_{x_1} \underline{T}_\alpha + \displaystyle\int_{\Gamma_b} f_\alpha \underline{a}_\alpha = -\rho_b S_b \omega^2 U_\alpha^0(x_1) \\ \partial_{x_1} \underline{M} + \displaystyle\int_{\Gamma_b} y_\alpha f_1 - \underline{T}_\alpha = 0 \\ \underline{M} = -E_b I_b \dfrac{d^2 U_\alpha^0}{dx_1^2} \end{cases} \tag{A.12}$$

Annexe B

Découplage des problèmes plan et hors-plan

Cette annexe présente des détails de calculs associés à la modélisation du treillis de poutre (section 4.2). L'objectif est de montrer que le problème hors-plan est indépendant du problème plan. L'élément poutre de type Euler est schématisé sur la figure B.1.

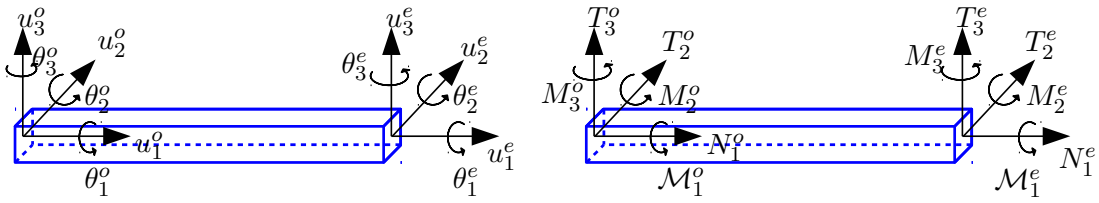


FIGURE B.1 – Notations pour un segment du treillis : (gauche) variables associées aux six degrés de liberté de chaque extrémité ; (droite) efforts et moments associés

Le problème plan met en jeu les variables cinématique (u_1, u_2, θ_3) associées aux efforts (N_1, T_2, M_3), et le problème hors-plan met en jeu les variables cinématiques $(u_3, \theta_1, \theta_2)$ associées aux efforts $(\mathcal{M}_1, T_3, M_2)$. En rappelant que les vibrations longitudinales sont régies par

$$\frac{dN}{ds} = \rho S\omega^2 u(s) \qquad N(s) = -ES\frac{du}{ds} \qquad \frac{d^2u}{ds^2} = -\alpha^2 u(s) \qquad \alpha^2 = \frac{\rho S\omega^2}{ES}$$

les expressions des efforts aux nœuds sont écrites de manière complète :

$$\mathcal{M}_1^o = \frac{G\mathcal{I}\gamma}{\sin(\gamma l)}(\theta_1^o\cos(\gamma l) - \theta_1^e) \quad ; \quad \mathcal{N}_1^o = \frac{ES\alpha}{\sin(\alpha l)}(u_1^o\cos(\alpha l) - u_1^e) \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} T_3^o = \frac{EI\delta^3}{1-\cosh(\delta l)\cos(\delta l)}&(u_3^o(\cosh(\delta l)\sin(\delta l) + \sinh(\delta l)\cos(\delta l)) \\ &- u_3^e(\sin(\delta l) + \sinh(\delta l)) + \frac{\theta_2^o}{\delta}(\sin(\delta l)\sinh(\delta l)) - \frac{\theta_2^e}{\delta}(-\cosh(\delta l) + \cos(\delta l))) \end{aligned} \tag{B.2}$$

L'effort T_3^o s'obtient en remplaçant $u_3^o, u_3^e, \theta_2^o, \theta_2^e$ par $u_2^o, u_2^e, \theta_3^o, \theta_3^e$ respectivement.

$$M_2^o = \frac{EI\delta^2}{1-\cosh(\delta l)\cos(\delta l)}(u_3^o(\sin(\delta l)\sinh(\delta l)) + u_3^e(-\cosh(\delta l)+\cos(\delta l)) + \frac{\theta_2^o}{\delta}(-\sinh(\delta l)\cos(\delta l)+\sin(\delta l)\cosh(\delta l)) - \frac{\theta_2^e}{\delta}(\sin(\delta l)-\sinh(\delta l))) \quad \text{(B.3)}$$

Le moment M_3^o s'obtient en remplaçant $u_3^o, u_3^e, \theta_2^o, \theta_2^e$ par $u_2^o, u_2^e, \theta_3^o, \theta_3^e$ respectivement. Les développements de Taylor des expressions précédentes sont donnés ci-dessous ; les premiers termes de ces développements sont des termes statiques, suffisants pour établir des modèles en statique, tandis que les termes dépendants de (δ, γ, α) sont des termes dynamiques.

$$\mathcal{M}_1^o = \frac{G\mathcal{I}}{l}(\theta_1^e - \theta_1^o) + \frac{G\mathcal{I}\gamma^2 l}{6}(2\theta_1^o + \theta_1^e) + \frac{G\mathcal{I}\gamma^4 l^3}{360}(8\theta_1^o + 7\theta_1^e) + O(\gamma^4) \quad \text{(B.4)}$$

$$N_1^o = \frac{ES}{l}(u_1^e - u_1^o) + \frac{ES\alpha^2 l}{6}(2u_1^o + u_1^e) + \frac{ES\alpha^4 l^3}{360}(8u_1^o + 7u_1^e) + O(\alpha^4) \quad \text{(B.5)}$$

$$T_3^o = \frac{12EI}{l^3}(u_3^o - u_3^e) + \frac{6EI}{l^2}(\theta_2^o + \theta_2^e) - \frac{EI\delta^4 l}{70}(26u_3^o + 9u_3^e) - \frac{EI\delta^4 l^2}{420}(22\theta_2^o - 13\theta_2^e) + O(\delta^4) \quad \text{(B.6)}$$

$$M_2^o = \frac{6EI}{l^2}(u_3^o - u_3^e) + \frac{2EI}{l}(2\theta_2^o + \theta_2^e) - \frac{EI\delta^4 l^2}{420}(13u_3^e + 22u_3^o) - \frac{EI\delta^4 l^3}{420}(-3\theta_2^e + 4\theta_2^o) + O(\delta^4) \quad \text{(B.7)}$$

Les couplages entre les efforts et les variables cinématiques sont montrés en écrivant les expressions ci-dessus sous forme matricielle (B.8). Cette matrice est écrite pour un élément poutre dans son repère local et les différents blocs sont associés aux mécanismes d'extension dans l'axe de la poutre, flexion dans les deux directions transverses, et torsion autour de l'axe de la poutre. En réécrivant cette matrice en fonction de sommes et des différences de variables cinématiques, la matrice statique (B.9) devient presque diagonale. L'avantage est de mieux comprendre les mécanismes. De plus, en dynamique, l'effet inertiel intervient et vient remplir la matrice (B.10). En effet, les développements limités des sommes et des différences des efforts (normaux et tranchants) et des moments (torsion et fléchissants) permettent de savoir à quel niveau émerge la dynamique et sur quelle gamme. Par exemple, si les angles de rotation aux extrémités sont identiques, il n'y a, en statique, pas d'effort tranchant, ce qui n'est pas le cas en dynamique puisque l'effet d'inertie apparaît.

$$
\begin{pmatrix} N_1^o \\ N_1^e \\ T_3^o \\ T_3^e \\ M_2^o \\ M_2^e \\ T_2^o \\ T_2^e \\ M_3^o \\ M_3^e \\ \mathcal{M}_1^o \\ \mathcal{M}_1^e \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc|cc} \frac{ES}{l} & -\frac{ES}{l} & & & & & & & & & & \\ \frac{ES}{l} & -\frac{ES}{l} & & & & & & & & & & \\ \hline & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & & & & & & \\ & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & & & & & & \\ & & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & & & & & & \\ & & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} & -\frac{4EI}{l} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & & \\ & & & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & & \\ & & & & & & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & & \\ & & & & & & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} & -\frac{4EI}{l} & & \\ \hline & & & & & & & & & & \frac{GI}{l} & -\frac{GI}{l} \\ & & & & & & & & & & \frac{GI}{l} & -\frac{GI}{l} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1^o \\ u_1^e \\ u_3^o \\ u_3^e \\ \theta_2^o \\ \theta_2^e \\ u_2^o \\ u_2^e \\ \theta_3^o \\ \theta_3^e \\ \theta_1^o \\ \theta_1^e \end{pmatrix} \tag{B.8}
$$

Matrice de rigidité associée à l'élément poutre :

$$\begin{pmatrix} N_1^o + N_1^e \\ N_1^o - N_1^e \\ \hline T_3^o + T_3^e \\ T_3^o - T_3^e \\ M_2^o + M_2^e \\ M_2^o - M_2^e \\ \hline T_2^o + T_2^e \\ T_2^o - T_2^e \\ M_3^o + M_3^e \\ M_3^0 - M_3^e \\ \hline \mathcal{M}_1^o + \mathcal{M}_1^e \\ \mathcal{M}_1^o - \mathcal{M}_1^e \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc|cc} \frac{2ES}{l} & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & \\ \hline & & \frac{24EI}{l^3} & & & \frac{12EI}{l^2} & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & \frac{2EI}{l} & & & & & & & \\ & & \frac{12EI}{l^2} & & & \frac{6EI}{l} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \frac{24EI}{l^3} & & & \frac{12EI}{l^2} & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & \frac{2EI}{l} & & & \\ & & & & & & \frac{12EI}{l^2} & & & \frac{6EI}{l} & & \\ \hline & & & & & & & & & & \frac{2G\mathcal{I}}{l} & \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1^o - u_1^e \\ u_1^o + u_1^e \\ \hline u_3^o - u_3^e \\ u_3^o + u_3^e \\ \theta_2^o - \theta_2^e \\ \theta_2^o + \theta_2^e \\ \hline u_2^o - u_2^e \\ u_2^o + u_2^e \\ \theta_3^o - \theta_3^e \\ \theta_3^o + \theta_3^e \\ \hline \theta_1^o - \theta_1^e \\ \theta_1^o + \theta_1^e \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

Matrice de rigidité associée à l'élément poutre, avec termes dynamiques

$$\begin{pmatrix} T_3^o + T_3^e \\ T_3^o - T_3^e \\ M_2^o + M_2^e \\ M_2^o - M_2^e \\ \hline \mathcal{M}_1^o + \mathcal{M}_1^e \\ \mathcal{M}_1^o - \mathcal{M}_1^e \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cc} \frac{24EI}{l^3} - \frac{17EI\delta^4 l}{70} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^2} - \frac{3EI\delta^4 l^2}{140} & & \\ 0 & -\frac{EI\delta^4 l}{2} & -\frac{EI\delta^4 l^2}{12} & 0 & & \\ 0 & -\frac{EI\delta^4 l^2}{12} & \frac{2EI}{l} - \frac{EI\delta^4 l^3}{60} & 0 & & \\ \frac{12EI}{l^2} - \frac{3EI\delta^4 l^2}{140} & 0 & 0 & \frac{6EI}{l} - \frac{EI\delta^4 l^3}{420} & & \\ \hline & & & & \frac{2G\mathcal{I}}{l} - \frac{G\mathcal{I}\gamma^2 l}{6} & 0 \\ & & & & 0 & -\frac{G\mathcal{I}\gamma^2 l}{6} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_3^o - u_3^e \\ u_3^o + u_3^e \\ \theta_2^o - \theta_2^e \\ \theta_2^o + \theta_2^e \\ \hline \theta_1^o - \theta_1^e \\ \theta_1^o + \theta_1^e \end{pmatrix} \tag{B.10}$$