N° d'ordre NNT : 2018LYSET003

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
l'École Nationale des Travaux Publics de l'État

École Doctorale N° 162
Mécanique – Énergétique - Génie Civil - Acoustique

Spécialité de doctorat : Génie Civil

Soutenue publiquement le 05/04/2018, par :
Simon CHARLEMAGNE

Dynamique non linéaire d'un assemblage d'oscillateurs Application au contrôle

---

Devant le jury composé de :

DUFOUR, Régis	Professeur	Institut National des Sciences Appliquées de Lyon	Président de jury
BOUHADDI, Noureddine	Professeur	Franche-Comté Électronique Mécanique Thermique et Optique – Sciences et Technologies	Rapporteur
MICHON, Guilhem	Professeur	Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace	Rapporteur
SCHMIDT, Franziska	Ingénieure-chercheuse	Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux	Examinatrice
LAMARQUE, Claude-Henri	Ingénieur en Chef des Travaux Publics de l'État	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Directeur de thèse
TURE SAVADKOOHI, Alireza	Chargé de recherche	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Co-directeur de thèse

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'ÉCOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT

NOM : Charlemagne DATE de SOUTENANCE : 5 avril 2018

Prénoms : Simon, Kévin

TITRE :

Dynamique non linéaire d'un assemblage d'oscillateurs - Application au contrôle

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2018LYSET003

École doctorale : MEGA (162)

Spécialité : Génie Civil

Cote B.I.U.- / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :

L'utilisation de systèmes légers non linéaires permet de réaliser le contrôle vibratoire de structures subissant des oscillations non acceptables en termes de confort pour l'usager ou de sécurité de l'ouvrage. L'étude des puits d'énergie non linéaires, ou "Nonlinear Energy Sinks" (NES), a notamment fait l'objet de nombreuses recherches depuis le début des années 2000. Leur non-linéarité leur confère des capacités de pompage énergétique large bande, c'est-à-dire pour un large intervalle de fréquences de sollicitation, ce qui représente un avantage significatif en comparaison des absorbeurs comme l'amortisseur à masse accordée. Le but de ce manuscrit est d'étudier le couplage de chaîne d'oscillateurs non linéaires à des systèmes dynamiques linéaires soumis à des sollicitations harmoniques et d'analyser d'une part le comportement global du système, et d'autre part les potentialités de contrôle passif de telles chaînes. Une méthodologie analytique générale est présentée, puis appliquée à des exemples où des absorbeurs à non-linéarités cubiques à un, puis à N degrés de liberté sont attachés à un oscillateur linéaire. Une variation de cette méthodologie adoptant une vision continue de la chaîne est ensuite proposée. Enfin, un dispositif expérimental étudie le comportement d'un modèle réduit de bâtiment à un étage couplé à une chaîne de huit oscillateurs non linéaires.

MOTS-CLÉS : Contrôle passif, dynamique non linéaire, chaîne d'oscillateurs, modes normaux non linéaires, échelles multiples, expérimentation, réponse fortement modulée.

Laboratoire de recherche : LTDS/UMR CNRS 5513

Directeur de thèse : Claude-Henri Lamarque

Co-directeur de thèse : Alireza Ture Savadkoohi

Président de jury : Régis Dufour

Composition du jury : Noureddine Bouhaddi, Guilhem Michon, Régis Dufour, Franziska Schmidt, Claude-Henri Lamarque et Alireza Ture Savadkoohi

Remerciements

La thèse... J'ai le sentiment que personne n'a conscience de la bizarrerie de cette expérience avant qu'il ne soit trop tard pour faire machine arrière. Et c'est peut-être mieux ainsi. Se laisserait-on tenter par la recherche si l'on connaissait par avance la frustration engendrée par des jours entiers de calculs infructueux ? Quel serait le pourcentage des étudiants à se lancer dans un doctorat si ces derniers s'attendaient à repartir de zéro, à déconstruire tous leurs savoirs et à ramasser de temps à autre leur ego à la petite cuillère ? Pourtant, on en retient tout autre chose : l'extase d'avoir enfin trouvé ce fichu facteur 2 superflu dans 5 pages de code, la sensation d'avoir appris à réfléchir autrement ou l'humilité que toute approche scientifique impose (le fait de côtoyer les plus grands experts internationaux en conférence aidant)... à condition d'être bien entouré. C'est pourquoi je me dois de commencer ce manuscrit en remerciant les personnes sans qui je n'aurais pu écrire deux lignes, en m'excusant sincèrement auprès des personnes que j'aurais pu oublier.

En premier lieu, j'adresse mes plus chaleureux remerciements à mes directeurs de thèse, Claude-Henri Lamarque et Alireza Ture Savadkoohi. Vos connaissances combinées à votre écoute et votre disponibilité ont su me guider tout au long de ces trois (et quelques) années. Je ne comprends toujours pas comment vos emplois du temps ont pu vous permettre de répondre si vite à mes requêtes. Merci de la chance que vous m'avez offerte.

Je tiens également à remercier les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail : Régis Dufour, Guilhem Michon, Noureddine Bouhaddi, et Franziska Schmidt pour avoir accepté de remplir les rôles de président, rapporteurs et examinatrice.

Merci à toutes les personnes côtoyées à l'ENTPE : Joachim pour son aide plus que précieuse sur la manip', Marie-Victoire pour sa bonne humeur et ses piques cinglantes, les copains de bureau Pascal, Soukaïna, Xiaoqin, Tuan Anh et Rodolfo (merci pour toutes ces découvertes) qui rendent le quotidien agréable, Salvo pour les discussions philosophico-scientifico-absurdo-passionnantes, Manu, Fulbert et Tristan pour leur aide avec l'imprimante 3D. Merci à Stéphane, Frédéric et aux ouvriers de la Log, Olivier, Franck et Cédric, toujours disponibles pour donner un coup de main. Merci au LAET dans son ensemble qui a su accueillir occasionnellement en son sein quelqu'un qui fait de vraies sciences, et plus généralement à tous les copains de la promo 59.

Merci à toute l'équipe des doctorants, bitumineux et autres, pour leur bonne humeur, les discussions, les mots croisés et les (rares) Perudos : Lucas, JC, Thomas, Gabriel, Alvaro, Thang, Lucile, Florian, Pierre, Abhilash, Kévin, et tous les autres. J'ai une pensée spéciale pour Mathieu et son soutien avisé dans les domaines scientifiques, professionnels et pour son amitié : on s'voit à Grenoble, Docteur !

Je remercie le STRMTG de m'accueillir dans la suite de mon parcours professionnel, et notamment Antoine Robache.

Je finirai ces remerciements avec la famille, en commençant par celle qu'on choisit. J'ai une pensée émue pour les amis que j'ai appris à connaître pendant cette thèse : Dounia, Nico, Marion, Alex et leurs pièces rapportées. Je ferai tout pour que l'éloignement géographique ne nous empêche pas de se voir.

Un immense merci à tous mes amis stéphanois qui ont changé ma façon d'être et de réfléchir, et m'ont permis de vivre parmi les plus beaux moments de ma vie : Totom, plus connu sous le nom de "l'ami qu'on aimerait tous avoir" , Hiugz et Max, ma paire de hippies préférée (héhé), toutes les filles de la bamboulette (vous êtes trop nombreuses, je ne peux pas toutes vous citer), Maël, Benj',

Mimie, Mik', Pierre, Lucie, Florence, toute la bande des rouges et j'en passe, ainsi qu'aux amis lyonnais : Sylvain, Carole, Guigui, Camille et les autres. Et enfin, Lucas, qui s'apprête à passer sur le grill à son tour. T'es tout pour moi, et je ne sais pas comment le dire autrement.
Il est désormais temps de remercier la famille qui m'a été imposée. Kamel, Claire, Pascal, si j'avais pu vous choisir comme belle-famille, je l'aurais fait les yeux fermés. Père, Mère, Petite Sœur, vous m'avez offert le plus beau mélange de sensibilités, cultures, réflexions, et que sais-je encore, qu'il m'ait été donné de voir. Une fois de plus, mon vocabulaire est bien limité pour exprimer tout ce que je ressens. C'est là le drame du langage, vecteur pauvre des émotions humaines. En espérant que vous savez déjà à quel point je vous aime...
Je conclus ces remerciement en m'adressant à deux personnes auxquelles je porte un amour qu'il m'est impossible de quantifier ou de décrire correctement. Lauriane, Alban, dire la place et l'importance que vous prenez dans ma vie allongerait ce manuscrit de quelques pages. Vous me rendez meilleur chacun à votre façon et j'espère pouvoir un jour vous donner autant que ce que vous m'apportez. C'est vous qu'je vous aime.

Résumé

L'utilisation de systèmes légers non linéaires permet de réaliser le contrôle vibratoire de structures subissant des oscillations non acceptables en termes de confort pour l'usager ou de sécurité de l'ouvrage. L'étude des puits d'énergie non linéaires, ou "Nonlinear Energy Sinks" (NES), a notamment fait l'objet de nombreuses recherches depuis le début des années 2000. Leur non-linéarité leur confère des capacités de pompage énergétique large bande, c'est-à-dire pour un large intervalle de fréquences de sollicitation, ce qui représente un avantage significatif en comparaison des absorbeurs comme l'amortisseur à masse accordée. Le but de ce manuscrit est d'étudier le couplage de chaîne d'oscillateurs non linéaires à des systèmes dynamiques linéaires soumis à des sollicitations harmoniques et d'analyser d'une part le comportement global du système, et d'autre part les potentialités de contrôle passif de telles chaînes.
Une méthodologie analytique générale est présentée, puis appliquée à des exemples où des absorbeurs à non-linéarités cubiques à un, puis à N degrés de liberté sont attachés à un oscillateur linéaire. Une variation de cette méthodologie adoptant une vision continue de la chaîne est ensuite proposée. Enfin, un dispositif expérimental étudie le comportement d'un modèle réduit de bâtiment à un étage couplé à une chaîne de huit oscillateurs non linéaires.

Mots clés : Contrôle passif, dynamique non linéaire, chaîne d'oscillateurs, modes normaux non linéaires, échelles multiples, expérimentation, réponse fortement modulée.

Abstract

Nonlinear light oscillators can be used for performing vibratory passive control of structures undergoing unacceptable oscillations in terms of comfort and safety. The study of Nonlinear Energy Sinks (NES) has been especially subject to an important research effort since the beginning of the 2000s. Its essential nonlinearity enables it to achieve large-band energy pumping, which is a significant advantage in comparison with classical Tuned Mass Dampers. In this manuscript, nonlinear chains of oscillators coupled to linear systems under harmonic excitation are studied. The main goal is to understand the behavior of the whole system and find evidence of passive control abilities of such chains.

First of all, a general analytical methodology is presented and applied to examples where single and multi-degree-of-freedom absorbers with cubic nonlinearities are linked to a linear oscillator. A modification of this approach by considering the chain in the form of a continuous approximation is then proposed. Finally, an experimental device composed of a single storey reduced-scale building coupled to a chain of eight nonlinear oscillators is investigated.

Keywords: Passive control, nonlinear dynamics, oscillatory chain, nonlinear normal modes, multiple scales, experimentation, strongly modulated response.

Ne pas railler, ne pas déplorer, ne pas maudire, mais comprendre.

Traité politique, B. Spinoza

Sommaire

Introduction **1**

1 Étude bibliographique **3**
1.1 Méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires 4
1.2 Contrôle vibratoire 10
1.3 Conclusions du chapitre 16

2 Méthodologie générale discrète **19**
2.1 Modélisation du problème 20
2.2 Méthodes d'échelles multiples en temps, changements de variables et méthode de Galerkin 21
2.3 Étude du comportement à l'échelle de temps rapide 23
2.4 Étude du comportement à l'échelle de temps lente : points d'équilibre et points singuliers 26
2.5 Conclusions du chapitre 30

3 Application à un cas à deux degrés de liberté **33**
3.1 Comportement à l'échelle de temps rapide 35
3.2 Comportement à l'échelle de temps lente 38
3.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques 43
3.4 Utilisation d'un oscillateur non linéaire ajouté pour la détection 44
3.5 Conclusions du chapitre 46

4 Couplage d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires **57**
4.1 Comportement multi-échelles du système 59
4.2 Comparaison avec les simulations numériques 61
4.3 Application au contrôle 72
4.4 Généralisation à un système principal à plusieurs degrés de liberté 75
4.5 Conclusions du chapitre 82

5 Variation de la méthodologie : approximation continue dans la chaîne **85**
5.1 Méthodologie analytique 86
5.2 Exemple d'application : chaîne d'oscillateurs non linéaires présentant des potentiels locaux 88
5.3 Solutions ondulatoires : premiers éléments 96
5.4 Conclusions du chapitre 105

6 Étude expérimentale **107**
6.1 Présentation du dispositif expérimental 108
6.2 Tests sur le système couplé complet 120
6.3 Conclusions du chapitre 122

Conclusion **125**

A Approximation continue dans la chaîne : calcul de la branche supérieure du SIM127

B Présentation du matériel expérimental 129

Liste des publications 131

Introduction

Ce manuscrit recense les travaux d'une thèse de doctorat réalisée au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS/UMR CNRS 5513), plus précisément sur le site de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE) à Vaulx-en-Velin. Elle a été effectuée sur la période s'étendant d'octobre 2014 à décembre 2018 et traite du contrôle vibratoire de structures par couplage d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires montés en série.
Les technologies permettant de réduire les oscillations d'un système dynamique peuvent être distinguées selon leur caractère actif ou passif. Dans le premier cas, un dispositif d'instrumentation de capteurs/actionneurs permet d'adapter la réponse et/ou les caractéristiques mécaniques du système global en fonction des informations reçues sur l'état vibratoire de ce dernier ou sur la sollicitation qui lui est appliquée. Le problème majeur des systèmes de contrôle actif réside dans l'apport d'énergie nécessaire à leur fonctionnement. En effet, si l'alimentation vient à manquer, par exemple en cas coupure d'électricité, ils deviennent inopérants. A contrario, les systèmes de contrôle passif utilisent uniquement leurs caractéristiques dynamiques intrinsèques pour maintenir l'énergie vibratoire de la structure à des niveaux acceptables.
L'un de ces dispositifs fait l'objet de recherches intensives depuis le début des années 2000 : le puits d'énergie non linéaire ou "Nonlinear Energy Sink" (NES). Le NES est une structure purement non linéaire légère couplée au système à protéger. Son principe de fonctionnement réside dans son caractère non linéaire qui permet de transférer irréversiblement l'énergie depuis la structure primaire vers le NES : c'est le phénomène de pompage énergétique. De plus, l'absence de fréquence préférentielle de ces systèmes annexes leur permet d'entrer en résonance avec des structures linéaires ou non ou de conserver de bonnes performances de contrôle si la fréquence du système principal change sur le temps long à cause du vieillissement ou de l'endommagement, ce qui n'est pas le cas des contrôleurs linéaires.
Des travaux ont prouvé que les NES à plusieurs degrés de liberté montés en série possédaient d'excellentes capacités de pompage énergétique lorsqu'ils sont attachés à des structures multimodales soumises à des impulsions. Les études de ces types d'absorbeurs non linéaires sont pourtant assez rares. Ce manuscrit se propose ainsi d'étudier le comportement de systèmes linéaires sous sollicitation harmonique couplés à des chaînes d'oscillateurs non linéaires en série afin de mettre en évidence les potentialités de contrôle de ces dernières et d'analyser la dynamique complexe mise en jeu. Il est composé de six chapitres.
Dans le premier, une étude bibliographique présente d'une part les méthodes d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires, et d'autre part les différentes stratégies de contrôle vibratoire. Les dispositifs de contrôle passif sont mis en avant, particulièrement les NES.
Le deuxième chapitre détaille une méthodologie analytique permettant d'étudier des systèmes composés d'une structure linéaire à un degré de liberté couplée à une chaîne de N oscillateurs non linéaires en série, N étant quelconque. Après avoir établi le modèle général, les techniques employées sont détaillées, i.e. méthode des échelles multiples, complexification du problème et moyenne harmonique via l'utilisation d'une technique de Galerkin.
Cette méthodologie est appliquée à un exemple à deux degrés de liberté dans le chapitre 3, permettant de valider l'approche analytique. Un oscillateur linéaire est couplé à un NES possédant des forces de rappel cubiques. Les deux oscillateurs sont forcés sinusoïdalement, ce qui engendre des comportements riches et complexes. Un bref exemple d'application est exposé : la dynamique

du NES est utilisée à des fins de détection de changement de propriétés mécaniques du système principal.
Dans le quatrième chapitre, le NES est remplacé par une chaîne d'oscillateurs non linéaires présentant des forces de rappel de couplage cubiques. La détection des comportements périodiques et quasi-périodiques de l'ensemble fournissent des preuves du contrôle passif opéré par la chaîne. La méthodologie analytique est ensuite étendue au cas de systèmes primaires à plusieurs degrés de liberté.
Le chapitre 5 présente une variation de la méthodologie en considérant la chaîne par le prisme d'une approximation continue. Deux exemples d'application sont ensuite traités, correspondant à des non-linéarités cubiques respectivement positives et négatives.
Le chapitre 6 présente un dispositif expérimental composé d'une maquette de bâtiment à un étage couplé à une chaîne de huit oscillateurs cubiques. Des comportements périodiques et quasi-périodiques sont observés.
Une brève conclusion permet enfin de synthétiser les contributions de ce manuscrit et de dégager les perspectives de ces travaux.

Chapitre 1

Étude bibliographique

Sommaire

1.1 Méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires 4
1.1.1 Modes propres d'un système linéaire 4
1.1.2 Modes normaux non linéaires 4
1.1.3 Approches analytiques 6
1.1.4 Approches numériques 8
1.2 Contrôle vibratoire 10
1.2.1 Systèmes de contrôle actif 11
1.2.2 Amortisseur à Masse Accordée 11
1.2.3 Utilisation de la non-linéarité à des fins de contrôle passif 13
1.2.4 Absorbeurs de type NES 13
1.2.5 Exemples de NES non cubiques 14
1.2.6 Études expérimentales des NES 15
1.2.7 Contrôle vibratoire par couplage de plusieurs ddl non linéaires 15
1.3 Conclusions du chapitre 16

1.1 Méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires

1.1.1 Modes propres d'un système linéaire

Il existe dans le cadre de la dynamique linéaire des structures discrètes ou continues un formalisme dont la robustesse en fait le principal outil utilisé pour décrire les comportements vibratoires : les modes normaux ou modes propres [Meirovitch, 1967]. Ces derniers décrivent des oscillations périodiques synchrones à une fréquence constante appelée fréquence propre du mode. En d'autres termes, si l'on se place dans un cas discret, tous les degrés de liberté (ddl) du système atteignent leur minimum ou maximum d'amplitude simultanément. Ces amplitudes sont définies par la déformée propre associée au mode.
La caractérisation dynamique d'un système linéaire par le biais des modes normaux présente l'avantage de découpler les équations du mouvement par l'introduction d'un changement de variables définissant les coordonnées modales. Ce découplage provient de l'orthogonalité des modes propres qui implique notamment qu'un système linéaire dans un état initial correspondant à une déformée propre oscillera librement selon le mode correspondant, la contribution des autres restant nulle : c'est le principe d'invariance du mouvement. Le calcul dynamique du système se résume ainsi à la résolution d'un système d'équations différentielles temporelles découplées dont les solutions décrivent les amplitudes des modes. Le retour aux coordonnées physiques est ensuite rendu possible par la synthèse modale, qui utilise le caractère linéaire des équations : le champ de déplacements généralisé du système est défini par une superposition (une combinaison linéaire) de ses modes normaux.
Ce formalisme mathématique convient à la description de systèmes conservatifs. Il peut néanmoins s'étendre aux systèmes amortis en considérant des situations de diagonalisation en base commune (hypothèse de Basile, amortissement de Rayleigh, ...) ou des amortissements quelconques menant à la définition de modes complexes (valeurs et vecteurs propres possédant une partie imaginaire). Il perd cependant toute applicabilité dès lors qu'un composant non-linéaire fait son apparition. Dans ce cas, les équations issues de l'introduction des coordonnées modales ne se découplent plus et le principe de superposition ne peut être appliqué. C'est pourquoi diverses études se sont attachées à développer un concept généralisant ces modes normaux à l'étude de la dynamique non linéaire : les modes normaux non linéaires.

1.1.2 Modes normaux non linéaires

Les premiers travaux sur le sujet remontent aux années 1960 [Rosenberg, 1960, Rosenberg, 1962, Rosenberg et Kuo, 1964, Rosenberg, 1966]. Rosenberg généralise le concept des modes propres de façon directe en définissant un mode normal non linéaire comme une oscillation périodique synchrone du système. La différence avec les modes normaux linéaires repose sur le fait que la non-linéarité couple les équations du mouvement et engendre une dépendance de la fréquence du mode à l'énergie injectée dans le système. Il n'est ainsi plus possible de définir des fréquences et déformées propres intrinsèques. De même, le principe de superposition ne s'appliquant plus et les modes n'étant plus orthogonaux, la description du mouvement du système ne peut plus s'opérer par synthèse modale. L'invariance du mouvement est en revanche conservée.
Une grande partie des avantages que présentaient les modes normaux linéaires sont donc balayés par la non-linéarité. Pour autant, les modes normaux non linéaires sont des outils intéressants à plusieurs titres. Ils permettent de construire des modèles d'ordre réduit et d'analyser des régimes vibratoires complexes, notamment dans des situations d'interaction modale.
Une seconde définition, applicable aux systèmes linéaires et non linéaires, amortis ou non, fait son apparition au début des années 1990 dans les travaux de Shaw et Pierre [Shaw et Pierre, 1991, Shaw et Pierre, 1993]. Les modes normaux non linéaires y sont définis comme une variété invariante de dimension 2 dans l'espace des phases, tangente à l'origine au mode linéaire. Par ailleurs l'hypothèse de vibration synchrone est relaxée. Pour clarifier le propos, prenons un exemple

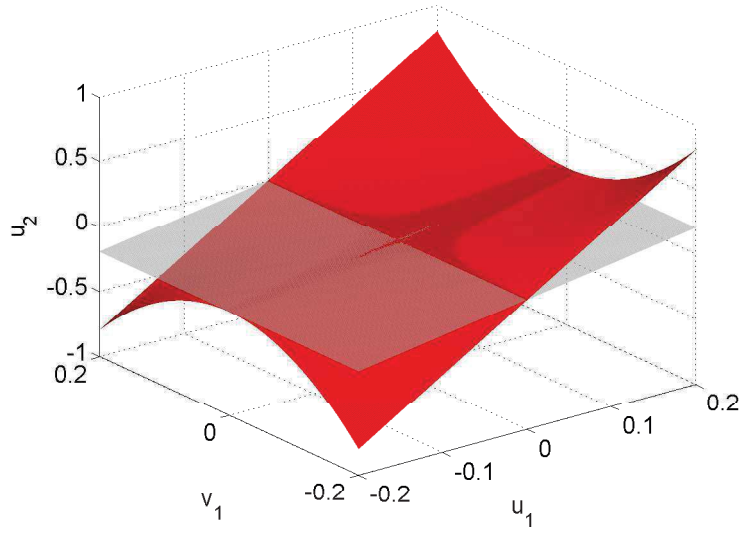


FIGURE 1.1 – Variété invariante du premier mode non linéaire du système 1.1 approximée à l'ordre 3.

d'un système dynamique autonome à deux ddl non amorti tiré de [Shaw et Pierre, 1993] :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -u_1(1+k) - gu_1^3 + ku_2 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = ku_1 - u_2(1+k) \end{cases} \tag{1.1}$$

La variété invariante du premier mode non linéaire approximée à l'ordre 3 est tracée en rouge sur la figure 1.1 dans l'espace des phases. Elle correspond à la réunion d'orbites périodiques puisqu'il n'y a pas d'amortissement. Dans le cas contraire, la variété aurait une forme différente et le comportement du système, s'il était initialement positionné sur la variété, évoluerait autour de cette dernière jusqu'à l'origine du repère. Le premier mode linéaire est par ailleurs représenté en gris. Comme aucune hypothèse n'est faite sur la synchronicité du mouvement, il prend la forme d'une surface, tangente à la variété invariante non linéaire au point d'équilibre (0,0,0). Notons que l'équation de ce plan se résume à $u_1 = u_2$ dans la mesure où le système linéaire sous-jacent à 1.1 est symétrique. Par ailleurs, le plan du second mode linéaire $u_1 = -u_2$ lui est perpendiculaire. Cette propriété d'orthogonalité n'est pas vérifiée pour les variétés invariantes des deux modes non linéaires avec la métrique de masses du système linéaire sous-jacent.
Pour compléter cette présentation des modes normaux non linéaires, il convient de préciser qu'a contrario des modes propres linéaires, ils peuvent exister en nombre supérieur aux ddl du système. Ils se révèlent par ailleurs très utiles pour décrire des phénomènes de localisation dans des systèmes d'oscillateurs non linéaires couplés [Vakakis *et al.*, 1996].
La méthode de détection des modes non linéaires dans les travaux [Shaw et Pierre, 1991, Shaw et Pierre, 1993] utilise des idées similaires à la technique de la variété centrale [Carr, 1982] qui permet de définir localement autour d'un point critique une approximation d'une variété invariante sur laquelle une bifurcation a lieu. Il existe néanmoins d'autres voies pour calculer ces modes, ainsi que des méthodes complémentaires d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires, tant analytiques que numériques. Les deux sections suivantes s'attachent à lister de façon non exhaustive les techniques existantes.

1.1.3 Approches analytiques

Théorie de la forme normale

Le principe de la théorie de la forme normale est le suivant : partant des variables physiques, une première étape linéaire introduit les variables modales. Par la suite, un changement de variables non linéaire permet de passer des coordonnées modales vers des coordonnées dites normales, qui sont liées aux variétés invariantes des modes non linéaires. Cela revient à passer à une description courbée de l'espace. Un système d'équations simplifiées est ainsi obtenu, i.e. les termes non résonants sont éliminés et les équations sont "découplées au maximum". Les équations de la dynamique, exprimées selon les nouvelles variables dans l'espace courbé, ne comportent aucun terme brisant l'invariance du mouvement. Il est par ailleurs possible de revenir aux coordonnées modales en inversant le changement de variables, et en dernier lieu aux variables physiques. Diverses études se sont intéressées à l'application de cet outil mathématique dans le domaine de la mécanique, parmi lesquelles il convient de citer [Jézéquel et Lamarque, 1991, Nayfeh, 1993, Pellicano et Mastroddi, 1997] qui opèrent au stade linéaire un changement de variables complexes qui diagonalise le système, quand [Touzé *et al.*, 2004, Touzé et Thomas, 2006] conservent une formulation réelle.

Méthodes de perturbation et complexification

Parmi les techniques les plus utilisées en dynamique non linéaire figurent les méthodes de perturbation [Nayfeh, 1973, Nayfeh et Mook, 1979, Nayfeh, 1981]. Les équations sont résolues en cherchant les solutions sous forme de développement en série en puissance d'un petit paramètre, généralement noté ϵ. Il existe plusieurs types de méthodes de perturbation. Nous en présenterons trois à l'aide d'un exemple tiré de [Nayfeh, 1981].
L'équation (1.2) décrit le mouvement d'un oscillateur de Duffing non amorti et non forcé :

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0 \tag{1.2}$$

La première façon de procéder pour résoudre cette équation consiste à réaliser un développement en série direct de u en fonction du paramètre ϵ :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \ldots + \epsilon^k u_k + O(\epsilon^{k+1}) \tag{1.3}$$

L'équation (1.2) peut être vue comme une perturbation du problème linéaire, correspondant au cas $\epsilon = 0$. La solution correspondante u_0 est corrigée à l'aide du développement en série (1.3), valable pour de faibles valeurs (donc finies) de ϵ. Injectant (1.3) dans (1.2) et se limitant à une correction d'ordre 1 en ϵ, on obtient :

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \epsilon(\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3) = O(\epsilon^2) \tag{1.4}$$

u_0 étant une solution connue du problème linéaire $\ddot{u}_0 + u_0 = 0$, il est possible de ne considérer que le terme proportionnel à ϵ entre parenthèses, qui permet d'obtenir l'expression de u_1 en fonction de celle de u_0. Cette procédure revient à annuler un à un les coefficients de même puissance en ϵ de (1.4), transformant le problème en n équations où $(n-1)$ est l'ordre de la correction choisie :

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \\ \\ \ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 \end{cases} \tag{1.5}$$

Avec les conditions initiales $u(0) = x_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{x}_0$, la résolution successive de ces équations mène à la solution suivante :

$$u = A\cos(t + B) + \epsilon A^3 \left(-\frac{3}{8} t \sin(t + B) + \frac{1}{32}\cos(3t + 3B) \right) + O(\epsilon^2) \tag{1.6}$$

où A et B sont des constantes d'intégration fonctions de x_0 et $\dot{x}_0$. Cette solution présente deux inconvénients majeurs. Elle est en premier lieu divergente à cause du terme proportionnel à ϵt. Ce dernier, appelé terme séculaire, rend cette solution valide pour des temps $t < O(\epsilon^{-1})$ de sorte que u_1 reste d'ordre ϵ^0. Par ailleurs, (1.6) ne rend pas compte d'une propriété importante des systèmes non linéaires : la dépendance de la pulsation à l'énergie injectée dans le système.
Pour pallier ces problèmes, différentes variations à l'approche directe décrite ci-dessus ont été imaginées. La technique de Lindstedt-Poincaré propose d'ajouter la pulsation ω comme inconnue du problème et d'en réaliser un développement en ordres de ϵ. Posant $\tau = \omega t$ et $\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + O(\epsilon^2)$, le problème suivant est obtenu ($.'$ dénote la dérivation par rapport à τ) :

$$\begin{cases} u_0'' + u_0 = 0 \\ \\ u_1'' + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0'' \end{cases} \tag{1.7}$$

Le terme séculaire découlant de la résolution de (1.7) peut alors être annulé en posant $\omega_1 = \dfrac{3}{8}A^2$, ce qui acte la dépendance amplitude-fréquence. Finalement, la solution obtenue s'écrit :

$$u = A\cos\left[\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2\right)t + B\right] + \frac{1}{32}\epsilon A^3 \cos\left[3\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2\right)t + 3B\right] + O(\epsilon^2) \tag{1.8}$$

La troisième technique, connue sous le nom de méthodes des échelles multiples, consiste à développer le temps en puissance de ϵ comme suit :

$$\tau_k = \epsilon^k t \ , \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

introduisant ainsi des échelles de temps rapide (τ_0) et lentes (τ_k, $k > 1$). Par ailleurs, l'opérateur de dérivation est redéfini :

$$\begin{aligned} \frac{d.}{dt} &= \frac{\partial.}{\partial\tau_0} + \epsilon\frac{\partial.}{\partial\tau_1} + \epsilon^2\frac{\partial.}{\partial\tau_2} + \dots \\ \frac{d^2.}{dt^2} &= \frac{\partial^2.}{\partial\tau_0^2} + 2\epsilon\frac{\partial.}{\partial\tau_0}\frac{\partial.}{\partial\tau_1} + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2.}{\partial\tau_1^2} + 2\frac{\partial.}{\partial\tau_0}\frac{\partial.}{\partial\tau_2}\right) + \dots \end{aligned} \tag{1.10}$$

u_0 et u_1 sont désormais considérées comme des fonctions des différentes échelles de temps. Comme précédemment, la résolution de (1.2) passe par l'annulation des coefficients de même puissance en ϵ et des termes séculaires au cours du développement multi-échelles. Finalement, la solution obtenue est la même que celle donnée par la relation (1.8).
Si la méthode de Lindstedt-Poincaré et celle des échelles multiples donnent toutes deux des résultats cohérents et en très bon accord avec la solution exacte (cf [Nayfeh, 1981]), la seconde a l'avantage de présenter une bonne synergie avec la technique de complexification-moyenne, décrite ci-dessous. Un changement de variables complexes, tel que présenté par Manevitch dans [Manevitch, 2001], permet de diminuer l'ordre des équations différentielles de 2 à 1. Il s'écrit :

$$\varphi_k e^{i\omega t} = \dot{u}_k + i\omega u_k \ , \quad \varphi_k^* e^{-i\omega t} = \dot{u}_k - i\omega u_k \ , \quad i = \sqrt{-1} \tag{1.11}$$

L'inversion permet d'exprimer u_k et ses dérivées :

$$u_k = \frac{\varphi_k e^{i\omega t} - \varphi_k^* e^{-i\omega t}}{2i\omega} \quad \dot{u}_k = \frac{\varphi_k e^{i\omega t} + \varphi_k^* e^{-i\omega t}}{2} \quad \ddot{u}_k = \dot{\varphi}_k e^{i\omega t} - \frac{\omega}{2i}(\varphi_k e^{i\omega t} - \varphi_k^* e^{-i\omega t}) \tag{1.12}$$

Ce changement de variable permet de séparer la vibration du système en une dynamique rapide ($e^{i\omega t}$) et une dynamique lente (φ_k), faisant référence aux échelles de temps τ_0 et τ_k, $k > 1$, respectivement. Dans la pratique, φ_j désigne la modulation en amplitude d'une oscillation à la fréquence ω. Un exemple est donné sur la figure 1.2. La variable complexe décrit ainsi l'enveloppe de la variable physique, à condition que cette dernière ait un contenu spectral principalement décrit par l'harmonique ω. Il est alors possible de ne conserver que les termes résonants correspondant à cette pulsation en réalisant une moyenne harmonique. Cela se réalise en pratique en utilisant une technique de Galerkin qui tronque les harmoniques supérieures.

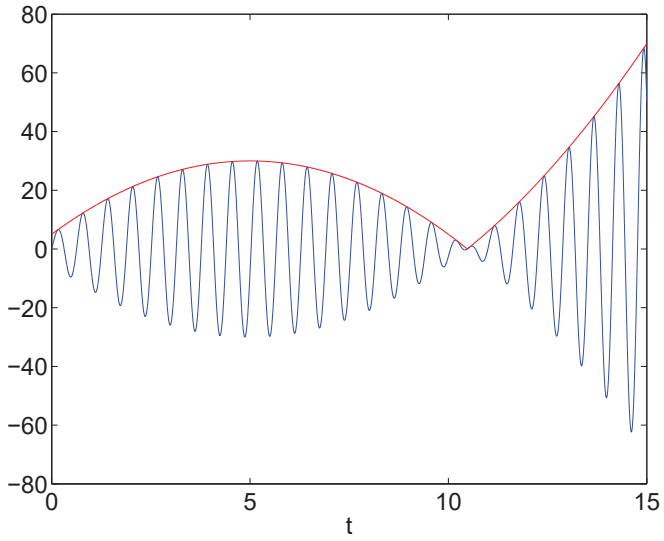


FIGURE 1.2 – Tracé de u_k (ligne bleue) et de l'amplitude $|\varphi_k|$ de la variable complexe associée (ligne rouge).

Méthode des "Limiting Phase Trajectories"

La technique des "Limiting Phase Trajectories" (LPT) a été introduite et présentée par Manevitch [Manevitch, 2007] comme une alternative aux modes normaux non linéaires visant à décrire des scénarios d'intenses échanges d'énergie entre oscillateurs couplés ou entre modes non linéaires d'un système.
Partant d'un système conservatif (ou faiblement amorti) continu ou discret à N ddl, cette méthode envisage de réduire l'ordre du modèle et de décrire sa dynamique projetée sur deux de ses modes non linéaires par le biais de deux variables de phase, notées Δ et θ. Ces dernières sont utilisées pour écrire les équations du système et tracer des portraits de phase dans le plan (Δ,θ) dans lesquels les LPT prennent la forme de courbes fermées maximales. Elles représentent les trajectoires d'échange d'énergie maximal (complet lorsque le système est conservatif) entre les modes considérés et donnent lieu à des phénomènes de battement. Par ailleurs, modifier les paramètres du système, e.g. augmenter le coefficient de la non-linéarité, peut faire disparaître la LPT et conduire à la localisation de l'énergie dans le mode initialement excité, interdisant le transfert d'énergie.

1.1.4 Approches numériques

Les méthodes présentées jusqu'à présent ont un fondement analytique. S'agissant de la recherche de solutions périodiques de systèmes dynamiques, les techniques numériques s'avèrent puissantes, notamment pour calculer les modes normaux non linéaires. Cette partie se propose d'en présenter quelques-unes.
Partons d'un problème initial exprimé en fonction des variables d'état :

$$\dot{z}(t) = f(z,t) \tag{1.13}$$

où f est une fonction non linéaire. On souhaite déterminer l'amplitude des réponses périodiques du système à différentes pulsations Ω_i, afin de construire une courbe de réponse en fréquence sur une bande $[\Omega_{init},\Omega_{fin}]$. Ce type de méthodes ne se soucie donc que de la réponse en régime permanent et ne fournit aucune information sur les états transitoires.
La première technique, directe, consiste à intégrer (1.13) à l'aide d'un schéma d'intégration temporelle, par exemple un schéma aux différences finies de type *Runge-Kutta*. Prenant une condition initiale quelconque, l'intégration est réalisée à une pulsation Ω_i sur un intervalle de temps suffisamment long pour que l'équilibre s'établisse. L'amplitude finale relevée, on incrémente Ω_i d'un

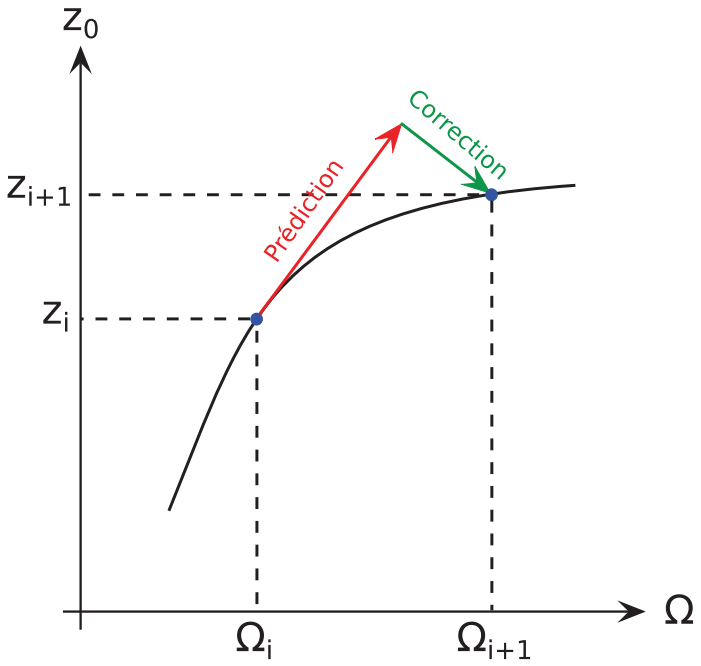


FIGURE 1.3 – Représentation schématique du principe de la continuation par longueur d'arc

pas $\Delta\Omega$ et l'opération est renouvelée. Bien qu'assez simple à mettre en place, cette technique est évidemment peu optimisée et très chronophage. Des méthodes de continuation ont ainsi été développées afin d'améliorer la vitesse de calcul. Pour une decription détaillée de ces techniques, on pourra notamment se référer à [Nayfeh et Balachandran, 1995, Peeters *et al.*, 2009].

Continuation séquentielle

La continuation séquentielle consiste à rechercher une condition initiale z_0 telle que, pour une période $T_i = \dfrac{2\pi}{\Omega_i}$, $z(z_0,t = T_i) = z_0$. En d'autres termes, on cherche une condition initiale telle que l'équilibre soit directement atteint, z_0 correspondant ainsi à l'amplitude de la solution périodique cherchée.
L'avantage vis-à-vis de la méthode directe repose sur le fait que l'équation (1.13) n'est intégrée que sur une période. Si au bout d'une période, l'équilibre n'est pas atteint, une correction de Newton-Raphson faisant intervenir une matrice Jacobienne est appliquée à z_0, et l'opération est répétée jusqu'à l'obtention d'une précision décidée a priori. Une fois la solution obtenue, Ω_i est incrémentée ($\Omega_{i+1} = \Omega_i + \Delta\Omega$) et le processus est répété en utilisant comme condition initiale la solution z_i à Ω_i.
Le principal inconvénient réside dans le fait qu'au passage de points limites, la courbe de réponse subit un saut. Les branches instables ne sont donc pas détectées. Le type de pilotage doit donc être modifié afin d'obtenir des courbes de réponse complètes.

Continuation par longueur d'arc

Alors que la continuation séquentielle incrémente la pulsation Ω_i d'un pas $\Delta\Omega$ constant, la continuation par longueur d'arc utilise un pas variable. Le principe est résumé sur la figure 1.3. Un pas prédicteur d'une longueur donnée Δs est réalisé selon la direction tangente à la courbe de réponse au point (Ω_i,z_i). Par la suite, des pas de correction faisant appel à une méthode de Newton-Raphson, généralement réalisés dans la direction orthogonale à la prédiction, permettent de calculer le point (Ω_{i+1},z_{i+1}). La longueur du pas de prédiction est adaptative afin d'obtenir une meilleure précision autour des points où la courbe de réponse possède une forte courbure.

Le calcul fait intervenir la matrice de monodromie dont les valeurs propres sont les multiplicateurs de Floquet. Le module de ces derniers permet de caractériser différents types de points de bifurcation correspondant à des pertes de stabilité (pour plus d'informations sur l'analyse des bifurcations, se référer à [Seydel, 2009]). Ainsi, la courbe de réponse complète peut être tracée. Toutefois, la continuation par longueur d'arc vient prolonger une branche à partir d'une solution initiale déterminée à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson. Se pose alors la question des branches de solution non reliées à cette "branche principale". Ces branches isolées sont assez compliquées à détecter numériquement et peuvent avoir un impact conséquent sur la dynamique du système, notamment dans le cas de branches à haute amplitude. Notons ici l'existence de travaux cherchant à combler cette lacune via des méthodes de tracking des bifurcations [Detroux *et al.*, 2015, Kuether *et al.*, 2015] ou par des procédures analytiques [Habib *et al.*, 2017].

Méthode Asymptotique Numérique

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est une alternative aux méthodes de continuation présentées ci-dessus. Le principe est le suivant : le problème (1.13) est mis sous la forme $R(z,\lambda) = 0$ en considérant le régime permanent ($\dot{z} = 0$), où λ est le paramètre de continuation, e.g. la fréquence. Les variables z et λ sont ensuite développées en séries entières en fonction d'un paramètre de contrôle, ce qui permet de transformer le système initial en une série de problèmes linéaires possédant tous la même matrice de raideur. Par ailleurs, contrairement aux techniques classiques de prédiction-correction, la courbe de réponse du système est définie de façon continue.
La MAN a été utilisée dans l'étude de divers problèmes non linéaires (voir par exemple [Damil et Potier-Ferry, 1990, Azrar *et al.*, 1993]). Par ailleurs, [Cochelin *et al.*, 1994] propose d'utiliser des fractions rationnelles pour les développements en série de z et λ, les approximants de Padé, permettant d'obtenir une meilleure précision.

Méthode d'Équilibrage Harmonique

La Méthode d'Équilibrage Harmonique (MEH), présentée dans [Nayfeh, 1973, Nayfeh et Mook, 1979], propose de développer les solutions périodiques en séries de Fourier. La solution $z(t) = (z_i(t))$, injectée dans les équations du système, est recherchée sous la forme :

$$z_i(t) = \sum_{j=0}^{p} a_{ij} \cos(j\omega t) + b_{ij} \sin(j\omega t) \tag{1.14}$$

où p est un entier déterminant le nombre d'harmoniques retenues dans la solution. Une méthode de Galerkin appliquée sur la base de Fourier permet de transformer le problème en un système d'équation algébriques dont les inconnues sont les coefficients a_{ij} et b_{ij}. Cette méthode est souvent utilisée en complément de méthodes de continuation ou avec une MAN [Xie *et al.*, 2017]. Pour une étude détaillée de l'utilisation de la MEH pour la caractérisation de systèmes dynamiques non linéaires, on pourra se référer à [Detroux, 2016].

1.2 Contrôle vibratoire

Les structures réelles sont soumises à des sollicitations dynamiques pouvant générer des amplitudes vibratoires importantes qu'il est souhaitable de réduire pour des raisons de confort de l'usager ou de sécurité structurelle dans les cas plus extrêmes. Les solutions pour diminuer l'énergie vibratoire d'un système sont nombreuses. Cette partie en présente quelques-unes en se concentrant sur le contrôle passif par couplage d'une structure additionnelle (notamment les absorbeurs de type "Nonlinear Energy Sink"), sujet en relation directe avec les développements de ce manuscrit.

1.2.1 Systèmes de contrôle actif

La principale distinction existant entre les systèmes de contrôle vibratoire porte sur leur caractère actif ou passif. Pour les premiers, un apport d'énergie est nécessaire au déclenchement du contrôle, quand les seconds font appel à leurs caractéristiques dynamiques intrinsèques pour réduire la réponse vibratoire de la structure à protéger.
Les systèmes actifs sont accompagnés d'un dispositif de capteurs mesurant la réponse vibratoire de la structure, voire la sollicitation qui lui est appliquée. Cela permet d'adapter la réponse du système de contrôle au comportement du système contrôlé. Parmi les solutions existantes, deux types de systèmes figurent parmi les plus répandus : les systèmes actifs à raideur variable (ARV) et les amortisseurs inertiels actifs (AIA).
Les ARV ont été développés pour réduire l'amplitude oscillatoire de bâtiments pendant des séismes [Nasu *et al.*, 2001]. Ils modifient la raideur structurelle de l'immeuble afin d'établir un état non résonant : ses fréquences propres sont activement modifiées afin que le séisme ne sollicite pas le bâtiment autour d'une de ses résonances. Les AIA sont composés d'une structure auxiliaire couplée au système à protéger par l'intermédiaire d'un actionneur générant une force de contrôle. La masse secondaire, mise en mouvement par l'actionneur, vient compenser les oscillations de la structure primaire (voir [Connor et Laflamme, 2014] pour une explication plus détaillée du principe).
Les systèmes actifs, bien qu'ayant prouvé leur efficacité et leurs performances en terme de contrôle vibratoire, présentent deux inconvénients majeurs. D'une part, les coûts de maintenance de tels systèmes sont assez élevés. D'autre part, l'apport d'énergie nécessaire à leur fonctionnement peut s'avérer problématique en cas de défaillance de l'alimentation, notamment lors d'évènement sismiques. Pour pallier ces défauts, il est possible de se tourner vers des systèmes de contrôle passif dont le principe de fonctionnement repose uniquement sur leurs caractéristiques dynamiques intrinsèques. Notons par ailleurs l'existence de systèmes dits semi-actifs, alliant/couplant des contrôleurs actifs et passifs (voir [Connor et Laflamme, 2014]).
Il existe un grand nombre de systèmes de contrôle passif. Certains dissipent l'énergie directement. C'est le cas notamment des amortisseurs visqueux ou amortisseurs à friction, directement installés dans la structure et dissipant l'énergie via des phénomènes non conservatifs de frottement, effet Joule, ... D'autres, équivalents passifs des AIA, réduisent l'énergie vibratoire d'un système dynamique via le couplage d'une structure auxiliaire, le plus répandu étant l'Amortisseur à Masse Accordée (AMA), plus connu sous le nom de Tuned Mass Damper.

1.2.2 Amortisseur à Masse Accordée

Le principe de l'AMA est présenté sur la figure 1.4. Un oscillateur harmonique à un ddl de raideur K et présentant un amortissement visqueux C modélise la structure à protéger, ou un de ses modes propres. Il est soumis à une sollicitation externe sinusoïdale de pulsation ω. La masse auxiliaire lui étant couplée possède une raideur k et un amortissement visqueux c.
D'abord proposé par Frahm [Frahm, 1909] sans élément dissipatif pour la masse secondaire, un amortissement a été ajouté par [Ormondroyd et Hartog, 1928] dans le but d'améliorer la robustesse du contrôle. Par la suite, les travaux [Hartog, 1934] et [Brock, 1946] ont respectivement proposé des expressions analytiques approchées des raideurs et amortissements de l'AMA pour une absorption d'énergie optimale. Les expressions analytiques exactes peuvent être trouvées dans [Asami et Nishihara, 2003] :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\dfrac{kM}{Km}} = \dfrac{2}{1+\epsilon}\sqrt{\dfrac{2\left(16+23\epsilon+9\epsilon^2+2(2+\epsilon)\sqrt{4+3\epsilon}\right)}{3(64+80\epsilon+27\epsilon^2)}} \\ \\ \xi = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{8+9\epsilon-4\sqrt{4+3\epsilon}}{1+\epsilon}} \end{cases} \tag{1.15}$$

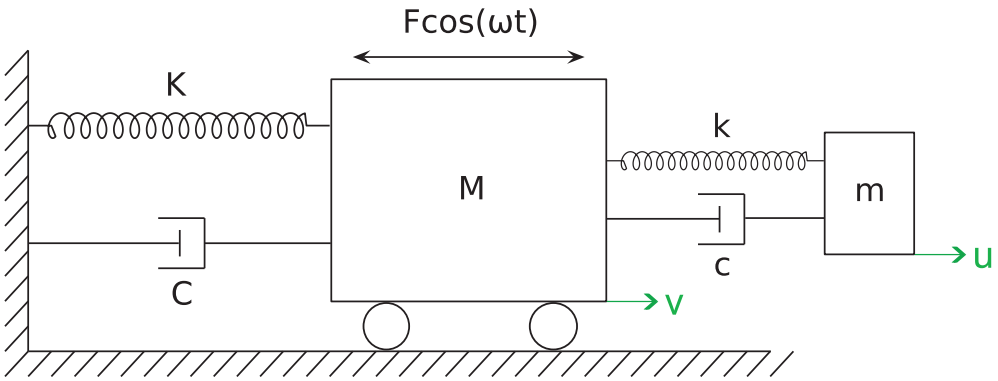


FIGURE 1.4 – Schéma de principe d'un amortisseur à masse accordée.

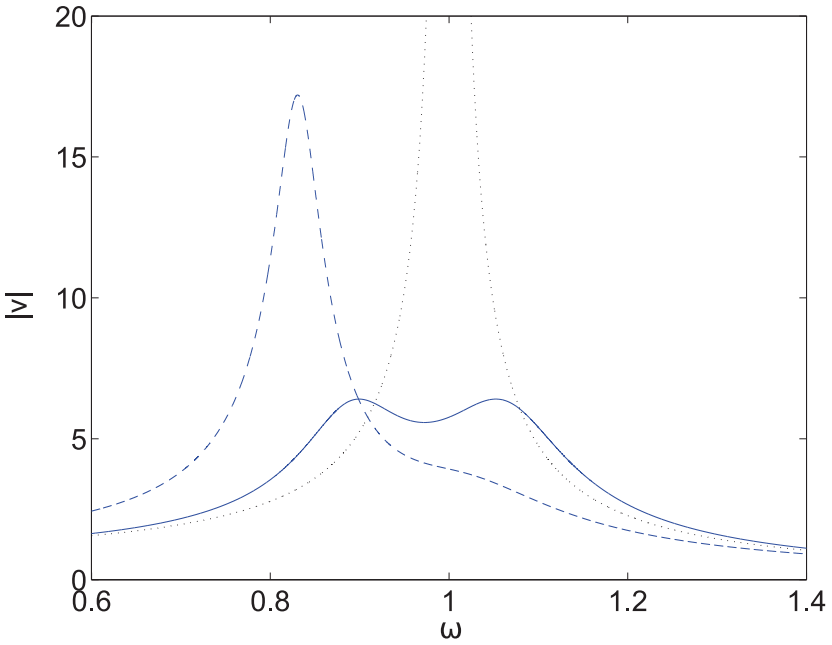


FIGURE 1.5 – $M = 1$, $\epsilon = 0.05$, $C = 0$ – Courbe de réponse en fréquence de la structure maîtresse pour $K = 1$ (ligne continue) et $K = 0.8$ (courbe discontinue). La ligne pointillée noire correspond au cas sans AMA couplé. k et c sont calculés via les expressions 1.15.

où $\epsilon = \dfrac{m}{M}$ est le rapport de masses entre les deux oscillateurs. Notons que ces expressions sont valables pour $C = 0$, i.e. une structure maîtresse non amortie. Par ailleurs, pour des valeurs faibles de ϵ, généralement comprises autour de 5 à 10 %, le ratio λ est proche de 1. L'AMA est ainsi accordé au système auquel il est couplé. Ces expressions de k et c engendrent une réponse en fréquence pour la structure maîtresse composée de deux pics d'amplitude égale, correspondant aux deux modes propres de la structure à 2 ddl de la figure 1.4. Cela permet de borner et minimiser la réponse stationnaire du système, représentée en ligne continue sur la figure 1.5. Néanmoins, si la fréquence de la structure maîtresse vient à changer au cours du temps, à cause de son endommagement ou de son vieillissement, l'AMA se désaccorde et perd ses performances de contrôle (cf courbe discontinue sur la figure 1.5). Cette remarque est a fortiori valable pour des structures maîtresses non linéaires présentant une dépendance amplitude–fréquence [Habib *et al.*, 2015].
Ce désaccordage rend compte d'une propension de l'AMA à opérer un contrôle vibratoire sur une bande de fréquences étroite. Afin de pallier ce défaut, il est possible d'ajouter une non-linéarité à la masse ajoutée.

1.2.3 Utilisation de la non-linéarité à des fins de contrôle passif

L'idée d'utiliser un système secondaire non linéaire comme absorbeur de vibrations a fait son apparition dans les années 1950 avec l'article [Roberson, 1952]. Il s'intéresse à un oscillateur non linéaire couplé par une raideur somme d'une partie linéaire et d'une partie cubique à un système principal linéaire à un ddl. Roberson prouve que la bande de fréquences pour laquelle cet absorbeur est performant est plus large que celle de l'absorbeur linéaire correspondant. S'en suivirent les travaux [Pipes, 1953, Arnold, 1955] et plus tard [Hunt et Nissen, 1982] ou encore [Shaw *et al.*, 1989] où un absorbeur non linéaire est couplé à un oscillateur cubique.
Le sujet connaît ensuite un regain d'intérêt au début des années 2000. Un premier article, [Gendelman et Vakakis, 2000], s'intéresse d'abord à un système symétrique libre à deux ddl, amorti et purement non linéaire. Le passage d'un état localisé, i.e. où l'énergie globale du système est concentrée dans un oscillateur, à un état où les deux oscillateurs se partagent l'énergie totale (état non localisé) est étudié. Cette transition est expliquée par l'existence d'un mode normal non linéaire localisé dès lors que l'énergie du système dépasse un certain seuil. Par la suite, l'article [Gendelman, 2001] étudie un système asymétrique couplant deux oscillateurs respectivement linéaire et non linéaire. Le système hamiltonien sous-jacent révèle de nouveau l'existence d'un mode non linéaire fortement localisé sur l'oscillateur non linéaire, excité lorsque l'énergie injectée dans le système linéaire est suffisante. Cela ouvre la voie à l'analyse de ce qui est désormais appelé "pompage énergétique", caractérisant la transition d'énergie entre modes.

1.2.4 Absorbeurs de type NES

Le terme puits d'énergie non linéaire, ou "Nonlinear Energy Sink" (NES), est utilisé pour la première fois dans les articles [Gendelman *et al.*, 2000, Vakakis et Gendelman, 2000]. Le principe développé dans ces travaux est basé une fois de plus sur le couplage d'un oscillateur essentiellement non linéaire (le NES) à un système linéaire. Les auteurs présentent une étude détaillée du phénomène de pompage énergétique, c'est-à-dire du transfert irréversible de l'énergie injectée dans la structure linéaire vers la masse ajoutée qui agit comme un puits d'énergie. Il est prouvé que ce transfert résulte d'une capture de résonance de type 1 : 1 autour d'une variété résonante du système. Ces deux études marquent les prémices d'un engouement pour l'étude des NES qui donnera lieu à de nombreux articles dans la même décennie, dont les principales conclusions sont recensées dans l'ouvrage [Vakakis *et al.*, 2009].
Les articles précédemment cités étudient le pompage énergétique opéré entre deux oscillateurs possédant des masses égales, ce qui représente un frein important pour des applications réelles. Des travaux se sont ainsi intéressés à des systèmes présentant une asymétrie de masse, i.e. avec un NES de masse très faible par rapport au système primaire [Gendelman *et al.*, 2005, Manevitch *et al.*, 2007b]. Ils montrent qu'un tel système présente de fortes capacités de contrôle. Cette volonté d'aller plus loin dans la mise en œuvre pratique des NES se retrouve dans l'article [Gendelman, 2004] qui améliore la prise en compte de l'amortissement en choisissant une approche basée sur une variété invariante du système. Citons enfin l'étude [Manevitch *et al.*, 2007a] qui propose une procédure d'optimisation des paramètres du NES dans le but d'obtenir une décroissance rapide de l'amplitude de l'oscillateur linéaire lorsque ce dernier est excité avec une impulsion.
La performance des NES en termes de contrôle passif pour de larges bandes de fréquences repose sur le fait qu'ils ne possèdent pas de fréquence préférentielle et peuvent potentiellement entrer en résonance avec n'importe quel système. Les NES sont notamment en mesure de contrôler les oscillations de systèmes non linéaires, tels que des structures linéaires par morceaux [Lamarque *et al.*, 2012], des systèmes représentés par des modèles de Dahl [Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] et de Bouc-Wen [Lamarque *et al.*, 2013, Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014], des systèmes comportant des éléments de Saint-Venant [Schmidt et Lamarque, 2010, Weiss *et al.*, 2014, Lamarque et Ture Savadkoohi, 2015] ou un oscillateur présentant un comportement élasto-plastique [Weiss *et al.*,

2016]. Le cas de structures primaires linéaires à plusieurs degrés de liberté et ne présentant pas de résonances internes est traité dans [Vakakis *et al.*, 2003, Vakakis *et al.*, 2004]. La présence d'une non-linéarité crée une série de résonances internes entre le NES et les modes propres du système linéaire à différents niveaux d'énergie. Ainsi, à condition que l'excitation soit suffisante, le NES est capable d'entrer successivement en résonance avec plusieurs modes et d'en absorber l'énergie, suivant de ce fait des captures de résonance en cascade. Les études [Manevitch *et al.*, 2003, Rothos et Vakakis, 2009] prouvent de plus qu'un NES est capable d'absorber l'énergie d'ondes se propageant dans des chaînes d'oscillateurs linéaires respectivement semi-infinies et infinies. Par ailleurs, l'étude [Starosvetsky et Gendelman, 2010] s'intéresse à un système linéaire à deux degrés de liberté possédant une résonance interne 1 : 1 entre ses deux modes propres. Le pompage énergétique s'opère alors par le biais d'oscillations de relaxation donnant lieu à une réponse modulée du NES, ressemblant fortement aux réponses fortement modulées, ou "Strongly Modulated Responses" (SMR) pouvant apparaître lorsque la structure primaire est sollicitée par une excitation sinusoïdale autour de sa résonance. Ces réponses quasi-périodiques, étudiées en détail dans les articles [Starosvetsky et Gendelman, 2008, Gendelman *et al.*, 2008], sont générées par des bifurcations répétées du comportement du système autour d'une branche instable d'une variété invariante. Elles se révèlent avantageuses s'agissant du contrôle vibratoire et seront expliquées et illustrées plus tard dans ce manuscrit. Enfin, les NES peuvent être couplés à des systèmes continus tels qu'une corde [Luongo et Zulli, 2015], une poutre bi-appuyée [Avramov et Gendelman, 2010], une barre [Vakakis *et al.*, 2005, Panagopoulos *et al.*, 2007] ou une plaque mince [Georgiades et Vakakis, 2009].
Si les NES ont été principalement utilisés dans le domaine du Génie Civil, leur polyvalence permet d'envisager des applications dans des disciplines diverses. À titre d'exemple, Lee et al. [Lee *et al.*, 2007b] étudie le contrôle par un NES des instabilités aéroélastiques d'un modèle à deux ddl d'aile rigide. Un problème similaire est abordé dans [Luongo et Zulli, 2014] grâce à une méthode mixant des échelles multiples et une MEH, ainsi que dans [Vaurigaud *et al.*, 2011a] où le système primaire est un tablier de pont. Des applications en acoustique ont par ailleurs mené à la publication de l'article [Shao et Cochelin, 2014] où une fine membrane viscoélastique, jouant le rôle de NES, absorbe l'énergie acoustique dans une cavité parallélépipédique.

1.2.5 Exemples de NES non cubiques

La quasi-totalité des travaux cités jusqu'à présent ont étudié des NES à non-linéarité cubique, i.e. des NES couplés au système primaire ou ancrés par des raideurs du type Cx^3. Ce type de force de rappel induit généralement des développements analytiques relativement simples impliquant peu de paramètres de design. Par ailleurs, la réalisation pratique d'une raideur cubique est assez aisée (cf le chapitre 6 de ce manuscrit). Les premiers travaux relatifs à des NES non cubiques sont recensés dans [Gendelman, 2004], où le cas d'une non-linéarité polynomiale quelconque est traitée analytiquement. Cette étude est étendue par la suite à la prise en compte de non-linéarités non polynomiales [Gendelman, 2008]. Deux exemples sont envisagés. Le premier met en œuvre un potentiel logarithmique quand le second traite d'un NES présentant une force de rappel linéaire par morceaux. Les capacités de pompage énergétique de ce type d'absorbeurs avaient été mises en évidence numériquement dans [Georgiades *et al.*, 2005]. Ils présentent l'avantage d'être facilement réalisables pour de potentielles applications dans la mesure où ils nécessitent l'usage de ressorts linéaires classiques. L'analyse des NES non linéaires par morceaux a par la suite été approfondie dans [Lamarque *et al.*, 2011]. Cet article présente une méthodologie analytique complète montrant que ces NES peuvent subir, à l'instar des absorbeurs cubiques, des réponses de type SMR. De nombreux travaux étudient des NES linéaires par morceaux couplés à différents systèmes primaires, linéaires ou non [Lamarque *et al.*, 2012, Ture Savadkoohi *et al.*, 2012a, Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013, Ture Savadkoohi et Lamarque, 2014, Lamarque *et al.*, 2014, Weiss *et al.*, 2016].
Poussant la logique du NES linéaire par morceaux, il est possible d'envisager des forces de rappel à pente verticale, correspondant à des impacts : c'est le principe des NES à vibro-impact (NES-VI). Ces derniers entrent en collision avec des butées et dissipent l'énergie vibratoire du système via

ces chocs. Des études théoriques des NES-VI peuvent être trouvées dans les travaux [Nucera *et al.*, 2007, Gendelman, 2012, Gourc *et al.*, 2015]. De plus, l'article [Gendelman et Alloni, 2015] démontre l'existence pour les NES-VI de réponses fortement modulées ayant des caractéristiques chaotiques, nommées Chaotic Strongly Modulated Responses.
Pour conclure cette brève revue des différents types de NES, citons des articles traitant de trois NES atypiques. Le premier combine non-linéarités géométrique (cubique) et matérielle (comportement hystérétique de type Bouc-Wen) [Ture Savadkoohi *et al.*, 2016]. Le deuxième est un "NES rotationnel", i.e. une masse rotative montée dans l'oscillateur primaire linéaire [Gendelman *et al.*, 2011]. Le troisième NES consiste en une fine poutre précontrainte bi-encastrée avec une masse légère en son centre [Mattei *et al.*, 2016]. Ce dernier est attaché à un système de deux poutres couplées suivant un modèle présentant des applications directes en acoustique. Le pompage énergétique s'opère principalement par le biais de mouvements chaotiques du NES.

1.2.6 Études expérimentales des NES

Les premières évidences expérimentales du phénomène de pompage énergétique ont considéré des NES cubiques, réalisés selon un principe décrit dans le chapitre 6 de ce manuscrit. Les articles [McFarland *et al.*, 2005a, Kerschen *et al.*, 2007] étudient un absorbeur non linéaire de ce type couplé à un oscillateur linéaire à un degré de liberté soumis à un impact, i.e. en oscillations libres. Ce sont les premiers travaux à mettre en évidence expérimentalement la capture de résonance engagée par le NES et le transfert d'énergie opéré depuis un système maître. Par la suite, un système composé d'un NES cubique couplé à un modèle réduit de bâtiment à un étage est considéré dans [Gourdon *et al.*, 2007]. Le cas des oscillations libres laisse place à des scénarios de vibrations forcées par une excitation harmonique, ce qui permet d'observer des comportements quasi-périodiques fortement modulés. Une étude similaire est menée dans [Gourc *et al.*, 2014].
Le contrôle des instabilités aéroélastiques est abordé dans [Lee *et al.*, 2007a] où un modèle réduit d'aile placé dans une soufflerie est couplé à un NES cubique. Cette étude fait suite au travail [Lee *et al.*, 2007b] précédemment cité, les prédictions analytiques de ce dernier s'avérant être en bon accord avec les observations expérimentales.
Dans le domaine de l'acoustique, [Cochelin *et al.*, 2006] fournit une première preuve du pompage énergétique. Une membrane viscoélastique, conçue de telle sorte que son comportement exhibe une raideur cubique et un amortissement non linéaire, permet de réduire les niveaux sonores d'une cavité. L'article [Bellet *et al.*, 2012] prouve ensuite que l'efficacité du transfert d'énergie ainsi que les niveaux d'énergie auxquels le pompage se déclenche peuvent être améliorés par l'utilisation de plusieurs membranes. Des résultats expérimentaux testent un dispositif avec deux membranes. Des régimes de type SMR sont observés.
Un troisième type de NES fait l'objet d'études expérimentales [Nucera *et al.*, 2008]. Un NES-VI est attaché à un modèle réduit de bâtiment à trois étages. Il est prouvé que l'absorbeur non linéaire réduit sensiblement les vibrations du bâtiment sous sollicitations sismiques. Par ailleurs, l'analyse du comportement d'un dispositif fait d'un oscillateur linéaire couplé à un NES-VI composé d'une bille circulant librement dans un tube est menée dans [Gourc, 2013].
Les autres types de NES n'ont jusqu'à présent reçu que peu d'attention sur le plan expérimental, notamment le NES linéaire par morceaux pour lequel on pourra se référer à [Weiss, 2016] où il est utilisé pour contrôler les oscillations verticales d'un câble. Enfin, un NES bistable présentant des comportements chaotiques est considéré dans [Mattei *et al.*, 2016].

1.2.7 Contrôle vibratoire par couplage de plusieurs ddl non linéaires

Les travaux précédemment évoqués s'intéressent à des systèmes ajoutés à un ddl. Des études ont néanmoins envisagé de coupler plusieurs NES à une structure, ou un NES à plusieurs degrés de liberté. Cette partie s'attache à les recenser.
Deux articles joints s'intéressent à des assemblages de NES montés en parallèle sur une structure à

contrôler [Vaurigaud *et al.*, 2011b, Ture Savadkoohi *et al.*, 2012b]. Les développements théoriques du premier suggèrent qu'un tel dispositif permet une meilleure répartition de la masse ajoutée et un meilleur contrôle. Par ailleurs, la présence de plusieurs NES permet d'envisager plusieurs seuils d'activation. Le deuxième article est consacré à l'étude expérimentale d'un modèle réduit d'un bâtiment de quatre étages au dernier étage duquel sont montés deux NES en parallèle. Il est prouvé que ces derniers sont en mesure de réduire significativement l'amplitude des vibrations forcées du système primaire. Une étude plus récente [Boroson *et al.*, 2017] s'intéresse à une procédure d'optimisation de systèmes de NES en parallèle en intégrant des incertitudes dans les paramètres non linéaires ou dans les amplitudes de sollicitation impulsive, entraînant un design plus robuste.
Deux dispositifs expérimentaux mettant en jeu un NES composé de 2 ddl en série sont testés dans [Wierschem *et al.*, 2012, Wierschem *et al.*, 2014]. Ils sont respectivement montés sur des maquettes à échelle réduite de bâtiments à deux et six étages. Dans la deuxième étude, la non-linéarité du NES est créée grâce à un dispositif original faisant intervenir des plots en élastomère. Ces deux articles montrent que ce type de NES est particulièrement efficace pour des sollicitations de type choc excitant tous les modes du système linéaire dont on souhaite contrôler les oscillations. De même, [Taghipour et Dardel, 2015] prouve que deux NES en série améliorent la robustesse du contrôle sous oscillations forcées par rapport à des changements de paramètres internes ou externes (sollicitation).
Ces résultats font écho à des précédentes études ([Panagopoulos *et al.*, 2004, Tsakirtzis *et al.*, 2005, Tsakirtzis *et al.*, 2007a]) où des systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté soumis à des impulsions sont couplés à trois NES cubiques en série. Il est prouvé que l'absorbeur à trois ddl est capable de dissiper l'énergie de plusieurs modes en même temps. Ce mécanisme se différencie de celui de captures de résonances en cascade des NES à un ddl en ceci que ces dernières correspondent à des captures de résonances successives (l'une après l'autre) quand dans le cas présent, elles sont simultanées. Cela permet un pompage énergétique plus rapide et plus efficace. Le même phénomène est observé lorsque ces trois NES sont couplés à une barre linéaire amortie [Tsakirtzis *et al.*, 2007b].

1.3 Conclusions du chapitre

Cette revue bibliographique a permis en premier lieu de présenter la diversité des méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires. Si les problèmes linéaires sont principalement traités par le prisme des modes propres, la non-linéarité et la complexification des comportements qu'elle engendre oblige à adapter les techniques employées à chacun des problèmes abordés. Dans un deuxième temps, nous avons recensé de façon non exhaustive les solutions technologiques permettant de réaliser le contrôle vibratoire de structures dont on souhaite réduire les oscillations, en se concentrant sur un système passif non linéaire, le NES.
Les études portant sur ce dernier sont nombreuses et rendent compte de sa polyvalence, tant dans les domaines dans lesquels il est utilisé que dans les systèmes auxquels il est couplé. Une grande majorité de ces travaux portent sur des NES à un ddl. Comme énoncé ci-dessus, les dispositifs de trois NES montés en série présentent d'excellentes performances en termes de contrôle passif de structures soumises à des impulsions. Néanmoins, il n'existe à notre connaissance aucune étude portant sur des structures primaires couplée à des chaînes d'oscillateurs en série possédant un nombre quelconque de ddl, bien que des travaux sur des chaînes seules (non couplées à un système principal) aient suggéré que de tels assemblages possèdent des potentialités en termes de pompage énergétique. On pourra notamment se référer à [Jayaprakash *et al.*, 2011], ou à [Hasan *et al.*, 2013] où un transfert d'énergie comparable au pompage énergétique est réalisé entre deux chaînes couplées. L'article [Starosvetsky et Vakakis, 2011] approche néanmoins cette problématique en plaçant une interface granulaire de n billes en contact selon une interaction de Hertz entre deux barres non amorties afin de limiter la transmission d'une impulsion entre ces deux dernières. Notons de plus que les performances des NES en série sous sollicitation harmonique n'avaient au début de cette thèse pas été abordées.
Ainsi, ce manuscrit s'attache à développer une méthodologie générale de traitement analytique de

systèmes composés de structures linéaires couplées à des chaînes de N oscillateurs non linéaires montés en série, où N est quelconque. Le but est double et répond aux questions suivantes :

- Une telle chaîne est-elle en mesure, à l'instar des NES, d'entrer en résonance avec une structure linéaire soumise à une excitation sinusoïdale et d'en absorber l'énergie vibratoire ?
- Quels comportements peuvent être observés dans la chaîne ? Se pose notamment la question des réponses de type SMR dans de tels systèmes ajoutés.

On souhaite ainsi décrire une capture de résonance 1 :1 de la chaîne avec un oscillateur linéaire à un ddl ou avec un mode d'une structure linéaire discrète. Ce scénario se prête à l'utilisation d'une approche combinant méthode des échelles multiples et technique de complexification-moyenne, déjà utilisée dans nombre d'études citées dans cette étude bibliographique (voir entre autres [Vakakis *et al.*, 2009, Weiss, 2016, Gourc, 2013, Lamarque *et al.*, 2011]. Elle permet par ailleurs des développements analytiques complets adaptés à de potentielles procédures de design.

La méthodologie générale est d'abord décrite dans le chapitre 2, puis appliquée à deux exemples dans les chapitres 3 et 4. Le premier considère un système composé d'une structure linéaire couplée à un oscillateur présentant deux potentiels non linéaires, les deux masses étant forcées. Il permet notamment de valider l'approche développée dans le chapitre 2. La seconde application examine le cas d'une chaîne d'oscillateurs possédant des forces de rappel de couplage cubiques. Dans le chapitre 5, la méthodologie est modifiée en ceci que le comportement de la chaîne est décrit par le biais d'une approximation continue. Enfin, un dispositif expérimental modélisant un modèle réduit d'un bâtiment à un étage attaché à une chaîne d'oscillateurs non linéaires est testé dans le chapitre 6.

Chapitre 2

Méthodologie générale discrète

Ce chapitre présente une méthode analytique générale de traitement de systèmes composés d'une structure linéaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. Il pose les bases méthodologiques sur lesquelles s'appuient les développements des chapitres suivants. Cela permet d'énoncer les hypothèses principales et d'unifier les notations qui seront utilisées par la suite. Par ailleurs, un exemple de système à deux degrés de liberté tiré de la littérature vient illustrer cette méthodologie.
La première partie établit le modèle général étudié. La seconde partie porte sur les outils analytiques mis en place pour le traitement des équations. Une méthode d'échelles multiples en temps est présentée et appliquée au système modifié et simplifié par l'introduction de variables complexes et par l'utilisation d'une technique de Galerkin. Les troisième et quatrième parties se concentrent enfin sur l'étude du comportement du système aux deux premières échelles de temps.

Sommaire

2.1 Modélisation du problème 20
2.2 Méthodes d'échelles multiples en temps, changements de variables et méthode de Galerkin 21
2.3 Étude du comportement à l'échelle de temps rapide 23
2.3.1 Définition de la variété invariante en échelle lente 23
2.3.2 Étude de stabilité 24
2.4 Étude du comportement à l'échelle de temps lente : points d'équilibre et points singuliers 26
2.5 Conclusions du chapitre 30

2.1 Modélisation du problème

Ce chapitre détaille une méthodologie analytique générale d'analyse d'un système principal (SP) couplé à une chaîne de P oscillateurs non linéaires de masse faible par rapport à celle du SP. Cette méthode a pour but de mettre en œuvre des outils de design de la chaîne d'oscillateurs en vue d'effectuer un contrôle passif du SP. L'étude porte donc sur la dynamique globale du système et la propension de la chaîne à absorber l'énergie vibratoire du SP, ce transfert d'énergie s'opérant grâce aux non-linéarités présentes dans la chaîne. On se limitera dans ce manuscrit à des SP linéaires, bien que la méthode puisse être appliquée dans des cas plus généraux (voir par exemple [Schmidt et Lamarque, 2010, Lamarque *et al.*, 2012, Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013, Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014, Weiss *et al.*, 2016]). De plus, la méthode décrite dans ce chapitre s'appuie sur une démarche déterministe. On fait donc l'hypothèse que les paramètres linéaires du SP sont parfaitement connus. Il faudrait dans le cas contraire considérer des variables aléatoires. Une étude similaire est menée dans [Sapsis *et al.*, 2011], où les sollicitations externes appliquées au SP et à un NES sont stochastiques.
L'ensemble du système couplé est soumis à une sollicitation harmonique de pulsation ω. Supposons que le SP possède une structure discrète à N ddl. Il possède alors N modes normaux associés à des pulsations propres $(\omega_1,\ldots,\omega_N)$, que l'on suppose éloignées. Pour un exemple où la structure linéaire présente des résonances internes, on pourra se référer au travail de Starosvetsky et Gendelman [Starosvetsky et Gendelman, 2010] qui étudie l'interaction entre un NES et un système linéaire à deux ddl présentant deux modes en résonance 1 : 1. Afin de se placer dans un cas potentiellement pathologique pour la structure primaire, la pulsation de forçage ω est choisie proche d'une pulsation propre ω_i, $i \in [|1,N|]$. On fait alors l'hypothèse que la dynamique du SP peut être projetée sur le seul mode i et que les autres modes ont une contribution négligeable. Cette hypothèse sera testée dans le chapitre 4 de ce manuscrit.
On obtient ainsi le système d'étude présenté sur la figure 2.1. Les équations adimensionnalisées de

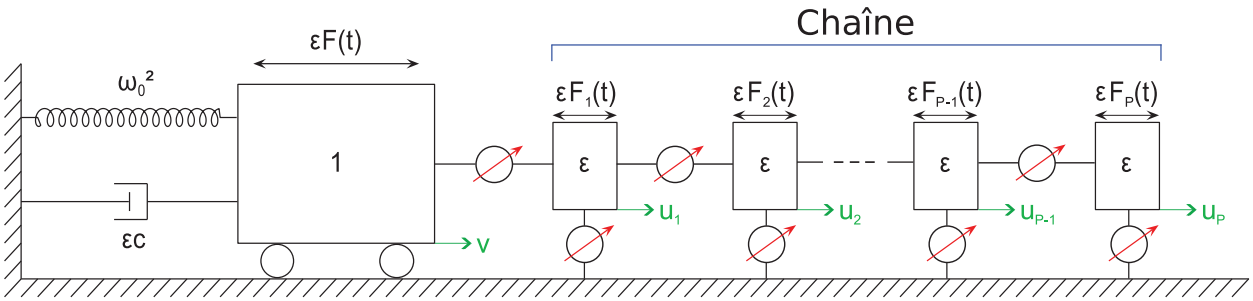


FIGURE 2.1 – Système à $(P+1)$ ddl forcés composé d'une structure linéaire de masse unitaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires de masses ϵ $(0 < \epsilon \ll 1)$.

cet ensemble se résument au système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c\dot{v} + \epsilon h_0(v,u_1,\dot{v},\dot{u}_1) = \epsilon F + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \ddot{u}_1 - h_0(v,u_1,\dot{v},\dot{u}_1) + h_1(u_1,u_2,\dot{u}_1,\dot{u}_2) = F_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \ddot{u}_j + h_j(u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dot{u}_{j-1},\dot{u}_j,\dot{u}_{j+1}) = F_j + \mathcal{O}(\epsilon)\ , \quad j = 2,\ldots,P-1 \\ \ddot{u}_P + h_P(u_P,u_{P-1},\dot{u}_P,\dot{u}_{P-1}) = F_P + \mathcal{O}(\epsilon) \end{cases} \tag{2.1}$$

où h_j, $j = 0,\ldots,P$ sont des fonctions non linéaires. La dérivation temporelle est notée par un point et la dépendance en temps est omise par souci de clarté. Ces équations décrivent la dynamique d'un système à $(P+1)$ ddl. Un SP linéaire de masse unitaire dont le déplacement est représenté

par $v(t)$ est couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires dont les déplacements sont tracés par les variables $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, P$. Chacun des oscillateurs a une masse ϵ très petite devant 1. Le SP présente une raideur linéaire ω_0^2 et un amortissement visqueux ϵc. Le couplage entre le SP et la chaîne est décrit par la fonction h_0 quand les couplages internes à la chaîne sont exprimés par les fonctions h_j, $j = 1, \ldots, P$. On considère par ailleurs que le SP est sollicité par une force externe $F(t) = \epsilon f \sin(\omega t)$ et les masses de la chaîne par des forces $F_j(t) = \epsilon f_j \sin(\omega t)$. On suppose enfin que la fréquence de forçage est proche de la fréquence propre du SP, i.e. $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \sigma\epsilon)$, où σ joue le rôle d'un paramètre de désaccordage.
La méthode décrite ici découle d'une généralisation des outils utilisés pour traiter d'un cas à deux ddl, largement étudié dans la littérature (voir par exemple [Gendelman *et al.*, 2005, Manevitch *et al.*, 2007b, Starosvetsky et Gendelman, 2008]), où le système principal est couplé à un NES unique possédant une non-linéarité cubique :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c\dot{v} + \epsilon c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon D(v - u_1)^3 = \epsilon f \sin(\omega t) \\ \\ \ddot{u_1} + c_1(\dot{u}_1 - \dot{v}) + D(u_1 - v)^3 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

On peut identifier les paramètres de notre cas général : $P = 1$, $F_1 = 0$, $h_0 = c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + D(v - u_1)^3$ et $h_1 = 0$. Nous illustrerons la méthode et les outils présentés dans ce chapitre grâce à cet exemple, que nous nommerons "cas cubique à 2 ddl".

2.2 Méthodes d'échelles multiples en temps, changements de variables et méthode de Galerkin

L'étude du comportement dynamique du système est menée à l'aide d'une méthode asymptotique appelée méthode d'échelles multiples en temps [Nayfeh et Mook, 1979]. Des échelles de temps τ_k définies par la relation (2.3) sont introduites :

$$\tau_k = \epsilon^k t \ , \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

Cette définition fait intervenir le ratio de masses ϵ, petit paramètre permettant d'introduire des ordres de grandeur entre les échelles de temps. Ainsi τ_0 sera nommée échelle de temps rapide quand τ_1, τ_2, ... seront appelées première, deuxième, ... échelles de temps lente. L'opérateur de dérivation peut désormais s'exprimer en fonction de ces échelles :

$$\begin{aligned} \frac{d.}{dt} &= \frac{d\tau_0}{dt}\frac{\partial.}{\partial\tau_0} + \frac{d\tau_1}{dt}\frac{\partial.}{\partial\tau_1} + \frac{d\tau_2}{dt}\frac{\partial.}{\partial\tau_2} + \ldots \\ &= \frac{\partial.}{\partial\tau_0} + \epsilon\frac{\partial.}{\partial\tau_1} + \epsilon^2\frac{\partial.}{\partial\tau_2} + \ldots \\ \frac{d^2.}{dt^2} &= \frac{\partial^2.}{\partial\tau_0^2} + 2\epsilon\frac{\partial.}{\partial\tau_0}\frac{\partial.}{\partial\tau_1} + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2.}{\partial\tau_1^2} + 2\frac{\partial.}{\partial\tau_0}\frac{\partial.}{\partial\tau_2}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les équations sont ensuite dérivées aux ordres successifs en ϵ afin d'étudier les comportements du système aux échelles de temps correspondantes.
D'autres transformations s'avèrent utiles s'agissant de l'étude des équations. Selon les couplages dans la chaîne, il peut être intéressant d'effectuer un premier changement de variables introduisant les déplacements relatifs w_j définis comme suit :

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - v \\ w_j = u_j - u_{j-1} \ , \quad j = 2, \ldots, P \end{cases} \tag{2.5}$$

Le choix de faire ou non ce changement de variables repose principalement sur les non-linéarités présentes dans la chaîne. Dans le cas où elles sont locales, il paraît préférable de conserver les

variables initiales. Le passage aux déplacements relatifs est en revanche pertinent si les non-linéarités interviennent uniquement dans les couplages inter-oscillateurs. On utilisera dans ce chapitre les déplacements relatifs. La méthode expliquée ici est toutefois valable dans les deux cas.
Un second changement de variables fait intervenir les variables complexes de Manevitch [Manevitch, 2001] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = (\dot{v} + i\omega v)\, e^{-i\omega\tau_0} \\ \varphi_j = (\dot{w}_j + i\omega w_j)\, e^{-i\omega\tau_0}\ , \quad j = 1,\ldots,P \end{array} \right. \tag{2.6}$$

où $i = \sqrt{-1}$. Ces variables décrivent la modulation lente d'une oscillation rapide à la pulsation ω, les variables φ_j étant les variables relatives aux oscillateurs de la chaîne et ψ celle relative au système principal. En d'autres termes, elles tracent l'enveloppe d'une oscillation monofréquentielle, introduisant par là une hypothèse fondamentale de la méthode détaillée dans cette section : tous les oscillateurs sont supposés subir une oscillation harmonique à la pulsation ω. Cette hypothèse est tout à fait raisonnable pour le SP, dans la mesure où ce dernier est un système linéaire forcé autour de sa fréquence de résonance, et pour la chaîne d'oscillateurs attendu que l'on souhaite qu'elle entre en résonance avec le SP. Afin de tronquer les harmoniques supérieures et ne conserver dans les équations que les termes résonants en $e^{i\omega\tau_0}$, une méthode de Galerkin est employée, ce qui s'écrit pour une fonction arbitraire $s(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots)$ comme suit :

$$S(\tau_1,\tau_2,\ldots) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} s(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots)e^{-i\omega\tau_0}d\tau_0 \tag{2.7}$$

Lors de l'utilisation de cette technique, ψ et φ_j, $j = 1,\ldots,P$ seront supposées indépendantes de τ_0. Cette hypothèse sera confirmée lors de l'étude du comportement multi-échelles du système, ou, à défaut, vérifiée par la considération d'un état asymptotique lorsque $\tau_0 \to \infty$.
L'analyse du système (2.1) est ainsi simplifiée et ramenée à l'étude du système d'équations du premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)\psi + \epsilon\dfrac{c}{2}\psi + \epsilon H_0(\psi,\psi^*,\varphi_1,\varphi_1^*) = \dfrac{\epsilon f}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \dfrac{i\omega}{2}\varphi_1 + \dfrac{i\omega_0^2}{2\omega}\psi - H_0(\psi,\psi^*,\varphi_1,\varphi_1^*) + H_1(\varphi_1,\varphi_1^*,\varphi_2,\varphi_2^*) = \dfrac{f_1}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial t} + \dfrac{i\omega}{2}\varphi_j + H_j(\varphi_{j-1},\varphi_{j-1}^*,\varphi_j,\varphi_j^*,\varphi_{j+1},\varphi_{j+1}^*) = \dfrac{f_j - f_{j-1}}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon)\ , \quad j = 2,\ldots,P-1 \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_P}{\partial t} + \dfrac{i\omega}{2}\varphi_p + H_P(\varphi_{P-1},\varphi_{P-1}^*,\varphi_P,\varphi_P^*) = \dfrac{f_P - f_{P-1}}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

où les fonctions H_k, $k = 0,\ldots,P$ représentent les contributions des couplages dans la chaîne à la première harmonique des oscillations de chacune des masses. Une étoile en exposant désigne le complexe conjugué.
Dans le cas cubique à 2 ddl, la fonction H_0 s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} H_0 & = & -\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[c_1\frac{\varphi_1 e^{i\omega\tau_0} + \varphi_1^* e^{-i\omega\tau_0}}{2} + D\left(\frac{\varphi_1 e^{i\omega\tau_0} - \varphi_1^* e^{-i\omega\tau_0}}{2i\omega}\right)^3 \right] e^{-i\omega\tau_0}d\tau_0 \\ \\ & = & -\dfrac{\omega}{2\pi}c_1\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c_1\frac{\varphi_1 + \varphi_1^* e^{-2i\omega\tau_0}}{2}d\tau_0 - \\ & & \dfrac{\omega}{2\pi}D\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\varphi_1^3 e^{2i\omega\tau_0} - 3|\varphi_1|^2\varphi_1 + 3|\varphi_1|^2\varphi_1^* e^{-2i\omega\tau_0} - \varphi_1^{*3} e^{-4i\omega\tau_0}}{(2i\omega)^3}d\tau_0 \\ \\ & = & -\left(\dfrac{c_1}{2} - \dfrac{3iD}{8\omega^3}|\varphi_1|^2\right)\varphi_1 \end{array} \tag{2.9}$$

2.3 Étude du comportement à l'échelle de temps rapide

2.3.1 Définition de la variété invariante en échelle lente

Le comportement du système à l'échelle de temps rapide est décrit en dérivant le système (2.8) à l'ordre ϵ^0 :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau_0} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_0} + \dfrac{i\omega_0}{2}\left(\psi+\varphi_1\right) - \tilde{H}_0(\psi,\psi^*,\varphi_1,\varphi_1^*) + \tilde{H}_1(\varphi_1,\varphi_1^*,\varphi_2,\varphi_2^*) = \dfrac{f_1}{2i} \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial\tau_0} + \dfrac{i\omega_0}{2}\varphi_j + \tilde{H}_j(\varphi_{j-1},\varphi_{j-1}^*,\varphi_j,\varphi_j^*,\varphi_{j+1},\varphi_{j+1}^*) = \dfrac{f_j}{2i}\,, \quad j=2,\ldots,P-1 \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_P}{\partial\tau_0} + \dfrac{i\omega_0}{2}\varphi_p + \tilde{H}_P(\varphi_{P-1},\varphi_{P-1}^*,\varphi_P,\varphi_P^*) = \dfrac{f_P}{2i} \end{array}\right. \tag{2.10}$$

où les fonctions $\tilde{H}_k$, $k=0,\ldots,P$ représentent les ordres ϵ^0 des fonctions H_k. Pour le cas cubique à 2 ddl, il suffit de remplacer ω par ω_0 dans l'expression de H_0 pour obtenir $\tilde{H}_0$. La première équation implique que l'enveloppe de la structure primaire est une fonction des échelles de temps lentes uniquement, i.e. $\psi=\psi(\tau_1,\tau_2,\ldots)$, ce qui valide pour cette variable l'hypothèse réalisée pour utiliser la méthode de Galerkin. Il n'en va pas de même pour les variables relatives à la chaîne. Afin de surmonter cette contradiction, nous considèrerons les points fixes ϕ_j vérifiant $\lim\limits_{\tau_0\to\infty}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial\tau_0}=0$. La validité de cette hypothèse est prouvée dans [Gendelman, 2004] pour un cas à deux ddl. Nous supposerons qu'elle reste valable dans le cas plus général décrit ici. On définit ainsi la variété invariante en échelle lente du système, ou "Slow Invariant Manifold" en anglais, abrégé SIM dans la suite de ce manuscrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_1 = \dfrac{i\omega_0}{2}\left(\psi+\phi_1\right) - \tilde{H}_0(\psi,\psi^*,\phi_1,\phi_1^*) + \tilde{H}_1(\phi_1,\phi_1^*,\phi_2,\phi_2^*) + \dfrac{if_1}{2} = 0 \\ \\ \mathcal{H}_j = \dfrac{i\omega_0}{2}\phi_j + \tilde{H}_j(\phi_{j-1},\phi_{j-1}^*,\phi_j,\phi_j^*,\phi_{j+1},\phi_{j+1}^*) + \dfrac{if_j}{2} = 0\,, \quad j=2,\ldots,P-1 \\ \\ \mathcal{H}_P = \dfrac{i\omega_0}{2}\phi_p + \tilde{H}_P(\phi_{P-1},\phi_{P-1}^*,\phi_P,\phi_P^*) + \dfrac{if_P}{2} = 0 \end{array}\right. \tag{2.11}$$

On remarque que le SIM ne dépend pas de la sollicitation externe du SP. Chaque $(P+1)$-uplet $(\psi,\phi_1,\ldots,\phi_P)$ solution des équations (2.11) correspond à un état admissible du système à l'échelle de temps lente, sous les hypothèses précédemment évoquées. Le SIM réunit ainsi tous les comportements asymptotiques possibles du système dans la mesure où sa validité débute lorsque $\tau_0\to\infty$, c'est-à-dire une fois un régime transitoire dépassé. Le comportement du système est alors attiré par le SIM et vient évoluer autour sans plus le quitter par la suite.
Le SIM est défini par un système de P équations complexes à $(P+1)$ inconnues, complexes elles aussi. Il établit une relation algébrique entre les variables du système et réduit considérablement la dimension du problème. Sous l'hypothèse que le système (2.11) est résoluble, il est possible de passer de $2P$ dimensions réelles à 2. Définissons les modules et phases des variables complexes comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = Ne^{i\delta} \\ \phi_j = N_j e^{i\delta_j}\,, \quad j=1,\ldots,P \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Il suffit alors de fixer deux variables réelles, que nous supposerons être N_P et δ_P, pour déterminer directement les autres inconnues.

Dans le cas cubique à 2 ddl, le SIM se résume à l'équation complexe suivante :

$$\mathcal{H}_1 = \frac{i\omega_0}{2}\psi + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{i\omega_0}{2} - \frac{3iD}{8\omega_0^3}|\phi_1|^2\right)\phi_1 = 0 \tag{2.13}$$

Ce système se résout assez aisément :

$$\begin{cases} N = \dfrac{N_1}{\omega_0}\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2} \\ \\ \delta = \delta_1 + \arctan\left(\dfrac{c_1}{\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0}\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\mathcal{D} = \dfrac{3D}{4\omega_0^3}$. On pourra par ailleurs utiliser les relations suivantes :

$$\begin{cases} N\cos(\delta - \delta_1) = \dfrac{N_1}{\omega_0}\left(\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0\right) \\ \\ N\sin(\delta - \delta_1) = \dfrac{c_1 N_1}{\omega_0} \end{cases} \tag{2.15}$$

On remarque que dans ce cas, les amplitudes et les phases sont découplées, permettant de tracer une projection du SIM dans le plan (N,N_1). Notons par ailleurs que dans le cas d'un NES non forcé, le SIM est indépendant de la sollicitation extérieure. On peut aisément prouver que l'expression de N en fonction de N_1 exhibe deux extremums dès lors que l'amortissement du NES est assez faible. Étudions pour cela la dérivée suivante :

$$\omega_0\frac{\partial N^2}{\partial N_1^2} = (\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2)(\omega_0 - 3\mathcal{D}N_1^2) + c_1^2 \tag{2.16}$$

Ce polynôme de degré 2 en N_1^2 possède deux racines réelles si l'amortissement ne dépasse pas une valeur critique, i.e. $c_1 < c_{1,crit} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{3}}$. Deux exemples de SIM sont tracés sur la figure 2.2. Le premier possède un maximum et un minimum locaux ($c_1 = 0.1 < c_{1,crit}$) et le second est monotone ($c_1 = 1 > c_{1,crit}$).
La non-linéarité amène la multiplicité des solutions, c'est-à-dire la présence d'extremums locaux dans le SIM. Le cas monotone est quant à lui inapte à opérer un transfert d'énergie du SP vers le NES [Gendelman, 2004]. Ce résultat est cohérent avec l'idée que l'on souhaite utiliser la non-linéarité pour localiser l'énergie dans l'oscillateur couplé.

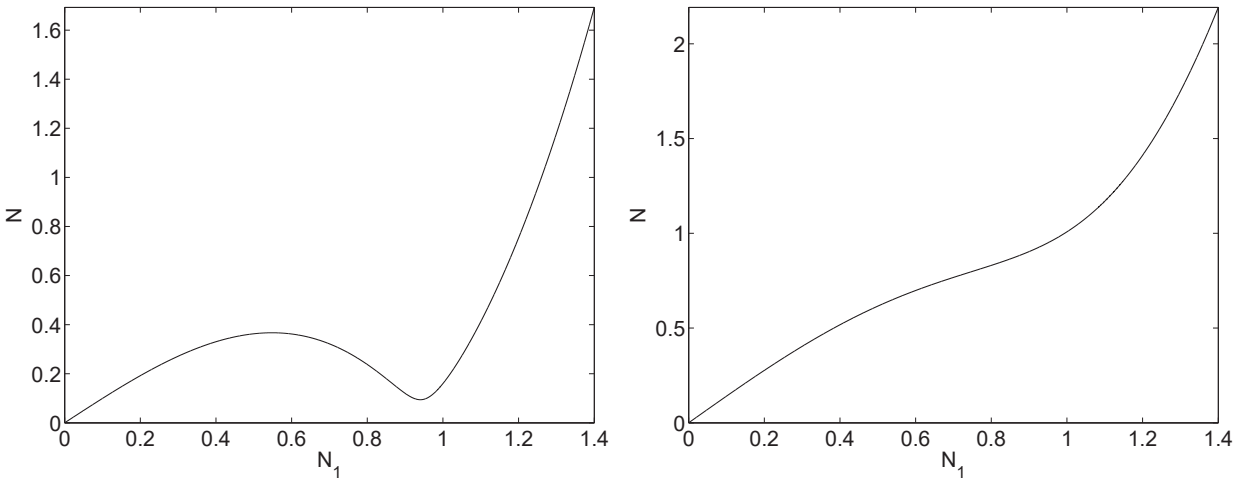
2.3.2 Étude de stabilité

L'étude de la stabilité linéaire du système (2.10) autour du SIM est menée en introduisant une perturbation infinitésimale comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_P \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}} \quad , \quad \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_1 \\ \vdots \\ \Delta\phi_P \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

où $(\phi_1, \ldots, \phi_P)$ est solution du système (2.11). La variable ψ ne dépendant pas de l'échelle de temps rapide, elle n'est pas perturbée. On injecte ensuite la relation (2.17) dans (2.10) afin de linéariser le système obtenu en tronquant les ordres supérieurs en $\boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}}$, i.e. en négligeant les termes $\Delta\phi_j^k$, $k > 1$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}}}{\partial\tau_0} \\ \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}}^*}{\partial\tau_0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}} \\ \\ \boldsymbol{\Delta\tilde{\Phi}}^* \end{pmatrix} \tag{2.18}$$



(a) (b)

FIGURE 2.2 – $\omega_0 = 1$ et $D = 1.5$ – Exemples de SIM pour le cas cubique à 2 ddl (a) $c_1 = 0.1 < c_{1,crit}$ (b) $c_1 = 1 > c_{1,crit}$.

où $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice carrée de taille $2P$. Un état $(\phi_1, \ldots, \phi_P)$, associé à un ψ donné par le SIM, est instable dès lors que $\mathbf{\Sigma}$ possède au moins une valeur propre dont la partie réelle est positive. Cette procédure étudie la stabilité linéarisée du système réduit et permet ainsi de mettre à jour des états instables pour le système global décrit par les équations (2.1). Il existe de nombreux types de stabilité de solutions périodiques, telles que les stabilités asymptotique ou uniforme, dont les définitions peuvent être trouvées dans [Willems, 1970]. Ici, l'étude locale de la stabilité linéaire du système réduit est suffisante pour expliquer les comportements périodiques et quasi-périodiques du système, comme cela sera montré dans la suite de ce chapitre. Notons néanmoins que si la relation de perturbation (2.17) incluait ψ, $\mathbf{\Sigma}$ serait de taille $2(P+1)$ et 0 deviendrait valeur propre de $\mathbf{\Sigma}$ (on obtiendrait trivialement $\dfrac{\partial \Delta\psi}{\partial \tau_0} = 0$), ce qui est un cas limite en termes de stabilité. De ce fait, la contribution des termes aux ordres supérieurs en ϵ, négligée pour le calcul du SIM, pourrait amener une instabilité.

Dans le cas cubique à 2 ddl, la matrice $\mathbf{\Sigma}$ s'écrit :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} -\dfrac{c_1}{2} - \dfrac{i\omega_0}{2} + i\mathcal{D}N_1^2 & \dfrac{i\mathcal{D}}{2}\phi_1^2 \\ -\dfrac{i\mathcal{D}}{2}\phi_1^{*2} & -\dfrac{c_1}{2} + \dfrac{i\omega_0}{2} - i\mathcal{D}N_1^2 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

La somme des valeurs propres vaut $\mathrm{tr}\,(\mathbf{\Sigma}) = -c_1 < 0$ et leur produit $\det(\mathbf{\Sigma})$. Les zones instables correspondent ici aux points où :

$$\det(\mathbf{\Sigma}) = \frac{c_1^2}{4} + \left(\frac{\omega_0}{2} - \mathcal{D}N_1^2\right)^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{4}N_1^4 < 0 \tag{2.20}$$

Les points annulant ce déterminant sont les extremums du SIM (cf l'équation (2.16)). Ce dernier présente donc une zone instable encadrée par le maximum et le minimum (lorsqu'ils existent), visible sur la figure 2.3 où elle est tracée en ligne discontinue rouge.

La détection du SIM et de ses zones instables permet d'identifier l'ensemble des comportements asymptotiques vers lesquels le système pourrait tendre pour n'importe quel niveau de sollicitation du SP. Il est donc nécessaire d'étudier la réponse dynamique à l'échelle de temps suivante pour parvenir à la détermination complète des amplitudes du système pour un forçage donné.

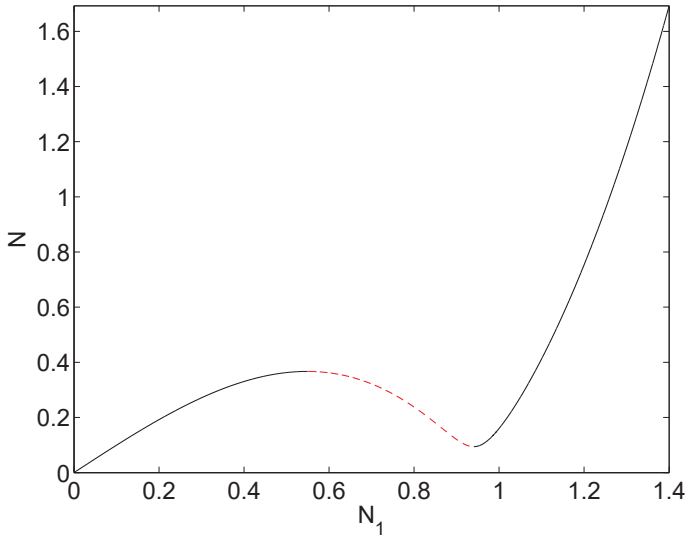


FIGURE 2.3 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$ et $D = 1.5$ – SIM pour le cas cubique à 2 ddl. La ligne rouge discontinue représente une branche instable.

2.4 Étude du comportement à l'échelle de temps lente : points d'équilibre et points singuliers

L'étude du comportement à l'échelle de temps τ_1 vise à définir les comportements asymptotiques vers lesquels le système va tendre et se stabiliser, déterminant les régimes périodiques admissibles pour des valeurs de forçage données. On étudie pour cela la première équation du système (2.8), relative à la structure primaire, dérivée à l'ordre ϵ^1 :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\left(i\sigma\omega_0 + c\right)\psi + \tilde{H}_0(\psi,\psi^*,\phi_1,\phi_1^*) = \frac{f}{2i} \tag{2.21}$$

Les points fixes de cette équation définissent les points d'équilibre du système global (donc les régimes périodiques) dès lors qu'on considère en parallèle la relation algébrique du SIM liant les variables entre elles, i.e. système (2.11).
La séparation en parties réelle et imaginaire de l'équation (2.21) mène au système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = \hat{F}_1(N,\delta,N_1,\delta_1) \\ \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = \hat{F}_2(N,\delta,N_1,\delta_1) \end{cases} \tag{2.22}$$

La réduction de dimensions opérée par le SIM permet de réécrire (2.22) sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = F_1(N_P,\delta_P) \\ \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = F_2(N_P,\delta_P) \end{cases} \tag{2.23}$$

Les fonctions F_1 et F_2 rendent donc compte de l'évolution à la première échelle de temps lente de ψ sur le SIM. L'étape suivante consiste à exprimer les dérivées par rapport à τ_1 des variables ϕ_j en fonction de $\dfrac{\partial N}{\partial \tau_1}$ et $\dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1}$ de sorte à s'assurer que l'annulation de F_1 et F_2 correspond à un point

d'équilibre pour le système entier. On utilise pour cela les équations du SIM (2.11) que l'on dérive par rapport à τ_1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}_{j,r}}{\partial \tau_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{j,i}}{\partial \tau_1} = 0 \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, P \tag{2.24}$$

où $\mathcal{H}_{j,r}$ et $\mathcal{H}_{j,i}$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\mathcal{H}_j$. Le système (2.24) se réécrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial N_P}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \delta_P}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = -\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

où

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta} \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_P} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_P} \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_P} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_P} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,r}}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,r}}{\partial N_P} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,r}}{\partial \delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,r}}{\partial \delta_P} \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,i}}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,i}}{\partial N_P} & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,i}}{\partial \delta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathcal{H}_{P,i}}{\partial \delta_P} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

En injectant (2.23) dans (2.25), et en multipliant par la matrice complémentaire de $\mathbf{S}_2$ définie par $\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(\mathbf{S}_2)$, le système suivant est obtenu :

$$\det(\mathbf{S}_2)\mathbf{Id}_{2P} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial N_P}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \delta_P}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = \underbrace{-\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} \tag{2.27}$$

où $\mathbf{Id}_{2P}$ est la matrice identité de taille $2P \times 2P$ et $\mathcal{F}$ un vecteur colonne de $2P$ lignes. Rappelons ici que, tenant compte de la résolution du SIM, les matrices S_1 et S_2 ainsi que les fonctions F_1 et F_2 sont exprimées uniquement en fonction de N_P et δ_P. L'étude de la relation (2.27) permet la détection des points d'équilibre et des points singuliers du système. Les premiers prédisent comme

explicité précédemment les régimes périodiques quand les seconds suggèrent l'existence de régimes quasi-périodiques.
La distinction mathématique entre ces deux types de réponses porte sur l'inversibilité de la matrice $\mathbf{S}_2$. On remarque à l'examen du système (2.25) que lorsque $\mathbf{S}_2$ n'est pas inversible, les dérivées temporelles à l'échelle lente des variables relatives à la chaîne ne sont plus définies sur le SIM. Comme expliqué dans [Starosvetsky et Gendelman, 2008], cette singularité est due à l'existence de bifurcations (point selle ou "saddle-node bifurcations") des cycles limites et donne lieu à des oscillations dites de relaxation. Ces oscillations correspondent à des successions d'évolutions lentes sur des branches stables d'une variété (ici le SIM) et de bifurcations entre ces dernières. Le système décrit alors un cycle articulé autour de sauts répétés entre plusieurs branches stables du SIM. Ces réponses sont appelées réponses fortement modulées ou "Strongly Modulated Responses" (SMR) du fait que l'amplitude de la modulation est du même ordre de grandeur que la réponse vibratoire des oscillateurs de la chaîne. Elles sont générées par les points singuliers du système. Sur ces points, comme $\mathbf{S}_2$ n'est pas inversible, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial N_P}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \delta_P}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.28}$$

En d'autres termes, les points d'équilibre du SP n'en sont pour la chaîne que sous une condition de régularité du SIM, matérialisée par l'inversibilité de $\mathbf{S}_2$. Ainsi, les *points d'équilibre* vérifient :

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 0 \\ \det(\mathbf{S}_2) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{F} = 0 \\ \det(\mathbf{S}_2) \neq 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Notons que l'équivalence ci-dessus n'est valide que si $\mathbf{S}_1 \neq 0$. Les points vérifiant $\mathbf{S}_1 = 0$ et F_1,$F_2 \neq 0$ ne sont pas des points d'équilibre.
Dans le cas où $\mathbf{S}_2$ n'est pas inversible, on fera ici l'hypothèse, vérifiée dans les cas traités dans les chapitres de ce manuscrit, que la dégénérescence du rang de la matrice $\mathbf{S}_2$ est d'ordre 1, i.e. $\mathrm{rg}(\mathbf{S}_2) = 2P - 1$. Examinons de nouveau le système (2.25). Dans ce cas de dégénérescence, une dérivée $\dfrac{\partial N_j}{\partial \tau_1}$ ou $\dfrac{\partial \delta_j}{\partial \tau_1}$ n'est plus déterminée et rencontre une singularité : c'est ce qui engendre la bifurcation de la variable N_j ou δ_j correspondante, que nous appellerons variable "libre". Les autres variables étant contraintes par le SIM, elles subissent aussi un saut : ce sont les variables "contraintes". L'étude d'une telle bifurcation peut ainsi être menée dans un espace à une dimension, celle de la variable libre, qui définit la direction de la bifurcation. Supposons maintenant que le rang de $\mathbf{S}_2$ soit k fois dégénéré, $k > 1$. Le nombre de variables libres passe à k et celui de variables contraintes à $2P - k$. La direction des bifurcations est désormais fonction de k variables. Cela laisse présager à la fois une dynamique extrêmement riche et une difficulté supplémentaire dans la prédiction de cette dynamique. La combinatoire et la complexité des cycles de SMR qui pourraient découler d'un tel cas réduiraient la prédictibilité du comportement du système. Par ailleurs, il semble extrêmement compliqué de deviner a priori le système mécanique qui permettrait d'obtenir des singularités d'ordre supérieur. Pour toutes ces raisons, nous nous limiterons dans ce manuscrit au cas $k = 1$. Le rang de la matrice complémentaire de $\mathbf{S}_2$ est alors réduit à 1. Les matrices $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ n'étant pas identiquement nulles, le produit $\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1$ est lui aussi de rang 1. On peut alors

définir les *points singuliers* comme ceux vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{F} = 0 \\ \det(\mathbf{S}_2) = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Or, sur les points singuliers, étant donné que $\mathrm{rg}(\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1) = 1$, il suffit qu'une composante du vecteur $\mathcal{F}$ soit nulle pour que les autres le soient. Notant $\mathcal{F}_j$ la j-ème composante de $\mathcal{F}$, il est ainsi plus commode de chercher les points singuliers en suivant la définition ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_j = 0 \\ \det(\mathbf{S}_2) = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

où j est quelconque. Cette méthode de recherche des points singuliers nécessite cependant de vérifier que la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1$ ne soit pas identiquement nulle au point où $\det(\mathbf{S}_2) = 0$. En effet, dans ce cas, les équations $\mathcal{F}_k = 0$, $k = 0, \ldots, 2P$ ne sont pas toutes équivalentes.
Pour le cas cubique à 2 ddl, l'équation (2.21) s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\left(i\sigma\omega_0 + c\right)\psi - \frac{1}{2}\left(c_1 - i\mathcal{D}N_1^2\right)\phi_1 = -\frac{if}{2} \tag{2.32}$$

En séparant (2.32) en parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = -\dfrac{c}{2}N + \dfrac{c_1}{2}N_1\cos(\delta_1 - \delta) + \dfrac{\mathcal{D}}{2}N_1^3\sin(\delta_1 - \delta) - \dfrac{f}{2}\sin(\delta) \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = \dfrac{1}{N}\left(-\dfrac{\sigma\omega_0}{2}N + \dfrac{c_1}{2}N_1\sin(\delta_1 - \delta) - \dfrac{\mathcal{D}}{2}N_1^3\cos(\delta_1 - \delta) - \dfrac{f}{2}\cos(\delta)\right) \end{cases} \tag{2.33}$$

On utilise les relations (2.13), (2.14) et (2.15) afin d'obtenir un système de la même forme que (2.23) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = \dfrac{-\left[\omega_0^2 c_1 + c\left(c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2\right)\right]N_1 + \omega_0 f\left[c_1\cos(\delta_1) + \left(\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0\right)\sin(\delta_1)\right]}{2\omega_0\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2}} \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = -\dfrac{\left[c_1^2(1+\sigma) + \left(\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0\right)\left(\mathcal{D}N_1^2(1+\sigma) - \sigma\omega_0\right)\right]N_1}{2\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2}} \\ \qquad\qquad -\dfrac{f\left[\left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)\cos(\delta_1) + c_1\sin(\delta_1)\right]}{2\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2}} \end{cases} \tag{2.34}$$

La construction des matrices $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ nécessite la réécriture de l'équation (2.13) :

$$\omega_0 N e^{i(\delta - \delta_1)} + \left(c_1 + i\omega_0 - i\mathcal{D}N_1^2\right)N_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N} = -\omega_0\sin(\delta - \delta_1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta} = -\omega_0 N\cos(\delta - \delta_1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N} = \omega_0\cos(\delta - \delta_1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta} = -\omega_0 N\sin(\delta - \delta_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1} = c_1 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_1} = \omega_0 N\cos(\delta - \delta_1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1} = \omega_0 - 3\mathcal{D}N_1^2 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_1} = \omega_0 N\sin(\delta - \delta_1) \end{cases} \tag{2.35}$$

Injectant (2.13), (2.14) et (2.15), les matrices $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ s'écrivent :

$$\mathbf{S}_1 = -\omega_0 \begin{pmatrix} \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2}} & \dfrac{N_1}{\omega_0}\left(\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0\right) \\ \dfrac{\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2}{\sqrt{c_1^2 + \left(\omega_0 - \mathcal{D}N_1^2\right)^2}} & \dfrac{c_1 N_1}{\omega_0} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} c_1 & \left(\mathcal{D}N_1^2 - \omega_0\right) N_1 \\ \omega_0 - 3\mathcal{D}N_1^2 & c_1 N_1 \end{pmatrix}$$

Les points singuliers peuvent donc apparaître aux lieux annulant le déterminant suivant :

$$\det(\mathbf{S}_2) = N_1\left[c_1^2 + \omega_0^2 - 4\omega_0\mathcal{D}N_1^2 + 3\mathcal{D}^2N_1^4\right] = 4N_1\det(\mathbf{\Sigma}) \tag{2.37}$$

Ainsi, les extremums de l'invariant jouent à la fois le rôle de limite de stabilité et celui de points de bifurcation. Comme décrit ci-dessus, les points singuliers donnent lieu à des réponses fortement modulées s'apparentant à des oscillations de relaxation durant lesquelles le système opère de façon répétée des cycles d'évolution lente et de bifurcations autour d'une branche instable du SIM. Ce cycle est tracé schématiquement en figure 2.4. Ces réponses rendent compte d'intenses échanges

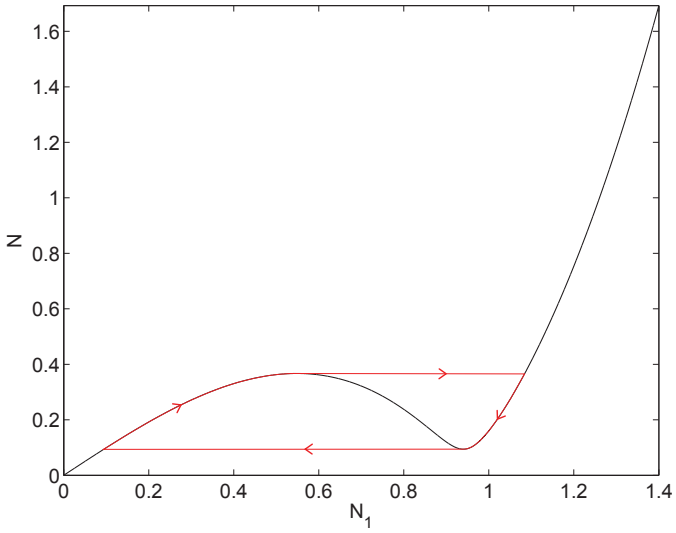


FIGURE 2.4 – $\omega_0 = 1$, $D = 1.5$ et $c_1 = 0.1$ – Représentation schématique du comportement du système lors d'une réponse de type SMR (ligne rouge) autour du SIM (ligne noire).

d'énergie entre la structure primaire et le NES (ou la chaîne d'oscillateurs), écrêtant la réponse du SP au niveau d'amplitude du maximum local du SIM. Elles sont donc très intéressantes pour contrôler les vibrations de la structure primaire.

2.5 Conclusions du chapitre

Une méthodologie de traitement des équations découlant d'un système composé d'une structure linéaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires est présentée dans ce chapitre. Cette démarche permet le design de la chaîne d'oscillateurs dans un but de contrôle passif. On souhaite donc décrire la dynamique globale du système afin d'étudier le transfert potentiel d'énergie du système principal vers la chaîne.
La première partie décrit le modèle étudié. La dynamique du système linéaire est projetée sur un de

ses modes normaux car la sollicitation extérieure a une fréquence proche d'une de ses fréquences de résonance. La chaîne est quant à elle supposée très légère devant la masse du système principal. Dans un second temps, les outils analytiques de traitement des équations sont présentés. Les variables complexes de Manevitch décrivant l'enveloppe d'oscillation de chacune des masses du système sont introduites. Une technique de Galerkin permet de tronquer les hautes harmoniques. Enfin, une méthode d'échelles multiples en temps est mise en place. Elle utilise comme petit paramètre le ratio de masses ϵ. Les troisième et quatrième partie sont dédiées à l'étude du comportement du système aux deux premières échelles de temps. À l'échelle de temps rapide, la variété invariante en échelle lente du système (SIM) est mise en évidence. Elle regroupe les comportements asymptotiques admissibles du système. Une étude de sa stabilité est menée. À l'échelle de temps lente, les points d'équilibre et points singuliers sont calculés. Ce sont des points du SIM prédisant respectivement les régimes périodiques et quasi-périodiques du système. Ces derniers sont appelés réponses fortement modulées et dépeignent des comportements particuliers durant lesquels la dynamique de l'ensemble suit un cycle répété de bifurcations autour d'une zone instable du SIM. Elles sont intéressantes en termes de contrôle passif dans la mesure où elles prennent place dans une région du SIM correspondant à des amplitudes du système principal faibles.
Cette méthodologie analytique permet une compréhension profonde des interactions entre structure linéaire et chaîne d'oscillateurs et peut mener à un design de la chaîne. Elle sera appliquée dans les chapitres 3 et 4 à deux exemples.

Chapitre 3

Application à un cas à deux degrés de liberté

Ce chapitre applique la méthodologie décrite dans le chapitre 2 à un système à deux degrés de liberté. Une structure linéaire est couplée à un oscillateur non linéaire léger présentant des forces de rappel de couplage cubiques. Les deux oscillateurs étant forcés, le SIM possède une structure tridimensionnelle, donnant lieu à des comportements dynamiques riches et variés. Le travail sur lequel s'appuie ce chapitre a fait l'objet d'une publication [Charlemagne et al.*, 2016b].*
Cet exemple permet de valider l'approche analytique du chapitre 2 avant d'aborder le problème de la chaîne d'oscillateurs. Les simulations numériques, confrontées aux résultats analytiques, confirment la capacité de la méthodologie à prédire et concevoir la dynamique du système. Une application à la détection de modifications des propriétés mécaniques de la structure principale est par ailleurs présentée.

Sommaire

3.1 Comportement à l'échelle de temps rapide 35
3.1.1 Calcul du SIM 35
3.1.2 Exemples de SIM 36
3.1.3 Calcul de la stabilité 36
3.2 Comportement à l'échelle de temps lente 38
3.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques 43
3.4 Utilisation d'un oscillateur non linéaire ajouté pour la détection 44
3.5 Conclusions du chapitre 46

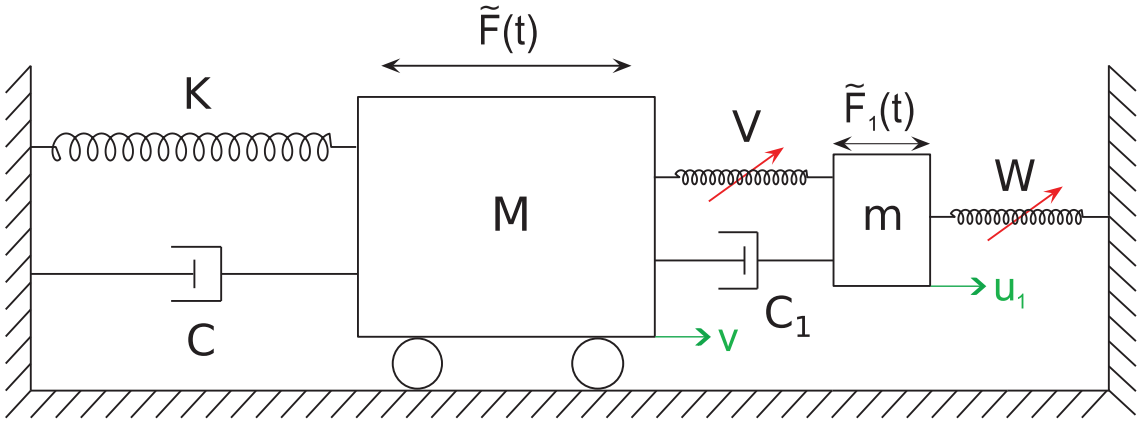


FIGURE 3.1 – Système à 2 degrés de liberté forcés composé d'une structure linéaire couplée à un oscillateur non linéaire ($\frac{m}{M} = \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$).

Le système étudié dans ce chapitre est décrit sur la figure 3.1. Un oscillateur linéaire de masse M, de raideur K et présentant un amortissement visqueux C est couplé à un oscillateur non linéaire de masse m. Le couplage entre les deux systèmes est assuré par un amortissement visqueux C_1 et une force de rappel cubique V. La force de rappel W est attachée à l'oscillateur ajouté. Elle est dite locale, en opposition à V rendant compte d'un potentiel dit global. Les deux structures sont soumises à des sollicitations externes $\tilde{F}(t)$ et $\tilde{F}_1(t)$, respectivement. Définissant le ratio de masses $\frac{m}{M} = \epsilon$, on introduit les paramètres suivants : $\frac{K}{M} = \omega_0^2$, $\frac{C}{M} = \epsilon c$, $\frac{V(u_1 - v)}{M} = \epsilon \left(B(u_1 - v) + D(u_1 - v)^3\right)$, $\frac{W(u_1)}{M} = \epsilon E u_1^3$, $\frac{C_1}{M} = \epsilon c_1$, $\frac{\tilde{F}}{M} = \epsilon F$ et $\frac{\tilde{F}_1}{M} = \epsilon F_1$.
Les équations gouvernant la dynamique de ce système sont :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c \dot{v} + \epsilon c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon B(v - u_1) + \epsilon D(v - u_1)^3 = \epsilon F \\ \\ \ddot{u}_1 + c_1(\dot{u}_1 - \dot{v}) + B(u_1 - v) + D(u_1 - v)^3 + E u_1^3 = F_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce système revêt la forme générale décrite par (2.1), où $P = 1$ et les fonctions h_0 et h_1 s'écrivent :

$$\begin{aligned} h_0(v,u_1,\dot{v},\dot{u}_1) &= c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + B(v - u_1) + D(v - u_1)^3 \\ h_1(u_1) &= E u_1^3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Rappelons que les sollicitations externes sont supposées sinusoïdales de pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1 + \sigma\epsilon}$ et d'amplitudes respectives f et f_1.
Introduisant le déplacement relatif $w_1 = u_1 - v$, puis les variables complexes de Manevitch $\psi = (\dot{v} + i\omega v)\, e^{-i\omega\tau_0}$ et $\varphi_1 = (\dot{w}_1 + i\omega w_1)\, e^{-i\omega\tau_0}$, le système (3.1) s'écrit après application d'une technique de Galerkin :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)\psi + \epsilon\dfrac{c}{2}\psi - \epsilon\left(\dfrac{c_1}{2} - \dfrac{iB}{2\omega_0} - \dfrac{3iD}{8\omega^3}|\varphi_1|^2\right)\varphi_1 = \dfrac{\epsilon f}{2i} \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \dfrac{i\omega}{2}\varphi_1 + \left(\dfrac{i\omega_0^2}{2\omega} - \epsilon\dfrac{c}{2}\right)\psi + (1+\epsilon)\left(\dfrac{c_1}{2} - \dfrac{iB}{2\omega_0} - \dfrac{3iD}{8\omega^3}|\varphi_1|^2\right)\varphi_1 \\ \qquad - \dfrac{3iE}{8\omega^3}|\psi + \varphi_1|^2(\psi + \varphi_1) = \dfrac{f_1 - \epsilon f}{2i} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.1 Comportement à l'échelle de temps rapide

3.1.1 Calcul du SIM

L'étude du comportement du système à l'échelle de temps rapide donne de nouveau $\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau_0} = 0$. De plus, le SIM s'écrit :

$$\frac{i\omega_0}{2}\psi + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{i\omega_0}{2} - \frac{iB}{2\omega_0}\right)\phi_1 - i\mathcal{D}|\phi_1|^2\phi_1 - i\mathcal{E}|\psi+\phi_1|^2(\psi+\phi_1) = -\frac{if_1}{2} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{D} = \dfrac{3D}{8\omega_0^3}$ et $\mathcal{E} = \dfrac{3E}{8\omega_0^3}$. L'équation (3.4) diffère notablement du SIM du cas cubique à 2 ddl du chapitre 2 à travers la présence du terme de forçage de l'oscillateur non linéaire. La résolution de cette équation passe par l'introduction d'une variable complexe intermédiaire $\chi = \phi + \psi = \rho e^{i\theta}$, menant à la redéfinition du SIM :

$$\frac{i\omega_0}{2}\chi + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{iB}{2\omega_0}\right)\phi_1 - i\mathcal{D}|\phi_1|^2\phi_1 - i\mathcal{E}|\chi|^2\chi = -\frac{if_1}{2} \tag{3.5}$$

Séparant (3.5) en parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} \rho\cos(\Theta) = \dfrac{\left(\dfrac{B}{\omega_0} + 2\mathcal{D}N_1^2\right)N_1 - f_1\cos(\delta_1)}{\omega_0 - 2\mathcal{E}\rho^2} \\ \\ \rho\sin(\Theta) = \dfrac{c_1N_1 + f_1\sin(\delta_1)}{\omega_0 - 2\mathcal{E}\rho^2} \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\Theta = \theta - \delta_1$. La somme des carrés de ces deux relations mène à l'équation suivante :

$$\rho^2\left(\omega_0 - 2\mathcal{E}\rho^2\right)^2 - \left[\left(\frac{B}{\omega_0} + 2\mathcal{D}N_1^2\right)N_1 - f_1\cos(\delta_1)\right]^2 - \left[c_1N_1 + f_1\sin(\delta_1)\right]^2 = 0 \tag{3.7}$$

Cette équation est un polynôme de degré 3 en ρ^2. La méthode de Cardan [Durand, 1971] définit un discriminant fonction de N_1 et δ_1 dont le signe donne le nombre de solution réelles. Il est possible de calculer à δ_1 fixé la valeur de N_1 au-delà de laquelle ce discriminant devient négatif. Nous l'appellerons $N_{1,max}(\delta_1)$. Il y a au plus 3 solutions, correspondant à 3 branches du SIM que l'on nommera sobrement branches 1, 2 et 3. Si le discriminant devient négatif, deux solutions deviennent complexes.

Si l'on compare le SIM obtenu avec celui du cas simple abordé dans le chapitre 2, deux différences fondamentales peuvent être identifiées. La première est liée à l'existence d'un potentiel local i.e., la force de rappel W, qui est à l'origine de la multiplicité des solutions à (N_1,δ_1) fixés. Il suffit pour s'en convaincre d'annuler $\mathcal{E}$ dans l'équation (3.7). Plus précisément, c'est la présence simultanée des potentiels locaux et globaux (W et V) qui génère cette multiplicité. En effet, si la non-linéarité de l'oscillateur est uniquement locale, il est possible d'étudier le système en gardant les variables physiques initiales, i.e. sans introduire le déplacement relatif, pour obtenir un SIM univoque en (N_1,δ_1). La deuxième différence tient à la présence du terme de forçage de la structure secondaire f_1. C'est lui qui engendre la dépendance de ρ en δ_1, et donc la nécessité de représenter le SIM dans un espace tridimensionnel (δ_1,N_1,N). Le cas $f_1 = 0$ a fait l'objet d'un article [Charlemagne *et al.*, 2016a] et ne sera pas traité ici.

La définition de χ et le système (3.6) sont utilisés pour remonter aux expressions de N et δ comme fonctions de N_1 et δ_1 :

$$\begin{cases} N = \sqrt{N_1^2 + \rho^2 - 2N_1\rho\cos(\Theta)} \\ \\ \delta = \delta_1 + \arctan\left(\dfrac{\rho\sin(\Theta)}{\rho\cos(\Theta) - N_1}\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

On pourra aussi utiliser dans des développements ultérieurs :

$$\begin{cases} N\cos(\Delta) = \rho\cos(\Theta) - N_1 \\ N\sin(\Delta) = \rho\sin(\Theta) \end{cases} \tag{3.9}$$

où $\Delta = \delta - \delta_1$.

3.1.2 Exemples de SIM

Dans cette partie, des exemples de SIM sont tracés pour différents jeux de paramètres afin de mettre en lumière de façon non exhaustive la variété des géométries possibles. Au vu de la périodicité des équations, ils seront représentés pour des valeurs de δ_1 allant de $-\pi$ à π.
Pour le premier exemple, les paramètres suivants sont utilisés : $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$. La vue tridimensionnelle du SIM est représentée sur la figure 3.2(a). On distingue en parcourant l'axe N dans l'ordre croissant les branches 1, 2 et 3. À δ_1 fixé, les trois branches existent lorsque $N_1 < N_{1,max}(\delta_1)$. Au-delà, seule la branche 3, i.e. la branche supérieure, est admissible. Des sections du SIM à $\delta_1 = -0.2$ et $\delta_1 = \pi$ sont représentées sur les figures 3.2(b)-(c). On remarque qu'à cause du forçage de l'oscillateur non linéaire, les points $N_1 = N = 0$ ne sont pas admissibles à l'état asymptotique. De plus, le lieu des extremums locaux des branches varie en fonction de la phase δ_1. Augmenter la valeur de l'amortissement c_1 et de la partie linéaire du couplage B a tendance à régulariser la géométrie du SIM et à supprimer certains de ces extremums, comme le montrent les figures 3.3(a)-(b) où $c_1 = 0.6$ et $B = 0.36$.
Dans le deuxième exemple, les valeurs des paramètres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont modifiées. Si la géométrie de la branche 3 reste sensiblement similaire, ce n'est pas le cas des deux premières qui forment désormais une boucle.
Pour les troisième et quatrième exemples (se référer aux figures 3.5 et 3.6), le niveau de forçage de l'oscillateur non linéaire est augmenté : $f_1 = 0.5$. Les branches 1 et 2 n'intersectent plus le plan $N_1 = 0$. Cela se vérifie grâce à l'équation (3.7), dans laquelle on impose $N_1 = 0$. La relation suivante en découle :

$$\rho^2(\omega_0 - 2\mathcal{E}\rho^2)^2 - f_1^2 = 0 \tag{3.10}$$

Ce polynôme de degré 3 en ρ^2 possède un discriminant négatif dès lors que $f_1 > \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2\omega_0^3}{3\mathcal{E}}}$, ce qui est le cas dans ces deux exemples.
Ces différentes géométries de SIM laissent présager une dynamique riche, et notamment une certaine diversité et complexité de cycles de SMR en comparaison de celui représenté schématiquement sur la figure 2.4. L'étude de stabilité du SIM devrait donner de nouveaux indices quant aux possibles bifurcations que le système pourrait subir.

3.1.3 Calcul de la stabilité

La matrice $\mathbf{\Sigma}$ dont la définition est donnée dans le chapitre 2 s'écrit ici :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} -\dfrac{c_1}{2} - \dfrac{iC}{2} + 2i\mathcal{D}N_1^2 + 2i\mathcal{E}\rho^2 & i\mathcal{D}\phi^2 + i\mathcal{E}\chi^2 \\ -i\mathcal{D}\phi^{*2} - i\mathcal{E}\chi^{*2} & -\dfrac{c_1}{2} + \dfrac{iC}{2} - 2i\mathcal{D}N_1^2 - 2i\mathcal{E}\rho^2 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

où $C = \omega_0 - \dfrac{B}{\omega_0}$. Les points où son déterminant s'annulent correspondent aux limites de stabilité :

$$\det(\mathbf{\Sigma}) = \frac{c_1^2}{4} + \left[-\frac{C}{2} + 2\mathcal{D}N_1^2 + 2\mathcal{E}\rho^2\right]^2 - \left[\mathcal{D}^2N_1^4 + \mathcal{E}^2\rho^4 + 2\mathcal{D}\mathcal{E}N_1^2\rho^2\left(2\cos^2(\Theta) - 1\right)\right] \tag{3.12}$$

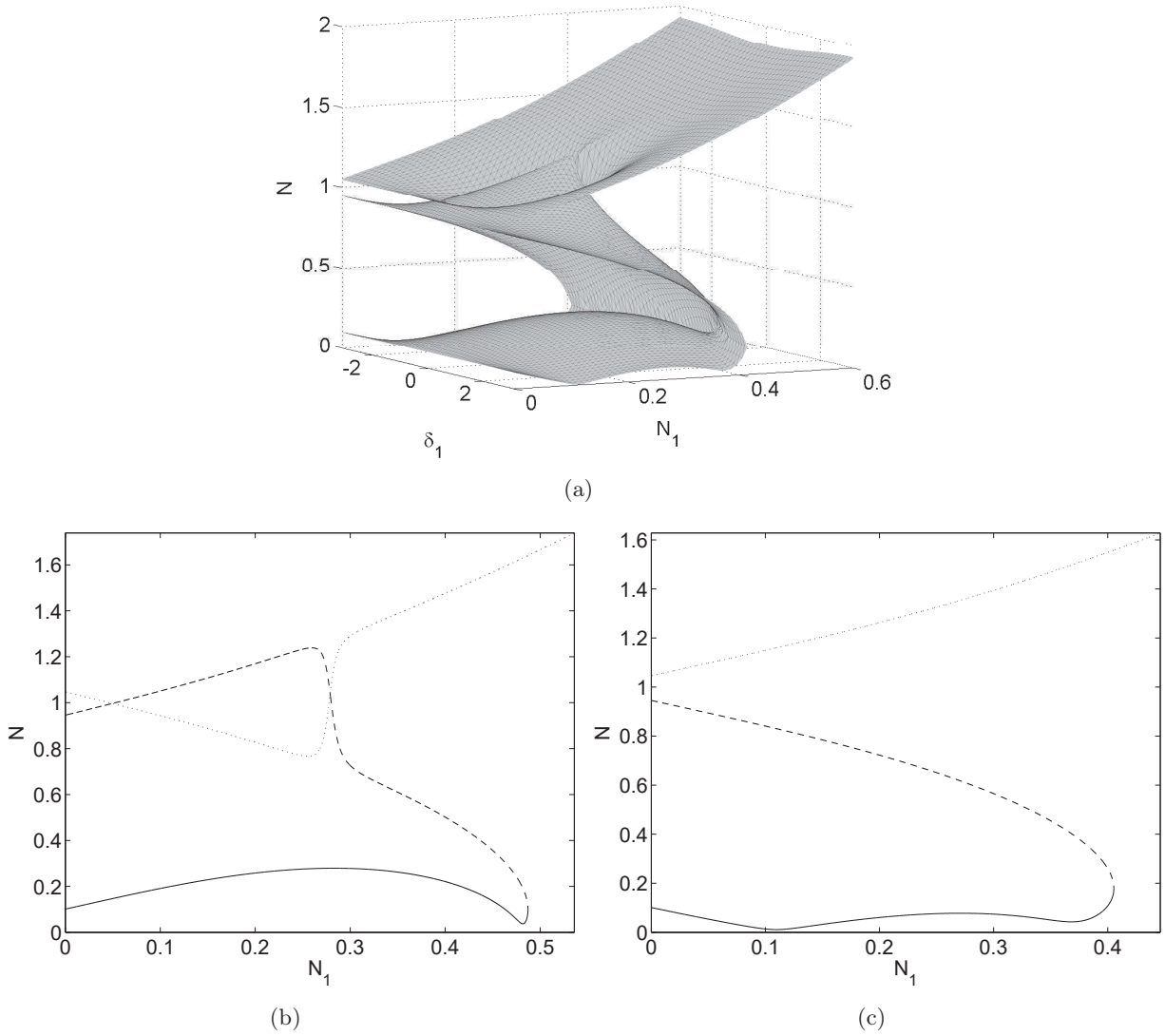
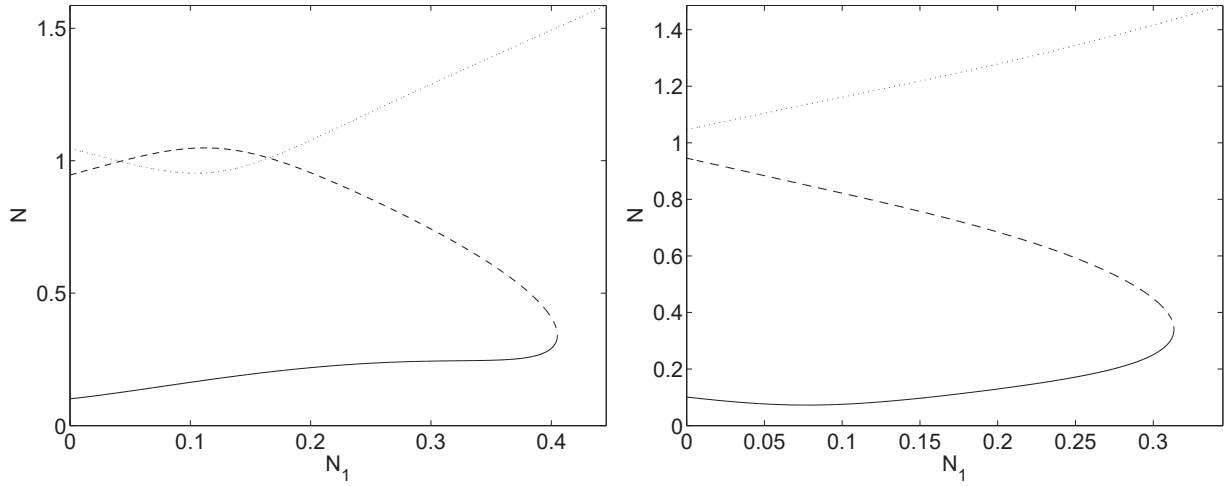


FIGURE 3.2 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$ (c) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée.

Cette expression peut être ramenée à une fonction de N_1 et δ_1 grâce aux relations (3.6) et (3.7). Les zones d'instabilité du SIM des exemples exhibés dans la section précédente sont tracées en noir sur les figures 3.7-3.10. La branche 3 ne possèdant aucune zone instable pour ces quatre systèmes, elle n'est pas représentée. Sur les branches 1 et 2, les limites de stabilité sont fonctions de N_1 et δ_1, mais ne coïncident pas nécessairement avec des extremums locaux. La disposition générale des zones instables, notamment dans les cas où plusieurs zones disjointes coexistent, laissent supposer que plusieurs types de cycles de SMR pourraient être observés pour un même SIM.
L'étude de la dynamique à l'échelle de temps rapide τ_0 du comportement du système permet d'escompter une dynamique très riche à l'échelle de temps lente, notamment en termes de cycles de SMR.



(a) (b)

FIGURE 3.3 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.6$, $B = 0.36$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$ (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée.

3.2 Comportement à l'échelle de temps lente

La première équation du système (3.3) dérivée à l'ordre ϵ^1 devient :

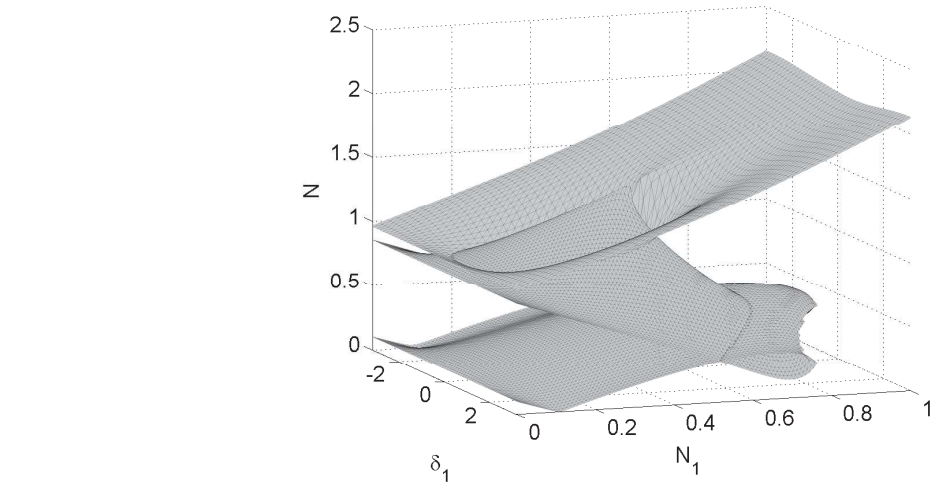
$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\left(c + i\sigma\omega_0\right)\psi - \left(\frac{c_1}{2} - \frac{iB}{2\omega_0} - i\mathcal{D}N_1^2\right)\phi_1 = -\frac{if}{2} \tag{3.13}$$

On injecte les relations (3.8) et (3.9) après avoir séparé (3.13) en parties réelle et imaginaire :

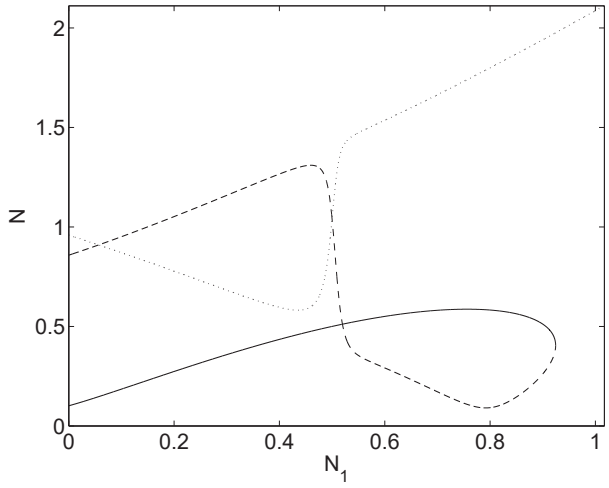
$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = -\dfrac{c}{2}\sqrt{N_1^2 + \rho^2 - 2N_1\rho\cos(\Theta)} + \\ \qquad \dfrac{1}{\sqrt{N_1^2 + \rho^2 - 2N_1\rho\cos(\Theta)}}\left[\dfrac{1}{2}\left(\rho\cos(\Theta) - N_1\right)\left(c_1 N_1 - f\sin(\delta_1)\right) - \right. \\ \qquad \left. \rho\sin(\Theta)\left(\left(\dfrac{B}{2\omega_0} + \mathcal{D}N_1^2\right)N_1 + \dfrac{f}{2}\cos(\delta_1)\right)\right] \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = -\dfrac{\sigma\omega_0}{2} + \dfrac{1}{N_1^2 + \rho^2 - 2N_1\rho\cos(\Theta)}\left[\dfrac{1}{2}\rho\sin(\Theta)\left(c_1 N_1 + f\sin(\delta_1)\right) - \right. \\ \qquad \left. \left(\rho\cos(\Theta) - N_1\right)\left(\left(\dfrac{B}{2\omega_0} + \mathcal{D}N_1^2\right)N_1 + f\cos(\delta_1)\right)\right] \end{cases} \tag{3.14}$$

Ce système peut se mettre sous la forme générale de l'équation (2.23) en utilisant (3.6) :

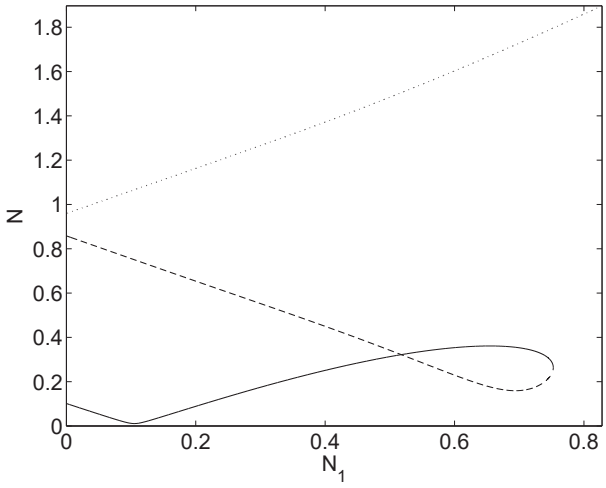
$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial \tau_1} = F_1(N_1, \delta_1) \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial \tau_1} = F_2(N_1, \delta_1) \end{cases} \tag{3.15}$$



(a)



(b)

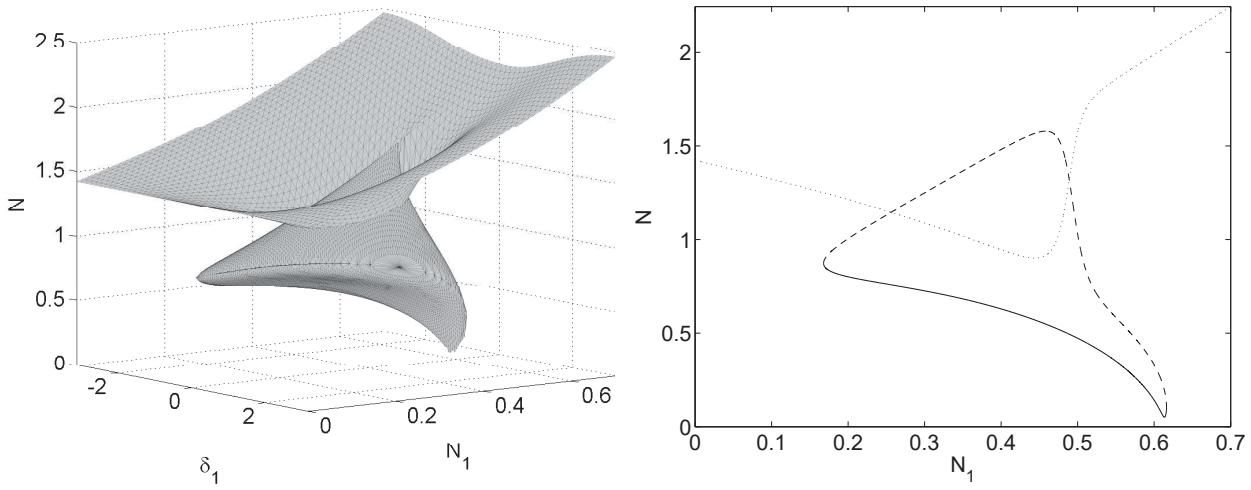


(c)

FIGURE 3.4 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.6$ (c) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée.

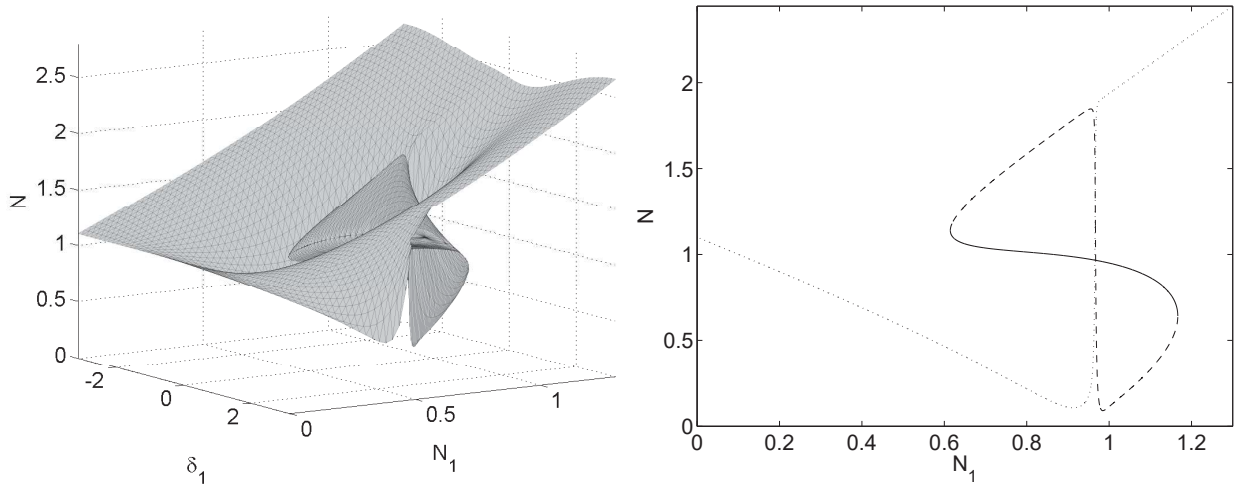
On sépare ensuite l'équation du SIM (3.4) en parties réelle et imaginaire afin de construire les matrices $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{1,r} = \dfrac{c_1}{2}N_1\cos(\delta_1) - \dfrac{C}{2}N_1\sin(\delta_1) - \dfrac{\omega_0}{2}N\sin(\delta) + \mathcal{A}N_1^3\sin(\delta_1) + \\ B(N^2 + N_1^2 + 2NN_1\cos(\delta - \delta_1))(N\sin(\delta) + N_1\sin(\delta_1)) = 0 \\ \\ \mathcal{H}_{1,i} = \dfrac{c_1}{2}N_1\sin(\delta_1) + \dfrac{C}{2}N_1\cos(\delta_1) + \dfrac{\omega_0}{2}N\cos(\delta) - \mathcal{A}N_1^3\cos(\delta_1) - \\ B(N^2 + N_1^2 + 2NN_1\cos(\delta - \delta_1))(N\cos(\delta) + N_1\cos(\delta_1)) + \dfrac{f_1}{2} = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$



(a) (b)

FIGURE 3.5 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$ et $f_1 = 0.5$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée.



(a) (b)

FIGURE 3.6 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.5$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée.

Cela nous permet d'obtenir un système de la forme cherchée (cf équation (2.27)) :

$$\det(\mathbf{S}_2)\mathbf{Id}_2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = \underbrace{- \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} \tag{3.17}$$

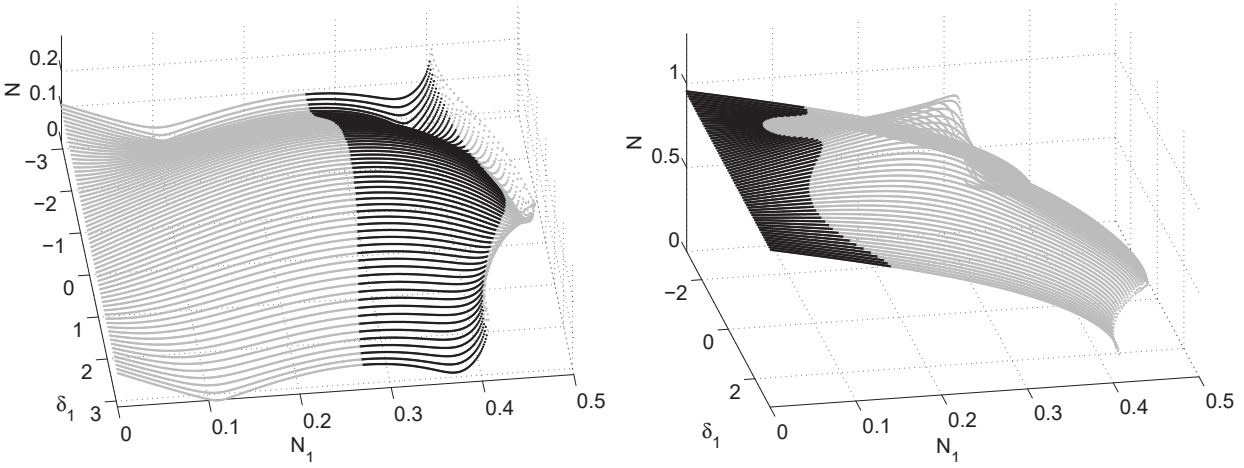


FIGURE 3.7 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM.

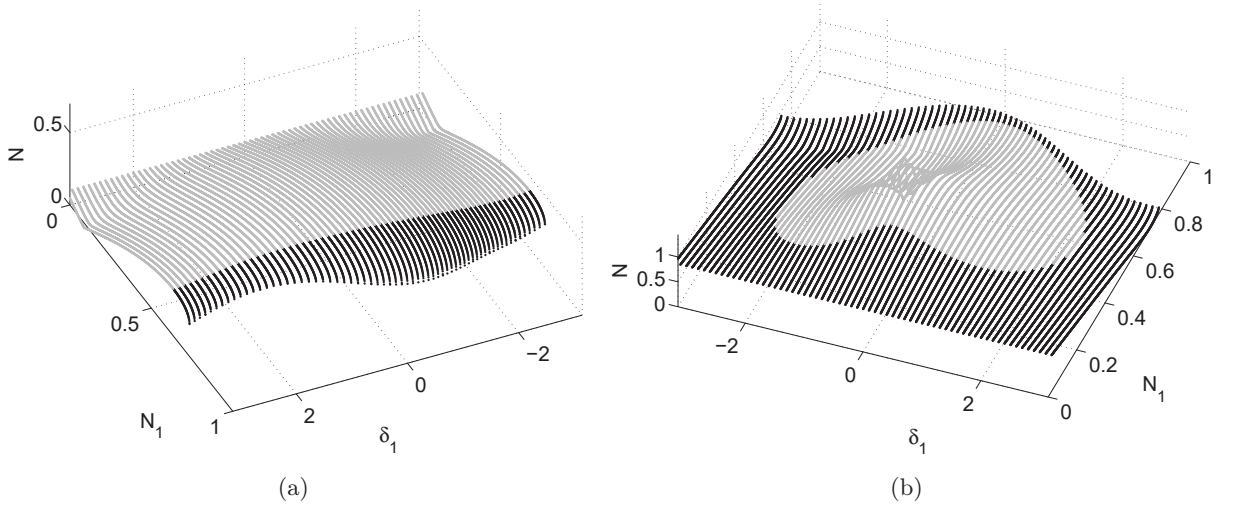


FIGURE 3.8 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.1$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM.

où

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{11} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N} - \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N} \\
\mathcal{S}_{12} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta} - \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta} \\
\mathcal{S}_{21} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N} - \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N} \\
\mathcal{S}_{22} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta} - \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1}\frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

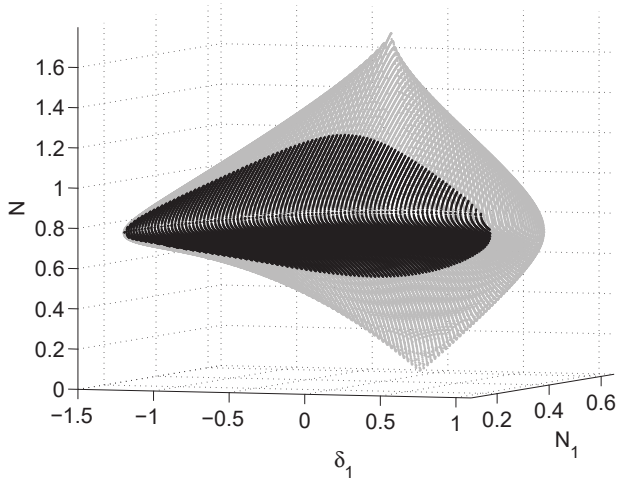
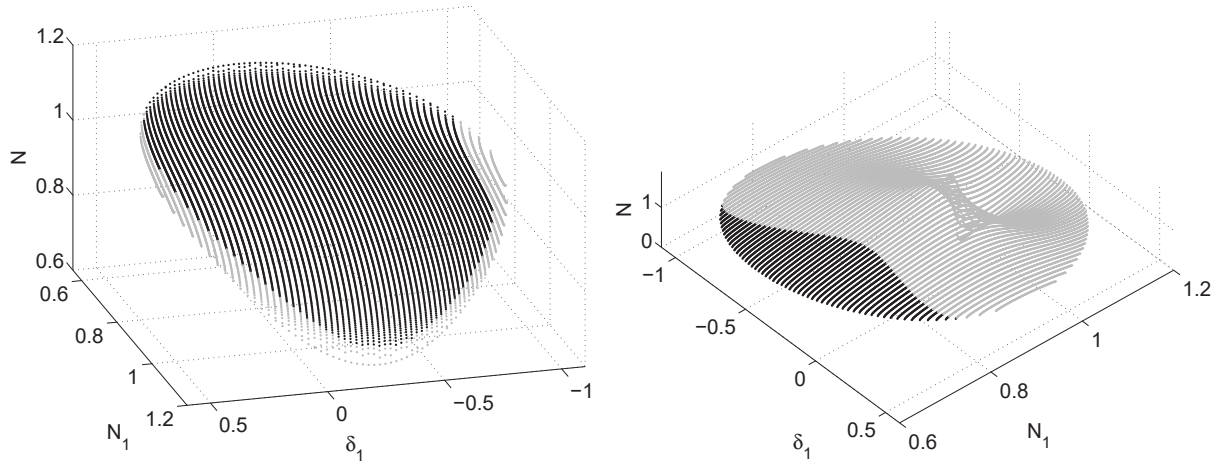


FIGURE 3.9 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$ et $f_1 = 0.5$ – Zones instables du SIM représentées en noir. Seules les branches 1 et 2 du SIM sont tracées.



(a) (b)

FIGURE 3.10 – $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.5$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM.

Le déterminant de $\mathbf{S}_2$ se simplifie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{S}_2) \quad = \quad & \frac{N_1}{4}\left\{c_1^2 + C^2 - 8C(\mathcal{D}N_1^2 + \mathcal{E}\rho^2) + 4\left[3\mathcal{D}^2 N_1^4 + \right.\right. \\ & \left.\left. 2\mathcal{D}\mathcal{E}N_1^2((5 - 2\cos^2(\Delta))N^2 + 6NN_1\cos(\Delta) + 3N_1^2) + 3\mathcal{E}^2\rho^4\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ce qui se réécrit en utilisant (3.9) :

$$\det(\mathbf{S}_2) = N_1 \det(\mathbf{\Sigma}) \tag{3.20}$$

Les limites de stabilité coïncident donc avec les lieux où les points singuliers peuvent apparaître.

3.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques

Dans cette section, les prédictions analytiques issues des sections 3.1 et 3.2 sont confrontées à des résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1). Ces simulations sont réalisées à l'aide de la fonction *ode45* de Matlab, c'est-à-dire une méthode de Runge-Kutta, avec les options suivantes : pas de temps de 0.01 et $RelTol = AbsTol = NormControl = 10^{-12}$. Les deux oscillateurs sont supposés être initialement au repos, i.e. $v(0) = u_1(0) = \dot{v}(0) = \dot{u}_1(0) = 0$. L'intervalle de temps s'étend sur une durée de $t = 10^5$. Le ratio de masses entre oscillateur non linéaire et système principal est fixé à $\epsilon = 0.001$.
Considérons dans un premier temps le jeu de paramètres suivant : $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.3$ et $\sigma = 2$. Les lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\det(\mathbf{S}_2)$ sont tracés sur la figure 3.11. Chacune des trois sous-figures correspond à une branche du SIM. Les points d'équilibre correspondent à l'intersection des courbes $\mathcal{F}_1 = 0$ et $\mathcal{F}_2 = 0$ et les points singuliers à l'intersection des trois courbes. Le système possède un point d'équilibre et deux points singuliers sur la branche 1 du SIM. Les deux points représentés en gris sur les figures des branches 2 et 3 du SIM sont des points où $\mathbf{S}_1 = 0$. Comme expliqué dans le chapitre 2, ce ne sont pas des points d'équilibre. Bien que présents dans tous les autres exemples de cette section, ils ne seront désormais plus tracés. On remarque par ailleurs que le long des courbes $\det(\mathbf{S}_2) = 0$, il arrive qu'une seule des deux fonctions $\mathcal{F}_j$ s'annule. Les deux équations $\mathcal{F}_1 = 0$ et $\mathcal{F}_2 = 0$ sont pourtant censées être équivalentes lorsque $\det(\mathbf{S}_2) = 0$. Cela est dû au fait qu'en ces points une des colonnes de $\mathbf{S}_2$ est nulle, ce qui correspond au cas décrit dans le chapitre 2 où une ligne de $\mathrm{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1$ est identiquement nulle.
Le système devrait ici être attiré par le point d'équilibre ou subir une réponse de type SMR autour de la zone instable de la branche 1. La figure 3.12 montre que les deux oscillateur atteignent rapidement un régime périodique dont les amplitudes sont précisément prédites par le point d'équilibre (ligne rouge discontinue).
La figure 3.13 montre qu'en changeant les paramètres de forçage du SP en $f = 0.25$ et $\sigma = 1$, les autres paramètres étant non modifiés, le système possède une fois de plus un point d'équilibre et deux points singuliers sur la branche 1. Cependant, le point d'équilibre est désormais instable. Le système devrait donc suivre une réponse non périodique de type SMR. La figure 3.14 le confirme. Les évolutions temporelles des variables N_1 et δ_1 montrent des périodes d'évolution lentes entrecoupées de bifurcations. Le cycle décrit autour du SIM est dépeint sur la figure 3.15 : depuis le point A, le comportement du système évolue sur la branche 1 et bifurque sur la branche 2 depuis le point B vers le point C. Il descend ensuite en direction du point D pour finalement sauter vers le point A.
Les figures 3.16-3.18 dépeignent un comportement plus complexe. Les nouveaux paramètres sont les suivants : $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$. Le système présente deux points singuliers sur la branche 1 ainsi que quatre points singuliers et un point d'équilibre sur la branche 2. La réponse numérique est de nouveau quasi-périodique. Toutefois, le cycle de SMR (décrit par les points ABCDEF sur la figure 3.18) s'articule cette fois-ci autour des zones instables des deux premières branches du SIM. Les bifurcations $B \to C$ et $F \to A$ ont lieu entre branches 1 et 2, alors que le saut $D \to E$ s'opère entre deux points de la deuxième branche. Un cycle différent peut par ailleurs prendre place sur le même SIM, comme le montre la figure 3.19. L'amplitude de sollicitation du SP a été augmentée à $f = 1.8$. La réponse quasi-périodique suit alors un cycle évoluant uniquement autour de la branche 2.
Pour le dernier exemple, l'amplitude de forçage de l'oscillateur non linéaire est amplifiée : $f_1 = 0.5$. Les autres paramètres sont $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$, $f = 0.65$ et $\sigma = 2$. Le système subit une réponse de type SMR sur la première branche du SIM (se référer aux figures 3.20 et 3.21).
Ces différents exemples numériques prouvent la robustesse de la méthode analytique et sa capacité à prédire la dynamique du système. Les simulations numériques ont permis de mettre en lumière des

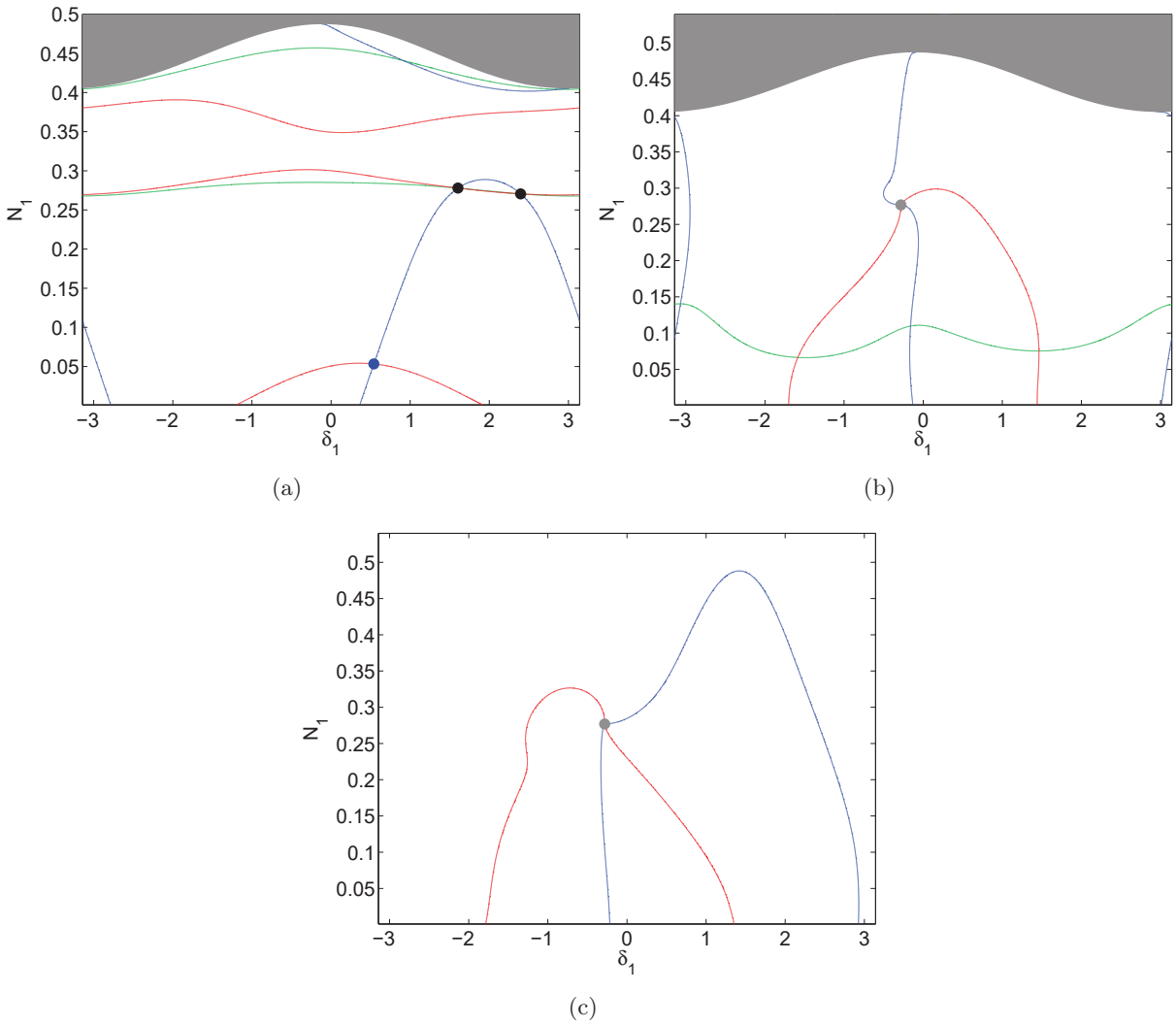


FIGURE 3.11 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.3$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et det($\mathbf{S}_2$) (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre stable (point bleu) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1. Les points gris sont des artefacts de calcul.

comportements divers, parfois complexes, décrivant des scénarios d'échanges d'énergie entre système principal et oscillateur non linéaire. Cette méthodologie apparaît donc comme un outil intéressant pour concevoir des absorbeurs non linéaires. Il est néanmoins possible d'envisager des applications différentes, notamment en termes de détection, ce à quoi la section suivante s'intéresse.

3.4 Utilisation d'un oscillateur non linéaire ajouté pour la détection

L'oscillateur ajouté peut être utilisé dans le but de détecter une modification des caractéristiques mécaniques du SP via un changement brusque de comportement pour une sollicitation donnée. On cherche ici à l'utiliser pour ausculter le système linéaire sans solliciter ce dernier. En effet, si le SP est une structure imposante (un bâtiment par exemple), il peut être plus commode d'exciter l'oscillateur non linéaire, beaucoup plus léger et donc a priori plus petit et accessible. Nous supposerons donc que $f = 0$. De plus, nous ferons l'hypothèse que le SP s'assouplit, à cause d'un endommagement ou du vieillissement de la structure par exemple. Nous allons chercher à détecter une diminution

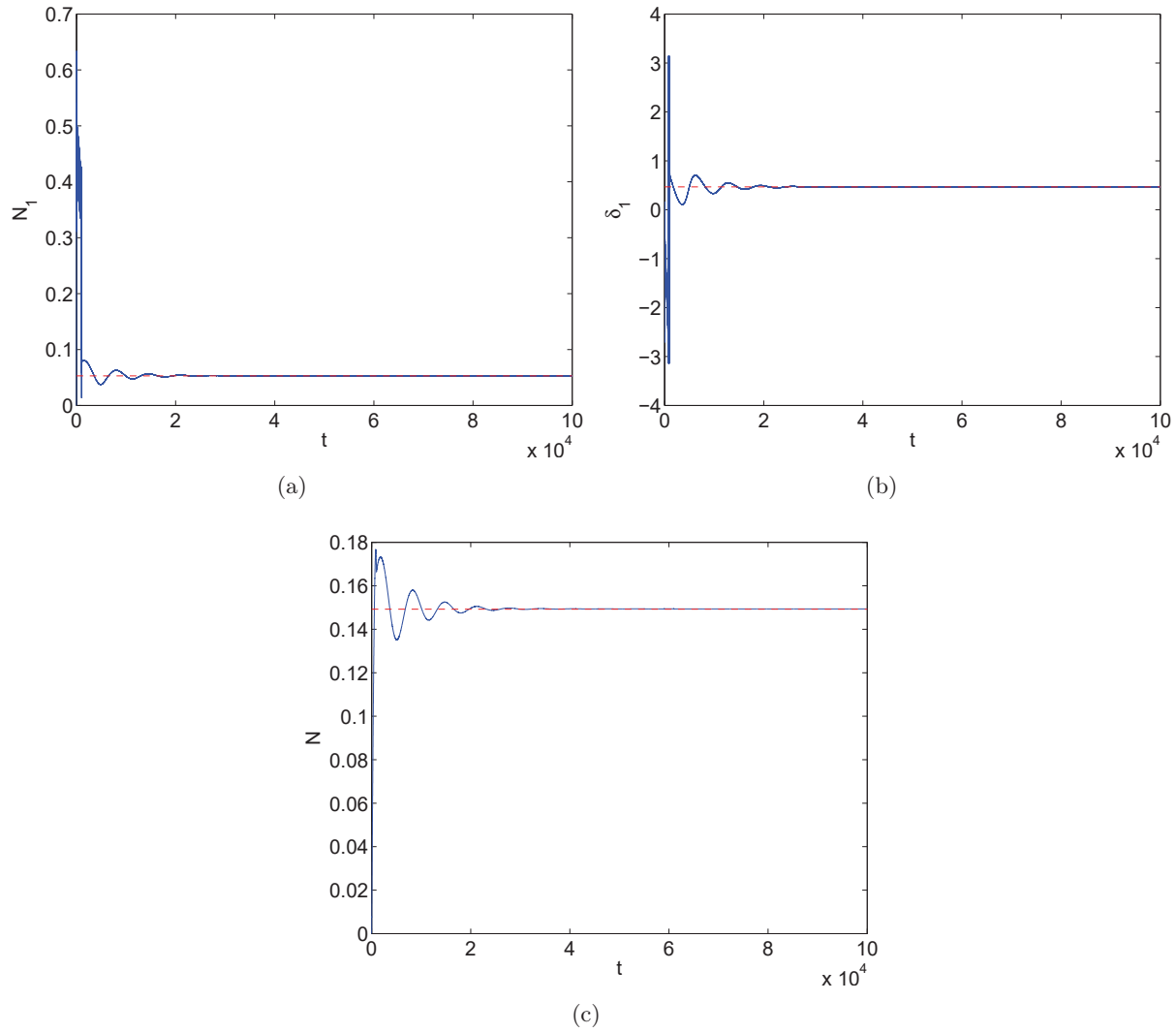


FIGURE 3.12 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.3$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps. Les lignes discontinues rouges représentent les amplitudes prédites par le point d'équilibre du système.

du paramètre ω_0 en sollicitant uniquement l'oscillateur ajouté à une fréquence et une amplitude définie.

Dans cet exemple, nous utiliserons les paramètres suivants : $\epsilon = 0.01$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.2$, $B = 0.04$, $D = 5.33$, $E = 1.33$, $f_1 = 0.2$ et $f = 0$. Le paramètre de désaccordage varie avec ω_0 selon la relation $\sigma = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{\epsilon\omega_0^2}$, où la fréquence de sollicitation est constante et vaut $\omega = 1.0025$. La structure non endommagée possède une pulsation propre $\omega_0 = 1$. Sur la figure 3.22(a) sont tracées les amplitudes N_1 des points d'équilibre du système pour $\omega_0 \in [0.98\ 1.001]$. Ils sont tous situés sur la branche 1 du SIM, et deviennent instables dès lors que $0.991 < \omega_0 < 0.9996$. Les figures 3.22(d) et (e) montrent la réponse numérique du système pour $\omega_0 = 0.999$ et $\omega_0 = 1$, respectivement. La structure linéaire à $\omega_0 = 1$ présente une réponse périodique, alors que la structure endommagée subit une réponse de type SMR. En effet, à $\omega = 0.999$, le système ne possède qu'un point d'équilibre instable (cf figure 3.22(b)). Ce sont donc les points singuliers qui pilotent la dynamique de l'ensemble. Notons que même lorsque les points d'équilibre redeviennent stables, i.e. pour $\omega_0 < 0.991$, la condition initiale nulle mène tout de même à une réponse de type SMR. Ce changement abrupt de comportement

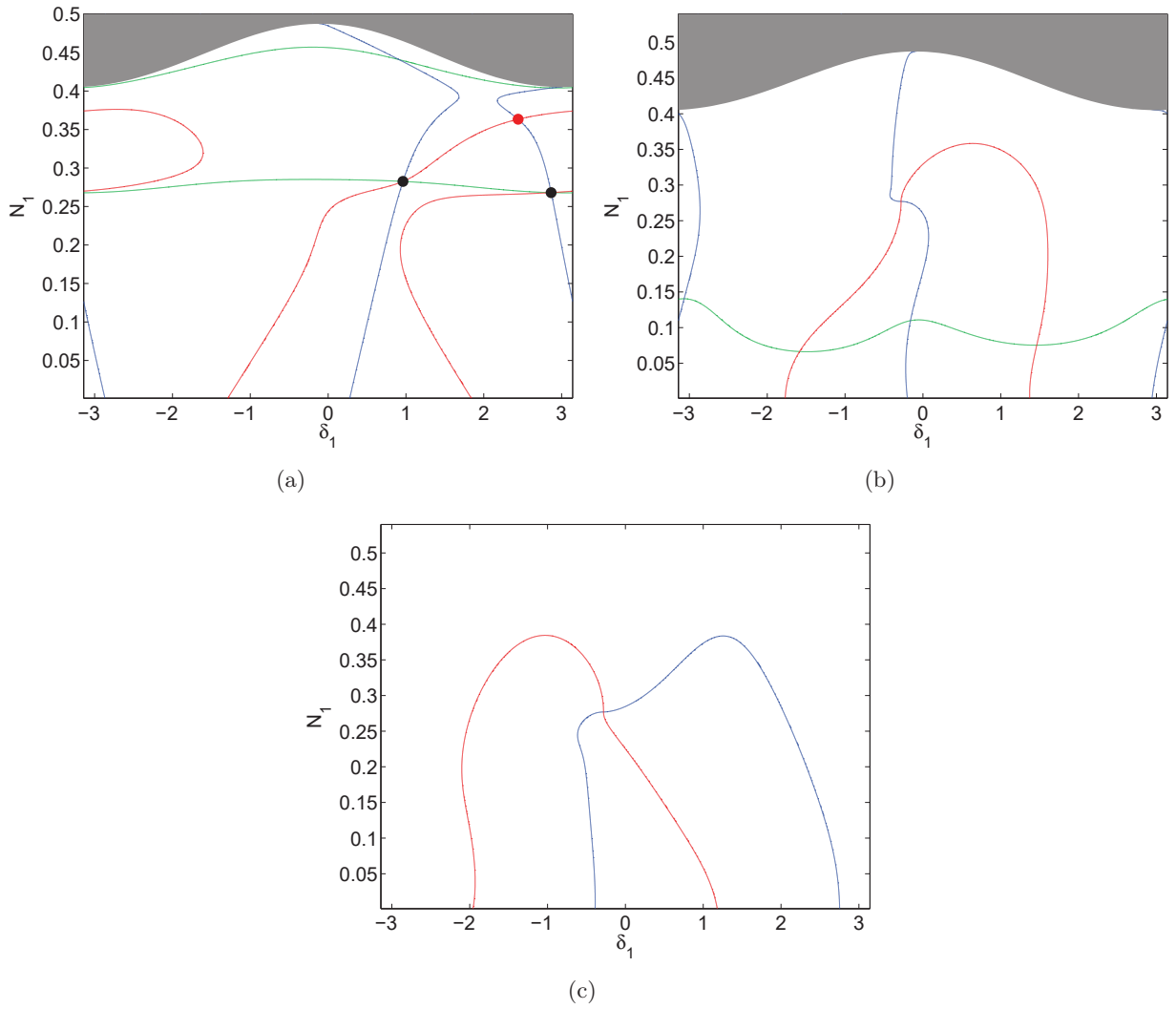


FIGURE 3.13 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et det($\mathbf{S}_2$) (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1.

permet la détection de la diminution de la pulsation propre du SP. On utilise donc la non-linéarité d'un système ajouté pour générer un changement radical de dynamique lors d'une modification légère des caractéristiques mécaniques du système principal.

3.5 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, la méthodologie analytique développée dans le chapitre 2 est utilisée pour traiter un système à deux degrés de liberté composé d'une structure linéaire couplée à un oscillateur non linéaire. Les deux systèmes sont forcés à la même fréquence.
L'étude au premier ordre en ϵ définit le SIM, dont la forme est affectée par deux particularités. La présence simultanée de potentiels local et global sur l'oscillateur ajouté confère au SIM une structure à trois branches. Par ailleurs, la sollicitation externe de l'oscillateur non linéaire engendre une géométrie du SIM tridimensionnelle. Ces deux caractéristiques, couplées à l'étude des limites de stabilité, laissent présager une dynamique riche. À l'échelle de temps lente, les points d'équilibre et singuliers sont détectés. Les résultats numériques tirés de l'intégration temporelle du système

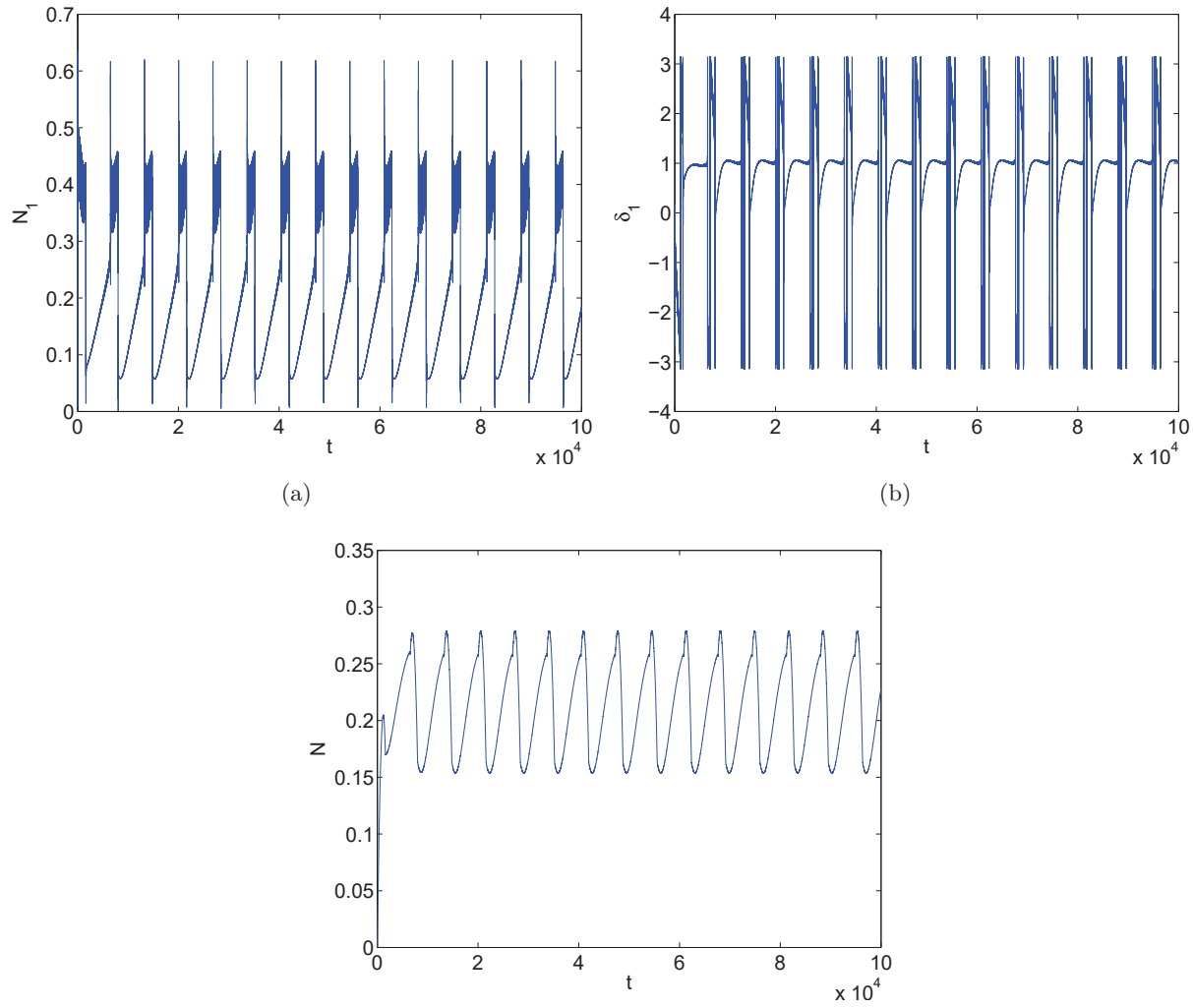


FIGURE 3.14 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps.

d'équations initial mettent en lumière des comportements complexes et variés, notamment s'agissant des réponses de type SMR. Leur confrontation avec les prédictions analytiques confirment par ailleurs la propension de la méthode utilisée à prédire correctement les comportements dynamiques du système. Enfin, un exemple d'application montre qu'il est possible d'utiliser un oscillateur non linéaire forcé pour détecter des modifications des caractéristiques mécaniques du système principal. La méthode analytique ayant été validée dans ce chapitre, nous pouvons maintenant l'appliquer à l'étude d'un système principal couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires.

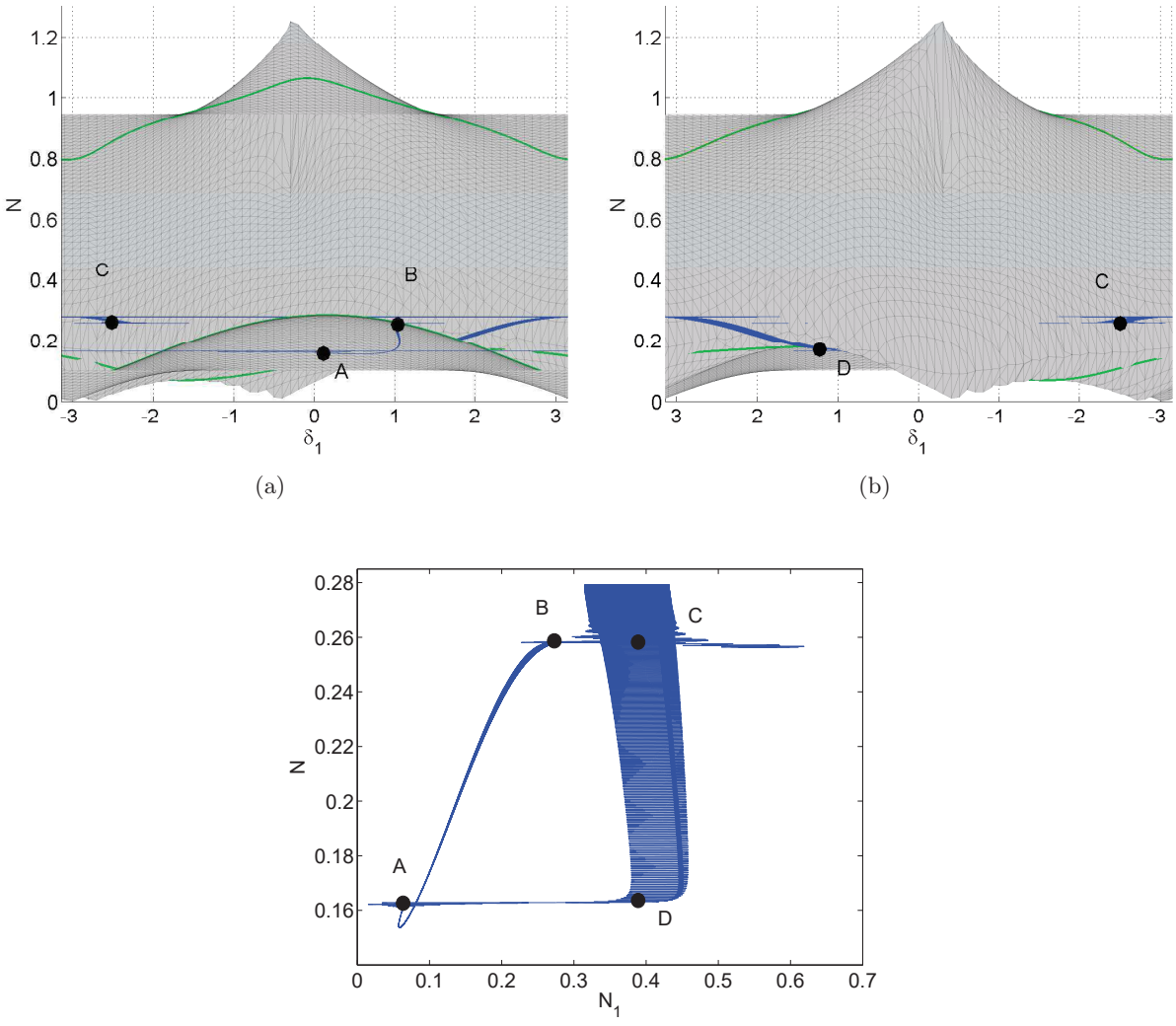


FIGURE 3.15 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in [44000,53000]$) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to A$ (a) Vue depuis le plan $N_1 = 0$ (b) Vue depuis le plan $N_1 = 1$ (c) Résultats numériques dans le plan (N_1,N).

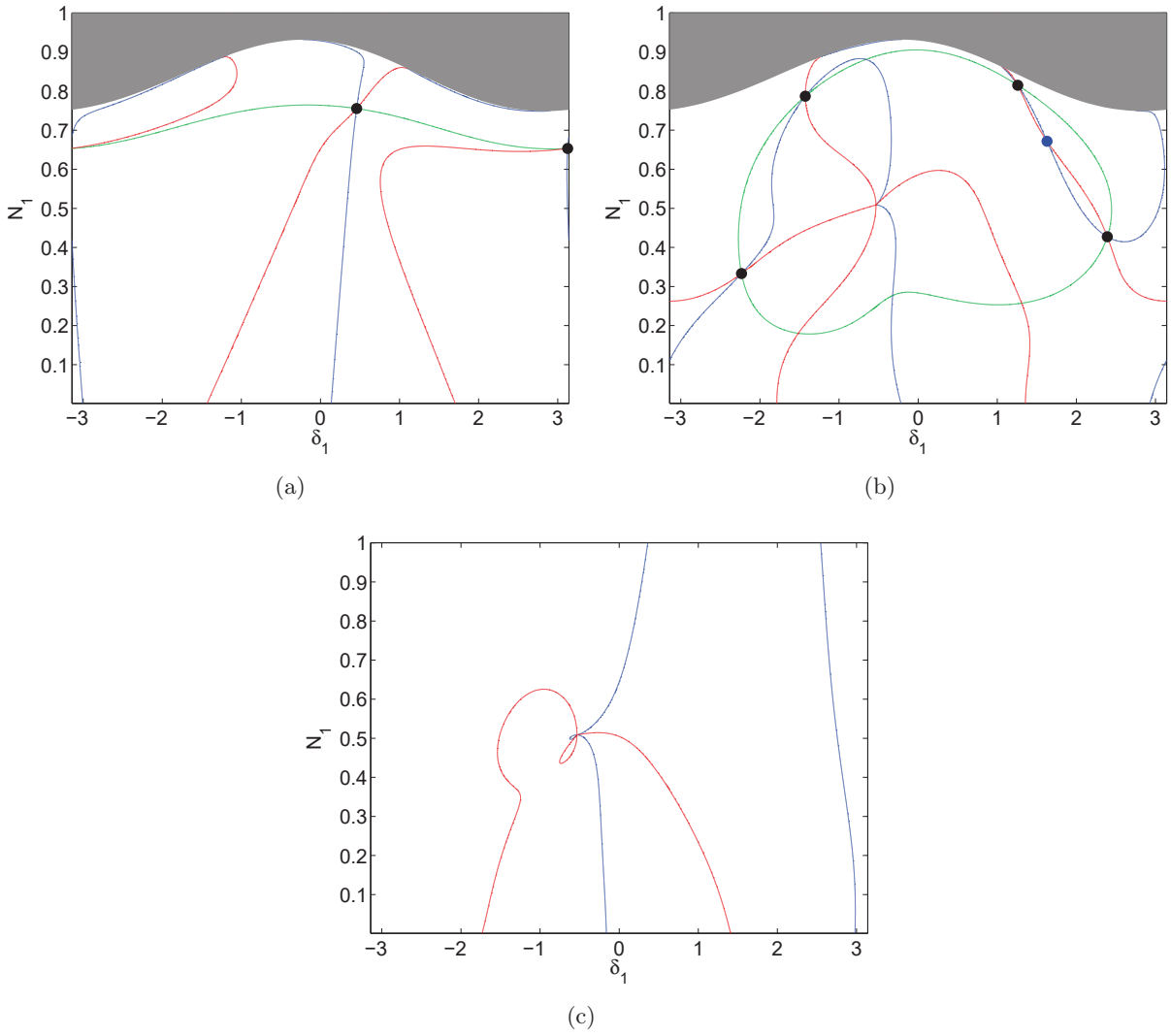


FIGURE 3.16 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1, ainsi qu'un point d'équilibre stable (point bleu) et quatre points singuliers sur la branche 2.

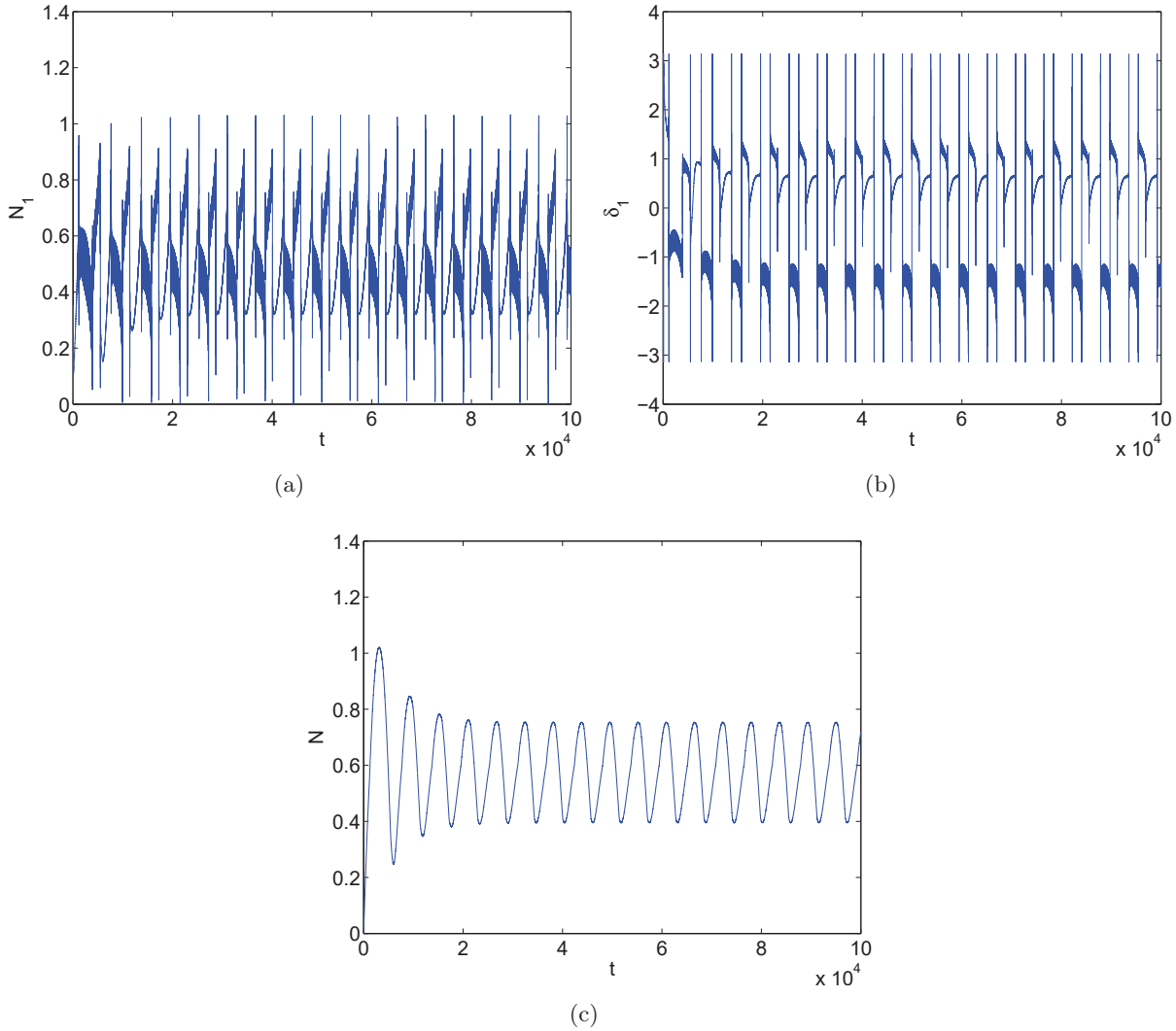


FIGURE 3.17 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps.

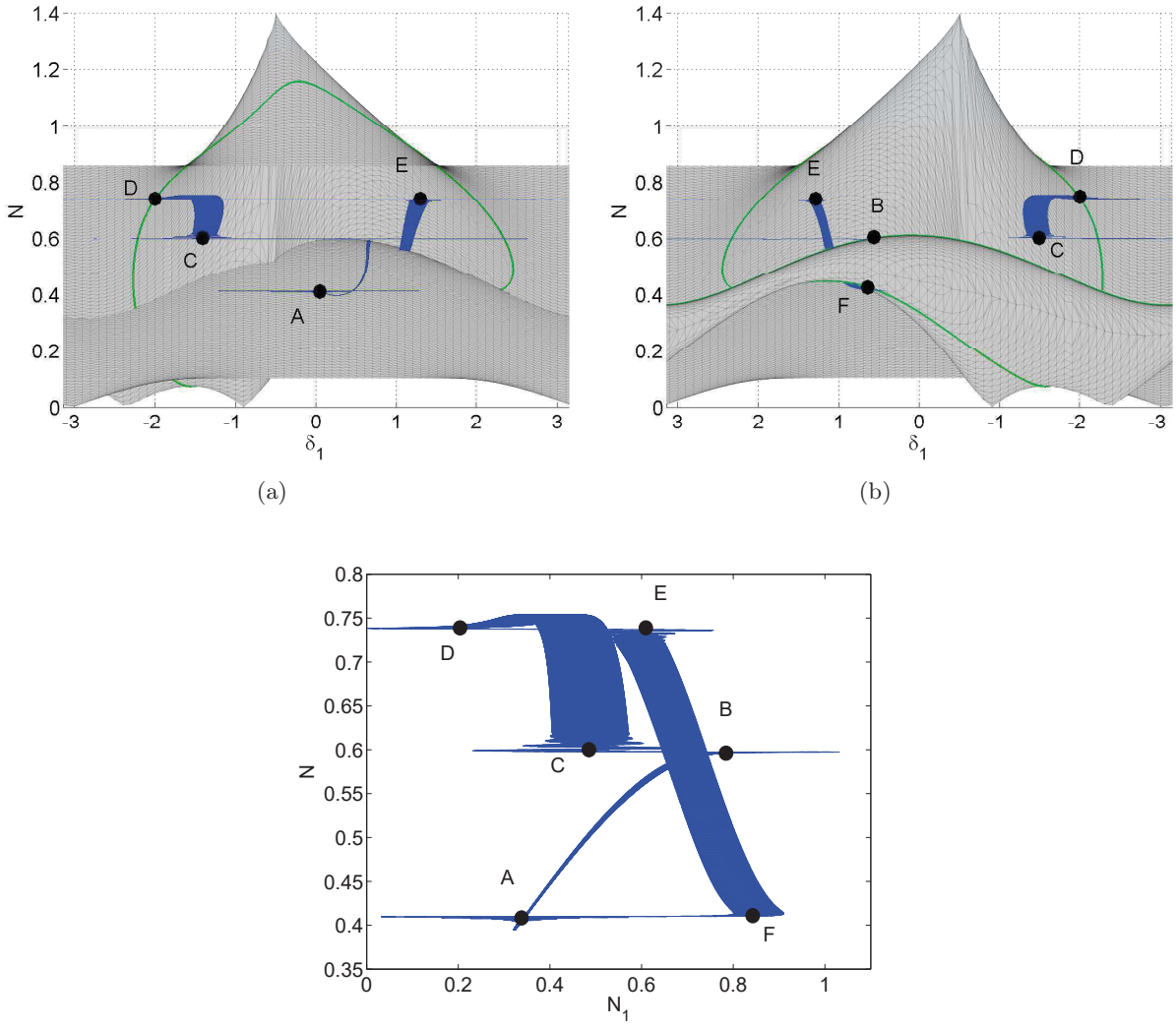


FIGURE 3.18 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in [52000,59000]$) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to\to E \to F \to A$ (a) Vue depuis le plan $N_1 = 0$ (b) Vue depuis le plan $N_1 = 1.2$ (c) Résultats numériques dans le plan (N_1,N).

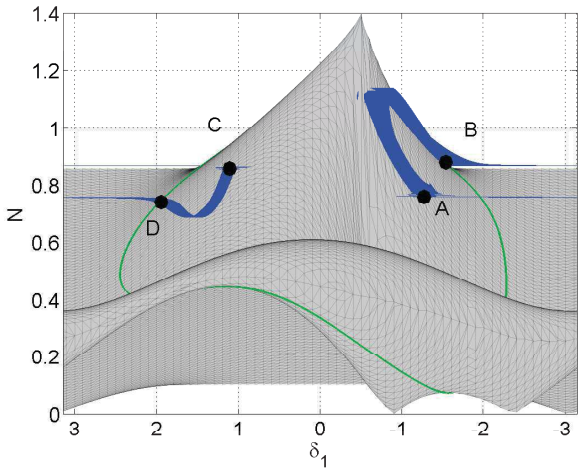


FIGURE 3.19 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.8$ et $\sigma = 2$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in [48000,56000]$) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to A$. Vue depuis le plan $N_1 = 1.2$.

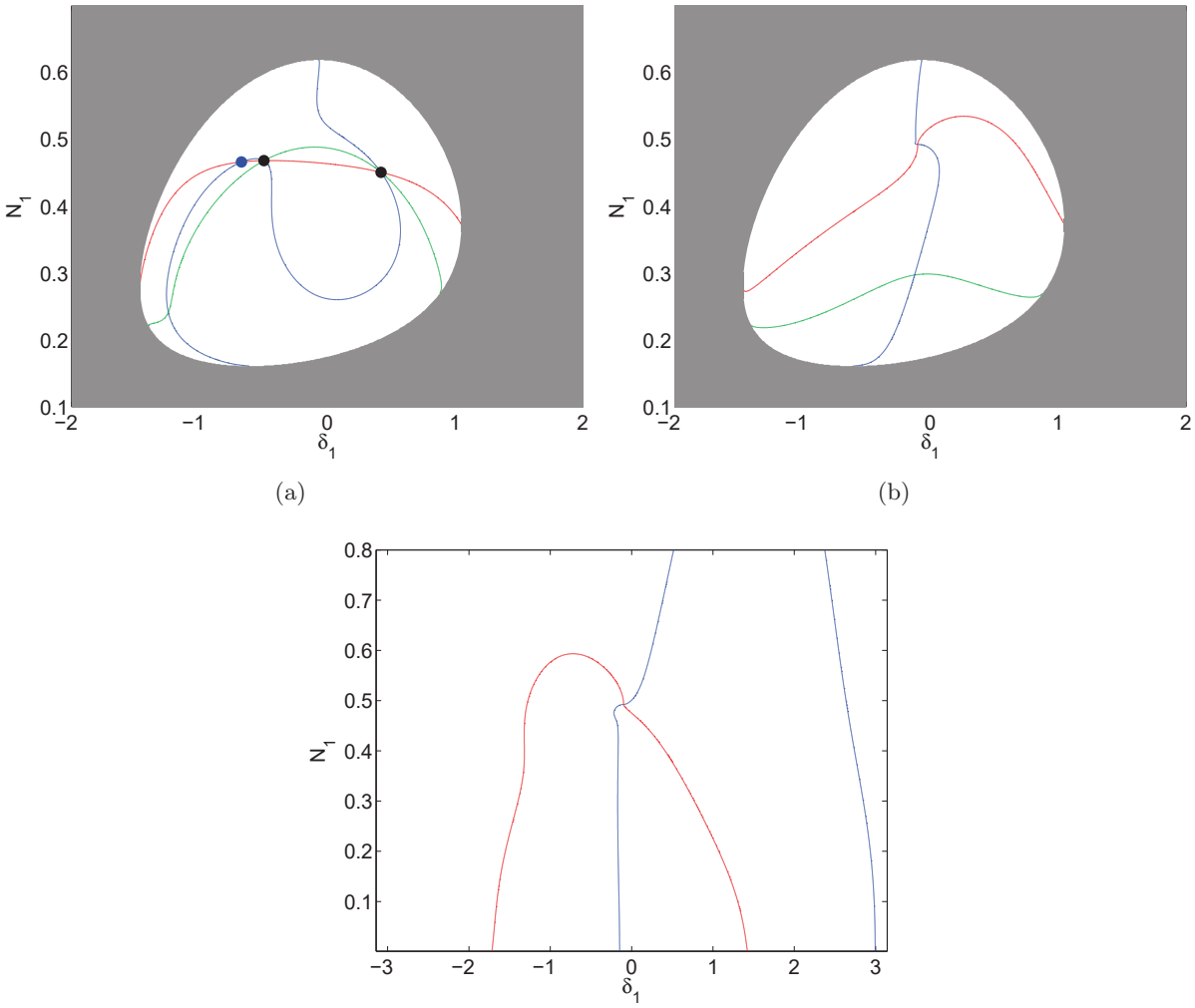


FIGURE 3.20 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$, $f_1 = 0.5$, $f = 0.65$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre stable (point bleu) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1.

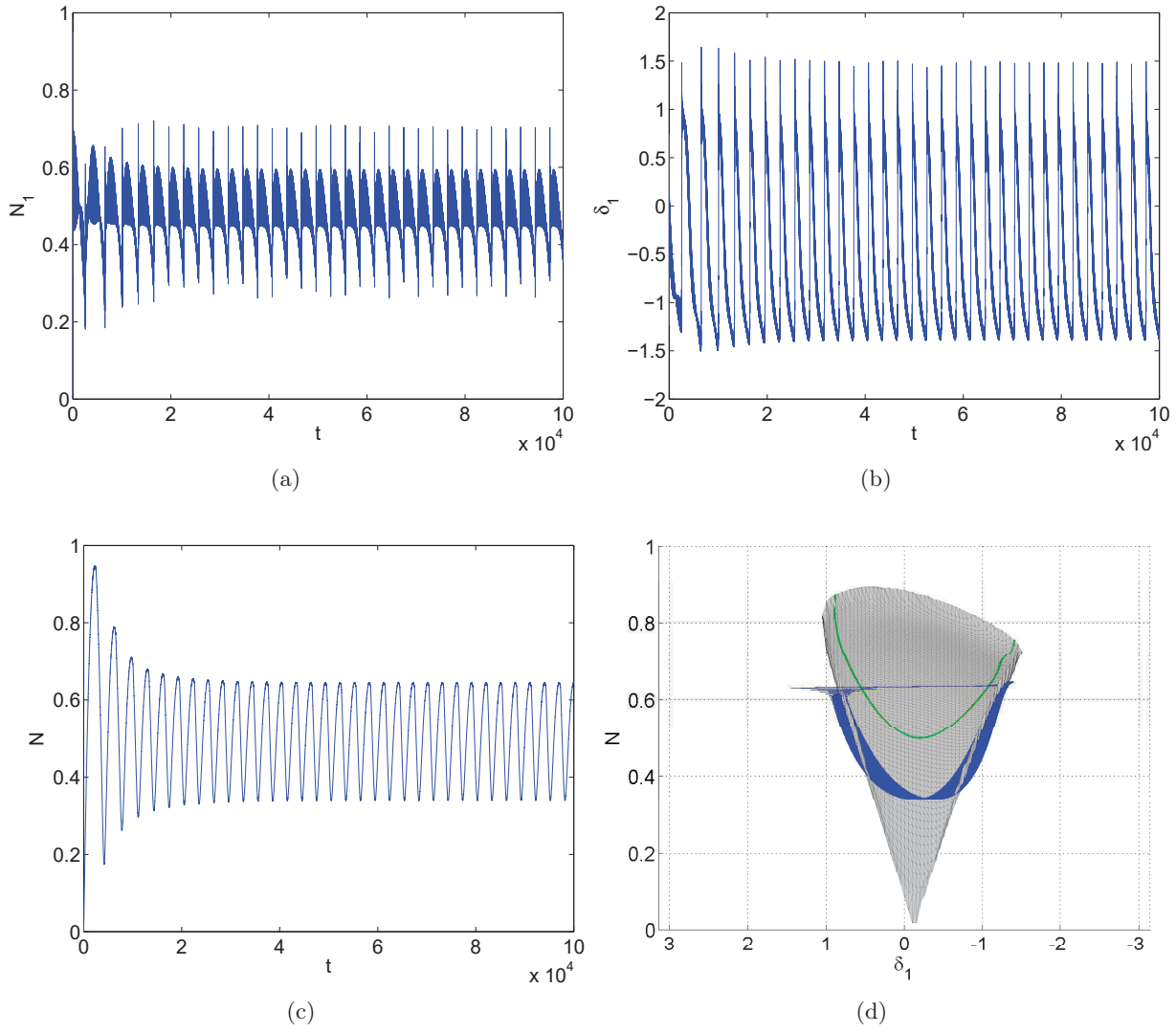
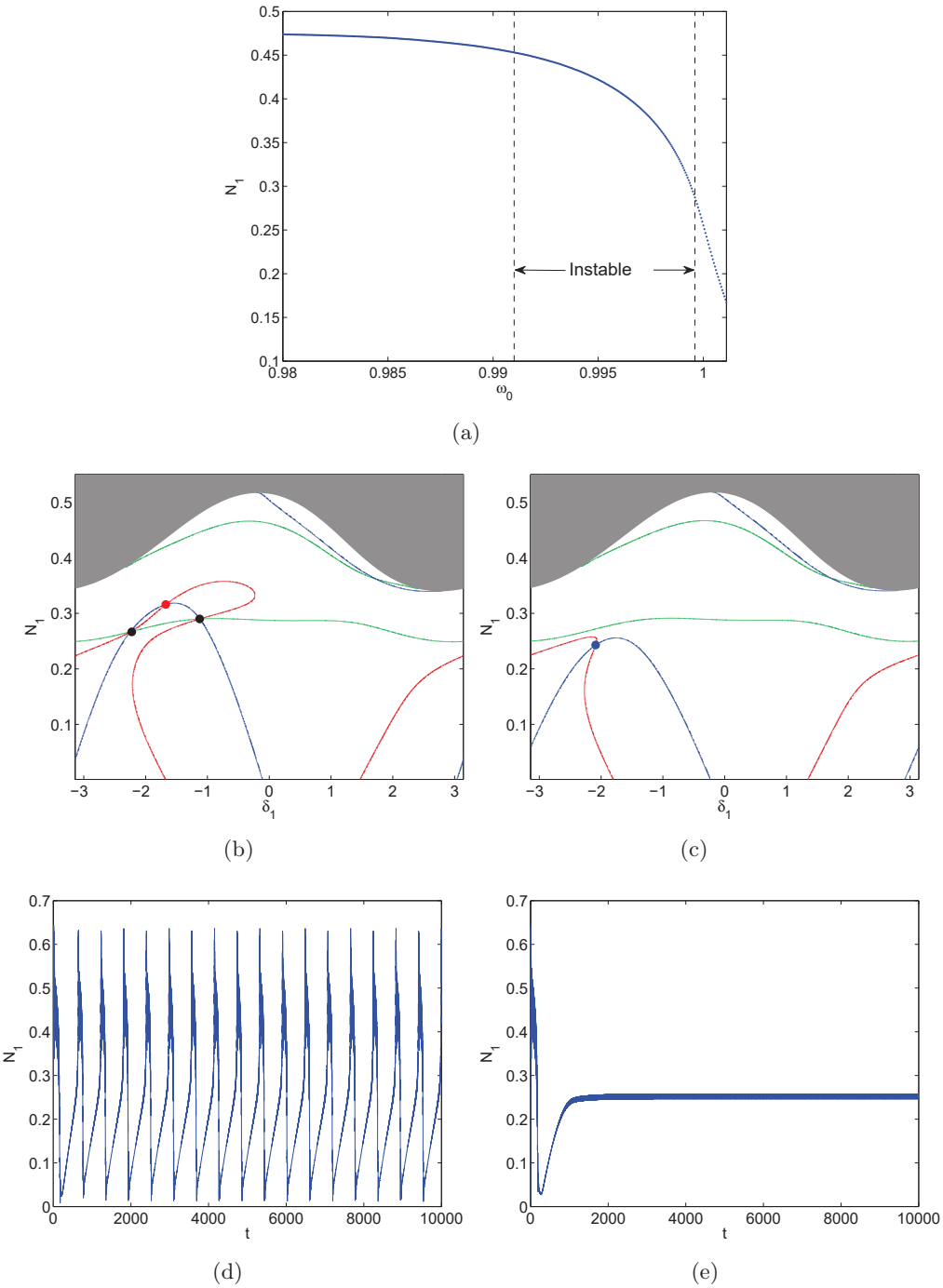


FIGURE 3.21 – $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$, $f_1 = 0.5$, $f = 0.65$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps (d) Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in$ [52000,56000]) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour de la première branche SIM (surface grise). La ligne verte représente la limite de stabilité du SIM.



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

FIGURE 3.22 – $\epsilon = 0.01$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.2$, $B = 0.04$, $D = 5.33$, $E = 1.33$, $f_1 = 0.2$, $f = 0$ et $\omega = 1.0025$ – (a) Amplitude N_1 des points d'équilibre en fonction de ω_0 (b)-(c) Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur la branche 1 du SIM à $\omega_0 = 0.999$ et $\omega_0 = 1$ respectivement (d) Amplitude N_1 en fonction du temps issue des résultats numériques à $\omega_0 = 0.999$ (e) Amplitude N_1 en fonction du temps issue des résultats numériques à $\omega_0 = 1$.

Chapitre 4

Couplage d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires

Dans ce chapitre, la méthode décrite dans le chapitre 2 est appliquée à un nouveau système composé d'une structure linéaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. Ces derniers présentent des forces de rappel de couplage cubiques et ne sont pas sollicités. Ce chapitre est publié dans l'article [Charlemagne et al.*, 2017].*
Les comportements multi-échelles du système sont d'abord détectés via le calcul du SIM et des points d'équilibre et singuliers. Des premiers résultats numériques sont comparés aux prédictions analytiques de divers régimes périodiques de l'ensemble. Il est ensuite prouvé que ces régimes sont des modes non linéaires du système au sens de Rosenberg. Des réponses de type SMR dépeignant des bifurcations entre ces modes sont mises en évidence. Les prédictions analytiques sont par la suite utilisées pour mettre en lumière des scénarios de contrôle passif du système principal. Enfin, la méthode est généralisée à un système principal à plusieurs degrés de liberté possédant des modes normaux dont les fréquences sont éloignées.

Sommaire

4.1 Comportement multi-échelles du système 59
4.1.1 SIM du système 59
4.1.2 Points d'équilibre et points singuliers 60
4.2 Comparaison avec les simulations numériques 61
4.2.1 Régimes périodiques 62
4.2.2 Modes non linéaires de la chaîne d'oscillateurs 64
4.2.3 Réponse de type SMR 71
4.3 Application au contrôle 72
4.3.1 Premières preuves 72
4.3.2 Comparaison des performances d'un oscillateur ajouté à un ddl et d'une chaîne 75
4.4 Généralisation à un système principal à plusieurs degrés de liberté . . 75
4.4.1 Développements analytiques 76
4.4.2 Vérifications numériques 79
4.5 Conclusions du chapitre 82

Le système étudié dans ce chapitre correspond à un cas particulier du modèle général présenté dans le chapitre 2, où les fonctions h_j sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
h_0(v,u_1,\dot{v},\dot{u}_1) &= c_1(\dot{v}-\dot{u}_1)+B_1(v-u_1)\\
h_1(u_1,u_2,\dot{u}_1,\dot{u}_2) &= c_1(\dot{u}_1-\dot{u}_2)+B(u_1-u_2)+D(u_1-u_2)^3\\
h_j(u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dot{u}_{j-1},\dot{u}_j,\dot{u}_{j+1}) &= c_1(-\dot{u}_{j-1}+2\dot{u}_j-\dot{u}_{j+1})+B(-u_{j-1}+2u_j-u_{j+1})+\\
&\quad D(u_j-u_{j-1})^3+D(u_j-u_{j+1})^3\,,\quad j=2,\ldots,P-1\\
h_P(u_P,u_{P-1},\dot{u}_P,\dot{u}_{P-1}) &= c_1(\dot{u}_P-\dot{u}_{P-1})+B(u_P-u_{P-1})+D(u_P-u_{P-1})^3\\
F_j &= 0\,,\quad j=1,\ldots,P
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donnant le système suivant :

$$\begin{cases}
\ddot{v}+\omega_0^2 v+\epsilon c\dot{v}+\epsilon c_1(\dot{v}-\dot{u}_1)+\epsilon B_1(v-u_1)=\epsilon f\sin(\omega t)\\
\ddot{u}_1+c_1(\dot{u}_1-\dot{v})+B_1(u_1-v)+c_1(\dot{u}_1-\dot{u}_2)+B(u_1-u_2)+D(u_1-u_2)^3=0\\
\ddot{u}_j+c_1(-\dot{u}_{j-1}+2\dot{u}_j-\dot{u}_{j+1})+B(-u_{j-1}+2u_j-u_{j+1})+D(u_j-u_{j-1})^3+D(u_j-u_{j+1})^3\\
j=2,\ldots,P-1\\
\ddot{u}_P+c_1(\dot{u}_P-\dot{u}_{P-1})+B(u_P-u_{P-1})+D(u_P-u_{P-1})^3=0
\end{cases} \tag{4.2}$$

On s'intéresse ainsi à un SP linéaire couplé linéairement (raideur B_1 et amortissement visqueux c_1) à P oscillateurs non linéaires et non forcés possédant chacun une masse ϵ. La masse totale ajoutée est donc de $P\epsilon$, petite devant la masse unitaire du SP. Le couplage entre les masses de la chaîne est assuré par un amortissement visqueux c_1 et une force de rappel somme de parties linéaire et cubique : $V(w)=Bw+Dw^3$. On ne considère ici aucun potentiel local.
L'implémentation des outils présentés dans la section 2.2 du chapitre 2 mène au système suivant :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{i}{2}\left(\omega-\dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)\psi+\epsilon\dfrac{c}{2}\psi-\epsilon\left(\dfrac{c_1}{2}-\dfrac{iB_1}{2\omega_0}\right)\varphi_1=\dfrac{\epsilon f}{2i}\\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\dfrac{i\omega}{2}\varphi_1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i\omega_0^2}{\omega}-\epsilon c\right)\psi+\dfrac{1+\epsilon}{2}\left(c_1-\dfrac{iB_1}{\omega}\right)\varphi_1+\dfrac{1}{2}\left(-c_1+\dfrac{iB}{\omega}\right)\varphi_2+\\
\dfrac{3iD}{8\omega^3}|\varphi_2|^2\varphi_2=-\dfrac{\epsilon f}{2i}\\
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\dfrac{i\omega}{2}\varphi_2-\dfrac{1}{2}\left(c_1-\dfrac{iB_1}{\omega}\right)\varphi_1+\dfrac{1}{2}\left(c_1-\dfrac{iB}{\omega}\right)(2\varphi_2-\varphi_3)+\dfrac{3iD}{8\omega^3}\left(|\varphi_3|^2\varphi_3-2|\varphi_2|^2\varphi_2\right)=0\\
\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial t}+\dfrac{i\omega}{2}\varphi_j+\dfrac{1}{2}\left(c_1-\dfrac{iB}{\omega}\right)(-\varphi_{j-1}+2\varphi_j-\varphi_{j+1})+\\
\dfrac{3iD}{8\omega^3}\left(|\varphi_{j-1}|^2\varphi_{j-1}-2|\varphi_j|^2\varphi_j+|\varphi_{j+1}|^2\varphi_{j+1}\right)=0\,,\quad j=3,\ldots,P-1\\
\dfrac{\partial\varphi_P}{\partial t}+\dfrac{i\omega}{2}\varphi_P+\dfrac{1}{2}\left(c_1-\dfrac{iB}{\omega}\right)(-\varphi_{P-1}+2\varphi_P)+\dfrac{3iD}{8\omega^3}\left(|\varphi_{P-1}|^2\varphi_{P-1}-2|\varphi_P|^2\varphi_P\right)=0
\end{cases} \tag{4.3}$$

où les variables ψ et φ_j correspondent au déplacement du SP et aux déplacements relatifs w_j dans la chaîne (se référer aux formules (2.6)). Ces équations sont dérivées aux deux premiers ordres en ϵ pour déterminer le comportement du système aux échelles de temps correspondantes.

4.1 Comportement multi-échelles du système

Cette partie regroupe la détection du SIM et des points d'équilibre et singuliers du système, dont les caractéristiques ont été données dans les sections 2.3 et 2.4 de ce manuscrit.

4.1.1 SIM du système

Les équations du SIM s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}_1 &=& \dfrac{i\omega_0}{2}\psi + \dfrac{1}{2}\left(i\omega_0 + c_1 - \dfrac{iB_1}{\omega_0}\right)\phi_1 + \dfrac{1}{2}\left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0}\right)\phi_2 + i\mathcal{D}|\phi_2|^2\phi_2 = 0 \\
\mathcal{H}_2 &=& \dfrac{1}{2}\left(-c_1 + \dfrac{iB_1}{\omega_0}\right)\phi_1 + \dfrac{i\omega_0}{2}\phi_2 + \dfrac{1}{2}\left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0}\right)(-2\phi_2 + \phi_3) + \\
&& i\mathcal{D}\left(-2|\phi_2|^2\phi_2 + |\phi_3|^2\phi_3\right) = 0 \\
\mathcal{H}_j &=& \dfrac{1}{2}\left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0}\right)(\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}) + \dfrac{i\omega_0}{2}\phi_j + \\
&& i\mathcal{D}\left(|\phi_{j-1}|^2\phi_{j-1} - 2|\phi_j|^2\phi_j + |\phi_{j+1}|^2\phi_{j+1}\right) = 0\,, \quad j = 3,\ldots,P-1 \\
\mathcal{H}_P &=& \dfrac{1}{2}\left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0}\right)(\phi_{P-1} - 2\phi_P) + \dfrac{i\omega_0}{2}\phi_P + i\mathcal{D}\left(|\phi_{P-1}|^2\phi_{P-1} - 2|\phi_P|^2\phi_P\right) = 0
\end{array}\right. \tag{4.4}$$

Ce système d'équations complexes algébriques se résout assez aisément en commençant par la dernière équation, dont on déduit :

$$\left[c_1^2 + \left(\frac{B}{\omega_0} + 2\mathcal{D}N_{P-1}^2\right)^2\right]N_{P-1}^2 - \left[4c_1^2 + \left(\frac{2B}{\omega_0} - \omega_0 + 4\mathcal{D}N_P^2\right)^2\right]N_P^2 = 0 \tag{4.5}$$

Cette équation est un polynôme de degré 3 en N_{P-1}^2. La méthode de Cardan permet d'en calculer le discriminant, qui n'est jamais positif. À N_P fixé, il n'existe donc qu'une solution réelle positive N_{P-1}. La dernière équation de (4.4) permet par ailleurs de lier les phases :

$$e^{i\Delta_{P-1}} = \frac{-2c_1 + \dfrac{2iB}{\omega_0} - i\omega_0 + 4i\mathcal{D}N_P^2}{-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_{P-1}^2}\frac{N_P}{N_{P-1}} \tag{4.6}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta = \delta - \delta_1 \\
\Delta_j = \delta_j - \delta_{j+1}\,, \quad j = 1,\ldots,P-1
\end{array}\right. \tag{4.7}$$

Utilisant les équations numéro j, $j = P-1,\ldots,3$, on peut ensuite exprimer successivement N_{j-1} et $e^{i\Delta_{j-1}}$ comme fonctions implicites de N_P :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[c_1^2 + \left(\dfrac{B}{\omega_0} + 2\mathcal{D}N_{j-1}^2\right)^2\right]N_{j-1}^2 - \\
\left|-\left(-2c_1 + \dfrac{2iB}{\omega_0} - i\omega_0 + 4i\mathcal{D}N_j^2\right)N_j + \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_{j+1}^2\right)\dfrac{N_{j+1}}{e^{i\Delta_j}}\right|^2 = 0 \\
e^{i\Delta_{j-1}} = \dfrac{\left(-2c_1 + \dfrac{2iB}{\omega_0} - i\omega_0 + 4i\mathcal{D}N_j^2\right)N_j - \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_{j+1}^2\right)\dfrac{N_{j+1}}{e^{i\Delta_j}}}{\left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_{j-1}^2\right)N_{j-1}}
\end{array}\right. \tag{4.8}$$

De nouveau, la première équation est un polynôme de degré 3 en N_{j-1}^2 dont le discriminant n'est jamais positif, permettant d'obtenir une solution réelle positive unique de N_{j-1}. Les équations $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ étant linéaires en ψ et ϕ_1, on calcule facilement N, N_1 et les exponentielles complexes $e^{i\Delta}$ et $e^{i\Delta_1}$:

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{\left|\left(-2c_1 + \dfrac{2iB}{\omega_0} - i\omega_0 + 4i\mathcal{D}N_2^2\right)N_2 - \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_3^2\right)\dfrac{N_3}{e^{i\Delta_2}}\right|}{\sqrt{c_1^2 + \dfrac{B_1^2}{\omega_0^2}}} \\ e^{i\Delta_1} = \dfrac{\left(-2c_1 + \dfrac{2iB}{\omega_0} - i\omega_0 + 4i\mathcal{D}N_2^2\right)N_2 - \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_3^2\right)\dfrac{N_3}{e^{i\Delta_2}}}{\left(-c_1 + \dfrac{iB_1}{\omega_0}\right)N_1} \\ N = \dfrac{1}{\omega_0}\left|\left(i\omega_0 + c_1 - \dfrac{iB_1}{\omega_0}\right)N_1 + \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_2^2\right)\dfrac{N_2}{e^{i\Delta_1}}\right| \\ e^{i\Delta} = \dfrac{i}{\omega_0}\left[\left(i\omega_0 + c_1 - \dfrac{iB_1}{\omega_0}\right)N_1 + \left(-c_1 + \dfrac{iB}{\omega_0} + 2i\mathcal{D}N_2^2\right)\dfrac{N_2}{e^{i\Delta_1}}\right] \end{cases} \tag{4.9}$$

Le SIM diffère de celui décrit dans le chapitre 3 en ceci qu'il est univoque en N_P et qu'il est possible de tracer sa projection dans un espace bidimensionnel (N,N_l) ou (N_k,N_l) où (k,l) $\in [|1,P|]^2$. Bien que découlant d'un espace à $2P$ dimensions, sa structure est donc similaire à celle du cas cubique à 2ddl du chapitre 2. L'étude de stabilité est menée comme décrit dans la section 2.3.2. La matrice $\mathbf{\Sigma}$ obtenue est de taille $2P$. On peut exprimer ses coefficients en fonction de N_P et δ_P grâce aux relations (4.5), (4.6), (4.8) et (4.9).

4.1.2 Points d'équilibre et points singuliers

À l'échelle de temps lente τ_1, la première équation du système (4.3) devient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau_1} + \frac{1}{2}\left(i\sigma\omega_0 + c\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{iB_1}{\omega_0} - c_1\right)\varphi_1 + \frac{if}{2} = 0 \tag{4.10}$$

On sépare cette équation en parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial\tau_1} = -\dfrac{c}{2}N + \dfrac{1}{2}\left(c_1\cos(\Delta) - \dfrac{B_1}{\omega_0}\sin(\Delta_1)\right)N_1 - \dfrac{f}{2}\sin(\delta) \\ \dfrac{\partial\delta}{\partial\tau_1} = -\dfrac{\sigma\omega_0}{2} - \dfrac{1}{2}\left(c_1\sin(\Delta) + \dfrac{B_1}{\omega_0}\cos(\Delta_1)\right)\dfrac{N_1}{N} - \dfrac{f}{2N}\cos(\delta) \end{cases} \tag{4.11}$$

Ce système est implicitement de la forme de l'équation (2.23) grâce aux relations obtenues à partir de la résolution du SIM :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial\tau_1} = F_1(N_P,\delta_P) \\ \dfrac{\partial\delta}{\partial\tau_1} = F_2(N_P,\delta_P) \end{cases} \tag{4.12}$$

Les points d'équilibre et singuliers sont détectés grâce au système suivant (cf chapitre 2 pour les détails de calcul) :

$$\det(\mathbf{S}_2)\mathbf{Id}_{2P}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial\tau_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial N_P}{\partial\tau_1}\\ \\ \frac{\partial\delta_1}{\partial\tau_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial\delta_P}{\partial\tau_1}\end{pmatrix} = \underbrace{-\operatorname{compl}(\mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}F_1\\ \\ F_2\end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} \tag{4.13}$$

où les matrices $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ s'obtiennent à partir des équations (4.4) remaniées :

$$\begin{cases}
\mathcal{H}_1 = \frac{i\omega_0}{2}Ne^{i(\delta-\delta_1)} + \frac{1}{2}\left(i\omega_0 + c_1 - \frac{iB_1}{\omega_0}\right)N_1 + \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB}{\omega_0} + i\mathcal{D}N_2^2\right)N_2e^{i(\delta_2-\delta_1)} \\
\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB_1}{\omega_0}\right)N_1e^{i(\delta_1-\delta_2)} + \left(\frac{i\omega_0}{2} + c_1 - \frac{iB}{\omega_0} - 2i\mathcal{D}N_2^2\right)N_2 + \\
\qquad \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB}{\omega_0} + i\mathcal{D}N_3^2\right)N_3e^{i(\delta_3-\delta_2)} \\
\mathcal{H}_j = \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB}{\omega_0} + i\mathcal{D}N_{j-1}^2\right)N_{j-1}e^{i(\delta_{j-1}-\delta_j)} + \left(\frac{i\omega_0}{2} + c_1 - \frac{iB}{\omega_0} - 2i\mathcal{D}N_j^2\right)N_j + \\
\qquad \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB}{\omega_0} + i\mathcal{D}N_{j+1}^2\right)N_{j+1}e^{i(\delta_{j+1}-\delta_j)}, \quad j = 3,\ldots,P-1 \\
\mathcal{H}_P = \frac{1}{2}\left(-c_1 + \frac{iB}{\omega_0} + i\mathcal{D}N_{P-1}^2\right)N_{P-1}e^{i(\delta_{P-1}-\delta_P)} + \left(\frac{i\omega_0}{2} + c_1 - \frac{iB}{\omega_0} - 2i\mathcal{D}N_P^2\right)N_P
\end{cases} \tag{4.14}$$

On obtient des matrices dont les coefficients sont exprimables en fonction de N_P uniquement grâce aux relations (4.5), (4.6), (4.8) et (4.9) :

$$\mathbf{S}_1 = -\frac{\omega_0}{2}\begin{pmatrix}\sin(\Delta) & N\cos(\Delta)\\ -\cos(\Delta) & N\sin(\Delta)\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix}\frac{\partial\mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_P} & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,r}}{\partial\delta_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,r}}{\partial\delta_P}\\ \frac{\partial\mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_P} & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,i}}{\partial\delta_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{1,i}}{\partial\delta_P}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\mathcal{H}_{P,r}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,r}}{\partial N_P} & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,r}}{\partial\delta_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,r}}{\partial\delta_P}\\ \frac{\partial\mathcal{H}_{P,i}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,i}}{\partial N_P} & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,i}}{\partial\delta_1} & \cdots & \frac{\partial\mathcal{H}_{P,i}}{\partial\delta_P}\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Le système (4.13) permet de prédire les régimes périodiques et les comportements de type SMR. Dans la partie suivante, ces prédictions sont confrontées à des résultats de simulations numériques.

4.2 Comparaison avec les simulations numériques

Les simulations sont réalisées à l'aide de la fonction *ode45* de Matlab, c'est-à-dire une méthode de Runge-Kutta, avec les options suivantes : pas de temps de 0.1 et $RelTol = AbsTol = NormControl =$

10^{-12}. Tous les oscillateurs sont supposés être initialement au repos. Le système à 50 ddl considéré est composé d'un système principal couplé à $P = 49$ oscillateurs non linéaires, avec les paramètres suivants : $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$. La masse ajoutée totale de la chaîne est donc de $P\epsilon = 0.049 \ll 1$. Différents couples (f,σ) sont testés.

4.2.1 Régimes périodiques

Cherchons dans un premier temps à illustrer la dynamique du système autour de ses points d'équilibre. La figure 4.1 représente l'amplitude N des points d'équilibre du système pour $\sigma = 0$ et f variant de 10 à 300. Les points bleus et rouges correspondent respectivement aux points stables et instables. La présence de points singuliers est notée par des lignes noires horizontales. La figure

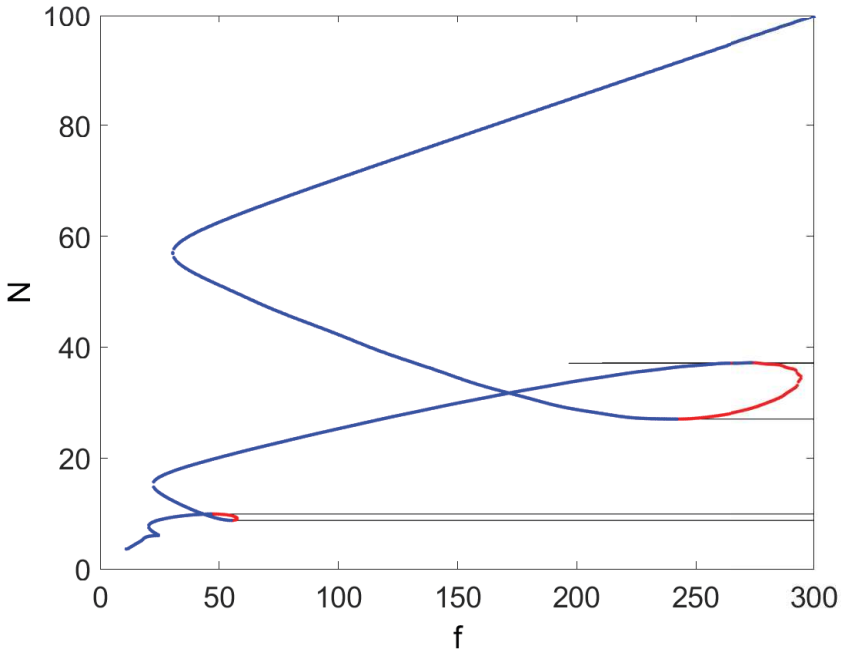


FIGURE 4.1 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$ – Amplitude N des points d'équilibre et singuliers en fonction du niveau de sollicitation f. Les points d'équilibre stables et instables sont respectivement représentés en bleu et rouge et la présence de points singuliers est notée par des lignes noires.

4.2 représente la norme infinie de la variable du SP $||v||_\infty$ obtenue en cherchant numériquement les solutions de (4.2). Ces résultats sont issus du travail d'un étudiant de Master, J. Audrain, qui a développé un outil numérique basé sur la recherche de solutions périodiques de système dynamiques par continuation par longueur d'arc, ce qui permet notamment de prendre en compte toutes les harmoniques quand les développements analytiques de ce chapitre n'en considèrent qu'une. La comparaison avec les résultats de la figure 4.1, tracés en noir, montrent un bon accord quantitatif entre approches analytique et numérique, validant notamment l'hypothèse selon laquelle les harmoniques supérieures jouent un rôle mineur dans le comportement du système. Une différence est toutefois immédiatement observable. Une partie des points d'équilibre détectés comme stables par l'analyse théorique s'avèrent numériquement instables. Ainsi, l'analyse de la stabilité linéaire du système réduit ne permet pas de détecter toutes les instabilités des régimes périodiques.
Trois amplitudes de forçage sont maintenant choisies pour décrire trois comportements périodiques différents. L'amplitude des points d'équilibre prédite par l'approche analytique pour ces trois cas est donnée dans le tableau 4.1.

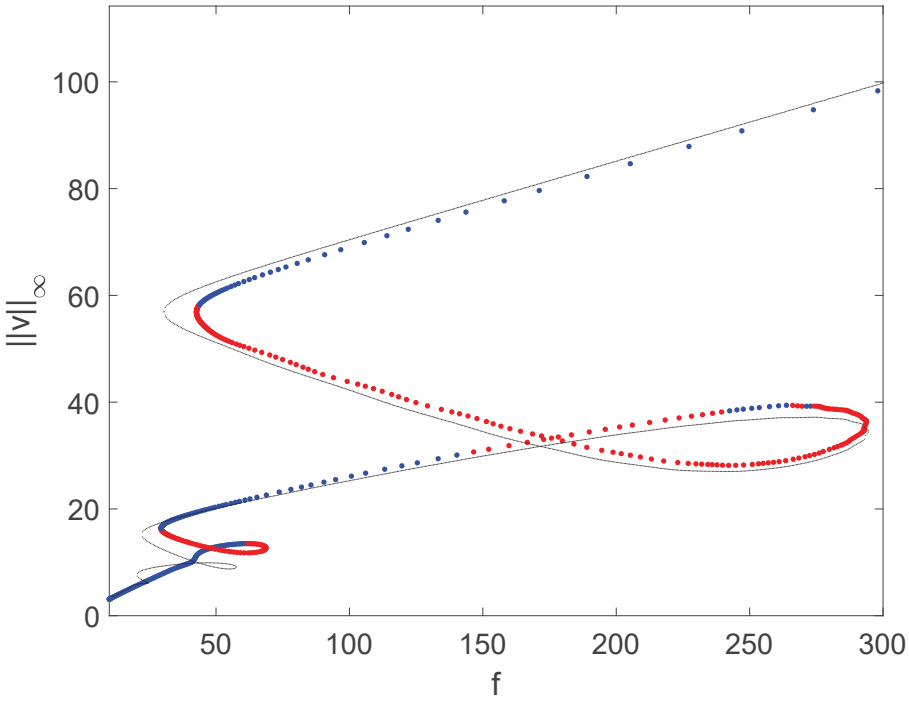


FIGURE 4.2 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$ – Amplitude $||v||_\infty$ des solutions périodiques en fonction du niveau de sollicitation f, obtenues par continuation par longueur d'arc. Les régimes stables et instables sont respectivement représentés en bleu et rouge. Les résultats de la figure 4.1 sont tracés en noir.

f	Amplitude N des points d'équilibre		
18	5.35		
60	21.22	49.21	64.26
280	*29.88*	*36.96*	96.87

TABLE 4.1 – Amplitude N des points d'équilibre à trois niveaux de sollicitation différents pour le jeu de paramètres suivant : $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$. Les valeurs en italique correspondent aux points instables (selon l'approche analytique).

Pour le premier exemple, le niveau de sollicitation externe du SP est fixé à $f = 18$. Le SIM est tracé sur la figure 4.4 dans le plan (N_{49},N). Il possède trois branches stables séparées par deux branches instables encadrées par des extremums locaux. Il existe en fait une troisième branche instable entre $N_{49} = 0.873$ et $N_{49} = 0.8765$ dont la faible étendue laisse présager un impact limité sur la dynamique. Le système possède un point d'équilibre sur la branche basse du SIM. Comme attendu, la figure 4.4(a) confirme que le comportement asymptotique du système est périodique. La comparaison des amplitudes physiques des oscillateurs, c'est-à-dire les amplitudes des variables v et u_j, issues des résultats numériques à l'échelle de temps τ_1 (ronds bleus) et des développements analytiques (croix rouges) est illustrée sur la figure 4.4(b). Elle met en lumière la concordance qualitative des profils obtenus, mais un écart quantitatif concernant les amplitudes des oscillateurs de la chaîne, la prédiction pour le SP étant correcte (environ 5 % d'erreur). Les croix noires donnent les amplitudes prédites par continuation par longueur d'arc. L'agrément avec les résultats issus de l'intégration temporelle directe étant très satisfaisant, la présence d'harmoniques supérieures pourrait expliquer l'écart sus-cité. Ce point n'a pas été approfondi dans ce manuscrit. À faible énergie, la concordance qualitative est suffisante pour le design de la chaîne. Le comportement de

la chaîne seule autour du point d'équilibre tracé sur la figure 4.4(c) prévoit que l'énergie se propage dans la chaîne le long de caractéristiques non linéaires. Le comportement numérique sur la figure 4.4(d) dépeint une dynamique similaire, confirmant l'accord qualitatif entre résultats analytiques et numériques à basse énergie.

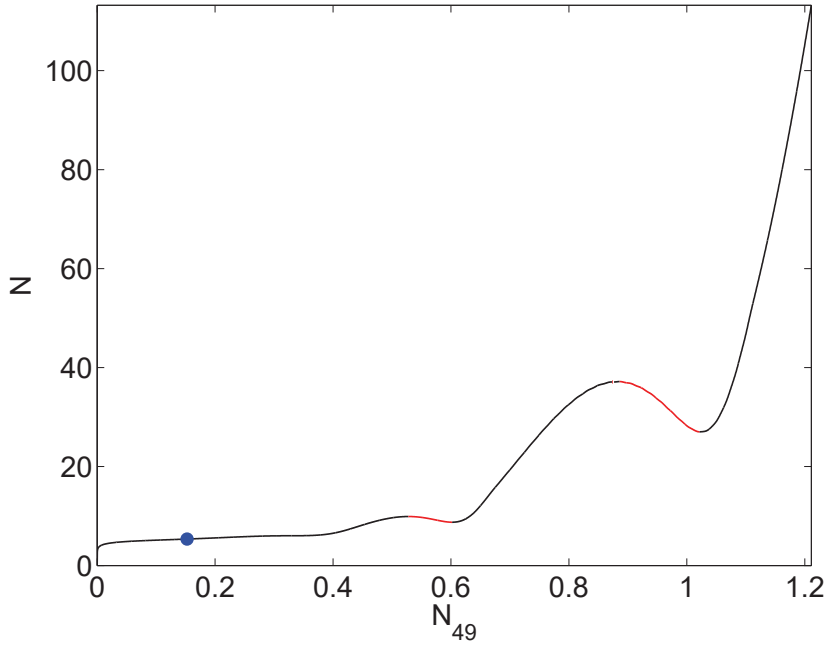
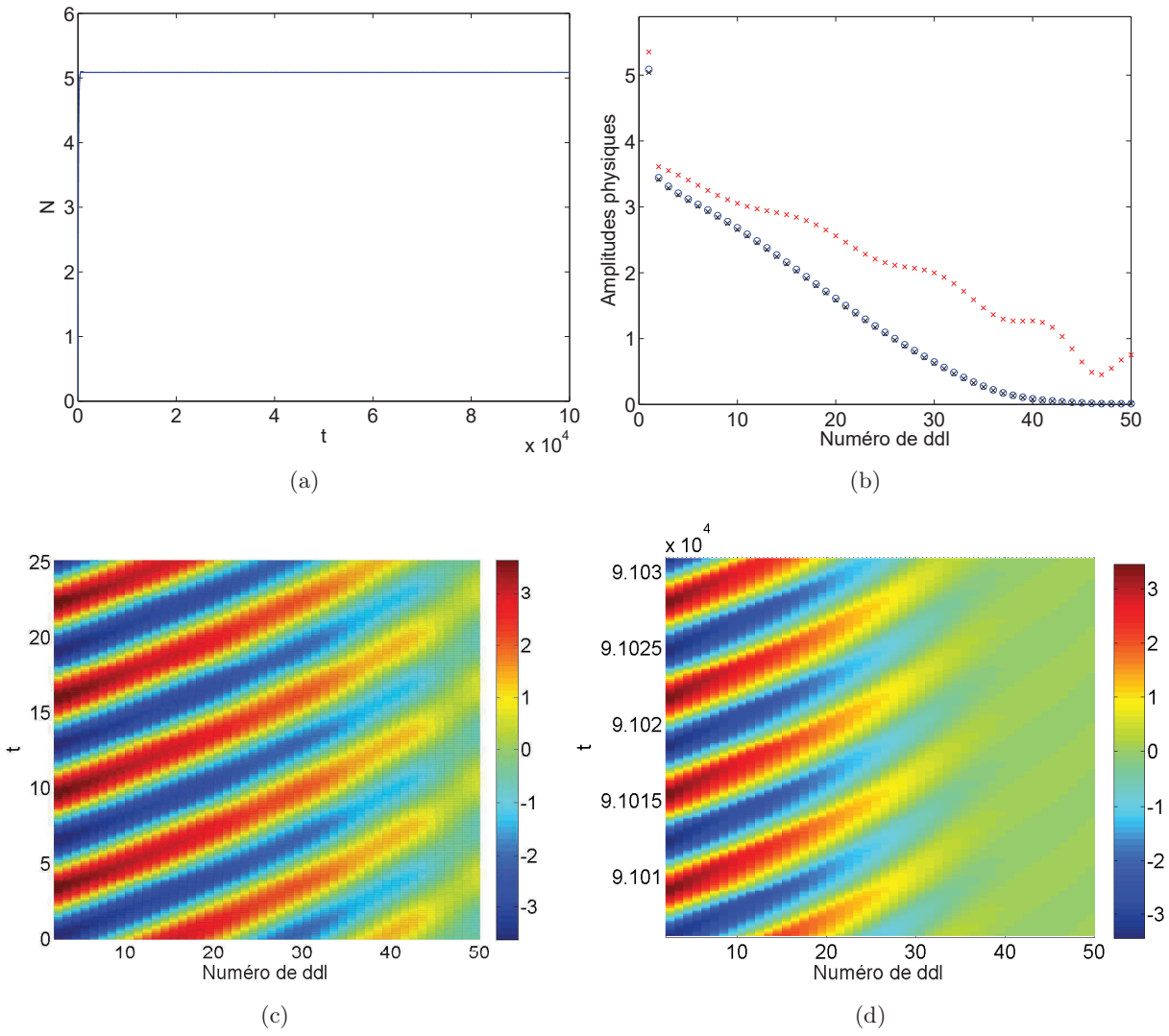


FIGURE 4.3 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 18$ – SIM du système (ligne noire) et position du point d'équilibre (point bleu). Les lignes rouges représentent les zones instables du SIM.

Dans le second exemple, l'énergie injectée au SP est augmentée jusqu'à $f = 60$. Le système possède désormais trois points d'équilibre, no. 1, 2 et 3, et deux points singuliers (voir figure 4.5). La figure 4.6 prouve que la dynamique de l'ensemble est attirée par le point d'équilibre no. 1 sur la branche intermédiaire du SIM et que la prédiction est cette fois précise qualitativement et quantitativement. Le troisième et dernier exemple révèle un troisième type de comportement. Le système possède deux points d'équilibre instables (no. 1 et 2), un point d'équilibre à haute amplitude (no. 3) et six points singuliers dont les positions sont données sur la figure 4.7. Le point no. 3 attire le comportement du système et comme dans le cas précédent, l'accord entre résultats numériques et prédictions analytiques est satisfaisant (cf figure 4.8). Le comportement sur la branche haute du SIM montre deux groupes de masses oscillant en opposition de phase.
Les deux derniers exemples dépeignent des comportements particuliers du système différant selon la branche du SIM sur laquelle ils prennent place, durant lesquels les oscillateurs de la chaîne vibrent à l'unisson à des amplitudes constantes. Ils évoquent en cela des modes non linéaires. Le calcul de ces modes est l'objet de la partie suivante.

4.2.2 Modes non linéaires de la chaîne d'oscillateurs

Nous chercherons dans cette section à déterminer si les comportements périodiques décrits ci-avant sont des modes non linéaires de la chaîne d'oscillateurs découplée du SP. Cette même démarche est utilisée dans des travaux précédents [Panagopoulos *et al.*, 2004, Tsakirtzis *et al.*, 2005, Tsakirtzis *et al.*, 2007a] pour étudier un système linéaire à 2 ddl soumis à une impulsion couplé à trois NES en série. Les modes non linéaires sont ici définis comme un mouvement périodique et synchrone du système hamiltonien libre sous-jacent à la chaîne. Cette définition correspond à celle donnée par Rosenberg [Rosenberg, 1960, Rosenberg, 1962, Rosenberg, 1966]. Notons par ailleurs que la



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 4.4 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 18$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus). Les croix noires sont les amplitudes obtenues par continuation par longueur d'arc (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1.

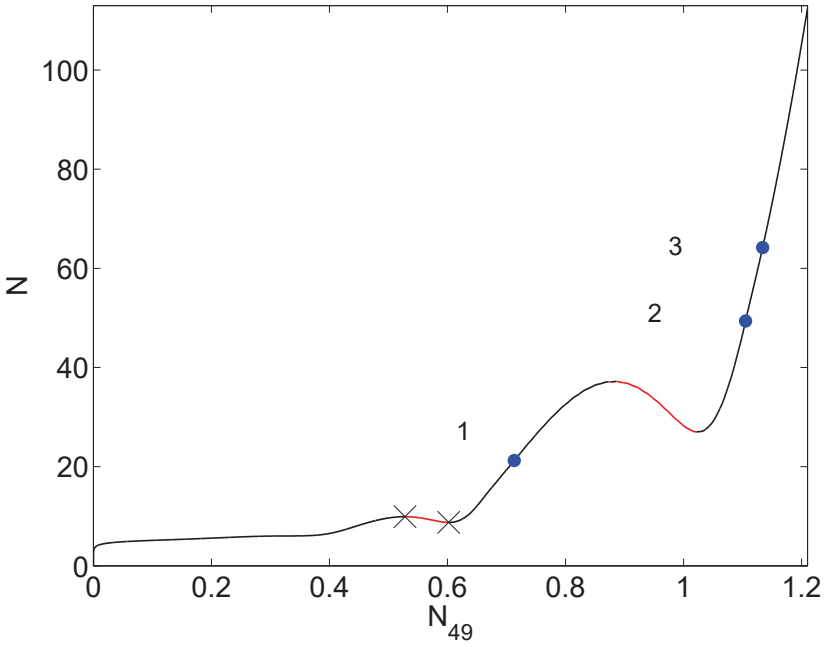


FIGURE 4.5 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 60$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre (points bleus no. 1, 2 et 3) et deux points singuliers (croix noires).

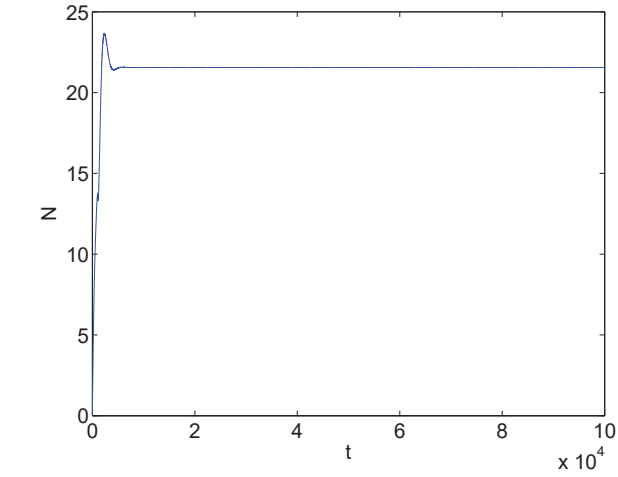
recherche des modes linéaires de la chaîne n'est pas pertinente étant donné que les parties linéaire et non-linéaire des couplages sont du même ordre de grandeur. En d'autres termes, il n'est pas possible de considérer la non-linéarité comme une faible perturbation du comportement linéaire de la chaîne.
Considérons le système d'équations initial (4.2) dans lequel l'amortissement et la sollicitation externe sont annulés :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + B(u_1 - u_2) + D(u_1 - u_2)^3 = 0 \\ \ddot{u}_2 + B(-u_1 + 2u_2 - u_3) + D(u_2 - u_1)^3 + D(u_2 - u_3)^3 = 0 \\ \ddot{u}_j + B(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + D(u_j - u_{j-1})^3 + D(u_j - u_{j+1})^3 = 0 \ , \quad j = 3, \ldots, P-1 \\ \ddot{u}_P + B(u_P - u_{P-1}) + D(u_P - u_{P-1})^3 = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

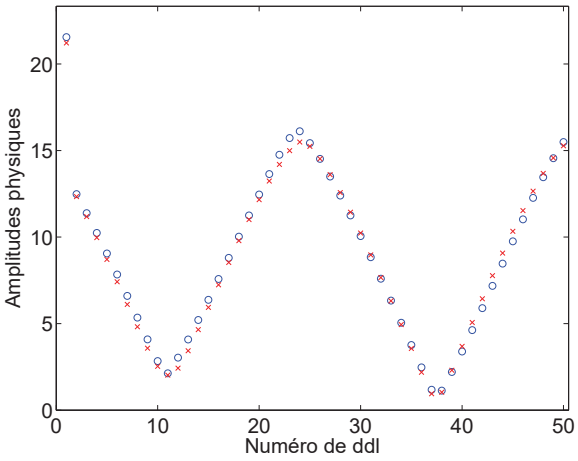
Seules les équations de la chaîne, découplée du SP ($B_1 = 0$), sont considérées. On cherche ici un comportement périodique mono-fréquentiel via des solutions de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ \vdots \\ u_P - u_{P-1} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}\cos(\Omega t) \quad , \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} U_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 - U_1 \\ \vdots \\ U_P - U_{P-1} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

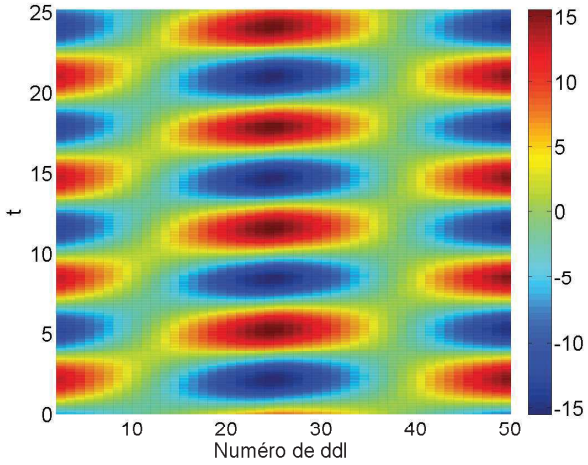
L'absence de phase dans le cosinus fait écho au caractère synchrone du mouvement cherché. Ici, la fréquence Ω est une inconnue. Les variables U_j sont les amplitudes des oscillateurs de la chaîne et les variables W_j celles des déplacements relatifs. Ces variables sont réelles et deux oscillateurs dont les amplitudes sont de signe opposé oscillent en opposition de phase.
Injectant (4.17) dans (4.16) et négligeant la troisième harmonique générée par les termes cubiques,



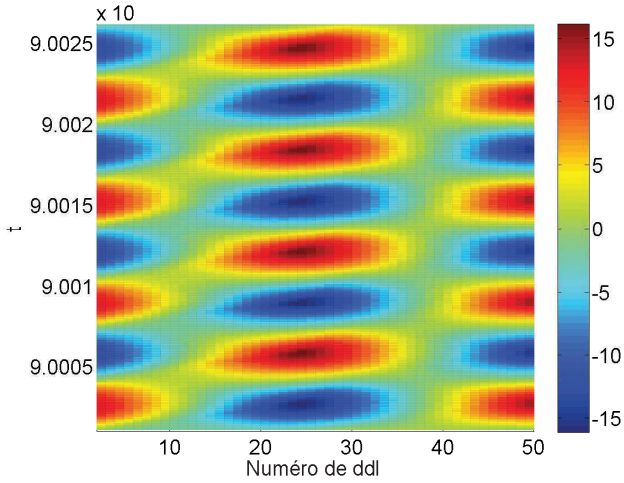
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.6 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 60$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 1 (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus) (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 1 (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1.

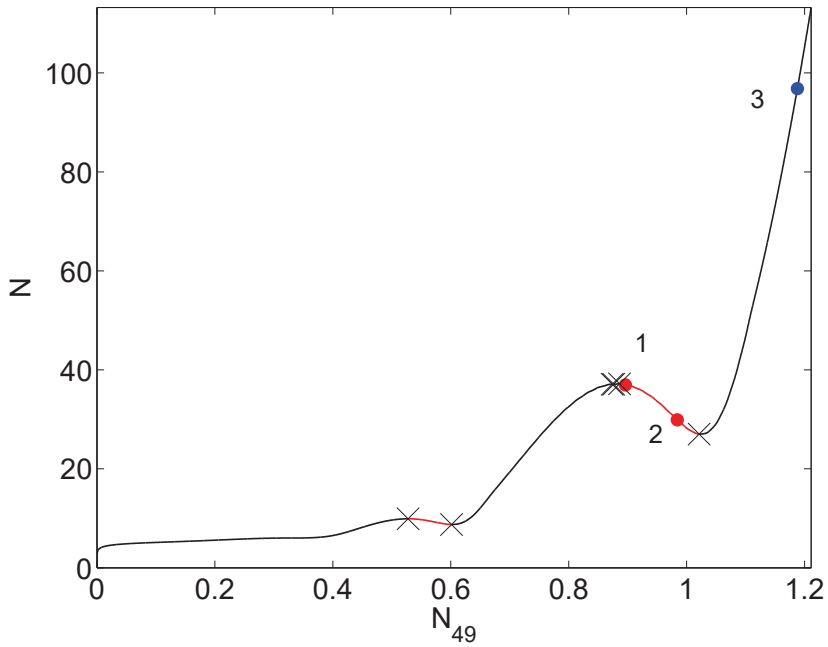
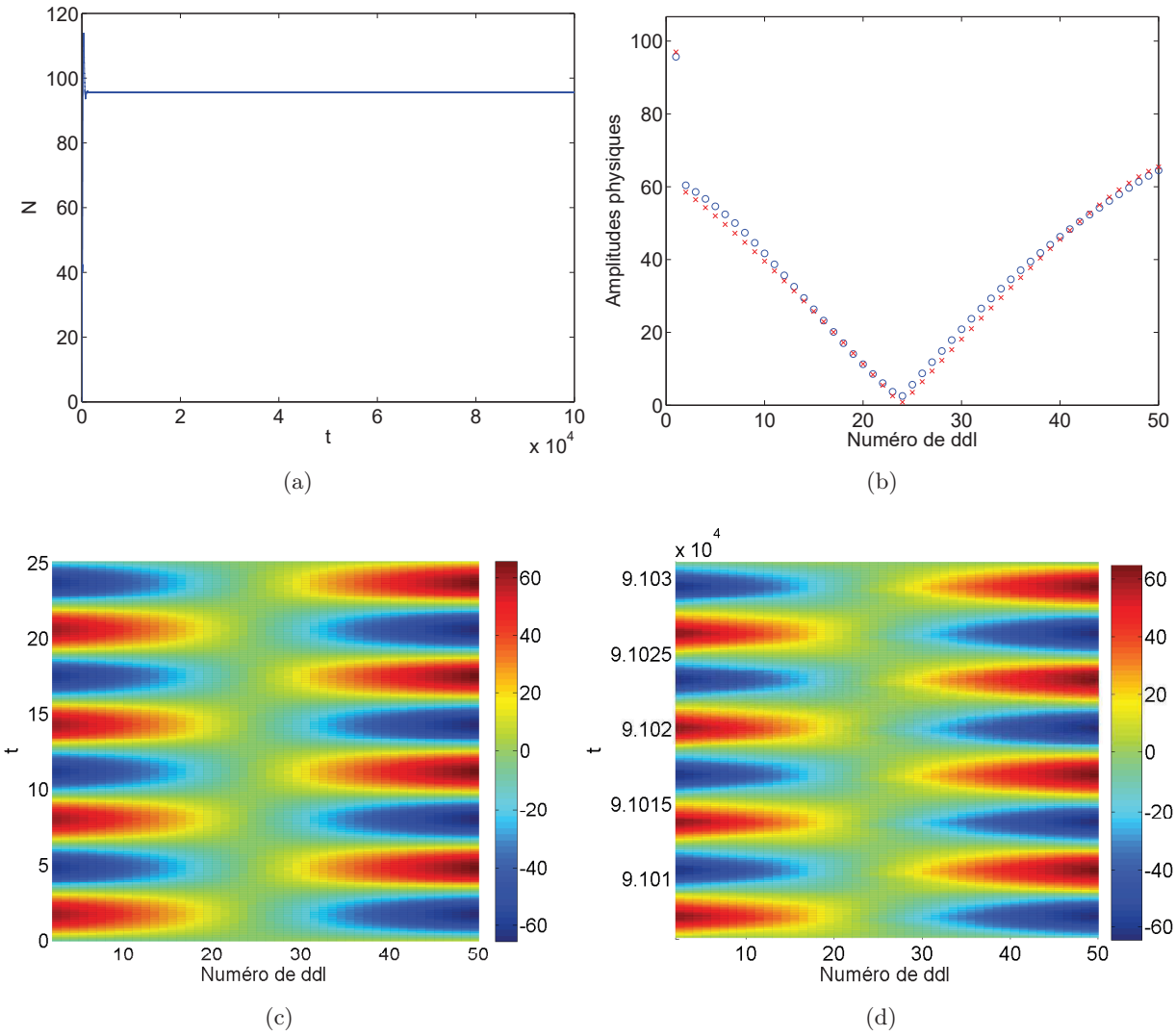


FIGURE 4.7 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 280$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre, un stable (point bleu no. 3) et deux instables (points rouges no. 1 et 2) ainsi que six points singuliers (croix noires).

on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} -\Omega^2 U_1 - BW_2 - \dfrac{3}{4}DW_2^3 = 0 \\ (2B - \Omega^2)W_2 - BW_3 + \dfrac{3}{4}D(2W_2^3 - W_3^3) = 0 \\ (2B - \Omega^2)W_j - B(W_{j-1} + W_{j+1}) + \dfrac{3}{4}D(-W_{j-1}^3 + 2W_j^3 - W_{j+1}^3) = 0\,, \quad j = 3, \ldots, P-1 \\ (2B - \Omega^2)W_P - BW_{P-1} + \dfrac{3}{4}D(2W_P^3 - W_{P-1}^3) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Ce système de P équations à $(P + 1)$ inconnues se résout de la même façon que les équations du SIM dans la mesure où les polynômes de degré 3 ont un discriminant toujours négatif. On peut ainsi tracer une représentation des modes non linéaires de la chaîne dans un plan (W_P,Ω), comme montré sur la figure 4.9 où les paramètres choisis sont ceux de la section 4.2.1. Les lignes bleues correspondent chacune à un mode et rendent compte de la dépendance amplitude-fréquence apportée par la non-linéarité. La ligne pointillée noire fait référence au mode normal linéaire du SP, et donc à la fréquence de sollicitation considérée plus tôt. Deux points A et B sont par ailleurs marqués à l'intersection de ce mode linéaire et de deux modes de la chaîne. Ils correspondent à des amplitudes W_{49} proches des amplitudes N_{49} des deux derniers régimes périodiques de la section 4.2.1, et sont plus généralement proches des fourchettes d'amplitude des deux branches stables du SIM correspondantes. Les formes modales aux points A et B sont tracées sur la figure 4.10 et sont analogues aux profils d'amplitudes décrits sur les figures 4.6 et 4.8.
On peut ici conclure que dans le cas de régimes périodiques, le SP transfère une partie de son énergie



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 4.8 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 280$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 3 (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus) (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 3 (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1.

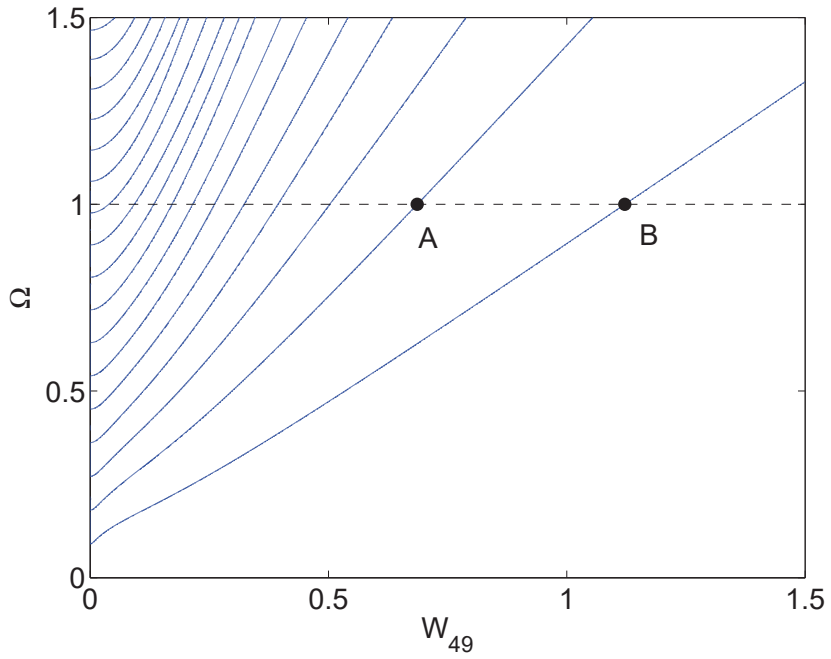
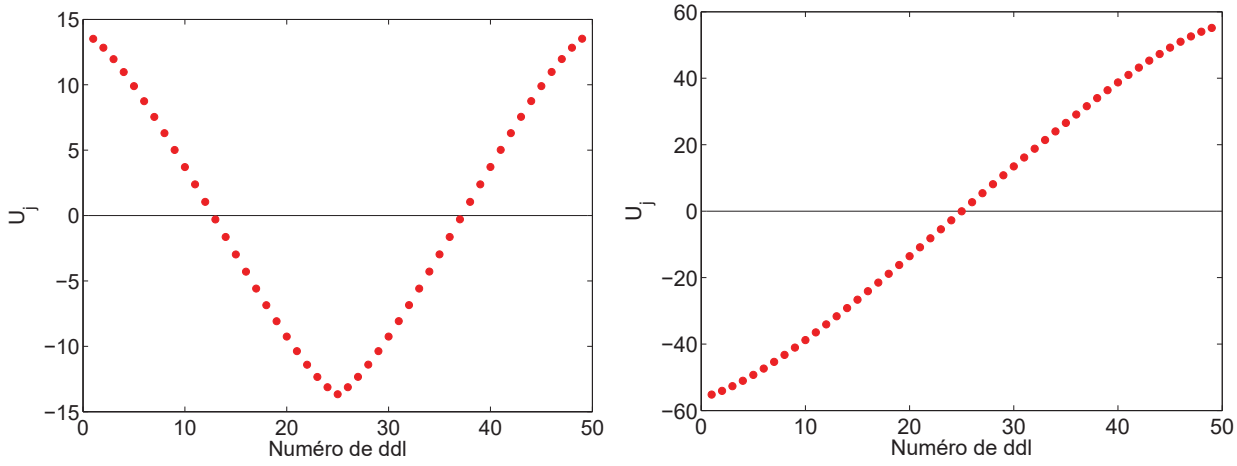


FIGURE 4.9 – $P = 49$, $B = 2$ et $D = 50$ – Représentation des modes non linéaires du système dans le plan (W_P,Ω).



(a) (b)

FIGURE 4.10 – $P = 49$, $B = 2$, $D = 50$ et $\Omega = 1$ – Formes modales aux points A et B (voir Fig. 4.9) (a) Point A, (b) Point B.

vibratoire dans la chaîne dont la dynamique est régie par ses modes non linéaires. Le mode excité est par ailleurs fonction de la branche du SIM sur laquelle le comportement périodique prend place.

4.2.3 Réponse de type SMR

Les comportements du système autour de ses points d'équilibre ayant été caractérisés, la dynamique générée par les points singuliers est abordée dans cette section. Les paramètres de forçage sont choisis comme suit : $f = 250$ et $\sigma = 6$.
La position des points d'équilibre et singuliers sur le SIM est montrée sur la figure 4.11. Le système possède un point d'équilibre instable et six points singuliers. Il devrait en conséquence subir une réponse de type SMR autour d'une ou plusieurs zones instables du SIM. En effet, la multiplicité des zones instables laisse place à de possibles cycles de SMR complexes. Les figures 4.12(a)-(b) tracent respectivement N en fonction du temps et l'évolution temporelle du comportement de la chaîne sur une durée correspondant à un peu plus d'un cycle de SMR. La dynamique des oscillateurs non linéaires opère des changements brusques entre deux comportements modaux, qui sont ceux décrits dans la section 4.2.2. Le système fait donc face à des bifurcations entre les deux branches stables du SIM encadrant la branche instable supérieure. Les séries temporelles de la figure 4.13 prouvent que ce comportement persiste sur tout l'intervalle de temps de l'intégration. Les réponses de type SMR prennent donc la forme de bifurcations entre plusieurs modes non linéaires de la chaîne d'oscillateurs. De tels comportements non stationnaires ont été observés et décrits dans le cadre des LPT dans différents systèmes tels que des modèles de Fermi-Pasta-Ulam [Starosvetsky et Manevitch, 2013] et Klein-Gordon [Smirnov et Manevich, 2011] décrivant des chaînes d'oscillateurs infinies ou dans une chaîne finie reproduisant les conditions de vide acoustique [Manevitch et Vakakis, 2014]. Dans le cas présent, seuls deux modes sont impliqués. Néanmoins, des régimes s'articulant autour de plusieurs branches instables du SIM et impliquant plusieurs modes pourraient survenir. Une des pistes pour les observer numériquement consisterait à tester plusieurs conditions initiales pour différents couples (f,σ). Ce n'est pas réalisé dans ce manuscrit.

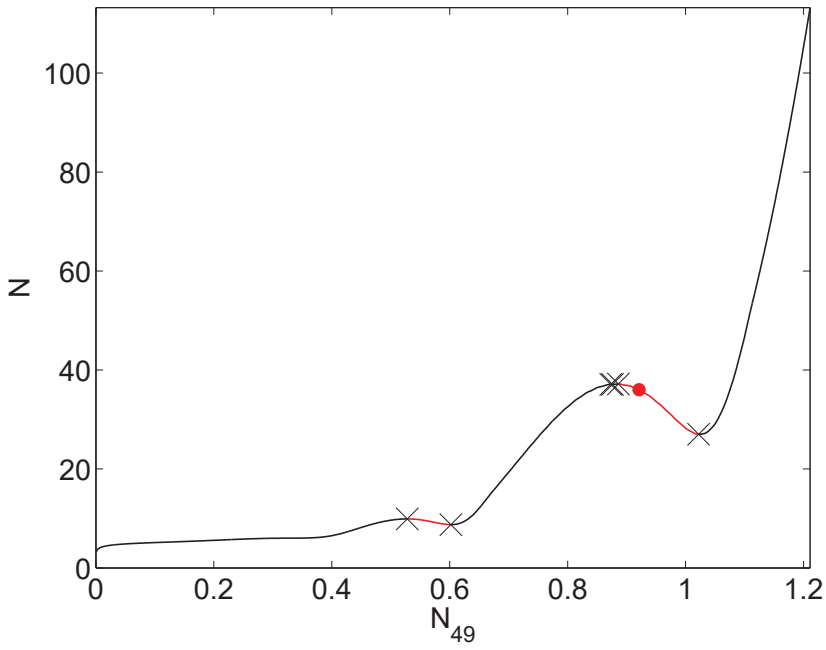
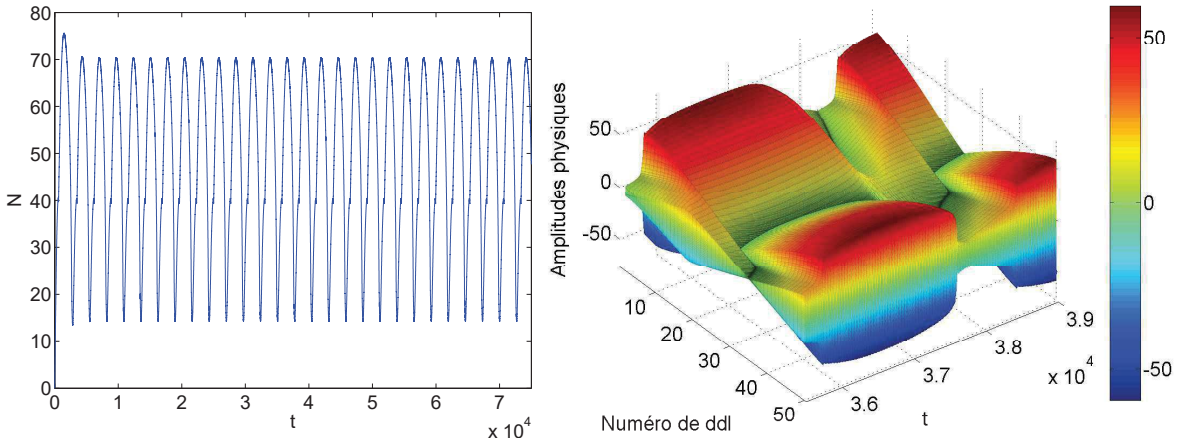


FIGURE 4.11 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et six points singuliers (croix noires).



(a) (b)

FIGURE 4.12 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR.

4.3 Application au contrôle

4.3.1 Premières preuves

La détection des points d'équilibre et points singuliers permet d'estimer la capacité de la chaîne d'oscillateurs à effectuer un contrôle vibratoire du SP. On se propose dans cette partie d'évaluer le transfert d'énergie opéré par la chaîne en traçant des graphes amplitude-fréquence $(N - \sigma)$ en considérant les mêmes paramètres de couplage que dans la section 4.2. Ils sont présentés sur la figure 4.14, chacun correspondant à une amplitude de forçage f différente. Les points d'équilibre stables et instables sont respectivement tracés en bleu et rouge. Les points singuliers sont marqués par des lignes discontinues noires horizontales (leurs amplitudes ne dépendent pas du désaccordage σ). De plus, l'amplitude à laquelle le SP oscillerait sans la chaîne est représentée par une ligne noire pointillée et prend logiquement la forme d'un pic symétrique autour de $\sigma = 0$. Sa valeur maximale est appelée "amplitude linéaire maximale".
À basse énergie ($f = 10$), il apparaît clairement qu'une partie importante de l'énergie vibratoire du SP a été transférée dans la chaîne. En effet, la plus haute amplitude que le SP peut subir en présence de la chaîne vaut 6.4 % de l'amplitude linéaire maximale. Le pic du mode linéaire est écrêté. En augmentant la valeur de f à 30, une branche isolée apparaît et réduit l'efficacité du contrôle, l'amplitude maximale du SP passant à 13.4 %, puis à 26.3 % pour $f = 60$. Dans ce dernier cas, deux points singuliers apparaissent atour de la première branche instable. L'amplitude maximale du SP retombe à 18.9, 14.7 et 11.0 % de l'amplitude linéaire maximale pour les cas $f = 100$, $f = 150$ et $f = 250$. La branche isolée est toujours présente et réduit les capacités de contrôle vibratoire de la chaîne. Notons cependant que la présence de points singuliers peut mener à des réponses de type SMR de faible amplitude.
En résumé, sur les intervalles de niveau et de fréquence de sollicitation testés, l'amplitude du SP est fortement abaissée grâce à la chaîne d'oscillateurs couplée qui joue un rôle d'absorbeur de vibrations. Dans le cas le plus défavorable, elle est réduite d'un facteur 4. Il serait intéressant de développer une procédure d'optimisation permettant de supprimer les branches isolées. Cela améliorerait grandement l'efficacité du contrôle vibratoire. La propension d'une chaîne d'oscillateurs à absorber l'énergie du SP ayant été prouvée, essayons de comparer ses performances à un système à un degré de liberté.

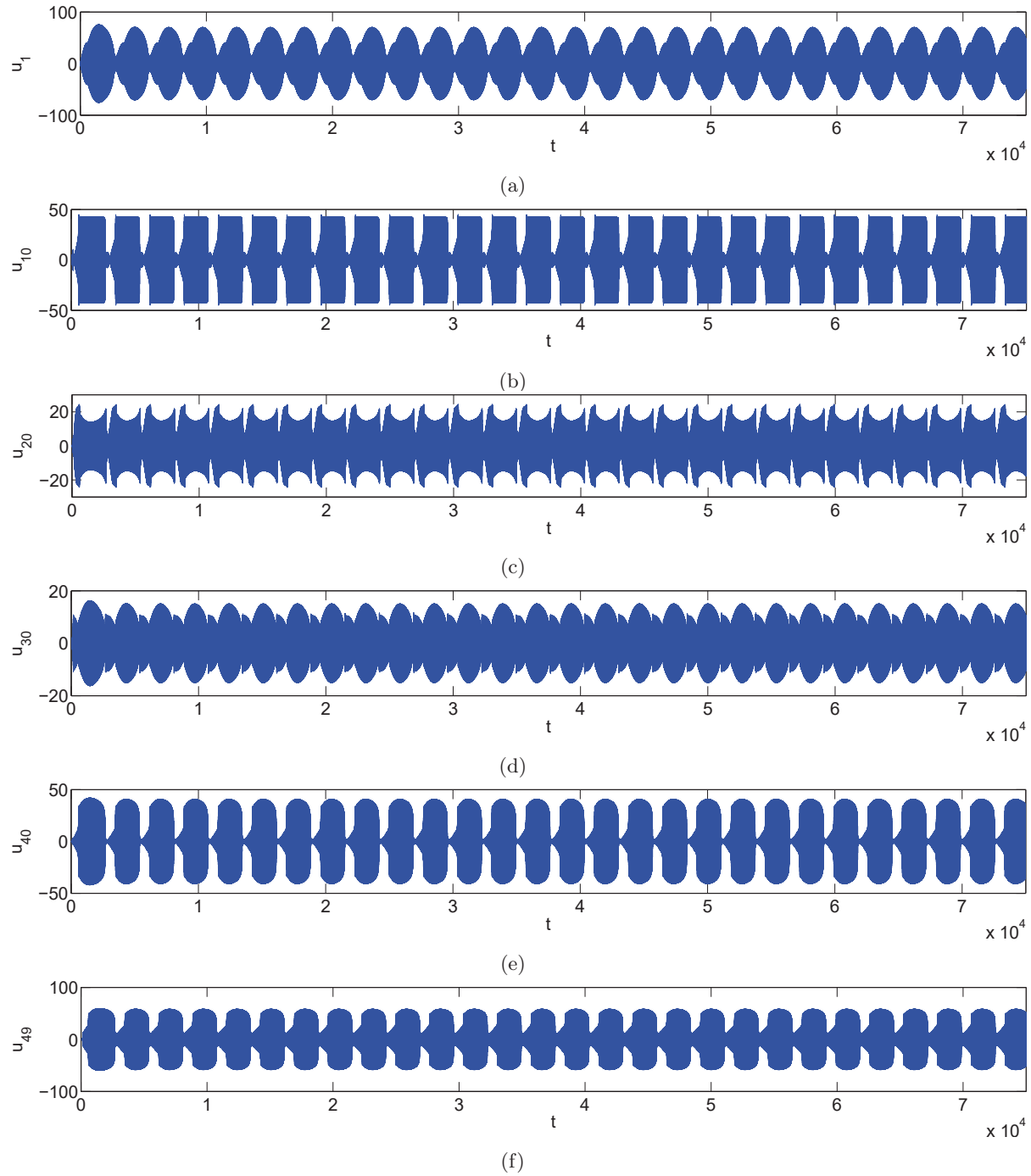
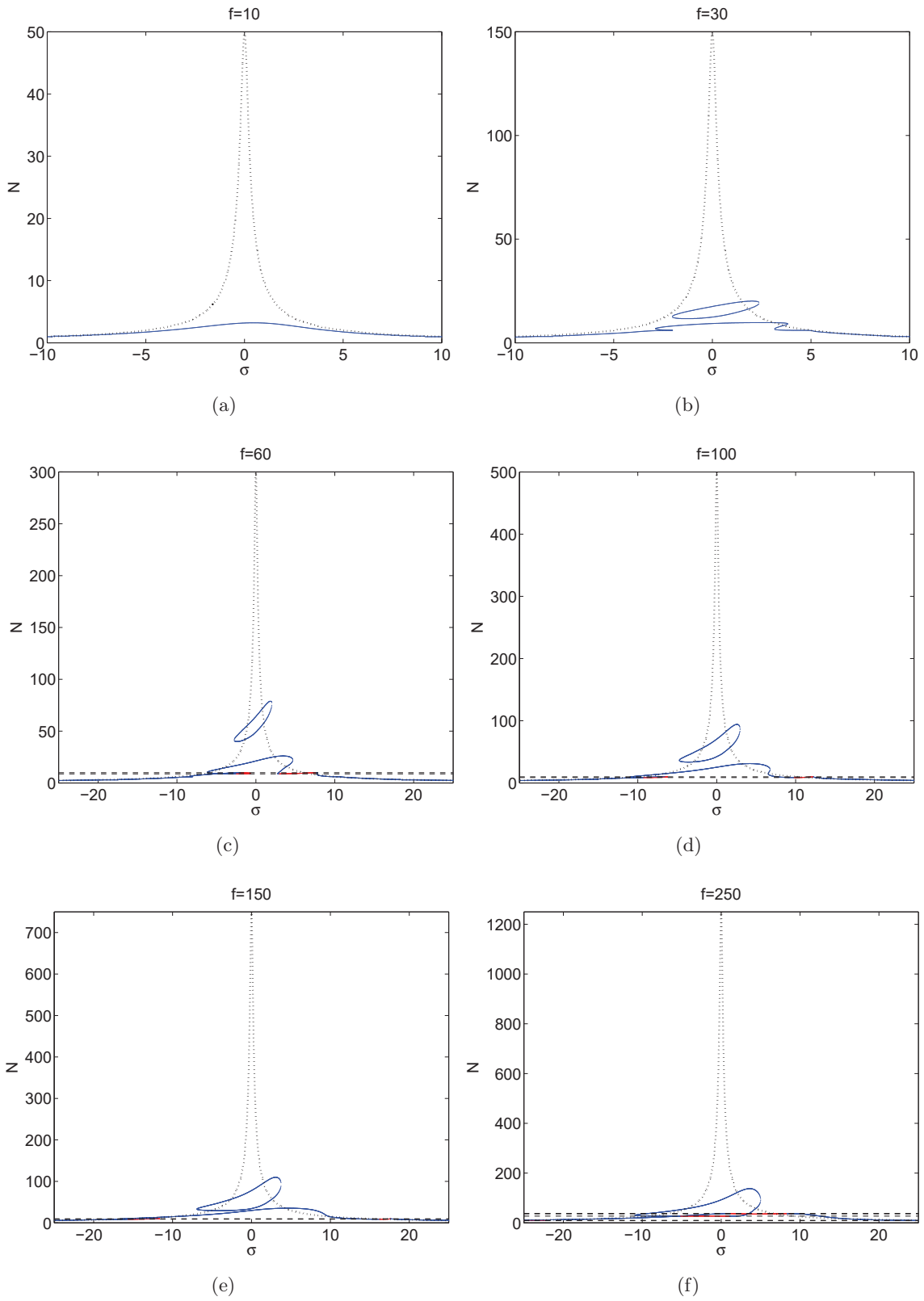


FIGURE 4.13 – $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – Séries temporelles de différents oscillateurs de la chaîne tirées des résultats numériques pendant une réponse de type SMR (a) u_1 (b) u_{10} (c) u_{20} (d) u_{30} (e) u_{40} (f) u_{49}.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIGURE 4.14 – Graphes amplitude-fréquence pour les paramètres suivants : $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $r = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ – (a) $f = 10$, (b) $f = 30$, (c) $f = 60$, (d) $f = 100$, (e) $f = 150$, (f) $f = 250$. Les points bleus et rouges correspondent respectivement aux points d'équilibre stables et instables. Les points singuliers sont marqués par des lignes discontinues noires horizontales. Les lignes pointillées noires tracent l'amplitude du SP sans couplage de la chaîne d'oscillateurs non linéaires.

4.3.2 Comparaison des performances d'un oscillateur ajouté à un ddl et d'une chaîne

On souhaite ici savoir si le fait de séparer la masse d'un oscillateur non linéaire couplé en un ensemble d'oscillateurs en série permet un contrôle plus efficace. Précisément, la question est la suivante : partant d'une technologie donnée, fixant les raideurs linéaires et non linéaires ainsi que les amortissements dans le système couplé, et considérant une masse ajoutée donnée, est-il préférable de concevoir un absorbeur à un ddl ou une chaîne d'oscillateurs pour réaliser le contrôle passif du SP ?
Partons du système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c\dot{v} + \epsilon c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon B_1(v - u_1) - \epsilon D(v - u_1)^3 = \epsilon f \sin(\omega t) \\ \\ P\ddot{u}_1 + c_1(\dot{u}_1 - \dot{v}) + B_1(u_1 - v) + D(u_1 - v)^3 = 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

Un oscillateur non linéaire de masse $P\epsilon$ est couplé au SP. Comparons ses performances à une chaîne de P oscillateurs dont le couplage avec le SP comporte une partie linéaire et une partie cubique :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c\dot{v} + \epsilon c_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon B_1(v - u_1) - \epsilon D(v - u_1)^3 = \epsilon f \sin(\omega t) \\ \\ \ddot{u}_1 + c_1(\dot{u}_1 - \dot{v}) + B_1(u_1 - v) + c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + B(u_1 - u_2) + D(u_1 - u_2)^3 = 0 \\ \\ \ddot{u}_j + c_1(-\dot{u}_{j-1} + 2\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + B(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + D(u_j - u_{j-1})^3 + D(u_j - u_{j+1})^3 \\ j = 2, \ldots, P-1 \\ \\ \ddot{u}_P + c_1(\dot{u}_P - \dot{u}_{P-1}) + B(u_P - u_{P-1}) + D(u_P - u_{P-1})^3 = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Dans les deux cas, la masse totale ajoutée et couplée au SP est identique ($P\epsilon$). Comme évoqué plus haut, la comparaison est menée pour les mêmes paramètres de raideur et amortissement. Les deux systèmes (4.19) et (4.20) peuvent se traiter grâce à la méthodologie analytique décrite dans le chapitre 2.
La figure 4.15 présente l'amplitude N des points d'équilibre des systèmes à 2 et $(P+1)$ ddl (croix et points, respectivement), pour les paramètres suivants : $P = 10$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 2$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 2.5$, $D = 20$ et $\sigma = 0$. Les points singuliers ne sont pas représentés. Néanmoins, lorsque pour un niveau d'excitation f il n'existe qu'un point d'équilibre instable, le système subit une réponse de type SMR dont l'amplitude N est bornée par les lignes horizontales noires (continues pour le système à 2 ddl et discontinues pour la chaîne). L'oscillateur ajouté à un degré de liberté est plus performant à basse énergie. Pour des niveaux plus élevés, i.e. pour f supérieur à 60 environ, la chaîne présente de meilleures performances en termes de contrôle passif.
Ainsi, répartir la masse d'un absorbeur de vibration non linéaire à un ddl en une chaîne d'oscillateurs non linéaires en série a pour effet de réduire son efficacité à basse énergie mais de l'améliorer à hauts niveaux de forçage.

4.4 Généralisation à un système principal à plusieurs degrés de liberté

Les développements menés dans ce manuscrit ont jusqu'à présent fait état de SP à un ddl. Cependant, comme dit dans le chapitre 2, ils peuvent être généralisés à un SP à plusieurs ddl dont la dynamique est projetée sur un de ses modes linéaires, à condition que ses fréquences propres soient suffisamment éloignées. Considérons le système présenté sur la figure 4.16. Un SP linéaire à n ddl est couplé à une chaîne de P oscillateurs non linéaires de masse m, avec une force de rappel de couplage $V(w) = (\tilde{B}w + \tilde{D}w^3)$ et un amortissement visqueux γ. Chaque oscillateur du SP est soumis

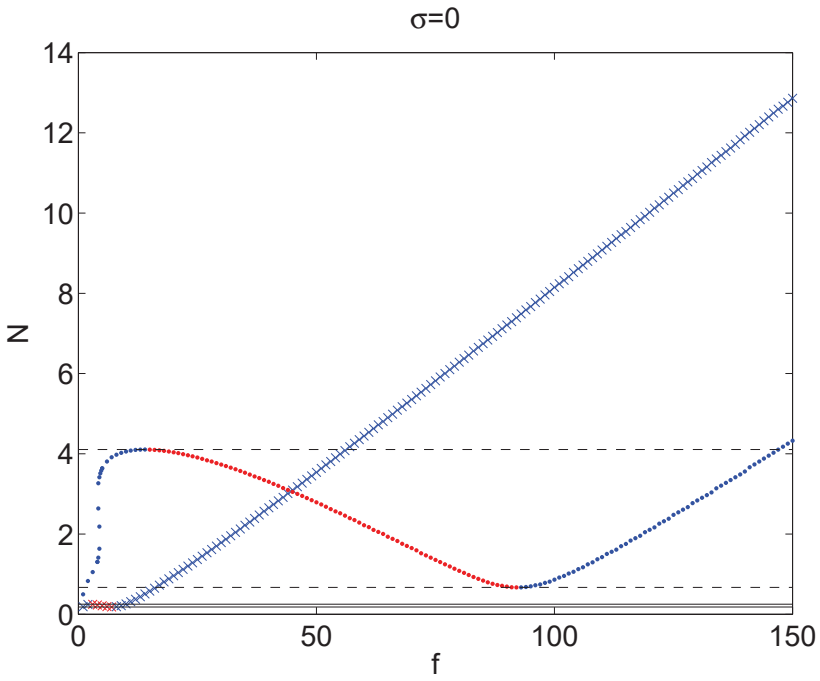


FIGURE 4.15 – $P = 10$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 2$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 2.5$, $D = 20$ et $\sigma = 0$ – Amplitude N des points d'équilibre en fonction du niveau de sollicitation f. Les croix correspondent aux points d'équilibre du système à 2 ddl (4.19) et les points à ceux du système à $(P + 1)$ ddl (4.20). La couleur rouge fait référence à des points d'équilibre instables. Les bornes en amplitude des réponses de type SMR sont représentées par des lignes horizontales noires, continues pour le système à 2 ddl et discontinues pour la chaîne.

à une sollicitation externe de la forme $\tilde{F}_i \sin(\tilde{\omega}t)$. Les raideurs K_i et les amortissements visqueux Γ_i assurent le couplage entre masses du SP, qui est attaché à la chaîne par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient γ.

4.4.1 Développements analytiques

Les équations gouvernant la dynamique du SP s'écrivent :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{\Gamma}_c(\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{K}_c(\mathbf{X} - \mathbf{U}_1) = \tilde{\mathbf{F}} \sin(\tilde{\omega}t) \tag{4.21}$$

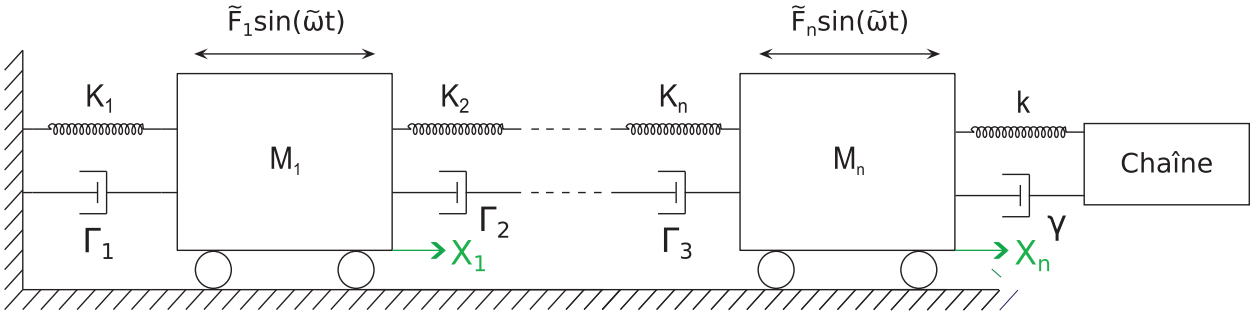


FIGURE 4.16 – Système principal linéaire forcé à n ddl couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires.

où

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_n \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 & \dots & 0 \\ -K_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & K_{n-1}+K_n & -K_n \\ 0 & \dots & 0 & -K_n & K_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1+\Gamma_2 & -\Gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\Gamma_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Gamma_{n-1}+\Gamma_n & -\Gamma_n \\ 0 & \dots & 0 & -\Gamma_n & \Gamma_n \end{pmatrix}, \mathbf{K}_c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{\Gamma}_c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_n \end{pmatrix}$$

Les équations de la chaîne s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + \gamma(-\dot{v} + 2\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k(u_1 - v) + \tilde{B}(u_1 - u_2) + \tilde{D}(u_1 - u_2)^3 = 0 \\ \\ m\ddot{u}_j + \gamma(-\dot{u}_{j-1} + 2\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + \tilde{B}(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + \tilde{D}(u_j - u_{j-1})^3 + \tilde{D}(u_j - u_{j+1})^3 \\ j = 2, \dots, P-1 \\ \\ m\ddot{u}_P + \gamma(\dot{u}_P - \dot{u}_{P-1}) + \tilde{B}(u_P - u_{P-1}) + \tilde{D}(u_P - u_{P-1})^3 = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Les variables X_i désignent les déplacements de chacun des oscillateurs du SP et u_j ceux des oscillateurs de la chaîne. Les modes normaux linéaires du SP sont calculées par la détermination des valeurs et vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, à savoir $(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ et $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)$ où $\mathbf{P}$ est la matrice de la base modale. Les coordonnées normales $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ vérifiant $\mathbf{X} = \mathbf{PQ}$

permettent de réécrire (4.21) :

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}\dot{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Gamma}_c(\mathbf{P}\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c(\mathbf{P}\mathbf{Q} - \mathbf{U}_1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}\sin(\tilde{\omega}t)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P}\end{aligned} \tag{4.24}$$

$\tilde{\mathbf{K}}$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont les pulsations propres $(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$. On suppose par ailleurs que $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ est aussi diagonale (hypothèse de Basile). Ses coefficients sont appelés $(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$. Supposons désormais que le système est excité autour de la fréquence de son $l^{\text{ème}}$ mode, i.e. $\tilde{\omega}^2 = \omega_l^2(1+\tilde{\sigma})$ où $\tilde{\sigma}$ est petit devant 1. Deux questions émanent alors :

- Au vu de la fréquence de sollicitation, on peut s'attendre à ce que seul le $l^{\text{ème}}$ mode soit excité. Les autres modes auront-ils une contribution significative, du fait notamment de la présence de la chaîne ?
- Le modèle présenté dans la section 4.1 peut-il décrire la dynamique du système ?

On définit $\tilde{M}_{ij}$ et P_{ij} comme les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne des matrices $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ et $\mathbf{P}$, respectivement. Le système (4.24) s'écrit sous la forme de n équations linéaires :

$$\begin{aligned}&\ddot{Q}_j + \tilde{\Gamma}_j\dot{Q}_j + \omega_j^2 Q_j + \tilde{M}_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n} P_{ni}(kQ_i + \gamma\dot{Q}_i) - (ku_1 + \gamma\dot{u}_1)\right] = \sum_{i=1}^{n}\tilde{M}_{ji}\tilde{F}_i\sin(\omega_l t\sqrt{1+\tilde{\sigma}}) \\ &j = 1, \ldots, n\end{aligned} \tag{4.25}$$

On suppose d'une part que les modes sont bien séparés, c'est-à-dire que les pulsations propres ω_j sont éloignées les unes des autres, et d'autre part que le SP ne présente aucune résonance interne ou résonance autoparamétrique. On fait en conséquence l'hypothèse que la dynamique du système est principalement décrite par son $l^{\text{ème}}$ mode. Cela reste raisonnable si u_1 et $\dot{u}_1$ ne deviennent pas des termes résonants pour les autres modes, i.e. si le premier oscillateur de la chaîne vibre à la fréquence de forçage. La contribution des autres modes à la réponse du système est ainsi considérée négligeable :

$$Q_j(t) = 0\,, \quad \forall j \in [|1,n|]\backslash\{l\} \tag{4.26}$$

La $l^{\text{ème}}$ équation de (4.25) devient :

$$\ddot{Q}_l + \tilde{\Gamma}_l\dot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l + \tilde{M}_{ln}\left[P_{nl}(kQ_l + \gamma\dot{Q}_l) - (ku_1 + \gamma\dot{u}_1)\right] = \sum_{i=1}^{n}\tilde{M}_{li}\tilde{F}_i\sin(\omega_l t\sqrt{1+\tilde{\sigma}}) \tag{4.27}$$

On introduit les paramètres suivants :

$$\begin{cases} \epsilon = \tilde{M}_{ln}P_{nl}m \\ v = P_{nl}Q_l \\ \omega_0^2 = \omega_l^2 \\ \epsilon c = \tilde{\Gamma}_l \\ \epsilon B_1 = \tilde{M}_{ln}P_{nl}k \\ \epsilon c_1 = \tilde{M}_{ln}P_{nl}\gamma \\ \epsilon B = \tilde{M}_{ln}P_{nl}\tilde{B} \\ \epsilon D = \tilde{M}_{ln}P_{nl}\tilde{D} \\ \epsilon f = P_{nl}\sum_{i=1}^{n}\tilde{M}_{li}\tilde{F}_i \\ \epsilon\sigma = \tilde{\sigma} \end{cases} \tag{4.28}$$

En remplaçant les anciens paramètres par ceux de (4.28), les équations (4.27) et (4.23) prennent la forme du système (4.2). Il semble donc possible d'utiliser le modèle présenté dans la section 4.1,

en utilisant les relations (4.28) pour en définir les paramètres, pour prédire la dynamique du SP à plusieurs degrés de liberté couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. Les hypothèses faites dans cette section doivent cependant être vérifiées numériquement.

4.4.2 Vérifications numériques

Un système composé de 5 ddl linéaires couplé à P oscillateurs non linéaires en série est ici considéré. Il pourrait modéliser la dynamique d'un bâtiment à 5 étages couplé à une chaîne de P ddl attachée sur le toit prévue pour contrôler l'énergie vibratoire d'un des modes de la structure. La figure 4.17 représente un schéma idéalisé d'un tel système.

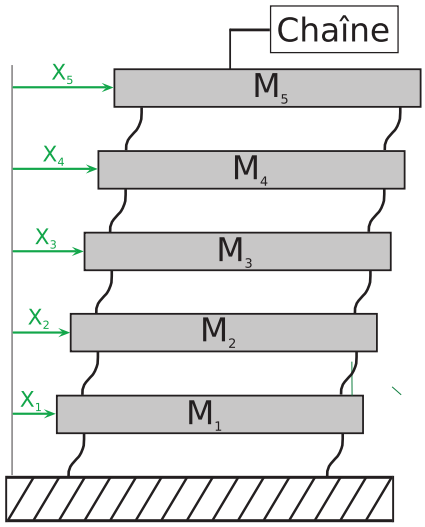


FIGURE 4.17 – Modèle de bâtiment à cinq étages couplé à une chaîne d'oscillateurs sur son toit.

Les simulations numériques sont réalisées par intégration temporelle du système (4.21) auquel sont ajoutées les équations de la chaîne. Les valeurs choisies pour les paramètres du SP sont données dans le tableau 4.2.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0.5	1.5	1	0.5	1
K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
2	1	1.5	1.413	2
Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
0.0004	0.0002	0.0003	0.00028	0.0004

TABLE 4.2 – Valeurs des paramètres choisies pour les simulations numériques réalisées sur une structure linéaire à 5 ddl couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires.

Les pulsations propres suivantes sont calculées : $\omega_1 = 2.95$, $\omega_2 = 2.51$, $\omega_3 = 1.80$, $\omega_4 = 1$ et $\omega_5 = 0.36$. Le SP est sollicité autour de son quatrième mode, i.e. $\tilde{\omega}^2 = \omega_4^2(1+\tilde{\sigma})$. Deux exemples sont traités. Pour le premier, la chaîne est composé de $P = 20$ oscillateurs et l'ensemble des paramètres

est donné ci-dessous :

$$\begin{cases} m = 0.005 \\ \omega_l = 1 \\ \tilde{\Gamma}_l = 0.0002 \\ k = 0.005 \\ \gamma = 0.005 \\ \tilde{B} = 0.005 \\ \tilde{D} = 0.1 \\ F_i = 0.2\ , \forall i \\ \tilde{\sigma} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon = 0.00183 \\ \omega_0 = 1 \\ c = 0.109 \\ B_1 = 1 \\ c_1 = 1 \\ B = 1 \\ D = 20 \\ f = -9.23 \\ \sigma = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Tous les oscillateurs sont initialement au repos. La figure 4.18 dépeint le SIM du système, qui possède trois points d'équilibre et deux points singuliers. Les séries temporelles des cinq coordonnées modales du SP sont représentées sur les figures 4.19(a)-(e). Le quatrième mode est excité tandis que les autres restent quasiment au repos, ce qui valide l'hypothèse faite dans la section précédente. Par ailleurs, la comparaison entre les amplitudes du système prédites par le premier point d'équilibre et celles obtenues numériquement est montrée sur la figure 4.19(f) et exhibe un excellent accord entre ces résultats.

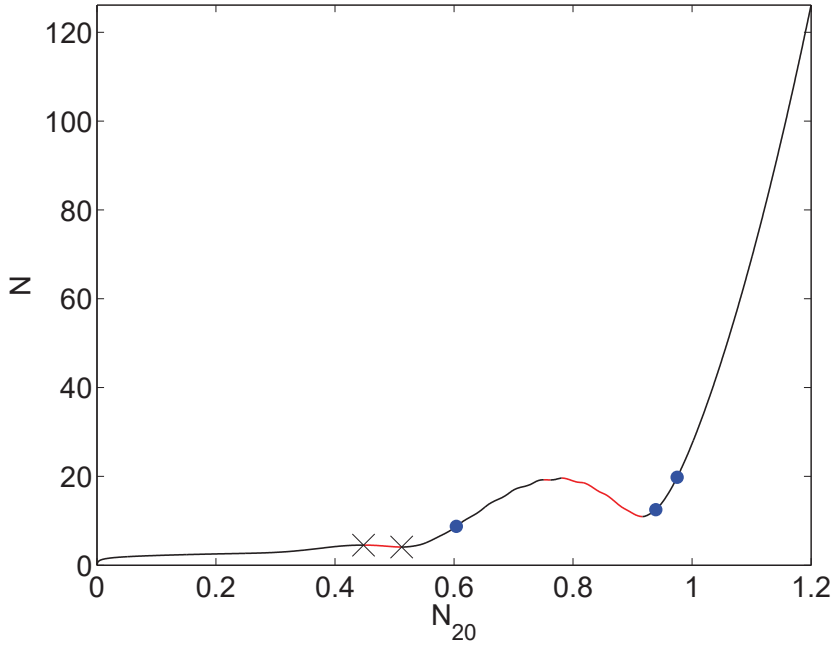


FIGURE 4.18 – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre stables (points bleus) et deux points singuliers (croix noires). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.29).

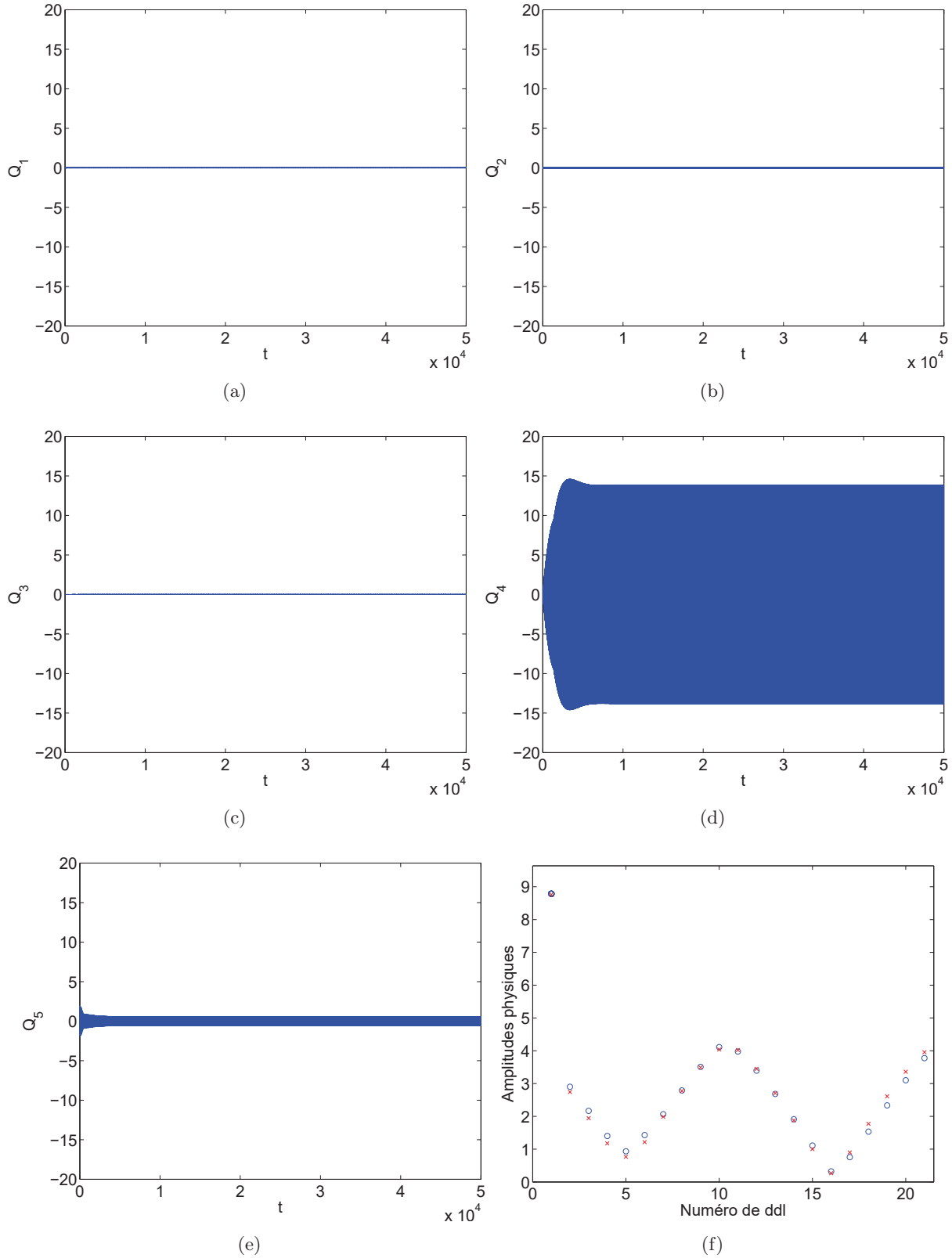


FIGURE 4.19 – (a)-(e) Séries temporelles des cinq coordonnées modales du SP issues des résultats numériques (f) Comparaison entre les amplitudes du système prédites par le premier point d'équilibre (croix rouges) et celles obtenues numériquement (ronds bleus). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.29).

Dans le second exemple, la chaîne est constituée de $P = 14$ oscillateurs. Les autres paramètres sont choisis comme suit :

$$\begin{cases} m = 0.005 \\ \omega_l = 1 \\ \tilde{\Gamma}_l = 0.0002 \\ k = 0.005 \\ \gamma = 0.004 \\ \tilde{B} = 0.005 \\ \tilde{D} = 0.25 \\ F_i = 0.15\ , \forall i \\ \tilde{\sigma} = 0.0027 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon = 0.00183 \\ \omega_0 = 1 \\ c = 0.109 \\ B_1 = 1 \\ c_1 = 0.8 \\ B = 1 \\ D = 50 \\ f = -7 \\ \sigma = 1.5 \end{cases} \tag{4.30}$$

Comme montré sur la figure 4.20, le système possède un point d'équilibre instable et deux points singuliers. Il devrait donc subir une réponse de type SMR, ce que confirment les résultats de la figure 4.21. Comme dans l'exemple précédent, le mode 4 domine la dynamique du SP. Le comportement de la chaîne présente quant à lui des bifurcations entre deux modes non linéaires.

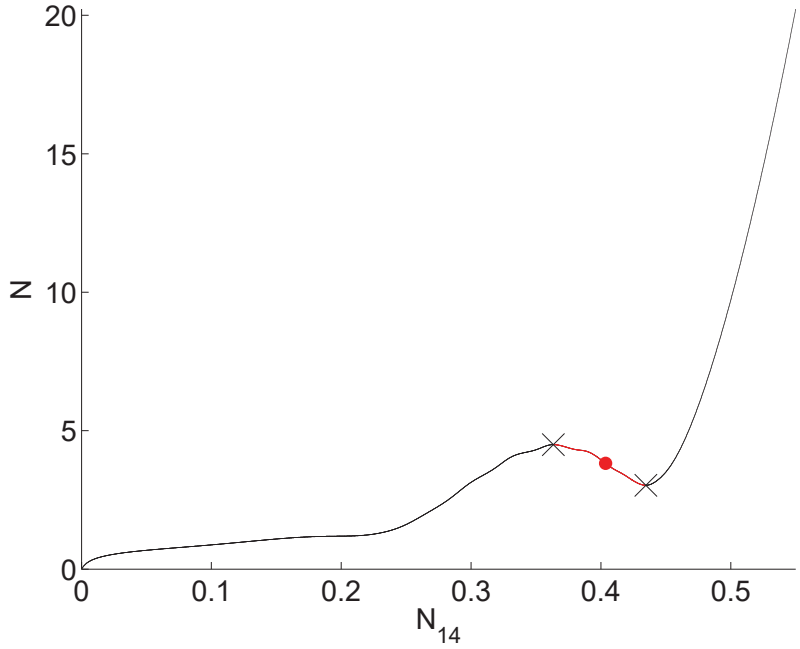


FIGURE 4.20 – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et deux points singuliers (croix noires). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.30).

Les deux exemples numériques présentés prouvent la capacité de la méthodologie analytique détaillée dans ce chapitre à prédire le comportement d'un SP linéaire multimodal couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires.

4.5 Conclusions du chapitre

Un système à $(P+1)$ ddl est étudié à l'aide de la méthodologie détaillée dans le chapitre 2. Une structure linéaire forcée autour de sa résonance est couplée à P oscillateurs non linéaires en série présentant des forces de rappel de couplage cubiques.
La détection des points d'équilibre est d'abord utilisée pour caractériser les régimes périodiques du système. La correspondance entre résultats analytiques et numériques est qualitativement satisfaisante à faible énergie, et quantitativement correcte en augmentant les niveaux de sollicitation. Il

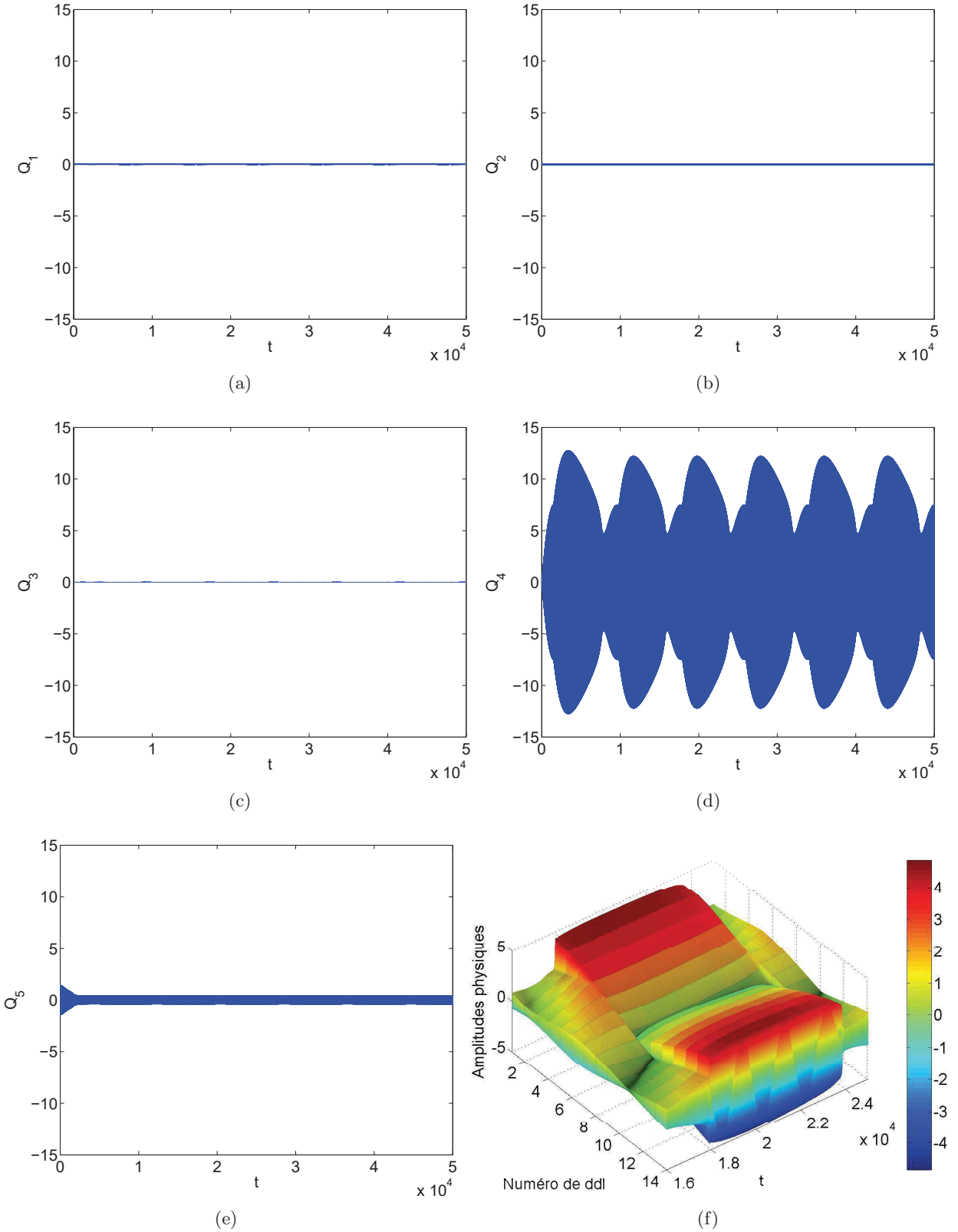


FIGURE 4.21 – (a)-(e) Séries temporelles des cinq coordonnées modales du SP issues des résultats numériques (f) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR. Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.30).

est ensuite prouvé que les régimes périodiques observés sont des modes non linéaires de la chaîne au sens de Rosenberg. Plus généralement, le SP transfère une partie de son énergie vibratoire en excitant des modes de la chaîne, le mode excité dépendant de la branche du SIM sur laquelle la dynamique évolue. L'observation des comportements générés par les points singuliers montre donc assez naturellement que les réponses de type SMR engendre des bifurcations répétées entre plusieurs modes non linéaires de la chaîne.
Les prédictions analytiques sont par la suite utilisées pour mettre en lumière des scénarios de contrôle passif du SP. Des preuves du transfert d'énergie du système maître vers la chaîne sont apportées. Par ailleurs, une comparaison menée sur les performances d'un absorbeur de vibrations à un ddl et une chaîne d'oscillateurs montre que diviser et répartir la masse ajoutée en une série d'oscillateurs couplés diminue les performances de contrôle passif à basse énergie et les améliore à plus haute amplitude d'excitation.
Enfin, un SP linéaire à plusieurs degrés de liberté couplé à une chaîne est étudié. Les développements menés dans cette dernière partie montrent qu'il est possible de se ramener au modèle considéré dans le reste de ce chapitre à condition que le SP possède des modes propres éloignés et qu'il soit excité autour d'une de ses résonances.

Chapitre 5

Variation de la méthodologie : approximation continue dans la chaîne

Dans ce chapitre, la méthode décrite dans le chapitre 2 est modifiée. Le comportement de la chaîne est décrit dans le cadre d'une approximation continue qui introduit des fonctions d'une variable d'espace en lieu et place des variables discrètes relatives à chaque oscillateur. À l'échelle de temps rapide, les équations discrètes du SIM sont remplacées par un problème aux limites comportant une équation différentielle ordinaire. Le calcul des points d'équilibre et des points singuliers est mené à l'échelle de temps lente.
Deux exemples d'application sont traités. Dans le premier, le SP linéaire est couplé à une chaîne d'oscillateurs présentant des forces de rappel locales cubiques. Les prédictions analytiques sont comparés aux résultats numériques. Dans le second exemple, des non-linéarités négatives sont introduites dans la chaîne. Des simulations numériques mettent en lumière l'existence de solutions ondulatoires et localisées spatialement. L'étude théorique mène à la détection d'une équation de Schrödinger non linéaire et permet d'apporter des premiers éléments d'analyse de ces comportements.

Sommaire

5.1 Méthodologie analytique 86
5.1.1 Approximation continue 86
5.1.2 Comportements multi-échelles du système 87
5.2 Exemple d'application : chaîne d'oscillateurs non linéaires présentant des potentiels locaux 88
5.2.1 SIM du système 89
5.2.2 Points d'équilibre et points singuliers 93
5.2.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques . . 95
5.3 Solutions ondulatoires : premiers éléments 96
5.3.1 Simulations numériques 98
5.3.2 Éléments d'explication théoriques 102
5.4 Conclusions du chapitre 105

Dans ce chapitre, une variation de la méthodologie détaillée dans le chapitre 2 est présentée. Le système considéré est le même et sa dynamique est décrite par les équations (2.1).

5.1 Méthodologie analytique

5.1.1 Approximation continue

L'hypothèse d'approximation continue se fonde sur l'idée que le chaîne présente un grand nombre d'oscillateurs. Leur comportement peut être décrit par une fonction continue du temps et de l'espace. Si Δx est l'espacement entre deux oscillateurs de la chaîne, on peut définir une première variable d'espace $X = (j-1)\Delta x$. Posant x tel que $X = x\Delta x$, la fonction continue décrivant les déplacements dans la chaîne s'écrit :

$$\begin{array}{l} u_j(t) = u(x = j-1,t) \\ x \in [0,L] \end{array} \tag{5.1}$$

où $L = P - 1$ est la longueur de la chaîne mesurée par la variable sans dimension x. Notons que le changement de variables passant aux déplacements relatifs n'est pas utilisé ici. La même hypothèse est utilisée pour les termes de sollicitation de la chaîne : $F_j(t) = \tilde{F}(x,t)$. Cette transformation permet de réaliser des développements de Taylor dans les $(L+1)$ équations relatives à la chaîne de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{j+1} &\approx u(j-1,t) + \Delta x\frac{\partial u}{\partial X}(j-1,t) + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(j-1,t) + \ldots + \frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial X^n}(j-1,t) + \ldots \\ &\approx u(j-1,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(j-1,t) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j-1,t) + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(j-1,t) + \ldots \\ u_{j-1} &\approx u(j-1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(j-1,t) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j-1,t) - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(j-1,t) + \ldots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Considérant que les couplages dans la chaîne sont homogènes, i.e. $\forall j \in [|2,L|]\ h_j = h_c$, le système (2.1) est transformé en un système de quatre équations (la dépendance en temps est omise par souci de simplicité d'écriture dans $v(t)$ et $u(x,t)$, notés v et $u(x)$) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega_0^2 v + \epsilon c\dfrac{\partial v}{\partial t} + \epsilon h_0\left(v,u(0),\dfrac{\partial v}{\partial t},\dfrac{\partial u}{\partial t}(0)\right) = \epsilon F + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0) - h_0\left(v,u(0),\dfrac{\partial v}{\partial t},\dfrac{\partial u}{\partial t}(0)\right) + h_1\left(u(0),\dfrac{\partial u}{\partial x}(0),\dfrac{\partial u}{\partial t}(0),\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(0)\right) = \tilde{F}(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x) + h_c\left(u(x),\dfrac{\partial u}{\partial x}(x),\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}(x),\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x),\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(x)\right) = \tilde{F}(x) + \mathcal{O}(\epsilon)\ , \quad x \in]0,L[\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L) + h_L\left(u(L),\dfrac{\partial u}{\partial x}(L),\dfrac{\partial u}{\partial t}(L),\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(L)\right) = \tilde{F}(L) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{array}\right. \tag{5.3}$$

La première équation est relative au SP et les trois dernières forment un problème aux limites. Les deuxième et quatrième équations en $x = 0$ et $x = L$ jouent le rôle de conditions limite. La troisième est une équation aux dérivées partielles régissant la dynamique de la chaîne.
Les variables de Manevitch sont modifiées : celles décrivant le comportement de la chaîne sont

remplacées par une fonction $\varphi(x,t)$ dépendant de la variable d'espace :

$$\begin{cases} \psi(t)e^{i\omega t} = \dfrac{\partial v(t)}{\partial t} + i\omega v(t) \\ \\ \varphi(x,t)e^{i\omega t} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i\omega u(x,t) \end{cases} \tag{5.4}$$

L'introduction des échelles de temps liées entre elles par le petit paramètre ϵ représentant la masse des oscillateurs non linéaires, ainsi que l'utilisation de la méthode de Galerkin mènent au système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\left(\omega - \dfrac{\omega_0^2}{\omega}\right)\psi + \epsilon\dfrac{c}{2}\psi + \epsilon H_0(\psi,\psi^*,\varphi(0),\varphi^*(0)) = \dfrac{\epsilon f}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(0) + \dfrac{i\omega}{2}\varphi(0) - H_0(\psi,\psi^*,\varphi(0),\varphi^*(0)) + H_1(\varphi(0),\varphi^*(0),\varphi_x(0),\varphi_x^*(0)) = \dfrac{\tilde{f}(0)}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x) + \dfrac{i\omega}{2}\varphi(x) + H_c(\varphi(x),\varphi^*(x),\varphi_x(x),\varphi_x^*(x),\varphi_{xx}(x),\varphi_{xx}^*(x)) = \dfrac{\tilde{f}(x)}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon)\ , \quad x \in]0,L[\\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(L) + \dfrac{i\omega}{2}\varphi(L) + H_L(\varphi(L),\varphi^*(L),\varphi_x(L),\varphi_x^*(L)) = \dfrac{\tilde{f}(L)}{2i} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{cases} \tag{5.5}$$

où $\tilde{F} = \tilde{f}(x)\sin(\omega t)$ et les fonctions H_0, H_1, H_c et H_L représentent les contributions des couplages à la première harmonique des oscillations des masses. L'indice $._x$ désigne l'opérateur de dérivation par rapport à la variable d'espace. Comme précédemment, ce système est étudié aux échelles de temps rapide $\tau_0 = t$ et lente $\tau_1 = \epsilon t$ en considérant successivement les ordres ϵ^0 et ϵ^1 des équations.

5.1.2 Comportements multi-échelles du système

Définition du SIM

À l'ordre ϵ^0, la première équation du système (5.5) donne encore $\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau_0} = 0$. Pour définir le SIM, on considère les points fixes $\phi(x)$ des trois équations restantes vérifiant $\lim\limits_{\tau_0 \to +\infty} \dfrac{\partial \phi(x)}{\partial \tau_0} = 0$:

$$\begin{cases} \omega_0\phi(0) + 2i\tilde{H}_0\left(\psi,\psi^*,\phi(0),\phi^*(0)\right) - 2i\tilde{H}_1\left(\phi(0),\phi^*(0),\phi_x(0),\phi_x^*(0)\right) + \tilde{f}(0) = 0 \\ \\ \omega_0\phi(x) - 2i\tilde{H}_c\left(\phi(x),\phi^*(x),\phi_x(x),\phi_x^*(x),\phi_{xx}(x),\phi_{xx}^*(x)\right) + \tilde{f}(x) = 0\ , \quad x \in]0,L[\\ \\ \omega_0\phi(L) - 2i\tilde{H}_L\left(\phi(L),\phi^*(L),\phi_x(L),\phi_x^*(L)\right) + \tilde{f}(L) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Le SIM comporte désormais une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire remplaçant l'équation aux dérivées partielles, avec deux équations jouant le rôle de conditions limite en $x = 0$ et $x = L$. Dans la condition limite en $x = 0$ (première équation), la fonction en ψ apparaît comme un terme source venant déterminer l'énergie injectée dans la chaîne et influant sur l'expression de $\phi(x)$ obtenue par la résolution de l'EDO. Faire varier ψ permet de parcourir le spectre des comportements asymptotiques à l'échelle de temps lente τ_1 admissibles pour la chaîne.

Points d'équilibre et points singuliers

La première équation du système (5.5) dérivée à l'ordre ϵ^1 s'écrit autour du SIM :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\left(c + i\sigma\omega_0\right)\psi + \tilde{H}_0\left(\psi,\psi^*,\phi(0),\phi^*(0)\right) = \frac{f}{2i} \tag{5.7}$$

Définissons les modules et phases des variables de Manevitch comme suit :

$$\begin{cases} \psi = N_{SP} e^{i\delta_{SP}} \\ \phi(x) = N(x) e^{i\delta(x)} \end{cases} \tag{5.8}$$

Supposons par ailleurs que la condition limite du SIM en $x = 0$, i.e. la première équation du système (5.6), permette d'obtenir une expression explicite de ψ de la forme :

$$\psi = G(N(0),\delta(0)) \tag{5.9}$$

On injecte la relation (5.9) dans l'équation (5.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(N_0,\delta_0)}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial G}{\partial N_0}\frac{\partial N_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial G}{\partial \delta_0}\frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} \\ &= -\frac{1}{2}(c + i\sigma\omega_0)\, G(N_0,\delta_0) - \tilde{H}_0\left(G(N_0,\delta_0), G^*(N_0,\delta_0), N_0, \delta_0\right) + \frac{f}{2i} \end{aligned} \tag{5.10}$$

où $N_0 = N(0)$ et $\delta_0 = \delta(0)$. La séparation de (5.10) en parties réelle et imaginaire permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_0}{\partial \tau_1} = \dfrac{g_1(N_0,\delta_0)}{g(N_0,\delta_0)} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} = \dfrac{g_2(N_0,\delta_0)}{g(N_0,\delta_0)} \end{cases} \tag{5.11}$$

Le système (5.11) permet la détection des points d'équilibre et singuliers : les points d'équilibre vérifient $g_1 = g_2 = 0$ et $g \neq 0$, tandis que les points singuliers vérifient $g_1 = g_2 = g = 0$. Sous la condition que (5.9) soit valide, l'approximation continue permet ainsi de simplifier la recherche de ces points (par comparaison avec l'approche discrète du chapitre 2) dans la mesure où la construction du système (5.11) est plus directe. Par ailleurs, deux équations suffisent à prédire le comportement du modèle réduit à l'échelle τ_1, à l'aide de relations explicites a priori moins complexes que les équations (2.27). Précisons enfin que le système (5.11) est utilisé pour tracer des portraits de phase autour des points d'équilibre et déterminer leur stabilité.
Les bases du traitement analytiques sont posées pour étudier les chaînes d'oscillateurs non linéaires par le prisme de l'approximation continue. Un exemple d'application est traité dans la partie suivante.

5.2 Exemple d'application : chaîne d'oscillateurs non linéaires présentant des potentiels locaux

Considérons à présent le système représenté sur la figure 5.1, composé d'un SP linéaire de masse M, raideur K et amortissement C, forcé par le biais d'une sollicitation externe $F(t)$ et couplé à une chaîne de $(L+1)$ oscillateurs non linéaires de masse m via un ressort de raideur $\tilde{B}$ et un amortissement Γ. Les oscillateurs de la chaîne présentent des forces de rappel non linéaires locales $\tilde{V}$ et le couplage entre chaque est assuré par un ressort de raideur $\tilde{B}$ et un amortisseur visqueux de coefficient Γ. La masse des oscillateurs non linéaires est supposée petite devant celle du SP : $m = \epsilon M$, $0 < \epsilon \ll 1$.
En posant $\frac{K}{M} = \omega_0^2$, $\frac{\tilde{B}}{M} = \epsilon B$, $\frac{\tilde{V}(z)}{M} = \epsilon D z^3$, $\frac{C}{M} = \epsilon c$, $\frac{\Gamma}{M} = \epsilon\gamma$, $\frac{F(t)}{M} = \epsilon f \sin(\omega t)$ et $\omega^2 = \omega_0^2(1+\sigma\epsilon)$, les équations régissant la dynamique de ce système prennent la forme du système 2.1 :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \epsilon c\dot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon\gamma(\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon B(v - u_1) = \epsilon f \sin(\omega t) \\ \\ \ddot{u}_1 + \gamma(-\dot{v} + 2\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + B(-v + 2u_1 - u_2) + Du_1^3 = 0 \\ \\ \ddot{u}_j + \gamma(-\dot{u}_{j-1} + 2\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + B(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + Du_j^3 = 0\,, \quad j = 2,\ldots,L \\ \\ \ddot{u}_{L+1} + \gamma(\dot{u}_{L+1} - \dot{u}_L) + B(u_{L+1} - u_L) + Du_{L+1}^3 = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

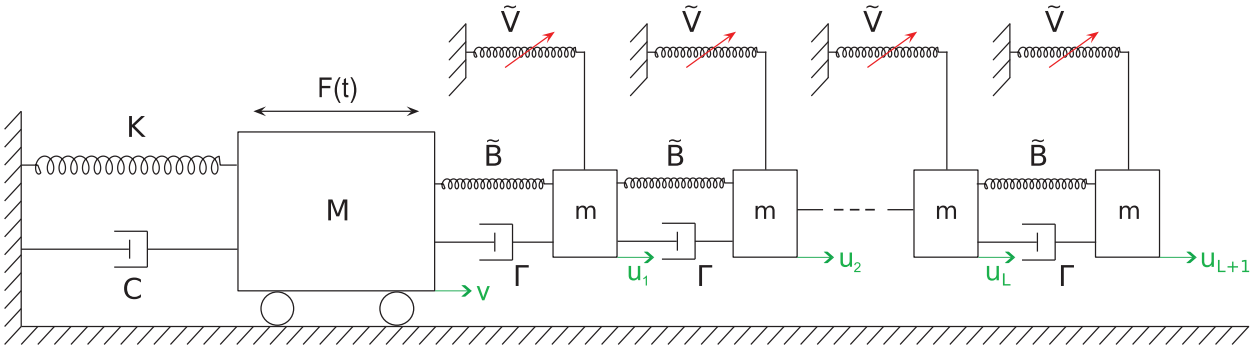


FIGURE 5.1 – Système à $(L+2)$ ddl composé d'une structure linéaire forcée couplée à une chaîne de $(L+1)$ oscillateurs non linéaires légers ($m = \epsilon M$, $0 < \epsilon \ll 1$).

Il est donc possible de traiter ce système d'équations avec la méthode décrite dans la partie 5.1.

5.2.1 SIM du système

Traitements préliminaires

Les équations du SIM prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \omega_0\phi(0) - \left(i\gamma + \dfrac{B}{\omega_0}\right)\left(-\psi + \phi(0) - \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(0)\right) - 2\mathcal{D}|\phi(0)|^2\phi(0) = 0 \\ \omega_0\phi(x) + \left(i\gamma + \dfrac{B}{\omega_0}\right)\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x) - 2\mathcal{D}|\phi(x)|^2\phi(x) = 0\,, \quad x \in]0,L[\\ \omega_0\phi(L) - \left(i\gamma + \dfrac{B}{\omega_0}\right)\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(L) - 2\mathcal{D}|\phi(L)|^2\phi(L) = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

où $\mathcal{D} = \dfrac{3D}{8\omega_0^3}$.

Intéressons-nous en premier lieu à l'EDO (deuxième équation) et séparons-la en parties réelle et imaginaire :

$$\omega_0 N + \frac{B}{\omega_0}\left(N_{xx} - N\theta^2\right) - \gamma\left(2N_x\theta + N\theta_x\right) - 2\mathcal{D}N^3 = 0 \tag{5.14}$$

$$\frac{B}{\omega_0}\left(2N_x\theta + N\theta_x\right) + \gamma\left(N_{xx} - N\theta^2\right) = 0 \tag{5.15}$$

où $\theta(x) = \delta_x(x)$. Les équations (5.14) et (5.15) ne sont pas à première vue intégrables. Pour faciliter le traitement analytique, on pose $\gamma = 0$, ce qui revient à supposer que l'amortissement dans la chaîne est d'ordre ϵ^2, i.e. $\dfrac{\Gamma}{M} = \epsilon^2\gamma$. Sous cette hypothèse, l'équation (5.15) s'intègre de la façon suivante :

$$\begin{gathered} \frac{2N_x}{N} = -\frac{\theta_x}{\theta} \\ \Downarrow \\ \theta(x) = \frac{\Theta}{N(x)^2} \end{gathered} \tag{5.16}$$

où Θ est une constante d'intégration. Deux remarques peuvent déjà éclairer la compréhension de la dynamique de la chaîne :

— si $\exists x_0$ tel que $N(x_0) = 0$, alors $\theta = \delta_x$ présente une singularité en x_0. Ainsi, quelque soit la valeur de Θ, la phase δ subit un saut aux points où l'amplitude d'oscillation dans la chaîne est nulle.

— $N(x)$ est le module de la variable complexe ϕ. Il doit en conséquence être positif. Néanmoins, des solutions négatives peuvent apparaître au cours de la résolution des équations. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer la valeur absolue des expressions de $N(x)$ obtenues. Pour que $|N(x)|$ reste solution des équations, la phase $\delta(x)$ sera incrémentée de π aux points où $N(x)$ est négatif, ce qui est en accord avec la remarque précédente dans la mesure où la phase subit un saut de π lorsque l'amplitude passe par 0.

Utilisant la relation (5.16), l'équation (5.14) peut être intégrée en la multipliant par N_x :

$$N_x^2 = -\frac{\Theta^2}{N^2} - \frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1 \tag{5.17}$$

où C_1 est une constante d'intégration.

Θ et C_1 peuvent être déterminées par les conditions limite. Injectant les relations (5.16) et (5.17) dans la dernière équation du système (5.13) (condition limite en $x = L$), on obtient :

$$\begin{cases} -\omega_0 N(L) + \dfrac{B}{\omega_0}N_x(L) + 2\mathcal{D}N(L)^3 = 0 \\ N(L)\theta(L) = \dfrac{\Theta}{N(L)} = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

Trois remarques sont tirées de l'équation (5.18) :

— on déduit aisément de la seconde équation que $\Theta = 0$. Ainsi, la phase est constante dans la chaîne, à moins qu'il n'existe un ou des point(s) où $N(x) = 0$. À ces points, la phase subit un saut de π comme expliqué précédemment. En résumé, la phase $\delta(x)$ est constante par morceaux.

— d'après la première équation, si $N(L) = 0$, alors $N_x(L) = 0$. On déduit alors de (5.17) que $C_1 = 0$. Cependant, si $C_1 = 0$, alors l'expression de N_x^2 donnée par (5.17) n'est strictement positive que si $|N(x)| > \sqrt{\dfrac{\omega_0}{\mathcal{D}}}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ $N(L) = 0$. En conséquence, si $N(L) = 0$, alors $\forall x$, $N(x) = 0$. On se concentrera désormais sur les cas non triviaux, i.e. $C_1 \neq 0$ et $N(L) \neq 0$.

— la première équation peut être considérée comme la condition limite en $x = L$ exprimant l'amplitude de la dernière masse de la chaîne.

Injectons à présent la relation (5.16) dans la première équation du système (5.13), séparée en partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{B}{\omega_0} - \omega_0 + 2\mathcal{D}N(0)^2\right)N(0) - \dfrac{B}{\omega_0}N_x(0) = \dfrac{B}{\omega_0}N_{SP}\cos(\delta_{SP} - \delta(0)) \\ \\ N_{SP}\sin(\delta_{SP} - \delta(0)) = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

La seconde équation montre que pour les cas non triviaux $N_{SP} \neq 0$, le SP oscille en phase ou en opposition de phase avec la première masse de la chaîne : $\delta_{SP} = \delta_0 + k\pi$, $k = 0{,}1$. Injectant ce résultat dans la première équation, on obtient :

$$N_{SP} = \pm\left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{B} + 2\frac{\omega_0\mathcal{D}}{B}N(0)^2\right)N(0) - N_x(0)\right] \tag{5.20}$$

La dynamique du système sur le SIM peut finalement être réduite à l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} N_x^2 = -\dfrac{\omega_0^2}{B}N^2 + \dfrac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1 \\ \\ N_{SP} = \pm\left[\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{B} + 2\dfrac{\omega_0\mathcal{D}}{B}N(0)^2\right)N(0) - N_x(0)\right] \\ \\ -\omega_0 N(L) + \dfrac{B}{\omega_0}N_x(L) + 2\mathcal{D}N(L)^3 = 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

La partie suivante est dévolue à la résolution de (5.21).

Solutions des équations du SIM

Analysons en premier lieu l'ODE, i.e. la première équation du système (5.21). La constante d'intégration C_1 joue un rôle important dans la mesure où sa valeur définit le nombre de racines réelles positives de l'expression de N_x^2 vue comme fonction de $N(x)^2$. En effet, si C_1 dépasse une valeur limite $C_{1crit} = \dfrac{\omega_0^3}{4B\mathcal{D}}$, alors il n'existe pas de racines. Dans le cas contraire, il existe deux racines réelles X_1 et X_2 définies comme suit :

$$\begin{aligned} &N_x = 0 \Leftrightarrow N = \sqrt{X_{1,2}} \\ &X_{1,2} = \frac{\omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 - 4BC_1\mathcal{D}\omega_0}}{2\mathcal{D}\omega_0}, \qquad X_1 < X_2 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Notons que si C_1 devient négatif, alors $X_1 \leq 0$, ce qui n'est pas admissible. Finalement, selon la valeur de C_1, la dynamique de la chaîne à l'échelle de temps lente prend place sur l'une des trois branches nommées 1, 2 et 3. Elles sont représentées sur les portraits de phase de la figure 5.2 dans le plan (N,N_x).
Afin de traiter la condition limite en $x = L$, on injecte l'expression de $N_x^2(L)$ obtenue à partir de l'ODE dans la dernière équation de (5.21) :

$$\left(-\frac{\omega_0^2}{B}N(L)^2 + \tilde{\mathcal{D}}N(L)^4 + C_1\right) - \frac{\omega_0^2}{B^2}\left(\omega_0 N(L) - 2\mathcal{D}N(L)^3\right)^2 = 0 \tag{5.23}$$

Cette équation est un polynôme de degré 3 en $N(L)^2$ possèdant une, deux ou trois solutions réelles α_k, k = 1,2,3. Trois solutions existent lorsque :

$$\begin{aligned} C_{1crit} < C_1 < C_{1m} \quad \text{si} \quad B < 2\omega_0^2 \\ C_{1m} < C_1 < C_{1crit} \quad \text{si} \quad B > 2\omega_0^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

où $C_{1m} = \dfrac{(8\omega_0^2 - B)(B + \omega_0^2)^2}{108B^2\mathcal{D}\omega_0}$. Si $B = 2\omega_0^2$, alors $C_{1m} = C_{1crit}$ et l'équation (5.23) n'a qu'une solution réelle. Les amplitudes admissibles de la dernière masse de la chaîne sont donc données par $N(L) = \pm\sqrt{\alpha_i}$, dont le signe est déterminé en réinjectant ces solutions dans la dernière équation de (5.21) où $N_x(L)$ est remplacé par son expression issue de l'ODE.
Les valeurs absolues des solutions fonctions de C_1 sont tracées sur la figure 5.3, où les styles et couleurs des lignes sont ceux utilisés sur la figure 5.2 afin que chacun puisse faire coïncider chaque valeur de $|N(L)|$ à une branche (1, 2 ou 3) et le point de fonctionnement correspondant. La valeur du paramètre B est choisie différente pour des questions de lisibilité de la figure 5.3. Pour chaque valeur de $|N(L)|$, partant de 0 et progressant le long de la courbe solution, il est possible à l'aide de la valeur de C_1 correspondante d'intégrer l'ODE (première équation du système (5.21)), obtenant ainsi $N(0)$ et $N_x(0)$. Cela permet de remonter en dernier lieu à la valeur de $|N_{SP}|$ via la deuxième équation de (5.21), c'est-à-dire la condition limite en $x = 0$. Cette procédure donne la possibilité de tracer le SIM dans le plan ($|N(L)|$,$|N_{SP}|$). L'intégration de l'ODE dépend cependant de la branche considérée.
Considérons dans un premier temps la branche 1, i.e. le cas $C_1 < C_{1crit}$ et $N(x) < \sqrt{X_1}$. L'expression de N_x^2 peut alors être écrite :

$$N_x = \pm\sqrt{\tilde{\mathcal{D}}(X_1 - N^2)(X_2 - N^2)} \tag{5.25}$$

où $\tilde{\mathcal{D}} = \dfrac{\mathcal{D}\omega_0}{B}$. L'intégration de l'équation (5.25) mène à :

$$N(x) = \sqrt{X_1}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{C_1}{X_1}}(x - C_2), \frac{X_1}{X_2}\right) \tag{5.26}$$

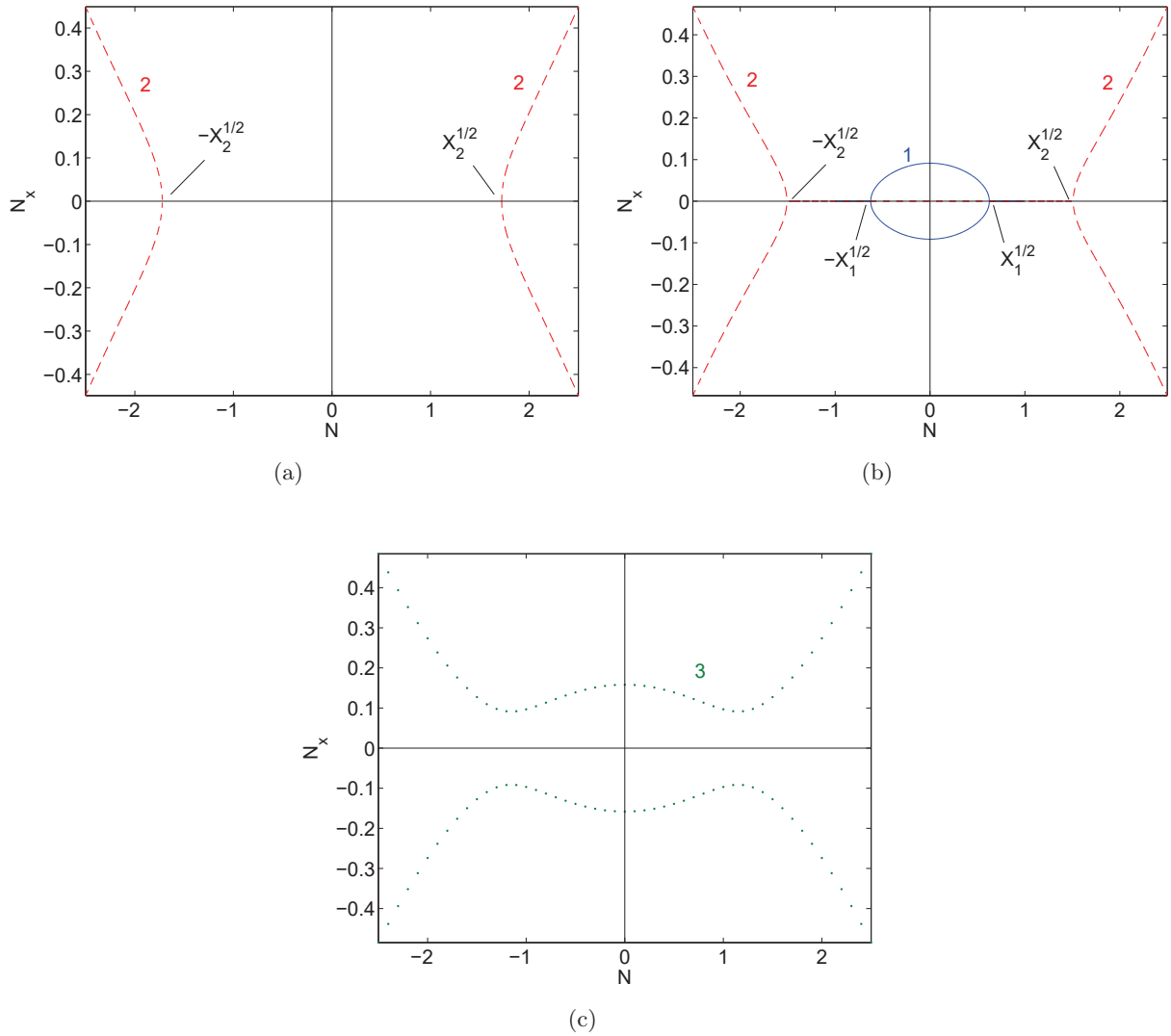


FIGURE 5.2 – Portraits de phase dans le plan (N,N_x) obtenus à partir de la première équation du système (5.21) pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et (a) $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$ (b) $C_1 = \frac{1}{2}C_{1crit}$ (c) $C_1 = \frac{3}{2}C_{1crit}$. Les numéros 1, 2 et 3 font référence aux différentes branches sur lesquelles le comportement asymptotique de la chaîne est susceptible d'évoluer.

où sn(X,k^2) est une fonction elliptique de Jacobi (fonction *sinus de Jacobi*) et C_2 une constante d'intégration pouvant être calculée par le biais de l'expression suivante :

$$C_2 = L - \sqrt{\frac{X_1}{C_1}}\,\mathrm{F}\left(\arcsin\left(\frac{N(L)}{\sqrt{X_1}}\right),\frac{X_1}{X_2}\right) \tag{5.27}$$

où F(X,k^2) est l'intégrale elliptique incomplète de première espèce. Pour plus d'informations sur les fonctions et intégrales elliptiques, il est possible de se référer à [Laurent, 1880]. La relation (5.26) rend en fait compte d'un équivalent continu des modes non linéaires de la chaîne, affectés par les conditions limites et notamment par la présence du terme source dû au SP. En effet, la constante C_2 est directement fonction de la longueur de la chaîne et de l'amplitude de la dernière masse. Par ailleurs, l'ordre dans lequel les équations du SIM (5.21) sont résolues ne doit pas tromper sur l'idée, plus physique, que c'est la valeur de N_{SP} qui détermine la constante C_1, et donc les amplitudes dans la chaîne. Cela rend mieux compte du transfert d'énergie opéré depuis le SP vers la chaîne.

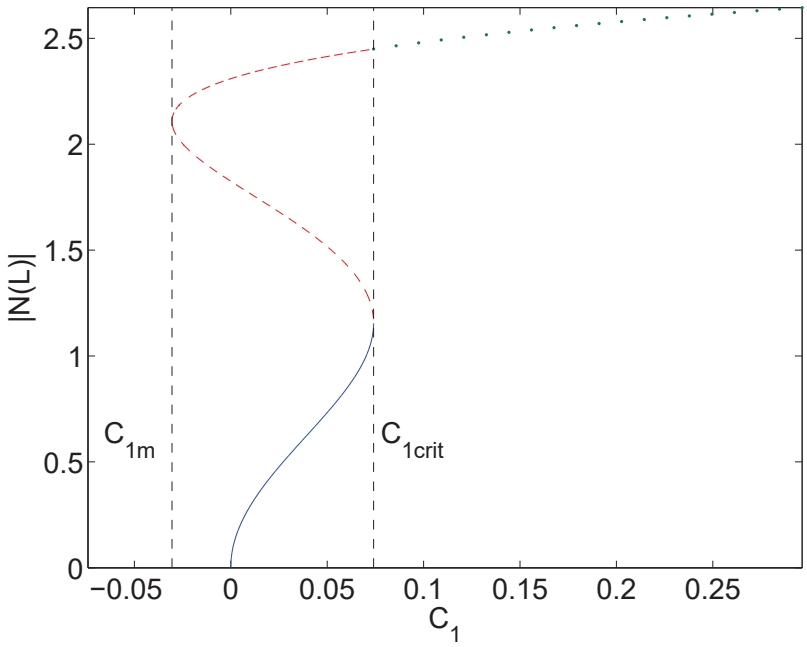


FIGURE 5.3 – $\omega_0 = 1$, $B = 9$ et $D = 1$ – Tracé des solutions de l'équation (5.23). Les styles des lignes correspondent à ceux utilisés sur la figure 5.2.

La partie du SIM tracée à partir de l'intégration de l'ODE sur la branche 1 est représentée sur la figure 5.4 par une ligne continue bleue pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et $L = 30$.
Pour continuer le tracé, il est nécessaire d'intégrer l'ODE pour des valeurs supérieures de $|N(L)|$ correspondant aux branches 2 et 3. Il n'existe toutefois pas d'expression analytique de $N(x)$ sur ces branches. La solution *sn* n'est plus valable. Il est donc nécessaire de procéder à l'intégration numérique de la relation suivante :

$$dx = \pm \frac{dN}{\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1}} \tag{5.28}$$

Il est prouvé dans l'annexe A que cette intégration mène à la détection d'une branche du SIM croissant de façon strictement monotone. Elle est tracée sur la figure 5.4 en ligne rouge discontinue.

5.2.2 Points d'équilibre et points singuliers

L'équation relative au SP dérivée à l'ordre ϵ^1 s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\left(c\psi + i\sigma\omega_0 - \frac{iB}{\omega_0}\right)\psi + \frac{iB}{\omega_0}\phi(0) = \frac{f}{2i} \tag{5.29}$$

Par ailleurs, la condition limite du SIM en $x = 0$ donne :

$$\begin{aligned} \psi &= G(N_0,\delta_0) = G_l(N_0)e^{i\delta_0} \\ G_l(N_0) &= -N_x(0) + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{B} + 2\tilde{\mathcal{D}}N_0^2\right)N_0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$G_l(N_0)$ correspond au signe près à N_{SP}. La dérivée de ψ par rapport à l'échelle de temps lente se réécrit ainsi :

$$\frac{\partial G(N_0,\delta_0)}{\partial \tau_1} = \left(\frac{\partial G_l}{\partial N_0}\frac{\partial N_0}{\partial \tau_1} + iG_l(N_0)\frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1}\right)e^{i\delta_0} \tag{5.31}$$

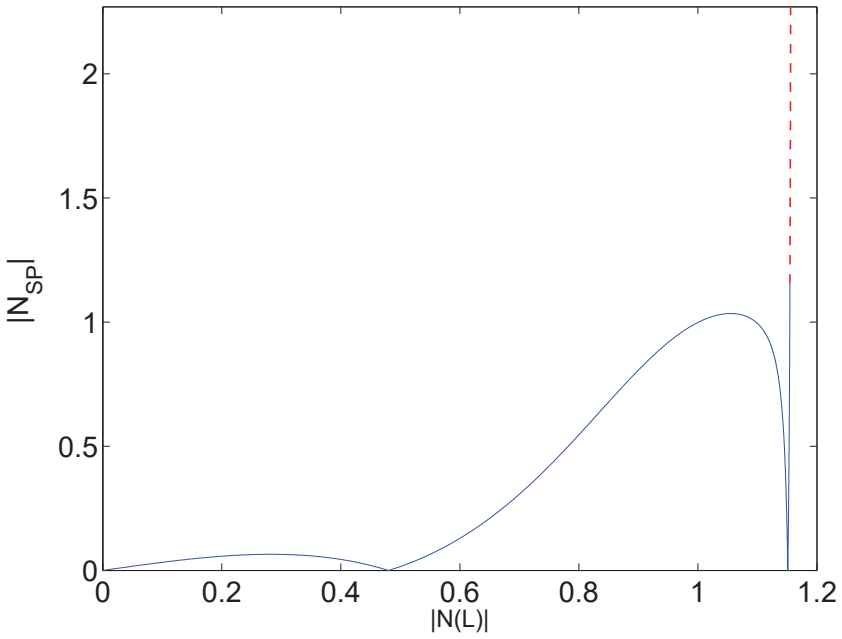


FIGURE 5.4 – $L = 30$, $\omega_0 = 1$, $B = 40$ et $D = 1$ – Exemple de SIM. Les styles des lignes correspondent à ceux utilisés sur la figure 5.2.

On injecte (5.31) dans (5.29) afin d'obtenir un système de la forme de (5.11) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_0}{\partial \tau_1} = \dfrac{g_1(N_0,\delta_0)}{g(N_0)} \\ \\ \dfrac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} = \dfrac{g_2(N_0,\delta_0)}{g(N_0)} \end{cases} \tag{5.32}$$

où

$$\begin{cases} g_1(N_0,\delta_0) = -\dfrac{G_l(N_0)}{2}\left[cG_l(N_0) + f\sin(\delta_0)\right] \\ \\ g_2(N_0,\delta_0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_l(N_0)}{\partial N_0}\left[\left(\dfrac{B}{\omega_0} - \sigma\omega_0\right)G_l(N_0) - \dfrac{B}{\omega_0}N_0 - f\cos(\delta_0)\right] \\ \\ g(N_0) = G_l(N_0)\dfrac{\partial G_l(N_0)}{\partial N_0} \end{cases} \tag{5.33}$$

La relation $g(N_0) = 0$ donne les points du SIM où les points singuliers peuvent apparaître. Deux cas se distinguent :

- $G_l(N_0) = 0$ correspond aux points où $N_{SP} = 0$, c'est-à-dire aux minimums du SIM sur la figure 5.4.
- les points vérifiant $\dfrac{\partial G_l(N_0)}{\partial N_0} = 0$ sont quant à eux situés sur les maximums locaux du SIM sur la figure 5.4.

Introduisons les variables $N_{0,min}^{(k)}$ et $N_{0,max}^{(k)}$ définies comme suit : $G_l(N_{0,min}^{(k)}) = 0$ et $\dfrac{\partial G_l(N_{0,max}^{(k)})}{\partial N_0} = 0$. k indique le numéro du minimum ou maximum local considéré. Par exemple, se référant au SIM de la figure 5.4, $N_{0,min}^{(2)}$ désigne la valeur de N_0 sur le deuxième minimum situé à $N(L) = 1.15$. Pour que des points singuliers apparaissent à ces lieux, les conditions $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$ doivent aussi être

vérifiées. On s'en assure en imposant :

$$\begin{cases} \cos(\delta_0) = -\dfrac{BN_{0,min}^{(k)}}{f\omega_0} \\ \text{ou} \\ \sin(\delta_0) = -\dfrac{cF_l(N_{0,max}^{(k)})}{f} \end{cases} \tag{5.34}$$

Comme $|\cos(\delta_0)|$ et $|\sin(\delta_0)|$ sont bornés, il est possible de définir des valeurs critiques de l'amplitude de forçage au-delà desquelles des points singuliers apparaissent aux extremums du SIM correspondant à $N_{0,min}^{(k)}$ et $N_{0,max}^{(k)}$:

$$\begin{cases} f_{crit,min}^{(k)} = \left| \dfrac{BN_{0,min}^{(k)}}{\omega_0} \right| \\ \\ f_{crit,max}^{(k)} = \left| cF_l(N_{0,max}^{(k)}) \right| \end{cases} \tag{5.35}$$

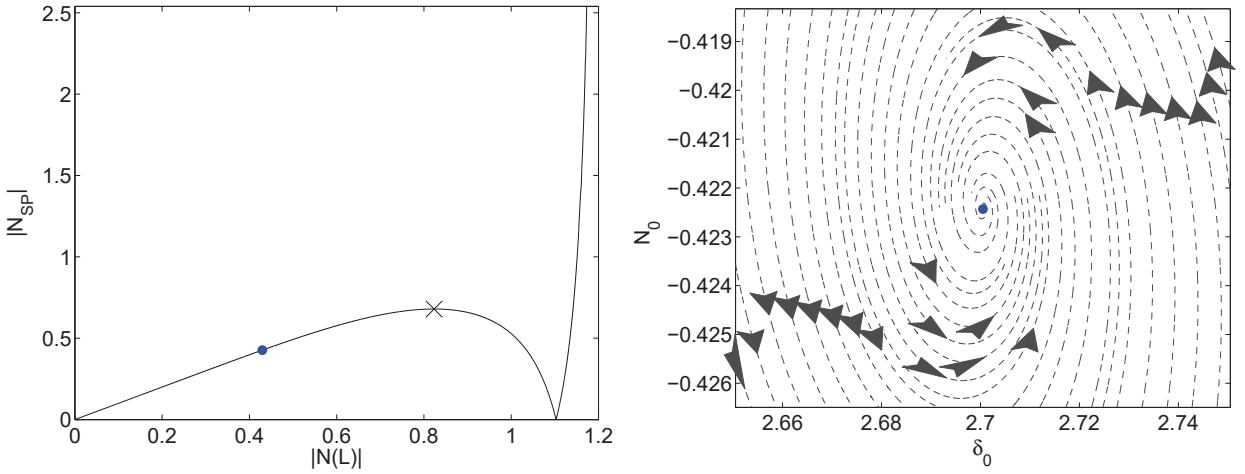
La détection de points singuliers est ainsi grandement simplifiée en comparaison de l'approche discrète développée dans le chapitre 2 et utilisée dans le chapitre 4.
Les comportements multi-échelles du système ont été étudiés analytiquement à l'aide d'une description continue de la chaîne d'oscillateurs, menant à la prédiction complète de la dynamique du système à l'échelle de temps lente. Cette approche continue engendre une approximation et les prédictions analytiques doivent être comparées à des résultats numériques rendant compte du caractère discret de la chaîne.

5.2.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques

Les simulations numériques sont réalisées par intégration temporelle du système (5.12), et confrontées aux prédictions analytiques des sections 5.2.1 et 5.2.2. Comme dans les chapitres précédents, un schéma de Runge-Kutta est utilisé (fonction *ode45* de Matlab) avec les options suivantes : pas de temps de 0.1 et $RelTol = AbsTol = NormControl = 10^{-12}$. Tous les oscillateurs sont supposés être initialement au repos. Les comparaisons des amplitudes dans la chaîne sont menées en partant des données $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, L+1$ obtenues numériquement et en calculant l'équivalent discret de la variable $\varphi(x,t)$, i.e. le vecteur de taille $(L+1)$ composé des variables :

$$\varphi_j(t) = \left(\dot{u}_j(t) + i\omega u_j(t)\right) e^{-i\omega t} = N_j(t) e^{i\delta_j(t)} \tag{5.36}$$

Le premier exemple analyse la dynamique d'une chaîne de $(L+1) = 31$ oscillateurs couplée au SP. Le ratio de masses est fixé à $\epsilon = 0.001$. Les paramètres sont choisis comme suit : $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$. Par ailleurs, un faible amortissement $\gamma = 0.1$ est ajouté dans les simulations numériques. Le SIM du système ainsi que ses points d'équilibre et points singuliers sont représentés sur la figure 5.5(a). Un point d'équilibre est présent sur la branche basse du SIM. Le portrait de phase de la figure 5.5(b), tracé grâce aux équations (5.32), assure son caractère stable. Par ailleurs, le niveau de forçage étant compris entre $f_{crit,max}^{(1)} = 0.340$ et $f_{crit,min}^{(1)} = 8.370$, le système possède un point singulier sur le maximum local du SIM. La figure 5.6 montre que la dynamique asymptotique du système rend compte d'un régime périodique. Il existe néanmoins une différence significative entre les amplitudes prédites par le point d'équilibre et celles atteintes numériquement, comme en atteste la figure 5.6(b). Comparons les prédictions obtenues avec l'approche utilisée dans les chapitres précédents. La singularité de cette approche vis-à-vis de celle utilisée dans ce chapitre réside dans son caractère discret, les autres hypothèses restant identiques. Or, la figure 5.7(a) montre que les prédictions de l'approche discrète sont en excellent accord avec les résultats numériques. L'écart observé provient donc de l'approximation continue. Notons que les SIM issus



(a) (b)

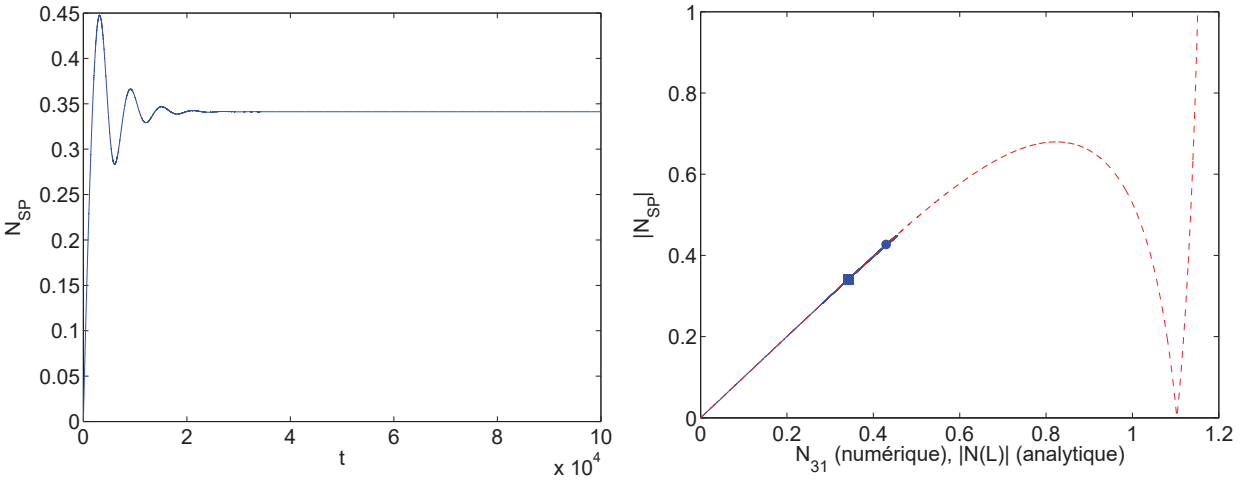
FIGURE 5.5 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) SIM du système (ligne noire continue). Le système possède un point d'équilibre (point bleu) et un point singulier (croix noire) (b) Portrait de phase dans le plan (δ_0,N_0) autour du point d'équilibre (point bleu).

des deux méthodes analytiques sont toutefois très proches, comme montré sur la figure 5.7(b). De plus, l'approche continue prédit correctement le comportement général de la chaîne. la ligne bleue continue (figure 5.7(a)) atteint 0 en $x = 14.4$. Cela signifie qu'au régime permanent, la chaîne devrait présenter deux groupes de particules oscillant en opposition de phase, avec les oscillateurs no. 14 et 15 possédant une amplitude proche de 0. Cette prédiction correspond au comportement numérique observé sur la figure 5.8. Enfin, dans le but de s'assurer plus avant que l'écart entre résultats théoriques et numériques provient de l'approximation continue, les prédictions des deux approches analytiques sont comparées pour une chaîne plus longue ($L = 50$) dont le comportement devrait être mieux décrit par l'approche continue. Posant $f = 2$, toutes choses égales par ailleurs, les deux approches détectent cinq points d'équilibre dont les amplitudes dans la chaîne (i.e. N_j ou $|N(x)|$) sont présentées sur la figure 5.9. Les deux approches présentent cette fois-ci un bon accord.

Pour le deuxième exemple, les paramètres de forçage sont modifiés : $f = 4.5$ et $\sigma = 10$. L'amortissement a de plus été fixé à $\gamma = 5$ pour les simulations numériques. Le système possède trois points d'équilibre et un point singulier. Les points no. 1 et 2 sont instables et le point no. 3 est stable (se référer à la figure 5.10). Les résultats numériques dépeints sur la figure 5.11 montrent que le système subit une réponse de type SMR pilotée par le point singulier. La chaîne subit des bifurcations répétées entre deux de ses modes non linéaires. Un de ces sauts (de la branche basse du SIM vers la branche haute) est représenté sur la figure 5.12.
Les résultats numériques viennent valider l'approche analytique implémentant une approximation continue dans la chaîne. Cette dernière doit néanmoins posséder une longueur suffisante pour que les prédictions soient quantitativement précises. Un deuxième exemple est traité dans la partie suivante.

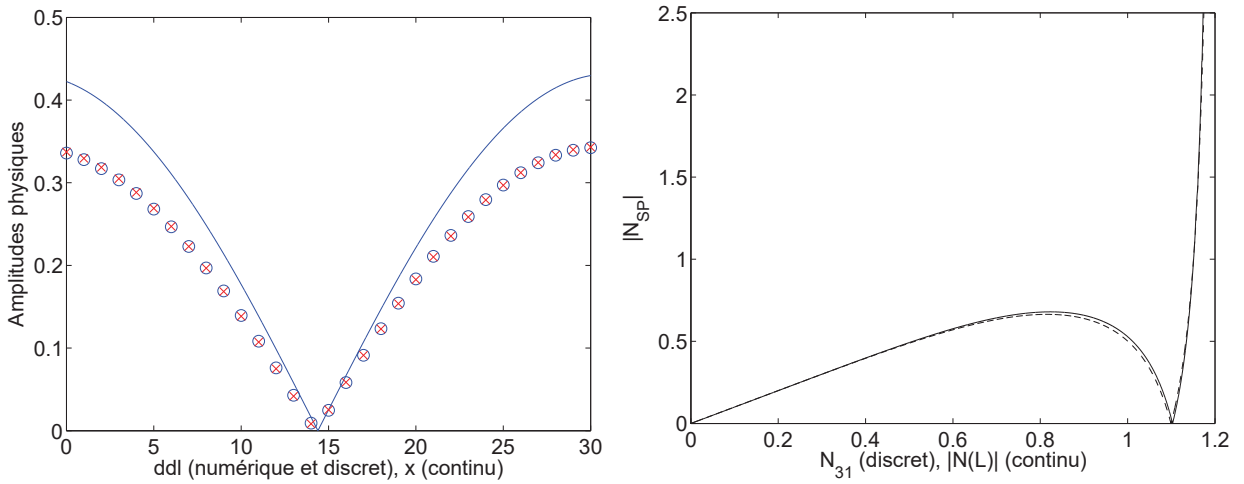
5.3 Solutions ondulatoires : premiers éléments

Analysons à présent le système de la figure 5.1 en considérant les paramètres suivants : $m = \epsilon M$, $\frac{K}{M} = \omega_0^2$, $\frac{\tilde{B}}{M} = \epsilon^2 B$, $\frac{\tilde{V}(z)}{M} = \epsilon\Omega^2 z - \epsilon^2 D z^3$, $\frac{C}{M} = \epsilon c$ et $\Gamma = F(t) = 0$. Des changements ont été apportés au cas traité dans la section 5.2. Tout d'abord, l'amortissement dans la chaîne et le forçage du SP sont supposés nuls. Par ailleurs, une partie linéaire est ajoutée aux forces de rappel locales de la chaîne, et la partie cubique est désormais négative. Enfin, tous les paramètres de couplage



(a) (b)

FIGURE 5.6 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (b) SIM du système (ligne rouge discontinue) et point d'équilibre (point bleu) avec les résultats numériques correspondants (ligne bleue). Le carré bleu représente les amplitudes finales du système issues des résultats numériques.



(a) (b)

FIGURE 5.7 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) Comparaison des amplitudes physiques des oscillateurs de la chaîne issues des prédictions analytiques des approches continue (ligne bleue continue) et discrète (croix rouges) et des résultats numériques au régime permanent (ronds bleus) (b) Comparaison des SIM calculés par les approches continue (ligne noire continue) et discrète (ligne noire discontinue).

dans la chaîne sont supposés d'ordre ϵ^2, excepté la partie linéaire des forces de rappel. La masse des oscillateurs reste inchangée.

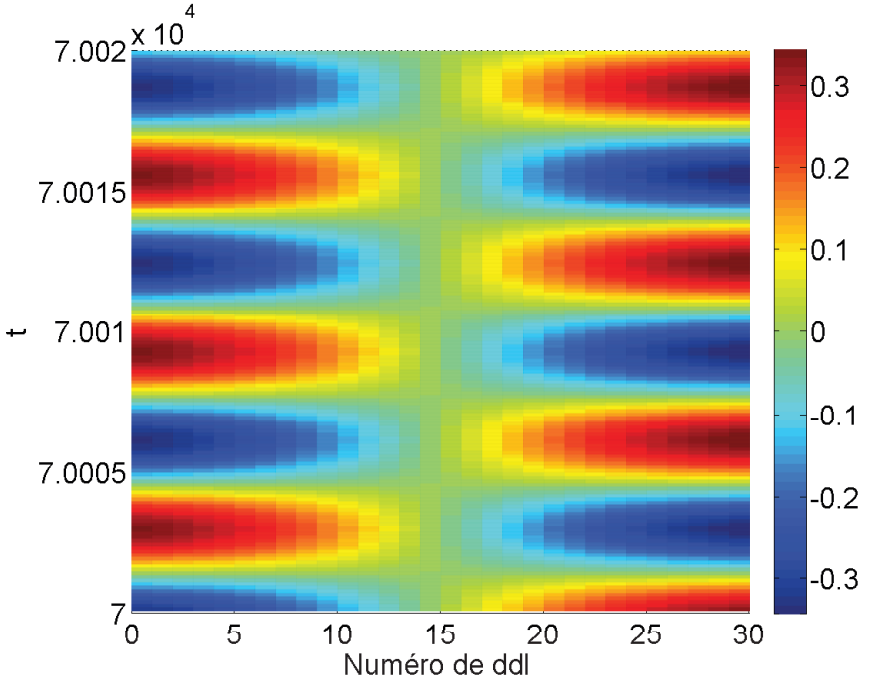


FIGURE 5.8 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1.

Les équations gouvernant la dynamique du système s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \epsilon c\dot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon^2 B(v - u_1) = 0 \\ \ddot{u}_1 + \Omega^2 u_1 + \epsilon \left(B(-v + 2u_1 - u_2) - Du_1^3 \right) = 0 \\ \ddot{u}_j + \Omega^2 u_j + \epsilon \left(B(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) - Du_j^3 \right) = 0 \ , \quad j = 2, \ldots, L \\ \ddot{u}_{L+1} + \Omega^2 u_{L+1} + \epsilon \left(B(u_{L+1} - u_L) - Du_{L+1}^3 \right) = 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

Pour appréhender le comportement général du système, des résultats de simulations numériques sont d'abord présentées.

5.3.1 Simulations numériques

Les résultats numériques de cette section sont issus de l'intégration directe des équations (5.37), où les paramètres prennent les valeurs suivantes : $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$ et $c = 1$. Le système subit des oscillations libres issues des conditions intiales : $v(0) = v_0$ et $\dot{v}(0) = u_j(0) = \dot{u}_j(0) = 0 \ \forall j$. Le SP est donc relâché sans vitesse initiale depuis une amplitude v_0. Dans le premier exemple de la figure 5.13, l'amplitude initiale du SP est de $v_0 = 2$. La figure 5.13(a) trace l'évolution de N_{SP} au cours du temps (ligne bleue), qui semble suivre une décroissance exponentielle. Cette hypothèse est confirmée par le tracé en croix rouges de la fonction $N_{SP} = v_0 e^{-\frac{c}{2}\tau_1}$, qui s'accorde très précisément avec les résultats numériques. La figure 5.13(b) dépeint le comportement observé dans la chaîne en traçant au cours du temps les amplitudes numériques N_j, définies par l'équation (5.36). Une onde localisée spatialement, ou onde solitaire, se propage dans la chaîne sans déformation en subissant des réflexions successives en $x = 0$ et $x = L$. Sa vitesse, constante, est de l'ordre de ϵ. Des aperçus des profils des amplitudes numériques dans la chaîne à

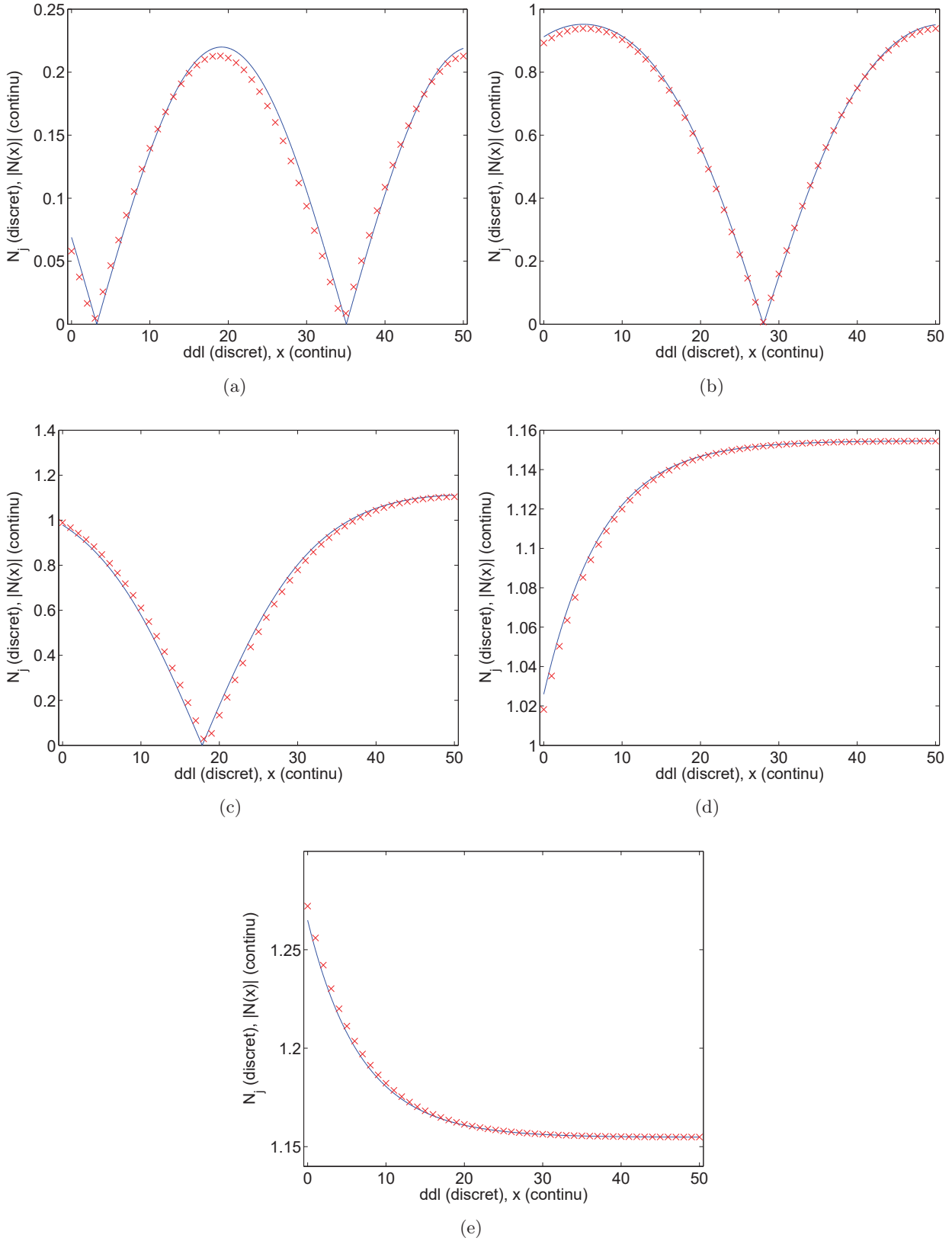


FIGURE 5.9 – $L = 50$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 2$ et $\sigma = 0$ – Comparaison des amplitudes de la chaîne autour des cinq points d'équilibre prédits par les approches continue (ligne bleue continue) et discrète (croix rouges).

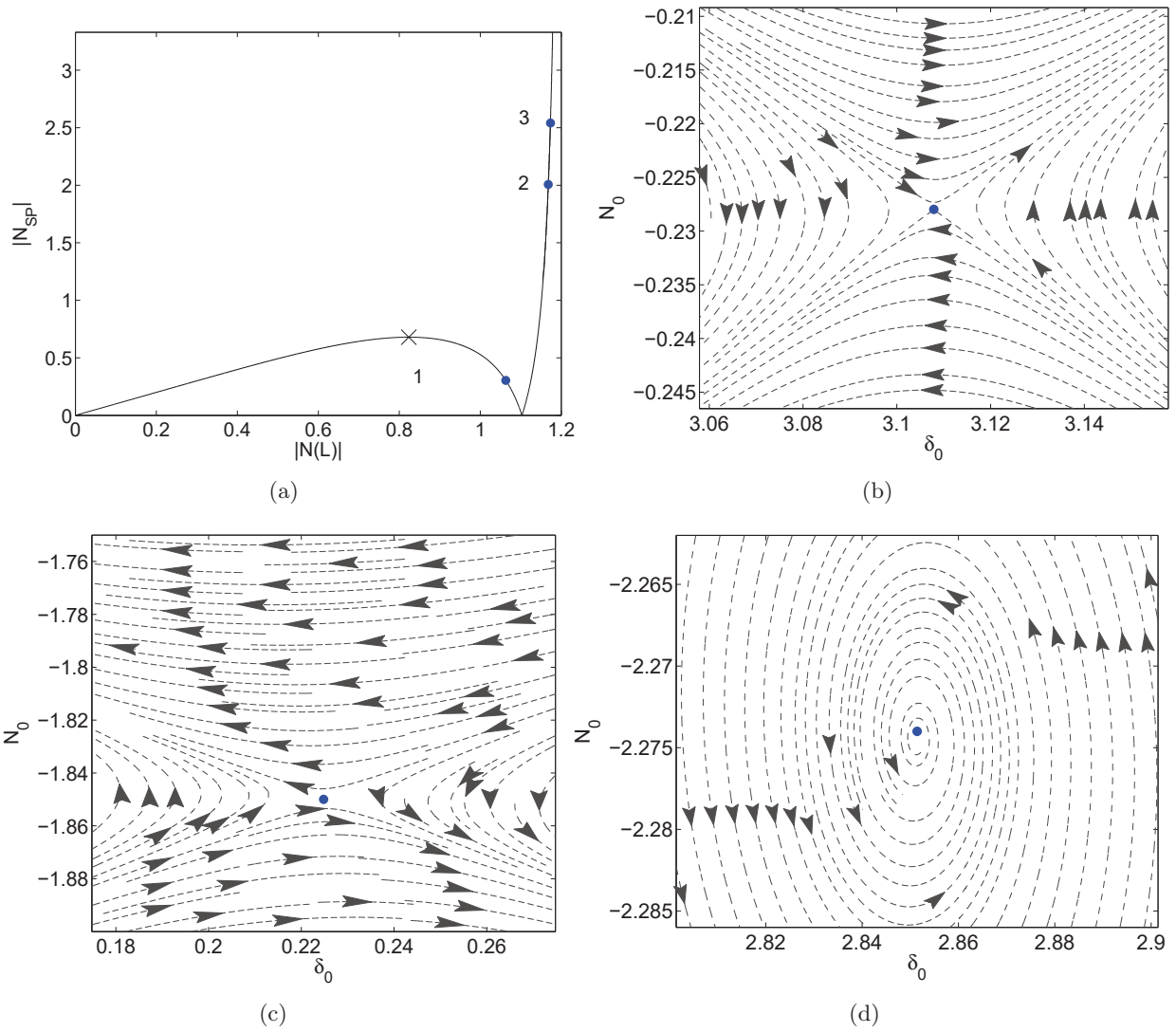


FIGURE 5.10 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – (a) SIM du système (ligne noire). Le système possède trois points d'équilibre, un stable (point bleu no. 3) et deux instables (points bleus no. 1 et 2) ainsi qu'un point singulier (croix noire) (b)-(d) Portrait de phase dans le plan (δ_0,N_0) autour des points d'équilibre (points bleus) no. 1, 2 et 3 respectivement.

$t = 4000$ et $t = 9500$ (après une première réflexion) sont montrés sur la figure 5.13(c) et confirment que la forme du pic est quasi-constante. Ce type de comportement ressemble assez fortement à celui d'un soliton. Pour plus de détails sur les solitons, il est possible de se référer à l'ouvrage [Peyrard et Dauxois, 2004].

La figure 5.14 montre que l'onde solitaire se propage encore dans la chaîne en présence d'un faible amortissement $\Gamma = \epsilon^3$, et ce à la même vitesse. Néanmoins, son amplitude décroît au cours du temps, ce phénomène s'accompagnant d'un élargissement du pic d'amplitude.

Pour la dernière simulation, l'amplitude initiale du SP est fixée à $v_0 = 4$. Le comportement numérique du SP est similaire et suit une décroissance exponentielle. Celui de la chaîne est en revanche plus surprenant (voir figure (5.15)). L'énergie reste dans un premier temps concentrée dans la première masse de la chaîne, jusqu'à environ $t = 12000$. Ensuite, une onde localisée se forme mais subit rapidement des changements de direction. Des comportements similaires ont été observés par James et al. [James *et al.*, 2013] dans une chaîne semi-infinie de billes interagissant par contact de Hertz en présence de potentiels locaux harmoniques. Les auteurs n'ont cependant pas apporté d'explication de ce phénomène. Par ailleurs, des solitons présentant des inversions de direction nommés "boome-

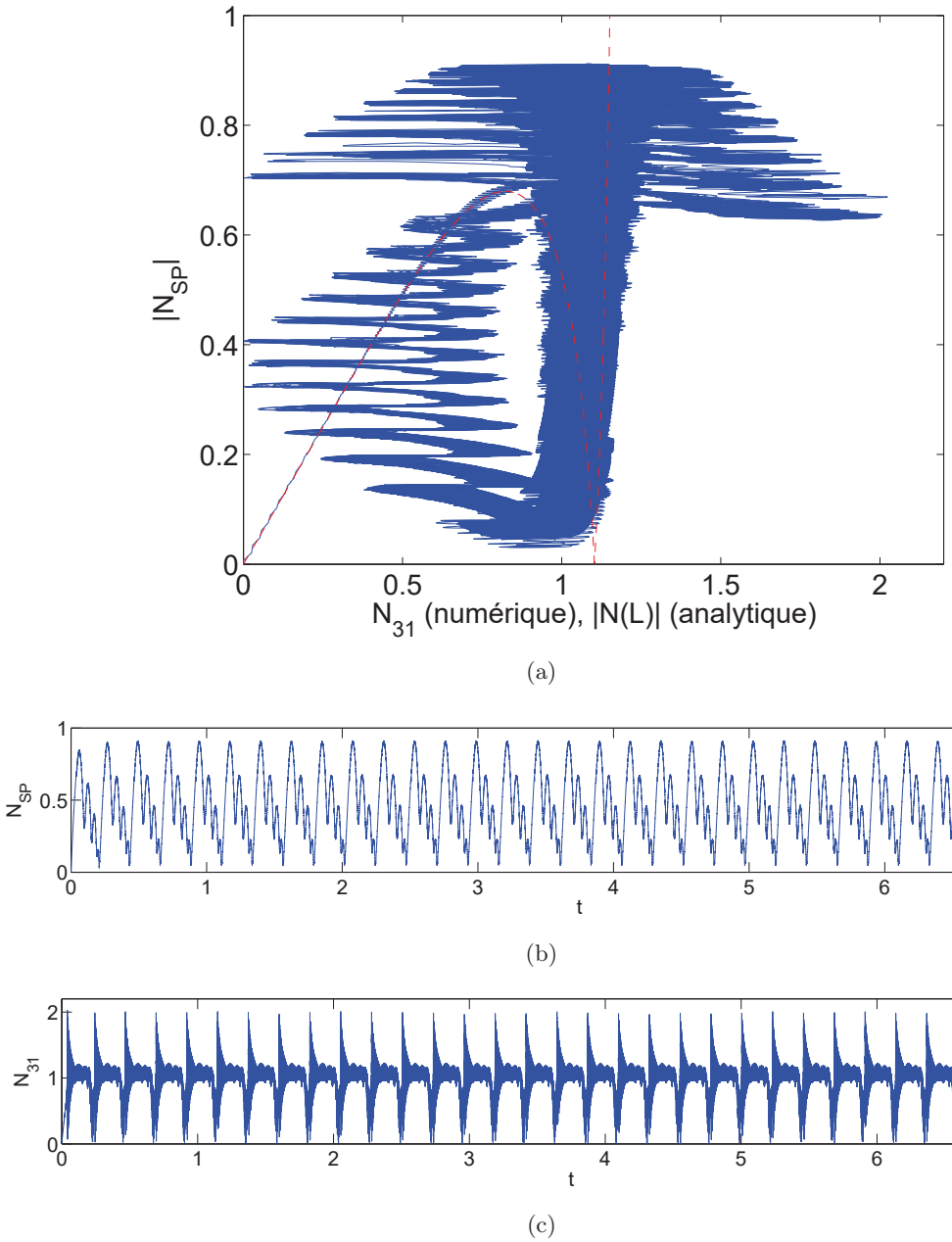


FIGURE 5.11 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – (a) SIM du système (ligne rouge discontinue) et résultats numériques correspondants (ligne bleue) (b) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (c) Amplitude numérique N_{31} en fonction du temps.

rons" ont été rapportés dans [Degasperis *et al.*, 2007]. Il est cependant compliqué d'établir un lien direct entre ces boomerons et l'onde observée sur la figure 5.15.
Les simulations numériques révèlent l'existence de solutions ondulatoires localisées dans la chaîne lorsque le SP subit des oscillations libres. Ces ondes présentent des comportements caractéristiques des solitons. La partie suivante s'attache à apporter des premiers éléments théoriques de caractérisation de ces solutions.

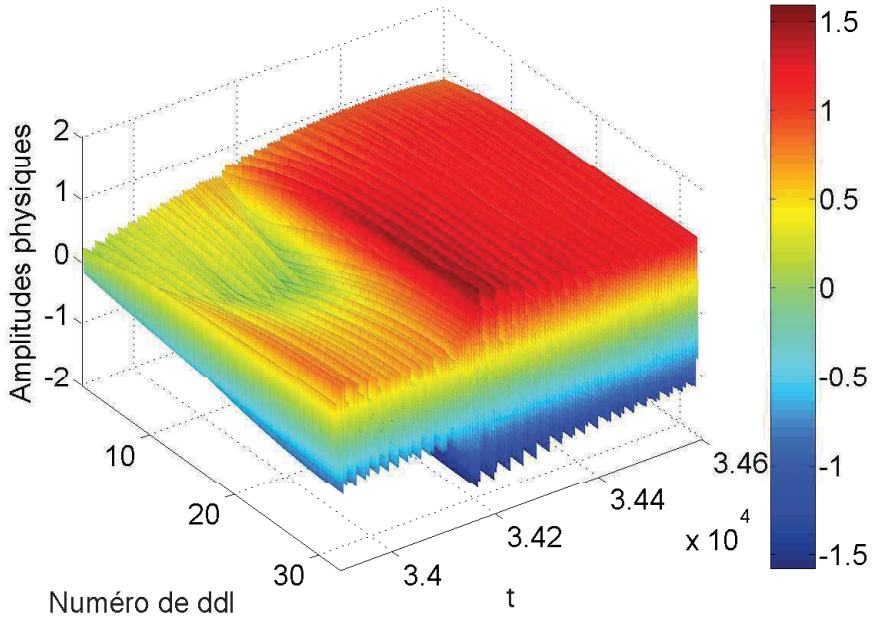


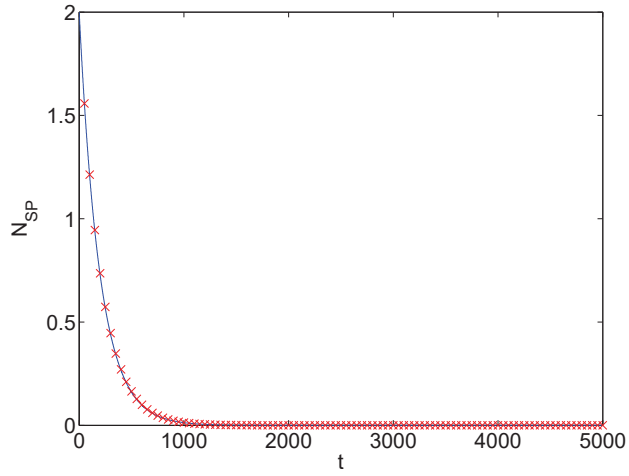
FIGURE 5.12 – $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR, autour d'une bifurcation.

5.3.2 Éléments d'explication théoriques

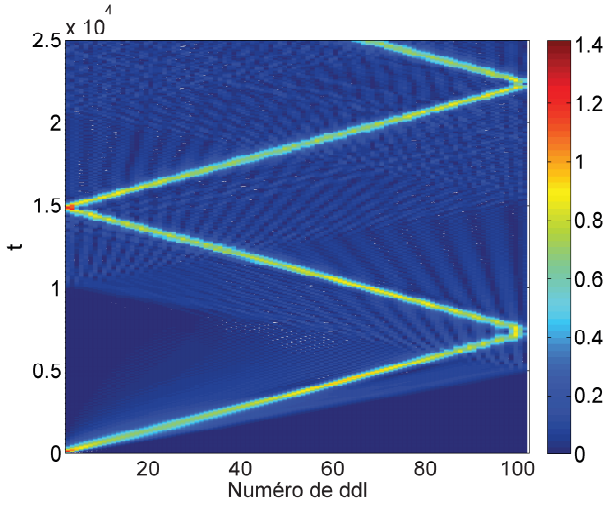
Les outils décrits dans la section 5.1.1 sont appliqués au système (5.37). Le SP n'étant pas forcé, la pulsation utilisée pour l'introduction des variables de Manevitch est ω_0. À l'échelle de temps rapide, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_0}(0) + \dfrac{i}{2}\left(\omega_0 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_0}\right)\varphi(0) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_0}(x) + \dfrac{i}{2}\left(\omega_0 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_0}\right)\varphi(x) = 0\,, \quad x \in]0,L[\\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_0}(L) + \dfrac{i}{2}\left(\omega_0 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_0}\right)\varphi(L) = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

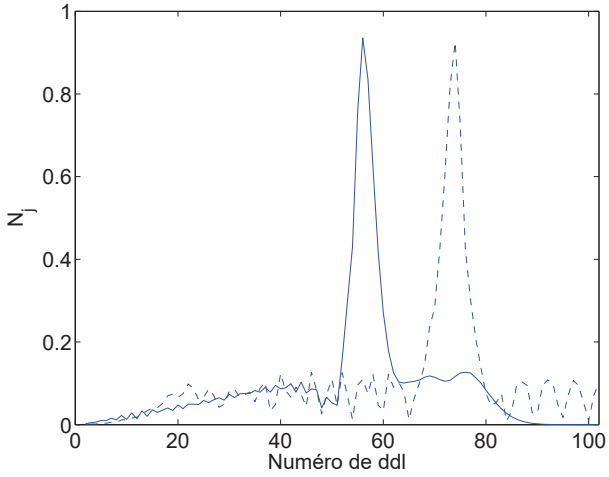
L'étude des points fixes vérifiant $\lim\limits_{\tau_0 \to \infty} \dfrac{\partial \phi(x)}{\partial \tau_0} = 0$ mène donc à $\phi(x) = 0\,, \forall x$, sauf si $\Omega = \omega_0$. Cela fait sens dans la mesure où Ω symbolise la pulsation propre de chaque oscillateur de la chaîne. Comme φ représente la modulation lente d'une oscillation à la pulsation ω_0, il semble logique qu'il faille accorder la chaîne au SP pour obtenir des solutions $\varphi(x)$ non triviales et faire entrer la chaîne en résonance avec la structure primaire. Dans ce cas, ψ et φ sont des fonctions de l'échelle de temps lente τ_1. La méthodologie consistant à détecter le SIM ainsi que les points d'équilibre et singuliers n'est donc pas adaptée ici.



(a)



(b)

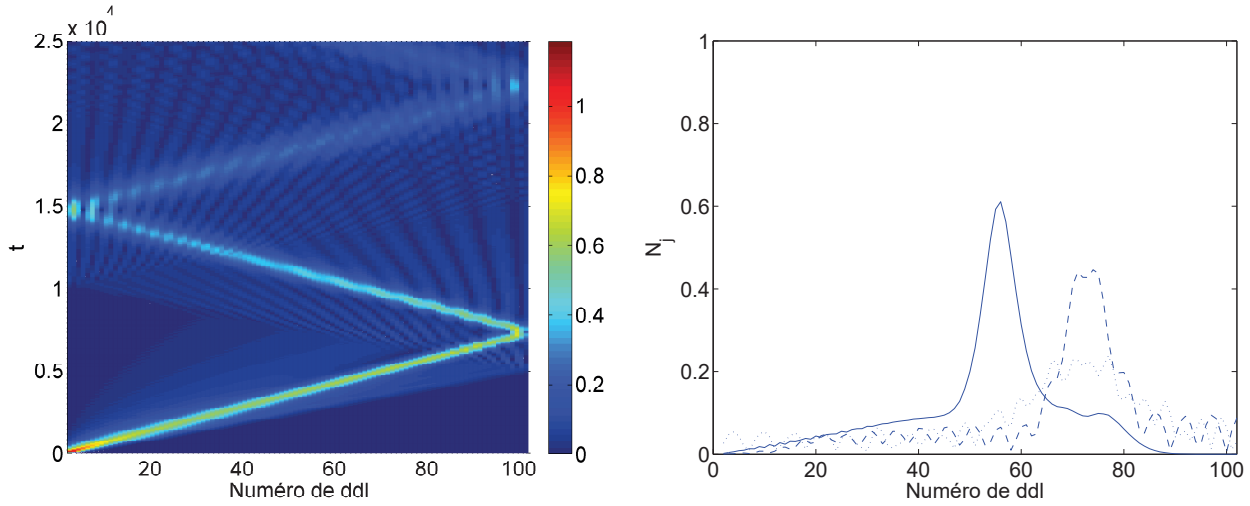


(c)

FIGURE 5.13 – $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 2$ – (a) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (ligne bleue) et tracé de la fonction $N_{SP} = v_0 e^{-\frac{c}{2}\tau_1}$ (croix rouges) (b) Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques montrant la propagation d'une onde localisée spatialement (c) Aperçus des profils des amplitudes numériques N_j dans la chaîne à $t = 4000$ (ligne continue) et $t = 9500$ (ligne discontinue).

Le comportement à l'échelle de temps lente τ_1 est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \dfrac{c}{2}\psi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_1}(0) + \dfrac{iB}{2\omega_0}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0) - \varphi(0)\right) + i\mathcal{D}|\varphi(0)|^2\varphi(0) = -\dfrac{iB}{2\omega_0}\psi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_1}(x) + \dfrac{iB}{2\omega_0}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) + i\mathcal{D}|\varphi(x)|^2\varphi(x) = 0\,, \quad x \in]0,L[\\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau_1}(L) - \dfrac{iB}{2\omega_0}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(L) + i\mathcal{D}|\varphi(L)|^2\varphi(L) = 0 \end{cases} \tag{5.39}$$



(a) (b)

FIGURE 5.14 – $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 2$, avec un amortissement ajouté dans la chaîne : $\Gamma = \epsilon^3$ – (a) Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques (a) Aperçus des profils des amplitudes numériques N_j dans la chaîne à $t = 4000$ (ligne continue), $t = 9500$ (ligne discontinue) et $t = 20000$ (ligne pointillée).

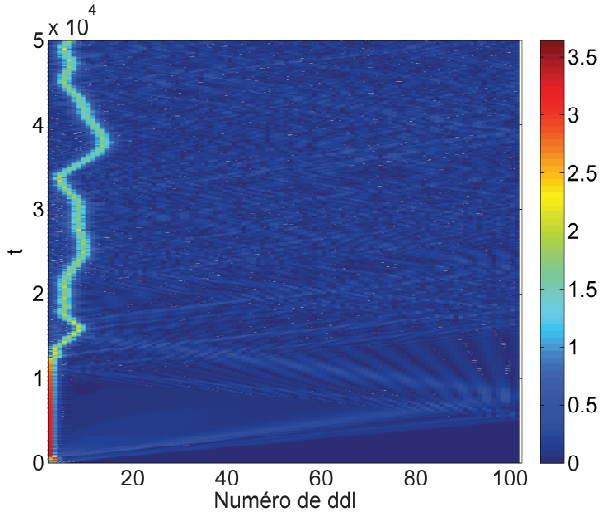


FIGURE 5.15 – $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 4$ – Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques montrant la propagation d'une onde localisée spatialement présentant des changements de direction.

La première équation vient vérifier une hypothèse faite dans la partie précédente : N_{SP} suit une décroissance exponentielle du type $N_{SP} = N_{SP}(t = 0)e^{-\frac{c}{2}\tau_1}$. En conséquence, ce système ne présente pas de possibilité de contrôle passif, au moins pendant les deux premières échelles de temps. En revanche, on retrouve bien que la dynamique de la chaîne est affectée par le SP car ψ apparaît dans l'équation relative à la première masse. Par ailleurs, l'ODE peut être réécrite comme suit :

$$i\frac{\partial\varphi^*}{\partial\tau_1}(x) + \mathcal{P}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}(x) + \mathcal{D}|\varphi(x)|^2\varphi^*(x) = 0 \tag{5.40}$$

où $\mathcal{P} = \dfrac{B}{2\omega_0}$. Une équation de Schrödinger non linéaire est donc obtenue. Cette équation a été étudiée en détail dans la littérature [Scott, 1969, Dodd *et al.*, 1982, Novikov *et al.*, 1984, Peyrard et

Dauxois, 2004, Scott, 2005, Ture Savadkoohi *et al.*, 2017]. Elle est connue pour posséder des solutions de type solitons-enveloppe à condition qu'elle soit auto-focalisante, i.e. lorsque $\mathcal{PD} > 0$. Dans le cas contraire, les solutions d'ondes planes sont stables et le phénomène d'instabilité modulationnelle ne peut s'exprimer. Le coefficient de la non-linéarité cubique doit donc être négatif si l'on veut observer des solutions localisées spatialement dans le système.
La solution analytique de l'équation (5.40) s'écrit (voir par exemple [Peyrard et Dauxois, 2004]) :

$$\begin{aligned} \varphi(x,\tau_1) &= N(x,\tau_1)e^{i\delta(x,\tau_1)} \\ N(x,\tau_1) &= \phi_0 \,\mathrm{sech}\left(\frac{x-u_e\tau_1}{L_e}\right) \\ \delta(x,\tau_1) &= \mu\tau_1 - \kappa x \end{aligned} \tag{5.41}$$

où

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{u_e^2 - 2u_e u_p}{2\mathcal{PD}}} \quad , \quad L_e = \frac{1}{\phi_0}\sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{\mathcal{D}}} \quad , \quad \kappa = \frac{u_e}{2\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{u_e u_p}{2\mathcal{P}} \tag{5.42}$$

Ce soliton prend la forme de paquets d'onde localisés spatialement voyageant à vitesse constante ϵu_e et sans déformation, ce qui est en accord avec les observations menées à partir de la figure 5.13. Par ailleurs, la largeur L_e de ces paquets d'onde est inversement proportionnelle à l'amplitude ϕ_0 du soliton, caractéristique observée sur la figure 5.14. La forme de la solution 5.42 n'explique cependant pas l'onde présentant des changements de direction.
Le traitement analytique des conditions limite (équation no. 2 et 4 du système (5.39)) n'est pas réalisé dans ce manuscrit. Il est laissé à des travaux ultérieurs.
Des premiers éléments analytiques ont été apportés dans le but de caractériser les solutions localisées spatialement observées dans la section 5.3.1. Une équation de Schrödinger non linéaire est dérivée grâce à l'approximation continue dans la chaîne. Les solutions solitons-enveloppe de cette équation possède des caractéristiques similaires aux comportements numériques. L'origine des ondes présentant des changements de direction n'a toutefois pu être expliqué. Il est par ailleurs nécessaire de traiter les conditions limite du modèle analytique afin de comparer quantitativement les prédictions théoriques et les résultats numériques.

5.4 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, la méthodologie analytique décrite dans le chapitre 2 et utilisée dans les chapitres 3 et 4 est modifiée par la considération de la chaîne d'oscillateurs dans le cadre d'une approximation continue. Sous l'hypothèse que la chaîne est assez longue, i.e. qu'elle comporte suffisamment d'oscillateurs, il est possible de décrire son comportement à l'aide d'une fonction d'une variable d'espace qui parcourt toute la chaîne.
À l'instar de l'approche discrète, le SIM ainsi que ses points d'équilibre et singuliers sont calculés. À l'échelle de temps rapide, le SIM est ici défini par un problème aux limites comportant une équation différentielle ordinaire et deux conditions limite, celle en $x = 0$ comportant un terme source faisant intervenir le SP. À l'échelle de temps lente, la détection des points d'équilibre et singuliers est plus directe en comparaison des calculs menés dans l'approche discrète.
La méthodologie continue est appliquée à deux exemples, en commençant par un SP linéaire et forcé couplé à une chaîne d'oscillateurs présentant des forces de rappel locales cubiques. La résolution des équations du SIM mène à une définition continue des modes non linéaires de la chaîne. La détection des points d'équilibre et singuliers permet de définir des niveaux de forçage critiques au-delà desquels les points singuliers apparaissent. Les simulations numériques viennent ensuite confirmer la capacité de cette méthode à prédire les comportements du système. Les comparaisons menées entre résultats analytiques issus des approches discrète et continue prouvent que, comme attendu, la chaîne doit comporter un nombre suffisant d'oscillateurs pour que les prédictions dans le cadre de l'approximation continue soient quantitativement précises.

Dans le deuxième exemple, une partie linéaire est ajoutée aux forces de rappel locales dans la chaîne, et la partie non linéaire est supposée négative. Les ordres en ϵ des paramètres de couplage sont aussi modifiés et le SP est soumis à des oscillations libres. Des simulations numériques mettent en lumière des comportements différents des comportements modaux observés jusqu'à présent : des ondes localisées spatialement se propagent dans la chaîne et se réfléchissent aux limites gauche et droite. En augmentant l'énergie injectée, ces ondes présentent des changements de direction. Des développements théoriques apportent des premières explications à ces phénomènes. L'approximation continue dans la chaîne mène à la détection d'une équation de Schrödinger non linéaire, dont les solutions solitons-enveloppe présentent des caractéristiques similaires aux comportements numériques observés, excepté pour l'onde présentant des changements de direction qui reste inexpliquée. Le traitement complet du système d'équations obtenus est laissé à des travaux ultérieurs.

Chapitre 6

Étude expérimentale

Les chapitres précédents se sont focalisés sur des approches théoriques et, dans une moindre mesure, numériques. Le présent chapitre s'attache à concevoir et tester un dispositif expérimental, constitué d'une structure principale couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. Il permet d'établir des premiers résultats expérimentaux reproduisant qualitativement les comportements des modèles développés précédemment.
Le système principal est composée d'un parallélépipède d'acier reposant sur quatre barrettes métalliques. La présentation de sa conception et de son dimensionnement est suivie de résultats expérimentaux permettant de caractériser ses paramètres dynamiques réels. La chaîne est constituée de huit oscillateurs présentant des forces de rappel cubiques locales. Une fois de plus, la déclinaison du principe de conception laisse place à des tests vibratoires permettant de mettre en lumière les propriétés marquantes de son comportement dynamique. Enfin, des tests sont réalisés sur le système SP/chaîne couplés à l'aune des résultats expérimentaux précédents. Ces derniers mettent en évidence des régimes périodiques et quasi-périodiques de type SMR, ainsi que des phénomènes de bifurcation associés à des seuils d'énergie au-delà desquels la chaîne agit comme un absorbeur de vibrations.

Sommaire

6.1 Présentation du dispositif expérimental 108
6.1.1 Système principal 108
6.1.2 Chaîne d'oscillateurs non linéaires 110
6.2 Tests sur le système couplé complet 120
6.3 Conclusions du chapitre 122

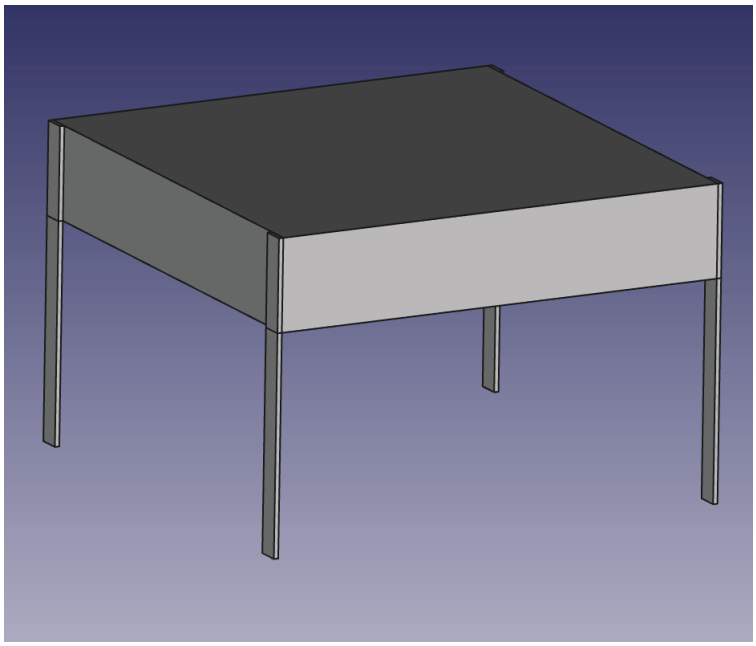


FIGURE 6.1 – Représentation schématique du système principal utilisé dans le dispositif expérimental.

Dans cette étude du comportement d'une structure linéaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaire, les développements précédents se sont concentrés sur des approches théoriques et numériques. Dans ce chapitre, nous nous attacherons à étudier le comportement d'un dispositif expérimental d'un SP à un ddl couplé à une chaîne présentant des non-linéarités locales.

6.1 Présentation du dispositif expérimental

6.1.1 Système principal

Caractérisation des paramètres dynamiques

Le système principal étudié est un modèle réduit et idéalisé d'un étage de bâtiment. Il est représenté schématiquement sur la figure 6.1. Un parallélépipède d'acier repose sur quatre barrettes élancées, en acier elles aussi.
Comme montré sur la figure 6.2, cette maquette est encastrée à sa base sur une plaque en plexiglas. Cette dernière est fixée sur une table vibrante permettant de solliciter la structure en pied dans la direction X (cf figure 6.2).
Les dimensions des constituants de la maquette sont données selon les axes X, Y et Z dans le tableau 6.1. Celles du parallélépipède sont données sans tenir compte des encoches de 2 mm prévues à l'endroit de la jointure avec les barrettes. La hauteur Z des barrettes correspond à la longueur

Dimensions en mm	X	Y	Z
Parallélépipède	100	100	40
Barrettes	2	10	85

TABLE 6.1 – Dimension des constituants du système principal utilisé dans le dispositif expérimental.

libre, c'est-à-dire de la base du parallélépipède jusqu'à la plaque de plexiglas dans laquelle chacune

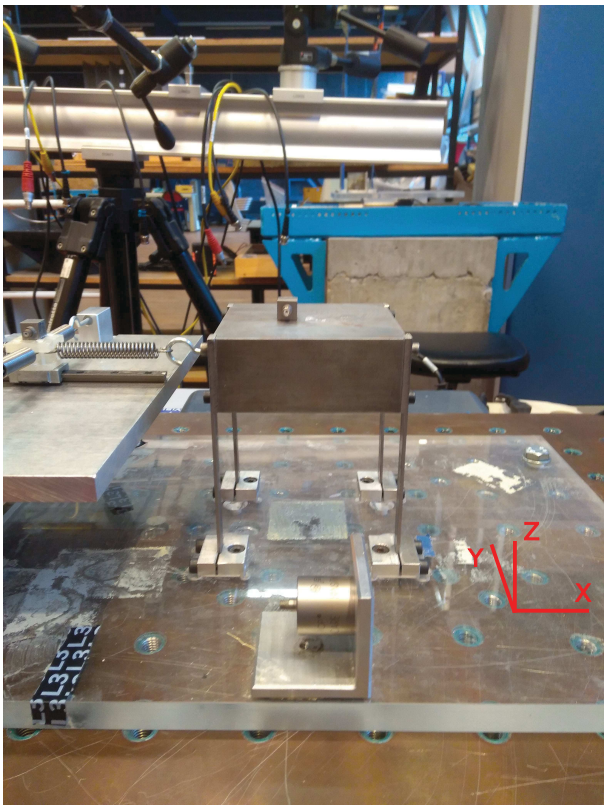


FIGURE 6.2 – Photo du système principal utilisé dans le dispositif expérimental. La masse principale est montée sur quatre barrettes et reliée à la première masse de la chaîne à gauche.

des barrettes est encastrée sur 10 mm.
Les dimensions présentées ainsi que la direction de sollicitation permettent de poser trois hypothèses :

- Le parallélépipède est supposé indéformable.
- Les déplacements ont très majoritairement lieu dans la direction X.
- Les fréquences propres des barrettes, vues comme des poutres bi-encastrées, sont très largement supérieures aux fréquences de fonctionnement considérées dans ce chapitre.

La maquette est ainsi modélisée par un oscillateur à 1 ddl de masse M et raideur K, dont les déplacements sont assez faibles pour conserver un régime linéaire. La dissipation est prise en compte par un amortisseur visqueux de coefficient C inconnu. La masse est calculée comme la somme de la masse du parallélépipède et de la moitié de la masse des 4 barrettes, donnant $M = 3.18$ kg. Le paramètre K est obtenu à partir de la raideur K_b d'une poutre bi-encastrée en régime statique (cf figure 6.3) :

$$K_b = \frac{F}{\Delta} = \frac{12EI}{L_b^3}$$
$$K = 4K_b = 1.094 \times 10^5 \ N.m^{-1} \tag{6.1}$$

où I est le moment quadratique d'une barrette par rapport à Y, L_b sa hauteur selon Z et E le module d'Young de l'acier. La fréquence propre du SP vaut ainsi :

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = 29.52 \ Hz \tag{6.2}$$

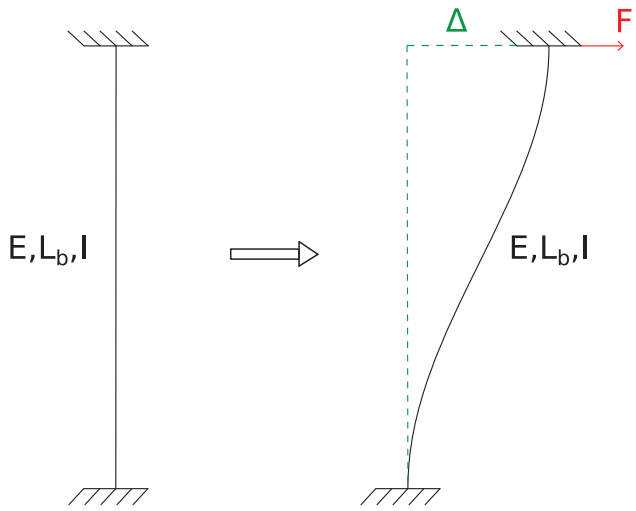


FIGURE 6.3 – Déformation d'une poutre bi-encastrée.

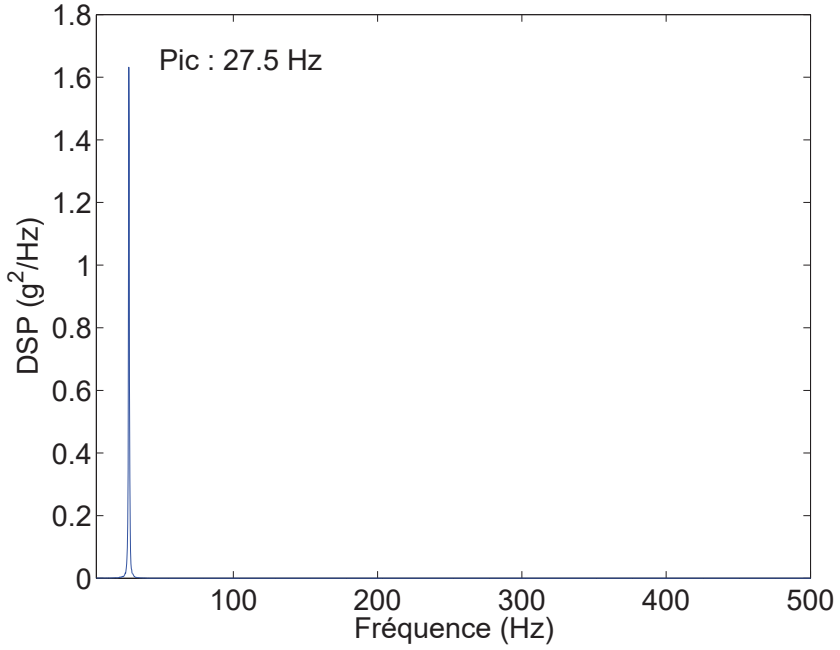
Tests vibratoires

Afin de confirmer les hypothèses de la partie précédente, des tests sont menés sur le SP non couplé à la chaîne. La description du matériel expérimental est donné en annexe B. Deux types de sollicitation sont appliquées par la table vibrante.
Le premier est un bruit blanc d'amplitude constante sur une bande de fréquence allant de 5 Hz à 500 Hz. La figure 6.4(a) représente la densité spectrale de puissance obtenue via un accéléromètre placé sur la face supérieure du SP, visible sur la figure 6.2. Les résultats montrent un pic unique, confirmant l'hypothèse d'un système à un ddl pour une sollicitation dans la direction X. Cependant, la fréquence de résonance est inférieure de 2 Hz à celle prévue théoriquement.
Le second type de forçage appliqué en pied du SP est un sinus balayant une plage de fréquence [25,30] Hz, à des accélérations allant de 0.1 m/s^2 à 0.5 m/s^2 par pas de 0.1 m/s^2. Les résultats tracés sur la figure 6.4(a) tracent l'accélération maximale du SP A_{SP} ("peak acceleration"). À faible énergie, le pic d'amplitude est symétrique centré autour de la fréquence 27.72 Hz. L'amplitude de forçage augmentant, le pic s'incline légèrement vers la gauche et la fréquence au maximum du pic correspondant à l'accélération de forçage de 0.5 m/s^2 est de 27.54 Hz. Cela rend compte d'une faible non-linéarité assouplissante du SP, certainement localisée au niveau de l'attache des barrettes au parallélépipède. En effet, ces dernières sont fixées à l'aide de deux vis. Il est possible qu'elles se décollent au niveau de la vis inférieure créant des non-linéarités de contact. Ce décollement augmentant la hauteur déformable des barrettes, il pourrait aussi expliquer la différence de 2 Hz entre fréquences théorique et observée.
Le SP ayant été présenté, intéressons-nous désormais à la réalisation de la chaîne d'oscillateurs non linéaires.

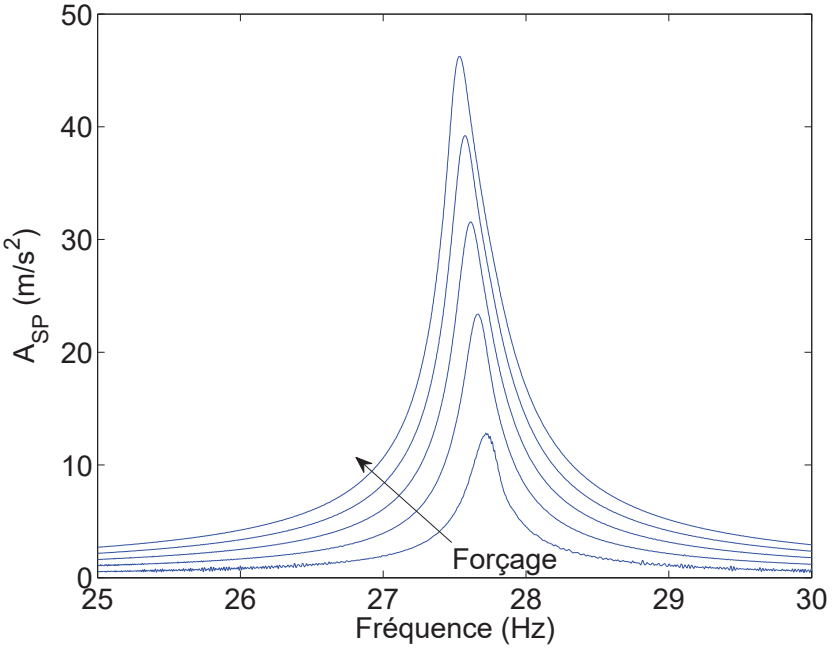
6.1.2 Chaîne d'oscillateurs non linéaires

Réalisation pratique de la chaîne

La chaîne d'oscillateurs est couplée au SP via le premier oscillateur. Chacune des masses présente des non-linéarités cubiques locales réalisées à l'aide du principe présenté sur la figure 6.5, déjà utilisé notamment dans [McFarland *et al.*, 2005b, Gourdon *et al.*, 2007, Vaurigaud, 2011]. Deux ressorts linéaires de raideur k et longueur initiale L_i, pré-tendus par une force P, sont attachés à une masse se déplaçant selon un axe orthogonal à celui des ressorts. Lorsque la masse subit un déplacement u, les ressorts s'étirent jusqu'à atteindre une longueur L_f. La composante longitudinale de la force de rappel en résultant est nulle par symétrie. Sous la condition de petits déplacements u, la composante



(a)



(b)

FIGURE 6.4 – Résultats expérimentaux des tests menés sur le système principal (a) Densité spectrale de puissance sous sollicitation de type bruit blanc d'amplitude constante sur une bande de fréquence allant de 5 Hz à 500 Hz (b) Accélération maximale sous sollicitation de type sinus balayé sur une plage de fréquence [25,30] Hz à des accélérations allant de 0.1 m/s^2 à 0.5 m/s^2 par pas de 0.1 m/s^2.

transversale F, représentée vers la droite par commodité, s'écrit :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2u}{L_f}\left(P + k(L_f - L_i)\right) \\ \text{où } L_f &= \sqrt{u^2 + L_i^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

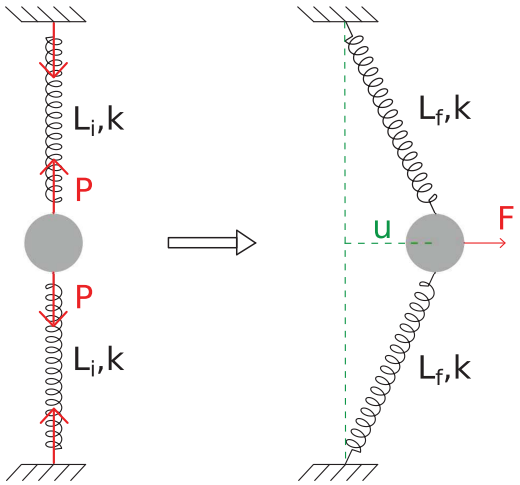


FIGURE 6.5 – Principe de réalisation d'une non-linéarité cubique.

Des développements limités en u permettent d'approximer F :

$$F = \frac{2P}{L_i}u + \frac{kL_i - P}{L_i^3}u^3 + O(u^5) \tag{6.4}$$

ou en écrivant que $P = k(L_i - L_0)$, où L_0 est la longueur à vide des ressorts :

$$F = 2k\frac{L_i - L_0}{L_i}u + \frac{kL_0}{L_i^3}u^3 + O(u^5) \tag{6.5}$$

Une non-linéarité cubique est ainsi créée géométriquement à l'aide de composants linéaires. Notons que si les ressorts ne sont pas précontraints, i.e. $L_i = L_0$, la force de rappel engendrée est purement non linéaire.
Une deuxième difficulté porte sur le couplage entre oscillateurs de la chaîne. Il est réalisé à l'aide de ressorts linéaires sollicités dans leur direction de fonctionnement, générant une force de rappel de la forme $\tilde{B}(x - y)$ où x et y sont les déplacements de deux masses voisines. Cependant, dans la pratique, un ressort peut fonctionner en traction *ou* en compression. Or, les mouvements vibratoires dans la chaîne créent des déplacements relatifs positifs et négatifs, créant ainsi de la traction *et* de la compression dans les ressorts si la longueur de ces derniers lorsque la chaîne est au repos correspond à leur longueur à vide. Dans sa position initiale, la chaîne devra donc être conçue de manière à ce que les ressorts soient pré-tendus (respectivement précomprimés) dans le cas de fonctionnement en traction (respectivement compression), afin que chacun soit déformé jusqu'à la moitié de sa course maximale, notée S. De cette façon, les ressorts fonctionneront uniquement en traction (respectivement compression) dès lors que les déplacements relatifs dans la chaîne n'excèdent pas $\frac{S}{2}$. Notons ici que des ressorts de traction ont été choisis dans la mesure où ils possèdent deux extrémités à boucle, ce qui facilite grandement leur attache aux oscillateurs. A contrario, les ressorts de compression présentent des extrémités à section plane qu'il aurait fallu coller aux éléments.
La réalisation des non-linéarités et des couplages inter-oscillateurs ont mené à la conception d'une plaque support représentée schématiquement sur la figure 6.6. Elle est prévue pour une chaîne de 8 masses. Une rangée centrale de trous filetés permet de visser un rail, dont une portion est représentée sur la figure 6.7, sur lequel viendront glisser les oscillateurs de la chaîne. Au deux-tiers de la plaque environ, un portique enjambe le rail. Il est aussi fileté de façon à pouvoir y visser un crochet auquel s'accrochera un ressort relié à la dernière masse de la chaîne. C'est ce qui permet de mettre les ressorts de couplage inter-oscillateurs sous tension, ce qui aurait été impossible avec une extrémité libre. Les rangées de plots parallélépipédiques situés de part et d'autre du rail permettent d'accrocher les ressorts réalisant les non-linéarités, encore à l'aide de crochets vissés. Leur

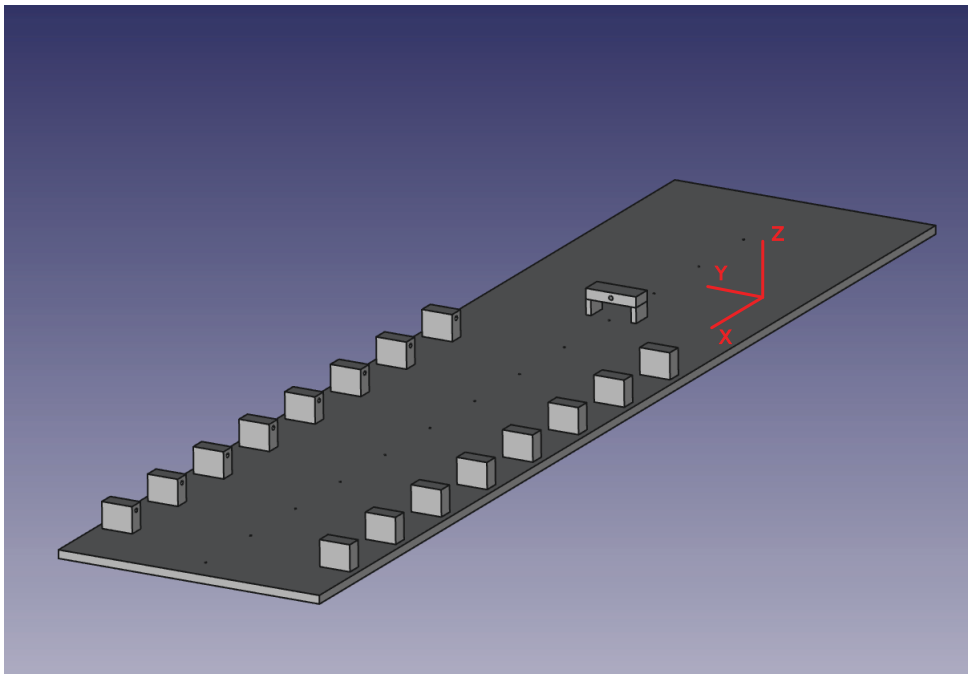


FIGURE 6.6 – Représentation schématique de la plaque support accueillant la chaîne d'oscillateurs.

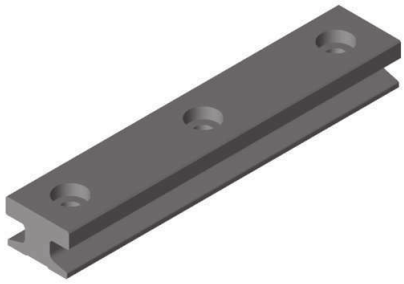
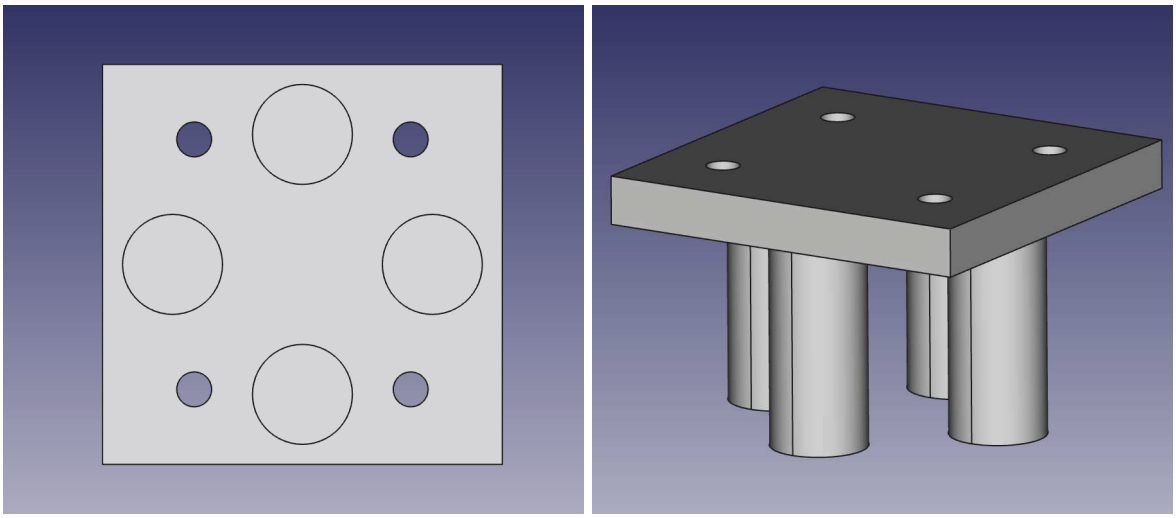


FIGURE 6.7 – Représentation schématique d'une portion de rail.



FIGURE 6.8 – Représentation schématique d'un chariot.

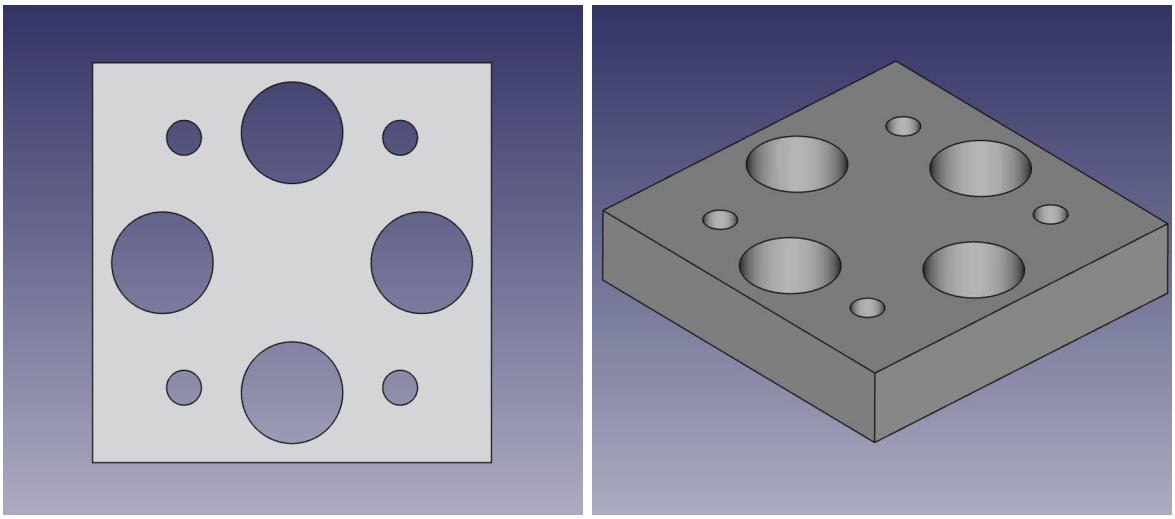
éloignement au rail dans la direction Y est réglable, de sorte que la pré-tension P de la figure 6.5 soit ajustable. De plus, leur positionnement selon la direction X est calculé afin qu'ils soient chacun en face d'un oscillateur de la chaîne une fois cette dernière sous tension.
La réalisation des masses doit s'assurer que ces dernières sont suffisamment légères pour obtenir un rapport de masse ϵ faible, tout en garantissant la possibilité d'y accrocher quatre ressorts. Le premier constituant est un chariot en contact avec le rail (cf figure 6.8), possédant 4 trous filetés qui permettent de visser les systèmes d'attache des ressorts. Ces derniers ont été réalisés à l'aide d'une imprimante 3D, qui présente l'avantage d'utiliser une résine légère. Ils sont composés de deux pièces représentées sur les figures 6.9 et 6.10 qui, une fois assemblées, forment le composant de la figure 6.11. Les 4 barres cylindriques verticales sont les points d'accroche des boucles des ressorts. Les 4 trous présents sur les plaques supérieure et inférieure permettent de passer des vis qui fixeront la masse au chariot.



(a) (b)

FIGURE 6.9 – Représentation schématique de la plaque inférieure du composant imprimé des oscillateurs non linéaires (a) Vue plane (b) Vue tridimensionnelle.

Le résultat final est représenté sur les figures 6.12 et 6.13 montrant la chaîne d'oscillateurs montée ainsi que la photo d'une masse. La figure 6.14 montre enfin le système complet, i.e. le SP couplé à la chaîne.



(a) (b)

FIGURE 6.10 – Représentation schématique de la plaque supérieure du composant imprimé des oscillateurs non linéaires (a) Vue plane (b) Vue tridimensionnelle.

Caractérisation des paramètres dynamiques

Chaque oscillateur possède une masse $m = 27.5$ g, somme des masses du chariot, de l'ensemble imprimé (cf figure 6.11) et de l'accéléromètre collé dessus. Le ratio de masses vaut ainsi $\epsilon = \dfrac{m}{M} = 8.64 \times 10^{-3}$. La masse totale de la chaîne s'élève à $m_{tot} = 8m = 220$ g $\ll M$. Les ressorts assurant le couplage inter-oscillateurs, de raideur $\tilde{B} = 2420$ N/m et de longueur à vide $L_0 = 51$ mm, sont les mêmes que ceux utilisés pour créer les non-linéarités. En prenant en compte une pré-tension des ressorts $L_i - L_0 = 1$ mm, la force de rappel non linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} W(u) &= \tilde{B}_l u + \tilde{D} u^3 \\ &= 93.1u + 8.78 \times 10^5 u^3 \end{aligned} \tag{6.6}$$

L'accélération imposée par la table vibrante en base du SP est sinusoïdale. Par ailleurs, la dissipation dans la chaîne est modélisée par un amortissement visqueux de coefficient C_1, de valeur inconnue. Définissant u_j comme le déplacement de la $j^{\text{ème}}$ masse de la chaîne, les équations gouvernant la dynamique du système complet s'écrivent :

$$\begin{cases} M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv + C_1(\dot{v} - \dot{u}_1) + \tilde{B}(v - u_1) = F\sin(\omega t) \\ m\ddot{u}_1 + C_1(-\dot{v} + 2\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \tilde{B}(-v + 2u_1 - u_2) + \tilde{B}_l u_1 + \tilde{D}u_1^3 = 0 \\ m\ddot{u}_j + C_1(-\dot{u}_{j-1} + 2\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + \tilde{B}(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + \tilde{B}_l u_j + \tilde{D}u_j^3 = 0\,, \quad j = 2,\ldots,7 \\ m\ddot{u}_8 + C_1(2\dot{u}_8 - \dot{u}_7) + \tilde{B}(2u_8 - u_7) + \tilde{B}_l u_8 + \tilde{D}u_8^3 = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

Les changements de variables suivants sont introduits :

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t \\ \tilde{v} &= \frac{v}{x_0} \\ \tilde{u}_j &= \frac{u_j}{x_0} \end{aligned} \tag{6.8}$$

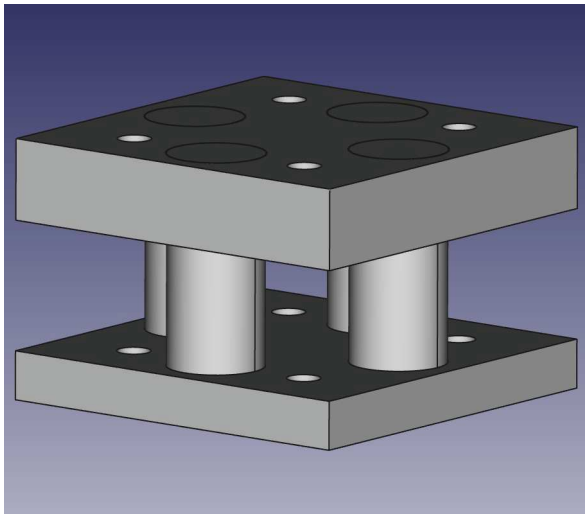


FIGURE 6.11 – Représentation schématique du composant imprimé assemblé des oscillateurs non linéaires.

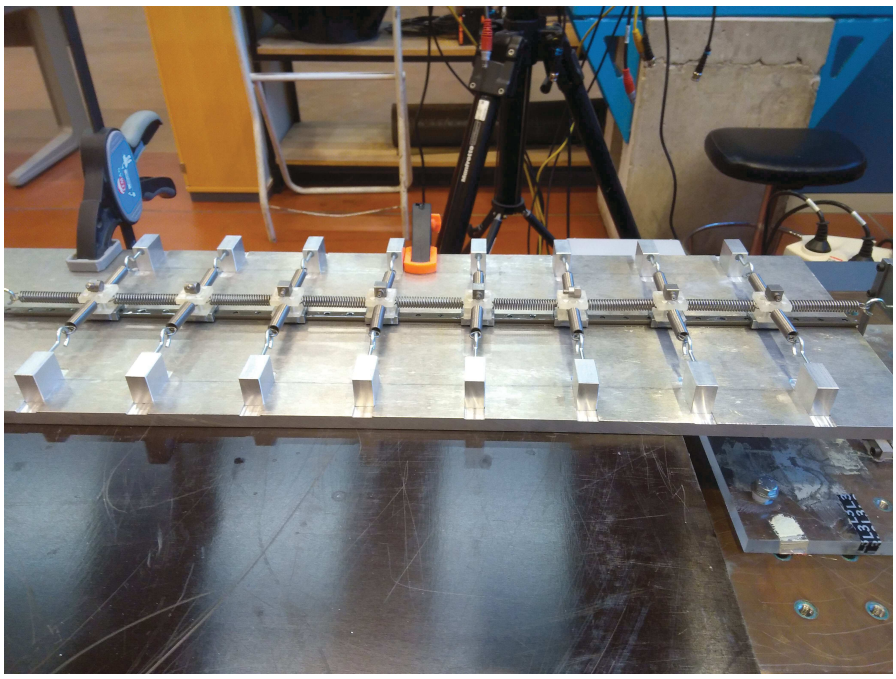


FIGURE 6.12 – Photo de la chaîne d'oscillateurs non linéaires montée.

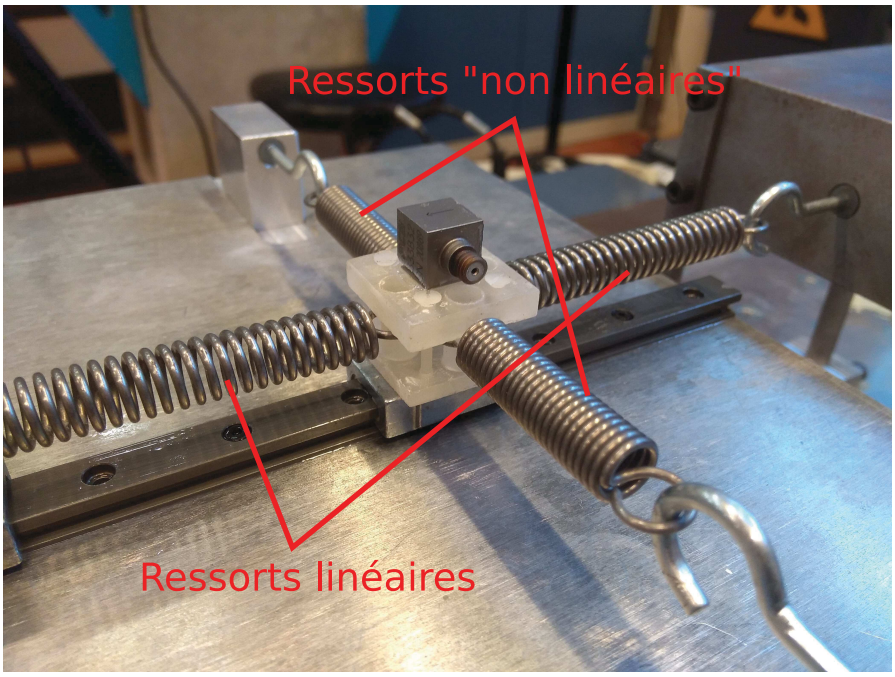


FIGURE 6.13 – Photo d'un oscillateur non linéaire de la chaîne.

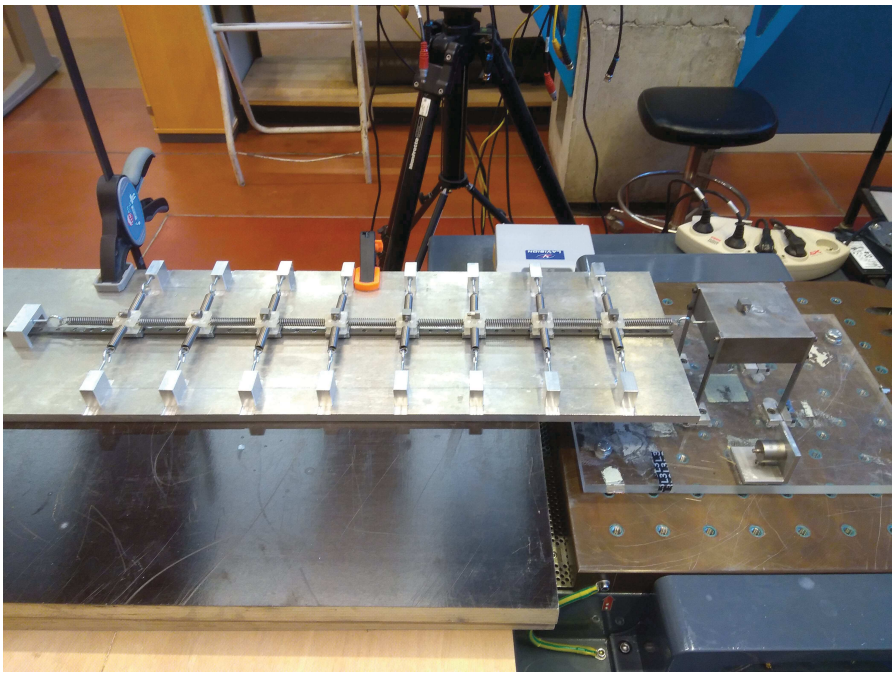


FIGURE 6.14 – Photo du système complet.

où x_0 est une longueur de dimensionnement fixée à $x_0 = 0.01$ m. Divisant la première équation par K et les 8 équations de la chaîne par ϵK, le système (6.7) devient :

$$\begin{cases} \tilde{v}'' + \epsilon c\tilde{v}' + \tilde{v} + \epsilon c_1(\tilde{v}' - \tilde{u}_1') + \epsilon B(\tilde{v} - \tilde{u}_1) = \epsilon f \sin(\Omega t) \\ \tilde{u}_1'' + c_1(-\tilde{v}' + 2\tilde{u}_1' - \tilde{u}_2') + B(-\tilde{v} + 2\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) + B_l u_1 + D\tilde{u}_1^3 = 0 \\ \tilde{u}_j'' + c_1(-\tilde{u}_{j-1}' + 2\tilde{u}_j' - \tilde{u}_{j+1}') + B(-\tilde{u}_{j-1} + 2\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1}) + B_l u_j + D\tilde{u}_j^3 = 0\,, \quad j = 2,\ldots,7 \\ \tilde{u}_8'' + c_1(2\tilde{u}_8' - \tilde{u}_7') + B(2\tilde{u}_8 - \tilde{u}_7) + B_l u_8 + D\tilde{u}_8^3 = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

où $.'$ désigne la dérivation par rapport à τ et

$$\begin{gathered} c = \frac{C}{\epsilon\sqrt{KM}} = 0.23C \quad c_1 = \frac{C_1}{\epsilon\sqrt{KM}} = 0.23C_1 \quad f = \frac{F}{\epsilon K x_0} = 0.15F \\ B = \frac{\tilde{B}}{\epsilon K} = 3.57 \qquad B_l = \frac{\tilde{B}_l}{\epsilon K} = 0.14 \qquad D = \frac{\tilde{D}x_0^2}{\epsilon K} = 0.13 \end{gathered} \tag{6.10}$$

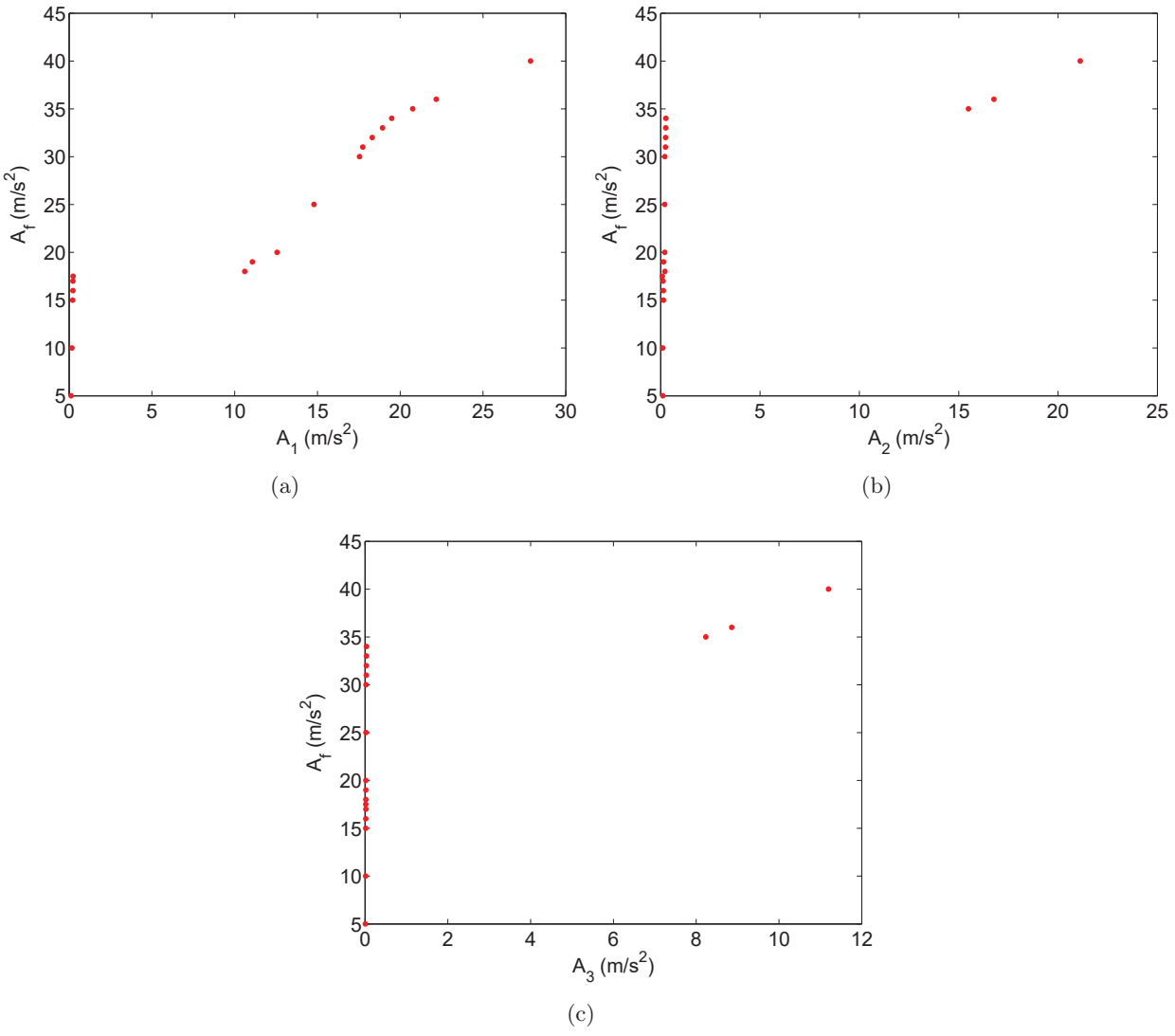
Le système (6.9) est écrit sous la forme générique (2.1). Néanmoins, nous nous limiterons ici à des comparaisons qualitatives entre les comportements analytiques/numériques observés dans les chapitres précédents et les résultats expérimentaux au vu des écarts qu'il pourrait exister entre le modèle décrit par le système (6.9) et la réalité du dispositif. Plusieurs sources d'approximation viennent assez rapidement à l'esprit. La première a déjà été décrite dans la section 6.1.1 : le SP est faiblement non linéaire. De plus, si l'amortissement de la chaîne est supposé visqueux dans le modèle, il provient a priori en majorité du frottement sec existant entre les chariots et le rail. Bien que réduit par la lubrification de la chaîne, ce frottement reste assez important. Par ailleurs, les ressorts utilisés ne possèdent pas exactement la même raideur. Cette faible variabilité implique que chaque masse n'est pas parfaitement alignée avec les plots parallélépipédiques, ce qui entraîne un allongement des ressorts assurant la non-linéarité. Enfin, chacun de ces ressorts n'est pas exactement pré-tendu avec la même force, engendrant une légère asymétrie.
Avant d'effectuer des tests sur le système couplé SP-chaîne, les résultats de tests menés sur la chaîne seule sont présentés.

Tests vibratoires

Les tests sont menés dans cette section en attachant le premier ressort de la chaîne directement à la table vibrante. Ainsi, seule la chaîne est sollicitée en imposant à l'extrémité normalement liée au SP des excitations sinusoïdales de fréquence 27.5 Hz et d'amplitude constante. Les différents tests considèrent des accélérations de forçage A_f comprises entre 5 m/s^2 et 40 m/s^2. À chacun de ces niveaux, la table vibrante simule le SP à l'équilibre dans la mesure où cette dernière subit un mouvement sinusoïdal d'amplitude et de fréquence constantes. Seuls des régimes périodiques pourront donc être observés, puisque les réponses de type SMR dépeignent des comportements du SP fortement modulés en amplitude.
Les résultats des tests menés pour différents niveaux d'accélération de forçage A_f sont représentés sur les figures 6.15(a)–(c), où A_j désigne l'accélération maximale de la j^{ème} masse de la chaîne. Sur ces figures, chaque point rouge est le résultat d'un test, associé à une accélération de forçage A_f en ordonnée et l'accélération d'une masse de la chaîne (première, deuxième ou troisième selon la figure) en abscisse. Ces accélérations maximales sont relevées lorsque la chaîne atteint l'équilibre. Comme expliqué précédemment, le forçage A_f simule le comportement du SP pendant un régime périodique. Ces trois figures dépeignent donc la réunion de plusieurs points d'équilibre du système, c'est-à-dire un équivalent expérimental du SIM (exception faite des branches instables).
Deux seuils de forçage peuvent clairement être identifiés pour les amplitudes testées. Le premier

intervient entre $A_f = 17.5$ m/s^2 et $A_f = 18$ m/s^2. À ces niveaux, la première masse subit une bifurcation importante. L'amplitude du saut est beaucoup plus réduite pour les deuxième et troisième masses (il en va de même pour les autres). Cette bifurcation permet de discriminer deux "branches" autour desquelles le comportement du système peut évoluer. Le deuxième saut se situe entre $A_f = 34$ m/s^2 et $A_f = 35$ m/s^2 et définit le passage sur une troisième branche. La bifurcation est cette fois-ci importante pour les deuxième et troisième masse et plus modérée pour la première ainsi que pour les masses 4 à 8. Les accélérations maximales des ddl de la chaîne à l'équilibre avant et après les bifurcations sont représentées sur les figures 6.16 et 6.17. Elles dépeignent distinctement les bifurcations subies successivement par la première masse puis par les deuxième et troisième ddl.

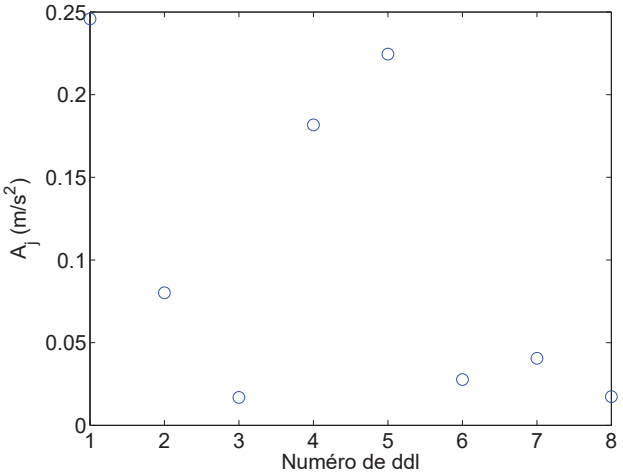
Ces changements subits de comportement de la chaîne rappellent les bifurcations autour des zones



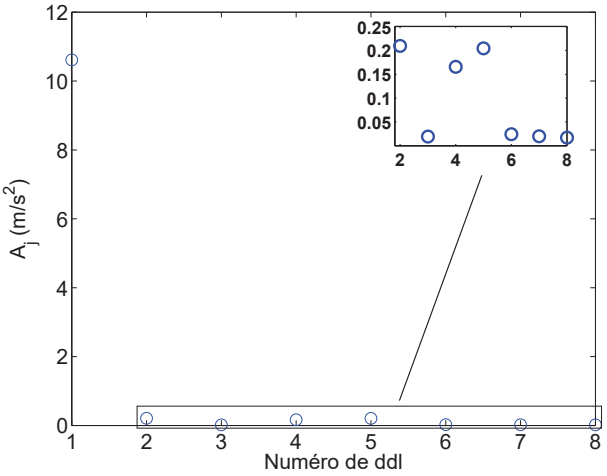
(a) (b) (c)

FIGURE 6.15 – Résultats expérimentaux issus des tests sur la chaîne d'oscillateurs non linéaires. Chaque point correspond à un test et trace l'amplitude à l'équilibre des première, deuxième et troisième masses (figures (a), (b) et (c) respectivement) sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz. En ordonnée figure l'amplitude de l'accélération de forçage.

instables des SIM décrites dans les chapitres 4 et 5. Des régimes de type SMR pourraient donc advenir sur le système complet dès lors que l'accélération du SP atteint les seuils définis ci-dessus et correspondant à des maximums locaux de l'équivalent expérimental du SIM. Néanmoins, différents tests dont les résultats ne figurent pas ici ont montré que la valeur de ces seuils et la définition des branches correspondantes sont assez sensibles à la configuration et la mise en place du dispositif



(a)



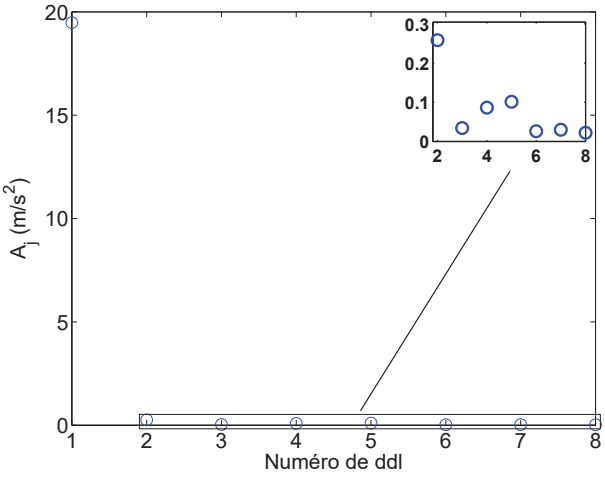
(b)

FIGURE 6.16 – Accélérations maximales des oscillateurs de la chaîne à l'équilibre sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz et d'amplitude (a) $A_f = 17.5$ m/s^2 et (b) $A_f = 18$ m/s^2.

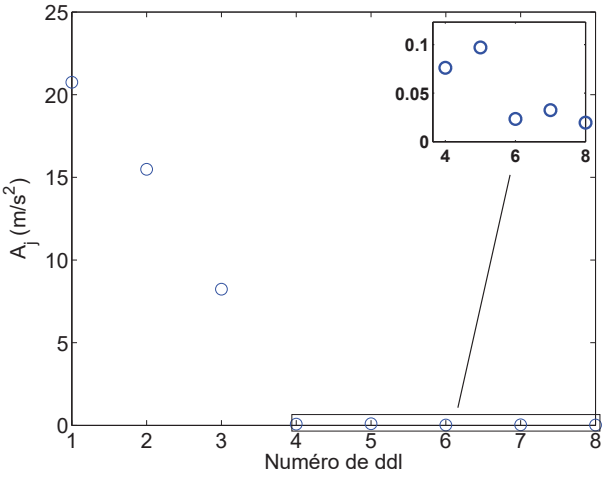
expérimental. Les tests menés sur le SP couplé à la chaîne, faisant l'objet de la partie suivante, devraient ainsi témoigner de l'existence de plusieurs branches et seuils possédant des caractéristiques qualitativement similaires à celles dépeintes dans cette section, mais présentant possiblement des différences quantitatives.

6.2 Tests sur le système couplé complet

Le SP est soumis dans un premier temps à des sollicitations sinusoïdales dont la fréquence balaie la plage [27,28.5] Hz, à des amplitudes variant entre $A_f = 0.1$ m/s^2 et $A_f = 0.6$ m/s^2. Les résultats sont présentés sur la figure 6.18. Sur chacune des sous-figures sont tracées en rouge et bleu les réponses du SP avec et sans chaîne couplée. Les réponses des première, deuxième et troisième masses sont le cas échéant respectivement représentées par des lignes noires continue, discontinue et pointillée.
À faible énergie ($A_f = 0.1$ m/s^2), l'ajout de la chaîne a deux effets principaux. Premièrement, elle décale le pic de résonance vers la droite, raidissant ainsi le système. Cette caractéristique se retrouve à tous les autres niveaux de forçage. Cet effet raidissant est aussi observé théoriquement (cf figure 4.14). On remarque dans un deuxième temps que la réponse du SP avec la chaîne est amplifiée de



(a)



(b)

FIGURE 6.17 – Accélérations maximales des oscillateurs de la chaîne à l'équilibre sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz et d'amplitude (a) $A_f = 34$ m/s^2 et (b) $A_f = 35$ m/s^2.

11.5 %. Les amplitudes des ddl de la chaîne restent pour leur part à des ordres de grandeur similaires à ceux de la branche basse décrite dans la partie précédente.
Pour $A_f = 0.2$ m/s^2, la dynamique du système est quasi-similaire, à ceci près qu'à 27.98 Hz, un rapide saut vers une première branche supérieure est observé. Comme précédemment, il correspond à une bifurcation de la seule première masse, accompagné ici d'une diminution rapide de l'amplitude d'oscillation du SP. Le comportement du système retourne toutefois très rapidement évoluer autour de la branche basse.
Au palier de forçage suivant ($A_f = 0.3$ m/s^2), le comportement du dispositif est radicalement différent. Entre les fréquences de sollicitation 27.9 et 28.12 Hz, le SP dépasse l'amplitude 30 m/s^2, définissant un premier seuil. Le système paraît alors hésiter entre les deux branches et passe rapidement de l'une à l'autre, piégeant la dynamique du SP entre deux niveaux d'énergie quasi-constants (environ 19 et 27 m/s^2). Ce comportement ressemble fortement à une réponse de type SMR, hypothèse confirmée par les résultats de la figure 6.19 présentant les amplitudes au cours du temps du SP ainsi que des premier, deuxième et quatrième ddl de la chaîne pour une sollicitation $A_f = 0.3$ m/s^2 à une fréquence constante de 28 Hz. Les réponses des oscillateurs présentent une forte modulation. La première masse subit des bifurcations de grande amplitude quand les deuxième et quatrième

masses subissent des sauts d'amplitude plus modérée (c'est aussi le cas des autres oscillateurs de la chaîne). Le système subit ainsi une réponse de type SMR caractérisée par des bifurcations répétées entre les deux branches précédemment définies.
Pour $A_f = 0.4$ m/s^2, le comportement du système bifurque vers la branche supérieure autour de la fréquence 27.8 Hz, comme en atteste la diminution brutale de l'amplitude du SP à l'atteinte du seuil et l'augmentation de celle du premier ddl. Un saut vers la branche inférieure intervient autour de 28.2 Hz. Aucune modulation n'est cette fois-ci observée, ce qui rend compte de régimes périodiques sur la branche supérieure.
Au palier suivant $A_f = 0.5$ m/s^2, après avoir bifurqué sur la première branche supérieure à 27.78 Hz, le comportement du système saute une nouvelle fois vers une seconde branche supérieure à 27.8 Hz. La seconde masse subit alors une bifurcation. Le retour vers la première branche supérieure, puis vers la branche basse, s'opèrent respectivement autour de 28.06 Hz et 28.26 Hz. Augmentant le forçage à $A_f = 0.6$ m/s^2, une troisième branche supérieure fait son apparition. Nous n'avons cependant pas observé de comportements de type SMR autour de ces deuxième et troisième branche. Notons par ailleurs que pour ce dernier palier de forçage, le test sur le SP non couplé à la chaîne n'a pas été réalisé de crainte d'endommager ce dernier.
Les différents tests menés sur le système couplé SP/chaîne laissent entrevoir une dynamique riche et complexe, combinant régimes périodiques et réponses modulées. La chaîne d'oscillateurs a prouvé sa propension à entrer en résonance avec le SP et absorber son énergie vibratoire dès lors que le SP atteint des amplitudes critiques. L'existence de tels seuils d'activation est une propriété connue des NES (voir par exemple [McFarland *et al.*, 2005b, Nguyen et Pernot, 2012, Weiss, 2016]), qui s'étend donc aux chaînes d'oscillateurs.

6.3 Conclusions du chapitre

Ce chapitre présente un dispositif expérimental permettant d'étudier la dynamique d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires couplée à une structure linéaire à un degré de liberté. La dynamique réelle du système a ainsi pu être comparée qualitativement aux comportements prévus par les approches analytico-numériques des chapitres précédents.
Le système principal est un parallélépipède d'acier reposant sur quatre barrettes métalliques dont la modélisation peut se résumer à un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté, qui présente donc une unique fréquence de résonance. Des premiers tests vibratoires révèlent que la structure est faiblement non linéaire à haute énergie et possède une fréquence de résonance légèrement inférieure à celle prévue par la théorie. Ces différences s'expliquent a priori par la présence de contact au niveau de l'attache entre le parallélépipède et les barrettes.
La chaîne d'oscillateurs non linéaires est composée de huit masses glissant sur un rail et couplées entre elles par des ressorts linéaires. Deux ressorts linéaires sont attachés à chacune d'entre elles dans la direction transversale au rail, créant ainsi une non-linéarité cubique. Des phénomènes de bifurcation sont mis en lumière expérimentalement en testant la chaîne seule, non couplée au SP. Ces bifurcations sont liées à l'existence de seuils d'énergie injectée dans le système au-delà desquels la dynamique de la chaîne change brusquement. Ces propriétés rappellent clairement les comportements théoriques décrits dans les chapitres précédents autour des zones instables du SIM.
Enfin, le système complet SP/chaîne couplés est testé expérimentalement. Comme précédemment, des seuils d'énergie et les bifurcations associées sont observés. Ils discriminent des comportements du système global et notamment les niveaux de forçage au-dessus desquels la chaîne agit comme un absorbeur et réduit l'amplitude du SP. Ces tests dévoilent des régimes de type périodique et quasi-périodique (SMR) qui montrent que les outils analytiques développés dans cette thèse peuvent être utilisés à des fins de conception d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires.

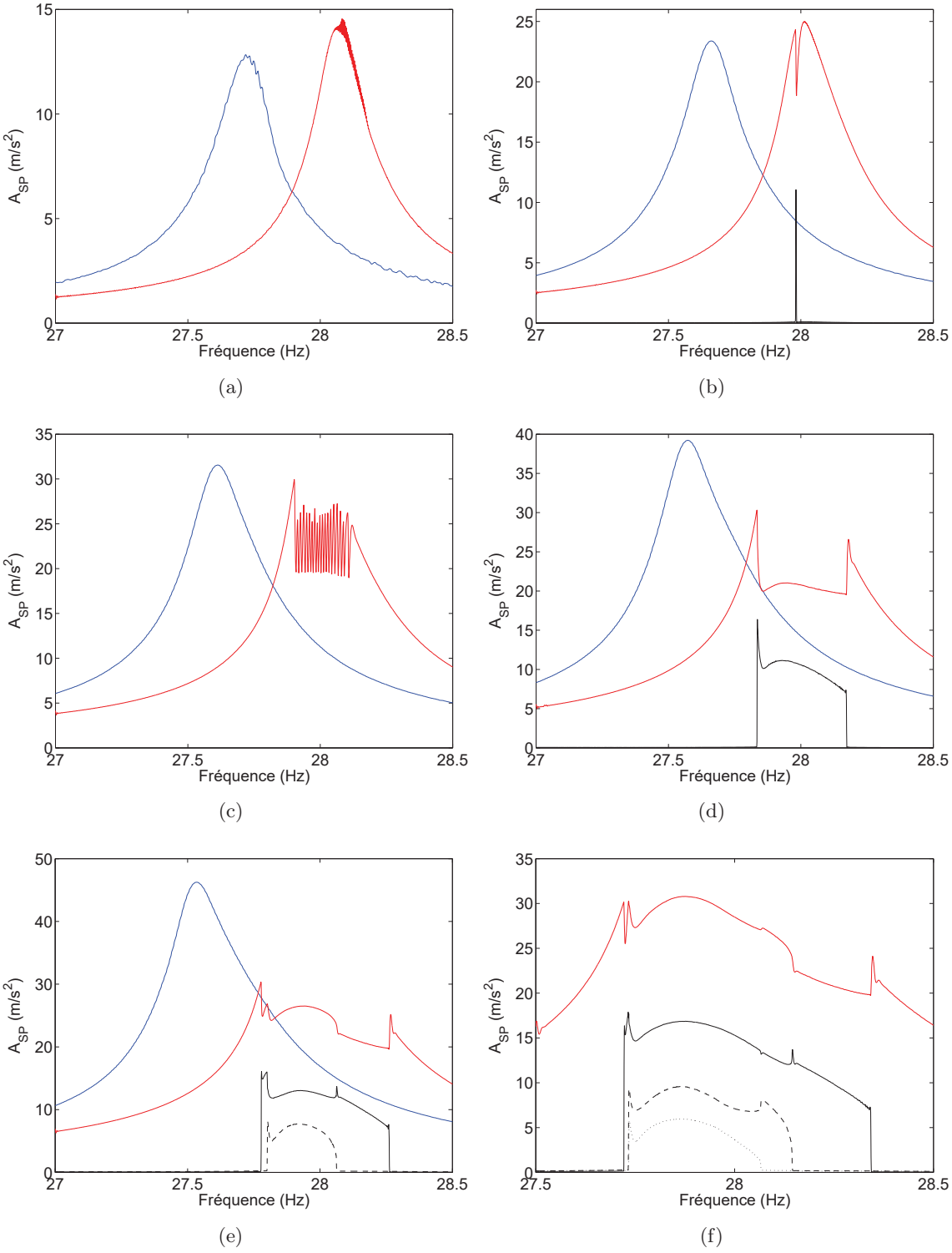


FIGURE 6.18 – Résultats expérimentaux issus des tests sur le système complet sous sollicitation de type sinus balayé sur une plage de fréquence [27,28.5] Hz et d'amplitude (a) $A_f = 0.1$ m/s^2 (b) $A_f = 0.2$ m/s^2 (c) $A_f = 0.3$ m/s^2 (d) $A_f = 0.4$ m/s^2 (e) $A_f = 0.5$ m/s^2 (f) $A_f = 0.6$ m/s^2. Les réponses du système principal avec et sans chaîne couplée sont tracées respectivement en rouge et bleu. Les réponses des première, deuxième et troisième masses sont respectivement représentées par des lignes noires continue, discontinue et pointillée.

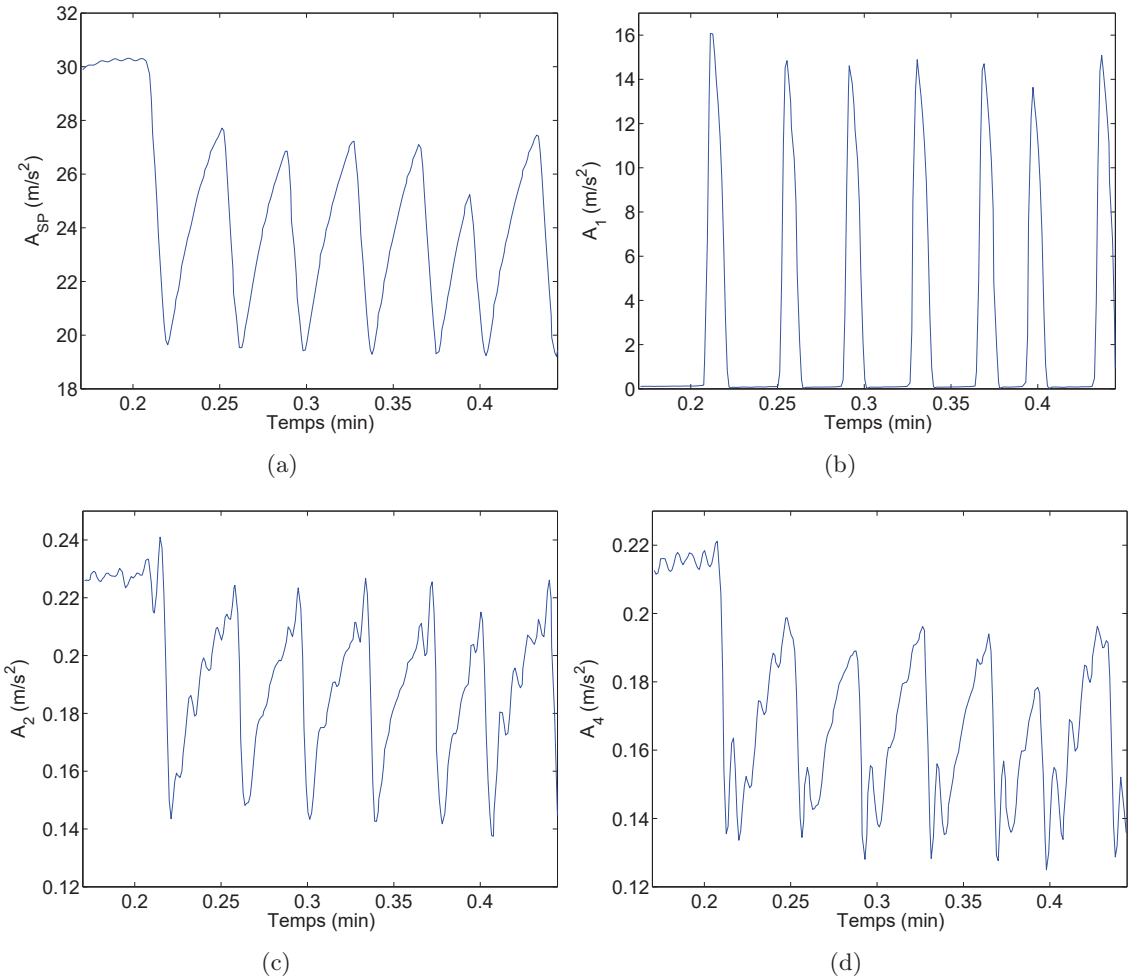


FIGURE 6.19 – Évolution au cours du temps des amplitudes maximales du système principal (figure (a)) ainsi que des premier, deuxième et quatrième ddl de la chaîne (figures (b), (c) et (d)) sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude $A_f = 0.3$ m/s^2 et de fréquence 28 Hz.

Conclusion

Synthèse

Ce manuscrit est la synthèse de travaux de thèse portant sur le couplage de chaînes d'oscillateurs non linéaires à des fins de contrôle vibratoire passif de structures. L'étude de ces systèmes sous oscillations forcées a permis de mettre en évidence les capacités de pompage énergétique de tels assemblages en série par le biais d'approches analytiques, expérimentales, et dans une moindre mesure, numériques. Les contributions originales marquantes de ces travaux sont résumées ci-après.
L'étude bibliographique introduit dans un premier temps des méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires, parmi lesquelles les méthodes d'échelles multiples en temps et les techniques de complexification-moyenne qui sont utilisées dans cette étude. Par la suite, une revue des méthodes de contrôle vibratoire, notamment des solutions passives, fait ressortir l'intérêt grandissant pour les absorbeurs non linéaires d'une part, et la rareté des travaux portant sur les absorbeurs à plusieurs degrés de liberté en série d'autre part, validant ainsi l'axe de recherche de ce manuscrit.
Le deuxième chapitre détaille la méthodologie générale analytique de traitement de systèmes composés d'une structure linéaire couplée à une chaîne de plusieurs oscillateurs non linéaires en série. Elle est basée sur l'étude de la dynamique du système réduit aux échelles de temps lente et rapide et fait apparaître une variété invariante en échelle lente, ou "Slow Invariant Manifold" (SIM), sur laquelle sont détectés les points d'équilibre et points singuliers correspondant respectivement aux régimes périodiques et réponses fortement modulées, ou "Strongly Modulated Responses" (SMR), du système. Cette méthodologie est la généralisation d'une approche utilisée dans la littérature pour étudier des systèmes à deux degrés de liberté. Il est ici prouvé qu'elle peut être appliquée à des systèmes à multiples degrés de liberté.
Le chapitre trois applique l'approche du chapitre précédent à un exemple d'un système où une masse non linéaire présentant deux forces de rappel cubiques est attachée à un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté. Le fait que la structure primaire et l'oscillateur non linéaire soient tous deux forcés donne au SIM une géométrie tridimensionnelle originale et complexe abritant une dynamique variée. La bonne concordance observée entre prédictions analytiques et résultats issus de simulations numériques permet de valider l'approche utilisée. Il est ensuite montré comment le calcul des points d'équilibre et singuliers peut être utilisé pour détecter des modifications structurelles du système principal.
L'application à une chaîne d'oscillateurs à non-linéarités cubiques est réalisée dans le quatrième chapitre. La chaîne est en mesure d'entrer en résonance avec le système principal forcé grâce à la dépendance énergie-fréquence de ses modes normaux non linéaires, qui génèrent une série de résonances internes avec le système linéaire. Plusieurs modes peuvent être sollicités pendant les différents régimes périodiques que le système global subit en fonction de l'énergie injectée par le forçage. Quant aux réponses de type SMR, elles prennent la forme dans la chaîne de bifurcations répétées entre différents modes, rendant compte d'intenses échanges d'énergie entre ces derniers. Ces deux types de comportement sont engendrés par le transfert d'énergie opéré depuis le système principal vers la chaîne, qui présente de bonnes capacités de pompage énergétique, notamment à hauts niveaux de forçage. Enfin, la méthodologie analytique est généralisée au traitement de systèmes primaires linéaires à plusieurs degrés de liberté forcés autour d'un de leurs modes propres.

Une variation de cette approche analytique est présentée dans le chapitre cinq. La chaîne d'oscillateurs, à condition qu'elle possède un grand nombre de degrés de liberté, peut être considérée dans le cadre d'une approximation continue via l'introduction d'une variable d'espace. Cela transforme le système de N équations différentielles, N étant le nombre d'oscillateurs de la chaîne, en un problème comprenant une équation aux dérivées partielles et des conditions limites. Cette approche est appliquée à deux cas figurant des non-linéarités positives et négatives. Dans le premier exemple, la résolution du problème aux limites mène à une description continue des déformées des modes normaux non linéaires excités dans la chaîne par le transfert d'énergie opéré depuis le système principal. Dans le deuxième cas, des ondes localisées spatialement se propagent dans la chaîne sous l'effet d'une impulsion sur l'oscillateur linéaire.
Le sixième et dernier chapitre présente un dispositif expérimental dans lequel un modèle réduit de bâtiment à un étage est couplé à une chaîne de huit oscillateurs cubiques. Des tests sur la chaîne non couplée à la structure primaire révèlent l'existence de seuils de forçage auxquels le comportement des oscillateurs bifurque. En couplant le système principal, on retrouve ces seuils. Au-delà du premier d'entre eux, le pompage énergétique s'active, notamment par le biais de comportements de type SMR.
Les points originaux de ce travail ont fait l'objet de publications dans des journaux à comités de lecture et des présentations dans des conférences internationales avec actes (cf la liste des publications plus loin).

Perspectives

Ce manuscrit a par ailleurs levé un certain nombre de perspectives et d'axes de recherche futurs. Un cadre général d'étude des chaînes non linéaires couplées à un système principal est présenté. Il s'applique en l'état à des structures primaires linéaires à un ou plusieurs degrés de liberté. Il n'existe néanmoins aucune limite a priori pour l'étendre à l'analyse de systèmes principaux non linéaires, comme cela a été fait sur des cas à deux degrés de liberté. Le cas de structures primaires forcées présentant des résonances internes pourrait d'autre part s'avérer intéressant dans la mesure où des travaux précédents ont prouvé que des NES à plusieurs degrés de liberté en série étaient capables d'extraire de l'énergie simultanément de plusieurs modes.
De plus, une procédure de design permettrait d'améliorer la robustesse du contrôle vibratoire. Au vu de la complexité du système, une technique numérique paraît raisonnable. Une des possibilités consisterait à maximiser l'énergie dissipée par la chaîne, comme cela a déjà été réalisé dans la littérature avec des absorbeurs non linéaires à un degré de liberté pour des sollicitations de type choc. Un algorithme d'optimisation déterminerait ainsi les paramètres de raideur ou le ratio de masses menant à une réduction maximisée des vibrations du système principal. Afin d'accroître plus encore l'efficacité du pompage énergétique, cette procédure peut être couplée avec la prise en compte d'incertitudes sur les paramètres de la structure à contrôler afin de déterminer si la chaîne d'oscillateurs y est sensible.
Notons par ailleurs que seules des non-linéarités cubiques ont été considérées dans cette étude. À l'instar des différents types de systèmes principaux, il n'existe a priori pas d'obstacles à l'application de la méthodologie décrite dans ce manuscrit à d'autres non-linéarités. Une chaîne à vibro-impact présenterait notamment des avantages en termes de mise en œuvre expérimentale.
Pour conclure, des perspectives à plus long terme pourraient envisager de coupler des structures principales non linéaires à N degrés de liberté avec des systèmes discrets, chaînes ou réseaux bidimensionnels de masses, réalisant un contrôle vibratoire par le biais de comportements complexes caractérisés par des modes, des ondes ou du chaos spatio-temporel.

Annexe A

Approximation continue dans la chaîne : calcul de la branche supérieure du SIM

Cette annexe a pour but de démontrer une affirmation du chapitre 5 : l'intégration numérique de l'équation (5.28) sur les branches 2 et 3 de la figure 5.2 mène à la détection d'une branche croissante et strictement monotone du SIM dans le plan ($|N(L)|$,$|N_{SP}|$). Le raisonnement est ici mené sur la branche 2 uniquement, mais il est applicable à la branche 3.
Sur la branche 2, les solutions $N(L)$ admissibles sont négatives. Considérons par ailleurs la dernière équation de (5.21) :

$$\frac{B}{\omega_0}N_x(L) = \beta(N(L)) = \omega_0 N(L) - 2\mathcal{D}N(L)^3 \tag{A.1}$$

L'étude des variations de la fonction $\beta(N)$ prouve que $\forall N \leq -\sqrt{\frac{\omega_0}{2\mathcal{D}}}$, $N_x(L) > 0$. Or, sur la branche 2, $N \leq -\sqrt{X_2} \leq -\sqrt{\frac{\omega_0}{2\mathcal{D}}}$. Le comportement de la dernière masse de la chaîne prend donc place dans le quart supérieur gauche des figures 5.2(a)-(b) lorsqu'il est sur la branche 2. Un exemple de point de fonctionnement est donné sur la figure A.1 (point rouge), représentant un zoom de la figure 5.2(a). N_x étant positif, l'intégration numérique de (5.28) mène à la détermination de $N(0)$ tel que $N(0) < N(L)$ (point bleu sur la figure A.1).
L'équation (5.28) permet d'écrire :

$$L = \int_{N(0)}^{N(L)} \frac{dN}{\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1}} \tag{A.2}$$

Cette intégrale s'interprète graphiquement : la quantité L est l'aire hachurée sur la figure A.2 représentant le tracé de $\frac{1}{\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1}}$ comme fonction de N. Les points $N(0)$ et $N(L)$ de la figure A.1 y sont reportés.
La longueur de la chaîne L étant constante, lorsque $N(L)$ augmente en valeur absolue (donc diminue dans ce cas), il en va de même pour $N(0)$ qui se décale vers la gauche sur l'axe des abscisses. L'examen de la deuxième équation du système (5.21) permet de plus de prouver que lorsque $N(0) \leq -\sqrt{X_2}$, la valeur absolue de N_{SP} est une fonction strictement décroissante de $N(0)$.
En résumé, sur la branche 2, lorsque $|N(L)|$ croît, $|N(0)|$ et $|N_{SP}|$ croissent aussi. La branche du SIM tracée à partir de l'intégration de l'ODE sur la branche 2 est donc strictement croissante dans le plan ($|N(L)|$,$|N_{SP}|$).

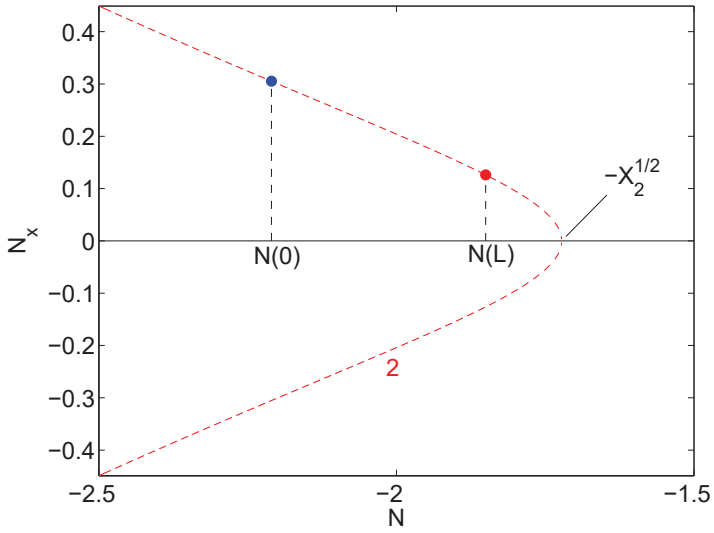


FIGURE A.1 – Portrait de phase dans le plan (N,N_x) obtenu à partir de la première équation du système (5.21) pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$.

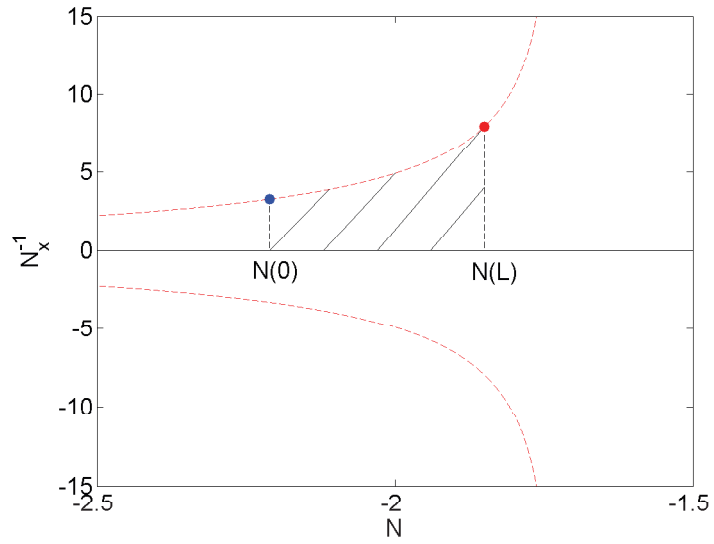


FIGURE A.2 – Tracé de $\dfrac{1}{\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1}}$ comme fonction de N pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$. Les points bleus et rouges correspondent à ceux de la figure A.1

Annexe B

Présentation du matériel expérimental

Le dispositif expérimental est sollicité à l'aide d'un vibrateur électrodynamique ES-20LS3-340 de la marque *Kilonewton*, représenté sur la figure B.1. Le pot vibrant est activé par un courant traversant une bobine, générant une force pouvant être aléatoire, sinusoïdale ou de type impact et transmise à un plateau encastré au pot (visible à gauche sur la figure B.1). Il est possible d'installer le pot en configurations verticale et horizontale. Dans notre cas, le plateau est excité horizontalement.

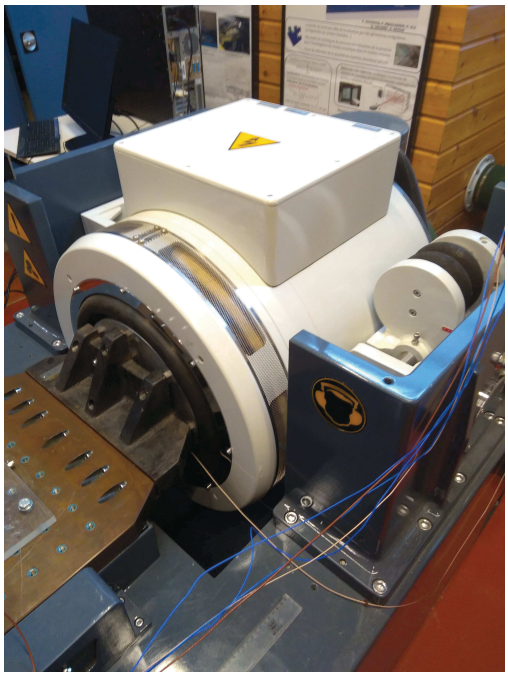


FIGURE B.1 – Photo du pot vibrant.

Le vibrateur est relié à un amplificateur de puissance visible sur la figure B.2. Sur ce dernier est posée une unité d'acquisition *Vibration Research VR9500*, elle-même reliée d'une part aux accéléromètres, et d'autre part à un ordinateur sur lequel est installé le logiciel d'acquisition *VibrationView*. Le logiciel permet de générer les profils de tests et d'exporter les données expérimentales.

Des accéléromètres mono-axe des marques *PCB* et *DJB Instruments* ont été utilisés. L'un d'entre eux, collé sur le plateau, joue le rôle de canal de contrôle de la sollicitation utile à la boucle d'asservissement du vibrateur. Les autres sont collés sur le SP et chacune des masses de la chaîne.



FIGURE B.2 – Photo de l'amplificateur de puissance du vibrateur électrodynamique sur lequel est posée l'unité d'acquisition.

Liste des publications

Publications dans des revues internationales

Charlemagne, S., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2016). Dynamics and energy exchanges between a linear oscillator and a nonlinear absorber with local and global potentials. *Journal of Sound and Vibration*, 376 :33–47

Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2016). Interactions Between Two Coupled Nonlinear Forced Systems : Fast/Slow Dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26 :1650155

Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H., Weiss, M., Vaurigaud, B. et Charlemagne, S. (2016). Analysis of the 1 :1 resonant energy exchanges between coupled oscillators with rheologies. *Nonlinear Dynamics*, 86 :2145–2159

Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A., Charlemagne, S. et Abdoulhadi, P. (2017). Nonlinear vibratory interactions between a linear and a non-smooth forced oscillator in the gravitational field. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 89 :131–148

Charlemagne, S., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2017). Vibratory control of a linear system by addition of a chain of nonlinear oscillators. *Acta Mechanica*, 228 :3111–3133

Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2018). Dynamics of a linear system coupled to a chain of light nonlinear oscillators analyzed through a continuous approximation. *Physica D*, *doi :*10.1016/j.physd.2018.03.001

Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Charlemagne, S. Experimental results on the vibratory energy exchanges between a linear system and a chain of nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration* (*soumis*)

Publication pour des conférences

Conférences internationales

Charlemagne, S., Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A., Weiss, M. et Vaurigaud, B. Study of Coupled Oscillators with Local and Global Nonlinear Potentials. *Procedia IUTAM, Symposium on Analytical methods in nonlinear dynamics (IUTAM 2015)*, Francfort, Allemagne, 6–9 juillet 2015, 6 p.

Charlemagne, S., Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Abdoulhadi, P. Multi-time scale nonlinear interactions of two coupled forced oscillators. *Proceedings of the* 13th *International Conference of Dynamical Systems - Theory and Applications (DSTA 2015)*, Łódź, Pologne, 7–10 décembre 2015, 8 p.

Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. Multi-scales dynamics of a linear structure coupled to four light nonlinear oscillators in series. *Proceedings of the 7th European*

Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress 2016), Île de Crète, Grèce, 5–10 juin 2016, 11 p.

Lamarque, C.-H., Charlemagne, S. et Ture Savadkoohi, A., Nonlinear interactions between coupled nonlinear oscillators at different layers of time. *Proceedings of the* 24th *International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2016)*, Montréal, Canada, 21–26 août 2016, 2 p.

Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. Energy exchanges in a system of a forced linear structure coupled to a chain of nonlinear oscillators. *Proceedings of the* 9th *European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2017)*, Budapest, Hongrie, 25–30 juin 2017, 7 p.

Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Charlemagne, S. Passive control of a forced linear structure through addition of nonlinear oscillators in series : continuous approach. *Proceedings of the* 14th *International Conference of Dynamical Systems – Theory and Applications (DSTA 2017)*, Łódź, Pologne, 11–14 décembre 2017, 10 p.

Conférences nationales

Charlemagne, S., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. Transfert d'énergie passif d'un système linéaire forcé vers une chaîne d'oscillateurs non linéaires. *Congrès Français de Mécanique*, Lille, France, 28 août–1er septembre 2017, 11 p.

Bibliographie

[Arnold, 1955] Arnold, F. R. (1955). Steady-state behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers. *Journal of Applied Mechanics*, 22:487 – 492.

[Asami et Nishihara, 2003] Asami, T. et Nishihara, O. (2003). Closed-form exact solution to h∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems). *Journal of Vibration and Acoustics*, 125:398—-405.

[Avramov et Gendelman, 2010] Avramov, K. V. et Gendelman, O. V. (2010). On interaction of vibrating beam with essentially nonlinear absorber. *Meccanica*, 45(3):355–365.

[Azrar *et al.*, 1993] Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N. et Potier-Ferry, M. (1993). An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1251 – 1277.

[Bellet *et al.*, 2012] Bellet, R., Cochelin, B., Côte, R. et Mattei, P.-O. (2012). Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 331:5657–5668.

[Boroson *et al.*, 2017] Boroson, E., Missoum, S., Mattei, P.-O. et Vergez, C. (2017). Optimization under uncertainty of parallel nonlinear energy sinks. *Journal of Sound and Vibration*, 394(Supplement C):451 – 464.

[Brock, 1946] Brock, J. (1946). A note on the damped vibration absorber. *Journal of Applied Mechanics*, 13:A–284.

[Carr, 1982] Carr, J. (1982). *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer, New York.

[Charlemagne *et al.*, 2016a] Charlemagne, S., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2016a). Dynamics and energy exchanges between a linear oscillator and a nonlinear absorber with local and global potentials. *Journal of Sound and Vibration*, 376:33–47.

[Charlemagne *et al.*, 2017] Charlemagne, S., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2017). Vibratory control of a linear system by addition of a chain of nonlinear oscillators. *Acta Mechanica*, 228(9):3111–3133.

[Charlemagne *et al.*, 2016b] Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2016b). Interactions between two coupled nonlinear forced systems : Fast/slow dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26:1650155.

[Cochelin *et al.*, 1994] Cochelin, B., Damil, N. et Potier-Ferry, M. (1994). Asymptotic-numerical methods and padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1187 – 1213.

[Cochelin *et al.*, 2006] Cochelin, B., Herzog, P. et Mattei, P.-O. (2006). Experimental evidence of energy pumping in acoustics. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(11):639 – 644.

[Connor et Laflamme, 2014] Connor, J. et Laflamme, S. (2014). *Structural Motion Engineering*. Springer International Publishing.

[Damil et Potier-Ferry, 1990] Damil, N. et Potier-Ferry, M. (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9):943 – 957.

[Degasperis *et al.*, 2007] Degasperis, A., Conforti, M., Baronio, F. et Wabnitz, S. (2007). Effects of nonlinear wave coupling : Accelerated solitons. *The European Physical Journal Special Topics*, 147(1):233–252.

[Detroux, 2016] Detroux, T. (2016). *Performance and Robustness of Nonlinear Systems Using Bifurcation Analysis*. Thèse de doctorat.

[Detroux *et al.*, 2015] Detroux, T., Habib, G., Masset, L. et Kerschen, G. (2015). Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60-61:799–809.

[Dodd *et al.*, 1982] Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D. et Morris, H. C. (1982). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics.

[Durand, 1971] Durand, E. (1971). *Solutions numériques des équations algébriques - Tome 1 : Équations du type F(x)=0, Racines d'un polynôme*. Masson & Cie.

[Frahm, 1909] Frahm, H. (1909). Device for damping vibrations of bodies.

[Gendelman *et al.*, 2005] Gendelman, O., Gorlov, D., Manevitch, L. et Musienko, A. (2005). Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses. *Journal of Sound and Vibration*, 286(1):1 – 19.

[Gendelman, 2001] Gendelman, O. V. (2001). Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 25(1):237–253.

[Gendelman, 2004] Gendelman, O. V. (2004). Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37(2):115–128.

[Gendelman, 2008] Gendelman, O. V. (2008). Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 315:732–745.

[Gendelman, 2012] Gendelman, O. V. (2012). Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 331:4599–4608.

[Gendelman et Alloni, 2015] Gendelman, O. V. et Alloni, A. (2015). Dynamics of forced system with vibro-impact energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 358:301–314.

[Gendelman *et al.*, 2000] Gendelman, O. V., Manevitch, L. I., Vakakis, A. F. et M'Closkey, R. (2000). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part i–dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68:34–41.

[Gendelman *et al.*, 2011] Gendelman, O. V., Sigalov, G., Manevitch, L. I., Mane, M., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2011). Dynamics of an eccentric rotational nonlinear energy sink. *Journal of Applied Mechanics*, 79:011012.

[Gendelman *et al.*, 2008] Gendelman, O. V., Starosvetsky, Y. et Feldman, M. (2008). Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i : Description of response regimes. *Nonlinear Dynamics*, 51(1):31–46.

[Gendelman et Vakakis, 2000] Gendelman, O. V. et Vakakis, A. F. (2000). Transitions from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11:1535–1542.

[Georgiades et Vakakis, 2009] Georgiades, F. et Vakakis, A. F. (2009). Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in the dynamics of a thin plate with strongly nonlinear attachments. *International Journal of Solids and Structures*, 46(11):2330–2353.

[Georgiades *et al.*, 2005] Georgiades, F., Vakakis, A. F., McFarland, D. M. et Bergman, L. A. (2005). Shock isolation through passive energy pumping caused by nonsmooth nonlinearities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(06):1989–2001.

[Gourc *et al.*, 2014] Gourc, E., Michon, G., Seguy, S. et Berlioz, A. (2014). Experimental investigation and design optimization of targeted energy transfer under periodic forcing. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136:021021.

[Gourc *et al.*, 2015] Gourc, E., Michon, G., Seguy, S. et Berlioz, A. (2015). Targeted energy transfer under harmonic forcing with a vibro-impact nonlinear energy sink : Analytical and experimental developments. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137:031008.

[Gourc, 2013] Gourc, t. (2013). *Étude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique – Analyses théoriques et expérimentales*. Thèse de doctorat.

[Gourdon *et al.*, 2007] Gourdon, E., Alexander, N., Taylor, C., Lamarque, C.-H. et Pernot, S. (2007). Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300:522–551.

[Habib *et al.*, 2017] Habib, G., Cirillo, G. I. et Kerschen, G. (2017). Uncovering detached resonance curves in single-degree-of-freedom systems. *Procedia Engineering*, 199(Supplement C): 649 – 656. X International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2017.

[Habib *et al.*, 2015] Habib, G., Detroux, T., Viguié, R. et Kerschen, G. (2015). Nonlinear generalization of den hartog's equal-peak method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52-53(Supplement C):17 – 28.

[Hartog, 1934] Hartog, J. D. (1934). *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York.

[Hasan *et al.*, 2013] Hasan, M. A., Starosvetsky, Y., Vakakis, A. F. et Manevitch, L. I. (2013). Nonlinear targeted energy transfer and macroscopic analog of the quantum landau–zener effect in coupled granular chains. *Physica D*, 252:46–58.

[Hunt et Nissen, 1982] Hunt, J. et Nissen, J.-C. (1982). The broadband dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 83(4):573 – 578.

[James *et al.*, 2013] James, G., Kevrekidis, P. G. et Cuevas, J. (2013). Breathers in oscillator chains with hertzian interactions. *Physica D*, 251:39–59.

[Jayaprakash *et al.*, 2011] Jayaprakash, K. R., Starosvetsky, Y., Vakakis, A. F., Peeters, M. et Kerschen, G. (2011). Nonlinear normal modes and band zones in granular chains with no pre-compression. *Nonlinear Dynamics*, 63(3):359–385.

[Jézéquel et Lamarque, 1991] Jézéquel, L. et Lamarque, C. (1991). Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3):429 – 459.

[Kerschen *et al.*, 2007] Kerschen, G., McFarland, D., Kowtko, J. J., Lee, Y. S., Bergman, L. et Vakakis, A. F. (2007). Experimental demonstration of transient resonance capture in a system of two coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 299:822–838.

[Kuether *et al.*, 2015] Kuether, R., Renson, L., Detroux, T., Grappasonni, C., Kerschen, G. et Allen, M. (2015). Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves. *Journal of Sound and Vibration*, 351(Supplement C):299 – 310.

[Lamarque *et al.*, 2011] Lamarque, C.-H., Gendelman, O. V., Ture Savadkoohi, A. et Etcheverria, E. (2011). Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta Mechanica*, 221(1-2):175–200.

[Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014] Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2014). Dynamical behavior of a bouc–wen type oscillator coupled to a nonlinear energy sink. *Meccanica*, 49(8):1917–1928.

[Lamarque et Ture Savadkoohi, 2015] Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2015). Targeted energy transfer between a system with a set of saint-venant elements and a nonlinear energy sink. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:819–833.

[Lamarque *et al.*, 2014] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Dimitrijevic, Z. (2014). Dynamics of a linear system with time-dependent mass and a coupled light mass with non-smooth potential. *Meccanica*, 49:135–145.

[Lamarque *et al.*, 2012] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A., Etcheverria, E. et Dimitrijevic, Z. (2012). Multi-scale dynamics of two coupled nonsmooth systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(12):1250295.

[Lamarque *et al.*, 2013] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Naudan, M. (2013). Multi-scale energy exchanges between a nonlinear oscillator of bouc–wen type and another coupled nonlinear system. *The European Physical Journal Special Topics*, 222(7):1617–1636.

[Laurent, 1880] Laurent, H. (1880). *Théorie élémentaires des fonctions elliptiques*. Gauthier-Villars, Paris.

[Lee *et al.*, 2007a] Lee, Y. S., Kerschen, G., McFarland, D. M., Hill, W. J., Nichkawde, C., Strganac, T. W., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2007a). Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2 : Experiments. *AIAA Journal*, 45:2391–2400.

[Lee *et al.*, 2007b] Lee, Y. S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., McFarland, D. M. et Kerschen, G. (2007b). Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1 : theory. *AIAA Journal*, 45:693–711.

[Luongo et Zulli, 2014] Luongo, A. et Zulli, D. (2014). Aeroelastic instability analysis of nes-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method. *Journal of Vibration and Control*, 20:1985–1998.

[Luongo et Zulli, 2015] Luongo, A. et Zulli, D. (2015). Nonlinear energy sink to control elastic strings : the internal resonance case. *Nonlinear Dynamics*, 81(1):425–435.

[Manevitch, 2007] Manevitch, L. (2007). New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. *Archive of Applied Mechanics*, 77(5):301–312.

[Manevitch *et al.*, 2007a] Manevitch, L., Gourdon, E. et Lamarque, C. (2007a). Parameters optimization for energy pumping in strongly nonhomogeneous 2 dof system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(4):900 – 911.

[Manevitch, 2001] Manevitch, L. I. (2001). The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25:95–109.

[Manevitch *et al.*, 2003] Manevitch, L. I., Gendelman, O. V., Musienko, A. I., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2003). Dynamic interaction of a semi-infinite linear chain of coupled oscillators with a strongly nonlinear end attachment. *Physica D*, 178:1–18.

[Manevitch *et al.*, 2007b] Manevitch, L. I., Musienko, A. I. et Lamarque, C.-H. (2007b). New analytical approach to energy pumping problem in strongly nonhomogeneous 2dof systems. *Meccanica*, 42(1):77–83.

[Manevitch et Vakakis, 2014] Manevitch, L. I. et Vakakis, A. F. (2014). Nonlinear oscillatory acoustic vacuum. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 74:1742—1762.

[Mattei *et al.*, 2016] Mattei, P.-O., Ponçot, R., Pachebat, M. et Côte, R. (2016). Nonlinear targeted energy transfer of two coupled cantilever beams coupled to a bistable light attachment. *Journal of Sound and Vibration*, 373(Supplement C):29 – 51.

[McFarland *et al.*, 2005a] McFarland, D., Kerschen, G., Kowtko, J. J., Lee, Y., Bergman, L. et Vakakis, A. F. (2005a). Experimental investigation of targeted energy transfers in strongly and nonlinearly coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118:791–799.

[McFarland *et al.*, 2005b] McFarland, D. M., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2005b). Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(6):891 – 899.

[Meirovitch, 1967] Meirovitch, L. (1967). *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan USA.

[Nasu *et al.*, 2001] Nasu, T., Kobori, T., Takahashi, M., Niwa, N. et Ogasawara, K. (2001). Active variable stiffness system with non-resonant control. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(11):1597–1614.

[Nayfeh et Balachandran, 1995] Nayfeh, A. et Balachandran, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley, New York.

[Nayfeh, 1973] Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbation methods*. John Wiley and Sons, New York.

[Nayfeh, 1981] Nayfeh, A. H. (1981). *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, New York.

[Nayfeh, 1993] Nayfeh, A. H. (1993). *Method of Normal Forms*. Wiley, New York.

[Nayfeh et Mook, 1979] Nayfeh, A. H. et Mook, D. T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, New York.

[Nguyen et Pernot, 2012] Nguyen, T. A. et Pernot, S. (2012). Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1 : transient regime. *Nonlinear Dynamics*, 69(1):1–19.

[Novikov *et al.*, 1984] Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P. et Zakharov, V. E. (1984). *Theory of Solitons : The Inverse Scattering Method*. Moscow Nauka (Translation : New York and London, Consultants Bureau).

[Nucera *et al.*, 2008] Nucera, F., Iacono, F. L., McFarland, D., Bergman, L. et Vakakis, A. (2008). Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame : Experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1):57–76.

[Nucera *et al.*, 2007] Nucera, F., Vakakis, A., Bergman, A. et Kerschen, G. (2007). Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation. *Nonlinear Dynamics*, 50:651–677.

[Ormondroyd et Hartog, 1928] Ormondroyd, J. et Hartog, J. D. (1928). Theory of the dynamic vibration absorber. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 50:9–22.

[Panagopoulos *et al.*, 2007] Panagopoulos, P., Georgiades, F., Tsakirtzis, S., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2007). Multi-scaled analysis of the damped dynamics of an elastic rod with an essentially nonlinear end attachment. *International Journal of Solids and Structures*, 44(18):6256 – 6278.

[Panagopoulos *et al.*, 2004] Panagopoulos, P. N., Vakakis, A. F. et Tsakirtzis, S. (2004). Transient resonant interactions of finite linear chains with essentially nonlinear end attachments leading to passive energy pumping. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22–23):6505 – 6528.

[Peeters *et al.*, 2009] Peeters, M., Viguié, R., Sérandour, G., Kerschen, G. et Golinval, J.-C. (2009). Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):195 – 216. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.

[Pellicano et Mastroddi, 1997] Pellicano, F. et Mastroddi, F. (1997). Applicability conditions of a non-linear superposition technique. *Journal of Sound and Vibration*, 200(1):3 – 14.

[Peyrard et Dauxois, 2004] Peyrard, M. et Dauxois, T. (2004). *Physique des solitons*. EDP Sciences CNRS Editions.

[Pipes, 1953] Pipes, L. A. (1953). Analysis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Journal of Applied Mechanics*, 20:515 – 518.

[Roberson, 1952] Roberson, R. E. (1952). Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Journal of the Franklin Institute*, 254(3):205 – 220.

[Rosenberg, 1960] Rosenberg, R. M. (1960). Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27:263–268.

[Rosenberg, 1962] Rosenberg, R. M. (1962). The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29:7–14.

[Rosenberg, 1966] Rosenberg, R. M. (1966). On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9:155–242.

[Rosenberg et Kuo, 1964] Rosenberg, R. M. et Kuo, J. K. (1964). Nonsimilar normal mode vibrations of nonlinear systems having two degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2):283–290.

[Rothos et Vakakis, 2009] Rothos, V. M. et Vakakis, A. F. (2009). Dynamic interactions of traveling waves propagating in a linear chain with a local essentially nonlinear attachment. *Wave Motion*, 46:174–188.

[Sapsis *et al.*, 2011] Sapsis, T. P., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2011). Effect of stochasticity on targeted energy transfer from a linear medium to a strongly nonlinear attachment. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26(2):119 – 133.

[Schmidt et Lamarque, 2010] Schmidt, F. et Lamarque, C.-H. (2010). Energy pumping for mechanical systems involving non-smooth saint-venant terms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45:866–875.

[Scott, 2005] Scott, A. (2005). *Nonlinear science*. Academic Press, London.

[Scott, 1969] Scott, A. C. (1969). A nonlinear klein-gordon equation. *American Journal of Physics*, 37:52 – 61.

[Seydel, 2009] Seydel, R. (2009). *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer.

[Shao et Cochelin, 2014] Shao, J. et Cochelin, B. (2014). Theoretical and numerical study of targeted energy transfer inside an acoustic cavity by a non-linear membrane absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 64:85–92.

[Shaw *et al.*, 1989] Shaw, J., Shaw, S. W. et Haddow, A. G. (1989). On the response of the non-linear vibration absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 24(4):281 – 293.

[Shaw et Pierre, 1991] Shaw, S. et Pierre, C. (1991). Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173.

[Shaw et Pierre, 1993] Shaw, S. et Pierre, C. (1993). Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85 – 124.

[Smirnov et Manevich, 2011] Smirnov, V. V. et Manevich, L. I. (2011). Limiting phase trajectories and dynamic transitions in nonlinear periodic systems. *Acoustical Physics*, 57(2):271–276.

[Starosvetsky et Gendelman, 2010] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. (2010). Interaction of nonlinear energy sink with a two degrees of freedom linear system : Internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10):1836 – 1852.

[Starosvetsky et Gendelman, 2008] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. V. (2008). Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry. *Physica D*, 237:1719–1733.

[Starosvetsky et Manevitch, 2013] Starosvetsky, Y. et Manevitch, L. (2013). On intense energy exchange and localization in periodic fpu dimer chains. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 264(Supplement C):66 – 79.

[Starosvetsky et Vakakis, 2011] Starosvetsky, Y. et Vakakis, A. F. (2011). Primary wave transmission in systems of elastic rods with granular interfaces. *Wave Motion*, 48:568–585.

[Taghipour et Dardel, 2015] Taghipour, J. et Dardel, M. (2015). Steady state dynamics and robustness of a harmonically excited essentially nonlinear oscillator coupled with a two-dof nonlinear energy sink. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 62-63(Supplement C):164 – 182.

[Touzé et Thomas, 2006] Touzé, C. et Thomas, O. (2006). Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(5):678 – 692.

[Touzé *et al.*, 2004] Touzé, C., Thomas, O. et Chaigne, A. (2004). Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1):77 – 101.

[Tsakirtzis *et al.*, 2005] Tsakirtzis, S., Kerschen, G., Panagopoulos, P. N. et Vakakis, A. F. (2005). Multi-frequency nonlinear energy transfer from linear oscillators to mdof essentially nonlinear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1–2):483 – 490.

[Tsakirtzis *et al.*, 2007a] Tsakirtzis, S., Panagopoulos, P. N., Kerschen, G., Gendelman, O., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2007a). Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments. *Nonlinear Dynamics*, 48(3):285–318.

[Tsakirtzis *et al.*, 2007b] Tsakirtzis, S., Vakakis, A. F. et Panagopoulos, P. (2007b). Broadband energy exchanges between a dissipative elastic rod and a multi-degree-of-freedom dissipative essentially non-linear attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(1):36 – 57. Nonlinear Dynamic Stability of Nonconservative Dissipative Systems.

[Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2013). Dynamics of coupled dahl type and nonsmooth systems at different scales of time. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23:1350114.

[Ture Savadkoohi et Lamarque, 2014] Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2014). Vibratory energy localization by non-smooth energy sink with time-varying mass. *Applied Non-Linear Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 93:429–442.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2016] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H. et Contessa, M. V. (2016). Trapping vibratory energy of main linear structures by coupling light systems with geometrical and material nonlinearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 80:3–13.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2012a] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H. et Dimitrijevic, Z. (2012a). Vibratory energy exchange between a linear and a nonsmooth system in the presence of the gravity. *Nonlinear Dynamics*, 70:1473–1483.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2017] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H. et Goutte, J. (2017). On the nonlinear interactions and existence of breathers in a chain of coupled pendulums. *International Journal of Non-Linear Mechanics*.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2012b] Ture Savadkoohi, A., Vaurigaud, B., Lamarque, C.-H. et Pernot, S. (2012b). Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part ii : theory and experiments. *Nonlinear Dynamics*, 67:37–46.

[Vakakis et Gendelman, 2000] Vakakis, A. F. et Gendelman, O. V. (2000). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part ii–resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68:42–48.

[Vakakis *et al.*, 2009] Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., McFarland, D. M., Kerschen, G. et Lee, Y. S. (2009). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer Netherlands.

[Vakakis *et al.*, 2003] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Gendelman, O. V. et Bergman, L. A. (2003). Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 264(3):559 – 577.

[Vakakis *et al.*, 1996] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Mikhlin, Y. V., Pilipchuk, V. N. et Zevin, A. A. (1996). *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley Interscience, New York.

[Vakakis *et al.*, 2005] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Musienko, A. I., Kerschen, G. et Bergman, L. A. (2005). Transient dynamics of a dispersive elastic wave guide weakly coupled to an essentially nonlinear end attachment. *Wave Motion*, 41:109–132.

[Vakakis *et al.*, 2004] Vakakis, A. F., McFarland, D. M., Bergman, L. A., Manevitch, L. I. et Gendelman, O. V. (2004). Isolated resonance captures and resonance capture cascades leading to single- or multi-mode passive energy pumping in damped coupled oscillators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126:235–244.

[Vaurigaud, 2011] Vaurigaud, B. (2011). *Contrôle vibratoire passif par assemblage d'absorbeurs non-linéaires : théorie et expérience*. Thèse de doctorat.

[Vaurigaud *et al.*, 2011a] Vaurigaud, B., Manevitch, L. et Lamarque, C.-H. (2011a). Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer. *Journal of Sound and Vibration*, 330:2580–2595.

[Vaurigaud *et al.*, 2011b] Vaurigaud, B., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2011b). Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. part i : Design theory and numerical results. *Nonlinear Dynamics*, 66:763–780.

[Weiss, 2016] Weiss, M. (2016). *Conception de capteurs/absorbeurs utilisant la dynamique non linéaire pour la surveillance et le contrôle passif de structures*. Thèse de doctorat.

[Weiss *et al.*, 2016] Weiss, M., Chenia, M., Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H., Vaurigaud, B. et Hammouda, A. (2016). Multi-scale energy exchanges between an elasto-plastic oscillator and a light nonsmooth system with external pre-stress. *Nonlinear Dynamics*, 83(1):109–135.

[Weiss *et al.*, 2014] Weiss, M., Ture Savadkoohi, A., Gendelman, O. V. et Lamarque, C.-H. (2014). Dynamical behavior of a mechanical system including saint-venant component coupled to a nonlinear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 63:10–18.

[Wierschem *et al.*, 2014] Wierschem, N., Luo, J., Al-Shudeifat, M., Hubbard, S., Ott, R., Fahnestock, L., Quinn, D., McFarland, D., Spencer Jr., B., Vakakis, A. et Bergman, L. (2014). Experimental testing and numerical simulation of a six-story structure incorporating two-degree-of-freedom nonlinear energy sink. *Journal of Structural Engineering*, 140.

[Wierschem *et al.*, 2012] Wierschem, N. E., Quinn, D. D., Hubbard, S. A., Al-Shudeifat, M. A., McFarland, D. M., Luo, J., Fahnestock, L. A., Spencer Jr, B. F., Vakakis, A. F. et Bergman, L. (2012). Passive damping enhancement of a two-degree-of-freedom system through a strongly nonlinear two-degree-of-freedom attachment. *Journal of Sound and Vibration*, 331:5393–5407.

[Willems, 1970] Willems, J. (1970). *Thomas Nelson & Sons Ltd.* Stability Theory of Dynamical Systems.

[Xie *et al.*, 2017] Xie, L., Baguet, S., Prabel, B. et Dufour, R. (2017). Bifurcation tracking by harmonic balance method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88:445 – 461.

Table des matières

Introduction **1**

1 Étude bibliographique **3**
1.1 Méthodes de traitement des systèmes dynamiques non linéaires 4
1.1.1 Modes propres d'un système linéaire 4
1.1.2 Modes normaux non linéaires 4
1.1.3 Approches analytiques 6
1.1.4 Approches numériques 8
1.2 Contrôle vibratoire 10
1.2.1 Systèmes de contrôle actif 11
1.2.2 Amortisseur à Masse Accordée 11
1.2.3 Utilisation de la non-linéarité à des fins de contrôle passif 13
1.2.4 Absorbeurs de type NES 13
1.2.5 Exemples de NES non cubiques 14
1.2.6 Études expérimentales des NES 15
1.2.7 Contrôle vibratoire par couplage de plusieurs ddl non linéaires 15
1.3 Conclusions du chapitre 16

2 Méthodologie générale discrète **19**
2.1 Modélisation du problème 20
2.2 Méthodes d'échelles multiples en temps, changements de variables et méthode de Galerkin 21
2.3 Étude du comportement à l'échelle de temps rapide 23
2.3.1 Définition de la variété invariante en échelle lente 23
2.3.2 Étude de stabilité 24
2.4 Étude du comportement à l'échelle de temps lente : points d'équilibre et points singuliers 26
2.5 Conclusions du chapitre 30

3 Application à un cas à deux degrés de liberté **33**
3.1 Comportement à l'échelle de temps rapide 35
3.1.1 Calcul du SIM 35
3.1.2 Exemples de SIM 36
3.1.3 Calcul de la stabilité 36
3.2 Comportement à l'échelle de temps lente 38
3.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques 43
3.4 Utilisation d'un oscillateur non linéaire ajouté pour la détection 44
3.5 Conclusions du chapitre 46

4 Couplage d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires **57**
4.1 Comportement multi-échelles du système 59
4.1.1 SIM du système 59
4.1.2 Points d'équilibre et points singuliers 60

4.2 Comparaison avec les simulations numériques . . . 61
4.2.1 Régimes périodiques . . . 62
4.2.2 Modes non linéaires de la chaîne d'oscillateurs . . . 64
4.2.3 Réponse de type SMR . . . 71
4.3 Application au contrôle . . . 72
4.3.1 Premières preuves . . . 72
4.3.2 Comparaison des performances d'un oscillateur ajouté à un ddl et d'une chaîne 75
4.4 Généralisation à un système principal à plusieurs degrés de liberté . . . 75
4.4.1 Développements analytiques . . . 76
4.4.2 Vérifications numériques . . . 79
4.5 Conclusions du chapitre . . . 82

5 Variation de la méthodologie : approximation continue dans la chaîne 85
5.1 Méthodologie analytique . . . 86
5.1.1 Approximation continue . . . 86
5.1.2 Comportements multi-échelles du système . . . 87
5.2 Exemple d'application : chaîne d'oscillateurs non linéaires présentant des potentiels locaux . . . 88
5.2.1 SIM du système . . . 89
5.2.2 Points d'équilibre et points singuliers . . . 93
5.2.3 Confrontation des prédictions analytiques et des simulations numériques . . . 95
5.3 Solutions ondulatoires : premiers éléments . . . 96
5.3.1 Simulations numériques . . . 98
5.3.2 Éléments d'explication théoriques . . . 102
5.4 Conclusions du chapitre . . . 105

6 Étude expérimentale 107
6.1 Présentation du dispositif expérimental . . . 108
6.1.1 Système principal . . . 108
6.1.2 Chaîne d'oscillateurs non linéaires . . . 110
6.2 Tests sur le système couplé complet . . . 120
6.3 Conclusions du chapitre . . . 122

Conclusion 125

A Approximation continue dans la chaîne : calcul de la branche supérieure du SIM 127

B Présentation du matériel expérimental 129

Liste des publications 131

Table des figures

1.1 Variété invariante du premier mode non linéaire du système 1.1 approximée à l'ordre 3. 5
1.2 Tracé de u_k (ligne bleue) et de l'amplitude $|\varphi_k|$ de la variable complexe associée (ligne rouge). 8
1.3 Représentation schématique du principe de la continuation par longueur d'arc 9
1.4 Schéma de principe d'un amortisseur à masse accordée. 12
1.5 $M = 1$, $\epsilon = 0.05$, $C = 0$ – Courbe de réponse en fréquence de la structure maîtresse pour $K = 1$ (ligne continue) et $K = 0.8$ (courbe discontinue). La ligne pointillée noire correspond au cas sans AMA couplé. k et c sont calculés via les expressions 1.15. 12

2.1 Système à $(P + 1)$ ddl forcés composé d'une structure linéaire de masse unitaire couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires de masses ϵ $(0 < \epsilon \ll 1)$. 20
2.2 $\omega_0 = 1$ et $D = 1.5$ – Exemples de SIM pour le cas cubique à 2 ddl (a) $c_1 = 0.1 < c_{1,crit}$ (b) $c_1 = 1 > c_{1,crit}$. 25
2.3 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$ et $D = 1.5$ – SIM pour le cas cubique à 2 ddl. La ligne rouge discontinue représente une branche instable. 26
2.4 $\omega_0 = 1$, $D = 1.5$ et $c_1 = 0.1$ – Représentation schématique du comportement du système lors d'une réponse de type SMR (ligne rouge) autour du SIM (ligne noire). . 30

3.1 Système à 2 degrés de liberté forcés composé d'une structure linéaire couplée à un oscillateur non linéaire ($\frac{m}{M} = \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$). 34
3.2 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$ (c) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée. . . 37
3.3 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.6$, $B = 0.36$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$ (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée. 38
3.4 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.1$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.6$ (c) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = \pi$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée. . . 39
3.5 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$ et $f_1 = 0.5$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée. 40
3.6 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.5$ – Exemple de SIM (a) Vue tridimensionnelle dans l'espace (δ_1,N_1,N) (b) Section bidimensionnelle à $\delta_1 = -0.2$. Les branches 1, 2 et 3 (voir l'équation (3.7)) sont respectivement représentées par des lignes continue, discontinue et pointillée. 40

3.7 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$ et $f_1 = 0.1$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM. 41
3.8 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.1$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM. 41
3.9 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$ et $f_1 = 0.5$ – Zones instables du SIM représentées en noir. Seules les branches 1 et 2 du SIM sont tracées. 42
3.10 $\omega_0 = 1$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$ et $f_1 = 0.5$ – Zones instables du SIM représentées en noir (a) Branche 1 du SIM (b) Branche 2 du SIM. 42
3.11 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.3$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre stable (point bleu) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1. Les points gris sont des artefacts de calcul. 44
3.12 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.3$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps. Les lignes discontinues rouges représentent les amplitudes prédites par le point d'équilibre du système. 45
3.13 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1. 46
3.14 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps. 47
3.15 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.5$, $f_1 = 0.1$, $f = 0.25$ et $\sigma = 1$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in$ [44000,53000]) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to A$ (a) Vue depuis le plan $N_1 = 0$ (b) Vue depuis le plan $N_1 = 1$ (c) Résultats numériques dans le plan (N_1,N). 48
3.16 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1, ainsi qu'un point d'équilibre stable (point bleu) et quatre points singuliers sur la branche 2. . . . 49
3.17 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps. 50
3.18 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.1$ et $\sigma = 2$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in$ [52000,59000]) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to\to E \to F \to A$ (a) Vue depuis le plan $N_1 = 0$ (b) Vue depuis le plan $N_1 = 1.2$ (c) Résultats numériques dans le plan (N_1,N). 51

3.19 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 0.25$, $\mathcal{E} = 0.6$, $f_1 = 0.1$, $f = 1.8$ et $\sigma = 2$ – Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in$ [48000,56000]) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour des deux premières branches du SIM (surface grise). Les lignes vertes représentent les limites de stabilité du SIM. Le système subit une réponse de type SMR, répétant des cycles $A \to B \to C \to D \to A$. Vue depuis le plan $N_1 = 1.2$. 52
3.20 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$, $f_1 = 0.5$, $f = 0.65$ et $\sigma = 2$ – Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur les branches 1, 2 et 3 du SIM (figures (a), (b) et (c) respectivement). Le système possède un point d'équilibre stable (point bleu) et deux points singuliers (points noirs) sur la branche 1. 53
3.21 $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $B = 0.04$, $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{E} = 0.333$, $f_1 = 0.5$, $f = 0.65$ et $\sigma = 2$ – Résultats numériques issus de l'intégration temporelle du système (3.1) (a) Amplitude N_1 en fonction du temps (b) Phase δ_1 en fonction du temps (c) Amplitude N en fonction du temps (d) Comportement du système à l'échelle de temps τ_1 ($t \in$ [52000,56000]) tiré des résultats numériques (ligne bleue) autour de la première branche SIM (surface grise). La ligne verte représente la limite de stabilité du SIM. 54
3.22 $\epsilon = 0.01$, $c = 0.2$, $c_1 = 0.2$, $B = 0.04$, $D = 5.33$, $E = 1.33$, $f_1 = 0.2$, $f = 0$ et $\omega = 1.0025$ – (a) Amplitude N_1 des points d'équilibre en fonction de ω_0 (b)-(c) Lieux d'annulation de $\mathcal{F}_1$ (ligne bleue), $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) et $\det(\mathbf{S}_2)$ (ligne verte) sur la branche 1 du SIM à $\omega_0 = 0.999$ et $\omega_0 = 1$ respectivement (d) Amplitude N_1 en fonction du temps issue des résultats numériques à $\omega_0 = 0.999$ (e) Amplitude N_1 en fonction du temps issue des résultats numériques à $\omega_0 = 1$. 55

4.1 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$ – Amplitude N des points d'équilibre et singuliers en fonction du niveau de sollicitation f. Les points d'équilibre stables et instables sont respectivement représentés en bleu et rouge et la présence de points singuliers est notée par des lignes noires. 62
4.2 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$ – Amplitude $||v||_\infty$ des solutions périodiques en fonction du niveau de sollicitation f, obtenues par continuation par longueur d'arc. Les régimes stables et instables sont respectivement représentés en bleu et rouge. Les résultats de la figure 4.1 sont tracés en noir. 63
4.3 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 18$ – SIM du système (ligne noire) et position du point d'équilibre (point bleu). Les lignes rouges représentent les zones instables du SIM. 64
4.4 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 18$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus). Les croix noires sont les amplitudes obtenues par continuation par longueur d'arc (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1. 65
4.5 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 60$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre (points bleus no. 1, 2 et 3) et deux points singuliers (croix noires). 66

4.6 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 60$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 1 (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus) (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 1 (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1. . 67
4.7 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 280$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre, un stable (point bleu no. 3) et deux instables (points rouges no. 1 et 2) ainsi que six points singuliers (croix noires). 68
4.8 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 0$ et $f = 280$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Comparaison des amplitudes physiques du système issues des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 3 (croix rouges) et des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 (ronds bleus) (c) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats analytiques sur le point d'équilibre no. 3 (d) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1. . 69
4.9 $P = 49$, $B = 2$ et $D = 50$ – Représentation des modes non linéaires du système dans le plan (W_P,Ω). 70
4.10 $P = 49$, $B = 2$, $D = 50$ et $\Omega = 1$ – Formes modales aux points A et B (voir Fig. 4.9) (a) Point A, (b) Point B. 70
4.11 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et six points singuliers (croix noires). 71
4.12 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – (a) Amplitude numérique N en fonction du temps (b) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR. 72
4.13 $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$, $\sigma = 6$ et $f = 250$ – Séries temporelles de différents oscillateurs de la chaîne tirées des résultats numériques pendant une réponse de type SMR (a) u_1 (b) u_{10} (c) u_{20} (d) u_{30} (e) u_{40} (f) u_{49}. 73
4.14 Graphes amplitude-fréquence pour les paramètres suivants : $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $r = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ – (a) $f = 10$, (b) $f = 30$, (c) $f = 60$, (d) $f = 100$, (e) $f = 150$, (f) $f = 250$. Les points bleus et rouges correspondent respectivement aux points d'équilibre stables et instables. Les points singuliers sont marqués par des lignes discontinues noires horizontales. Les lignes pointillées noires tracent l'amplitude du SP sans couplage de la chaîne d'oscillateurs non linéaires. . . 74
4.15 $P = 10$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 2$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 2.5$, $D = 20$ et $\sigma = 0$ – Amplitude N des points d'équilibre en fonction du niveau de sollicitation f. Les croix correspondent aux points d'équilibre du système à 2 ddl (4.19) et les points à ceux du système à $(P + 1)$ ddl (4.20). La couleur rouge fait référence à des points d'équilibre instables. Les bornes en amplitude des réponses de type SMR sont représentées par des lignes horizontales noires, continues pour le système à 2 ddl et discontinues pour la chaîne. 76
4.16 Système principal linéaire forcé à n ddl couplé à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. 77
4.17 Modèle de bâtiment à cinq étages couplé à une chaîne d'oscillateurs sur son toit. . . 79

4.18 SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède trois points d'équilibre stables (points bleus) et deux points singuliers (croix noires). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.29). 80
4.19 (a)-(e) Séries temporelles des cinq coordonnées modales du SP issues des résultats numériques (f) Comparaison entre les amplitudes du système prédites par le premier point d'équilibre (croix rouges) et celles obtenues numériquement (ronds bleus). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.29). . . . 81
4.20 SIM du système (ligne noire). Les lignes rouges représentent les zones instables. Le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et deux points singuliers (croix noires). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.30). 82
4.21 (a)-(e) Séries temporelles des cinq coordonnées modales du SP issues des résultats numériques (f) Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR. Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 4.2 et par l'équation (4.30). . 83

5.1 Système à $(L+2)$ ddl composé d'une structure linéaire forcée couplée à une chaîne de $(L+1)$ oscillateurs non linéaires légers ($m = \epsilon M$, $0 < \epsilon \ll 1$). 89
5.2 Portraits de phase dans le plan (N,N_x) obtenus à partir de la première équation du système (5.21) pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et (a) $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$ (b) $C_1 = \frac{1}{2}C_{1crit}$ (c) $C_1 = \frac{3}{2}C_{1crit}$. Les numéros 1, 2 et 3 font référence aux différentes branches sur lesquelles le comportement asymptotique de la chaîne est susceptible d'évoluer. 92
5.3 $\omega_0 = 1$, $B = 9$ et $D = 1$ – Tracé des solutions de l'équation (5.23). Les styles des lignes correspondent à ceux utilisés sur la figure 5.2. 93
5.4 $L = 30$, $\omega_0 = 1$, $B = 40$ et $D = 1$ – Exemple de SIM. Les styles des lignes correspondent à ceux utilisés sur la figure 5.2. 94
5.5 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) SIM du système (ligne noire continue). Le système possède un point d'équilibre (point bleu) et un point singulier (croix noire) (b) Portrait de phase dans le plan (δ_0,N_0) autour du point d'équilibre (point bleu). 96
5.6 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (b) SIM du système (ligne rouge discontinue) et point d'équilibre (point bleu) avec les résultats numériques correspondants (ligne bleue). Le carré bleu représente les amplitudes finales du système issues des résultats numériques. 97
5.7 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – (a) Comparaison des amplitudes physiques des oscillateurs de la chaîne issues des prédictions analytiques des approches continue (ligne bleue continue) et discrète (croix rouges) et des résultats numériques au régime permanent (ronds bleus) (b) Comparaison des SIM calculés par les approches continue (ligne noire continue) et discrète (ligne noire discontinue). 97
5.8 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 0.5$ et $\sigma = 0$ – Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1. 98
5.9 $L = 50$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 2$ et $\sigma = 0$ – Comparaison des amplitudes de la chaîne autour des cinq points d'équilibre prédits par les approches continue (ligne bleue continue) et discrète (croix rouges). 99

5.10 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – (a) SIM du système (ligne noire). Le système possède trois points d'équilibre, un stable (point bleu no. 3) et deux instables (points bleus no. 1 et 2) ainsi qu'un point singulier (croix noire) (b)-(d) Portrait de phase dans le plan (δ_0,N_0) autour des points d'équilibre (points bleus) no. 1, 2 et 3 respectivement. 100
5.11 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – (a) SIM du système (ligne rouge discontinue) et résultats numériques correspondants (ligne bleue) (b) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (c) Amplitude numérique N_{31} en fonction du temps. 101
5.12 $L = 30$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B = 100$, $D = 1$, $c = 0.5$, $f = 4.5$ et $\sigma = 10$ – Évolution des amplitudes de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques à l'échelle de temps lente τ_1 pendant une réponse de type SMR, autour d'une bifurcation. 102
5.13 $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 2$ – (a) Amplitude numérique N_{SP} en fonction du temps (ligne bleue) et tracé de la fonction $N_{SP} = v_0 e^{-\frac{c}{2}\tau_1}$ (croix rouges) (b) Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques montrant la propagation d'une onde localisée spatialement (c) Aperçus des profils des amplitudes numériques N_j dans la chaîne à $t = 4000$ (ligne continue) et $t = 9500$ (ligne discontinue). 103
5.14 $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 2$, avec un amortissement ajouté dans la chaîne : $\Gamma = \epsilon^3$ – (a) Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques (a) Aperçus des profils des amplitudes numériques N_j dans la chaîne à $t = 4000$ (ligne continue), $t = 9500$ (ligne discontinue) et $t = 20000$ (ligne pointillée). 104
5.15 $L = 100$, $\epsilon = 0.01$, $\omega_0 = \Omega = 1$, $B = 2$, $D = 1$, $c = 1$ et $v_0 = 4$ – Évolution des amplitudes N_j de chaque oscillateur de la chaîne issue des résultats numériques montrant la propagation d'une onde localisée spatialement présentant des changements de direction. 104

6.1 Représentation schématique du système principal utilisé dans le dispositif expérimental. 108
6.2 Photo du système principal utilisé dans le dispositif expérimental. La masse principale est montée sur quatre barrettes et reliée à la première masse de la chaîne à gauche. . 109
6.3 Déformation d'une poutre bi-encastrée. 110
6.4 Résultats expérimentaux des tests menés sur le système principal (a) Densité spectrale de puissance sous sollicitation de type bruit blanc d'amplitude constante sur une bande de fréquence allant de 5 Hz à 500 Hz (b) Accélération maximale sous sollicitation de type sinus balayé sur une plage de fréquence [25,30] Hz à des accélérations allant de 0.1 m/s^2 à 0.5 m/s^2 par pas de 0.1 m/s^2. 111
6.5 Principe de réalisation d'une non-linéarité cubique. 112
6.6 Représentation schématique de la plaque support accueillant la chaîne d'oscillateurs. 113
6.7 Représentation schématique d'une portion de rail. 113
6.8 Représentation schématique d'un chariot. 114
6.9 Représentation schématique de la plaque inférieure du composant imprimé des oscillateurs non linéaires (a) Vue plane (b) Vue tridimensionnelle. 114
6.10 Représentation schématique de la plaque supérieure du composant imprimé des oscillateurs non linéaires (a) Vue plane (b) Vue tridimensionnelle. 115
6.11 Représentation schématique du composant imprimé assemblé des oscillateurs non linéaires. 116
6.12 Photo de la chaîne d'oscillateurs non linéaires montée. 116
6.13 Photo d'un oscillateur non linéaire de la chaîne. 117
6.14 Photo du système complet. 117

6.15 Résultats expérimentaux issus des tests sur la chaîne d'oscillateurs non linéaires. Chaque point correspond à un test et trace l'amplitude à l'équilibre des première, deuxième et troisième masses (figures (a), (b) et (c) respectivement) sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz. En ordonnée figure l'amplitude de l'accélération de forçage. 119
6.16 Accélérations maximales des oscillateurs de la chaîne à l'équilibre sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz et d'amplitude (a) $A_f = 17.5$ m/s^2 et (b) $A_f = 18$ m/s^2. 120
6.17 Accélérations maximales des oscillateurs de la chaîne à l'équilibre sous sollicitation sinusoïdale de fréquence 27.5 Hz et d'amplitude (a) $A_f = 34$ m/s^2 et (b) $A_f = 35$ m/s^2. 121
6.18 Résultats expérimentaux issus des tests sur le système complet sous sollicitation de type sinus balayé sur une plage de fréquence [27,28.5] Hz et d'amplitude (a) $A_f = 0.1$ m/s^2 (b) $A_f = 0.2$ m/s^2 (c) $A_f = 0.3$ m/s^2 (d) $A_f = 0.4$ m/s^2 (e) $A_f = 0.5$ m/s^2 (f) $A_f = 0.6$ m/s^2. Les réponses du système principal avec et sans chaîne couplée sont tracées respectivement en rouge et bleu. Les réponses des première, deuxième et troisième masses sont respectivement représentées par des lignes noires continue, discontinue et pointillée. 123
6.19 Évolution au cours du temps des amplitudes maximales du système principal (figure (a)) ainsi que des premier, deuxième et quatrième ddl de la chaîne (figures (b), (c) et (d)) sous une sollicitation sinusoïdale d'amplitude $A_f = 0.3$ m/s^2 et de fréquence 28 Hz. 124

A.1 Portrait de phase dans le plan (N,N_x) obtenu à partir de la première équation du système (5.21) pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$. 128
A.2 Tracé de $\frac{1}{\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{B}N^2 + \frac{\mathcal{D}\omega_0}{B}N^4 + C_1}}$ comme fonction de N pour les paramètres suivants : $\omega_0 = 1$, $B = 40$, $D = 1$ et $C_1 = -\frac{1}{2}C_{1crit}$. Les points bleus et rouges correspondent à ceux de la figure A.1 128

B.1 Photo du pot vibrant. 129
B.2 Photo de l'amplificateur de puissance du vibrateur électrodynamique sur lequel est posée l'unité d'acquisition. 130

Liste des tableaux

4.1 Amplitude N des points d'équilibre à trois niveaux de sollicitation différents pour le jeu de paramètres suivant : $P = 49$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_1 = 5$, $c = 0.2$, $B = 2$, $c_1 = 4$, $D = 50$ et $\sigma = 0$. Les valeurs en italique correspondent aux points instables (selon l'approche analytique). 63
4.2 Valeurs des paramètres choisies pour les simulations numériques réalisées sur une structure linéaire à 5 ddl couplée à une chaîne d'oscillateurs non linéaires. 79

6.1 Dimension des constituants du système principal utilisé dans le dispositif expérimental. 108

Résumé

L'utilisation de systèmes légers non linéaires permet de réaliser le contrôle vibratoire de structures subissant des oscillations non acceptables en termes de confort pour l'usager ou de sécurité de l'ouvrage. L'étude des puits d'énergie non linéaires, ou "Nonlinear Energy Sinks" (NES), a notamment fait l'objet de nombreuses recherches depuis le début des années 2000. Leur non-linéarité leur confère des capacités de pompage énergétique large bande, c'est-à-dire pour un large intervalle de fréquences de sollicitation, ce qui représente un avantage significatif en comparaison des absorbeurs comme l'amortisseur à masse accordée. Le but de ce manuscrit est d'étudier le couplage de chaîne d'oscillateurs non linéaires à des systèmes dynamiques linéaires soumis à des sollicitations harmoniques et d'analyser d'une part le comportement global du système, et d'autre part les potentialités de contrôle passif de telles chaînes.
Une méthodologie analytique générale est présentée, puis appliquée à des exemples où des absorbeurs à non-linéarités cubiques à un, puis à N degrés de liberté sont attachés à un oscillateur linéaire. Une variation de cette méthodologie adoptant une vision continue de la chaîne est ensuite proposée. Enfin, un dispositif expérimental étudie le comportement d'un modèle réduit de bâtiment à un étage couplé à une chaîne de huit oscillateurs non linéaires.

Mots clés : Contrôle passif, dynamique non linéaire, chaîne d'oscillateurs, modes normaux non linéaires, échelles multiples, expérimentation, réponse fortement modulée.

Abstract

Nonlinear light oscillators can be used for performing vibratory passive control of structures undergoing unacceptable oscillations in terms of comfort and safety. The study of Nonlinear Energy Sinks (NES) has been especially subject to an important research effort since the beginning of the 2000s. Its essential nonlinearity enables it to achieve large-band energy pumping, which is a significant advantage in comparison with classical Tuned Mass Dampers. In this manuscript, nonlinear chains of oscillators coupled to linear systems under harmonic excitation are studied. The main goal is to understand the behavior of the whole system and find evidence of passive control abilities of such chains.
First of all, a general analytical methodology is presented and applied to examples where single and multi-degree-of-freedom absorbers with cubic nonlinearities are linked to a linear oscillator. A modification of this approach by considering the chain in the form of a continuous approximation is then proposed. Finally, an experimental device composed of a single storey reduced-scale building coupled to a chain of eight nonlinear oscillators is investigated.

Keywords: Passive control, nonlinear dynamics, oscillatory chain, nonlinear normal modes, multiple scales, experimentation, strongly modulated response.