

Numéro national de thèse : 2018LYSEN082

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée par
l'École Normale Supérieure de Lyon

École doctorale n° 512
École doctorale en informatique et mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 13 décembre 2018, par
Valentin Seigneur

Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule

Devant le jury composé de :

Michel Boileau,	Pr. à l'Université Aix-Marseille,	*rapporteur*
Hélène Eynard-Bontemps,	MC à l'Université Pierre et Marie Curie,	*examinatrice*
Louis Funar,	DR à l'Université Joseph Fourier,	*examinateur*
Étienne Ghys,	DR à l'ENS de Lyon,	*directeur de thèse*
François Laudenbach,	Pr. ém. à l'Université de Nantes,	*rapporteur*
Nermin Salepci,	MC à l'Université Claude Bernard,	*examinatrice*
Jean-Claude Sikorav,	Pr. à l'ENS de Lyon,	*examinateur*

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier Étienne Ghys de m'avoir accompagné durant cette thèse, pour ses nombreux conseils et sa disponibilité. Au delà de cela, merci Étienne pour ton enthousiasme, pour les maths et ce qu'elles représentent, et pour ton besoin de les partager, qui m'ont profondément inspiré.

Je voudrais aussi remercier les rapporteurs de cette thèse, Michel Boileau et François Laudenbach.

Michel, tu m'as dit un jour au détour d'un repas : "Il faut que tu fasses ce dont tu as envie." Dans un contexte assez stressant pour un jeune chercheur, cette phrase très simple de ta part a fait beaucoup de bien. Merci !

François, cette thèse n'existerait pas sans le regard que tu as posé dessus. Sans même parler des nombreux lemmes avec lesquels tu m'as aidé, je souhaite te remercier pour tout le temps que tu as accordé à mon travail, et pour ton enthousiasme vis-à-vis de celui ci. Merci pour tout.

J'aimerais aussi remercier tous les membres du jury qui ont bien voulu lire ma thèse et venir m'écouter en ce 13 Décembre 2018. Merci à Hélène Eynard-Bontemps, Louis Funar, Nermin Salepci et Jean-Claude Sikorav.

Merci à l'UMPA et tous ses membres pour l'accueil et l'ambiance chaleureuse ! En particulier, merci à Magalie, Virginia, Farah et Sandy qui ont toujours été là pour m'éviter de faire n'importe quoi avec les ordres de mission, et dont le travail a permis et permet encore à l'UMPA de plus ressembler à un navire voguant fièrement qu'au Radeau de la Méduse. Merci aussi à Jean-Claude Sikorav et Bruno Sévennec pour leurs précieux conseils et leurs connaissances wikipédiesques. Enfin, merci à tous les personnels de l'ENS de Lyon, personnel d'entretien ménager, personnel administratif, personnel du CROUS... qui font vivre toute une école, et dont le travail est précieux.

À tout·e·s les doctorant·e·s et étudiant·e·s que j'ai pu rencontrer au détour de ces quelques années, un grand merci ! J'aurais trop peur d'oublier un prénom, ne m'en voulez pas si je m'en tiens à un merci général. Une petite mention spéciale à Arthur, avec qui j'ai eu le plaisir de partager la préparation d'un TD durant 3 ans, et à qui je propose les exercices 3 et 5 de la feuille pour la semaine prochaine. Pour le DM on verra plus tard, ça peut attendre.

J'aimerais remercier Jean Barge pour les discussions algébriques que j'ai eues avec lui, et qui m'ont débloqué sur ces histoires de matrices à coefficients entiers.

J'ai aussi une pensée pour Andrew Ranicki, dont la bienveillance et la gentillesse m'ont permis d'apprendre beaucoup de choses en topologie algébrique et plus particulièrement dans la théorie de la chirurgie.

Merci aussi à l'accueil qui m'a été réservé à l'ESPE de Caen et au LMNO, et pour m'avoir permis de préparer cette soutenance sereinement. Merci en particulier à Paolo, Denis, Cécile et Samuel.

Il est alors temps de remercier les personnes avec qui les rencontres ponctuelles ou quotidiennes, dont le regard ou les clins d'oeil, dont les paroles ou le silence, ont été bien plus qu'une simple présence. Il est temps d'être gnan-gnan.

Alors aux saltimbanques et aux artistes, à celles qui manquent, ceux qui subsistent, aux lapiphiles, à celles qui restent et ceux qui filent, aux mathématiques célestes, à toutes ces joyeuses sirènes, à ces compagnons de migraines.

Aux bagarres des rues de Londres, aux femmes de science qui correspondent, à ces montagnes minuscules et à nos exploits majuscules, aux bros, aux marins de coeur, aux quarreaux, aux antipollueurs, aux flacons enivrants, aux soleils givrants.

Au jour des tartes, aux envoyées moscovites, aux partageuses d'appart, aux rencontres fortuites, aux mangeurs de bouquins, aux absences de Quinquin, aux tricots soignés et aux chants éloignés, aux explorateurs des continents glacés, et puis finalement à tous les rires passés.

Un immense merci à celles et ceux qui se reconnaîtront dans tout ça. Et aux autres aussi (comme ça je suis à peu près sûr de n'oublier personne).

Enfin, parce que j'ai plus entendu "Tu feras ce que tu veux." que "Tu feras ce qu'on t'a ordonné.", parce que j'ai du mal à réaliser la chance qui m'a été donnée, parce que les jours de fête résonnent toujours plus que les épisodes de tempête, merci à ma famille, à Hervé, Elisabeth, Pauline et Camille.

Il y a une prise étonnante de la raison humaine sur la réalité. C'est la science.
Jean-Pierre Kahane, conférence à l'Académie des Sciences, le 14 Mars 2017.

Sommaire

Introduction

1 Notations 5

Chapitre 1
Théorie de Morse et autres mathématiques

1.1 La genèse, par Henri Poincaré 8
1.2 Retour dans le présent 13
1.3 Pseudo-gradients 16
1.4 Un peu de chirurgie 18
1.5 Homologie de Morse 21
1.6 Retour sur l'exemple de Poincaré, point de vue moderne 25
1.7 Chemins de fonctions génériques 25
1.8 Généricité des pseudo-gradients 28
1.8.1 Glissements d'anses 28
1.8.2 Accidents indépendants 31
1.9 Théorie de Morse à bord 34
1.10 Graphes de Reeb 37
1.11 Torsions de complexes de chaînes 39

Chapitre 2
Problème d'extension de germes sans points critiques de la sphère à la boule

2.1 Le problème 43
2.2 Résultats de Blank-Laudenbach et de Curley 45
2.2.1 Blank et Laudenbach : le cas du cercle 45
2.2.2 Curley : la sphère de dimension 2 47
2.3 Résultats de Barannikov 50
2.3.1 FMC et FMC sous forme canonique 53
2.3.2 FMC sous forme canonique, deuxième interprétation 58
2.4 Théorème principal : une condition nécessaire 61

2.4.1 $G(\tilde{f})$ 62
2.4.2 Le théorème principal 66
2.4.3 Différences avec le travail de Barannikov 80
2.5 La condition du théorème 2.4.6 n'est pas suffisante 84

Chapitre 3
Corollaires du théorème principal et cas de suffisances

3.1 Premiers résultats de suffisance 91
3.1.1 Germes triviaux 91
3.1.2 Mort sans points critiques 95
3.1.3 Il y a toujours un germe qui s'étend sans points critiques à un complexe de chaînes donné 96
3.2 Germes ordonnés 98
3.2.1 Définitions et suffisance de la propriété $\mathcal{P}$ 98
3.2.2 Stabilisation de germes ordonnés 100
3.3 Un peu d'algèbre linéaire à coefficients entiers 109
3.3.1 Problèmes et définitions 109
3.3.2 Question 3.3.1 111
3.3.3 Question 3.3.3 115
3.4 Une conjecture et quelques perspectives 121

Appendice : extensions de fonctions de Morse **129**

Bibliographie **133**

Introduction

La théorie de Morse est maintenant assez vieille. La publication du cinquième complément à l'*Analysis situs* de Poincaré, en 1905, et dont nous reparlerons au début de cette thèse, est un des premiers textes mathématiques qui utilise cette théorie dans sa forme moderne. Mais cette théorie est si riche qu'elle alimente encore une recherche active. Cette thèse se propose d'apporter des éléments de réponse à un problème qui en est issu.

Nous appellerons *germe de Morse le long de la sphère* $\mathbb{S}^n$ une classe d'équivalence de fonctions lisses $\tilde{f} : \mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ qui n'ont pas de points critiques et dont la restriction f de $\tilde{f}$ à $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ est une fonction de Morse, où deux fonctions sont équivalentes quand elles coïncident sur un voisinage aussi petit que voulu de $\mathbb{S}^n$. La sphère $\mathbb{S}^n$ est comprise comme étant la sphère de rayon 1 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ avec sa structure euclidienne standard. On notera aussi $\mathbb{D}^{n+1}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$. La question est alors la suivante :

Question. *Quand peut-on étendre $\tilde{f}$ en une fonction $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ qui n'a pas de points critiques ?*

Ici, on voit l'inclusion $\mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon) \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ via l'application $(x, t) \mapsto (1 - t)x$.

Cette question a été posée pour la première fois par Samuel Blank et François Laudenbach en 1970 [10]. Ils y répondent dans le cas $n = 1$ et font un peu mieux que ça, car ils répondent à la question plus générale de savoir quand un germe $\tilde{f}$ défini le long d'une variété fermée V de dimension 1, s'étend à une fonction sans points critiques $F : W \to \mathbb{R}$ où W est une variété à bord de dimension 2 donnée et dont le bord est V. Le théorème est de nature combinatoire, et étudie un graphe fini facilement déterminé par $\tilde{f}$. En particulier, une réponse pourrait être donnée par un ordinateur en temps fini, voire trouvée à la main quand la restriction f n'a pas beaucoup de points critiques (une dizaine tout au plus).

Carlos Curley en 1978 [6] donne une condition nécessaire et suffisante pour $n = 2$. Son théorème utilise le *graphe de Reeb* d'une fonction de Morse dont nous reparlerons. Ici encore la condition est de nature combinatoire, et donne une réponse calculable par un ordinateur en temps fini.

C'est en 1994 que Sergueï Barannikov [2] donne une condition nécessaire en toutes dimensions qui mélange les données du complexe de Morse donné par le germe et des considérations sur un graphe qu'il introduit à cette occasion. Barannikov utilise en fait une version simplifiée du complexe de Morse donné par f en considérant les coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. À un corps donné, la condition est aussi calculable en un temps fini. Le théorème de Barannikov va en fait plus loin car il donne une borne inférieure aux nombres de points critiques qu'aurait une fonction $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ qui étend un germe de Morse $\tilde{f}$. Petya Pushkar dans un travail qui n'est pas encore publié [38] donne des inégalités de Morse pour les variétés à bord qui amélioreraient les théorèmes de Barannikov. Dernièrement, Clément Laroche dans une prépublication [20] s'occupe de l'extension d'un germe défini sur une bouteille de Klein. Nous remarquons enfin que la question qui va nous occuper au cours de cette thèse a aussi été énoncée par Arnol'd, [1, Problème 1981-8].

Le théorème principal de cette thèse donne une condition nécessaire qui s'appuie sur le complexe de Morse à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de f et des données de dérivées normales au bord sur les points critiques imposées par $\tilde{f}$. Précisément, puisque $\tilde{f}$ n'a pas de points critiques, si p est un point critique de f, on a alors nécessairement $\partial_t \tilde{f}(p,0) \neq 0$, en identifiant le germe et un représentant. Deux cas se présentent alors, les notations étant prises de [6] :

- $\partial_t \tilde{f}(p,0) > 0$, dans ce cas nous donnons au point p une étiquette $-$, et on note $\mathcal{C}^-(\tilde{f})$ l'ensemble des points d'étiquette $-$ et d'indice k ;
- $\partial_t \tilde{f}(p,0) < 0$, dans ce cas nous donnons au point p une étiquette $+$, et on note $\mathcal{C}^+(\tilde{f})$ l'ensemble des points d'étiquette $+$ et d'indice k.

Cette séparation des points critiques de f est fondamentale en théorie de Morse à bord et les points $+$ et les points $-$ joueront en quelque sorte des rôles antagonistes.

Si on note $\mathcal{C}_k(f)$ l'ensemble des points critiques de f d'indice k, on a alors

$$\mathcal{C}_k(f) = \mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) \coprod \mathcal{C}_k^-(\tilde{f}).$$

On donne aussi un ordre aux points de $\mathcal{C}_k(f)$ pour tout indice k de manière à ce que les points $+$ soient ordonnés avant les points $-$.

Pour un ensemble E, notons $\mathbb{Z}E$ le $\mathbb{Z}$-module librement engendré par les éléments de E. Étant donné un pseudo-gradient X adapté à f et Morse-Smale, on note $\partial_k : \mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_{k-1}(f)$ l'opérateur de bord associé. On note aussi $\partial_{\ell_1\ell_2,k} : \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_2}(\tilde{f}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_1}(\tilde{f})$ pour $(\ell_1,\ell_2) \in \{-,+\}$, la restriction de ∂_k à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_2}(\tilde{f})$ projetée ensuite sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_1}(\tilde{f})$. On écrit alors en notation matricielle, avec la décomposition $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(\tilde{f}) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ pour tout degré k :

$$\partial_k = \begin{pmatrix} \partial_{++,k} & \partial_{+-,k} \\ \partial_{-+,k} & \partial_{--,k} \end{pmatrix}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, notons $(a_i)_{1\leq i\leq p_k}$ les points de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ et $(b_j)_{1\leq j\leq q_k}$ les points de $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$. Nous verrons qu'il y a un sous-groupe d'isomorphisme $G_k(\tilde{f})$ agissant sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f)$ particulièrement important pour notre étude qui est le suivant :

$$G_k(\tilde{f}) := \left\{ \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k & I_{q_k} \end{pmatrix} \text{ tels que } (N_k)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow f(a_i) > f(b_j) \right\}.$$

Ce groupe représente les glissements d'anses permis des points $+$ au-dessus des points $-$. C'est un groupe abélien, qu'on verra aussi en tant que $\mathbb{Z}$-module. La terminologie sera expliquée en section 1.3. On note aussi $G(\tilde{f})$ le groupe d'isomorphismes de $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ qui se restreint à un élément de $G_k(\tilde{f})$ sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(\tilde{f})$.

Le théorème est le suivant :

Théorème A (Théorème 2.4.6 dans le corps du texte)**.** *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse défini le long de $\mathbb{S}^n$. Si $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques à une fonction $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ alors il existe $M \in G(\tilde{f})$ tel que $(M\partial M^{-1})_{++}$ définit un opérateur de bord sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})$ dont l'homologie est $\mathbb{Z}$ en degré n et 0 sinon. C'est aussi l'homologie de $\mathbb{D}^{n+1}$ relativement à $\mathbb{S}^n$.*

On obtient alors que pour ce même $M \in G(\tilde{f})$, la matrice $(M\partial M^{-1})_{--}$ définit un opérateur de bord sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f})$ dont l'homologie est celle du disque $\mathbb{D}^{n+1}$.

Ce théorème est à la base de tous les autres résultats de cette thèse. Sa démonstration repose sur le point de départ de Barannikov et sur deux lemmes principaux. L'idée de Barannikov est qu'une extension F d'un germe $\tilde{f}$ nous donne un chemin de fonctions *non critique*. Plus

précisément, si F est une extension sans points critiques, alors sur un voisinage B d'un point x dans l'intérieur de $\mathbb{D}^{n+1}$ qui est difféomorphe à une boule ouverte, la fonction F est linéaire dans un système de coordonnées bien choisi. Soit $\overline{B}$ la fermeture de B. Ainsi, la fonction f^1, restriction de F au bord $\partial\overline{B}$ de $\overline{B}$ difféomorphe à $\mathbb{S}^n$, n'a que deux points critiques, un maximum et un minimum. Qui plus est, pour le germe défini par la restriction de F à un voisinage tubulaire de ∂B dans B, le maximum est $+$ et le minimum est $-$. Comme $\mathbb{D}^{n+1} \setminus B$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times [0,1]$, nous verrons F comme un chemin de fonctions entre f et f^1, que nous supposerons générique. Ce chemin est alors *non critique* dans le sens où il n'y a aucun couple $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$ tel que $dF(x,t) = 0$. Nous utiliserons alors les deux lemmes suivants. Le premier montre que la condition énoncée dans le théorème ne dépend pas du pseudo-gradient considéré (ce qui n'est *a priori* pas du tout évident ! mais qui se montre sans trop de problèmes), et le deuxième montre que pour $F : \mathbb{S}^n \times [0,1]$ un chemin non critique qui n'a qu'un seul accident, si $F(\cdot,1)$ vérifie les hypothèses du théorème alors $F(\cdot,0)$ aussi. Comme le germe $\widetilde{f^1}$ décrit précédemment vérifie trivialement les hypothèses, une récurrence montre que le germe initial $\tilde{f}$ aussi.

La suite de cette thèse présente des résultats qui gravitent autour de ce théorème. Le premier est que ce théorème donne une condition nécessaire qui améliore strictement la condition donnée par Barannikov, dans le sens où un germe qui vérifie les hypothèses du théorème vérifie aussi la condition nécessaire du théorème de Barannikov et dans le sens où il y a un germe qui vérifie la condition de Barannikov sans vérifier celle du théorème énoncé dans cette thèse. Le deuxième résultat montre que cette condition malheureusement n'est pas suffisante.

Théorème B (Théorème 2.5.8 dans le corps du texte)**.** *Il y a des germes qui vérifient la condition énoncée dans le théorème A sans pour autant pouvoir s'étendre sans points critiques.*

Nous exhibons un exemple défini le long d'une sphère de grande dimension. Cet exemple est tel qu'il y a un point d'indice $k+2$ et d'étiquette $+$ dont la sphère d'attachement a une intersection non vide avec la sphère transverse d'un point $-$ et d'indice k. Pour démontrer ce théorème, et ainsi la non suffisance du théorème A, nous utilisons des résultats de théorie de Morse sur les variétés à bord, énoncés par exemple dans [8] que nous établissons en section 1.9.

Le troisième résultat montre que la condition donne toutefois une condition suffisante dans certains cas assez intéressants à étudier, notamment celui de germes ordonnés, définis ci-après.

Définition A. *Un germe de Morse $\tilde{f}$ défini le long d'une variété V est* ordonné *quand, pour tout couple de points critique p et q, on a $f(p) > f(q)$ dès que* $\mathrm{ind}(p) > \mathrm{ind}(q)$ *ou quand* $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{ind}(q)$ *mais que l'étiquette de p est $+$ et que celle de q est $-$.*

Cette classe de germes est particulièrement agréable car dans ce cas, $G_k(\tilde{f})$ est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}$-module (ou groupe abélien) à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}), \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}))$, c'est-à-dire est le plus gros possible.

Théorème C (Théorème 3.2.2 dans le corps du texte)**.** *Un germe ordonné défini le long de $\mathbb{S}^n$ pour $n \geq 6$ s'étend sans points critiques à une fonction sur la boule si et seulement si le germe vérifie la condition énoncée dans le théorème A.*

Le problème devient alors entièrement algébrique, et il devient naturel de définir une catégorie qui capture la structure algébrique des germes ordonnés.

Définition B (Catégorie $\mathcal{LOCH}$, pour *Labeled Ordered Chain complexes*)**.** *Nous définissons la catégorie $\mathcal{LOCH}$ dont les objets sont les triplets (C^+, C^-, ∂) tels que C^+ (resp. C^-) est une suite graduée de $\mathbb{Z}$-modules C_k^+ (resp. C_k^-), et que $\partial_k : C_k^+ \oplus C_k^- \to C_{k-1}^+ \oplus C_{k-1}^-$ est un complexe de*

chaînes. Nous avons donc des restrictions $\partial_{\ell_1\ell_2,k} : C_k^{\ell_2} \to C_{k-1}^{\ell_1}$ *où* ℓ_1 *et* ℓ_2 *sont deux étiquettes dans* $\{+,-\}$*. On notera parfois simplement un objet de* $\mathcal{LOC}h$ *par* C *sans préciser l'opérateur de bord.*

Les morphismes entre deux objets C *et* D *sont les applications de complexes de chaînes* $f : C^+ \oplus C^- \to D^+ \oplus D^-$ *tels que* $f_{+-} : C^- \to D^+$ *est nul.*

On observe alors que les éléments de $G(\tilde{f})$, pour un germe ordonné $\tilde{f}$, est un isomorphisme de $\mathcal{LOC}h$. À un germe ordonné $\tilde{f}$ muni d'un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f, on a un objet $\Psi(\tilde{f})$ de la catégorie $\mathcal{LOC}h$ bien défini. On peut essayer de déceler un peu plus de structure dans cette catégorie. Il y en a une évidente : c'est une catégorie additive, héritée de la catégorie $\mathcal{C}h$ des complexes de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Les produits et les co-produits sont donc naturellement définis. Notons $\mathcal{OMG}$, pour *Ordered Morse Germs*, l'espace des couples $(\tilde{f}, X)$ où $\tilde{f}$ est un germe de Morse ordonné, X est un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f et tels que f n'a pas de points critiques d'indices 0, 1, $n-1$ et n autre qu'un maximum local et un minimum local.

On a :

Théorème D (Théorème 3.2.9 dans le corps du texte)**.** *Il y a une structure de monoïde commutatif définie sur l'espace* $\mathcal{OMG}$*. Cette structure de monoïde dérive de la loi somme connexe* $\sharp$ *définie sur les variétés orientées. En d'autres termes, on a une loi, encore dénotée* $\sharp$*, pour laquelle, pour deux couples* $(\tilde{f}, X_f)$ *et* $(\tilde{g}, X_g)$*, il y a un germe ordonné* $\widetilde{f\sharp g}$ *tel que* $f\sharp g$ *est muni d'un pseudo-gradient Morse-Smale adapté pour lequel* $\Psi(\tilde{f}\sharp\tilde{g}) \simeq \Psi(\tilde{f}) \oplus \Psi(\tilde{g})$*.*

Pour un germe de Morse $\tilde{f}$, on rappelle qu'on note $p_k := \mathrm{Card}(\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}))$ et $q_k := \mathrm{Card}(\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}))$. Pour cette structure de monoïde, on a un résultat de stabilisation énoncé dans le théorème suivant.

Théorème E (Théorème 3.2.11 dans le corps du texte)**.** *Si* $\tilde{f}$ *vérifie :*
- $\forall\ 2 \leq k \leq n-2$, $p_{k+1}(\tilde{f}) \geq \sum_{2=j}^{k} (-1)^{j+k} p_j(\tilde{f})$ *;*
- $\sum_{k=2}^{n-2} (-1)^k p_k(\tilde{f}) = 0$;

alors il existe un germe ordonné $\tilde{g}$ *qui s'étend sans points critiques tel que* $\widetilde{f\sharp g}$ *s'étend sans points critiques.*

Pour la classe des germes ordonnés, on peut aussi essayer de donner une condition facilement calculable, étant donné un complexe de Morse associé à f. On sera alors amené à donner une réponse au problème suivant, intéressant en soi :

Question. *Étant données deux matrices carrées (à coefficients entiers)* B *et* C*, disons dans* $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$*, quand existe-t-il une matrice* $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ *telle que* $B + CM$ *soit inversible ?*

Question à laquelle nous avons la réponse :

Théorème F (Cas particulier du théorème 3.3.21 dans le corps du texte)**.** *Une telle matrice* M *existe si et seulement si la matrice* $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ *est surjective et*

$$\det(B) \equiv \pm 1 \mod d_1(C)$$

où $d_1(C)$ *est le pgcd de tous les coefficients de* C*.*

À défaut de pouvoir donner une condition facilement calculable pour tout germe ordonné $\tilde{f}$, on donnera une conjecture de condition nécessaire et suffisante d'extension sans points critiques pour les germes ordonnés, et le théorème F nous donne une condition nécessaire et suffisante quand les points critiques de la fonction de Morse du germe ordonné ne peuvent prendre que deux valeurs d'indice hormis 0 et n.

Théorème G (Théorème 3.4.1 dans le corps du texte)**.** *Soit $\tilde{f}$ un germe ordonné n'ayant qu'un maximum étiqueté $+$, un minimum étiqueté $-$ et aucun autre point critique d'indice 0, 1, $n-1$ ou n. Soit k un entier tel que $2 \leq k \leq n-3$. On suppose que f n'a que des points critiques d'indices k ou $k+1$ hormis pour les deux extremums. Le germe s'étend sans points critiques à la boule si et seulement si :*

- $p_k = p_{k+1}$;
- $\det(\partial_{++,k+1}) \equiv \pm 1 \quad [d_1(\partial_{+-,k+1})]$.

Nous terminons enfin par un appendice dans lequel on s'intéresse à la question d'extension sans points critiques de fonctions de Morse $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ (sans données sur les dérivées normales intérieures). Nous verrons que toute fonction qui n'a qu'un seul maximum global, ou qu'un seul minimum global, s'étend sans points critiques, pour $n \geq 6$. Cependant, en toute dimension, il y a des fonctions de Morse qui ne s'étendent pas sans points critiques. Il est toutefois facile de voir que pour toute fonction de Morse définie sur $\mathbb{S}^n$ avec $n \geq 6$, il y a une extension à la boule qui a au plus un point critique.

La plupart des résultats de ce manuscrit, hormis certains sur les germes ordonnés comme celui sur la stabilisation, sont en anglais dans [42], et dans [43] dans une version condensée et française.

Voici l'architecture de ce manuscrit :

- le premier chapitre est un chapitre d'introduction de toutes les notions mises en jeu. On y traite de théorie de Morse, de théorie des chemins élémentaires, de théorie de Morse sur les variétés à bord, de chirurgie et de torsion. Il ne remplace bien sûr en aucun cas un cours introductif de ces théories mais se veut abordable par un étudiant ou une étudiante de master motivé-e ou un doctorant ou une doctorante qui n'est pas nécessairement familier avec toutes les notions ;
- le deuxième chapitre décrit tout d'abord les résultats qui existaient avant cette thèse. Nous exposons ainsi les résultats de Blank et Laudenbach, ceux de Curley, et ceux de Barannikov. Ensuite le théorème principal, le théorème 2.4.6 énoncé dans l'introduction sous le nom de théorème A, est démontré et nous montrons aussi que ce théorème va plus loin que les résultats de Barannikov, notamment parce que nous conservons des coefficients entiers. Nous montrons aussi dans ce chapitre que la condition nécessaire du théorème 2.4.6 n'est pas suffisante en toute généralité ;
- le troisième chapitre donne des résultats de suffisance et des corollaires au théorème 2.4.6. On définit notamment la classe des germes ordonnés et les étudions, en introduisant des résultats de stabilité. Nous terminons par formuler une conjecture de condition nécessaire et suffisante d'extension sans points critiques de germes ordonnés. Cette conjecture donne quoi qu'il en soit une condition nécessaire faible mais calculable pour savoir si un germe de Morse peut s'étendre sans points critiques à la boule ;
- un court appendice traite de la question d'extensions sans points critiques des fonctions de Morse sur $\mathbb{S}^n$ (sans avoir de données sur les germes).

1 Notations

Nous utiliserons tout au long de la thèse les notations suivantes.

- Si deux groupes, $\mathbb{Z}$-modules ou complexes de chaînes G et H sont isomorphes, on le signifiera par $G \simeq H$.
- Si $\mathcal{C}$ est un ensemble et A un anneau, nous définissons $A\mathcal{C}$ comme étant le A-module libre engendré par les éléments de $\mathcal{C}$. Par convention, nous posons $A\emptyset := 0_A$, le A-module réduit

à 0. La plupart du temps, nous aurons en fait $A = \mathbb{Z}$, l'anneau des entiers, mais pas tout le temps !

- Si $A\mathcal{C}_1, ..., A\mathcal{C}_n$ est une telle suite de A-modules, nous noterons par $A\mathcal{C}$ leur somme directe $\bigoplus_k A\mathcal{C}_k$.
- Si nous considérons une suite d'homomorphismes indexée par $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ comme par exemple $\phi_{j,k} : A\mathcal{C}_k \to A\mathcal{D}_j$, nous noterons par ϕ leur extension, telle que $\phi : A\mathcal{C} \to A\mathcal{D}$ et $\phi(x) = \sum_j \phi_{j,k}(x)$ pour $x \in A\mathcal{C}_k$.
- De la même manière, si ϕ est un homomorphisme de A-modules défini sur la somme directe $A\mathcal{C}$ de A-modules $A\mathcal{C}_k$ alors ϕ_k sera la restriction de ϕ à $A\mathcal{C}_k$.
- Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, les mots *au-dessus* et *en dessous* sera toujours entendu par rapport à f s'il n'y a aucune confusion possible avec une autre fonction.
- Si $f : V \to \mathbb{R}$ est lisse, alors $\mathcal{C}(f)$ sera l'ensemble critique de f, c'est-à-dire l'ensemble des points critiques de f.
- Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse, $\mathcal{C}_k(f)$ sera l'ensemble des points critiques de f d'indice k.
- Une fonction lisse $f : V \to \mathbb{R}$ est dite *non critique* si $\mathcal{C}(f) = \emptyset$.
- Une fonction de Morse f est dite *excellente* s'il y a une bijection entre les points critiques de f et les valeurs critiques.
- La lettre majuscule I_p signifiera la matrice identité. Nous omettrons parfois l'indice p, qui indique la dimension du module libre sur lequel on considère la matrice, si aucune confusion n'est possible.

Si une notation n'est utilisée que pour une section, nous l'introduisons dans la dite section.

Chapitre 1

Théorie de Morse et autres mathématiques

Sommaire

1.1 La genèse, par Henri Poincaré 8
1.2 Retour dans le présent 13
1.3 Pseudo-gradients 16
1.4 Un peu de chirurgie 18
1.5 Homologie de Morse 21
1.6 Retour sur l'exemple de Poincaré, point de vue moderne 25
1.7 Chemins de fonctions génériques 25
1.8 Généricité des pseudo-gradients 28
1.8.1 Glissements d'anses 28
1.8.2 Accidents indépendants 31
1.9 Théorie de Morse à bord 34
1.10 Graphes de Reeb 37
1.11 Torsions de complexes de chaînes 39

Notre objet d'étude principal s'inscrit dans ce qu'on appelle la *théorie de Morse*. Nous proposons dans cette section de l'introduire, d'abord par un exemple historique dû à Henri Poincaré, puis de manière plus classique avec des définitions modernes. Nous parlerons ensuite succinctement de théories dérivées de la théorie de Morse. Cela comprend la théorie des chemins de fonctions élémentaires, la théorie de Morse à bord, ou encore la théorie de la chirurgie, dont les résultats fondamentaux nous serviront dans la deuxième partie.

La prochaine sous-section étudie l'exemple de la sphère d'homologie de Poincaré à partir du cinquième complément de Poincaré [37]. Il serait trop ambitieux de vouloir allier un cours d'histoire des sciences et de topologie algébrique : nous ne le ferons pas dans cette sous-section et nous bornerons à la simple étude de la sphère d'homologie à partir seulement du cinquième complément. Cette ambition ceci-dit est déjà atteinte par le travail du collectif Henri Paul de Saint-Gervais, avec le site *Analysis Situs*, voir [7]. Voyager à travers ce site permet de se familiariser avec la topologie algébrique que l'on peut apprendre en master, tout en apprenant dans quel contexte historique les notions ont été introduites.

1.1 La genèse, par Henri Poincaré

Supposons avoir en face de nous une variété V. Elle peut être de dimension finie ou infinie, fermée ou ouverte, à bord ou sans bord. L'étude d'un tel objet pourrait paraître difficile, mais fort heureusement pas impossible. Il faut par contre se munir des bons outils. La théorie qui porte le nom de *Marston Morse*[1] en est un. Comme beaucoup de théories, celle-ci a commencé avant que celui qui en a donné le nom ne l'étudie. Nous pourrions dire que tout-e géologue ayant observé les lignes d'une roche stratifiée a fait de la théorie de Morse. Nous référons à la figure 1.1 pour une image.



FIGURE 1.1 – Roche stratifiée, propriété de Thibault Lorin.

Ceci-dit, bien que la géologie soit une très belle science, voir [16], nous nous concentrerons sur l'aspect purement mathématique de la théorie. Nous commencerons alors plutôt, comme beaucoup d'histoires mathématiques, avec *Henri Poincaré*[2]. Il est l'un des premiers à avoir utilisé les comportements locaux des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour l'étude de variétés. Dans cette section, nous allons introduire les notions en jeu en reprenant l'étude de la sphère d'homologie de Poincaré faite dans [37, Complément V], dont nous recommandons la lecture, avec un vocabulaire un peu plus moderne. Flattons-nous un petit peu et mettons-nous dans la peau d'Henri Poincaré le temps de cette introduction.

Supposons donc que nous soyons en 1904, et que nous ayons écrit en 1895 un Mémoire portant sur l'étude des variétés que nous avons appelé *Analysis Situs*, [36]. L'homologie, *à la Poincaré*, une définition formelle des nombres de Betti, le groupe fondamental ou encore la division cellulaire d'une variété ont été introduits dans le manuscrit. Une autre approche de l'homologie à coefficients entiers — avec l'accent mis sur les éléments de torsion — est apparue dans le deuxième complément. Dans le cinquième complément, nous nous posons le problème suivant :

Question 1.1.1. *Peut-on trouver une variété fermée de dimension 3 qui a l'homologie — à coefficients entiers — d'une sphère mais qui pourtant n'aurait pas un groupe fondamental trivial ?*

La réponse à cette question est *oui*, et nous allons exhiber une telle variété en la décrivant

1. Marston Morse 1892-1972.
2. Henri Poincaré 1854-1912.

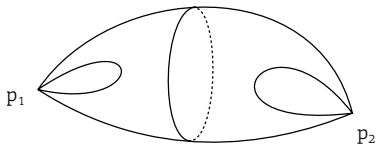

FIGURE 1.2 – Niveau $f(y) = 1$.

niveau par niveau [3]. Donnons-lui un nom.

Elle s'appellera Σ.

Nous entendons *niveau par niveau* de la manière suivante. Nous supposons avoir une fonction $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ lisse, et nous allons décrire les surfaces de niveaux $f^{-1}(t)$. Nous considérerons que l'image de f est le segment $[0, 3]$, ce qui n'est pas très restrictif, quitte à appliquer à gauche de f une application affine de $\mathbb{R}$. Pour t en dessous de 0, la strate $f^{-1}(t)$ est donc vide. Supposons que f n'ait qu'un seul minimum local, atteint en 0. Pour des valeurs de t proches de 0, nous prendrons une fonction f localement quadratique autour du minimum, c'est-à-dire que dans un système de coordonnées (y_1, y_2, y_3) centrée autour du minimum, la fonction f s'écrit :

$$f(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Pour une telle fonction quadratique, pour $t > 0$ petit, l'égalité

$$f(y) = t$$

a pour ensemble solution une sphère de dimension 2. Continuons un petit peu. Nous construisons la fonction f de telle manière à ce que le prochain réel t pour lequel le niveau $f^{-1}(t)$ change de topologie soit pour $t = 1$. À ce niveau là, la fonction f présente deux singularités, c'est-à-dire deux points p_1 et p_2 en lesquels $df_{p_j} = 0$, pour $j \in \{1, 2\}$. Nous avons noté ici df_y la différentielle de f au point y. Topologiquement, nous supposons qu'en chacun des points p_1 et p_2, deux branches du niveau $f^{-1}(1)$ se rejoignent, comme en figure 1.2.

En 1904, le mot *chirurgie* pour désigner une telle opération topologique n'existait pas, mais c'est bien à ce terme plus moderne des années 1960 que cette opération se réfère, voir [28] ou la section 1.4 pour une introduction historique dans laquelle le terme de *spherical modification* est employé. Soyons heureuses et heureux car une telle opération topologique a une transcription très simple pour f. Localement autour de chacun des points p_j, il y a un système de coordonnées locales centrées en p_j que nous noterons encore (y_1, y_2, y_3), peu importe autour de quel point nous nous plaçons, pour lequel :

$$f(y) = 1 + y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Encore une fois f ressemble à une forme quadratique, mais cette fois-ci, f n'est pas localement définie positive. Il y a un signe $-$, et un seul, devant y_3^2. Nous dirons que les points p_1 et p_2 sont d'indice 1. Pour un tel comportement, localement autour de chacun des points dans de telles coordonnées, considérons les chemins $\gamma : y_3 \mapsto (0, 0, y_3)$ et $\gamma' : y_3 \mapsto (0, 0, -y_3)$ pour $y_3 < 0$ petit. Pour y_3 fixé, la sous-variété constituée de l'union des points $(0, 0, y_3)$ et $(0, 0, -y_3)$ est une sphère de dimension 0, qui varie à mesure que le paramètre y_3 varie, et qui s'effondre en le point p_j en $y_3 = 0$. Nous référons à la figure 1.3 pour une illustration.

3. Il est entendu que nous ne nous formaliserons pas trop des détails techniques lors de la description de Σ, il s'agit d'un exemple introductif à une théorie dont les applications sont bien plus larges !

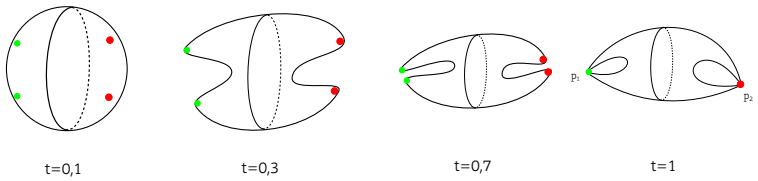

FIGURE 1.3 – Chemins γ et γ' associés à p_1 (en vert) et ceux associés à p_2 (en rouge) dans les variétés de niveaux.

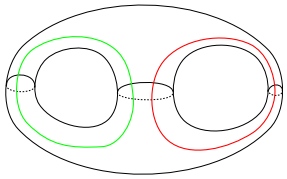

FIGURE 1.4 – La variété à bord Σ^{t+1} est le tore à deux anses plein et en rouge et vert sont représentées ses deux classes d'homologies non nulles.

Ces sphères de dimension 0 dépendent des coordonnées que nous avons choisies, mais leurs classes d'isotopie dans la variété de niveau ne dépendent elles que de f. En langage plus moderne, ce sont les *sphères d'attachement*[4] des points p_1 et p_2 et dépendent dans l'absolu d'un choix de *pseudo-gradient adapté à* f, dont nous parlerons plus tard, quand nous serons sorti-e-s de la peau de Poincaré. Passée la strate de niveau 1, nous obtenons alors une variété de niveau $f^{-1}(1+t)$ pour t petit positif qui est difféomorphe à un tore à deux trous, ou encore une surface orientable de genre 2. C'est ici que tout se joue, et que nous allons construire une variété dont l'homologie est celle de la sphère tout en gardant un peu de groupe fondamental. Notons tout d'abord la chose suivante. L'homologie à coefficients entiers de la variété à bord $\Sigma^{1+t} := f^{-1}([0, 1+t])$, qui est un tore à deux anses plein, est :

- $\mathbb{Z}$ en degré 0,
- $\mathbb{Z}^2$ en degré 1,
- 0 sinon.

La classe d'homologie non nulle en degré 0 est trivialement représentée par un point quelconque de Σ^{1+t}, qui est connexe. Chacune des classes d'homologie de degré 1 est représentée par une courbe fermée simple "créée" par un des points p_j. Ces classes sont représentées en figure 1.4.

Intéressons-nous à ce qui se passe près de p_1, l'étude près de p_2 étant identique. Notons σ_1^* la classe d'homologie non nulle de Σ^{1+t} et σ_1^+ la classe duale, c'est-à-dire la classe d'homologie non nulle en degré 1 de $f^{-1}(1+t)$ dont un représentant intersecte σ_1^* en un point, représentée en figure 1.5.

Nous avons prononcé le mot *dual* en référence à la dualité qui porte notre nom — rappelons que nous sommes Poincaré —, dans le sens suivant. La variété $f^{-1}(1+t)$ est un tore à deux trous qui est orientable. Dans une variété orientable V de dimension n, à chaque classe d'homologie non nulle μ de dimension k correspond une classe de cohomologie non nulle ν de degré $n-k$ qui compte le nombre d'intersection qu'a, par exemple, une sous-variété de dimension $n-k$ avec un représentant de la classe d'homologie μ. Nous noterons $\delta : H_k(V, \mathbb{Z}) \to H^{n-k}(V, \mathbb{Z})$ l'application ainsi décrite. Dans le cas précis qui nous occupe, $n = 2$ et $k = 1$. On a donc une

4. Ce n'est pas une terminologie due à Poincaré.

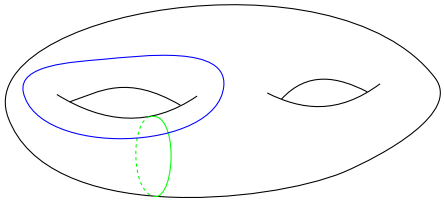

FIGURE 1.5 – La sphère σ_1^* est en bleu et σ_1^+ est en vert.

classe $\tau_1 \in H^1(\Sigma^{1+t}, \mathbb{Z})$ duale de σ_1^*. Mais nous avons mieux. En effet, parce que $H_1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z})$ n'a aucun élément de torsion, nous avons aussi [5]

$$H^1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq H_1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z}).$$

Où le symbole $\simeq$ désigne la qualité d'être isomorphe. La composition de ces isomorphismes donnent un isomorphisme $\varphi : H_1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z}) \to H_1(f^{-1}(1+t), \mathbb{Z})$ qui est une involution qui n'est pas l'identité. Via φ, la classe de σ_1^* est envoyée sur σ_1^+ et réciproquement. La classe σ_1^+ est représentée par l'intersection de $f^{-1}(1+t)$ avec l'image de $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2, 0)$ dans un voisinage autour de p_1. Cette sphère de dimension 1, nous l'appelons *sphère transverse* [6] du point p_1.

C'est en passant le niveau 2 que nous allons créer, non pas un monstre, mais une variété Σ^{2+t} dont les groupes d'homologies sont tous nuls sauf en degré 0, il suffira alors de passer un maximum au niveau 3 pour obtenir la variété Σ annoncée. Il s'agit de "tuer" les classes σ_1^* et σ_2^*. Pour cela nous allons faire en sorte qu'au niveau 2, la fonction f a deux singularités localement identiques en les points q_1 et q_2. Un modèle local est donné par l'équation :

$$f(y) = 2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Il est très utile pour se représenter les choses de voir que la fonction donnée par le modèle local autour d'un des points q_j est l'opposée de la fonction donnée par le modèle local autour d'un des points p_j. Nous pouvons alors appliquer le même formalisme et parler d'âme et de sphère d'attachement des points q_1 et q_2. Notons la chose importante suivante. Plaçons nous autour de q_1, mais tout ce qui sera dit sera valable aussi pour q_2. Dans le système de coordonnées locales, la sphère d'attachement de q_1, donnée par l'intersection de $f^{-1}(2-t)$ pour t petit et de l'image de $(y_2, y_3) \mapsto (0, y_2, y_3)$ est un cercle qui borde un disque dans Σ^{2+t}. Ce disque est explicite et est donné par l'image complète de $(y_2, y_3) \mapsto (0, y_2, y_3)$ dans Σ^{2+t}. Nous sommes alors dans la configuration suivante. Une variété de niveau entre 1 et 2, disons alors $\frac{3}{2}$, est difféomorphe à un tore à deux trous. Ce tore a une homologie en degré 1 engendrée par les classes σ_j^+, σ_j^*, pour $j \in \{1, 2\}$, et est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Dans la variété à bord $\Sigma^{\frac{3}{2}}$, seules deux de ces classes restent non nulles, qui sont σ_1^* et σ_2^*. Les sphères d'attachements de q_1 et q_2 que nous noterons s_1 et respectivement s_2 existent dans $f^{-1}(\frac{3}{2})$, et nous voulons qu'elles soient homologues à σ_1^* et respectivement σ_2^*, afin de "tuer" homologiquement ces dernières dans Σ^{2+t}. Nous pouvons algébriquement représenter les classes s_1 et s_2 dans $H_1(\Sigma^{\frac{3}{2}}, \mathbb{Z})$ par une matrice 2×2, donnée par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

5. L'équation provient du théorème des coefficients universels, qui pourra être trouvé dans [17], un ouvrage de la fin du XXème siècle.

6. Encore une fois, ce n'est pas du Poincaré dans le texte.

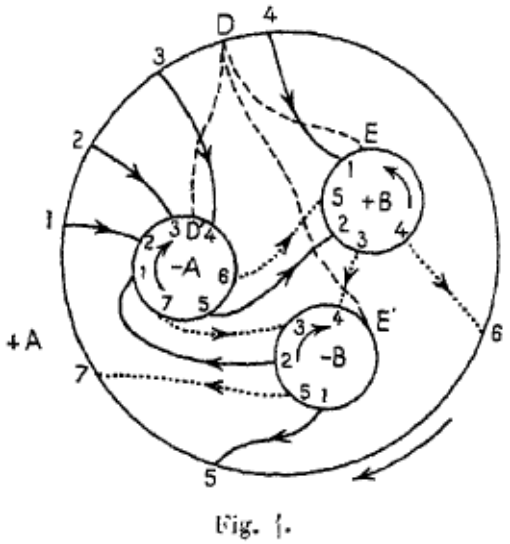

FIGURE 1.6 – Classes d'homotopie de s_1 (en trait plein) et s_2 (en pointillés). Les cercles A et $-A$ (resp. B et $-B$) sont identifiés, en respectant les orientations décrites.

où $a_{ij} = \delta(\sigma_i^*)(s_j)$, ou encore, le nombre d'intersection algébrique de s_j avec σ_i^*, en utilisant l'interprétation géométrique de la dualité-qui-porte-notre-nom. Si cette matrice est inversible, soit de déterminant ± 1, alors la variété finale n'aura pas d'homologie en degré 1. Encore une fois par dualité, elle n'aura pas non plus d'homologie en degré 2. Il s'agit ceci-dit de ne pas faire d'excès de zèle, car nous voulons tout de même que la variété finale ait un groupe fondamental non nul. En particulier, nous ne voulons pas que le sous-groupe de $\pi_1(\Sigma^{\frac{3}{2}})$ engendré par s_1 et s_2, soit en fait tout $\pi_1(\Sigma^{\frac{3}{2}})$. Nous donnons alors quelles sont les classes d'homotopie de s_1 et s_2 en les représentant figure 1.6 [7].

Dans cette figure, les cercles A et $-A$ sont identifiés avec les orientations choisies, de même que les cercles B et $-B$. Avec cette identification, nous obtenons un tore à deux trous, qui représente $\Sigma^{\frac{3}{2}}$. Le cercle s_1 est représenté en trait plein, et le cercle s_2 en pointillés. Les points numérotés sur les bords des cercles A et $-A$ qui ont le même numéro sont identifiés. Même remarque sur les bords des cercles B et $-B$.

La classe de σ_1^* est représentée par le cercle A et la classe de σ_2^* par le cercle B. En comptant les intersections, la matrice définie précédemment devient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut $-3 + 4 = 1$. Par un travail plus fastidieux, nous montrons que, en homotopie, nous avons les équations :

$$s_1 = (\sigma_1^*)^4 \sigma_2^* (\sigma_1^*)^{-1} \sigma_2^*$$

et

$$s_2 = (\sigma_2^*)^{-2} (\sigma_1^*)^{-1} \sigma_2^* (\sigma_1^*)^{-1}.$$

7. [37, p. 494].



FIGURE 1.7 – Lucy Boole (Olga Paris-Romaskevich, à gauche) tient en ses mains un dodécaèdre. Alicia Boole (Marie Lhuissier) tient quant à elle un icosaèdre, dual du dodécaèdre. Photographie de Bertrand Paris-Romaskevich prise à l'occasion de la représentation *Lettres de la Quatrième Dimension*, fête de la Science 2016, théâtre Kantor, ENS de Lyon.

En utilisant par exemple un théorème de Van Kampen, [19] [8], nous avons que le groupe fondamental de Σ est isomorphe au groupe de présentation $G := \{a, b | a^4 b a^{-1} b,\ b^{-2} a^{-1} b a^{-1}\}$. Si ce groupe est trivial, tout quotient de celui-ci serait aussi trivial. En ajoutant une nouvelle relation entre a et b, nous obtenons un quotient de G. Ajoutons alors la relation $(ab^{-1})^2 = 1$. Nous obtenons le groupe $H := \{a, b | a^5,\ b^3,\ (ab^{-1})^2\}$. Ce groupe n'est pas trivial, c'est le groupe des rotations de l'icosaèdre, dont une image est présentée figure 1.7.

1.2 Retour dans le présent

Dans la section précédente, Poincaré introduit une variété Σ en décrivant les modifications topologiques des sous-variétés de niveaux d'une fonction f définie sur Σ. Nous voyons ainsi qu'il y a un lien fort entre la topologie d'une variété, et l'ensemble des fonctions que l'on peut définir sur cette variété. Par ailleurs, l'exemple de Poincaré exhibe une fonction dont les comportements locaux autour des singularités sont donnés par des modèles — des comportements quadratiques dans des coordonnées adaptées. Plus généralement, si V est une variété, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions lisses définies sur Σ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, permet de décrire, voire calculer, la topologie de V. Qui plus est, sous quelques petites hypothèses sur f, les changements de topologie des variétés de niveaux de f sont entièrement décrits par des modèles quadratiques locaux. C'est tout le but de la théorie de Morse. Il est temps de définir ce qu'est une fonction de Morse. Dans tout ce qui suit, V désignera une variété fermée de dimension finie. Nous rappelons cependant que la théorie de Morse a aussi été utilisée pour l'étude de fonctions $f : V \to \mathbb{R}$ où V est de dimension infinie, typiquement un espace de courbes (lisses par morceaux). C'est d'ailleurs une des utilisations importantes faites par Marston Morse, qu'on peut retrouver dans le livre de Milnor [29].

Définition 1.2.1. Soit f une fonction lisse sur V. La fonction f est dite *de Morse* si pour tout point critique p de f, pour tout système de coordonnées locales centrées en p, la hessienne $(\partial_i \partial_j f(p))_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ est une matrice inversible.

8. Ultérieur à la date de publication de [37], et d'ailleurs ultérieur à l'existence de Poincaré tout court.

Si f est une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ et p est un point critique de f, nous dirons que p est *non dégénéré* quand sa hessienne est inversible dans un système de coordonnées locales. Une fonction est donc de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés. L'ensemble des points critiques d'une fonction f sera noté $\mathcal{C}(f)$. Nous avons existence d'un modèle local autour d'un point critique non dégénéré d'une fonction. Reprenant Poincaré [37, Complément V] :

Tout dépendra du nombre des dimensions et du nombre des carrés positifs et négatifs dans la décomposition de la forme f en une somme de carrés.

Lemme 1.2.2 (Lemme de Morse)**.** *Si p est un point critique non dégénéré d'une fonction f, alors il existe un système de coordonnées locales $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ centrées autour de p telles que dans ces coordonnées :*

$$f(y) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2.$$

La présence d'un modèle local est extrêmement importante car elle nous permet une description fine de ce qui se passe autour de la singularité.

Définition 1.2.3. Avec les notations précédentes, l'entier k est *l'indice* du point critique p.

Une démonstration du lemme peut être trouvée dans n'importe quel ouvrage traitant de théorie de Morse. Nous référons à [29, Lemma 2.2] pour en trouver une.

Nous avons :

Proposition 1.2.4 (Densité des fonctions de Morse)**.** *L'ensemble des fonctions de Morse définies sur une variété V est un ouvert dense pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$.*

Une conséquence non négligeable de cette proposition est que l'espace des fonction de Morse définies sur V est non vide. Si on avait en face de nous une variété V et une fonction de Morse $f : V \to \mathbb{R}$ dont nous connaitrions tout, nous pourrions procéder comme Poincaré pour sa sphère d'homologie, en décrivant niveau par niveau V. Les changements de topologie s'effectuent quand on passe un point critique, mais le modèle quadratique permet d'avoir une description précise de ces modifications.

Exemple 1.2.5 (Hauteur sur la sphère en dimension 2)**.** Nous rajoutons un exemple autre que celui de Poincaré. Nous allons considérer deux fonctions de Morse sur la sphère de dimension 2, variété pour laquelle on peut "voir" ce qui se passe. La première fonction $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction hauteur. Voyant $\mathbb{S}^2$ comme l'ensemble des points (y_1, y_2, y_3) de norme euclidienne 1, la fonction hauteur est donnée par $pr_3 : (y_1, y_2, y_3) \mapsto y_3$. La différentielle générale de pr_3 est donnée par $dpr_3(y)(v) = v_3$. Son gradient est donné par le champ constant $\mathrm{grad}(pr_3)(y) = (0, 0, 1)$. Un point y est donc un point critique quand son plan tangent est orthogonal à $\mathrm{grad}(pr_3)(y)$, mais comme l'orthogonal de $T_y\mathbb{S}^2$ est justement donné par la droite engendrée par y, un point y est critique quand il est colinéaire à $(0, 0, 1)$. Seuls les pôles $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ sont critiques. Le premier est un maximum et le deuxième est un minimum. Autour de $(0, 0, 1)$, dans les coordonnées

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2, \sqrt{1 - (y_1^2 + y_2^2)}),$$

la fonction est

$$(y_1, y_2) \mapsto \sqrt{1 - (y_1^2 + y_2^2)}.$$

Comme les coordonnées (y_1, y_2) sont centrées autour de $(0, 0)$, on peut voir directement que le développement limité de la fonction dans ces coordonnées a son premier terme quadratique et

que le point $(0,0,1)$ est un point critique non dégénéré. On peut aussi trouver des coordonnées explicites (z_1, z_2) données en fonction de (y_1, y_2) en posant $(y_1, y_2) = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $(z_1, z_2) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta))$ (c'est bien le même θ). On résout ensuite $\sqrt{1-r^2} = 1-\rho^2$. Cette équation est équivalente à $1 - z_1^2 - z_2^2 = pr_3(z)$. On obtient alors

$$\rho = \sqrt{1-\sqrt{1-r^2}}$$

et le changement de coordonnées locales

$$(z_1, z_2) = \sqrt{1-\sqrt{1-(y_1^2+y_2^2)}}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right)$$

en est bien un (c'est-à-dire, est inversible en 0).

Il suffit de voir que l'on a une symétrie de plan $y_3 = 0$ pour montrer que $(0,0,-1)$ est bien un minimum non dégénéré.

Exemple 1.2.6 (Deuxième exemple sur la sphère en dimension 2)**.** Le deuxième exemple montre la complexité qu'une fonction de Morse peut présenter et sera défini aussi sur la sphère $\mathbb{S}^2$. Ainsi on peut avoir deux fonction tout à fait différentes, l'une plus complexe que l'autre, sur le même objet, et il faut alors savoir que ces deux fonctions doivent donner les mêmes informations topologiques, ce qui sera au cœur de toutes les études ultérieures d'extensions de fonctions sans points critiques.

En première approximation, la plupart des êtres vivants sont descriptibles par des sphères $\mathbb{S}^2$. Nous en choisissons un, au hasard, dont nous présentons une vue d'artiste figure 1.8.

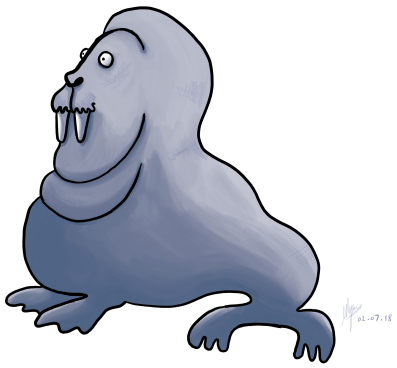

FIGURE 1.8 – Un morse, dessin d'Ulysse Pedreira-Segade.

Une représentation plus manipulable et plus mathématique est celle représentée en figure 1.9. Nous considérons ainsi encore une fois la fonction hauteur, mais cette fois définie sur le plongement décrit en figure 1.9, comme fonction de Morse sur le morse.

Nous allons faire, à la Poincaré, une description visuelle de cette fonction de Morse. Nous observons un seul maximum, 4 minimums, et 3 points selles :

- après le premier minimum, la variété de niveau est un cercle ;
- après le deuxième minimum, un deuxième cercle s'ajoute, et la variété de niveau est une union de deux cercles ;

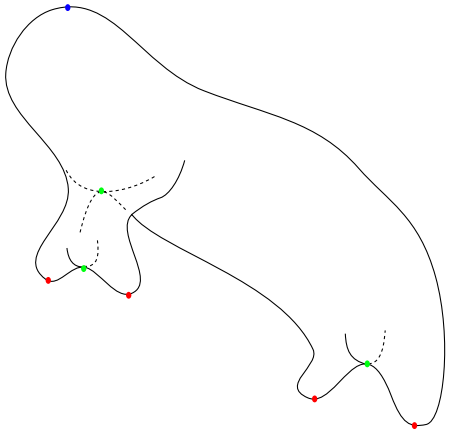

FIGURE 1.9 – La fonction hauteur sur ce plongement de la sphère représente une fonction de Morse sur un morse. Sont représentés en rouge les minimums, en vert les points selles et en bleu le maximum.

- le premier point selle va joindre ces deux cercles, et la variété de niveau au-dessus de ce point se réduit à un seul cercle ;
- on passe alors deux nouveaux minimums locaux et la variété de niveau au-dessus de ces deux minimums est l'union disjointe de trois cercles qui se réduisent à deux après le passage d'un point selle ;
- le passage du dernier point selle ne réduit plus qu'à un cercle la variété de niveau ;
- ce cercle s'éteint au passage du maximum global.

Nous pouvons peut-être penser qu'il paraît compliqué de savoir que la variété globale est une sphère en inspectant seulement les variétés de niveau. C'est cela le but de l'homologie de Morse, relier les données des variétés de niveau et leurs évolutions à la variété globale. Nous retrouverons cet exemple un peu plus loin pour un exemple de fonction de Morse non triviale pour laquelle il est aisé de trouver un pseudo-gradient adapté.

Implicitement, Poincaré utilise un objet en plus de la fonction de Morse définie sur Σ. Un objet qui permet de définir les cercles décrits sur la figure 1.6. Cet objet est un champ de vecteur particulier, que l'on nomme pseudo-gradient.

1.3 Pseudo-gradients

Nous considérons dans cette section une variété fermée V. Les objets que nous allons définir n'exigent pas d'avoir une variété qui soit fermée, mais nous n'allons les utiliser que dans ce cadre. Dans l'exemple de Poincaré, ce qui fait le lien entre le monde de la topologie différentielle — ou plus précisément, la fonction de Morse — et celui de la topologie algébrique est la donnée d'un pseudo-gradient *adapté* à notre fonction. Étant donnée une fonction de Morse $f : V \to \mathbb{R}$, un pseudo-gradient adapté à f est un champ de vecteurs sur V avec des propriétés telles que son flot va permettre une partition en cellule de la variété V et ainsi passer dans le monde de l'homologie. Ne perdons plus une seconde et donnons une définition précise :

Définition 1.3.1. Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse, un champ de vecteurs X *pseudo-gradient et adapté* à f est un champ de vecteurs sur V tel que :

– pour tout point $x \notin \mathcal{C}(f)$, alors $df_x(X_x) < 0$,
– Si $p \in \mathcal{C}_k(f)$, alors il existe des coordonnées de Morse $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ centrées en p pour lesquelles $f(y) = f(p) - y_1^2 - ... - y_k^2 + y_{k+1}^2 + ... + y_n^2$ et telles que

$$X(y) = (2y_1, ..., 2y_k, -2y_{k+1}, ..., -2y_n).$$

Un pseudo-gradient adapté à f joue donc le rôle d'un gradient pour f, et est même le gradient euclidien de la forme quadratique associée à des coordonnées de Morse autour d'un point critique p. Nous pouvons nous demander si X est effectivement un gradient pour le choix d'une métrique riemannienne définie sur V. La réponse est oui, que nous donnons dans la propriété suivante à titre indicatif.

Proposition 1.3.2. *Si X est un champ pseudo-gradient adapté à une fonction de Morse $f : V \to \mathbb{R}$, alors il existe une métrique riemannienne g sur V telle que $X = \mathrm{grad}_g(f)$. De plus, pour tout $p \in \mathcal{C}(f)$, la métrique g est une métrique euclidienne dans des coordonnées de Morse locales autour de p. Nous disons que g est adaptée à f.*

Nous avons en fait une équivalence :

il existe une métrique adaptée à $f \Leftrightarrow$ il existe un pseudo-gradient adapté à f.

L'utilité du pseudo-gradient provient de son flot. Si on considère un point $x \in V$ qui n'est pas critique, il va descendre sous l'action du flot ϕ^t de X (comprendre que le réel $f(\phi^t(x))$ est strictement décroissant) et tendre vers un point critique. De même, $\phi^t(x)$ va tendre vers un autre point critique quand t tend vers $-\infty$. On va donc pouvoir partitionner V en définissant des cellules, les points d'une même cellule tendant tous vers le même point critique sous l'action du flot à mesure que l'on fait tendre t vers $+\infty$. Une autre partition peut être donnée en rassemblant tous les points qui tendent vers un même point critique sous l'action du flot quand t tend vers $-\infty$.

Rappelons que V est compacte. En particulier, le flot ϕ^t engendré par un champ de vecteurs X pseudo-gradient adapté à une fonction f est complet, c'est-à-dire défini pour tous les temps $t \in \mathbb{R}$. Définissons d'abord les *variétés stables et instables* d'un point critique p de f, qui vont donner les partitions cellulaires décrites ci-avant. La variété stable de p est l'ensemble :

$$W^s(p, f, X) := \{y \in V \text{ tels que } \lim_{t\to+\infty} \phi^t(y) = p\},$$

et la variété instable [9] est :

$$W^u(p, f, X) := \{y \in V \text{ tels que } \lim_{t\to-\infty} \phi^t(y) = p\}.$$

Quand il n'y aura pas de confusion possible sur f et X, nous noterons simplement les variétés stables et instables d'un point p par $W^s(p)$ et $W^u(p)$.

Proposition 1.3.3. *Si p est d'indice k, l'ensemble $W^u(p)$ est une sous-variété de V, ouverte, et difféomorphe à $\mathbb{D}^k$. De même, $W^s(p)$ est une sous-variété de V, ouverte, et difféomorphe à $\mathbb{D}^{n-k}$, où n est la dimension de V.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de le démontrer dans le cas d'un champ de vecteur du type $X(y) = (2y_1, ..., 2y_k, -2y_{k+1}, ..., -2y_n)$, pour lequel la proposition n'est pas loin d'être évidente.

Une remarque importante est la suivante : quel que soit y dans V, il existe un point critique p et un point critique q tels que $y \in W^u(p) \cap W^s(q)$. Un corollaire immédiat de la dernière phrase, issu de [45], est le suivant.

9. Le u en exposant de $W^u(p, f, X)$ vient de *unstable*, la terminologie anglaise étant prépondérante.

Proposition 1.3.4. *Un champ de vecteurs pseudo-gradient X donne une partition de V en cellules. Nous avons*

$$V = \bigcup_{0\leq k\leq n} \left(\cup_{p\in\mathcal{C}_k(f)} W^u(p)\right).$$

Donné un couple (f, X) où f est une fonction de Morse sur V et X est un pseudo-gradient adapté à f, nous avons donc une structure de CW-complexe. Nous utiliserons les définitions suivantes.

Définition 1.3.5. Si p est un point critique de f d'indice k et valeur critique α, l'intersection $W^u(p) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ est difféomorphe à une sphère de dimension $k-1$, que nous appelons *sphère d'attachement de p*. Nous la noterons σ_p quand il n'y a pas de confusion sur X, pour ε assez petit. L'intersection $W^s(p) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ est difféomorphe à une sphère de dimension $n-k-1$, que nous appelons *sphère transverse de p*. Nous la noterons σ_p^*.

Nous finirons cette sous-section par le résultat important :

Théorème 1.3.6. *Soit V une variété compacte et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse. L'ensemble des pseudo-gradients adaptés à f est non vide et connexe.*

Idée de démonstration. Le fait que ce soit non vide utilise une partition de l'unité. La démonstration de la connexité dérive de [5, p.168], qui énonce que les cartes de Morse autour d'un point critique d'indice k est homotopiquement équivalent à $O(k, n-k)$. On considère un pseudo-gradient adapté autour d'un point critique et une carte de Morse associée (c'est-à-dire une carte pour laquelle le pseudo-gradient est le gradient pour la métrique euclidienne localement dans la carte). Changer les orientations des variétés stables et instables autour d'un point critique conserve le fait que le pseudo-gradient reste compatible avec la nouvelle carte de Morse. Donnés deux pseudo-gradients X_1 et X_2 adaptés à une fonction de Morse f autour d'un point critique, on peut donc supposer que les cartes de Morse associées sont dans la même composante connexe, par exemple celle de $SO(k) \times SO(n-k)$. On a donc un chemin entre les coordonnées associées à X_1 et celles associées à X_2. On peut alors considérer le chemin de champs de vecteurs qui sont les gradients pour les métriques euclidiennes pour les cartes de Morse pendant le chemin. On obtient un chemin de pseudo-gradients adaptés à f localement autour d'un point critique qui joint X_1 et X_2. On peut trouver des chemins de pseudo-gradients autour de chaque point critique, et utiliser finalement une partition de l'unité pour avoir un chemin sur la variété. □

Ce théorème sera très important car nous aurons besoin de relier deux pseudo-gradients adaptés à une fonction f par un chemin de pseudo-gradients adaptés à une fonction f. Les pseudo-gradients, comme nous l'avons déjà dit, font le pont entre la topologie différentielle et la topologie algébrique. Ce pont est décrit plus en détail dans la section 1.4 ci-après et dans la section 1.5 un peu plus loin.

1.4 Un peu de chirurgie

La théorie de la chirurgie commence avec l'article de Milnor [10] [28], et révèle toute sa puissance dans le célèbre article [13] sur les structures différentiables des sphères en grande dimension. La référence principale que nous utilisons est [39]. Nous n'irons pas très loin dans la théorie de la chirurgie. Nous expliciterons seulement l'équivalence entre "*passer un point critique*" et "*réaliser une chirurgie*" et l'effet sur les groupes d'homotopie des niveaux d'une chirurgie.

10. John W. Milnor né en 1931 est un mathématicien, toujours actif en 2018, dont le travail en topologie est monumental. Nous le rencontrerons souvent.

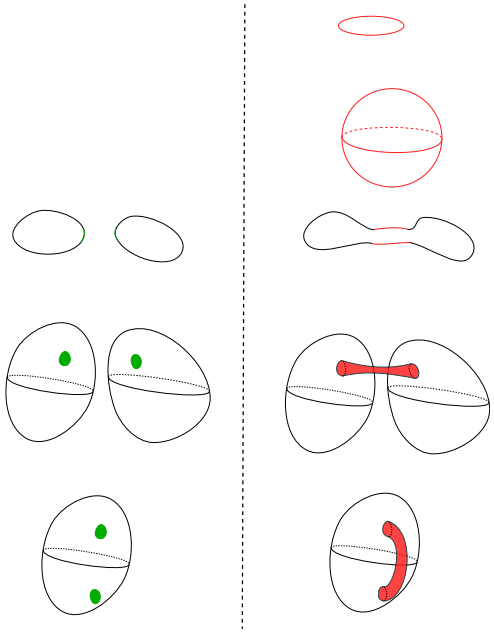

FIGURE 1.10 – À gauche, des variétés de dimension n avant une opération de k-chirurgie. De haut en bas, n vaut 1, puis 2, puis 1, puis 2 et encore 2. L'entier k vaut, de haut en bas, -1, puis -1, puis 0, 0 et encore 0. De la même manière, en passant de droite à gauche, on réalise une $(n-k)$-chirurgie sur une variété de dimension n.

Définition 1.4.1 (k-chirurgie)**.** Soit V une variété de dimension n. Soit $\sigma : \mathbb{S}^k \to V$ le plongement d'une k-sphère. Pour une métrique riemannienne sur V, on suppose que le fibré normal de σ dans V est trivial. On se donne alors un plongement $\nu : \mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \to V$, représentant une trivialisation du fibré normal de σ. Le résultat d'une *k-chirurgie* sur σ est une variété V' telle que V' est difféomorphe à

$$\left(V \setminus \nu(\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k})\right) \cup_\Phi \left(\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}\right),$$

où Φ est un difféomorphisme entre le bord de $V \setminus \nu(\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k})$ et $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$.

On donne plusieurs exemples de chirurgie en figure 1.10.

En collant un disque $\mathbb{D}^{k+1}$ sur l'image de σ, on "tue" la classe d'homotopie de σ et on peut espérer obtenir une variété V' dont les groupes d'homotopie sont plus simples que ceux de V. C'est l'idée principale de l'article [13]. Voici le théorème qui précise cette idée, issu de [39, Proposition 4.19] :

Théorème 1.4.2. *Reprenant les notations précédentes, si $k \leq \frac{n-1}{2}$ et $\sigma \neq 0$ dans $\pi_k(V)$, on a :*

$$\pi_j(V') = \pi_j(V) \quad \textit{si } j < k,$$

$$\pi_k(V') = \pi_k(V)/\langle\sigma\rangle,$$

où $\langle\sigma\rangle$ est le sous-groupe normal de $\pi_k(V)$ engendré par σ. Ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}\sigma$ quand $k \geq 2$, puisque les groupes d'homotopie sont abéliens.

Nous n'aurons pas besoin de beaucoup plus que ça. Deux hypothèses sont très importantes pour pratiquer une chirurgie dans l'intention d'amputer de V une classe d'homotopie $s \in \pi_k(V)$:

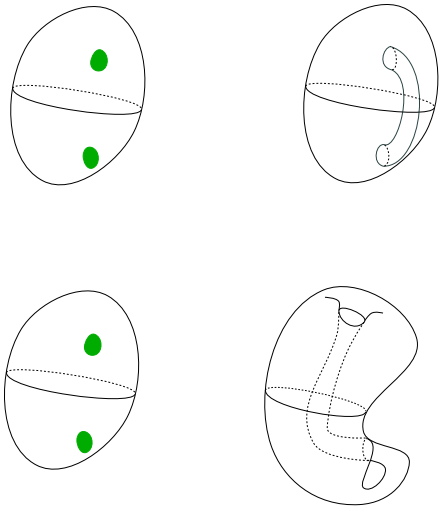

FIGURE 1.11 – La classe s ne détermine pas entièrement la chirurgie : il faut aussi connaître la trivialisation du fibré normal d'un représentant de s.

1. il faut que s puisse être représentée par une sphère qui est *plongée*,
2. il faut que le fibré normal de la sphère plongée qui représente s soit trivialisable.

Supposant ces hypothèses, il faut aussi remarquer qu'on peut opérer des chirurgies différentes sur la même classe s. En d'autres termes, après chirurgie sur σ, la variété produite V' n'est pas unique, et dépend en fait de Φ (ou de la trivialisation du fibré normal de σ) et du choix du plongement σ qui représente s (en fait, quand la dimension de s n'est pas petite devant la dimension de n, car selon un théorème de Whitney, tous les plongements représentant s sont isotopes entre eux quand $2k+2 \leq n$). On montre en figure 1.11 deux 0-chirurgies sur la même variété, une sphère de dimension 2, et sur la même classe s, la classe d'homotopie triviale, mais qui donnent deux variétés différentes : le tore et la bouteille de Klein.

Nous avons le fait suivant :

Fait 1.4.3. *Si $\sigma : \mathbb{S}^k \to V$ borde un disque, alors on peut opérer une chirurgie sur σ telle que la variété V' ainsi produite soit difféomorphe à*

$$V \sharp \left(\mathbb{S}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \right).$$

Ce fait sera utilisé pour la démonstration du théorème 2.5.8.

Nous terminons cette petite section en établissant le lien qu'il y a entre théorie de la chirurgie et théorie de Morse :

Proposition 1.4.4. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse, n la dimension de V. Si p est un point critique d'indice k de valeur critique c, alors $f^{-1}(c+\varepsilon)$ est obtenu de $f^{-1}(c-\varepsilon)$ par une $(k-1)$-chirurgie opérée sur la sphère d'attachement de p.*

On aura besoin plus loin d'utiliser la somme connexe de deux variétés orientées, définie dans [13], dont nous rappelons la définition ici.

Définition 1.4.5 (Somme connexe)**.** Soient V et W deux variétés lisses connexes et orientées de dimension finie n. Soient $\varphi_1 : \mathbb{D}^n \to V$ et $\varphi_2 : \mathbb{D}^n \to W$ deux plongements du disque

dans V et W respectivement tels que φ_1 respecte l'orientation et φ_2 la renverse. On considère l'espace topologique obtenu de $(V \setminus \{\varphi_1(0)\}) \cup (W \setminus \{\varphi_2(0)\})$ en identifiant tout point $\varphi_1(tu)$ à $\varphi_2((1-t)u)$, où $t \in (0,1)$ et $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. L'espace topologique $V \sharp W$ est une variété lisse dont la structure différentielle ne dépend ni de φ_1, ni de φ_2. C'est la *somme connexe* de V et W.

La bonne définition de $V \sharp W$ en tant que variété lisse vient du lemme de Palais [33], que nous rappelons ici :

Lemme 1.4.6 (Palais)**.** *Soient $\varphi_1 : \mathbb{D}^n \to V$ et $\varphi_2 : \mathbb{D}^n \to V$ deux plongements équi-orientés. Alors il y a une isotopie $H : V \times I \to V$ qui est l'identité hors d'un compact de V telle que $H(\cdot, 1) \circ \varphi_1 = \varphi_2$.*

Ce lemme montre que la définition de la somme connexe ne dépend pas des choix de plongements φ_1 et φ_2.

On peut aussi définir une notion de somme connexe pour deux sous-variétés V et W dans la même variété Z, c'est le but de la définition suivante :

Définition 1.4.7 (Somme connexe le long d'un chemin)**.** Soit Z une variété de dimension finie n. Soient V et W deux sous-variétés disjointes de Z de même dimension k, possiblement ouvertes, et orientées toutes les deux. Soient x un point de V et y un point de W. Soit $\gamma : [0,1] \to Z$ un chemin lisse paramétré qui joint x à y, c'est-à-dire tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $\mathcal{T} : [0,1] \times \mathbb{D}^k \to Z$ un plongement tel que :

- $\mathcal{T}(s, 0) = \gamma(s)$;
- $\mathcal{T}(\{0\} \times \mathring{\mathbb{D}}^k)$ est un voisinage de x dans V avec la même orientation que celle induite de V ;
- $\mathcal{T}(\{1\} \times \mathring{\mathbb{D}}^k)$ est un voisinage de y dans W avec la même orientation que celle induite de W ;
- $\mathcal{T}\left((0,1) \times \mathbb{D}^k\right)$ est disjoint de V et de W.

L'ensemble

$$\left(V \setminus \mathcal{T}\left(\{0\} \times \mathring{\mathbb{D}}^k\right)\right) \cup \mathcal{T}\left((0,1) \times \mathbb{S}^{k-1}\right) \cup \left(W \setminus \mathcal{T}\left(\{1\} \times \mathring{\mathbb{D}}^k\right)\right)$$

est une sous-variété topologique orientée de Z, où $\mathring{\mathbb{D}}^k$ est la boule ouverte de dimension k. Quitte à la modifier par une isotopie topologique ambiante dans Z, on peut la réaliser comme sous-variété lisse de Z qu'on note $V \sharp_\gamma W$ et qu'on appelle *somme connexe de V et W le long de γ*.

La définition précédente ne sera utilisée que dans la définition 1.8.1.

Nous donnons par souci de complétude :

Proposition 1.4.8. *Il y a un cobordisme $(Y, V \cup W, V \sharp W)$ et une fonction de Morse $f : Y \to \mathbb{R}$ telle que f n'a qu'un seul point critique, d'indice 1. En d'autres termes, $V \sharp W$ peut-être obtenu de l'union disjointe $V \cup W$ par une 0-chirurgie.*

La démonstration peut être trouvée dans [39, Chap. 4] par exemple.

Pour terminer, on donne en figure 1.12 une illustration de la procédure de la somme connexe.

1.5 Homologie de Morse

Nous introduisons dans cette section l'homologie de Morse. L'opérateur de bord associé au complexe de Morse sera l'objet central de ce manuscrit. Cette section est donc vouée à

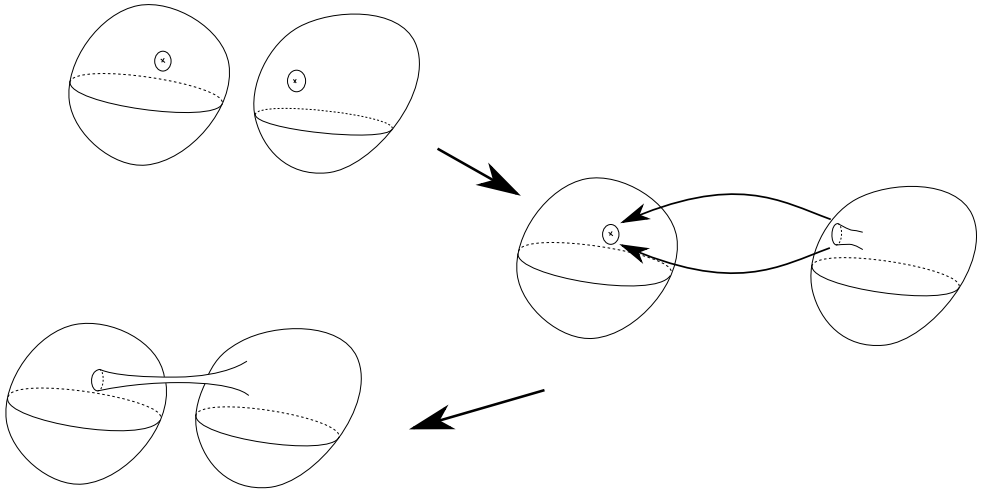

FIGURE 1.12 – Procédure de la somme connexe de deux variétés, ici deux sphères de dimension 2.

l'introduire, et dans la section 1.8, nous verrons comme il peut être modifié. Comme beaucoup de théories d'homologie à saveur géométrique, elle est liée à l'intersection, ici intersection de variétés stables avec d'autres variétés instables. Considérons une fonction de Morse $f : V \to \mathbb{R}$ où V est supposée fermée de dimension n. On considère un champ de vecteurs pseudo-gradient X adapté à f, et on le suppose *Morse-Smale* avec la définition ci-dessous.

Définition 1.5.1. X est *Morse-Smale* si pour tout p dans $\mathcal{C}_k(f)$ et q dans $\mathcal{C}_j(f)$ où j et k sont deux entiers entre 0 et n, alors $W^s(p)$ et $W^u(q)$ s'intersectent transversalement.

On a la proposition :

Proposition 1.5.2. *Pour tout pseudo-gradient X adapté à f, il existe un pseudo-gradient X' adapté à f et Morse-Smale aussi proche que voulu de X.*

Comme $W^s(p)$ est un disque ouvert de dimension $n-k$ et $W^u(q)$ est un disque ouvert de dimension j, on a, si leur intersection est non vide :

$$\dim(W^s(p) \cap W^u(q)) = n - k + j - n = j - k.$$

En particulier, si $j < k$, $W^s(p)$ et $W^u(q)$ ne s'intersectent pas. Si $j = k$, alors l'intersection est de dimension 0. Mais comme $W^s(p)$ et $W^u(q)$ sont tous les deux invariants par le flot engendré par X, tout point dans $W^s(p) \cap W^u(q)$ est donc fixé par le flot de X (sinon, il donnerait une ligne de gradient, qui est de dimension 1 !). C'est une autre façon de dire que $W^s(p) \cap W^u(q)$ est un ensemble de zéros de X, ou encore que ce sont des points critiques de f, par définition de X. Mais alors, on a nécessairement $p = q$.

La différence d'indice $j - k$ qui nous intéresse plus particulièrement est $j - k = 1$. Dans ce cas, $W^s(p) \cap W^u(q)$ est une union de lignes de gradient. Cette union est finie. Ce dernier fait est loin d'être évident, et provient du fait que l'espace des lignes de gradient joignant deux points critiques donnés a des propriétés agréables. Nous référons au cours [21, Sec. 6.5] pour plus de détails. On va donner un signe à chacune de ces lignes de gradients, à partir de choix d'orientations des variétés instables des points critiques de f. Soit donc p un point critique d'indice k et q d'indice $k+1$.

Choisissons, pour tout point critique c, une orientation à $W^u(c)$. Comme $T_cM = T_cW^s(c) \oplus T_cW^u(c)$, on a que $T_cW^s(c)$ est co-orienté, c'est-à-dire que l'on a une orientation au quotient $T_cV/T_cW^s(c)$, isomorphe à $T_cW^u(c)$. Cette co-orientation s'étend à tout point x de $W^s(c)$, puisque $W^s(c)$ est contractile. Soit alors z un point dans $W^s(p) \cap W^u(q)$. Le point z appartient aussi à une ligne de gradient γ qui provient de p pour s'éteindre en q. Cette ligne de gradient est naturellement orientée par le flot. Nous avons donc une décomposition :

$$T_zM = T_z\gamma \oplus E_1 \oplus E_2,$$

avec

$$T_zW^s(p) = T_z\gamma \oplus E_1,$$
$$T_zW^u(q) = T_z\gamma \oplus E_2.$$

Comme $T_zW^u(q)$ et $T_z\gamma$ ont chacun une orientation, E_2 hérite d'une orientation or_1, telle qu'une base orientée de $T_z\gamma$ devant une base orientée qui donne or_1 donne l'orientation choisie de $T_zW^u(q)$. La somme $T_z\gamma \oplus E_1$ est co-orientée, et donc E_2 hérite d'une deuxième orientation or_2. Si $or_1 = or_2$, alors nous donnons à γ le nombre $+1$ et sinon, nous lui donnons le nombre -1. Nous notons alors par $n(q,p)$ la somme de ces nombres sur toutes les lignes de gradients γ joignant p à q. On remarque que $n(q,p)$ est nécessairement 0 si p est au-dessus de q. le nombre $n(q,p)$ dépend de X et des orientations choisies pour $W^u(q)$ et $W^u(p)$. L'opérateur de bord est alors défini comme étant :

$$\begin{array}{rcccc} \partial(X) & : & \mathbb{Z}\mathcal{C}_{k+1}(f) & \to & \mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f) \\ & & q & \mapsto & \sum\limits_{p\in\mathcal{C}_k(f)} n(q,p)p \end{array}.$$

L'opérateur $\partial(X)$ dépend évidemment de X, et cette dépendance sera explicitée un peu plus loin dans la section 1.8. Nous avons le théorème suivant, qui fait explicitement le lien entre une fonction de Morse et un pseudo-gradient Morse-Smale adapté et la topologie algébrique :

Théorème 1.5.3. $\partial(X) \circ \partial(X) = 0$.

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat fondamental, qu'on peut trouver dans les cours [22], [21] et [15]. De plus, nous avons :

Théorème 1.5.4. *Quel que soit le pseudo-gradient Morse-Smale X, l'homologie $H_*((\partial(X), f), \mathbb{Z})$ ne dépend ni de X ni de f, et est isomorphe à l'homologie singulière $H_*(V, \mathbb{Z})$.*

Il est temps d'aborder un exemple, celui de la fonction de Morse sur un morse.

Exemple 1.5.5 (Homologie de Morse d'un morse)**.** On note f la fonction hauteur définie sur le plongement de la sphère de la figure 1.9, issu de la figure 1.8. On note max_1 le point où f atteint son maximum. Les points selles sont notés s_1, s_2 et s_3, l'ordre des points étant l'ordre décroissant des valeurs critiques, $f(s_1) > f(s_2) > f(s_3)$. Les points où f atteint un minimum local sont notés min_1, min_2, min_3 et min_4 et l'ordre est aussi l'ordre décroissant des valeurs critiques.

Le pseudo-gradient est la composante tangentielle à la sphère du vrai gradient pour la métrique euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. Ce qui est pratique avec la dimension 2, c'est que les variétés stables ou instables des points d'indice 1 sont des droites (orientées). Il y a donc au plus deux lignes de gradient qui joignent des points critiques q et p. Mais s'il y en avait deux, l'une d'elle serait

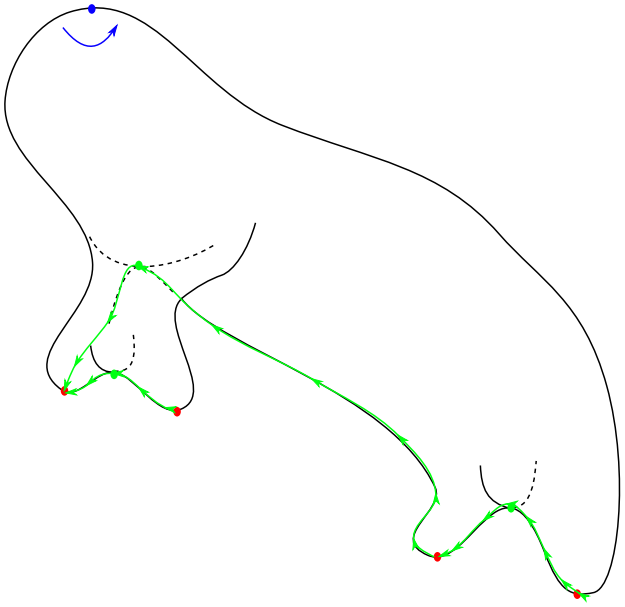

FIGURE 1.13 – Orientations des variétés instables des points d'indices 2 et 1. Les variétés instables des points d'indice 1 sont représentées dans leurs entièretés. Les variétés instables des points d'indice 0 ont l'orientation "+1". On rappelle que les lignes de gradients, elles, sont toujours orientées vers le bas.

comptée avec une certaine orientation, donnant par exemple l'entier $+1$ dans la somme définissant $n(q,p)$, et la deuxième ligne de gradient, venant avec l'orientation opposée, viendrait avec le signe -1. On obtiendrait finalement $n(q,p) = 0$. En toute généralité, en dimension 2, le nombre $n(q,p)$ défini ci-dessus entre deux points critiques p et q est donc dans l'ensemble $\{-1,0,1\}$. On choisit l'orientation de la variété instable des points critiques comme décrit sur la figure 1.13 par les flèches. Pour chaque minimum, on choisit que l'orientation de la variété instable, qui est un point, est $+1$. Comme il n'y a qu'un seul maximum, toutes les branches des variétés stables des points selles ne peuvent remonter que vers max_1. Il y a donc deux lignes de gradient qui joignent max_1 à s_j pour $j \in \{1,2,3\}$, avec deux orientations différentes. On a donc nécessairement $n(max_1, s_j) = +1 + (-1) = 0$ pour $j \in \{1,2,3\}$, le $+1$ provenant d'une des branches de la variété stable de s_j et le -1 provenant de l'autre branche.

Avec notre définition de pseudo-gradient, nous avons que les lignes de gradients sont naturellement orientées par le flot, et l'orientation est "vers le bas".

Comptons maintenant le nombre $n(s_1, min_1)$. Ici, pour $z \in W^u(min_1) \cap W^s(s_1)$, on a que l'espace E_2 de la décomposition $T_zM = T_z\gamma \oplus E_1 \oplus E_2$ est un espace de dimension 0, un point. L'orientation qu'on peut donner à ce point est un nombre $+1$ ou -1. On rappelle que toute ligne de gradient γ est quant à elle orientée vers le bas. La variété instable $T_zW^u(s_1)$ est aussi orientée vers le bas. On note *bas* cette orientation. On a une somme directe d'espaces vectoriels orientés : $(T_zW^u(s_1), bas) \simeq (T_z\gamma, bas) \oplus (E_2, or_1(E_2))$. Comme $T_zW^u(s_1)$ et $T_z\gamma$ sont isomorphes et ont la même orientation, on a $or_1(E_2) = +1$. Pour calculer la deuxième orientation $or_2(E_2)$ de E_2, il faut utiliser la co-orientation de $T_zW^s(min_1)$. Ici, on obtient aussi que $or_2(E_2) = +1$, c'est simplement l'orientation qui est $+1$ de la variété instable de min_1, qui est aussi de dimension 0. Ainsi, $n(s_1, min_1) = +1$. De manière générale, $n(s_j, min_k) = +1$ s'il y a une unique ligne de gradient qui joint s_j et m_k telle que l'orientation de cette ligne de gradient provenant de

l'orientation de $W^u(s_j)$ pointe vers le bas. Si elle pointe vers le haut, on a $n(s_j, min_k) = -1$. S'il y a 0 ou 2 lignes de gradients qui joignent s_j et min_k, alors $n(s_j, min_k) = 0$.

Et avec le même genre de calcul, on obtient :

$$\partial_1(X) = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où dans la matrice, la colonne de s_1 est à gauche, celle de s_2 au milieu et celle de s_3 à droite. La ligne de m_1 est en haut et celle de m_4 tout en bas. On a aussi $\partial_2(X) = 0$ et $\partial_0(X) = 0$. De manière évidente, on a bien $\partial(X) \circ \partial(X) = 0$. On a $\mathbb{Z}\mathcal{C}_0(f)/\operatorname{Im}(\partial_1(X)) \simeq \mathbb{Z}$ et $\ker(\partial_1(X)) = 0$. Finalement, on obtient :

- $H_2((\partial(X), f), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
- $H_1((\partial(X), f), \mathbb{Z}) = 0$;
- $H_0((\partial(X), f), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

On retrouve bien l'homologie d'une sphère $\mathbb{S}^2$.

Nous terminons cette section en évoquant les inégalités de Morse, qui sont une conséquence directe de l'existence des opérateurs de bord $\partial(X)$.

Proposition 1.5.6. *Notons β_k le k-ème nombre de Betti d'une variété fermée V. Soit f une fonction de Morse sur V. On note r_k le nombre de points critiques d'indice k de f. Alors :*

- $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k} r_j \geq \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k}\beta_j$
- $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+n} r_j = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+n}\beta_j = \chi(V)$, *où $\chi(V)$ est la caractéristique d'Euler de V.*

On retrouvera une version "à bord" de ces inégalités qui seront très importantes pour nous.

1.6 Retour sur l'exemple de Poincaré, point de vue moderne

En langage moderne, Poincaré a décrit sa sphère d'homologie avec une fonction de Morse avec 6 points critiques, un maximum, un minimum, deux points critiques d'indice 1 et deux d'indice 2. Implicitement, Poincaré utilise un pseudo-gradient tel que les sphères d'attachement des points critiques d'indice 2 sont dessinées en figure 1.6. Les sphères transverses des points d'indice 1 sur cette figure sont les cercles A et B. On obtient alors le complexe :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0,$$

où $\partial_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que l'homologie est bien celle d'une sphère de dimension 3, puisque la matrice ∂_2 est inversible, et donc, que $\ker(\partial_1) = \operatorname{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}\mathcal{C}_1(f)$, où f est la fonction de Morse induite. Pour calculer le groupe fondamental, il n'y a pas d'autre technique particulière que celle déjà employée.

1.7 Chemins de fonctions génériques

La théorie de Morse sur les variétés de dimensions finies est une histoire de singularités et de modèles génériques. Si $f : V \to \mathbb{R}$, génériquement un point de V sera non critique pour f. C'est-à-dire qu'autour d'un point x non critique, on pourra trouver un système de coordonnées locales

$(y_1, ..., y_n)$ centrées autour de x telles que $f(y_1, ..., y_n) = f(x) + y_1$. C'est le théorème du rang constant, qui donne un modèle local autour d'un point générique. Évidemment, quand V est fermée, une fonction sans points critiques définie sur V n'existe pas, et il y aura nécessairement des singularités. Nous avons vu que génériquement pour la fonction f, toutes les singularités de f sont non dégénérées. De même, le lemme de Morse donne des modèles locaux autour de ces singularités. Considérons maintenant un chemin de fonctions $F : V \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre $F^0 := F(\cdot, 0) : V \to \mathbb{R}$ et $F^1 := F(\cdot, 1)$. Supposons que F^0 et F^1 sont Morse et excellentes. Alors, là encore, on ne peut pas supposer que toutes les fonctions $F^t := F(\cdot, t)$ soient Morse et excellentes, mais on peut expliciter les chemins qui sont génériques entre deux fonctions de Morse excellentes. Nous résumons succinctement quelques résultats sur les chemins de fonctions génériques dans cette section.

Soit un tel chemin $F : V \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Génériquement, F^t est une fonction de Morse excellente sauf pour un nombre fini de temps $(t_j)_{1 \leq j \leq r}$ pour lesquels F^{t_j} présente l'un des trois *accidents* suivants :

- F^{t_j} est Morse mais une et une seule de ses valeurs critiques est double. Si on note α cette valeur critique, alors il y a deux points critiques p et q tels que $F^{t_j}(p) = F^{t_j}(q) = \alpha$. On dit qu'il y a un *croisement* ;
- F^{t_j} n'est pas Morse et présente une singularité de type *mort*. F^{t_j} réalise toujours une application injective entre les points critiques et les valeurs critiques. Cerf [5, p.71 avec le modèle de naissance en p.64] donne un modèle local de mort. Localement autour de la singularité p et pour $t \in (t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon)$, la fonction F^t est équivalente à la fonction modèle

$$g(y,t) = -y_1^2 - ... - y_k^2 + y_{k+1}^2 + ... + y_{n-1}^2 + (t - t_j)y_n + y_n^3.$$

  Remarquons que $g(\cdot, t_j - \varepsilon)$ a deux points critiques q_1 et q_2, un d'indice $k+1$ et un d'indice k, et que pour tout pseudo-gradient, il n'y a qu'une seule ligne de gradient de q_1 à q_2. Ainsi, pour tout pseudo-gradient X Morse-Smale adapté à $F^{t_j - \varepsilon}$, l'opérateur de bord associé vérifie

$$\partial_X q_1 = \pm q_2 + \sum_{q \in \mathcal{C}_k(F^{t_j - \varepsilon}) \setminus \{q_2\}} n(q_1, q) q.$$

  Nous pouvons enfin identifier :

$$\mathcal{C}(F^{t_j + \varepsilon}) = \mathcal{C}(F^{t_j - \varepsilon}) \setminus \{q_1, q_2\}.$$

  Nous montrons en figure 1.14 le diagramme de Cerf du modèle, c'est-à-dire le graphe des valeurs critiques des deux points critiques en fonction de t. Nous modifierons plus loin ce modèle de telle manière à avoir un diagramme de Cerf d'un accident mort comme en figure 1.15 pour l'élimination de deux points critiques d'étiquette $-$. Pour l'élimination de deux points d'étiquette $+$, il suffit de prendre ce graphique après lui avoir fait subir une symétrie d'axe horizontal.
  Ce dernier diagramme de Cerf est tel que les deux valeurs critiques sont strictement décroissantes ou strictement croissantes. On dira alors que ce chemin de mort est *sans singularité globale* ou encore *sans points critiques*, qu'il faut comprendre comme "$(x,t) \mapsto F^t(x)$ n'a pas de points critiques". En particulier, au temps t_j de mort, et au point p^{t_j} limite des deux points critiques qui s'annihilent, on a $\partial_t F^{t_j}(p^{t_j}) \neq 0$;
- F^{t_j} n'est pas Morse et présente une singularité de type *naissance*. F^{t_j} réalise toujours une application injective entre les points critiques et les valeurs critiques. Le modèle est celui de l'accident de type mort en renversant le sens du temps. Autour de la singularité et pour

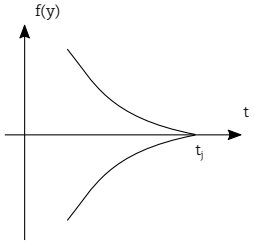

FIGURE 1.14 – Diagramme de Cerf du modèle de mort.

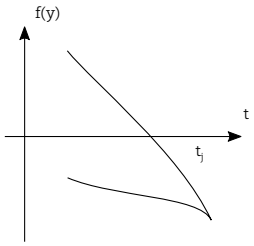

FIGURE 1.15 – Diagramme de Cerf du modèle de mort sans points critiques globaux.

$t \in (t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon)$, le chemin F^t est conjugué à

$$g(y,t) = -y_1^2 - ... - y_k^2 + y_{k+1}^2 + ... + y_{n-1}^2 + y_n - (t - t_j)y_n^3.$$

On a l'identification

$$\mathcal{C}(F^{t_j+\varepsilon}) = \mathcal{C}(F^{t_j-\varepsilon}) \cup \{q_1, q_2\},$$

où q_1 et q_2 sont d'indices respectifs $k+1$ et k et sont des points critiques qui naissent en temps t_j.

Nous représentons une bifurcation de mort en figure 1.16 qui ne présente pas de singularité globale entre un point d'indice 1 et un point d'indice 2, localement autour de ces points. Le point d'indice 1 descend un petit peu durant le chemin, alors que le point d'indice 2 descend beaucoup plus rapidement le long de l'unique ligne de gradient qui le joint au point d'indice 1.

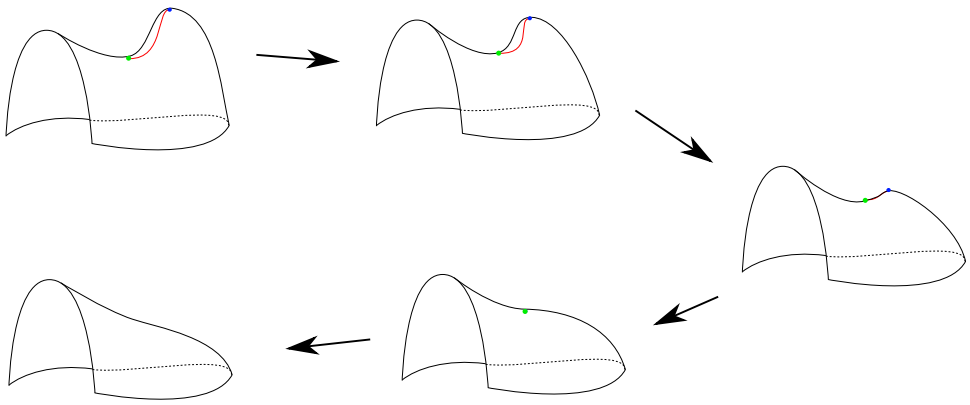

FIGURE 1.16 – Mort d'un point d'indice 2 avec un point d'indice 1 sans points critiques globaux durant le chemin.

Nous terminons avec cette proposition sur les croisements de points critiques, voir par exemple [30, Theorem 4.1] :

Proposition 1.7.1. *Soient p et q deux points critiques d'une fonction de Morse f tels que $f(p) > f(q)$. On suppose qu'il y a un pseudo-gradient X tel que $W^u(p, f, X) \cap W^s(q, f, X) = \emptyset$. Alors il y a un chemin de fonctions f^t qui présente comme seul accident un accident de croisement, avec $f^0 = f$ et f^1 tel que $f^1(p) < f^1(q)$. On peut aussi supposer que $f^t(p)$ et $f^t(q)$ sont strictement croissantes ou décroissantes indépendamment.*

1.8 Généricité des pseudo-gradients

Les théorèmes du Chapitre 2 et leurs démonstrations utiliseront quelques résultats sur les pseudo-gradients adaptés que nous présentons ici. Nous avons déjà énoncé le fait que l'espace des pseudo-gradients adaptés à une fonction de Morse f est connexe, et que les pseudo-gradients qui sont Morse-Smale sont génériques. Étant donné un chemin entre deux pseudo-gradients adaptés à f, nous avons aussi des hypothèses de généricité sur ce chemin que nous décrivons tout de go.

1.8.1 Glissements d'anses

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse fixée sur une variété fermée V de dimension n. Nous introduisons la notion de glissement d'anses pendant un chemin de pseudo-gradients adaptés à f, et son effet sur l'opérateur de bord. Cette notion a été introduite dans [30, Sec. 7].

Soient p et q deux points critiques de f de même indice k tels que $f(p) > f(q)$. Pour tout indice j, on se donne un ordre arbitraire $\{1, ..., r_j\} \to \mathcal{C}_j(f)$ où r_j est le cardinal de $\mathcal{C}_j(f)$. Pour l'ordre sur $\mathcal{C}_k(f)$, le point p est le i-ème point de $\mathcal{C}_k(f)$ et q est le ℓ-ème point. Un ordre naturel est celui donné par les valeurs critiques, mais nous verrons que nous serons amenés parfois à considérer d'autres ordres. On peut ainsi écrire matriciellement tout opérateur de bord ∂_X associé à un pseudo-gradient Morse-Smale.

Remarquons que pour tout point critique q' et tout pseudo-gradient X adapté à f, si la variété instable $W^u(q', X)$ est orientée, alors $f^{-1}(c) \cap W^u(q', X)$ reçoit une orientation canonique pour tout réel c. Elle varie de manière consistante avec c. Si Σ est une variété orientée, on note $-\Sigma$ la variété avec l'orientation inverse.

Soit $t \mapsto X^t$ un chemin de pseudo-gradients adaptés à f.

Définition 1.8.1 (Glissement d'anses)**.** Nous disons qu'il y a un *glissement d'anses* de p au-dessus de q au temps t_0 si X^t est Morse-Smale pour tous les temps sauf au temps t_0 pour lequel :

- il y a une orbite de X^{t_0} qui connecte p et q,
- il y a un chemin γ joignant un point de $f^{-1}(f(q) - \varepsilon) \cap W^u(q, X^{t_0-\varepsilon})$ et un point de $f^{-1}(f(q) - \varepsilon) \cap W^u(p, X^{t_0-\varepsilon})$ dans $f^{-1}(f(q) - \varepsilon)$ de telle manière à ce que la sous-variété $f^{-1}(f(q) - \varepsilon) \cap W^u(p, X^{t_0+\varepsilon})$ représente la sous-variété (orientée)

$$\left[f^{-1}(f(q) - \varepsilon) \cap W^u(p, X^{t_0-\varepsilon})\right] \sharp_\gamma \pm \left[f^{-1}(f(q) - \varepsilon) \cap W^u(q, X^{t_0-\varepsilon})\right]$$

  dans $f^{-1}(f(q) - \varepsilon)$.

Si le signe $\pm$ intervenant dans la définition est $+$, on parle de glissement d'anses *positif*, et s'il est $-$, on parle de glissement d'anses *négatif*.

Au temps t_0, le pseudo-gradient X^{t_0} est donc toujours adapté à f mais n'est pas Morse-Smale, puisque la variété stable de q n'intersecte pas transversalement la variété instable de p.

Un glissement d'anses a l'effet algébrique suivant, s est un signe, c'est-à-dire un élément de $\{+,-\}$:

$$\begin{aligned}\partial_j^{t_0+\varepsilon} &= \partial_j^{t_0-\varepsilon} \quad \text{pour } j \neq k, k+1,\\ \partial_{k+1}^{t_0+\varepsilon} &= (I - sE_{\ell,i})\partial_{k+1}^{t_0-\varepsilon},\\ \partial_k^{t_0+\varepsilon} &= \partial_k^{t_0-\varepsilon}(I + sE_{\ell,i}).\end{aligned}$$

La matrice $E_{\ell,i}$ est la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,ℓ) qui est 1. La matrice I est la matrice identité. Si $s = +$, correspond à un glissement d'anses *positif*, et $s = -$ à un glissement d'anses *négatif*.

Remarquons qu'un glissement d'anses est asymétrique en p et q. Il est important de savoir quel point est au-dessus de l'autre. Pour cette raison, nous préciserons toujours l'ordre des valeurs critiques entre p et q. Qui plus est, notons qu'il est nécessaire qu'il y ait une ligne de gradient strictement descendant de la composante connexe de p dans son niveau vers la composante connexe de q dans son niveau pour qu'un glissement d'anses de p au-dessus de q puisse arriver.

Exemple 1.8.2 (Glissement d'anses entre points d'indice 2 pour une fonction sur la sphère $\mathbb{S}^3$)**.** Bien que les glissements d'anses interviennent entre des points de n'importe quel indice (commun) k, ils ont été historiquement "plus" utilisés dans le cas où $n-k \geq 2$ et $k \geq 2$, voir théorème 1.8.4. Il serait donc de bon ton de donner un exemple de glissements d'anses entre points d'indice k dans une variété n tels que $n-k \geq 2$ et $k \geq 2$, mais on serait bien en peine de donner une illustration claire et cohérente. Nous nous bornerons donc à un glissement d'anses entre deux points d'indice 2, pour une fonction $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$.

On décrira f, comme pour l'exemple de Poincaré, niveau par niveau. En fait, f aura le même nombre de points critiques et avec les mêmes indices respectifs que pour la fonction définie sur la sphère d'homologie. La fonction f sera excellente. La matrice d'homologie pour un pseudo-gradient X_1 adapté à f sera $\partial_2(X_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Nous donnons une première image des niveaux de f après passage de chaque point critique en figure 1.17.

Appelons s_1 le point d'indice 2 le plus haut et s_2 le point d'indice 2 le plus bas. Nous représentons en figure 1.18 l'effet d'un chemin générique de pseudo-gradients ente X_1 et un pseudo-gradient X_2 sur la sphère d'attachement de s_1. Nous ne représentons que le niveau entre les deux points critiques d'indice 2. La sphère d'attachement σ_{s_1} intersecte en un point la sphère transverse de s_2, et "*passe au-dessus*" de la sphère transverse. C'est cette opération qui constitue le glissement d'anses.

Après celui-ci, si on note σ'_{s_1} la nouvelle sphère d'attachement de s_1, les sphères d'attachement et transverse de s_2 n'ayant pas changé, on obtient bien : $\sigma'_{s_1} = \sigma_{s_1} \sharp_\gamma \sigma_{s_2}$ pour un certain chemin γ joignant un point de σ_{s_1} et un point de σ_{s_2} dans la sous-variété de niveau entre s_1 et s_2. L'effet sur l'opérateur de bord donne :

$$\partial_2(X_2) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

ce qui se voit géométriquement car on compte le nombre algébrique d'intersection entre les sphères d'attachement de s_1 et s_2 avec les sphères transverses des points d'indice 1 (on a représenté sur la figure 1.19 les sphères transverses des points d'indice 1).

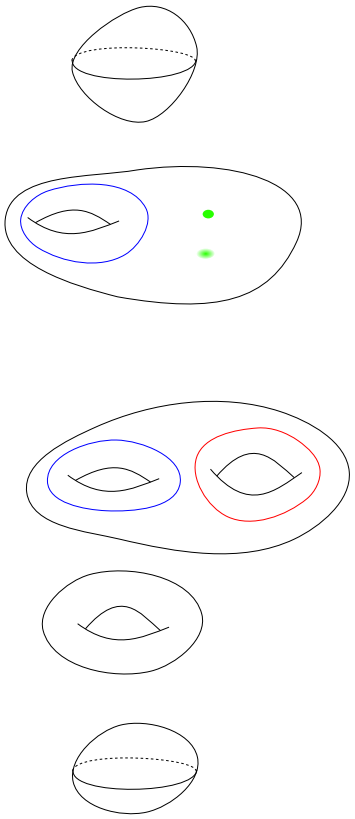

FIGURE 1.17 – Niveaux de la fonction $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ entre chaque point critique. Les cercles bleu et rouge représentent les sphères d'attachement pour un pseudo-gradient X_1 adapté à f. Les deux points verts représentent la sphère transverse au point d'indice 2 le plus bas. Le point vert du bas un peu flouté doit être compris comme étant de l'autre côté du tore.

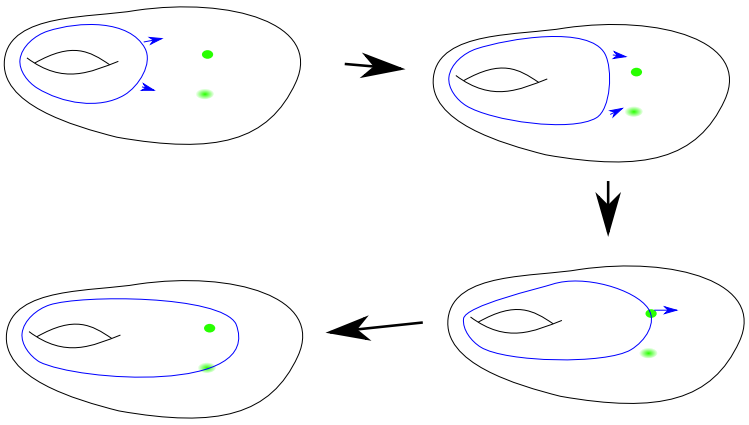

FIGURE 1.18 – Réalisation du glissement d'anses de s_1 au-dessus de s_2, effet dans la variété de niveau entre s_1 et s_2.

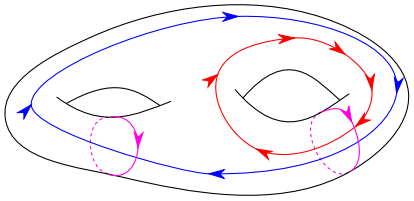

FIGURE 1.19 – Sphères d'attachement des points d'indice 2 et sphères transverses des points d'indice 1 pour X_2, avec orientations.

On a les théorèmes, voir [26] :

Théorème 1.8.3. *Soit $t \mapsto X^t$ un chemin de pseudo-gradients adaptés à f. Alors, quitte à modifier légèrement $t \mapsto X^t$, on peut supposer que X^t est Morse-Smale quelque soit t sauf pour un nombre fini de temps pour lesquels il y a un glissement d'anses.*

Nous aurons aussi besoin de [30, Theorem 7.6] :

Théorème 1.8.4. *Soit $s \in \{+1, -1\}$. Soient p et q deux points critiques d'indice k d'une fonction de Morse f avec $2 \leq k \leq n-2$. S'il y a une ligne strictement descendante qui connecte la composante connexe de p dans $f^{-1}(f(p))$ à la composante connexe de q dans $f^{-1}(f(q))$ alors il est possible de réaliser un glissement d'anses de p au-dessus de q avec n'importe quel signe $s \in \{+, -\}$. En d'autres termes, pour tout pseudo-gradient Morse-Smale X^0 adapté à f, il y a un pseudo-gradient Morse-Smale X^1 et un chemin générique de pseudo-gradients X^t adaptés à f entre X^0 et X^1 tels qu'il y ait un unique glissement d'anse de signe s de p au-dessus de q durant le chemin.*

Nous rappelons finalement une version légèrement modifiée de [26, Corollary 2.2] à propos des glissements d'anses :

Proposition 1.8.5. *Soit $t \mapsto f^t$ un chemin de fonctions générique entre f^0 et f^1. On suppose que les seuls accidents durant le chemin sont des croisements, et que deux points critiques se croisent au plus une fois. Alors il y a un champ de vecteurs pseudo-gradient et Morse-Smale X qui est adapté à f^0 et f^1.*

En particulier, pour un tel chemin on peut identifier $\mathcal{C}(f^0)$ et $\mathcal{C}(f^1)$ via une bijection φ, et l'existence de X donne deux opérateurs de bord ∂^0 et ∂^1 définis respectivement sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0)$ et $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1)$, tels que $\partial^1 = \varphi \circ \partial^0 \circ \varphi^{-1}$, en étendant linéairement φ à $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0)$.

1.8.2 Accidents indépendants

Nous rappelons des résultats sur les *accidents indépendants pour les singularités de type naissance ou mort*. La définition provient de [14, Lemma 6.1]. Cette section introduit simplement quelques définitions et lemmes qui nous rendront la vie plus facile pour démontrer le lemme 2.4.17. Principalement, l'indépendance d'un accident de naissance pour un chemin f^t met en jeu un chemin de pseudo-gradient adapté à f^t pour lequel les variétés stables et instables des points pré-existants aux nouveaux points n'intersectent pas les variétés stables et instables de ces nouveaux points. L'intérêt principal est qu'on peut considérer des opérateurs de bord qui évoluent de manière très simple.

Définition 1.8.6. Soit X un pseudo-gradient adapté à une fonction de Morse f. Deux points critiques p et q de f sont indépendants pour X quand nous avons :

$$(W^u(p,X) \cup W^s(p,X)) \cap (W^u(q,X) \cup W^s(q,X)) = \emptyset.$$

Soit $(f^t)_{-1\leq t\leq 1}$ un chemin de fonctions générique avec pour seule singularité une singularité de mort ou de naissance en temps 0. Supposons que ce soit une singularité de mort et notons $(p^t, q^t)_{-1\leq t\leq 0}$ le couple d'indice $(k+1, k)$ qui meurt au temps 0.

Définition 1.8.7 (Chemin de pseudo-gradients adapté à un chemin générique de fonctions)**.** On dira que $(X^t)_{-1\leq t\leq 1}$ est un *chemin de pseudo-gradients adaptés à* $(f^t)_{-1\leq t\leq 1}$ si $t \mapsto X^t$ est un chemin continu de pseudo-gradients, tel que X^t est adapté à f^t pour tout $t \neq 0$ et tel que $W^s(q^t, X^t)$ et $W^u(p^t, X^t)$ s'intersectent transversalement en une seule ligne de gradient pour $t < 0$.

La définition dans le cas d'un accident de type naissance est quasi-identique, il suffit de modifier $t < 0$ par $t > 0$.

Nous avons [14, Lemma 6.1] :

Lemme 1.8.8 (Singularités indépendantes)**.** *Si (f^t, X^t) est un chemin générique de fonctions et de pseudo-gradients adaptés, alors X^t peut être déformé en un chemin de pseudo-gradients adaptés tel que tous les accidents de naissance ou de mort de paires d'indices différents de $(1,0)$ ou $(n, n-1)$ sont indépendants des points d'indices k avec $1 \leq k \leq n-1$.*

La remarque importante est que pour un tel chemin (f^t, X^t), s'il y a la mort d'une paire (p^t, q^t) au temps t_0, alors $\partial^{t_0-\varepsilon} p^{t_0-\varepsilon} = \pm q^{t_0-\varepsilon}$. On a plus, car en fait, on a l'équation :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^{t_0-\varepsilon}) = \mathbb{Z}\mathcal{C}(f^{t_0+\varepsilon}) \oplus \mathbb{Z}T,$$

où $\mathbb{Z}T$ est le complexe acyclique simple $\mathbb{Z}p^{t_0-\varepsilon} \xrightarrow{\pm 1} \mathbb{Z}q^{t_0-\varepsilon}$. On a une équation identique dans le cas d'une naissance, en échangeant $t_0 - \varepsilon$ et $t_0 + \varepsilon$.

Adaptons [14, Lemma 6.1] et sa démonstration dans le cas d'un accident de type naissance ou mort d'indices $(1,0)$ ou $(n, n-1)$:

Lemme 1.8.9 (Singularités indépendantes, indices extrémaux)**.** *Supposons qu'il y ait une singularité de type naissance ou mort au temps t_0 pendant un chemin générique de fonctions f^t, et que la paire (p^t, q^t) qui naît ou meurt est d'indices $(1,0)$ ou $(n, n-1)$. Nous avons les propriétés suivantes, en notant ∂^t l'opérateur de bord associé à X^t, un chemin de pseudo-gradients adapté :*

- ***Mort d'une paire** (p^t, q^t) **d'indices** $(1,0)$. Il y a un pseudo-gradient Morse-Smale $X^{t_0-\varepsilon}$ adapté à $f^{t_0-\varepsilon}$ tel que $\partial^{t_0-\varepsilon} d$ n'a aucune composante $p^{t_0-\varepsilon}$ ou $q^{t_0-\varepsilon}$ pour tout point critique $d \in \mathcal{C}_k(f^{t_0-\varepsilon}) \setminus \{p^{t_0-\varepsilon}\}$ où $k \in \{1,2\}$.*
- ***Mort d'une paire** (p^t, q^t) **d'indices** $(n, n-1)$. Il y a un pseudo-gradient Morse-Smale $X^{t_0-\varepsilon}$ adapté à $f^{t_0-\varepsilon}$ tel que $\partial^{t_0-\varepsilon} p^{t_0-\varepsilon} = \pm q^{t_0-\varepsilon}$ et $\partial^{t_0-\varepsilon} q^{t_0-\varepsilon} = 0$.*
- ***Naissance d'une paire** (p^t, q^t) **d'indices** $(1,0)$. Il y a un pseudo-gradient Morse-Smale $X^{t_0+\varepsilon}$ adapté à $f^{t_0+\varepsilon}$ tel que $\partial^{t_0+\varepsilon} d$ n'a aucune composante selon $p^{t_0+\varepsilon}$ ou $q^{t_0+\varepsilon}$ pour tout point critique $d \in \mathcal{C}_k(f^{t_0+\varepsilon}) \setminus \{p^{t_0+\varepsilon}\}$ avec $k \in \{1,2\}$.*
- ***Naissance d'une paire** (p^t, q^t) **d'indices** $(n, n-1)$. Il y a un pseudo-gradient Morse-Smale $X^{t_0+\varepsilon}$ adapté à $f^{t_0+\varepsilon}$ tel que $\partial^{t_0+\varepsilon} p^{t_0+\varepsilon} = \pm q^{t_0+\varepsilon}$ et $\partial^{t_0+\varepsilon} q^{t_0+\varepsilon} = 0$.*

Démonstration du lemme 1.8.9. Nous référons à [14, Lemma 6.1] pour les détails.

Supposons que nous sommes dans le cas de la mort d'une paire (p^t, q^t) d'indice $(1,0)$. Soit α^t la valeur critique de p^t. Au temps $t_0 - \varepsilon$, dans le niveau $(f^{t_0-\varepsilon})^{-1}(\alpha^{t_0-\varepsilon} + \eta)$, pour tout pseudo-gradient adapté X, la variété

$$W := (f^{t_0-\varepsilon})^{-1}(\alpha^{t_0-\varepsilon} + \eta) \cap \left[W^s(p^{t_0-\varepsilon}, f^{t_0-\varepsilon}, X^{t_0-\varepsilon}) \cup W^s(q^{t_0-\varepsilon}, f^{t_0-\varepsilon}, X^{t_0-\varepsilon})\right]$$

est un disque fermé de dimension $n-1$. La sphère bordant ce disque est $(f^{t_0-\varepsilon})^{-1}(\alpha^{t_0-\varepsilon} + \eta) \cap W^s(p^{t_0-\varepsilon}, f^{t_0-\varepsilon}, X^{t_0-\varepsilon})$. Par un argument de dimension, il y a un point $x \in W$ qui n'est pas dans :

$$\bigcup_{c \in \mathcal{C}_1(f^{t_0-\varepsilon}) \cup \mathcal{C}_2(f^{t_0-\varepsilon})} W^u(c, f^{t_0-\varepsilon}, X^{t_0-\varepsilon}).$$

Par une isotopie de $(f^{t_0-\varepsilon})^{-1}(\alpha^{t_0-\varepsilon} + \eta)$ nous pouvons déformer $X^{t_0-\varepsilon}$, et réduire W dans un petit voisinage de x. Ceci étant fait, le nouveau pseudo-gradient adapté est tel que $\partial^{t_0-\varepsilon} d$ n'a aucune composante selon $p^{t_0-\varepsilon}$ ou $q^{t_0-\varepsilon}$ pour tout point critique $d \in \mathcal{C}_k(f^{t_0-\varepsilon}) \setminus \{p^{t_0-\varepsilon}\}$ avec $k \in \{1,2\}$.

On donne en figure 1.20 une illustration dans le cas $n = 2$.

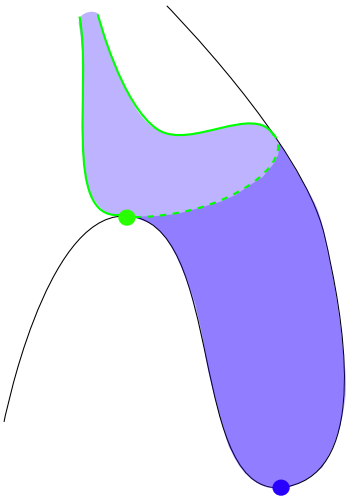

FIGURE 1.20 – Mort indépendante pour $n = 2$ d'une paire d'indice $(1,0)$. En bleu, la variété instable du point d'indice 0 et en vert celle du point d'indice 1. Comme la sphère transverse du point d'indice 1 est homotopiquement triviale dans la variété de niveau, par une déformation du pseudo-gradient, on peut supposer que l'union de ces deux variétés instables est centrée autour d'une ligne de gradient qui provient d'un maximum local.

De la même manière, en échangeant "W^u" et "W^s" ci-dessus, nous obtenons le second item du lemme. En changeant le sens du temps, nous obtenons les deux derniers items.

□

Par un abus de notations, nous dirons qu'une singularité de naissance ou de mort d'une paire de points critiques d'indices extrêmes est *indépendante* si le chemin $t \mapsto (f^t, X^t)$ est comme dans le lemme 1.8.9. L'intérêt de l'indépendance des accidents pour nous ne réside que dans la simplicité des modifications des opérateurs de bord que cela offre.

1.9 Théorie de Morse à bord

Après avoir introduit la théorie de Morse générale, et s'être attardé sur la théorie de Morse sur les variétés fermées, il est temps de parler de théorie de Morse à bord, qui doit être comprise comme étant la théorie qui étudie les fonctions de Morse sur les variétés à bord (de dimensions finies). Cette étude a commencé très tôt. Dès 1936, Morse et Van Schaack [11] étudient les modifications homologiques des niveaux des fonctions de Morse sur les variétés à bord.

Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction sur V, variété à bord de dimension n, dont nous dénotons le bord par ∂V. Nous donnons la définition :

Définition 1.9.1. La fonction F est une *fonction de Morse* si tout point critique de F dans l'intérieur de V est non dégénéré, et si pour tout point critique p de $F_{|\partial V}$, la restriction de F au bord ∂V, est tel que p est non dégénéré pour $F_{|\partial V}$, et que $dF(p)(\overrightarrow{n}) \neq 0$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à ∂V pointant dans l'intérieur de V.

Ainsi, tous les points critiques de F sont dans l'intérieur de V. Toutefois, la topologie d'une variété de niveau $F^{-1}(c)$ est modifiée quand on passe au-dessus d'un point critique intérieur mais aussi quand on passe au-dessus d'un point qui est critique pour $F_{|\partial V}$. Ces derniers se répartissent en deux ensembles, reprenant les notations de Curley [6] et la notation $\overrightarrow{n}(p)$ pour désigner un vecteur tangent à $p \in \partial V$, normal au bord et intérieur à la variété :

- des points p tels que $dF(p)(\overrightarrow{n}(p)) > 0$. On dira que ce sont des points d'étiquette $-$, ou *points* $-$ pour faire court, et on notera par $\mathcal{C}_k^-(F)$ les points $-$ qui sont d'indice k pour $F_{|\partial V}$,
- des points p tels que $dF(p)(\overrightarrow{n}(p)) < 0$. On dira que ce sont des points d'étiquette $+$, ou *points* $+$ pour faire court, et on notera par $\mathcal{C}_k^+(F)$ les points $+$ qui sont d'indice k pour $F_{|\partial V}$.

On donne en figure 1.21 des images géométriques locales autour de points $-$ et $+$.

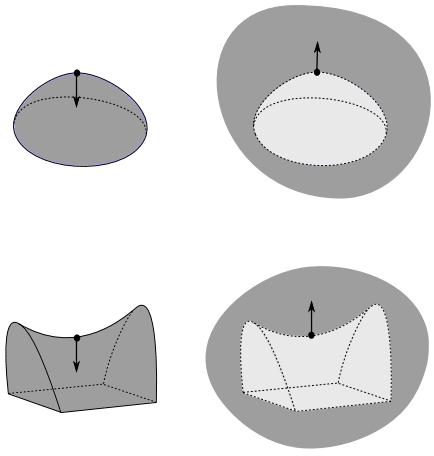

FIGURE 1.21 – Modèles locaux de points d'étiquette $+$ (à gauche) et de points d'étiquette $-$ (à droite), la fonction est la fonction hauteur, la flèche représente le vecteur normal intérieur à la variété à bord. La zone gris foncé représente l'intérieur de la variété à bord, et la zone gris clair l'extérieur.

Remarque 1.9.2. *Dans l'article de Laudenbach [23], un point* $+$ *est appelé* point de Dirichlet *et un point* $-$ *est appelé* point de Neumann. *Borodzik, Nemethi et Ranicki [8] parlent de* boundary

stable critical point *pour un point* + *et de* boundary unstable critical point *pour un point* −. *Il ne semble pas y avoir encore de consensus.*

Si on veut introduire un complexe de Morse pour une telle fonction, nous avons vu qu'il faut savoir quel type de pseudo-gradient il faut considérer. Récemment, Laudenbach a introduit un complexe de Morse pour une fonction de Morse sur une variété V à partir de pseudo-gradients X tels que $X(p)$ pointe vers l'intérieur de V si $p \in \partial V$ sauf en un point p qui est d'étiquette $-$, pour lequel $X(p)$ est tangent au bord. L'opérateur de bord est défini sur $\mathcal{C}_k(F) \cup \mathcal{C}_k^-(F)$ et permet d'obtenir des inégalités de Morse optimales. On rappelle qu'ici $\mathcal{C}_k(F)$ désigne les points critiques intérieurs de F. Notons q_k le cardinal de $\mathcal{C}_k^-(F)$ et p_k celui de $\mathcal{C}_k^+(F)$. Du complexe défini dans [23], si F n'a pas de points critiques dans l'intérieur de V, on a les égalités de Morse à bord :

$$\sum_{0\leq j\leq n} q_j(-1)^j = \chi(V), \tag{1.1}$$

$$\sum_{0\leq j\leq n} p_j(-1)^j = (-1)^n\chi(V). \tag{1.2}$$

On a aussi les inégalités de Morse à bord :

$$\sum_{0\leq j\leq k} q_j(-1)^j \geq \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j\beta_j, \tag{1.3}$$

$$\sum_{n-k\leq j\leq n} p_j(-1)^{j+n} \geq \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j\beta_j, \tag{1.4}$$

pour tout k, où β_j est le j-ème nombre de Betti de V. L'une se déduit de l'autre en considérant $-f$.

Nous nous concentrerons plutôt dans cette section sur les modifications topologiques des variétés de niveaux à bord quand on passe un point + ou un point −, en supposant la fonction *excellente*, dans le sens où $F : \mathcal{C}(F) \cup \mathcal{C}^+(F) \cup \mathcal{C}^-(F) \to \mathbb{R}$ est une injection. Nous reprenons cette description de [8], bien que ces résultats soient standard en théorie de Morse à bord.

Soit V une variété à bord de dimension $n+1$, de bord ∂V. Soit F une fonction de Morse sur V. On note f la restriction de F à ∂V. Soit p un point critique de f d'indice k et de valeur critique α. On a le résultat suivant, voir [8, Lemme 2.20] :

Théorème 1.9.3. *Si p est d'étiquette $-$ alors $F^{-1}(\alpha+\varepsilon)$ est homotopiquement équivalent à $F^{-1}(\alpha-\varepsilon) \cup_\varphi \mathbb{D}^k$ où φ est le plongement de la sphère transverse de p dans $f^{-1}(\alpha-\varepsilon)$.*

Si $\varphi \neq 0$ dans $H_{k-1}(F^{-1}(\alpha-\varepsilon))$, nous avons les modifications homologiques :

$$H_{k-1}(F^{-1}(\alpha+\varepsilon)) \simeq H_{k-1}(F^{-1}(\alpha-\varepsilon))/(\langle\varphi\rangle)$$

et

$$H_j(F^{-1}(\alpha+\varepsilon)) \simeq H_j(F^{-1}(\alpha-\varepsilon))$$

si $j < k-1$. Si $\varphi = 0$, nous avons :

$$H_j(F^{-1}(\alpha+\varepsilon)) \simeq H_j(F^{-1}(\alpha-\varepsilon))$$

si $j < k$, et

$$H_k(F^{-1}(\alpha+\varepsilon)) \simeq H_k(F^{-1}(\alpha-\varepsilon)) \oplus \mathbb{Z}.$$

Nous avons le même genre de résultats quand nous passons au-dessus d'un point $+$.

Étant données deux variétés à bord V et W, nous utiliserons la notation $V \setminus_{(\phi,\varphi)} W$ pour l'opération de retirer de V une variété difféomorphe à W, où φ est un plongement de ∂W dans ∂V et ϕ est un plongement de W dans V. Nous noterons par $\mathring{\mathbb{D}}^d$ la boule ouverte de dimension d.

Théorème 1.9.4. *Si p est d'étiquette $+$ et d'indice k pour la restriction $F|_{\partial V}$, alors $F^{-1}(\alpha+\varepsilon)$ est difféomorphe à*

$$F^{-1}(\alpha-\varepsilon) \setminus_{(\phi,\varphi)} (\mathbb{D}^k \times \mathring{\mathbb{D}}^{n-k})$$

où φ est un plongement de $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathring{\mathbb{D}}^{n-k}$ dans ∂V, et ϕ est un plongement de $\mathbb{D}^k \times \mathring{\mathbb{D}}^{n-k}$ dans $F^{-1}(\alpha-\varepsilon)$.

Le théorème dit implicitement que toute sphère $\mathbb{S}^{k-1} \times \{\star\}$ représentée par φ borde une boule dans $F^{-1}(\alpha-\varepsilon)$, et est donc triviale dans cette variété en homotopie et en homologie. C'est aussi la sphère d'attachement de p pour la restriction $F|_{\partial V}$. Les points critiques d'indice k de $F|_{\partial V}$ et d'étiquette $+$ sont des points critiques d'indice $n-k$ et d'étiquette $-$ de $-F|_{\partial V}$. Nous avons donc des propriétés similaires pour les points $-$. Ainsi $F^{-1}(\alpha-\varepsilon)$ est homotopiquement équivalent à

$$F^{-1}(\alpha+\varepsilon) \cup_{\varphi} \mathbb{D}^{n+1-k}$$

où φ est le plongement de la sphère transverse de p.

Nous avons, pour $\varphi \neq 0$:

$$H_{n-k-1}(F^{-1}(\alpha-\varepsilon)) \simeq H_{n-k-1}(F^{-1}(\alpha+\varepsilon))/(\langle\varphi\rangle)$$

et

$$H_j(F^{-1}(\alpha-\varepsilon)) \simeq H_j(F^{-1}(\alpha+\varepsilon))$$

pour $j < n-k-1$. Si $\varphi = 0$, nous avons :

$$H_j(F^{-1}(\alpha-\varepsilon)) \simeq H_j(F^{-1}(\alpha+\varepsilon))$$

pour $j < n-k$, et

$$H_{n-k}(F^{-1}(\alpha-\varepsilon)) \simeq H_{n-k}(F^{-1}(\alpha+\varepsilon)) \oplus \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.9.5 (Fonction définie sur la boule)**.** On donne les modifications des variétés de niveau d'une fonction de Morse $F : \mathbb{D}^4 \to \mathbb{R}$. On considère que F a ses extremums globaux sur le bord : le maximum est donc dans $\mathcal{C}_3^+(F)$ et le minimum dans $\mathcal{C}_0^-(F)$. En effet, puisque le maximum, noté max est un maximum global, on a nécessairement $dF(max)(\overrightarrow{n}) < 0$. On a aussi $dF(min)(\overrightarrow{n}) > 0$, où min est le minimum global. On suppose que F a un point dans $\mathcal{C}_1^+(F)$, noté q, et un autre dans $\mathcal{C}_2^+(F)$, noté p. On suppose enfin que $\mathcal{C}^-(F)$ est réduit au minimum global et que F n'a as de points critiques intérieurs. En particulier, F n'a aucun point critique dans l'intérieur de $\mathbb{D}^4$. Les variétés de niveaux sont des variétés à bord de dimension 3 qu'on représente en figure 1.22.

On note f la restriction de F à $\mathbb{S}^3$. On a représenté sur la figure les sphères d'attachement de p et de q pour f et un pseudo-gradient adapté X. On remarque que $\partial(X)p = q$. On a aussi $\partial(X)max = 0$. On remarque alors que $\mathcal{C}_*^+(F)$ est ici un complexe de chaînes pour la restriction de $\partial(X)$, dont l'homologie est $\mathbb{Z}$ en degré 3 et 0 ailleurs. On retrouve bien le théorème A, qu'on prouvera sous le nom de théorème 2.4.6 en section 2.4. Enfin, on voit sur la figure 1.22 que le passage d'un point $+$ d'indice k pour les variétés à bord de niveaux induit la suppression d'un complexe $\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ dont l'intersection avec le bord est $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{n-k}$.

Pour le même prix, en considérant $-F$, on a une fonction qui a ses extremums globaux sur le bord, mais qui a deux points qui sont d'étiquette $-$, un d'indice 2 et l'autre d'indice 1.

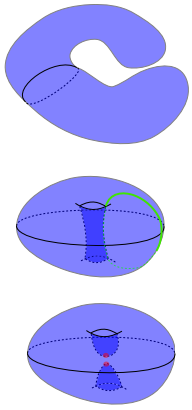

FIGURE 1.22 – Variétés de niveaux de F. Les sphères d'attachement de p et de q sont représentées.

1.10 Graphes de Reeb

Cette petite section introduit un objet associé à toute fonction de Morse excellente définie sur une variété fermée $f : V \to \mathbb{R}$. Cet objet a été défini pour la première fois en 1946 par Georges Reeb [11] [40].

Définition 1.10.1. Le *graphe de Reeb* d'une fonction de Morse excellente f est le quotient $\Gamma(f)$ de V par la relation d'équivalence $\simeq$ suivante :

$$x \simeq y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ et } x \text{ est dans la même composante connexe de } f^{-1}(y) \text{ que } y.$$

Muni de la projection $pr : V \to \Gamma(f)$, nous pouvons définir la topologie quotient sur $\Gamma(f)$. Pour en faire un graphe, nous définissons ses sommets comme étant les points de $\Gamma(f)$ dont la pré-image par pr contient un point critique de f. Enfin, $\Gamma(f)$ est muni d'une fonction f_Γ telle que $f_\Gamma \circ pr = f$.

Si x est un sommet de $\Gamma(f)$ nous ajouterons l'indice du point critique envoyé sur x à côté. Ce point critique est bien unique en supposant f excellente. On donne en figure 1.23 le graphe de Reeb de la fonction hauteur définie sur le plongement de la figure 1.9.

Cet objet est très utile pour visualiser les fonctions de Morse définies sur les surfaces fermées, et est en fait l'objet central du théorème de Curley dont nous allons parler un peu plus tard, en section 2.2.2. Nous exposons quelques-unes de ses propriétés, qui dérivent des résultats de chirurgie introduits plus haut. Imaginons que nous "lisons" une fonction de Morse excellente $f : V \to \mathbb{R}$ de bas en haut, où la sémantique de "bas" et de "haut" est prise relativement à f, en la voyant comme une fonction hauteur.

Lemme 1.10.2. *Quand on passe au-dessus d'un point critique p de f, le nombre de composantes connexes des niveaux :*

- *augmente seulement si l'indice de p est 0 ou $n-1$,*
- *diminue seulement si l'indice de p est 1 ou n.*

Démonstration. Si on démontre le premier point, le second en découle directement en considérant $-f$. Le premier point est alors une conséquence directe du fait 1.4.3. En particulier, le nombre de

11. Georges Reeb, 1920-1993, est surtout connu pour son travail sur les feuilletages et l'analyse non standard.

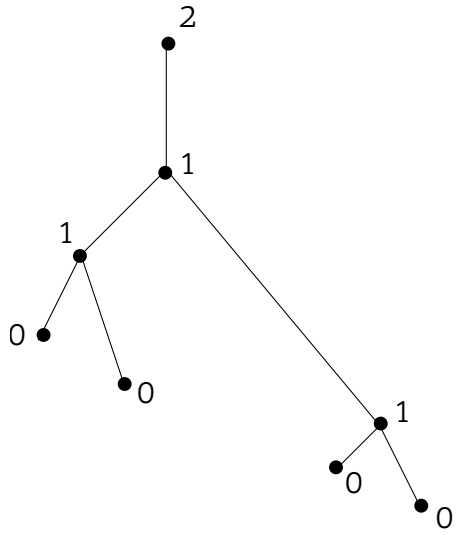

FIGURE 1.23 – Graphe de Reeb d'une fonction de Morse sur un morse.

composantes connexes des niveaux augmente toujours quand on passe au-dessus d'un minimum, et augmente quand on passe au-dessus d'un point d'indice $n-1$ si et seulement si la sphère transverse de p, qui est ici une sphère de dimension 0 soit deux points, est plongée dans deux composantes connexes différentes du niveau au-dessus de p. □

On note que dans le cas où V est une surface orientable, nous avons $n-1=1$, et que tout point d'indice 1 modifie le nombre de composantes connexes. En effet, dans le cas où $n=2$, un point critique d'indice 1 ne change pas le nombre de composantes connexes des niveaux si et seulement si sa sphère d'attachement et sa sphère transverse sont chacune plongées dans une seule composante connexes de leurs niveaux respectifs. Mais ceci ferait apparaître une bande de Möbius dans V, ce qui contredit le fait que V est orientable. Dans le cas d'une surface, un point d'indice 1 peut être de deux types différents :

- soit sa sphère d'attachement est plongée dans deux composantes connexes différentes dans la variété de niveau en dessous du point. Alors le point diminue strictement le nombre de composantes connexes quand on passe au-dessus de lui,
- soit sa sphère transverse est plongée dans deux composantes connexes différentes dans la variété de niveau au-dessus du point. Alors le point augmente strictement le nombre de composantes connexes quand on passe au-dessus de lui.

Les deux types sont exclusifs.

Si la dimension de la sphère est au moins 2, on a le résultat suivant :

Proposition 1.10.3. *Soit $n \geq 2$. Si une fonction de Morse f définie sur $\mathbb{S}^n$ a un seul minimum local et un seul maximum local, alors les niveaux de f sont connexes.*

Nous démontrons d'abord le lemme suivant qui est intéressant en soi :

Lemme 1.10.4. *Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse définie sur une variété fermée V, il existe un plongement $\iota : \Gamma(f) \hookrightarrow V$ tel que $pr \circ \iota = id_{\Gamma(f)}$.*

Démontration du lemme 1.10.4. Il suffit de joindre par une courbe strictement descendante n'importe quelle paire de points critiques consécutifs dont les projections sur $\Gamma(f)$ sont reliées

par une arête. Le plongement $\iota : \Gamma(f) \hookrightarrow V$ est alors donné par l'union des plongements de ces courbes. Soient p et q deux tels points critiques, tels que $f(p) > f(q)$. Si nous notons ℓ l'arête fermée reliant $pr(p)$ et $pr(q)$, alors $pr^{-1}(\ell)$ est une variété connexe à bords dans laquelle il est facile de trouver la courbe voulue. Notons $\iota : \Gamma(f) \hookrightarrow V$ le plongement. Par construction, nous avons directement que $pr \circ \iota = id_{\Gamma(f)}$. □

Démonstration de la proposition 1.10.3. Si un des niveaux de f a plus d'une composante connexe, alors le graphe de Reeb présente un lacet non trivial. En effet, soit x un point dans une des composantes connexes, et y un point dans une autre des composantes connexes. Pour un ensemble générique de pseudo-gradients, la ligne de gradient qui passe par x (resp. y) est une ligne strictement descendante qui connecte le maximum global du minimum global. L'union de ces deux lignes de gradient (celle pour x et celle pour y) forme un lacet dans $\mathbb{S}^n$ qui se projette sur un lacet non trivial dans $\Gamma(f)$, que l'on note γ. On note aussi γ l'élément de $\pi_1(\Gamma(f)$ correspondant. Cet élément devient trivial quand il est plongé dans $\mathbb{S}^n$ via ι, puisque $\pi_1(\mathbb{S}^n) \simeq \{1\}$ pour $n \geq 2$. Comme $pr \circ \iota = id_{\Gamma(f)}$, nous obtenons une contradiction. En effet, pour les applications induites sur les groupes fondamentaux, on a donc $\iota_*(\gamma) = 1 \in \pi_1(\mathbb{S}^n)$ et $\gamma = pr_* \circ \iota_*(\gamma) = pr_*(1) = 1$. □

1.11 Torsions de complexes de chaînes

Cette petite section, plus algébrique que topologique et indépendante de toutes les autres, rappelle quelques résultats sur la torsion d'un complexe de chaînes dans un cadre très restrictif, que nous n'allons utiliser seulement à la toute fin de cette thèse, en section 3.4. Une excellente référence pour le peu que nous allons raconter sur ce sujet reste [31], nous conseillons aussi le livre [41]. Nous nous bornerons à la définition de la torsion pour un complexe de chaînes sur un anneau A principal et commutatif, car seul ce cas nous sera utile. La théorie pour un anneau A général est bien plus vaste et complexe et est introduite dans les références citées.

Notons $A^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A et soit $GL_\infty(A)$ la limite inductive donnée par

$$A^\times \hookrightarrow GL_2(A) \hookrightarrow ... \hookrightarrow GL_j(A) \hookrightarrow GL_{j+1}(A) \hookrightarrow \dots$$

L'injection $GL_j(A) \hookrightarrow GL_{j+1}(A)$ étant donnée par

$$B \mapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $K_1(A)$ le groupe abélien $GL_\infty(A)/[GL_\infty(A), GL_\infty(A)]$. C'est aussi le groupe $GL_\infty(A)$ modulo les actions de matrices de transvection $I + \lambda E_{j,i}$ (où I est la matrice identité infinie, et $E_{j,i}$ est une matrice élémentaire dont un seul coefficient est non nul égal à 1, en place (j, i)).

Soit $C = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un complexe de chaînes borné de A-modules, c'est-à-dire tel que $C_k \neq 0$ pour un nombre fini de k. On note $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ le bord et $B_k = \partial_{k+1}C_{k+1}$. On suppose que B_k est un A-module libre pour tout k. Si on a une suite exacte courte $0 \to M \to N \to P \to 0$ où P est libre, alors on a un isomorphisme $N \simeq M \oplus P$. Cette propriété est fausse si P n'est pas libre, en témoigne la suite $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) \to 0$ qui n'est pas scindée du tout.

Supposons que C soit acyclique, c'est-à-dire que $H_k(C, A) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et que chaque C_k soit un module libre avec une base préférée, c'est-à-dire que chaque C_k est isomorphe à A^{r_k} où r_k est le rang de C_k, et où l'isomorphisme est fixé pour tout k. En particulier, on a une base *préférée* pour C_k qui est la pré-image des éléments $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ dans A^{r_k}, où le 1 est en i-ème position.

Si on note $B_k = \partial_{k+1} C_{k+1}$ et $Z_k = \ker(\partial_k)$, alors on a $Z_k = B_k$. On a aussi une suite exacte

$$0 \to Z_{k+1} \to C_{k+1} \overset{\partial_{k+1}}{\to} B_k \to 0,$$

où la première flèche est l'injection de Z_{k+1} dans C_{k+1}. On suppose toujours que les C_k et les B_k sont libres. Comme on suppose B_k projectif, on a un isomorphisme $C_{k+1} \simeq Z_{k+1} \oplus B_k$, qui devient un isomorphisme $C_{k+1} \simeq B_{k+1} \oplus B_k$ puisque $Z_{k+1} = B_{k+1}$ en tant que sous-modules de C_{k+1}. Notons $\phi_k : C_k \to B_k \oplus B_{k-1}$ cet isomorphisme. On souhaite le voir comme un élément de $K_1(A)$, c'est-à-dire avoir une matrice qui le représenterait. On sait déjà que C_k vient avec sa base préférée, par hypothèse. On *choisit* une base pour tout B_k. On peut maintenant considérer des notations matricielles et on note $[\phi_k]$ sa classe dans $K_1(A)$. On montre dans quelques lignes que la classe $[\phi_k]$ ne dépend pas des choix de bases des modules B_k.

La *torsion* de C est l'élément de $K_1(A)$ donné par :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k [\phi_k].$$

On a utilisé la notation additive ici, qui est celle de Milnor [31], mais l'utilisation du déterminant ci-après nous invitera à utiliser plutôt une notation multiplicative.

Notons que le déterminant $\det : K_1(A) \to A^\times$ est un morphisme de groupes abéliens. Nous allons nous intéresser seulement au cas où $A = \mathbb{Z}/(d)$ pour un entier $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dans ce cas :

Proposition 1.11.1. *Il y a un isomorphisme :*

$$\det : K_1(\mathbb{Z}/(d)) \to (\mathbb{Z}/(d))^\times,$$

où $(\mathbb{Z}/(d))^\times$ est l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/(d)$.

La proposition vient du fait plus général, voir [31, Exemple 1.4] que le déterminant est un isomorphisme dans le cas où A a un nombre fini d'idéaux maximaux. La proposition est aussi vraie pour $d = 0$, et on a $K_1(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(2)$. L'isomorphisme est aussi donné par le déterminant.

On considère alors $A = \mathbb{Z}/(d)$ dans le reste de la section, pour $d \in \mathbb{N}$. La *torsion* de C est alors l'élément :

$$\tau(C) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\phi_k))^{(-1)^k},$$

où on a utilisé la notation *multiplicative* du déterminant différente donc de la notation additive utilisée par Milnor [31] qui a été utilisée juste avant.

On vérifie la bonne définition de τ, c'est-à-dire que τ ne dépend pas de la manière dont on a choisi ϕ_k. Si $\psi_k : B_k \to B_k$ est un isomorphisme, et que $\phi'_k = (\psi_k, \psi_{k-1}) \circ \phi_k$, alors :

$$\begin{aligned}
\prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\phi'_k))^{(-1)^k} &= \prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\psi_k)\det(\psi_{k-1}))^{(-1)^k} (\det(\phi_k))^{(-1)^k} \\
&= \left[\prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\phi_k))^{(-1)^k}\right] \left[\prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\psi_k)\det(\psi_{k-1}))^{(-1)^k}\right] \\
&= \left[\prod_{k\in\mathbb{Z}} (\det(\phi_k))^{(-1)^k}\right].
\end{aligned}$$

Historiquement, la notion de torsion, en topologie, a été définie par Franz, Reidemeister et de Rham pour l'étude de certains espaces simpliciaux. Elle a été généralisée par J.H.C. Whitehead

qui a défini une notion de torsion pour toute équivalence d'homotopie. Enfin, elle a été utilisée dans le cadre du théorème du s-cobordisme, de Barden Mazur et Stallings (indépendamment) et pour la classification des espaces lenticulaires. Nous verrons en section 3.4 que la torsion semble être un outil important pour l'étude du problème qui occupe cette thèse, dans un cas particulier.

Chapitre 2

Problème d'extension de germes sans points critiques de la sphère à la boule

Sommaire

2.1 Le problème 43
2.2 Résultats de Blank-Laudenbach et de Curley 45
2.2.1 Blank et Laudenbach : le cas du cercle 45
2.2.2 Curley : la sphère de dimension 2 47
2.3 Résultats de Barannikov 50
2.3.1 FMC et FMC sous forme canonique 53
2.3.2 FMC sous forme canonique, deuxième interprétation 58
2.4 Théorème principal : une condition nécessaire 61
2.4.1 $G(\tilde{f})$ 62
2.4.2 Le théorème principal 66
2.4.3 Différences avec le travail de Barannikov 80
2.5 La condition du théorème 2.4.6 n'est pas suffisante 84

Après ce chapitre introductif, il est temps d'attaquer le coeur du problème. Nous commençons par l'exposer, puis parlons des résultats de Blank et Laudenbach, Curley et Barannikov, pour ensuite énoncer le théorème 2.4.6 et le démontrer. On termine par montrer que la condition nécessaire d'extension exhibée n'est pas suffisante en toute généralité.

2.1 Le problème

Nous rappelons la question principale de ce manuscrit, après quelques définitions.

Soit V une variété à bord ∂V telle que ∂V est une variété fermée. Il y alors un voisinage $\mathcal{U}$ de ∂V dans V tel que $\mathcal{U}$ est difféomorphe à $\partial V \times [0, \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$. Un tel voisinage est un *voisinage collier* de ∂V dans V. Nous utiliserons la notation $(x, t) \in \partial V \times [0, \varepsilon)$ pour une paramétrisation d'un voisinage collier.

Nous donnons la définition suivante de germe de Morse :

Définition 2.1.1 (Germe de Morse)**.** Soit f une fonction de Morse définie sur une variété fermée ∂V, un *germe de Morse* qui étend f est une classe d'équivalence de fonctions $\tilde{f} : \partial V \times [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

telle que $\tilde{f}$ est une fonction de Morse qui se restreint à f sur $\partial V \times \{0\}$, et où deux fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont équivalentes si elles sont égales sur un voisinage $\partial V \times [0, \varepsilon')$ pour ε' aussi petit que souhaité.

On rappelle qu'une fonction de Morse sur une variété à bord n'a pas de points critiques sur son bord, par définition. En particulier, on peut toujours considérer des représentants d'un germe $\tilde{f}$ défini le long d'une variété ∂V qui n'ont pas de points critiques sur le bord. Par un abus de langage, nous identifierons implicitement un représentant $\tilde{f}$ du germe et le germe lui-même. On rappelle qu'une fonction de Morse sur une variété à bord telle $\partial V \times [0, 1)$ n'a pas de points critiques sur son bord. Ainsi, pour tout germe de Morse, il existe un représentant $\tilde{f} : \partial V \times [0, \varepsilon)$ qui n'a pas de points critiques.

Nous considérerons exclusivement dans le reste du manuscrit le cas $\partial V = \mathbb{S}^n$, où $\mathbb{S}^n$ est la sphère standard de dimension n plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, et $V = \mathbb{D}^{n+1}$, la boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le voisinage collier $\mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon)$ sera alors plongé dans $\mathbb{D}^{n+1}$ via l'application $(x, t) \mapsto (1 - t)x$. La sphère $\mathbb{S}^n \times \{t\}$ est ainsi la sphère de rayon $1 - t$.

Voici le problème principal abordé dans cette thèse :

Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse défini le long de $\mathbb{S}^n$.

Question 2.1.2. *Quand $\tilde{f}$ s'étend-il à une fonction F sur $\mathbb{D}^{n+1}$ sans points critiques ?*

On rappelle certaines notations. Si p est un point critique de f, restriction de $\tilde{f}$ à $\mathbb{S}^n \times \{0\}$, alors l'étiquette de p est $+$ si $\partial_t \tilde{f}(p) < 0$ et l'étiquette est $-$ si $\partial_t \tilde{f}(p) > 0$. On note alors p_k le nombre de points critiques d'indice k et d'étiquette $+$ et on note q_k le nombre de points critiques d'indice k et d'étiquette $-$.

Remarquons qu'il y a certaines conditions évidentes pour qu'un germe $\tilde{f}$ s'étende sans points critiques. Soit $\tilde{f}$ un germe tel que le maximum global de f est d'étiquette $-$. Supposons qu'il y ait une extension $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Comme $\partial_t F(max, 0) > 0$ localement autour de ce maximum, F a nécessairement un maximum global à l'intérieur de $\mathbb{D}^{n+1}$, et a donc un point critique. Ainsi, si F est une extension de $\tilde{f}$ sans points critiques, alors le maximum global de f est d'étiquette $+$. De même, le minimum global de $\tilde{f}$ doit être d'étiquette $-$. En utilisant le complexe introduit par Laudenbach [23], on montre aussi que $\tilde{f}$ doit vérifier les inégalités de Morse à bord. On rappelle que ces inégalités sont, dans le cas $V = \mathbb{D}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq j \leq n} q_j (-1)^j &= 1, \\
\sum_{0 \leq j \leq n} p_j (-1)^j &= (-1)^n, \\
\sum_{0 \leq j \leq k} q_j (-1)^j &\geq 0, \\
\sum_{n-k \leq j \leq n} p_j (-1)^{j+n} &\geq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $k < n$, où le 1 à droite de la première équation est la caractéristique d'Euler du disque $\mathbb{D}^{n+1}$.

Toutes les restrictions f de germes de Morse seront supposées excellentes.

2.2 Résultats de Blank-Laudenbach et de Curley

2.2.1 Blank et Laudenbach : le cas du cercle

À ma connaissance, la question 2.1.2 a été initialement posée dans [10], où les auteurs donnent une réponse complète pour $n = 1$. Blank et Laudenbach donnent en fait une réponse à la question générale :

Question 2.2.1. *Soit V une surface orientable compacte à bord. Notons ∂V le bord et considérons un germe de Morse $\tilde{f}$ défini le long de ∂V. À quelles conditions $\tilde{f}$ s'étend-il sans points critiques à une fonction $F : V \to \mathbb{R}$?*

Pour cette section, nous allons rester avec l'exemple de $V = \mathbb{D}^2$ et $\partial V = \mathbb{S}^1$. Soit donc $\tilde{f}$ un germe de fonction le long de $\mathbb{S}^1$. La fonction f ne présente que deux types de points critiques : des minimums locaux et des maximums locaux. Supposons que $\tilde{f}$ a une extension F sans points critiques sur $\mathbb{D}^2$. On peut toujours modifier F de telle à manière à obtenir une fonction F' telle que :

- F' est lisse et étend f mais a des points critiques, tous sur le bord. F' n'a donc pas de points critiques intérieurs ;
- localement autour d'un maximum max de f, la fonction F' a un modèle quadratique local $(x, t) \mapsto f(max) - x^2 \pm t^2$, où le signe devant t^2 est $+$ si max est d'étiquette $-$, et est $-$ si max est d'étiquette $+$. On rappelle que x est la coordonnée locale sur le cercle, et t représente la coordonnée normale entrante dans le disque ;
- de même, localement autour d'un minimum min de f, la fonction F' a un modèle quadratique local $(x, t) \mapsto f(min) + x^2 \pm t^2$, où le signe devant t^2 est $+$ si min est d'étiquette $-$, et est $-$ si min est d'étiquette $+$;

On obtient une telle fonction en modifiant localement les dérivées normales de F près des points critiques de f. La fonction F' nous permet de considérer une fonction de Morse lisse sur le *double* de $\mathbb{D}^2$, c'est-à-dire $\mathbb{S}^2$. Si on voit $\mathbb{S}^2$ comme deux disques recollés $\mathbb{D}^2_1 \cup_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2_2$, alors on peut définir une fonction $G : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ qui est égale à F' sur chacun des disques. Modulo des hypothèses sur les dérivées normales à $\mathbb{S}^1$, la fonction G est une fonction de Morse dont les points critiques sont sur le cercle central, avec les indices suivants, d'après les modèles locaux autour des points critiques de F' :

- un point critique d'indice k et d'étiquette $+$ donne un point critique d'indice $k + 1$ pour G ;
- un point critique d'indice k et d'étiquette $-$ donne un point critique d'indice k pour G.

Fort de ces remarques, nous appellerons *faux maximum* les points d'indice 1 et étiquette $-$ et *faux minimum* les points d'indice 0 et étiquette $+$.

Retrouvons "avec les mains" les égalités de Morse à bord énoncées dans la section 1.9 :

Lemme 2.2.2. *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long du cercle qui s'étend sans points critiques à une fonction $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}$. On a $p_1 = p_0 + 1$ et $q_0 = q_1 + 1$.*

Démonstration. Remarquons déjà que $p_1 + q_1 = p_0 + q_0$, ce qu'on réécrit $p_1 - p_0 = q_0 - q_1$. C'est simplement la nullité de la caractéristique d'Euler du cercle. Continuons avec les notations précédentes, et notons $G : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de Morse sur le double induite par F. Notons r_k le nombre de points d'indice k de G. On a donc, d'après ce qui précède :

- $r_0 = q_0$;
- $r_1 = q_1 + p_0$;
- $r_2 = p_1$.

La caractéristique d'Euler de la sphère donne $r_2 - r_1 + r_0 = 2$. Ce qui donne $p_1 + q_0 - (q_1 + p_0) = 2$. Avec $q_0 - q_1 = p_1 - p_0$, on obtient $2(p_1 - p_0) = 2$, et donc $p_1 = p_0 + 1$, et $q_0 = q_1 + 1$. □

Voici le théorème de Blank et Laudenbach, en utilisant les notations précédentes :

Théorème 2.2.3. *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long du cercle. $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques à une fonction $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}$ si et seulement si*

- *$p_1 = p_0 + 1$;*
- *on peut relier tout maximum − de f a un maximum + de valeur critique supérieure et tout minimum + à un minimum − de valeur critique inférieure par un segment dans le disque, de telle manière à ce que les segments ne s'intersectent pas.*

On trouvera en figures 2.1 et 2.2 deux exemples de germes, un qui s'étend sans points critiques, et un autre qui ne s'étend pas sans points critiques car deux des segments définis s'intersectent nécessairement.

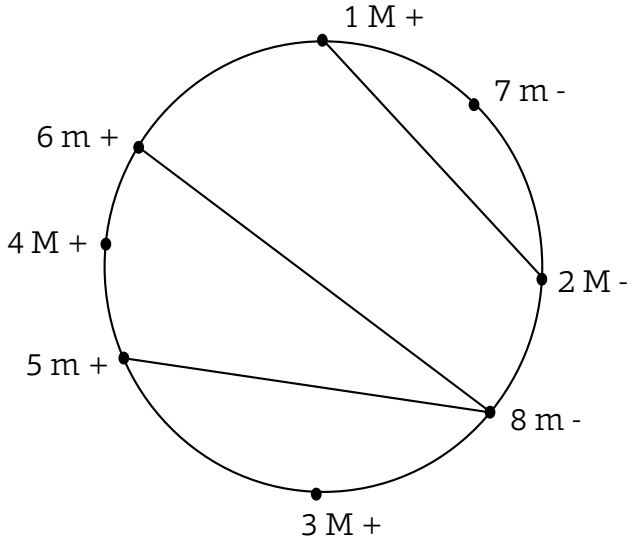

FIGURE 2.1 – Exemple de germe sur $\mathbb{S}^1$ qui s'étend sans points critiques. La lettre M désigne un maximum et la lettre m désigne un minimum. Le chiffre désigne l'ordre du point : le premier point est celui dont la valeur critique est la plus haute. + ou − désigne l'étiquette.

Idée de démonstration, voir [10]. Supposons que le germe puisse s'étendre sans points critiques à une fonction F. Alors pour un champ de gradient tangent au bord sur $\mathbb{D}^2$, une ligne de gradient dans la variété stable d'un point de $\mathcal{C}_1^-(\tilde{f})$ aura pour origine un point de $\mathcal{C}_1^+(\tilde{f})$. On peut se convaincre de cela en adoptant le point de vue du double : un point critique de f d'indice 1 et d'étiquette − devient un point d'indice 1 pour la fonction G définie sur le bord. Un champ de gradient tangent au bord définit un champ de gradient sur la sphère qu'on peut déformer pour obtenir un champ Morse-Smale. Génériquement, toute ligne de gradient dans la variété stable d'un point − d'indice 1 aura pour origine un point d'indice 2, c'est-à-dire un point + d'indice 1. De même on trouve des lignes de gradients joignant les points + et d'indice 0 à des points − d'indice 0 de valeur critiques inférieures. Nécessairement, ces lignes ne s'intersectent pas, et donc les segments de mêmes extrémités respectives non plus. La condition nécessaire est démontrée.

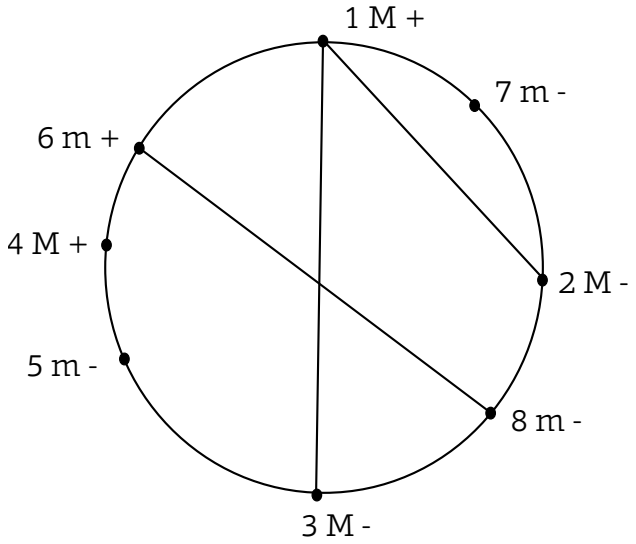

FIGURE 2.2 – Exemple de germe sur $\mathbb{S}^1$ qui ne s'étend pas sans points critiques. La lettre M désigne un maximum et la lettre m désigne un minimum. Le chiffre désigne l'ordre du point : le premier point est celui dont la valeur critique est la plus haute. + ou − désigne l'étiquette.

Démontrons qu'elle est suffisante. On note k le nombre des segments. Si on note $\mathcal{U}$ un voisinage de ces segments dans $\mathbb{D}^2$, et V_1,...,V_{k+1} les composantes connexes du complémentaire de $\mathcal{U}$ dans le disque. On a que chaque V_j est un disque. On peut étendre facilement $\tilde{f}$ à $\mathcal{U}$, par interpolation, de manière lisse et sans points critiques. Le long du bord ∂V_j de chaque V_j on a donc un germe $\tilde{f}_j$, dont les points critiques sont ceux de $\tilde{f}$, excepté les faux maximums et les faux minimums. Notant $R(\tilde{f}) := (p_1 + q_0) - (p_0 + q_1)$, la différence entre le nombre de vrais extremums et le nombre de faux extremums d'un germe, on obtient l'équation

$$R(\tilde{f}) = \sum R(\tilde{f}_j) - 2k,$$

car chaque ligne correspond à un faux extremum et que le vrai extremum qui est extrémité d'un des segments se "dédouble" (pour chaque composante connexe V_j à laquelle il appartient). Remarquons alors que nous avons $R(\tilde{f}_j) \geq 2$, car les germes $\tilde{f}_j$ n'ont que des vrais extremums, et l'hypothèse dit que $R(\tilde{f}) = 2$. Alors, $R(\tilde{f}_j) = 2$ pour tout j. Cela implique que chaque germe $\tilde{f}_j$ n'a en fait qu'un seul *vrai* maximum et qu'un seul *vrai* minimum. Chaque germe $\tilde{f}_j$ est donc un germe trivial, qu'on peut étendre sans points critiques, voir par exemple la section 3.1.1. □

2.2.2 Curley : la sphère de dimension 2

Dans [6], Curley donne une condition nécessaire et suffisante d'extension sans points critiques d'un germe défini le long de $\mathbb{S}^2$. La condition est de nature combinatoire et l'outil central utilisé est un graphe de Reeb étiqueté, le *graphe de Curley*.

Définition 2.2.4 (Graphe de Curley)**.** Donné un germe $\tilde{f}$ défini le long de $\mathbb{S}^n$, le *graphe de Curley* de $\tilde{f}$ est le graphe de Reeb de f auquel on rajoute près des sommets les étiquettes des points critiques de f données par les dérivées normales au bord.

Avant d'établir le théorème de Curley, regardons si on peut trouver "à la main", comme dans le cas du cercle, l'égalité de Morse à bord propre aux points + et − pour un germe qui s'étend

sans points critiques. Soit donc $\tilde{f}$ un germe défini le long de $\mathbb{S}^2$ qui s'étend sans points critiques à une fonction F. Comme dans la section précédente, on peut définir une fonction de Morse H sur le double $\mathbb{D}^3 \cup_{\mathbb{S}^2} \mathbb{D}^3$ qui se restreint à f sur la sphère $\mathbb{S}^2$ centrale, et dont les seuls points critiques sont ceux de f, avec les propriétés suivantes :

– un point de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ est un point d'indice $k+1$ pour H ;
– un point de $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ est un point d'indice k pour H.

On obtient alors une injection $\iota : \Gamma(\tilde{f}) \hookrightarrow \Gamma(H)$ du graphe de Curley de $\tilde{f}$ dans le graphe de Reeb de H, et cette injection est une bijection entre les sommets (car il y a une identification des points critiques). Grâce aux rapports entre les indices des points critiques de f et les indices des points critiques de H, on peut même donner en figure 2.3 des modèles locaux pour ι près des sommets. En particulier, le lemme 1.10.2 nous dit que seuls les points critiques d'indices 0 ou 2 de H peuvent créer des composantes connexes pour les niveaux. On sait aussi qu'un point critique d'indice 0 pour H ne peut provenir que d'un point $0-$ pour $\tilde{f}$. De même, un point critique d'indice 2 pour H ne peut provenir que d'un point $2-$ ou $1+$ pour $\tilde{f}$, mais seul un point qui augmentait *déjà* le nombre de composantes connexes des niveaux de f peut augmenter le nombre de composantes connexes des niveaux de H. Ainsi, un point $2-$, ne peut pas se projeter sur un sommet trivalent dans $\Gamma(H)$. On obtient les autres modèles locaux par le même genre de considérations.

De plus, on sait que $\iota(\Gamma(\tilde{f})) = \Gamma(H)$ est le graphe de Reeb d'une fonction sur une sphère $\mathbb{S}^3$, qui est simplement connexe. Si $\tilde{f}$ a une extension sans points critiques, le graphe $\Gamma(\tilde{f})$ peut donc s'envoyer dans un graphe de Reeb simplement connexe avec une bijection sur les sommets et des modèles locaux prescrits par la figure 2.3.

On va noter p_J le nombre de points $+$ de type J sur la figure 2.3, p_G les points $+$ de type G et p_S le nombre de points $+$ et type S. On utilise des notations idoines pour les points $-$, remplaçant les p par des q.

Nous affirmons qu'il y a autant de points $G+$ que de points $G-$, et donc $p_G = q_G$. Nous ne prouverons pas en détail cette affirmation. Cela est dû au fait que si Σ est une variété de niveau de l'extension F de $\tilde{f}$, on définit son *genre* comme le genre de la surface Σ à laquelle on a collé des disques le long de chaque composante de bord. On montre alors que le genre des variétés de niveaux de F ne peut augmenter qu'en passant un point $G-$, et ne peut diminuer qu'en passant un point $G+$. En regardant les modèles locaux de la figure 2.3, notamment les points qui créent des composantes connexes pour les niveaux de H, on obtient alors aussi que $p_S = p_0$ et $q_S = q_2$. Nous affirmons aussi que, d'après les modèles locaux, que la composante connexe pour les niveaux de H créée par un point $+$ et type J ne peut être tuée que par un point de $\mathcal{C}_2^+(\tilde{f})$. Nous avons donc $p_2 = p_J + 1$. De même, nous avons $q_0 = q_J + 1$.

Nous obtenons alors, dans ce cas des germes définis le long de $\mathbb{S}^2$ des égalités plus précises que les égalités de Morse à bord générales comme celles exprimées dans la section 2.1.

Le théorème de Curley, que nous ne prouverons pas, est le suivant :

Théorème 2.2.5. *Un germe $\tilde{f}$ défini le long de $\mathbb{S}^2$ s'étend sans points critiques si et seulement s'il y a une surjection $\iota : \Gamma(\tilde{f}) \to \Gamma$ sur un graphe simplement connexe Γ telle que :*

1. *il y a bijection sur les sommets. Localement autour des sommets, ι est décrit par les modèles locaux de la figure 2.3. On dit dans ce cas que le graphe Γ est un* effondrement *de $\Gamma(\tilde{f})$;*
2. *$p_G = q_G$ et pour tout point g de type $G+$, il y a une ligne strictement descendante ℓ dans Γ d'extrémité haute g et d'extrémité basse $\ell(g) \in G-$ tel que l'application $\ell : G+ \to G-$ qui à g associe $\ell(g)$ est une bijection (le graphe est dit* admissible*).*

La démonstration de Curley [6] construit une variété à bord V de dimension 3 bordé par $\mathbb{S}^2$ et une extension de $\tilde{f}$ niveau par niveau sur V, en utilisant les modèles locaux de passage

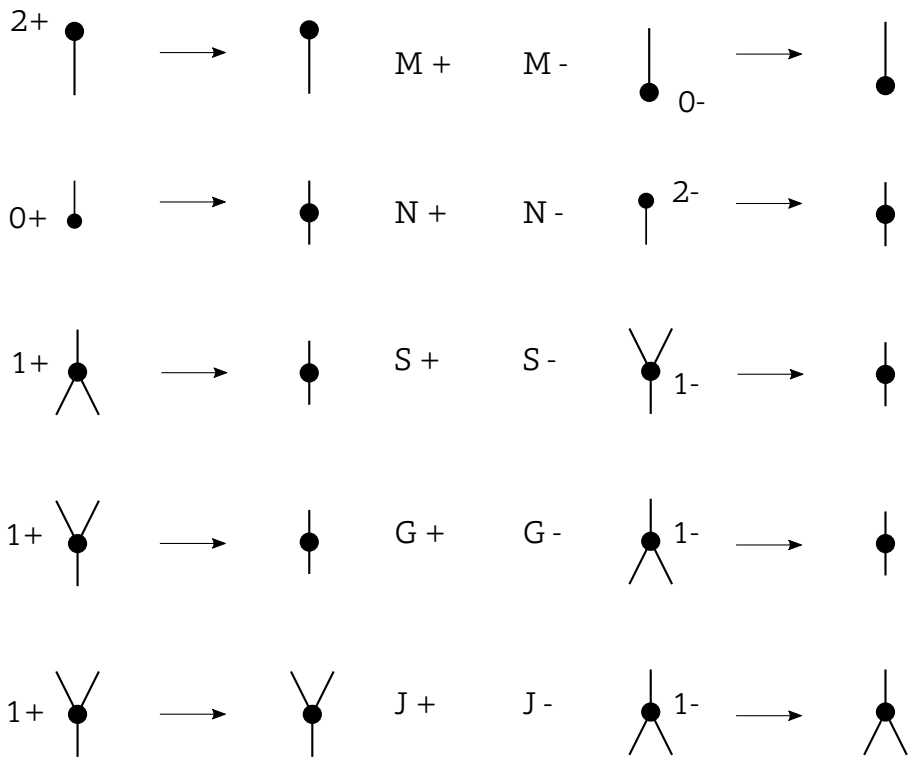

FIGURE 2.3 – Modèles locaux des transformations du graphe de Curley en le graphe de Reeb du double d'une éventuelle extension.

au-dessus d'un point critique décrit en section 1.9. Il s'agit alors de montrer à la fin que la variété à bord V ainsi construite est bien une boule. En illustration du théorème 2.2.5, nous donnons l'exemple d'un germe défini le long de $\mathbb{S}^2$ qui s'étend sans points critiques à une variété V différente de la boule $\mathbb{D}^3$.

Exemple 2.2.6 (Des fonctions qui s'étendent sans points critiques sur d'autres variétés que la boule)**.** Avec les théorèmes de Curley, on peut aussi trouver des germes de Morse définis le long de $\mathbb{S}^2$ qui s'étendent à une variété V qui n'est pas $\mathbb{D}^3$.

Soit $\tilde{f}$ défini le long de $\mathbb{S}^2$ dont le graphe de Curley est représenté en figure 2.4. Le théorème 2.2.5 montre qu'un tel germe ne s'étend pas sur la boule. En effet, les points $2-$ et $0+$ doivent nécessairement se coller à la branche qui relie le maximum global et le minimum global s'il y avait un effondrement. Mais cela impose aux deux points $1+$ et $1-$ d'être de type G, pour que l'effondrement soit simplement connexe. On peut observer alors que l'effondrement ne peut pas être admissible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de ligne strictement descendante dans le graphe de Curley de $\tilde{f}$ qui relie $1+$ à $1-$, et ce, pour la bonne raison que la valeur critique du point $1+$ est strictement inférieure à la valeur critique du point $1-$.

On va décrire la variété à bord V, d'abord niveau par niveau, puis globalement. On représente les niveaux de V en figure 2.5, qu'on déduit grâce aux théorèmes de la section 1.9, et au graphe de Curley de $\tilde{f}$. Il est difficile de dessiner globalement V avec les niveaux de la figure 2.5, mais avec un effort d'imagination, on peut se rendre compte que V se rétracte sur le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$.

En fait, V est le voisinage tubulaire "lissé" du bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ vu comme le 2-squelette de la variété $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. En imaginant que la figure 2.6 représente un plan de coupe de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ où la

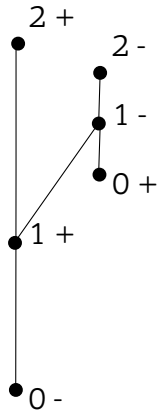

FIGURE 2.4 – Graphe de Curley d'un germe qui ne s'étend pas sur la boule sans points critiques.

sphère extérieure la sphère intérieure sont identifiées, la variété V est la partie gris foncé de la figure 2.6. La partie verticale est un voisinage de $\mathbb{S}^1$ et la partie circulaire un voisinage de $\mathbb{S}^2$.

2.3 Résultats de Barannikov

Le point de départ du théorème principal du manuscrit, le théorème 2.4.6 démontré plus loin, est l'article [2] et le point de vue des chemins de fonctions non critiques, qui est une belle idée de Sergueï Barannikov. Nous expliquons dans cette section quel est ce point de vue, et détaillons les résultats de Barannikov.

Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de $\mathbb{S}^n$ qui s'étend sans points critiques en une fonction $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Considérons z un point à l'intérieur de $\mathbb{D}^{n+1}$. Comme $dF(z) \neq 0$, par le théorème du rang constant, il y a un voisinage B de z, qu'on va supposer difféomorphe à une boule $\mathbb{D}^{n+1}$, tel que $F|_B$ est la projection sur la dernière coordonnée dans un système de coordonnées locales. Le germe défini par F le long de ∂B est tel que :

– $\mathcal{C}^+(F) = \{max_B\}$, le maximum de la restriction de F à ∂B ;
– $\mathcal{C}^-(F) = \{min_B\}$, le minimum de la restriction de F à ∂B.

On introduit alors la définition suivante :

Définition 2.3.1 (Germe trivial)**.** Un germe de Morse $\tilde{f}$ le long de $\mathbb{S}^n$ est dit *trivial* si f n'a pour tout point critique qu'un maximum et qu'un minimum, que le maximum est $+$ et que le minimum est $-$.

Nous verrons au théorème 3.1.2, que tout germe trivial s'étend sans points critiques, ce qui permettra de trouver des cas dans lesquels la condition donnée dans le théorème 2.4.6 est suffisante.

Revenons à la fonction F. Remarquons que $\mathbb{D}^{n+1} \setminus B$ est difféomorphe à un cobordisme trivial $\mathbb{S}^n \times [0,1]$, où $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ correspond à la sphère unité, le long de laquelle $\tilde{f}$ est définie, et $\mathbb{S}^n \times \{1\}$ est le bord ∂B. Ainsi, plutôt que de voir F comme une fonction sans points critiques sur $\mathbb{D}^{n+1}$, on va considérer que c'est un chemin de fonctions entre la fonction f et la fonction $F|_{\partial B}$. Ce chemin, que l'on renomme $(x,t) \mapsto f^t(x)$ est tel que $(d_x f^t(x), \partial_t f^t(x)) \neq 0$ pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$. La notation du temps t en exposant sera plus pratique à manipuler et permettra de ne pas avoir une surabondance d'indices. Quitte à modifier un petit peu le chemin,

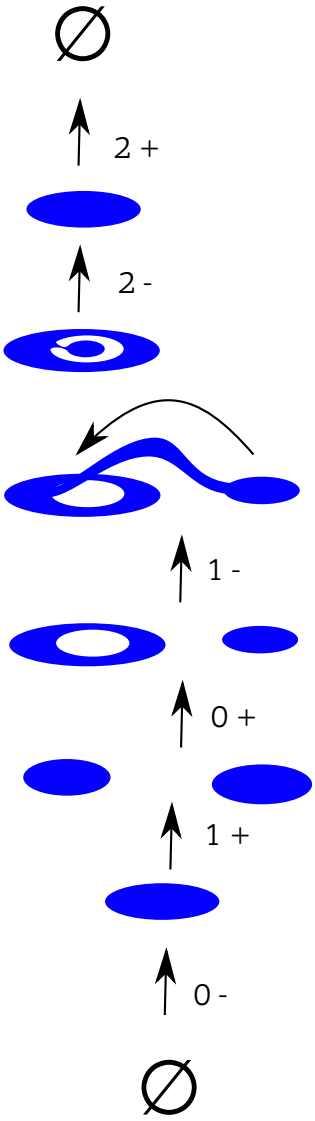

FIGURE 2.5 – Niveaux de la variété à bord V sur laquelle $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques.

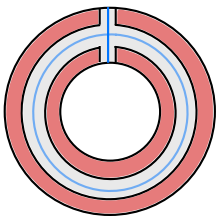

FIGURE 2.6 – Plan de coupe de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Chaque cercle concentrique représente une sphère $\mathbb{S}^2$ et les deux sphères extrémales sont identifiées. Un segment qui joint ces deux sphères représente $\mathbb{S}^1 \times \{\star\}$.

on peut le supposer générique dans le sens de la section 1.7, avec des modèles "non critiques" de mort et de naissance.

Les deux lemmes suivants sont aussi simples à démontrer qu'ils sont importants :

Lemme 2.3.2. *Soit $p \in \mathcal{C}^+(\tilde{f})$. Notons $t \mapsto p^t$ le chemin (lisse) de points critiques tel que $p^0 = p$ et $t \in [0, t_0)$, où t_0 est le temps de maximal d'existence de p^t. Alors $\partial_t f^t(p^t) < 0$ pour tout $t \in [0, t_0)$.*

De la même manière, si $q \in \mathcal{C}^-(\tilde{f})$, alors $\partial_t f^t(q^t) > 0$ pour tout $t \in [0, t_0)$, en calquant les notations du dessus.

Une autre manière de le dire, en voyant t comme le temps et voyant f^t comme une fonction hauteur, *si un point critique de f est $+$, alors il ne fera que descendre jusqu'à sa mort potentielle, et si un point est $-$, il ne fera que monter.*

Démonstration. La démonstration est une application directe du théorème des valeurs intermédiaires. Comme $t \mapsto f^t(p^t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(\partial_t f^t)_{|t=0}(p) < 0$, si il y a un temps t_1 tel que $(\partial_t f^t)_{|t=t_1}(p^{t_1}) \geq 0$, alors il y a un temps t_2 tel que $(\partial_t f^t)_{|t=t_2}(p^{t_2}) = 0$. Mais p^{t_2} est un point critique pour f^{t_2}, ainsi, on obtient

$$(d_x f^{t_2}(p^{t_2}), (\partial_t f^t)_{|t=t_2}(p^{t_2})) = (0, 0),$$

ce qui est exclu. La démonstration est identique si p est $-$. □

Lemme 2.3.3. *Si deux points se tuent pendant un chemin générique de fonctions $t \mapsto f^t$ non critique, alors les points sont de même étiquette.*

Démonstration. Si un (chemin de) point(s) critique(s) p^t s'annihile avec un autre point critique q^t au temps t_0, et si les deux points critiques ont une étiquette différente, alors d'une part le point le plus haut, disons p^t est nécessairement $+$ et d'autre part, le point le plus bas est nécessairement $-$, d'après le lemme précédent. Au temps limite t_0, on a $\lim_{t\to t_0} p^t = \lim_{t\to t_0} q^t$. Appelons cette limite c^{t_0}. Alors, par continuité, on a

$$d_x f^{t_0}(c^{t_0}) = 0,$$

et $(\partial_t f^t)_{|t=t_0}(c^{t_0}) \geq 0$ car q^t est $-$ et $(\partial_t f^t)_{|t=t_0}(c^{t_0}) \leq 0$ car p^t est $+$. Le point c^{t_0} est donc un point critique pour le chemin, ce qui est exclu. □

Comme la fonction f^1 n'a qu'un maximum et un minimum pour tout point critique, pendant le chemin, tous les points critiques de f^0 vont mourir, sauf peut-être un maximum $+$ et un minimum $-$. Il n'est pas impossible que des paires de points critiques apparaissent durant le chemin.

Quand bien même le résultat suivant n'est pas dans l'article [2], il est une condition nécessaire facilement démontrable en prenant le point de vue de Barannikov. Introduisons un peu de terminologie avant tout. Soit $\tilde{f}$ un germe défini le long de la sphère $\mathbb{S}^n$. On voit $\mathbb{S}^n$ comme la sphère plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, et $\mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon)$ comme un voisinage collier de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{D}^{n+1}$. On peut considérer alors $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon) \mapsto \nabla \tilde{f}(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ le gradient euclidien de $\tilde{f}$ sur le voisinage collier. On obtient l'application $x \in \mathbb{S}^n \mapsto Y(\tilde{f})(x) = \frac{\nabla \tilde{f}(x,0)}{||\nabla \tilde{f}(x,0)||} \in \mathbb{S}^n$. On a :

Proposition 2.3.4. *Si $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques, alors l'application $Y(\tilde{f})$ est de degré 0.*

Démonstration. C'est vrai pour un germe trivial, ou simplement pour une fonction coordonnée. Le point de vue de Barannikov montre que si le germe s'étend sans points critiques, on a un chemin entre $\tilde{f}$ et un germe trivial (en fait de type coordonnée quand on le prend sur le voisinage B défini avant) $\tilde{h}$, induisant une homotopie ente $Y(\tilde{f})$ et $Y(\tilde{h})$. Cette homotopie conserve le degré et ainsi $Y(\tilde{f}) = 0$. □

Barannikov introduit des diagrammes qui rendent compte de l'évolution du complexe de Morse de f^t. Ce sont les *Framed Morse Complex*, ou *FMC*, que nous introduisons dans la section qui suit.

2.3.1 FMC et FMC sous forme canonique

Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de $\mathbb{S}^n$ et X un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f. Le *complexe de Morse étiqueté* (en anglais *Framed Morse Complex*, que l'on abrégera par *FMC*) de $\tilde{f}$ et associé à X est un ensemble de n arêtes verticales, une par indice, sur lesquelles nous plaçons des sommets correspondant aux points critiques de f comme suit. Si p est un point critique de f d'indice k, on place un sommet sur la k-ème arête à hauteur $f(p)$. On appellera encore ce sommet p, et on nommera encore *indice* le numéro de la ligne verticale à laquelle p appartient. On joint une paire de sommets (p, q) où p est d'indice $k+1$ et q est d'indice k quand ∂p a une composante non nulle selon q. Plus explicitement, si $\partial p = n(p, q)q + S$, où $n(p, q)$ est dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et S est dans le $\mathbb{Z}$- module engendré par les points d'indice k qui ne sont pas q, alors on joint p à q par une arête, au-dessus de laquelle on indique l'entier $n(p, q)$. Si $n(p, q) = 0$, on ne met aucune arête entre p et q. Si p est $+$, on rajoute au sommet représentant p une flèche qui pointe vers le bas, et si l'étiquette de p est $-$, on rajoute une flèche qui pointe vers le haut. En reprenant les mêmes notations, on continuera d'appeler *étiquette* le sens de la flèche associée à un sommet du FMC, et de la désigner par un $+$ ou un $-$ selon qu'elle pointe vers le bas ou le haut.

Exemple 2.3.5 (Premier exemple)**.** On donne en figure 2.7 le FMC d'un germe trivial.

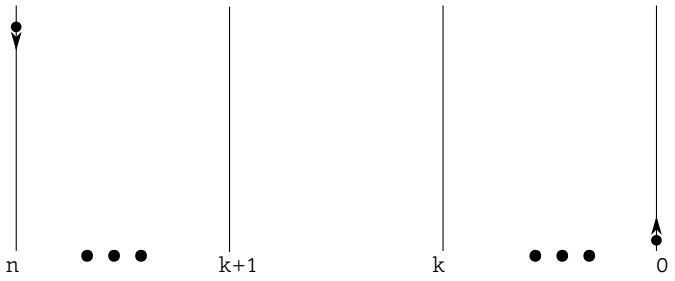

FIGURE 2.7 – FMC d'un germe trivial.

Exemple 2.3.6 (Deuxième exemple)**.** On donne en figure 2.8 le FMC d'un germe $\tilde{f}_0$. La fonction f_0 a 6 points critiques : un maximum, un minimum, deux points d'indice $k+1$ et deux points d'indice k, pour un $2 \leq k \leq n-3$, avec $n \geq 3$. Un des points d'indice $k+1$, noté a, est d'étiquette $+$, et est au-dessus du deuxième point d'indice $k+1$, noté b, qui est d'étiquette $-$. Les deux points d'indice k sont en dessous des points d'indice $k+1$. L'un d'eux est d'étiquette $+$, et sera noté c, l'autre sera d'étiquette $-$ et noté d, avec $f_0(c) > f_0(d)$. Pour un certain pseudo-gradient

adapté X, on a l'opérateur de bord en degré $k+1$:

$$\partial_{k+1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

où :

$$\begin{aligned} \partial_{++,k+1} &= 7, \\ \partial_{+-,k+1} &= 5, \\ \partial_{--,k+1} &= -2, \\ \partial_{-+,k+1} &= -3. \end{aligned}$$

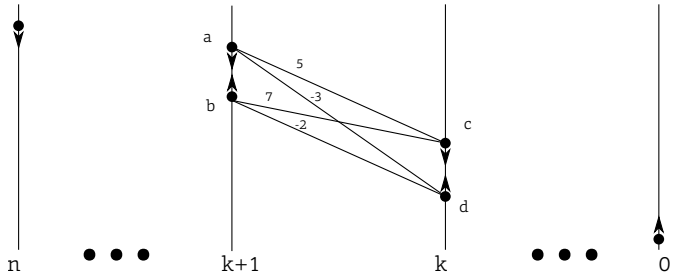

FIGURE 2.8 – FMC de $\tilde{f}_0$.

Un FMC est juste une représentation graphique du complexe de Morse associé à un germe $\tilde{f}$ et un pseudo-gradient adapté et Morse-Smale X. L'idée principale de [2, Theorem 1] est la suivante :

Théorème 2.3.7 (Barannikov)**.** *Si un germe s'étend sans points critiques alors son FMC peut être relié au FMC d'un germe trivial avec les modifications autorisées listées suivantes :*

1. *si deux sommets p et q du FMC sont d'indices consécutifs $k+1$ et k, on peut modifier $n(p,q)$ en $n(p,q) \pm n(p',q)$ où p' est un sommet d'indice $k+1$ tel que $f(p') < f(p)$. On peut aussi modifier $n(p,q)$ en $n(p,q) \pm n(p,q')$ où q est un sommet d'indice k avec $f(q') > f(q)$;*
2. *on peut éliminer une paire de sommets p et q, de même étiquette, d'indices consécutifs $k+1$ et k et de hauteurs consécutives quand $n(p,q) = 1$, et $n(p,q') = 0$ pour tout autre sommet d'indice k. Le nouvel FMC est obtenu en enlevant les sommets p et q et toutes les éventuelles arêtes d'extrémités p ou q ;*
3. *on peut créer une nouvelle paire de sommets en insérant une paire (p,q) d'indices $(k+1,k)$ de hauteurs consécutives, avec $n(p,q) = 1$ et tel qu'aucune autre arête ne joigne p ou q à un autre sommet ;*
4. *un sommet p d'indice $k+1$ peut descendre en dessous d'un sommet q d'indice k si et seulement si ils ont des hauteurs consécutives, que p est d'étiquette $+$, et que $n(p,q) = 0$;*
5. *un sommet q d'indice k peut monter au-dessus d'un sommet p d'indice $k+1$ si et seulement si ils ont des hauteurs consécutives, que q est d'étiquette $-$, et que $n(p,q) = 0$;*

6. *un sommet p d'indice k peut toujours descendre en dessous d'un sommet d'indice différent de $k-1$ ou $k+1$ et de hauteur consécutivement inférieure, à partir du moment où p est d'étiquette $+$;*
7. *de même, un sommet p d'indice k peut toujours monter au-dessus d'un sommet d'indice différent de $k-1$ ou $k+1$ et de hauteur consécutivement supérieure, à partir du moment où p est d'étiquette $-$;*

Une succession de ces modifications est un *chemin admissible* de FMC.

Ces modifications sont des transcriptions sur le FMC des accidents qui surviennent lors d'un chemin générique de fonctions munies de pseudo-gradients adaptés qui commence en (f, X) et se termine sur un germe trivial et tel que le chemin n'a pas de singularités globales. Le lemme 2.3.3 impose que seules des paires de même étiquettes peuvent se tuer, dont les valeurs critiques sont consécutives et avec une seule ligne de gradient entre les deux points. Et donc sur le FMC, seules des paires de sommets avec les mêmes étiquettes, de hauteurs et d'indices consécutifs et ayant un 1 au-dessus de l'arête les joignant peuvent disparaître. Le lemme 2.3.2 impose que les sommets du FMC avec une flèche descendante ne peuvent que descendre, et ceux avec une flèche montante ne peuvent que monter.

Nous allons maintenant détailler l'objet introduit par Barannikov au cœur du résultat principal de [2]. Plutôt que de considérer des coefficients entiers, on va considérer des coefficients dans un corps. Soit $\mathbb{F}$ un corps, comme par exemple $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}/(d)$ où d est premier. Notons $T(r, \mathbb{F})$ le groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, sous-groupe de $GL_r(\mathbb{F})$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(r)$ une permutation, la matrice de permutation associée à σ est la matrice S telle que $Se_j = e_{\sigma(j)}$, où $(e_j)_{1 \leq j \leq r}$ est la base canonique. Rappelons le théorème suivant :

Théorème 2.3.8 (Décomposition de Bruhat)**.** *Soit $M \in GL_r(\mathbb{F})$. Il y a une matrice de permutation S et deux matrices T et T' dans $T(r, \mathbb{F})$ telles que :*

$$M = TST'.$$

En utilisant ce théorème, Barannikov démontre qu'on peut considérer un opérateur de bord $\partial^{\mathbb{F}}$ défini de manière canonique sur $\mathbb{F}\mathcal{C}(f)$, que nous détaillons ci-dessous. Soit f une fonction de Morse sur une variété de dimension n. Notons $(a_i^k)_{1 \leq i \leq r_k}$ ses points critiques d'indice k, avec l'ordre décroissant des valeurs critiques. C'est-à-dire que a_1^k est le point critique de f d'indice k dont la valeur critique est maximale, et la valeur critique de $a_{r_k}^k$ est minimale. Soit X un pseudo-gradient adapté à f et Morse-Smale et $\partial(X)$ l'opérateur de bord à coefficients dans $\mathbb{Z}$ associé. Notons $\partial^{\mathbb{F}}(X)$ le bord après tensorisation par $\mathbb{F}$. Soit $pr_{\mathbb{F}} : x \mapsto x \otimes 1$ qui va de $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ dans $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f) \otimes \mathbb{F}$. On a

$$\partial^{\mathbb{F}}(X)(pr_{\mathbb{F}}(x)) = pr_{\mathbb{F}}(\partial(X)(x)).$$

Théorème 2.3.9. *Il y a des matrices $T_k \in T(r_k, \mathbb{F})$ tel que l'opérateur de bord $\partial^{\mathbb{F}}$ défini par :*

$$\partial_{k+1}^{\mathbb{F}} := T_k \partial^{\mathbb{F}}(X)(T_{k+1})^{-1}$$

a les propriétés suivantes. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, et pour tout point critique a_j^{k+1} d'indice $k+1$, une seule de ces possibilités se produit, où on note r_k le nombre de points critique d'indice k :

- *$\partial^{\mathbb{F}} a_j^{k+1} = a_{\sigma(j)}^k$ pour un point critique $a_{\sigma(j)}^k$ d'indice k, où $\sigma(j)$ est tel que $1 \leq \sigma(j) \leq r_k$, et $a_{\sigma(j)}^k$ n'est dans l'image d'aucun autre point,*
- *$\partial^{\mathbb{F}} a_j^{k+1} = 0$.*

De plus, l'opérateur $\partial^{\mathbb{F}}$ est unique, dans le sens où il ne dépend pas de X, et a l'homologie à coefficients dans $\mathbb{F}$ de la variété sur laquelle f est définie.

On se place dans le cas où $\tilde{f}$ est défini le long de la sphère. Si $\partial^{\mathbb{F}} a_j^{k+1} = 0$, soit a_j^{k+1} est l'image d'un point d'indice $k+2$, soit il représente une classe d'homologie non nulle de $\partial^{\mathbb{F}}$. L'homologie de la sphère étant $\mathbb{F}$ en degrés 0 et n et 0 dans les autres degrés, il n'y a qu'un maximum max et un minimum min pour lesquels $\partial^{\mathbb{F}} max = 0$ et $\partial^{\mathbb{F}} min = 0$ et qui ne sont les images d'aucun point. On donne une autre interprétation dans la sous-section suivante du lien entre p et q dans le cas où $\partial^{\mathbb{F}} p = q$.

Exemple 2.3.10 (Le germe $\tilde{f}_0$.)**.** On reprend l'exemple 2.3.6. Regardons les appariements entre les points d'indice $k+1$ et k de f_0. Il s'agit d'étudier l'action

$$(T, T') \mapsto T \partial_{k+1}^{\mathbb{F}} T'$$

où T et T' sont dans $\mathcal{T}(2, \mathbb{F})$. La matrice de permutation qu'on va obtenir, notée $S^{\mathbb{F}}$, dépendra de la caractéristique du corps.

Remarquons déjà le fait suivant :

Lemme 2.3.11. *Si M est une matrice 2×2 à coefficients dans un anneau A, alors*

$$M_{1,2} = 0 \Leftrightarrow (TMT')_{1,2} = 0,$$

où T et T' sont toutes deux dans $\mathcal{T}(2, \mathbb{F})$.

La démonstration est un calcul explicite.

Ainsi, avec ce lemme, et sachant qu'on recherche une matrice de permutation $S^{\mathbb{F}}$, on obtient que :

- $S^{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si la caractéristique de $\mathbb{F}$ n'est pas 5 ;
- $S^{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si la caractéristique de $\mathbb{F}$ est 5.

On peut définir le diagramme du complexe dont le bord est $\partial^{\mathbb{F}}$ de la même manière que pour la construction du FMC avec coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ce diagramme est la *forme canonique* du FMC de $\tilde{f}$ par rapport au corps $\mathbb{F}$, et il ne dépend que de $\tilde{f}$ et $\mathbb{F}$. Pour un tel diagramme, il est inutile d'indiquer le nombre $n(p, q)$ au-dessus d'une arête joignant les sommets p et q, puisque le nombre $n(p, q)$ vaut 0 ou 1 pour le bord $\partial^{\mathbb{F}}$. On sait alors directement que $\partial^{\mathbb{F}} p = q$ s'il y a une arête entre les deux sommets.

Voilà le théorème de Barannikov sur l'extension des germes sans points critiques :

Théorème 2.3.12. *Si un germe $\tilde{f}$ défini le long de la sphère $\mathbb{S}^n$ s'étend sans points critiques, alors, pour n'importe quel corps $\mathbb{F}$, la forme canonique de son FMC peut être réduite à la forme canonique du FMC d'un germe trivial, avec seulement les modifications décrites sur les figures 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12.*

Voici quelques explications pour comprendre ces figures :

- les figure ne représentent que les paires de sommets sur lesquelles les modifications opèrent. Les formes canoniques de FMC généraux peuvent présenter bien d'autres sommets ;

– dans toutes les figures, les petites flèches verticales attachées aux sommets (qui correspondent aux étiquettes) ne sont pas représentées, mais sur un FMC, les sommets avec une flèche pointant vers le bas ne peuvent que descendre et ceux avec une flèche pointant vers le haut ne peuvent que monter ;
– les double flèches verticales entre deux sommets sur le même segment vertical sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11 indiquent que le plus haut sommet va sous l'autre (et donc, le plus haut sommet a sa flèche qui pointe vers le bas), ou que le plus bas des deux sommets va au-dessus de l'autre (et donc, sa flèche pointe vers le haut) ;
– sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11, les grosses doubles flèches diagonales entre les diagrammes indiquent que les modifications peuvent être faites dans les deux sens, du moment que les flèches attachées aux sommets le permettent ;
– sur la figure 2.12, les flèches des deux sommets doivent avoir la même direction (et donc les points critiques correspondant ont la même étiquette) et leurs hauteurs doivent être consécutives.

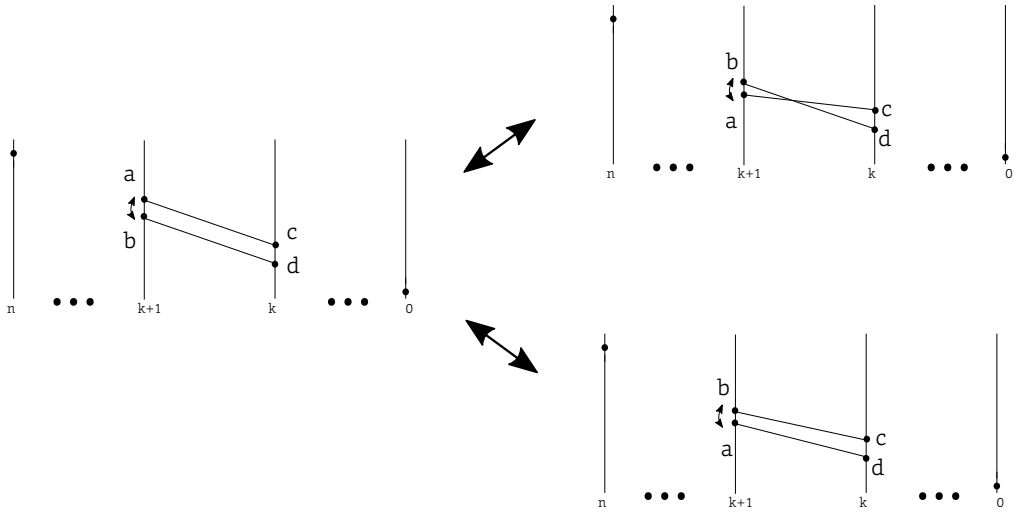

FIGURE 2.9 – Croisement de deux sommets de même indice.

Nous insistons sur la nature combinatoire du théorème. On dira qu'un tel chemin est un chemin *admissible* de formes canoniques de FMC. Une grosse partie de la démonstration est dédiée à montrer que la forme canonique du FMC peut être réduite à la forme canonique du FMC d'un germe trivial sans apparition de paires de sommets. C'est pourquoi en figure 2.12, la grosse flèche horizontale ne va que de la gauche vers la droite. Ainsi, donné un corps, on peut vérifier *en temps fini* si la forme canonique du FMC d'un germe se réduit à la forme canonique du FMC du germe trivial . Nous soulignons cependant, qu'il faudrait en théorie vérifier cela pour *tous* les corps, ce qui ne se fait pas *a priori* en un temps fini.

Nous terminons cette sous-section par la remarque suivante, importante pour la section 2.4.3, et que nous élevons au rang de proposition, quand bien même la démonstration est évidente :

Proposition 2.3.13. *Soit $\mathbb{F}$ un corps.*

Un chemin de FMC admissible sans création de paires de sommets se projette sur un chemin admissible de formes canoniques de FMC à coefficients dans $\mathbb{F}$.

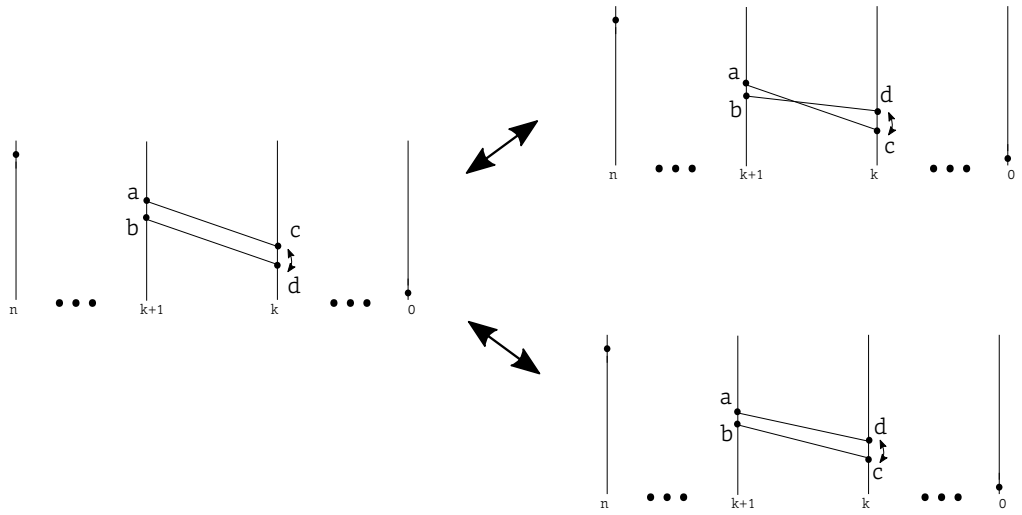

FIGURE 2.10 – Croisement de deux sommets de même indice.

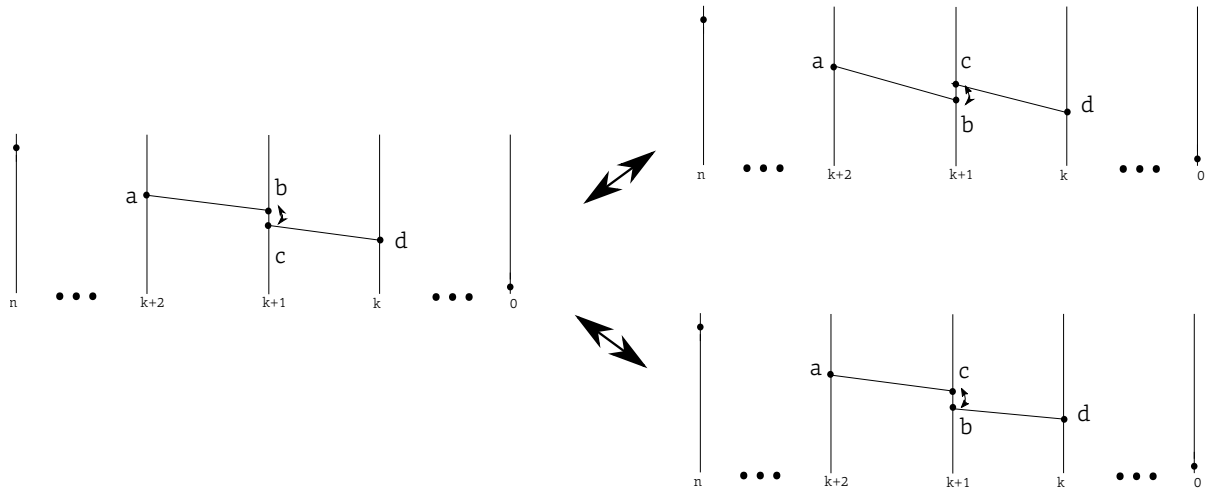

FIGURE 2.11 – Croisement de deux sommets de même indice.

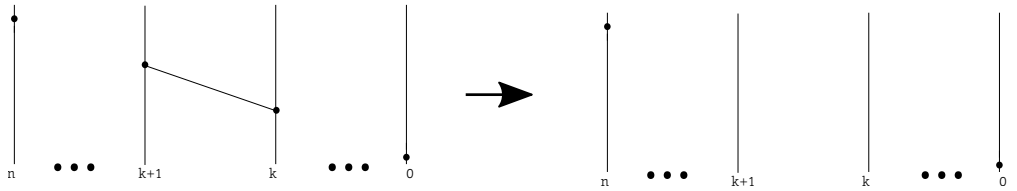

FIGURE 2.12 – Mort d'une paire de points critiques.

2.3.2 FMC sous forme canonique, deuxième interprétation

Nous pouvons donner une autre interprétation au complexe introduit par Barannikov. Celle que nous allons donner ici est reprise de [9, Section 2] et [24], et est à mettre en perspective avec la théorie de Morse persistante, voir par exemple [12] pour une introduction. On fixe un corps

$\mathbb{F}$ et une fonction de Morse excellente $f : V \to \mathbb{R}$ sur une variété fermée V tout au long de cette sous-section.

Soit p un point critique de f d'indice $k+1$ et de valeur critique c. Reprenant les notations de [24], nous noterons $f^\alpha := f^{-1}((-\infty, \alpha])$. Notons $\sigma \in f^{c-\varepsilon}$ la sphère d'attachement de p. Nous avons la suite exacte suivante (avec coefficients dans $\mathbb{F}$), dérivée de la suite exacte longue provenant des inclusions $\emptyset \hookrightarrow f^{c-\varepsilon} \hookrightarrow f^{c+\varepsilon}$:

$$0 \to H_{k+1}(f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \xrightarrow{\Delta} H_k(f^{c-\varepsilon}) \to H_k(f^{c+\varepsilon}) \to 0.$$

On peut noter que $H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon})$ est isomorphe à $\mathbb{F}$ puisqu'on ne fait que passer un point critique d'indice $k+1$ entre $f^{c-\varepsilon}$ et $f^{c+\varepsilon}$. En termes de complexes cellulaires, cela correspond à rajouter une cellule de dimension $k+1$ à $f^{c+\varepsilon}$.

Deux cas peuvent alors se produire, soit $\Delta = 0$, soit Δ est injective et non nulle. Dans le premier cas, on crée une nouvelle classe d'homologie de degré k dans $f^{c+\varepsilon}$. Dans le second cas, la classe en homologie de σ tue une classe d'homologie de degré k dans $f^{c-\varepsilon}$, *a priori* créée par un point d'indice k.

Nous pouvons encore diviser en deux cas la situation où $\Delta = 0$. Nous avons une suite exacte courte :

$$0 \to H_{k+1}(f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}) \to \mathbb{F} \to 0.$$

On a donc un isomorphisme $H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}) \simeq H_{k+1}(f^{c-\varepsilon}) \oplus \mathbb{F}$, car $\mathbb{F}$ est un corps (en particulier, toute suite exacte courte se scinde). La nouvelle classe créée dans $H_{k+1}(f^{c+\varepsilon})$ après passage au-dessus de p, soit se fait tuer plus tard par un point critique q d'indice $k+2$, soit persiste dans V dans les sens suivants :

1. le premier sous-cas se traduit en équation par :
$$\textit{l'injection } H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{+\infty}, f^{c-\varepsilon}) \textit{ est nulle ;}$$
2. le deuxième sous-cas se traduit en équation par :
$$\textit{l'injection } H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{+\infty}, f^{c-\varepsilon}) \textit{ est non-nulle.}$$

Un point critique est donc dans l'un des trois cas suivants, reprenant les notations introduites au-dessus :

1. l'application Δ est injective et non nulle : nous dirons que le point est de type *supérieur* (le point tue une classe homologique) ;
2. on a $\Delta = 0$ et l'injection $H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{+\infty}, f^{c-\varepsilon})$ est nulle. Nous dirons que le point est de type *inférieur* (le point crée une classe homologique temporaire) ;
3. on a $\Delta = 0$ et l'injection $H_{k+1}(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \to H_{k+1}(f^{+\infty}, f^{c-\varepsilon})$ est non nulle. Nous dirons que le point est de type *homologique* (le point crée une classe homologique pour V).

Par exemple, si $V = \mathbb{S}^n$, il n'y a que deux points de type homologique : le maximum global et le minimum global. Tous les autres points critiques de f sont alors de type inférieur ou de type supérieur.

Nous allons maintenant apparier chaque point de type supérieur p_{sup} avec un point de type inférieur p_{inf}, l'idée étant que p_{sup} tue la classe d'homologie de degré k créée par p_{inf} dans $f^{f(p_{inf})+\varepsilon}$ qui persistait jusque dans $f^{f(p_{sup})-\varepsilon}$.

Soit p un point critique de type supérieur pour f, de valeur critique c et sphère d'attachement σ. Notons

$$\lambda(p) := \inf_{\mu = \sigma \textit{ dans } H_k(f^{c-\varepsilon})} \sup_{x \in \mu} f(x).$$

Dans l'équation, μ est dans l'ensemble des cycles qui représentent σ dans $f^{c-\varepsilon}$, et n'est donc pas nécessairement une sphère.

La valeur $\lambda(p)$ est une valeur critique, et comme f est excellente, il lui est associé un unique point critique q. Ce point est d'indice k par des considérations sur les changements de l'homologie à coefficients dans un corps des sous-niveaux quand on passe au-dessus d'un point critique. Si le point q n'était pas d'indice k, on pourrait trouver un cycle μ représentant σ qui soit entièrement sous le point q. Nous avons :

Lemme 2.3.14 (Lemme 1.6, [24])**.** *q est de type inférieur.*

Démonstration. Par définition de q, il y a un représentant de la classe d'homologie de σ dans $f^{f(q)+\varepsilon}$ que l'on note μ. Cette classe μ est donc non nulle dans $H_k(f^{f(q)+\varepsilon}, f^{f(q)-\varepsilon})$. Sinon, il y aurait un représentant ν dans $f^{f(q)-\varepsilon}$ homologue à μ. Le point critique q est donc bien dans le cas où $\Delta \neq 0$. Il est donc de type inférieur ou homologique. Mais homologique, il ne peut l'être, car nous savions depuis le début que la classe créée par q dans $H_k(f^{f(q)+\varepsilon}, f^{f(q)-\varepsilon})$ persiste jusque dans $H_k(f^{f(p)-\varepsilon}, f^{f(q)-\varepsilon})$ et est représentée par σ dans $f^{f(p)-\varepsilon}$ puis tuée par p par définition de σ. □

Nous pouvons alors définir un appariement (p, q). On définit un opérateur tel que $\partial^{\mathbb{F}}(p) = q$ pour p de type supérieur et q défini comme ci-dessus. Il s'agit de démontrer que cet opérateur induit une bijection entre les points de type supérieur et les points de type inférieur. Nous ne prouverons pas cette assertion dans le détail, mais cela tient en deux phrases. L'injectivité vient du fait qu'une classe créée par un point de type inférieur q ne peut pas être tuée deux fois. La surjectivité vient de la définition même du type inférieur, qui énonce que la classe créée par q doit être tuée à un certain niveau, et que cela ne peut être qu'après le passage au-dessus d'un point critique d'indice $k+1$, qui est nécessairement de type supérieur. On étend alors $\partial^{\mathbb{F}}$ à tous les points critiques de f en posant $\partial^{\mathbb{F}}(p) = 0$ si p est de type inférieur ou homologique. Cet opérateur est bien un opérateur de bord, qui est simple, dans le sens où le bord d'une chaîne représentée par un unique point critique est un autre point critique ou bien 0. On peut en fait montrer que c'est le même opérateur que celui défini par Barannikov.

Exemple 2.3.15 (Exemple de Poincaré)**.** On rappelle que la fonction f définie sur la sphère d'homologie de Poincaré Σ a 6 points critiques, un maximum, un minimum, 2 points d'indice 1 et deux points d'indice 2. Cependant, la fonction n'est pas excellente et on ne peut pas définir les types des points. On modifie alors un petit peu la fonction de telle manière à ce que le point critique d'indice 1, qu'on avait noté p_1, est un peu au-dessus du deuxième point d'indice 1, noté p_2. On note c_1 la valeur critique de p_1 et c_2 celle de p_2 et on les suppose proche de 1. De même on suppose que le point critique d'indice 2 qu'on avait noté q_1 est un peu au-dessus de son homologue q_2. On note d_1 la valeur critique de q_1 et d_2 celle de q_2 et on les suppose proche de 2.

L'homologie de Σ étant celle de la sphère, les points homologiques sont les extremums globaux, qui créent une classe d'homologie respectivement de dimension 0 pour le minimum et respectivement de dimension 3 pour le maximum, qui ne sont tuées par aucun point. Les autres points sont donc des points de types supérieur et inférieur. Les deux points critiques d'indice 1 créent chacun une classe d'homologie non triviale dans $\Sigma^{c_j+\varepsilon} (= f^{c_j+\varepsilon}$ avec les nouvelles notations), représentées par les sphères σ_1^+ et σ_2^+.

On rappelle que la matrice de bord en degré 2 est

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

où la première colonne représente le bord de q_1 et la première ligne est la préimage de p_1 par l'opérateur de bord.

Soit $\mathbb{F}$ un corps. On rappelle que la valeur critique $\lambda(q_2)$ est le réel minimal pour lequel un représentant homologique de la sphère d'attachement de q_2 existe dans $f^{-1}(\lambda(q_2), f(q_2) - \varepsilon)$. Comme $\partial_2 q_2 = -2p_1 - p_2$, deux choix s'offrent à nous selon la caractéristique du corps $\mathbb{F}$. Ainsi, $\partial^{\mathbb{F}} q_2 = p_1$ si $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) \neq 2$. Dans ce cas, on a nécessairement $\partial^{\mathbb{F}} q_1 = p_2$.

Si $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) = 2$, l'opérateur de bord devient

$$\partial_2^{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est déjà simple, et on a $\partial^{\mathbb{F}} q_2 = p_2$ et $\partial^{\mathbb{F}} q_1 = p_1$.

Exemple 2.3.16 (Exemple de la fonction de Morse sur un morse)**.** On reprend l'exemple de la fonction hauteur définie sur le plongement de la sphère illustré en figure 1.9. Les points homologiques sont encore une fois au nombre de deux, ce sont le maximum global et le minimum global. On rappelle qu'en degré 1, on a :

$$\partial_1(X) = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où la i-ème colonne est celle du point dénoté s_i et la j-ème ligne celle du minimum local m_j, ordonnés selon l'ordre décroissant des valeurs critiques. Peu importe le corps $\mathbb{F}$, on voit que l'on a $\partial^{\mathbb{F}} s_3 = m_3$. On a aussi $\partial^{\mathbb{F}}(s_2) = m_1$ et $\partial^{\mathbb{F}}(s_1) = m_2$.

2.4 Théorème principal : une condition nécessaire

Il est maintenant temps d'énoncer et de démontrer le théorème principal de cette thèse, qui donne une condition nécessaire de nature homologique d'extension sans points critiques pour un germe défini le long de la sphère.

Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de $\mathbb{S}^n$ et X un pseudo-gradient adapté à f et Morse-Smale. Nous supposons que f est excellente. Nous avons vu que si $\tilde{f}$ a une extension sans points critiques, alors il y a un chemin générique et non critique de fonctions $(f^t)_{t\in[0,1]}$ qui étend le germe. La fonction $F : (x,t) \mapsto f^t(x)$ n'a donc pas de points critiques, et f^1 n'en a que deux, un maximum max et un minimum min, tels que $\partial_t F(max, 1) < 0$ et $\partial_t F(min, 1) > 0$. Pendant ce chemin de fonctions, tous les points critiques de f et ceux qui naissant durant le chemin meurent, mis à part deux extrema (un minimum et un maximum). Remarquons que ce minimum et ce maximum qui restent jusqu'à la fin ne sont pas nécessairement des extremums de f, mais peuvent naître pendant le chemin.

Nous avons vu dans le lemme 2.3.3 que deux points critiques de f ne peuvent mourir durant le chemin $(f^t)_{t\in[0,1]}$ seulement s'ils ont la même étiquette. Pour k entre 0 et n, on rappelle qu'on note p_k le cardinal de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ et q_k le cardinal de $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$. On choisit aussi un ordre sur $\mathcal{C}_k^\ell(f)$ pour tout $0 \leq k \leq n$ et $\ell \in \{+,-\}$. Avec de tels ordres, on peut utiliser des notations matricielles pour ∂, l'opérateur de bord associé à X, et pour tout $\partial_{\ell_1\ell_2,k}$ pour toutes étiquettes ℓ_1 et ℓ_2, et indice k, tels que $\partial_{\ell_1\ell_2,k+1} : \mathbb{Z}\mathcal{C}_{k+1}^{\ell_2}(\tilde{f}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_1}(\tilde{f})$. Nous avons :

$$\partial_{k+1} = \begin{pmatrix} \partial_{++,k+1} & \partial_{+-,k+1} \\ \partial_{-+,k+1} & \partial_{--,k+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p_k+q_k)\times(p_{k+1}+q_{k+1})}(\mathbb{Z}).$$

La prochaine sous-section introduit l'objet principal du théorème 2.4.6, un sous-groupe d'isomorphismes $G(\tilde{f})$ et comment il est modifié pendant le chemin de fonctions. La sous-section 2.4.2 met en regard les objets issus de $\tilde{f}$ et ceux issus de $-\tilde{f}$ puis démontre le théorème, en deux étapes.

2.4.1 $G(\tilde{f})$

Définition du groupe $G(\tilde{f})$

Soit k un entier entre 1 et $n-1$. Notons $(a_j)_{1\leq j\leq p_k}$ (resp. $(b_i)_{1\leq i\leq q_k}$) les points de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ (resp. $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$). Rappelons que si $f(a_j) < f(b_i)$, aucun glissement d'anses de a_j au-dessus de b_i n'est possible. De plus, comme $F(a_j^t, t)$ décroît et que $F(b_i^t, t)$ augmente, nous ne pourrons faire aucun glissement d'anses de a_j^t au-dessus de b_i^t pour tout t. Il nous faut ainsi définir un sous-groupe gradué d'isomorphismes de $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\tilde{f})$ qui représenterait les glissements d'anses possibles entre les points d'étiquettes différentes, plus précisément, les glissements d'anses qu'il nous est théoriquement possible de réaliser au temps 0 des points $(a_j)_{1\leq j\leq p_k}$ au-dessus des points $(b_i)_{1\leq i\leq q_k}$. C'est la raison d'être de $G_k(\tilde{f})$.

Dans les définitions suivantes, nous supposons que $0 \leq k \leq n$. La raison est que nous aurons effectivement besoin de groupes $G_0(\tilde{f})$ et $G_n(\tilde{f})$ quand bien même les éléments de ces groupes n'auront aucune réalité géométrique. Nous notons $N_{(i,j)}$ le coefficient à la place (i,j) de la matrice N.

Définition 2.4.1. Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de $\mathbb{S}^n$ avec f excellente. Soit $0 \leq k \leq n$. On note $G_k(\tilde{f})$ le groupe suivant d'automorphismes de $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f)$. Un élément de ce groupe est une matrice inversible M_k de taille $(p_k+q_k)\times(p_k+q_k)$, telle que

$$M_k = \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k & I_{q_k} \end{pmatrix} \in GL_{p_k+q_k}(\mathbb{Z})$$

où $N_k \in \mathcal{M}_{q_k,p_k}(\mathbb{Z})$ et $(N_k)_{(i,j)} = 0$ si $f(a_j) \leq f(b_i)$.

Remarquons que

$$M_k M_k' = \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k + N_k' & I_{q_k} \end{pmatrix},$$

ainsi la propriété de nullité imposée sur les coefficients de la sous-matrice N est conservée par multiplication de matrices M et M' de $G_k(\tilde{f})$, et on voit aussi que le groupe est abélien. La matrice

$$N_k : \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$$

envoie un point a_j d'étiquette $+$ dans le module engendré par les points qui sont en dessous de a_j, qui ont même indice que a_j et sont d'étiquette $-$.

Nous définissons le groupe global $G(\tilde{f})$.

Définition 2.4.2. On définit $G(\tilde{f})$, le groupe gradué d'isomorphismes $M : \mathbb{Z}\mathcal{C}(f) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ telle que chaque restriction de M à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f)$ pour tout k entre 0 et n est dans le groupe $G_k(\tilde{f})$.

De la même manière, ce groupe abélien agit par conjugaison sur ∂. On notera systématiquement N_k la sous-matrice en bas à gauche d'une matrice $M_k \in G_k(\tilde{f})$.

Si on conjugue un opérateur de bord ∂ par un élément M dans $G(\tilde{f})$ alors la restriction à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_{k+1}(f)$ est :

$$(M\partial M^{-1})_{k+1} = M_k \partial_{k+1} M_{k+1}^{-1}.$$

On obtient les quatre équations :

$$\begin{aligned}
(M\partial M^{-1})_{++,k+1} &= \partial_{++,k+1} - \partial_{+-,k+1}N_{k+1},\\
(M\partial M^{-1})_{--,k+1} &= \partial_{--,k+1} + N_k\partial_{+-,k+1},\\
(M\partial M^{-1})_{-+,k+1} &= \partial_{-+,k+1} - N_k\partial_{+-,k+1}N_{k+1} - \partial_{--,k+1}N_{k+1} + N_k\partial_{++,k+1},\\
(M\partial M^{-1})_{+-,k+1} &= \partial_{+-,k+1}.
\end{aligned}$$

La remarque suivante est importante.

Remarque 2.4.3 (Différence entre algèbre et géométrie)**.** *Pour des germes dont les fonctions ont plus de deux extremums locaux, l'action de $G(\tilde{f})$ sur l'opérateur de bord est purement algébrique et ne correspond pas nécessairement aux résultats de glissements d'anses (qui sont de nature géométrique). Cela est dû à plusieurs choses.*

Premièrement, nous voyons que si l'on peut réaliser un glissement d'anses de a au-dessus de b, il doit y avoir une ligne strictement descendante qui joint la composante connexe de a dans son niveau à la composante connexe de b dans son niveau respectif. Mais la présence d'autres extremums locaux induisent les apparitions de composantes connexes dans les niveaux, et ces lignes peuvent donc ne pas exister. Par exemple, le groupe $G(\widetilde{f_1})$ du germe $\widetilde{f_1}$ dont le graphe de Reeb est représenté sur la figure 2.13 n'est pas réduit à 0. Toutefois, nous ne pouvons réaliser aucun glissement d'anses entre les points d'indice $n-1$, puisqu'il n'y a aucune ligne strictement descendante entre les composantes connexes des niveaux respectifs de ces deux points.

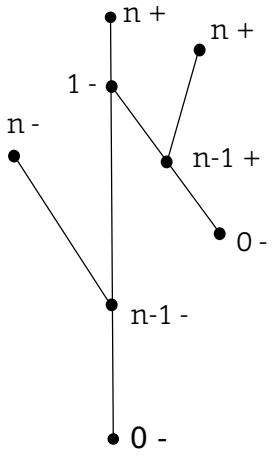

FIGURE 2.13 – Graphe de Reeb de $\tilde{f}_1$.

Deuxièmement, les glissements d'anses entre les points d'indice n ou d'indice 0 ne sont pas définis. Ainsi, si $G_n(\tilde{f})$ ou $G_0(\tilde{f})$ ne sont pas réduits à l'identité, il n'y a pas pour autant d'interprétation géométrique à la conjugaison de ∂ par un élément de $G(\tilde{f})$.

Si f n'a que deux extremums, nous avons en particulier que $G_n(\tilde{f}) = \{I_{p_n+q_n}\}$ et $G_0(\tilde{f}) = \{I_{p_0+q_0}\}$. S'il n'y a aucun points d'indice 1 et $n-1$ non plus, toute action d'un élément $M \in G(\tilde{f})$ sur un opérateur de bord ∂ donné par un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f correspond aux résultats de glissements d'anses. C'est principalement grâce à la proposition 1.10.3 et au théorème 1.8.4.

En conclusion, nous soulignons :

– *nous considérerons souvent des opérateurs de bord ∂ qui proviennent de pseudo-gradients X qui sont Morse-Smale ;*

- *si $\partial^1 = M\partial M^{-1}$ et M est un élément de $G(\tilde{f})$ qui correspond à la retranscription algébrique de vrais glissements d'anses, alors ∂^1 est aussi dérivé d'un pseudo-gradient ;*
- *cependant, en toute généralité, si $\partial^1 = M\partial M^{-1}$ et $M \in G(\tilde{f})$, alors il n'y a aucune raison pour qu'il y ait un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f dont l'opérateur de bord associé est ∂^1 (sauf si f n'a qu'un maximum local, un minimum local et aucun point d'indice 1 ou $n-1$).*

Modifications de $G(\tilde{f})$ par des chemins de fonctions non critiques

Soit $(f^t)_{t\in[0,1]}$ un chemin générique non critique de fonctions qui étend un germe $\widetilde{f^0}$. Supposons qu'un unique accident intervienne pendant le chemin. Nous décrivons ici la modification du groupe $G(\widetilde{f^t})$ entre les temps $t = 0$ et $t = 1$ selon le type d'accident. Ce sera utilisé pour démontrer le théorème 2.4.6.

- **Croisement de points critiques de même étiquette.**
  Croisement de points critiques d'étiquettes et d'indice différents.
  Dans ces cas, nous avons $G(\widetilde{f^1}) = G(\widetilde{f^0})$.
- **Croisements de points critiques d'étiquettes différentes et d'indices égaux.**
  Soit k l'indice de ces points. S'il y a un croisement entre deux points d'étiquettes différentes et de même indice, alors c'est un point $+$ qui va en dessous d'un point $-$, puisque l'inverse est impossible au sein d'un chemin non critique. Après le croisement, nous ne pouvons plus faire aucun glissement d'anses de ce point $+$ au-dessus de ce point $-$, ainsi nous avons que $G(\widetilde{f^1})$ est un sous-groupe strict de $G(\widetilde{f^0})$. Précisément, si le point $+$ est le j-ème point de $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ et le point $-$ est le i-ème point, alors $G_k(\widetilde{f^1})$ est le sous-groupe de matrices M dans $G(\widetilde{f^0})$ dont les restrictions M_k ont leurs coefficients (i,j) égaux à 0. Le groupe $G_k(\widetilde{f^1})$ est isomorphe à $G_k(\widetilde{f^0})/(I_{p_k+q_k} + \mathbb{Z}E_{i,j})$.
- **Accident de mort.**
  On décrit tout d'abord les modifications quand la paire mourante est d'étiquette $+$. Soit k tel que la paire de points critiques (a,b) tuée est d'indice $(k+1,k)$. Nous avons

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}_j^+(\tilde{f}^0) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_j^+(\tilde{f}^1) \oplus \mathbb{Z},$$

  pour $j \in \{k, k+1\}$. *A priori*, ∂^1 et ∂^0 n'agissent pas sur des modules isomorphes mais nous avons une injection naturelle :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0).$$

  Nous identifierons donc $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1)$ comme un sous-module $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0)$. Cela induit une injection :

$$G(\widetilde{f^1}) \hookrightarrow G(\widetilde{f^0}),$$

  où une matrice M^1 dans $G(\widetilde{f^1})$ est envoyée sur une matrice M^0 qui se restreint à M^1 sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1)$ et qui est l'identité $\mathbb{Z}\{a\}$ et $\mathbb{Z}\{b\}$. Et donc nous avons $M^0c = M^1c$ si $c \in \mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1)$, utilisant l'injection de modules ci-dessus, et $M^0c = c$ si $c \in \{a,b\}$. Pour $j = k$ ou pour

$j = k + 1$, on a l'équation matricielle :

$$M_j^0 = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & I_{p_j^1} & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & N_j^1 & & \vdots & & I_{q_j^1} & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où N_j^1 est la sous-matrice de M_j^1 en bas à gauche. Pour simplifier les notations, à la place de prendre l'ordre naturel donné par les valeurs critiques des points, nous avons choisi ici de placer le point a (resp. b) après les points critiques de $\mathcal{C}_{k+1}^+(\widetilde{f^1})$ (resp. $\mathcal{C}_k^+(\widetilde{f^1})$). Nous avons $M_j^0 = M_j^1$ pour tout indice $j \neq k$, et $j \neq k + 1$.
Si l'étiquette de la paire est $-$, nous avons une injection :

$$G(\widetilde{f^1}) \hookrightarrow G(\widetilde{f^0}).$$

En notations matricielles, nous avons :

$$M_j^0 = \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & I_{p_j^1} & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & N_j^1 & & & I_{q_j^1} & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

pour $j = k$ ou $j = k + 1$ et $M_j^0 = M_j^1$ pour les autres degrés.

– **Accident de naissance.**
La description est similaire, en intervertissant $t = 0$ et $t = 1$ dans les exposants. Il y a des injections :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0) \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1),$$
$$G(\widetilde{f^0}) \hookrightarrow G(\widetilde{f^1}).$$

En intervertissant $t = 0$ et $t = 1$ dans l'équation 2.1 ci-dessus, nous avons une injection $G(\widetilde{f^0}) \hookrightarrow G(\widetilde{f^1})$ donnée par l'équation, pour $j = k$ ou $j = k + 1$:

$$M_j^1 = \begin{pmatrix} & & 0 & & & \\ & I_{p_j^0} & \vdots & & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & & \\ & N_j^0 & \vdots & & I_{q_j^0} & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

où N_j^1 est la sous-matrice en bas à gauche de M_j^1.
Si l'étiquette est $-$, on a les injections :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0) \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}(f^1),$$
$$G(\widetilde{f^0}) \hookrightarrow G(\widetilde{f^1}).$$

Nous avons les équations :

$$M_j^1 = \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & I_{p_j^0} & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & N_j^0 & & & I_{q_j^0} & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

pour $j = k$ ou $j = k+1$ et $M_j^0 = M_j^1$ pour les autres degrés.

2.4.2 Le théorème principal

Propriété ($\mathcal{P}$) et théorème

Nous utilisons les notations introduites dans les sections précédentes. Si M est une matrice de $G(\tilde{f})$, la matrice M_k sera sa restriction à $G_k(\tilde{f})$ et N_k sera la sous-matrice en bas à gauche de M_k. Le théorème et sa démonstration se concentrent sur les points d'étiquette $+$, mais nous montrerons dans la sous-section suivante qu'un théorème équivalent peut être établi avec les points $-$. Toutefois, nous montrerons aussi qu'un théorème utilisant les données des points $-$ serait strictement équivalent au théorème 2.4.6.

Soit $(\tilde{f}, X)$ un couple tel que $\tilde{f}$ est un germe de Morse et X un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f.

Définition 2.4.4 (Propriété ($\mathcal{P}$))**.** Nous dirons que $(\tilde{f}, X)$ a la *propriété* ($\mathcal{P}$) s'il y a une matrice M dans $G(\tilde{f})$ telle que :

– $(M\partial M^{-1})_{-+} = 0$, soit, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$

$$\partial_{-+,k} - \partial_{--,k}N_k + N_{k-1}\partial_{++,k} - N_{k-1}\partial_{+-,k}N_k = 0\ ; \tag{2.5}$$

– $(\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}), \partial_{++,k} - \partial_{+-,k}N_k)_{0\leq k\leq n}$ est un complexe de chaînes. Son homologie s'annule pour $k < n$ et est $\mathbb{Z}$ en degré n.

Remarque 2.4.5. *Le premier item implique que $(M\partial M^{-1})_{++}$ est un complexe de chaînes, car :*

$$(M\partial M^{-1})_k = \begin{pmatrix} (M\partial M^{-1})_{++,k} & (M\partial M^{-1})_{+-,k} \\ 0 & (M\partial M^{-1})_{--,k} \end{pmatrix}$$

en degré k. Ainsi, nous obtenons $(M\partial M^{-1})_{++}^2 = 0$ car $(M\partial M^{-1})^2 = 0$.

Et ainsi éclôt un théorème.

Théorème 2.4.6. *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de $\mathbb{S}^n$. Soit X un pseudo-gradient adapté Morse-Smale et ∂ l'opérateur de bord associé. Si le germe $\tilde{f}$ a une extension sans points critiques alors $(\tilde{f}, X)$ a la propriété $(\mathcal{P})$.*

Remarque 2.4.7. *Remarquons que si un germe s'étend sans points critiques, alors le théorème implique que $M\partial M^{-1}$ devient le* mapping cone *de l'application entre complexes de chaînes :*

$$\partial_{+-} : (\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}), (M\partial M^{-1})_{++}) \to (\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f}), (M\partial M^{-1})_{--}).$$

La définition de mapping cone d'une application entre complexes de chaînes est dans [46, Sec. 1.5], nous la rappellerons en définition 3.2.12.

Remarque 2.4.8 (Approche des pseudo-gradients tangents au bord.)**.** *Dans [34], une autre interprétation des groupes $G(\tilde{f})$ est donnée. Nous présentons dans cette remarque, très succinctement, comment le travail de Kronheimer et Mrowka peuvent éclaircir d'une autre lumière la démonstration du théorème 2.4.6. Le livre [34] est beaucoup plus vaste que ce qui est présenté dans cette remarque. Notamment, le cœur du travail dans [34] est la construction d'un opérateur de bord pour une homologie de Floer liée aux variétés de dimension 3, en particulier pour des fonctionnelles définies sur des espaces de dimensions infinies.*

Soient V une variété à bord compacte de dimension $n+1$ et ∂V son bord. On considère $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse, et on considère qu'elle n'a pas de point critique dans l'intérieur de V. Dans la définition de fonction de Morse sur une variété à bord dans [34], les points critiques de f sont aussi des points critiques de F qui sont non-dégénérés. Cette différence avec notre définition de fonction de Morse n'aura en fait pas d'incidence dans ce qui suit. On note $f : \partial V \to \mathbb{R}$ la restriction de F au bord. On rappelle que f est une fonction de Morse.

Kronheimer et Mrowka considèrent un champ de vecteurs X, tangent au bord, qui se restreint à un pseudo-gradient Morse-Smale et adapté à f. Comme remarqué dans [23], la tangence au bord de X fait que ce type de pseudo-gradient n'est pas générique. Cependant, une propriété intéressante est qu'un tel pseudo-gradient donne une décomposition cellulaire par les variétés instables. On suppose que X est tel que $dF_x(X(x)) < 0$ en tout point qui n'est pas un point critique de f. Il y a aussi des modèles locaux dans des voisinages dans V autour des points critiques de f que nous n'expliciterons pas. On demande enfin aussi que pour un point $a \in \mathcal{C}_k^+(F)$ et $b \in \mathcal{C}_k^-(F)$, la variété instable $W^u(a, X, F)$ et la variété stable $W^s(b, X, F)$ s'intersectent transversalement. Si on reprend la notation ∂_{++} pour désigner l'opérateur (qui n'est pas un opérateur de bord) qui compte le nombre de lignes de gradients entre deux points d'étiquette $+$ d'indices consécutifs. Ces lignes de gradient sont nécessairement tangentes au bord. On reprend aussi les notations ∂_{--}, ∂_{-+} et ∂_{+-} pour compter le nombre de lignes de gradients qui sont tangentes au bord entre deux points critiques d'indices consécutifs, selon leurs étiquettes. On note aussi $N : \mathcal{C}^+(F) \to \mathcal{C}^-(F)$ l'opérateur qui compte le nombre de lignes de gradients qui lient un point d'étiquette $+$ à un point d'étiquette $-$ en dessous. Par un argument de dimension et de transversalité, les points ont nécessairement le même indice. On a alors que $\partial_{++} - \partial_{+-}N$ est un opérateur de bord dont l'homologie est celle de $(V, \partial V)$. On peut voir N comme la sous-matrice en bas à gauche d'un élément $M \in G(F)$, en étendant la définition de $G(\tilde{f})$ sur un germe à un groupe $G(F)$ pour la fonction de Morse F définie sur V.

En reprenant $V = \mathbb{D}^{n+1}$ et $\partial V = \mathbb{S}^n$, on retombe sur l'item de la propriété $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire qu'il y a un élément M de $G(F)$ qui est tel que $\partial_{++} - \partial_{+-}N$ a une homologie nulle en tout degré sauf au degré $n+1$ pour lequel l'homologie est $\mathbb{Z}$. Si un germe $\tilde{f}$ défini le long de $\mathbb{S}^n$ s'étend sans points critiques, on doit pouvoir construire un pseudo-gradient de type Kronheimer et Mrowka pour une de ses extensions F.

Il serait très intéressant d'approfondir les liens entre les données apportées par un tel pseudo-gradient et la méthode des chemins non-critiques.

Prenant l'opposé

Dans cette sous-section, nous présentons les relations algébriques entre les complexes associés à $\tilde{f}$ et ceux associés à $-\tilde{f}$. Au-delà de leurs intérêts propres, les résultats de cette sous-section simplifieront la démonstration du théorème 2.4.6.

Le lemme suivant est une simple description de l'algèbre homologique de $-\tilde{f}$ par rapport à celui de $\tilde{f}$. Si $\prec$ est un ordre sur un ensemble $\mathcal{S}$, alors l'ordre opposé $\prec^{op}$ est défini tel que :

$$a \prec^{op} b \iff b \prec a.$$

Nous ne donnerons pas de démonstration au lemme suivant :

Lemme 2.4.9. *Nous avons :*

- *pour tout $0 \leq k \leq n$, si $a \in \mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ alors $a \in \mathcal{C}_{n-k}^-(-\tilde{f})$. Ainsi $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) = \mathcal{C}_{n-k}^-(-\tilde{f})$ et de la même manière, $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}) = \mathcal{C}_{n-k}^+(-\tilde{f})$;*
- *si X est un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f alors $-X$ est un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à $-f$. Si nous notons*

$$\partial_k(f) = \begin{pmatrix} \partial_{++,k}(\tilde{f}) & \partial_{+-,k}(\tilde{f}) \\ \partial_{-+,k}(\tilde{f}) & \partial_{--,k}(\tilde{f}) \end{pmatrix}$$

la matrice de bord en degré k associée à X où un ordre $\prec$ est donné à $\mathcal{C}_j(f)$ pour $j = k$ et $j = k+1$, alors l'opérateur de bord associé à $-X$ est

$$\partial_k(-f) = \begin{pmatrix} {}^t\partial_{--,n-k+1}(\tilde{f}) & {}^t\partial_{+-,n-k+1}(\tilde{f}) \\ {}^t\partial_{-+,n-k+1}(\tilde{f}) & {}^t\partial_{++,n-k+1}(\tilde{f}) \end{pmatrix},$$

où l'ordre opposé $\prec^{op}$ est donné aux points critiques de $-f$.

Remarquons qu'il n'y a aucun lien entre $\partial_{+-,n-k+1}(\tilde{f})$ et $\partial_{-+,k}(-\tilde{f})$.

Du lemme précédent, nous avons aussi :

Lemme 2.4.10. *Si $t \mapsto f^t$ est un chemin de fonctions non critique, notons $\widetilde{f^t}$ le germe dont le représentant est $(x,s) \mapsto f^{s+t}(x)$ pour $x \in \mathbb{S}^n$ et $s \in [0,\varepsilon)$, le réel strictement positif ε étant aussi petit que nécessaire. Nous considérons aussi un chemin générique X^t de pseudo-gradients adaptés. Nous avons :*

- *un accident de naissance (resp. de mort) de deux points $+$ d'indice k pendant le chemin $t \mapsto f^t$, correspond à un accident de naissance (resp. de mort) de points $-$ d'indice $n-k$ pendant le chemin $t \mapsto -f^t$,*
- *un glissement d'anses d'un point a d'étiquette $+$ au-dessus d'un point b d'étiquette $-$ pendant le chemin $t \mapsto (f^t, X^t)$, correspond à un glissement d'anses de b au-dessus de a pendant le chemin $t \mapsto (-f^t, -X^t)$.*

Dans la définition de la propriété $(\mathcal{P})$, nous ne considérons que les points $+$, et semblons oublier les points $-$. Dans ce qui suit, on reprend les notations introduites pour les éléments de $G(\tilde{f})$, c'est-à-dire que N_k désigne la sous-matrice en bas à gauche de M_k, où M_k désigne la restriction au degré k d'un élément $M \in G(\tilde{f})$. La transcription de la propriété $(\mathcal{P})$ pour les points $-$ serait :

Définition 2.4.11 (Propriété $(\mathcal{P}-)$)**.** Nous disons que le germe $(\tilde{f}, X)$ a la propriété $(\mathcal{P}-)$ si il y a un élément M de $G(\tilde{f})$ tel que :

– pour tout k entre 0 et n

$$\partial_{-+,k} - \partial_{--,k}N_k + N_{k-1}\partial_{++,k} - N_{k-1}\partial_{+-,k}N_k = 0 \ ;$$

– $(\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}), \partial_{--,k} + N_{k-1}\partial_{+-,k})_{0\leq k\leq n}$ est un complexe de chaînes et son homologie s'annule en degré $k > 0$ et est $\mathbb{Z}$ en degré 0,

Nous avons :

Proposition 2.4.12. *La propriété $(\mathcal{P}-)$ est équivalente à la propriété $(\mathcal{P})$.*

Démonstration. Remarquons que le premier item est inchangé par rapport à celui de la propriété $(\mathcal{P})$. Le deuxième item est impliqué par la définition de la propriété $(\mathcal{P})$ pour les points $+$. En effet, si un germe $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, nous avons une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}(f) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f}) \to 0.$$

Rappelons que le complexe $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ a l'homologie de la sphère, soit, tous les groupes d'homologie s'annulent sauf en degrés 0 et n pour lesquels c'est $\mathbb{Z}$. La suite exacte longue en homologie pour cette suite est donc non triviale seulement aux degrés 0 et n :

$$0 \to H_n(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})) \to H_n(\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)) \to H_n(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f})) \to 0$$

et

$$0 \to H_0(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})) \to H_0(\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)) \to H_0(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f})) \to 0.$$

Pour les autres degrés, $k \neq 0$ et $k \neq n$, on obtient que $H_k(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f})) = 0$. Si $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, le module $H_n(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}))$ est $\mathbb{Z}$ et le module $H_0(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}))$ s'annule. Ainsi $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P}-)$. Si $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P}-)$, le module $H_n(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f}))$ s'annule et le module $H_0(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f}))$ est $\mathbb{Z}$. Ainsi $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$. On voit donc que les propriétés $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}-)$ sont équivalentes. □

Nous avons aussi le lemme :

Lemme 2.4.13. *Soit $\prec$ un ordre sur $\mathcal{C}_k(f)$. On donne à $\mathcal{C}_{n-k}(f)$ l'ordre opposé. Nous avons :*

$$G_k(-\tilde{f}) = \left\{ \begin{pmatrix} I_{q_{n-k}} & 0 \\ {}^tN_{n-k} & I_{p_{n-k}} \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{pmatrix} I_{p_{n-k}} & 0 \\ N_{n-k} & I_{q_{n-k}} \end{pmatrix} \in G_{n-k}(\tilde{f}) \right\}.$$

Démonstration. Nous avons seulement besoin de dire que les deux items suivants sont équivalents :

– a est un point critique de f d'étiquette $+$ et b un point critique de f d'étiquette $-$, tous les deux d'indice k tels que $f(b) > f(a)$;
– a est un point critique de $-f$ d'étiquette $-$ et b un point critique de $-f$ d'étiquette $+$, tous les deux d'indice $n-k$ tels que $-f(a) > -f(b)$.

□

Nous ne serons pas surpris-e-s par la proposition :

Proposition 2.4.14. *$(\tilde{f}, X)$ a la propriété $(\mathcal{P})$ si et seulement si $(-\tilde{f}, -X)$ a la propriété $(\mathcal{P})$.*

Démonstration. Soit $(\tilde{f}, X)$ un couple constitué d'un germe de Morse et d'un pseudo-gradient Morse-Smale adapté qui a la propriété $(\mathcal{P})$. Notons $\partial(\tilde{f})$ l'opérateur de bord associé à X. Notons $\partial(-\tilde{f})$ l'opérateur de bord associé à $-X$. Nous montrons tout d'abord que $(-\tilde{f}, -X)$ a la propriété $(\mathcal{P}-)$. Soit $M \in G(\tilde{f})$ tel que $(M\partial M^{-1})_{-+} = 0$. Alors, pour tout k entre 0 et n nous obtenons :

$$\partial_{-+,k}(\tilde{f}) - \partial_{--,k}(\tilde{f})N_k + N_{k-1}\partial_{++,k}(\tilde{f}) - N_{k-1}\partial_{+-,k}(\tilde{f})N_k = 0.$$

Prenant la transposée, nous obtenons avec le lemme 2.4.9 :

$$\partial_{-+,n-k+1}(-\tilde{f}) - {}^tN_k\partial_{++,n-k+1}(-\tilde{f}) + \partial_{--,n-k+1}(-\tilde{f}){}^tN_{k-1} - {}^tN_k\partial_{+-,n-k+1}(-\tilde{f}){}^tN_{k-1} = 0.$$

Prenant M^{op} tel qu'en degré k

$$M_k^{op} := \begin{pmatrix} I_{q_{n-k}} & 0 \\ -{}^tN_{n-k} & I_{p_{n-k}} \end{pmatrix},$$

nous voyons que $M^{op} \in G(-\tilde{f})$ et que $(M^{op}\partial(-\tilde{f})(M^{op})^{-1})_{-+} = 0$. De plus, nous avons

$${}^t(M\partial(\tilde{f})M^{-1})_{++,k} = (M^{op}\partial(-\tilde{f})(M^{op})^{-1})_{--,n-k+1}.$$

On considère le complexe :

$$0 \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_n^+(\tilde{f}) \to ... \to \mathbb{Z}\mathcal{C}_0^+(\tilde{f}) \to 0,$$

où l'opérateur de bord est $(M\partial(\tilde{f})M^{-1})_{++,k}$. On remplace $\tilde{f}$ par $-\tilde{f}$ avec les transformations énoncées précédemment, et on utilise l'opérateur de bord $(M^{op}\partial(-\tilde{f})(M^{op})^{-1})_{--,k}$, on obtient le complexe de chaînes :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}_0^-(-\tilde{f}) \leftarrow ... \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}_n^-(-\tilde{f}) \leftarrow 0.$$

Notons $(M\partial(\tilde{f})M^{-1})_{++}$ par ∂' et $(M^{op}\partial(-\tilde{f})(M^{op})^{-1})_{--}$ par ∂''. En homologie nous avons :

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(-\tilde{f})) =& \ker(\partial''_k)/\operatorname{Im}(\partial''_{k+1}) \\ =& \operatorname{coker}(\partial'_{n-k+1})/\operatorname{coIm}(\partial'_{n-k}) \\ \simeq& H_{n-k}(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$H_k((M^{op}\partial(-\tilde{f})(M^{op})^{-1})_{--}) = H_{n-k}((M\partial(\tilde{f})M^{-1})_{++}).$$

Ainsi, $(-\tilde{f}, -X)$ a la propriété $(\mathcal{P}-)$ et par la proposition 2.4.12, le couple a la propriété $(\mathcal{P})$. □

Démonstration du théorème 2.4.6

Le prochain lemme montre que la propriété $(\mathcal{P})$ est une propriété qui ne dépend que du germe $\tilde{f}$ et pas du pseudo-gradient adapté à f :

Lemme 2.4.15 (Invariance de la propriété $(\mathcal{P})$)**.** *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse tel qu'il y a un pseudo-gradient Morse-Smale X^0 adapté à f et tel que le couple $(\tilde{f}, X^0)$ a la propriété $(\mathcal{P})$. Alors, n'importe quel autre pseudo-gradient Morse-Smale X^1 adapté à f a la propriété $(\mathcal{P})$.*

Pour tout indice k, nous choisissons l'ordre naturel suivant sur les points de $\mathcal{C}_k(f)$:

$a \prec b$ si et seulement si l'étiquette de a est $+$ et l'étiquette de b est $-$, et, quand les points ont la même étiquette, $f(a) > f(b)$.

Avec cet ordre, le premier point de $\mathcal{C}_k(f)$ est le point d'étiquette $+$ avec la plus haute valeur critique et le dernier point est le point $-$ de valeur critique la plus basse. Nous avons le lemme :

Lemme 2.4.16. *Pour tout k, soit T_k une matrice triangulaire inférieure de taille $p_k \times p_k$. Soit $M \in G(\tilde{f})$. Alors la matrice M' définie en degré k par l'égalité*

$$M'_k = \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k T_k & I_{q_k} \end{pmatrix}$$

est dans $G(\tilde{f})$.

Démonstration du lemme 2.4.16. Nous devons démontrer que la condition de nullité imposée sur les coefficients par la définition de $G(\tilde{f})$ est respectée. Si le l-ème point critique de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ est sous le i-ème point critique de $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$, alors le l'-ème point critique de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ aussi. Ainsi, avec l'ordre donné sur l'ensemble des points critiques, si $(N_k)_{(i,l)} = 0$, alors $(N_k)_{(i,l')} = 0$ pour $l' > l$, puisque l'ordre considéré est celui sur les valeurs critiques. Un calcul direct montre alors que si $(N_k)_{(i,l)} = 0$, alors $(N_k T_k)_{(i,l)} = 0$, quand T est triangulaire inférieure. Alors $M' \in G(\tilde{f})$. □

Démonstration du lemme 2.4.15. Soit $t \mapsto X^t$ un chemin générique de pseudo-gradients adapté à f entre X^0 et X^1. Afin de démontrer le théorème, il suffit de considérer un chemin avec un seul glissement d'anse. Comme $(\tilde{f}, X^0)$ a la propriété $(\mathcal{P})$, il y a un $M \in G(\tilde{f})$ tel que $M\partial^0 M^{-1}$ a les propriétés de la définition 2.4.4. La démonstration consiste à trouver un élément $M' \in G(\tilde{f})$ tel que la conjugaison de l'opérateur de bord par M' "défait" algébriquement l'effet du glissement d'anses. Nous avons les cas suivants :

- **Glissement d'anses entre deux points $+$.** Supposons que ce soit le glissement d'anses d'un point a d'indice k au-dessus d'un point b de même indice. La modification de l'opérateur de bord est donnée par :
$$\partial^1 = U\partial^0 U^{-1},$$
où $U_j = I_{p_j+q_j}$ si $j \neq k$ et
$$U_k := \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_{q_k} \end{pmatrix},$$
où T est une matrice triangulaire inférieure sous la forme $I_{p_k} + E_{i,l}$, avec $l < i$.
Soit $M' = UMU^{-1}$. Montrons que $M' \in G(\tilde{f})$. Nous avons $M'_j = M_j$ pour tout $j \neq k$ et $j \neq k-1$. En degré k, nous avons, après un simple calcul :
$$M'_k = U_k M (U_k)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k T^{-1} & I_{q_k} \end{pmatrix}.$$
Comme T est triangulaire inférieure, T^{-1} est aussi triangulaire inférieure, et par le lemme 2.4.16, nous avons que $M' \in G(\tilde{f})$.
Nous avons
$$M'\partial^1 (M')^{-1} = U(M\partial^0 M^{-1})U^{-1}.$$
Comme U restreint à un isomorphisme sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})$ et restreint à l'identité sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f})$, on a que $(M'\partial^1(M')^{-1})_{-+} = 0$, et que $(M'\partial^1(M')^{-1})_{++}$ et $(M\partial^0 M^{-1})_{++}$ ont la même homologie. C'est ce qu'il fallait démontrer.

– **Glissement d'anses entre deux points −.** Considérons le chemin $t \mapsto -X^t$. De la proposition 2.4.2, nous savons que $(-\tilde{f}, -X^0)$ a la propriété $(\mathcal{P})$. Du lemme 2.4.10, un glissement d'anses entre des points critiques de f d'étiquette $-$ pendant $t \mapsto X^t$ donne un glissement d'anses entre les points critiques de $-f$ d'étiquette $+$ pendant $t \mapsto -X^t$. D'après le premier cas, nous avons que le couple $(-\tilde{f}, -X^1)$ a la propriété $(\mathcal{P})$. De la proposition 2.4.2, nous avons que le couple $(\tilde{f}, X^1)$ a la propriété $(\mathcal{P})$.
– **Glissement d'anses d'un point + au-dessus d'un point −.** Le pseudo-gradient ∂^1 dérive de ∂^0 par l'équation :

$$\partial^1 = M'\partial^0(M')^{-1},$$

où M' est la matrice correspondant au glissement d'anses. De la définition même de $G(\tilde{f})$, la matrice M' est un élément de $G(\tilde{f})$. Nous savons par hypothèse qu'il y a un élément M tel que $M\partial^0 M^{-1}$ vérifie les deux points de la propriété $(\mathcal{P})$. En définissant $M^1 := M(M')^{-1}$, élément de $G(\tilde{f})$, nous obtenons que X^1 a la propriété $(\mathcal{P})$ car :

$$\begin{aligned} M^1\partial^1(M^1)^{-1} &= (M(M')^{-1})M'\partial^0(M')^{-1}(M'M^{-1}) \\ &= M\partial^0 M^{-1}. \end{aligned}$$

C'est ce dont nous rêvions.
– **Glissement d'anses d'un point − au-dessus d'un point +.** Ce dernier cas est le plus fastidieux. Continuons de noter k l'indice des deux points. Appelons a le point $-$ impliqué dans le glissement d'anses, et b le point $+$. Nous avons $f(a) > f(b)$. Nous supposons que ∂^1 est obtenu de ∂^0 via l'équation $\partial^1 = U\partial^0 U^{-1}$, où $U_j = I_{p_j+q_j}$ pour tout $j \neq k$ et

$$U_k := \begin{pmatrix} I_{p_k} & E \\ 0 & I_{q_k} \end{pmatrix}$$

où E est une matrice avec un seul coefficient non nul $E_{i,l}$ tel que a est le l-ème point de $\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ et b est le i-ème point de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$. Soit $M \in G(\tilde{f})$ tel que $(M\partial^0 M^{-1})_{-+} = 0$ et $(M\partial^0 M^{-1})_{++}$ est un opérateur de bord dont le n-ème groupe d'homologie est le seul non nul, isomorphe à $\mathbb{Z}$. Remarquons que la matrice EN_k est une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_{p_k}(\mathbb{Z})$ dont les coefficients diagonaux sont tous 0. La matrice $I_{p_k} - EN_k$ est donc inversible et triangulaire inférieure.
Soit M' la matrice telle que $M'_j = M_j$ pour tout degré sauf au degré k pour lequel on a :

$$M'_k := \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k(I_{p_k} - EN_k)^{-1} & I_{q_k} \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 2.4.16, cette matrice est dans $G(\tilde{f})$. Considérons l'opérateur de bord ∂' donné par :

$$\partial' := M'\partial^1(M')^{-1}.$$

Nous démontrons que $\partial'_{-+} = 0$, ce qui implique que ∂'_{++} est un opérateur de bord, et que ∂'_{++} a la même homologie que $M\partial^0 M^{-1}$. Comme $\partial^1_j \neq \partial^0_j$ seulement si $j \in \{k, k+1\}$, et que $M'_j \neq M_j$ seulement pour ces deux degrés, il suffit d'expliciter les degrés k et $k+1$. Nous obtenons alors des calculs directs :

1. Commençons par le degré k, la lettre I sera utilisée pour la matrice identité de n'importe quel rang :

$$\begin{aligned}
\partial'_k &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_{k-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k} & \partial^0_{+-,k} \\ \partial^0_{-+,k} & \partial^0_{--,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -E \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_{k-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k} & \partial^0_{+-,k} - \partial^0_{++,k}E \\ \partial^0_{-+,k} & \partial^0_{--,k} - \partial^0_{-+,k}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k} & \partial^0_{+-,k} - \partial^0_{++,k}E \\ N_{k-1}\partial^0_{++,k} + \partial^0_{-+,k} & N_{k-1}(\partial^0_{+-,k} - \partial^0_{++,k}E) + \partial^0_{--,k} - \partial^0_{-+,k}E \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ -N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \star_1 & \star_3 \\ \star_2 & \star_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De la définition de la propriété $(\mathcal{P})$, nous voyons que nous ne sommes intéressés que par les valeurs de $\star_1$ et $\star_2$. Par souci de clarté, nous n'indiquerons pas l'exposant 0 ou l'indice k dans les matrices $\partial^0_{\ell_1\ell_2,k}$ dans les prochains calculs. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\star_1 &= \partial_{++} - (\partial_{+-} - \partial_{++}E)N_k(I-EN_k)^{-1} \\
&= \partial_{++}(I-EN_k)(I-EN_k)^{-1} + \partial_{++}EN_k(I-EN_k)^{-1} \\
&- \partial_{+-}N_k(I-EN_k)^{-1} \\
&= (\partial_{++} - \partial_{+-}N_k)(I-EN_k)^{-1}.
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\star_2 &= N_{k-1}\partial_{++} - \left[N_{k-1}(\partial_{+-} - \partial_{++}E) + \partial_{--} - \partial_{-+}E\right] N_k(I-EN_k)^{-1} \\
&= N_{k-1}\partial_{++}\left[I + EN_k(I-EN_k)^{-1}\right] + \partial_{-+}\left[I + EN_k(I-EN_k)^{-1}\right] \\
&- N_{k-1}\partial_{+-}N_k(I-EN_k)^{-1} - \partial_{--}N_k(I-EN_k)^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $EN_k(I-EN_k)^{-1} = (I-EN_k)^{-1} - I$, nous obtenons :

$$\star_2 = \left(N_{k-1}\partial_{++} + \partial_{-+} - N_{k-1}\partial_{+-}N_k - \partial_{--}N_k\right)(I-EN_k)^{-1}.$$

Mais, puisque $(M\partial^0 M^{-1})_{-+} = 0$, avec l'équation 2.5 nous obtenons que $\star_2 = 0$, ce qui est ce qu'on veut.

2. Nous avons, au degré $k+1$:

$$\begin{aligned}
\partial'_{k+1} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & E \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k+1} & \partial^0_{+-,k+1} \\ \partial^0_{-+,k+1} & \partial^0_{--,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -N_{k+1} & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & E \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k+1} - \partial^0_{+-,k+1}N_{k+1} & \partial^0_{+-,k+1} \\ \partial^0_{-+,k+1} - \partial^0_{--,k+1}N_{k+1} & \partial^0_{--,k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_k(I-EN_k)^{-1} & I \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k+1} - \partial^0_{+-,k+1}N_{k+1} + E(\partial^0_{-+,k+1} - \partial^0_{--,k+1}N_{k+1}) & \partial^0_{+-,k+1} + E\partial^0_{--,k+1} \\ \partial^0_{-+,k+1} - \partial^0_{--,k+1}N_{k+1} & \partial^0_{--,k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \star_1 & \star_3 \\ \star_2 & \star_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\star_1 = \partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1} + E(\partial_{-+} - \partial_{--}N_{k+1})$$

De l'équation 2.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\star_1 &= \partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1} + E(N_k\partial_{+-}N_{k+1} - N_k\partial_{++}) \\
&= (I - EN_k)(\partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1})
\end{aligned}$$

Et :

$$\star_2 = \partial_{-+} - \partial_{+-}N_{k+1} + N_k(I-EN_k)^{-1}\left[\partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1} + E(\partial_{-+} - \partial_{--}N_{k+1})\right]$$

Ici encore, utilisons l'équation 2.5 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\star_2 &= N_k\partial_{+-}N_{k+1} + N_k\partial_{++} \\
&+ N_k(I-EN_k)^{-1}\left[\partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1} + E(N_k\partial_{+-}N_{k+1} - N_k\partial_{++})\right] \\
&= -N_k(\partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1}) + N_k(I-EN_k)^{-1}(I-EN_k)(\partial_{++} - \partial_{+-}N_{k+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\partial'_{-+} = 0$. Notons U' la matrice telle que U'_j est l'identité en tout degré sauf au degré k pour lequel nous avons :

$$U'_k := \begin{pmatrix} I_{p_k} - EN_k & 0 \\ 0 & I_{q_k} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice inversible, qui agit de manière non triviale seulement sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f})$. Nous avons démontré :

$$\partial'_{++} = \left[U'(M\partial^0M^{-1})(U')^{-1}\right]_{++}.$$

Ainsi, ∂'_{++} et $(M\partial^0M^{-1})_{++}$ ont la même homologie, ce qui est ce que nous voulions. Avec ce dernier cas, la démonstration du lemme 2.4.15 est complète.

□

Le lemme précédent montre que la propriété $(\mathcal{P})$ ne dépend que de $\tilde{f}$ et pas du pseudo-gradient adapté à f. Nous pouvons donc dire que le germe $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$ sans préciser le pseudo-gradient adapté. Pour démontrer le théorème 2.4.6, si $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques, nous aurons juste à trouver un et un seul pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f qui a la propriété $(\mathcal{P})$.

Si $\tilde{h}$ est trivial, n'importe quel pseudo-gradient adapté convient. Nous avons le deuxième lemme :

Lemme 2.4.17. *Soit $(f^t)_{t\in[0,1+\varepsilon)}$ un chemin de fonctions non critique générique qui étend un germe $\tilde{f}^0$ tel qu'un et un seul accident survient pendant ce chemin. Soit $\tilde{f}^1$ un germe représenté par la fonction :*

$$(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [1, 1+\varepsilon) \mapsto f^t(x).$$

Si $\widetilde{f^1}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, alors $\widetilde{f^0}$ aussi.

Démonstration du lemme. Nous démontrerons le lemme selon le type d'accident. Nous supposons avoir un chemin de pseudo-gradient X^t tel que X^t soit adapté à f^t pour tout t différent du temps d'accident, et tel que si l'accident est un accident de mort ou de naissance, il soit indépendant. Nous séparerons dans la démonstration les cas d'accidents de mort/naissance d'indices $(1,0)$ ou $(n,n-1)$ des autres cas d'accidents de mort/naissance, puisque nous avons vu qu'être indépendant revêt une signification légèrement différente dans ce cas.

- **Croisement de points critiques.** Nous avons vu que $G(\widetilde{f^1}) \subset G(\widetilde{f^0})$, et de [26, Corollary 2.2] nous pouvons supposer que X^t est constant. Ainsi f^0 et f^1 ont le même pseudo-gradient Morse-Smale X. Identifiant $\mathbb{ZC}(\widetilde{f^1})$ à $\mathbb{ZC}(\widetilde{f^0})$, nous avons $\partial^1 = \partial^0$. Nous savons par hypothèse qu'il y a $M^1 \in G(\widetilde{f^1})$ tel que $M^1\partial^1(M^1)^{-1}$ remplit les conditions de la propriété $(\mathcal{P})$. Comme $M^1 \in G(\widetilde{f^0})$, nous avons que $M^1\partial^0(M^1)^{-1}$ vérifie aussi les points de la propriété $(\mathcal{P})$. Ainsi $\widetilde{f^1}$ a la propriété $(\mathcal{P})$.
- **Accident de mort d'une paire d'indices $(k+1,k)$, avec $1 \le k \le n-2$.**
  Notons (a,b) la paire de points critiques d'indices $(k+1,k)$ qui meurt en chemin. Nous pouvons considérer un pseudo-gradient X^0 tel que $\partial^1 = \partial^0$ sur les points qui existent toujours au temps 1, et tel que $\partial^0 a = \pm b$ et $\partial^0 b = 0$. Nous avons utilisé que l'accident est supposé indépendant pour le chemin X^t. Soit M^1 dans $G(\widetilde{f^1})$ tel que $M^1\partial^1(M^1)^{-1}$ remplit les conditions de la propriété $(\mathcal{P})$.
  Nous supposons d'abord que l'étiquette de (a,b) est $+$. Au degré $k+1$, nous avons, de l'équation 2.1 :

$$\partial^0_{k+1} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & \partial^1_{++,k+1} & \vdots & \partial^1_{+-,k+1} & \\ & & 0 & & \\ 0 \quad \dots \quad 0 & & \pm 1 & 0 \quad \dots \quad 0 & \\ & & 0 & & \\ & \partial^1_{-+,k+1} & \vdots & \partial^1_{--,k+1} & \\ & & 0 & & \end{pmatrix},$$

  où la colonne remplie de 0 est celle de a et la ligne remplie de 0 est celle de b. Comme

l'accident est indépendant, nous avons aussi au degré $k+2$:

$$\partial^0_{k+2} = \begin{pmatrix} & \partial^1_{++,k+2} & & & \partial^1_{+-,k+2} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \partial^1_{-+,k+2} & & & \partial^1_{--,k+2} & \end{pmatrix},$$

et au degré k :

$$\partial^0_k = \begin{pmatrix} & 0 & \\ \partial^1_{++,k} & \vdots & \partial^1_{+-,k} \\ & 0 & \\ & 0 & \\ \partial^1_{-+,k} & \vdots & \partial^1_{--,k} \\ & 0 & \end{pmatrix}.$$

Dans les autres degrés, l'opérateur de bord n'est pas modifié. Nous montrons que $\widetilde{f^0}$ a la propriété $(\mathcal{P})$ en montrant que ∂^0 a toutes les bonnes propriétés.
Nous avons vu qu'il y a une injection naturelle $G(\widetilde{f^1})$ dans $G(\widetilde{f^0})$, et nous notons M^0 l'image de M^1 par cette injection, qui est, au degré $j = k$ ou $j = k+1$:

$$M^0_j = \begin{pmatrix} & & 0 & & & \\ & I_{p^1_j} & \vdots & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & & \\ & N^1_j & \vdots & & I_{q^1_j} & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix},$$

où N^1_j la sous-matrice en bas à gauche de M^1_j. Nous avons $M^0_j = M^1_j$ dans les autres degrés.
Tout cela nous mène à :

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,j} = (M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{-+,j} = 0$$

et

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++,j} = (M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++,j}$$

pour tout $j \notin \{k, k+1, k+2\}$. Si $j = k+1$, un simple calcul utilisant les équations ci-dessus montre que :

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k+1} = 0,$$

et

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++,k+1} = \begin{pmatrix} & (M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++,k+1} & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Le même type de calculs matriciaux donne

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k} = 0,$$

et

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k+2} = 0.$$

Ainsi, nous obtenons une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \to \left(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\widetilde{f^1}), (M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++}\right) \to \left(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\widetilde{f^0}), (M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++}\right) \to (T, \pm 1) \to 0,$$

où $(T, \pm 1)$ est le complexe de chaînes acyclique $0 \to \mathbb{Z}a \to \mathbb{Z}b \to 0$ tel que $\partial_T a = \pm b$. En utilisant la suite exacte longue en homologie, nous avons que $(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++}$ et $(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++}$ ont la même homologie.
Le lemme est donc démontré dans le cas d'une singularité de mort d'une paire (a, b) d'indices $(k+1, k)$ et d'étiquette $+$, avec $1 \leq k \leq n-2$.
Si l'étiquette est $-$, alors cela correspond à une singularité de mort d'une paire d'étiquette $+$ pour le chemin $t \mapsto -f^t$. Nous pouvons utiliser les résultats de la section 2.4.2.

– **Accident de naissance d'une paire d'indices $(k+1, k)$, avec $1 \leq k \leq n-2$.**
Appelons (a, b) la paire d'indices $(k+1, k)$ qui naît en chemin. La naissance est supposée indépendante pour le chemin de pseudo-gradients X^t. Nous avons $\partial^1 a = \pm b$, et la composante de $\partial^1 d$ selon a ou b est 0, pour tout point critique d qui n'est pas a. Par hypothèse, il y a une matrice $M^1 \in G(\widetilde{f^1})$ telle que

$$\partial' := M^1\partial^1(M^1)^{-1}$$

est un opérateur de bord qui a les bonnes propriétés. Supposons que l'étiquette de a et b est $+$.
En notation matricielle, nous avons en inversant le temps dans les équations d'un accident de mort :

$$\partial^1_{k+1} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ \partial^0_{++,k+1} & & \vdots & & \partial^0_{+-,k+1} \\ & & 0 & & \\ 0 \quad \dots \quad 0 & & \pm 1 & 0 \quad \dots \quad 0 & \\ & & 0 & & \\ \partial^0_{-+,k+1} & & \vdots & & \partial^0_{--,k+1} \\ & & 0 & & \end{pmatrix},$$

où la colonne clafie de 0 est celle de a et la ligne farcie de 0 est celle de b. Comme l'accident est supposé indépendant pour le chemin X^t, nous avons aussi au degré $k+2$:

$$\partial^1_{k+2} = \begin{pmatrix} \partial^0_{++,k+2} & & \partial^0_{+-,k+2} \\ 0 \quad \dots \quad 0 & 0 & \dots \quad 0 \\ \partial^0_{-+,k+2} & & \partial^0_{--,k+2} \end{pmatrix},$$

et au degré k :

$$\partial_k^1 = \begin{pmatrix} & 0 & \\ \partial^0_{++,k} & \vdots & \partial^0_{+-,k} \\ & 0 & \\ & 0 & \\ \partial^0_{-+,k} & \vdots & \partial^0_{--,k} \\ & 0 & \end{pmatrix}.$$

Dans les autres degrés, l'opérateur de bord n'est pas modifié. Vérifions les points de la propriété $(\mathcal{P})$.
Soit M^0 la restriction de M^1 à $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f^0)$. Plus précisément, si pour $j = k$ (resp. $j = k+1$) nous avons

$$M_j^1 = \begin{pmatrix} & & 0 & & & & \\ & I_{p_j^0} & \vdots & & 0 & & \\ & & 0 & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & N_j & & L_j & & I_{q_j^0} & \end{pmatrix},$$

où L_j est la colonne de la sous-matrice de M_j^1 qui correspond à b (resp. a), alors

$$M_j^0 = \begin{pmatrix} I_{p_j^0} & 0 \\ N_j & I_{q_j^0} \end{pmatrix}.$$

C'est un élément de $G(\widetilde{f^0})$.
Au degré $k+1$ nous avons :

$$(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{-+,k+1} = \begin{pmatrix} (M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k+1} & L_k - N_k\partial^0_{+-}L_{k+1} - \partial^0_{--,k+1}L_{k+1} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

où nous avons :

$$(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k+1} = \partial^0_{-+,k+1} - \partial^0_{--,k+1}N_{k+1} - N_k\partial^0_{+-,k+1}N_{k+1} + N_k\partial^0_{--,k+1}.$$

Comme $(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{-+,k+1} = 0$, nous voyons facilement avec l'équation 2.6 et la définition de M^0 ci-dessus que $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,k+1} = 0$. Au degrés k ou $k+2$, nous avons le même genre de calculs, qui peuvent paraître techniques, mais sont néanmoins simples. Le fait que $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+,j} = 0$ au degré j différent de k, $k+1$ et $k+2$ est immédiat, car $M_j^0 = M_j^1$.
Nous obtenons, en utilisant les descriptions des matrices ci-dessus :

$$(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++,k+1} = \begin{pmatrix} & \partial^0_{++,k+1} - \partial^0_{+-,k+1}N_{k+1} & & -\partial^0_{+-,k+1}L_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Nous avons aussi :

$$(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{+-,k+1} = \begin{pmatrix} & \partial^0_{+-,k+1} & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{--,k+1} = \partial^0_{--,k+1} + N_k\partial^0_{+-,k+1}. \tag{2.9}$$

Et donc, $\partial'^0_{++} := (M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++}$ définit un opérateur de bord. Pour $t = 0$ ou $t = 1$, notons $\mathbb{Z}\mathcal{C}^t$ le complexe de chaînes dont l'opérateur de bord est ∂'^t_{++} :

$$0 \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^+_n(\widetilde{f^t}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^+_{n-1}(\widetilde{f^t}) \to ... \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^+_1(\widetilde{f^t}) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^+_0(\widetilde{f^t}) \to 0.$$

Nous obtenons une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \to \mathbb{Z}\mathcal{C}^0 \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}^1 \to T \to 0,$$

où $(T, 1)$ est le complexe de chaînes acyclique

$$0 \to \mathbb{Z}a \xrightarrow{\pm 1} \mathbb{Z}b \to 0.$$

En utilisant la suite exacte longue en homologie, nous obtenons que $\mathbb{Z}\mathcal{C}^0$ a la bonne homologie.

Ici encore, les mêmes conclusions tiennent dans le cas où l'étiquette de la paire est $-$ en utilisant les résultats de la section 2.4.2.

– **Mort d'une paire d'indices** $(1, 0)$ **ou** $(n, n-1)$**.**
Nous supposons que l'étiquette de la paire, notée (a, b) et d'indices $(k+1, k)$, qui meurt en chemin est $+$. Supposons aussi tout d'abord que $k = 0$. Dans ce cas, il y a un pseudo-gradient ∂^0 tel que $\partial^0 d$ n'a aucune composante selon a (resp. b) pour tout point d d'indice 2 (resp. 1 et différent de a) et tel que $\partial^0 a = \pm b \pm c$ où c est un autre point d'indice 0.
Nous vérifions les points de la définition de la propriété $(\mathcal{P})$. Nous définissons M^0 comme dans l'équation 2.1. Nous avons $M^0 \in G(\widetilde{f^0})$. Nous vérifions que pour tout point $d \in \mathcal{C}^+(\widetilde{f^0})$, nous avons $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+}d = 0$ sauf si $d = a$ et $c \in \mathcal{C}^-(\widetilde{f^0})$ auquel cas nous avons $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+}a = \pm c$. Dans ce dernier cas, $f^0(c) < f^0(b)$ car a et b ont des valeurs critiques consécutives. Supposons par exemple que $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+}a = c$. Définissons M'_0 comme étant

$$\begin{pmatrix} I_{p_0} & 0 \\ N'_0 & I_{q_0} \end{pmatrix}$$

où les coefficients de N'_0 sont nuls sauf celui dont la colonne est celle de b et dont la ligne est celle de c, qui est -1. Nous avons $M'_0 \in G_0(\widetilde{f^0})$. Soit M' la matrice de $G(\widetilde{f^0})$ qui est l'identité à tous les degrés sauf au degré 0 pour lequel c'est M'_0. Un calcul direct donne $((M'M^0)\partial^0(M'M^0)^{-1})_{-+} = 0$. Il n'est ensuite pas difficile de voir que $((M'M^0)\partial^0(M'M^0)^{-1})_{++}$ a l'homologie voulue.
Si la paire est d'indice $(n, n-1)$, c'est encore plus simple, car l'indépendance de l'accident donne directement $\partial^0 a = \pm b$, et $M^0 \in G(\tilde{f})$ est tel que $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+} = 0$ et $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++}$ a l'homologie voulue.
Si la paire est d'étiquette $-$, les résultats de la section 2.4.2 permettent de conclure.

– **Naissance d'une paire d'indices** $(1, 0)$ **ou** $(n, n-1)$**.** Nous supposons tout d'abord que la paire apparaissant durant le chemin, notée (a, b), est d'étiquette $+$ et d'indice $(1, 0)$. Il y a un pseudo-gradient Morse-Smale X^1 adapté à f^1 et un pseudo-gradient Morse-Smale X^0 adapté à f^0 tels que :

$$\partial^1_2 = \begin{pmatrix} & \partial^0_{++,2} & & & \partial^0_{+-,2} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \partial^0_{-+,2} & & & \partial^0_{--,2} & \end{pmatrix}$$

où la ligne de 0 est celle de a. Supposons que $\partial^0 a = \pm b \pm c$ tel que c est un point critique de f^1 d'étiquette $-$ et d'indice 0. Nous obtenons :

$$\partial_1^1 = \begin{pmatrix} & & 0 & & & \\ & \partial^0_{++,1} & \vdots & & \partial^0_{+-,1} & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \dots & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & & \\ & \partial^0_{-+,1} & \vdots & & \partial^0_{--,1} & \\ & & 0 & & & \\ & & \pm 1 & & & \end{pmatrix},$$

où la dernière ligne est celle de c, et la ligne au milieu avec une quantité non négligeable de 0 est celle de b. Si $M^1 \in G(\widetilde{f^1})$ est telle que $(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{-+} = 0$ et $(M^1\partial^1(M^1)^{-1})_{++}$ a l'homologie voulue. Nous notons

$$M_j^1 = \begin{pmatrix} & & 0 & & & \\ & I_{p_j^0} & \vdots & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & N_j & L_j & & I_{q_j^0} & \end{pmatrix},$$

si $j = 0$ et $j = 1$. Considérons $M^0 \in G(\widetilde{f^0})$ telle que $M_j^0 = M_j^1$ pour tous les degrés différents de 1 et 0, et qui est

$$M_j^0 = \begin{pmatrix} I_{p_j^0} & 0 \\ N_j & I_{q_j^0} \end{pmatrix},$$

dans les degrés 1 et 0. Nous avons les mêmes équations que pour l'accident de naissance d'une paire d'indices $(k+1, k)$ pour $1 \leq k \leq n-2$, c'est-à-dire les équations 2.7, 2.8, 2.6, et 2.9. Le résultat en découle.
Si les indices de la paire sont $(n, n-1)$, alors nous pouvons aussi faire comme dans le cas d'un accident de naissance d'une paire d'indices $(k, k-1)$ avec $1 \leq k \leq n-2$.
Si la paire est d'étiquette $-$, les résultats de la section 2.4.2 mènent à la conclusion.

□

Démonstration du théorème 2.4.6. Le théorème 2.4.6 est directement impliqué par une récurrence sur le nombre d'accidents durant le chemin générique du couple $t \mapsto (\widetilde{f^t}, X^t)$ en partant $t = 1$ et en remontant vers $t = 0$. L'hérédité est impliquée par l'union du lemme 2.4.17 et du lemme 2.4.15. L'initialisation vient du fait qu'au temps $t = 1$, le germe $\widetilde{f^1}$ est supposé trivial. □

2.4.3 Différences avec le travail de Barannikov

Dans cette partie, nous allons démontrer deux choses. D'une part, que les formes canoniques du FMC d'un germe qui a la propriété $(\mathcal{P})$ peuvent tous aboutir à la forme canonique du FMC d'un germe trivial via les modifications données dans le théorème 2.3.12, pour tout corps. D'autre part, qu'il y a un germe qui n'a pas la propriété $(\mathcal{P})$ mais dont toutes les formes canoniques

de son FMC peuvent aboutir au FMC d'un germe trivial. Ainsi, le théorème 2.4.6 améliore les résultats de Barannikov.

On a le théorème :

Théorème 2.4.18. *Si un germe $\tilde{f}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$, alors il y a un chemin admissible de FMC sans création de paires de sommets.*

Démonstration. La démonstration est assez simple. Si $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, alors modulo des actions d'éléments de $G(\tilde{f})$ — qui donnent des modifications de type 1) décrites dans le théorème 2.3.7 — on se retrouve avec un FMC tel que $n(p,q) = 0$ si p est d'indice $k+1$, si q est d'indice k et si p est d'étiquette $+$ et q d'étiquette $-$. Cela nous permet de faire descendre tous les sommets $+$ qui ne sont pas le maximum global (le sommet d'indice n et d'étiquette $+$ de hauteur maximale) en dessous des sommets $-$ avec des modifications de type 4) et 6). On obtient deux complexes séparés. Avec les modifications 4), 5), 6) et 7), on peut alors obtenir un FMC où tous les sommets qui ne sont ni le maximum global ni le minimum global sont appariés en couples (p,q) où p et q sont de mêmes étiquettes, d'indices et de hauteurs consécutives et telles que $n(p,q) = \pm 1$. Avec la modification 2), on peut éliminer toutes ces paires et retrouver un FMC trivial. Le chemin est admissible et ne présente aucune création de paires de sommets. □

En utilisant la proposition 2.3.13, on voit ainsi que pour tout corps, la forme canonique du FMC d'un germe qui a la propriété $(\mathcal{P})$ peut être reliée par un chemin admissible de formes canoniques de FMC.

Il s'agit maintenant de voir qu'il existe un germe tel que, pour tout corps, la forme canonique du FMC de ce germe peut être relié via un chemin admissible à la forme canonique du FMC d'un germe trivial, mais qui n'a pas la propriété $(\mathcal{P})$. Ce résultat met en valeur le fait qu'une condition basée sur l'homologie à coefficients entiers présente des invariants qui disparaissent quand le complexe est tensorisé par un corps. Un de ces invariants sera explicité en section 3.4.

Le germe que nous allons décrire est en fait le germe $\tilde{f}_0$ introduit dans l'exemple 2.3.6. Nous rappelons sa description.

La fonction f_0 a 6 points critiques : un maximum, un minimum, deux points d'indice $k+1$ et deux points d'indice k, pour $2 \leq k \leq n-3$, avec $n \geq 3$. Un des points d'indice $k+1$, noté a, est d'étiquette $+$, et est au-dessus du deuxième point d'indice $k+1$, noté b, qui est d'étiquette $-$. Les deux points d'indice k sont en dessous des points d'indice $k+1$. L'un d'eux est d'étiquette $+$, et est noté c, l'autre est d'étiquette $-$ et noté d, avec $f_0(c) > f_0(d)$. L'opérateur de bord pour un certain pseudo-gradient adapté X est :

$$\partial_{k+1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \partial_{++,k+1} &= 7, \\ \partial_{+-,k+1} &= 5, \\ \partial_{--,k+1} &= -2, \\ \partial_{-+,k+1} &= -3. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4.6, nous savons que $\widetilde{f_0}$ a la propriété $(\mathcal{P})$ si et seulement il y a deux matrices

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(M^{-1})_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

telles que

$$M_k \partial_{k+1} (M^{-1})_{k+1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 5 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M_k étant la restriction au degré k d'un élément $M \in G(\widetilde{f^0})$ et la matrice $(M^{-1})_{k+1}$ la restriction au degré $k+1$ de M^{-1}. Le coefficient ± 1 en première ligne et première colonne correspond dans la définition de la propriété $(\mathcal{P})$ à l'item "*le complexe* $(\mathcal{C}_j^+(\widetilde{f^0}), \partial_{++,j} - \partial_{+-,j} N_j)_{0 \leq j \leq n}$ *est un opérateur de bord dont l'homologie est non nulle seulement en degré n pour lequel c'est isomorphe à* $\mathbb{Z}$." Le coefficient 0 en deuxième ligne et première colonne correspond au deuxième item, soit pour tout j l'équation

$$\partial_{-+,j} - \partial_{--,k} N_j + N_{j-1} \partial_{++,j} - N_{j-1} \partial_{+-,j} N_j = 0.$$

On rappelle que ∂_{+-} n'est pas modifiée sous l'action de $G(\tilde{f})$. On cherche donc λ et μ deux entiers tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 + 5\lambda & 5 \\ -2 - 3\lambda & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 5 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne

$$\begin{pmatrix} 7 + 5\lambda & 5 \\ -2 - 3\lambda + 7\mu + 5\lambda\mu & -3 + 5\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 5 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Il est donc nécessaire d'avoir un entier λ tel que $7 + \lambda 5 = \pm 1$ pour que le germe s'étende sans points critiques, ce qui n'est pas vrai.

Formes canoniques du FMC de $\tilde{f}_0$

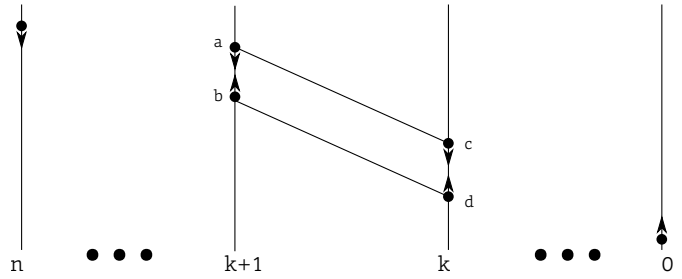

FIGURE 2.14 – Forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$, quand $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) = 5$.

La forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$ dépend du corps $\mathbb{F}$, et plus précisément de sa caractéristique.

– **Cas 1 : $\mathbb{F}$ est de caractéristique 5.** La forme canonique du FMC est en figure 2.14. Nous pouvons modifier la forme canonique du FMC pour avoir celui décrit en figure 2.16 qui peut être réduit à la forme canonique d'un FMC d'un germe trivial, en éliminant les deux paires de sommets.

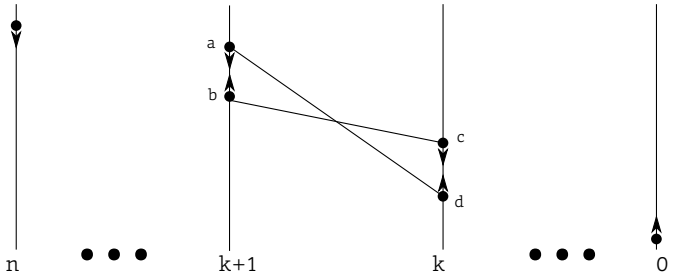

FIGURE 2.15 – Forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$, quand $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) \neq 5$.

– **Cas 2 : la caractéristique de $\mathbb{F}$ est différent de 5.**
Le forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$ pour ce corps est en figure 2.15. Nous pouvons descendre le sommet représentant le point a sous le sommet représentant b. Si nous faisons cela, nous pouvons obtenir deux formes canoniques de FMC différentes, qui sont représentées en figures 2.16 et 2.17. Nous pouvons alors descendre a pour obtenir la forme canonique du FMC décrite en figure 2.16, qui peut être réduite à la forme canonique du FMC d'un germe trivial.

En conclusion, on peut toujours se ramener à la forme trivial d'un FMC d'un germe trivial, peu importe le corps en question.

Ainsi, la condition nécessaire décrite en théorème 2.3.12 est plus faible qu'avoir la propriété $(\mathcal{P})$.

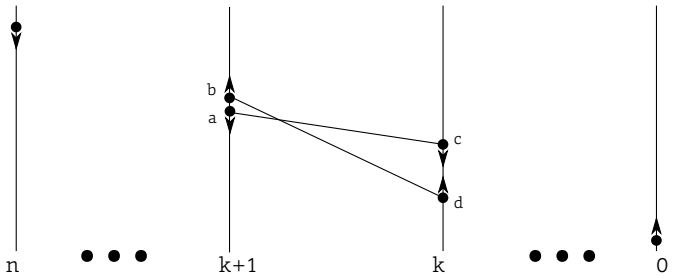

FIGURE 2.16 – Une modification possible de la forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$.

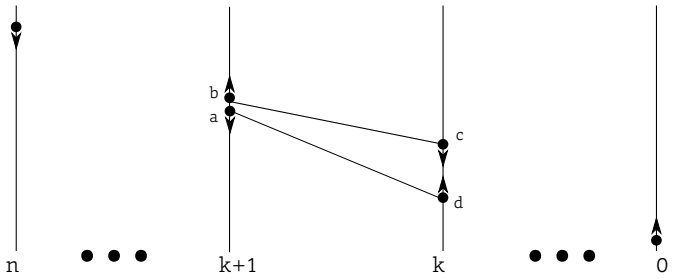

FIGURE 2.17 – Une autre modification possible de la forme canonique du FMC de $\tilde{f}_0$.

2.5 La condition du théorème 2.4.6 n'est pas suffisante

Nous exhibons dans cette section un germe $\tilde{f}$ qui a la propriété $(\mathcal{P})$, mais qui ne s'étend pas sans points critiques.

Les points critiques de f qui ne sont pas des extremums seront distribués sur 3 indices. Nous donnons en figure 2.19 le graphe de Curley de $\tilde{f}$. On va supposer que la dimension n de la sphère le long de laquelle est défini $\tilde{f}$ est très grand. Si k est l'indice d'un point critique qui n'est pas un extremum, on va au moins supposer $2(k+1) < n-1$ pour utiliser les théorèmes de plongement de Whitney et $k \geq 3$ afin de fixer $\pi_{k+1}(\mathbb{S}^k) \simeq \mathbb{Z}/(2)$. On rappelle ces théorèmes, issus de [47] et [48].

Théorème 2.5.1. *Si $2k+1 \leq n$, toute application $f : V_1 \to V_2$, où V_1 est une variété de dimension k et V_2 une variété de dimension n, est homotope à un plongement. Si $2k+2 \leq n$, alors deux plongements homotopes sont isotopes.*

On utilisera le lemme :

Lemme 2.5.2. *Si n est assez grand, alors $\pi_{k+1}\left((\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k}) \sharp (\mathbb{S}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})\right)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}$.*

Avant la démonstration, rappelons le théorème, qu'on trouve dans [17, Corollary 4.12, p.351] :

Théorème 2.5.3. *Si une CW-paire (X, A) est telle que $X \setminus A$ ne comporte que des cellules de dimensions strictement plus grandes que j, alors (X, A) est j-connexe.*

Démonstration du lemme 2.5.2. Notons V la variété $(\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k}) \sharp (\mathbb{S}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})$. Donnons à V une structure de CW-complexe qui nous permettra de calculer les groupes d'homotopie de petits degrés facilement. Donnons tout d'abord la structure de CW-complexe usuelle de $\mathbb{S}^j \times \mathbb{S}^{n-j}$, pour $j \geq 1$. On note S_j l'espace topologique $\mathbb{S}^j \times \mathbb{S}^{n-j}$ avec la structure de CW-complexe décrite ci-après. Il y a :

- une 0-cellule e_0 ;
- une j-cellule e_j dont le bord ∂e_j est envoyé sur e_0 ;
- une $(n-j)$-cellule e_{n-j} dont le bord ∂e_{n-j} est envoyé sur e_0 ;
- une n-cellule, vue comme le produit $e_j \times e_{n-j}$, dont le bord est envoyé sur

$$(e_j \times \partial e_{n-j}) \cup (\partial e_j \times e_{n-j}).$$

On va modifier légèrement cette structure en rajoutant deux cellules, une de dimension $n-1$ et une de dimension n, de manière à obtenir un CW-complexe qui soit manipulable avec la somme connexe.

On considère ainsi une nouvelle structure de CW-complexe S'_j sur l'espace topologique $\mathbb{S}^j \times \mathbb{S}^{n-j}$ telle qu'il y ait un homéomorphisme $h : S_j \to S'_j$ avec la décomposition suivante :

- une 0-cellule e'_0 telle que $h(e_0) = e'_0$;
- une j-cellule e'_j telle que $h(e_j) = e'_j$;
- une $(n-j)$-cellule telle que $h(e_{n-j}) = e'_{n-j}$;
- deux n-cellules e'_n et e''_n et une $(n-1)$-cellule e'_{n-1} telles que le bord $\partial e'_{n-1}$ est envoyé sur e'_0, le bord $\partial e''_n$ est envoyé sur e'_{n-1}, le bord $\partial e'_n$ est envoyé sur $e'_j \cup e'_{n-j} \cup e'_{n-1}$ et enfin telles que $h(e_n) = e'_n \cup e''_n \cup e'_{n-1}$.

On donne en figure 2.18 une représentation de cette décomposition cellulaire dans le cas $n = 2$ et $k = 1$.

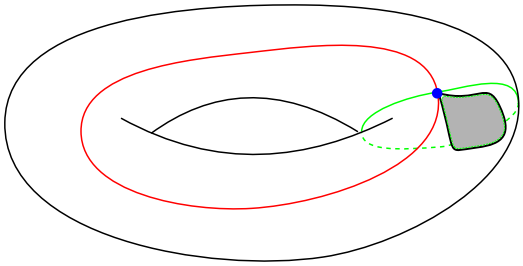

FIGURE 2.18 – Structure cellulaire sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, qui se comporte bien avec la somme connexe. Le point bleu est la cellule e_0, la cellule e_1 est en rouge, la cellule e_{2-1} est en vert, la cellule e'_2 est en blanc, la cellule e''_2 est en gris et enfin la cellule e'_{n-1} est le bord de e''_n et est en noir.

On a que V est la somme connexe de S_k et de S_{k+1}. On donne à S_k et S_{k+1} chacun une décomposition cellulaire comme sus-décrite, en désignant par un e les cellules de S_k et par un d celles de S_{k+1}

Rappelons que la somme connexe $S_k \sharp S_{k+1}$, dont la définition est rappelée en définition 1.4.5, est construite en utilisant deux plongements $\psi_1 : \mathbb{D}^n \to S_k$ et $\psi_2 : \mathbb{D}^n \to S_{k+1}$. On considère que ces plongements sont tels que ψ_1 envoie $\mathbb{D}^n$ sur e''_n et s'étend à un difféomorphisme sur la boule fermée envoyant la sphère $\partial\mathbb{D}^n$ sur e'_{n-1}, et que ψ_2 envoie $\mathbb{D}^n$ sur d''_n et s'étend à un difféomorphisme sur la boule fermée en envoyant $\partial\mathbb{D}^n$ sur d'_{n-1}. On peut supposer que $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ envoie d_0 sur e_0. Remarquons enfin qu'en tant qu'espace topologique, $S_k \sharp S_{k+1}$ est homéomorphe à $(S_k \setminus e''_n) \cup_\varphi (S_{k+1} \setminus d''_n)$ où φ est la restriction de $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ à $\partial\mathbb{D}^n$.

Via cette identification, on obtient une structure de CW-complexe sur V qui nous sera pratique, et qui comprend :

- une 0-cellule e_0, identifiée aussi à d_0 ;
- une k-cellule e_k, une $k+1$-cellule d_{k+1}, une $(n-k)$-cellule e_{n-k} et une $(n-k+1)$-cellule d_{n-k+1} ;
- une $(n-1)$-cellule e'_{n-1} identifiée à d'_{n-1} et deux n-cellules e'_n et d'_n.

En utilisant le théorème 2.5.3 et le fait que k est petit devant n, on obtient que le groupe d'homotopie $\pi_{k+1}(V)$ est aussi le groupe d'homotopie de V', CW-complexe obtenu de V en rajoutant une n-cellule f_n dont le bord ∂f_n est envoyé sur e'_{n-1} par une application de degré 1. Remarquons alors que V' se rétracte sur $S_k \vee S_{k+1}$, muni d'une structure de CW-complexe canonique avec les structures canoniques de S_k et S_{k+1}, en identifiant e_0 et d_0.

C'est donc $\pi_{k+1}(S_k \vee S_{k+1})$ que l'on veut calculer. Ce groupe d'homotopie est alors directement donné par un théorème de Hilton, voir [18] ou encore [44] pour une explication en français. Généralement, les groupes $\pi_j(\mathbb{S}^l \vee \mathbb{S}^m)$ pour des entiers j, l et m sont donnés par la somme des groupes $\pi_j(\mathbb{S}^l) \oplus \pi_j(\mathbb{S}^m)$ avec ce qu'on appelle des produits de Whitehead, qu'on n'abordera pas ici, mais qui sont nuls dans notre cas très spécifique. On a simplement

$$\pi_{k+1}(S_k \vee S_{k+1}) = \pi_{k+1}(S_k) \oplus \pi_{k+1}(S_{k+1}).$$

Enfin, puisque pour $j \in \mathbb{N}$, l'espace S_j est un produit $\mathbb{S}^j \times \mathbb{S}^{n-j}$, on a que

$$\pi_{k+1}(S_k) = \pi_{k+1}(\mathbb{S}^k) \oplus \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n-k})$$

et

$$\pi_{k+1}(S_{k+1}) = \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{k+1}) \oplus \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n-k-1}).$$

Comme n est grand devant k, on a

$$\pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n-k}) = \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n-k-1}) = 0.$$

Alors, puisque $k \geq 3$, impliquant $\pi_{k+1}(\mathbb{S}^k) = \mathbb{Z}/(2)$, on a

$$\pi_{k+1}(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(2).$$

□

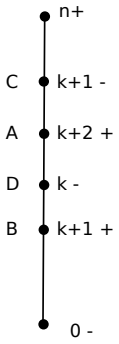

FIGURE 2.19 – Graphe de Curley d'un germe qui ne s'étend pas sans points critiques.

Construisons maintenant le germe étape par étape, en partant d'une fonction hauteur et en déformant la fonction de Morse avec des chemins génériques.

Nous étendrons la fonction de Morse à un germe grâce au lemme suivant :

Lemme 2.5.4 (Construction d'un germe)**.** *Soit V une variété fermée. Soit f une fonction de Morse définie sur V. Pour toute application*

$$\phi : \mathcal{C}(f) \to \{-, +\}$$

il y a un germe de Morse $\tilde{f}_\phi$ tel que l'étiquette de chaque point critique de f pour $\tilde{f}_\phi$ est donnée par son image par ϕ.

Démonstration. Pour tout point critique p de f, il y a un voisinage ouvert $\mathcal{U}_p$ dans V tel que p est l'unique point critique de f dans $\mathcal{U}_p$. Il y a aussi une fonction plateau (lisse) $g_p : V \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 (resp. -1) dans un sous-voisinage $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{U}_p$ de p et 0 hors de $\mathcal{U}_p$ si $\phi(p) = -$ (resp. $\phi(p) = +$). Soit

$$g := \sum_{p \in \mathcal{C}(f)} g_p.$$

Un représentant de $\tilde{f}_\phi$ est donné par n'importe quelle fonction $V \times [0, \varepsilon)$ qui est f sur V et dont la dérivée selon t est g. Pour ε assez petit, on obtient bien un représentant d'un germe de Morse avec les bonnes propriétés. □

Pour éviter toute confusion par une surabondance de notation, nous n'indiquerons pas la dépendance en temps des points critiques et de leurs sphères d'attachement et sphères transverses respectives.

Considérons une fonction de Morse obtenue d'une fonction hauteur après les naissances d'une paire d'indices $(k+2, k+1)$ et d'une paire d'indices $(k+1, k)$. On peut supposer que le graphe

de Reeb d'une telle fonction est celui en figure 2.20. Les niveaux juste au-dessus de b et d respectivement sont obtenus comme dans le fait 1.4.3. Les classes d'homotopie de σ_b et σ_d sont nulles dans leurs niveaux respectifs, la classe d'homotopie de σ_a (resp. σ_c) dans son niveau est celle de σ_b^+ (resp. σ_d^+).

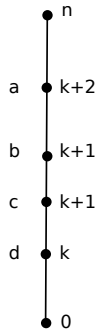

FIGURE 2.20 –

On va d'abord faire descendre b sous c et d avec un chemin de fonctions générique. C'est possible car σ_b est homotopiquement nulle dans son niveau. Nous obtenons une nouvelle fonction de Morse donc le graphe de Reeb est représenté en figure 2.21. Notons V_1 le niveau sous c. C'est difféomorphe à $(\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}) \sharp (\mathbb{S}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-2})$. Comme $k << n$, le groupe $\pi_{k+1}(V_1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}$ par le lemme 2.5.2.

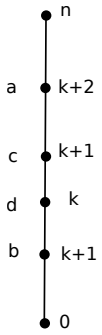

FIGURE 2.21 –

En utilisant $2(k+1)+1 < n-1$ et les théorèmes de Whitney, il y a un représentant S de la classe $(1,0)$ qui est une sphère plongée dans V_1. De plus, comme $k << n$ et en utilisant [30, Lemma 4.6], nous pouvons supposer que σ_c et S sont disjoints. Nous rappelons ce lemme ici :

Lemme 2.5.5. *Soient V de dimension k et V' de dimension k', deux sous-variétés d'une variété W de dimension n telles que $k+k' < n$. Il y a un difféomorphisme $h : W \to W$ isotope à l'identité tel que $h(V)$ est disjoint de V'.*

Ainsi, en utilisant une reparamétrisation du pseudo-gradient, il y a une sphère $(k+1)$-dimensionnelle S' plongée dans le niveau sous a telle que S' est envoyée sur S par le flot du pseudo-gradient. Remarquons que le niveau de $\mathbb{S}^n$ qui est sous a est difféomorphe à $\mathbb{S}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-2}$. Dans ce niveau, S' est nulle en homotopie. Comme nous tuons la classe d'homotopie représentée par $\mathbb{S}^k \times \{\star\}$ dans V_1 quand on passe au-dessus de c, nous tuons aussi la classe d'homotopie de S, et donc $S' = 0$ en homotopie. Finalement, σ_a est isotopie à $\sigma_a + S'$.

Soit X' un pseudo-gradient adapté à f pour lequel la sphère d'attachement de a, notée σ'_a, est $\sigma_a + S'$, et tel que σ'_a la sphère transverse de c toujours disjointe. Cette dernière supposition est possible car la sphère transverse de c est nulle en homotopie dans le niveau de a, pour n'importe quel pseudo-gradient adapté. Il n'y a pas d'obstruction à ce que a descende sous c selon le disque descendant de a pour X', voir par exemple [26, Lemma 2.1]. En faisant cela et en définissant le germe avec les étiquettes de la figure 2.19, nous obtenons un germe $\tilde{f}$ avec l'utilisation du lemme 2.5.4. Nous montrons maintenant :

Proposition 2.5.6. *$\tilde{f}$ ne s'étend pas sans points critiques.*

On continue d'utiliser les notations introduites dans cette section.

Démonstration. Supposons que $\tilde{f}$ ait une extension non critique F. Avec la description donnée en section 1.9, les seules modifications topologiques des niveaux de F sont données par celles décrites dans les théorèmes 1.9.4 et 1.9.3, selon les étiquettes des points critiques de f.

Ainsi, tous les niveaux $F^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in]f(d), f(a)[$ sont difféomorphes. Nous montrons que ces modifications topologiques ne peuvent pas produire une variété à bord $F^{-1}(f(a) - \varepsilon)$ dans laquelle σ_a, la sphère d'attachement de a, est homotopiquement triviale. Ce qui est alors absurde.

Nous avons successivement, en utilisant les théorèmes de la section 1.9 :

- Le niveau de l'extension au-dessus du minimum doit être difféomorphe à une boule $\mathbb{D}^n$;
- Le niveau au-dessus de b, noté Σ, doit être difféomorphe à :

$$\mathbb{D}^n \setminus_{(\phi,\varphi)} (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathring{\mathbb{D}}^{n-(k+1)})$$

  où φ est un plongement de $\mathbb{S}^k \times \{\star\}$ dans $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$. Nous avons que $H_j(\Sigma) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k+1$ par la description des modifications des groupes d'homologie de niveau de l'extension, et le fait que $k + 1 < \frac{n}{2}$. Nous avons donc $\pi_j(\Sigma) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k+1$ en utilisant le théorème d'Hurewicz sur les groupes d'homotopie supérieurs d'un CW-complexe. En particulier, $\pi_{k+1}(\Sigma) = 0$.
- Le niveau de l'extension au-dessus de d est homotopiquement équivalent à $\Sigma \cup_\varphi \mathbb{D}^k$, où φ plonge $\mathbb{S}^{k-1}$ dans le bord de Σ. De plus, φ est nulle en homotopie dans Σ et borde une boule $\mathbb{D}^k_2$, car $\pi_k(\Sigma) = 0$. Dans ce niveau, nous avons que S est un représentant de la classe d'homotopie non nulle de dimension $k+1$ du complexe $\mathbb{D}^k_2 \cup_\varphi \mathbb{D}^k$ qui est homéomorphe à une sphère $\mathbb{S}^k_2$. Elle est toujours non nulle en homotopie dans $\Sigma \cup_\varphi \mathbb{D}^k$ qui est homotopiquement équivalent à $\Sigma \vee \mathbb{S}^k_2$. Ainsi, la classe d'homotopie de σ'_a n'est pas nulle en homotopie dans le niveau de l'extension. Nous pouvons alors utiliser le théorème 1.9.4, établissant que nécessairement, la sphère d'attachement d'un point + est nulle en homotopie dans le niveau d'une extension (avec ou sans points critiques).

□

Nous démontrons :

Lemme 2.5.7. *Le germe $\tilde{f}$ a la propriété ($\mathcal{P}$).*

Démonstration. En contemplant longuement le graphe de Curley en figure 2.19 et la construction de $\tilde{f}$, nous voyons que pour tout pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f :

- $\partial a = \pm b$;
- $\partial c = \pm d$;

où ∂ est l'opérateur de bord associé à un pseudo-gradient. Avec les étiquettes, on voit que $\tilde{f}$ a la propriété ($\mathcal{P}$). □

Nous avons finalement :

Théorème 2.5.8. *Il y a des germes qui ont la propriété ($\mathcal{P}$) qui ne s'étendent pas sans points critiques.*

En conclusion, si on devait donner une condition nécessaire et suffisante d'extension sans points critiques, il faudrait que l'on prenne compte des classes d'homotopie des sphères d'attachements des points critiques de f. Il semble que ce soit difficile.

Chapitre 3

Corollaires du théorème principal et cas de suffisances

Sommaire

3.1 Premiers résultats de suffisance 91
3.1.1 Germes triviaux 91
3.1.2 Mort sans points critiques 95
3.1.3 Il y a toujours un germe qui s'étend sans points critiques à un complexe de chaînes donné 96
3.2 Germes ordonnés 98
3.2.1 Définitions et suffisance de la propriété $\mathcal{P}$ 98
3.2.2 Stabilisation de germes ordonnés 100
3.3 Un peu d'algèbre linéaire à coefficients entiers 109
3.3.1 Problèmes et définitions 109
3.3.2 Question 3.3.1 111
3.3.3 Question 3.3.3 115
3.4 Une conjecture et quelques perspectives 121

Si la propriété $(\mathcal{P})$ du théorème 2.4.6 n'est pas suffisante en toute généralité, elle l'est dans quelques cas particuliers qu'il est intéressant d'étudier. Notamment le cas des germes ordonnés, étudié dans la section 3.2.1, car l'étude de ce cas est susceptible de donner une condition facilement calculable à partir des données du complexe de Morse du germe ordonné. Qui plus est, une condition nécessaire et suffisante calculable pour les germes ordonnés donnerait une condition nécessaire calculable pour tous les germes, bien que plus faible que celle établie en théorème 2.4.6. Nous aurons cependant besoin de résultats d'algèbre linéaire à coefficients entiers, qui sont intéressants en soi, hors du cadre de la théorie de Morse. Nous les exposons en section 3.3.

3.1 Premiers résultats de suffisance

3.1.1 Germes triviaux

Dans cette section, indépendante de ce qui a été exposé jusqu'à présent, nous présentons un résultat loin d'être surprenant, mais nécessaire pour montrer qu'un germe donné avec les bonnes propriétés s'étend sans points critiques. Il concerne les germes dits triviaux dont voici une définition.

Définition 3.1.1 (Germe trivial)**.** Un germe $\tilde{f}$ est *trivial* si f n'a pour tout point critique qu'un seul maximum et qu'un seul minimum tels que le maximum est $+$ et le minimum est $-$.

Ainsi, un germe trivial est un germe qui ressemble fortement au germe induit par la projection sur une coordonnée $pr_k : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto x_k$. Il serait très pénible qu'un germe trivial ne s'étende pas sans points critiques, puisque la projection sur une coordonnée est le prototype même de germe qui s'étend sans points critiques. Remarquons aussi que le point de départ de Barannikov [2] est de dire que si un germe s'étend sans points critiques, alors on le relie via un chemin de fonctions générique à un germe trivial, mais dont on sait déjà qu'il s'étend sans points critiques par hypothèse.

Nous allons donc démontrer le théorème :

Théorème 3.1.2 (Extension sans points critiques d'un germe trivial [12])**.** *Un germe trivial s'étend toujours sans points critiques.*

La démonstration de ce théorème utilise le concept de pseudo-isotopie, étudié par Cerf dans [4]. Nous rappelons d'abord le concept d'isotopie.

Définition 3.1.3 (Isotopie)**.** Soit V une variété lisse. Soient φ^0 et φ^1 deux difféomorphismes de V. On dit que φ^0 et φ^1 sont *isotopes* s'il existe une application $\phi : V \times [0,1] \to V$ telle que $\phi(\cdot, 0) = \varphi^0$ et $\phi(\cdot, 1) = \varphi^1$, et que $\phi(\cdot, t)$ est un difféomorphisme de V pour tous les temps t.

Deux difféomorphismes isotopes φ^0 et φ^1 sont donc très similaires, et classer les difféomorphismes d'une variété à isotopie près serait merveilleux, mais malheureusement, le concept d'isotopie est difficile à manipuler. Cependant, nous pouvons définir un concept plus manipulable, mais *a priori* plus faible que l'isotopie. C'est celui d'être pseudo-isotope.

Définition 3.1.4 (Pseudo-isotopie)**.** Soit V une variété lisse. Soient φ^0 et φ^1 deux difféomorphismes de M. On dit que φ^0 et φ^1 sont *pseudo-isotopes* s'il existe une application $\phi : V \times [0,1] \to V \times [0,1]$ telle que $\phi(x, 0) = (\varphi^0(x), 0)$ pour tout $x \in V$ et $\phi(x, 1) = (\varphi^1(x), 1)$ pour tout $x \in V$, et que ϕ est un difféomorphisme de $V \times [0,1]$.

En quoi cette définition est-elle intéressante ?

En fait, une question intéressante sur les difféomorphismes des sphères est de savoir si un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ s'étend en un difféomorphisme $\phi : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{D}^{n+1}$. Il s'avère que cette propriété est équivalente à être pseudo-isotope à l'identité.

Le théorème de Cerf énonce que si $\pi_1(V) = \{1\}$ et que si $\dim(V) \geq 5$ alors tout difféomorphisme pseudo-isotope à l'identité est isotope à l'identité. En particulier, l'intérêt d'étudier cela est d'étudier les classes de difféomorphismes des variétés de haute dimension. Étant donné un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, on peut toujours construire une sphère lisse avec la construction $\mathbb{D}^{n+1} \cup_\varphi \mathbb{D}^{n+1}$. On a alors par le théorème de Cerf que, pour $n \geq 5$, savoir si cette sphère est difféomorphe à la sphère standard $\mathbb{S}^{n+1}$ est équivalent à savoir si φ est pseudo-isotope à l'identité. On rappelle aussi qu'en grande dimension, il y a des variétés lisses homéomorphes à la sphère $\mathbb{S}^n$, sans pour autant lui être difféomorphe.

Nous référons à [4] et [35] pour de plus amples détails sur le travail de Cerf, et à [27] et [13] pour en savoir plus sur les classes de difféomorphismes des sphères en grande dimension.

Dans cette sous-section, nous nous bornerons à utiliser des résultats très simples liés à la pseudo-isotopie.

12. Je suis très reconnaissant à François Laudenbach de m'avoir indiqué la méthode de démonstration de ce lemme.

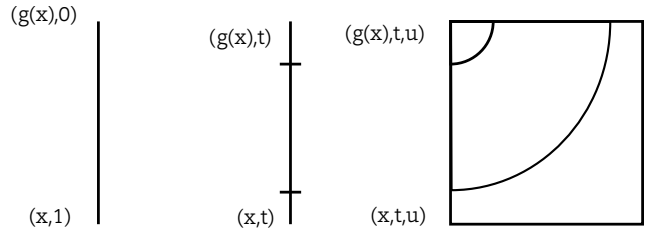

FIGURE 3.1 – Extension d'une pseudo-isotopie à $x \in V$ fixé.

Lemme 3.1.5. *Soit V une variété fermée. Toute pseudo-isotopie de V est pseudo-isotope à l'identité.*

Démonstration du lemme. La démonstration est inspirée d'Hatcher et Wagoner [14], qui utilisent un résultat de Cerf [4, Theorem 5 p.293] que nous rappellerons 3 lignes plus bas. Soit φ un difféomorphisme d'une variété fermée V qui est pseudo-isotope à l'identité. Considérons l'espace des pseudo-isotopies constantes sur un voisinage des bords du cylindre $V \times [0,1]$. Ce sont les pseudo-isotopies qui sont $(x,t) \mapsto (\varphi(x),t)$ sur $V \times [0,\varepsilon]$ et $(x,t) \mapsto (x,t)$ sur $v \times [1-\varepsilon,1]$. Le résultat de Cerf établit que cet espace est un rétract par déformation de l'espace des pseudo-isotopies qui relient φ à id_V.

Considérons ϕ, une pseudo-isotopie de φ à id_V qui est constante sur des voisinages des bords. Nous noterons par (x,t,u) les points du double cylindre $V \times [0,1] \times [0,1]$ en coordonnées cartésiennes. Nous utiliserons aussi les coordonnées polaires (x,r,θ) sur $(V \times [0,1] \times [0,1]) \setminus (V \times \{0\} \times \{0\})$, avec $r = \sqrt{t^2+u^2}$ et $\tan(\theta) = \frac{u}{t}$. Définissons la pseudo-isotopie de $V \times]0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ comme étant $(x,\theta,r) \mapsto (\phi(x,r),\theta)$, c'est-à-dire que nous appliquons ϕ sur chaque cylindre $\{\theta = constant\}$.

On peut voir que cette pseudo-isotopie s'étend de manière lisse à tout le double cylindre, puisque ϕ est constante sur des voisinages de $V \times \{0\}$ et de $V \times \{1\}$. C'est un difféomorphisme de $V \times [0,1] \times [0,1]$ qui coïncide avec ϕ sur $V \times [0,1] \times \{0\}$ et $id_{V \times [0,1]}$ sur $V \times [0,1] \times \{1\}$. C'est donc une pseudo-isotopie entre ϕ et l'identité de $id_{V \times [0,1]}$. □

Il est temps de démontrer le théorème 3.1.2

Démonstration du théorème 3.1.2. Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse trivial. Quitte à composer à gauche par un difféomorphisme de $\mathbb{R}$, on peut toujours supposer que le maximum de $\tilde{f}$ est 1 et que le minimum est -1. On notera N le point maximum et S le point minimum. Considérons le germe donné par la $(n+1)$-ème coordonnée $pr_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ restreint le long de $\mathbb{S}^n$. Le lemme de Morse donne deux difféomorphismes :

$$\phi_S : \mathcal{N}(S) \to pr_{n+1}^{-1}([-1,-1+\delta])$$

et

$$\phi_N : \mathcal{N}(N) \to pr_{n+1}^{-1}([1-\delta,1])$$

tels que $\mathcal{N}(S)$ et $\mathcal{N}(N)$ sont des voisinages du minimum et du maximum dans le voisinage collier de la sphère, avec

$$\tilde{f}^{-1}(\{-1+\delta\}) = \overline{\partial(\mathcal{N}(S)) \setminus \mathbb{S}^n}$$

et

$$\tilde{f}^{-1}(\{1-\delta\}) = \overline{\partial(\mathcal{N}(N)) \setminus \mathbb{S}^n}.$$

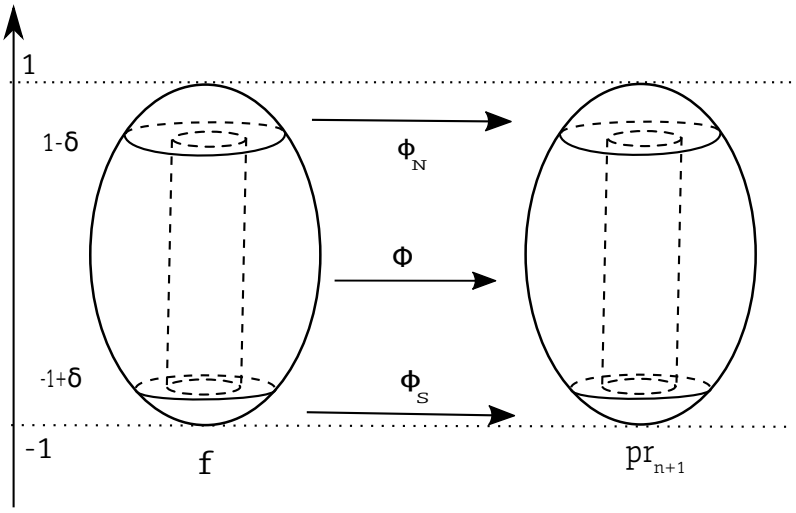

FIGURE 3.2 – Les deux feuilletages induits par les fonctions de Morse.

En d'autres termes, les bords intérieurs à la boule de ces voisinages sont des niveaux de représentants du germe $\tilde{f}$. Voir figure 3.2.

Nous avons un difféomorphisme préservant les niveaux :

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{S}^n \cap pr_{n+1}^{-1}([-1+\delta, 1-\delta])$$

où $\mathcal{D}$ est $f^{-1}([-1+\delta, 1-\delta])$. Notons que $\mathbb{S}^n \cap pr_{n+1}^{-1}([-1+\delta, 1-\delta])$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1+\delta, 1-\delta]$. On peut supposer que $\phi : \mathcal{D} \cap f^{-1}(\{-1+\delta\}) \to \mathbb{S}^{n-1}$ est égal à ϕ_S restreint à $f^{-1}(\{-1+\delta\})$.

Nous choisissons des pseudo-gradients $X(\tilde{f})$ et $X(pr_{n+1})$ pour $\tilde{f}$ et pr_{n+1} tels que leurs flots respectent les feuilletages induits par les fonctions de Morse respectifs. C'est possible à renormalisation du champ de vecteurs loin des extremums, car les seuls points critiques de f ou de pr_{n+1} sont leurs extremums respectifs. Notons aussi par $G_s(\tilde{f})$ l'application qui envoie tout point de $\tilde{f}^{-1}([-1+\delta, 1-\delta])$ dans $\tilde{f}^{-1}(\{s\})$ par le flot du pseudo-gradient renormalisé. Nous définissons $G_s(pr_{n+1})$ de manière analogue. Ces applications sont des difféomorphismes quand elles sont restreintes à un niveau.

Le difféomorphisme

$$\Phi : (x, s) \mapsto G_s(pr_{n+1}) \circ \phi_N \circ G_{1-\delta}(\tilde{f}) \circ \phi^{-1}(x, s)$$

est une pseudo-isotopie de $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1+\delta, 1-\delta]$. En utilisant le lemme 3.1.5, on peut définir une pseudo-isotopie $\tilde{\Phi} : (x, s, t) \mapsto \Phi(x, s, t)$ sur $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1+\delta, 1-\delta] \times [0, \varepsilon]$ qui soit Φ sur $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1+\delta, 1-\delta] \times \{0\}$ et l'identité sur $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1+\delta, 1-\delta] \times \{\varepsilon\}$. Ainsi, nous pouvons ajouter de manière lisse un disque $\mathbb{D}^{n-1}$ sur chaque niveau de $\tilde{f}$ en utilisant $\tilde{\Phi}$. Finalement, nous obtenons une fonction de Morse F sans points critiques (car le feuilletage est trivial) définie sur une variété à bord W difféomorphe à un cylindre plein $\mathbb{D}^n \times [-1+\delta, 1-\delta]$. Il est possible de coller $\mathcal{N}(S)$ au bord inférieur de W, car l'isotopie est l'identité près du point minimum. En utilisant un difféomorphisme du disque $\mathbb{D}^n$, on peut étendre F à $\mathcal{N}(N)$, est finalement à tout $\mathbb{D}^{n+1}$, sans points critiques. Nous obtenons une fonction sans points critiques $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dont la restriction à un voisinage collier de $\mathbb{S}^n$ représente $\tilde{f}$.

□

3.1.2 Mort sans points critiques

Soient f une fonction de Morse définie sur une variété fermée V et X un pseudo-gradient adapté et Morse-Smale. Dans cette section, nous ne supposons pas que f est excellente. Soient a et b deux points critiques avec les hypothèses suivantes :

- a est d'indice $k+1$ et b d'indice k ;
- a et b ont des valeurs critiques consécutives. Précisons que $f(a)$ ou $f(b)$ peuvent correspondre à plusieurs points critiques ;
- il y a une et une seule ligne de gradient γ de a à b telle que l'intersection de la variété instable de a et la variété stable de b est transversale.

Avec de telles hypothèses, nous dirons que a et b sont en *position d'élimination mutuelle*. Si un germe $\tilde{f}$ étend f le long de V, et si a et b sont tous deux + (resp. −), nous supposons aussi que toutes les lignes de gradient descendantes partant de a (resp. b) sauf γ atteignent $f^{-1}(\{f(b)-\delta\})$ (resp. $f^{-1}(\{f(a)+\delta\})$) avec δ un réel positif aussi petit que voulu. Nous appellerons cette hypothèse une hypothèse d'*excellence locale*.

Le lemme suivant démontre que dans ce cas, nous pouvons réaliser l'élimination des deux points par un chemin qui n'a pas de points critiques. La démonstration et la version de ce lemme consiste simplement à observer que tout est déjà fait dans [25].

Lemme 3.1.6 (Lemme d'élimination non critique)**.** *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse le long de V avec f qui n'est pas nécessairement excellente. Soit X un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f. Nous supposons qu'il y a des points $a \in \mathcal{C}^+_{k+1}(\tilde{f})$ et $b \in \mathcal{C}^+_k(\tilde{f})$ en position d'élimination mutuelle. Nous supposons aussi l'hypothèse d'excellence locale. Alors, il y a un chemin de fonctions $(f^t)_{t\in[0,1]}$ tel que :*

- *$\tilde{f}$ est représenté par $(x,t) \mapsto f^t(x)$ pour $0 \leq t \leq \varepsilon$;*
- *$\mathcal{C}_*(\widetilde{f^1})$ s'identifie naturellement avec $\mathcal{C}_*(\tilde{f}) \setminus \{a,b\}$;*
- *$(d_x\tilde{f}^t(x,t), \partial_t\tilde{f}^t(x,t)) \neq (0,0)$, pour tout (x,t) dans $V \times [0,\varepsilon)$.*

Démonstration. Soit γ l'orbite du pseudo-gradient qui joint a à b et soit $\mathcal{W}$ un voisinage de γ dans V. Dans [25], Laudenbach trouve un chemin de fonctions $t \mapsto f^t$ qui réalise l'élimination, et le chemin peut être choisi tel que $\partial_t f^t(x) < 0$ pour tout x dans $\mathcal{W}$. En particulier, le chemin vu comme une fonction $(x,t) \in V \times [0,1]$ n'a pas de points critiques. Si le germe $\tilde{f}$ est tel que $\partial_t\tilde{f}(x,0) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{W}$, alors la méthode de Laudenbach donne un chemin de fonctions $(x,t) \mapsto F(t,x)$ qui réalise l'élimination, et tel que F restreint à $\tilde{f}$ pour t petit et $dF \neq 0$. La fonction F n'a donc aucun point critique. Pour avoir un germe avec une telle propriété sur sa dérivée, nous trouverons un chemin non critique de classe $\mathcal{C}^1$ noté $H : (x,t) \mapsto H(x,t)$ pour t de 0 à un nombre réel δ tel que :

- $H(x,t)$ donne un représentant de $\tilde{f}$ pour t petit ;
- $H(x,\delta) = g(x)$ pour tout x dans V ;
- $\partial_t H(x,\delta) < 0$ pour x dans $\mathcal{W}$.

Considérons la fonction

$$G : (x,t) \mapsto \tilde{f}(x,\varepsilon) + (t - \frac{t^2}{2\delta'})\partial_t\tilde{f}(x,\varepsilon) + \frac{t^2}{2\delta'}g(x)$$

avec t de 0 à δ' petit, et avec g une fonction de V dans $\mathbb{R}$ avec $-m < g(x) < 0$ sur $\mathcal{W}$ pour m petit, et qui est 0 hors d'un petit voisinage de $\mathcal{W}$. Remarquons que $\partial_t G(x,0) = \partial_t\tilde{f}(x,\varepsilon)$ et $\partial_t G(x,\delta') = g(x) < 0$ pour x dans $\mathcal{W}$. En concaténant le chemin $(x,t) \mapsto \tilde{f}(x,t)$ pour t de 0 à ε et le chemin G, on obtient le chemin H voulu de classe $\mathcal{C}^1$. En concaténant H avec le chemin utilisé pour faire l'élimination, on obtient un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ qui réalise l'élimination sans

points critiques. Le chemin est même lisse partout sauf au temps de jonctions des deux chemins où il est juste $\mathcal{C}^1$. Toutefois, il est toujours possible de le lisser en s'assurant qu'il garde sa propriété d'être non critique. Le lemme est ainsi démontré. □

Évidemment, un lemme avec des conclusions identiques existe pour l'élimination de points $-$. Il suffit d'utiliser le lemme sur $-\tilde{f}$.

3.1.3 Il y a toujours un germe qui s'étend sans points critiques à un complexe de chaînes donné

Nous montrons dans cette sous-section que donné un germe $\tilde{f}$ qui a la propriété $(\mathcal{P})$, il y a un germe $\widetilde{f^e}$ tel que :

- f^e et f ont un pseudo-gradient adapté et Morse-Smale commun. On peut donc leur donner le même opérateur de bord via l'identification naturelle des points critiques de f^e avec ceux de f ;
- $\widetilde{f^e}$ a la propriété $(\mathcal{P})$;
- $\widetilde{f^e}$ s'étend sans points critiques.

La raison pour laquelle $\widetilde{f^e}$ s'étend sans points critiques est que la fonction f^e présente des hypothèses d'ordonnement des valeurs critiques en fonction des indices.

Nous commençons avec un lemme intéressant en soi.

Lemme 3.1.7. *Soit $\tilde{f}$ un germe le long de $\mathbb{S}^n$ tel que f est excellente. Soit X un pseudo-gradient Morse-Smale adapté et ∂ l'opérateur de bord induit. Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ avec $2 \leq k \leq n-2$ tel que tous les points critiques de*

$$f^{-1}\left([\min\left(f\left(\mathcal{S}\right)\right), \max\left(f\left(\mathcal{S}\right)\right)]\right)$$

sont dans $\mathcal{S}$.

Alors, pour tout isomorphisme

$$P : \mathbb{Z}\mathcal{C}(f) \to \mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$$

qui se restreint à l'identité sur $\mathbb{Z}\left(\mathcal{C}(f) \setminus \mathcal{S}\right)$, il y a un chemin générique de fonctions $F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est non critique et qui continue $\tilde{f}$ avec les propriétés suivantes. Le chemin F ne présente aucun accident de naissance ni de mort, et la fonction $g := F(\boldsymbol{.}\,, 1)$ est une fonction de Morse sur $\mathbb{S}^n$, telle que :

- *l'ordre des points critiques de g par rapport à celui des valeurs critiques est le même que celui de f ;*
- *il y a un pseudo-gradient Morse-Smale X_1 adapté à g tel que, si ∂_1 est l'opérateur de bord associé, nous avons*

$$\partial_1 = P\partial P^{-1}.$$

Démonstration. Nous avons juste besoin de considérer le cas $P = I + E_{i,j}$, résultat d'un glissement d'anses entre deux points de $\mathcal{S}$, car $GL(\mathbb{Z}\mathcal{S})$ est engendré par de telles matrices. Si $a \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathcal{S}$ tels que $f(a) < f(b)$, nous pouvons trouver un chemin de fonctions non critique qui continue $\tilde{f}$ sans accidents de mort ni de naissance tel que la fonction au temps 1 notée f^1 est une fonction de Morse avec $f^1(b^1) < f^1(a^1)$. En effet,une petite adaptation de [26, Lemme 2.1] sur les croisements de points critiques permet de faire cela. De plus, on peut supposer que

$$[\min\left(f^1\left(\mathcal{S}\right)\right), \max\left(f^1\left(\mathcal{S}\right)\right)] \subset [\min\left(f\left(\mathcal{S}\right)\right) - \varepsilon, \max\left(f\left(\mathcal{S}\right)\right) - \varepsilon],$$

pour ε aussi petit que désiré, en jouant sur la vitesse des valeurs critiques des chemins des points de $\mathcal{S}$. Avec un tel chemin, nous pouvons réaliser un glissement d'anses de a^1 au-dessus de b^1, ce que nous ne pouvions pas faire avec f. Nous utilisons [30, Theorem 7.6] et le fait que $2 \leq k \leq n-2$. Finalement, nous pouvons remettre les points critiques dans le même ordre que lespoints critiques de f avec un autre chemin non critique qui garde le même opérateur de bord. □

Nous avons le théorème :

Théorème 3.1.8. *Soit n un entier tel que $n \geq 6$. Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse tel que f n'a pas d'autres points critiques d'indices 0, 1, $n-1$ et n différents de son maximum global et de son minimum global. Supposons que $\tilde{f}$ a la propriété $(\mathcal{P})$. Il y a un germe de Morse $\widetilde{f^e}$ tel que $G_k(\widetilde{f^e}) = G_k(\tilde{f})$ pour tout k, et tel que $\widetilde{f^e}$ s'étend sans points critiques à la boule $\mathbb{D}^{n+1}$.*

Démonstration. Nous construisons le germe $\widetilde{f^e}$ étape par étape depuis $\tilde{f}$.

Par la théorie de Morse classique, voir [30, Sec. 4], il y a un chemin générique de fonctions $(f^t)_{t\in[0,1]}$ de $f = f^0$ à une fonction f^1 sans naissances ni morts tel que si a^1 et b^1 sont deux points critiques de f^1 d'indices respectifs $k+1$ et k, alors $f^1(a^1) > f^1(b^1)$. Nous soulignons que nous ne demandons pas à ce chemin d'être non critique. Nous pouvons même supposer que si a^0 et b^0 sont deux points critiques de f de même indice tels que $f(a^0) > f(b^0)$, alors les points critiques a^1 et b^1 correspondants pour f^1 vérifient $f^1(a^1) > f^1(b^1)$. De plus, ce chemin peut être réalisé tel qu'il n'y a aucun croisement de points de même indice, en descendant d'abord tous les points d'indices 2, puis en descendant les points d'indices 3 et continuant par récurrence sur les indices. Avec de tels chemins, nous voyons qu'aucune paire de points critiques ne se croisent plus d'une fois. En utilisant [26, Corollary 2.2], nous pouvons utiliser un pseudo-gradient Morse-Smale commun pour f et f^1. Ainsi, nous pouvons aussi supposer que $\partial(f^1) = \partial(f)$, où $\partial(f^1)$ (resp. $\partial(f)$) est l'opérateur de bord associé à f^1 (resp. f) après identification des points critiques de f^1 avec ceux de f.

En utilisant le lemme 2.5.4, nous pouvons considérer un germe de Morse $\widetilde{f^1}$ tel que les étiquettes d'un point critique a^1 de f^1 est la même que celle de $a^0 \in \mathcal{C}(f)$. Comme l'ordre des valeurs critiques des points critiques de même indice est identique pour f^1 et f, les groupes $G_k(\widetilde{f^1})$ et $G_k(\tilde{f})$ sont aussi les mêmes.

Nous démontrons que $\widetilde{f^1}$ s'étend à une fonction sans points critiques F^1 sur $\mathbb{D}^{n+1}$. À partir de maintenant, tous les chemins de fonctions seront non critiques. Comme $G_k(\widetilde{f^1}) = G_k(\tilde{f})$ pour tout k, que $\partial(\widetilde{f^1}) = \partial(\tilde{f})$ et que f et f^1 n'ont que des points critiques non extrémaux d'indices entre 2 et $n-2$, il y a un pseudo-gradient adapté à f^1 et son opérateur de bord associé $\partial(f^1)$ tels que $\partial_{-+,k}(\widetilde{f^1}) = 0$ et tels que $\partial_{++}(\widetilde{f^1})$ définit un opérateur de bord acyclique sur les modules engendrés par les points critiques d'indices entre 2 et $n-2$. Nous pouvons descendre tous les points d'étiquette + et d'indice 2 à un niveau juste au-dessus du minimum global. Nous pouvons aussi descendre tous les points de $\mathcal{C}_3^+(\widetilde{f^1})$ sous les points de $\mathcal{C}_3^-(\widetilde{f^1})$, mais toujours au-dessus de tous les points de $\mathcal{C}_2(f^1)$. En homologie, on a $H_2(\partial(f^1)) = 0$, et comme $\partial_2(f^1) = 0$, nous avons que $\partial_3(f^1)$ est surjective. Comme $\partial_{-+,3}(\widetilde{f^1}) = 0$, nous avons donc que $\partial_{++,3}(\widetilde{f^1})$ est une surjection sur $\mathbb{Z}\mathcal{C}_2^+(\widetilde{f^1})$. Nous pouvons opérer des glissements d'anses entre les points de $\mathcal{C}_3^+(\widetilde{f^1})$ tels que $\partial_{++,3}(\widetilde{f^1})$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & P \end{pmatrix}$ où P est unimodulaire, grâce au lemme 3.1.7. Quitte à réaliser d'autres glissements d'anses entre les points de $\mathcal{C}_2^+(\widetilde{f^1})$, nous pouvons supposer que $P = I_{p_2}$.

Ainsi, rien n'empêche les points d'étiquette + et d'indice 3 d'aller en dessous des points d'indice 2 et étiquette −, car $\partial_{-+,3}(\widetilde{f^1}) = 0$. Nous pouvons tuer les points de $\mathcal{C}_2^+(\widetilde{f^1})$ avec les

points qui engendrent le coker de $\partial_{++,3}(\widetilde{f^1})$ dans $\mathcal{C}_3^+(\widetilde{f_1})$, en utilisant [30, Theorem 6.4] et le lemme 3.1.6. Nous obtenons un germe $\widetilde{f^2}$ pour lequel $\mathcal{C}_2^+(\widetilde{f^2}) = \emptyset$.

Enjoignons-nous à tuer tous les points d'étiquettes + et d'indices 3. Nous descendons tout d'abord les points de $\mathcal{C}_3^+(\widetilde{f^2})$ au-dessus des points de $\mathcal{C}_2^-(\widetilde{f^2})$. En utilisant les mêmes techniques que précédemment,nous pouvons considérer un pseudo-gradient pour lequel $\partial_{-+,k}(\widetilde{f^2}) = 0$ pour tous les indices k, et tel que

$$\partial_{++,4}(\widetilde{f^2}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{p_3-p_2} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors tuer tous les points de $\mathcal{C}_3^+(\widetilde{f^2})$ avec un chemin de fonctions non critique et en utilisant [30, Theorem 6.4] et le lemme 3.1.6. Par récurrence, nous pouvons tuer successivement tous les points de $\mathcal{C}_k^+(\widetilde{f})$ excepté le maximum.

Seuls restent les points −, mais il n'y a aucun problème à les éliminer tous, ici encore en se servant du lemme 3.1.7. Nous obtenons un germe trivial, qui s'étend sans points critiques, voir théorème 3.1.2.

□

En identifiant les points critiques de f^e avec ceux de f, nous avons aussi montré :

Proposition 3.1.9. *f et f^e ont un pseudo-gradient Morse-Smale en commun (c'est-à-dire adapté à f et f^e).*

3.2 Germes ordonnés

3.2.1 Définitions et suffisance de la propriété $\mathcal{P}$

Dans cette section, nous centrons notre étude sur celle des germes *ordonnés* avec le sens suivant .

Définition 3.2.1. Un germe de Morse $\tilde{f}$ défini le long de $\mathbb{S}^n$ est *ordonné* si on a $f(p) < f(q)$ pour tous points critiques p et q de f tels que :
- ou bien $\mathrm{ind}(p) < \mathrm{ind}(q)$;
- ou bien $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{ind}(q)$ et l'étiquette de p est − et celle de q est +.

C'est une simple adaptation du concept de fonction de Morse ordonnée, en prenant en compte les étiquettes. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. *Soit $\tilde{f}$ un germe ordonné défini le long de $\mathbb{S}^n$, pour $n \geq 6$ tel que f n'a qu'un maximum local, un minimum local et pas d'autres points critiques d'indices 0, 1, $n-1$ ou n. Alors $\tilde{f}$ s'étend si et seulement s'il y a des matrices $(N_k)_{2\leq k\leq n-2} \in \prod_{2\leq k\leq n-2} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}), \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}))$ telles que $(\partial_{++,k} - \partial_{+-,k}N_k)_{2\leq k\leq n-2}$ soit un complexe acyclique.*

Il n'est pas connu si ce théorème est vrai pour un germe ordonné général, sans hypothèses sur les indices. Il semble un peu plus délicat de se débarrasser des points d'indice 1 et $n-1$, y compris en utilisant des apparitions de paires de points critiques.

Démonstration. Si le germe s'étend, alors la condition énoncée dans ce théorème est plus faible que la propriété $(\mathcal{P})$, et nous avons bien des matrices N_k telles que $(\partial_{++,k} - \partial_{+-,k}N_k)_{2\leq k\leq n-2}$ est un complexe de chaînes acyclique, par le théorème 2.4.6.

Réciproquement, supposons que la condition énoncée dans ce théorème est vérifiée, et que nous avons de telles matrices N_k. Comme $G_k(\tilde{f}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}), \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f}))$ et que $2 \leq k \leq n-2$,

la conjugaison de l'opérateur de bord par une matrice $M \in G(\tilde{f})$ constituée de la matrice $M_k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ N_k & I \end{pmatrix}$ en chaque degré k correspond géométriquement à la réalisation algébrique de glissements d'anses. On rappelle que cela correspond aussi simplement à changer de pseudo-gradient adapté et Morse-Smale de manière générique. On suppose alors, quitte à considérer depuis le départ un pseudo-gradient ∂ Morse-Smale adapté à $\tilde{f}$ qui a la propriété $(\mathcal{P})$. On a donc que $\partial_{-+} = 0$ et que le complexe $(\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}), \partial_{++,k})_{0\leq k\leq n}$ est un complexe qui a l'homologie de $(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$. En particulier, comme $\tilde{f}$ n'a pas de points d'indice $n-1$ ou 1, on a que le complexe restreint aux degrés k avec $2 \leq k \leq n-2$ est acyclique.

Notons

$$s_k = \sum_{j=2}^{k} (-1)^{j+k} p_j.$$

On redémontre le résultat classique de K-théorie qui dit qu'on peut toujours se ramener à un complexe de chaînes tel que

$$\partial_{++,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quitte à conjuguer la matrice globale ∂_{++} par une matrice de changement de bases qui conservent les degrés (ou encore, par un isomorphisme du complexe de chaînes $(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}), \partial_{++})$). Géométriquement, cela correspond à faire des glissements entre les points $+$, en utilisant le lemme 3.1.7.

Le fait que l'opérateur de bord $(\partial_{++,k})_{2\leq k\leq n-2}$ soit acyclique donne la suite exacte courte :

$$0 \to Z_k^+ \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) \xrightarrow{\partial_{++,k}} B_{k-1}^+ \to 0$$

où

$$Z_k^+ := \ker(\partial_{++,k}),$$
$$B_k^+ := \mathrm{Im}(\partial_{++,k+1}).$$

Comme B_{k-1}^+ est libre, la suite est scindée et nous avons la décomposition :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) \simeq Z_k^+ \oplus B_{k-1}^+.$$

Alors, Z_k^+ est un facteur direct de $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ et il y a un module F_{k-1}^+, isomorphe à B_{k-1}^+ via la restriction de $\partial_{++,k}$ tel qu'on ait l'*égalité* suivante :

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f}) = Z_k^+ \oplus F_{k-1}^+.$$

Comme dit précédemment, on passe de la base naturelle de $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ donnée par les points critiques de f à une base qui donne la décomposition ci-dessus par un élément P_k de $GL_{p_k}(\mathbb{Z})$. Grâce au lemme 3.1.7 et l'hypothèse faite sur les indices, nous pouvons effectuer tous les glissements d'anses que nous voulons entre les points d'étiquette $+$ et indice k pour obtenir un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à f qui donne l'opérateur de bord, pour $2 \leq k \leq n-3$:

$$\partial_{++,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où on utilise le fait classique que s_k, par définition égal à $\sum_{2\leq j\leq k}(-1)^{j+k}p_j$, est aussi le rang de B_k^+. Ce fait est laissé en exercice au lecteur ou à la lectrice, et peut être démontré par récurrence. Remarquons que géométriquement, jusque là, nous avons seulement changé le pseudo-gradient

Morse-Smale adapté à $\tilde{f}$ par un chemin générique. Nous n'avons pas encore modifié la fonction par un chemin de fonctions génériques non-critique. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Pour $3 \leq k \leq n-2$, on remarque que tout point critique donnant la base de F^+_{k-1}, qui est d'indice k, a une ligne de gradient et une seule qui le joint à un point d'indice $k-1$ et d'étiquette $+$ et n'a aucune ligne de gradient qui le joint avec un autre point critique d'indice $k-1$. C'est pour cela que nous avons fait des modifications de pseudo-gradient. Il est alors possible de faire descendre tous les points qui engendrent F^+_{k-1} sous les autres points critiques d'indice k mais étiquette $-$, et tuer tous les points qui engendrent B^+_{k-1} dans $\mathbb{Z}\mathcal{C}^+_{k-1}(\tilde{f})$ avec tous les points qui engendrent F^+_{k-1}. On utilise pour cela le lemme 3.1.6. Nous obtenons un germe ordonné qui n'a qu'un maximum local pour seul point $+$. Utilisant les mêmes techniques de modification de pseudo-gradient et de mort sans points critiques, nous pouvons alors tuer tous les points $-$. Nous obtenons un germe trivial que nous pouvons étendre, par le théorème 3.1.2. □

Dans le cas des germes ordonnés, s'étendre sans points critiques est donc une question d'algèbre homologique pure. Nous sommes invités à définir une catégorie de complexes de chaînes ordonnés et étiquetés :

Définition 3.2.3 (Catégorie $\mathcal{LOC}h$ (Labeled Ordered Chain complex))**.** Nous définissons la catégorie $\mathcal{LOC}h$ dont les objets sont les triplets (C^+, C^-, ∂) tels que C^+ (resp. C^-) est une suite graduée de $\mathbb{Z}$-modules C^+_k (resp. C^-_k), que $\partial_k : C^+_k \oplus C^-_k \to C^+_{k-1} \oplus C^-_{k-1}$ est un complexe de chaînes. Nous avons donc des restrictions $\partial_{\ell_1\ell_2,k} : C^{\ell_2}_k \to C^{\ell_1}_{k-1}$ où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux étiquettes dans $\{+,-\}$. On notera parfois simplement un objet de $\mathcal{LOC}h$ par C sans préciser l'opérateur de bord.

Les morphismes entre deux objets C et D sont les applications de complexes de chaînes $f : C^+ \oplus C^- \to D^+ \oplus D^-$ tels que $f_{+-} : C^- \to D^+$ est nul.

On notera $\mathcal{LOC}h^b$ les objets de $\mathcal{LOC}h$ qui sont bornés, c'est-à-dire les objets (C^+, C^-) tels que $C^+_k = 0$ et C^-_k pour $|k| > N$, avec $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

Ainsi, le théorème 3.2.2 montre qu'un germe ordonné s'étend si l'élément de $\mathcal{LOC}h^b$ qui lui est associé est isomorphe dans $\mathcal{LOC}h^b$ à un élément (C^+, C^-, ∂) tel que $(C^+_k, \partial_{++,k})_{2\leq k\leq n-2}$ est un complexe acyclique.

On a un foncteur d'oubli naturel entre $\mathcal{LOC}h$ et $\mathcal{C}h$, qui à un objet $C = (C^+, C^-, \partial)$ associe le complexe de chaînes $(C^+ \oplus C^-, \partial)$ et qui a un morphisme φ associe le morphisme induit sur les complexes de chaînes.

3.2.2 Stabilisation de germes ordonnés

Structure de monoïde commutatif

On peut donner à l'espace des germes ordonnés une structure de monoïde commutatif, dont la loi dérive simplement de la somme connexe de deux variétés. Cette structure de monoïde permet d'obtenir une réalisation géométrique de la loi naturelle de monoïde sur les complexes de chaînes qui est donnée par la somme.

Avant de définir une somme définie sur les germes, et pour éviter d'avoir trop de notations à manipuler, on va d'abord introduire une somme tout à fait similaire sur l'espace des fonctions de Morse ordonnées (sans informations sur les dérivées normales à la sphère), définies à précomposition par un difféomorphisme de $\mathbb{S}^n$ près. Cela donnera l'idée que l'on adaptera pour les germes. On donne en figure 3.3 un schéma illustrant la somme $f\sharp g$ entre deux fonctions f et g. L'abondance de notations dans la définition formelle de $f\sharp g$ dans le texte qui va suivre ne doit

pas rebuter la lectrice ou le lecteur : on ne fait que décrire avec des mots ce qui est représenté sur la figure. L'idée est simplement de faire une somme connexe à chaque niveau de f et g, comme montré sur la figure. Cependant, pour bien la définir et obtenir quelques informations supplémentaires (comme l'existence d'un pseudo-gradient Morse-Smale adapté à $f\sharp g$ qui proviendrait de manière naturelle de pseudo-gradients $X(f)$ et respectivement $X(g)$ Morse-Smale adaptés à f et respectivement g), il nous faut introduire quelques notations.

Commençons par définir deux espaces. Soient $n-1$ réels $\lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_{n-2} < \lambda_n$.

Définition 3.2.4 ($\mathcal{OMF}$)**.** On appelle $\mathcal{OMF}$ l'espace des couples $(f, X(f))$ où f est une fonction de Morse ordonnée n'ayant qu'un seul maximum, un seul minimum et aucun point critique d'indice 1 ou $n-1$ et où $X(f)$ est un champ de vecteurs pseudo-gradient adapté à f et Morse-Smale. De plus la valeur critique des points d'indice k est imposée et est λ_k

On peut prendre par exemple $\lambda_k = k$, mais l'utilisation serait malaisée et prêterait à confusion avec les indices. Imposer les valeurs critiques n'est pas très contraignant, car toute fonction ordonnée peut avoir de telles valeurs critiques à composition par un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ près.

Soient $2n-4$ réels $\lambda_0 < \lambda_2^- < \lambda_2^+ < \lambda_3^- < \lambda_3^+ < ... < \lambda_{n-2}^- < \lambda_{n-2}^+ < \lambda_n$.

Définition 3.2.5 ($\mathcal{OMG}$)**.** On appelle $\mathcal{OMG}$ l'espace des couples $(\tilde{f}, X(f))$ où $\tilde{f}$ est un germe ordonné, où f est une fonction de Morse ordonnée n'ayant qu'un seul maximum, un seul minimum et aucun point critique d'indice 1 ou $n-1$ et où $X(f)$ est un champ de vecteurs pseudo-gradient adapté à f et Morse-Smale. De plus, tous les points de $\mathcal{C}_k^\ell(\tilde{f})$ sont envoyés sur λ_k^{ell} pour $2 \leq k \leq n-2$ et $\ell \in \{-,+\}$, le minimum prend la valeur λ_0 et la maximum la valeur λ_n.

On omettra parfois la donnée du gradient du couple $(\tilde{f}, X(\tilde{f}))$ et parlera d'élément $\tilde{f}$ de $\mathcal{OMG}$. Dans ce cas, la donnée d'un gradient est implicite.

Notation – Définition 3.2.6. *On note $\Psi : (\tilde{f}, X) \in \mathcal{OMG} \mapsto \Psi(\tilde{f}, X) \in \mathcal{LOCh}$ qui à un couple $(\tilde{f}, X)$ associe le complexe de chaînes étiqueté défini par le couple. C'est un élément de $\mathcal{LOCh}$.*

Supposons que nous ayons tout d'abord deux couples $(f, X(f))$ et $(g, X(g))$ de $\mathcal{OMF}$. Si p est un point critique de f, on note

$$W_n^s(f, X(f), p) := W^s(f, X(f), p) \cap f^{-1}(\frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2}).$$

On note que $f^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2})$ est une sous-variété de $\mathbb{S}^n$ qui est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$. Notons $M(f, X(f)) := W_n^s(f, X(f), m)$, en ayant noté m le minimum de f. C'est aussi

$$f^{-1}(\frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2}) \setminus \bigcup_{p \in \cup_{2 \leq k \leq n-2} \mathcal{C}_k(f)} W_n^s(f, X(f), p).$$

L'hypothèse faite sur les indices de points critiques de f implique que $M(f, X(f))$ est connexe. Notons maintenant

$$W(f, X(f)) := f^{-1}\left([\frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2}]\right).$$

C'est un cobordisme trivial sur lequel nous considérons la restriction de f, que nous continuerons à appeler f, muni de $X(f)$. En tant que variété, $W(f, X(f))$ est un cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$.

On reprend pour g les notations introduites précédemment pour f. Étant donnée une orientation sur $\mathbb{S}^n$, on remarque que $W(f, X(f))$, $f^{-1}(\frac{\lambda_0+\lambda_2}{2})$, $W(g, X(g))$, et $g^{-1}(\frac{\lambda_2}{2})$ sont naturellement orientées, comme des sous-variétés de codimension 1 de $\mathbb{S}^n$ pour $f^{-1}(\frac{\lambda_2}{2})$ et $g^{-1}(\frac{\lambda_2}{2})$,

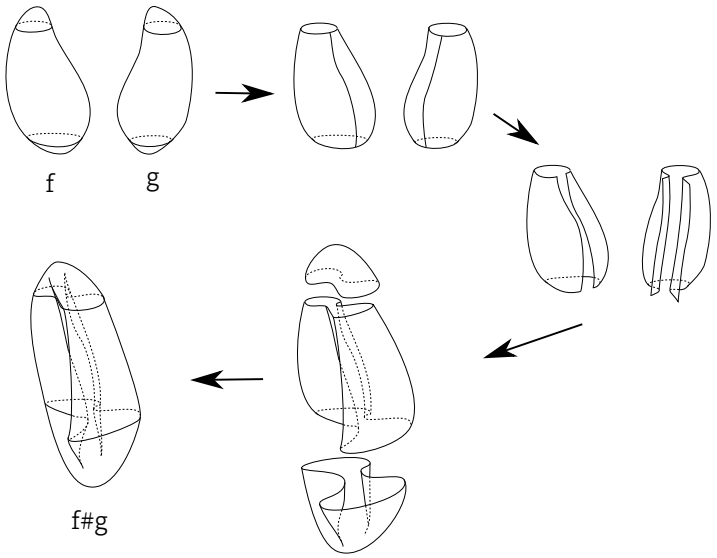

FIGURE 3.3 – Somme $f\sharp g$ de deux fonctions de Morse ordonnées f et g. On enlève tout d'abord des voisinages des extremums de f et de g, puis on découpe chacune des sphères selon des lignes de gradients. On recolle les deux sphères sur les lignes de gradients, niveau par niveau avec une somme connexe. On rajoute enfin des calottes pour obtenir une sphère.

utilisant l'orientation du gradient, et comme variété à bord de dimension n incluses dans $\mathbb{S}^n$ pour $W(f, X(f))$ et $W(g, X(g))$. Soit maintenant x (resp. y) un point de $M(f, X(f))$ (resp. $M(g, X(g))$) et $l(x)$ (resp. $l(y)$) la ligne de gradient dans $W(f, X(f))$ (resp. $W(g, X(g))$) qui débute en x (resp. y). Par définitions de $M(f, X(f))$ et $M(g, X(g))$, de telles lignes ont leurs deuxièmes extrémités respectives dans $f^{-1}(\frac{\lambda_0+\lambda_2}{2})$ et respectivement $g^{-1}(\frac{\lambda_0+\lambda_2}{2})$ et intersectent chaque niveau de leurs fonctions respectives une fois en un unique point. Soit B (resp. B') un voisinage de x (resp. y) dans $M(f, X(f))$ (resp. $M(g, X(g))$) aussi petit que nécessaire. Soit T (resp. T') l'ensemble des points de $W(f, X(f))$ (resp. $W(g, X(g))$) décrits par les orbites des points de B (resp. B') sous l'action de $X(f)$ (resp. $X(g)$). Quitte à renormaliser les pseudo-gradients, nous supposerons que le flot sur T (resp. T') est à vitesse 1. Si nous notons ϕ^t (resp. ϕ'^t) le flot engendré par $X(f)$ (resp. $X(g)$) au temps t, on a que

$$f(\phi^t(z)) = g(\phi'^t(z')), \quad \forall\, t \in [\frac{\lambda_0+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2}], \quad \forall\, (z, z') \in B \times B'.$$

Considérons deux plongements

$$\psi : \mathbb{D}^{n-1} \to B$$
$$\psi' : \mathbb{D}^{n-1} \to B'$$

tels que ψ préserve l'orientation et ψ' la renverse. Nous pouvons former la somme connexe

$$f^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2})\sharp g^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2}),$$

qui est obtenue de l'union disjointe

$$(f^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2}) \setminus \psi(0)) \cup (g^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2}) \setminus \psi'(0))$$

en identifiant $\psi(tu)$ avec $\psi'((1-t)u)$. Nous nous référons à la définition 1.4.5 introduite précédemment. Nous pouvons étendre cette opération aux cobordismes $W(f, X(f))$ et $W(g, X(g))$ en formant les sommes connexes de chaque niveau grâce aux plongements $\psi^t := \phi^t \circ \psi$ et $\psi'^t := \phi'^t \circ \psi'$.

Nous obtenons un cobordisme noté

$$W(f, X(f)) \sharp_W W(g, X(g))$$

qui dépend aussi des plongements ψ et ψ'. Sur ce cobordisme, nous pouvons définir une fonction lisse $f \sharp g$ où

$$f\sharp g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in W(f, X(f)) \\ g(z) & \text{si } z \in W(g, X(g)) \end{cases}.$$

Cette fonction est bien définie car $f(\psi^t(z)) = g(\psi'^t(z))$ si $z \in W(f, X(f)) \cap W(g, X(g))$. Qui plus est, comme la somme connexe de variétés ne dépendant pas des points de chacune des variétés autour desquels on la réalise, la somme $f \sharp g$ ne dépend ni de x, ni de y. On se réfère au lemme de Palais, voir lemme 1.4.6 pour plus de détails. Toutefois, la notation $f \sharp g$ semble être un abus de notations car la fonction dépend *a priori* de $X(f)$ et de $X(g)$.

Nous avons cependant :

Proposition 3.2.7. *Si $X_1(f)$ et $X_2(f)$ sont deux pseudo-gradients adaptés à f, il y a un difféomorphisme*

$$H : W(f, X_2(f)) \sharp_W W(g, X(g)) \to W(f, X_1(f)) \sharp_W W(g, X(g))$$

tel que H préserve les niveaux et envoie le voisinage tubulaire T_1 sur T_2.

Démonstration. Soit $l_1(x_1)$ (resp. $l_2(x_2)$) l'orbite d'un point x_1 dans $M(f, X_1(f))$ (resp. x_2 dans $M(f, X_2(f))$) par le flot engendré par $X_1(f)$ (resp. $X_2(f)$). Soit ψ_1 et ψ_2 deux plongements

$$\psi_1 : \mathbb{D}^{n-1} \to M(f, X_1(f))$$

$$\psi_2 : \mathbb{D}^{n-1} \to M(f, X_2(f)).$$

L'intersection $M(f, X_1(f)) \cap M(f, X_2(f))$ est un ouvert connexe de $f^{-1}(\frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2})$. Ainsi, nous pouvons considérer que $x_1 = x_2$ est un point dans $M(f, X_1(f)) \cap M(f, X_2(f))$. La connexité vient du fait que les points critiques sont d'indices entre 2 et $n-2$.

Soit maintenant $\mathcal{V}$ un voisinage aussi petit que nécessaire de

$$f^{-1}(\frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2}) \cap \left[\cup_{p \in \mathcal{C}_k(f),\ 2 \leq k \leq n-2} \left(W^s(p, X_1(f)) \cup W^s(p, X_2(f))\right)\right],$$

qui est l'union de toutes les variétés stables prise sur les deux champs pseudo-gradients et tous les points critiques de f d'indices non extrémaux. On note

$$\mathcal{W} := f^{-1}(\frac{\lambda_n + \lambda_{n-2}}{2}) \setminus \mathcal{V},$$

c'est un sous-ouvert de $M(f, X_1(f)) \cap M(f, X_2(f))$. Il est clair que la construction $f \sharp g$ ne dépend pas d'une renormalisation des champs de vecteurs. Nous considérerons ainsi des pseudo-gradients qui sont de norme 1 hors de $\mathcal{W}$. Nous avons sur $\phi_2^t(\mathcal{W})$ le difféomorphisme

$$\phi_1^t \circ \phi_2^{-t} : \phi_2^t(\mathcal{W}) \to \phi_1^t(\mathcal{W}).$$

On note Φ le difféomorphisme global défini sur tout $\mathcal{Z} := \phi_2\left([0, \frac{(\lambda_n+\lambda_{n-2})-(\lambda_2+\lambda_0)}{2}]\right)$ à valeurs dans $\phi_1\left([0, \frac{(\lambda_n+\lambda_{n-2})-(\lambda_2+\lambda_0)}{2}]\right)$. Le difféomorphisme Φ se restreint en un difféomorphisme ψ sur le bord $\partial\mathcal{Z}$, qui est isotope à l'identité. Notons $\mathcal{Y}$ le complémentaire de $\mathcal{Z}$ dans $W(f, X_2(f))$, c'est aussi évidemment le complémentaire de $\mathcal{Z}$ dans $W(f, X_1(f))$. Ainsi, $\mathcal{Y} \cup_{\psi^{-1}} \mathcal{Z}$ est difféomorphe à $W(f, X_2(f))$. On obtient alors un difféomorphisme

$$h : W(f, X_2(f)) \to W(f, X_1(f))$$

qui est Φ sur $\mathcal{Z}$, l'identité sur $\partial\mathcal{Z}$ et qui envoie T_1 sur T_2. On peut alors l'étendre en un difféomorphisme

$$H : W(f, X_1(f))\sharp_W W(g, X(g)) \to W(f, X_2(f))\sharp_W W(g, X(g))$$

qui laisse invariant $f\sharp g$. C'est ce qu'on voulait.

□

On obtient aussi naturellement un pseudo-gradient adapté à $f\sharp g$ en prenant le champ de vecteur $X(f)\sharp X(g)$ qui est $X(f)$ sur $W(f, X(f))$ et $X(g)$ sur $W(g, X(g))$, et qui se recolle bien sur T, le voisinage tubulaire de la ligne de gradient $l(x)$. Par commodité, on notera simplement $W(f)\sharp_W W(g)$ la variété $W(f, X(f))\sharp_W W(g, X(g))$ muni de sa fonction $f\sharp g$.

Il est aussi facile d'étendre $f\sharp g$ à tout $\mathbb{S}^n$. En effet, notons que le bord de $W(f)\sharp_W W(g)$ est l'union de deux sphères $\mathbb{S}^{n-1}$, sur chacune desquelles $f\sharp g$ est constante. On peut alors utiliser [30, Théorème 1.4] pour coller deux disques $\mathbb{D}^n$ sur chacune des sphères, et définir une fonction $f\sharp g$ sur $\mathbb{S}^n$ qui est $f\sharp g$ sur $W(f)\sharp_W W(g)$, qui est une fonction radiale sur les calottes nord et sud. Plus précisément, on considère un difféomorphisme h_1 (resp. h_{n-1}) de la sphère standard $\mathbb{S}^{n-1}$ de dimension $n-1$ vers $(f\sharp g)^{-1}(\frac{\lambda_0+\lambda_2}{2})$ (resp. vers $(f\sharp g)^{-1}(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-2}}{2})$) tel que

$$\mathbb{D}^n \cup_{h_1} (W(f)\sharp_W W(g)) \cup_{h_{n-1}} \mathbb{D}^n$$

est une sphère standard $\mathbb{S}^n$. Nous étendons $f\sharp g$ sur cette sphère par une fonction radiale

$$r : x \mapsto \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{2}||x||^2 + \lambda_0$$

sur le premier $\mathbb{D}^n$, où $||.||$ est une norme dérivant d'un produit scalaire, et

$$x \mapsto \lambda_n + \frac{\lambda_{n-2} - \lambda_n}{2}||x||^2$$

sur le second $\mathbb{D}^n$. Nous avons démontré :

Proposition 3.2.8. *Considérons deux couples $(f, X(f))$ et $(g, X(g))$ de $\mathcal{OMF}$. Il y a un couple $(f\sharp g, X(f\sharp g))$ dans $\mathcal{OMF}$ tel que $X(f\sharp g)$ se restreint à $X(f)$ sur $W(f) \setminus l(x) \subset W(f)\sharp_W W(g)$ et $X(g)$ sur $W(g) \setminus l(x') \subset W(f)\sharp_W W(g)$. Pour ce pseudo-gradient, nous avons :*

$$\mathbb{ZC}(f\sharp g) \simeq \mathbb{ZC}(f) \oplus \mathbb{ZC}(g)$$

en tant que complexes de chaînes.

Nous avons vu précédemment que nous pouvons toujours définir un germe se restreignant à une fonction de Morse le long de $\mathbb{S}^n$, avec des étiquettes prescrites. De plus, la construction précédente est toujours possible en considérant plutôt des fonctions f et g qui sont restrictions de germes ordonnés sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Ce qui change par rapport à la construction précédente, c'est que les points critiques d'indices k sont séparés en deux ensembles, les points $+$ et les points $-$, qui n'ont pas la même valeur critique. Nous obtenons finalement :

Théorème 3.2.9. *Soient $(\tilde{f}, X(f))$ et $(\tilde{g}, X(g))$ deux couples de $\mathcal{OMG}$. On peut former un couple $(\widetilde{f\sharp g}, X(f\sharp g))$ de $\mathcal{OMG}$ tel que $X(f\sharp g)$ se restreint à $X(f)$ sur $W(f)\backslash l(x) \subset W(f)\sharp_W W(g)$ et $X(g)$ sur $W(g) \setminus l(x') \subset W(f)\sharp_W W(g)$. Pour ce pseudo-gradient, nous avons :*

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}(f\sharp g) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}(f) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}(g),$$

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\widetilde{f\sharp g}) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{g}),$$

$$\mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\widetilde{f\sharp g}) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}^-(\tilde{g})$$

en tant que complexes de chaînes.

La démonstration de ce théorème est un copier-coller de ce que nous avons déjà fait, en l'adaptant au cas des germes. On remarque notamment que le fait d'avoir ou non la propriété $\mathcal{P}$ introduite en section 2.4.2, équivalente dans le cas des éléments de $\mathcal{OMG}$ à la propriété de s'étendre sans points critiques par le théorème 3.2.2, ne dépend que de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$.

Ainsi avons-nous construit une loi de monoïde sur l'espace $\mathcal{OMG}$.

Remarque 3.2.10. *Nous pourrions nous demander si nous ne pouvions pas simplement utiliser la somme de cobordismes définie dans [30], qui à deux cobordismes (W_1, V_1, V_1') et (W_2, V_2, V_2'), où V_1' est difféomorphe à V_2 par un difféomorphisme φ, associe le cobordisme (W_3, V_1, V_2'), où W_3 est l'union $W_1 \cup W_2$ après identification de V_1' et V_2 par φ. Cette construction est plus simple que celle que nous venons de définir dans cette section, et est très pratique pour la démonstration du théorème du h-cobordisme. La raison est que nous pouvons toujours ordonner une fonction de Morse f définie sur un cobordisme (W, V, V'), c'est-à-dire trouver un chemin de fonctions générique sans naissances ni morts dont les extrémités sont f d'une part et une fonction de Morse f_1 dont les valeurs critiques sont ordonnées en fonction des indices des points critiques. Le problème ici est que ce chemin de fonctions présente le plus souvent des singularités globales (c'est-à-dire des couples (x,t) où x est point critique de f^t, la fonction au temps t, tels que $(d_x f^t, \partial_t f^t)(x,t) = 0$), ce que nous excluons dans les chemins que nous considérons ! Ainsi, pour définir une loi de monoïde qui permettrait de sommer deux germes de Morse ordonnés, il faut en passer par ce que nous avons fait.*

Résultats de stabilisation

On note toujours $p_k(\tilde{f})$, ou p_k quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le germe, le nombre de points critiques d'indice k et étiquette $+$ d'un germe $\tilde{f}$, et $\mathrm{q}q_k(\tilde{f})$ le nombre de points d'indice k et étiquette $-$. Par le théorème 2.4.6, si un germe $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques, alors la suite de modules graduée $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$ peut-être munie d'un opérateur de bord qui en fait un complexe de chaînes dont l'homologie est 0 en tout degré sauf au degré n en lequel l'homologie est $\mathbb{Z}$. Supposant que $\tilde{f}$ n' a pas de points critiques d'indice 1 et $n-1$ et n'a qu'un maximum local et qu'un minimum local, ce germe vérifie alors les inégalités de Morse suivantes pour les points $+$, dites *inégalités de Morse étiquetées* :

$$\forall\ 2 \leq k \leq n-2,\ p_{k+1}(\tilde{f}) \geq \sum_{2=j}^{k} (-1)^{j+k} p_j(\tilde{f})\ ;$$

$$\sum_{k=2}^{n-2} (-1)^k p_k(\tilde{f}) = 0.$$

Nous avons le théorème :

Théorème 3.2.11. *Soit $\tilde{f}$ dans $\mathcal{OMG}$. Il existe $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ deux éléments de $\mathcal{OMG}$ qui s'étendent sans points critiques tels que $\widetilde{f\sharp g} = \tilde{h}$ si et seulement si $\tilde{f}$ vérifie les inégalités de Morse étiquetées.*

Si nous avions besoin d'associer à $\tilde{f}$ un pseudo-gradient pour définir la loi $\sharp$, la propriété énoncée dans le théorème 3.2.11 ne dépend pas des pseudo-gradients.

Pour le démontrer, nous aurons besoin de la notion de *mapping cone*. Nous prendrons la définition suivante, qui est à comparer avec celle de [46, Sec. 1.5] par exemple.

Définition 3.2.12. Soit $\phi : D \to C$ une application entre deux complexes de chaînes gradués. On note ∂_C le bord de C et ∂_D le bord de D. Le *mapping cone* de ϕ est le complexe de chaînes gradué $M(\phi)$ tel que $M(\phi)_k = C_k \oplus D_{k-1}$ et de bord en degré k la matrice :

$$\partial_{M(\phi),k} = \begin{pmatrix} \partial_{C,k} & \phi_{k-1} \\ 0 & \partial_{D,k-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration du théorème 3.2.11. Si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux éléments de $\mathcal{OMG}$, alors on a $p_k(\widetilde{f\sharp g}) = p_k(\tilde{f}) + p_k(\tilde{g})$. On a donc bien que si $\tilde{g}$ et $\widetilde{f\sharp g}$ vérifient tous les deux les inégalités de Morse étiquetées, alors $\tilde{f}$ aussi.

Soit maintenant $\tilde{f}$ un germe qui s'étend sans points critiques qui vérifie les inégalités de Morse étiquetées. Remarquons que nous avons aussi que

$$\sum_{2\leq k\leq n-2} q_k(\tilde{f}) = 0,$$

et

$$q_{k+1}(\tilde{f}) \geq \sum_{j=2}^{k} (-1)^{j+k} q_j(\tilde{f}),$$

où $q_k(\tilde{f})$ est le nombre de points critiques de f d'indices k et d'étiquettes $-$. Soit C le complexe de chaînes tel que $C_k \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ et $\partial_{C,k} = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où

$$s_{k-1} = \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{j+k-1} q_j.$$

On peut vérifier que c'est un complexe acyclique, c'est-à-dire que l'image de $\partial_{C,k+1}$ est le noyau de $\partial_{C,k}$.

On définit D un objet de $\mathcal{LOCH}$ avec les équations suivantes.

- $D_k^+ \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ pour $2 \leq k \leq n-2$;
- $D_k^- \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_{k-1}^-(\tilde{f})$ pour $3 \leq k \leq n-1$ et $D_2^- = 0$;
- $\partial_{++,k}(D) = \partial_k(\mathcal{C})$;
- $\partial_{--,k}(D) = \partial_{k-1}(\mathcal{C})$;
- $\partial_{+-,k}(D) = I_{q_k}$;
- $\partial_{-+,k}(D) = 0$.

On peut remarquer que $D^+ \oplus D^-$ avec l'opérateur de bord $\partial(D)$ associé est le mapping cone de $id : C \to C$. On ne peut pas pour l'instant considérer un germe $\tilde{g}$ dont l'élément de $\mathcal{LOCH}$ associé est D, car $D_{n-1}^- \neq 0$. Or les seuls germes ordonnés que nous nous autorisons à considérer sont ceux dont la fonction de Morse n'a pas de points critiques d'indices 1 ou $n-1$. On va plutôt considérer un complexe de chaînes E donné par les équation suivantes.

- $E_k^+ \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$ pour $2 \leq k \leq n-2$;
- $E_k^- \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_{k-1}^-(\tilde{f})$ pour $3 \leq k \leq n-4$ et $k = n-2$;
- $E_{n-3}^- \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-2}^-(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-4}^-(\tilde{f})$;
- $\partial_{++,k}(E) = \partial_k(\mathcal{C})$ pour $2 \leq k \leq n-2$;
- $\partial_{--,k}(E) = \partial_{k-1}(\mathcal{C})$ pour $2 \leq k \leq n-4$;
- en degré $n-2$ on avait une décomposition

$$\partial_{--,n-2}(D) = \begin{pmatrix} I_{q_{n-2}(\tilde{f})} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_{--,n-3}(D) = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_{n-3}(\tilde{f})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$\partial_{--,n-3}(E) = \begin{pmatrix} I_{q_{n-2}(\tilde{f})} & 0 \\ 0 & I_{s_{n-3}(\tilde{f})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de E_{n-2}^-, isomorphe à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-3}^-(\tilde{f})$, à valeurs dans E_{n-3}^-, isomorphe à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-2}^-(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-4}^-(\tilde{f})$;
- $\partial_{--,n-3}(E)$, défini sur un module isomorphe à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-2}^-(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-4}^-(\tilde{f})$, envoie le premier facteur sur 0 et se restreint à $\partial_{--,n-3}(D)$ sur le deuxième facteur ;
- $\partial_{+-,k}(E) = I_{q_k}$ pour $2 \leq k \leq n-4$ et $k = n-2$;
- $\partial_{+-,n-3}(E) = \begin{pmatrix} 0 & I_{q_{n-4}} \end{pmatrix}$ qui correspond à une projection

$$p_2 : E_{n-3}^- \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-2}^-(\tilde{f}) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-4}^-(\tilde{f}) \to E_{n-4}^+ \simeq \mathbb{Z}\mathcal{C}_{n-4}^-(\tilde{f});$$

- $\partial_{-+,k}(E) = 0$ pour tout k.

Il est possible de trouver un germe $\tilde{g}$ dont l'élément de $\mathcal{LOCH}$ associé soit E. Plus précisément, on peut construire la fonction g à partir d'une fonction hauteur avec le bon nombre de créations de paires de points critiques du bon indice, puis obtenir un pseudo-gradient donnant ce complexe de chaînes à partir d'un pseudo-gradient Morse-Smale quelconque en faisant assez de glissements d'anses (on en a bien le droit, car les points critiques ont les bons indices). On construit finalement le germe avec le lemme 2.5.4. Grâce au théorème 3.2.2, on peut affirmer que $\tilde{g}$ s'étend sans points critiques (le module gradué E^+ muni de $\partial_{++}(E)$ est un complexe de chaînes acyclique et $\partial_{-+}(E) = 0$).

Il s'agit de montrer que $\widetilde{f \sharp g}$ s'étend sans points critiques. Nous avons

$$\partial_{++,k}(\widetilde{f \sharp g}) = \begin{pmatrix} \partial_{++,k}(\tilde{f}) & 0 \\ 0 & \partial_{++,k}(\tilde{g}) \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_{+-,k}(\widetilde{f \sharp g}) = \begin{pmatrix} \partial_{+-,k}(\tilde{f}) & 0 \\ 0 & \partial_{+-,k}(\tilde{g}) \end{pmatrix}.$$

Ce qu'est $\partial_{++,k}(\tilde{g})$ ne nous intéresse pas, mais ce qui est important c'est que la matrice $\partial_{+-,k}(\tilde{g})$ est surjective pour tout $2 \leq k \leq n-2$ et que $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{g})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^-(\tilde{f})$. Il est donc toujours possible de trouver une matrice N_k telle que

$$\partial_{+-,k}(\tilde{g}) N_k' = \begin{pmatrix} \partial_{-+,k}(\tilde{f}) & \partial_{--,k}(\tilde{f}) - \partial_{++,k}(\tilde{g}) \end{pmatrix}.$$

Il y a donc une matrice N_k telle que

$$\partial_{++,k}(\widetilde{f\sharp g}) + \partial_{++,k}(\widetilde{f\sharp g})N_k = \begin{pmatrix} \partial_{++,k}(\tilde{f}) & \partial_{+-,k}(\tilde{f}) \\ \partial_{-+,k}(\tilde{f}) & \partial_{--,k}(\tilde{f}) \end{pmatrix}.$$

On sait que pour $2 \leq k \leq n-2$, c'est la restriction à ces indices du complexe de Morse associé à f. C'est donc un complexe de chaînes acyclique, puisque l'homologie du complexe de Morse de $\tilde{f}$ est celle de $\mathbb{S}^n$, qui est nulle hors des degrés 0 et n, avec $n \geq 6$. Le théorème est démontré. □

Nous terminons cette section par la proposition suivante, l'application Ψ a été introduite en début de section :

Proposition 3.2.13. *La loi $\sharp$ définie sur $\mathcal{OMG}$ n'est pas régulière algébriquement dans le sens où il y a des germes ordonnés $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ tels que $\Psi(\tilde{g})$ n'est pas isomorphe à $\Psi\left(\tilde{h}\right)$ dans $\mathcal{LOC}h$ et pourtant $\Psi\left(\widetilde{f\sharp g}\right)$ est isomorphe à $\Psi\left(\widetilde{f\sharp h}\right)$.*

Démonstration. Il suffit de prendre des germes dont les fonctions ont peu de points critiques. Les fonctions de Morse associées à chacun de ces germes auront toutes un maximum, un minimum, et quatre autres points critiques, deux d'indices 3 et deux autres d'indices 4. Pour les étiquettes, chaque germe aura un point d'indice 3 et d'étiquette $+$, un point d'indice 4 et d'étiquette $+$, un point d'indice 3 et d'étiquette $-$ et un point d'indice 4 et d'étiquette $-$.

Soit $\tilde{f}$ tel que son opérateur de bord $\partial(\tilde{f})$ vérifie :
- $\partial_{++,4}(\tilde{f}) = 1$,
- $\partial_{--,4}(\tilde{f}) = 1$,
- $\partial_{+-,4}(\tilde{f}) = 1$,
- $\partial_{-+,4}(\tilde{f}) = 0$.

On remarque que $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques. Soit $\tilde{g}$ tel que :
- $\partial_{++,4}(\tilde{g}) = a$,
- $\partial_{--,4}(\tilde{g}) = d$,
- $\partial_{+-,4}(\tilde{g}) = c$,
- $\partial_{-+,4}(\tilde{g}) = b$,

avec $ad - bc = 1$ et $a \neq \pm 1[c]$. Alors, $\tilde{g}$ ne s'étend pas sans points critiques, car on ne trouvera jamais d'entier ν tel que $a + \nu c$ soit inversible dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire soit ± 1. Finalement, soit $\tilde{h}$ tel que :
- $\partial_{++,4}(\tilde{h}) = 1$,
- $\partial_{--,4}(\tilde{h}) = 1$,
- $\partial_{+-,4}(\tilde{h}) = c$,
- $\partial_{-+,4}(\tilde{h}) = 0$.

Comme $\tilde{f}$, le germe $\tilde{h}$ s'étend sans points critiques. Les deux germes $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ ne donnent pas des éléments isomorphes dans $\mathcal{LOC}h$ après application de Ψ puisque l'un s'étend sans points critiques et que l'autre non. Nous affirmons que dans $\mathcal{LOC}h$, nous avons $\Psi\left(\widetilde{f\sharp g}\right)$ est isomorphe à $\Psi\left(\widetilde{f\sharp h}\right)$. Nous avons :

$$\partial_{++,4}(\widetilde{f\sharp g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_{+-,4}(\widetilde{f\sharp g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

de la définition de $\sharp$ pour les germes. Comme nous avons a et c premiers entre eux et

$$\det\left(\partial_{++,4}(\widetilde{f\sharp g})\right) = a \equiv \pm 1 \ \ [d_1\left(\partial_{+-,4}(\widetilde{f\sharp g})\right)],$$

où $d_1\left(\partial_{+-,4}(\widetilde{f\sharp g})\right) = 1$, alors le théorème 3.3.8 nous dit que $\widetilde{f\sharp g}$ s'étend sans points critiques. Il y a une matrice N_4 de taille 2×2 telle que $P := \partial_{++,4}(\widetilde{f\sharp g}) + \partial_{+-,4}(\widetilde{f\sharp g})N_4$ est inversible, et on peut aussi supposer, à l'aide de quelques glissements d'anses, que $\partial_{-+,4}(\widetilde{f\sharp g}) = 0$.

Quitte à modifier le pseudo-gradient adapté à $\widetilde{f\sharp g}$ en multipliant $\partial_4(\widetilde{f\sharp g})$ par la matrice $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ par la droite, on obtient les équations suivantes.

- $\partial_{-+,4}(\widetilde{f\sharp g}) = 0$,
- $\partial_{++,4}(\widetilde{f\sharp g}) = I_2$,
- $\partial_{+-,4}(\widetilde{f\sharp g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$,
- $\partial_{--,4}(\widetilde{f\sharp g})$ est une matrice inversible Q de taille 2×2.

Quitte à multiplier cet opérateur de bord par $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ par la gauche, on obtient l'opérateur de bord de $\widetilde{f\sharp h}$. Les germes $\widetilde{f\sharp h}$ et $\widetilde{f\sharp g}$ ont donc le même opérateur de bord après des glissements d'anses permis, ce qui correspond algébriquement au fait que $\Psi\left(\widetilde{f\sharp h}\right)$ et $\Psi\left(\widetilde{f\sharp g}\right)$ sont isomorphes dans $\mathcal{LOC}h$.

□

3.3 Un peu d'algèbre linéaire à coefficients entiers

3.3.1 Problèmes et définitions

Afin de donner des conditions nécessaires d'extension calculables, nous allons devoir nous occuper de questions d'algèbre linéaire à coefficients entiers, intéressantes en soi. Cette section sera utile seulement pour les résultats de la section 3.4. Voici par exemple, une question à laquelle nous allons répondre dans cette section :

Question 3.3.1. *Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$. Quand existe-t-il une matrice N dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ telle que $B + CN$ soit inversible ?*

Nous allons en fait répondre à une question plus globale. Avant cela, il nous faut introduire un peu de terminologie propre aux matrices à coefficients entiers. Tout ce qui suit peut être adapté à peu de frais au cas des matrices ayant leurs coefficients dans un anneau principal. Les définitions sont prises de [32].

Définition 3.3.2 (Facteurs du déterminant)**.** Soit M une matrice à coefficients entiers de taille $p\times q$. Pour un entier r, soit $\mathcal{I}_k(r)$ l'ensemble des k-uplets de $\{1,...,r\}$. Pour $\omega\in\mathcal{I}_k(p)$ et $\tau\in\mathcal{I}_k(q)$, soit $M(\omega,\tau)$ la sous-matrice de M dont les indices des colonnes sont dans τ et dont les indices des lignes sont dans ω. Soit $m(\omega,\tau)$ le déterminant de $M(\omega,\tau)$. Le *k-ième facteur du déterminant* $d_k(M)$ est le pgcd de la famille d'entiers $(m(\omega,\tau))_{\omega\in\mathcal{I}_k(p),\tau\in\mathcal{I}_k(q)}$. Nous posons $d_0(M) := 1$ par convention, et $d_k(M) = 0$ pour k plus grand que $\max(q,p)$.

La question généralisant la question 3.3.1 à laquelle nous allons répondre est la suivante :

Question 3.3.3. *Soit t un entier. Étant données deux matrices B et C à coefficients entiers ayant le même nombre de lignes, existe-t-il une matrice N à coefficients entiers telle que $d_t(B+CN)=1$?*

Le problème est invariant sous les actions de groupes suivantes. Les matrices U, V et W dans ce qui suit sont des matrices qui sont respectivement dans $SL_p(\mathbb{Z})$, $SL_q(\mathbb{Z})$ et $SL_r(\mathbb{Z})$, en supposant que B soit de taille $p\times q$ et C de taille $p\times r$:

– $(B,C)\to(UB,UC)$;
– $(B,C)\to(BV,C)$;
– $(B,C)\to(B,CW)$.

Cette invariance sous ces actions de groupes nous conduit à considérer les formes normales de Smith et des formes triangulaires pour B et C, que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 3.3.4 (Existence et définition de la forme normale de Smith (S.n.f.) d'une matrice à coefficients entiers)**.** *Soit M une matrice à coefficients entiers de taille $p\times q$. Il y a des matrices entières inversibles U et V telle que la matrice UMV soit de la forme :*

$$\begin{pmatrix} s_1(M) & 0 & \dots & 0\\ 0 & s_2(M) & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & s_q(M)\\ 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

si $q\le p$ ou

$$\begin{pmatrix} s_1(M) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & s_2(M) & & 0 & \vdots & & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & s_p(M) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

si $p\le q$, où $s_k(M):=\frac{d_k(M)}{d_{k-1}(M)}$ pour $k\ge 1$. De plus, $s_k(M)$ divise $s_{k+1}(M)$ pour tout k. Nous disons que UMV est (l'unique) forme normale de Smith *(abrégé S.n.f.) de M.*

La démonstration de l'existence de telles U et V est dans [32, Theorem II.9]. Nous avons directement :

Proposition 3.3.5. *Soient p et q deux entiers. Une matrice B de taille $p\times q$ est surjective si et seulement si $d_p(B)=1$.*

Démonstration. B est surjective si et seulement si sa S.n.f. est surjective. C'est le cas si et seulement si $s_j(B)=1$ pour tout j entre 1 et p. Cela implique en particulier que $d_j(B)=1$ pour tout j entre 1 et p. □

Nous avons aussi, toujours d'après [32] :

Proposition 3.3.6. *Si M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, alors il existe U dans $SL_p(\mathbb{Z})$ telle que MU soit triangulaire supérieure.*

On rappelle que le *rang* d'une matrice à coefficients entiers est la dimension de son image en tant que $\mathbb{Z}$-module. On notera par la suite $\operatorname{rg} B$ le rang de la matrice B. Si la matrice est sous S.n.f., c'est aussi le nombre de termes diagonaux non nuls.

Ajoutons un dernier lemme.

Lemme 3.3.7. *Si $d_t(M) = 1$ alors $d_t({}^tM) = 1$ où ${}^tM$ est la transposée de M et pour toute matrice N équivalente à M, on a aussi $d_t(N) = 1$.*

Démonstration. C'est immédiat, en utilisant la forme normale de Smith. □

3.3.2 Question 3.3.1

Nous allons donner une première réponse à la question 3.3.1, qui sera un cas particulier de la réponse à la question 3.3.3. Dans tout ce qui suit, si M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, nous notons M_k sa k-ème ligne, et utilisons la notation

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,*} \\ \vdots \\ M_{p,*} \end{pmatrix}.$$

On utilisera par M_k la matrice

$$\begin{pmatrix} M_{k,*} \\ \vdots \\ M_{p,*} \end{pmatrix}$$

dans les démonstrations de la question 3.3.3. On note aussi $M_{i,j}$ le coefficient en place (i, j) de M.

Lemme 3.3.8. *Soient B et C deux matrices à coefficients entiers, toutes les deux dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$. Supposons que B soit triangulaire supérieure et que C soit sous sa S.n.f.. Notons b_j (resp. c_j) le j-ème coefficient diagonal de B (resp. C), ce qui implique que $d_1(C) = c_1$. Il y a une matrice N telle que $B + CN$ soit inversible dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ si et seulement si*

$$\det(B) \equiv \pm 1 \ [c_1],$$

et

$$\operatorname{pgcd}(b_j, c_j) = 1 \text{ pour tout } j.$$

Remarque 3.3.9. *La condition*

$$\operatorname{pgcd}(b_j, c_j) = 1 \text{ pour tout } j,$$

est équivalente à $d_p(B\ C) = 1$, voir proposition 3.3.20 plus loin, où $(B\ C)$ est la concaténation de B et C.

Démonstration. S'il y a une telle matrice N, alors $\det(B + CN) = \pm 1$, et projetant les matrices dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}/(c_1))$ nous obtenons l'équation

$$\det(B) \equiv \pm 1 \ [c_1].$$

Pour fixer les idées et donner une idée du type de calcul que nous allons mener dans beaucoup de démonstrations de résultats de cette section, nous montrons tout d'abord que b_2 et c_2 sont

premiers entre eux. Notons que le coefficient (i,j) de CN est donné par $N_{i,j}c_i$. Alors, dans $\mathbb{Z}/(c_2)$, toutes les lignes de CN se projettent sur 0 à part la première. Ainsi $B+CN$ se projette sur une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/(c_2)$ qui est

$$\begin{pmatrix} c_1N_{1,*}+B_{1,*} \\ B_{2,*} \\ \vdots \\ B_{p,*} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant étant linéaire par rapport à la première ligne, nous avons :

$$\pm 1 \equiv \det(B) + c_1 \det \begin{pmatrix} N_{1,*} \\ B_{2,*} \\ \vdots \\ B_{p,*} \end{pmatrix} \quad [c_2],$$

Comme B est triangulaire supérieur, cela donne :

$$\det \begin{pmatrix} N_{1,*} \\ B_{2,*} \\ \vdots \\ B_{p,*} \end{pmatrix} = N_{1,1}b_2...b_p$$

et

$$\det(B) = b_1...b_p.$$

Si $B+CN$ est dans $GL_p(\mathbb{Z})$, il vient que :

$$\pm 1 \equiv b_2...b_p(b_1 + c_1N_{1,1}) \quad [c_2],$$

ce qui implique que b_j est premier avec c_2 pour tout j entre 2 et p.

De la même manière, pour $1 \leq k \leq p$, nous avons

$$CN \equiv \begin{pmatrix} c_1N_{1,*} \\ \vdots \\ c_kN_{k,*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad [c_{k+1}].$$

Ce qui donne :

$$\pm 1 \equiv b_{k+1}...b_p \det \begin{pmatrix} B_{1,*}+c_1N_{1,*} & & \\ \vdots & & \\ B_{k,*}+c_kN_{k,*} & & \\ 0 & & I_{p-k} \end{pmatrix} \quad [c_{k+1}].$$

Cela montre que b_{k+1} et c_{k+1} sont premiers entre eux.

Démontrons la suffisance de la condition. Soient donc B et C dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ qui vérifient les hypothèses. Nous savons que le problème est invariant sous l'action de $GL_p(\mathbb{Z})^3$ décrite précédemment, mais il est aussi évidemment invariant, sous l'action $(B,C) \mapsto (B+CY,C)$

pour n'importe quelle matrice Y dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$. Nous pouvons donc considérer n'importe quelle matrice $BU + CY$ à la place de B, où Y est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ et U est inversible. Comme b_k et c_k sont premiers entre eux, il y a des entiers u_k et v_k pour tout k tels que $u_k b_k + v_k c_k = 1$. Nous dirons qu'une matrice est *unitriangulaire supérieure* si c'est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont des 1. Considérons une matrice U unitriangulaire supérieure dont tous les coefficients au-dessus de la diagonale sont 0 sauf sur la première ligne pour laquelle on a :

$$U_{1,j} = -u_1 B_{1,j}.$$

Soit aussi Y une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf sur la première ligne pour laquelle :

$$Y_{i,j} = -v_1 B_{1,j},$$

pour $j \geq 2$.

Alors, nous avons que les coefficients de la première ligne hors de la diagonale de $BU + CY$ sont 0. Le coefficient $(1, 1)$ de cette matrice est b_1. Itérant la même opération successivement sur la j-ème ligne pour j de 2 à p, on obtient une matrice B de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_p \end{pmatrix}.$$

Les b_j étant les coefficients diagonaux initiaux.

On fait alors les opérations suivantes (multiplication à droite de B par une matrice unimodulaire, multiplication à gauche de B et C par une matrice unimodulaire, ajout d'une matrice CY à B) :

– $BX + CY \to B'$ où X est la matrice :

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & u_p & 1 \end{pmatrix},$$

et Y est la matrice :

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & v_p & 0 \end{pmatrix}.$$

B' est alors

$$B' := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{p-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & b_p \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on continuera d'appeler B' par B.

– On fait alors des opérations sur les lignes, en se rappelant qu'elles sont faites à la fois sur B et C. On soustrait b_{p-1} fois la p-ème ligne à la $(p-1)$-ème. On change alors B en B' où on a :

$$B' := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{p-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & -b_p b_{p-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & b_p \end{pmatrix},$$

et pour C :

$$C' := \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & c_{p-1} & -b_{p-1}c_p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_p \end{pmatrix}.$$

– On fait alors des opérations sur les colonnes de B en soustrayant b_p fois la $(p-1)$-ème colonne à la p-ème pour annuler b_p. On échange alors ces deux dernières colonnes pour obtenir :

$$B' := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -b_{p-1}b_p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, comme c_{p-1} divise c_p, on peut annuler le coefficient $(p-1,p)$ de C par des opérations sur les colonnes et revenir à :

$$C' := \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_p \end{pmatrix}.$$

– Comme b_p et c_p sont premiers entre eux et que c_{p-1} divise c_p, alors b_p et c_{p-1} sont aussi premiers entre eux. Les hypothèses impliquent donc que $-b_{p-1}b_p$ est premier avec c_{p-1}. On peut donc faire la même procédure sur les sous-matrices de B et C constituées des $(p-1)$-èmes premières colonnes et des $(p-1)$-èmes premières lignes. Une récurrence nous conduit à une matrice B sous la forme :

$$B := \begin{pmatrix} \pm\det(B) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice C reste la matrice initiale.

Comme

$$\det(B) \equiv \pm 1 \ \ [c_1],$$

on peut finalement soustraire à B la matrice CX' où les coefficients de X' sous tous 0, sauf le coefficient $(1,1)$ qui est $\pm\frac{\det(B)\pm 1}{c_1}$. On obtient alors $B = I_p$, et on a démontré le lemme. □

Remarque 3.3.10. *Le même genre de considérations que celles du lemme 3.3.8 sont présentées de manière très similaire dans Birman [3], qui traite d'équivalence de décompositions de Heegaard de variétés de dimension* 3.

3.3.3 Question 3.3.3

Continuons en donnant une réponse à la question 3.3.3. Les réponses seront similaires à celle de la question 3.3.1, mais les démonstrations seront plus techniques.

Nous aurons besoin tout d'abord de quelques résultats arithmétiques très basiques, que nous élevons au rang de lemme. Pour un entier $1 \leq k \leq p$, on rappelle que $\mathcal{I}_k(p)$ est l'ensemble des k-uplets de $\{1, ..., p\}$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$. Pour ω et τ dans $\mathcal{I}_k(p)$, on a défini $M_{\omega,\tau}$ la sous-matrice de M dont les lignes sont d'indices dans ω et les colonnes sont d'indices dans τ. On note $\omega^\circ \in \mathcal{I}_{p-k}(p)$ le complémentaire de ω, et par $l(\omega)$ la somme $\sum_l i_l$, où $\omega = (i_1, ..., i_k)$. On considère maintenant que k est fixé, et qu'on fixe aussi $\omega \in \mathcal{I}_k(p)$.

Lemme 3.3.11 (Expansion de Laplace du déterminant)**.** *On a :*

$$\det(M) = \sum_{\tau \in \mathcal{I}_k(p)} (-1)^{l(\omega)+l(\tau)} \det(M_{\omega,\tau}) \det(M_{\omega^\circ,\tau^\circ}).$$

Démonstration. Le résultat est en fait une conséquence immédiate de la définition du déterminant. Si $(e^i)_{1\leq i\leq p}$ est la base canonique de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^p, \mathbb{Z})$, on a :

$$\det(M) = e^1 \wedge e^2 \wedge ... \wedge e^p,$$

où $\wedge$ est le produit alterné de formes linéaires. Si on réécrit le déterminant comme :

$$\det(M) = (-1)^{l(\omega)-k} \left(e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k}\right) \wedge \left(\wedge_{j\notin\omega} e^j\right),$$

on obtient la formule, en utilisant la définition même du produit alterné comme étant la composition du produit tensoriel et de la somme alternée. □

Si B est une matrice entière de taille $p \times q$, pour j entre 0 et $p-1$, on note B_{j+1} la sous-matrice de B de taille $(p-j) \times q$ constituée des $p-j$ dernières lignes de B. Ainsi, $B_1 = B$ et B_p est une matrice constituée seulement de la dernière ligne de B. La première ligne de B_{j+1} est la $(j+1)$-ème ligne de B, d'où la notation. Nous aurons aussi besoin de :

Lemme 3.3.12. *$d_t(B_{j+1})$ divise $d_{j+t}(B)$ pour tout t.*

Démonstration. De la définition de B_{j+1}, nous avons que toute sous-matrice de B de taille $(j+t) \times (j+t)$ a au moins t de ses lignes qui sont issues de B_{j+1}. Alors, $d_t(B_{j+1})$ divise le déterminant de n'importe laquelle de ces sous-matrices de B, grâce à l'expansion de Laplace du déterminant de ces sous-matrices. Ainsi, $d_t(B_{j+1})$ divise $d_{j+t}(B)$. □

Nous aurons aussi besoin des deux lemmes basiques suivants.

Lemme 3.3.13. *Soient r_1,..., r_p et c des entiers premiers dans leur ensemble. Alors, pour toute suite d'entiers $k_1, ..., k_p$, nous avons que $r_1 + k_1c$,..., $r_p + k_pc$, et c sont premiers dans leur ensemble.*

Démonstration. C'est un corollaire du théorème de Bézout. □

Le prochain lemme est un résultat simple qu'on a déjà utilisé mais qu'il est préférable d'énoncer hors du corps des futures démonstrations.

Lemme 3.3.14. *Soient B et C dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$. On a :*

$$\det(B + C) = \det(B) + d_1(C)\lambda,$$

où λ est un entier.

Démonstration. Il suffit de projeter $\det(B + C)$ dans $\mathbb{Z}/(d_1(C))$. □

On a :

Lemme 3.3.15. *Si B est une matrice entière de taille $p \times q$ et C est une matrice entière de taille $p \times r$* sous forme S.n.f.*. On suppose que* $\mathrm{rg}(B\ C) = p$*. Si $d_j(C) = 0$ alors la j-ème ligne de B est non nulle.*

Démonstration. Si C est sous forme S.n.f. et que $d_j(C) = 0$, alors la j-ème ligne de C est nulle. Si en plus la j-ème ligne de B est nulle, alors la j-ème ligne de la matrice $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ est nulle, et cette matrice ne peut pas être de rang p. □

Enfin, on a aussi :

Lemme 3.3.16. *Soient b_1, b_2 et c_1 trois entiers premiers dans leur ensemble. Alors il y a un entier λ tel que $b_1 + \lambda c_1$ et b_2 sont premiers entre eux.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si on note $b_1 = \rho\beta_1$ et $c_1 = \rho\gamma_1$ où $\rho = \mathrm{pgcd}(b_1, c_1)$ alors l'existence de λ tel que $b_1 + \lambda c_1$ et b_2 sont premiers entre eux est équivalent à l'existence de λ tel que $\beta_1 + \lambda\gamma_1$ est premier avec b_2. En effet, comme b_1, c_1 et b_2 sont premiers dans leur ensemble, ρ est nécessairement premier avec b_2. Ainsi, $b_1 + \lambda c_1 = \rho(\beta_1 + \lambda\gamma_1)$ est premier avec b_2 si et seulement si $\beta_1 + \lambda\gamma_1$ est premier avec b_2. On a que β_1 et γ_1 sont premiers entre eux. On peut donc, et on va supposer que b_1 et c_1 sont premiers entre eux.

On va démontrer le lemme en deux étapes, prenant inspiration sur une démonstration du théorème chinois.

- **Première étape : b_2 est une puissance de nombre premier.**
  On pose $b_2 := \delta^r$, où δ est un nombre premier. Comme b_1 et c_1 sont premiers entre eux, il existe u et v tels que $ub_1 + vc_1 = 1$. Si u est premier avec δ, alors u est inversible dans $\mathbb{Z}/(b_2)$ et il y a un entier w qui se projette sur u^{-1} dans $\mathbb{Z}/(b_2)$. On a ainsi $b_1 + wvc_1 \equiv w$ dans $\mathbb{Z}/(b_2)$. Le lemme est donc démontré dans ce cas car w est inversible dans $\mathbb{Z}/(b_2)$ et donc premier avec b_2.
  Si u n'est pas premier avec δ alors il est divisible par δ puisque δ est premier. En projetant l'égalité $ub_1 + vc_1 = 1$ dans $\mathbb{Z}/(\delta)$, on observe que la projection de vc_1 est (trivialement) inversible dans $\mathbb{Z}/(\delta)$ et donc vc_1 est premier avec δ. On peut alors choisir $u' = u + vc_1$ et $v' = v - uc_1$ et utiliser la démonstration précédente avec u' qui est bien premier avec δ.

– **Cas général.**
Dans le cas général, on écrit $b_2 := \prod_{i\in I}(\delta_i)^{r_i}$ où I est un ensemble fini, et les δ_i sont des nombres premiers deux à deux distincts. Notons $m_i := \delta_i^{r_i}$. Le théorème chinois donne un isomorphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z}/(b_2) \to \prod_{i\in I}\mathbb{Z}/(m_i)$ qui envoie bijectivement les inversibles de $\mathbb{Z}/(b_2)$ sur le produit des inversibles $\prod_{i\in I}(\mathbb{Z}/(m_i))^\times$. D'après ce qu'on a fait avec le premier cas, il y a des entiers λ_i tels que $b_1 + \lambda_i c_1$ se projette sur un inversible de $\mathbb{Z}/(m_i)$ pour tout i. Comme ϕ est un morphisme d'anneaux bijectif, il y a un entier μ tel que $\phi(\mu) = (b_1 + \lambda_i c_1)_{i\in I}$, où μ désigne aussi la classe de l'entier dans $\mathbb{Z}/(b_2)$. Il suffit de montrer que $\mu - b_1$ est divisible par c_1 modulo un multiple de b_2 pour conclure. C'est équivalent à dire que $\mu - b_1$ est divisible par le pgcd de c_1 et b_2. Notons que l'isomorphisme ϕ est envoyé sur un isomorphisme d'anneaux $\phi' : \mathbb{Z}/((b_2) + (c_1)) \to \prod_{i\in I}\mathbb{Z}/((m_i) + (c_1))$. On a $\phi(\mu - b_1) = (\lambda_i c_1)_{i\in I}$, qui se projette sur 0 dans $\prod_{i\in I}\mathbb{Z}/((m_i) + (c_1))$. Ainsi, $\mu - b_1$ se projette sur 0 dans $\mathbb{Z}/((b_2) + (c_1))$. L'entier μ s'écrit donc $b_1 + \lambda c_1 + \nu b_2$ où λ et ν sont deux entiers. On sait que μ se projette sur un inversible dans $\mathbb{Z}/(b_2)$, donc $b_1 + \lambda c_1$ est premier avec b_2.

□

Voici une première réponse à la question 3.3.3 :

Théorème 3.3.17. *Soit B une matrice entière de taille $p \times q$ et C une matrice entière sous S.n.f. de taille $p \times r$. Soit t un entier entre 1 et $\min(p, q)$. On suppose que $\mathrm{rg}(B\ C) = p$. Alors, il y a une matrice entière N de taille $r \times q$ telle que $d_t(B + CN) = 1$ si et seulement si :*
– *$d_{t-j+1}(B_j)$ et $s_j(C)$ sont premiers entre eux pour $1 \leq j \leq t$ et $d_t(B) \equiv \pm 1 \quad [d_1(C)]$ si $t = q = p$,*
– *$d_{t-j+1}(B_j)$ et $s_j(C)$ sont premiers entre eux pour $1 \leq j \leq t$ dans tous les autres cas.*

Remarquons que le premier cas correspond à la question 3.3.1, quitte à supprimer des colonnes nulles ou à en rajouter dans le cas où C n'est pas carrée. Ce cas a donc déjà été démontré. La condition donnée ici sera considérablement simplifiée un peu plus tard. Si le rang de $(B\ C)$ n'est pas maximal, alors on peut mettre $(B\ C)$ sous la forme $\begin{pmatrix} B' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où C' est sous S.n.f., et $(B'\ C')$ est de rang maximal, avec les actions de groupes de $SL_p(\mathbb{Z}) \times SL_q(\mathbb{Z}) \times SL_r(\mathbb{Z})$ décrites précédemment. On peut alors quand même appliquer le théorème à B' et C'.

Remarque 3.3.18 (Nécessité de la condition sur le rang)**.** *Une lecture attentive de la démonstration montre que l'on n'a en fait pas toujours besoin que le rang de $(B\ C)$ soit p pour appliquer le théorème. Cette hypothèse peut par exemple être omise si le nombre de colonnes de B est strictement supérieur à t. Si $p = t$ en revanche, il est préférable de garder cette hypothèse.*

La démonstration est technique et peut être omise en première lecture. On commence par un lemme.

Lemme 3.3.19. *Sous les hypothèses du théorème, la condition énoncée est invariante par addition d'une matrice CN à B.*

Lemme 3.3.19 . Soit D un sous-matrice de taille $(t-j+1) \times (t-j+1)$ issue de $(B+CN)_j$. On peut écrire $D = B' + (CN)'$ où B' est une sous-matrice de B_j de taille $(t-j+1) \times (t-j+1)$ et $(CN)'$ est une sous-matrice de même taille de $(CN)_j$. Par un calcul, on a que le coefficient en place (k, l) de la matrice CN est $s_k(C)N_{k,l}$. Ainsi, comme $s_j(C)$ divise tous les $s_{j+k}(C)$, on a que $s_j(C)$ divise tous les coefficients de $(CN)_j$. Cela revient à dire que $s_j(C)$ divise $s_1((CN)_j)$,

et donc divise $s_1((CN)')$. Ainsi, le déterminant de D peut être écrit $\det(B') + \lambda s_1((CN)_j)$ grâce au lemme 3.3.14, et donc peut être écrit $\det(B') + \mu s_j(C)$ pour un entier μ. Le lemme 3.3.13 établit alors que le pgcd de tous ces déterminants reste premier avec $s_j(C)$. □

Démonstration du théorème 3.3.17. On se restreint au deuxième cas, puisque le premier cas est la question 3.3.1.

Démontrons d'abord la nécessité de la condition. Supposons qu'il y ait une matrice N telle que $d_t(B+CN) = 1$. Remarquons que $s_j(C)$ est égal à $d_1(C_j)$. Ainsi, pour toute matrice entière N, l'entier $s_j(C)$ divise $d_1((CN)_j)$. Alors, d'après les lemmes 3.3.12 et 3.3.14, il est nécessaire que $d_{t-j+1}(B_j)$ et $s_j(C)$ soient premiers entre eux pour j de 1 à t.

Démontrons la suffisance de la condition.

Supposons d'abord que B a une seule colonne, nous devons donc avoir $t = 1$ pour que la condition ne soit pas vide. Dans ce cas, B a au moins deux lignes, puisque B n'est pas supposée carrée. Quitte à ajouter une colonne de C, et comme le rang de $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ est maximal, on peut considérer qu'une des lignes de B n'est pas nulle. Par hypothèse, $d_1(C)$ et $d_1(B)$ sont premiers entre eux. Soit b_1 le premier coefficient de B. Il s'écrit $b_1 = \rho b_1'$ où ρ est le pgcd de b_1 et $d_1(C)$. Notons que b_1, c_1 et le pgcd des coefficients sous b_1 sont premiers dans leur ensemble. Par le lemme 3.3.16, il y a un entier λ tel que

$$b_1 + \lambda d_1(C) = m\rho,$$

où m est premier avec le pgcd des coefficients de la matrice colonne B qui sont sous b_1. Puisque $d_1(B)$ et $d_1(C)$ sont premiers entre eux, m est premier avec les coefficients sous b_1. Alors la matrice colonne :

$$B' = \begin{pmatrix} b_1 + \lambda d_1(C) \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

est telle que $d_1(B') = 1$, et s'écrit $B + CN$.

On suppose maintenant que B a au moins deux colonnes.

Par opérations sur les colonnes de B, on peut supposer que la t-ème ligne de B, qui est la première ligne de B_t, peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} m\rho & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où $m\rho$ est le pgcd des coefficients de cette ligne, et où m est premier avec $s_t(C)$ et ρ est le pgcd de $m\rho$ et $s_t(C)$. On a, par l'hypothèse $d_t(\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} 1$ et parce que C est supposée sous S.n.f., que $s_t(C)$, $m\rho$ et le pgcd des coefficients des $p-t$ dernières lignes de B sont premiers dans leur ensemble, car $s_t(C)$ et $d_1(B_t)$ sont supposés premiers entre eux. Comme auparavant, on peut utiliser le lemme 3.3.16 et ajouter un entier $\lambda s_t(C)$ à $m\rho$ tel que la t-ème ligne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \rho\tau & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où τ est premier avec $d_1(B_{t+1})$, le pgcd des coefficients des $p-t$ dernières lignes de B. Supposons que la t-ème ligne de B est de cette forme. Comme ρ divise $s_t(C)$ et que nous avons supposé que $s_t(C)$ est premier avec $d_1(B_t)$, nous avons que ρ, et donc $\rho\tau$, sont premiers avec $d_1(B_{t+1})$, c'est-à-dire le pgcd des coefficients des $p-t$ dernières lignes de B. Finalement, nous obtenons une matrice B, qui peut être déduite de la matrice initiale par des opérations sur les colonnes et

des additions de multiples de la t-ème colonne de C, telle que $d_1(B_t) = 1$. Continuons. Quitte à faire des opérations sur les $p-t+1$ dernières lignes de B et C et des opérations sur les colonnes de B, on peut supposer que B_{t-1} et C_{t-1} s'écrivent :

$$B_{t-1} = \begin{pmatrix} & L & & s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \\ & B' & & 0 \\ & & & \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} L & s \end{pmatrix}$ est la $t-1$-ème ligne de B, la matrice B' est une matrice de taille $(p-t)\times(q-1)$, et

$$C_{t-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{t-1}(C) & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & C' & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix},$$

où C' est une matrice de taille $(p-t+1)\times(r-t+1)$ qui n'est pas nécessairement sous S.n.f. ou diagonale mais telle que $d_1(C') = s_t(C)$. Ainsi, $s_{t-1}(C)$ divise $d_1(C')$. On remarque que $d_2(B_{t-1}) = \mathrm{pgcd}(d_1(L), d_1(B'))$. Soit D' la matrice C' à laquelle on a retiré sa première ligne. C'est donc une matrice de taille $(p-t)\times(r-t+1)$ constituée des $p-t$ dernières lignes de C'. On peut réutiliser ce qu'on a fait dans le cas $t = 1$ avec les matrices

$$B'' := \begin{pmatrix} L & s \\ & \\ B' & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

et

$$C'' := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{t-1}(C) & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & D' & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

pour obtenir une matrice N'' telle que $d_1(B'' + C''N'') = 1$. Comme $d_1(B'') = d_2(B_{t-1})$, on obtient de N'' une matrice N telle que

$$d_2\left(\begin{pmatrix} & L & & s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \\ & B' & & 0 \\ & & & \end{pmatrix} + C_{t-1}N\right) = 1.$$

On peut ainsi considérer une matrice B telle que $d_2(B_{p-t}) = 1$. Par récurrence descendante sur t, on conclut dans le cas où $t < p$.

Si $t = p$, d'après ce qu'on a fait on peut supposer que $d_{p-1}(B_2) = 1$ et on se ramène au cas où B est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & I_{t-1} & 0 \end{pmatrix},$$

par bloc et où les 0 à droite symbolisent des blocs éventuels de 0. La matrice L est une matrice ligne de taille $1 \times (q-t+1)$. Et C est de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} d_1(C) & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix},$$

où C' est une matrice de taille $(p-1) \times (r-1)$. On rappelle qu'on suppose qu'on n'a pas $t = p = q$, et donc, comme $t = p$, que $q-t+1 > 1$. Avec des opérations sur les $q-t+1$ premières colonnes de B, on peut considère que L est de la forme $L = \begin{pmatrix} d_1(L) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et qu'une des colonnes de B est une colonne de 0. L'hypothèse du théorème dit alors que $d_1(L)$ et $d_1(C)$ sont premiers entre eux. Il y a des entiers u et v tels que $ud_1(L) + vd_1(C) = 1$ et on peut toujours ajouter v fois la première colonne de C à la dernière colonne de B pour obtenir une matrice telle que $d_t(B) = 1$.

C'est la fin de la démonstration de ce théorème. □

Nous terminons en simplifiant les conditions du théorème :

Proposition 3.3.20. *On se place dans le contexte du théorème 3.3.17. La condition "$d_{t-j+1}(B_j)$ et $s_j(C)$ sont premiers entre eux pour j de 1 à t" est équivalente à :*

$$d_t\left(\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Démonstration. Supposons que $d_{t-j+1}(B_j)$ et $s_j(C)$ sont premiers entre eux pour j de 1 à t. Soit $\begin{pmatrix} 0 & B & C \end{pmatrix}$, une matrice où on a ajouté assez de colonnes nulles pour que la matrice $B' = \begin{pmatrix} 0 & B \end{pmatrix}$ ait plus de colonnes que de lignes. D'après théorème 3.3.17, il y a une matrice N telle que $d_t\left(\begin{pmatrix} 0 & B \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix}\right) = 1$. Si s est le nombre de colonnes nulles que l'on a rajoutées, on obtient :

$$d_t\left(\begin{pmatrix} 0 & B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ N_1 & N_2 & I_r \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ N_1 & N_2 & I_r \end{pmatrix}$$

est inversible, cela revient à

$$d_t\left(\begin{pmatrix} 0 & B & C \end{pmatrix}\right) = d_t\left(\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Dans l'autre sens, si $d_t\left(\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}\right) = 1$, alors, par définition, il n'y a aucun diviseur commun plus grand que 1 aux $t \times t$ mineurs de $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$.

Nous allons montrer la contraposée, et nous supposons qu'il y a un j fixé entre 1 et t, tel que $\lambda := \text{pgcd}(d_{t-j+1}(B_j), s_jC) \neq 1$. On rappelle que C est supposée être sous S.n.f.. Soit $M_{\omega,\tau}$ une sous-matrice de $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ de taille $t \times t$ où $\omega \in \mathcal{I}_t(p)$ et $\tau \in \mathcal{I}_t(q+r)$. On va montrer que si le déterminant de $M_{\omega,\tau}$ n'est pas nul, alors il est tout de même divisible par λ. Comme $s_j(C)|s_k(C)$ pour tout $k \geq j$, si l'ensemble τ contient un élément de $\{q+j, ..., q+r\}$, c'est-à-dire si une des colonnes de $M_{\omega,\tau}$ est une des $r-j$ dernières colonnes de C, alors $\det(M_{\omega,\tau})$ est divisible par λ.

Supposons alors qu'au plus $j-1$ colonnes de $M_{\omega,\tau}$ sont des colonnes de C, et que ces colonnes sont dans les $j-1$ premières colonnes de C. Au moins $t-j+1$ colonnes de $M_{\omega,\tau}$ sont donc issues de B. Pour tout ensemble $\omega \in \mathcal{I}_t(p)$, au moins $t-j+1$ des lignes de $M_{\omega,\tau}$ doivent être dans les $p-(j-1)$ dernières lignes de $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$. La matrice $M_{\omega,\tau}$ doit donc être de la forme, après réordonnement de ses lignes et de ses colonnes :

$$M_{\omega,\tau} := \begin{pmatrix} B' & C' \\ B'' & 0 \end{pmatrix},$$

où C' est une sous-matrice issue de C de taille au plus $(j-1)\times(j-1)$, et B'' est une sous-matrice carrée issue de B_j de taille au moins $(t-j+1)\times(t-j+1)$. Finalement, comme λ divise $d_{t-j+1}(B_j)$ par hypothèse, il divise $\det(B'')$ et donc λ divise $\det(M_{\omega,\tau})$.

□

Par souci de clarté, nous donnons une réponse complète à la question 3.3.3. Remarquons enfin qu'il n'est plus nécessaire de supposer que C est sous S.n.f. :

Théorème 3.3.21. *Soient B une matrice entière de taille $p\times q$ et C une matrice entière de taille $p\times r$. On suppose $(B\ C)$ de rang p. Soit t un entier entre 1 et $\min(p,q)$. Il existe une matrice N telle que $d_t(B+CN)=1$ si et seulement si $d_t((B\ C))=1$, et, si $p=q=t$, on a $\det(B)\equiv\pm 1\ \ [d_1(C)]$.*

Exemple 3.3.22. Dans le cas où $p=q=t$, on donne un exemple pour $p=2$, qui montre que toutes les conditions sont bien nécessaires. Par exemple, si $B=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 35\end{pmatrix}$, alors, comme 35 et 5 ne sont pas premiers entre eux, il n'y a pas de matrice N telle que $B+CN$ soit inversible. En revanche on a bien $\det(B)=50\equiv 1\ \ [7]$.

Si $B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 35\end{pmatrix}$, alors on a bien que la matrice globale $\begin{pmatrix} B & C\end{pmatrix}$ est surjective, mais on a $\det(B)=7\equiv 2\ \ [5]$. Il n'y a pas de matrice N telle que $B+CN$ soit inversible non plus.

Pour terminer sur une touche d'optimisme, on peut affirmer qu'il y a une matrice N telle que $B+CN$ soit inversible dans le cas où $B=\begin{pmatrix}17 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$. Dans ce cas précis, c'est assez simple, et on a $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

3.4 Une conjecture et quelques perspectives

Il ne reste que peu de temps avant la fin de cette thèse. Profitons-en pour délivrer les derniers résultats, perspectives et conjectures. On continue de noter p_k la nombre de points $+$ et d'indice k et par q_k le nombre de points $-$ et d'indice k.

La réponse à la question 3.3.1 nous donne le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $\tilde{f}$ un germe de Morse sur $\mathbb{S}^n$ avec $n\geq 6$ et les hypothèses suivantes :*
- *f a un seul maximum local et un seul minimum local ;*
- *les autres points critiques de f sont répartis sur deux indices k ou $k+1$, avec $2\leq k\leq n-2$;*
- *$p_k=p_{k+1}$ (et donc $q_k=q_{k+1}$) ;*
- *le germe $\tilde{f}$ est ordonné.*

Le germe $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques si et seulement si $\det(\partial_{++,k+1}) \equiv \pm 1 \ \ [d_1(\partial_{+-,k+1})]$.

Démonstration. La démonstration est en fait une utilisation conjointe des théorème 3.3.21 et théorème 3.2.2. □

Pour un germe ordonné général, le théorème 3.3.21 donne une condition nécessaire calculable, que nous allons bientôt transformer en conjecture :

Proposition 3.4.2. *Soit $\tilde{f}$ un germe ordonné défini le long de $\mathbb{S}^n$, avec $n \geq 6$. Si le germe s'étend sans points critiques, alors, $d_{s_k}\left(\begin{pmatrix}\partial_{++,k} & \partial_{+-,k}\end{pmatrix}\right) = 1$ pour tout $0 \leq k \leq n$, où $s_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k}p_j$.*

Le théorème 3.4.1 ci-dessus nous invite à tensoriser les coefficients entiers du complexe de Morse de f par $\mathbb{Z}/(d_1(\partial_{+-}))$, où $d_1(\partial_{+-})$ est le pgcd des coefficients de la matrice globale ∂_{+-}, pour un germe ordonné $\tilde{f}$ général. Dans ce cas, la généralisation du déterminant est la *torsion*, introduite en section 1.11. Nous énonçons une conjecture de condition nécessaire et suffisante d'extension sans points critiques dans le cas d'un germe $\tilde{f}$ (donné avec un pseudo-gradient X) avec quelques hypothèses simplificatrices.

Définition 3.4.3 (Germe ordonné sympathique)**.** Un germe de Morse est un germe ordonné sympathique quand :
- $\tilde{f}$ est ordonné ;
- les seuls points critiques d'indices 0, 1, $n-1$ ou n de f se réduisent à un seul maximum local et un seul minimum local ;
- pour tout $2 \leq k \leq n-2$, si on note $s_k = \sum_{j=2}^{k}(-1)^{j+k}p_j$, alors $s_k > 0$ pour tout $2 \leq k < n-2$ et $s_{n-2} = 0$;
- le rang de $\begin{pmatrix}\partial_{++,n-2} & \partial_{+-,n-2}\end{pmatrix}$ est strictement plus grand que p_{n-3}.

Les conditions énoncées ici sont des conditions qui paraissent naturelles pour démontrer la conjecture ci-dessous. La troisième condition permet d'utiliser le théorème 3.3.21, en utilisant la remarque 3.3.18 qui stipule que les résultats du théorème 3.3.21 est valable quand le nombre de colonnes de B est strictement plus grand que t, en prenant les notations du théorème, avec ici $B = \partial_{++,k}$ et $C = \partial_{+-,k}$. La dernière condition permettrait d'utiliser le théorème 3.3.21 en degré $n-2$ avec $B = \partial_{++,n-2}$ et $C = \partial_{+-,n-2}$.

On conjecture :

Conjecture 3.4.4. *Un germe ordonné sympathique s'étend sans points critiques si et seulement si :*
- *pour $2 \leq k \leq n-2$, on a $d_{s_{k-1}}(\begin{pmatrix}\partial_{++,k} & \partial_{+-,k}\end{pmatrix}) = 1$;*
- *si on note $d = d_1(\partial_{+-})$, alors $(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}) \otimes \mathbb{Z}/(d), \partial_{++} \otimes \mathbf{1})$ est un complexe acyclique dont la torsion est ± 1.*

Remarquons que $(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+(\tilde{f}) \otimes \mathbb{Z}/(d), \partial_{++} \otimes \mathbf{1})$ définit bien un complexe de chaînes, car en tensorisant par $\mathbb{Z}/(d)$, on obtient $\partial_{+-} \otimes \mathbf{1} = 0$, ce qui donne un opérateur de bord :

$$\partial \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix}\partial_{++} \otimes \mathbf{1} & 0 \\ \partial_{-+} \otimes \mathbf{1} & \partial_{--} \otimes \mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Cela implique que $\partial_{++} \otimes \mathbf{1}$ et $\partial_{--} \otimes \mathbf{1}$ définissent bien des opérateurs de bord, en calculant $(\partial \otimes \mathbf{1})^2$. Les hypothèses énoncées dans la conjecture sont bien nécessaires par le théorème

3.3.21, et par le fait que s'il y a des matrices N_k telles que $(\mathbb{Z}\mathcal{C}^+{}_k, \partial_{++,k} + \partial_{+-,}N_k)_{2\leq k\leq n-2}$ est un complexe de chaînes acyclique, alors il se projette sur un complexe de chaînes acyclique en tensorisant par $\mathbb{Z}/(d)$. C'est dû par exemple au théorème des coefficients universels qu'on peut trouver dans [17, Theorem 3A.3, p.164s].

Par le théorème 3.4.1 ci-dessus, la conjecture est vraie dans le cas où k ne peut prendre que deux valeurs entre 2 et $n-2$. Donnons une autre raison d'y croire, qui généralise le théorème 3.4.1 :

Théorème 3.4.5. *La conjecture est vraie dans le cas où il existe $2 \leq m \leq n-2$ tel que $d = d_1(\partial_{+-,m})$ et pour tout k entre 2 et $n-2$, la matrice $\begin{pmatrix}\partial_{++,k} & \partial_{+-,k}\end{pmatrix}$ est de rang maximal, c'est à dire p_{k-1}.*

Avant de démontrer ce théorème, disons en quoi l'information délivrée donne du crédit à la validité de la conjecture. En effet, il montre que toute l'information venant de la matrice ∂_{+-} peut être portée entièrement par une seule sous-matrice $\partial_{+-,m}$, et que la condition recherchée pour une condition nécessaire et suffisante dans le cas d'un germe ordonné général doit être une sorte de torsion. L'hypothèse sur le rang semble aussi totalement superflue, mais nous permettra d'utiliser à deux reprises en fin de démonstration le théorème 3.3.21 sans trop se poser de questions. Je n'ai pas réussi à mener une démonstration similaire sans cette hypothèse.

La démonstration de ce théorème restera technique, utilisant des calculs matriciels. La difficulté tient à ce que modifier un opérateur de bord au degré $k+1$ modifie aussi l'opérateur de bord aux degrés k ou $k+2$. Dans ce qui suit "opérations sur les lignes" ou "opérations sur les colonnes" sera toujours entendu comme résultats de glissements d'anses.

Démonstration. On va d'abord montrer qu'on peut supposer que m est maximal dans le sens où, pour tout $n > k \geq m+1$, on peut supposer $\mathcal{C}^+_k(\tilde{f}) = \emptyset$.

Supposons tout d'abord que $m \neq n-2$. Les hypothèses et le théorème 3.3.21 montrent qu'il existe une matrice N_{n-2} telle que $\partial_{++,n-2} + \partial_{+-,n-2}N_{n-2}$ est de la forme (modulo changement de base et action sur les lignes) :

$$\begin{pmatrix} I_{p_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors faire des opérations sur les lignes pour avoir $\partial_{-+,n-2} = 0$. On continue alors de noter ∂ un opérateur avec ces deux propriétés sur $\partial_{++,n-2}$ et $\partial_{-+,n-2}$. Comme on travaille avec un opérateur de carré nul, on a que $\partial_{n-3} = 0$ sur $\mathrm{Im}(\partial_{++,n-2})$. Ainsi, on a :

$$\partial_{++,n-3} = \begin{pmatrix} 0 & U_{n-3} \end{pmatrix},$$

où U_{n-3} est une matrice de taille $(p_{n-3} - p_{n-2}) \times p_{n-4}$ et

$$\partial_{-+,n-3} = \begin{pmatrix} 0 & T_{n-3} \end{pmatrix},$$

où T_{n-3} est une matrice qui ne nous intéresse guère. On peut tuer les points d'indice $n-2$ avec ceux d'indice $n-3$ qui engendrent l'image de $\partial_{++,n-2}$. Cela ne modifie pas l'opérateur de bord aux degrés strictement inférieurs à $n-3$. Au degré $n-3$, on obtient $\partial_{++,n-3} = U_{n-3}$ et $\partial_{-+,n-3} = T_{n-3}$, et les matrices $\partial_{+-,n-3}$ et $\partial_{--,n-3}$ ne sont pas modifiées. On obtient alors un nouveau germe, qui vérifie encore toutes les conditions du théorème.

Par la troisième propriété de la définition 3.4.3, on a

$$s_{n-5} > 0.$$

De plus, dans le cas d'un germe ordonné sympathique nous avons par définition :

$$0 = s_{n-2} = p_{n-2} - p_{n-3} + p_{n-4} - s_{n-5}.$$

On obtient donc $p_{n-4} > p_{n-3} - p_{n-2}$.

Cela nous permet de réutiliser le théorème 3.3.21 (et la remarque 3.3.18) et obtenir une matrice N_{n-3} telle que

$$d_{s_{n-4}}\left(U_{n-3} + \partial_{+-,n-3}N_{n-3}\right) = 1,$$

où $s_{n-4} = p_{n-4} - p_{n-3} + p_{n-2}$.

Quitte à changer de bases et à faire des opérations sur les lignes en degré $n-3$, on peut donc supposer que

$$\partial_{++,n-3} = \begin{pmatrix} I_{s_{n-4}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{-+,n-3} = 0.$$

Si $m \neq n-3$, on peut tuer les points d'indice $n-3$, et continuer alors jusqu'à ce que m soit maximal, dans le sens donné précédemment.

On va maintenant montrer qu'on peut se restreindre à un germe dont les points + sont d'indices m, $m-1$ et $m-2$. Si $m = 4$ c'est déjà le cas. Supposons donc que $m > 4$.

Occupons-nous des points + d'indice 2. Par hypothèse, on peut ajouter une matrice $\partial_{+-,3}N_3$ à $\partial_{++,3}$ telle que

$$d_{p_2}(\partial_{++,3} + \partial_{+-,3}N_3) = 1.$$

On suppose alors que $d_{p_2}(\partial_{++,3}) = 1$. Quitte à faire des opérations licites sur les lignes et les colonnes de ∂_3, on peut alors supposer que l'on a $\partial_{++,3} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p_2} \end{pmatrix}$ et $\partial_{-+,3} = \begin{pmatrix} Z & 0 \end{pmatrix}$, où Z est de taille $q_2 \times (p_3 - p_2)$. On écrit maintenant la matrice ∂_4 sous la forme

$$\partial_4 = \begin{pmatrix} S_1 & T_1 \\ S_2 & T_2 \\ \partial_{-+,4} & \partial_{--,4} \end{pmatrix}.$$

Sous cette écriture, on a

$$\partial_{++,4} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_{+-,4} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

où S_1 et T_1 sont à valeurs dans $\ker(\partial_{++,3})$. Remarquons alors que

$$d_{p_3}\left(\begin{pmatrix} {}^tS_1 & {}^tS_2 \\ {}^tT_1 & {}^tT_2 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

car sa transposée, égale à $\begin{pmatrix} \partial_{++,4} & \partial_{+-,4} \end{pmatrix}$, vérifie la même propriété par hypothèse en utilisant le lemme 3.3.7. Remarquons aussi que $p_4 - p_3 + p_2 > 0$ si $m > 4$, par le deuxième item de la définition 3.4.3 des germes ordonnés sympathiques.

On est alors dans le cadre du théorème 3.3.21 où on considère pour matrice B la matrice

$$\begin{pmatrix} {}^tS_1 \\ {}^tT_1 \end{pmatrix}$$

de taille $(p_4 + q_4) \times (p_3 - p_2)$, pour matrice C la matrice

$$\begin{pmatrix} {}^tS_2 \\ {}^tT_2 \end{pmatrix}$$

de taille $(p_4+q_4)\times p_2$ et avec $t=p_3-p_2$. En utilisant le lemme 3.3.7, on a que la matrice

$$\begin{pmatrix} {}^tS_1 & {}^tS_2 \\ {}^tT_1 & {}^tT_2 \end{pmatrix}$$

a un rang suffisamment grand pour utiliser le théorème 3.3.21.

Il y a donc une matrice ${}^tN_4$ telle que la matrice

$$d_{p_3-p_2}\left(\begin{pmatrix} {}^tS_1+{}^tS_2{}^tN_4 \\ {}^tT_1+{}^tT_2{}^tN_4 \end{pmatrix}\right)=1.$$

En reprenant la transposée, cela implique qu'il y a une matrice N_4 telle que

$$d_{p_3-p_2}\left(\begin{pmatrix} S_1+N_4S_2 & T_1+N_4T_2 \end{pmatrix}\right)=1.$$

On rappelle que ces opérations algébriques sont associés à des glissements d'anses. De tels glissements d'anses correspondent bien à un élément de $G_4(\tilde{f})$.

Une telle opération modifie l'opérateur de bord au rang 3, et donne :

$$\partial_3=\begin{pmatrix} 0 & I_{p_2} & \partial_{+-,3} \\ Z & -ZN_4 & \partial_{--,3} \end{pmatrix}.$$

On peut alors réaliser les glissements d'anses de points + d'indice 2 au-dessus de points − d'indice 2 (correspondant à un élément de $G_2(\tilde{f})$), pour ré-obtenir l'opérateur de bord

$$\partial_3=\begin{pmatrix} 0 & I_{p_2} & \partial_{+-,3} \\ Z & 0 & \partial_{--,3} \end{pmatrix}.$$

De tels glissements d'anses ne modifient que l'opérateur de bord de degré 3, puisque $\partial_2=0$.

On fait alors maintenant passer les points + d'indice 3 dont le bord est I_{p_2} sous les points − d'indice 3. Ce faisant, on peut réaliser les glissements d'anses nécessaires de points − d'indice 3 au-dessus des points + qu'on a fait descendre pour annuler $\partial_{+-,3}$. On obtient alors des opérateurs de bord

$$\partial_3=\begin{pmatrix} 0 & I_{p_2} & 0 \\ Z & 0 & \partial_{--,3} \end{pmatrix},$$

et

$$\partial_4=\begin{pmatrix} S_1+N_4S_2 & T_1+N_4T_2 \\ 0 & 0 \\ \partial_{-+,4} & \partial_{--,4} \end{pmatrix}.$$

On s'aperçoit alors qu'on peut tuer les points + d'indice 3 dont l'image par $\partial_{++,3}$ est non nulle avec les points + d'indice 2. L'opérateur de bord ∂_4 ci-décrit devient simplement :

$$\partial_4=\begin{pmatrix} S_1+N_4S_2 & T_1+N_4T_2 \\ \partial_{-+,4} & \partial_{--,4} \end{pmatrix}.$$

On peut alors supposer qu'il n'y a plus de points + d'indice 2. On peut continuer, et par récurrence, montrer qu'on peut se restreindre à un germe dont les seuls points + sont le maximum global et des points d'indices m, $m-1$ et $m-2$.

Ce nouveau germe est muni d'un opérateur de bord, qu'on note encore ∂. Remarquons que

$$p_m-p_{m-1}+p_{m-2}=0.$$

En utilisant encore une fois le théorème 3.3.21, on peut supposer que

$$\partial_{++,m-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p_{m-2}} \end{pmatrix}$$

en degré $m-1$, et on note

$$\partial_{++,m} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_{+-,m} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

où U_1 est de taille $p_m \times p_m$ et est à valeurs dans $\ker(\partial_{++,m-1})$, et U_2 est de taille $(p_{m-1} - p_m) \times p_m$, ou encore $p_{m-2} \times p_m$. On a toujours que $d = d_1(\partial_{+-}) = d_1(\partial_{+-,m})$ et

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Comme il n'y a pas de points d'indice $m-3$, on a aussi $\partial_{m-2} = 0$.

Le calcul de $\partial \circ \partial = 0$ nous donne les équations

$$U_2 + \partial_{+-,m-1}\partial_{-+,m} = 0 \tag{3.1}$$

et

$$V_2 + \partial_{+-,m-1}\partial_{--,m} = 0. \tag{3.2}$$

Ces équations nous disent que d divise $d_1(U_2)$ et $d_1(V_2)$. Ainsi, dans $\mathbb{Z}/(d)$, la matrice $\partial_{++,m}$ se projette sur $\begin{pmatrix} \overline{U_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\overline{U_1}$ est la matrice U_1 projetée dans $\mathbb{Z}/(d)$. On obtient par hypothèse sur la torsion du complexe de chaînes tensorisé que

$$\pm 1 = \tau = \det(\overline{U_1}) \equiv \det(U_1 + NU_2) \quad [d],$$

et ce pour toute matrice à coefficients entiers N. Ainsi, si $d = d_1(V_1)$ et que l'on a

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

alors on peut utiliser théorème 3.3.21 et obtenir une matrice N_m telle que $U_1 + V_1 N_m$ soit inversible.

Montrons qu'on peut ajouter une matrice $N \begin{pmatrix} U_2 & V_2 \end{pmatrix}$ avec une matrice N bien choisie, à $\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix}$ de telle manière à ce que

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} U_2 & V_2 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Prenons la transposée, et cela revient alors à trouver une matrice ${}^tN$ telle que

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} {}^tU_1 \\ {}^tV_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^tU_2 \\ {}^tV_2 \end{pmatrix} {}^tN\right) = 1.$$

Mais toutes les conditions sont réunies ici pour utiliser encore une fois le théorème 3.3.21. En effet, on est dans le cas "simple" où il suffit que l'on ait

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} {}^tU_1 & {}^tU_2 \\ {}^tV_1 & {}^tV_2 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

ce qui est vrai par hypothèse.

On suppose alors maintenant que

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Montrons aussi qu'on peut supposer que le pgcd des coefficients de V_1 est d. Cela est possible en rajoutant une paire de points critiques + d'indices $(m, m-1)$, grâce à un accident de naissance. On obtient alors une matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{++,m} & \partial_{+-,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & U_1 & & \vdots & & V_1 & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & U_2 & & \vdots & & V_2 & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Quitte à faire des opérations sur les lignes de $\begin{pmatrix} U_2 & V_2 \end{pmatrix}$ et sur les colonnes de $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$, on peut supposer que V_2 est sous S.n.f.. On peut alors rajouter la première ligne de $\begin{pmatrix} U_2 & V_2 \end{pmatrix}$ à la première ligne $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} L & 1 & d_1(V_2) & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & \\ U_1 & \vdots & & & V_1 & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \\ U_2 & \vdots & & & V_2 & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

où L est la première ligne de U_2 et $\begin{pmatrix} d_1(V_2) & 0 \end{pmatrix}$ est une ligne dont le premier coefficient est $d_1(V_2)$ et le reste est constitué de 0. Dans ce cas là, on a

$$d_{p_m}\left(\begin{pmatrix} L & 1 & d_1(V_2) & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & \\ U_1 & \vdots & & & V_1 & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix}\right) = 1.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} d_1(V_2) & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ & & V_1 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

a pour pgcd le pgcd des coefficients de V_1 avec $d_1(V_2)$, c'est-à-dire d, et enfin, on a toujours

$$\det\left(\begin{pmatrix} L & 1 \\ & 0 \\ U_1 & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}\right) \equiv \pm 1 \quad [d].$$

Autrement dit, par le théorème 3.3.21, on peut trouver une matrice N_m telle que

$$\begin{pmatrix} L & 1 \\ & 0 \\ U_1 & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(V_2) & 0 & \dots & 0 \\ & & V_1 & \end{pmatrix} N_m$$

soit inversible. On peut alors éliminer les points + d'indice $m-2$ puis les points + d'indice m avec les points + d'indice $m-1$ et terminer la démonstration. □

Pour aller encore plus loin, il faudrait aussi essayer de donner un peu plus de structure à la catégorie $\mathcal{LOCH}$. Cela nous permettrait peut-être d'extraire d'un élément $(C^+, C^-) \in \mathcal{LOCH}$ une torsion de manière naturelle. Une piste serait d'en faire une catégorie exacte, c'est-à-dire trouver une bonne notion de suite exacte

$$0 \to (C^+, C^-) \to (D^+, D^-) \to (E^+, E^-) \to 0$$

avec des hypothèses que l'on ne reproduira pas ici, pour trois éléments (C^+, C^-), (D^+, D^-) et (E^+, E^-) de $\mathcal{LOCH}$. Mais cela semble néanmoins difficile, et la seule structure de catégorie exacte cohérente qui semble se dégager est la structure de catégorie exacte triviale, celle pour laquelle les suite exactes sont les suites :

$$0 \to (C^+, C^-) \to (C^+ \oplus D^+, C^- \oplus D^-) \to (D^+, D^-).$$

Nous avons aussi dit que $\mathcal{LOCH}$ a une structure naturelle de catégorie additive, c'est-à-dire que les ensembles $\mathrm{Hom}((C^+, C^-), (D^+, D^-))$ ont une structure de groupe abélien pour deux éléments (C^+, C^-) et (D^+, D^-) donnés, et que de chaque couple $((C^+, C^-), (D^+, D^-))$ on peut former la somme $(C^+ \oplus D^+, C^- \oplus D^-))$. Cependant, avec les morphismes $f \in \mathrm{Hom}((C^+, C^-), (D^+, D^-))$ décrits, qui sont tels que $f_{+-} = 0$, il ne semble pas que $\mathcal{LOCH}$ puisse être munie d'une structure de catégorie abélienne, qui comprend notamment que chaque morphisme a un noyau et un conoyau.

Appendice : extensions de fonctions de Morse

Nous avons traité le problème d'extension sans points critiques d'un germe défini le long de $\mathbb{S}^n$ à la boule $\mathbb{D}^{n+1}$. Mais on aurait pu se demander s'il n'était pas tout aussi intéressant de répondre à la question : peut-on étendre une fonction $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ en une fonction $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sans points critiques ?

Il est en fait facile de répondre à cette question, et nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.0.6. *Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse qui a un unique point réalisant le minimum global ou un unique point réalisant le maximum global. On suppose que n est supérieur à 6. Alors f s'étend à la boule sans points critiques.*

Démonstration. Supposons par exemple que f n'a qu'un seul maximum global. Soit X un pseudo-gradient Morse-Smale adapté.

Avec le lemme 2.5.4 nous pouvons considérer un germe $\tilde{f}$ de telle manière à ce que tous les points soient d'étiquette $-$ mis à part le point en lequel f atteint son maximum global, qui est d'étiquette $+$. On note max le point en lequel f atteint son maximum global. De telles étiquettes vont nous permettre d'utiliser toutes les techniques du h-cobordisme, sans se soucier des croisements impossibles entre points $+$ et points $-$.

Avec un chemin de fonctions, nous pouvons ordonner ce germe, en faisant monter tous les maximums locaux différent de max juste au-dessous de max, puis tous les points d'indice $n-1$ juste en dessous de tous les maximums, puis tous les points d'indice $n-2$ en dessous des points d'indice $n-2$ etc. Comme on ne fait que monter des points d'étiquette $-$ pendant ce chemin, il est non critique. Il est possible de tuer tous les extremums différents de max et d'un des points (s'il y en a plusieurs) en lesquels f atteint son minimum global grâce au lemme 3.1.6 de cancellation non critique Il nous reste donc un germe avec deux extremums, et des points $-$ d'indices entre 1 et $n-1$. Si nous tuons les points d'indice 1 et $n-1$, nous pourrons alors tuer tous les autres points critiques qui ne sont pas des extremums, puisque nous aurons un germe ordonné avec des points d'indice entre 2 et $n-2$ (hors extremums), qui s'étend avec les bonnes conditions homologiques. Les conditions homologiques sont déjà là puisqu'il n'y a aucun autre point $+$ que le maximum.

Nous allons utiliser la méthode de Smale pour tuer les points critiques d'indice 1, en faisant apparaître autant de paires d'étiquettes $-$ et d'indices $(3, 2)$ que de points critiques d'indice 1, le tout entre les points déjà existants d'indices 3 et ceux d'indices 2. Avec un pseudo-gradient adapté, on peut supposer que les sphères d'attachement des points d'indices 2 nouvellement créé descendent toutes (par le flot du pseudo-gradient) dans le niveau juste au-dessus des points d'indice 1 et intersectent chacune une et une seule sphère transverse d'un point d'indice 1. On peut alors faire remonter tous les anciens points d'indice 2 au-dessus des nouveaux (comme ils sont $-$, ils ne peuvent que monter), puis, toujours avec le même pseudo-gradient, faire remonter

tous les points d'indice 1 qui vont s'éliminer avec les nouveaux points d'indice 2. C'en est donc fini des points d'indice 1. Occupons-nous maintenant des points d'indice $n-1$. La méthode est sensiblement la même. On crée des paires d'indices $(n-2, n-3)$ juste en dessous des points d'indice $n-2$ déjà existants. Nous utilisons un pseudo-gradient tel que les sphères transverses des nouveaux points d'indice $n-2$ puissent remonter par le flot juste en dessous des points d'indices $n-1$ et que chacune d'elle intersecte la sphère descendante d'un point d'indice $n-1$ en un point. En faisant remonter tous ces points d'indices $n-2$, nous nous débarrassons pouvons tuer les points d'indices $n-1$ encore une fois avec le lemme 3.1.7. Nous pouvons finalement conclure. □

Nous avons :

Théorème 3.0.7. *Pour tout $n \geq 1$, il y a des fonctions de Morse $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ qui ne s'étendent pas sans points critiques.*

Démonstration. Nous allons pour tout $n \geq 1$, exhiber une telle fonction qui aura $2(n+1)$ points critiques :

- 2 maximums globaux de valeurs critiques n et aucun autre maximum local ;
- 2 minimums globaux de valeurs critiques 0 et aucun autre minimum local ;
- 2 points critiques d'indices k pour tout k entre 1 et $n-1$, tous les deux de valeurs critiques k.

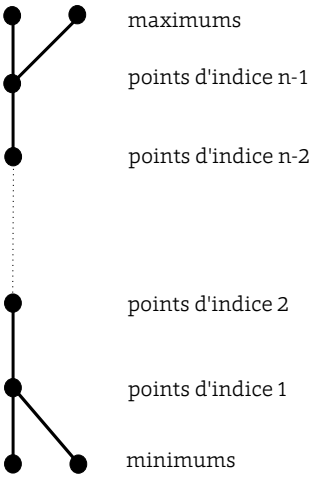

FIGURE 1 – Graphe de Reeb d'une fonction qui ne s'étend pas sans points critiques.

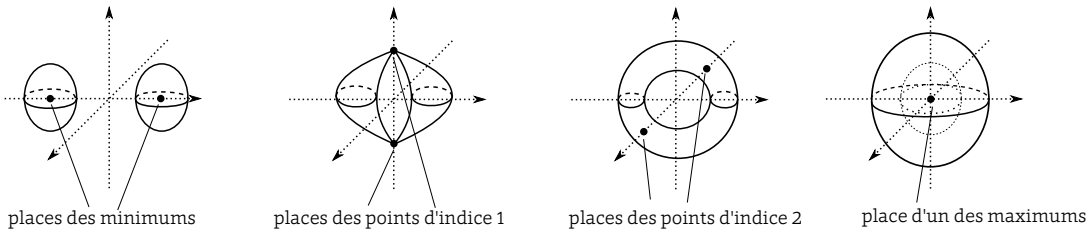

FIGURE 2 – Niveaux de la fonction pour $n = 3$.

On réfère à la figure 1 pour le graphe de Reeb de la fonction et à la figure 2 pour les surfaces de niveaux de la fonction dans le cas où $n = 3$. On va définir f en décrivant ses niveaux successifs. C'est un point de vue un peu inverse à celui de Poincaré, qui décrivait sa sphère d'homologie via les niveaux successifs d'une fonction de Morse. Ici, on sait que l'on se place sur la sphère et on va décrire une fonction $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ de Morse en décrivant les niveaux de f dans $\mathbb{S}^n$ et leurs modifications. Nous voyons $\mathbb{S}^n$ comme la compactification de $\mathbb{R}^{n+1}$. Avec ce point de vue, nous pouvons voir les niveaux comme plongés dans $\mathbb{R}^{n+1}$, un des maximums globaux sera à l'infini.

Introduisons un peu de terminologie : nous définissons le k-ème niveau de f comme la sous-variété $f^{-1}(k + \frac{1}{2})$ et nous le notons V_k. Ce sera le niveau entre les points critiques d'indice k et ceux d'indice $k + 1$.

Nous définissons les minimums de f comme étant les deux points de coordonnées $(-1, 0, ..., 0)$ et $(1, 0, ..., 0)$, tels que f en ces points prend la valeur 0. Le niveau V_0 entre les points d'indices 0 et 1 correspond à l'union disjointe de deux sphères $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous demandons alors aux deux composantes de $f^{-1}(\{t\})$ de se rejoindre au temps $t = 1$ de manière symétrique aux points critiques d'indices 1, voir la figure 2. Les points critiques d'indice 1 de f sont alors définis comme étant les points de coordonnées respectives $(0, 1, 0, ..., 0)$ et $(0, -1, 0, ..., 0)$. Le niveau V_1 correspond à une sous-variété de $\mathbb{S}^n$ difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$. Nous demandons à ce que les points critiques d'indices 2 tuent chacun la classe $\mathbb{S}^1 \times \{\star\}$ tous les deux en même temps et de manière symétrique, aux points $(0, 0, -1, 0, ..., 0)$ et $(0, 0, 1, 0, ..., 0)$. En suivant cette procédure, nous construisons la fonction f telle que le k-ème niveau (celui entre les points d'indices $k-1$ et k) est difféomorphe à $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-2}$ et tel que les points critiques d'indices $k+1$ tuent la classe $\mathbb{S}^k \times \{\star\}$ les deux en même temps et de manière symétrique, aux points $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)$ et $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, où les coordonnées non nulles sont les $(k+2)$-èmes. Finalement, le niveau V_{n-1} correspond à deux sphères $\mathbb{S}^{n-1}$, qui se font tuer par les deux maximums, un situé à l'origine et le deuxième à l'infini. La fonction f est ainsi décrite, niveau par niveau.

Supposons que f s'étende sans points critiques à la boule. Par récurrence, nous montrerons que tous les points sont d'étiquettes $-$, en contradiction avec le fait que les maximums doivent être $+$ (sinon, il y a un maximum global à l'intérieur de la boule pour l'extension).

Comme f s'étend sans points critiques à une fonction F, étant donné un entier $0 \leq k \leq n-1$, tous les niveaux $F^{-1}(\{t\})$ sont difféomorphes entre eux pour $t \in]k, k+1[$. Tout d'abord, les deux minimums globaux doivent être $-$, sinon il y a un minimum global pour l'extension. Le niveau de l'extension $\tilde{V_0}$ qui étend V_0 est alors difféomorphe à $\mathbb{D}^{n-1} \cup \mathbb{D}^{n-1}$. Les deux points critiques d'indices 1 joignent les deux sphères $\mathbb{S}^{n-1}$ de V_0. Ils doivent être d'étiquette $-$ sinon leurs sphères d'attachement sont de classe d'homotopie triviale dans $\mathbb{D}^{n-1} \cup \mathbb{D}^{n-1}$, voir théorème 1.9.4, ce qui n'est pas possible (chaque sphère d'attachement est constituée de deux points, et ces deux points sont réparties dans chacune des deux boules). Le niveau à bord $\tilde{V_1}$ est ainsi difféomorphe à $\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Avec le même argument, nous disons que les deux points critiques d'indices 2 doivent être d'étiquette $-$, puisque si l'un d'entre eux est d'étiquette $+$, sa sphère d'attachement doit border un disque $\mathbb{D}^2$ dans $\tilde{V_1}$ ce qui est exclu. Par récurrence, on a que le k-ème niveau $\tilde{V_k}$ de F est difféomorphe à $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ et que les points d'indices $k + 1$ sont nécessairement d'étiquettes $-$. Cela conclut la démonstration.

□

Bibliographie

[1] Vladimir I. Arnol'd. *Arnold's problems*. Springer, 2005.

[2] Sergueï A. Barannikov. The framed Morse complex and its invariant. *Advances in Soviet Math.*, 21 :93–115, 1994.

[3] Joan Birman. On the equivalence of Heegaard splitting of closed, orientable 3-manifolds. *Annals of Mathematics Studies*, 84 :136–164, 1975.

[4] Jean Cerf. Topologie de certains espaces de plongements. *Bulletin de la S.M.F.*, 89 :227–380, 1961.

[5] Jean Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, 39, no. 1 :7–170, 1970.

[6] Carlos Curley. Non-singular extension of Morse functions. *Topology*, 16 :89–97, 1977.

[7] Henri Paul de St-Gervais. Analysis situs. voir http://analysis-situs.math.cnrs.fr/-La-theorie-de-Morse-.html.

[8] Maciej Borodzik et András Némethi et Andrew Ranicki. Morse theory for manifolds with boundary. *Algebr. Geom. Topol.*, 16, no. 2 :p. 971–1023, 2016.

[9] Dorian Le Peutrec et Francis Nier et Claude Viterbo. Precise Arrhenius law for p-forms : The Witten laplacian and Morse–Barannikov complex. *C. Ann. Henri Poincaré*, 14, no.3 :567–610, 2013.

[10] Samuel Blank et François Laudenbach. Extension à une variété de dimension 2 d'un germe de fonction donnée au bord. *C.R. Acad Sci. Paris*, 270 :1663–1665, 1970.

[11] Marston Morse et George B. Van Schaak. Critical point theory under general boundary conditions. *Duke Math. J.*, 2 :220–242, 1936.

[12] Herbert Edelsbrunner et John Harer. Persistent homology, a survey. *Contemporary mathematics*, 453 :257–282, 2008.

[13] Michel Kervaire et John W. Milnor. Groups of homotopy spheres i. *Annals of Mathematics*, 77 :504–537, 1962.

[14] Allen Hatcher et John Wagoner. *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, volume 6. Asterisque, S.M.F., 1973.

[15] Michèle Audin et Mihai Damian. *Théorie de Morse et Homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.

[16] Maelis Arnould et Nicolas Coltice et Nicolas Flament et Valentin Seigneur et Dietrich Müller. On the scales of dynamic topography in whole-mantle convection models. accepté dans Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 2018.

[17] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.

[18] Peter J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math. Soc.*, 30 :154–172, 1955.

[19] Egbert Van Kampen. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. *American Journal of Mathematics*, 55 :261–267, 1933.

[20] Clément Laroche. Extending a Morse function to a non-orientable 3-manifold. arXiv:1709.03328, 2017.

[21] François Laudenbach. Topologie différentielle, 1996. cours professé à l'École Polytechnique, disponible sur http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/ laudenba/coursX.pdf.

[22] François Laudenbach. Homologie de Morse dans la perspective de l'homologie de Floer, 2010. notes de cours, disponibles sur http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/ laudenba/morse-floer.pdf.

[23] François Laudenbach. A Morse complex on manifolds with boundary. *Geometricae Dedicata*, 153, no. 1 :47–57, 2011.

[24] François Laudenbach. On an article by S. A. Barannikov, 2013. disponible sur http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/∼laudenba/barannikov_I-III.pdf.

[25] François Laudenbach. A proof of Morse's theorem about the cancellation of critical points. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 351 :483–488, 2013.

[26] François Laudenbach. A proof of Reidemeister-Singer's theorem by Cerf's methods. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques.*, 6, XXIII, no. 1 :197–221, 2014.

[27] John W. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64, no.2 :399–405, 1956.

[28] John W. Milnor. A procedure for killing the homotopy groups of differenitable manifolds. *Symposia in Pure Maths*, III :39–55, 1961.

[29] John W. Milnor. *Morse theory.* Princeton university Press, 1963.

[30] John W. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton university Press, 1965.

[31] John W. Milnor. Whitehead torsion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :358–426, 1966.

[32] Morris Newman. *Integral matrices.* Academic Press, 1972.

[33] Richard S. Palais. Extending diffeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11, no. 2 :274–277, 1960.

[34] Tomasz Mrowka Peter Kronheimer. *Monopoles and three-manifolds.* Cambridge University Press, 2011.

[35] Valentin Poénaru. Travaux de J. Cerf (isotopie et pseudo-isotopie), Séminaire Bourbaki vol. 1969/70, Exposés 364–381. 180, 1971.

[36] Henri Poincaré. Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*, 1, 1895.

[37] Henri Poincaré. Cinquième complément à l'analysis situs. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 18 :45–110, 1904.

[38] Petya Pushkar. Morse theory on manifolds with boundary. draft available at https://www.hse.ru/data/2013/12/15/1338379877/morall6.pdf, 2013.

[39] Andrew Ranicki. *Algebraic and Geometric Surgery.* Oxford Mathematical Monograph, 2002.

[40] Georges Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222 :847–849, 1946.

[41] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications.* Springer, 1994.

[42] Valentin Seigneur. Extending functions from a neighborhood of the sphere to the ball. arXiv:1805.06840, 2018.

[43] Valentin Seigneur. Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule. *Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris.*, pages 712–716, 2018.

[44] Jean-Pierre Serre. Groupes d'homotopie des bouquets de sphères. *Séminaire Henri Cartan*, 7, no. 2 :1–7, 1955.

[45] René Thom. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. *Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris,*, 228 :973–975, 1949.

[46] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press, 1994.

[47] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. of Maths.*, 37 :647–680, 1936.

[48] Hassler Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Maths.*, 45 :220–246, 1944.

Résumé

Étant donnée une fonction lisse $\tilde{f}$ définie sur un voisinage de la sphère euclidienne de dimension n dans la boule, peut-on l'étendre en une fonction définie sur la boule bordée par la sphère, de manière à ce que l'extension n'ait aucun point critique ?

Cette thèse propose d'étudier cette question, en supposant que la restriction de $\tilde{f}$ à la sphère, notée f, est Morse. Ce problème a été introduit pour la première fois par Blank et Laudenbach en 1970, et a aussi été posé par Arnol'd en 1981. Nous donnons une condition nécessaire d'extension sans points critiques qui s'appuie sur le complexe de Morse de la fonction f, et de la répartition des points critiques de f en deux ensembles : ceux dont la dérivée normale est négative et ceux dont la dérivée normale est positive. Cette condition nécessaire permet alors de donner un cadre algébrique à ce problème venant de la topologie différentielle et s'appuie principalement sur les grandes théories de la deuxième moitié du XXème siècle, à savoir celle des cobordismes de Thom, Smale, Milnor etc. Elle permet notamment de donner des conditions nécessaires et suffisantes dans certains cas plus restrictifs, et donne lieu à une condition nécessaire plus faible qui présente l'intérêt d'être calculable.

Le point de départ des résultats est celui de Barannikov, qui le premier a traduit le problème d'extension de fonction avec des conditions de dérivées normales en un problème de chemin de fonctions générique qui ne présente pas de singularité globale.

Mots-clés: théorie de Morse, chemins de fonctions, h-cobordisme, algèbre linéaire à coefficients entiers.

Abstract

Given a smooth function $\tilde{f}$ defined on a neighborhood of the euclidian sphere of dimension n in the ball, is it possible to extend it to a function defined on the ball which has no critical points ?

This thesis studies this question, assuming the f, the restriction of $\tilde{f}$ to the sphere, is Morse. This problem was first introduced by Blank and Laudenbach in 1970.

We give a necessary condition of extension without critical points that is based on Morse homology and the repartition of the critical set of f into two sets : the set of points whose normal derivative to the sphere interior to the ball is negative and the set of points whose normal derivative is positive. This necessary condition is of algebraic nature and uses great theories of the second half of the XXth century, namely cobordism theory of Thom, Smale, Milnor etc. It also leads to a sufficient condition in some interesting cases, and to a weaker necessary condition for a general function $\tilde{f}$ which is easily computable.

The point-of-view is the one of Barannikov, who was the first to tackle this problem by means of considerations about path of functions.

Keywords: Morse theory, path of functions, h-cobordism, linear algebra with integral coefficients.