

Numéro National de Thèse : **2018LYSEN034**

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale N°512

École Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 19/09/2018, par :

Arthur MARLY

Analyse mathématique et numérique d'écoulements de fluides à seuil

---

Devant le jury composé de :

ANCEY, Christophe	Professeur	EPFL – Suisse	Examinateur
BRESCH, Didier	DR CNRS	Université Savoie Mont-Blanc	Examinateur
CHUPIN, Laurent	Professeur	Université Clermont Auvergne	Rapporteur
MANGENEY, Anne	Professeur	IPGP – USPC, Paris	Examinatrice
RIBOT, Magali	Professeur	Université d'Orléans	Examinatrice
VIGNEAUX, Paul	MC – HDR	ÉNS de Lyon	Directeur de thèse
VILA, Jean-Paul	Professeur	INSA & IMT, Toulouse	Rapporteur

Cette thèse a été réalisée au sein des structures et a conduit aux contributions suivantes :



Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
CNRS UMR 5669, ÉNS de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, FRANCE



Équipe-projet NUMED
INRIA Grenoble - Rhône-Alpes
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, FRANCE



Des collaborations réalisées dans le cadre de cette thèse ont été financées par deux projets du CNRS : en 2016 par le programme Tellus-INSMI et en 2017+2018 par un projet structurant du programme InFIniti, de la Mission pour l'Interdisciplinarité du CNRS.



Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant les ressources de calcul du Pôle Scientifique de Modélisation Numérique (PSMN) localisées au centre Blaise Pascal à Lyon (France).

Articles :

- Augmented Lagrangian simulations study of yield-stress fluid flows in expansion-contraction and comparisons with physical experiments. Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics, 239 (2017) 35-52. Avec Paul Vigneaux.
- Flow of a yield stress-fluid over a cavity: experimental and numerical investigation of viscoplastic boundary layers. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 261 (2018) 38-49. Avec Guillaume Chambon, Li-Hua Luu, Pierre Philippe et Paul Vigneaux.

Communications orales :

- 44^e CANUM - Poster : *Écoulements de fluides à seuil en cavité : étude expérimentale et numérique de la couche limite viscoplastique*, Cap d'Agde. Mai 2018.
- VPF7 - *Viscoplastic Fluids Workshop : From Theory to Applications*, Rotorua, New Zealand. October 2017.
  - Exposé : *Simulations in expansion-contraction geometries : comparison with physical experiments.*
  - Co-auteur : *Flow of a yield stress fluid over a cavity : experimental and numerical investigation of viscoplastic boundary layers.*
- Workshop *Mathematical problems with subdifferential condition* - Poster, Saint-Étienne. Juin 2017.
- SMAI 2017 - Exposé Mini-Symposium : *Méthodes et simulations numériques pour les écoulements viscoplastiques*, La Tremblade. Juin 2017.
- GDR CNRS *Ruissellement et films cisaillés* - Exposé, Aussois. Janvier 2017.

Analyse mathématique et numérique d'écoulements de fluides à seuil

Résumé : Cette thèse traite d'écoulements de fluides à seuil (ou viscoplastiques) en milieu confiné. Les difficultés analytiques et numériques sont dues à la multivaluation du tenseur des contraintes dans les zones plastiques ainsi qu'à la non-différentiabilité du problème de minimisation associé. Cette thèse s'articule en deux parties.

Dans un premier temps, des simulations numériques parallèles très précises à l'aide d'algorithmes de dualité ont été effectuées. Elles ont permis de retrouver des résultats observés expérimentalement dont l'existence d'une ligne de glissement pour l'écoulement au dessus d'un obstacle et le caractère quasi-Poiseuille de la vitesse au-delà de cette ligne. Par ailleurs, la théorie de couche limite viscoplastique définie par Oldroyd (1947, à nombre de Bingham asymptotiquement grand) a été revisitée à nombre de Bingham modéré en milieu confiné. L'étude a mis en œuvre des allers-retours entre ces simulations et les expériences physiques de Luu et al. d'IRSTEA ainsi qu'une dérivation théorique. L'approximation de couche limite est vérifiée dans une certaine mesure à l'intérieur de la cavité. Une adaptation de la notion de couche limite viscoplastique est alors exhibée et permet d'étendre les scalings dérivés par Oldroyd (1947) et Balmforth et al. (J. of Fluid Mech, 2017). Ces scalings sont aussi généralisés au cas de la loi d'Herschel-Bulkley.

Dans un second temps, on présente une analyse asymptotique des champs de vitesses et de contraintes pour des écoulements en faible épaisseur (ε). Un développement à l'ordre ε^2 de la vitesse permet de trouver une équation de Reynolds à la même précision. Cette équation de Reynolds prolonge les résultats déjà existants dans le cadre newtonien, d'une part et dans le cadre fluide à seuil avec une surface libre, d'autre part.

Mots-clefs : Fluides à seuil, Rhéologie de Bingham, Rhéologie de Herschel-Bulkley, Simulations numériques, Méthodes de dualité, Différences Finies, Solveurs multi-parallèles frontaux, Couche limite viscoplastique, Analyse asymptotique, Écoulements en couche mince.

Mathematical and numerical analysis of yield stress fluid flows

Abstract : This thesis is devoted to the flow of yield stress (or viscoplastic) fluids in pipes. Analytical and numerical difficulties lie in the multivaluation of the stress tensor in the plastic regions and in the non-differentiability of the associated minimization problem. This manuscript is organized following two main axes.

First, very accurate numerical simulations were carried out using duality methods and parallel multifrontal solvers. Thus, experimental observations were recovered, namely the existence of a *slip line* for the flow over an obstacle and the Poiseuille-like behaviour of the velocity above this line. Moreover, the viscoplastic boundary layer theory defined by Oldroyd (1947 at high Bingham numbers) was revisited at moderate Bingham numbers in confined areas. This study provided an opportunity to go back and forth between these simulations and the physical measures of Luu et al. from IRSTEA and to perform a theoretical derivation. The boundary layer approximation is valid up to a certain extent in the cavity. An adaptation of the viscoplastic boundary layer definition is then given and allows to generalize the scalings shown by Oldroyd (1947) and Balmforth et al. (JFM 2017). These scalings are also generalized to the Herschel-Bulkley case.

Then, an asymptotic analysis of the velocity and stress fields for thin layer (ε) flows is presented. A velocity development up to ε^2 lets us find a Reynolds equation of same accuracy. This Reynolds equation extends the already existing results, on the one hand in the newtonian case and on the second hand for free surface flows.

Keywords : Yield stress fluids, Bingham rheology, Herschel-Bulkley rheology, Numerical simulations, Duality methods, Finite Differences, Multiparallel frontal solvers, Viscoplastic boundary layer, Asymptotic analysis, Thin-layer flows.

Remerciements

Trois ans passés à toute vitesse viennent de s'achever. J'espère n'oublier personne dans les lignes qui vont suivre. Pour celles et ceux qui n'y figureraient pas, merci tout simplement.

Il est très naturel que Paul Vigneaux tienne une place de choix dans ces remerciements. Sa patience, sa disponibilité, sa réactivité et sa bonne humeur constante en ont fait un directeur de thèse idéal. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir accepté en tant que stagiaire de fin de master et d'avoir continué à me superviser pendant ces trois dernières années. Sa connaissance des modèles et des schémas numériques m'aura beaucoup apporté, tout comme son support pendant les entraînements aux talks. Tout pareillement, je garde en mémoire le temps passé à Chambéry et les discussions avec Didier Bresch. Sa vision des modèles et des équations m'aura ouvert des horizons. Cette thèse n'aurait pas été la même sans ces échanges, et sa présence dans le jury comme examinateur me touche particulièrement.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Laurent Chupin et Jean-Paul Vila qui ont accepté de rapporter ce manuscrit et y ont consacré du temps de lecture. Je remercie également Anne Mangeney, Magali Ribot et Christophe Ancey pour leur présence dans le jury. Je suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans les échanges fructueux que nous avons eus avec Guillaume Chambon et les collègues de l'IRSTEA. Les questions-réponses permanentes entre mesures expérimentales et simulations ont formé une bonne part des travaux présentés ici, et l'apport des multiples conversations avec Li-Ha Luu, Pierre Philippe et Guillaume Chambon a été déterminante dans la direction qu'a prise ce manuscrit.

Impossible non plus de ne pas remercier ici les équipes sans lesquelles les simulations présentées ici n'auraient pas pu voir le jour. Je remercie donc les équipes de MUMPS au LIP et celles du PSMN au Centre Blaise Pascal. Plus nominativement, je tiens à remercier d'une part Guillaume Joslin, Jean-Yves l'Excellent et Marie Durand et d'autre part Hervé Gilquin et Cerasela Calugaru pour leur disponibilité et leur gentillesse face à nos problèmes.

Une thèse de doctorat dure plusieurs années et n'a pas lieu dans n'importe quelle structure, le cadre de vie y étant très important. De ce fait, j'aimerais vivement remercier toute l'équipe de l'UMPA de m'avoir accueilli en son sein en 2015. Un énorme merci à nos super secrétaires du laboratoire et du département Magalie, Virginia, Sandy, Farah ainsi que Catherine, d'une efficacité et d'une gentillesse incroyable. Je souhaite aussi remercier l'équipe NUMED qui m'a accueilli, et notamment Emmanuel Grenier.

C'est également entre ces murs que j'ai connu mes premières expériences d'enseignement conséquentes. Travailler comme chargé de TD pour des professeurs comme Jean-Claude, Dietrich, Emmanuel, Laure ou encore Paul a été un réel plaisir pendant ces trois ans, tout comme la compagnie de mes co-TD-men Àlvaro, Valentin et Florian. Je remercie également Vincent Calvez pour m'avoir donné l'opportunité d'intervenir dans le cadre de MathàLyon, expérience enrichissante que je ne peux que recommander à tous les futurs et actuels enseignants et chercheurs. Je suis enfin touché d'avoir été retenu pour être agrégé préparateur l'an prochain et

aurai à cœur de faire mon travail au mieux. Un grand merci à Grégory Mermont et l'équipe enseignante de m'avoir accordé leur confiance.

Last but not least, ces trois ans auraient été bien mornes sans les discussions (plus ou moins) sérieuses avec les différents membres du laboratoire durant lesquelles le monde aura été refait plusieurs fois. Outre les personnes sus-citées, nommons Thomas (Papy[1]), Jonathan (Monsieur JRPG), Alexandre (Kurt-Raymond), Sam (Le Consultant sportif), Benoît (Le Rhumier), Mickaël (Keal ?), Alexandre (Le Satellisateur), Valentine (La Prédatrice de Petits Gâteaux), Loïc (Droit au But), Sébastien (La Classe Intellectuelle), Ignacio, Loïc, Hélène, Agathe, Bruno, Marie, Olga... Mention toute spéciale à Léo Poyeton, colloc-cobureau avec qui nous avons joué au docteur pendant ces trois ans (on ne saura sans doute jamais qui est Tic et qui est Tac). Merci également aux membres de l'UMPA qui n'ont pas encore été cités ici, pour l'ambiance générale dans l'unité qui était très agréable et stimulante. Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidé à m'évader musicalement pendant ces trois ans, en particulier la Fanfarovis et le Club Jazz de l'ÉNS (et ayons également une petite pensée pour le mouton des étoiles).

Ces remerciements seraient incomplets sans une pensée pour les professeurs qui m'ont ouvert au monde des mathématiques et des sciences en général. Je pense notamment à mes professeurs de classe préparatoire (J. Voedts, X. Cointault, F. Bertrand et O. Prieur) ainsi que de lycée (B. Delbecq notamment) qui ont su chacun à leur manière me transmettre le goût des sciences et de l'enseignement mais aussi la rigueur de la rédaction.

Enfin, merci à ma famille qui m'a soutenu sans relâche depuis le début de mes études. Un énorme merci aussi à Agathe qui a été à fond derrière moi pendant ces trois ans et sans qui je n'aurais peut-être pas pu arriver au bout. J'espère pouvoir te le rendre durant ces trois prochaines années.

1. Je ne te remercie pas pour ton héritage par contre

À ma mère,

Sommaire

1 Introduction - État de l'art **1**
1.1 Introduction phénoménologique . . . 1
1.1.1 Les lois de conservation . . . 1
1.1.2 Les lois constitutives . . . 3
1.1.3 Visco-plasticité et fluides à seuil . . . 5
1.1.4 Détermination du seuil et controverse . . . 7
1.1.5 Résolutions explicites simples . . . 8
1.2 Formulation faible du problème - Applications . . . 9
1.2.1 Formulations variationnelles . . . 9
1.2.2 Existence - régularité . . . 11
1.2.3 Localisation analytique des zones de plug . . . 12
1.3 Outils et algorithmes numériques . . . 17
1.3.1 Méthodes de régularisation . . . 18
1.3.2 Méthodes de dualité . . . 20
1.3.3 Autres méthodes numériques . . . 21
1.4 Analyse Asymptotique - Équation de Reynolds . . . 22
1.4.1 Fluides newtoniens . . . 23
1.4.2 Justification mathématique de l'erreur de consistance . . . 23
1.4.3 Fluides à seuil . . . 24

2 Algorithmes de dualité pour les fluides à seuil **25**
2.1 Outils . . . 25
2.1.1 Rappels d'analyse convexe . . . 25
2.1.2 L'algorithme Lagrangien Augmenté (AL) - généralités . . . 27
2.2 Détails explicites de l'algorithme . . . 31
2.2.1 Algorithme AL proprement dit . . . 31
2.2.2 Notes sur des améliorations de **(ALG2)** . . . 35
2.2.3 Paramètres optimaux . . . 37
2.3 Discrétisation spatiale . . . 37
2.3.1 Le maillage et la discrétisation en un point intérieur . . . 39
2.3.2 Conditions de bord . . . 41
2.4 Premiers résultats numériques et étude de convergence . . . 45
2.4.1 Convergence de **(A1)** . . . 45
2.4.2 Temps effectif de calcul . . . 46
2.4.3 Des champs typiques de vitesse et déformation . . . 47
2.4.4 Détermination des zones de plug et de pseudo-plug . . . 47
2.4.5 Comparaison avec des résultats en éléments finis . . . 48
2.5 Passage de Bingham à Herschel-Bulkley . . . 49
2.5.1 Extension des résultats précédents . . . 50

2.5.2 Adaptation de l'algorithme **(A1)** . . . 50
2.5.3 La résolution de (2.55) . . . 52
2.5.4 Un premier test sur Poiseuille . . . 56

3 Comparaison simulations - expériences **73**
3.1 Un première comparaison dans le cas d'écoulement au dessus d'un obstacle . . . 73
3.1.1 Description du dispositif expérimental . . . 73
3.1.2 Adéquation de la cavité pour les comparaisons . . . 74
3.1.3 Existence de la ligne de glissement . . . 76
3.1.4 Régime Poiseuille au-delà de la ligne de glissement . . . 76
3.1.5 Section efficace . . . 77
3.1.6 Résultats complémentaires . . . 77
3.2 Évolution de la couche limite à Bingham élevés . . . 78
3.2.1 Les contraintes . . . 79
3.2.2 La couche limite - une première étude . . . 80
3.3 Évolution de la couche limite à Bingham modérés . . . 81
3.3.1 Caractéristiques de l'écoulement . . . 81
3.3.2 Points de comparaison simulations-mesures expérimentales . . . 82
3.3.3 L'approximation de couche limite . . . 83
3.3.4 Résolution des équations de couche limite . . . 85
3.3.5 Les nouveaux scalings . . . 88

4 Vers une équation modifiée de Reynolds **129**
4.1 Introduction et adimensionnement des équations . . . 129
4.2 Analyse asymptotique formelle . . . 131
4.2.1 Un développement de la vitesse à tout ordre . . . 131
4.2.2 Première équation de Reynolds . . . 134
4.2.3 Développement de la vitesse à l'ordre supérieur . . . 135
4.2.4 L'équation de Reynolds à l'ordre $o(\varepsilon)$ . . . 143
4.3 Quelques estimations . . . 145
4.3.1 Régularité des termes principaux . . . 146
4.3.2 Estimations dans le domaine Ω . . . 147
4.3.3 Équation vérifiée par le terme d'erreur . . . 148

Conclusion globale **151**

Chapitre 1

Introduction - État de l'art

La viscoplasticité est présente dans un nombre incalculable de matériaux fluides, en particulier dans les matériaux géophysiques et industriels. Elle se caractérise par un comportement visqueux au dessus d'un certain seuil de contraintes et un comportement rigide en deçà de ce seuil. Les travaux présents dans cette thèse ont pour vocation d'une part de simuler numériquement des écoulements de matériaux viscoplastiques dans des géométries bi-dimensionnelles complexes. D'autre part, on souhaite dériver un modèle asymptotique d'écoulement en couche mince.

Ce chapitre a pour but de recenser au mieux les différents résultats présents dans la littérature dans les classes de problèmes sus-cités. Après avoir présenté une introduction phénoménologique des modèles étudiés, on va s'intéresser plus particulièrement aux outils mathématiques développés pour s'attaquer à de tels problèmes. La section 1.2 présente la formulation variationnelle du problème ainsi que quelques résultats d'existence et quelques autres applications (notamment sur la localisation des zones rigides). La section 1.3 présente deux grandes classes d'algorithmes pour attaquer numériquement la singularité présente dans l'équation consitutive de matériau à seuil. La section 4.2 quant à elle s'intéresse au problème particulier d'écoulement en couche mince.

1.1 Introduction phénoménologique

L'étude des milieux continus se scinde en deux parties indépendantes l'une de l'autre. D'une part, les lois de conservations universelles s'appliquent à tout type de matériau. D'autre part, la rhéologie tente de capturer les comportements propres à chaque type de matériau par le biais des lois constitutives. Ces lois constitutives décrivent des phénomènes macroscopiques. Elles partent du principe que tous les matériaux exhibent, en partie tout du moins, tout ou partie de ces phénomènes idéalisés.

1.1.1 Les lois de conservation

L'idée d'une certaine conservation de la masse est apparue très tôt dans l'Antiquité, tandis que la conservation du mouvement est apparue beaucoup plus tard (voir par exemple le premier chapitre de [121]), notamment avec la seconde loi de Newton. Cette seconde loi de Newton a été difficile à transposer de la mécanique du point à celle des fluides. Les concepts de pression, d'abord hydrostatique, (cf. Pascal) puis dynamique (cf. Bernoulli) permirent cette généralisation. Ces lois de conservation ont été présentées dans de nombreux livres de synthèse (par exemple [46, 75]). On se place dans toute la suite sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$.

— **Conservation de la masse :** Il faut attendre Euler pour avoir une formulation moderne de cette relation :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ sur } \Omega \tag{1.1}$$

avec ρ la densité du matériau et $\mathbf{u}$ le champ de vitesse. Dans toute la suite, on travaillera avec des fluides incompressibles où ρ est constante. La conservation de la masse se simplifie alors en :

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0. \tag{1.2}$$

— **Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\rho\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)) + \nabla p = \mathrm{div}\tau + f, \text{ sur } \Omega \tag{1.3}$$

avec p la pression, τ le déviateur du tenseur des contraintes qui s'exerce sur le fluide et f les forces volumiques extérieures. Par ailleurs, la conservation des moments nous donne que

$$\tau_{i,j} = \tau_{j,i}.$$

Remarque 1 *Le* tenseur total *des contraintes est le tenseur qui réunit la pression et τ :*

$$\sigma = -p\mathrm{Id} + \tau \text{ avec } p = -Tr(\sigma) \text{ et } \tau = \sigma - \frac{1}{d}Tr(\sigma)\mathrm{Id}$$

p représente la moyenne des contraintes qui sont des contraintes normales tandis que τ est appelé déviateur des contraintes.

— **Conservation de l'énergie :** redondante avec les deux premières dans le cas isotherme, cadre dans lequel nous allons travailler.

Remarque 2 *Dans tout le manuscrit, on se place dans le cas incompressible. Il est à noter que la pression joue un rôle bien différent dans ce cas par rapport au cas compressible où elle est juste une fonction de la densité. Dans le cadre incompressible, la pression est liée à* $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ *qui est ici vu comme une contrainte. Dans la formulation faible et les méthodes de dualité, la pression sera en fait vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. Cependant, il est possible de passer de la formulation compressible à celle incompressible par une limite à faible nombre de Mach [75]. La limite à faible nombre de Mach consiste à prendre les équations adimensionnées et à prendre une limite à petite vitesse et petit temps ($\tilde{t} = t/\varepsilon$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\varepsilon$ et $\varepsilon \to 0$). Dans ce cas, les solutions de Stokes et Navier-Stokes compressibles tendent vers leur pendant incompressible. Une justification de ce passage à la limite a été également montrée dans le cas Stokes notamment par Danchin [41] et dans le cas Navier-Stokes notamment par Feireisl et Novotný [48], pour ne citer que ces articles.*

Les équations de conservation du mouvement sous leur forme adimensionnée se réécrivent :

$$Re\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)) + \nabla p = \mathrm{div}(\tau) + f, \text{ sur } \Omega \tag{1.4}$$

où les contraintes et les forces extérieures ont été adimensionnées par les contraintes visqueuses $\frac{\eta U_0}{L}$ et où le nombre de Reynolds Re est le rapport $\frac{\rho U_0 L}{\eta}$ (le rapport des forces inertielles ρU_0^2 sur la contrainte visqueuse). Ici, ρ, η, U_0 et L représentent respectivement la densité, la viscosité, la vitesse caractéristique du fluide et la longueur caractéristique du domaine. À petites vitesses, les termes convectifs deviennent négligeables et le système (1.4) devient le système linéaire de Stokes (avec l'ajout de la contrainte d'incompressibilité) :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ sur } \Omega \\ \nabla p = \mathrm{div}(\tau) + f, \text{ sur } \Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

Ces équations ne sont pas suffisantes pour décrire totalement le mouvement d'un fluide. En effet, il y a d+1 équations (en dimension d) pour $d+1+\frac{d(d+1)}{2}$ inconnues. Il y a donc besoin de $\frac{d(d+1)}{2}$ équations supplémentaires pour fermer le système. Par ailleurs, si les lois de conservation suffisaient à rendre compte du mouvement d'un matériau quelconque, il serait alors impossible de rendre compte de la richesse des comportements et phénomènes des différents fluides et matériaux. Pour rendre compte de certains phénomènes, les équations manquantes vont faire le lien entre les contraintes et les autres composantes du fluide. Notamment, comme le tenseur des contraintes est symétrique, il ne va dépendre que du tenseur symétrique du gradient de vitesse. On pose $D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T}{2}$.

Remarque 3 *$D(\mathbf{u})$ est appelé le* taux de déformation *du fluide. Une raison à cela est donnée par la propriété suivante :*

Propriété 1 *Soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, C^2 telle que pour tout $x \in \Omega$, $\nabla f(x)$ est antisymétrique. Alors ∇f est une fonction constante.*

Preuve : *Soit $i, j, k \leqslant d$. Alors :*

$$\partial^2_{i,j} f_k = \partial^2_{j,i} f_k = -\partial^2_{j,k} f_i = -\partial^2_{k,j} f_i = \partial^2_{k,i} f_j = \partial^2_{i,k} f_j = -\partial^2_{i,j} f_k$$

Et donc, $\partial^2_{i,j} f = 0$ et f est une fonction affine. □

On appelle dans la suite $\mathcal{R}$ l'ensemble de ces mouvements (les mouvements dits rigides*) :*

$$\mathcal{R} = \{f : x \mapsto Ax + b, \text{ avec } A \in A_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^d\},$$

la partie Ax représente les mouvements de rotation rigide et b les mouvements de translation.

1.1.2 Les lois constitutives

Ces lois ont vocation à décrire des comportements observables macroscopiquement et dûs à la structure interne microscopique du fluide. Dès que les éléments d'un matériau sont soumis à une force extérieure, ils se déplacent et la force de contrainte interne évolue en fonction de ce déplacement. Étudier précisément l'évolution de chaque particule au cours du temps serait beaucoup trop long, surtout dans le cas de fluides complexes très inhomogènes composés de particules de différentes formes et tailles. De fait, une loi constitutive pour passer du discret au continu permet de rendre compte de cette spécificité microscopique tout en gardant un point de vue macroscopique (cf. le chapitre 1 de [39]).

Les fluides newtoniens

La première loi constitutive a été proposée historiquement par Newton dans son *"Principes mathématiques de la philosophie naturelle"*. L'hypothèse principale de sa neuvième section est ainsi traduite : "La résistance qui vient du défaut de lubricité des parties d'un fluide doit être, toutes choses égales, proportionnelle à la vitesse avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être séparées les unes des autres." Le "défaut de lubricité" étant justement ce que l'on entend aujourd'hui par viscosité et la "résistance" comme cette force surfacique provenant des contraintes. La viscosité est synonyme de friction interne, de résistance que le matériau oppose à son propre écoulement. Autrement dit, si l'on suppose que l'on se place dans un écoulement unidimensionnel, la relation constitutive serait de la forme :

$$\tau_{xy} = \eta \partial_y u.$$

La formulation tensorielle a été proposée par Stokes dans les années 1850 :

$$\tau = 2\eta D(\mathbf{u}),$$

où η est la viscosité du fluide, ici supposée constante. Dans ce cadre, on peut réinjecter la loi constitutive dans l'équation (1.3) et retomber sur l'équation traditionnelle de Navier-Stokes.

Généralisation : de nouvelles lois constitutives

Par la suite, de nombreuses couches de complexité ont été rajoutées pour rendre compte de certains phénomènes. Cependant, la formulation tensorielle d'une loi constitutive est généralement difficile à déduire d'un écoulement unidimensionnel. Elle doit respecter un certain principe d'invariance et plus précisément, la forme générale doit être indépendante du repère de référence (voir [95, 67, 6]). Le tenseur σ, étant symétrique, est donc diagonalisable et peut être représenté par ses trois valeurs propres $(\sigma_i)_{i\leqslant 3}$ dans $\mathbb{R}^3$, les σ_i étant appelées les *contraintes principales* et les vecteurs propres associées à ces valeurs propres étant les *directions principales* du tenseur. Cette condition d'invariance signifie qu'une loi constitutive doit dépendre de ces σ_i et ce, de manière symétrique. En particulier, dans la suite, pour un tenseur σ, on peut définir ses trois invariants principaux.

- Le premier invariant : $I_1 = \mathrm{tr}(\sigma)$ n'est autre que la pression hydrostatique dans le cas qui nous intéresse.
- Le second invariant : $I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$.
- Le troisième invariant : $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Les contraintes principales sont en fait les racines du polynôme $X^3 - I_1X^2 - I_2X - I_3$. Exprimé en termes des contraintes déviatoriques principales, le premier invariant est identiquement nul et son second invariant deviennent

$$J_2 = -(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1) = \frac{1}{2}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2),$$

qui n'est autre que la norme du tenseur des contraintes.

Les fluides quasi-newtoniens et rhéo-fluidifiants/épaississants La première généralisation a été celle des fluides *quasi-newtoniens*. Il y a encore en tout point une proportionnalité entre les directions et valeurs propres des deux tenseurs mais la viscosité n'est plus supposée constante. Les modèles les plus connus sont ceux où η suit une loi puissance :

$$\tau = 2\alpha^*|D(\mathbf{u})|^{r-1}D(\mathbf{u}),$$

avec $r > 0$. Dans le cas où $r < 1$, on parle de fluide *rhéo-fluidifiant* (comme des émulsions ou des suspensions) : plus le fluide se déforme, plus sa viscosité apparente diminue. Dans le cas où $r > 1$, on parle de fluide *rhéo-épaississant* (comme le sable humide) : la viscosité va croître au fur et à mesure que le cisaillement croît.

Viscoélasticité et thixotropie Jusqu'à présent, on n'a considéré que des situations où les équations constitutives sont indépendantes du temps. Cependant, il peut arriver également que l'épaississement ou la fluidification du fluide ne soit pas un effet instantané mais arrive progressivement avec un certain retard. Un matériau présente un comportement *thixotropique* si ce temps de réponse du matériau est non nul (voir par exemple [39]). Par ailleurs, la loi de Hooke traditionnelle qui donne la relation constitutive pour un solide peut être adaptée dans le cas de fluides. Elle mélange le caractère visqueux du matériau avec le fait que les particules

microscopiques forment un système élastique. Ces comportements peuvent s'observer macroscopiquement par un phénomène d'irréversibilité ou d'hystéresis au niveau de la viscosité. Les matériaux gardent en mémoire dans leur structure microscopique ce qu'ils ont vécu. Dans les matériaux que nous considérerons, on négligera ces effets.

1.1.3 Visco-plasticité et fluides à seuil

Phénoménologie

Un fluide est dit *à seuil* s'il ne se déforme que lorsque les contraintes qui s'exercent sur lui dépassent un seuil donné. Si à un endroit ces contraintes sont en dessous de cette limite, le matériau ne se déforme pas et se comporte comme un solide rigide. De nombreux exemples sont présents dans la nature, dans les laboratoires et les applications industrielles sont également nombreuses. En fait, une bonne partie des fluides que l'on rencontre au quotidien présentent cet aspect à seuil :

— Produits alimentaires et domestiques : pâtes (ketchup, dentifrice,...), gel à cheveu...
— Matériaux géophysiques : argiles, boues, neiges denses...
— Matières biologiques : Mucus, sang...
— Produits industriels : Huiles, pétrole, béton...

Ces matériaux présentent plusieurs caractéristiques phénoménologiques communes :

— ils ne se déforment qu'aux endroits où une contrainte suffisante s'exerce sur eux,
— ils se décomposent en une zone où ils se déforment (comme un fluide) et une zone où ils se déplacent de manière rigide (comme un solide)
— ils sont immobiles si aucune force majeure ne s'exerce sur eux.

Ce dernier point peut se voir par exemple dans l'expérience suivante : si on fait tomber un de ces matériaux sur un plan incliné, il va s'arrêter au bout d'un temps assez long.

Équation constitutive

L'équation constitutive qui nous intéresse a été d'abord dérivée de manière empirique par Eugène Bingham [20] et Théodore Schwedoff [117] pour des écoulements unidimensionnels.

$$\begin{aligned} \tau &= 2\eta\dot\gamma + \tau_y \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}, \text{ ssi } \dot\gamma \neq 0, \\ |\tau| &\leqslant \tau_y, \text{ ssi } \dot\gamma = 0, \end{aligned}$$

où $\dot\gamma$ est le cisaillement du matériau. À l'inverse, cette loi représente une viscosité infinie pour des petites contraintes (inférieures à la contrainte seuil), tandis qu'elle est finie au delà de ce seuil. Il faudra attendre Prager [68, 99, 100] et Il'iushin [71] pour proposer une généralisation de cette loi en une formulation tensorielle pour un écoulement multi-dimensionnel :

$$\begin{aligned} \tau = 2\eta D(\mathbf{u}) + \tau_y \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0, \\ |\tau| \leqslant \tau_y, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

où l'on utilise la convention suivante pour la norme d'un tenseur de dimension d ainsi que pour le produit scalaire qui en découle :

$$|T|^2 = \frac{1}{d}\sum_{i,j} T_{i,j}^2, \; T : T' = \frac{1}{d}\sum_{i,j} T_{i,j} T'_{i,j}$$

La version adimensionnée du modèle de Bingham est :

$$\begin{aligned} \tau = 2D(\mathbf{u}) + B\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0, \\ |\tau| \leqslant B, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $B = \frac{\tau_y R}{\eta U}$ est le nombre de Bingham (avec U et R respectivement la vitesse et la taille caractéristiques du système). Il s'agit du rapport entre τ_y la contrainte seuil et $\frac{\eta U}{R}$ la pression caractéristique du système.

Remarque 4 *On peut généraliser cette condition de seuil et l'exprimer en fonction (entre autres) du deuxième invariant du tenseur (voir par exemple [67, 6]). Géométriquement, ces relations peuvent se voir en représentant les contraintes comme des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *: à un tenseur* σ*, on associe le point* $S : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ *et à son déviateur, le point* $P : (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$*. Dans cet espace* $\mathbb{R}^3$*, on peut définir une "zone fluide" et une "zone rigide", la frontière entre les deux étant appelée* surface limite *(de plasticité). Cette surface limite est une ligne de niveau de la forme* $f(I_1, I_2, I_3) = 0$*, les zones* $f > 0$ *et* $f < 0$ *représentant respectivement les parties fluide et rigide. De par la relation* $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$*, on peut se restreindre à considérer la surface limite dans le plan* $Vect(1, 1, 1)$*. Dans la suite, on travaille avec le critère de von Mises :*

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - \tau_y$$

mais d'autres critères comme celui de Tresca ou de Mohr-Coulomb (qui dépendent du troisième invariant) nous donneraient un critère de seuil différent et seraient représentés différemment (voir figure 1.1). Après avoir défini le critère de seuil, il faut définir ce qui se passe dans la zone

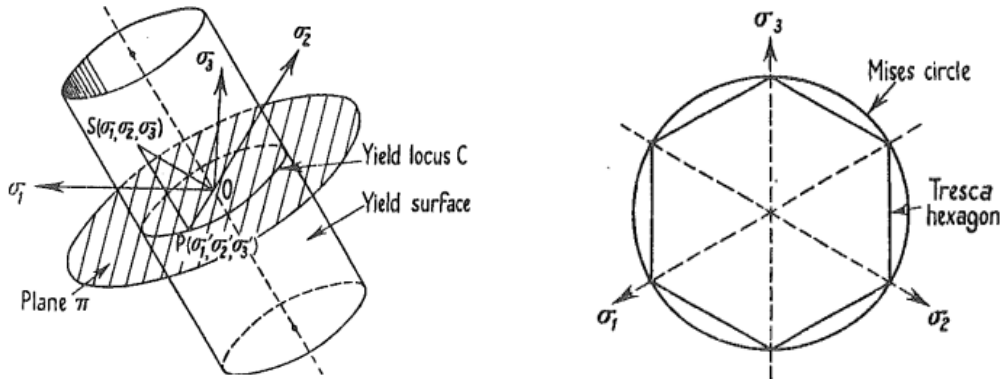


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique des contraintes principales (tiré des figures 1 et 3 de [67]). À droite, interprétation géométrique des conditions de Tresca et von Mises.

fluide (la loi constitutive proprement dite). Deux règles (principalement empiriques) régissent le comportement du fluide (voir [67]) :

- *le principe de coaxialité (i.e. la colinéarité des directions principales de taux de déformation* $D(\mathbf{u})$ *et du déviateur des contraintes),*
- *l'associate normal flow rule (i.e. la proportionnalité entre le taux de déformation et l'excès de contraintes au delà de* τ_y*).*

Ces deux règles amènent à la loi $D(\mathbf{u}) = \lambda(\sqrt{J_2} - \tau_y)\nabla f$ *(où* λ *est un réel) ce qui donne la loi*

$$D(\mathbf{u}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{(\sqrt{J_2} - \tau_y)}{J_2}\tau \text{ ssi } f > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} = \frac{\lambda}{2}\frac{(\sqrt{J_2} - \tau_y)_+}{J_2}\tau$$

pour von Mises, i.e. exactement la loi de Bingham lorsque λ est constante.

En pratique, très peu de fluides suivent la loi de Bingham, quand bien même ils présentent un effet seuil. La loi de Bingham peut être généralisée (voir par exemple [39]) en choisissant une viscosité dépendant de certains paramètres (la déformation, la pression...). En particulier, la loi de *Herschel-Bulkley* [21] propose une viscosité en loi puissance de la déformation :

$$\tau = 2K|D(\mathbf{u})|^{n-1}D(\mathbf{u}) + \tau_y \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0,$$
$$|\tau| \leqslant \tau_y, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) = 0.$$

On retrouve les caractères respectivement rhéo-fluidifiants et rhéo-épaississants suivant la valeur de n ainsi que le cas Bingham lorsque $n = 1$. Le modèle de Casson est un autre exemple de fluide à seuil moins répandu et plus utilisé pour modéliser des particules en suspension. On ne fera que l'évoquer :

$$\tau = \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\frac{\tau_y}{|D(\mathbf{u})|}}\right)^2 D(\mathbf{u}), \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0,$$
$$|\tau| \leqslant \tau_y, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) = 0.$$

Remarque 5 *De manière équivalente, on peut exprimer la déformation en fonction des contraintes en inversant la relation précédente, ce qui donne dans le cas de la loi de Bingham :*

$$2\eta(D(\mathbf{u}))D(\mathbf{u}) = \left(1 - \frac{\tau_y}{|\tau|}\right)\tau \tag{1.8}$$

Remarque 6 *Une autre manière d'écrire cette loi constitutive serait de dire que τ est dans le sous différentiel (voir chapitre 2 pour la définition) d'une fonctionnelle (cf. [46]) :*

$$\tau \in \partial W(D(\mathbf{u})), \text{ où } W(E) = \eta|E|^2 + \tau_y|E| \tag{1.9}$$

1.1.4 Détermination du seuil et controverse

L'un des problèmes principaux posés par ce genre de modèle est donc la forme de ces zones rigides ainsi qu'une manière de les déterminer, que ce soit expérimentalement, analytiquement ou numériquement. Pour ce faire, il faut déterminer expérimentalement le seuil τ_y ce qui est une tâche délicate encore maintenant (le lecteur intéressé pourra lire l'article de synthèse de Bonn et co-auteurs [23] sur ce sujet). Plus encore, un débat remontant à plusieurs décennies porte sur l'existence même de "vraies" régions rigides. Barnes et Walters [11] ont, avec un titre quelque peu provocateur, exprimé les premiers doutes sur cette existence, arguant que les zones rigides observées n'étaient en réalité que des zones où la déformation était petite, trop petite pour la précision des rhéomètres de l'époque. Cette controverse fut également alimentée par le paradoxe de lubrification que l'on définira section 1.4.3. La controverse a été forte les décennies suivantes ([62, 10, 116] pour ne citer que quelques contributions). Le but ici n'est pas d'entrer dans le débat mais juste de le citer pour son importance historique. Nous considérerons ici, que quand bien même il y a écoulement visqueux pour de petites contraintes, la viscosité est suffisamment élevée pour que le fluide soit considéré comme un fluide à seuil idéal (et donc qu'il est pertinent de considérer des modèles de Bingham et Herschel-Bulkley).

1.1.5 Résolutions explicites simples

L'écoulement de Poiseuille

L'écoulement le plus simple à résoudre est celui unidimensionnel de Poiseuille. On se place dans le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times [-R, R]$, on suppose que la vitesse est unidirectionnelle $\mathbf{u} = (u, 0)$ et on impose les conditions de non glissement de la vitesse aux murs : $\mathbf{u} = 0$ en $y = -R$ ou R. On cherche à résoudre (1.5) muni de la loi constitutive (1.7) Le caractère infini du domaine permet de supposer que :

$$\mathbf{u}(x, y) = (u(y), 0),\ \nabla p = (-DP, 0),\ 2D(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_y u \\ \partial_y u & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{pmatrix},\ |\tau| = |\tau_{xy}|$$

où DP est une constante. En réinjectant ces relations dans (1.5), il vient facilement que $\tau_{xy} = DPy$ ($\tau_{xy}|_{y=0} = 0$ par symétrie) et qu'il ne peut y avoir écoulement que si

$$|DP| > \frac{\tau_y}{R}, \tag{1.10}$$

c'est à dire uniquement si le forçage en pression est suffisamment élevé. En dessous de cette limite, il n'y a pas d'écoulement et $u = 0$. Au delà de cette limite, la vitesse est constante dans la zone $-y_p < y < y_p$ où $y_p = \frac{\tau_y}{|DP|}$. En dehors de cette zone, on déduit de la loi constitutive que la vitesse est une fonction quadratique. La condition de non-glissement au bord nous donne alors la solution du problème de Poiseuille :

$$u_{pois}(y) = \begin{cases} \dfrac{-|DP|}{2\eta}(R - y_p)^2 = u_p \text{ si } |y| < y_p \\ \qquad u_p + \dfrac{DP}{2\eta}(y_p - |y|)^2 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Ainsi, si DP est négatif, on impose une chute de pression qui va faire avancer le fluide et inversement, si DP est positif, le fluide s'écoule dans l'autre sens. Le régime de Poiseuille (qui pour un fluide newtonien consisterait en une simple parabole avec 0 aux deux murs latéraux) est ici tronqué dans toute une zone au milieu qui avance de manière rigide, comme présenté figure 1.2. L'un des enjeux (présenté section 4.2 et au chapitre 4) sera d'essayer de comprendre l'écoulement lorsque le domaine est proche de cette configuration.

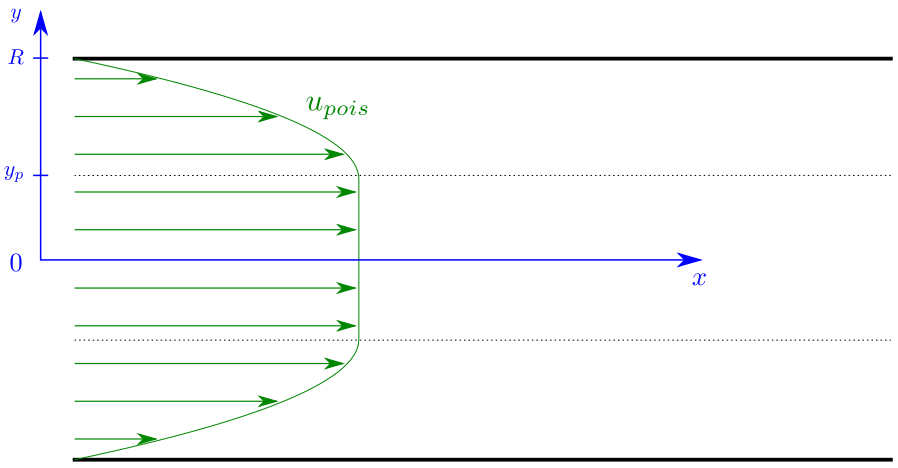


FIGURE 1.2 – Présentation schématique d'un écoulement dans le cas Poiseuille.

D'autres résolutions explicites

Le livre de Bird et co-auteurs [21] contient des solutions analytiques pour de nombreux écoulements différents comme la chute à surface libre sur plan infini, l'écoulement antiplan dans un tube cylindrique, ou des écoulements de type Couette simplifiés. Il est à noter également que [50] résout entièrement l'écoulement de Couette entre deux cylindres.

1.2 Formulation faible du problème - Applications

1.2.1 Formulations variationnelles

Historiquement pour le problème de Stokes-Bingham

Les premières formulations variationnelles pour ce genre de problème remontent aux premiers travaux de Prager et Il'iushin [71, 100] pour le problème de Stokes-Bingham suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0,\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma = -p\mathrm{Id} + \tau \text{ et } D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\tau_y}{|\tau|}\right)_+ \tau \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = S \text{ sur } \partial\Omega_S \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_V \text{ sur } \partial\Omega_V, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où l'on a partitionné $\partial\Omega = \partial\Omega_S \cup \partial\Omega_V$ avec une condition de type Dirichlet sur $\partial\Omega_V$ et Neumann sur $\partial\Omega_S$. En particulier, ils montrent les théorèmes suivants qui expriment le problème (1.12) en terme de problème d'optimisation de fonctionnelle :

> **Théorème 1** *Soit $(\mathbf{u}, \sigma)$ une solution continue de (1.12) admettant des dérivées partielles continues par morceaux.*
>
> *Supposons que $\partial\Omega_V \neq \emptyset$. Alors $\mathbf{u}$ minimise la fonctionnelle suivante :*
>
> $$I(\mathbf{v}) = \int_\Omega \left(\eta|D(\mathbf{v})|^2 + \tau_y|D(\mathbf{v})|\right) + \int_{\partial\Omega_S} S \cdot \mathbf{v} + \int_\Omega f \cdot \mathbf{v}$$
>
> 2. *Supposons que $\partial\Omega_V \neq \emptyset$. Alors τ maximise de la fonctionnelle suivante :*
>
> $$H(\theta) = -\frac{1}{4\eta}\int_\Omega \left(||\tau| - \tau_y| - |\tau| - \tau_y\right)^2 + \int_{\partial\Omega_S} S \cdot \mathbf{u}$$

Remarquons que, dans la formulation de maximisation, la première intégrande s'annule dès que $\tau_y > |\tau|$, c'est à dire exactement dans les zones plastiques. Ces formulations variationnelles sont à la base des méthodes de dualité, comme on le verra section 1.3.2 et plus en détail dans le chapitre 2.

Pour le problème de Navier-Stokes-Bingham

Dans cette partie, on déroule la dérivation de la formulation faible pour le problème complet de Bingham telle que présentée dans [46]. Posons

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \text{tel que } \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ et } u = u_V \text{ sur } \partial\Omega_V\}$$

et aussi H et V les adhérences de $\mathcal{V}$ dans respectivement $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Intéressons-nous au problème :

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)) = \operatorname{div}(\sigma) + f,\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma = -p\mathrm{Id} + \tau \text{ et } D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\tau_y}{|\tau|}\right)_+ \tau \\ \sigma\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_S \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_V \text{ sur } \partial\Omega_V \end{aligned} \tag{1.13}$$

Soit $\mathbf{v} \in H$ une fonction test. Multipliant par $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ l'équation de la conservation de quantité de mouvement et intégrant sur Ω, il vient que

$$\int_\Omega \rho\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right))\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \int_\Omega \tau : D(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \int_\Omega f\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}),$$

où le double point représente le produit scalaire entre tenseurs. Remplaçant τ par la loi constitutive de Bingham, il vient que la dernière intégrale vaut :

$$\int_\Omega \tau : D(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \int_\Omega 2\eta D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \int_\Omega \tau_y \frac{D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}-\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|},$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, il vient au final que pour toute fonction test $\mathbf{v}$ de H,

$$\rho(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}-\mathbf{u}(t)) + \rho b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \eta a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}-\mathbf{u}(t)) + \tau_y\left(j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t))\right) \geqslant (f, \mathbf{v}-\mathbf{u}(t))), \tag{1.14}$$

avec $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire usuel dans L^2 et

$$j(\mathbf{v}) = \int_\Omega |D(\mathbf{v})|,\ a(\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}) = \int_\Omega D(\mathbf{v}) : D(\tilde{\mathbf{v}}) \ \text{ et } \ b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega \mathbf{u}^T(\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Il est à noter que le sens inverse entre formulation faible et forte a été montré de manière formelle uniquement (lorsque $D(\mathbf{u}) \neq 0$ presque partout).

Formulation équivalente avec un opérateur de projection

On peut exprimer la formulation faible (1.14) un peu différemment. Suivant [43], la relation constitutive de Bingham peut en fait se réécrire :

$$\tau = 2\eta D(\mathbf{u}) + \tau_y \lambda$$

où λ est un tenseur (pas forcément unique) vérifiant

$$|\lambda| \leqslant 1,\ \lambda^T = \lambda,\ \lambda : D(\mathbf{u}) = D(\mathbf{u})$$

qui encode la dualité de comportement fluide-plastique : $|\lambda| = 1$ dans les zones fluides et uniquement dans celles-ci. Ce tenseur peut être en fait défini via un opérateur de projection. En effet, si

$$\Lambda = \{q \in L^2(\Omega)^{d\times d}_{sym},\ |q| \leqslant 1 p.p.\}$$

et si P_Λ est la projection orthogonale sur cet ensemble convexe, alors, on a la relation suivante pour tout $r > 0$:

$$\lambda = P_\Lambda(\lambda + r\tau_y D(\mathbf{u})) \tag{1.15}$$

La formulation variationnelle d'un problème de Stokes-Bingham est alors équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \mu D(\mathbf{u}) : (D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{u})) + \int_\Omega \lambda : D(\mathbf{v}) = 0, \\ \lambda \in \Lambda,\ \lambda : D(\mathbf{u}) = D(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.2.2 Existence - régularité

À notre connaissance, les premiers résultats généraux d'existence remontent probablement à Duvaut et Lions [46]. En particulier, ils montrent le théorème d'existence suivant :

Théorème 2 *En dimension quelconque, soit $f \in L^2(0,T,H')$. Il existe alors une fonction* $\mathbf{u}$ *vérifiant*

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T,H) \cap L^\infty(0,T,V),\ \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0,T,(H^{\frac{d}{2}})').$$

et vérifiant (1.14).
Par ailleurs en dimension 2, u est unique.

On cite ce résultat d'existence car le schéma de démonstration est intéressant et a donné naissance aux techniques analytiques de régularisation que l'on présentera ci-après. La stratégie de démonstration est la suivante :

- Approcher la fonctionnelle j par une fonctionnelle j_ε qui est différentiable. Par exemple, dans [46], $j_\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_\Omega |D(\mathbf{v})|^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$.
- Construire des solutions $\mathbf{u}_\varepsilon$ du problème approché (par exemple par des méthodes de type Galerkin). Attention, des difficultés techniques apparaissent en dimension $d \geqslant 3$ (il faut régulariser aussi la viscosité) !
- Montrer que $\mathbf{u}_\varepsilon$ et $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ restent dans des espaces bornés de respectivement $L^\infty(0,T,H)$ et $L^2(0,T,(H^{\frac{d}{2}})')$.
- On en déduit que $\mathbf{u}_\varepsilon$ et $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ convergent respectivement vers une fonction $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T,V)$ faiblement étoile et $L^2(0,T,H)$ faiblement et vers une fonction $\partial_t \mathbf{u}$ dans $L^2(0,T,H^{\frac{d}{2}})$ faiblement.
- On montre ensuite que $\mathbf{u}$ vérifie bien (1.14).

En outre, [46] montre aussi qu'en dimension 2, la solution est continue pour peu que les forces extérieures soient assez régulières et montre aussi un résultat d'existence analogue au précédent pour le problème stationnaire. Par ailleurs, en faisant tendre le seuil τ_y vers 0, on retrouve les propriétés d'existence locale de solutions aux équations de Navier-Stokes. Par la suite, de nombreux articles montrent différents résultats d'existence et de régularité, toujours en suivant peu ou prou cette méthode. Nous n'en citons ici que quelques-uns.

Il y a une vingtaine d'années, l'école russe, sous l'impulsion de Shelukhin et co-auteurs, donne plusieurs résultats d'existence et de régularité. Parmi les premiers, on compte [13, 118] qui montrent l'existence de solutions locales respectivement dans le cas 1D compressible et multidimensionnel périodique. Ils revisitent les fluides de Bingham, vus comme limites de fluides quasi-newtoniens, et raisonnent sur la vitesse et le tenseur des contraintes. Par ailleurs [118] propose également un théorème d'unicité. Basov [12] montre l'existence de zones rigides de mesure strictement positive en 1D compressible et donne une borne inférieure de la taille de ces zones. Par ailleurs, citons le livre de Fuchs et Seregin ([55], chapitre 3) qui se base sur la formulation (1.9) et montre des résultats de régularité pour le problème de Herschel-Bulkley stationnaire, notamment le fait que $\nabla \mathbf{u}$ est continue hölderienne dans la zone fluide. Plus récemment, Bulicek et co-auteurs ont tiré profit de la formulation implicite (1.8) et l'ont généralisée en termes d'appartenance à un graphe (cf. par exemple [27]) :

$$(\tau, D(\mathbf{u})) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow G(\tau, D(\mathbf{u})) = 0, \tag{1.17}$$

où $\mathcal{A}$ est un ψ graphe maximal monotone. Pour Herschel-Bulkley, par exemple, la fonction

$$G(\tau, D(\mathbf{u})) = 2K|D(\mathbf{u})|^{n-2}(\tau_y + (|\tau| - \tau_y)_+)D(\mathbf{u}) - (|\tau| - \tau_y)_+\tau$$

convient. Ils montrent ensuite un résultat d'existence locale au problème de Navier-Stokes généralisé avec la loi (1.17), où la déformation et les contraintes vivent dans un certain espace de Orlicz associé à ψ.

1.2.3 Localisation analytique des zones de plug

Dans le cas antiplan

Ces formulations faibles permirent très tôt de monter des résultats théoriques sur la forme de la zone plastique. Dans leurs articles de la fin des années 60, [84, 85, 86] Mosolov et Miasnikov s'intéressent à deux types d'écoulement : l'écoulement antiplan et l'écoulement de Poiseuille perturbé par un obstacle. Leurs articles élégants mêlent la formulation variationnelle avec des arguments plus géométriques. Dans le cas de l'écoulement antiplan, notons Ω la section du cylindre, la fonctionnelle à minimiser devient :

$$I(\mathbf{v}) = \int_\Omega \left(\frac{\eta}{2} |\nabla \mathbf{v}|^2 + \tau_y |\nabla \mathbf{v}| - f\mathbf{v} \right) \tag{1.18}$$

où f est une constante modélisant la poussée de pression. Notons $\mathbf{u}$ la solution du problème de minimisation (1.18), A_i les composantes connexes de la zone rigide non morte et B_i les composantes connexes de la zone morte. Leur premier article [84] s'intéresse à la condition de stoppage de l'écoulement :

Théorème 3 *Soit* $\mathbf{u}$ *une solution du problème* (1.18).

— $\mathbf{u}$ *est non nulle si et seulement si*

$$f \int_\Omega \mathbf{u} \geqslant \tau_y \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \Leftrightarrow \int_\Omega \mathbf{u} \geqslant \frac{\tau_y}{f} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}. \tag{1.19}$$

— *Il existe une constante* K *ne dépendant que de* Ω *telle que si* h *est une fonction nulle au bord, alors*

$$K \int_\Omega \nabla h \geqslant \int_\Omega h, \;\; K = \sup_{\omega \in \Omega} \frac{Mes(\omega)}{Per(\partial\omega)}.$$

ce sup étant atteint pour un certain ω_1.

— $\partial\omega_1 \backslash \partial\Omega$ *est constitué d'arcs de cercles concaves par rapport à* ω_1.

Les deux premiers points donnent en particulier une force minimale critique en deçà de laquelle le fluide est complètement stoppé : $f_c = \frac{\tau_y}{K}$. Par ailleurs, le troisième point donne des informations géométriques sur ω_1. Enfin, ils prouvent un premier résultat d'existence de zones plugs non stagnantes :

Théorème 4 *Si* Ω *est* $p-$*connexe, alors* $\mathbf{u}$ *atteint son maximum sur une zone contenant au moins un cercle de rayon* $\tau_y/8pf$. *Conséquemment, si* $f > f_c$, *alors, il existe une zone de plug non stagnante à l'intérieur de* Ω.

Un exemple bien connu est celui du cylindre à section carrée (par exemple de longueur a). Dans ce cas, ω_1 est composé de quatre quarts de cercle de rayon r (un à chaque coin du carré) et alors,

$$K = \sup_r \frac{a^2 - (4-\pi)r^2}{2\pi r + 4(a-2r)} = \frac{a}{2+\sqrt{\pi}}$$

ce qui donne une expression analytique pour la force critique à imposer dans le canal.

Par ailleurs, dans [85], d'autres informations concernant les zones rigides et mortes sont données :

Théorème 5 $\partial B_j \backslash \partial\Omega$ *est une courbe concave par rapport à* B_j *de rayon de courbure supérieur à* $\frac{\tau_y}{f}$. *À l'inverse,* ∂A_i *est une courbe convexe par rapport à* A_i *de rayon de courbure inférieur à* $\frac{\tau_y}{f}$. *Par ailleurs,* ∂B_j *est tangente à* $\partial\Omega$ *aux points d'intersection* $\partial\Omega \cap \partial B_j$ *qui sont réguliers.*

Dans ce papier enfin aparaît une première occurence de ce qui sera ensuite appelé la *self-selection*. Plus précisément, ils montrent le théorème suivant :

Théorème 6 *Supposons qu'un champ de vitesse soit solution du problème antiplan et présente une zone morte de la forme OAB (comme montré figure 1.3). Supposons qu'une ligne L découpe ce domaine OAB en deux zones (comme à gauche) en s'appuyant sur γ. Alors la solution de l'écoulement avec une section où OAB est remplacé par L est la même. Cela reste vrai si L prolonge "un peu" ce domaine (comme à droite).*

Ce théorème signifie que la zone morte ne joue aucun rôle dans l'écoulement et que la supprimer ou (dans une certaine mesure) en ajouter un peu plus ne changera pas le profil de vitesse. Cet aspect se retrouvera également quand on abordera le cas des écoulements 2D, notamment dans les expansions-contractions : à partir d'une certaine hauteur de marche de cavité, augmenter cette hauteur ne change pas la forme de la zone stagnante.

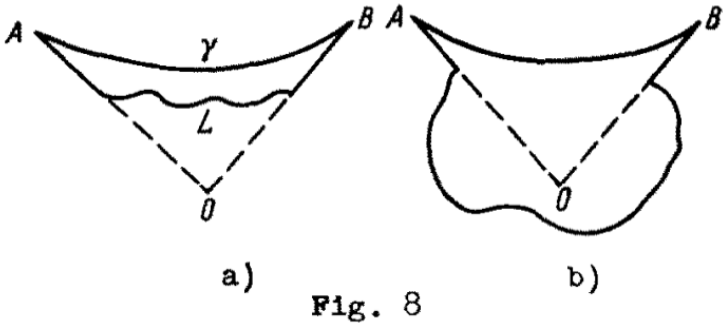


FIGURE 1.3 – Reproduction de la figure 8 de [85]

Problème de Cheeger

Au début des années 2000, Ionescu et coauteurs [66] revisitent le problème de blocage et généralisent la formule (1.19) :

Théorème 7 *Supposons que τ_y et f soient variables. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des mouvements rigides et :*

$$\tau_m = \sup_{\mathbf{v}\notin\mathcal{R}} \frac{\int_\Omega f\cdot\mathbf{v}}{\int_\Omega |D(\mathbf{v})|} \tag{1.20}$$

pris sur $\mathbf{v}\in BV(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbf{v}=0$ sur $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$. alors si $\tau_y \geqslant \tau_m$ presque partout, le fluide est stoppé, i.e. $\mathbf{u}=0$ est la seule solution possible.

Le problème (1.20) a été ensuite ré-exprimé en terme d'ensemble de Cheeger [34] dans [72]. Ce problème de Cheeger est fortement relié à un problème d'optimisation de forme, puisque (1.20) peut se réécrire

$$\sup_{X\in O(\Omega)} \frac{\int_X f}{\int_{\partial X} g} \text{ où } O(\Omega)=\{X\subset\Omega,\ Per(X)<\infty\} \tag{1.21}$$

où le X_0 pour lequel ce supremum est atteint est appelé *ensemble de Cheeger* de Ω. Dans [72], les auteurs présentent des résultats d'existence, tout comme Carlier et co-auteurs qui présentent le résultat d'unicité suivant [29] :

Théorème 8 *Il existe un unique ensemble de Cheeger maximal, i.e. un unique X_0 solution de (1.21) tel que pour tout X solution de (1.21), X est inclus dans X_0 à un ensemble négligeable près.*

La solution à ces problèmes a ensuite été approchée numériquement par exemple dans [30].

La litérature sur ces problèmes de type Cheeger est très fournie de par ses nombreuses applications, notamment en traitement d'image (voir par exemple [32]). Par ailleurs, beaucoup de propriétés de ces ensembles de Cheeger ont été étudiées récemment par exemple au niveau de l'unicité [31] ou de leur régularité [73]. Très récemment, ces méthodes et outils ont été utilisés pour l'étude du seuil critique pour un écoulement de fluide autour d'un solide [52].

Problèmes de couche limite

La notion de *couche limite viscoplastique* remonte à la fin des années 40 avec les calculs d'Oldroyd [94] et généralise celle de couche limite pour des fluides newtoniens isothermes introduite par Prandtl [101] (voir [115] pour une synthèse complète). Cette notion provient du fait que, dans un écoulement contre une paroi sans glissement, se trouve une zone de transition entre la paroi et la zone où un écoulement uniforme a lieu. On observe les effets de la viscosité dans cette petite couche lorsque les paramètres de l'écoulement (comme Re ou, dans le cas qui nous intéresse, B) sont élevés. Dans le cas de Bingham par exemple, le rôle de la couche limite peut être jouée par tout ou partie de la couche fluide à côté d'une énorme zone plug. Oldroyd regarde dans [94] le cas (entre autres) d'un écoulement de type extrusion et autour d'un objet solide avançant à vitesse uniforme (voir figure 1.4). À Re petit et pour des B élevés, les équations de conservation du mouvement se simplifient drastiquement pour aboutir à une relation simple entre la pression et les contraintes :

$$\partial_x p = -\partial_x \tau_{xx} \Leftrightarrow 2\partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} = 0.$$

Il montre que sous ces hypothèses, la pression, $\partial^2_{yy} u$ et le terme principal de $D(\mathbf{u})$ sont constants en y. Il en déduit l'existence d'une solution auto-similaire pour la vitesse de la forme :

$$u = VF\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \text{ où } \delta \text{ et } V \text{ sont représentés figure 1.5}$$

Il en déduit une loi de décroissance de δ :

$$\delta(x) = Cx^{2/3}B^{-1/3} \tag{1.22}$$

avec les conditions de bord du jet :

$$v = 0, \text{ et } \partial_y u = 0 \text{ si } \frac{y}{\delta(x)} = \pm 1/2, \; u = V \text{ si } \frac{y}{\delta(x)} = 1/2, \text{ et } u = 0 \text{ si } \frac{y}{\delta(x)} = -1/2 \tag{1.23}$$

ou dans le cas du couteau :

$$u = -V, \; v = 0 \text{ si } \frac{y}{\delta(x)} = 0, \text{ et } u = v = 0, \; \partial_y u = 0 \text{ si } \frac{y}{\delta(x)} = 1. \tag{1.24}$$

Cette notion a été revisitée dans d'autres configurations, par exemple chez Piau dans [98] qui étudie cette couche limite autour d'un obstacle axisymétrique. Piau oppose à (1.22) un scaling différent en $B^{-1/2}$ du fait d'un équilibre différent entre les contraintes et la pression ainsi que d'un traitement différent des conditions de bord en pression.

Remarque 7 *Il est à noter que ce scaling en $B^{-1/2}$ est également celui de l'écoulement de Poiseuille classique en canal infini (cf. Bird, Dai et Yarusso [21]).*

Beaucoup plus récemment, Balmforth et co-auteurs ont revisité ces problèmes de couche limite, tout d'abord dans le cas d'écoulements dans des cellules de Hele-Shaw avec obstacles [65], puis dans des conduits pour des fluides de Herschel-Bulkley [8], prenant ainsi la suite de mesures expérimentales effectuées par Chevalier et co-auteurs [36]. Ils retrouvent dans les deux types de géométries des profils auto-similaires de vitesse pour l'équation de la couche limite. Des scalings très proches de ceux d'Oldroyd sont retrouvés pour la largeur de cette couche limite :

— en $B^{-1/3}$ (scaling généralisé en $Hb^{1/(n+2)}$ pour Herschel-Bulkley) dans le cas de l'extrusion,
— en $B^{-1/2}$ dans le cas de la plaque infiniment mince.

Les deux scalings seraient donc valables chacun dans leur cadre. On retrouve dans [8] un mélange de ces deux scalings dans le cas de l'expansion-contraction. En effet, le scaling de Piau en $B^{-1/2}$ s'applique dans l'entrée (puisqu'on est Poiseuille) alors que celui d'Oldroyd en $B^{-1/3}$ s'applique dans la cavité. Le chapitre 3 (et en particulier les sections 3.2 et 3.3) va avoir pour but d'une

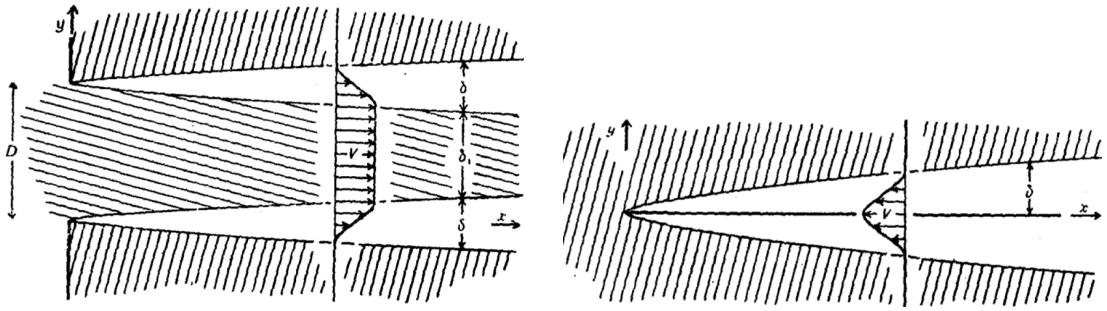


FIGURE 1.4 – Illustration de la couche limite viscoplastique chez Oldroyd dans [94]. À gauche : reproduction de la figure 3 de [94] : cas de l'extrusion. À droite : reproduction de la figure 2 de [94] : cas de l'obstacle mince infini

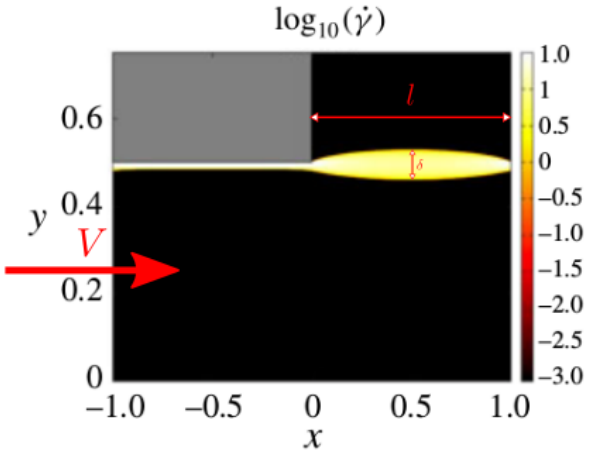


FIGURE 1.5 – Illustration de la couche limite viscoplastique. Adaptation de la figure 14 (a) de [8] dans le cas de la cavité.

part de vérifier ces scalings, puis d'étendre ces résultats au cas des B modérés (de l'ordre de l'unité).

Par ailleurs, la théorie de la ligne de glissement[1] (voir le chapitre 4 de [67]) permet de construire des formes de zones rigides. L'idée à la base de cette théorie est d'utiliser la méthode des caractéristiques pour trouver les lignes de niveau de $\tau = \tau_y$. Plus précisément, partant de :

$$(\tau_{xx}, \tau_{xy}) = \tau_y(-\sin(2\theta), \cos(2\theta)),$$

1. *Slipeline* en anglais. On parle de trajectoires des tensions tangentielles (appelées *lignes de glissement* pour faire court) car elles sont les trajectoires de contraintes principales. Le matériau s'y déforme par cisaillement le long de ces lignes.

et des équations de conservation du mouvement, on en déduit deux jeux de courbes caractéristiques perpendiculaires :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta,\ p + 2\tau_y\theta = cste$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{cotan}\theta,\ p - 2\tau_y\theta = cste.$$

([65] présente une stratégie analogue basée sur la transformée hodographique). La difficulté consiste ensuite à construire ces lignes, ce qui est délicat lorsque la pression n'est pas connue à l'avance. Cependant, [8] tire partie de l'approximation de couche limite pour construire les lignes de glissement (voir la figure 1.6) et construit les zones rigides à partir de ces lignes.

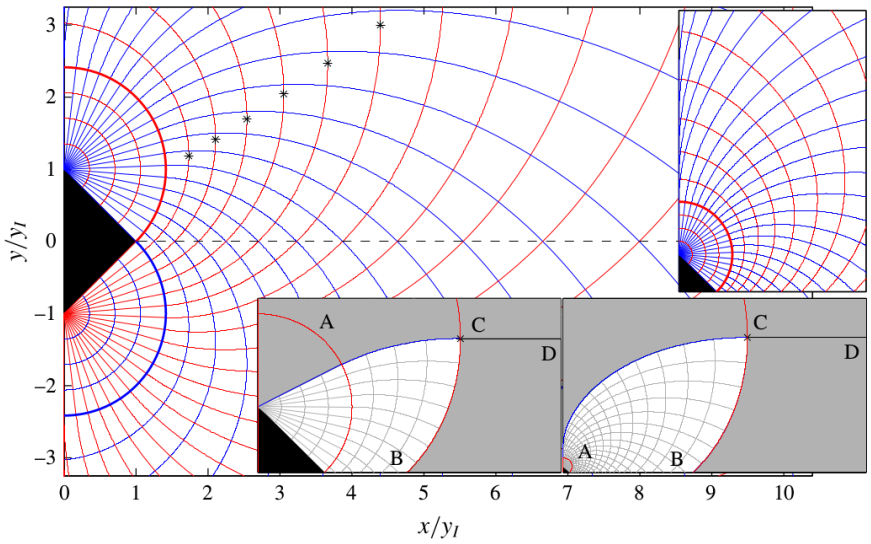


FIGURE 1.6 – Reproduction de la figure 7 de [8]. Différentes constructions de lignes de glissement. Encart : Construction de plugs (de frontière BCD) à partir de ces lignes de glissement.

1.3 Outils et algorithmes numériques

Le problème est dur à résoudre numériquement, que ce soit à cause de la non-différentiabilité de la fonctionnelle à minimiser ou dans la formulation initiale et les deux aspects rigide-fluide. Deux grandes classes de méthodes ont beaucoup été utilisées dans la littérature et reposent sur deux stratégies différentes. La première classe de méthodes va approcher le problème par un problème *régularisé* à l'aide d'un petit paramètre, en suivant l'idée des preuves d'existence. Ce problème régularisé possède les bonnes propriétés (notamment la relation un à un entre les contraintes et la déformation) et approche la solution du problème de Bingham. La seconde stratégie consiste à partir du problème de minimisation et à utiliser la formulation du type minimisation sous contrainte. On présente ici les deux, leurs avantages et inconvénients ainsi que quelques variantes ou méthodes nouvelles (comme l'algorithme de Newton de Saramito). Le lecteur intéressé pourra lire l'article de synthèse détaillé [44]. Le chapitre 2 explicitera plus en détail les différentes méthodes de dualité présentées section 1.3.2 ainsi que leur mise en place pour résoudre le problème de Stokes-Bingham. Ce sont ces méthodes qui seront utilisées pour obtenir les résultats présentés au chapitre 3.

1.3.1 Méthodes de régularisation

Les méthodes de régularisation ont été introduites dans les années 80 et traitent donc un problème approché au problème de Bingham. Cette régularisation vise à supprimer la singularité existante en $D(\mathbf{u}) = 0$. Dans cette méthode, on approche la loi constitutive par une loi de la forme

$$\tau_\varepsilon = 2\eta D(\mathbf{u}) + f_\varepsilon(D(\mathbf{u})), \text{ où } \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(D(\mathbf{u})) = \frac{\tau_y D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \text{ là où } D(\mathbf{u}) \neq 0.$$

Plusieurs exemples :

— **La régularisation de Bercovier et Engelman** (mais déjà présente chez Glowinski, Lions et Tremolieres [59]) :

$$f_\varepsilon(D(\mathbf{u})) = \frac{\tau_y D(\mathbf{u})}{\sqrt{|D(\mathbf{u})|^2 + \varepsilon^2}}.$$

— **La méthode de bi-viscosité** s'écrit [93] :

$$f_\varepsilon(D(\mathbf{u})) = \begin{cases} \dfrac{\tau_y D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \text{ ssi } |D(\mathbf{u})| > \varepsilon \\ \dfrac{\tau_y D(\mathbf{u})}{\varepsilon} \text{ sinon .} \end{cases}$$

— **Papanastasiou** propose [96] :

$$f_\varepsilon(D(\mathbf{u})) = \tau_y \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{D(\mathbf{u})}{\varepsilon}}}{|D(\mathbf{u})|}.$$

Dans tous les cas, l'idée est d'approcher le caractère "viscosité infinie" des régions plastiques par une loi constitutive avec une viscosité forte mais finie (voir figure 1.7). Il a été vu dans la section 1.2.2 que la vitesse du problème régularisé convergeait en norme H^1 vers la vitesse du problème de Bingham. Par ailleurs, grâce à la disparition du la multi-valuation de τ aux zones où $D(\mathbf{u}) = 0$, il est possible de réinjecter τ_ε dans l'équation de conservation des moments (on s'est ramené à un écoulement d'un fluide quasi-newtonien). Il est donc possible d'utiliser des solvers pré-faits ou un algorithme de Newton pour résoudre le problème après discrétisation. De ce fait, la convergence de la méthode est rapide et nous assure un temps de calcul CPU peu élevé. Ainsi, si l'utilisateur est intéressé uniquement par les champs de vitesse, cette méthode est excellente.

Du fait de sa facilité à implémenter et de sa rapidité, cette méthode a été abondamment utilisée dans la littérature. Notamment, celle de Papanastasiou du fait de sa régularité au voisinage du point $D(\mathbf{u}) = 0$. Cette partie n'a pas vocation à être exhaustive, on ne cite ici que quelques applications. Les problèmes entièrement 2D de type intrusion ont été étudiés historiquement notamment par Papanastasiou [96], Mitsoulis et co-auteurs [1, 81] et Alexandrou et co-auteurs [2, 3] pour Bingham et Herschel-Bulkley. Par ailleurs, Mitsoulis et co-auteurs se sont intéressés à de nombreuses autres configurations comme la chute d'une sphère dans un tube [22], ou encore à travers un obstacle cylindrique [133]. Le lecteur intéressé pourra trouver une revue très détaillée des différentes applications des méthodes de régularisation dans [80] et [82].

Cependant, plusieurs points viennent assombrir le tableau. Tout d'abord, les zones plastiques sont dures à déterminer puisque, par définition, le problème régularisé n'admet pas de vraies zones rigides. Plusieurs définitions sont cependant possibles (la zone $\tau \leqslant \tau_y$, la zone $|D(\mathbf{u})| \leqslant \varepsilon$), mais ces définitions dépendent toutes de ε. Pire encore, comme montré par Frigaard et Nouar [53], si les vitesses convergent bien, ce n'est pas le cas des contraintes. En particulier, l'erreur commise sur la déformation est maximale aux endroits où les contraintes sont proches du seuil,

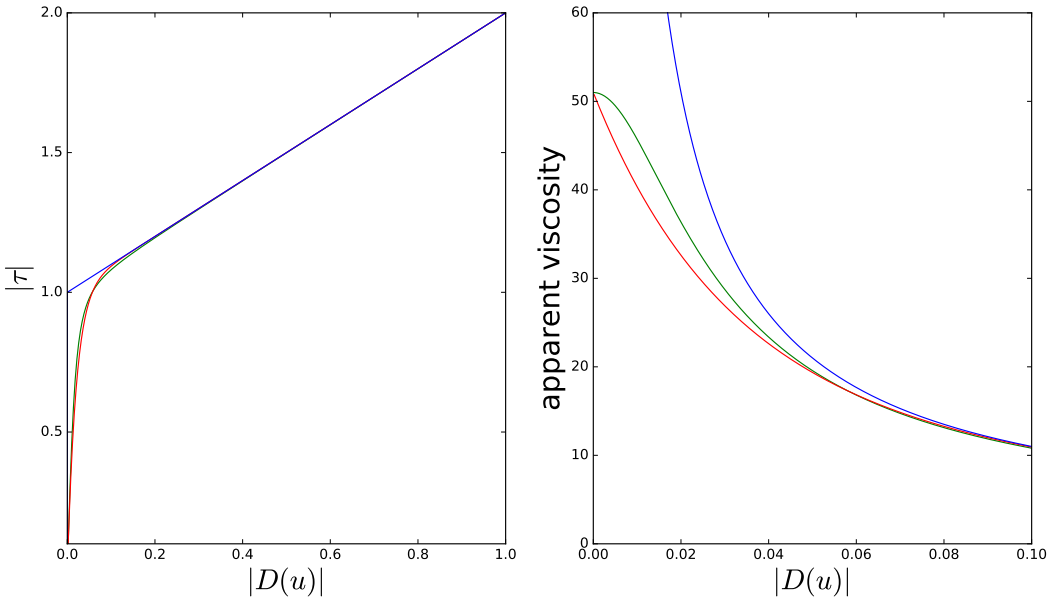


FIGURE 1.7 – Lois constitutives régularisées de Bercovier Engelman (en rouge) et de Papanastasiou (en vert) pour $\varepsilon = 0.02$. Évolution des contraintes (à gauche) et de la viscosité (à droite) en fonction de la déformation. En bleu : le vrai modèle de Bingham.

i.e. dans la région de l'interface liquide-solide. Ainsi, cette interface, (définie par exemple comme les lignes $\tau = \tau_y$) ne va pas converger dans certains cas vers l'interface limite (hormis dans le cas particulier où il n'y a pas d'écoulement du tout). Plus encore, Burgos et al. [28] montrent ce phénomène dans le cas d'un écoulement antiplan entre deux demi-espaces. Ils comparent les interfaces rigide-liquide données par le modèle de Herchel-Bulkley et celles données par les trois régularisations présentées ci-dessus et montrent qu'un mauvais choix de paramètres peut aboutir à une prédiction de la zone morte qui possède une concavité dans le mauvais sens. Par ailleurs, cette méthode requiert la résolution de plusieurs systèmes linéaires, dont le conditionnement dépend de ε. Baisser le paramètre de régularisation amène à résoudre des systèmes de plus en plus mal conditionnés, jusqu'à obtenir des résultats peu pertinents analytiquement. Au final, il est donc peu avantageux d'utiliser les méthodes de régularisation lorsque l'on s'intéresse aux champs de contraintes et lorsque l'on cherche finement la localisation de la zone rigide.

1.3.2 Méthodes de dualité

Les méthodes de dualité, elles, résolvent le problème complet de Bingham avec la singularité dûe à la zone plastique. Les plus connues et anciennes sont celles dites de *Lagrangien augmenté* (AL) que l'on présente brièvement ici (on y reviendra plus en détail au chapitre 2). Pour cela, on repart de la formulation faible présentée au théorème 1 pour résoudre Stokes-Bingham. Plus précisément, on souhaite minimiser une fonctionnelle du type suivant :

$$I(\mathbf{v}) = \int_\Omega \eta |D(\mathbf{v})|^2 + \int_\Omega \tau_y |D(\mathbf{v})| + R(\mathbf{v}).$$

où $R(\mathbf{v})$ est régulière et représente les termes ne dépendant pas de la rhéologie (les forces extérieures par exemple). Cette fonctionnelle est convexe mais non différentiable, l'absence de différentiabilité provenant justement de l'existence possible de zone rigides. Les méthodes d'optimisation de fonctionnelles régulières type descente de gradient ne fonctionnent donc pas ici.

L'idée est alors de "découpler" les parties différentiable et non-différentiable et de transformer ce problème en un problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{q=D(\mathbf{v})} \int_\Omega \eta |D(\mathbf{v})|^2 + \int_\Omega \tau_y |q| + R(\mathbf{v}),$$

ce problème étant équivalent à la recherche d'un point selle d'un certain Lagrangien que l'on augmente d'un paramètre $r > 0$:

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{u}, d, \lambda) = \eta \int_\Omega |D(\mathbf{u})|^2 + \tau_y \int_\Omega |d| + \int_\Omega \lambda : (D(\mathbf{v}) - d) + \frac{r}{2} \int_\Omega |D(\mathbf{v}) - d|^2 + R(\mathbf{v}), \quad (1.25)$$

λ jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $d = D(\mathbf{u})$. On peut alors appliquer des algorithmes à la Uzawa qui consistent à chaque itération à minimiser $\mathcal{L}_r$ à λ fixé, puis à mettre à jour le multiplicateur λ.

Cette méthode a été également utilisée dans de nombreuses configurations. En effet, même si elle est restée moins populaire que les méthodes à viscosité régularisée, elle a connu un regain d'intérêt depuis une quinzaine d'années, notamment grâce aux moyens de calculs plus développés garantisant un temps CPU qui reste raisonnable. Avec des maillages structurés, Vinay et co-auteurs utilisent un algorithme de type (ALG2) pour des écoulements instationnaires de pétrole dans des conduits : [127] traite le cas incompressible non isotherme et [128] traite le cas compressible. Toujours en maillage structuré, Muravleva et Olshanskii [87] proposent deux discrétisations différentes dont notamment celle en maillage décalé *Marker and Cells* (MAC) à la Harlow et Welsh (que l'on présentera au chapitre 2). Très récemment, Fernández-Nieto, Vigneaux et co-auteurs ont également utilisé ces méthodes avec succès pour simuler des écoulements à surface libre de type Shallow-Water en utilisant des algorithmes de type AL [24] ou Bermúdez-Moreno [49, 50] couplé à des schémas de type volume finis well-balanced (pour plus d'informations sur l'algorithme de Bermúdez-Moreno, voir [19]). En maillage non structuré, on retrouve aussi de l'intérêt pour cette méthode, notamment lorsqu'il y a besoin d'une localisation fine de la zone plastique. Huilgol et co-auteurs remontrent numériquement des résultats anaytiques pour des écoulements 2D de fluide de Bingham d'une part dans [69] et des écoulements antiplans de fluides de Herschel-Bulkley et Casson d'autre part dans [70]. Vola et co-auteurs produisent des benchmarks pour la cavité entraînée pour Navier-Stokes-Bingham instationnaire [130] et l'utilisent pour le dam break [129].

Par ailleurs, le développement de la librairie Rheolef [113] et de l'adaptation de maillage par Roquet et Saramito [106] a fortement contribué à démocratiser ces outils. Cette adaptation de maillage se base sur la Hessienne discrète du taux de déformation et raffine le maillage aux points où cette Hessienne est élevée. Cela a pour conséquence de produire des maillages fortement anisotropes et extrêmement raffinés aux endroits de la yield surface. Par exemple, Putz et co-auteurs [103] et Roustaei et co-auteurs [108, 110, 109, 107] utilisent cette librairie pour la simulation d'écoulements de type lubrification dans des tuyaux de largeur variable. Ils en déduisent des benchmarks pour la zoologie des plugs dans différentes configurations, ainsi qu'une étude détaillée sur les chutes de pression. Enfin, Putz et Frigaard [102] utilisent également des algorithmes AL associés au raffinement de maillage pour étudier un écoulement de fluide Bingham autour d'un obstacle.

Très peu de papiers comparent les deux types de méthode. Un des rares est [103] dans le cadre d'écoulements de type lubrification. Ils montrent en particulier dans ce cas que les paramètres de régularisations et de tolérance mal choisis pouvaient produire des zones de plug radicalement différentes les unes des autres. Une méthode de régularisation peut donc calculer la vraie solution mais à condition de choisir les paramètres avec soin.

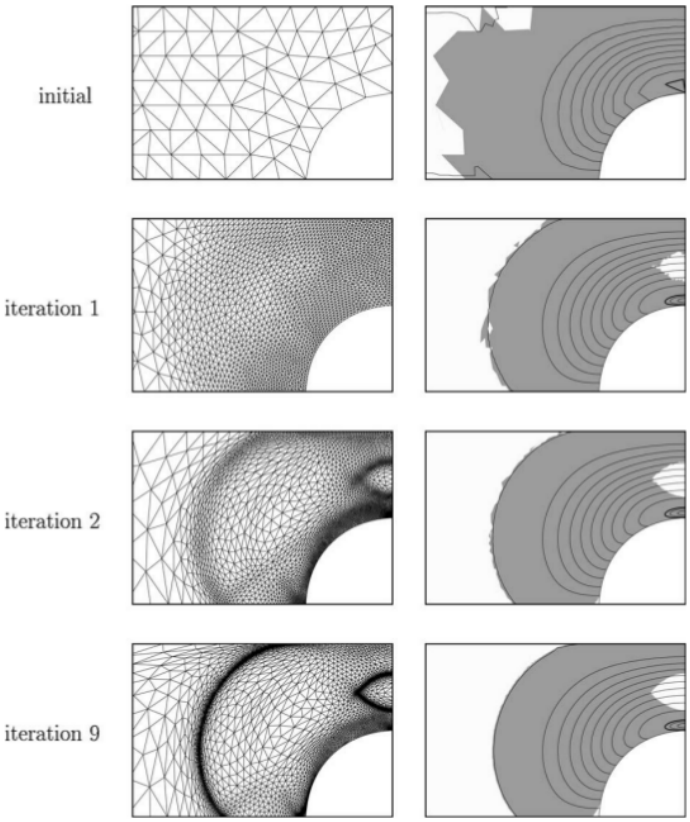


FIGURE 1.8 – Illustration du raffinement de maillage présenté par Roquet et Saramito dans le cas d'un écoulement 2D (tiré de la figure 9 de [106]). À droite : les lignes de courant, les zones fluides (en gris) et les zones rigides (en blanc).

1.3.3 Autres méthodes numériques

Méthodes de projection

L'idée est de partir de la formulation variationnelle (1.16). L'algorithme est très proche de celui du Lagrangien Augmenté et est décrit dans [43]. C'est encore un algorithme à la Uzawa, la seule différence notable étant l'étape de mise à jour du multiplicateur qui est ici un calcul de l'opérateur de projection P_Λ. Cette méthode a été utilisée pour de nombreux problèmes instationnaires, utilisant une discrétisation temporelle à plusieurs pas, l'un de ces pas étant la résolution d'une formulation variationnelle similaire à (1.16). [43] présente l'exemple de la cavité entraînée et [132] l'utilise pour la sédimentation de particules. Chupin et Dubois [37] utilisent une version un peu modifiée de cette méthode (appelée méthode de *double projection*) pour des problèmes non stationnaires dans laquelle les sous-problèmes de Stokes à chaque pas de temps sont exprimés en fonction d'un opérateur de projection implicite et résolus à l'aide d'une méthode de projection. Ils produisent un benchmark des zones plug pour la cavité entraînée ayant la particulartié de monter très haut en Reynolds.

Méthode de tracking du plug

Szabo et Hassager présentent une méthode originale dans [120] pour un écoulement antiplan entre deux cylindres excentrés. Ayant d'abord calculé les formes possibles du plug analytiquement, ils partent d'une première conjecture de la localisation exacte de ce plug. Ils résolvent

ensuite l'écoulement uniquement dans la zone supposée fluide et en déduisent subséquemment une nouvelle forme de plug. L'algorithme est ensuite répété jusqu'à convergence. Cette méthode originale possède les inconvénients majeurs de devoir connaître a priori la topologie des plugs de base et d'être difficilement généralisable à d'autres domaines et d'autres écoulements. Elle fait néanmoins partie des méthodes qui attaquent le problème complet de Stokes-Bingham sans passer pas la régularisation.

Un algorithme de Newton

Saramito présente enfin dans [114] une utilisation de la formulation implicite de la loi constitutive (1.8). Dans ce cas, $D(\mathbf{u})$ est une fonction φ continue de τ et même C^1 dans le cas Herschel-Bulkley où $n < 1$. Ayant exprimé le problème de Stokes en fonction de cette fonction régulière, il résout ce problème en utilisant un algorithme de Newton amorti (pour être global et avoir une convergence ne dépendant pas de la prédiction initiale), généralisé avec des sous-différentiels (car φ n'est pas différentiable dans le cas Bingham). Il est à noter que comme la Jacobienne de la fonctionnelle à résoudre n'est pas forcément inversible, les systèmes linéaires à résoudre sont préconditionnés. Le préconditionnement est basé sur le problème régularisé (via Bercovier-Engelman). Cette méthode, testée sur le cas de l'écoulement antiplan donne des résultats extrêmement rapides comparés à la méthode de Lagrangien Augmenté.

1.4 Analyse Asymptotique - Équation de Reynolds

Le cas d'écoulement de Poiseuille unidimensionnel vu en section 1.1.5 est l'un des plus simples à résoudre. Dans ce type d'écoulement, le gradient de pression est fixé et joue le rôle de force externe (on parle d'écoulement forcé par la pression) et c'est l'unique paramètre qui régit le mouvement. L'une des questions qui découle de cette observation est "à quel point ce constat reste-t-il vrai lorsque l'écoulement est presque Poiseuille ? Que vérifie ce gradient de pression ?". Plus précisément, comment évolue le gradient de pression dans des écoulements de type lubrification ? On va s'intéresser ici à une équation de type Navier-Stokes (potentiellement sans le terme inertiel) incompressible adimensionnée :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \text{ sur } \Omega, \\ Re\partial_t(\mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) + \nabla p &= \tau \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

où Ω est de la forme $\Omega = \{(x, z),\ x \in S,\ z \in [h_-(x), h_+(x)]\}$, où S représente un objet unidimensionnel (la plupart du temps un segment ou un cercle). Et on suppose que h_- et h_+ sont petits devant la longueur de S que l'on notera L. Plus précisément, notant $\bar{h}$ la hauteur caractéristique du conduit, on suppose que $\varepsilon = \frac{\bar{h}}{L}$ est petit et on effectue un développement de la vitesse et de la pression lorsque $\varepsilon \to 0$. Très généralement, de tels développements de la vitesse seront possibles, à ceci près qu'il faudra rajouter une équation sur la pression pour fermer le système. Cette équation sur la pression est appelée *équation de Reynolds*.

1.4.1 Fluides newtoniens

Les premières traces d'une telle dérivation remontent à Reynolds à la fin du XIXème siècle [104] qui dériva cette équation de manière heuristique. Il y propose un modèle pour le terme principal du gradient de pression, modèle connu sous le nom d'*équation de Reynolds*. Cette équation, reliant le gradient de pression à la géométrie et à la vitesse (pour un écoulement unidimensionnel) provient de la constance du flux pour un écoulement de lubrification sans

glissement :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6\eta q}{h^3}, \text{ soit } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h^3\right) = 0 \tag{1.26}$$

avec h la hauteur et q le demi-flux.

Bayada et Chambat [14, 15] justifient le modèle de Reynolds pour le système de Stokes entre deux plaques séparées de ε. Plus précisément, ils étudient la convergence de $(u^\varepsilon,p^\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0 dans le cas où la hauteur du conduit est régulière, puis irrégulière. Dans le même temps, Nazarov montre une convergence de la solution de lubrification pour Navier-Stokes [89]. Par ailleurs, les conditions aux limites forment aussi un sujet de discussion. Notamment, Bayada et Chambat [16] introduisent des conditions de pression en entrée/sortie, tout comme Conca et co-auteurs [38]. En outre, l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds joue un rôle important ici, cet ordre de grandeur étant généralement pris en $O(1/\varepsilon)$. Évidemment, la littérature regorge de résultats sur des écoulements en couche mince. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de synthèse de Bayada et Vázquez [17].

Nazarov et Videman [90], eux, poussent un ordre plus loin le développement pour le système de Navier-Stokes. Ils trouvent une équation de Reynolds modifiée (i.e. combinant les deux premiers termes de pression) et justifient l'erreur de consistance comme décrit ci-après.

1.4.2 Justification mathématique de l'erreur de consistance

Dans [90], les auteurs se concentrent sur un écoulement 2D d'un fluide newtonien dans un domaine annulaire mince (de largeur ε) avec des irrégularités présentant une courbure k. Ils trouvent une équation de Reynolds à la précision ε^2 :

$$\partial_s\left((1+\varepsilon S)H^3\partial_s\mathfrak{p}\right) + \frac{\varepsilon Re}{560}\left(H^6H'(\partial_s\mathfrak{p})^2\right) = F,$$

où s est la coordonnée curviligne paramétrisant l'anneau central, S dépend des conditions de bord et de la courbure de la frontière et F représente les forces extérieures. Si l'on suppose que ces termes supplémentaires sont nuls, il vient que :

$$\partial_s\left(H^3\partial_s\mathfrak{p}\right) + \frac{\varepsilon Re}{560}\left(H^6H'(\partial_s\mathfrak{p})^2\right) = 0,$$

où $\mathfrak{p}$ regroupe les deux premiers termes principaux de la pression. Par ailleurs, ils dérivent une justification de l'erreur de consistance énoncée comme suit :

Théorème 9 *Notant $\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p}$ l'erreur commise sur la vitesse et la pression et notant $|||\mathbf{v}||| = (\varepsilon^{-2}\|\mathbf{v}\|_{L^2} + \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2})$, alors le problème vérifié par les termes d'erreurs admet une solution $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p})$ et cette solution vérifie l'estimation suivante :*

$$|||\tilde{\mathbf{u}}||| + \varepsilon\|\tilde{p}\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^{3/2}$$

1.4.3 Fluides à seuil

En parallèle, une littérature tout aussi importante s'est penchée sur le cas des écoulements en faible épaisseur pour des fluides à seuil, i.e. suivant la loi constitutive :

$$\tau = 2D(\mathbf{u}) + B\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}$$

Le paradoxe de lubrification

Les premières approximations de type lubrification pour Bingham remontent aux années 80 avec Dai et Bird [40] dans le cas de la compression et surtout avec Lipscomb et Denn pour des géométries bidimensionnelles [76]. Lipscomb et Denn mettent en évidence ce qui sera dénommé dans la suite comme le *paradoxe de lubrification*. Leur thèse est que dans le cas de géométries confinées plus compliquées que le simple écoulement de Poiseuille, l'existence d'un plug central est impossible (voir aussi [97]). En effet, la vitesse donnée sur une tranche verticale est très proche d'une vitesse Poiseuille. Son terme principal étant un écoulement de Poiseuille, il contient donc une vitesse de plug qui dépend de la hauteur de la cavité, et qui n'est donc plus une vraie vitesse de plug. Il y a donc déformation partout, quand bien même le tenseur des contraintes est plus petit que le seuil (par exemple, dans le cas où Ω est symétrique, ces contraintes s'annulent sur l'axe de symétrie). Leur exemple, le cas de plans s'écartant d'un petit angle, présente des vitesses de plug dépendant de la hauteur et donc de la coordonnée horizontale. Ce paradoxe commença à être levé une petite décennie plus tard par Walton et Bittleston [131] et Szabo et Hassager [120] dans le cadre de l'écoulement dans un anneau. [131] distingue deux zones : une zone fluide et une zone dite de *pseudo-plug* qui correspond à la zone où le terme principal des contraintes est plus petit que le seuil. Dans ces zones de pseudo-plugs, ils poussent plus loin le développement asymptotique de la vitesse et retrouvent une zone de "vrai" plug. Par ailleurs, [120] montre également, analytiquement et numériquement (par la technique décrite section 1.3.3) l'existence d'une vraie zone rigide dans la même configuration. Un peu plus tard, Balmforth et Craster [7] identifient la cause du paradoxe comme étant (dans ce cas) la nature des termes diagonaux des contraintes. Ces termes, considérés comme négligeables dans l'approximation de lubrification, ne le sont plus dans la zone pseudo-plug ! Enfin, dans le cas d'écoulement confiné, Frigaard et Ryan [54] montrent l'existence d'une zone de plug au milieu du confinement et étudient des conditions d'existence d'un plug continu et de rupture. Ces résultats ont été retrouvés numériquement par Roustaei et co-auteurs [108, 107].

Des modèles d'ordre supérieur

Dans le cas surface libre, Balmforth et Craster poussent plus loin le développement asymptotique dans [7]. Dans le même temps, une dérivation de la vitesse à l'ordre 2 a été proposée par Ruyer-Quil et Manneville [111, 112], modèle qui a été amélioré pour Bingham d'abord par Balmforth et Liu [9] (dans la zone fluide uniquement) puis par Fernández-Nieto et co-auteurs [51] avec l'ajout d'une petite couche de taille $\varepsilon^{2/3}$ faisant la jonction entre le pseudo-plug et la zone fluide. En sus, [51] proposent la dérivation d'un modèle Shallow-Water découlant de ce développement. Il est à noter que si dans le cas newtonien,Bresch et Noble [25] justifient le modèle Shallow-Water proposée par Vila, à notre connaissance, aucune justification de ce type n'existe pour le cas viscoplastique. Beaucoup plus récemment, Fusi et coauteurs [56] ont ré-étudié les écoulements en milieu confiné et redérivent l'équation de Reyolds à l'ordre principal (que l'on remontrera chapitre 4) et la comparent à des simulations numériques. Le but du chapitre 4 sera de reprendre les calculs de [56] et de monter en ordre (dans le cas de Navier-Stokes).

Chapitre 2

Algorithmes de dualité pour les fluides à seuil

Dans ce chapitre, on présente plus en détail les algorithmes utilisés dans la suite pour simuler des écoulements de fluides à seuil. Ces algorithmes seront ensuite utilisés pour des écoulements confinés dans une géométrie de type expansion-contraction. Plus précisément, on décrit différentes méthodes de dualité, et notamment de type Lagrangien Augmenté. Pour ce faire, la section 2.1 rappelle tout d'abord des notions d'analyse convexe qui serviront dans la suite avant de présenter les différents algorithmes d'optimisation utilisés dans la littérature. La section 2.2 présente l'algorithme dans le cas particulier du problème de Stokes-Bingham. À la fin de cette section, on passe en revue les développements les plus récents de ces algorithmes. La section 2.3 présente le détail de la discrétisation spatiale. La section 2.4 présente les premiers résultats de convergence de l'algorithme et reprend la section 2 de [79] Finalement on montre dans la section 2.5 comment étendre ces algorithmes pour l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley. La généralisation doit se faire de manière efficace en terme de calcul CPU puisque la résolution d'un problème non-linéaire en chaque point vient se rajouter à l'algorithme général.

2.1 Outils

2.1.1 Rappels d'analyse convexe

Optimisation dans un espace réflexif

Dans toute cette partie, on notera $(U, \|\cdot\|_U)$ un espace normé réflexif et $f : U \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe sur cet espace.

Définition 1 *On dit que f est* propre *si et seulement si $f^{-1}(\mathbb{R})$ est non vide et on définit le* domaine *de f comme $dom(f) = f^{-1}(\mathbb{R})$.*

Une fonction convexe propre n'a pas forcément de minimum. Pour cela, il faut rajouter des hypothèses supplémentaires.

Définition 2 *On dit que f est* coercive *si et seulement si*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} f(u) = +\infty$$

Définition 3 *On dit que f est* semi-continue inférieurement *si et seulement si*

$$\forall (u_k)_k \in U^{\mathbb{N}}, \quad \left[\lim_{k\to+\infty} u_k = u \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(u_k) \leqslant f(u)\right]$$

Le théorème suivant nous assure l'existence d'un minimum :

Théorème 10 *Si f est propre semi-continue inférieurement et coercive, alors il existe un $\bar{u}$ tel que*

$$f(\bar{u}) = \inf_{u \in U} f(u).$$

Qui plus est, $\bar{u}$ est unique si f est uniformément convexe.

Preuve : La coercivité de f assure que $\inf_{u\in U} f(u)$ existe. Si l'on choisit une suite minimisante $(u_k)_k$, le théorème de Banach-Alaoglu et la réflexivité de U nous assurent de l'existence d'une limite $\bar{u}$ à la suite $(u_k)_k$. La semi-continuité inférieure implique alors que $\bar{u}$ est solution du problème. Pour plus de détails, voir [47]. □

Cela va nous assurer que notre problème de minimisation admet une solution unique.

Différentiabilité et sous-différentiabilité

Le but de cette partie est de généraliser le théorème suivant

Théorème 11 *Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$, convexe, différentiable (au sens de Gâteaux) et coercive. Alors f admet un minimum et*

$$f(u_0) = \inf_{u \in U} f(u) \Leftrightarrow 0 = \nabla f(u_0).$$

On va suivre pour cela la section 23 de [105]. L'observation clé est que les hyperplans tangents au graphe de f sont toujours en dessous de son graphe et ne le traversent jamais. En particulier, si f est une fonction convexe différentiable en x_0, alors,

$$\forall z \in U,\ f(z) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), z \rangle.$$

On va donc devoir définir un objet généralisant le gradient de f.

Définition 4 *On dit que $x^* \in U^*$ est un* sous-gradient de f en x *si et seulement si*

$$\forall z \in U,\ f(z) \geqslant f(x) + \langle x^*, z \rangle.$$

On note $\partial f(x)$ l'ensemble des sous-gradients de f en x et on dit que f est sous-différentiable en x *si et seulement si $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Par ailleurs, on dispose de la propriété suivante nous assurant de l'existence d'un sous gradient (voir [105] théorème 23.4 ou [47] p. 22) :

Théorème 12 *Soit f une fonction convexe continue en un point $u \in U$, alors $\partial f(x) \neq \emptyset$ pour tout x dans l'intérieur du domaine de f.*

Quelques propriétés élémentaires :

Propriété 2 *$\partial f(x)$ est convexe.*

Propriété 3 *Si $t > 0$, $\partial(tf)(x) = t\partial f(x)$*

Propriété 4 *Si f et g sont continues, alors $\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$*

Par ailleurs, le théorème 11 (illustré figure 2.1) se généralise en

Théorème 13 *Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$, convexe, semi-continue inférieurement et coercive. Alors f admet un minimum et*

$$f(x_0) = \inf_{x \in U} f(x) \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0).$$

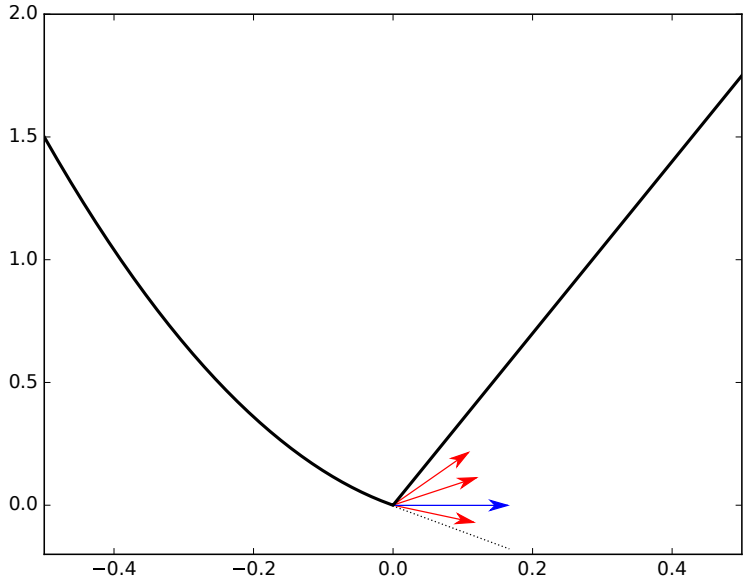


FIGURE 2.1 – Graphe d'une fonction convexe avec un point de non différentiabilité. En rouge : différents sous-gradients (compris entre la partie linéaire et la demi-droite en pointillé. En bleu : la représentation du sous gradient de pente 0.

2.1.2 L'algorithme Lagrangien Augmenté (AL) - généralités

Dans cette partie, on considère toujours U et V deux espaces de Banach réflexifs et $A : U \to V$ un opérateur linéaire continu. On s'intéresse dans cette partie au problème de minimisation suivant :

$$\arg\min_{x\in U}\{J(x) = f(Ax) + g(x)\}. \tag{2.1}$$

Problème primal et dual

Définition 5 *Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. On définit la* fonction conjuguée à f *définie sur U^* :*

$$f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\}.$$

En toute généralité, on dispose du résultat suivant :

Théorème 14 *Soient f et g deux fonctions convexes et f^* et g^* leurs conjuguées.*

$$\sup_{p^*\in V^*}\{-f^*(-p^*) - g^*(A^T p^*)\} \leqslant \inf_{x\in U}\{f(Ax) + g(x)\}.$$

ces valeurs pouvant prendre éventuellement respectivement les valeurs $-\infty$ et $+\infty$.

Le jeu est alors de comparer ces deux valeurs et les deux problèmes associés

Définition 6 *On se réfèrera à*

$$\inf_{x\in U}\{J(x) = f(Ax) + g(x)\} \tag{2.2}$$

comme le problème primal *et à*

$$\sup_{p^*\in V^*}\{-\tilde{J}(p^*) = -f^*(p^*) - g^*(-A^T p^*)\} \tag{2.3}$$

comme le problème dual. *Par ailleurs, on définit* l'écart primal-dual *comme la différence entre les deux problèmes :*

$$\inf_{x\in U}\{J(x)\} - \sup_{x^*\in U}\{-\tilde{J}(x^*)\}. \tag{2.4}$$

On définit alors le problème *perturbé* :

$$\min_{x\in U}\{\Phi(x,p) = f(Ax-p) + g(x)\}. \tag{2.5}$$

Ce problème porte bien son nom puisque pour $p = 0$, on retombe bien sur le problème primal initial. Par ailleurs, la fonction intervenant dans le problème perturbé est aussi en lien avec le problème dual :

Propriété 5 *Le problème dual est équivalent au problème*

$$\sup_{p^*\in V^*}\{-\Phi^*(0,p^*)\}. \tag{2.6}$$

Le théorème suivant nous dit qu'en fait dans le cas qui nous intéresse, cet écart primal-dual est nul.

Théorème 15 *Si* Φ *est une fonction semi-continue inférieurement, alors*

$$\sup_{p^*\in V^*}\{-f^*(-p^*) - g^*(A^Tp^*)\} = \inf_{x\in U}\{f(Ax)+g(x)\}$$

et par ailleurs ces valeurs sont finies.

Preuve : Voir [47] p.51. □

Si on définit maintenant le Lagrangien du système :

$$L(u,p^*) = -\sup_{p\in V}\{\langle p^*,p\rangle - \Phi(u,p)\}, \tag{2.7}$$

on va pouvoir réécrire ces deux problèmes en un unique problème de recherche de point-selle :

Propriété 6 *Dans les hypothèses du théorème 15, x est solution du problème primal et p^* solution du problème dual si et seulement si (x,p^*) est un point-selle du Lagrangien L, i.e. si et seulement si*

$$\forall (y,q^*)\in U\times V^*,\ L(x,q^*)\leqslant L(x,p^*)\leqslant L(y,p^*). \tag{2.8}$$

Or dans notre cas, ce Lagrangien est facile à calculer :

Propriété 7 $L(x,p^*) = -f^*(-p^*) + g(x) - \langle p^*, Ax\rangle$.

Algorithmes de type Uzawa pour résoudre (2.2)

Parmi les premiers algorithmes naturels d'optimisation convexe se trouve l'algorithme de descente, où à chaque pas, l'algorithme descend suivant le gradient de la fonction à optimiser. Plus spécifiquement ici, puisqu'on ne travaille pas avec des fonction différentiables mais uniquement sous-différentiables, il semble naturel de généraliser cet algorithme. Dans toute la suite, les fonctionnelles que l'on considèrera seront des fonctions continues sur des espaces de Hilbert et dont le domaine est un sous-espace de co-dimension finie. Ces fonctions seront donc toujours sous différentiables, et une généralisation de l'algorithme de descente de gradient est donc une descente suivant des sous-gradients. Cette méthode a été présentée et utilisée notamment par Shor [119] :

Algorithme de sous-gradient

— **Initialisation :** On initialise x^0 et on se donne une famille $(t^i)_i \in \mathbb{R}_+^*$ de pas de descente.
— **Boucle en i :** $i \geqslant 0$

1. Sous gradient : Trouver $g^{i+1} \in \partial J(x^i)$.
2. Descente suivant cette direction :

$$x^{i+1} = x^i - t^i \frac{g^i}{\|g^i\|}$$

Le problème de cette méthode est double. En effet, un mauvais choix de sous-gradient peut amener J à croître au lieu de décroître (et en pratique c'est souvent le cas). Par ailleurs, il est beaucoup plus dur de définir un critère d'arrêt, puisque d'une part le sous-différentiel entier n'est pas connu (typiquement, le sous différentiel au point de minimisation peut contenir des éléments non nuls). Un moyen d'améliorer cet aspect est donc d'utiliser le caractère singulier du problème primal-dual comme vu au théorème 15. Cet algorithme de point-selle a été présenté historiquement par Uzawa [125].

Le problème (2.2) que l'on cherche à résoudre est équivalent au problème

$$\inf_{x\in U, y\in V, y=Ax} f(y) + g(x) \tag{2.9}$$

lui même équivalent au problème suivant pour $r \geqslant 0$ quelconque :

$$\inf_{x\in U, y\in V, y=Ax} f(y)+g(x)+\frac{r}{2}\|y-Ax\|^2 = \inf_{x\in U, v\in V} f(y)+g(x)+\frac{r}{2}\|Ax-y\|^2+I_{\{0\}}(Ax-y) \tag{2.10}$$

où I représente la fonction indicatrice :

$$I_C(x) = 0 \text{ si } x \in C \text{ et } I_C(x) = +\infty \text{ sinon.}$$

Le calcul précédent nous dit alors que le Lagrangien et donc le problème primal-dual associé à (2.10) est

$$\sup_{\lambda\in V^*} \inf_{x\in U, y\in V, y=Ax} \mathcal{L}_r(x, y, \lambda) = f(y) + g(x) + \frac{r}{2}\|y - Ax\|^2 - \langle \lambda, y - Ax\rangle. \tag{2.11}$$

L'avantage d'un tel découplage est que f et g peuvent être minimisés séparément lors de la boucle d'Uzawa.

Algorithme de descente d'Uzawa classique pour la résolution de (2.11) à $r = 0$

— **Initialisation :** On initialise λ^0 et on on se donne une famille $(t^i)_i \in \mathbb{R}_+^*$.
— **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

1. Minimisation en (x, y) : Résoudre les problèmes découplés (puisque $r = 0$) :

$$\begin{aligned} x^i &= \arg\min_{x\in U}\{g(x) + \langle \lambda^{i-1}, Ax\rangle\} \\ y^i &= \arg\min_{y\in V}\{f(y) + \langle \lambda^{i-1}, y\rangle\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

2. Mise à jour du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + t(Ax^i - y^i) \tag{2.13}$$

Prendre $r = 0$ permet de découpler l'étape de minimisation en deux étapes indépendantes mais dans la suite, on voudrait travailler avec $r > 0$ pour "augmenter" le caractère convexe de la fonction et ainsi accélérer la vitesse de convergence. Le premier algorithme (généralisation du précédent pour $r > 0$) de Lagrangien augmenté est donc comme suit. Il a été proposé par Glowinski et co-auteurs (voir par exemple [60, 58]).

Algorithme (ALG1) pour la résolution de (2.11) à $r > 0$

— **Initialisation :** On initialise λ^0 et on se donne une famille $(t^i)_i \in \mathbb{R}_+^*$.

— **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

1. Minimisation en (x, y) :

$$(x^i, y^i) = \underset{x\in U, y\in V}{\arg\min}\{f(y) + g(x) + \langle \lambda^{i-1}, Ax - y\rangle + \frac{r}{2}\|Ax - y\|^2\} \tag{2.14}$$

2. Mise à jour du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + t^i(Ax^i - y^i) \tag{2.15}$$

Le problème de cet algorithme est qu'il recouple les deux problèmes de minimisation, ce dont on ne veut pas. On est donc tenté de transformer l'étape 1 en une minimisation en deux temps (d'abord en x, puis en y), quitte à ne pas résoudre exactement le même problème. On aboutit donc à un deuxième algorithme présenté dans [60].

Algorithme (ALG2) pour la résolution de (2.11) à $r > 0$

— **Initialisation :** On initialise λ^0, y^0 et on se donne une famille $(t^i)_i \in \mathbb{R}_+^*$.

— **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

1. Minimisation en x :

$$x^i = \underset{x\in U}{\arg\min}\{g(x) + \langle \lambda^{i-1}, Ax\rangle + \frac{r}{2}\|Ax - y^{i-1}\|^2\} \tag{2.16}$$

2. Minimisation en y :

$$y^i = \underset{y\in V}{\arg\min}\{f(y) - \langle \lambda^{i-1}, y\rangle + \frac{r}{2}\|Ax^i - y\|^2\} \tag{2.17}$$

3. Mise à jour du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + t^i(Ax^i - y^i) \tag{2.18}$$

Théorème 16 *Si*

— *on a existence de (x, y, λ) point selle de $\mathcal{L}_r$,*

— *$\mathcal{L}_r(\cdot, \cdot, \mu)$ est coercive convexe et propre pour tout μ,*

— *g est uniformément convexe,*

— *$\forall i \in \mathbb{N}$, $t^i = t \in]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}r[$,*

alors

$$(x^i, y^i) \to (x, y) \text{ dans } (U \times V) \text{et } \lambda^i \rightharpoonup \lambda^* \text{ dans } V^* \tag{2.19}$$

avec (x, y, λ^*), un point selle de $\mathcal{L}_r$.

Preuve : Voir par exemple [58] p.85. □

Les fonctions avec lesquelles on travailler dans la suite nous assure bien que l'on est dans le cadre des hypothèses du théorème (voir section 2.2.1).

2.2 Détails explicites de l'algorithme

On va dans cette section détailler la méthode utilisée pour résoudre le système de Stokes-Bingham suivant :

$$\begin{cases} -\nabla.\tau + \nabla p = 0 \\ \nabla.\mathbf{u} = 0, \end{cases} \text{ on } \Omega \tag{2.20}$$

avec la loi constitutive suivante (avec B le nombre de Bingham) :

$$\begin{cases} \tau = 2D(\mathbf{u}) + B\dfrac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \Leftrightarrow D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\tau| \leqslant B \Leftrightarrow D(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

ou dans la version avec grandeurs dimensionnées :

$$\begin{cases} \tau = 2\eta D(\mathbf{u}) + \tau_y\dfrac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \Leftrightarrow D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\tau| \leqslant \tau_y \Leftrightarrow D(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Une énorme majorité des simulations seront faites dans la géométrie de type expansion-contraction définie par la figure 2.2 (pour des raisons de simplicité, seule la moitié supérieure est montrée ici, mais on effectue bien le calcul dans le domaine complet). Les conditions de bord seront décrites dans la section 2.3. Ainsi, un écoulement dans ce type de géométrie sera caractérisé par le rapport B et les deux paramètres de la géométrie, l'un contrôlant la hauteur de la marche (h) et l'autre la longueur de la cavité (δ).

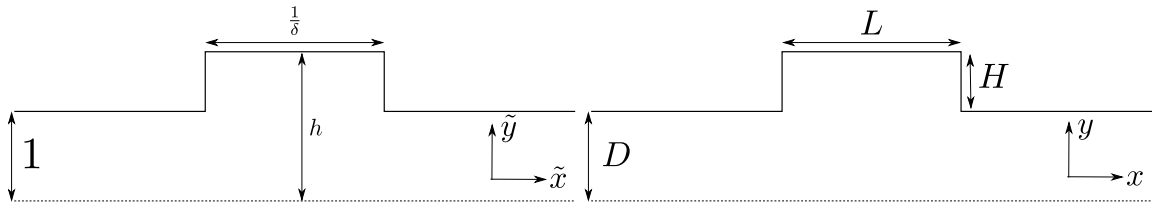


FIGURE 2.2 – Géométrie de l'expansion-contraction et paramètres de la géométrie sans et avec dimensions (resp. à gauche et à droite). Seule la moitié supérieure est représentée, du fait de la symétrie par rapport à l'axe des abcisses.

Après avoir décrit les différents ingrédients utilisés dans ce cas spécifique (l'algorithme AL, la discrétisation spatiale en différences finies), nous allons présenter les premiers résultats des simulations.

Remarque 8 *On testera aussi l'algorithme décrit ci-après sur l'écoulement unidimensionnel de Poiseuille.*

2.2.1 Algorithme AL proprement dit

Pour résoudre les systèmes (2.20),(2.21) et (2.20),(2.22), on utilise donc l'algorithme (ALG2). L'implémentation est donc très proche de celle de Wachs et co-auteurs ([128]) et de Muravleva ([87, 88]) du fait du maillage structuré en grille décalées. Ici, on travaille avec (dans les variables avec dimensions) :

— Les espaces $U = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \text{div}(\mathbf{v}) = 0\}$, $V = \{q \in L^2(\Omega)^{2\times 2}_{sym},\ Tr(q) = 0\}$ qui sont des espaces de Hilbert,

— L'opérateur linéaire $A : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \mathbf{u} & \longmapsto & D(\mathbf{u}) \end{array}$ qui est linéaire continu.

Deux choix s'offrent à nous pour les fonctions f et g :

1. $f : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \tau_y \int_\Omega |q| + \eta \int_\Omega |q|^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{v} & \longmapsto & 0 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \tau_y \int_\Omega |q| \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{v} & \longmapsto & \eta \int_\Omega |q|^2 \end{array}$

Ces deux choix donnent deux fonctions convexes coercives et propres. Dans chaque cas, au moins l'une est strictement convexe. Par ailleurs, le choix de l'une ou de l'autre ne change pas la résultat final et ne modifie qu'à la marge l'algorithme **(ALG2)**. Dans la suite on choisit (sauf mention du contraire) la deuxième version. Le théorème 16 s'applique donc bien en prenant par exemple comme pas de descente $t = r$. Le Lagrangien augmenté de ce problème est donc

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}, q, \alpha) = \eta \int_\Omega |D(\mathbf{v})|^2 + \tau_y \int_\Omega |q| + \int_\Omega \alpha : (D(\mathbf{v}) - q) + \frac{r}{2} \int_\Omega |D(\mathbf{v}) - q|^2. \tag{2.23}$$

Enfin, l'incompressibilité du champ de vitesse peut aussi se voir comme une contrainte. On peut donc adapter et augmenter le lagrangien avec cette nouvelle contrainte.

$$\mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v}, q, l, \alpha) = \eta \int_\Omega |D(\mathbf{v})|^2 + \tau_y \int_\Omega |q| + \int_\Omega \alpha : (D(\mathbf{v}) - q) + \int_\Omega l \mathrm{div}(\mathbf{v}) + \frac{r}{2} \int_\Omega |D(\mathbf{v}) - q|^2 + \frac{s}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}(\mathbf{v}))^2 \tag{2.24}$$

Remarque 9 *Pour l'autre choix de fonctions f et g, on aurait*

$$\mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v}, q, l, \alpha) = \eta \int_\Omega |q|^2 + \tau_y \int_\Omega |q| + \int_\Omega \alpha : (D(\mathbf{v}) - q) + \int_\Omega l \mathrm{div}(\mathbf{v}) + \frac{r}{2} \int_\Omega |D(\mathbf{v}) - q|^2 + \frac{s}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}(\mathbf{v}))^2 \tag{2.25}$$

On a donc ici deux paramètres d'augmentation r et s avec lesquels on peut jouer (ce qui complique d'autant l'étude des paramètres optimaux). L'étape 1 de **(ALG2)** est donc un système de Stokes qu'on décrira ci-après. L'étape 2 de **(ALG2)** se résout en minimisant point à point l'intégrande de :

$$\int_\Omega \left[|q| + \alpha : (D(\mathbf{v}) - q) + \frac{r}{2} |D(\mathbf{v}) - q|^2 \right],$$

(intégrande que l'on notera $H(q)$). Pour ceci, on utilise le théorème 13. On trouve que q_0 minimise H si et seulement si

$$q_0 = \left(1 - \frac{\tau_y}{|\alpha + rD(\mathbf{v})|}\right)_+ \frac{\alpha + rD(\mathbf{v})}{r}$$

On peut donc maintenant expliciter l'algorithme proprement dit (dans le cas (2.20)-(2.22)) (noté par **(A1)** dans la suite) :

Algorithme 1 – Résolution du problème complet (2.20)-(2.22) **:**

— **Initialisation :** On initialise p^0, d^0, λ^0 (à 0 ou à un champ quelconque)

— **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

1. Sous-problème de Stokes généralisé : résoudre $(\mathbf{u}^i, p^i)$:

$$\begin{aligned} -\nabla.((r + 2\eta) D(\mathbf{u}^i)) + \nabla p^i &= \nabla.(\lambda^{i-1} - r d^{i-1}) \\ \nabla.\mathbf{u}^i &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2. Résolution explicite point par point pour d :

$$d^i = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow |\lambda^{i-1} + rD(\mathbf{u}^i)| \leqslant \tau_y \\ \dfrac{\lambda^{i-1} + rD(\mathbf{u}^i)}{r}\left(1 - \dfrac{\tau_y}{|\lambda^{i-1} + rD(\mathbf{u}^i)|}\right) \Leftrightarrow |\lambda^{i-1} + rD(\mathbf{u}^i)| > \tau_y \end{cases} \tag{2.27}$$

3. Mise à jour du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + r(D(\mathbf{u}^i) - d^i) \tag{2.28}$$

— **Sortir de la boucle dès que :** $\|D(\mathbf{u}^i) - d^i\|_{L^2} \leq tol_B$ **ou** $i = N_{max,B}$.

En sortie de l'algorithme, on récupère donc une solution de (2.20)-(2.21).

Reste à résoudre (2.57). On veut résoudre un problème de Stokes avec comme condition $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ (on rappelle que la pression est le multiplicateur de Lagrange associé à cette condition). Un algorithme classique à la Uzawa peut-être ré-utilisé (voir par exemple [57] chapitres 20-22) Dans notre cas, on réutilise un algorithme de type **(ALG2)** (dénoté par **(A2)** dans la suite) :

Algorithme 2 – Résolution du système de Stokes (2.57) **:**

— **Initialisation :** Initialiser la pression $p^{i,0} = p^{i-1}$ (c'est une estimation naturelle pour la pression, qui va différer peu de l'itération $i-1$ à l'itération i)

— **Boucle en** k **:** $k \geqslant 1$

1. Résoudre le problème linéaire en $\mathbf{u}^{i,k}$:

$$-\nabla.((r+2\eta)D(\mathbf{u}^{i,k})) - s\nabla(\nabla.\mathbf{u}^{i,k}) = \nabla.(\lambda^{i-1} - rd^{i-1}) - \nabla p^{i,k-1} \tag{2.29}$$

2. Mise à jour de la pression (le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité) :

$$p^{i,k} = p^{i,k-1} - s\nabla.\mathbf{u}^{i,k} \tag{2.30}$$

— **Sortir de la boucle dès que :** $\|\nabla \cdot (\mathbf{u}^{i,k})\|_{L^2} \leq tol_S$ **ou** $k = N_{max,S}$

— Poser $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i,k}$ et $p^i = p^{i,k}$

Dans toutes les simulations présentées ci-dessous, on travaille avec $tol_S = 5.10^{-12}$, $tol_B = 6.10^{-12}$ $N_{max,B} = 40000$, $N_{max,S} = 1000$. Il est à noter que d'autres tests ont été faits avec des tolérances (tol_B, tol_S) plus exigentes (de l'ordre de 10^{-15}, i.e. la précision machine) mais ceux-ci voient leur temps CPU drastiquement élevé, pour un gain de précision minimes. En effet les phénomènes observés ne requièrent pas un niveau de précision de cet ordre et les tolérances tol_S, tol_B sont déjà très exigentes. Pour ce qui est du nombre maximal d'itérations $N_{max,B}$, il peut sembler très élevé. Il n'est cependant jamais atteint en pratique, excepté dans les cas extrémaux (domaines longs, B élevés). Pour $N_{max,S}$, il n'est jamais atteint. En pratique, le nombre d'itérations de la boucle de Stokes décroît très vite, jusqu'à atteindre très souvent 1 ou 2. Tout ceci sera détaillé en détail dans la section 2.4.2.

Remarque 10 *Dans l'algorithme* ***(A1)****, on doit initialiser λ et d. On choisit de les initialiser à 0. Plusieurs autres initialisations ont été faites (par exemple en prenant le résultat analytique de Poiseuille que l'on aurait en l'absence de cavité). Celles-ci ne changent pas la solution finale.*

Remarque 11 *Pour notre choix de paramètres (r, s), on décide de se baser sur une étude d'optimalité sur un cas particulier. On peut regarder deux critères d'optimalité de convergence ou de* complexité *de calcul comme défini au début de [92] :*

— *La complexité* analytique *qui sera ici le nombre de boucles faites dans* ***(A1)****.*

— *La complexité* arithmétique *: i.e. le nombre total d'opérations faites pour arriver à la convergence à tol_B près.*

Ici, on fait le choix de regarder une complexité entre deux. En effet, du fait de la structure de l'algorithme, le système linéaire associé à la discrétisation de l'équation de Stokes à inverser sera toujours le même ; seul le second membre changera au fil des itérations de ***(A1)*** *et de* ***(A2)****. Il suffit donc de décomposer la matrice du système de Stokes une fois pour toute avant de lancer la boucle* ***(A1)****. Le temps CPU sera utilisé en majorité pour inverser le système linéaire, le reste des opérations ne consistant qu'en des réallocations ou des opérations arithmétiques simples (additions, multiplications par des scalaires, comparaisons).*

Le cas particulier que l'on regarde est celui d'une cavité courte ($h = \delta = 2$) avec $B = 1$. La figure 2.3 montre le nombre de boucles AL nécessaires pour atteindre différents paliers de convergence d'une part et le nombre de systèmes linéaires résolus pour ces même paliers d'autre part pour différents choix de r et s. Lorsque r diminue, l'algorithme ***(A1)*** *amène les variables plus lentement vers la contrainte et le nombre de boucles AL est plus élevé. Lorsque r augmente au contraire, le nombre d'itérations dans* ***(A1)*** *diminue. Cependant, le problème (2.57) nécessite plus de résolutions de systèmes linéaires pour amener la divergence à 0. Il faut donc prendre des valeurs "intermédiaires". Dans ce cas particulier le nombre minimal de systèmes linéaires résolus est atteint pour $r = 200, s = 2000$. On choisit dans toute la suite ces paramètres. On peut évidemment se questionner sur la pertinence de cette "condition d'optimalité" et on reviendra dessus section 2.2.3*

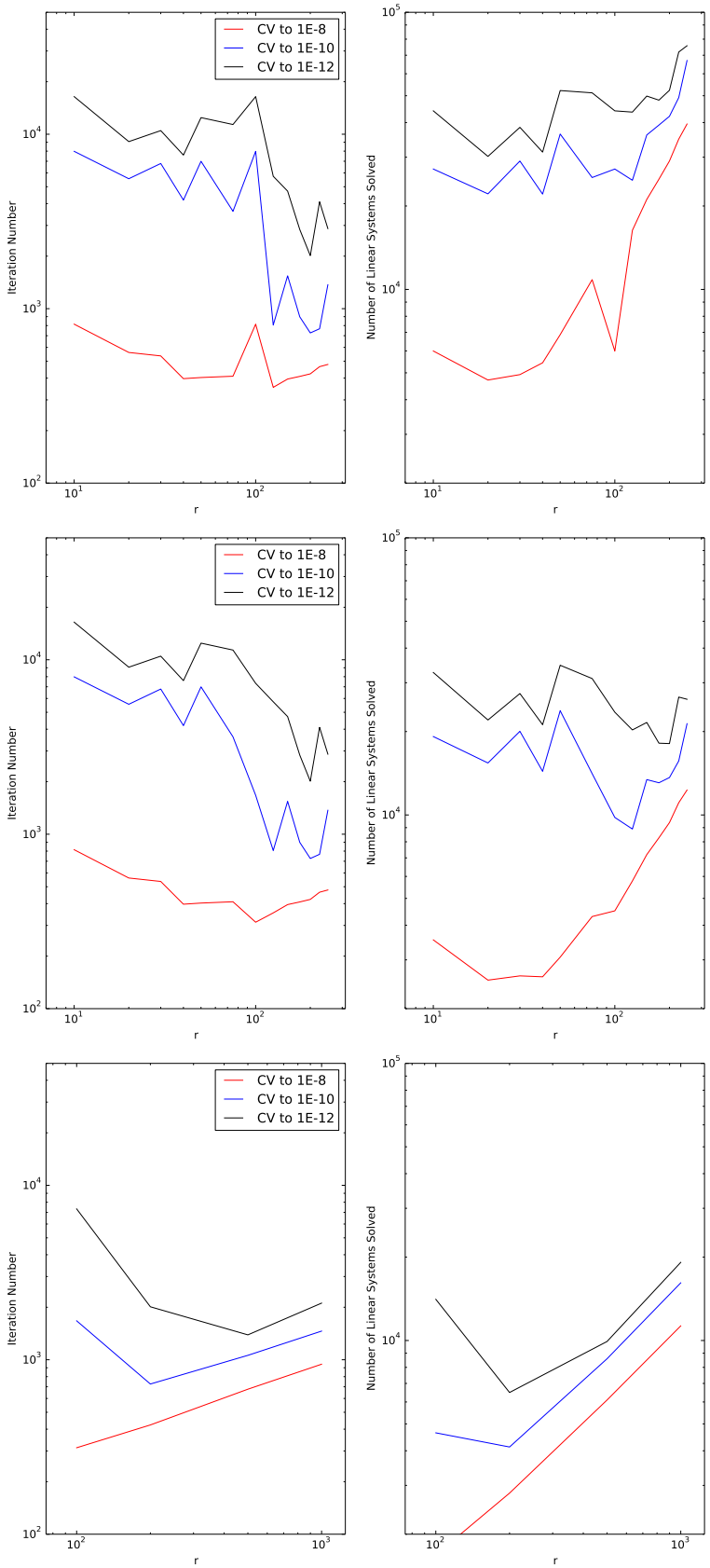


FIGURE 2.3 – À gauche : nombre de boucles AL nécessaires pour atteindre différents paliers de convergence. À droite : nombre de systèmes linéaires résolus pour ces même paliers pour différents choix de r. De haut en bas : $s = 500$, $s = 2000$, $s = 20000$.

2.2.2 Notes sur des améliorations de (ALG2)

L'algorithme **(A1)** peut être reformulé en terme d'opérateur proximal [83].

Définition 7 *Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. Son* opérateur proximal *est défini par*

$$\text{prox}_f(u) = \arg\min_{v\in U}\{f(v) + \frac{1}{2}\|v-u\|^2\}$$

Cet opérateur est bien défini du fait de la stricte convexité de la fonctionnelle à minimiser. Par ailleurs, les problèmes principaux et duaux se réécrivent (pour le choix de fonctions f et g numéro 1) :

$$\begin{aligned} &\min_{u\in U, q\in V}\{\eta\int_\Omega |q|^2 + \tau_y\int_\Omega |q|\} \text{ avec } q = D(\mathbf{u}),\\ &\min_{\tau\in C}\{F(\tau) = \frac{1}{4\eta}\int_\Omega (|\tau|-\tau_y)_+^2\} \text{ avec } C = \{\tau\in V,\ \forall u\in U, \langle \text{div}(\tau), u\rangle = 0\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

L'algorithme **(ALG2)** est alors presque équivalent à un algorithme utilisant l'opérateur proximal (également appelé ISTA) [18] :

Algorithme ISTA pour résoudre (2.20)-(2.21) :
- **Initialisation :** On initialise τ^0 et on se donne une famille $(L^i)_i \in \mathbb{R}_+^*$.
- **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

$$\tau^{i+1} = \text{prox}_{\frac{1}{L^i}I_C}\left(\tau^i - \frac{1}{L^i}\nabla F(\tau^i)\right)$$

("presque" étant dû au fait que cet algorithme échange les deux étapes de minimisation dans **(ALG2)**), où L^i satisfait à chaque étape le critère suivant :

$$F(\tau^{i+1}) \leqslant F(\tau^i) + \langle \nabla F(\tau^i), \tau^{i+1}-\tau^i\rangle + \frac{L^i}{2}\|\tau^{i+1}-\tau^i\|, \tag{2.32}$$

ce qui est vérifié par exemple lorsque ∇F est lipschitzienne de constante de Lipschitz L et que $L^i \geqslant L$ (dans la suite, on prendra $L^i = L$, où $L = \frac{1}{2\eta}$ dans le cas Bingham).

Remarque 12 *Cet opérateur proximal est vu comme un opérateur approchant la fonctionnelle à minimiser. En effet, le problème se réécrit comme :*

$$\min_{\tau\in V}\{F(\tau) + g(\tau)\} \text{ avec } g = I_C.$$

Si on prend σ proche de τ, on peut approcher cette fonctionnelle par

$$Q(\sigma,\tau) = F(\tau) + \langle \nabla F(\tau), \sigma-\tau\rangle + \frac{L}{2}\|\sigma-\tau\|^2 + I_C(\sigma)$$

À τ fixé, $Q(\cdot,\tau)$ admet un unique minimiseur du fait de sa stricte convexité et un calcul simple montre que ce minimiseur vérifie :

$$\arg\min_{\sigma\in V}(Q(\sigma,\tau)) = \arg\min_{\sigma\in V}\left\{I_C(\sigma) + \frac{L}{2}\left\|\sigma - \left(\tau - \frac{1}{L}\nabla F(\tau)\right)\right\|\right\} = \text{prox}_{\frac{1}{L}I_C}\left(\tau - \frac{1}{L}\nabla F(\tau)\right)$$

Ainsi, chaque étape revient à minimiser un problème approché du problème de départ où F est remplacé par une fonctionnelle quadratique qui lui est très proche. Dans le cas précis de Bingham, il s'agit juste de minimiser une fonctionnelle convexe sous la contrainte $\sigma \in C$. On parle alors d'opérateur shrinkage-thresholding.

Remarque 13 *On peut aussi "backtracker" L^i dans le cas où l'on ne connaît pas de constante de Lipschitz convenable pour L. Il s'agit d'incrémenter géométriquement L^i jusqu'à ce qu'une condition du type (2.32) soit vérifiée.*

Cet algorithme a été utilisé pour de nombreuses applications comme par exemple le traitement d'image (voir par exemple [33]). Par ailleurs, [18] remontre une estimation de la vitesse de convergence au sens suivant :

Théorème 17 *Soit $(\tau^i)_{i\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme ISTA et $\bar{\tau} \in \arg\min_\sigma\{F(\sigma) + I_C(\sigma)\}$ une solution du problème de minimisation. On a alors l'estimation suivante :*

$$\|F(\tau^i) + I_C(\tau^i) - F(\bar{\tau}) + I_C(\bar{\tau})\| = O(1/i)$$

Une estimation analogue a également été montrée dans [63] dans le cas de **(ALG2)**. Cette vitesse de convergence n'est pas optimale... mais presque. En effet, il a été montré dans [91] qu'on ne pouvait pas faire mieux que $O(1/i^2)$. Par ailleurs, il est possible d'améliorer ISTA en *FISTA* (Fast-ISTA) en décomposant la boucle en plusieurs étapes. Cet algorithme a été présenté initialement par Beck et Teboulle dans [18]. Il consiste en l'algorithme de ISTA auquel on ajoute un pas d'extrapolation supplémentaire, en résolvant l'étape proximale sur une variable $\hat{\tau}$ auxiliaire. Ensuite $\hat{\tau}$ est mis à jour à partir des deux itérations précédentes de τ et d'un pas adaptatif :

Algorithme FISTA pour résoudre (2.31) :

— **Initialisation :** On initialise τ^0, $\hat{\tau}^1 = \tau^0$, $t^1 = 1$.

— **Boucle en i :** $i \geqslant 1$

1. Calcul de l'opérateur proximal

$$\tau^i = \text{prox}_{\frac{1}{L^i}I_C}\left(\tau^{i-1} - \frac{1}{L}\nabla F(\tau^{i-1})\right)$$

2. Mise à jour du pas de descente :

$$t^{i+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + (2t^i)^2}}{2}$$

3. Mise à jour de $\hat{\tau}$

$$\hat{\tau}^{i+1} = \hat{\tau}^i + \frac{t^i - 1}{t^{i+1}}\left(\tau^i - \tau^{i-1}\right)$$

Cet algorithme est optimal dans le sens suivant (voir [18]) :

Théorème 18 *Soit $(\tau^i)_{i\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme FISTA et $\bar{\tau} \in \arg\min_\sigma\{F(\sigma) + I_C(\sigma)\}$ une solution du problème de minimisation. On a alors l'estimation suivante :*

$$\|F(\tau^i) + I_C(\tau^i) - F(\bar{\tau}) + I_C(\bar{\tau})\| = O(1/i^2)$$

Les algorithmes de la classe de FISTA ont été adaptés dans [122, 123] pour résoudre des problèmes d'écoulements de fluides viscoplastiques un peu plus généraux (Bingham, Herschel-Bulkley ou Casson). [122] exprime l'étape 1 de FISTA en fonction des variables primales (et donc en introduisant les variables auxiliaires $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{q}$) et propose plusieurs alternatives pour relier les variables auxiliaires $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$ aux "vraies" variables $(\mathbf{u}, q)$. L'une de ces alternatives est de poser simplement $(\mathbf{u}, q) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$, une autre étant de poser $(\mathbf{u}, q)$ comme solution d'un problème proximal dépendant de $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$. Par ailleurs, en sus de l'estimation ci-dessus, [122] montre également le théorème suivant :

Théorème 19 *Soit* $(\mathbf{u}^i, q^i, \tau^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *générés par l'algorithme FISTA* et* $\bar{\mathbf{u}}$ *la solution du problème primal de* (2.32)*. Si on choisit de poser* $(\mathbf{u}, q)$ *comme solution d'un problème proximal dépendant de* $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$*, alors*

$$\|q^i - D(\bar{\mathbf{u}})\|_V = O(1/i) \text{ et } \|\mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{u}}\|_U = O(1/i)$$

D'autre part, si $(\mathbf{u}^i, q^i, \tau^i)_{i\in\mathbb{N}}$ *sont générés par l'algorithme ISTA*, alors*

$$\|q^i - D(\bar{\mathbf{u}})\|_V = O(1/\sqrt{i}) \text{ et } \|\mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{u}}\|_U = O(1/\sqrt{i})$$

Cette méthode est donc plus rapide que le Lagrangien Augmenté classique en terme d'itérations et donc de complexité analytique. Cependant, pour assurer la convergence, il faut calculer $(\mathbf{u}, q)$ en fonction de $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$ ce qui augmente la complexité algébrique. En pratique, poser $(\mathbf{u}, q) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{q})$ suffit à assurer la convergence (et est fait dans [123]). FISTA et FISTA* sont des méthodes prometteuses qui doivent être étudiées dans le futur. En pratique cependant, et à notre connaissance, cette méthode n'a jamais été poussée à l'extrême. Par exemple, dans [124], les résultats montrés ne permettent pas de déterminer si ces algorithmes atteignent bien le zéro machine, les tolérances étant posées égales à 10^{-6}, et le cas échéant, le coût en itérations et en temps CPU. Qui plus est, la qualité des résultats obtenus sur les cas-tests classiques ne sont, à notre connaissance, pas aussi bons que ceux qui ont été montrés dans la littérature récemment.

2.2.3 Paramètres optimaux

Revenons un instant sur la remarque 11. Il est à noter qu'en règle générale, les paramètres d'augmentations optimaux sont inconnus ou non calculables a priori (sauf dans quelques cas particuliers, voir par exemple [45]), et ce, que ce soit pour les algorithmes de type AL ou FISTA. Par ailleurs, le concept même de paramètre optimal n'est pas si clair comme expliqué dans [124]. S'agit-il des paramètres qui amènent le plus vite à la condition de contrainte $y = Ax$? De petits paramètres d'augmentation vont amener en moyenne le résidu beaucoup plus lentement vers la condition de contrainte et faire converger trop lentement l'algorithme. Au contraire, de forts paramètres d'augmentation auront tendance à amener (x, y) beaucoup plus vite sur la droite $y = Ax$ en faisant passer au second plan la minimisation de J comme illustré sur la figure 2.4. Et un petit résidu $\|y - Ax\|_{L^2}$ n'implique évidemment pas forcément que x est proche de l'argmin de J. Mais alors, cela voudrait dire que le critère de convergence $\|y - Ax\|_{L^2} < tol$ n'est pas si pertinent pour des algorithmes de type AL. Treskatis et co-auteurs proposent dans [124] de revenir au théorème 15. À convergence, on est en effet supposé avoir un écart primal-dual (2.4) nul. Ainsi, l'écart dual-primal à l'itération i

$$f(Ax^i) + g(x^i) + \tilde{J}^*(\lambda^i) \tag{2.33}$$

est censé tendre vers 0 et imposer une tolérance sur cette valeur constitue un critère plus fort qu'une tolérance sur le résidu $\|y - Ax\|$. Ils montrent sur différents graphes de convergence que c'est effectivement le cas.

2.3 Discrétisation spatiale

On va s'intéresser maintenant à la discrétisation spatiale de (2.29) Soit Ω le domaine considéré (soit la conduite Poiseuille, soit la géométrie expansion-contraction). Comme expliqué précédemment, on utilise une discrétisation de type différences finies sur grille cartésienne. Le système

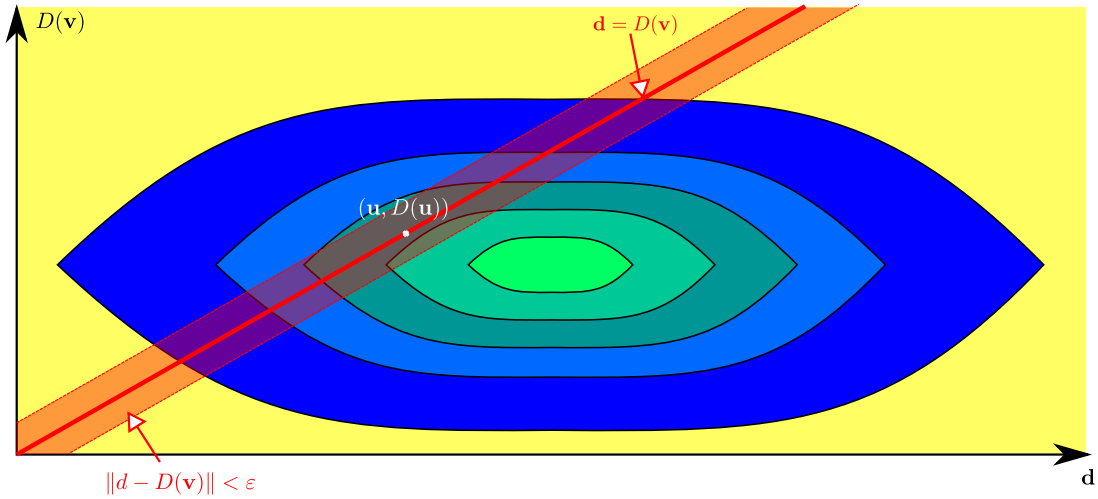


FIGURE 2.4 – Version schématique des zones, schéma inspiré de [124]. Les différentes ellipses représentent les lignes de niveau d'une fonction convexe (le minimum étant atteint dans la zone verte clair). La zone rouge représente toutes les valeurs possibles atteignables lorsque le résidu est petit.

s'écrit de manière développée (où, $\mathbf{u} = (u, v)$) :

$$\begin{aligned} -(2\eta + r)\partial_x \left(\partial_x u^k + \frac{\partial_x v^k + \partial_y u^k}{2} \right) - s\left(\partial_{xx} u^k + \partial_{xy} v^k \right) &= -\partial_x p^{k-1} + f_x \\ -(2\eta + r)\partial_y \left(\frac{\partial_x v^k + \partial_y u^k}{2} + \partial_y v^k \right) - s\left(\partial_{xy} u^k + \partial_{yy} v^k \right) &= -\partial_y p^{k-1} + f_y \end{aligned} \tag{2.34}$$

où $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \operatorname{div}(\lambda - rd)$ est invariant pendant tout l'algorithme **(A2)**. Dans la suite, on omet les exposants k pour alléger les notations.

2.3.1 Le maillage et la discrétisation en un point intérieur

Suivant [128] et [87], on utilise une grille décalée en maillage Marker and Cell (MAC) à la Harlow et Welsh [61]. Les points où l'on va calculer la composante en x (resp. y) de la vitesse se trouvent au milieu des arêtes verticales (resp. horizontales) du maillage sur les $(x_{i,j+1/2})$ (resp. sur les $(x_{i+1/2,j})$). Les points où l'on va calculer la pression sont au milieu des mailles sur les $(x_{i+1/2,j+1/2})$. Ceci est schématisé figure 2.5. Plaçons nous sur une maille du domaine Ω, centrée en (x_i, y_i) et notons h le pas horizontal et k le pas vertical du maillage (dans les faits, on utilise dans le code un maillage uniforme). Les deux lignes de (2.34) seront discrétisées sur deux volumes de contrôle différents (cf. figure 2.6). L'axe horizontal est découpé en N sous-segments tandis que chaque section verticale est subdivisée en M sous-segments. Comme on travaille à pas constant, cela signifie que l'expansion-contraction aura deux valeurs de subdivisions verticales possibles : M_{inout} pour le canal d'entrée et M_{in} pour l'intérieur de la cavité. Par ailleurs, dans toutes les simulations présentées ci-dessous, on va adapter le pas du maillage pour que la fin du canal d'entrée corresponde à une fin de maille comme montré sur la figure 2.7.

En reprenant les notations du volume de contrôle, on obtient que le système à résoudre est

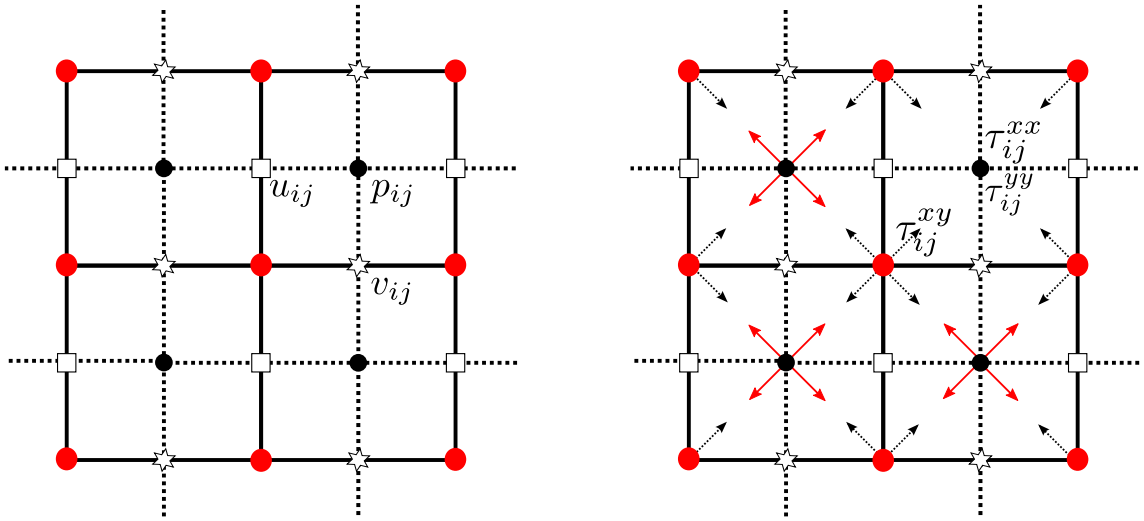


FIGURE 2.5 – Maillage de type MAC, À gauche : détail d'une maille intérieure pour la vitesse et la pression. À droite : détail d'une maille intérieure pour les différents tenseurs.

(pour la première ligne) :

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{h^2}+\frac{2\eta+r}{2k^2}\right)u_{i,j}-\frac{2\eta+r+s}{2h^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-\frac{2\eta+r}{4k^2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})$$
$$-\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(v_{i,j+1}-v_{i-1,j+1}-v_{i,j}+v_{i-1,j})=f^1_{i,j}.-\frac{p_{i,j}-p_{i-1,j}}{h} \quad (2.35)$$

La deuxième ligne se déduit de manière identique :

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{k^2}+\frac{2\eta+r}{2h^2}\right)v_{i,j}-\frac{2\eta+r+s}{2k^2}(v_{i,j+1}+v_{i,j-1})-\frac{2\eta+r}{4h^2}(v_{i+1,j}+v_{i-1,j})$$
$$-\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(u_{i+1,j}-u_{i,j}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j-1})=f^2_{i,j}-\frac{p_{i,j}-p_{i,j-1}}{k}. \quad (2.36)$$

on obtient alors une erreur de consistance en $O\|(h,k)^2\|$. Reste maintenant à discrétiser $\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \mathrm{div}(\lambda - rd)$. On place les différentes composantes des tenseurs (λ, d et $D(\mathbf{u})$) comme montré sur la figure 2.5 Ceci est cohérent d'une part avec l'actualisation de λ puisque celle-ci se fait suivant l'équation (2.59) et avec le problème de Stokes d'autre part puisqu'il fait intervenir $\mathrm{div}(\lambda - rd)$, soit

$$\partial_x(\lambda_{xx}-rd_{xx})+\partial_y(\lambda_{xy}-rd_{xy}) \text{ calculé en } x_{i,j+1/2}$$
$$\partial_x(\lambda_{xy}-rd_{xy})+\partial_y(\lambda_{yy}-rd_{yy}) \text{ calculé en } x_{i+1/2,j}$$

Le seul problème que cela pose est au niveau de l'étape 2 de l'algorithme **(A1)**, puisqu'on a besoin de la norme du tenseur $\lambda+rD(\mathbf{u})$, et ce, aux coins et au centre des mailles physiques. Pour ce faire, on va devoir approcher d'une part ses composantes diagonales aux coins des mailles et sa composante extra-diagonale au centre. On utilise pour ceci une méthode de moyenne à quatre points (comme montré figure 2.5), lorsque c'est possible, i.e. sur les mailles au centre du domaine. Par exemple, en $(x_{i+1/2,j+1/2})$,

$$|\lambda+rD(\mathbf{u})|^2_{i+1/2,j+1/2}=(\lambda_{xx}+r\partial_x u)^2_{i+1/2,j+1/2}+(\lambda_{yy}+r\partial_y v)^2_{i+1/2,j+1/2}+2(\lambda_{xy}$$
$$+\frac{r}{2}(\partial_y u+\partial_x v))^2_{moy,i+1/2,j+1/2}$$

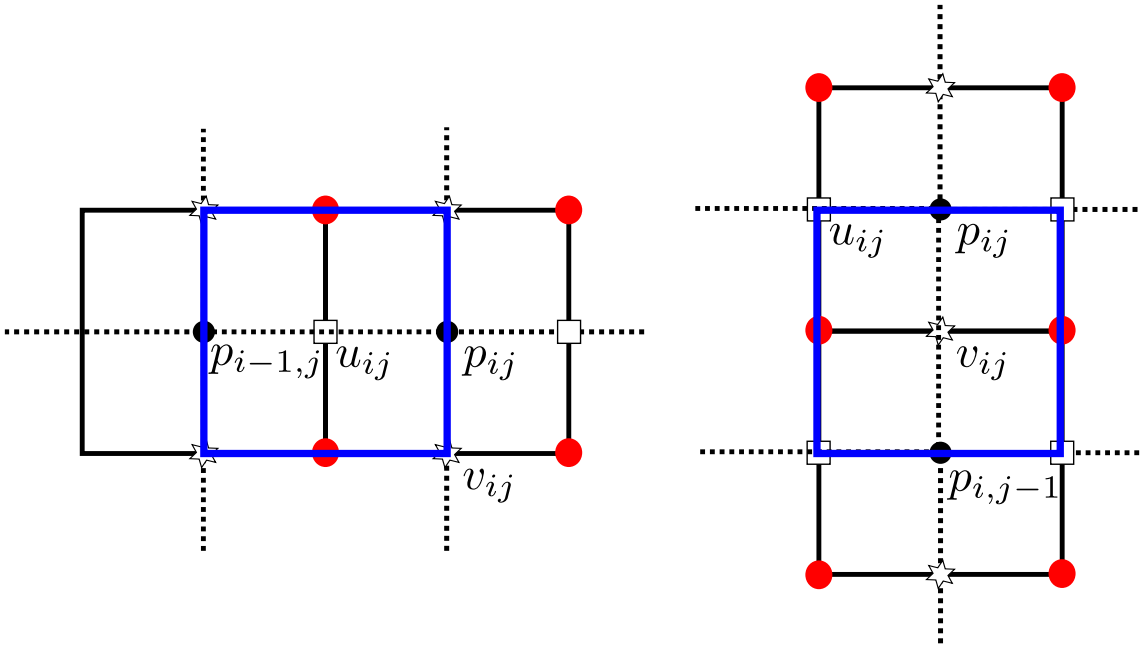


FIGURE 2.6 – Maillage de type MAC, les mailles de contrôles (en bleu) sont centrées en $u_{i,j}$ pour la première équation (à gauche), en $v_{i,j}$ pour la deuxième (à droite)

où

$$(\lambda_{xy} + \frac{r}{2}(\partial_y u + \partial_x v))_{moy,i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4}((\lambda_{xy} + \frac{r}{2}(\partial_y u + \partial_x v))_{i,j} + (\lambda_{xy} + \frac{r}{2}(\partial_y u + \partial_x v))_{i+1,j} + (\lambda_{xy} + \frac{r}{2}(\partial_y u + \partial_x v))_{i,j+1} + (\lambda_{xy} + \frac{r}{2}(\partial_y u + \partial_x v))_{i+1,j+1})$$

Cela va marcher en tous points sauf en ceux du bord. Pour calculer d_{xy} en ces points, on n'a qu'un ou deux points voisins pour moyenner.

2.3.2 Conditions de bord

On regarde maintenant les différentes conditions de bord. Dans toutes les simulations que l'on mène, on impose les conditions de bord suivantes (que l'on travaille avec le canal Poiseuille ou avec l'expansion-contraction) :

- Condition de non glissement sur les murs latéraux : $\mathbf{u} = 0$,
- Vitesse de Poiseuille en entrée : $\mathbf{u} = (u_{pois,0}, 0)$ avec une certaine condition sur u_{pois}.
  - Dans le cas dimensionné, on veut que la vitesse moyenne V vérifie $V = \frac{\tau_y R}{\eta Bi}$ avec Bi donné,
  - Dans le cas adimensionné, on veut que $V = 1$.

  Pour cela, on doit choisir un forçage en pression. Le calcul du flux en fonction du seuil et du gradient de pression donne que ce gradient doit vérifier :

$$DP = -\frac{\tau_y}{XR} \text{ où } X^3 - 3\left(\frac{2}{Bi} + 1\right)X + 2 = 0 \text{ en dimensionné}$$
$$DP = -\frac{B}{X} \text{ où } X^3 - 3\left(\frac{2}{B} + 1\right)X + 2 = 0 \text{ en adimensionné,}$$

  ce polynôme étant appelé équation de *Buckingham* [26].

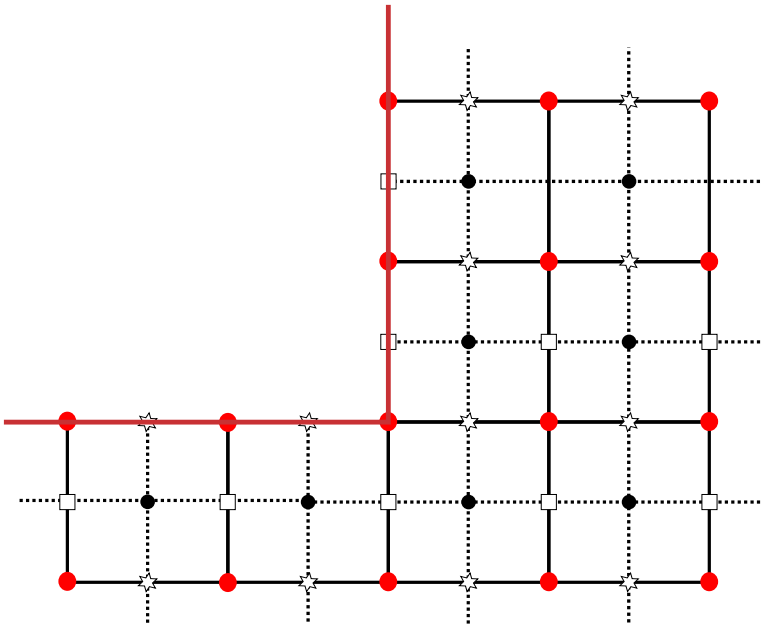


FIGURE 2.7 – Disposition des mailles de la frontière (en marron) au niveau des coins

Remarque 14 *On suppose donc que L_{inout} est suffisamment long pour qu'un écoulement de Poiseuille ait lieu à l'entrée. Il a donc fallu tester la longueur minimale nécessaire de ces tuyaux d'entrée-sortie (que l'on note L_{inout}) pour avoir une condition d'entrée consistante. En effet, il va falloir trouver un compromis entre avoir un canal suffisamment long mais pas trop pour ne pas augmenter trop le nombre de mailles et donc le temps CPU. Une manière de vérifier cela est l'évolution de la zone du plug central lorsque L_{inout} augmente. On peut supposer qu'un écoulement de Poiseuille est présent en entrée si l'interface rigide/fluide reste parallèle aux murs pendant une distance signficative. La figure 2.8 montre que pour $L_{inout} \geqslant 2D$, cette condition est respectée. Dans les simulations présentées ci-après, on choisit donc $L_{inout} = 2D$.*

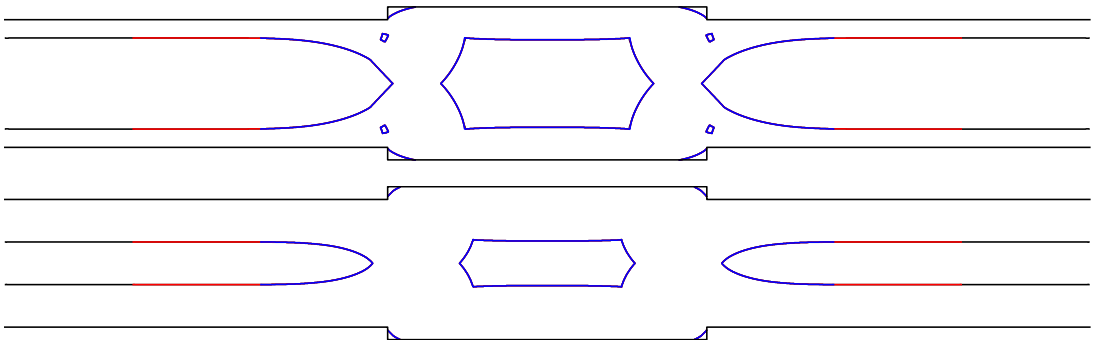


FIGURE 2.8 – Superposition des différents contours $|d| = 10^{-10}$ pour $B = 20$ (en haut) et 2 (en bas) pour 3 aspect-ratios différents du canal d'entrée : $\frac{L_{inout}}{D} = 6$ (en noir), 4 (rouge) et 2 (bleu)

Pour la sortie, on a deux choix différents :

— Imposer une condition de Dirichlet avec la vitesse vérifiant encore l'écoulement de Poiseuille : $\mathbf{u} = (u_{pois,0}, 0)$,

— Relaxer la condition de sortie en une condition de Neumann : $\partial_x \mathbf{u} = 0$

Un grande part des simulations a été menée en utilisant des conditions de Dirichlet partout. Cependant, on va par moment vouloir relaxer les conditions de sortie et imposer une condition de Neumann.

Les bords communs : l'entrée et les murs latéraux

Dans ce cas, les conditions sur u en entrée et en sortie ne posent aucun problème, tout comme celles sur v sur les murs latéraux. En effet, les points où sont calculées ces vitesses se trouvent sur la frontière. Pour v en entrée, on va prolonger v une demi-maille en dehors du bord comme montré sur la figure 2.9. Un développement limité sur le bord donne :

$$v(-h/2, y) = \underbrace{v(0,y)}_{=0} - \frac{h}{2}\partial_x v(0,y) + O(h^2), \;\; v(h/2, y) = \underbrace{v(0,y)}_{=0} + \frac{h}{2}\partial_x v(0,y) + O(h^2)$$

Ainsi, en posant

$$v_{0,j} = -v_{1,j} \tag{2.37}$$

On effectue encore une erreur d'ordre 2. De même, on peut prolonger u une demi-maille hors des murs latéraux comme suit :

$$u_{i,0} = -u_{i,1} \text{ et } u_{i,M+1} = -u_{i,M} \tag{2.38}$$

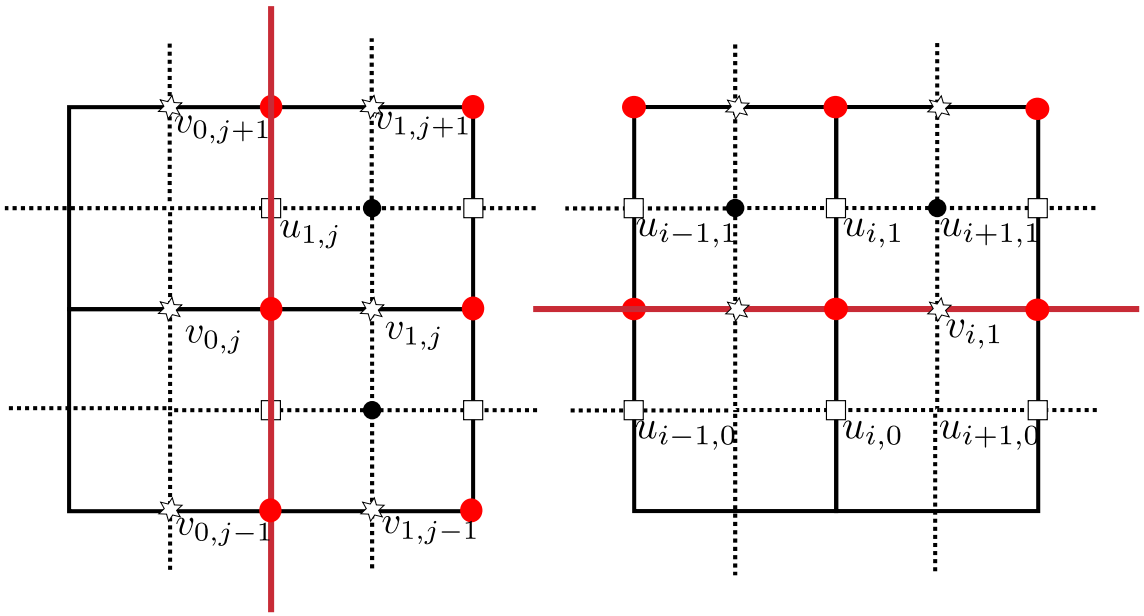


FIGURE 2.9 – Prolongement de v (à gauche) et u (à droite) en dehors du bord physique (en marron) là où c'est nécessaire (voir texte pour plus de détails).

Alors, en écrivant le système (2.35)-(2.36) sur une maille de contrôle sur le bord et en remplaçant les valeurs sortant du domaine avec les formules ci-dessus, on obtient encore une relation linéaire sur les coefficients d'ordre $O(h^2)$:

— Sur v en entrée, pour $j \in [2, M_{inout}]$:

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{k^2}+\frac{2\eta+r}{2h^2}+\frac{2\eta+r}{4h^2}\right)v_{1,j}-\frac{2\eta+r+s}{2k^2}(v_{1,j+1}+v_{1,j-1})-\frac{2\eta+r}{4h^2}v_{2,j} \\ -\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(u_{2,j}-u_{1,j}-u_{2,j-1}+u_{1,j-1})=f^2_{1,j}-\frac{p_{1,j}-p_{1,j-1}}{k}. \quad (2.39)$$

— Sur u sur les murs latéraux, pour $i \in [2, N]$ (en prenant en compte le fait que v est nul sur les murs latéraux) :

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{h^2}+\frac{2\eta+r}{2k^2}+\frac{2\eta+r}{4k^2}\right)u_{i,1}-\frac{2\eta+r+s}{2h^2}(u_{i+1,1}+u_{i-1,1})-\frac{2\eta+r}{4k^2}u_{i,2} \\ -\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(v_{i,2}-v_{i-1,2})=f^1_{i,1}.-\frac{p_{i,1}-p_{i-1,1}}{h} \quad (2.40)$$

et (en notant M pour M_1 ou M_2).

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{h^2}+\frac{2\eta+r}{2k^2}+\frac{2\eta+r}{4k^2}\right)u_{i,M}-\frac{2\eta+r+s}{2h^2}(u_{i+1,M}+u_{i-1,M})-\frac{2\eta+r}{4k^2}u_{i,M-1} \\ -\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(-v_{i,M}+v_{i-1,M})=f^1_{i,M}.-\frac{p_{i,M}-p_{i-1,M}}{h} \quad (2.41)$$

Pour ce qui est du calcul de $|\lambda + rD(\mathbf{u})|$ au niveau de toutes les frontières, on ne va donc pas pouvoir moyenner sur 4 points. On va donc moyenner sur moins de points, 2 au niveau des bords et 1 au niveau des coins.

Sortie Dirichlet

Dans ce cas, on peut réappliquer ce que l'on vient de faire en entrée pour la sortie. La composante u ne pose toujours pas de problème et la composante v est prolongée une demi-maille après la sortie et l'équation en v devient pour $j \in [2, M_{inout}]$:

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{k^2}+\frac{2\eta+r}{2h^2}+\frac{2\eta+r}{4h^2}\right)v_{N,j}-\frac{2\eta+r+s}{2k^2}(v_{N,j+1}+v_{N,j-1})-\frac{2\eta+r}{4h^2}v_{N-1,j} \\ -\frac{2\eta+r+2s}{2hk}(u_{N+1,j}-u_{N,j}-u_{N+1,j-1}+u_{N,j-1})=f^2_{N,j}-\frac{p_{N,j}-p_{N,j-1}}{k}. \quad (2.42)$$

Et encore une fois, pour le calcul de $|\lambda + rD(\mathbf{u})|$ au niveau des frontières, on moyenne sur moins de 4 points.

Sortie Neumann totale

Pour une sortie avec des conditions de Neumann $\partial_n \mathbf{u} = 0$, c'est un peu plus délicat. On va prolonger u une maille et v une demi-maille au delà de la sortie. Les DL de u, et v en sortie et le fait que leurs dérivée normales soient nulles nous donnent alors :

$$u(L+h,y)=u(L,y)+\frac{h^2}{2}\partial^2_{xx}u(L,y)+O(h^3),\ u(L-h,y)=u(L,y)+\frac{h^2}{2}\partial^2_{xx}u(L,y)+O(h^3), \\ v(L+h/2,y)=v(L,y)+\frac{h^2}{8}\partial^2_{xx}v(L,y)+O(h^3),\ v(L-h/2,y)=v(L,y)+\frac{h^2}{8}\partial^2_{xx}v(L,y)+O(h^3) \quad (2.43)$$

Ce qui nous amène à poser :

$$u_{N+2,j}=u_{N,j},\ v_{N+1,j}=v_{N,j} \quad (2.44)$$

pour tout $j \in [1, M_1]$.

L'équation sur u au niveau de la sortie se réécrit alors :

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{h^2}+\frac{2\eta+r}{2k^2}\right)u_{N+1,j}-\frac{2\eta+r+s}{h^2}u_{N,j} - \frac{2\eta+r}{4k^2}(u_{N,j+1}+u_{N,j-1}) = f^1_{N+1,j}-\frac{p_{N+1,j}-p_{N,j}}{h} \quad (2.45)$$

... pour peu que l'on puisse définir la pression hors du domaine ! Pour cela, on peut aussi créer un champ de pression déjà prolongé jusqu'à une maille après le bord dès le début et la réactualiser à chaque itération de la boucle de **(A1)**. Pour cela on a besoin de div(**u**) et donc de réutiliser le prolongement de u décrit ci-dessus. Ainsi, la réactualisation de la pression donnera

$$p^{new}_{N+1,j} = p^{old}_{N+1,j} - s\text{div}(\mathbf{u})_{N+1,j} \quad (2.46)$$

On approche alors div(**u**) comme suit :

$$\begin{aligned}\text{div}(\mathbf{u})(x_{N+1,j}) &= \frac{\underbrace{u_{N+2,j}}_{=u_{N,j}}-u_{N+1,j}}{h}+\frac{\underbrace{v_{N+1,j+1}-v_{N+1,j}}_{=v_{N,j+1}-v_{N,j}}}{k}\\ &= \frac{u_{N,j}-u_{N+1,j}}{h}+\frac{v_{N+1,j}-v_{N,j}}{k}\end{aligned} \quad (2.47)$$

Passons maintenant au calcul de $|\lambda + rD(\mathbf{u})|$ au niveau de la sortie. Pour le cas d'une sortie où on impose la condition de Neumann $\partial_x \mathbf{u} = 0$, on peut supposer que $d_{xx} = d_{yy} = 0$. En effet, à convergence, on a $d = D(\mathbf{u})$ et donc $d_{xx} = \partial_x u = 0$ On peut faire comme précédemment, à savoir prolonger d_{xx} une demi-maille après la sortie en définissant

$$d_{xx,N+1/2,j} = -d_{xx,N-1/2,j} \text{ et } \partial_x u_{N+1/2,j} = -\partial_x u_{N-1/2,j}.$$

On peut également prolonger λ_{xx} comme on a prolongé div(**u**). Par récurrence, on montre (sous réserve que $\lambda^0_{xx,N+1/2,j} = -\lambda^0_{xx,N-1/2,j}$) que :

$$\begin{aligned}\lambda^{k+1}_{xx,N+1/2,j} &= \lambda^k_{xx,N+1/2,j} + (\partial_x u_{N+1/2,j} - d_{xx,N+1/2,j})\\ &= -\lambda^k_{xx,N-1/2,j} - (\partial_x u_{N-1/2,j} - d_{xx,N-1/2,j})\\ &= -\lambda^{k+1}_{xx,N-1/2,j}\end{aligned}$$

Sortie Neumann partielle

On peut également étudier des conditions de bord mixtes en sortie à savoir $\partial_x u = 0$ et $v = 0$. On peut reprendre tout ce qui a été fait dans la sous-section précédente. On prolonge u et v comme précédemment :

$$u_{N+2,j} = u_{N,j},\ -v_{N+1,j} = v_{N,j} \quad (2.48)$$

pour tout $j \in [1, M_{inout}]$.

L'équation sur u au niveau de la sortie se réécrit alors :

$$\left(\frac{2\eta+r+s}{h^2}+\frac{2\eta+r}{2k^2}\right)u_{N+1,j}-\frac{2\eta+r+s}{h^2}u_{N,j}-\frac{2\eta+r}{4k^2}(u_{N,j+1}+u_{N,j-1}) - \frac{2\eta+r+2s}{hk}(v_{N,j}-v_{N,j+1}) = f^1_{N+1,j}.-\frac{p_{N+1,j}-p_{N,j}}{h} \quad (2.49)$$

et la divergence de la vitesse se prolonge en

$$\mathrm{div}(\mathbf{u})(x_{N+1,j}) = -\mathrm{div}(\mathbf{u})(x_{N,j}) \tag{2.50}$$

pour que la pression puisse être définie partout

$$p^{new}_{N+1,j} = p^{old}_{N+1,j} - s\mathrm{div}(\mathbf{u})_{N+1,j} = p^{old}_{N+1,j} + s\mathrm{div}(\mathbf{u})_{N,j} \tag{2.51}$$

Et le calcul de $|\lambda + rD(\mathbf{u})|$ au niveau de la sortie se fait de même puisque on suppose encore que $d_{xx} = d_{yy} = 0$. Et il n'y a également pas de problème au niveau de λ :

$$\lambda^{k+1}_{xx,N+1/2,j} = -\lambda^{k+1}_{xx,N-1/2,j}.$$

2.4 Premiers résultats numériques et étude de convergence

Dans cette section, les résultats seront présentés sous forme adimensionnée sauf dans la section 2.4.2.

2.4.1 Convergence de (A1)

Le premier cas test que l'on regarde est celui de l'écoulement unidimensionnel de Poiseuille. La figure 2.10 montre l'erreur faite lors de la discrétisation pour différents B. On retrouve d'une part la convergence à l'ordre 2 sur les champs de vitesse et de l'autre, le fait que la vitesse converge en norme H^1 vers la solution analytique. On présente figures 2.11 et 2.12 différents

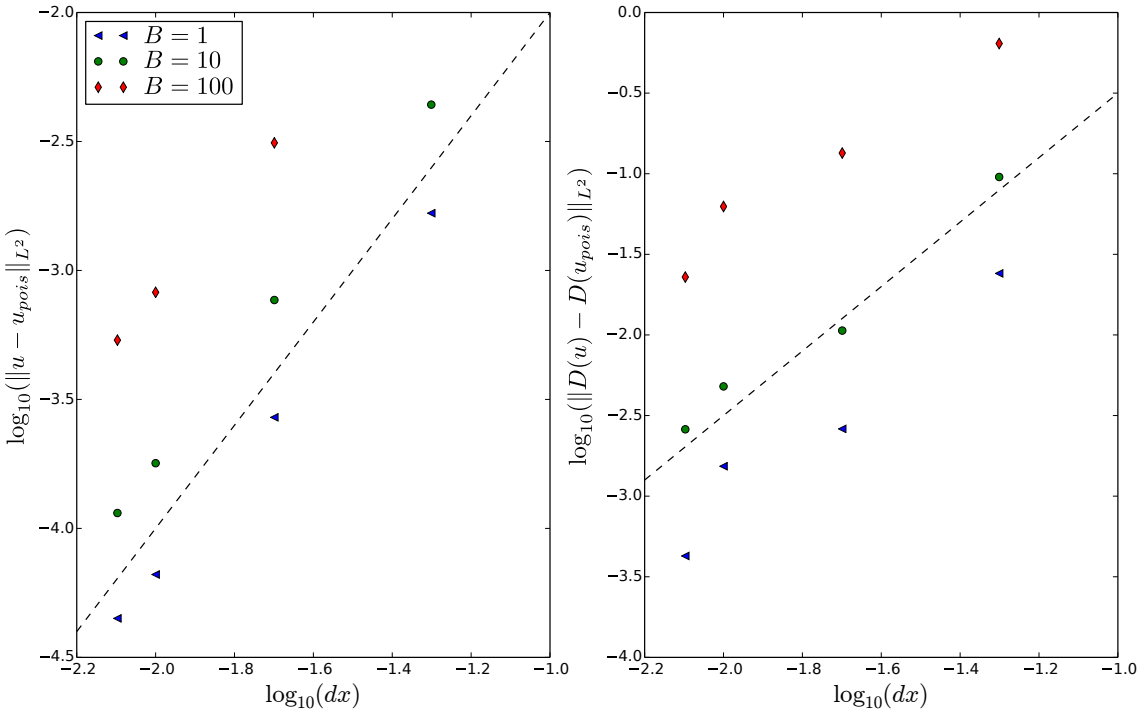


FIGURE 2.10 – Convergence sous raffinement de maillage de l'algorithme AL dans le cas d'un écoulement de Poiseuille. À gauche : erreur faite sur les vitesses. À droite : erreur faite sur les gradients. Les droites en pointillés sont de pente 2.

graphes de convergence du résidu $|D(\mathbf{u}) - d|_{L^2}$. On remarque tout d'abord en figure 2.11 que le

nombre de boucles de Stokes faites à chaque itération de l'algorithme **(A2)** décroît au fur et à mesure des itérations de **(A1)** pour arriver à un système linéaire résolu par boucle de **(A1)**. Par ailleurs, le cas test présenté figure 2.11 est un "cas extrême" dans le sens où la cavité est longue (i.e. δ est petit) et B est grand. Ceci explique que le résidu ne tombe pas à $5 \cdot 10^{-12}$ en moins de 40000 itérations. Le résidu est néanmoins très bas puisqu'il approche 10^{-11}. La figure 2.12 montre d'autres graphes de convergence dans une géométrie moyenne. On voit que le nombre d'itérations requises pour arriver à convergence croît lorsque B croît.

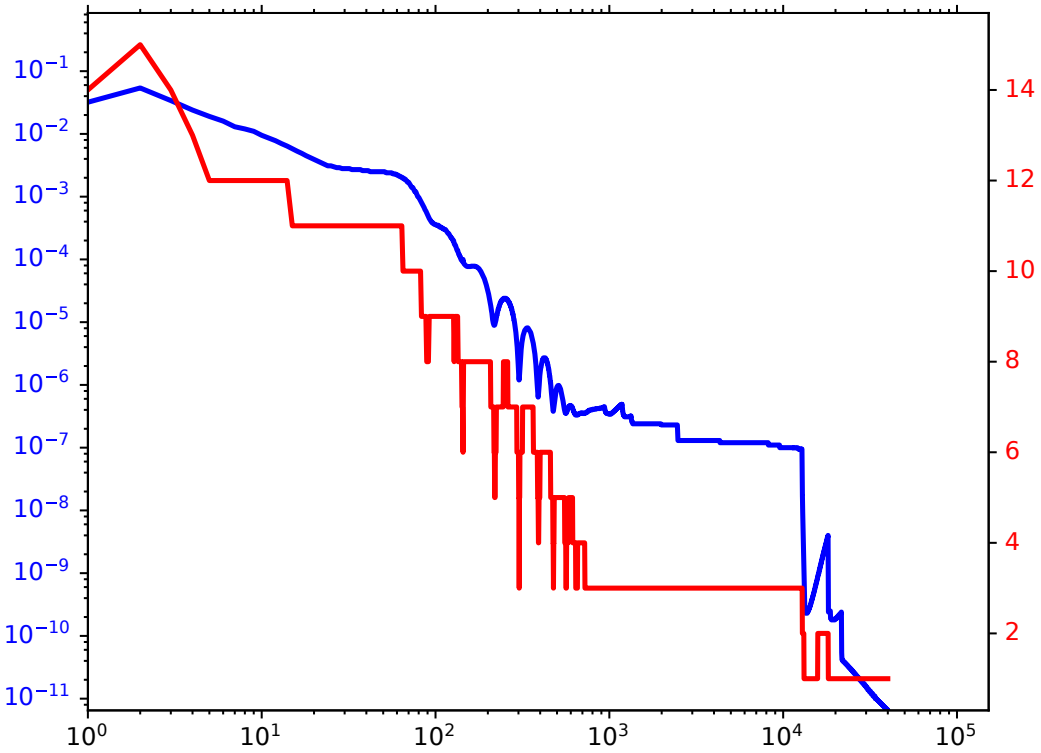


FIGURE 2.11 – Convergence de l'algorithme AL pour $h = 6/5$, $\delta = 1/12$ et $B = 50$. En bleu : le résidu $\|D(\mathbf{u}) - d\|_{L^2}$. En rouge : le nombre de boucle de Stokes fait à chaque boucle de **(A1)**. Il s'agit d'un des cas les plus extrêmes i.e. un des seuls où $N_{max,B}$ est atteint.

2.4.2 Temps effectif de calcul

La résolution numérique a été codé en Fortran et parallélisé en MPI. Les résolutions des systèmes linéaires provenant de la discrétisation de (2.57) ont été réalisés à l'aide de la bibliothèque MUMPS [4, 5]. Ce solver parallèle nous permet de raffiner le maillage de manière significative. Dans les faits, on est monté jusqu'à 7.8×10^6 points en travaillant sur 16 coeurs et en n'excédant pas 2 jours de calculs. Bien sûr, dans toutes les simulations effectuées, le maillage n'est pas raffiné au maximum possible. Pour la plupart des résultats présentés au chapitre suivant, on utilise comme pas de discrétisation $\Delta x = 2.10^{-2}$, de telle manière qu'une section verticale de la cavité contienne 600 mailles. On donne dans le tableau 2.1 le nombre total de mailles obtenu avec un tel pas de discrétisation en fonction de la géométrie. Pour les cavités les plus longues (les L les plus élevés), notamment dans la géométrie pour laquelle on a fait le rafinement de maillage présenté figure 2.16, le problème a été résolu avec $n_p = 16$ processeurs. Le tableau 2.2 rassemble les différents temps CPU ainsi que le nombre total de systèmes linéaires résolus pendant ce raffinement de maillage. On remarque que même si diminuer le pas du maillage aug-

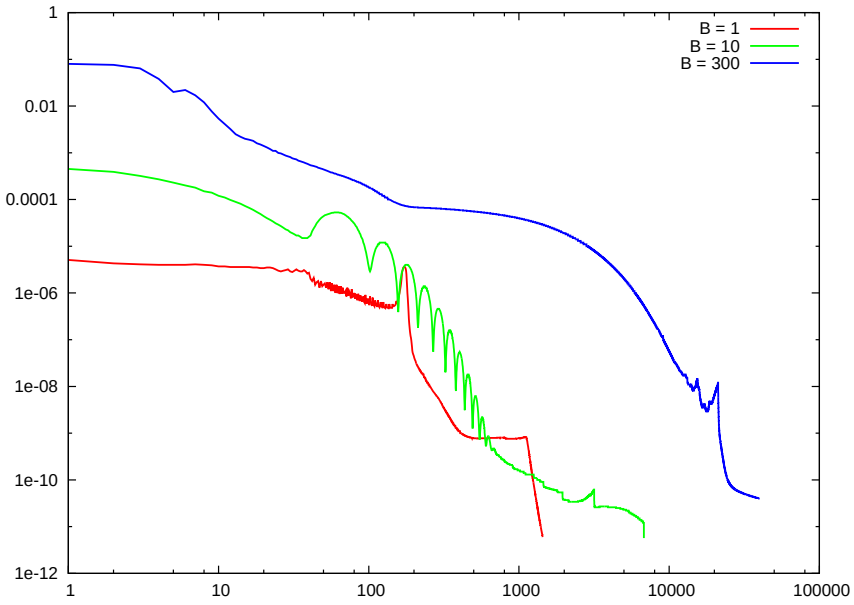


FIGURE 2.12 – Convergence de l'algorithme AL : le résidu $\|D(\mathbf{u}) - d\|_{L^2}$ pour $h = 2$ et $\delta = 0.5$.

3-3-6	5-1-6	5.5-0.5-6	3-3-12	5-1-12	5.5-0.5-12	5-1-25	5-1-60
$4.8 \cdot 10^5$	$6.8 \cdot 10^5$	$7.3 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^5$	$8.6 \cdot 10^5$	$9.1 \cdot 10^5$	$1.3 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^6$

TABLE 2.1 – Nombre de mailles pour différentes géométries données par D-H-L, donnés dans cet ordre en première ligne.

Δx	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$
$\Delta \tilde{x}$ adimensionné correspondant	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
Nombre de points du maillage	$1.25 \cdot 10^6$	$5.0 \cdot 10^6$	$7.8 \cdot 10^6$
Nombre d'itérations AL	16508	9425	9349
Nombre total d'itérations de la boucle de Stokes	45162	34615	30513
Temps CPU	5h30	18h15	32h30

TABLE 2.2 – Temps CPU associé à l'étude du raffinement de maillage montré figure 2.16 ($D = 5$, $H = 1$, $L = 25$ et $B = 20$), $n_p = 16$.

mente le temps CPU (puisque les sytèmes linéaires à résoudre sont beaucoup plus conséquents), cela réduit le nombre global d'itérations de boucles dans **(A1)** et **(A2)**. D'autres exemples de temps CPU sont donnés dans le tableau 2.3. On a bien pris soin de montrer ici des cas extrêmes (géométries longues, hauts B). On peut remarquer que même si $N_{max,B}$ est atteint dans le cas $(D, H, L) = (5, 1, 60)$, le résidu final de la boucle **(A1)** est égal à $6.5 \cdot 10^{-12}$ (voir figure 2.11) pour $B = 50$, ce qui est proche de la tolérance demandée. On présente figure 2.11 en plus de l'évolution du résidu dans ce cas extrême, le nombre de systèmes linéaires résolus à chaque ité-

D-H-L	3-3-6	5-1-25	5-1-60
n_p	1	1	16
Nombre d'itérations AL	4618	13339	40000
Nombre total d'itérations de la boucle de Stokes	12261	40587	70936
Temps CPU	2h30	22h45	20h15

TABLE 2.3 – Temps CPU pour différentes géométries à $B = 50$.

ration de **(A1)**. Ce nombre de systèmes linéaires décroît beaucoup dans les premières itérations de **(A1)** et très vite se stabilise à 2 ou 3 systèmes résolus par itération de la boucle. De fait, la méthode de résolution du sous-problème de Stokes que l'on utilise (à la place de la résolution usuellement utilisée) ne provoque pas beaucoup de perte de temps excepté pour les premières itérations et en même temps assure d'avoir une vitesse qui respecte à chaque étape la condition d'incompressibilité.

Il n'est pas évident de comparer ces temps de calcul CPU à ce qui a été fait précédemment dans la littérature. On peut cependant comparer nos temps de calculs avec ceux issus de la thèse de Thibault Chevalier [35]. On reproduit ici une simulation pour comparer avec son maillage qui comporte le plus d'éléments (19346). On réutilise sa géométrie ($D = H = 2$, $L = 4$ et $L_{inout} = 8$) et on maille un peu plus finement que [35] car on ne peut pas reconstruire un maillage qui a exactement le même nombre de mailles que chez Chevalier ($\Delta x = 8 \cdot 10^{-2}$ ce qui donne 30000 éléments). Pour ce test, Chevalier mentionne un temps CPU de 10h sur un seul processeur. Pour comparer, notre code (tournant également sur $n_p = 1$ processeur) amène l'algorithme à convergence en 20 à 40 minutes pour différents nombres de Bingham. *Notre code est donc environ 15 fois plus rapide à configuration identique et à maillage plus raffiné.*

2.4.3 Des champs typiques de vitesse et déformation

La figure 2.13 montre des champs de vitesse et pression typiques. La partie en bas à droite montre le multiplicateur $|d|$, approximation de $|D(\mathbf{u})|$. La première chose à remarquer est que tous les champs sont symétriques par rapport aux axes vertical et horizontal. Cela est dû à la symétrie du domaine et des conditions de bords ainsi qu'à l'absence des termes inertiels que l'on aurait eu dans un système de Navier-Stokes complet. De ce fait, on ne montrera souvent dans la suite que des quarts de domaines. De plus, comme fait régulièrement dans la littérature, on recouvre les zones plastiques avec des patchs gris, puisque les contraintes ne sont pas uniques dans les zones de plug. On ne peut donc pas donner de sens aux pressions et contraintes calculées numériquement dans ces zones.

2.4.4 Détermination des zones de plug et de pseudo-plug

Une grande problématique est la localisation numérique des zones plastiques à partir des champs de déformation et du multiplicateur d. Sur la figure 2.13 en bas, à droite est montré tout le champ du multiplicateur $|d|$ (qui est équivalent au champ $|D(\mathbf{u})|$ puisqu'on est à convergence). Le champ est montré en échelle logarithmique, le minimum de l'échelle de couleur étant fixé à 10^{-15}, c'est à dire proche du zéro machine. À notre connaissance, très peu d'articles montrent ce champ $|d|$ en entier, [103] par exemple le montre mais sans utiliser l'échelle logarithmique. Une des seules présentations des champs $|d|$ en échelle logarithmique est faite dans [8]. La figure 2.14 montre respectivement les champs $|D(\mathbf{u})|$, $|d|$ et le résidu $|D(\mathbf{u}) - d|$ encore une fois en échelle logarithmique. Tout d'abord, on remarque que le résidu tombe effectivement entre 10^{-15} et 10^{-8} partout, preuve que l'on est bien proche de la convergence $D(\mathbf{u}) = d$. On observe également une

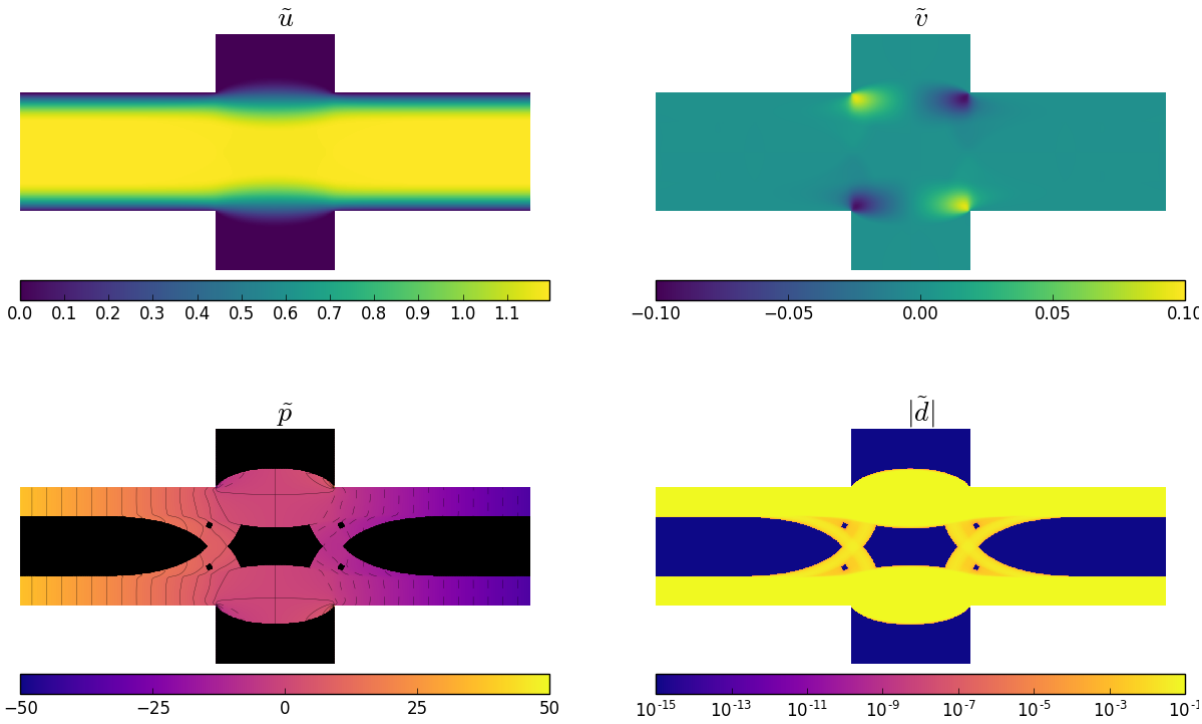


FIGURE 2.13 – Solution numérique : $\delta = 0.5$, $h = 2$ et $B = 5$. En haut (de gauche à droite) : Les composantes u et v de la vitesse. En bas : les champs de pression et du multiplicateur $|d|$.

grande différence de niveau entre la zone fluide et celle où d atteint le zéro machine. La transition entre la zone $|d| \leqslant 10^{-15}$ celle $|d| \geqslant 10^{-1}$ est très souvent fine. En tout cas, elle ne représente qu'une ou quelques mailles dans le canal d'entrée/sortie et proche du plug et de la zone morte de la cavité, ce qui est un bon indicateur de la convergence.

À partir de ces deux facteurs, on va pouvoir définir un indicateur de la zone plastique. Les champs $|D(\mathbf{u})|$ et $|d|$ sont de bons indicateurs des zones plastiques. Cependant, $|d|$ est légèrement meilleur pour deux raisons. Premièrement, la mise à jour de la variable duale se fait point par point en utilisant un seuil plastique calculé localement tandis que $D(\mathbf{u})$ est calculé à partir de différences discrètes de $\mathbf{u}$. Deuxièmement, ce calcul de seuil plastique fait tomber directement le multiplicateur à zéro tandis qu'il y a très souvent un petit résidu dans le champ $D(\mathbf{u})$. Quantitativement, il apparaît que prendre la zone $\{|d| \leqslant 10^{-15}\}$ ou en deçà d'une ligne de niveau plus haute (jusqu'à 10^{-8}) pour définir la zone plastique ne change pas cette dernière. De ce fait, dans la suite, on définit la zone plastique comme étant la zone $\{|d| \leqslant \varepsilon\}$ avec $\varepsilon \leqslant 10^{-8}$. Et dans toute la suite, on décide de travailler avec le champ $|d|$ à la place de $|D(\mathbf{u})|$ pour cette raison.

Par ailleurs, si l'on regarde de plus près le voisinage des patchs de plug (montré figure 2.15), on observe tout une zone à l'entrée de la cavité avec un patch de plug entouré de matériau qui se déforme très peu. Dans cette zone, les valeurs de la déformation se trouvent entre 10^{-5} et 10^{-3}. Le matériau se déforme donc, puisque le multiplicateur n'est pas tombé à 0. La déformation est cependant négligeable devant celle plus proche du mur en entrée-sortie. On parle dans ce cas de zone de *pseudo-plug* [131], [103].

L'étude du comportement de la zone plastique par rapport au raffinement de maillage est présenté figure 2.16. Cette figure décrit l'évolution de la surface où le seuil est atteint dans un écoulement donné lorsque le maillage se raffine (ces surfaces étant définies comme les lignes de

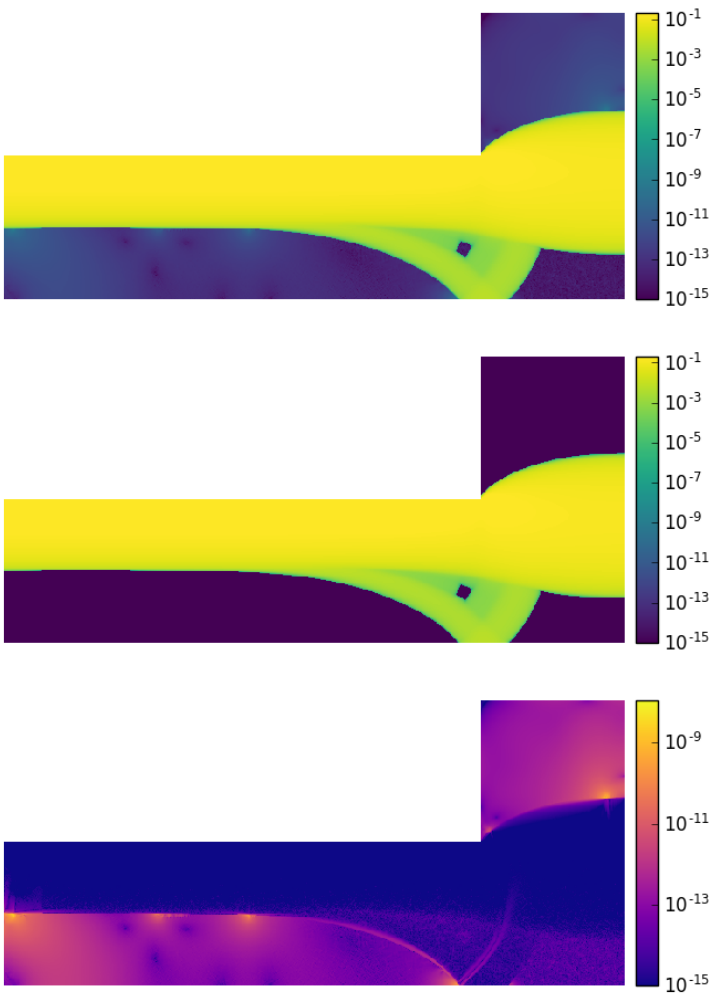


FIGURE 2.14 – Justification de la localisation des zones plastiques. $\delta = 0.5$, $h = 2$ et $B = 5$. De haut en bas : $|D(\mathbf{u})|$, $|d|$ et le résidu $|D(\mathbf{u}) - d|$.

niveau $|d| = 10^{-10}$). Elles sont très proches l'une de l'autre. Par ailleurs, le volume de la zone rigide croît et semble converger vers un plug limite. Cette convergence est un autre argument en faveur du caractère bien posé de l'algorithme discrétisé. Entre les deux maillages les plus fins, la différence entre les deux zones plastiques calculées est très fine (de l'ordre d'une maille). De fait, cela va nous permettre de travailler avec des maillages plus lâches pour réduire drastiquement les temps de calculs. Dans la suite, la plupart des simulations sont réalisées avec 600 points dans une section verticale de l'intérieur de la cavité, (ce qui donne $\Delta x = h/300$).

2.4.5 Comparaison avec des résultats en éléments finis

Un dernier point intéressant à soulever est la différence entre les discrétisations élements finis et différences finies. Les éléments finis sont très utiles et très utilisés dans la littérature avec les nombreuses librairies et outils développés, notamment le raffinement avec maillage adaptatif. L'idée est ici de comparer nos résultats notamment à ceux de [108, 110], et [107], qui sont à notre connaissance les plus exhaustifs parus à ce jour, et voir l'impact du caractère structuré du maillage.

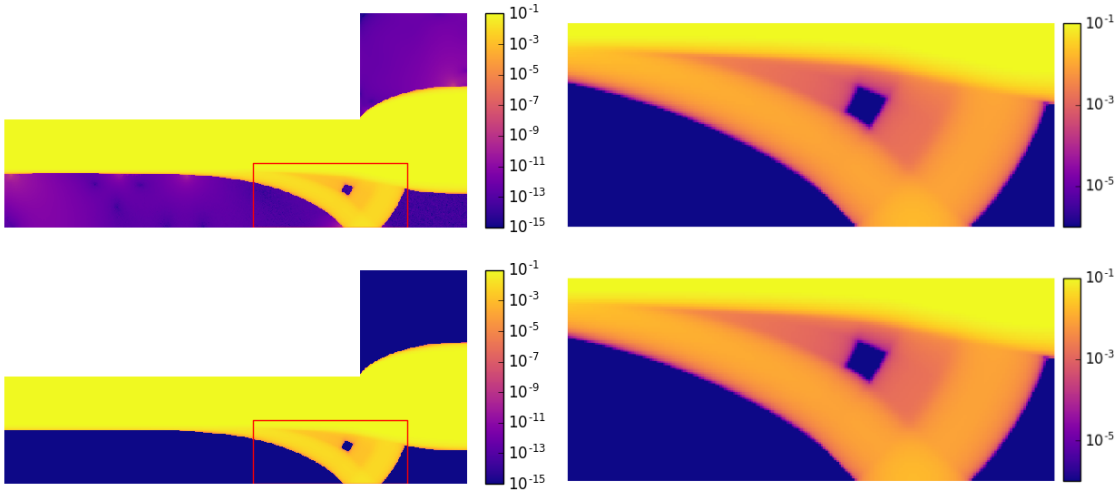


FIGURE 2.15 – Zoom de la figure 2.14 (sans le résidu). Il est à noter que les échelles de couleur ont aussi été zoomées.

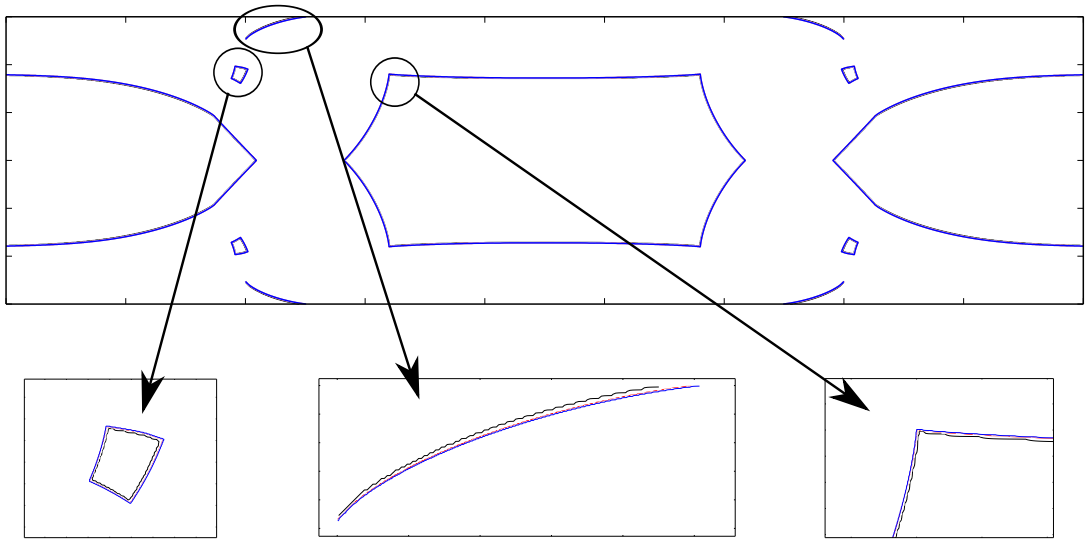


FIGURE 2.16 – Raffinement de maillage : $\delta = 1/5$, $h = 6/5$ et $B = 20$. Contour $|d| = 10^{-10}$ pour $\Delta x = 4 \cdot 10^{-3}$ (noir), $\Delta x = 2 \cdot 10^{-3}$ (rouge) and $\Delta x = 1.6 \cdot 10^{-3}$ (bleu).

Zoologie des plugs

On compare les différentes zones rigides possibles obtenues avec celles de [110]. Des exemples sont donnés sur les figures 2.17, 2.18, 2.19 et 2.20. On peut observer trois régimes différents de zones plastiques sur la figure 2.17. Lorsque B est élevé, le plug central est d'un seul tenant, i.e. tout le matériau au milieu du domaine bouge de manière rigide. À l'inverse, pour de petites valeurs de B, on observe une rupture dans ce plug central, le plug de l'entrée s'achevant par un point de rebroussement. Entre ces deux régimes, il existe un régime de transition (voir par exemple $B = 5$, en Magenta sur la figure 2.17). Dans ce régime, le plug central n'est toujours pas connexe mais des patchs de plugs quadrangulaires apparaissent entre les deux composantes principales. Ces patchs croissent avec B pour finalement fusionner avec le reste de la zone rigide

centrale. Par ailleurs, on retrouve bien le fait que la zone morte occupe tout le fond de la cavité pour des fluides très plastiques et n'occupe qu'une partie du coin de la cavité pour des seuils moins élevés. Évidemment, les B marquant les différents changements de régime dépendent très

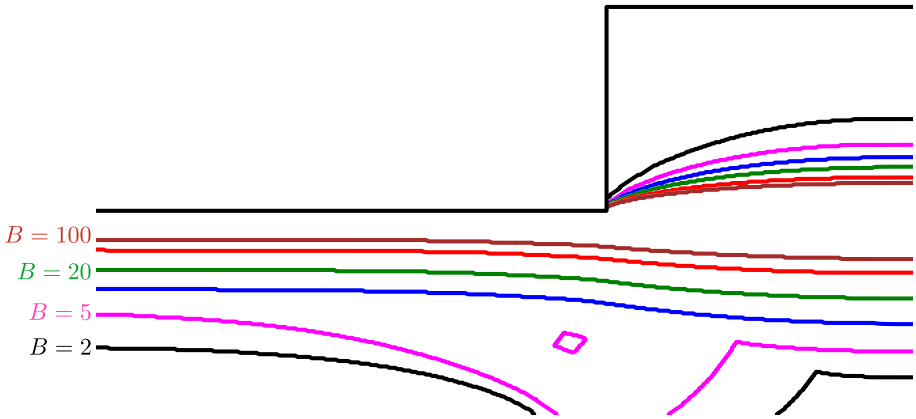


FIGURE 2.17 – Des zones plastiques pour différents B entre 2 et 100. $\delta = 0.5$, $h = 2$.

fortement de la géométrie et de ses différents aspect-ratios. Par exemple, obtenir un plug central connexe est beaucoup plus difficile lorsque δ est bas, tandis que baisser h va au contraire favoriser l'existence de ce plug. Ceci est cohérent avec l'intuition que l'on a pour $\delta = 0$ (i.e. une cavité infinie), à savoir qu'un écoulement de type Poiseuille se met en place loin de la discontinuité. Pour ce qui est de la zone morte, il en va de même. Si h croît à δ fixé, la zone morte va croître pour, à un moment occuper tout le fond de la cavité. Par ailleurs, il va exister une taille de marche telle qu'au-delà, l'écoulement ne changera pas et ne rajoutera que de la zone morte au fond de la cavité. Ce phénomène (appelé *self-selection*), s'il a été étudié analytiquement (voir [84] et [85] pour le cas d'un écoulement antiplan) a également été observé numériquement [110], [109] dans le cas de l'expansion-contraction. Nos résultats en différences finies se comparent donc bien avec ceux de [110] en éléments finis. Par ailleurs, ceci est aussi en accord avec les résultats expérimentaux de [42]. Enfin, les champs $|d|$ nous donnent des informations supplémentaires sur la structure de

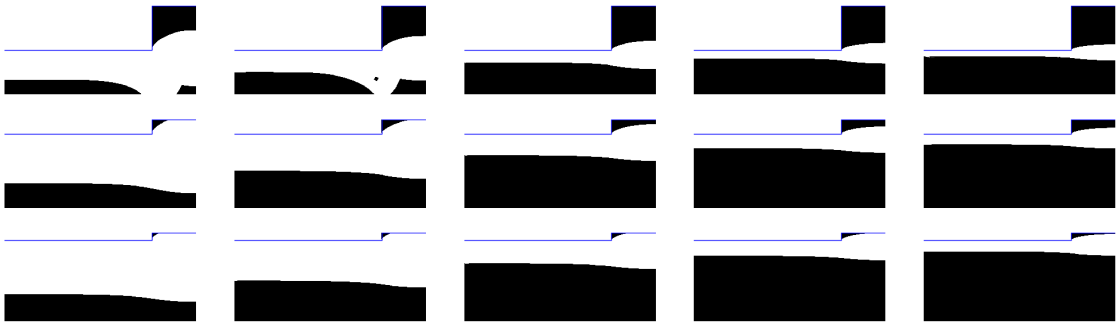


FIGURE 2.18 – Différentes zones plastiques : $h\delta = 1$. De gauche à droite, $B = 2$, 5, 20, 50 et 100. De haut en bas, $h = 2$, 6/5 et 12/11.

ces pseudo-plugs (voir figures 2.15 et 2.21). On remarque une structure particulière des champs $|d|$ dans cette zone. Les lignes de niveau du multiplicateur sont en effet parallèles à la zone de plug. Cela signifie que dans cette zone, les contraintes (qui ne dépassent que très légèrement le seuil) ont leurs propres lignes de niveau parallèles à celle de la limite rigide/fluide. Cette

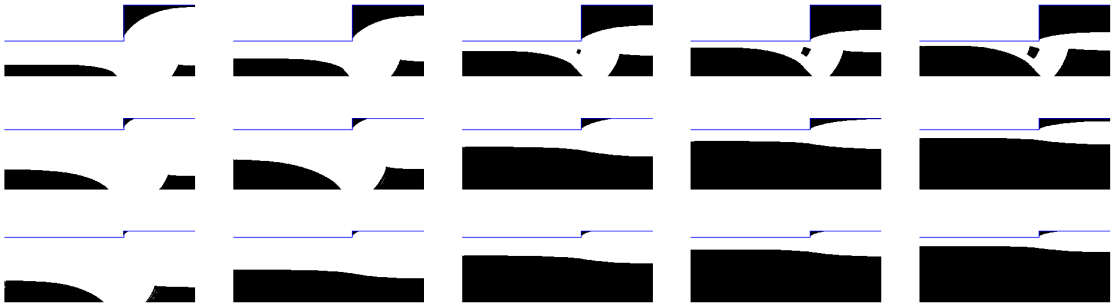


FIGURE 2.19 – Différentes zones plastiques : $h\delta = 1/2$. De gauche à droite, $B = 2$, 5, 20, 50 et 100. De haut en bas, $h = 2$, 6/5 et 12/11.

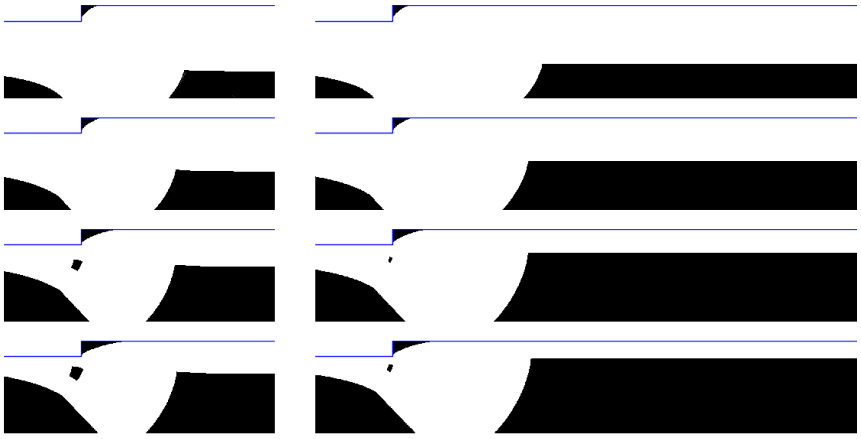


FIGURE 2.20 – Différentes zones plastiques pour $h = 6/5$ et $\delta = 1/5$ (à gauche) et 1/12 (à droite). De haut en bas, $B = 2$, 5, 20 et 50.

structure particulière serait à rapprocher de la construction des lignes de glissements présentée section 1.2.3. En effet, il serait possible d'adapter la méthode des caractéristiques présentée dans [8] pour des lignes de niveau $\tau = \tau_y + \delta$ avec $\delta \ll \tau_y$ qui seraient parallèles aux lignes de niveau $\tau = \tau_y$. Ceci expliquerait la structure particulière des zones de pseudo-plug.

Précision des zones rigides

On peut également comparer les résultats donnés par une discrétisation différences finies avec ceux en éléments finis de la littérature. On compare notamment figure 2.22 la zone plastique obtenue ici avec celle de la figure 14 de [108] (on s'est placé dans des géométries et des seuils comparables ainsi que des pas de maillages comparables au niveau de la zone plug). On remarque que du fait du caractère structuré de la grille, les zones rigides sont plus régulières. Par ailleurs les champs de contraintes qui présentent quelques irrégularités proche de la zone plug en éléments finis sont plus lisses en différences finies. Cela nécessite cependant de beaucoup plus mailler (y compris dans les zones fluides) et donc de résoudre des systèmes linéaires d'autant plus gros. Chaque méthode a donc ses avantages suivant les objectifs poursuivis.

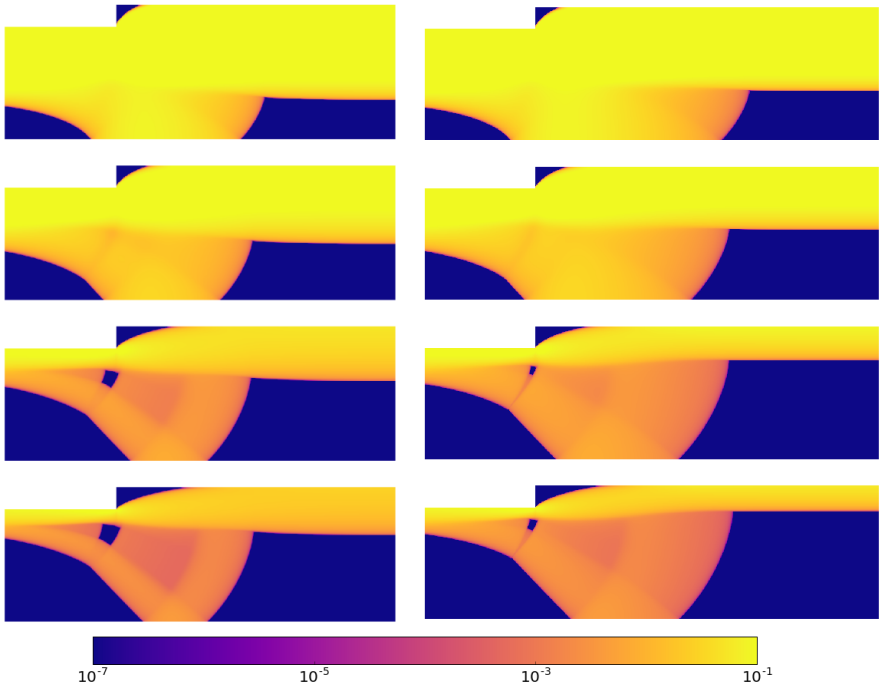


FIGURE 2.21 – Les champs de déformations entiers. Mêmes configurations que la figure 2.20.

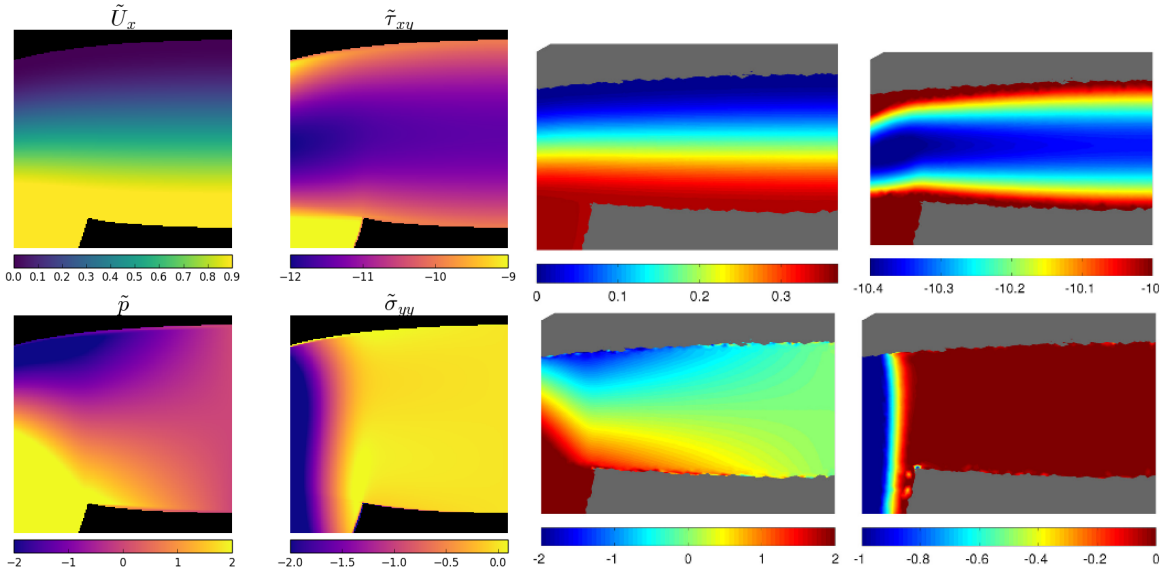


FIGURE 2.22 – Comparaison de nos résultats avec la figure 14 de [108].

2.5 Passage de Bingham à Herschel-Bulkley

Dans le cas Herschel-Bulkley, la loi constitutive se généralise (dans la partie fluide) en :

$$\begin{aligned} \tau = 2K|2D(\mathbf{u})|^{n-1}D(\mathbf{u}) + \tau_y \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0, \\ |\tau| \leqslant \tau_y, \text{ ssi } D(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

avec K la viscosité (la viscosité apparente étant $K|2D(\mathbf{u})|^{n-1}$). **Dans toute la suite, on se limite (pour coller au mieux aux expériences) au cas $n \in]0,1]$.**

2.5.1 Extension des résultats précédents

Le cas Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille dans une cavité infinie de demi-largeur R se résout de la même manière qu'au chapitre 1. L'équation de conservation de la quantité de mouvement se résout à nouveau en $\tau_{xy} = DPy$ avec DP le forçage en pression constant (que l'on choisit à nouveau négatif) et le rayon de plug est à nouveau $y_p = \frac{\tau_y}{|DP|}$. On dispose encore de deux cas :

— Si $R < \frac{\tau_y}{|DP|}$, alors il n'y a pas d'écoulement et $u_{pois} = 0$.
— Sinon, la vitesse vérifie alors :

$$K|\partial_y u_{pois}|^{r-1}\partial_y u_{pois} + \tau_y sgn(\partial_y u_{pois}) = DPy \text{ si } |y| > y_p \text{ et } \partial_y u_{pois} = 0 \text{ sinon.}$$

et est donc donnée par :

$$u_{pois}(y) = \begin{cases} \left(\frac{|DP|}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1}\left((R-y_p)^{1+1/n} - (y-y_p)^{1+1/n}\right) \text{ si } y > y_p, \\ \left(\frac{|DP|}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1}(R-y_p)^{1+1/n} \text{ si } |y| \leqslant y_p, \\ \left(\frac{|DP|}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1}\left((R-y_p)^{1+1/n} - (-y-y_p)^{1+1/n}\right) \text{ si } y < -y_p. \end{cases}$$

La formulation faible

De manière identique au cas Bingham, on multiplie l'équation de Stokes par $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ (avec $\mathbf{v}$ fonction H^1 nulle au bord et à divergence nulle) et on intègre sur tout le domaine Ω,

$$\int_\Omega \tau : D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0.$$

Remplaçant τ par la loi consitutive de Herschel-Bulkley, il vient que la dernière intégrale vaut :

$$\int_\Omega \tau : D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_\Omega K|2D(\mathbf{u})|^{n-1} 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_\Omega \tau_y \frac{D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}.$$

Or,

$$|D(\mathbf{u})|^{n-1} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \leqslant \frac{1}{n+1}\left(|D(\mathbf{v})|^{n+1} - |D(\mathbf{u})|^{n+1}\right).$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, à divergence nulle,

$$I(\mathbf{u}) \leqslant I(\mathbf{v}) \text{ où } I(\mathbf{v}) = \int_\Omega \frac{2^n K}{n+1}|D(\mathbf{v})|^{n+1} + \int_\Omega \tau_y |D(\mathbf{v})|.$$

Le problème équivalent devient donc :

$$\underset{\text{div}(\mathbf{v})=0}{\arg\min} I(\mathbf{v}). \tag{2.53}$$

2.5.2 Adaptation de l'algorithme (A1)

En suivant la section 2.2, le problème (2.53) est équivalent à la recherche d'un point selle du Lagrangien augmenté suivant :

$$\mathcal{L}_{r,s}(\mathbf{v},q,l,\alpha)=\int 2^nK\frac{|q|^{n+1}}{n+1}+\tau_y\int_\Omega|q|+\int_\Omega\alpha:(D(\mathbf{v})-q)+\int_\Omega l\mathrm{div}(\mathbf{v}) \\ +\frac{r}{2}\int_\Omega|D(\mathbf{v})-q|^2+\frac{s}{2}\int_\Omega(\mathrm{div}(\mathbf{v}))^2 \quad (2.54)$$

Il a la même structure que celui présenté section 2.2.1 remarque 9 hormis le terme visqueux qui n'est plus un terme quadratique mais une puissance plus générale. Cela aura pour conséquence

— de traiter le terme visqueux non plus dans l'étape de Stokes mais dans celle de mise à jour du multiplicateur d,

— de transformer cette étape de minimisation point à point en une équation non linéaire.

Reprenons l'étape 2 de l'algorithme **(A1)**. Encore une fois, on va minimiser point par point la fonctionnelle :

$$G(q)=\int_\Omega F(q)=\int_\Omega 2^nK\frac{|q|^{n+1}}{n+1}+\tau_y\int_\Omega|q|+\int_\Omega\alpha:(D(\mathbf{v})-q)+\frac{r}{2}\int_\Omega|D(\mathbf{v})-q|^2$$

La fonction F est différentiable pour $q\neq 0$ et (en remplaçant α par le minimiseur en α noté λ) :

$$F'(q)=2^nK|q|^{n-1}q+\tau_y\frac{q}{|q|}+r(q-D(\mathbf{u}))-\lambda.$$

Par ailleurs, on montre comme précédemment que le sous différentiel de F en 0 est :

$$\partial F(0)=\{s-(\lambda+rD(\mathbf{u}),|s|<\tau_y\}$$

Résolvons $\frac{\partial F}{\partial q}=0$.

$$F'(q)=0 \text{ ssi } \underbrace{\left(\frac{\tau_y}{|q|}+\frac{2^nK}{|q|^{1-n}}+r\right)}_{>0}q=\lambda+rD(\mathbf{u}).$$

Cela nous dit que q et $\lambda+rD(\mathbf{u})$ sont alignés et même plus précisément que

$$q=|q|\frac{\lambda+rD(\mathbf{u})}{|\lambda+rD(\mathbf{u})|},$$

où $|q|$ qui est solution de

$$P(X)\equiv 2^nKX^n+rX=|\lambda+rD(\mathbf{u})|-\tau_y. \quad (2.55)$$

Cette équation a une unique solution positive si et seulement si $|\lambda+rD(\mathbf{u})|\geqslant\tau_y$. Finalement :

$$\mathrm{arginf}_qF(q)=\begin{cases}0 \text{ si } |\lambda+rD(\mathbf{u})|<\tau_y,\\ X\dfrac{\lambda+rD(\mathbf{u})}{|\lambda+rD(\mathbf{u})|} \text{ si } |\lambda+rD(\mathbf{u})|\geqslant\tau_y,\end{cases} \text{ avec } P(X)=|\lambda+rD(\mathbf{u})|-\tau_y. \quad (2.56)$$

L'algorithme **(A1)** se généralise donc en **(A1b)** pour résoudre Stokes-Herschel-Bulkley.

Algorithme 3 – Résolution du problème complet (2.20)-(2.52) **:**

— **Initialisation :** On initialise p^0, d^0, λ^0 (à 0 ou à un champ quelconque)

— **Boucle en** i **:** $i\geqslant 1$

1. Sous-problème de Stokes généralisé : résoudre $(\mathbf{u}^i, p^i)$:

$$\begin{aligned} -r\nabla.(D(\mathbf{u}^i)) + \nabla p^i &= \nabla.(\lambda^{i-1} - rd^{i-1}) \\ \nabla.\mathbf{u}^i &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

2. Résolution explicite point par point pour d :

$$d^i = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow |\lambda^{i-1} + rD(\mathbf{u}^i)| \leqslant \tau_y \\ X\dfrac{\lambda + rD(\mathbf{u})}{|\lambda + rD(\mathbf{u})|} \text{ sinon, avec } P(X) = |\lambda + rD(\mathbf{u})| - \tau_y. \end{cases} \tag{2.58}$$

3. Mise à jour du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + r(D(\mathbf{u}^i) - d^i) \tag{2.59}$$

— **Sortir de la boucle dès que :** $\|D(\mathbf{u}^i) - d^i\|_{L^2} \leq tol_B$ **ou** $i = N_{max,B}$.

2.5.3 La résolution de (2.55)

Dans ce cas, on a envie d'utiliser une méthode de Newton, puisque P est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e.
Algorithme de Newton pour résoudre l'équation (2.55) :
Notons $z = |\lambda + rD(\mathbf{u})| - \tau_y$.

— **Initialisation :** On initialise $X_0 > 0$,

— **Boucle en** l **:** Mise à jour de la solution :

$$X_{l+1} = X_l - \frac{rX_l + \alpha X_l^n - z}{r + n\alpha X_l^{n-1}},$$

— **Sortir de la boucle dès que :** $|X_{l+1} - X_l| \leqslant tol_{Newt}$ **ou** $l = N_{max,Newt}$.

Mais il faut procéder avec attention. Le problème qui se pose vient du fait que la dérivée de P explose au voisinage de 0. Des problèmes vont donc apparaître lorsque z sera petit (ce qui est embêtant justement parce que ce sont les zones que l'on veut capturer avec précision). Il ne faut cependant pas pour autant oublier Newton. Du fait de l'explosion de P en 0 et de sa croissance linéaire à l'infini, si l'initialisation de Newton est choisie trop loin de la solution, les itérations successives se retrouveront à un certain rang dans les négatifs où P n'est pas défini. Un calcul simple montre que

$$X_l > \left(\frac{z}{2^n K(1-n)}\right)^{1/n} \Leftrightarrow X_{l+1} < 0.$$

Et à notre connaissance, il n'y a pas vraiment de moyen simple de déterminer à z fixé l'ensemble des X_0 tels que $X_l > 0$ pour tout l.

Un cas simple : $n = 0.5$

Le cas $n = 1/2$ est le plus simple. Dans ce cas, on a de fait une expression explicite. En effet, posant $Y = \sqrt{X}$, il vient que

$$rY^2 + \sqrt{2}KY - z = 0,$$

et on a une solution explicite :

$$X = \left(\frac{-\sqrt{2}K + \sqrt{2K^2 + 4rz}}{2r}\right)^2 \tag{2.60}$$

On va pouvoir adapter ça pour $n \in]0, 1[$ quelconque.

n quelconque

Dans ce cas, on peut découpler les difficultés : en posant $Y = X^n$, il vient que

$$\tilde{P}(Y) - z = rY^{1/n} + 2^n KY - z = 0,$$

avec cette fois $\tilde{P}$ qui est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}_+$ tout entier qui est globalement convexe et que l'on peut prolonger en une fonction C^1 convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\tilde{Q}(Y) = \tilde{P}(Y) \text{ si } Y > 0, \text{ et } 2^n KY - z \text{ sinon.}$$

Ici, on va pouvoir d'abord utiliser Newton puis ensuite passer le tout à la puissance $1/n$. Attention cependant, si l'exposant n est plus grand que 0.5, la dérivée seconde de $\tilde{Q}$ explosera en 0. On préférera dans ce cas la méthode de la sécante même si l'ordre 2 de la méthode ne peut être assuré.

Pour les cas où z est petit !

Le problème qui apparaît alors est que l'on doit calculer beaucoup de puissances avec des exposants non entiers ce qui coûte beaucoup de temps CPU a priori. Il existe un moyen de contourner le problème pour z petit. En effet, si z est petit, les solutions de (2.55) le seront aussi et on aura l'estimée $X = o(X^n)$. Quantitativement, si on note X_z la solution de $P(X) = z$, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 20 $\lim_{z\to 0} X_z = 0$ *et on a le développement asymptotique suivant :*

$$X_z = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n} - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2/n}\frac{r}{z} + o(z^{2/n-1}) \tag{2.61}$$

avec $\alpha = 2^n K$.

Preuve : L'équivalence $X \sim \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n}$ est évidente. Posons $Y = X - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n} = o\left(\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n}\right)$. On a alors en remplaçant :

$$\begin{aligned}
r\left(Y + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n}\right) + \alpha\left(Y + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n}\right)^n - z = 0 \\
rY + r\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{1/n} + z\left(1 + \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{1/n} Y\right)^n - z = 0 \\
o(z^{1/n}) + \frac{r}{\alpha} z^{1/n} + z\left(1 + n\left(\frac{\alpha}{z}\right)^{1/n} Y + o\left(Yz^{-1/n}\right)\right) - z = 0 \\
o(z^{1/n}) + \frac{r}{\alpha^{1/n}} z^{1/n} + nz^{1-1/n}\alpha^{1/n} Y + o\left(Yz^{1-1/n}\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim C_1 z^{2/n-1}$ et les termes dans les o sont d'ordre inférieur ou égal à $z^{1/n}$. Donc

$$Y \sim -\frac{1}{n}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2/n}\frac{r}{z}$$

□

Un calcul long et fastidieux permet de montrer que le développement asymptotique à $k+1$ termes de X est de la forme :

$$X_z = \sum_{i=0}^{k} f_i(n)\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{(i+1)/n}\left(\frac{r}{z}\right)^i + o(z^{(k+1)/n-k}), \tag{2.62}$$

avec $f_0(n) = 1$ et $(f_1, \cdots, f_k)$ vérifiant pour tout $|z| < 1$,

$$\alpha \sum_{m_1+2m_2+\cdots+km_k \leqslant k} \frac{n(n-1)\cdots(n-\sum_i m_i+1)}{m_1!\cdots m_k!} \left(\frac{r}{\alpha^{1/n}}\right)^{\sum_i im_i} \prod_{i=1}^{k} f_i^{m_i} z^{(1-1/n)\sum_i im_i+1} + r\sum_{p=1}^{k} f_{p-1}\left(\frac{r}{\alpha^{1/n}}\right)^{p-1} z^{(1-1/n)p+1} = 0.$$

On obtient donc f_k en fonction de $(f_0, \cdots, f_{k-1})$. En effet, le seul terme en f_k qui intervient dans la somme précédente est celui pour $(m_1, \cdots, m_k) = (0, \cdots, 0, 1)$. Ainsi, en regardant le terme en $z^{k/n-k+1}$, il vient que :

$$f_k = -\frac{1}{n} f_{k-1} - \frac{1}{n} \sum_{m_1+2m_2+\cdots+(k-1)m_{k-1}=k} \frac{n(n-1)\cdots(n-\sum_i m_i+1)}{m_1!\cdots m_{k-1}!} \prod_{i=1}^{k-1} f_i^{m_i}.$$

Appliquant cette relation, on trouve par exemple que :

$$f_2(n) = -\frac{n-3}{2n^2} \text{ et } f_3(n) = \frac{-n^2+6n-8}{3n^3} = -\frac{(n-4)(2n-4)}{6n^3}.$$

(et cela a été vérifié aussi par le développement asymptotique classique). Le développement à tout ordre n'est pas forcément intéressant puisque un développement à 2 ou 3 termes suffira amplement pour atteindre une erreur très basse pour une bonne partie des z (comme on le verra ci-dessous).

Propriété 8 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(n) = \frac{P_k(n)}{n^k}$ avec $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.*

Preuve : La propriété est vraie au rang $k = 1$, puisque $f_1(n) = -\frac{1}{n}$.
Supposons qu'elle soit vraie pour tout rang $i \leqslant k-1$.
Posons $E_k = \{(m_1, \cdots, m_{k-1}), \sum_i m_i \leqslant k,\ \sum_i im_i = k\}$. Alors :

$$f_k(n) = -\frac{P_{k-1}(n)}{n^k} - \frac{1}{n} \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1})\in E_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-\sum_i m_i+1)}{m_1!\cdots m_{k-1}!} \prod_{t=1}^{k-1} \frac{P_t^{m_t}}{n^{tm_t}}.$$

Ainsi, il vient que $f_k(n) = \frac{P_k(n)}{n^k}$ avec :

$$P_k(n) = -P_{k-1}(n) - \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1})\in E_k} \frac{(n-1)\cdots(n-\sum_i m_i+1)}{m_1!\cdots m_{k-1}!} \prod_{t=1}^{k-1} P_t^{m_t}.$$

Chaque terme de la somme est de degré $\sum_i m_i - 1 + \sum_t (t-1)m_t = k-1$. La propriété est donc vraie au rang k.

□

Par ailleurs, on fait **l'hypothèse** suivante qui semble se dégager du calcul des premiers termes du développement :

$$\forall k > 1, P_k(n) = -\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(jn-k-1)}{k!}. \tag{2.63}$$

Remarque 15 *Il est intéressant de constater que cette approximation semble marcher d'autant mieux que n est petit. Ça semble un peu contre-intuitif vu que baisser n augmente le caractère non-linéaire du problème. Mais en fait, cela s'explique par le fait que baisser n donne une meilleurs estimation initiale de la solution. Cela peut aussi s'expliquer par le fait que $n = 0$ est également un cas très simple à résoudre ! Enfin, il faut faire attention aussi au fait que $f_k(n) \sim_{n\to 0} \frac{C}{n}$.*

Propriété 9 *Si la relation (2.63) est vraie, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} u_k(n) = \lim_{k\to+\infty} f_k(n) \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{(k+1)/n} \left(\frac{r}{z}\right)^k = 0$$

si et seulement si

$$\frac{r\mathrm{e}}{n\alpha^{1/n}} z^{1/n-1} < 1. \tag{2.64}$$

Preuve : Supposons la relation (2.63) vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_k(n) &\sim_{k\to+\infty} \frac{(n-k-1)\cdots((k-1)n-k-1))}{k!n^k} \frac{z}{\alpha} \left(z^{1/n-1}\frac{r}{\alpha^{1/n}}\right)^k \\ &\sim_{k\to+\infty} -\frac{z}{\alpha}\frac{(k+1)^{k-1}}{\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}} \left(-z^{1/n-1}\frac{r\mathrm{e}}{n\alpha^{1/n}}\right)^k \\ &\sim_{k\to+\infty} -\frac{z}{\alpha}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1}}_{\to \mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}k^{3/2}} \left(-z^{1/n-1}\frac{r\mathrm{e}}{n\alpha^{1/n}}\right)^k \end{aligned}$$

cette dernière qui tend vers zéro si et seulement si le terme entre parenthèse est de valeur absolue strictement plus petite que 1, ce qui donne la propriété. □

Propriété 10 *Si $u_k(n)$ converge vers 0, la suite $(|u_k(n)|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante en k.*

Preuve : Notons $v_k(n) = \left|\frac{u_k(n)}{u_{k-1}(n)}\right|$. Alors,

$$\begin{aligned} v_k(n) &= \frac{(k+1-n)\cdots(k+1-(k-1)n))}{k!n^k} \frac{(k-1)!n^{k-1}}{(k-n)\cdots(k-(k-2)n))} \underbrace{z^{1/n-1}\frac{r}{\alpha^{1/n}}}_{<\frac{n}{\mathrm{e}}} \\ &< \prod_{i=1}^{k-2}\left(1+\frac{1}{k-in}\right)\frac{k+1-(k-1)n}{k}\frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

On en déduit que si $n < n'$, $v_k(n) < v_k(n')$. De plus,

$$v_k(0) < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1}\frac{1}{\mathrm{e}} = \exp\left(-\frac{3}{2k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Donc $v_k(0)$ est majorée par une suite plus petite que 1 convergeant vers 1. Au final, il vient que lorsque $n \in [0,1]$

$$\left|\frac{u_k(n)}{u_{k-1}(n)}\right| \leqslant \left|\frac{u_k(0)}{u_{k-1}(0)}\right| < 1$$

et la suite $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante. □

Ainsi, le caractère alterné de la série de terme général $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa décroissance permettent d'en déduire la propriété suivante :

Propriété 11 *Si la relation (2.63) est vraie et si z vérifie la relation (2.64), alors l'erreur faite sur X_z est majorée par :*

$$\left| X_z - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P_i(n)}{n^k} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{(i+1)/n} \left(\frac{r}{z}\right)^i \right| \leqslant \left| \frac{P_k(n)}{n^k} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{(k+1)/n} \left(\frac{r}{z}\right)^k \right|.$$

Or, pour $\varepsilon > 0$,

$$\frac{z^{(k+1)/n-k} r^k}{2^k K^{k/n}} |f_k(n)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow z \leqslant \left(\frac{2^k K^{k/n}}{|f_k(n)| r^k} \varepsilon \right)^{n/(k+1-kn)}$$

Remarque 16 *Pour donner un ordre d'idée, si $K = 10$, $n = 0.4$ et $r = 200$, alors la série converge dès que $z \leqslant 0.6$ et si $\varepsilon = 10^{-18}$, un développement à trois termes va permettre d'appliquer le développement pour $z \leqslant 2.7 \cdot 10^{-3}$, et un développement à quatre termes sera valable dès que $z \leqslant 7.5 \cdot 10^{-3}$.*

On propose maintenant un algorithme de résolution de (2.55) :
Algorithme proposé pour résoudre l'équation (2.55) :
On s'est fixée une tolérance d'erreur égale à ε pour tout l'algorithme **(A1b)**

- Si $n = 1/2$, utiliser la formule (2.60),
- Sinon, si $z \leqslant \left(\frac{2^3 K^{3/n}}{|f_3(n)| r^3} \varepsilon \right)^{n/(4-3n)}$, on pose $X = \sum_{i=0}^{2} f_i(n) \left(\frac{z}{2^n K} \right)^{(i+1)/n} \left(\frac{r}{z} \right)^i$.
- Sinon, on applique un algorithme de Newton ($n \leqslant 0.5$)/sécante ($n > 0.5$) :
  - **Initialisation :** On pose $Y_0 = \left(\frac{z}{r}\right)$ si $n < 1/2$ et $(Y_0, Y_1) = \left(0, \frac{z}{r}\right)$ si $n > 1/2$,
  - Puis on construit la suite définie par :

$$Y_{k+1} = Y_k - \frac{\tilde{Q}(Y_k)}{\tilde{Q}'(Y_k)}, \text{ si } n < 1/2$$

$$Y_{k+1} = Y_k - \frac{Y_k - Y_{k-1}}{\tilde{Q}(Y_k) - \tilde{Q}(Y_{k-1})} \tilde{Q}(Y_k), \text{ si } n > 1/2$$

  - On s'arrête dès que $|Y_{k+1} - Y_k| < \varepsilon$,
  - On pose $X = Y_{k+1}^{1/n}$.

2.5.4 Un premier test sur Poiseuille

Par manque de temps, l'algorithme de résolution de Stokes-Herschel-Bulkley n'a été testé que dans le cas de la géométrie Poiseuille. La figure (2.23) montre les erreurs faites sur les écoulement de Poiseuille-Herschel-Bulkley en utilisant l'algorithme **(A1b)**. On retrouve les convergences à l'ordre 2 observées dans le cas Bingham, que ce soit au niveau des vitesses et des champs de déformation. L'extension naturelle est de faire tourner cet algorithme **(A1b)** dans le cas expansion-contraction pour étendre les résultats présentés au chapitre suivant et plus particulièrement dans la section 3.3.

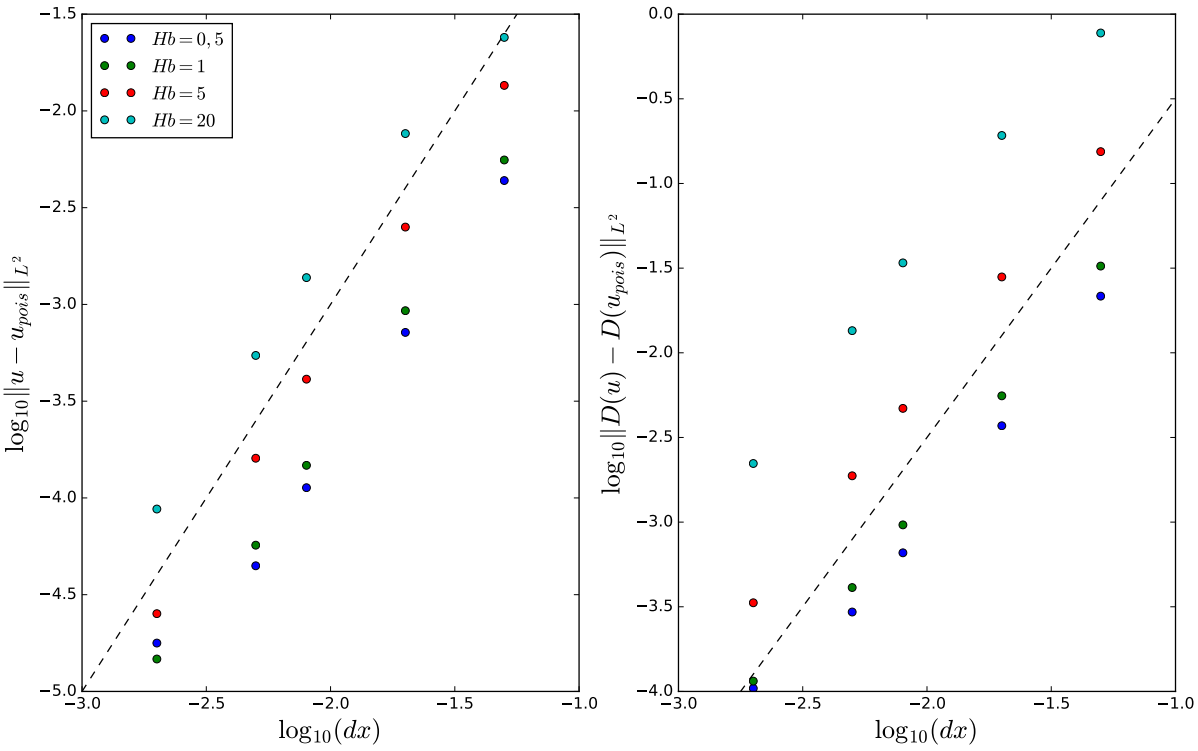


FIGURE 2.23 – Convergence sous raffinement de maillage de l'algorithme AL dans le cas d'un écoulement de Poiseuille-Herschel-Bulkley. À gauche : erreur faite sur les vitesses. À droite : erreur faite sur les gradients. Les droites en pointillés sont de pente 2.

Chapitre 3

Comparaison simulations - expériences : couches limites

Dans cette partie, on va donc utiliser les algorithmes de type Lagrangien Augmenté présentés au chapitre précédent pour comparer les simulations à des mesures expérimentales. Le premier objectif va être de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux récents des groupes de Philippe Coussot dans la thèse de Thibaut Chevalier d'une part (voir [36, 35]) et Guillaume Chambon (voir [77, 78]), d'autre part. On en tirera profit pour également affiner les résultats numériques présentés par Chevalier [35]. La partie 3.1 retrouve les résultats de Luu et co-auteurs [77] dans le cas de l'écoulement au dessus d'un obstacle. Dans les deux parties suivantes 3.2, 3.3, on s'intéresse aux questions de couche limite décrites en section 1.2.3. On va montrer que les résultats de [8] s'étendent dans le cas où B est modéré (de l'ordre de l'unité) et que l'approximation de couche limite reste valide dans une certaine mesure, quitte à redéfinir l'adimensionnalisation. Les sections 3.1-3.2 reprennent les parties 3 et 4 de [79] tandis que la section 3.3 est reprise de [126].

3.1 Un première comparaison dans le cas d'écoulement au dessus d'un obstacle

3.1.1 Description du dispositif expérimental

Redécrivons rapidement le dispositif expérimental présenté dans [77]. Ce dispositif comporte un long canal d'entrée et un long canal de sortie, les deux étant reliés par une marche. On injecte du carbopol[1] dans le canal d'entrée à un certain débit. Ce tuyau est suffisamment long pour qu'un régime de Poiseuille s'installe loin en amont et en aval de la marche (un schéma du dispositif est présenté figure 3.1). Du fait du changement brutal de la topographie du fond, une partie du matériau reste immobile au niveau de la marche tandis qu'au dessus une autre partie se déforme pour rentrer dans le canal de sortie. La première observation faite est le caractère parallèle des trajectoires au niveau de l'entrée dans le deuxième canal, faisant un certain angle θ avec le fond. Dans un repère tourné de θ, les coupes de vitesse (montrées figure 3.2 à droite) s'intersectent en un unique point (y_s, u_s). Cela signifie que le long de la ligne $y = y_s$, toutes les particules avancent à la même vitesse u_s (la vitesse verticale étant considérée comme négligeable). De ce fait, cette ligne est appelée *ligne de glissement*[2]. Qui plus est, ils montrent le caractère

1. Le carbopol est utilisé car il est l'un des prototypes de fluides vérifiant Herschel-Bulkley (quand bien même sa loi de comportement n'est pas purement viscoplastique), nous en reparlerons par la suite.

2. Il est à noter que la ligne de glissement considérée ici n'a pas le même sens que les lignes de glissement solides introduites en section 1.2.3.

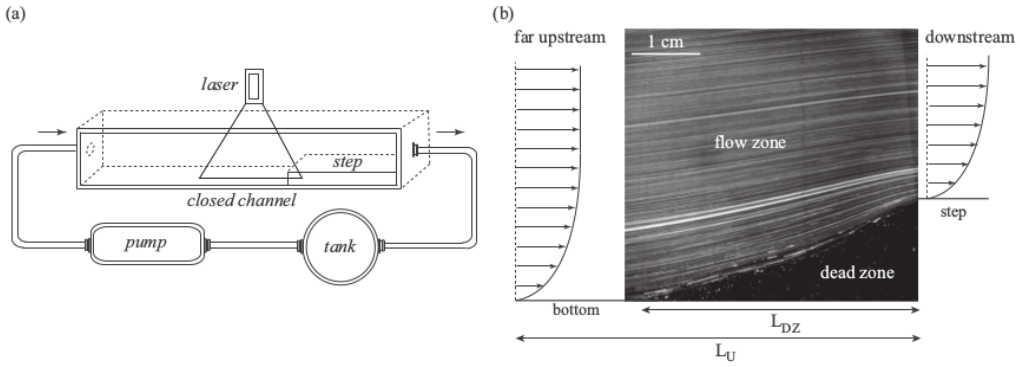


FIGURE 3.1 – Reproduction de la figure 2 de [77]. À gauche : schéma de la configuration expérimentale. À droite : lignes de courant au-dessus de la marche.

de type Poiseuille Herschel-Bulkley de la vitesse au-delà de cette ligne de glissement.

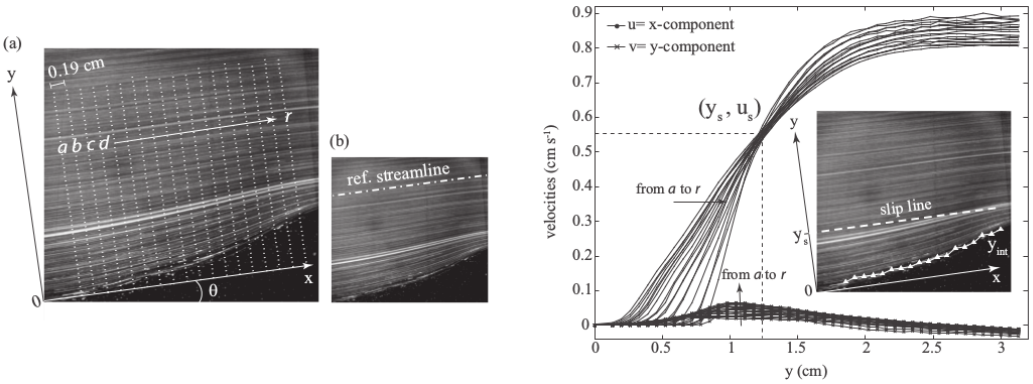


FIGURE 3.2 – Reproduction des figures 4 et 5 de [77]. À gauche : le lieu des profils de vitesses montrées à droite. À droite : existence de la ligne de glissement.

3.1.2 Adéquation de la cavité pour les comparaisons

Dans cette section, on va donc se ramener au cas de l'obstacle mais utiliser les simulations en cavité complète quand bien même les deux configurations ne sont pas les mêmes. En effet, intuitivement si la cavité est assez longue, un régime Poiseuille ou quasi-Poiseuille va s'installer au milieu de cette cavité. Dans toute cette partie, on travaille donc avec des cavités longues. Les deux géométries observées sont $h = 6/5$ et $\delta = 1/5$ ou $\delta = 1/12$. Reprenant la solution du régime unidimensionnel de Poiseuille, on en déduit que la vitesse de plug u_{plug} et le début de la zone rigide y_{plug} sont reliés par l'équation suivante (voir [77]) :

$$\left(\frac{u_{plug} - u(y)}{u_{plug}}\right)^{1/2} = \begin{cases} 1 - \dfrac{y}{y_{plug}} \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant y_{plug} \\ 0 \text{ si } y > y_{plug}, \end{cases} \tag{3.1}$$

ou plus simplement que $\sqrt{u_{plug} - u}$ est lié linéairement à y dans les zones fluides et vaut 0 dans les zones rigides. La figure 3.3 montre à gauche des coupes de vitesses au milieu de la cavité (qui joue le rôle de l'amont) et au milieu du canal de sortie (qui joue le rôle de l'aval). Par dessus

les coupes de vitesse, se trouve en pointillés les profils de Poiseuille théoriques correspondant aux vitesses et rayons de plug associés à ces coupes. À droite de la même figure, on montre $\left(\frac{u_{plug}-u}{u_{plug}}\right)^{1/2}$ en fonction de y/y_{plug}. On observe que toutes ces coupes se superposent sur la même ligne $z = 1 - y$ dans la zone fluide. Bien sûr l'approximation de Poiseuille est meilleure dans le cas où la cavité est la plus longue ($\delta = 1/12$) mais les deux figures sont très similaires. Pour que les simulations prennent moins de temps, on se restreint au cas des cavités plus petites ($\delta = 0.2$), puisque l'approximation de Poiseuille est respectée dans ce cas. Le coin en bas à droite joue alors le rôle de la marche et on se concentre dans la zone représentée figure 3.4.

3.1.3 Existence de la ligne de glissement

On s'intéresse donc à la zone au-dessus de la marche comme présenté figure 3.4. Ladite marche va dévier les particules de leur trajectoire horizontale pour qu'elles entrent dans le canal de sortie, ce que montre la figure 3.5 à gauche. Numériquement, on retrouve l'existence de la ligne de glissement définie précédemment comme montré à droite de la figure 3.5. Pour la déterminer, les trajectoires n'étant pas parfaitement parallèles, il faut choisir un angle θ de rotation du repère. On choisit dans la suite l'angle moyen fait par les trajectoires avec l'axe horizontal au dessus du début de la zone morte.

Remarque 17 *En fait, l'existence de cette ligne de glissement est indépendant de cet angle pour peu qu'il soit petit, comme montré sur la figure 3.6 ! L'évolution de y_s en fonction de cet angle θ est représenté figure 3.7.*

Sur cette ligne de glissement, $u = u_s$, ce qui signifie que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est nul le long de cette droite. Cela ne signifie évidemment pas que le matériau se comporte de manière rigide. Il se déforme bien puisque $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ est non nul et puisque y_s dépend de θ. Cela nous donne cependant l'intuition de décomposer le champ de vitesses en deux parties : de part et d'autre cette ligne de glissement.

3.1.4 Régime Poiseuille au-delà de la ligne de glissement

Regardons plus en détail les coupes de vitesse figure 3.5. En deçà de la ligne de glissement, le repère s'intersecte avec la zone morte. Au-delà de la ligne de glissement, les coupes de vitesses présentent un pseudo-plateau, les valeurs de ce plateau augmentant au fur et à mesure que l'on se rapproche de la marche. Dans toute cette sous-section, on se concentre sur la partie comprise entre y_s et y_{plug} (défini ci-après). Dans la suite, on concentre l'étude juste sur une coupe particulière (celle surlignée en rouge dans la figure 3.5). Sur cette coupe, on va tenter de retrouver numériquement la suite des résultats présentés dans [77], à savoir la nature Poiseuille du profil de vitesse dans cette zone.

En translatant l'axe horizontal sur la ligne de glissement, et en supposant que la vitesse de glissement est u_s, l'équation (3.1) devient :

$$\left(\frac{u_{plug} - u(y)}{u_{plug} - u_s}\right)^{1/2} = \begin{cases} 1 - \dfrac{y - y_s}{y_{plug} - y_s} \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant y_{plug} \\ 0 \text{ si } y > y_{plug}, \end{cases} \tag{3.2}$$

et on a toujours $\sqrt{u_{plug} - u}$ linéaire en y. À partir de maintenant, vu qu'il n'existe pas de réel plateau, on définit u_{plug} comme la moyenne des vitesses entre y_{plug} et la fin de la coupe, y_{plug} étant la ligne de *pseudo-plug* définie comme suit : on commence par faire un fit linéaire "grossier" de $\sqrt{u_{plug} - u}$ et on définit y_{plug} comme l'intersection entre le fit linéaire et la ligne $u_{plug} - u = 0$. Notez que cela est cohérent puisque s'il y avait eu un réel profil de Poiseuille au-delà de y_s, la définition de y_{plug} aurait été celle du rayon de plug.

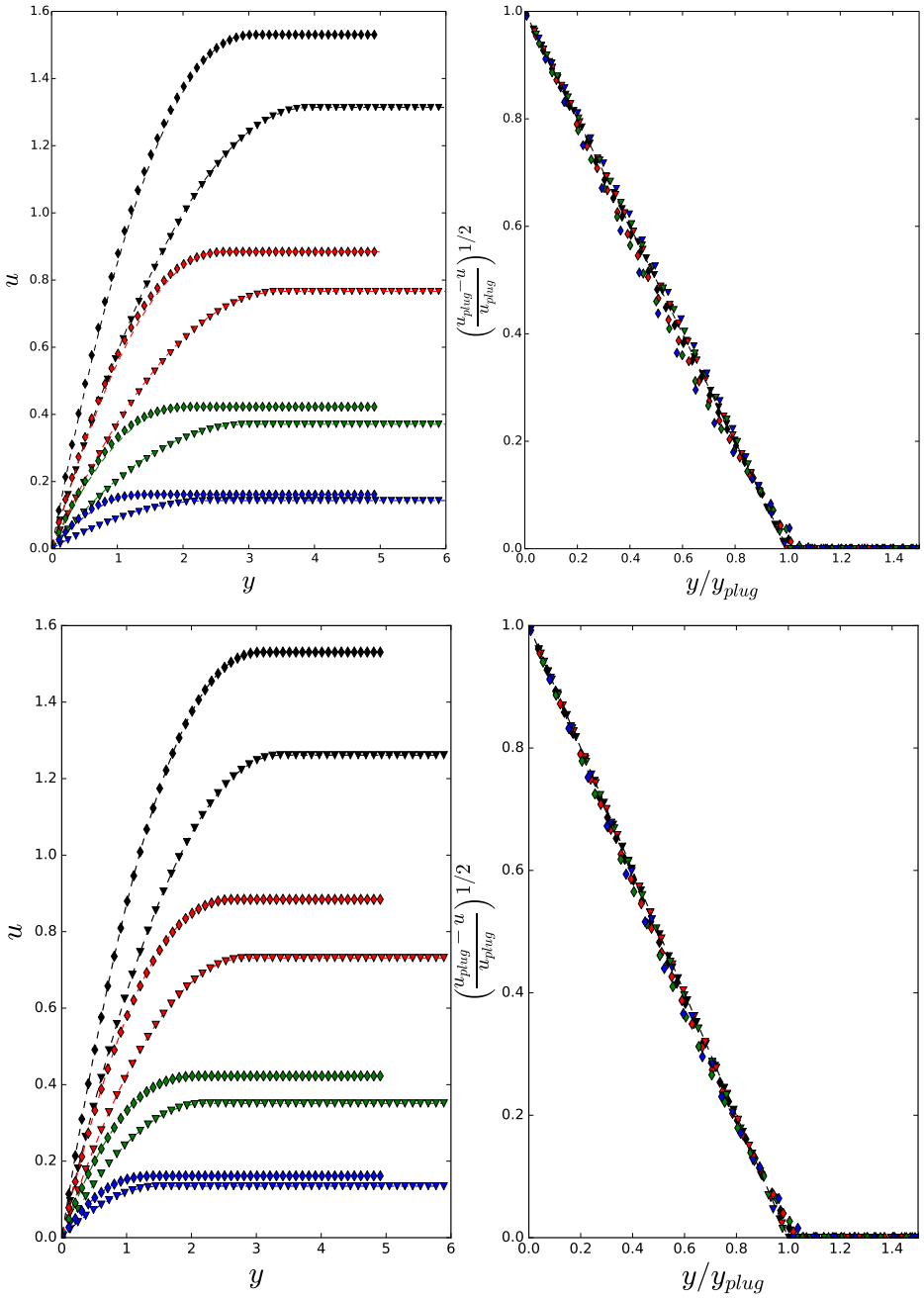


FIGURE 3.3 – Profils de vitesse dans le milieu de la cavité (triangles) et dans le canal de sortie (quadrilatères) pour $\delta = 0.2$ (en haut) et $1/12$ (en bas), $h = 6/5$ et $B = 3$ (noir), 5 (rouge), 10 (vert) and 25 (bleu). À gauche, les lignes en pointillés représentent le profil de Poiseuille théorique associé à u_{plug} et y_{plug}.
À droite, superposition des différentes courbes de (3.1) ; la ligne pointillée est d'équation $z = 1-y$.

On effectue donc à chaque fois un fit linéaire de $\left(\frac{u_{plug}-u(y)}{u_{plug}}\right)^{1/2}$ sur le segment $[y_s, y_{fit}]$, y_{fit} étant déterminé manuellement et donc différent de y_{plug} a priori. La figure 3.8 montre sur la ligne du haut les fits linéaires (les erreurs sont de l'ordre de $10^{-4} - 10^{-6}$). Sur ces graphes, les lignes rouges pointillées représentent respectivement y_s et y_{fit} tandis que les lignes bleues représentent

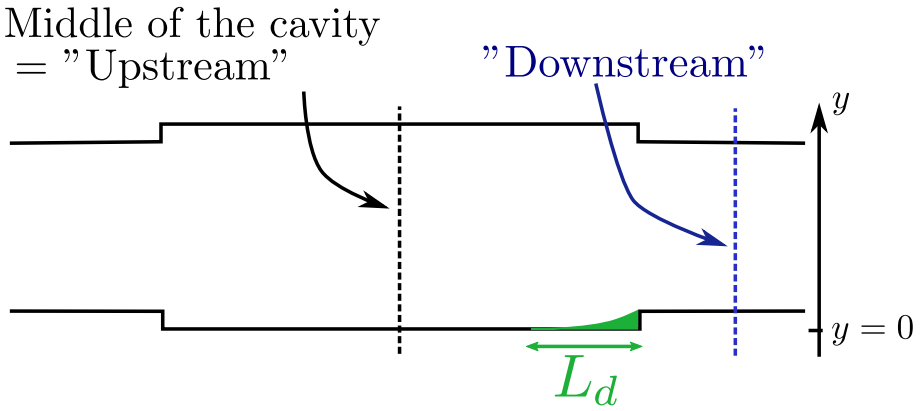


FIGURE 3.4 – Zoom dans la région de la cavité qui nous intéresse. Définition des coupes de vitesse "en amont" et "en aval". Représentation schématique d'une zone morte typique dans la configuration de [77] (en vert). Définition de L_d, la longueur de la zone morte au niveau du mur.

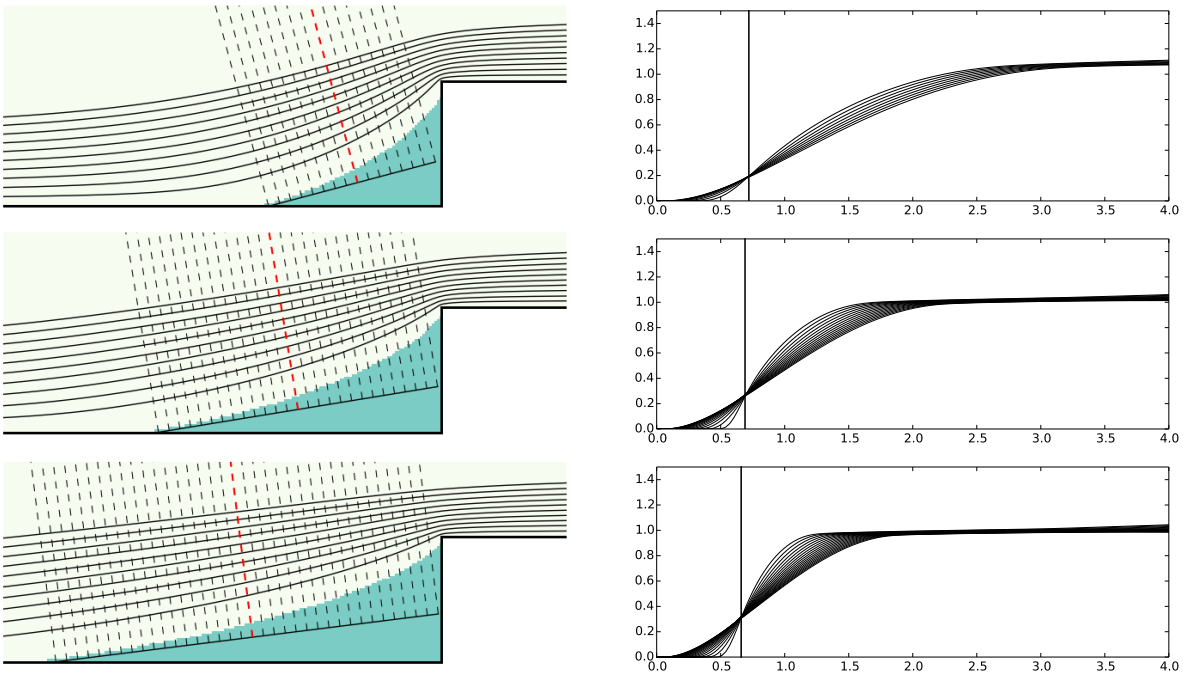


FIGURE 3.5 – Existence du point (y_s, u_s) pour différents nombres de Bingham : de haut en bas $B = 5$, 20, 50. À gauche : les trajectoires (en noir), les zones mortes (en bleu turquoise dans le coin), et les lignes sur lesquelles sont prises les coupes de vitesse (en pointillé) montrées à droite. À droite : coupes de vitesses et localisation de y_s.

de gauche à droite :

- y_{dead} : la fin de la zone morte,
- y_i : le maximum du profil de la déformation $|d|$ (qui est aussi le point d'inflexion de la vitesse),
- y_{plug} défini comme précédemment.

On retrouve les résultats de [77] : les profils de vitesse suivent dans une grande partie du segment $[y_s, y_{plug}]$ un régime de Poiseuille. Ceci étant vrai pour les coupes au milieu de la zone morte, on

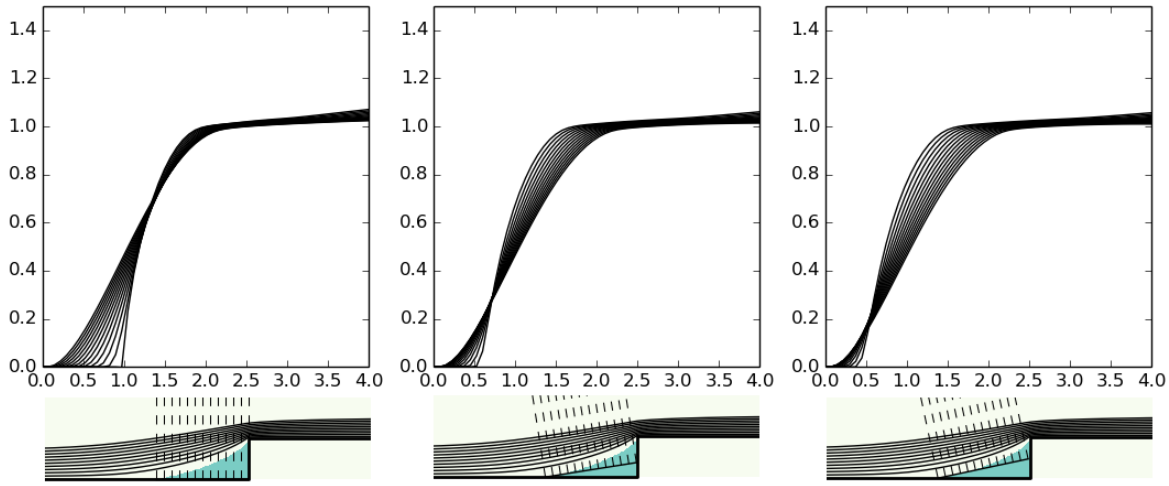


FIGURE 3.6 – Différents angles θ (de gauche à droite : 0, $\pi/20$, $\pi/15$) pour $B = 20$. Coupes de vitesse associées prises suivant les segments des diagrammes en bas.

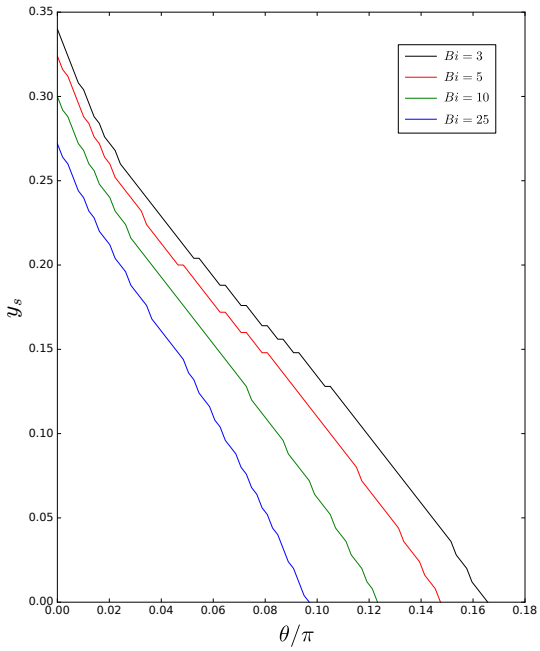


FIGURE 3.7 – y_s en fonction de θ pour B compris entre 3 et 25.

peut également vérifier cette propriété pour toutes les coupes de vitesses considérées à la figure 3.5. Pour ce faire, on regarde pour toutes ces coupes à quel point elles satisfont à l'équation (3.2). La figure 3.9 montre le terme de gauche de (3.2) associé à différentes coupes de vitesses pour différents B et on observe que toutes ces courbes suivent pour une large part la prédiction théorique de Poiseuille. Finalement, on peut découper le champ de vitesse en 4 zones :

— La zone morte proche du mur en dessous de y_{dead},
— Une zone de transition entre y_{dead} et y_i,
— Une zone entre y_i et y_{plug} dans laquelle la théorie Poiseuille Bingham s'applique sur $[y_s, y_{fit}]$ [3].

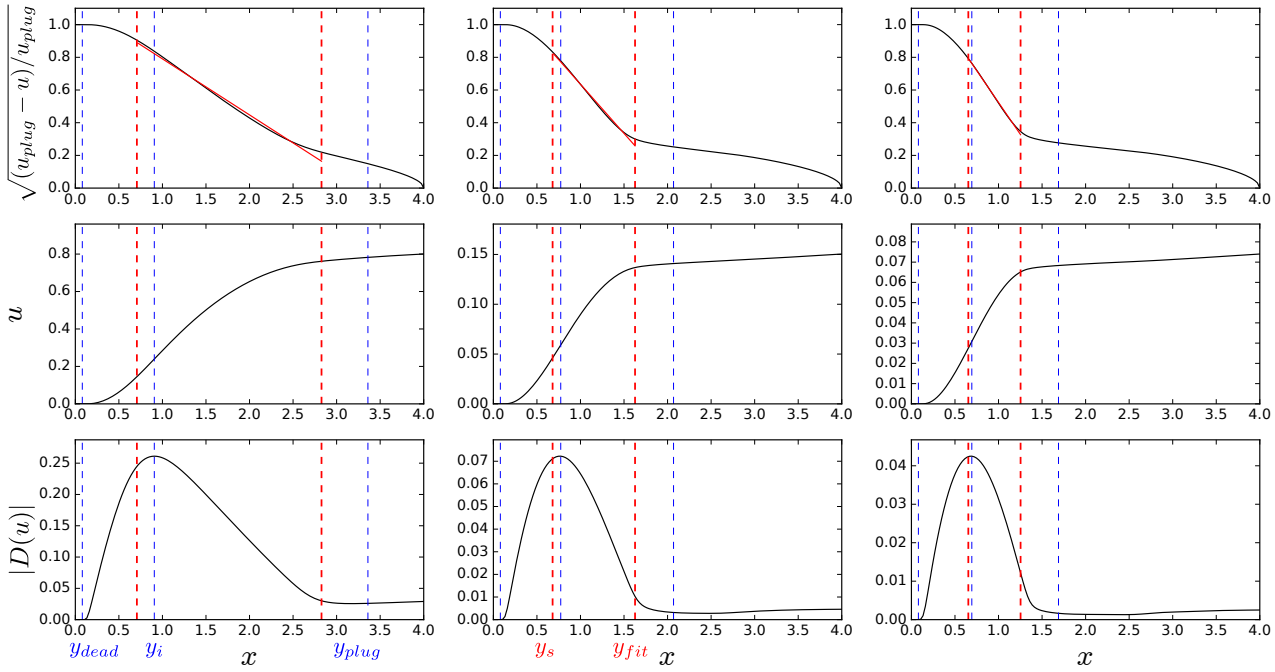


FIGURE 3.8 – De haut en bas : $\sqrt{\frac{u_{plug}-u}{u_{plug}}}$ et fit linéaire dans la partie fluide (en rouge), u et $|d|$. De gauche à droite : $Bi = 5,\ 25,\ 50$.

— Une zone pseudo-plug au-delà de y_{plug}.

Sur la figure 3.10, on montre les courbes $y = y_{dead}$, $y = y_s$ et $y = y_{plug}$ en suivant la figure 8 de [77]. On observe donc que la ligne de glissement est un concept assez bien vérifié.

3.1.5 Section efficace

Suivant encore [77], considérons un écoulement de type Poiseuille dans un canal de largeur $2R$. Le débit est le suivant :

$$Q_p = 2\int_0^R u(y)\mathrm{d}y \text{ i.e. } u_{plug} = \frac{Q_p}{2\,(R - y_{plug}/3)}, \tag{3.3}$$

ce qui signifie que le débit de matière est égal à celui d'un écoulement uniforme dans un canal de demi-largeur $R - y_{plug}/3$. Si maintenant, on ne considère que la partie au dessus de la ligne de glissement, on peut définir le *flux efficace* :

$$Q_{eff} = \int_{y_s}^R [u(y) - u_s]\mathrm{d}y.$$

Comme précédemment, on peut calculer $u_{plug} - u_s$ en fonction de Q_{eff} :

$$u_{plug} - u_s = \frac{Q_{eff}}{(R - y_s)(1 - (y_{plug} - y_s)/3)} = \frac{Q_{eff}}{S_{eff}}. \tag{3.4}$$

Ici, le dénominateur de (3.4) joue le même rôle que celui de (3.3). On définit *la section efficace* S_{eff} comme suit :

$$S_{eff} = (R - y_s)(1 - (y_{plug} - y_s)/3). \tag{3.5}$$

3. À noter qu'il y a une variation sur la position de y_s par rapport à y_i.

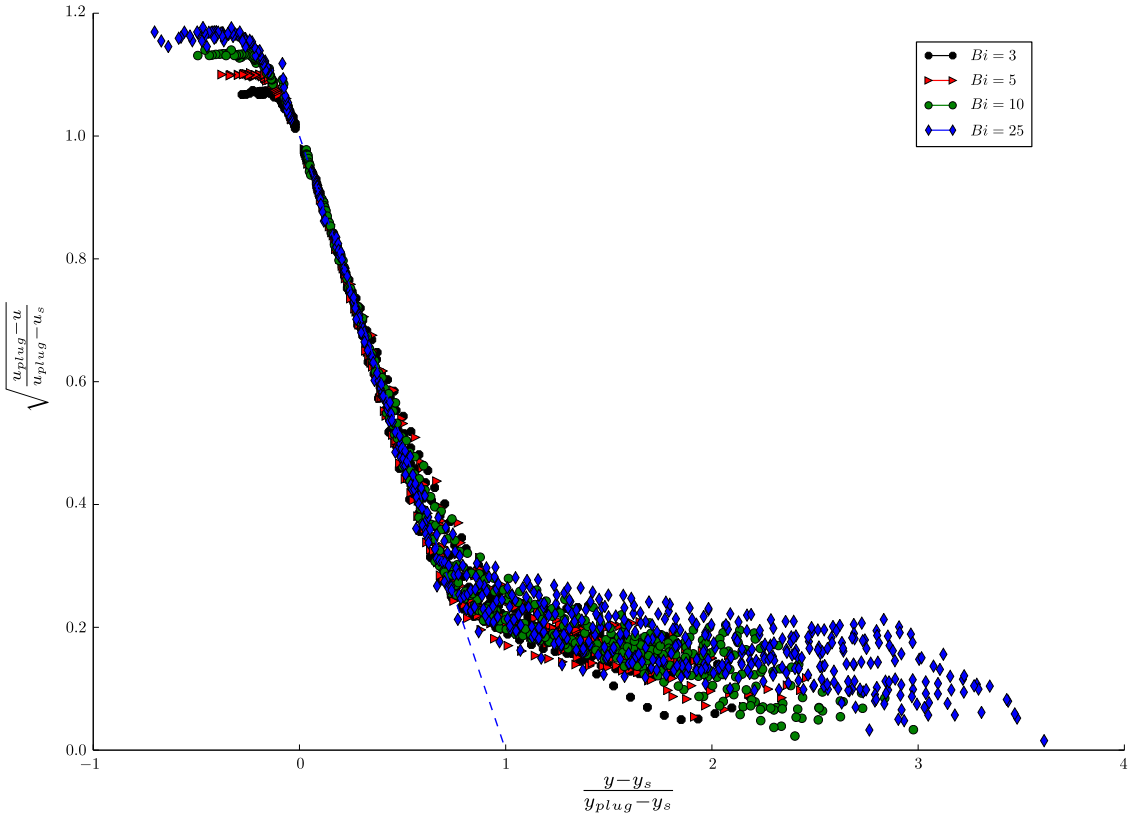


FIGURE 3.9 – Rescaling des profils de vitesses suivant l'équation (3.2). La ligne pointillée représente la prédiction théorique donnée par (3.2).

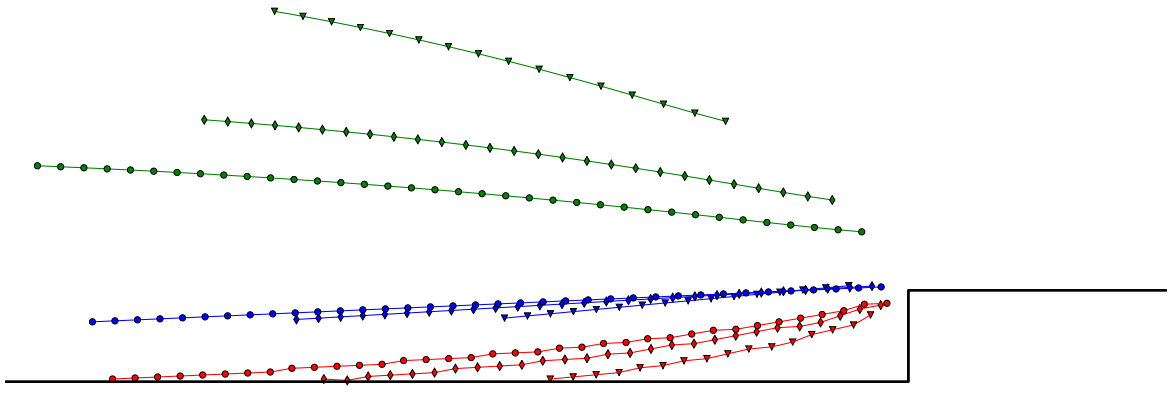


FIGURE 3.10 – Les différentes zones, la présentation est identique à celle de [77] : fin de la zone morte (rouge, basée sur y_{dead}), ligne de glissement (bleu, basée sur y_s) et interface rigide-liquide (vert, basée sur y_{plug}) pour $B = 5$ (triangles), 20 (quadrilatères), 50 (cercles).

C'est la section nécessaire pour avoir le flux efficace correspondant dans un écoulement uniforme.

Comme dernier indicateur des résultats précédents, on compare ce que donnent nos mesures de section efficace et celles de [77], notamment en retrouvant l'équation (3.4). La figure 3.11 représente $u_{plug} - u_s$ en fonction de $\frac{Q_{eff}}{S_{eff}}$ pour les différentes coupes étudiées précédemment et différents nombres de Bingham. On observe que pour chaque coupe, le rapport $\frac{Q_{eff}}{S_{eff}}$ tombe sur la première bissectrice, et donc (3.4) est vérifiée.

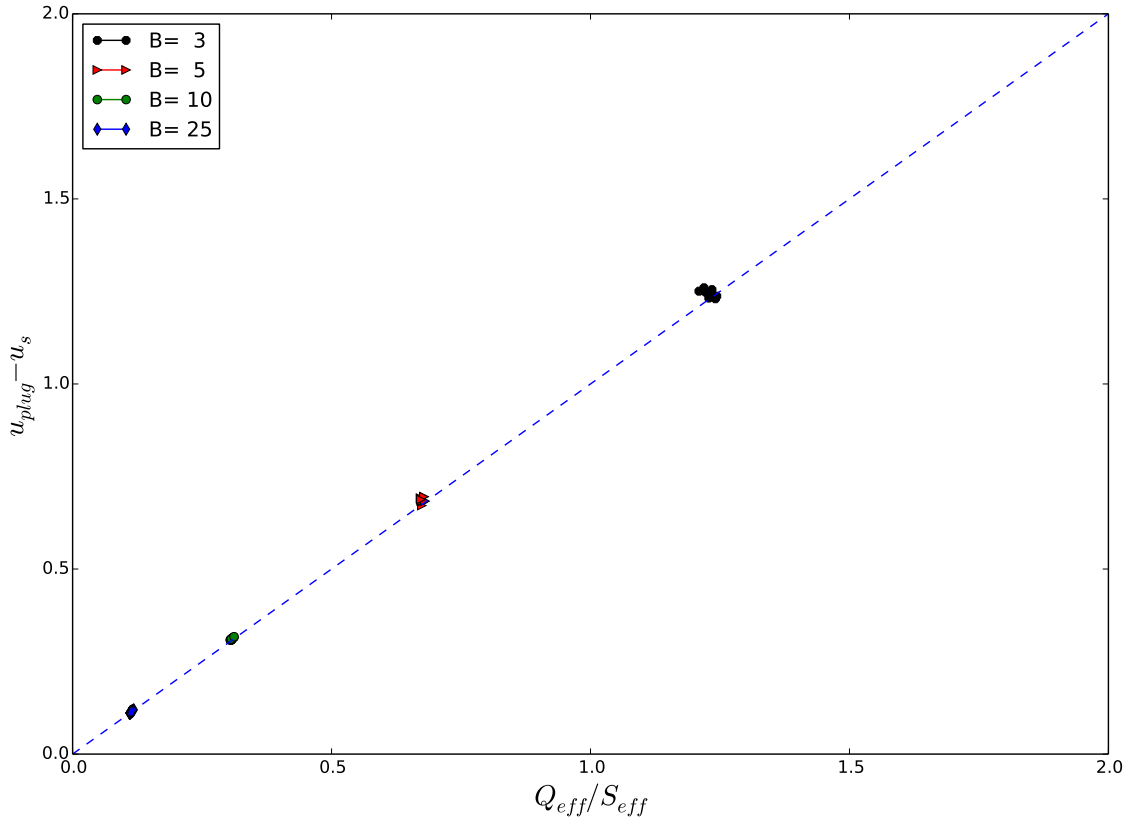


FIGURE 3.11 – $u_{plug} - u_s$ en fonction de $\frac{Q_{eff}}{S_{eff}}$. La première bissectrice est en pointillés. Voir le texte pour plus de détails.

3.1.6 Résultats complémentaires

Longueur de la zone morte

De ces simulations en cavité longue, on peut également extraire L_d, la longueur de la zone morte (on renvoie à la figure 3.4 pour la définition de L_d). La figure 3.12 présente l'évolution de cette longueur en fonction de B en coordonnées log-log. Il semble y avoir encore une relation sous forme de loi puissance entre L_D et B et encore une fois la valeur de la puissance semble être proche de 1/3.

Chutes de pression le long de la cavité

On revient brièvement au cas de la cavité entière (en variables adimensionnées) pour étudier les chutes de pression. Ici, si l'on prend des coupes horizontales en pression et que l'on observe

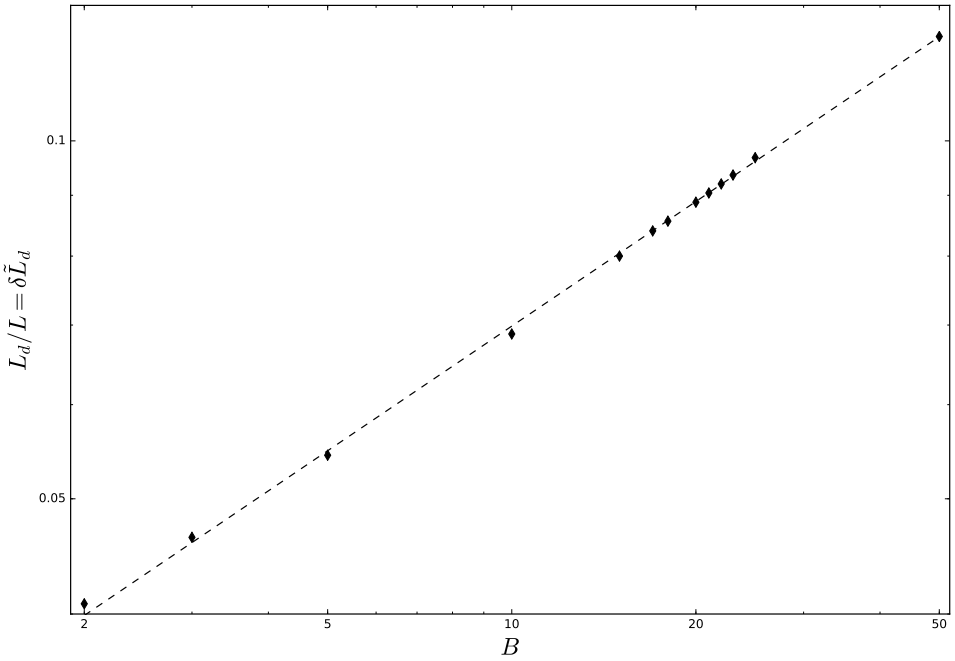


FIGURE 3.12 – Longueur de la zone morte au niveau du mur en fonction de B en échelle log-log. En pointillé : fit linéaire (pente 0.346).

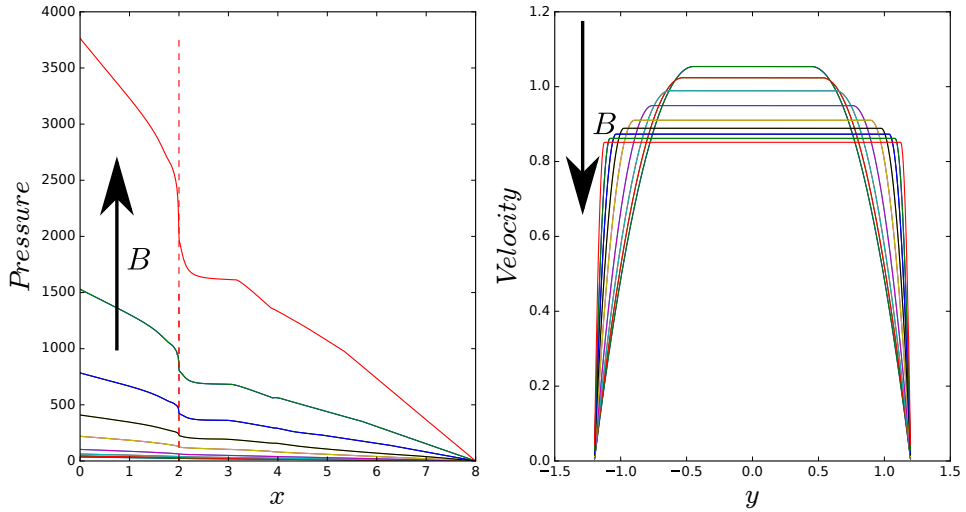


FIGURE 3.13 – Gauche : Coupes longitudinales de pression adimensionnée pour différents B. Seule la moitié gauche du domaine est représentée pour des raisons de symétrie. La ligne en pointillés rouge représente le début de la cavité. Droite : Coupes de vitesses adimensionnées au milieu de la cavité pour différents B. B varie entre 2 et 500.

la vitesse (cf. fig. 3.13), on ré-observe que la cavité intérieure est suffisamment longue pour supposer qu'un écoulement de type Poiseuille est instauré au milieu de cette cavité (de la même

manière qu'en section 3.1.2). On observe trois quantités mesurables :

— une "vitesse de plug" u_1,
— un rayon de plug y_1.
— Par ailleurs, la pression est quasi linéaire au voisinage du centre de la cavité. On peut donc mesurer le gradient de pression $DP1$.

Si l'écoulement était effectivement Poiseuille, alors, u_1 et y_1 seraient reliés par l'équation (3.1). La figure 3.14 montrant $\sqrt{u_1 - u}$ concorde bien avec cela. Ainsi, le profil de vitesse u au milieu

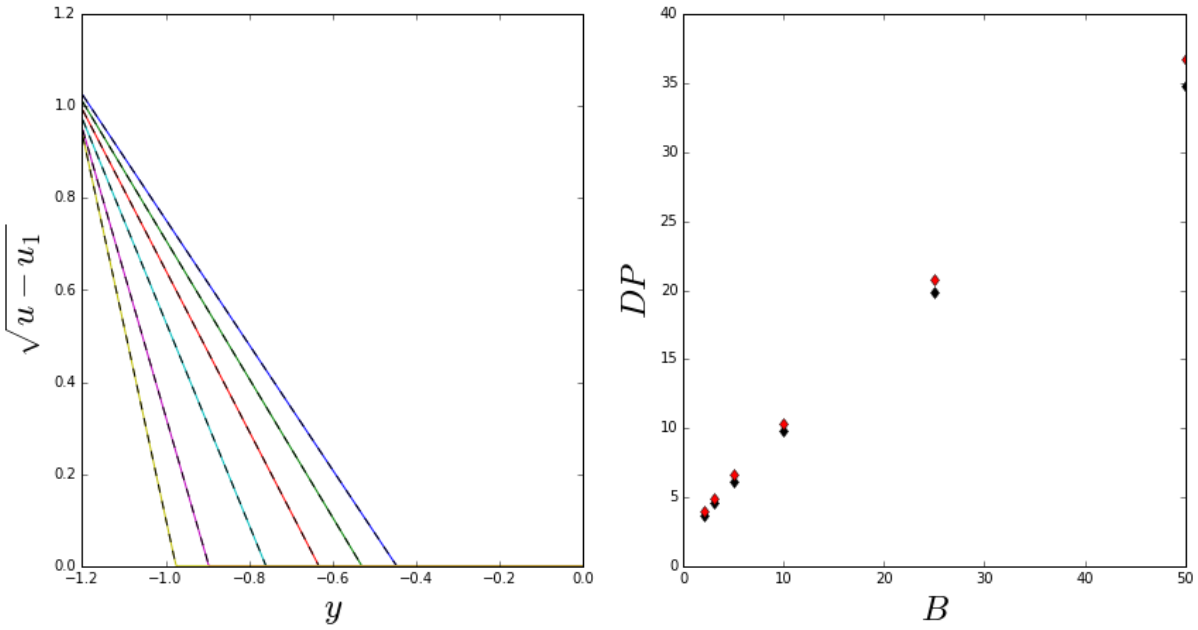


FIGURE 3.14 – À gauche, expression de $\sqrt{u_1 - u}$ en fonction de y pour différents B (fit linéaire en pointillés noirs). À droite, les gradients de pression $DP1$ (en noir) et $DP2$ (en rouge).

de la cavité est bien de type Poiseuille. Son rayon de plug associé est de la forme $y_p = \frac{B}{|DP2|}$ avec $DP2$ qui est très proche de $DP1$ (voir figure 3.14 à droite). On peut donc en déduire que la vitesse au milieu suit un profil de type Poiseuille défini par un gradient de pression calculable directement sur le champ de pression et on déduit de cette vitesse un nombre de Bingham défini par $B_{milieu} = |y_1 DP1|$! La figure 3.15 montre ce B_{milieu} en fonction de $B_{entrée}$ (le seuil adimensionné du fluide). On retrouve bien numériquement le caractère linéaire de cette dépendance, puisque théoriquement, la constance du flux nous donne :

$$B_{milieu} = h^2 B_{entree} \tag{3.6}$$

3.2 Évolution de la couche limite à Bingham élevés

On ré-examine à la lumière des simulations effectuées les résultats présentés dans [35, 36]. Chevalier présente des résultats d'injection de Carbopol dans une expansion-contraction, le but étant de modéliser un écoulement dans un pore modèle. Dans cette section, la cavité est petite, (δ est de l'ordre de 0.5-1) et on est en régime dit *frustré* pour B suffisamment élevé. Ce régime apparaît lorsque du matériau fluide est coincé entre tout le fond de la cavité composé de matériau immobile et la bande de matériau rigide central. La couche de matériau fluide est alors appelée

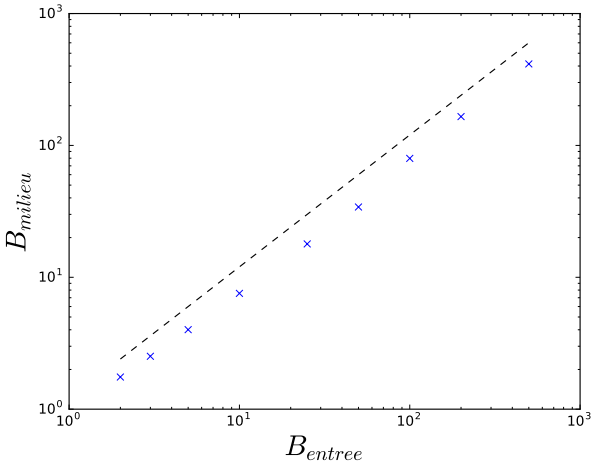


FIGURE 3.15 – Comparaison entre les Bingham en entrée et au milieu de la cavité. La ligne en pointillé représente la relation (3.6)

couche limite (comme à la section 1.2.3) et présente les mêmes caractéristiques que la couche limite au sens de Prandtl [101] et Oldroyd [94]. Les principaux résultats de [36] sont présentés figure 3.16. Ils montrent tout d'abord une similarité des différents champs de vitesses pour une certaine gamme de débits. Une mesure des tailles de la couche limite pour ces différents débits permet de dégager une loi de décroissance de cette taille en fonction du nombre de Herschel-Bulkley. Comme dit dans la thèse de Chevalier [35], une loi de Bingham va permettre de retrouver

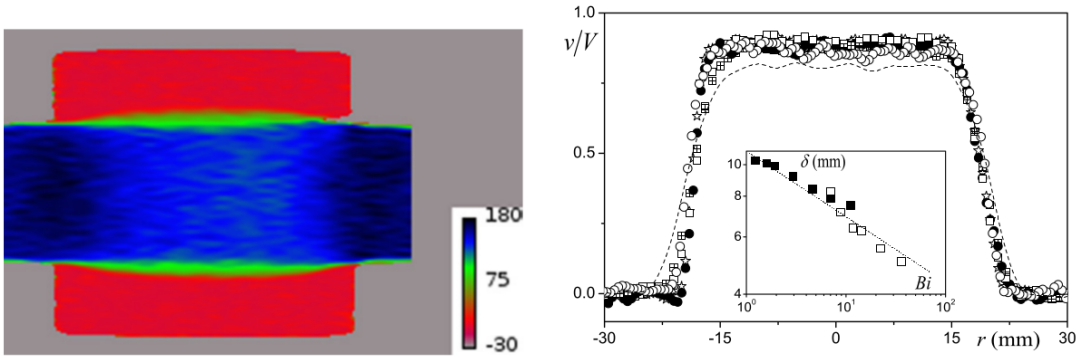


FIGURE 3.16 – Reprodution des figures 1 et 3 de [36]. À gauche : champ de vitesse typique en régime frustré (carte de vitesse obtenue par IRM). À droite : superposition de coupes verticales de vitesse au milieu de la cavité pour différents débits (ces vitesses ont été renormalisées par la vitesse moyenne en entrée). Encart : décroissance de la largeur de la couche limite (la droite en pointillé a pour pente -0.2).

une large partie de ces résultats qualitatifs.

La première sous-section 3.2.1 va décrire les différentes composantes du tenseur des contraintes. On va regarder ce qui se passe au niveau de la pression comme au niveau du déviateur des contraintes. Dans la section suivante 3.2.2, on retrouve une loi de largeur de la couche limite proche de celle d'Oldroyd mais dans les régimes frustrés, résultats que l'on retrouve également chez [8].

3.2.1 Les contraintes

On observe d'abord différentes coupes du champ de pression figure 3.17. Tout d'abord, on observe le caractère linéaire de la pression même dans le cas frustré (les coupes de pressions sont à droite et sont prises sur les lignes de coupe en pointillés). En entrée et sortie, on retrouve une décroissance linéaire de la pression, ce qui est cohérent avec le régime de Poiseuille imposé en entrée et en sortie. Bien sûr, les pentes en entrée-sortie ne sont pas les mêmes que les gradients imposés, du fait de la présence de la cavité, mais elles sont cependant très proches comme on le verra par la suite.

Remarque 18 *Plusieurs choix étaient possibles pour la description de la pression dans la cavité. Ici, le choix a été fait de prendre une coupe horizontale prise dans le milieu de la zone fluide d'entrée. Mais un autre choix possible (fait par exemple par [110]) serait de moyenner le long de l'axe des ordonnées. Ici, on considère que le fait que la pression ne soit pas connue (et pas unique) dans les zones rigides rend une moyenne sur tout l'axe vertical peu pertinente, puisque la pression calculée par l'algorithme AL dans les zones plug n'est pas pertinente. La coupe de pression choisie reste dans la zone fluide à l'exception des patchs de plug lorsqu'il y a présence de pseudo-plug. Cela ne représente cependant qu'une infime partie de la coupe. Un argument final en faveur de ce choix est l'indépendance de la pression en fonction de y en entrée-sortie, ce qui amène au même résultat qu'à une moyennisation.*

Les figures 3.18 et 3.19 quant à elles, montrent les différentes composantes du tenseur des contraintes complet ainsi que de sa partie déviatorique. On rappelle qu'on note $\sigma = -p\ Id + \tau$ le tenseur des contraintes complet (en se souvenant que $\tau_{yy} = -\tau_{xx}$ et $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$). On remarque en entrée/sortie que les lignes de niveau de σ_{xx} et σ_{yy} sont similaires, ce qui est un bon indicateur de la prédominance de la pression sur les contraintes déviatoriques. Dans cette zone, on remarque également la décroissance linéaire de τ_{xy} le long de l'axe des ordonnées, ce qui est encore cohérent avec la théorie Poiseuille dans cette zone. Dans la cavité, maintenant, τ_{xy} le long de l'axe des ordonnées est souvent symétrique par rapport au milieu de la zone fluide, ce qui est cohérent compte tenu du comportement de $\partial_y u$ (voir section 3.2.2). Dans la cavité, à l'inverse de l'entrée, σ_{yy} reste proche de zéro, ce qui est un bon signe du même ordre de grandeur de la pression et de τ_{yy}. Ces résultats sont en accord avec [108, Fig. 14].

On étudie maintenant plus en détail les chutes de pression à l'intérieur du domaine. Tout d'abord, on veut vérifier si les gradients de pression en entrée/sortie sont proches de ceux imposés dans la condition de bord de Dirichlet, qui devraient être les gradients que l'on retrouverait dans le cas d'absence de cavité (que l'on note $\partial_x p_{|th}$). Avec les notations de la figure 2.2, on définit (on omet par simplicité la variable y dans $p(x, y)$, on rappelle qu'on est dans une coupe horizontale) :

$$DP_{ext} = \frac{p(L_{inout}) - p(0)}{L_{inout}} \text{ and } DP_{int} = \frac{p(L_{inout} + L_{int}) - p(L_{inout})}{L_{int}}. \tag{3.7}$$

La figure 3.20 (resp. 3.21) montre des comparaisons entre DP_{ext}, DP_{int} et $\partial_x p_{|th}$ en fonction de B, pour $\delta = 0.5$ (resp. $\delta = 0.25$). Pour $\delta h = 1$, les deux gradients (théorique et DP_{ext}) se superposent bien, superposition moins évidente pour des cavités plus longues $\delta h = 0.5$. Qui plus est, comme on a vu dans les figures 3.18 et 3.19, la décroissance de la pression est plus lente, du fait de la plus grande largeur du canal pour un flux constant. Pour les cavités les plus courtes, augmenter la taille de la marche n'a pas d'effet significatif sur DP_{int} (voir les triangles sur la figure 3.20). Ceci est fortement relié au phénomène de self-selection décrit en section 1.2.3. Pour $\delta h = 0.5$, la différence observée entre DP_{ext} et $\partial_x p_{|th}$ pourrait s'expliquer par le fait que baisser ce rapport d'aspect éloigne la géométrie du canal infini et éloigne de même l'écoulement expansion-contraction de l'écoulement de Poiseuille. (voir figure 3.19).

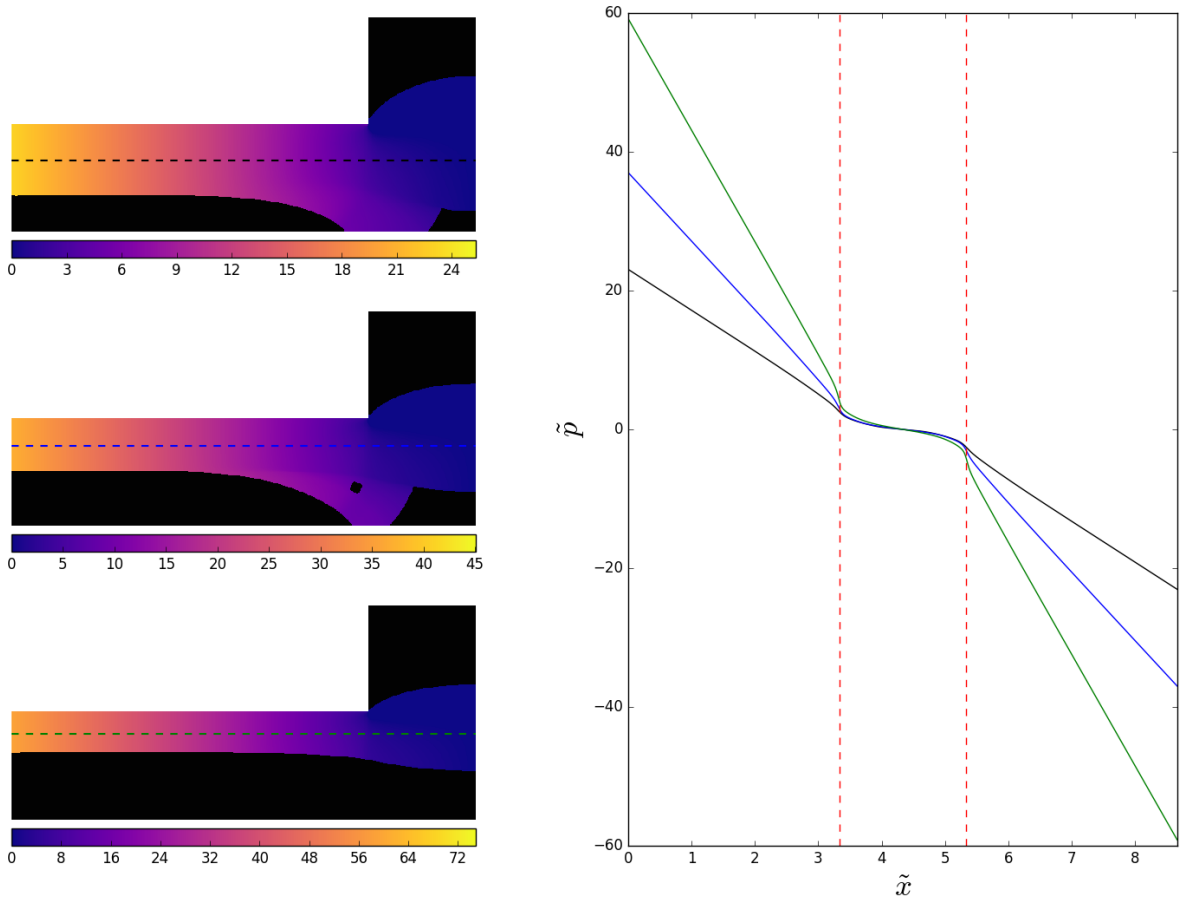


FIGURE 3.17 – La pression pour $\delta = 0.5$, $h = 2$ et pour (de haut en bas) $B = 2$, 5 et 10. À gauche : champs de pression et axe (en pointillé sur lequel on prend la coupe. À droite : coupes horizontales de pression associées. Les lignes rouges pointillées marquent les extrémités de la cavité.

Une possibilité pour quantifier cette décroissance de la pression est de supposer qu'elle décroît linéairement par morceaux et comparer les pentes des différentes zones. Cette hypothèse est vérifiée au moins pour les cavités les moins longues. La figure 3.22 montre la différence entre ces deux pentes (adimensionnée par $\partial_x p_{|th}$). Cette différence croît avec B. Plus cette différence s'approche de 1, plus DP_{int} est bas (en supposant que DP_{ext} et $\partial_x p_{|th}$ sont très proches), comme par exemple sur la figure 3.22 pour de grands B. Cependant, ce ratio doit tendre vers une limite toujours inférieure stricte à 1 lorsque $Bi \to \infty$, puisque, tout autre paramètre étant fixé, un gradient de pression minimal est nécessaire pour que le matériau commence à s'écouler.

3.2.2 La couche limite - une première étude

On présente en figure 3.23 un cas typique de champ de vitesse correspondant au régime frustré comme décrit par Philippe Coussot et son équipe [36]. Entre le plug central et la zone morte près des murs, le matériau s'écoule sous une forme fluide ; c'est la zone de couche limite. La superposition des coupes de vitesse à l'intérieur de la cavité est présentée figure 3.24. On remarque qu'au milieu de la cavité, ces profils de vitesse se superposent, comme remarqué dans [36]. On retrouve également la même décroissance de la vitesse maximale à l'intérieur de la cavité.

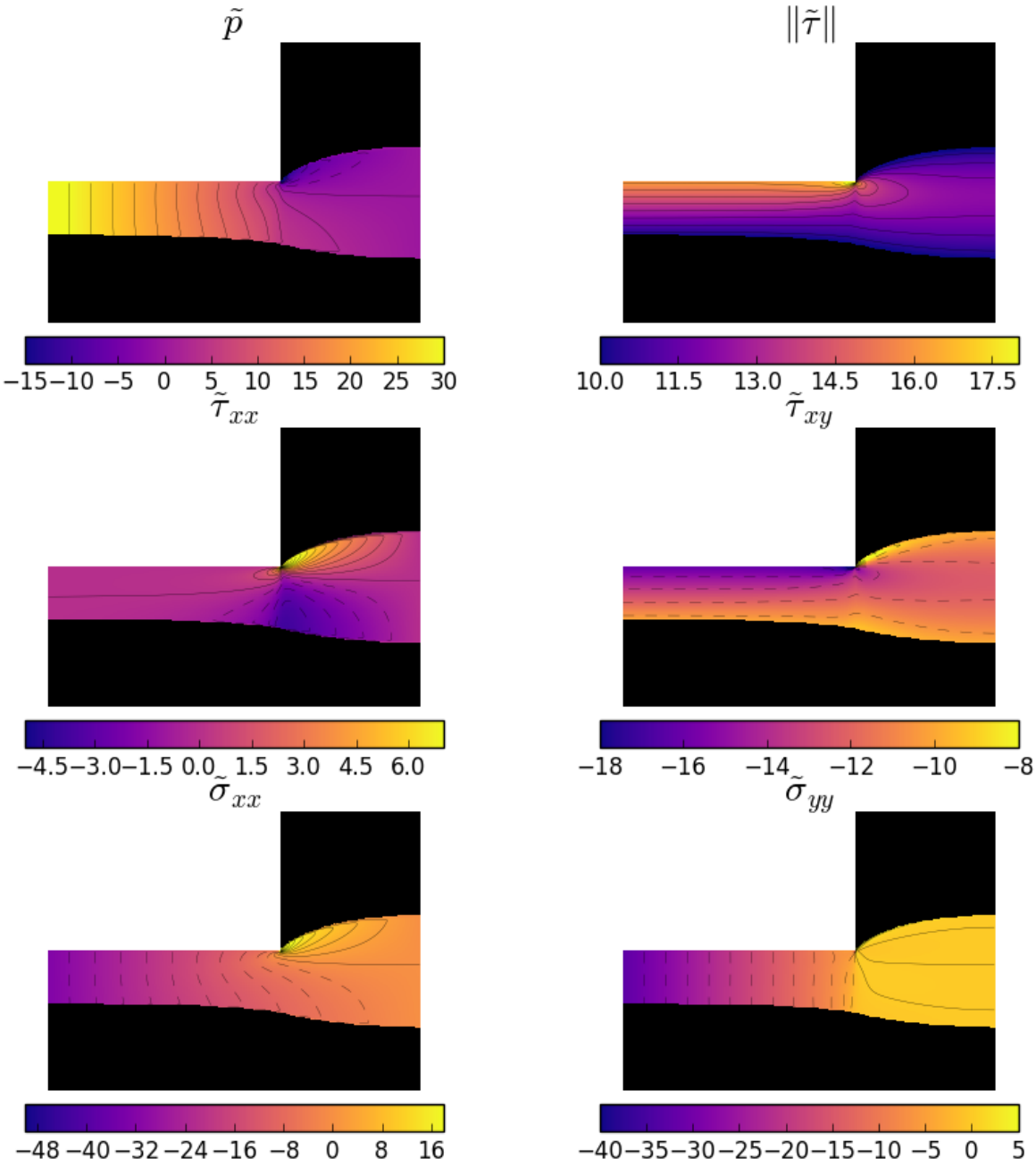


FIGURE 3.18 – Composantes du tenseur des contraintes pour $\delta = 0.5$, $h = 2$ et $B = 10$ proche de la transition entrée-cavité. En haut : p (gauche) et $|\tau|$ (droite).
Au milieu : τ_{xx} (gauche) and τ_{xy} (droite).
En bas : σ_{xx} (gauche) and σ_{yy} (droite).

Remarque 19 *Comme mentionné dans [36], on peut remarquer que le taux de cisaillement n'est pas monotone. Au contraire en régime frustré, il possède un extremum, ce qui se traduit par un point d'inflexion dans la vitesse (contrairement au régime de Poiseuille uniforme où il varie linéairement par morceaux). Ceci peut être vu par exemple figure 3.24 à droite. Cette existence d'un maximum est cruciale comme on le verra dans la section 3.3.*

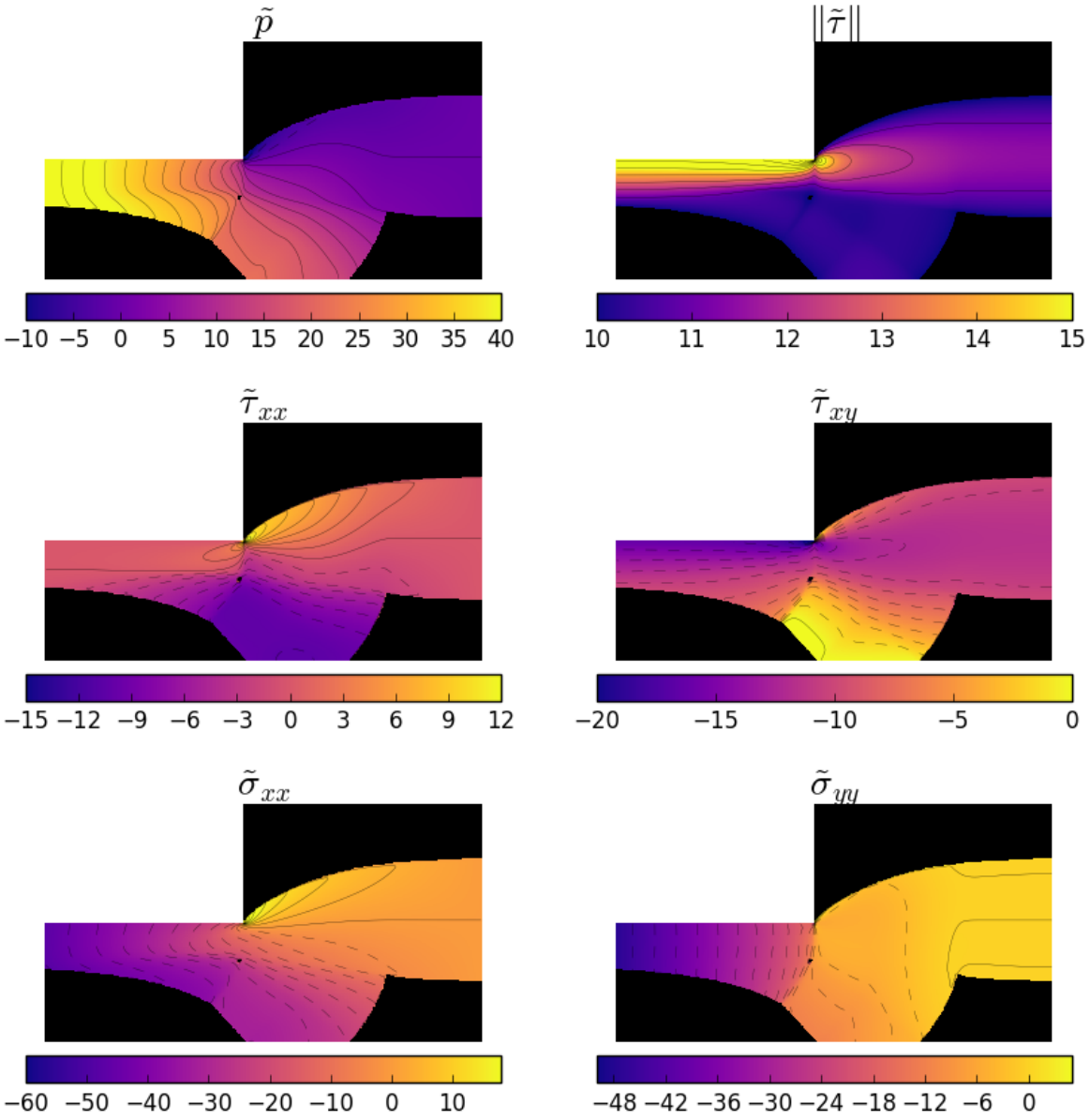


FIGURE 3.19 – Composantes du tenseur des contraintes pour $\delta = 0.25$, $h = 2$ et $B = 10$ proche de la transition entrée-cavité. Même composantes que précédemment.

On s'intéresse maintenant à la largeur de cette couche limite en fonction de B. On s'attend évidemment à ce qu'elle décroisse, les zones rigides gonflant lorsque le seuil augmente. Inversement lorsque B tend vers 0, la zone de plug se rétracte pour finalement disparaître. La figure 3.25 (à droite) montre l'évolution de cette couche limite dans une géométrie particulière. La partie gauche de cette figure montre la superposition des coupes de vitesses au milieu de la cavité à différents B. On note qu'on retrouve bien ces résultats numériquement. Un fait intéressant noté par T. Chevalier dans [35] est la loi de décroissance de cette couche limite, puisqu'il propose une décroissance en loi puissance dans la lignée de [94].

Il semble que la loi de décroissance de cette largeur soit de la forme $W = \alpha B^{-\beta}$. On présente de ce fait, figure 3.26 une tentative de fit linéaire (en échelle log-log) entre ces deux quantités. On présente sur cette figure deux fits pour deux géométries différentes. Les valeurs numériques

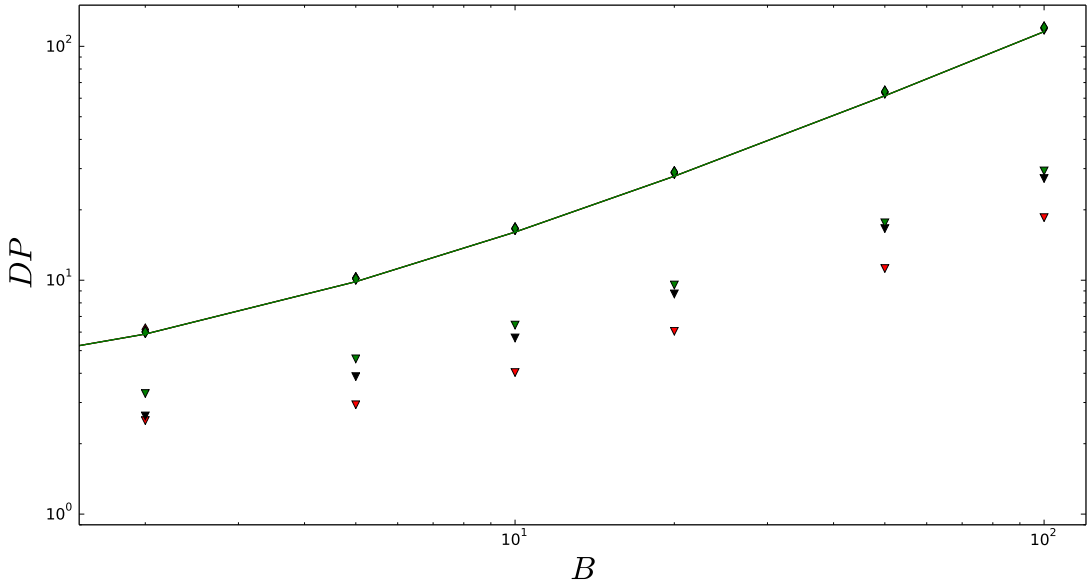


FIGURE 3.20 – Étude des décroissances de pression pour $\delta h = 1$. Les glyphes rouges (resp. noirs et verts) représentent $h = 2$ (resp. $h = 6/5$ et $h = 12/11$). Les losanges représentent DP_{ext} et les triangles, DP_{int}. La courbe continue représente $\partial_x p_{|th}$.

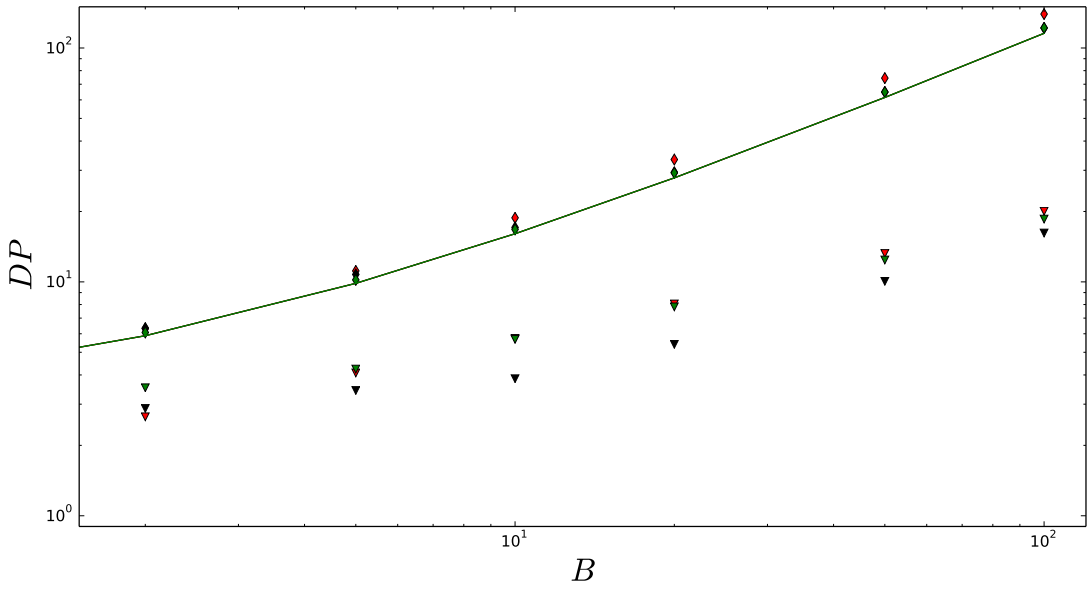


FIGURE 3.21 – Étude des décroissances de pression pour $\delta h = 0.5$. Les glyphes rouges (resp. noirs et verts) représentent $h = 2$ (resp. $h = 6/5$ et $h = 12/11$). Les losanges représentent DP_{ext} et les triangles, DP_{int}. La courbe continue représente $\partial_x p_{|th}$.

des pentes sont résumées dans le tableau 3.1 pour différentes géométries et on peut les comparer aux valeurs trouvées par Chevalier dans [36, Fig. 3]. Il avait trouvé une valeur de -0.2 ce qui diffère d'ici. Ceci peut être expliqué par la différence quantitative entre les fluides de Herschel-Bulkley (à puissance 0.4-0.5) et de Bingham. Un point intéressant est que toutes les valeurs

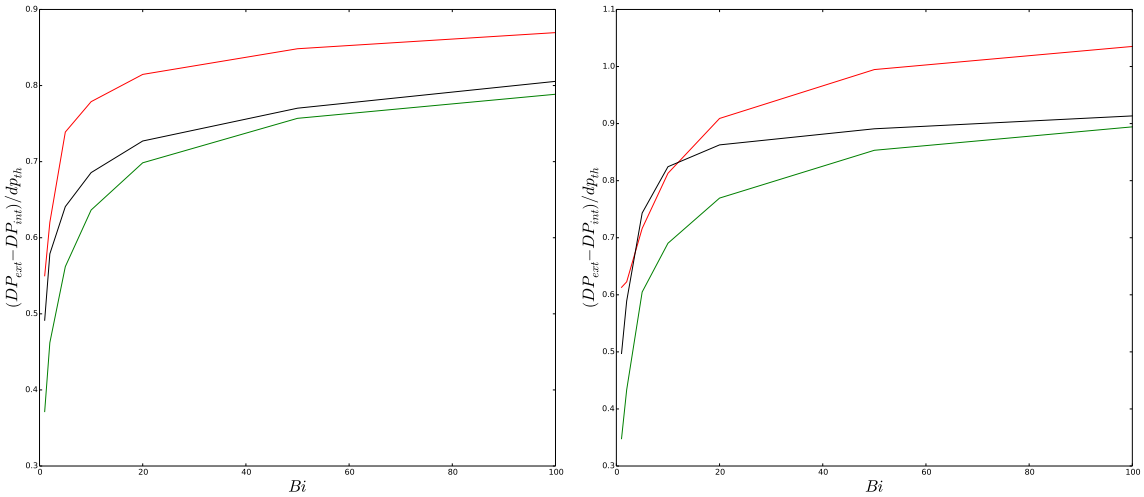


FIGURE 3.22 – Erreur entre les DP. À gauche : $\delta h = 1$. À droite : $\delta h = 0.5$. Les courbes rouges (resp. noires et vertes) représentent $h = 2$ (resp. $h = 6/5$ et $h = 12/11$).

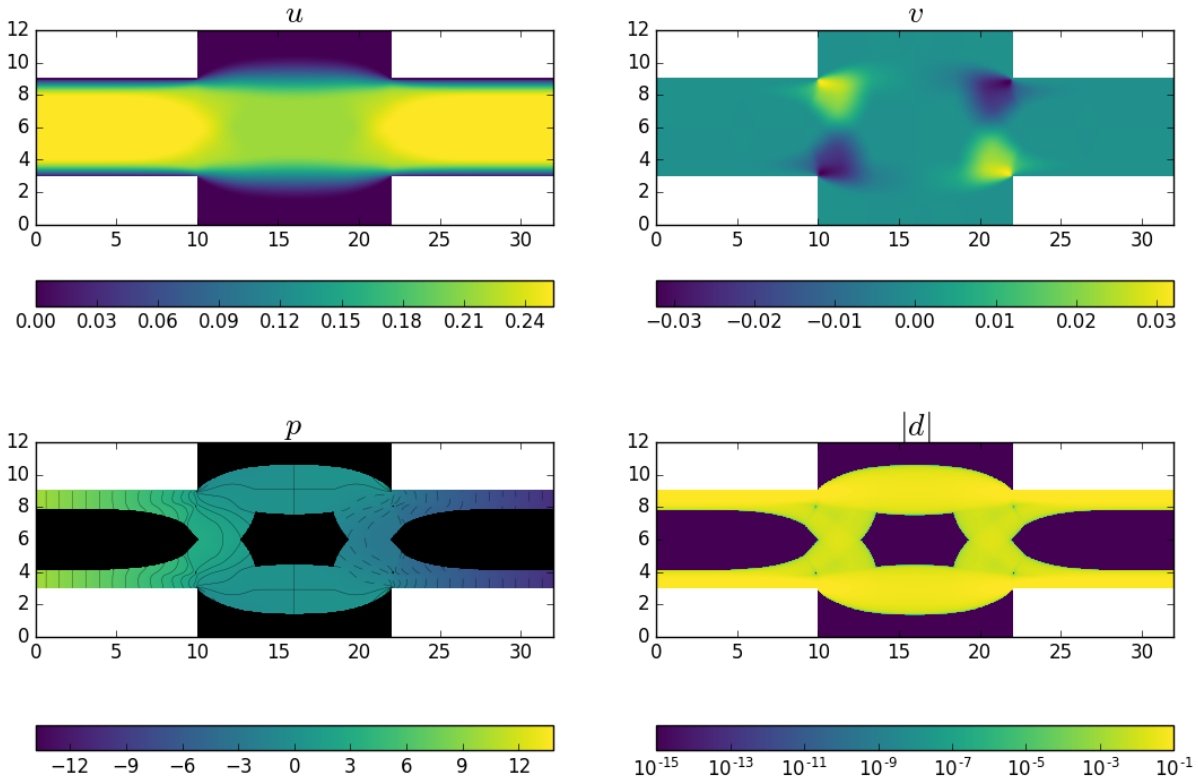


FIGURE 3.23 – Solution pour $\delta = 0.25$, $h = 2$ et $B = 10$. En haut (de gauche à droite) : composantes u et v de la vitesse. En bas : les champs p et $|d|$.

numériques de la puissance de la loi semblent tourner autour de la valeur -1/3. Cette valeur n'est pas sans rappeler les scalings de couche-limite présentés par Oldroyd dans [94] quand bien même la configuration n'est pas la même puisque [94] traite de l'extrusion de matériau

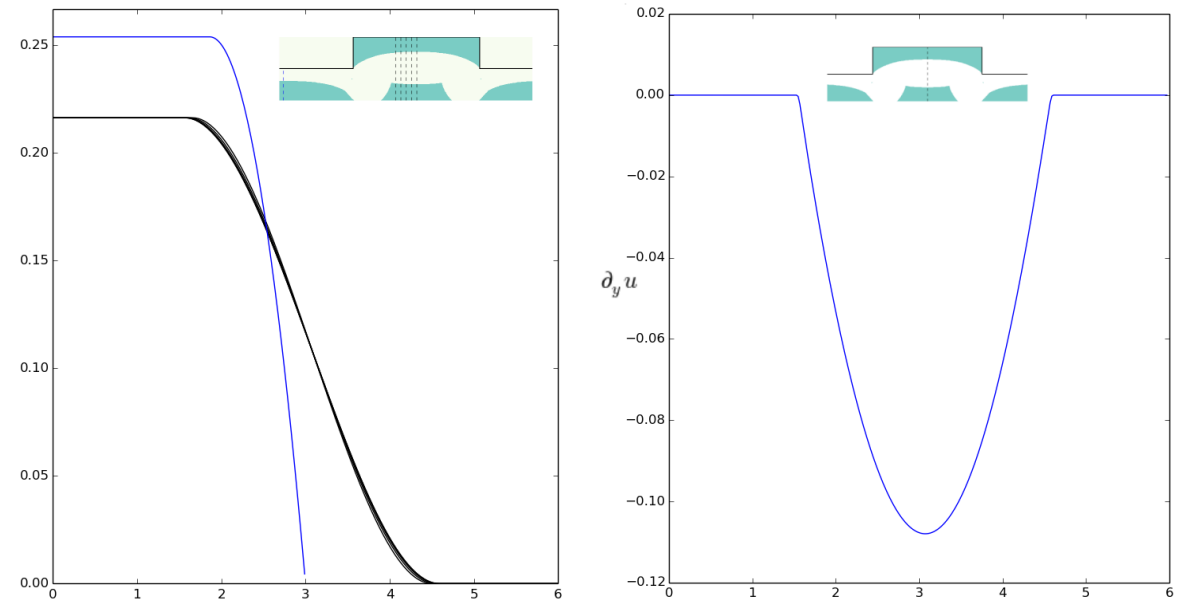


FIGURE 3.24 – Gauche : Différents profils de vitesse (en noir) le long des lignes pointillées pour $\delta = 0.5$, $h = 2$ et $B = 10$. En bleu, un profil dans le canal d'entrée.
À droite : une coupe de $\partial_y u$ au milieu de la cavité.

viscoplastique dans un canal semi-infini. On y reviendra plus en détail dans la partie suivante et on montrera comment les résultats d'Oldroyd (ainsi que ceux de Balmforth et co-auteurs [8] qui les étendent) peuvent être adaptés aux cas des nombres de Bingham modérés. Enfin, on remarque également que l'on retrouve le comportement classique du plug central sur la figure 3.26 : sa largeur centrale tend vers 0 lorsque B tend vers 0 et vers 1 lorsque B tend vers l'infini.

Géométrie	$\delta = 0.25$ h=2	$\delta = 0.25$ h=6/5	$\delta = 0.25$ h=12/11	$\delta = 0.5$ h=2	$\delta = 0.5$ h=6/5	$\delta = 0.5$ h=12/11
α_{fit}	2.1 (±2.9%)	1.3 (±5.6%)	1.1 (±0.39%)	1.8 (±1.4%)	1.4 (±1.5%)	1.1 (±0.55%)
β_{fit}	-0.32 (±0.41%)	-0.25 (±1.4%)	-0.27 (±0.12%)	-0.35 (±0.28%)	-0.35 (±0.44%)	-0.30 (±0.18%)

TABLE 3.1 – Les différentes lois de puissance ainsi que les erreurs sur les fits linéaires obtenus pour $W = \alpha_{fit} B^{-\beta_{fit}}$. Les erreurs entre parenthèses sont les écarts types des données par rapport au fit.

3.3 Évolution de la couche limite à Bingham modérés

Cette partie vise à étendre les résultats portant sur la couche limite à B élevés de la section précédente pour des nombres de Bingham modérés. Les simulations ont été mises en vis à vis avec des mesures expérimentales. Pour que les simulations collent au mieux avec ces mesures, on utilise les mêmes géométries que [78] et les résultats seront présentés sous forme dimensionnée. Dans la suite, les géométries présentées seront caractérisées par D, la longueur de la cavité (égale à 1, 1.5, 3, 6 ou 8 cm) et h, sa profondeur (égale à 1.5 ou 3 cm). Par ailleurs, on utilise pour les

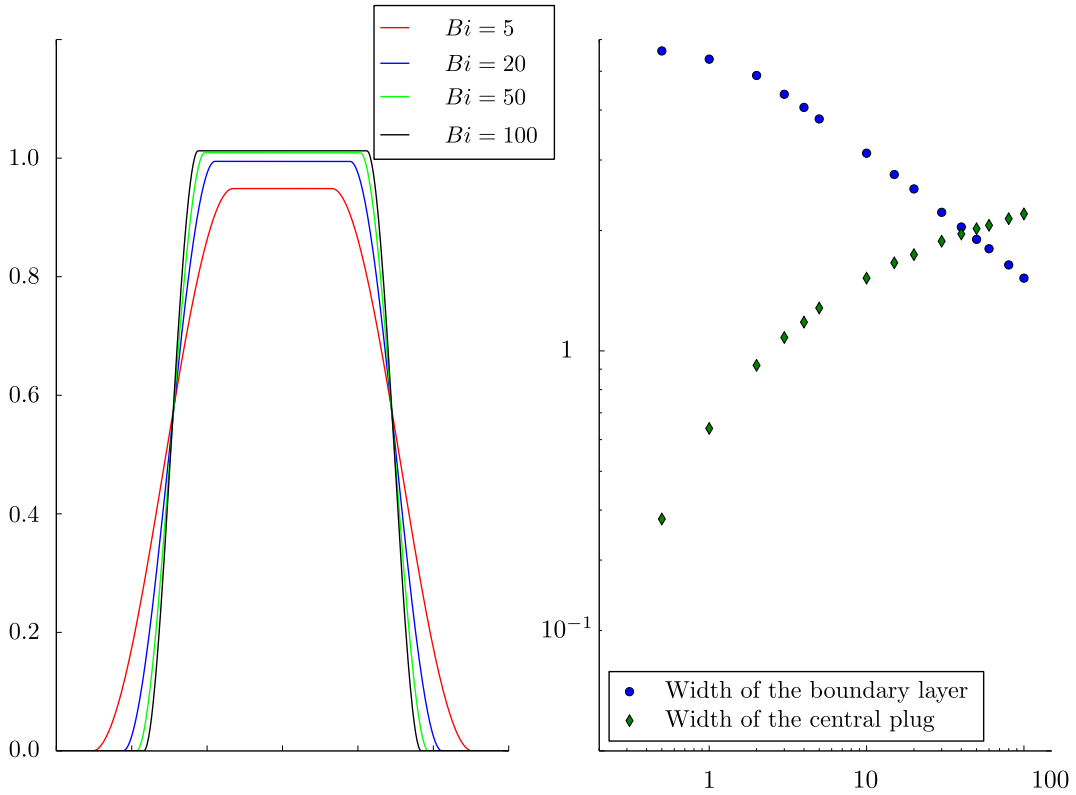


FIGURE 3.25 – À gauche : superposition des coupes de vitesses au milieu de la cavité pour différents B et $\delta = 0.25$ et $h = 2$.
À droite : Largeur de la couche limite en fonction de B.

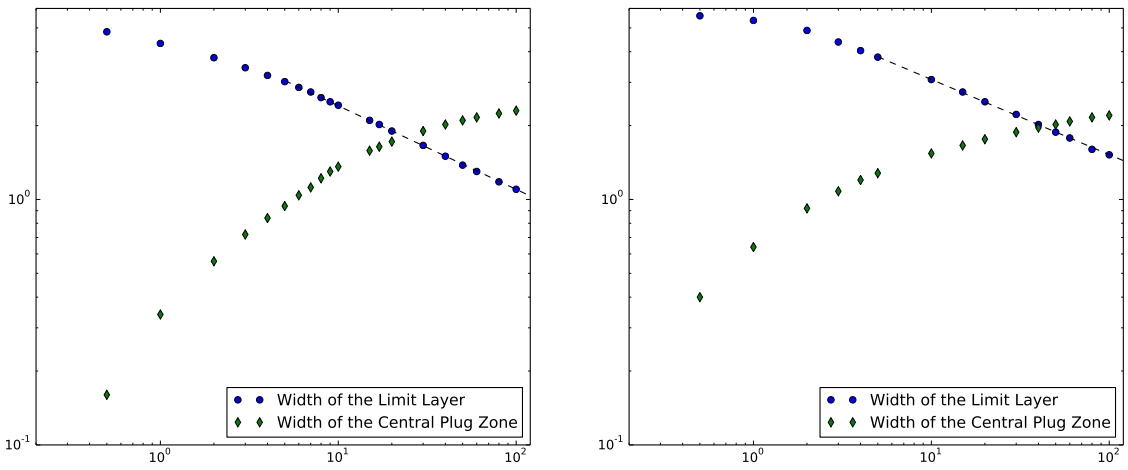


FIGURE 3.26 – Différentes largeurs de couche limite et zones plug pour $h = 2$, $\delta = 0.5$ (gauche) et 0.25 (droite). Pour les pentes, voir le tableau 3.1.

fluides les caractéristiques rhéologiques présentées dans le tableau 3.2 qui reprennent au mieux [78]. Les conditions de bords ont été choisies pour coller au mieux aux vitesses moyennes sur une section. Par ailleurs, d'autres simulations pour $B = 50$, 100 et 300 ont été faites pour couvrir une gamme de nombres de Bingham plus élevée. Finalement, la légende utilisée dans les différentes

Fluide	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
Viscosité $(Pa \cdot s)$	1.218	1.554	3.354	7.955	10.76
Seuil (Pa)	0.2	0.8	3.8	15.3	21.3
B pour $h = 1.5cm$	0.57	2.1	7.3	18	36
B pour $h = 3cm$	0.45	1.7	3.5	25	19

TABLE 3.2 – Les caractéristiques rhéologiques des différents fluides simulés.

figures qui suivent est présentée figure 3.27.

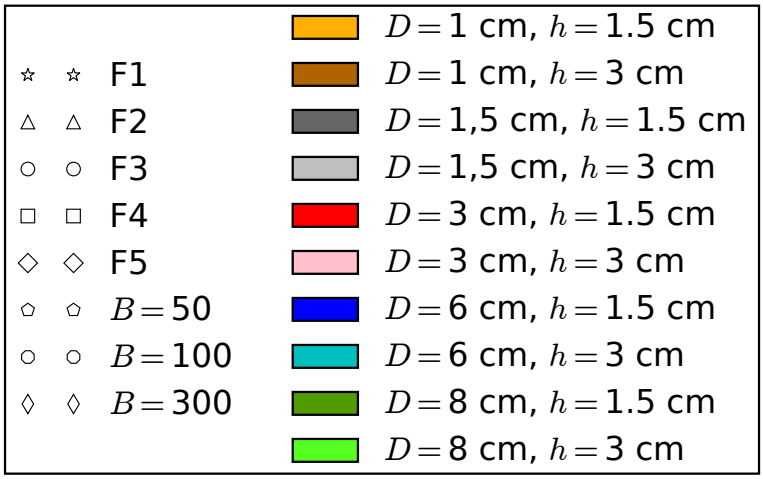


FIGURE 3.27 – Légende des figures de cette section.

3.3.1 Caractéristiques de l'écoulement

On présente figure 3.28 une coupe typique de vitesse et de déformation au milieu de la cavité avec la définition des différents points d'intérêt :

— la zone morte usuelle en dessous de $y = y_{int}$ (l'ordonnée de l'interface),
— la zone plug centrale au dessus de $y = y_{plug}$ (qui sera à comparer avec $y_{p,in}$, le rayon de plug amont),
— et au milieu, la zone fluide décomposée en deux zones délimitées par $y = y_s$.

Le point $y = y_s$ représente le maximum de la coupe de déformation. En ce point, la vitesse est égale à $u = U_s$. La définition de ces différentes zones peut être étendue sur toute coupe de la cavité. La ligne $y(x) = y_s(x)$ est définie comme la ligne où $\partial_y(|D(\mathbf{u})|) = 0$ et les lignes $y = y_{int}$ et $y = y_{plug}$ comme les zones délimitant la zone morte et le plug central. Il convient par ailleurs, de remarquer au vu de la figure 3.28, la très grande précision de la simulation, notamment sur le profil de $D(\mathbf{u})$ dont les zones rigides sont très proprement calculées à 0.

On continue dans cette section à appeler $y = y_s$ la *ligne de glissement* et U_s la vitesse de glissement quand bien même ils ne jouent pas le même rôle qu'en section 3.1. La zone au-dessus de la ligne de glissement présente en effet un comportement quasiment Poiseuille. Cette zone (appelée *Poiseuille-Like* dans la suite) a pour largeur δ_{PL} au milieu de la cavité. On fait dans la suite l'hypothèse que tous les profils de vitesse ont cet aspect. Notons qu'expérimentalement, les profils de contraintes obtenus ne présentent pas tous cet aspect lisse et concave. Pour les cavités relativement longues ($D \geqslant 3cm$), ces profils présentent un plateau en lieu et place du

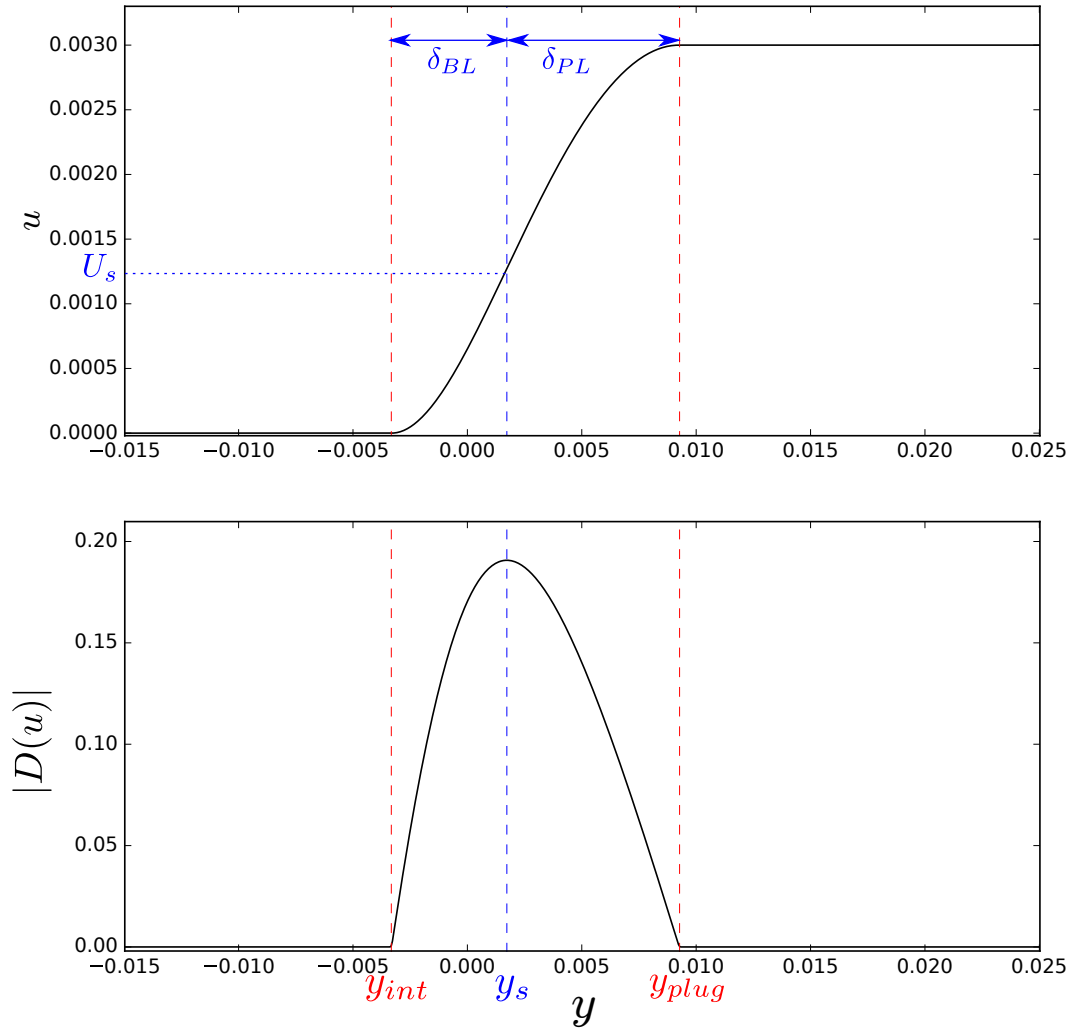


FIGURE 3.28 – Un profil de vitesse et déformation typique pour $D = 1.5cm$ et le fluide $F4$.

maximum. Inversement, pour les cavités les plus courtes, le maximum des contraintes est atteint en un pic (voir par exemple les figures 7 et 8 de [78]). Une hypothèse expliquant l'existence du plateau est que le Carbopol n'est pas purement viscoplastique et présente d'autres caractéristiques (comme la thixotropie par exemple). Une explication plus précise à ce phénomène n'a pas encore été donnée comme expliqué dans [78]. Pour pouvoir comparer données expérimentales et numériques, i.e. pour travailler sur des profils de vitesse similaire, une interpolation lisse des données expérimentales a été effectuée. Cette interpolation produit un profil de vitesse lisse et concave en enlevant les perturbations à hautes fréquences dues au bruit effectué sur les mesures expérimentales. On s'assure que les données lissées obtenues sont indépendantes du procédé.

3.3.2 Points de comparaison simulations-mesures expérimentales

Avec le lissage des données expérimentale décrit dans la section précédente, on peut extraire des grandeurs y_{int}, y_s et y_{plug} et les comparer aux simulations. Cette section a pour but de comparer ces différentes grandeurs et les longueurs associées et de montrer une bonne adéquation entre simulation et expériences.

Notant U_{up} la vitesse de plug en amont, on peut comparer U_s par rapport à U_{up} (comme montré

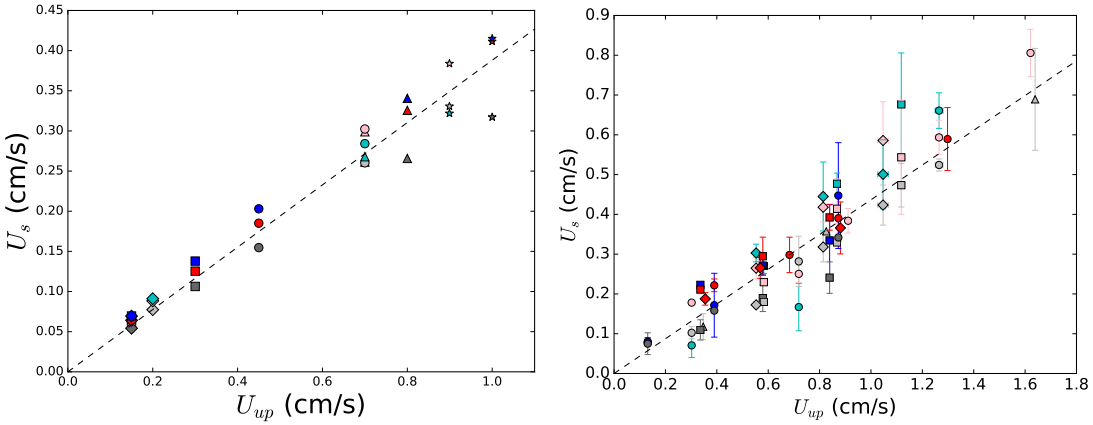


FIGURE 3.29 – Lien entre U_s et U_{up}, la vitesse de plug amont. À gauche : les simulations numériques (ligne en pointillés de pente ≈ 0.39). À droite : mesures expérimentales (ligne en pointillés de pente ≈ 0.45).
Légende : voir figure 3.27

figure 3.29). On observe que U_s est bien contrôlé par U_{up}, l'un dépendant quasi-linéairement de l'autre, et ce pour les simulations comme pour les expériences. Par ailleurs, comme montré figure 3.30, cette dépendance reste vérifiée pour une gamme de B plus élevée et pour toutes les géométries décrites en début de section.

Une autre caractéristique commune des deux jeux de données est l'évolution des contraintes maximales en $x_{1/2}$ notées τ_m par rapport aux contraintes maximales dans le canal d'entrée notées τ_w. Tout comme U_{up}, ces contraintes sont directement issues du profil de Poiseuille amont. La figure 3.31 montre d'une part l'évolution de τ_m en fonction de B et d'autre part comment τ_w évolue en fonction de τ_m. Un fait notable est le contrôle de τ_m par τ_w puisqu'une large partie des contraintes tombent sur la droite $\tau_m = 0.8\tau_w$. On retrouve une bonne adéquation (qualitative tout du moins) entre les résultats expérimentaux et numériques sur ce point.

Pour finir, un dernier point de comparaison porte sur la géométrie et l'aspect de l'interface solide-liquide dans la cavité. Les largeurs y_{int} sont présentées figure 3.32. On observe qu'une admensionnalisation de $|y_{int}|$ par D suit déjà un scaling proche de celui de Oldroyd, puisqu'il semble se dégager une loi de la forme :

$$|y_{int}|/D = CB^{-1/3},$$

et ce, même avec des nombres de Bingham de l'ordre de l'unité. Par ailleurs, les largeurs δ_{BL} sont présentées figure 3.33. Les simulations concordent bien avec les mesures expérimentales.

On observe cependant une prédominance de la zone Poiseuille-like quasiment systématiquement plus large que l'autre partie de la zone fluide (comme montré figure 3.34). Ceci est un premier signe de la dissymétrie du profil. Cette absence de symétrie est importante puisque c'est une des hypothèses faites par Oldroyd et Balmforth pour dériver leur profil de vitesse asymptotique. Un autre indicateur de cette géométrie de l'interface est l'efficacité de déplacement qui a déjà été décrite dans [78]. L'aire de la zone fluide dans dans la cavité est défini par $A_{tot} = \int_0^D |y_{int}(x)|\mathrm{d}x$. Cette aire de déplacement peut être scalée soit par l'aire totale de la cavité (Dh) soit par celle de la *cavité apparente* ($D|y_{int}(x_{1/2})|$). Ce deuxième adimensionnement a l'avantage d'être indépendant du phénomène de self-selection vu en section 1.2.3. Les deux scalings sont donnés figure 3.36. La première se compare bien avec les mesures expérimentales (voir la figure 6 de [78]) à l"exception des B les plus faibles. Il est à noter que le scaling suivant

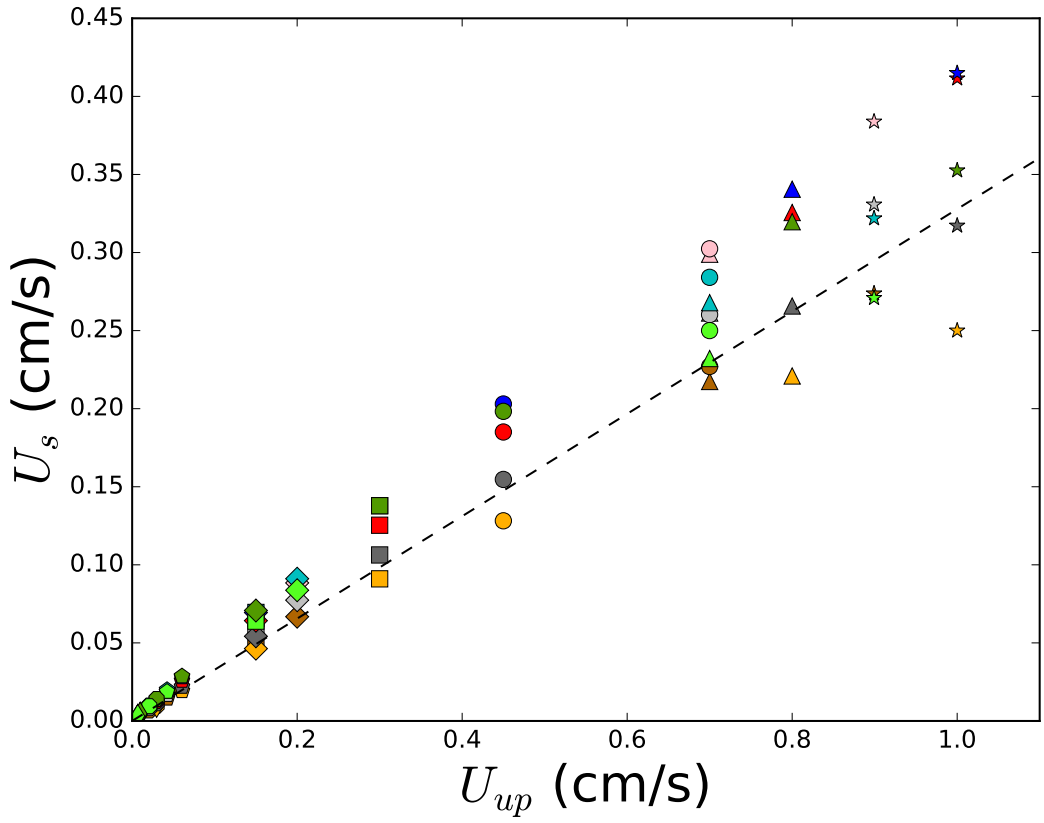


FIGURE 3.30 – Lien entre U_s et U_{up} pour toutes les géométries et fluides simulés.
Légende : voir figure 3.27

l'aire de la cavité apparente réduit drastiquement la dispersion. Cela est un bon signe de l'invariance de forme de cette interface lorsque l'aspect-ratio de la cavité change (pour peu que B reste de l'ordre de l'unité). Par ailleurs, la différence de comportement à petit nombre de Bingham pourrait s'expliquer encore une fois par le caractère viscoplastique non idéal du Carbopol. Plus précisément, on peut supposer qu'à petit B le caractère viscoplastique du matériau tend à s'effacer pour laisser place à d'autre effets (viscoélasticité ou thixotropie). Ceci pourrait être confirmé par une comparaison entre les mesures expérimentales et des simulations sur le système complet de Herschel-Bulkley.

Toutes ces comparaisons montrent (comme dans les sections précédentes) qu'un modèle de Bingham capture beaucoup des propriétés qualitatives non triviales du Carbopol utilisé dans les mesures expérimentales, Carbopol qui est modélisé par une loi de Herschel-Bulkley. Il est donc pertinent de mettre en vis à vis les expériences et les simulations et de tester les scalings dérivés expérimentalement et numériquement.

3.3.3 L'approximation de couche limite

Du fait de la finesse des maillages et du choix d'algorithmes de dualité, on peut considérer les champs des composantes du tenseur des contraintes (que l'on récupère grâce au tenseur du multiplicateur d). Les champs de contraintes sont montrés dans un cas particulier figure 3.38. On montre également la ligne $y = y_s$ dans ce cas. Un récapitulatif des lignes $y = y_s$ est montré figure 3.39. On observe un comportement différent de ces lignes de glissement suivant la longueur de la

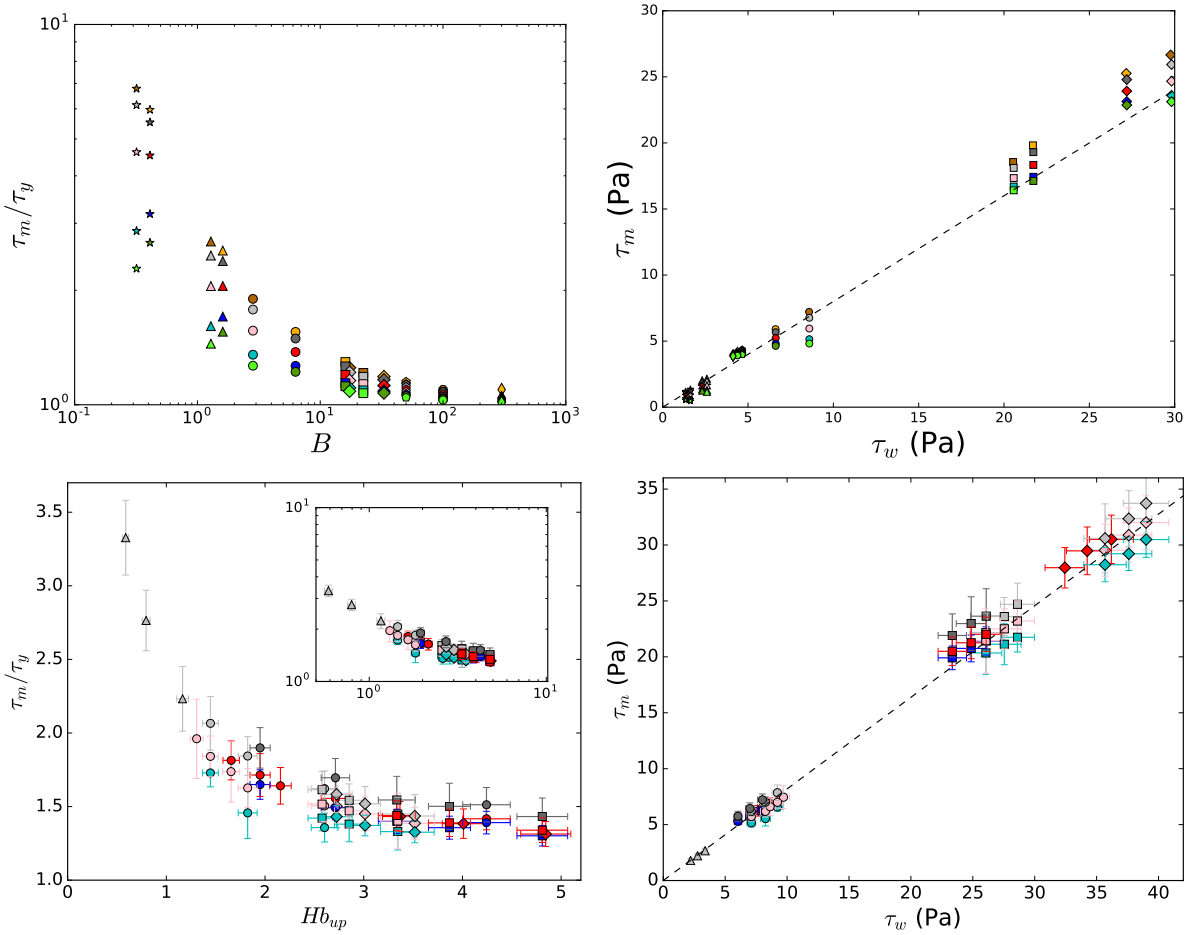


FIGURE 3.31 – Évolution de τ_m/τ_y en fonction B (à gauche) et dépendance de τ_m en τ_w (à droite). En haut : simulations. En bas : mesures expérimentales (Hb_{up} correspond au Hb du texte : $Hb_{up} = \frac{\tau_y R}{\eta U_{up}}$). Les lignes en pointillés à droite représentent la relation $\tau_m = 0.8\tau_w$.
Légende : voir figure 3.27

cavité. En effet, plus celle-ci est élevée, plus les lignes de glissement ont tendance à entrer dans la cavité. Les champs de contraintes présentent les mêmes caractéristiques que dans la section 3.2.2.

L'approximation de couche limite consiste à prendre la limite y petit et B grand.
Partant des systèmes (2.20)-(2.21) et supposant que l'écoulement a lieu en faible épaisseur, on effectue le scaling suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\tilde{x} \\ \varepsilon\mathcal{L}\tilde{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}\tilde{u} \\ \varepsilon\mathcal{U}\tilde{v} \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{L}$,$\mathcal{U}$ sont les longueur et vitesse caractéristiques du système. Les pressions et contraintes caractéristiques sont $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{U}\eta}{\mathcal{L}}$. Les équations de couche limite sont obtenues en supposant que B est élevé. Plus précisément, en suivant l'équilibre des différents termes effectuée dans [94, 8], on suppose que $\varepsilon^3 B \sim 1$. De plus, en étudiant les ordres de grandeurs des différents termes dans la première composante de l'équation de conservation des moments, on en déduit que le terme principal de pression est :

— du même ordre de grandeur que τ_{xx},
— un ordre de grandeur plus petit que τ_{xy}.

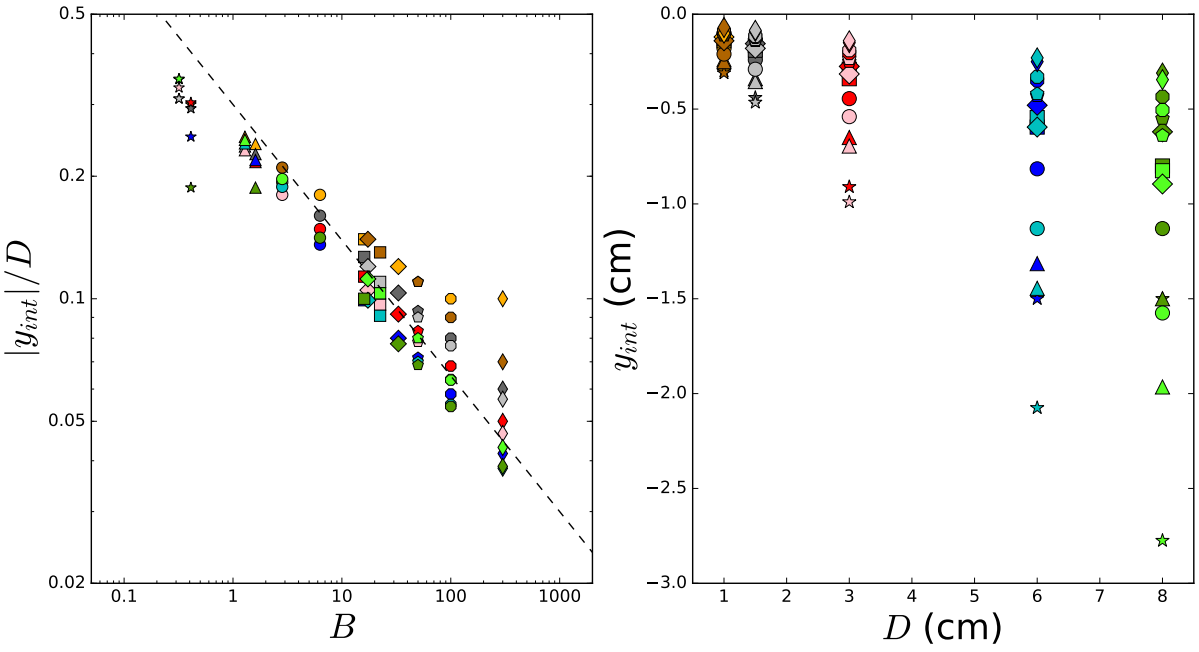


FIGURE 3.32 – Différentes visualisations de y_{int}. En pointillé à gauche : droite de pente $-1/3$. Légende : voir figure 3.27

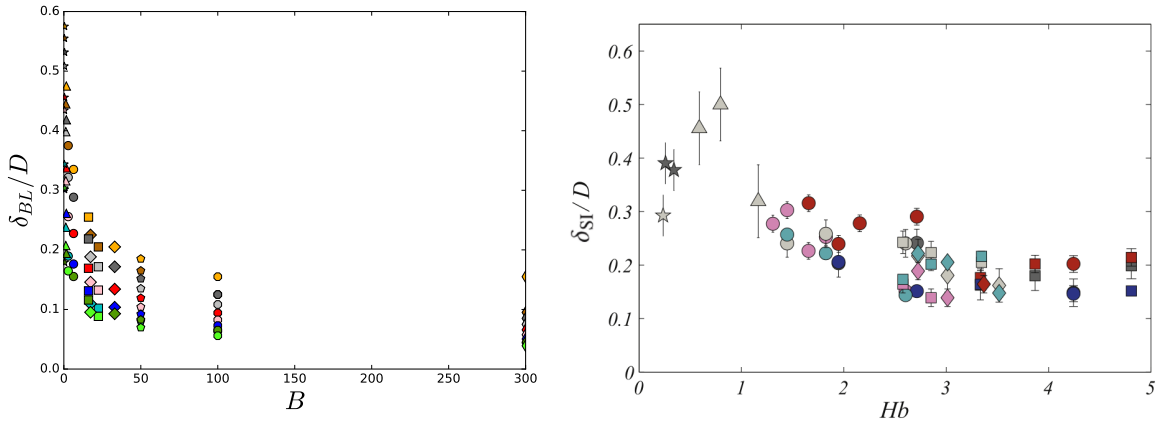


FIGURE 3.33 – Évolution de δ_{BL}/D en fonction de B. À gauche : simulations. À droite : mesures expérimentales (reproduction de la figure 10c de [78]) δ_{BL} est noté ici δ_{SI}. Légende : voir figure 3.27

Comme on suppose que τ_{xy} vaut approximativement B dans la zone fluide, on en déduit le scaling suivant pour la pression et les contraintes :

$$p = \mathcal{P}\frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{p}, \quad \begin{pmatrix}\tau_{xx}\\ \tau_{yy}\end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix}\mathcal{P}\tilde{\tau}_{xx}\\ \mathcal{P}\tilde{\tau}_{yy}\end{pmatrix}, \quad \tau_{xy} = \mathcal{P}\left(\frac{sgn(\partial_y\tilde{u})}{\varepsilon^3} + \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\tau}_{xy}\right). \tag{3.8}$$

Les termes dominants donnent les équations de conservation suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{x}}\tilde{u} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{v} &= 0,\\ \partial_{\tilde{y}}\tilde{p} = -\partial_{\tilde{y}}\tilde{\tau}_{xx},\ \partial_{\tilde{x}}\tilde{p} &= \partial_{\tilde{x}}\tilde{\tau}_{xx} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{\tau}_{xy}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

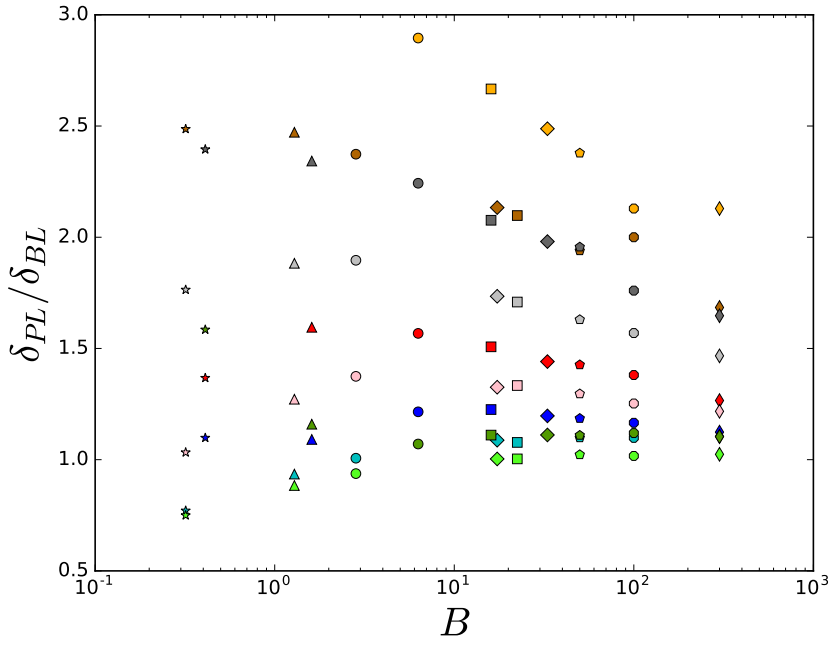


FIGURE 3.34 – Évolution de δ_{BL}/δ_{PL} en fonction de B. Légende : voir figure 3.27

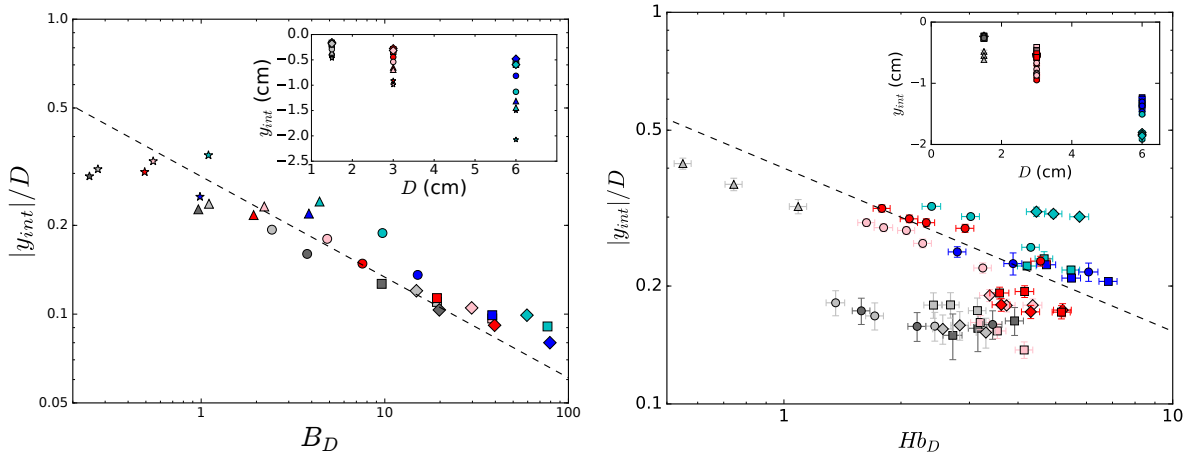


FIGURE 3.35 – Évolution de y_{int}/D (les encarts : les données brutes y_{int} en fonction de D) en fonction de $B_D = \frac{\tau_y D}{\eta U_{up}}$, (resp. $Hb_D = \frac{\tau_y}{\eta}\left(\frac{D}{U_{up}}\right)^n$). B_D est le nombre sans dimension apparaissant dans le scaling d'Oldroyd.
À gauche : les simulations (la droite en pointillés est de pente $-1/3$). À droite : mesures expérimentales (la droite en pointillés est de pente $-1/(n+2)$). Légende : voir figure 3.27

Intéressons-nous maintenant à la loi constitutive. On commence pour cela par un développement de $|D(\mathbf{u})|$. Ses composantes s'adimensionnent en :

$$\partial_x u = \partial_{\tilde{x}}\tilde{u}, \quad \frac{\partial_y u + \partial_x v}{2} = \frac{1}{2\varepsilon}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u} + \frac{\varepsilon}{2}\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}.$$

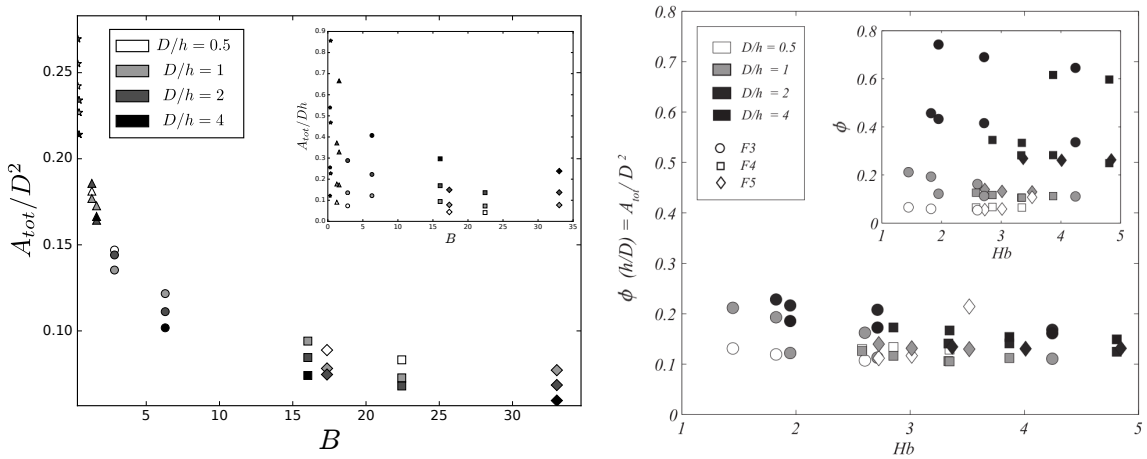


FIGURE 3.36 – Les différents scalings de A_{tot} en fonction de B : A_{tot}/D^2 et $A_{tot}/(Dh)$ (en inset). À gauche : résultats des simulations. À droite : reproduction de la figure 6 de [78]

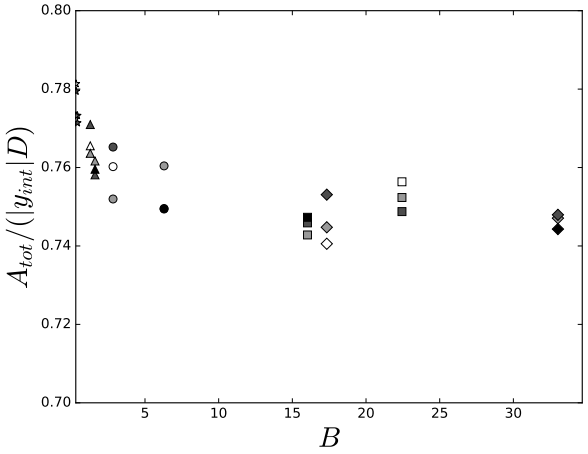


FIGURE 3.37 – Scalings de A_{tot} par l'aire de la cavité apparente en fonction de B. La légende est la même qu'à la figure 3.36

Le taux de déformation admet le développement suivant :

$$\begin{aligned}\left(\partial_x u^2 + \frac{(\partial_y u + \partial_x v)^2}{4}\right)^{1/2} &= \left(\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u} + \varepsilon\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}\right)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2 + \frac{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)^{1/2} \\ &= \left|\frac{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}}{2\varepsilon}\right|\left(1 + \varepsilon^2\frac{4\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} + \varepsilon^2\frac{2\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right)^{1/2},\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}|D(\mathbf{u})| &= \frac{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|}{2\varepsilon} + \varepsilon|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} + \varepsilon|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ |D(\mathbf{u})|^{-1} &= \frac{2\varepsilon}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|} - 4\frac{\varepsilon^3}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|}\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} - 2\frac{\varepsilon^3}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|}\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

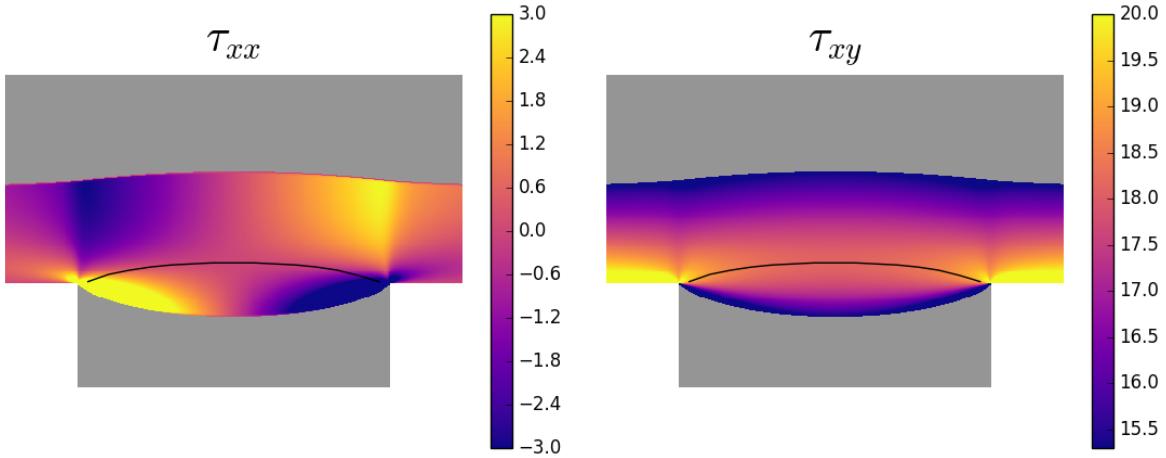


FIGURE 3.38 – Les composantes du tenseur des contraintes pour $D = 1.5cm$, $h = 3cm$ et $F4$. La ligne $y = y_s$ est en noir.

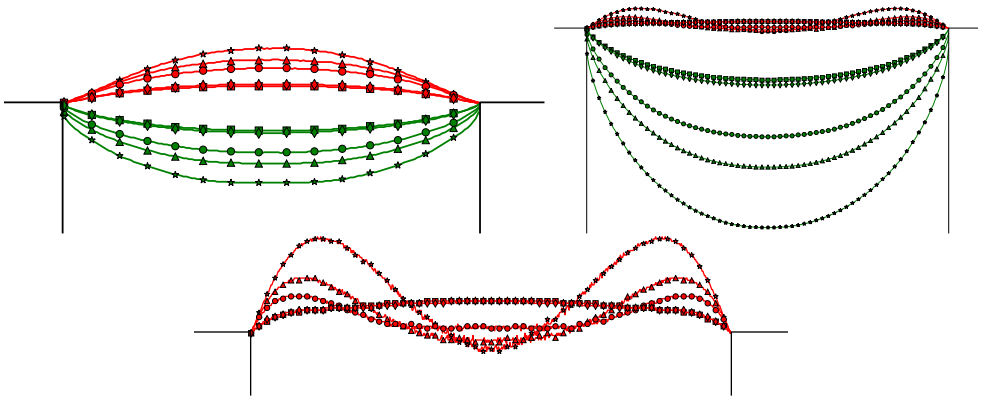


FIGURE 3.39 – Récapitulatif des lignes de glissement pour $D = 1,5$ (à gauche) et $6cm$ (à droite), $h = 3cm$ et les fluides F1 à F5 (voir la figure 3.27 pour la légende des glyphes). Les lignes de glissement sont en rouge et les zones mortes en vert. Le fond des cavités n'est pas montré. En bas : zoom sur les lignes de glissement pour $(D, h) = (6cm, 3cm)$.

En réinjectant ce développement dans la loi constitutive, il vient que :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xy}}{\mathcal{P}} &= (2 + B|D(\mathbf{u})|^{-1})\left(\frac{1}{2\varepsilon}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u} + \frac{\varepsilon}{2}\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}\right)\\ &= \frac{1}{\varepsilon}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u} + \varepsilon\partial_{\tilde{x}}\tilde{v} + \frac{B\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}}{2\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|} - 4\frac{\varepsilon^3}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|}\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} - 2\frac{\varepsilon^3}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|}\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}}\right) + \mathcal{O}(B\varepsilon^3 + \varepsilon)\\ &= B\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u} - 2B\varepsilon^2\sigma\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} - B\varepsilon^2\sigma\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}} + \mathcal{O}(B\varepsilon^3 + \varepsilon),\end{aligned}$$

où $\sigma = sgn(\partial_{\tilde{y}}\tilde{u})$. On retrouve la même loi constitutive que Balmforth à l'exception du terme supplémentaire $\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}$ considéré comme négligeable dans [8]. En reprenant l'ordre de grandeur $B = \varepsilon^{-3}$, on aboutit à :

$$\tilde{\tau}_{xy} = \partial_{\tilde{y}}\tilde{u} - 2\sigma\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}^2}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}^2} - \sigma\frac{\partial_{\tilde{x}}\tilde{v}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}}. \tag{3.10}$$

Un calcul analogue donne :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xx}}{\mathcal{P}} &= (2 + B|D(\mathbf{u})|^{-1})\partial_{\tilde{x}}\tilde{u} \\ &= B\varepsilon\frac{2\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}}{|\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}|} + \mathcal{O}(B\varepsilon^2 + 1),\end{aligned}$$

ce qui donne pour le terme principal :

$$\tilde{\tau}_{xx} = \frac{2\sigma\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}}{\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}}. \tag{3.11}$$

L'équation (3.9) nous permet d'obtenir une expression pour la pression (on omet à présent les tilde par simplicité) :

$$p = -\tau_{xx} + G(x),\ G'(x) = 2\partial_x\tau_{xx} + \partial_y\tau_{xy} \tag{3.12}$$

et de la même manière que dans [8], on suppose qu'il existe une symétrie par rapport au milieu de la zone fluide, ce qui implique $G = 0$. On en déduit *l'équation de couche limite* :

$$2\partial_x\tau_{xx} + \partial_y\tau_{xy} = 0 \tag{3.13}$$

associé à la loi constitutive (3.10)-(3.11).

On peut donc mettre à l'épreuve l'approximation de couche limite d'Oldroyd à nombres de Bingham modérés. La figure 3.40 montre les dérivées du tenseur des contraintes ainsi que l'expression $2\partial_x\tau_{xx} + \partial_y\tau_{xy}$ en comparaison. On observe que (dans le cas particulier de $(D, h) = (1.5cm, 3cm)$, et $F4$, l'approximation d'Oldroyd est bien vérifiée. Par ailleurs, ces profils de dérivées des contraintes sont similaires pour les différents fluides et les différentes géométries. On peut comparer l'expression (3.13) à son premier terme de manière systématique. La comparaison des normes L^1 de ces profils est montrée figure 3.41. On observe que l'approximation de couche limite est d'autant mieux vérifiée que le nombre de Bingham est élevé. Cette aproximation reste cependant raisonnablement valable pour des B modérés.

3.3.4 Résolution des équations de couche limite

Suivant la définition de la couche limite, la résolution des équations (3.10)-(3.11)-(3.13) change drastiquement. La définition de cette largeur dépend grandement du fait que l'on accepte ou pas l'hypothèse de symétrie du profil de déformation par rapport au milieu de la zone fluide.

- Si on suppose que cette hypothèse est vraie, alors prendre comme définition de couche limite toute la largeur de la zone fluide comme Oldroyd est cohérent et donne les mêmes résultats que δ_{BL} à multiplication par $1/2$ près.
- Si l'on suppose que cette hypothèse n'est pas vérifiée, alors les deux définitions ne coïncident pas. Ce choix complexifie drastiquement les calculs.

On va comparer la différence entre les deux choix de couche limite. Dans toute la suite, on suppose que les calculs présentés dans [8] sont valides et que le terme supplémentaire trouvé dans (3.10) est négligeable. En supposant que $\partial_y u > 0$, l'équation (3.10) devient donc,

$$\partial_y\left(\partial_y u - 2\frac{\partial_x u^2}{\partial_y u^2}\right) + 4\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{\partial_y u}\right) = 0, \tag{3.14}$$

Dans le premier cas

On reprend ici les résultats de [8] et on omet le détail des calculs (ces derniers seront détaillés dans le deuxième cas). Dans le cas de la cavité, la vitesse solution de (3.14) admet comme structure :

$$u(x, y) = \frac{U_{plug}}{2} + U_{plug}f(\zeta) \text{ où } \zeta = \frac{y - y_m(x)}{Y(x)}, \tag{3.15}$$

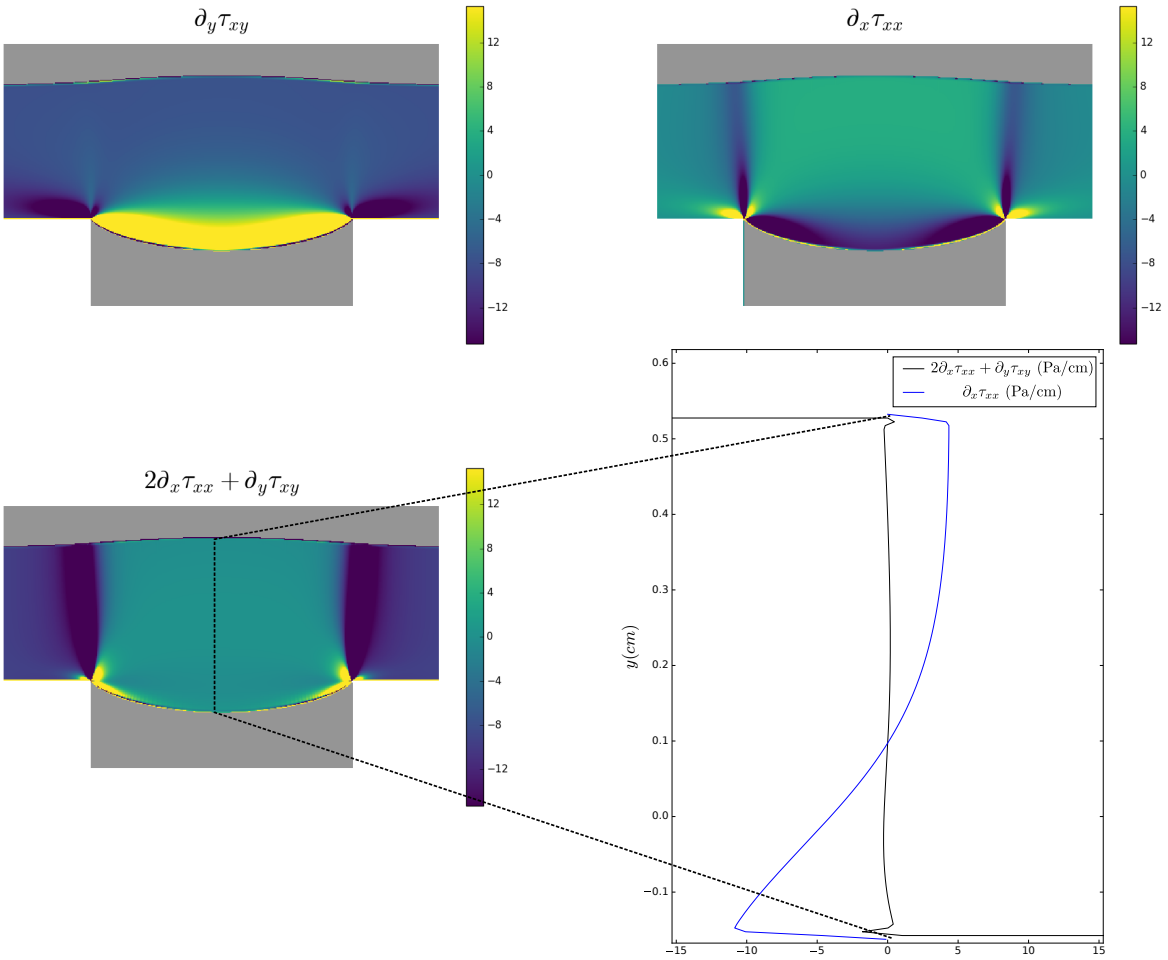


FIGURE 3.40 – Comparaison de l'équation de couche limite et de ses différents termes pour $D = 1.5cm$, $h = 3cm$ et $F4$.

avec y_m est l'ordonnée du milieu de la zone fluide et Y sa demi-largeur ($\zeta = -1$ étant l'ordonnée de la zone morte et $\zeta = 1$, celle de la zone plug). La solution des équations de couche limite est :

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{4}(\zeta^2 - 3), \text{ où } Y \text{ vérifie } Y'(x) = \frac{3}{4} U_{plug} \left(Y^{-1} - Y_E^{-1} \right), \tag{3.16}$$

où Y_E, la demi-largeur de la zone fluide au milieu de la cavité, vérifie :

$$Y_E^{3/2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{Y_0}{Y_E - Y_0}} \right) + \sqrt{Y_E Y_0 (Y_E - Y_0)} = \frac{\sqrt{3U_{plug}}}{2} D, \tag{3.17}$$

où Y_0 est la demi-largeur de la zone fluide en entrée de cavité qui n'est pas déterminée a priori. On peut mettre à l'épreuve ces résultats à la lumière des simulations faite en cavités courtes. On a plusieurs choix possibles pour Y_0 :

- On peut supposer qu'à B élevé, Y_0 est petit et poser $Y_0 = 0$,
- On peut supposer qu'il y a continuité de la largeur de la zone fluide au niveau de la cavité et que Y_0 est égal à la demi-largeur de la zone fluide du Poiseuille en amont ($Y_0 = Y_0^{pa}$),
- On peut choisir le Y_0 donné par la simulation ($Y_0 = Y_0^s$).

Y_E, lui peut être choisi :

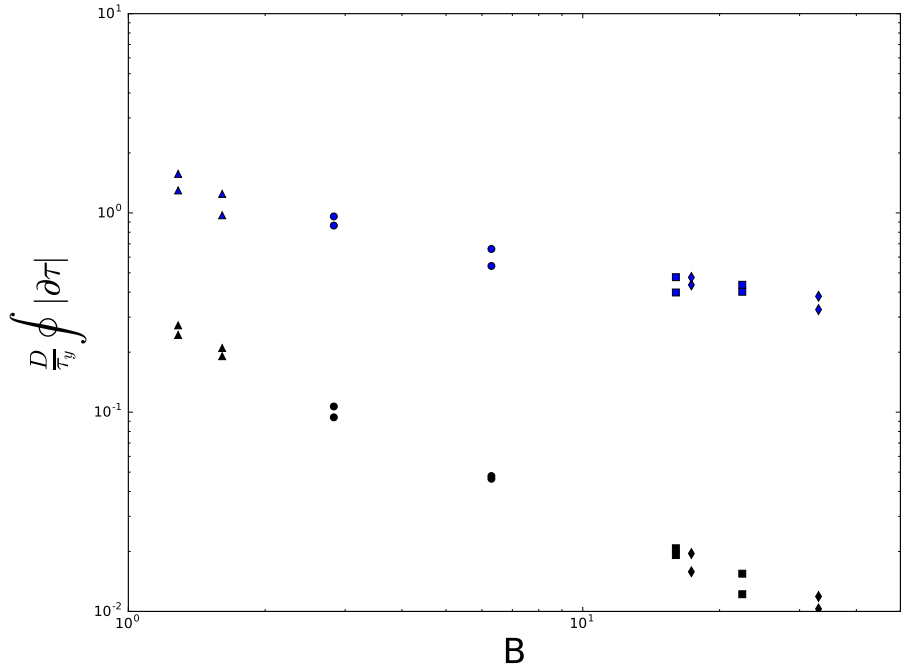


FIGURE 3.41 – Comparaison de la moyenne de l'expression de (3.13) (en noir) et de son premier terme (en bleu) pour D de 1.5 à $6cm$, h de 1.5 à $3cm$ et des fluides $F2$ à $F5$ (les glyphes sont décrits figure 3.27).

— d'après la formule (3.17) et l'un des Y_0 donnés précédemment, $Y_E = Y_E(Y_0)$
— ou d'après le Y_E donné par la simulation : $Y_E = Y_E^s$.

On obtient différents résultats pour Y dont quelques exemples sont donnés figure 3.42. Ces exemples sont relativement représentatifs dans le sens où $F3$ est à B modéré et où $B = 300$ représente un cas transitoire entre la gamme de B observée dans [8] et celle étudiée ici. Par ailleurs, le cas d'une cavité à $D = 1,5cm$ est celui qui s'éloigne le plus du cas Oldroyd. Ces interfaces calculées sont relativement proches dès qu'on fait le choix de ne pas prendre Y_0 nul. Cela donne un premier indice que la théorie de la couche limite reste valide dans une certaine mesure à B modérés.

Dans le deuxième cas

Dans ce cas, la forme de la vitesse devient

$$u(x,y) = U_s(x)F(\zeta) \text{ avec } \zeta = \frac{(y-y_m)}{Y(x)},$$

où y_m est le milieu de la zone BL et $\delta = 2Y(x)$ sa largeur ($\zeta = -1$ représente l'ordonnée de la zone morte et $\zeta = 1$ la ligne de glissement). Les conditions aux limites deviennent :

$$F(-1) = 0,\ F'(-1) = 0,\ F(1) = 1\ F''(1) = 0. \tag{3.18}$$

La grande différence entre les deux problèmes (différence qui va compliquer les calculs) est que cette fois U_s dépend de x. Partant de (3.14) et en y injectant le profil auto-similaire de la vitesse :

$$\partial_y u = \frac{U_s}{Y}F'(\zeta),\quad \frac{\partial_x u}{\partial_y u} = \frac{U_s' F}{U_s F'}Y - \zeta Y', \tag{3.19}$$

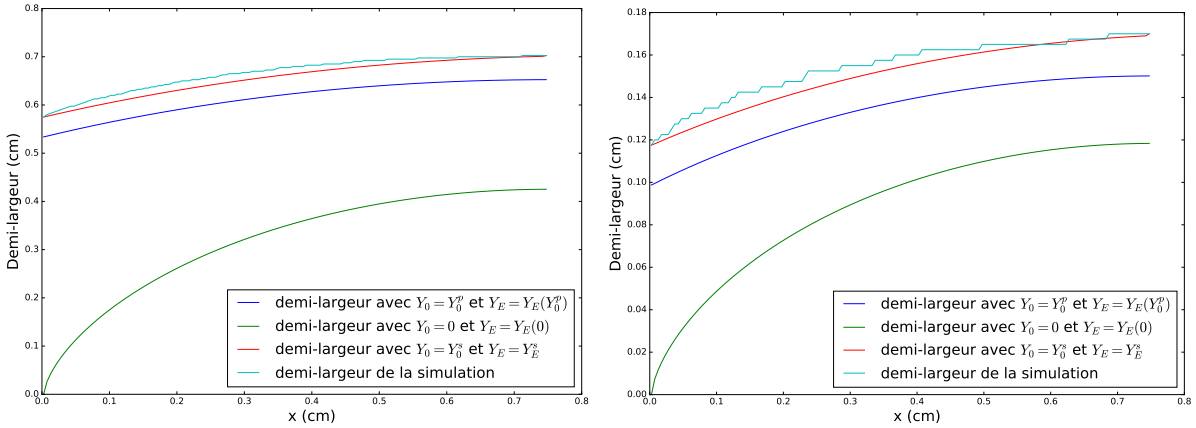


FIGURE 3.42 – Différentes demi-largeurs pour $D = 1,5cm$, $h = 1,5cm$ et F3 (à gauche) et $B = 300$ (à droite).

il vient que pour tout ζ dans $[-1,1]$ et tout x :

$$\frac{1}{4}U_s Y^{-2}F'' - Y''\zeta + \frac{F}{F'}\left(Y\frac{U_sU_s'' - (U_s')^2}{U_s^2} - Y\frac{(U_s')^2}{U_s^2}\left(1 - \frac{FF''}{(F')^2}\right) + 2Y'\frac{U_s'}{U_s}\right) = 0. \tag{3.20}$$

En particulier, les conditions limites nous donnent (puisque $\lim_{\zeta\to -1}\frac{F(\zeta)}{F'(\zeta)} = 0$) en regardant en $\zeta = \pm 1$:

$$\begin{aligned} U_sF''(-1) &= -4Y''Y^2, \text{ en } \zeta = -1, \\ -Y''F'(1)U_s^2 + Y(U_sU_s'' - 2(U_s')^2) + 2Y'U_sU_s' &= 0, \text{ en } \zeta = 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Par ailleurs, en estimant (3.20) en $x = x_{1/2} \in [0, 2x_{1/2}]$ (au milieu de la cavité) et à ζ quelconque, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} Y\left(x_{1/2}\right) = \frac{\delta_{BL}}{2}, \quad Y'\left(x_{1/2}\right) = 0, \quad U_s'\left(x_{1/2}\right) = 0, \\ Y''\left(x_{1/2}\right) = -\frac{U_s\left(x_{1/2}\right)F''(-1)}{4Y^2\left(x_{1/2}\right)} = -\frac{U_s\left(x_{1/2}\right)F''(-1)}{\delta_{BL}^2}, \end{aligned}$$

il vient que :

$$\frac{1}{\delta_{BL}^2}U_s\left(x_{1/2}\right)F''(\zeta) + \frac{U_s\left(x_{1/2}\right)F''(-1)}{\delta_{BL}^2}\zeta + \frac{F(\zeta)}{F'(\zeta)}\left(\frac{\delta_{BL}}{2}\frac{U_s''\left(x_{1/2}\right)}{U_s\left(x_{1/2}\right)}\right) = 0,$$

i.e.

$$\left(F''(\zeta) + F''(-1)\zeta\right)F'(\zeta) + \left(\frac{\delta_{BL}^3}{2}\frac{U_s''\left(x_{1/2}\right)}{U_s\left(x_{1/2}\right)^2}\right)F(\zeta) = 0. \tag{3.22}$$

Ainsi, le profil de vitesse dans la couche limite, la vitesse de glissement et la forme de l'interface entre les deux zones sont donnés par le système (3.22)-(3.23).

Remarque 20 *Rappelons que, formellement tout du moins, on se ramène bien au premier cas en supposant que U_s est constant et en changeant les conditions de bord. On arrive alors à*

$$U_sF''(-1) = -4Y''Y^2, \ -Y''\underbrace{F'(1)}_{=0}U_s^2 = 0 \text{ et } F''(\zeta) + C\zeta = 0.$$

ce qui correspond aux équations vérifiées par le f de la section 3.3.4 pour un bon choix de C.

Remarque 21 *On pourait aussi ne se préoccuper que du système (3.23) et supposer que dans le cas de Bingham le profil de vitesse est encore polynômial de degré 3 (comme dans [8]). Du fait des condtions de bord (3.18), le seul profil qui convienne dans ce cas est*

$$F(X) = \frac{1}{16}(X+1)^2(3-X).$$

et en première approximation, ce profil fonctionne relativement bien comme montré par exemple sur la figure 3.43.

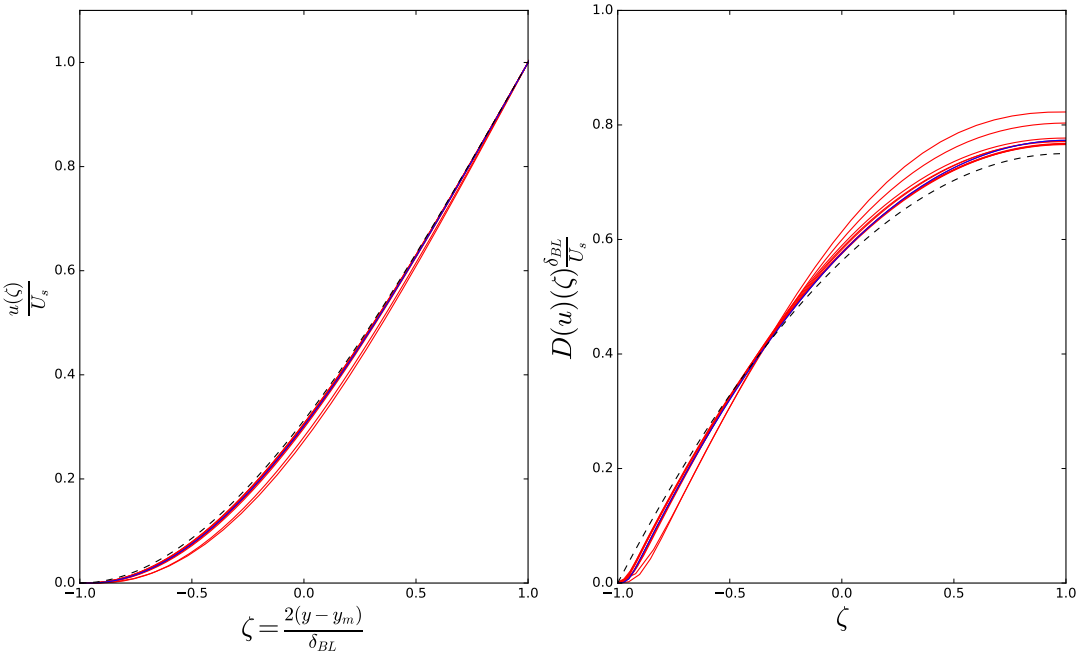


FIGURE 3.43 – **À gauche :** superposition de différentes coupes de vitesse tout au long de la cavité (en rouge) pour le fluide F4, $D = h = 3cm$. La proposition de F polynômiale est en pointillés noirs. La coupe au milieu de la cavié est en bleu.
À droite : les coupes de déformations associées (en rouge), F' (en pointillés noir) et la coupe de déformation au milieu de la cavité (en bleu).

Remarque 22 *Il est possible d'adapter les calculs précédents pour la partie PL. Si l'on suppose encore que la vitesse a un profil auto-similaire, cette fois,*

$$u(x,y) = U_s(x) + (U_{up} - U_s(x))G(\tilde{\zeta}) \text{ avec } \tilde{\zeta} = \frac{(y-\tilde{y}_m)}{\tilde{Y}(x)},$$

où $\tilde{y}_m$ est le milieu de la zone PL et $\tilde{\delta} = 2\tilde{Y}(x)$ sa largeur ($\zeta = -1$ représente l'ordonnée de l'interface et $\zeta = 1$ le plug central). Les conditions aux limites deviennent :

$$G(-1) = 0,\ G''(-1) = 0,\ G(1) = 1\ G'(1) = 0.$$

Et les systèmes liant G, U_s et $\tilde{Y}$ deviennent :

$$\begin{aligned}(U_{up}-U_s(x))G''(1) &= 4\tilde{Y}''(x)\tilde{Y}^2(x),\\ \tilde{Y}''(x)G'(-1)(U_{up}-U_s(x))^2+\tilde{Y}(U_s''(x)(U_{up}-U_s(x))+2(U_s'(x))^2)+2\tilde{Y}'(x)U_s'(x)(U_{up}-U_s(x)) &= 0,\\ \left(G''(\tilde{\zeta})-G''(1)\tilde{\zeta}\right)G'(\zeta)+\left(\frac{\delta_{PL}^3}{2}\frac{U_s''\left(x_{1/2}\right)}{(U_{up}-U_s\left(x_{1/2}\right))^2}\right)G(\zeta) &= 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

La structure est très proche de celle de (3.22)-(3.23).

Par manque de temps, il n'a pas été possible d'étudier plus en profondeur cette équation différentielle. La principale difficulté vient du fait que la séparation introduite est pour l'instant quelque peu "artificielle" et ne permet pas de quantifier l'absence de symétrie.

3.3.5 Les nouveaux scalings

On définit les nouveaux nombres de Bingham adimensionnés dans la cavité :

$$B_{cav}=\frac{\tau_y D}{\eta U_s}. \tag{3.24}$$

On présente figure 3.44 une proposition de scaling pour la zone fluide. On observe que le scaling en $B^{-1/3}$ est adapté pour δ_{BL}/D, c'est à dire qu'une grosse partie des largeurs tombent sur la même ligne et le fit est d'autant meilleur que B_{cav} augmente. Pour la zone Poiseuille-like, on observe une dispersion plus large. Cependant, malgré cette dispersion, à géométrie fixée, on ré-observe une relation linéaire entre δ_{PL}/D et $B_{cav}^{-1/3}$. Ainsi, on dispose de la relation

$$\delta_{BL}\sim C_{BL}DB_{cav}^{-1/3},\ \text{et}\ \delta_{PL}\sim C_{PL}(D)DB_{cav}^{-1/3}. \tag{3.25}$$

Il semble donc plus naturel d'appeler *couche limite* la zone BL, i.e. la zone entre la zone morte et le point d'inflexion de la déformation et non toute la zone fluidifiée du profil de vitesse. Les résultats d'Oldroyd ont donc été étendus numériquement. Ces simulations peuvent être mises en vis à vis des mesures expérimentales. En effet, on observe les mêmes tendances comme présenté figure 3.45. Par ailleurs, les calculs théoriques pour aboutir à (3.15)-(3.17) peuvent être adaptés (en partant de la solution analytique donnée par [8]) dans le cas Herschel-Bulkley. En testant ce scaling sur les résultats expérimentaux, on observe qu'il est relativement bien vérifié (c'est en tout cas ici les fits les plus précis de la littérature). En conclusion, on a tenu compte d'une description plus fine de la zone fluide, description qui permet d'adapter la définition de nombre de Bingham et de couche limite. Avec ces nouvelles définition, le scaling d'Oldroyd reste donc valable pour une gamme de nombres de Bingham plus faibles (de l'ordre de l'unité).

Par ailleurs, à géométrie fixée, un fit sur les différentes pentes permet de dégager une loi pour la constante intervenant dans δ_{PL} dans l'équation (3.25) (voir l'encart dans la figure 3.46) que

$$C(D)\sim 0.1D^{-2/3}.$$

La figure 3.46 montre le test de ce scaling pour δ_{PL}. On voit qu'une bonne partie des glyphes suit cette tendance, même si elle est encore améliorable. Ceci est en tout cas un excellent indicateur de la disymétrie des profils de déformation. En conclusion, on a revisité le problème de couche limite telle que présentée par Oldroyd et décomposé la zone fluide en deux sous-régions, la zone PL et la zone BL qui joue le rôle de la couche limie dans notre cas. On a dérivé un scaling pour cette zone qui suit celui de Balmforth et co-auteurs et vérifié son domaine de validité. Pour la zone PL on a proposé un autre scaling différent de l'autre et brisant la symétrie entre les deux zones.

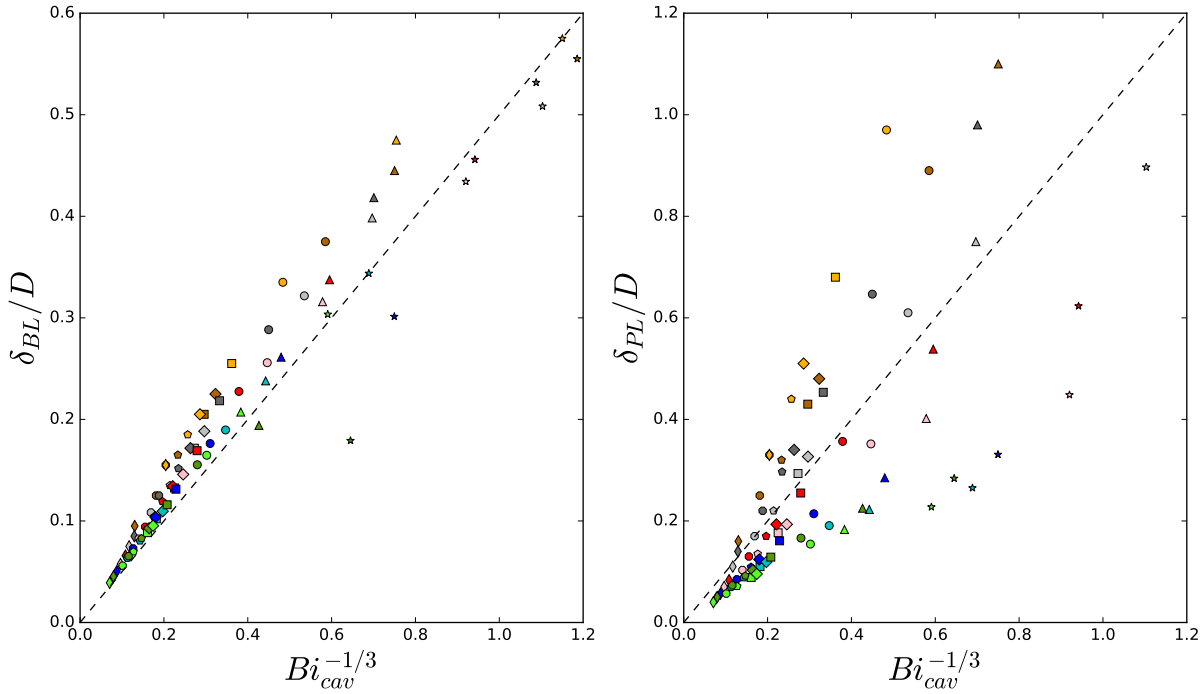


FIGURE 3.44 – Les scalings des zones couche limite (BL) et Poiseuille-like (PL). La légende est présentée figure 3.27. Les lignes en pointillés représentent $\delta_{BL}/D = 0.5Bi_{cav}^{-1/3}$ (à gauche) et $\delta_{PL}/D = B_{cav}^{-1/3}$ (à droite).

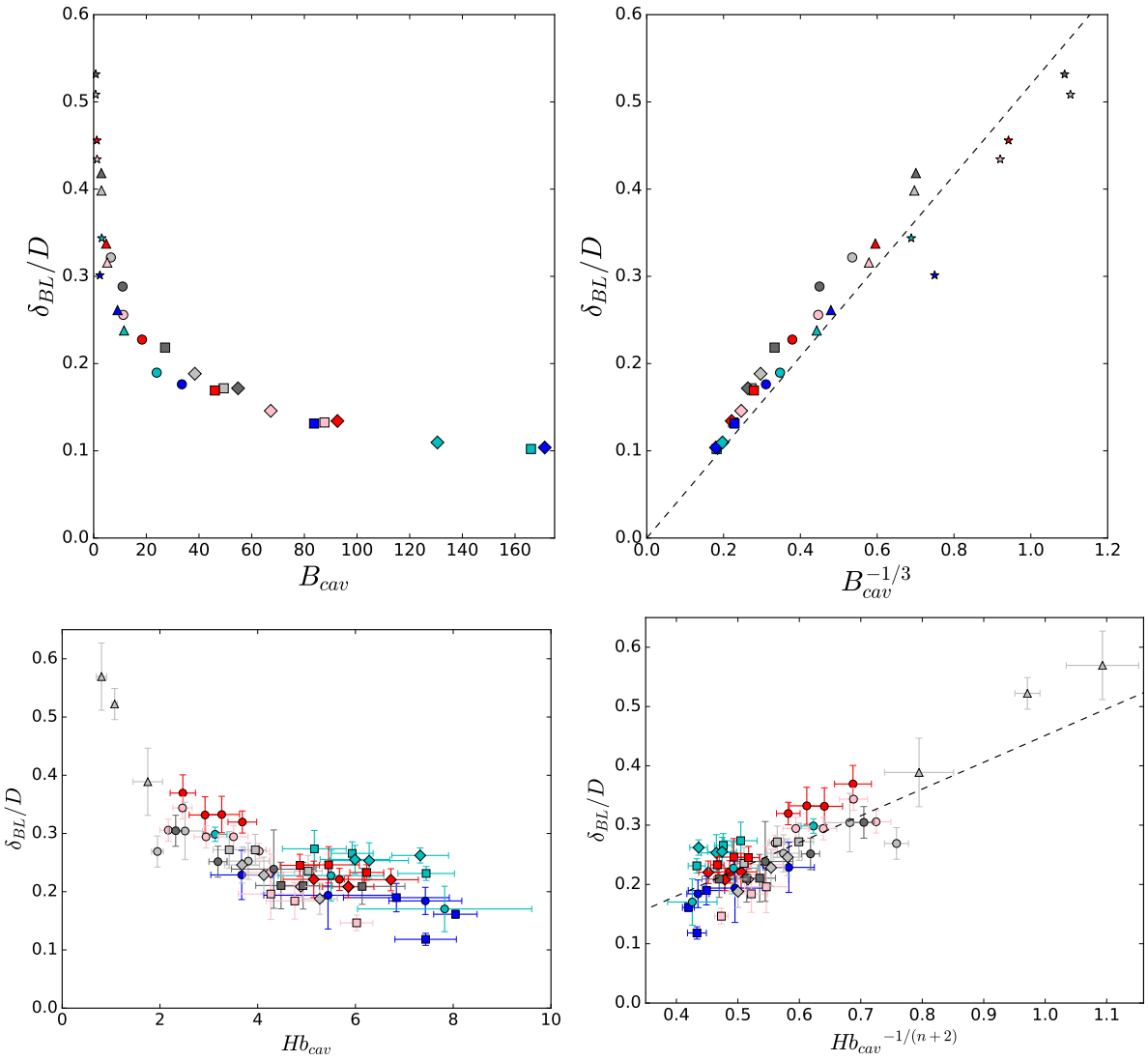


FIGURE 3.45 – Les scalings des zones couche limite (BL) numérique (en haut) et expérimentaux (en bas). La légende est présentée figure 3.27. Les mesures expérimentales ont été réalisées avec des matériaux modélisés par un fluide de Herschel-Bulkley et $Hb_{cav} = \frac{\tau_y}{\eta}\left(\frac{D}{U_s}\right)^n$. Les pentes des droites en pointillés sont 0.52 (pour les simulations) et 0.46 (pour les mesures).

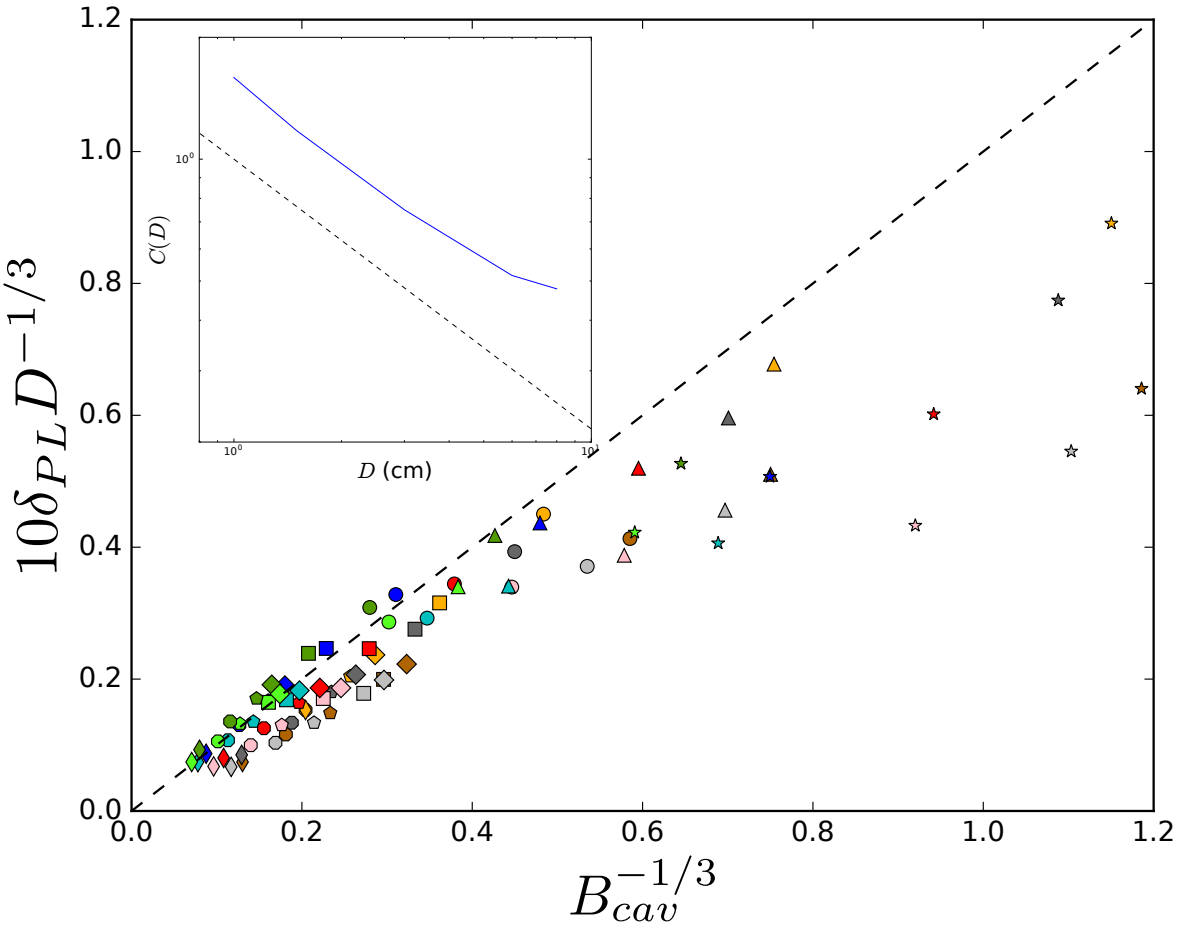


FIGURE 3.46 – Représentation de $\delta_{PL}D^{-1/3}$ en fonction de $B_{cav}^{-1/3}$. La ligne pointillée est de pente 1. Encart : Évolution de $C(D)$ en fonction de D. La ligne pointillée est de pente -2/3.

Chapitre 4

Vers une équation modifiée de Reynolds

On s'intéresse dans ce chapitre à un écoulement dans un domaine de faible épaisseur. Ce type de géométrie sera paramétrée par un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Le principe sera de trouver un développement de la vitesse en fonction de ε, lorsque ε tend vers 0. On va retrouver (au moins formellement) un résultat proche de celui de Nazarov et Videman [90]. Les auteurs de [90] étudient ce problème pour un fluide newtonien dans une domaine annulaire mince. En calculant la vitesse jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ils en déduisent une équation de Reynolds sur les deux premiers termes de pression :

$$-\frac{1}{6}\partial_s[(1+\varepsilon S)h^3\partial_s \mathfrak{p}] + \frac{\varepsilon Re}{560}\partial_s[\partial_s h(h^3\partial_s \mathfrak{p})] = -\partial_s[h(u_{in}+u_{out}+\varepsilon F)],$$

où S dépend des conditions de bords sur la vitesse u_{in} et u_{out} ainsi que de la courbure du domaine annulaire, domaine dont la frontière est paramétrée par s. Par ailleurs $\mathfrak{p}$ regroupe les deux termes principaux de la pression qui ne dépendent que de s. Cette équation d'ordre 2 contient deux termes en pression : un terme linéaire qui provient des termes principaux et un terme quadratique qui provient des termes convectifs. On montrera à la fin de la section 4.2.4 (plus précisément équation (4.41)) que dans le cas Bingham, l'équation de Reynolds aura la même structure (avec un terme en plus puisque l'on considère le cas non-stationnaire).

4.1 Introduction et adimensionnement des équations

On considère un domaine bidimensionnel Ω :

$$\Omega = \{(x,z),\ x \in [0,L], z \in [-H(x), H(x)]\}.$$

On suppose donc que le domaine est symétrique. L'hypothèse d'écoulement en couche mince est exprimée via $H(x) = \varepsilon h(x)$, où $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre, le but étant d'étudier le comportement de la solution lorsque ε tend vers zero. On étudie le système complet de Navier-Stokes dimensionné sur Ω.

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u\right) + \partial_x p &= \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz}, \\ \rho\left(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w\right) + \partial_z p &= \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz}, \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0, \\ \tau &= \left(\eta + \frac{\tau_y}{|D(\mathbf{u})|}\right) D(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

la dernière relation étant valable dès que $D(\mathbf{u}) \neq 0$ avec la notation $D(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2\partial_x u & \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_z u + \partial_x w & 2\partial_z w \end{pmatrix}$, et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$. On introduit un nouveau jeu de variables (avec u_0 la vitesse moyenne de l'écoulement) :

$$x = \chi L,\ z = \varepsilon L\zeta,\ t = \frac{L}{u_0}\theta, u = u_0\tilde{u},\ w = \varepsilon u_0 \tilde{w},$$

et en développant $D(\mathbf{u})$ dans sa forme adimensionnée, il vient que :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{u_0}{\varepsilon L}\begin{pmatrix} 2\varepsilon\partial_\chi\tilde{u} & \partial_\zeta\tilde{u} + \varepsilon^2\partial_\chi\tilde{w} \\ \partial_\zeta\tilde{u} + \varepsilon^2\partial_\chi\tilde{w} & 2\varepsilon\partial_\zeta\tilde{w} \end{pmatrix}.$$

Et donc, en posant $D(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 2\varepsilon\partial_\chi\tilde{u} & \partial_\zeta\tilde{u} + \varepsilon^2\partial_\chi\tilde{w} \\ \partial_\zeta\tilde{u} + \varepsilon^2\partial_\chi\tilde{w} & 2\varepsilon\partial_\zeta\tilde{w} \end{pmatrix}$, la loi constitutive se réécrit :

$$\tau = \eta\frac{u_0}{\varepsilon L}D(\tilde{\mathbf{u}}) + \tau_y\frac{D(\tilde{\mathbf{u}})}{|D(\tilde{\mathbf{u}})|}.$$

On peut donc introduire les contraintes sans dimension, ainsi que les grandeurs sans dimension suivantes :

$$(\tau, p) = \frac{\eta u_0}{\varepsilon L}(\tilde{\tau}, \tilde{p}),\ Re = \varepsilon\frac{\rho u_0 L}{\eta},\ B = \varepsilon\frac{\tau_y L}{\eta u_0}.$$

Ainsi, (en supprimant la notation tilde pour simplifier les notations), on aboutit aux équations de conservations suivantes :

$$\begin{aligned} Re(\partial_\theta u + u\partial_\chi u + w\partial_\zeta u) + \partial_\chi p &= \partial_\chi\tau_{xx} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\zeta\tau_{xz}, \\ \varepsilon Re\,(\partial_\theta w + u\partial_\chi w + w\partial_\zeta w) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\zeta p &= \partial_\chi\tau_{xz} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\zeta\tau_{zz}, \\ \partial_\chi u + \partial_\zeta w &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

munies de la loi constitutive :

$$\tau = \left(1 + \frac{B}{(4\varepsilon^2\partial_\chi u^2 + (\partial_\zeta u + \varepsilon^2\partial_\chi w)^2)^{1/2}}\right) D(\mathbf{u}) \text{ ssi } D(\mathbf{u}) \neq 0. \tag{4.3}$$

avec $|\tau| < B$ si $D(\mathbf{u}) = 0$. On a noté

- $Re = \frac{\rho u_0 \varepsilon L}{\eta}$ le nombre de Reynolds,
- $B = \frac{\tau_y \varepsilon L}{\eta u_0}$ le nombre de Bingham.

Introduisons également les conditions aux limites :

- sur les murs latéraux, on impose une absence de glissement : $(u, w)(x, -h) = (u, w)(x, h) = 0$,
- en entrée-sortie, on suit [16, 56] et on suppose fixée la chute de pression. Plus précisément, on impose $p(0, z) = p_{in}$ en entrée et $p(1, z) = p_{out}$ en sortie. Ceci est cohérent avec le fait que l'on suppose que le différentiel de pression est la force principale qui va régir l'écoulement, comme dans le cas Poiseuille. Comme la pression est définie à une constante près, je peux choisir $p_{out} = 0$.

Fernández-Nieto et co-auteurs ont déjà étudié ce type d'écoulement en couche mince dans le cas à surface libre [51]. Plus précisément, ils montrent que dans le cas Bingham, le domaine peut se séparer en trois zones, définies par rapport à l'ordre principal de la vitesse $u^{(0)}$:

- une zone pseudo-plug proche de la surface dans laquelle $\partial_\zeta u^{(0)}$ est nul,

— une zone fluide proche du fond où $\partial_\zeta u^{(0)}$ est non-nul,
— une petite zone de transition de taille $\varepsilon^{2/3}$ entre les deux.

La première zone n'est, comme décrit dans la section 1.4.3 (et comme on le verra après), pas une vraie zone de plug mais une zone de *pseudo-plug* dans laquelle les contraintes sont très proches du seuil B. Dans chaque zone, la vitesse est calculée jusqu'à l'ordre ε^2. On va suivre la stratégie développée dans [51] pour le développement asymptotique de la vitesse dans le cas formel. On verra que leurs résultats s'étendent au cas d'un écoulement confiné. Par ailleurs, la condition de constance de flux nous donnera accès à l'équation de Reynolds sur la pression. Cette équation de Reynolds aura une forme similaire à celle de chez Nazarov et Videman [90]. Dans la section 4.2 on présentera également une comparaison entre la pression effectivement calculée et celle donnée par l'équation de Reynolds. De telles expériences numériques sont présentes également dans [56]. Cependant [56] se limitent au cas des petites variations de h, i.e. le cas où $\partial_\chi h$ est de l'ordre de ε, puisque dans ce cas, (d'après Frigaard et Ryan [54]), le plug central reste d'un seul tenant et ne se casse pas. On ne pourra, nous, dans le cas où $\partial_\chi h$ est d'ordre 1, qu'approcher la position des zones pseudo-plug, à partir de l'équation de Reynolds. Cette localisation sera difficile à comparer avec les simulations numériques, puisqu'on utilisera une discrétisation de type éléments finis (les domaines ne seront pas linéaires par morceaux).

Dans la suite, on jouera avec les deux jeux de variables suivants :
— (t, x, z) pour le problème avec dimensions, (x, z) vivant dans le domaine Ω,
— (θ, χ, ζ) pour le problème sans dimension, (χ, ζ) vivant dans le domaine $\Omega' = \{(\chi, \zeta),\ \chi \in [0, 1], \zeta \in [-h(\chi), h(\chi)]\}$ que l'on utilisera surtout dans la section 4.2.

4.2 Analyse asymptotique formelle

4.2.1 Un développement de la vitesse à tout ordre

Développons la vitesse, la pression et les contraintes en série entière (on verra dans la suite qu'il faudra rajouter une petite zone où ce développement n'est pas valide, entre la zone fluide et le pseudo-plug).

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t, x, z) &\equiv \mathbf{u}^{(0)}(\theta, \chi, \zeta) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\theta, \chi, \zeta) + \cdots, \\
p(t, x, z) &\equiv \varepsilon^{-1} p^{(-1)}(\theta, \chi, \zeta) + p^{(0)}(\theta, \chi, \zeta) + \varepsilon p^{(1)}(\theta, \chi, \zeta) + \cdots, \\
\tau(t, x, z) &\equiv \tau^{(0)}(\theta, \chi, \zeta) + \varepsilon \tau^{(1)}(\theta, \chi, \zeta) + \cdots.
\end{aligned}$$

Regardons les équations de conservation du mouvement à tout ordre. L'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ de (4.2) donne :

$$\partial_\zeta p^{(-1)} = 0. \tag{4.4}$$

L'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ de (4.2) donne :

$$\begin{aligned}
\partial_\chi p^{(-1)} &= \partial_\zeta \tau_{xz}^{(0)}, \\
\partial_\zeta p^{(0)} &= \partial_\zeta \tau_{zz}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Notons que dans les zones fluides, si $\partial_\zeta u^{(0)} > K\varepsilon$, alors :

$$\tau_{zz} = \left(1 + \frac{B}{\partial_\zeta u^{(0)}} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \varepsilon \partial_\zeta w = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{4.6}$$

Cela nous donne que pour la pression,
— $p^{(0)}(\chi, \zeta) = p_C^{(0)}(\chi)$ dans les zones fluides,
— $p^{(0)}(\chi, \zeta) = p_C^{(0)}(\chi) - \tau_{xx}^{(0)}(\chi, \zeta)$ dans les zones pseudo-plug,

où $p_C^{(0)}$ est la "composante de la pression qui ne dépend que de χ". Maintenant, si on intègre la première équation de conservation entre 0 et ζ (en utilisant la symétrie) :

$$\tau_{xz}^{(0)}(\chi,\zeta) = \partial_\chi p^{(-1)}\zeta, \tag{4.7}$$

et en utilisant la loi constitutive (voir la section 1.1.5 pour la résolution plus en détail de l'écoulement de Poiseuille), il vient (en notant $h_v = h_v(\chi) = \frac{B}{|\partial_\chi p^{(-1)}|}$) que :

$$u^{(0)}(\chi,\zeta) = u_{pp}(\chi) + \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial_\chi p^{(-1)}}{2}(\zeta - h_v)^2 & \text{si } \zeta \in [h_v, h] \\ 0 & \text{si } \zeta \in [0, h_v] \end{array} \right\}, \text{ où } u_{pp}(\chi) = \frac{-\partial_\chi p^{(-1)}}{2}(h-h_v)^2, \tag{4.8}$$

avec prolongement par symétrie si $\partial_\chi p^{-1}(\chi) > \frac{B}{h(\chi)}$. Par ailleurs, $u^{(0)}(\chi,\zeta) = 0$ si $\partial_\chi p^{-1}(\chi) \leqslant \frac{B}{h(\chi)}$.

On a donc re-montré à l'instar de [56] qu'à l'ordre principal, le profil de vitesse est un profil de Poiseuille. Cela est cohérent avec l'idée intuitive qui nous dit que le profil de vitesse est peu dévié de celui de Poiseuille pour un écoulement dans un conduit presque plat.

Remarque 23 *On a ici supposé que $\partial_\chi p^{-1}(\chi)$ était partout plus grand (en valeur absolue) que $\frac{B}{h(\chi)}$. S'il existe une abscisse χ_0 où ceci n'est pas vrai, alors, $u^{(0)}(\chi_0,\zeta)$ vaut 0. Par constance du flux, $u^{(0)}$ vaut 0 partout. On suppose dans la suite que le fluide n'est pas bloqué. En particulier, $\partial_\chi p^{-1}$ ne s'annule pas et reste de même signe. Dans toute la suite, on supposera que l'écoulement va vers la droite et ainsi que $\partial_\chi p^{(-1)} < 0$ (ce qui revient à dire que $p_{in} > 0$).*

Remarque 24 *Ce profil de vitesse est donc totalement connu dès que $\partial_\chi p^{(-1)}$ est connu. Plus généralement, les différents ordres de la vitesse seront déterminés en fonction des termes dominants de la pression ($p^{(-1)}$, $p^{(0)}$, etc...). On aura donc besoin d'une autre équation pour fermer le système, i.e. une équation de type Reynolds.*

Poussons le développement un cran plus loin. L'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ de (4.2) donne :

$$\begin{aligned} Re(\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)}) + \partial_\chi p^{(0)} &= \partial_\chi \tau_{xx}^{(0)} + \partial_\zeta \tau_{xz}^{(1)}, \\ \partial_\zeta p^{(1)} &= \partial_\chi \tau_{xz}^{(0)} + \partial_\zeta \tau_{zz}^{(1)}, \\ \partial_\chi u^{(0)} + \partial_\zeta w^{(0)} &= 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $u^{(0)} = w^{(0)} = 0$ sur les murs.

À partir de là, on en déduit un algorithme pour trouver les termes d'ordre supérieur, (pour $k \geqslant 0$) :

- À partir de $u^{(k)}$, et de la condition d'incompressibilité, on en déduit $w^{(k)}$.
- On déduit une solution pour $\tau_{xz}^{(k+1)}$ à partir de la première équation de conservation du mouvement et une relation entre $\tau_{zz}^{(k+1)}$ et $p^{(k+1)}$ pour la suivante.
- Finalement, grâce à une équation de Reynolds à l'ordre $o(\varepsilon^{k+1})$ ferme le système.
- À partir de $\tau^{(k+1)}$, on a une expression pour u à l'ordre $\varepsilon^{(k+1)}$.

Remarque 25 *Le problème de cet algorithme est qu'il n'est valide que dans les zones fluides. Un symptôme du problème peut être observé sur le terme dominant de u. En effet, trois cas sont possibles :*

- *$\partial_\zeta u^{(0)} > K\varepsilon$: on est dans une zone fluide et l'estimation (4.6) est vérifiée,*
- *$\partial_\zeta u^{(0)} = 0$: on est dans une zone de pseudo-plug,*

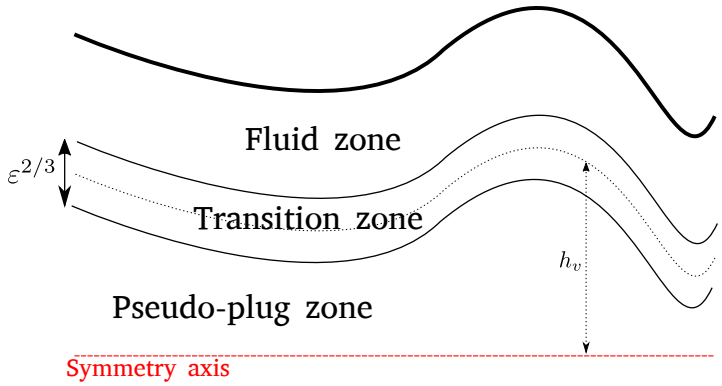


FIGURE 4.1 – La séparation du domaine en trois zones différentes.

— $0 < \partial_\zeta u^{(0)} < K\varepsilon$: *on est dans une zone de transition, entre le pseudo-plug et la zone fluide. C'est une petite couche autour de la ligne* $z = h_v$.

Dans ces deux dernières zones, les contraintes diagonales ne sont plus d'ordre ε *et ne sont plus négligeables. La figure 4.1 montre la séparation entre ces trois zones. Il est à noter que* u_{pp} *n'est pas une vraie vitesse de plug comme remarqué par Lipscomb et Denn dans [76]. À la suite de Walton et Bittleston dans [131], on ne sait pas vraiment si* $D(\mathbf{u}) = 0$ *dans cette zone. On ne peut donc parler que de zones pseudo-plug, quand bien même l'existence d'une vraie zone plug est possible (voir [54] par exemple). Entre ces deux zones principales, la jonction doit être soigneusement étudiée. Pour ce faire, on va suivre la stratégie de Fernández-Nieto et co-auteurs dans [51] et déduire de la forme* a priori *de la vitesse une taille pour cette zone de transition. De la même manière que dans [51], on montrera que dans cette bande de largeur* $\varepsilon^{2/3}$, *le développement de la vitesse est plus complexe qu'initialement prévu.*

La condition $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ nous donne l'expression de $w^{(0)}$: $w^{(0)} = -\int_h^z \partial_\chi u^{(0)}$. Deux cas sont à différencier :

— **Dans la zone fluide :** $u^{(0)} = u_{pp} + \frac{\partial_\chi p^{(-1)}}{2}(\zeta - h_v)^2$. En développant $w^{(0)}$, on obtient :

$$w^{(0)}(\chi,\zeta) = \frac{-\partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h(h-\zeta)}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}\Big(2(h-h_v)(h^2+hh_v+h_v^2) - h(h-\zeta)(\zeta+2h)\Big).$$

Et en $\zeta = h_v$:

$$w^{(0)}(\chi,h_v) = \frac{-\partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h(h-h_v)^2}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}h_v(2h_v+h).$$

— **Dans la zone pseudo-plug :** $u^{(0)} = u_{pp}$. Donc $w^{(0)} = w^{(0)}(\chi,h_v) + \partial_\chi u_{pp}(h_v - \zeta)$. On obtient donc :

$$w^{(0)}(\chi,\zeta) = \frac{-\partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h(h-h_v)^2}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}(2h_v+h)\zeta.$$

(et on vérifie que $w^{(0)}(\chi,0) = 0$).

4.2.2 Première équation de Reynolds

Intégrer l'équation de la conservation de la masse nous donne $\partial_x\left(\int_{\zeta=0}^h u\mathrm{d}\zeta\right) = 0$. Ainsi, cette relation étant vraie à tout ordre (et donc à l'ordre 0), et en développant l'expression de $u^{(0)}$, on

en déduit une première équation de Reynolds :

$$\partial_\chi \left(\partial_\chi p^{(-1)} (h - h_v)^2 (2h + h_v) \right) = 0. \tag{4.10}$$

En développant la dérivée, on obtient une équation différentielle ordinaire pour $p^{(-1)}$:

$$\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} = -3 \partial_\chi p^{(-1)} \frac{h \partial_\chi h}{(h^2 + h h_v + h_v^2)}. \tag{4.11}$$

Remarque 26 *Lorsque B tend vers 0, $h_v = \frac{B}{|\partial_\chi p^{(-1)}|}$ tend également vers 0 et l'équation de Reynolds devient :*

$$\partial_\chi \left(\partial_\chi p^{(-1)} h^3 \right) = 0, \tag{4.12}$$

ce qui est exactement celle du cas newtonien, puisque dans ce cas, le profil de $u^{(0)}$ est entièrement parabolique.

On montre le lemme suivant qui sera utile par la suite :

Lemma 1 $sgn(\partial_\chi u_{pp}) = -sgn(\partial_\chi h)$.

Preuve : Partons de (4.10) et décomposons $u^{(0)} = u_{pp} + \mathbb{1}_{\zeta > h_v} \frac{\partial_\chi p^{(-1)}}{2} (\zeta^2 - h_v^2)$. Alors,

$$\partial_\chi (h u_{pp}) - \partial_\chi \underbrace{\left(\frac{-\partial_\chi p^{(-1)}}{6} (h - h_v)^3 \right)}_{\frac{u_{pp}(h - h_v)}{3}} = 0. \tag{4.13}$$

On obtient donc :

$$\frac{2h + h_v}{3} \partial_\chi u_{pp} = -\frac{u_{pp}}{3} \partial_\chi (2h + h_v), \;\; sgn(\partial_\chi u_{pp}) = -sgn(\partial_\chi (2h + h_v)). \tag{4.14}$$

Un développement du terme de droite nous donne :

$$\partial_\chi (2h + h_v) = 2\partial_\chi h - \frac{\partial_{\chi\chi} p^{(-1)}}{\partial_\chi p^{(-1)}} h_v = \partial_\chi h \underbrace{\left(2 + 3 \frac{h h_v}{(h^2 + h h_v + h_v^2)} \right)}_{>0}.$$

Finalement, $\partial_\chi u_{pp}$ et $\partial_\chi h$ sont de signes opposés, ce qui prouve le lemme. □

Le signe de $\partial_\chi h$ va apparaître dans les différentes composantes de la vitesse. On va être amené à considérer deux cas différents : le cas où $\partial_\chi h$ s'annule (ou est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$) et le cas où $\partial_\chi h$ est plus grand.

Remarque 27 *On rappelle que u_{pp} est censé être une vitesse de plug mais qui dépend de χ ! C'est donc une vitesse pseudo-plug. Par ailleurs, un calcul assez simple donne*

$$\partial_\chi u_{pp} = \partial_\chi p^{(-1)} \partial_\chi h (h - h_v)^2 \frac{h + 2h_v}{2(h^2 + h h_v + h_v^2)}.$$

Cette vitesse de pseudo-plug est petite seulement si $\partial_\chi h$ est petit. Frigaard et Ryan [54] étudient un développement de la vitesse lorsque $\partial_\chi h$ est petit (d'ordre ε) et montrent qu'il existe au milieu de ce pseudo-plug un vrai plug. Par ailleurs, ils montrent numériquement l'existence d'une hauteur de mur critique, suffisante pour qu'une rupture du plug central apparaisse.

À la suite de [56], on présente pour finir cette partie une comparaison numérique entre le champ de pression total donné par le problème de Stokes-Bingham complet (les termes convectifs n'apparaissant qu'à l'ordre ε) et le champ de pression $p^{(-1)}$ donné par l'équation de Reynolds (4.10). Par exemple, on a vu section 3.2.1 que dans le cas expansion-contraction, la pression était quasiment linéaire par morceaux dans le cas des cavités longues, le caractère linéaire par morceaux étant la solution de l'équation de Reynolds.

Pour la résolution numérique de (4.10), on adopte un schéma de type volumes finis. Le problème complet de Stokes-Bingham est résolu encore une fois à l'aide d'un algorithme Lagrangien Augmenté **(ALG2)** comme décrit au chapitre 2. Par contre, les domaines étudiés n'étant plus rectangulaires par morceaux, la discrétisation est de type éléments finis et on utilise FreeFem++(voir [64]). Le pas moyen du maillage est de $\varepsilon/8$. Dans ce cas, $N_{max,B} = 30000$ et la tolérance vaut 10^{-6}. On dispose de trois cas tests différents en changeant h :

— une cavité sinusoïdale : $h(\chi) = 1 + \frac{1}{4}\sin(\chi)$,

— une cavité en dents de scie :

$$h(\chi) = \begin{cases} (1+2\chi) \text{ si } \chi < 0.25 \\ 2-2x \text{ si } \chi \in [0.25, 0.5[\\ 2x \text{ si } \chi \in [0.5, 0.75[\\ 3-2x \text{ si } \chi > 0.75 \end{cases},$$

— une ouverture rectiligne : $h(\chi) = 1 + \frac{\chi}{2}$.

Un exemple de chaque géométrie est donné figure 4.2. Dans tous les cas, on choisit un forçage en pression qui impose une vitesse moyenne égale à 1 et un nombre de Bingham égal à 10. On présente figure 4.3 différentes coupes de pression pour des géométries de largeur ε comparées à la solution de (4.10). Dans chaque cas, comme à la section 3.2.1, on choisit une coupe de pression qui passe dans la zone fluide pour ne pas avoir à moyenner sur des tranches verticales qui peuvent couper ou pas des zones rigides (voir un exemple sur la figure 4.2). On observe une convergence qui semble être à l'ordre 1 pour le champ de pression. Par ailleurs, pour les autres géométries, les coupes montrée en figure 4.4 montrent que les deux coupes sont relativement proches pour $\varepsilon = 0.02$. Paradoxalement l'approximation par Reynolds semble meilleure pour la cavité en dents de scies que pour l'ouverture qui est pourtant plus régulière.

4.2.3 Développement de la vitesse à l'ordre supérieur

Développons maintenant la vitesse à l'ordre supérieur. Suivant la stratégie de [51], on calcule u^+ dans la zone pseudo-plug. u^+ sera déterminé à une fonction dépendante de χ près. On calcule ensuite u^- dans la zone fluide. Les deux restrictions des fonctions sont ensuite raccordées au niveau de la zone de transition, zone qui sera sur un voisinage de la courbe $\zeta = h_v$ et de largeur dépendant de ε.

Dans la zone pseudo-plug

Commençons par poser le développement :

$$u^+(\chi,\zeta) = u_{pp}(\chi) + \varepsilon u_+^1(\chi,\zeta) + o(\varepsilon). \tag{4.15}$$

Dans la zone pseudo-plug, un développement limité de τ_{xy} à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ donne :

$$\tau_{xz} = \frac{B\partial_\zeta u_+^1}{(4(\partial_\chi u_{pp})^2 + (\partial_\zeta u_+^1)^2)^{1/2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \partial_\chi p^{(-1)}\zeta + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{4.16}$$

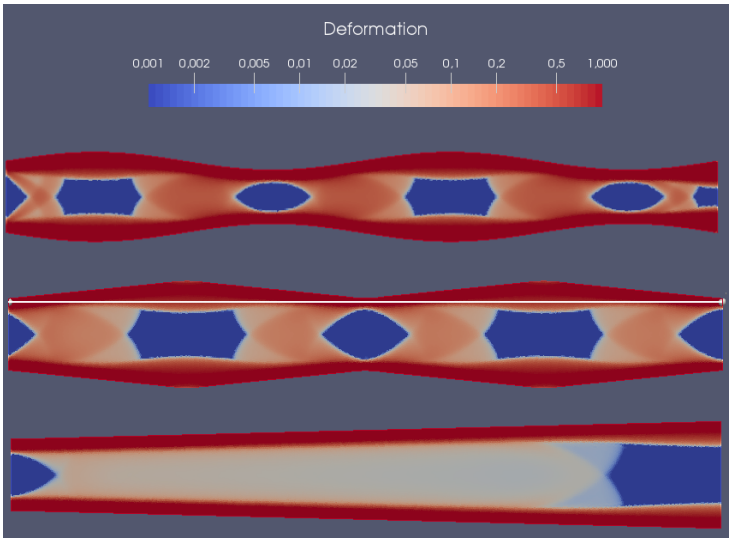


FIGURE 4.2 – Les différentes géométries (de haut en bas : sinusoide, scie, ouverture) pour $\varepsilon = 0.02$ avec les champs de déformations associés. Chaque coupe de pression fait en sorte de ne pas couper la zone $|d| < 10^{-3}$. La ligne blanche sur le champ du milieu est un exemple de cette coupe de pression.

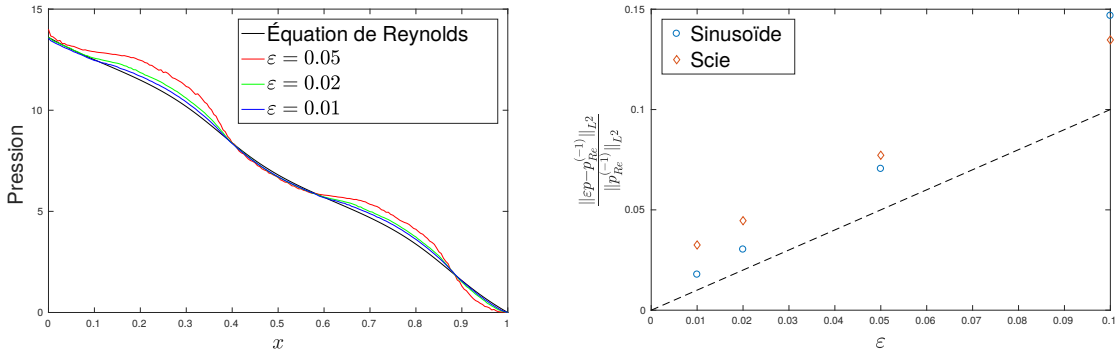


FIGURE 4.3 – À gauche : Comparaison entre différentes coupes de εp et $p_{Re}^{(-1)}$ la solution de (4.10) pour la géométrie sinusoïdale, $B = 10$. À droite : Évolution de la différence $\varepsilon p - p_{Re}^{(-1)}$ en fonction de ε pour les mêmes paramètres d'écoulement. La droite en pointillé est de pente 1.

et en identifiant les terme principaux :

$$(\partial_\zeta u_+^1)^2 = \frac{4(\partial_\chi u_{pp})^2(\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2} \text{ et } \partial_\zeta u_+^1 = \pm\frac{2\partial_\chi u_{pp}\partial_\chi p^{(-1)}\zeta}{\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}}. \tag{4.17}$$

Remarque 28 *Dans la suite, on va supposer que $\partial_\zeta u_+^1$ est négatif. Cette hypothèse est cohérente avec l'idée que l'on a que u_{pp} représente le maximum de la vitesse sur une tranche.*

Donc,

$$\partial_\zeta u_+^1 = -\frac{2|\partial_\chi u_{pp}||\partial_\chi p^{(-1)}|\zeta}{\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}}. \tag{4.18}$$

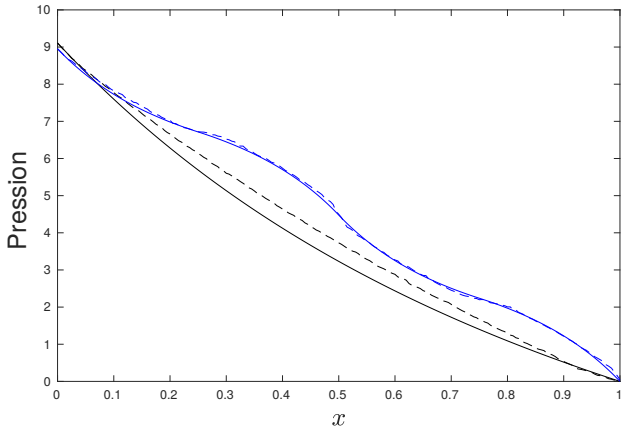


FIGURE 4.4 – Comparaison entre différentes coupes de εp (en pointillés) et $p_{Re}^{(-1)}$ (en trait plein) la solution de (4.10) pour $\varepsilon = 0.02$, $B = 10$ et les géométries en dent de scie (en bleu) et l'ouverture (en noir).

On obtient donc une expression explicite pour u^+ :

$$u^+(\chi,\zeta) = u_{pp}(x) + \varepsilon\left(f_1^+(\chi) - \left|\frac{2\partial_\chi u_{pp}}{\partial_\chi p^{(-1)}}\right|\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}\right) + o(\varepsilon), \tag{4.19}$$

où u_{pp} a été calculée précédemment et où f_1^+ reste à déterminer. Par ailleurs, un calcul sur le terme diagonal des contraintes donne :

$$\tau_{xx} = \frac{B\partial_\chi u_{pp}}{(4(\partial_\chi u_{pp})^2 + (\partial_\zeta u_+^1)^2)^{1/2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) = sgn(\partial_\chi u_{pp})\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}, \tag{4.20}$$

De cela, on en déduit deux choses :

— d'une part, l'ordre principal du terme diagonal des contraintes (en utilisant le lemme 1) :

$$\tau_{xx}^{(0)} = -sgn(\partial_\chi h)\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}. \tag{4.21}$$

— d'autre part, le fait que dans cette zone pseudo-plug, $|\tau| = B + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Cela donne une indication supplémentaire de la possible absence de vraie zone plug au milieu.

Dans la zone fluide

On développe tout pareillement :

$$u^-(\chi,\zeta) = u^{(0)}(\chi) + \varepsilon u_-^1(\chi,\zeta) + o(\varepsilon) \tag{4.22}$$

Partons de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et laissons de côté les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\partial_\zeta \tau_{xz} = \partial_\chi\left(p^{(-1)} + \varepsilon p^{(0)}\right) + \varepsilon Re(\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)}) - \varepsilon\partial_\chi \tau_{xx}^{(0)}. \tag{4.23}$$

En intégrant cette équation entre 0 et ζ, il vient que :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} - \underbrace{\tau_{xz}(0)}_{=0} &= \partial_\chi p^{(-1)}\zeta + \varepsilon\int_0^\zeta \partial_\chi p^{(0)}(\chi,\tilde\zeta)\mathrm{d}\tilde\zeta \\ &\quad + \varepsilon Re\int_0^\zeta(\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(x,\tilde\zeta)\mathrm{d}\tilde\zeta - \varepsilon\int_0^\zeta \partial_\chi\tau_{xx}^{(0)}(\chi,\tilde\zeta)\mathrm{d}\tilde\zeta.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que $\tau_{xx} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dans la zone fluide et que le terme d'ordre ε^0 de la pression est donné par $p^{(0)} = p_C^{(0)} - \tau_{xx}^{(0)} \mathbb{1}_{\zeta<h_v}$, il vient que :

$$\tau_{xz} = \partial_\chi \left(p^{(-1)} + \varepsilon p_C^{(0)}\right) \zeta + \varepsilon Re \int_0^\zeta (\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(\chi, \tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta} \\ - 2\varepsilon \int_0^{h_v} \partial_\chi \tau_{xx}^{(0)}(\chi, \tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta}, \quad (4.25)$$

avec (l'expression de $\tau_{xx}^{(0)}$ dans la zone pseudo-plug étant donnée par (4.21)) :

$$\int_0^{h_v} \partial_\chi \tau_{xx}^{(0)} = sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} \partial_\chi p^{(-1)} \int_0^{h_v} \frac{\zeta^2}{\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}} \mathrm{d}\zeta \\ = -sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} h_v^2 \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} = -sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} \frac{\pi h_v^2}{4},$$

là où $\partial_\chi h \neq 0$. Par ailleurs, un développement limité de la loi constitutive à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ donne :

$$\tau_{xz} = \partial_\zeta u^- + \underbrace{sgn(\partial_\zeta u^-)}_{=-1} B + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Au final, en mettant tout bout à bout, il vient que :

$$\partial_\zeta u^- = B + \partial_\chi \left(p^{(-1)} + \varepsilon p_C^{(0)}\right) \zeta + \varepsilon sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} \frac{\pi h_v^2}{2} \\ + \varepsilon Re \int_0^\zeta (\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(\chi, \tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta}, \quad (4.26)$$

et, en intégrant entre ζ et h, on obtient une expression explicite pour u^-... pour peu que l'on trouve une équation de Reynolds régissant le comportement de la pression !

$$u^-(\zeta) = B(\zeta - h) + \frac{\partial_\chi \left(p^{(-1)} + \varepsilon p_C^{(0)}\right)}{2}(\zeta^2 - h^2) + \varepsilon sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi} p^{(-1)} \frac{\pi h_v^2}{2}(\zeta - h) \\ - \varepsilon Re \int_\zeta^h \int_0^{\tilde{z}} (\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(\chi, \tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta} \mathrm{d}\tilde{z}. \quad (4.27)$$

Remarque 29 *Un terme en plus non nul apparaît par rapport à l'écoulement à surface libre. Ce terme supplémentaire est dû à* $\int_0^{h_v} \partial_\chi \tau_{xx}^{(0)}(\chi, \tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta}$ *qui s'annule dans le cas non confiné. En effet, dans le cas surface libre, la zone pseudo-plug est parallèle à la frontière supérieure provoquant l'annulation de ce terme (voir [51] par exemple).*

Dans la zone de transition

Développons :

$$u_{in}(\chi, \zeta) = u_{pp}(\chi) + \varepsilon^a U_1 \left(\frac{\zeta - h_v}{\varepsilon^b}\right), \quad (4.28)$$

ce qui signifie que la vitesse diffère de la vitesse de pseudo-plug d'un d'ordre ε^a dans une zone de largeur $\mathcal{O}(\varepsilon^b)$. La loi constitutive s'écrit alors :

$$\left(1 + \frac{B}{(4\varepsilon^2(\partial_\chi u_{in})^2 + (\partial_\zeta u_{in} + \varepsilon^2 \partial_\chi w)^2)^{1/2}}\right)(\partial_\zeta u_{in} + \varepsilon^2 \partial_\chi w) = \partial_\chi p^{(-1)} \zeta + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.29)$$

En développant le terme de gauche et en posant $\xi = \frac{\zeta - h_v}{\varepsilon^b}$, on arrive à :

$$\frac{B\partial_\zeta U_1(\xi)}{\left(4\varepsilon^{2(1-a+b)}(\partial_\chi u_{pp})^2 + (\partial_\zeta U_1(\xi))^2\right)^{1/2}} + \varepsilon^{a-b}\partial_\zeta U_1(\xi) = \partial_\chi p^{(-1)}(\varepsilon^b\xi + h_v) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$
$$= \partial_\chi p^{(-1)}\varepsilon^b\xi - B + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Donc à un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ près,

$$B\left(\frac{\partial_\zeta U_1(\xi)}{\sqrt{4\varepsilon^{2(1-a+b)}(\partial_\chi u_{pp})^2 + (\partial_\zeta U_1(\xi))^2}} + 1\right) = \partial_\chi p^{(-1)}\varepsilon^b\xi - \varepsilon^{a-b}\partial_\zeta U_1(\xi).$$

En développant le terme de gauche :

$$B\left(sgn(\partial_\zeta U_1(\xi)) - 2sgn(\partial_\zeta U_1(\xi))\varepsilon^{2(1-a+b)}\frac{(\partial_\chi u_{pp})^2}{(\partial_\zeta U_1(\xi))^2} + 1\right) = \varepsilon^b\partial_\chi p^{(-1)}\xi - \varepsilon^{a-b}\partial_\zeta U_1(\xi).$$

L'ordre 0 impose le signe de $\partial_\zeta U_1 < 0$ (ce qui est cohérent puisque la vitesse de pseudo-plug est le maximum du profil de vitesse). L'ordre suivant impose $a - b = b = 2(1 - a + b)$ (comme dans [51]) et donc, $a = 4/3$ et $b = 2/3$. Finalement, $\partial_\zeta U_1(\xi)$ est solution de l'équation :

$$-X^3 + \partial_\chi p^{(-1)}\xi X^2 = 2B(\partial_\chi u_{pp})^2. \tag{4.30}$$

Écrivant $Q(X) = -X^3 - \partial_\chi p^{(-1)}\xi X^2 - 2B(\partial_\chi u_{pp})^2$, si $\partial_\chi u_{pp} \neq 0$,

- Si $\xi < 0$, Q décroît sur $\mathbb{R}_-$ et $Q(0) < 0$, ce qui assure une unique solution.
- Si $\xi > 0$, alors les deux points critiques de Q sont 0 et $\frac{2}{3}\partial_\chi p^{(-1)}\xi < 0$. Comme $Q(0) < 0$, cela assure une unique solution strictement négative.

U_1 est donc définie à une constante près.

Le raccord

Soit $K > 0$ une constante positive suffisamment grande.

- Dans la zone $\zeta \geqslant h_v + K\varepsilon^{2/3}$, posons $u = u^-$.
- Dans la zone de transition $\zeta \in [h_v - K\varepsilon^{2/3}, h_v + K\varepsilon^{2/3}]$, posons

$$u(\chi, \zeta) = u_{pp}(\chi) + \varepsilon u_-^1(h_v + K\varepsilon^{2/3}) + \varepsilon^{4/3}U_1\left(\frac{\zeta - h_v}{\varepsilon^{2/3}}\right).$$

- Finalement dans la zone pseudo-plug $\zeta \leqslant h_v - K\varepsilon^{2/3}$, on va choisir f_1^+ qui rende le raccord continu en $h_v - K\varepsilon^{2/3}$ à $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ près :

$$f_1^+(\chi) = u_-^1(\chi, h_v + K\varepsilon^{2/3}) + \varepsilon^{1/3}\left(U_1(-K) + h_v\sqrt{\frac{2K}{h_v}}|\partial_x u_{pp}|\right). \tag{4.31}$$

Posons finalement dans cette zone $u = u^+$ avec la détermination de f_+^1 comme ci-dessus. Qui plus est, on suppose que $U_1(-K)$ est choisi pour rendre le raccord continu.

On a trouvé une expression asymptotique de la vitesse jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ partout.

Remarque 30 *Les termes ajoutés sont d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$ sur une bande de taille $K\varepsilon^{2/3}$. Ces corrections n'influeront pas sur le flux jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ mais vont rajouter des termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$ et $\mathcal{O}(\varepsilon^{5/3})$.*

Les termes convectifs

Dans la suite, on aura besoin de l'expression explicite des termes convectifs pour connaître leur dépendance en la pression. Posons

$$S = \partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)}. \tag{4.32}$$

On sait déjà que $u^{(0)}$ est donné par (4.8) et que $w^{(0)}$ est donné par :

$$w^{(0)}(\chi,\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h(h-\zeta)\left((h-h_v) - \dfrac{h(h-\zeta)(\zeta+2h)}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}\right) & \text{si } \zeta\in[h_v,h] \\ \dfrac{-\partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h(h-h_v)^2}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}(2h_v+h)\zeta & \text{si } \zeta\in[0,h_v] \end{array} \right\}, \tag{4.33}$$

Par ailleurs, on calcule également $\partial_\chi u^{(0)}$ (qui vaut $\partial_\chi u_{pp}$ dans la zone pseudo-plug) et $\partial_\theta u^{(0)}$ (en considérant que h ne dépend pas du temps) :

$$\partial_\chi u^{(0)} = \left\{ \begin{array}{ll} \partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h\dfrac{h^3-3\zeta^2h+2h_v^3}{2(h^2+hh_v+h_v^2)} & \text{si } \zeta\in[h_v,h] \\ \partial_\chi p^{(-1)}\partial_\chi h\dfrac{(h-h_v)^2(h+2h_v)}{2(h^2+hh_v+h_v^2)} & \text{si } \zeta\in[0,h_v] \end{array} \right\},$$

$$\partial_\theta u^{(0)} = -\frac{\partial_{\theta\chi}p^{(-1)}}{2}\left\{ \begin{array}{ll} (h^2-\zeta^2) & \text{si } \zeta\in[h_v,h] \\ (h^2-h_v^2) & \text{si } \zeta\in[0,h_v] \end{array} \right\},$$

Et on trouve l'expression de S en mettant tout bout à bout :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial_{\theta\chi}p^{(-1)}}{2}(h^2-\zeta^2) - \dfrac{(\partial_\chi p^{(-1)})^2\partial_\chi h}{4(h^2+hh_v+h_v^2)}(h^3+2h_v^3-3\zeta^2h)\left((h-h_v)^2-(\zeta-h_v)^2\right) & \\ -(\partial_\chi p^{(-1)})^2\partial_\chi h(h-\zeta)(\zeta-h_v)\left((h-h_v) - \dfrac{h(h-\zeta)(\zeta+2h)}{2(h^2+hh_v+h_v^2)}\right) & \text{si } \zeta\in[h_v,h] \\ -\dfrac{\partial_{\theta\chi}p^{(-1)}}{2}(h^2-h_v^2) - \dfrac{(\partial_\chi p^{(-1)})^2}{4}\partial_\chi h(h-h_v)^4\dfrac{h+2h_v}{(h^2+hh_v+h_v^2)} & \text{si } \zeta\in[0,h_v] \end{array} \right\}. \tag{4.34}$$

On remarque que S est linéaire en $(\partial_\chi p^{(-1)})^2\partial_\chi h$ dans le cas stationnaire.

Le cas où $\partial_\chi h = \mathcal{O}(\varepsilon)$

Les calculs précédents ont été faits sous l'hypothèse que $\partial_\chi h$ était non nul et plus généralement d'ordre $\mathcal{O}(1)$! Supposons que $\partial_\chi h$ ait un point d'annulation. Dans toute une zone autour de ce point, $\partial_\chi h$ sera d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. On rappelle que d'après la remarque 27, $\partial_\chi u_{pp}$ est également d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Ainsi, dans la zone pseudo-plug, $\partial_\zeta u_+^1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et le terme d'ordre ε dans la vitesse se réduit à sa seule dépendance en χ, i.e. la fonction f_1^+. Allons un cran plus loin dans le développement :

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + o(\varepsilon^2),$$

avec $u^{(2)}$ la solution de

$$\tau_{xz}^{(0)} = \partial_\chi p^{(-1)}\zeta = \frac{B(\partial_\zeta u^{(2)} + \partial_\chi w^{(0)})}{\sqrt{(\partial_\zeta u^{(2)} + \partial_\chi w^{(0)})^2 + 4(\partial_\chi f_1^+)^2}}, \tag{4.35}$$

où $w^{(0)}$ est donné par la condition d'incompressibilité. Dans la zone pseudo-plug $\partial_\chi w^{(0)} = -\partial_{\chi\chi} u_{pp}\zeta$. Ainsi, un calcul analogue au cas où $\partial_\chi h$ est non nul donne

$$\partial_\zeta u^{(2)} = \partial_{\chi\chi} u_{pp} \pm 2|\partial_\chi f_1^+| \frac{\partial_\chi p^{(-1)}\zeta}{\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}},$$

et on peut déterminer la vitesse à l'ordre $o(\varepsilon^2)$ aux expressions de f_1^+ et f_2^+ près :

$$u^+(\chi,\zeta) = u_{pp}(x) + \varepsilon(f_1^+(\chi) + \varepsilon f_2^+(\chi)) + \varepsilon^2\left(\pm 2\left|\frac{\partial_\chi f_1^+}{\partial_\chi p^{(-1)}}\right|\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2} + \partial_{\chi\chi}u_{pp}\zeta\right). \tag{4.36}$$

Par ailleurs, le terme dominant de τ_{xx} devient :

$$\tau_{xx}^{(0)} = \frac{2B\partial_\chi f_1^+}{\left(4\left(\partial_\chi f_1^+\right)^2 + (\partial_\zeta u^{(2)} + \partial_\chi w^{(0)})^2\right)^{1/2}},$$

où l'on a rentré dans f_1^+ la contribution de $\partial_\chi u_p$, puisqu'elle est d'ordre ε. La relation (4.35), permet de beaucoup simplifier ce terme :

$$\tau_{xx}^{(0)} = sgn\left(\partial_\chi f_1^+\right)\sqrt{B^2 - \partial_\chi(p^{(-1)}\zeta)^2} \text{ et } \partial_\chi\tau_{xx}^{(0)} = sgn\left(\partial_\chi f_1^+\right)\frac{\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\partial_\chi p^{(-1)}\zeta^2}{\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{4.37}$$

En outre, la première partie des calculs effectués dans la zone fluide reste valide que $\partial_\chi h$ soit petit ou non. Plus précisément, la formule (4.25) reste valide. Seule change l'expression de $\partial_\chi\tau_{xx}^{(0)}$. Pour calculer cette intégrale, il faut connaître la fonction signe qui apparaît dans (4.37). Rappelons que la vitesse est donnée par :

$$u^-(\zeta) = B(\zeta - h) + \frac{\partial_\chi\left(p^{(-1)} + \varepsilon p_C^{(0)}\right)}{2}(\zeta^2 - h^2) + \underbrace{\varepsilon sgn(\partial_\chi f_+^1)\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\frac{\pi h_v^2}{2}(\zeta - h)}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2)}$$
$$- \varepsilon Re\int_\zeta^h\int_0^{\tilde z}(\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(\chi,\tilde\zeta)\mathrm{d}\tilde\zeta\mathrm{d}\tilde z.$$

On détermine f_+^1 par raccord par continuité de la vitesse en h_v :

$$f_1^+(\chi) = -Re\int_{h_v}^h\int_0^{\bar\zeta}(\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)})(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta + \frac{\partial_\chi\left(p_C^{(0)}\right)}{2}(h_v^2 - h^2). \tag{4.38}$$

Par ailleurs, le calcul des termes convectifs section 4.2.3 nous donne l'expression de l'intégrande sous l'intégrale double de (4.38). Après avoir appliqué cette double intégrale :

$$\int_{\tilde h_v}^h\int_0^{\tilde z} S = -\frac{\partial_{\theta\chi}p^{(-1)}}{24}(h-h_v)^2(17h^2+10hh_v-3h_v^2) - \frac{(\partial_\chi p^{(-1)})^2\partial_\chi h}{240}(h-h_v)^5\frac{16h^2+53hh_v+75h_v^2}{h^2+hh_v+h_v^2}.$$

En dérivant par rapport à χ, il vient que (en prenant en compte que $\partial_\chi h = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\partial_{\chi\chi}p^{(-1)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et en supposant que $\partial_{\theta\chi\chi}p^{(-1)}$ reste d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$) :

$$\int_{\tilde h_v}^h\int_0^{\tilde z} S = -\frac{(\partial_x p^{(-1)})^2\partial_{\chi\chi}h}{240}(h-h_v)^5\frac{16h^2+53hh_v+75h_v^2}{h^2+hh_v+h_v^2} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Il reste donc :

$$\partial_\chi f_1^+ = \frac{\partial_{\chi\chi}\left(p_C^{(0)}\right)}{2}(h_v^2 - h^2) + Re\frac{(\partial_x p^{(-1)})^2\partial_{\chi\chi}h}{240}(h-h_v)^5\frac{16h^2+53hh_v+75h_v^2}{h^2+hh_v+h_v^2} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Enfin, on suppose que le terme suivant de pression reste d'ordre ε, i.e. $\partial_{\chi\chi}p_C^{(0)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. On aboutit alors à :

$$\partial_\chi f_1^+ = Re\frac{(\partial_x p^{(-1)})^2\partial_{\chi\chi}h}{240}(h-h_v)^5\frac{16h^2+53hh_v+75h_v^2}{h^2+hh_v+h_v^2} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

et ainsi, $sgn(\partial_\chi f_1^+) = sgn(\partial_{\chi\chi}h)$.

On peut ensuite reprendre la stratégie 4.2.3 et construire tout le profil de vitesse dans la zone de transition : En développant la vitesse comme précédemment :

$$u(\chi) = u_{pp}(\chi) + \varepsilon u^{(1)}(\chi) + \varepsilon^a U_2\left(\chi, \frac{\zeta - h_v}{\varepsilon^b}\right).$$

Partant de la loi constitutive, et en supposant que $a-b<2$ et en rappelant que $\partial_\chi u_{pp} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, on arrive avec un calcul similaire à précédemment,

$$B\text{sgn}(\partial_\xi U_2)\left(1 - 2\varepsilon^{4-2(a-b)}\frac{\partial_\chi u_{pp}}{\varepsilon\partial_\xi U_2}\right) = -B + \varepsilon^b\partial_\chi p^{(-1)} - \varepsilon^{a-b}\partial_\xi\tilde{U},$$

où $\xi = \frac{\zeta - h_v}{\varepsilon^b}$. On en déduit que $a = 8/3$ et $b = 4/3$. La construction du profil se fait de la même manière que précédemment.

Remarque 31 *Un point a été laissé de côté, à savoir l'existence d'une possible zone morte proche du mur proche des endroits où $\partial_\chi h$ s'annule, sans que h soit localement constante. Il se trouve par exemple que proche d'un point d'annulation de $\partial_\chi h$, il peut y avoir présence ou non de zone morte, suivant le signe et l'amplitude de $\partial_{\chi\chi}h$. Plus précisément, lorsque $\partial_{\chi\chi}h$ est négatif (le cas d'un mur concave), il y a présence de zone morte si l'amplitude de la dérivée seconde est suffisamment élevée, tandis qu'il y n'y a pas de zone morte lorsque $\partial_{\chi\chi}h$ est positif (le cas d'un mur convexe). Selon toute logique, ce signe de $\partial_{\chi\chi}h$ apparaît dans les termes d'ordre supérieur du développement de vitesse (par exemple dans l'expression de $\partial_{\chi\chi}p_C^{(0)}$). Un moyen de déterminer l'existence de cette zone morte serait de déterminer une éventuelle ligne de niveau $\|\tau\| = B$ (à ε^2 près) proche du mur. Cependant, il faut garder à l'esprit que les lignes de niveau $\|\tau\| = B + \varepsilon^2$ et $\|\tau\| = B$ peuvent être très éloignées (cf. les remarques sur les méthodes numériques de régularisation au chapitre 1)*

4.2.4 L'équation de Reynolds à l'ordre $o(\varepsilon)$

Rappelons que le terme principal de l'équation de Reynolds est donné par (4.11). Développons le flux jusqu'à l'ordre $o(\varepsilon)$:

$$\partial_\chi\left(\int_0^h u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}\right) = 0 = \partial_\chi\left(\int_0^{h_v - K\varepsilon^{2/3}} u^+ + \int_{h_v-K\varepsilon^{2/3}}^{h_v+K\varepsilon^{2/3}} u_{in} + \int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^h u^-\right).$$

— **Dans la zone pseudo-plug :** Dans ce cas, $u = u^+$, et f_1^+ est définie par (4.31) :

$$\begin{aligned}\int_0^{h_v-K\varepsilon^{2/3}} u^+ &= u_{pp}(h_v - K\varepsilon^{2/3}) + \varepsilon f_1^+(\chi)(h_v - K\varepsilon^{2/3}) - \varepsilon\left|\frac{2\partial_\chi u_{pp}}{\partial_\chi p^{(-1)}}\right|\int_0^{h_v-K\varepsilon^{2/3}}\sqrt{B^2 - (\partial_\chi p^{(-1)}\zeta)^2}\mathrm{d}\zeta \\ &= u_{pp}(h_v - K\varepsilon^{2/3}) + \varepsilon f_1^+(\chi)(h_v - K\varepsilon^{2/3}) + \varepsilon|\partial_\chi u_{pp}|h_v^2 \\ &\left(\arcsin\left(1 - \frac{K}{h_v}\varepsilon^{2/3}\right) + \left(1 - \frac{K}{h_v}\varepsilon^{2/3}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{K}{h_v}\varepsilon^{2/3}\right)}\right).\end{aligned}$$

Et en effectuant un développement limité jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\int_0^{h_v-K\varepsilon^{2/3}} u^+ = u_{pp}(h_v-K\varepsilon^{2/3})+\varepsilon f_1^+(\chi)(h_v-K\varepsilon^{2/3})+\varepsilon|\partial_\chi u_{pp}|h_v^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{K}{2h_v}\right)^{3/2}\varepsilon^{2/3}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec f_1^+ qui contient des termes d'ordre 1, $\varepsilon^{1/3}$ et $\varepsilon^{2/3}$:

$$f_1^+(\chi) = u_-^1(\chi,h_v) + \varepsilon^{1/3}\left(U_1(-K)+h_v\sqrt{\frac{2K}{h_v}}|\partial_x u_{pp}|\right) + K\varepsilon^{2/3}\partial_\zeta u_-^1(\chi,h_v).$$

— **Dans la zone de transition :** On suppose ici que $\|U_{in}\|_\infty =_{\varepsilon\to 0} \mathcal{O}(1)$. Ainsi :

$$\int_{h_v-K\varepsilon^{2/3}}^{h_v+K\varepsilon^{2/3}} u_{in} = 2K\varepsilon^{2/3}u_{pp} + 2K\varepsilon^{5/3}u_1^-(\chi,h_v)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

— **Pour u^- :**

$$\begin{aligned}\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h} u^- =& \int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h}\left(u_{pp}+\frac{\partial_\chi p^{(-1)}}{2}(\zeta-h_v)^2\mathrm{d}\zeta\right)\\ &+\varepsilon sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\frac{\pi h_v^2}{2}\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h}(\zeta-h)\mathrm{d}\zeta-\varepsilon\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h}\left(Re\int_z^h\int_0^{\tilde z}S\right)\\ &-\varepsilon\frac{\partial_\chi p_C^{(0)}}{2}\left(\frac{2h^3}{3}+\frac{h_v}{3}(h_v^2-3h^2)+K\varepsilon^{2/3}(h_v^2-h^2)\right),\end{aligned}$$

où S représente les termes convectifs et est donné par (4.34) et pour les abscisses où $\partial_\chi h$ ne s'annule pas. En développant cette intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned}\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h} u^- =& u_{pp}(h-h_v-K\varepsilon^{2/3})+\frac{\partial_\chi p^{(-1)}}{6}(h-h_v)^3-\varepsilon Re\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h}\int_z^h\int_0^{\tilde z}S\\ &-\varepsilon\frac{\partial_\chi p_C^{(0)}}{2}\left(\frac{2h^3}{3}+\frac{h_v}{3}(h_v^2-3h^2)+K\varepsilon^{2/3}(h^2-h_v^2)\right)\\ &+\varepsilon sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\frac{\pi h_v^2}{2}\left(-\frac{h^2-hh_v+h_v^2}{2}+K\varepsilon^{2/3}(h_v-h)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Ainsi, il vient que les termes en $\varepsilon^{2/3}$ s'annulent et qu'en plus du terme principal, il ne reste que des termes d'ordre ε et plus.

En mettant ces trois morceaux bout à bout, on obtient une expression du flux jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$h\bar u = \frac{-\partial_\chi\left(p^{(-1)}+\varepsilon p_C^{(0)}\right)}{6}(h-h_v)^2(2h+h_v)+\varepsilon R_1+\varepsilon^{4/3}R_2+\varepsilon^{5/3}R_3+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{4.39}$$

où

$$R_1 = u_1^-(\chi,h_v)h_v+|\partial_\chi u_{pp}|\frac{\pi h_v^2}{2}+h\partial_\chi p\underbrace{\frac{\partial_\chi h sgn(\partial_\chi h)}{|\partial_\chi h|}}h_v^2\frac{3\pi}{4}-Re\int_{h_v}^h\int_z^h\int_0^{\tilde z}S$$

$$R_2 = U_1(-K)+\sqrt{2}|\partial_\chi u_{pp}|h_v^2\sqrt{\frac{K}{h_v}}$$

$$\begin{aligned}R_3 =& -u_1^-(\chi,h_v)K+Kh_v\partial_\zeta u_1^-(\chi,h_v)-|\partial_\chi u_{pp}|h_v^2\left(\frac{K}{2h_v}\right)^{3/2}-Re\int_{h_v+K\varepsilon^{2/3}}^{h_v}\int_z^h\int_0^{\tilde z}S\\ &+K\left(-\frac{\partial_\chi p_C^{(0)}}{2}(h^2-h_v^2)+sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\frac{\pi h_v^2}{2}(h_v-h)\right).\end{aligned}$$

Écrivons $\mathfrak{p} = p^{(-1)} + \varepsilon p_C^{(0)}$. Le but est de trouver une équation de Reynolds ne faisant intervenir que $\mathfrak{p}$ en regroupant les deux termes ! La constance du flux nous donne à l'ordre $o(\varepsilon)$.

$$\partial_\chi\left(\frac{-\mathfrak{p}'}{6}(h-h_v)^2(2h+h_v)\right) + -\varepsilon Re\partial_\chi\left(\int_{h_v}^{h}\int_{z}^{h}\int_{0}^{\tilde{z}} S\right) \\ \varepsilon\partial_\chi\left(u_1^-(\chi,h_v)h_v + |\partial_\chi u_{pp}|\frac{\pi h_v^2}{2} + \frac{3\pi}{4}h\partial_\chi p^{(-1)}|\partial_\chi h|h_v^2\right) = 0,$$

le terme suivant étant d'ordre $\varepsilon^{4/3}$. Comme on ne veut faire intervenir que $\mathfrak{p}$, définissons $\tilde{h}_v = -\frac{B}{\mathfrak{p}'}$. Alors, $h_v = \tilde{h}_v\frac{\mathfrak{p}'}{\partial_\chi p^{(-1)}} = \tilde{h}_v\left(1+\varepsilon\frac{p_C^{(0)}}{\partial_\chi p^{(-1)}}\right)$. Ainsi :

$$(h-h_v)^2(2h+h_v) = (h-\tilde{h}_v)^2(2h+\tilde{h}_v) - 3\varepsilon\tilde{h}_v(h^2-\tilde{h}_v^2)\frac{\partial_\chi p_C^{(0)}}{\partial_\chi p^{(-1)}}. \tag{4.40}$$

Exprimons les autres termes du développement en fonction de $\tilde{h}_v$ et de la pression :

$$\varepsilon u_1^-(\chi,h_v)\tilde{h}_v = -Re\tilde{h}_v\int_{h_v}^{h}\int_{0}^{\bar{z}} S - \frac{\partial_\chi p_C^{(0)}}{2}\tilde{h}_v(h^2-\tilde{h}_v^2) + sgn(\partial_\chi h)\partial_{\chi\chi}p^{(-1)}\frac{\pi\tilde{h}_v^3}{2}(\tilde{h}_v-h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon\left(|\partial_\chi u_{pp}|\frac{\pi h_v^2}{2} + \frac{3\pi}{4}h\partial_\chi p^{(-1)}|\partial_\chi h|h_v^2\right) = \frac{\pi\tilde{h}_v^2}{4}|\partial_\chi p^{(-1)}||\partial_\chi h|\frac{-2h^3-3h^2\tilde{h}_v-6h\tilde{h}_v^2+2\tilde{h}_v^3}{h^2+h\tilde{h}_v+\tilde{h}_v^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon\partial_\chi p^{(-1)} = \varepsilon\mathfrak{p}' + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

On observe que l'ajout du terme en p_C^0 ci-dessus annule celui provenant de (4.40). On obtient donc finalement une équation de Reynolds ne dépendant que de $\mathfrak{p}$. En mettant tout bout à bout il vient qu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$:

$$\partial_\chi\left(\frac{-\mathfrak{p}'}{6}(h-\tilde{h}_v)^2(2h+\tilde{h}_v)\right) - \varepsilon\partial_\chi\left(\frac{\pi\tilde{h}_v}{4}|\partial_\chi h|\frac{-2h^3-9h^2\tilde{h}_v+2\tilde{h}_v^3}{h^2+h\tilde{h}_v+\tilde{h}_v^2}\right) \\ -\varepsilon Re\partial_\chi\left(\tilde{h}_v\int_{h_v}^{h}\int_{0}^{\bar{z}} S - \int_{\tilde{h}_v}^{h}\int_{z}^{h}\int_{0}^{\tilde{z}} S\right) = 0. \tag{4.41}$$

Les derniers termes s'exprimant aussi en fonction de $\mathfrak{p}$:

$$\int_{\tilde{h}_v}^{h}\int_{z}^{h}\int_{0}^{\tilde{z}} S = -\frac{\partial_\theta\mathfrak{p}'}{120}(h-\tilde{h}_v)^3(16h^2+23h\tilde{h}_v+21\tilde{h}_v^2) \\ -\frac{(\mathfrak{p}')^2\partial_\chi h}{1120}(h-\tilde{h}_v)^6\frac{43h^2+111h\tilde{h}_v+147\tilde{h}_v^2}{h^2+h\tilde{h}_v+\tilde{h}_v^2}. \tag{4.42}$$

et

$$\int_{\tilde{h}_v}^{h}\int_{0}^{\tilde{z}} S = -\frac{\partial_\theta\mathfrak{p}'}{24}(h-\tilde{h}_v)^2(17h^2+10h\tilde{h}_v-3\tilde{h}_v^2) - \frac{(\mathfrak{p}')^2\partial_\chi h}{240}(h-\tilde{h}_v)^5\frac{16h^2+53h\tilde{h}_v+75\tilde{h}_v^2}{h^2+h\tilde{h}_v+\tilde{h}_v^2}.$$

L'équation (4.41) est donc une équation de Reynolds modifiée ne prenant en compte que la somme des deux termes dominants en pression (au lieu des termes séparés). Cette équation est hautement non-linéaire puisque, on le rappelle, $\tilde{h}_v$ est proportionnel à $1/\mathfrak{p}'$. On trouve des termes linéaires et quadratiques en $\mathfrak{p}'$. Les termes linéaires proviennent du terme dominant de Poiseuille dans la vitesse. Les termes quadratiques sont générés par les termes inertiel dans la

conservation de la quantité de mouvement. La présence de termes polynômiaux en $\tilde{h}_v$ est due à l'effet de seuil. Ces polynômes s'annulent et/ou se simplifient dans le cas newtonien, puisque dans ce cas $\tilde{h}_v = 0$. Lorsque $B = 0$, l'équation de Reynolds devient :

$$\partial_\chi \left(\frac{-\mathfrak{p}'}{3} h^3 \right) - \varepsilon Re \partial_\chi \left(\frac{2\partial_\theta \mathfrak{p}'}{15} h^5 + \frac{43 \partial_\chi h}{1120} (\mathfrak{p}')^2 h^6 \right) = 0. \tag{4.43}$$

La version stationnaire a la même structure que celle trouvée par Nazarov et Videmann dans [90] : un terme en $h^3\mathfrak{p}'$ et un terme en $\partial_\chi h (h^3\mathfrak{p}')^2$. Le coefficient trouvé devant ce dernier terme est cependant différent de celui trouvé dans [90]. Il est à noter aussi que le fait d'étudier l'équation non-stationnaire introduit une dérivée temporelle du gradient de pression dans l'équation de Reynolds.

4.3 Quelques estimations

Dans la suite, on travaille avec les normes suivantes pour des fonctions définies sur Ω :
— $\|\varphi\|_{p,\Omega}$ la norme L^p usuelle pour $\varphi \in L^p(\Omega)$.
— Pour une fonction $\varphi \in W^{l,q}(\Omega)$, on note :

$$\|\varphi\|_{W^{l,q},\Omega} = \left(\sum_{k=0}^{l} \varepsilon^{(k-l)q} \|\nabla^k u\|_{p,D}^q \right)^{1/q} \tag{4.44}$$

— Pour une fonction $\varphi \in H^1(\Omega)$, cela se simplifie en :

$$\|\varphi\|_{H^1,\Omega} = \left(\varepsilon^{-2} \|u\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 \right)^{1/2} \tag{4.45}$$

Et pour les fonctions définies sur Ω', on note $\|\cdot\|_{W^{l,q},\Omega'}$ la norme classique de Sobolev.

4.3.1 Régularité des termes principaux

Lemma 2 *Supposons que h soit dans $H^2(\Omega')$. Supposons que $p_{in} \in H^1([0,T])$. L'équation de Reynolds à l'ordre $\mathcal{O}(1)$ (4.10) admet une unique solution pour les conditions de bords*

$$p^{(-1)}(0) = p_{in}, \ p^{(-1)}(1) = 0.$$

avec $p^{(-1)} \in H^1([0,T], H^3(\Omega'))$. Par ailleurs,

$$\|\partial_\chi p^{(-1)}(t,\cdot)\|_{H^2,\Omega'} \leqslant C(h),$$

cette constante ne dépendant que de h et de ses dérivées.

Preuve : Soit $y(\chi) = \partial_\chi p^{(-1)} < 0$. D'une part, d'après (4.11),

$$y' = \frac{-3y^3 h \partial_\chi h}{h^2 y^2 - Bhy + B^2} = f(y,\chi), \tag{4.46}$$

avec f une fonction C^∞ en y (puisque y appartient toujours à l'intervalle $]-\infty, \frac{-B}{h}[$ d'après la remarque 23). Cette équation différentielle admet donc une solution maximale définie à une constante près. Par ailleurs comme cette équation de Reynolds, s'écrit aussi sous forme (4.10), on en déduit que $(h(\chi), y(\chi))$ appartient à une ligne de niveau de la fonction $F : (h,y) \mapsto 2h^3 y + 3Bh^2 - \frac{B^3}{y^2}$. Donc, y est bornée en fonction de h et (4.46) admet une solution sur tout le

segment $[0,1]$. Comme (4.10) est un problème elliptique avec condition de Dirichlet aux limites, cette solution est unique. De plus, y est bornée sur $[0,1]$ et y' vérifie :

$$y' = -h'(\chi)\frac{\partial_h F}{\partial_y F}.$$

Donc, comme $\partial_y F$ est $H^1([0,1])$ et est bornée uniformément loin de zéro, $\frac{1}{\partial_y F} \in H^1([0,1])$ et y' aussi, ce qui prouve le premier point du lemme. □

Lemma 3 *Pour tout $t \leqslant T$, $u^{(0)}(t,\cdot)$ appartient à $H^2(\Omega')$ et $w^{(0)}(t,\cdot)$ et $\partial_\zeta w^{(0)}(t,\cdot)$ appartiennent à $H^1(\Omega')$.*

Preuve : Partant de l'expression de $u^{(0)}$ (4.8), on en déduit que $u^{(0)}$ a la même régularité que $\partial_\chi p^{(-1)}$ dans les zones $\{z > h_v\}$ and $\{z < h_v\}$ et est C^∞ en ζ dans ces deux zones. Ainsi, comme $\partial_\chi p^{(-1)}$ est au moins $H^2(\Omega')$, $u^{(0)}$ est également H^2 dans ces deux sous-domaines. Par ailleurs, comme $\partial_\chi u^{(0)}$ et $\partial_\zeta u^{(0)}$ sont continus au niveau de la jonction par construction (voir la section précédente), on a bien que $\partial_\chi u^{(0)}$ et $\partial_\zeta u^{(0)}$ sont H^1.
Pour conclure, la condition d'incompressibilité donne la régularité de $w^{(0)}$. □

Remarque 32 *On ne peut pas avoir mieux comme régularité sur $u^{(0)}$, puisque (comme c'est le cas dans l'écoulement de Poiseuille) le raccord au niveau de la zone de pseudo-plug n'est pas C^2.*

On va maintenant récupérer de la régularité sur les différents ordres des composantes du tenseur des contraintes :

Lemma 4 *On suppose toujours que $h \in H^2([0,1])$. Pour tout temps $t \leqslant T$,*
- *$\partial_\zeta \tau_{xz}^{(0)}(t,\cdot)$ est dans $H^2(\Omega')$.*
- *$p^{(0)} - \tau_{zz}^{(0)}(t,\cdot)$ et $p_C^{(0)}(t,\cdot)$ ont même régularité.*
- *Par ailleurs, $p_C^{(0)}(t,\cdot)$ est $H^2(\Omega')$.*
- *La somme des termes convectifs $\partial_\theta u^{(0)} + u^{(0)}\partial_\chi u^{(0)} + w^{(0)}\partial_\zeta u^{(0)}$ sont dans $L^2([0,T],H^1(\Omega'))$ si $p^{in} \in H^1$.*
- *Enfin, si $\partial_\chi h$ ne s'annule pas, $\partial_\zeta \tau_{xz}^{(1)}$, $\partial_\chi \tau_{xx}^{(0)}$ et $\partial_\chi p^{(0)}$ sont aussi dans $H^1([0,T],H^1(\Omega'))$.*

Preuve : Les deux premiers points sont dûs aux premiers ordres des équations de conservation du mouvement (4.5).
La régularité de $p_C^{(0)}$ est donnée par l'équation de Reynolds (4.41) et par la régularité de $p^{(-1)}$ (cf. lemme 2).
Ensuite, comme $u^{(0)} \in H^1([0,T],H^2(\Omega'))$, alors $\partial_\theta u^{(0)} \in L^2([0,T],H^1(\Omega'))$. Par ailleurs, pour tout $t \leqslant T$, $u^{(0)}$, $\partial_\chi u^{(0)}$, $\partial_\zeta u^{(0)}$, sont dans $H^1(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$. Donc la somme des termes convectifs est dans $L^2([0,T],H^1(\Omega') \cap L^\infty(\Omega'))$.
Par ailleurs, $\tau_{xx}^{(0)}$ est donné par l'équation (4.21) dans la zone pseudo-plug et s'annule dans la zone fluide. Donc $\tau_{xx}^{(0)}$ est $H^1(\Omega')$ et par le deuxième point, $\partial_\chi p^{(0)}$ également. □

Lemma 5 *$u^{(1)} \in L^2([0,T],H^1(\Omega'))$ et $\partial_\zeta w^{(1)} \in L^2([0,T],L^2(\Omega'))$.*

Preuve : Dans chaque zone (fluide, transition et pseudo-plug), par construction $u^{(1)}(t,\cdot)$ est H^1. Par ailleurs, le profil de vitesse a été construit comme étant continu aux jonctions. $u^{(1)}(t,\cdot)$ est globalement $H^1(\Omega')$. La régularité de $\partial_\zeta w^{(1)}$ découle de la condition de divergence nulle. □

4.3.2 Estimations dans le domaine Ω

Suivant [90], on dispose d'estimations analogues dans le domaine mince Ω. Ce ne sont pas exactement les mêmes, puisque les fonctions test φ ne seront pas nulles sur tout le bord mais juste sur les murs latéraux ($z = \pm\varepsilon h$) :

Lemma 6 *1. **(Thin Poincaré)** Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$, s'annulant sur les murs latéraux, alors*

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \leqslant C\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{2,\Omega}. \tag{4.47}$$

*2. **(Ladyzhenskaya)** Si $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, alors :*

$$\|\varphi\|_{4,\mathbb{R}^2} \leqslant C\|\varphi\|^{1/2}_{2,\mathbb{R}^2}\|\nabla\varphi\|^{1/2}_{2,\mathbb{R}^2}, \tag{4.48}$$

les constantes C étant indépendantes de ε.

Preuve :

1. Comme φ s'annule sur les murs,

$$\varphi(x,z) = \int_{-\varepsilon h}^{z} \partial_z\varphi(x,\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Donc, en intégrant φ^2, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que :

$$\int_{-\varepsilon h}^{\varepsilon h} \varphi(x,z)^2\mathrm{d}z \leqslant 4\varepsilon^2 h(x)^2 \int_{-\varepsilon h}^{\varepsilon h} |\partial_z\varphi(x,z)|^2\mathrm{d}z.$$

Intégrant sur la variable x, on obtient (4.47)

2. Pour la preuve, voir [74].

□

4.3.3 Équation vérifiée par le terme d'erreur

Reposons le développement asymptotique dont les différents termes ont été calculés précédemment (en ajoutant les termes d'erreur) :

$$u(t,x,z) = u^{(0)}(\tau,\chi,\zeta) + \varepsilon u^{(1)}(\tau,\chi,\zeta) + \tilde{u}(t,x,z) \tag{4.49}$$
$$w(t,x,z) = \varepsilon w^{(0)}(\tau,\chi,\zeta) + \tilde{w}(t,x,z) \tag{4.50}$$
$$p(t,x,z) = \varepsilon^{-1}p^{(-1)} + p^{(0)}(\tau,\chi,\zeta) + \tilde{p}(t,x,z) \tag{4.51}$$
$$\tau_{xx}(t,x,z) = \tau^{(0)}_{xx}(\tau,\chi,\zeta) + \tilde{\tau}_{xx}(t,x,z) \tag{4.52}$$
$$\tau_{xz}(t,x,z) = \tau^{(0)}_{xz}(\tau,\chi,\zeta) + \varepsilon\tau^{(1)}_{xz}(\tau,\chi,\zeta) + \tilde{\tau}_{xz}(t,x,z) \tag{4.53}$$

où τ^1_{xz} est donné par l'algorithme décrit en section 4.2.1. Les termes en tilde représentent les termes d'erreur dans le développement asymptotique. Remarquons que dans la bande $[h_v - K\varepsilon^{2/3}, h_v + K\varepsilon^{2/3}]$, $u^{(1)} = 0$. Ainsi, le terme en $\varepsilon^{4/3}$ est injecté dans $\tilde{u}$.

En injectant les ordres principaux des vitesses, pression et contraintes dans (4.1), on en déduit que les termes d'erreur vérifient ce système :

$$\begin{aligned} Re(\partial_t\tilde{u} + \tilde{u}\partial_x\tilde{u} + \tilde{w}\partial_z\tilde{u}) + \partial_x\tilde{p} + ReL_x(\tilde{u},\tilde{w}) &= \partial_x\tilde{\tau}_{xx} + \partial_z\tilde{\tau}_{xz} + F_x \\ Re\,(\partial_t\tilde{w} + \tilde{u}\partial_x\tilde{w} + \tilde{w}\partial_z\tilde{w}) + \partial_z\tilde{p} + ReL_z(\tilde{u},\tilde{w}) &= \partial_x\tilde{\tau}_{xz} + \partial_z\tilde{\tau}_{zz} + F_z \\ \partial_x\tilde{u} + \partial_z\tilde{w} &= 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

ou, de manière plus compacte

$$\begin{aligned} Re(\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \tilde{p} + ReL(\tilde{\mathbf{u}}) &= \operatorname{div}(\tau) + F \\ \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

muni des conditions de bord suivantes :

— $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ sur $z = \varepsilon h$ et $z = -\varepsilon h$

— $\tilde{p} = 0$ en $x = 0$ et $x = L$

où on a défini :

$$\begin{aligned} L_x &= (u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)})\partial_x \tilde{u} + \tilde{u}\partial_x(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}) + \varepsilon w^{(0)}\partial_z \tilde{u} + \tilde{w}\partial_z(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}) \\ L_z &= (u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)})\partial_x \tilde{w} + \varepsilon \tilde{u}\partial_x w^{(0)} + \varepsilon w^{(0)}\partial_z \tilde{w} + \varepsilon \tilde{w}\partial_z w^{(0)} \\ F_x &= \partial_x \tau_{xx}^{(0)} + \partial_z(\tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)}) - \partial_t(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}) \\ &-(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)})\partial_x(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}) - \varepsilon w^{(0)}\partial_z(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}) - \varepsilon^{-1}\partial_x p^{(-1)} - \partial_x p^{(0)} \\ F_z &= \partial_x(\tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)}) + \partial_z \tau_{zz}^{(0)} - \varepsilon \partial_t w^{(0)} \\ &-\varepsilon(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)})\partial_x w^{(0)} - \varepsilon^2 w^{(0)}\partial_z w^{(0)} - \partial_z p^{(0)}, \end{aligned}$$

on rappelle que les termes dominants intervenant ci-dessus sont exprimés en fonction des grandeurs adimensionnées θ, χ, ζ. En notant que :

$$\partial_z(f(x, \zeta)) = \varepsilon^{-1}\partial_\zeta f,$$

l'expression de F s'en trouve grandement simplifiée (par construction) :

$$\begin{aligned} F_x &= -\varepsilon^2 Re u^1 \partial_x u^1 \\ F_z &= \varepsilon \partial_x(\tau_{xz}^1) - \varepsilon^2 Re(u^{(0)} + \varepsilon u^1)\partial_x w^{(0)} - \varepsilon^3 Re w^{(0)}\partial_z w^{(0)} \end{aligned}$$

Pour fermer le système, on a encore une fois besoin de l'équation constitutive que l'on présente sous forme implicite :

$$D(\mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \tilde{\mathbf{u}}) = \left(1 - \frac{B}{|\tau^{(0)} + \varepsilon \tau^{(1)} + \tilde{\tau}|}\right)_+ (\tau^{(0)} + \varepsilon \tau^{(1)} + \tilde{\tau}) \tag{4.56}$$

Par ailleurs, par construction, on a fait en sorte que cette équation constitutive soit vérifiée à tout ordre :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}^{(0)}) &= \left(1 - \frac{B}{|\tau^{(0)}|}\right)_+ \tau^{(0)} \\ D(\mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}) &= \left(1 - \frac{B}{|\tau^{(0)} + \varepsilon \tau^{(1)}|}\right)_+ (\tau^{(0)} + \varepsilon \tau^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.57}$$

En testant contre une fonction $\varphi \in H^1([0, T] \times \Omega)^2$ s'annulant sur les murs latéraux et en intégrant sur Ω, il vient qu'en tout temps, et pour tout $\varphi \in H^1([0, T] \times \Omega)^2$, on a

$$Re\left(\partial_t(\tilde{\mathbf{u}}, \varphi)_\Omega + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{v}, \varphi)_\Omega + (L(\tilde{\mathbf{u}}), \varphi)_\Omega\right) + \int_{\partial\Omega} \tilde{p}\varphi \cdot n - (\tilde{p}, \operatorname{div}(\varphi))_\Omega = (F, \varphi)_\Omega - \int_\Omega \tilde{\tau} : \nabla\varphi + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\tau}\varphi) \cdot n. \tag{4.58}$$

Sauf que du fait que φ s'annule sur les bords latéraux et que $\tilde{p}$ fait de même en entrée et en sortie, la première intégrale sur $\partial\Omega$ s'annule également. Qui plus est, la dernière intégrale peut se réécrire :

$$\int_{-\varepsilon h(1)}^{\varepsilon h(1)} (\tilde{\tau}_{xx}\varphi_x + \tilde{\tau}_{xy}\varphi_y) - \int_{-\varepsilon h(0)}^{\varepsilon h(0)} (\tilde{\tau}_{xx}\varphi_x + \tilde{\tau}_{xy}\varphi_y).$$

Remarquons que la mesure des domaines d'intégration est d'ordre ε. Ainsi, ces intégrales seront contrôlées par les normes L^2 de τ et de φ.

Pour estimer l'erreur de consistance, la principale difficulté vient du fait que l'on ne sait pour l'instant pas estimer la différence entre (4.56) et les différents termes de (4.57) du fait de la partie positive. Cependant, au vu des expériences numériques menées section 4.2.2 on conjecture que cette erreur de consistance (au moins pour l'ordre principal) tend bien vers 0.

Conclusion globale

Dans cette thèse, on s'est intéressé à des écoulements de matériaux viscoplastiques en milieu confiné, en particulier aux systèmes de Stokes-Bingham et Navier-Stokes-Bingham.

Une large partie du manuscrit (les chapitres 2 et 3) a consisté en la présentation de simulations de tels écoulements utilisant des algorithmes de type Lagrangien augmenté. Une particularité de ces simulations est la tolérance très basse imposée pour le résidu final de l'algorithme ainsi qu'une utilisation de maillages comptant parmi les plus raffinés de la littérature actuellement. On observe l'excellente qualité de la convergence sur les champs du multiplicateur associé à la déformation qui présentent un saut (de l'ordre d'une maille) entre les zones rigides qui tombent au zéro machine et les zones fluides. Du fait de ces résidus très bas, des zones dites de pseudo-plugs ont été mises en évidence. Ces zones, dans lesquelles la déformation est de l'ordre de $10^{-3} - 10^{-6}$, nécessitent ce niveau de précision pour être détectées. Il est à noter que dans cette zone pseudo-plug le champ de déformation possède une structure bien particulière. En effet, la déformation présente des lignes de niveau parallèles à la zone rigide. Une explication de ce phénomène pourrait être donnée en adaptant la méthode de ligne de glissement présentée par exemple dans [8]. Un point intéressant soulevé dans [124] est la pertinence du résidu utilisé habituellement dans les algorithmes de type Lagrangien Augmenté. Il serait intéressant de vérifier si prendre l'indicateur de convergence plus exigeant (le primal-dual gap) change la qualité de la convergence.

Dans le chapitre 3, ces simulations ont ensuite été pu être comparées aux résultats expérimentaux présentés dans [77, 78] d'une part et dans [35, 36] d'autre part. En premier lieu, on s'intéresse à l'écoulement au dessus d'un obstacle (grâce aux simulations en cavités longues). On vérifie numériquement les propriétés observées sur les mesures expérimentales. Notamment, on a retrouvé l'existence de la ligne de glissement mise en exergue dans [77] ainsi que le comportement du champ de vitesse (qui est de type Poiseuille-Bingham) au dessus de cette ligne de glissement. En second lieu, les simulations en cavités courtes ont permis de retrouver les résultats sur la couche limite viscoplastique présentés dans [35, 36, 8]. On retrouve dans différentes géométries la loi de décroissance de cette couche limite en $B^{-1/3}$ lorsque B est élevé. Cette loi de la couche limite a été revisitée dans le cadre des nombres de Bingham et Herschel-Bulkley modérés, i.e. de l'ordre de l'unité. Numériquement, on retrouve qualitativement beaucoup des tendances de longueurs (sinon toutes) observées dans [78]. On observe également que le scaling des différentes composantes des contraintes effectué par Oldroyd dans [94] reste valable dans une certaine mesure si B est de l'ordre de l'unité. Enfin, les calculs de [8] ont été redérivés en tenant compte ou non de l'hypothèse de symétrie du profil de déformation. La notion de couche limite viscoplastique a été re-définie, en tenant compte d'une description plus fine de la zone fluide. Avec cette définition, la loi de décroissance de la couche limite viscoplastique dérivée par Oldroyd reste valable à B modérés. Dans le cas où le profil de déformation est non-symétrique, on trouve que la longueur de la couche-limite vérifie une EDO hautement non-linéaire qui n'a pas pu être étudiée faute de temps.

On remarque que l'on dispose dans toutes ces comparaisons d'une bonne concordance qua-

litative entre les résultats numériques (effectués avec un fluide de Bingham) et les résultats expérimentaux (avec un matériau modélisé par un fluide de Herschel-Bulkley). Cela donne une bonne indication que les résultats sont vrais, les simulations fournissant une validation des mesures et inversement. L'étape suivante consisterait à produire un code résolvant le système de Stokes-Herschel-Bulkley pour pouvoir comparer quantitavement les différents jeux de résultats. Cela permettrait également de quantifier l'éloignement des matériaux utilisés en laboratoire du modèle idéalisé d'Herschel-Bulkley.

Enfin, dans le chapitre 4, on s'est intéressé au développement asymptotique de la solution du système de Navier-Stokes-Bingham en épaisseur mince (de taille ε). Dans le cas confiné, la décomposition du domaine en trois zones (fluide, pseudo-plug et transition de taille $\varepsilon^{2/3}$) montrée dans [51] reste valable. Le champ de vitesse a été calculé à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ grâce à une équation de Reynolds à l'ordre $o(\varepsilon)$ pour la pression. Cette équation de Reynolds a comme inconnue les deux termes principaux de la pression et étend les résultats de [90]. On a également présenté une illustration numérique de la convergence du champ de pression complet vers l'ordre principal de l'équation de Reynolds viscoplastique à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Il est à noter que pour l'ordre $o(\varepsilon)$, l'équation de Reynolds n'a été dérivée que de manière formelle. On a dérivé l'équation vérfiée par l'erreur de consistance mais pas montré que cette erreur était d'ordre plus petit que ε. Une perspective naturelle de ce travail est donc de dériver des estimations pour cette erreur de consistance. Par ailleurs, un autre point d'intérêt serait d'étudier si le développement permet de prédire la présence potentielle de vraie zones plugs à l'intérieur du pseudo-plug.

Bibliographie

[1] S. S. Abdali, E. Mitsoulis, and N. C. Markatos. Entry and exit flows of Bingham fluids. *Journal of Rheology*, 36(2) :389–407, 1992. 18

[2] A. N. Alexandrou, E. Duc, and V. Entov. Inertial, viscous and yield stress effects in Bingham fluid filling of a 2-d cavity. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 96(3) :383–403, 2001. 18

[3] A. N. Alexandrou, P. Le Menn, G. Georgiou, and V. Entov. Flow instabilities of Herschel–Bulkley fluids. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 116 :19–32, 2003. 18

[4] P. Amestoy, I. Duff, J.-Y. L'Excellent, and J. Koster. A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1) :15–41, January 2001. 46

[5] P. Amestoy, A. Guermouche, J.-Y. L'Excellent, and S. Pralet. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32(2) :136–156, February 2006. 46

[6] C. Ancey. Plasticity and geophysical flows : A review. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 142 :4–35, May 2006. 4, 6

[7] N. J. Balmforth and R. V. Craster. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 84 :65–81, 1999. 24

[8] N. J. Balmforth, R. V. Craster, D. R. Hewitt, S. Hormozi, and A. Maleki. Viscoplastic boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 813 :929–954, 2017. 15, 16, 17, 47, 49, 73, 78, 80, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 151

[9] N. J. Balmforth and J. J. Liu. Roll waves in mud. *Journal of Fluid Mechanics*, 519 :33–54, 2004. 24

[10] H. A. Barnes. The yield stress—a review or '$\pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\varepsilon\iota$'—everything flows ? *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 81(1-2) :133–178, 1999. 7

[11] H. A. Barnes and K. Walters. The yield stress myth ? *Rheologica Acta*, 24(4) :323–326, Jul 1985. 7

[12] I. Basov. Existence of a rigid core in the flow of a compressible Bingham fluid under the action of a homogeneous force. *Journal Math. Fluid Mech.*, 7 :515–528, 2005. 12

[13] I. Basov and Shelukhin V. V. Generalized solutions to the equations of the compressible Bingham flows. *ZAMM*, 79(3) :185–192, 1999. 12

[14] G. Bayada and M. Chambat. The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation : a mathematical proof. *Appl. Math. Optim.*, 14 :73–93, 1986. 23

[15] G. Bayada and M. Chambat. Homogenization of the Stokes system in a thin film flow with rapidly varying thickness. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 23(2) :205–234, 1989. 23

[16] G. Bayada and M. Chambat. Junction between a 3-D Stokes flow and a 2-D thin film with pressure boundary conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 12(4) :293–314, 1990. 23, 130

[17] G. Bayada and C. Vázquez. A survey on mathematical aspects of lubrication problems. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl*, 39 :31–74, 2007. 23

[18] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM journal on imaging sciences*, 2(1) :183–202, 2009. 35, 36

[19] A. Bermúdez and C. Moreno. Duality methods for solving variational inequalities. *Computers & Mathematics with Applications*, 7(1) :43–58, 1981. 20

[20] E. C. Bingham. *Fluidity and plasticity*. Mc Graw-Hill, 1922. 5

[21] R. B. Bird, G. C. Dai, and B. J. Yarusso. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in Chemical Engineering*, 1(1) :1–70, 1983. 7, 8, 15

[22] J. Blackery and Mitsoulis E. Creeping motion of a sphere in tubes filled with a Bingham plastic material. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 70 :59–77, 1997. 18

[23] D. Bonn, M. M. Denn, L. Berthier, T. Divoux, and S. Manneville. Yield stress materials in soft condensed matter. *Reviews of Modern Physics*, 89(3) :035005, 2017. 7

[24] D. Bresch, E. D. Fernández-Nieto, I. R. Ionescu, and P. Vigneaux. *Augmented Lagrangian Method and Compressible Visco-plastic Flows : Applications to Shallow Dense Avalanches*, pages 57–89. Birkhäuser Basel, Basel, 2010. 20

[25] D. Bresch and P. Noble. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods and applications of analysis*, 14(2) :87–118, 2007. 24

[26] E. Buckingham. On plastic flow through capillary tubes. In *Proc. Am. Soc. Testing Materials*, pages 1154–1156, 1921. 42

[27] M. Bulıcek, P. Gwiazda, J. Málek, K. R. Rajagopal, and A. Swierczewska-Gwiazda. On flows of fluids described by an implicit constitutive equation characterized by a maximal monotone graph. *London Math. Soc. Lecture Note, Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 2012. 12

[28] G. R. Burgos, A. N. Alexandrou, and V. Entov. On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids. *Journal of Rheology (1978-present)*, 43(3) :463–483, May 1999. 19

[29] G. Buttazzo, G. Carlier, and M. Comte. On the selection of maximal Cheeger sets. *Differential and Integral Equations*, 20(9) :991–1004, 2007. 14

[30] G. Carlier, M. Comte, and G. Peyré. Approximation of maximal Cheeger sets by projection. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(1) :139–150, 2009. 14

[31] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. Uniqueness of the Cheeger set of a convex body. *Pacific Journal of Mathematics*, 232(1) :77–90, 2007. 14

[32] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. *Total Variation in Imaging*, pages 1–39. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014. 14

[33] A. Chambolle, R. A. De Vore, N.-Y. Lee, and B. J. Lucier. Nonlinear wavelet image processing : variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :319–335, 1998. 36

[34] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian. in : "problems in analysis (papers dedicated to solomon bochner, 1969, 195-199)", 1970. 14

[35] T. Chevalier. *Ecoulements de fluides à seuil en milieux confinés (Flow of yield stress fluids in confined geometries)*. PhD thesis, Université Paris-Est, October 2013. 47, 73, 78, 80, 151

[36] T. Chevalier, S. Rodts, X. Chateau, J. Boujlel, M. Maillard, and P. Coussot. Boundary layer (shear-band) in frustrated viscoplastic flows. *EPL (Europhysics Letters)*, 102(4) :48002, 2013. 15, 73, 78, 80, 100, 151

[37] L. Chupin and T. Dubois. A bi-projection method for Bingham type flows. *Computers & Mathematics with Applications*, 72(5) :1263–1286, 2016. 22

[38] C. Conca, F. Murat, and O. Pironneau. The Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions involving the pressure. *Japanese journal of mathematics. New series*, 20(2) :279–318, 1994. 23

[39] P. Coussot. *Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials : applications in industry and environment*. John Wiley & Sons, 2005. 3, 4, 7

[40] G. Dai and R. B. Bird. Radial flow of a Bingham fluid between two fixed circular disks. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 8(3-4) :349–355, 1981. 24

[41] R. Danchin. Zero Mach number limit for compressible flows with periodic boundary conditions. *American Journal of Mathematics*, 124(6) :1153–1219, 2002. 2

[42] P. R. de Souza Mendes, M. F. Naccache, P. R. Varges, and F. H. Marchesini. Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 142 :207–217, 2007. 49

[43] E. J. Dean and R. Glowinski. Operator-splitting methods for the simulation of Bingham visco-plastic flow. *Chinese Annals of Mathematics*, 23(02) :187–204, 2002. 11, 21, 22

[44] E. J. Dean, R. Glowinski, and G. Guidoboni. On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : old and new results. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 142 :36–62, 2007. 17

[45] F. Delbos, J. C. Gilbert, R. Glowinski, and D. Sinoquet. Constrained optimization in seismic reflection tomography : a Gauss-Newton augmented Lagrangian approach. *Geophysical Journal International*, 164(3) :670–684, 2006. 37

[46] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, 1976. 1, 7, 10, 11, 12

[47] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems (Dunod 1974)*, volume 28. Siam, 1999. 26, 28

[48] E. Feireisl and A. Novotnỳ. The low Mach number limit for the full Navier-Stokes-Fourier system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 186(1) :77–107, 2007. 2

[49] E. D. Fernández-Nieto, J. M. Gallardo, and P. Vigneaux. Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. part 1 : the 1D case. *Journal of Computational Physics*, 264 :55–90, 2014. 20

[50] E. D. Fernandez-Nieto, J. M. Gallardo, and P. Vigneaux. Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. part 2 : the 2D case. *Journal of Computational Physics*, 353 :460–490, 2018. 8, 20

[51] E. D. Fernández-Nieto, P. Noble, and J.-P. Vila. Shallow water equations for non-Newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 165 :712–732, 2010. 24, 130, 131, 133, 135, 139, 140, 152

[52] I. A. Frigaard, J. A. Iglesias, G. Mercier, C. Pöschl, and O. Scherzer. Critical yield numbers of rigid particles settling in Bingham fluids and Cheeger sets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 77(2) :638–663, 2017. 14

[53] I. A. Frigaard and C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 127(1) :1–26, April 2005. 18

[54] I. A. Frigaard and D. P. Ryan. Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 123(1) :67–83, 2004. 24, 131, 133, 135

[55] M. Fuchs and G. Seregin. *Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids*. Springer Science & Business Media, 2000. 12

[56] L. Fusi, A. Farina, F. Rosso, and S. Roscani. Pressure driven lubrication flow of a Bingham fluid in a channel : A novel approach. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 221 :66–75, 2015. 24, 130, 131, 132, 135

[57] R. Glowinski. *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, volume 9 of *Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier, 2003. 33

[58] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*, volume 9 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1989. 30, 31

[59] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières. *Analyse numérique des inéquations variationnelles (Tomes 1 et 2)*. Dunod, 1976. 18

[60] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities*, volume 8. North-Holland Amsterdam, 1981. 30

[61] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids*, 8(12) :2182–2189, 1965. 39

[62] J. P. Hartnett and R. Y. Z. Hu. The yield stress—an engineering reality. *Journal of Rheology*, 33(4) :671–679, 1989. 7

[63] B. He and X. Yuan. On the o(1/n) convergence rate of the douglas-rachford alternating direction method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(2) :700–709, 2012. 36

[64] F. Hecht. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012. URL : `http://www.freefem.org/ff++/`. 135

[65] D. R. Hewitt, M. Daneshi, N. J. Balmforth, and D. M. Martinez. Obstructed and channelized viscoplastic flow in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 790 :173–204, 2016. 15, 16

[66] P. Hild, I. R Ionescu, T. Lachand-Robert, and I. Roşca. The blocking of an inhomogeneous Bingham fluid. Applications to landslides. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(6) :1013–1026, 2002. 13

[67] R. Hill. *Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950. 4, 6, 16

[68] K. Hohenemser and W. Prager. Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 12(4) :216–226, January 1932. 5

[69] R. R. Huilgol and M. P. Panizza. On the determination of the plug flow region in Bingham fluids through the application of variational inequalities. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 58(2-3) :207–217, 1995. 20

[70] R. R. Huilgol and Z. You. Application of the augmented lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, casson and Herschel-Bulkley fluids. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 128(2-3) :126–143, 2005. 20

[71] A. A. Il'iushin. *Deformation of a viscous-plastic plastic body (in Russian)*. Uch. zap. MGU, Mekhanika, 1940. 5, 9

[72] I. R. Ionescu and T. Lachand-Robert. Generalized Cheeger sets related to landslides. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 23(2) :227–249, 2005. 14

[73] B. Kawohl and T. Lachand-Robert. Characterization of Cheeger sets for convex subsets of the plane. *Pacific journal of mathematics*, 225(1) :103–118, 2006. 14

[74] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon & Breach New York, 1969. 147

[75] P.-L. Lions. Mathematical topics in fluid mechanics. vol. 1, volume 3 of oxford lecture series in mathematics and its applications, 1996. 1, 2

[76] G. Lipscomb and M. Denn. Flow of Bingham fluids in complex geometries. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 14 :337–346, January 1984. 24, 133

[77] L.-H. Luu, P. Philippe, and G. Chambon. Experimental study of the solid-liquid interface in a yield-stress fluid flow upstream of a step. *Physical Review E*, 91(1) :013013, January 2015. 73, 74, 75, 76, 77, 90, 95, 151

[78] L.-H. Luu, P. Philippe, and G. Chambon. Flow of a yield-stress fluid over a cavity : Experimental study of the solid-fluid interface. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 245 :25–37, 2017. 73, 81, 82, 83, 117, 118, 151

[79] A. Marly and P. Vigneaux. Augmented Lagrangian simulations study of yield-stress fluid flows in expansion-contraction and comparisons with physical experiments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 239 :35–52, January 2017. doi:10.1016/j.jnnfm.2016.12.004. 25, 73

[80] E. Mitsoulis. Flows of viscoplastic materials : models and computations. *Rheology reviews*, 2007 :135–178, 2007. 18

[81] E. Mitsoulis, S. S. Abdali, and N. C. Markatos. Flow simulation of Herschel-Bulkley fluids through extrusion dies. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 71(1) :147–160, 1993. 18

[82] E. Mitsoulis and J. Tsamopoulos. Numerical simulations of complex yield-stress fluid flows. *Rheologica Acta*, 56(3) :231–258, Mar 2017. 18

[83] J.-J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*, 93(2) :273–299, 1965. 35

[84] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium (translated from PMM, Prikladnaya Matematika i Mekhanika). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 29(3) :545 – 577, 1965. 12, 49

[85] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. On stagnant flow regions of a viscous-plastic medium in pipes (translated from PMM, Prikladnaya Matematika i Mekhanika). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 30(4) :705 – 717, 1966. 12, 13, 14, 49

[86] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. On qualitative singularities of the flow of a viscoplastic medium in pipes (translated from PMM, Prikladnaya Matematika i Mekhanika). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3) :581 – 585, 1967. 12

[87] E. A. Muravleva and M. A. Olshanskii. Two finite-difference schemes for calculation of Bingham fluid flows in a cavity. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 23(6) :615–634, 2008. 20, 31, 39

[88] L. Muravleva. Uzawa-like methods for numerical modeling of unsteady viscoplastic Bingham medium flows. *Applied Numerical Mathematics*, 93 :140–149, July 2015. 31

[89] S. A. Nazarov. Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. *Siberian Mathematical Journal*, 31(2) :296–307, 1990. 23

[90] S. A. Nazarov and J. H. Videmann. A modified nonlinear Reynolds equation for thin viscous flows in lubrication. *Asymptotic Analysis*, 52 :1–36, 2007. 23, 129, 131, 145, 147, 152

[91] Y. Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate o(1/k2). *Soviet Mathematics Doklady*, 27(2) :372–376, 1983. 36

[92] Y. Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization : A basic course*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2013. 34

[93] E. J. O'Donovan and R. I. Tanner. Numerical study of the Bingham squeeze film problem. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 15(1) :75–83, 1984. 18

[94] J. G. Oldroyd. Two-dimensional plastic flow of a Bingham solid. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 43, pages 383–395. Cambridge University Press, 1947. 14, 15, 16, 78, 80, 83, 151

[95] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. In *Proc. R. Soc. Lond. A*, volume 200, pages 523–541. The Royal Society, 1950. 4

[96] T. C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31 :385–404, 1987. 18

[97] J.-M. Piau. Flow of a yield stress fluid in a long domain. application to flow on an inclined plane. *Journal of Rheology*, 40 :711–723, 1996. 24

[98] J.-M. Piau. Viscoplastic boundary layer. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 102(2) :193–218, 2002. 15

[99] W. Prager. Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique. 1937. 5

[100] W. Prager. On slow visco-plastic flow. Technical report 84, Graduate Division of Applied Mathematics. Brown University., Providence, R.I., December 1952. 5, 9

[101] L. Prandtl. Motion of fluids with very little viscosity. 1928. 14, 78

[102] A. Putz and I. A. Frigaard. Creeping flow around particles in a Bingham fluid. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 165(5-6) :263–280, 2010. 21

[103] A. Putz, I. A. Frigaard, and D. M. Martinez. On the lubrication paradox and the use of regularisation methods for lubrication flows. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 163(1–3) :62–77, November 2009. 21, 47, 48

[104] O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to mr beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Proc. R. Soc. Lond.*, 40 :191–203, February 1886. 23

[105] R. T. Rockafellar. Convex analysis. princeton landmarks in mathematics, 1997. 26

[106] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(31–32) :3317–3341, August 2003. 20, 21

[107] A. Roustaei. *Yield stress fluid flows in uneven geometries : applications to the oil and gas industry*. PhD thesis, University of British Columbia (Vancouver), May 2016. 21, 24, 48

[108] A. Roustaei and I. A. Frigaard. The occurrence of fouling layers in the flow of a yield stress fluid along a wavy-walled channel. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 198 :109–124, August 2013. 21, 24, 48, 49, 70, 79

[109] A. Roustaei and I. A. Frigaard. Residual drilling mud during conditioning of uneven boreholes in primary cementing. part 2 : Steady laminar inertial flows. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 226 :1–15, 2015. 21, 49

[110] A. Roustaei, A. Gosselin, and I. A. Frigaard. Residual drilling mud during conditioning of uneven boreholes in primary cementing. Part 1 : Rheology and geometry effects in non-inertial flows. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 220 :87–98, June 2015. 21, 48, 49, 79

[111] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Modeling film flows down inclined plane. *Eur. Phys. J. B*, 6 :277–298, 1998. 24

[112] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined plane. *Eur. Phys. J. B*, 15 :357–369, 2000. 24

[113] P. Saramito. *Efficient C++ finite element computing with Rheolef.* CNRS-CCSD ed., 2015. http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00573970. 20

[114] P. Saramito. A damped newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 238 :6–15, 2016. 22

[115] H. Schlichting, K. Gersten, E. Krause, H. Oertel, and K. Mayes. *Boundary-layer theory*, volume 7. Springer, 1955. 14

[116] J. Schurz. The yield stress—an empirical reality. *Rheologica acta*, 29(2) :170–171, 1990. 7

[117] T. Schwedoff. La rigidité des fluides. *Rapports du Congrès intern. de Physique*, 1 :478–486, 1900. 5

[118] V. V. Shelukhin. Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4 :109–127, 2002. 12

[119] N. Z. Shor. *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions.* Springerger-Verlag, 1985. 29

[120] P. Szabo and O. Hassager. Flow of viscoplastic fluids in eccentric annular geometries. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 45(2) :149–169, 1992. 22, 24

[121] R. I. Tanner and K. Walters. *Rheology : an historical perspective*, volume 7. Elsevier, 1998. 1

[122] T. Treskatis. *Fast proximal algorithms for applications in viscoplasticity.* PhD thesis, School of Mathematics and Statistics, University of Canterbury, 2016. 36

[123] T. Treskatis, M. A Moyers-Gonzalez, and C. J. Price. An accelerated dual proximal gradient method for applications in viscoplasticity. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 238 :115–130, 2016. 36, 37

[124] T. Treskatis, A. Roustaei, I. A. Frigaard, and A. Wachs. Practical guidelines for fast, efficient and robust simulations of yield-stress flows without regularisation using accelerated proximal gradient or augmented lagrangian methods. 2017. 37, 38, 151

[125] H. Uzawa. Iterative methods for concave programming. *Studies in linear and nonlinear programming*, 6 :154–165, 1958. 29

[126] P. Vigneaux, G. Chambon, A. Marly, L.-H. Luu, and P. Philippe. Flow of a yield-stress fluid over a cavity : experimental and numerical investigation of a viscoplastic boundary layer. *Accepted to Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2018. doi:10.1016/j.jnnfm.2018.08.005. 73

[127] G. Vinay, A. Wachs, and J.-F. Agassant. Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 128(2–3) :144–162, July 2005. 20

[128] G. Vinay, A. Wachs, and J.-F. Agassant. Nf weakly compressible Bingham flows : The restart of pipeline flows of waxy crude oils. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 136 :93–105, 2006. 20, 31, 39

[129] D. Vola, F. Babik, and J.-C. Latché. On a numerical strategy to compute gravity currents of Non-Newtonian fluids. *Journal of Computational Physics*, 201(2) :397–420, 2004. 20

[130] D. Vola, L. Boscardin, and J.-C. Latché. Laminar unsteady flows of Bingham fluids : a numerical strategy and some benchmark results. *Journal of Computational Physics*, 187(2) :441–456, 2003. 20

[131] I.C. Walton and S.H. Bittleston. The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus. *J. Fluid. Mech.*, 222 :39–60, 1991. 24, 48, 133

[132] Z. Yu and A. Wachs. A fictitious domain method for dynamic simulation of particle sedimentation in Bingham fluids. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 145(2) :78–91, 2007. 22

[133] T. Zisis and E. Mitsoulis. Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 105(1) :1–20, 2002. 18

Analyse mathématique et numérique d'écoulements de fluides à seuil

Résumé : Cette thèse traite d'écoulements de fluides à seuil (ou viscoplastiques) en milieu confiné. Les difficultés analytiques et numériques sont dues à la multivaluation du tenseur des contraintes dans les zones plastiques ainsi qu'à la non-différentiabilité du problème de minimisation associé. Cette thèse s'articule en deux parties.
Dans un premier temps, des simulations numériques parallèles très précises à l'aide d'algorithmes de dualité ont été effectuées. Elles ont permis de retrouver des résultats observés expérimentalement dont l'existence d'une ligne de glissement pour l'écoulement au dessus d'un obstacle et le caractère quasi-Poiseuille de la vitesse au-delà de cette ligne. Par ailleurs, la théorie de couche limite viscoplastique définie par Oldroyd (1947, à nombre de Bingham asymptotiquement grand) a été revisitée à nombre de Bingham modéré en milieu confiné. L'étude a mis en œuvre des allers-retours entre ces simulations et les expériences physiques de Luu et al. d'IRSTEA ainsi qu'une dérivation théorique. L'approximation de couche limite est vérifiée dans une certaine mesure à l'intérieur de la cavité. Une adaptation de la notion de couche limite viscoplastique est alors exhibée et permet d'étendre les scalings dérivés par Oldroyd (1947) et Balmforth et al. (J. of Fluid Mech, 2017). Ces scalings sont aussi généralisés au cas de la loi d'Herschel-Bulkley.
Dans un second temps, on présente une analyse asymptotique des champs de vitesses et de contraintes pour des écoulements en faible épaisseur (ε). Un développement à l'ordre ε^2 de la vitesse permet de trouver une équation de Reynolds à la même précision. Cette équation de Reynolds prolonge les résultats déjà existants dans le cadre newtonien, d'une part et dans le cadre fluide à seuil avec une surface libre, d'autre part.
Mots-clefs : Fluides à seuil, Rhéologie de Bingham, Rhéologie de Herschel-Bulkley, Simulations numériques, Méthodes de dualité, Différences Finies, Solveurs multi-parallèles frontaux, Couche limite viscoplastique, Analyse asymptotique, Écoulements en couche mince.

Mathematical and numerical analysis of yield stress fluid flows

Abstract : This thesis is devoted to the flow of yield stress (or viscoplastic) fluids in pipes. Analytical and numerical difficulties lie in the multivaluation of the stress tensor in the plastic regions and in the non-differentiability of the associated minimization problem. This manuscript is organized following two main axes.
First, very accurate numerical simulations were carried out using duality methods and parallel multifrontal solvers. Thus, experimental observations were recovered, namely the existence of a *slip line* for the flow over an obstacle and the Poiseuille-like behaviour of the velocity above this line. Moreover, the viscoplastic boundary layer theory defined by Oldroyd (1947 at high Bingham numbers) was revisited at moderate Bingham numbers in confined areas. This study provided an opportunity to go back and forth between these simulations and the physical measures of Luu et al. from IRSTEA and to perform a theoretical derivation. The boundary layer approximation is valid up to a certain extent in the cavity. An adaptation of the viscoplastic boundary layer definition is then given and allows to generalize the scalings shown by Oldroyd (1947) and Balmforth et al. (JFM 2017). These scalings are also generalized to the Herschel-Bulkley case.
Then, an asymptotic analysis of the velocity and stress fields for thin layer (ε) flows is presented. A velocity development up to ε^2 lets us find a Reynolds equation of same accuracy. This Reynolds equation extends the already existing results, on the one hand in the newtonian case and on the second hand for free surface flows.
Keywords : Yield stress fluids, Bingham rheology, Herschel-Bulkley rheology, Numerical simulations, Duality methods, Finite Differences, Multiparallel frontal solvers, Viscoplastic boundary layer, Asymptotic analysis, Thin-layer flows.