

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Dynamique des Fluides

Présentée et soutenue par :

M. NICOLAS MONROLIN

le jeudi 20 septembre 2018

Titre :

Etude théorique et expérimentale de la propulsion électrohydrodynamique dans l'air

---

Ecole doctorale :

Aéronautique-Astronautique (AA)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (I.M.F.T.)

Directeur(s) de Thèse :

M. FRANCK PLOURABOUE

Rapporteurs :

M. ERIC MOREAU, UNIVERSITE DE POITIERS
M. PAOLO LUCHINI, UNIVERSITA DI SALERNO

Membre(s) du jury :

M. JEAN-PIERRE BOEUF, CNRS TOULOUSE, Président
M. FRANCK PLOURABOUE, CNRS TOULOUSE, Membre
M. HADRIEN LAMBARE, CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES CNES, Membre
Mme FREDERIQUE CHARLES, UNIVERSITE PARIS 6, Membre

Das Leben ist wie ein Fahrrad.
Man muss sich vorwärts bewegen, um das Gleichgewicht nicht zu verlieren.
Albert Einstein

Résumé

L'effet Biefeld-Brown, du nom de ses découvreurs dans les années 1920, désigne la force électrohydrodynamique (EHD) s'appliquant sur deux électrodes sous haute tension dans l'air. Si l'origine de cette force a pu faire l'objet de certaines spéculations, il est aujourd'hui admis qu'elle repose sur l'accélération par un fort champ électrique d'un volume d'air partiellement ionisé. Cet effet aussi appelé vent ionique intéresse diverses applications : contrôle actif d'écoulement, augmentation du transfert de chaleur par convection forcée, séchage de denrées alimentaires ou encore la propulsion. Cette thèse, présente une étude expérimentale, théorique et numérique du vent ionique dans une configuration modèle à deux électrodes parallèles. Le faible rendement du vent ionique l'a écarté des applications à la propulsion mais des expériences récentes menées en 2013 montrent qu'il permet d'atteindre un rapport poussée/puissance étonnement élevé.

Nous montrons dans une première partie, à partir de mesures et de considérations aérodynamique générales que la poussée générée pourrait suffire à contrebalancer la force de traînée pour certains aéronefs ultra-légers. Ces mesures ont permis de quantifier la force EHD et sa dépendance avec la géométrie des électrodes. En outre, la meilleure configuration à deux collecteurs peut produire une poussée presque deux fois plus importante qu'une configuration avec un seul collecteur, à tension fixée. Ces premiers résultats ont été affinés dans un second temps par les mesures PIV qui ont permis la reconstruction de l'écoulement et du champ de force entre les électrodes. Les vitesses mesurées dépassent rarement 3 m/s, et la force volumique est de l'ordre de 10 N/m^3. L'origine physique de la configuration optimale à deux collecteurs a été éclaircie par la mise en évidence des structures de sillages et de leurs effets instationnaires.

Par ailleurs, une analyse théorique générale de la force propulsive nous a permis de confirmer sa dépendance explicite avec le rapport courant sur mobilité ionique. Le courant étant directement lié à la physique de la décharge couronne, la seconde partie de la thèse s'est concentrée sur son analyse théorique et numérique.

Une analyse asymptotique a ainsi permis de trouver une expression analytique du champ électrique critique et de la caractéristique courant-tension permettant de connaître l'influence de la densité du gaz et de sa composition sur le courant produit dans des électrodes concentriques. Cette approche asymptotique a été associée à une formulation de décomposition de domaine dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis pour analyser des configurations plus générales. Une résolution itérative du système d'équations stationnaires non-linéaire couplées par méthode de Newton est proposée, testée et validée. Cette méthode peut être étendue à des géométries plus complexes, permettant ainsi d'obtenir une condition d'injection des charges prenant en compte la physique complexe de la décharge.

Abstract

The Biefeld-Brown effect, named after its discoverers in 1920s, stands for the electrohydrodynamic (EHD) force applied on two high voltage electrodes in air. The origin of this force has been subject to controverse, but it is establised that it relies on the acceleration of ionized air by a strong electric field. Numerous applications are associated with ionic wind : active flow control, heat transfer enhancement, food drying or even propulsion. At the first glance, the low efficiency is unattractive for propulsion. However recent experiments highlighted a surprisingly high thrust/power ratio. This PhD research aimed to better understand the phenomena, through experiments and theoretical or numerical analysis.

First, an experimental study was carried out to quantify the EHD force and its variations with the geometry of the electrodes. For instance, the best position of two collecting electrodes could produce nearly twice more thrust than the one collector configuration, for a given applied voltage. Considering the mass and the aerodynamic of some already existing very light aircrafts, it is shown that the produced thrust could at most balance the aerodynamic drag. This first results were enhanced by PIV measurements, which gave deeper insight into the flow and the force field between the electrodes. The air speed recorded was at most around 3 m/s, while the volumetric force of the order of 10 N/m3. The physical explaination of the optimal two collectors configuration relied partially on the wake flow structures and their unsteady effects.

Then, a theoretical analysis of the propulsive force confirmed its explicit dependence on the current to mobility ratio. The discharge current being determined by the corona discharge physics, the second part of this work focuses on its theoretical and numerical analysis.

An asymptotic approach of the corona discharge for concentric cylindrical electrodes led to an explicit expression of both the onset surface electric field and the current-voltage law as functions of the gas density, the effective ionization coefficient and the electrodes size. This asymptotic approach was reformulated in the frame of a domain decomposition method, implemented numerically with a finite elements discretization, in order to generalize the asymptotic approach. The iterative algorythm for the steady non-linear coupled system of equations is based on Newton method. This method provides a physically relevant boundary condition for the charge injection and can be applied to more complex geometries.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Franck Plouraboué pour son soutien indéfectible en toutes circonstances, ses encouragements, la qualité de son raisonnement et ses nombreuses idées : seulement quelques semaines après le début de la thèse tu me parlais déjà de développements asymptotiques, alors qu'avant les cours de M2R, je ne savais même pas ce que ça voulait dire. Ton optimisme a grandement contribué à ce que certaines tâches en apparence insurmontable soient menées jusqu'au bout et avec succès.

Je remercie également Olivier Praud pour la clarté de ses explications, sa rigueur mais aussi pour son savoir faire expérimental. Bien plus qu'un simple encadrant, tu diffuses avec subtilité la vélo-attitude, même à l'autre bout du monde. En bon cyclo-randonneur, tu t'es montré compréhensif lorsque je faisais sécher mes chaussures derrière l'ordinateur.

Ce projet n'aurait jamais vu le jour sans la curiosité de Christian Canart et Hadrien Lambaré, que je remercie d'avoir porté ce projet au sein du CNES. Ce n'est pas simple de proposer des projets qui sortent des sentiers battus et pourtant vous l'avez fait.

Une pensée reconnaissante à Leanne Pitchford et Jean-Pierre Boeuf qui ont contribué à enrichir ce travail au travers de discussions et de remarques judicieuses. Je salue également le travail des rapporteurs Paolo Luchini et Éric Moreau pour leurs remarques ainsi que les autres membres du jury : Frédéric Charles et Claude Boniface.

Un merci tout particulier à Ilyass Loukili qui a eu la patience de concevoir et fabriquer les diverses dispositifs expérimentaux avec le sourire. Il n'a pas hésité à construire la "cabane du chasseur", en bois aggloméré, matériau indigne d'un atelier comme celui de l'IMFT habitué à travaillé des matériaux plus nobles.

Merci au service signaux et images de l'IMFT dont pas un seul membre n'a été épargné. Hervé Ayrolles qui, au péril de sa vie, a fabriqué le premier amplificateur de tension à partir de composants arrachés à un ancien poste de télévision. Sébastien Cazin et Moïse Marchal pour la mise en place du dispositif PIV et leurs conseils avisés. À nouveaux Moïse Marschal qui a contribué à me maintenir vivant : lasers de classe 4, hautes tension, nuage de fumée malodorante ... le cauchemar de tout référent de sécurité. Maëlle Ogier, qui m'a permis de voir les particules d'encens au microscope et grâce à qui les étudiants de l'N7 ont pu faire de superbes TPs avec caméra rapide. Merci à Frédéric Bergame, qui m'a donné la poussée initiale pour Labview et pour ses conseils par la suite.

Pierre Elyakime, qui a pris le temps de m'expliquer le fonctionnement détaillé du code massivement parallèle CPIV. Lancer plusieurs jobs parallélisés, sans limite de licences m'a fait gagner un temps précieux.

Merci à Ahmed, étudiant rigoureux, pour son travail remarquable de mesures et d'analyses.

Une pensée pour tous les doctorants et postdoctorant dont j'ai croisée la route lors des pauses "gamelles du midi".

Enfin, ma famille qui m'a toujours aidé et soutenu dans mes choix. Je réalise aujourd'hui à quel point leur soutien a été déterminant pour en arriver là.

Et bien sûr Charline qui a supporté mes horaires à débordement durant les derniers mois, tout ça pour ne récupérer qu'un misérable compagnon épuisé en fin de journée. Si ce n'est pas une preuve d'amour, ça y ressemble.

Table des matières

1 Introduction **11**
1.1 Propulsion et effet Biefeld-Brown 11
1.1.1 L'effet Biefel-Brown : entre mythe et réalité 11
1.1.2 Une brève histoire du vent ionique 15
1.1.3 Vers une application à la propulsion EHD ? 21
1.2 Origine des forces électro-hydrodynamiques 22
1.2.1 Approche microscopique 23
1.2.2 Approche thermodynamique, tenseur des contraintes 24
1.2.3 Approche par bilan de quantité de mouvement 24
1.3 Plasmas et décharges électriques dans un gaz 25
1.3.1 Physique des décharges 25
1.3.2 La décharge couronne 25
1.3.3 Instabilités dans les décharges couronnes 28
1.3.4 Courant de décharge 29
1.4 Objectifs et plan 30

2 Performances propulsives des sytèmes EHD **33**
2.1 Considérations générales sur les systèmes propulsifs 33
2.1.1 Particularité des systèmes EHD 34
2.2 Description du dispositif expérimental et phénomènes "parasites" 35
2.3 Article *AIAA Journal* 39

3 Mesures du champ de vitesse et force EHD **55**
3.1 Vent ionique et mesures expérimentales : état de l'art 55
3.2 Mesure expérimentale du champ de force 56
3.3 Résultats 64
3.4 Article *Physical Review Fluids* 65

4 Analyse asymptotique de la décharge couronne **85**
4.1 Approches pour la modélisation de la décharge couronne 86
4.2 Une brève justification de la loi de Townsend 87
4.3 La méthode des développements asymptotiques raccordés (MDAR) 89
4.3.1 Principe de la méthode au travers d'un exemple 89
4.3.2 Application à la décharge couronne. 90
4.4 Article *Physics of Plasmas* 92

5 Modélisation non axisymétrique **117**
5.1 Motivation : influence d'un écoulement extérieur sur la décharge 117
5.1.1 Travaux antérieurs 119

5.1.2 Illustration par l'expérience . . . 123
5.2 Modélisation numérique . . . 125
5.2.1 Notations . . . 125
5.2.2 La zone externe . . . 126
5.2.3 La zone interne . . . 131
5.3 Décomposition de domaine appliquée à la décharge couronne. . . . 136
5.3.1 Équations constitutives . . . 137
5.3.2 Formulation faible . . . 138
5.3.3 Implémentation : construction de la matrice . . . 139
5.4 Résultats . . . 140
5.4.1 Convergence numérique . . . 140
5.4.2 Perspectives . . . 143
5.5 Conclusion . . . 144

Conclusion générale **145**

Appendices **149**

A Code Freefem++ **151**
A.1 Implémentation sous Freefem++ : Zone externe. . . . 151
Convergence numérique de la formulation "bis" : zone Externe . . . 153
A.2 Implémentation sous Freefem++ : Zone interne. . . . 154
A.3 Implémentation sous Freefem++ : équations raccordées. . . . 156

B Compléments multi-domaine **161**
B.1 Effet de la taille finie de la zone interne . . . 161
B.2 Décomposition de domaine et multiplicateurs de Lagrange . . . 162

Liste des symboles

α	Premier coefficient d'ionisation (m^{-1})
$\alpha_e f$	Coefficient d'ionisation effectif $\alpha - \eta$ (m^{-1})
η	coefficient d'attachement électronique (m^{-1})
η	rendement (-)
$\mathbf{j}$	vecteur densité de courant ($A.m^{-2}$)
$\mathbf{E}$	champ électrique ($V.m^{-1}$)
$\mathbf{u}$	vitesse du fluide ($m.s^{-1}$)
μ	mobilité de la particule ($m^2.s^{-1}.V^{-1}$)
ν_c	fréquence de collision (s^{-1})
ρ	densité volumique de charge ($C.m^{-3}$)
ρ_f or ρ_g	masse volumique du fluide/gaz ($kg.m^{-3}$)
ε_0	permittivité du vide ($F.m^{-1}$)
$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$	Norme quadratique
$\|\cdot\|_{L2}$	Norme L_2
d	distance émeteur(s) à collecteur(s) (m)
F	force totale (N)
f_{EHD}	force électro-hydrodynamique ($N.m^{-3}$)
I	courant électrique (A)
N	Nombre de molécules par unité de volume (m^{-3})
N_0	Nombre de molécules en atmosphère standard (2.5×10^{25} m^{-3})
N_{dof}	Nombre de degrés de liberté
Re_E	Reynolds électrique $u/(\mu E)$
V	différence de potentiel appliquée (V)

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Propulsion et effet Biefeld-Brown 11
1.1.1 L'effet Biefel-Brown : entre mythe et réalité 11
1.1.2 Une brève histoire du vent ionique 15
1.1.3 Vers une application à la propulsion EHD ? 21
1.2 Origine des forces électro-hydrodynamiques 22
1.2.1 Approche microscopique 23
1.2.2 Approche thermodynamique, tenseur des contraintes 24
1.2.3 Approche par bilan de quantité de mouvement 24
1.3 Plasmas et décharges électriques dans un gaz 25
1.3.1 Physique des décharges 25
1.3.2 La décharge couronne 25
1.3.3 Instabilités dans les décharges couronnes 28
1.3.4 Courant de décharge 29
1.4 Objectifs et plan 30

Ce chapitre dresse un bref tableau historique de la recherche sur le vent ionique ainsi qu'un inventaire aussi exhaustif que possible des applications qui ont été ou sont envisagées dans ce contexte. Les forces électro-hydrodynamiques (EHD) et la génération de poussée constituent cependant le cœur de cette thèse c'est pourquoi un accent particulier sera mis sur ce sujet.

1.1 Propulsion et effet Biefeld-Brown

1.1.1 L'effet Biefel-Brown : entre mythe et réalité

Tout a commencé au début du XX^e siècle lors d'une expérience menée par le physicien américain Thomas Townsend Brown et son collaborateur Paul Alfred Biefeld. Alors qu'ils étudiaient la production de rayon X dans un tube de Coolidge, constitué de deux électrodes asymétriques soumises à une très haute tension ($\approx 20 - 400$ kV), ils mesurent une force d'origine inconnue. Cet effet est connu depuis sous le nom d'effet Biefeld-Brown.

Dans un premier temps, Brown pensait avoir découvert un couplage entre gravité et électrostatique, d'où l'émergence d'une croyance populaire (parfois tenace) selon laquelle ce phénomène pourrait être exploité pour la propulsion de vaisseaux futuristes. Aujourd'hui encore il suffit de rechercher le mot "électrogravité" ou "Biefeld-Brown" dans un moteur de recherche pour constater à quel point ce sujet suscite encore curiosité et échanges. Le lecteur curieux pourra même trouver une revue bibliographique regroupant de nombreux livres et sites internet sur le sujet

[1]. Du point de vue de la littérature scientifique, un effet "électrogravitique" n'a jamais été ni documenté ni soutenu et il semble que l'effort mesuré par Biefeld & Brown soit lié au phénomène de vent ionique.

A l'origine, Brown pensait que l'effet qu'il avait découvert s'observerait aussi dans le vide. Pensant à l'intérêt applicatif, il dépose un premier brevet dès 1928 [2]. Ses travaux se poursuivent jusque dans les années 1960 [3], mais les résultats de ses recherches n'ont pas été publiés, en particulier ce qui concerne l'existence de cet effet dans le vide. Très peu de publications scientifiques traitent ce sujet durant cette période, en dehors de l'article de Christenson and Moller de 1967 [4]. Cette première étude scientifique quantifie la force de poussée entre deux électrodes sous haute tension dans l'air et établie le lien théorique avec le phénomène de vent ionique. Ce dernier phénomène est bien connu de la communauté scientifique, il est associé à une décharge électrique se produisant dans l'air sous un fort champ électrique et au mouvement des ions ainsi générés, nous y reviendrons par la suite. Un tel effet n'a donc pas lieu de se produire dans le vide. La propulsion à vent ionique alimente elle aussi la machine à rêves comme le montre la couverture du magazine mensuel "Popular Mechanics"[5] de 1964, figure 1.1, qui propose une illustration de machine volante à vent ionique.

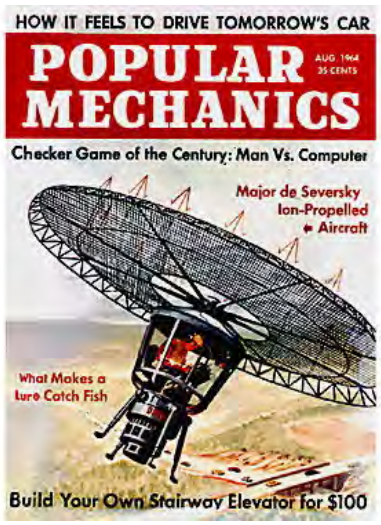
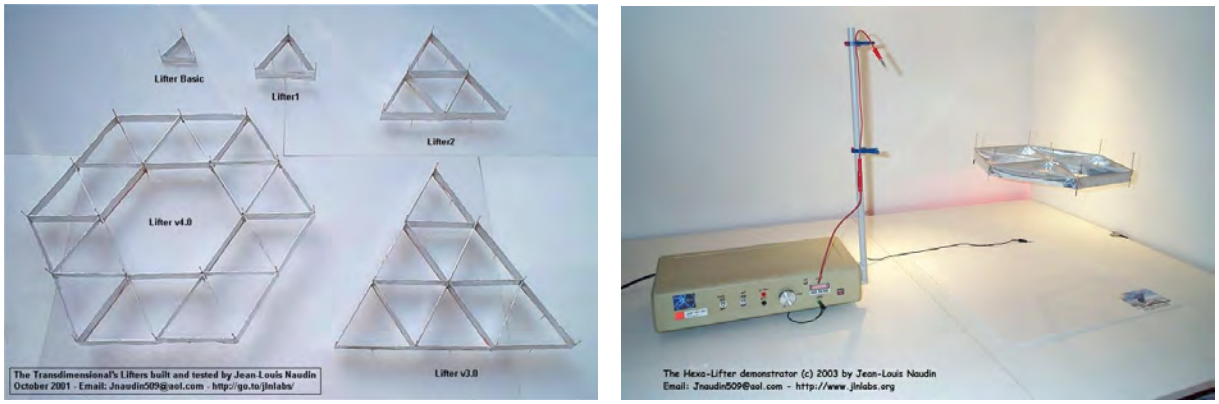


Figure 1.1 – *Couverture du mensuel Popular Mechanics d'août 1964.*

Dans un rapport commandé par les laboratoire Philipps et l'armée américaine en 1990 [6], des expériences effectuées sous un vide poussé (10^{-2} Pa) ne permettent pas de mesurer un effet significatif : des efforts résiduels de l'ordre 0.01 μN sont rapportés pour une tension de 19 kV, un courant de l'ordre 10 pA et pour divers configurations : électrodes symétrique/asymétrique, avec ou sans diélectrique. L'évolution erratique des mesures observées conduit les auteurs à la conclusion qu'il ne s'agit sans doute que d'un bruit de mesure lié à l'interaction entre les électrodes et la chambre à vide, en dépit de toutes les précautions prises pour minimiser les effets électrostatiques.

En 2002, un rapport de l'armée américaine [7] ramène le sujet sur le devant de la scène. Il y est question de poussée produite par un condensateur asymétrique, les tests étant réalisés dans l'air. Une analyse théorique des efforts s'exerçant sur le diélectrique entre les électrodes met en avant la prédominance des forces de Coulomb (charge électrique) par rapport aux efforts liés à une éventuelle variation de la constante diélectrique du milieu. Les auteurs rapportent que lors d'une conversation avec J.L. Naudin ce dernier leur a transmis une correspondance de T.T. Brown, dont voici un bref extrait.

These experiments were explained by scientific community as due entirely to "ion-momentum



(a) **(b)**

Figure 1.2 – *(a) Différents lifter fabriqués par J.L. Naudin, tous consititués d'une armature en bois, d'un fil émeteur métallique et d'une feuille d'aluminium collectrice (b) Un lifter en vol et l'alimentation haute tension associée [9].*

transfer", or "electric wind". It was predicted categorically by many "would-be" authorities that such an apparatus would not operate in vacuum. The Navy rejected the research proposal (for further research) for this reason. The experiments performed in Paris several years later, proved that ion wind was not entirely responsible for the observed motion and proved quite conclusively that the apparatus would indeed operate in high vacuum.

Si cette correspondance est authentique, il apparaît que déjà à l'époque de Brown l'explication du vent ionique était admise par la communauté scientifique. En dépit des affirmations de Brown, d'autres expériences menées indépendamment ne permettent pas de mettre en évidence un effet significatif dans le vide.

En 2004 des travaux expérimentaux conduits à l'université de Dresden [8] réalisés dans l'air montrent une fois de plus que la théorie du vent ionique de Christenson et Moller prédit de manière convaincante la force de poussée.

En dehors de la sphère scientifique, c'est Jean Louis Naudin [9], entre autres, qui a largement contribué entre 2000 et 2006 à la démocratisation du *lifter* sur internet, cet assemblage de fils métalliques et de feuilles d'aluminium, voire figure 1.2, qui lévite lorsqu'il est connecté à une source haute tension. Même si certaines des explications avancées sont parfois discutables et que les applications envisagées peuvent paraître ambitieuses, force est de reconnaître que les *lifter* volent qu'il est possible de soulever quelques dizaines de grammes avec ces *lifters*.

Il faut attendre 2009 pour qu'un rapport de Wilson *et al.* [10], effectué pour la NASA, s'intéresse à nouveau au phénomène en abordant sérieusement la question de la propulsion par vent ionique cette fois. Wilson *et al.* mesurent la force de poussée exercée sur les électrodes au moyen d'une balance électronique. Une poussée de quelques grammes est mesurée pour un ensemble de paires d'électrodes en parallèle formant un carré de 150 mm de côté. Par ailleurs la force totale appliqué à l'air est estimée en effectuant un bilan de quantité de mouvement. Une plaque est suspendue à la sortie du dispositif, le déplacement de cette plaque pendulaire étant lié à la résultante des efforts de pression exercée par le flux d'air sur cette dernière. De cette façon ils obtiennent une force identique à celle mesurée par la balance. Ils démontrent ainsi que l'effet Biefeld-Brown est bien causé par la force de réaction résultant de l'accélération de l'air entre les électrodes par effet de vent ionique. Wilson *et al.* mettent en avant l'influence considérable de la géométrie des électrodes. Concernant l'électrode de petite dimension, appelée émeteur car c'est là que la décharge couronne produit des ions, des aiguilles placées à intervalle régulier donnent des

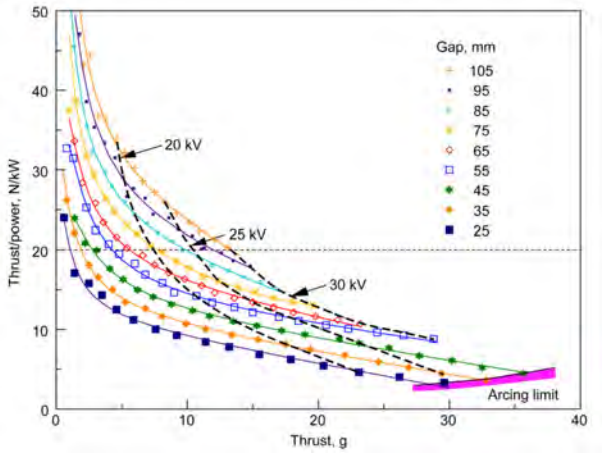


Figure 1.3 – *Mesure du rapport poussée/puissance pour différentes distances inter-électrodes [10].*

résultats sensiblement différents selon l'écartement entre elles. Il existe un écartement optimal, qui dépend sans doute aussi de la distance avec la deuxième électrode, le collecteur. Le collecteur doit nécessairement être de plus grande taille pour éviter la formation d'une autre décharge de polarité opposée à celle de l'émeteur. Par ailleurs l'utilisation de plusieurs collecteurs permet quasiment de doubler la poussée, à tension fixée, lorsque l'écartement est optimal. De manière plus générale la poussée est proportionnelle au courant électrique comme le prédit la théorie de Christenson et Moller [4].

$$F = \frac{I\,d}{\mu} \tag{1.1}$$

où F désigne la force de poussée, d la distance émeteur à collecteur et μ la mobilité des ions issus de la décharge couronne. Le rapport poussée/puissance, diminue quant à lui lorsque la poussée augmente. La figure 1.3, tirée du rapport de la Nasa, illustre également l'influence de la distance émeteur-collecteur sur les performances du système.

Wilson *et al.* estiment qu'un tel système n'a d'intérêt applicatif pour la propulsion que s'il délivre simultanément une densité de poussée de 20 N/m^2 et une efficacité de 20 N/kW. Néanmoins aucune justification n'est fournie, et la réalité est sans doute plus complexe puisque ce sont les caractéristiques de l'aéronef (poids, aérodynamique et autonomie principalement) qui déterminent le besoin propulsif. Il n'en reste pas moins que Wilson *et al.* soulèvent des points importants :

- quelle fiabilité peut-on espérer, notament concernant la durée de vie de l'émeteur ?
- quid de la force de poussée en présence d'un écoulement d'air ?
- le générateur haute tension peut-il être facilement embarqué ?
- la poussée diminuant avec l'altitude, ce type de système aurait peu de chance d'être utilisable à haute altitude ?

Etant donné la faible poussée obtenue, les principales applications envisagées portent sur des aéronefs ultra-légers, de grande envergure évoluant à faible vitesse. Wilson *et al.* mentionnent le projet américain d'avion solaire Helios, visant à embarquer du matériel scientifique à haute altitude. Il est donc légitime de s'interroger quant à l'influence de l'écoulement extérieur sur la décharge ainsi que l'effet de la pression ambiante. Pour cela il est nécessaire de faire un bilan exhaustif des connaissances scientifiques sur le vent ionique.

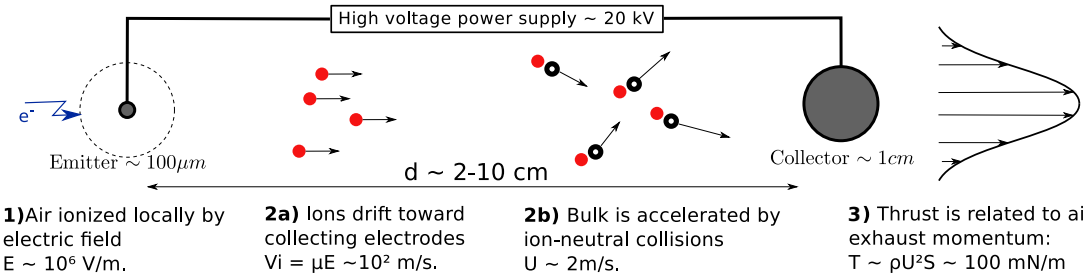


Figure 1.4 – *Dispositif et mécanisme de génération de vent ionique à partir d'un émetteur de faible rayon de courbure et d'un collecteur de plus grande taille.*

1.1.2 Une brève histoire du vent ionique

Principe de fonctionnement

Depuis le début du XX^e siècle, de nombreux appareils électro-hydrodynamiques, ou électro-aérodynamiques selon qu'ils fonctionnent avec des liquides ou des gaz, ont été développés en laboratoire. Leur principe repose sur l'accélération d'un fluide chargé (liquide ou gaz) au moyen d'un fort champ électrique. Par la suite nous emploierons indifféremment la dénomination électro-hydrodynamique (EHD) qui est largement employée par la communauté, pour désigner à la fois le cas des liquides et des gaz. Il est cependant à noter que la physique gouvernant la création de charge dans les gaz est foncièrement différente de celle opérant dans les liquides. En effet, dans les gaz, ce sont généralement les collisions électroniques qui produisent les charges, dans le cadre d'un processus hors équilibre. Ces collisions électroniques ne sont efficaces que lorsque le champ électrique est localement plus important qu'un «champ d'allumage» pour que la réaction en chaîne des collisions puissent se poursuivre. En revanche, dans les liquides, les charges résultent très généralement d'un processus à l'équilibre dit de «Poisson-Boltzmann» qui répartit les charges selon le potentiel électrique local.

Dans les gaz, on cherche donc à trouver les conditions de champs électrique localement proches du «champ d'allumage» pour lesquelles on obtient production de charges. Ainsi, pour un fonctionnement optimal l'une des électrodes, l'émetteur, doit être de petite taille afin de tirer parti de l'effet de pointe. Á différence de potentiel φ_a fixée, une électrode génère un champ électrique dans son voisinage d'autant plus important que son rayon de courbure a est petit (car le rayon de courbure détermine le gradient de potentiel local).

$$E_a \sim \frac{\varphi_a}{a} \tag{1.2}$$

Sans rentrer dans le détail, au delà d'un certain champ électrique critique, une décharge électrique auto-entretenue (décharge couronne) se forme à la surface de l'émetteur, c'est l'étape 1 représentée sur la figure 1.4. Les particules chargées générées par cette décharge, ions positifs ou électrons et ions négatifs selon la polarité, sont ensuite accélérées jusqu'au collecteur et échangent de la quantité de mouvement par collisions avec les neutres, étapes 2a et 2b. Il en résulte finalement une accélération moyenne des molécules neutres dans le sens émetteur-collecteur, étape 3. Ce phénomène est courament appelé vent ionique (*ionic wind* ou *electric wind*). La force totale qui s'applique sur le volume d'air entre les électrodes se retrouve à partir de l'intégrale du flux de quantité de mouvement $\rho\mathbf{u}$ en sortie du système.

En pratique ces appareils sont constitués d'électrodes de formes et de tailles variées. Typiquement des électrodes séparées de quelques centimètres et soumises à des tensions d'une dizaine de kilovolts génèrent un vent ionique pouvant atteindre quelques mètres par secondes, comme le montre les études détaillées par la suite.

Historique

La première observation du vent ionique est attribuée à l'anglais Francis Hauksbee. Ce dernier publia en 1709 un rapport sur les phénomènes électriques dans lequel il explique avoir une sensation de soufflage lorsqu'il approche un tube à décharge près de son visage. Le phénomène fait l'objet de nombreuses expériences et attire l'attention d'éminentes personnalités telles que Newton, Faraday puis Maxwell. Le vent ionique est donc connu depuis plusieurs siècles même s'il a fallu attendre 1899 pour que Chattock [11] propose une première analyse quantitative. En étudiant une configuration pointe-plan, Chattock établie un lien entre la pression, due au vent ionique, et l'intensité du champ électrique appliqué. Il explique la mise en mouvement de l'air ambiant par le «frottement» des ions sur les molécules neutres. Dans les années 1950 les résultats de Chattock sont étendus à d'autres configurations d'électrodes alors que le phénomène connaît un regain d'intérêt. Robinson [12] réalise en 1961 une revue théorique et expérimentale détaillée sur les relations liant les différents paramètres électriques, les propriétés du gaz et les performances de ce type de système. Pour ses expériences il utilise une électrode en pointe, l' émetteur, et une grille sphérique, le collecteur, représentées sur la figure 1.5. La haute tension appliquée à l'émetteur, de 10 à 50 kV, ainsi que la forme pointue de ce dernier permettent de générer autour de la pointe un fort champ électrique responsable de l'ionisation partielle du gaz. Ce type de décharge électrique, appelé décharge couronne, permet de créer dans le voisinage immédiat de l'émetteur des ions qui sont ensuite accélérés vers le collecteur. Robinson explique

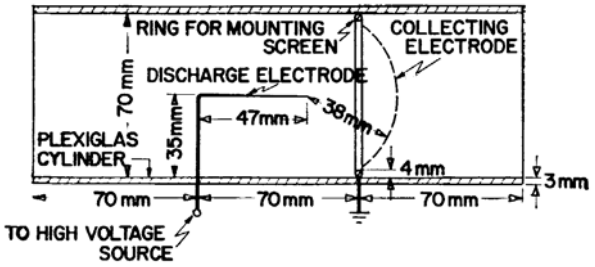


Figure 1.5 – *Schéma du dispositif expérimental utilisé par Robinson [12].*

que les collisions ion-neutre à l'échelle microscopique agissent à l'échelle mésoscopique (volume élémentaire de fluide) de la même manière qu'un gradient de pression, ce qu'il note

$$\nabla p_e = \rho \mathbf{E} \tag{1.3}$$

où p_e désignerait la pression électrostatique exercée sur le fluide et $\rho\mathbf{E}$ la force électrostatique de Coulomb par unité de volume, proportionnelle à la densité volumique de charge ρ et au champ électrique $\mathbf{E}$. Cette notation a le mérite de faire comprendre que le mouvement des ions accélère le fluide environnant en agissant sur l'ensemble du volume inter-électrode d'une manière similaire à un gradient de pression qui repose quant à lieu sur les interactions neutre-neutre. Elle est néanmoins trompeuse car elle peut laisser penser que cette force dérive d'un potentiel p_e et serait donc à rotationnel nul, ce qui est faux dans le cas général. Dans la suite la force exercée par les ions sur l'air sera donc notée

$$f_{EHD} = \rho \mathbf{E}. \tag{1.4}$$

Le reste de l'analyse de Robinson n'en reste pas moins valide. Pour estimer la vitesse du vent ionique, Robinson injecte cette expression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement stationaire du fluide

$$\rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = f_{EHD} \tag{1.5}$$

où ρ_f désigne la masse volumique du fluide. En considérant un cas simplifié unidimensionnel et à force uniforme il obtient une estimation de la vitesse du vent ionique au niveau du collecteur :

$$u = \sqrt{\frac{2d}{\rho_g} f_{EHD}} \tag{1.6}$$

avec d la distance entre émetteur et collecteur. Il apparaît donc que la vitesse du vent ionique u dépend du champ électrique et de la densité de charge. Pour relier l'intensité de cette force à la différence de potentiel V il est intéressant de l'écrire en fonction du flux d'ions, c'est à dire du courant électrique. Pour celà le mouvement des ions est décomposé en un mouvement de convection caractérisé par la vitesse du fluide $\mathbf{u}$ et un mouvement de dérive, *drift*, au sein du fluide. La vitesse de dérive résulte de l'équilibre entre accélération électrostatique et freinage par collisions : $\mathbf{u}_d = \mu \mathbf{E}$, avec μ la mobilité des ions

$$\mu = \frac{q}{m\nu_c} \tag{1.7}$$

m_i la masse des ions, $q = ez_i$ la charge des ions et ν_c la fréquence de collision ion-neutre [13]. La vitesse des ions $\mathbf{u}_i$ s'écrit alors

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \mathbf{u}_d \tag{1.8}$$

et permet de déduire la densité de courant $\mathbf{j} = \rho(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)$. Pour une décharge couronne dans l'air le champ électrique intense, $E \approx 5kV/cm$ ainsi que la grande mobilité des ions, $\mu \approx 1.8 \times 10^{-4}$ $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}.\mathrm{V}^{-1}$, conduisent à des vitesses de dérive d'environ 100 $\mathrm{m.s}^{-1}$ alors que l'écoulement d'air avoisine expérimentalement (Cf Fig. 1.6b), le mètre par seconde. On peut donc en première approximation considérer $u \ll \mu E$. Sur la figure 1.6b Robinson vérifie expérimentalement que pour des vitesses imposées allant jusqu'à 15 m/s le courant électrique reste inchangé. Sous cette hypothèse la densité de courant s'écrit $\mathbf{j} = \rho\mu\mathbf{E}$ et permet d'écrire simplement la force volumique en fonction de la densité de courant :

$$f_{EHD} = \frac{\mathbf{j}}{\mu} \tag{1.9}$$

Dans un cas unidimensionnel la densité de courant s'écrit simplement en fonction du courant total $jA = I$, où A désigne la section de passage des ions. Le courant total généré par la décharge couronne suit assez fidèlement la loi de Townsend [14, 15], dont nous aurons l'occasion de reparler par la suite

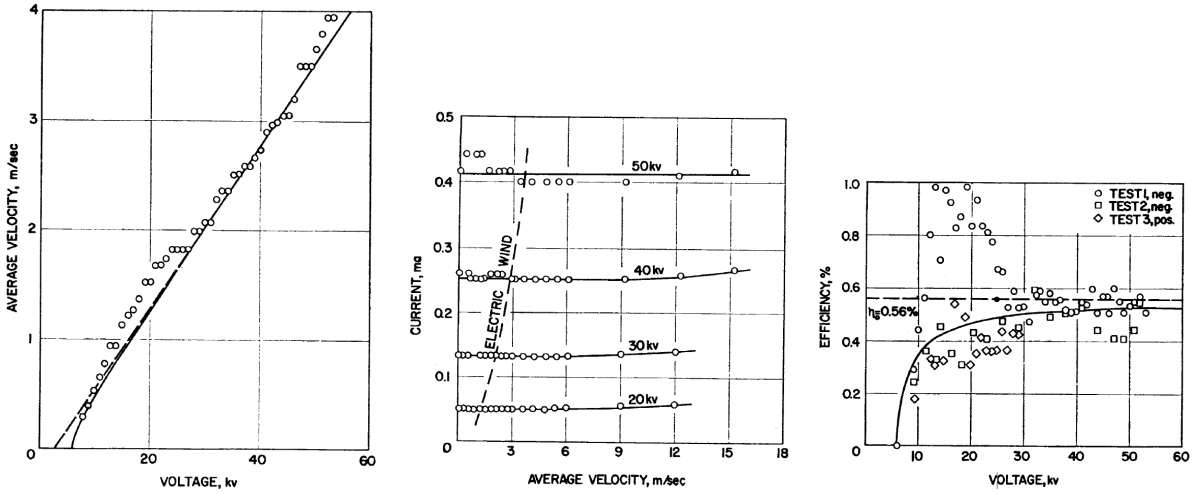
$$I = CV(V - V_0) \tag{1.10}$$

où $C \propto \varepsilon_r \mu$ est une constante semi-empirique proportionnelle à ε_r la permittivité du milieu et à la mobilité des ions et dépendant de la géométrie des électrodes. V_0 est la tension d'allumage de la décharge, qui dépend principalement de la taille de l'électrode émettrice, de la pression et bien sûr du gaz dans lequel la décharge a lieu. En injectant cette loi semi-empirique dans (1.9) puis dans (1.6) on obtient finalement

$$u = \sqrt{\frac{2dC}{\rho_g A} V(V - V_0)} \sim K_{f,g}(V - V_0) \tag{1.11}$$

avec $K_{f,g}$ une constante dépendant du gaz et de la géométrie des électrodes. Cette relation quasi-linéaire se vérifie bien sur la figure 1.6a de Robinson. En définissant l'efficacité du dispositif η comme le rapport entre la puissance transmise au fluide $P_f = 1/2\rho_g A u^3$, A étant la section de sortie du conduit, et la puissance électrique fournie $P_e = VI$ il montre que l'efficacité est de l'ordre de un pour cent pour l'air à pression atmosphérique comme le montre la figure 1.6c.

À la même époque Stuetzer [16] travaille sur la conception de pompes dépourvues de parties mécaniques mobiles. Il évalue théoriquement l'efficacité de ce type de système et montre qu'elle



(a) (b) (c)

Figure 1.6 – *Résultats expérimentaux de Robinson [12].(a) vitesse du vent ionique en fonction de la tension, théorie en trait plein.(b) Courant électrique en fonction de la vitesse du fluide, imposée par la soufflerie. (c) Rendement puissance mécanique/électrique en fonction de la tension.*

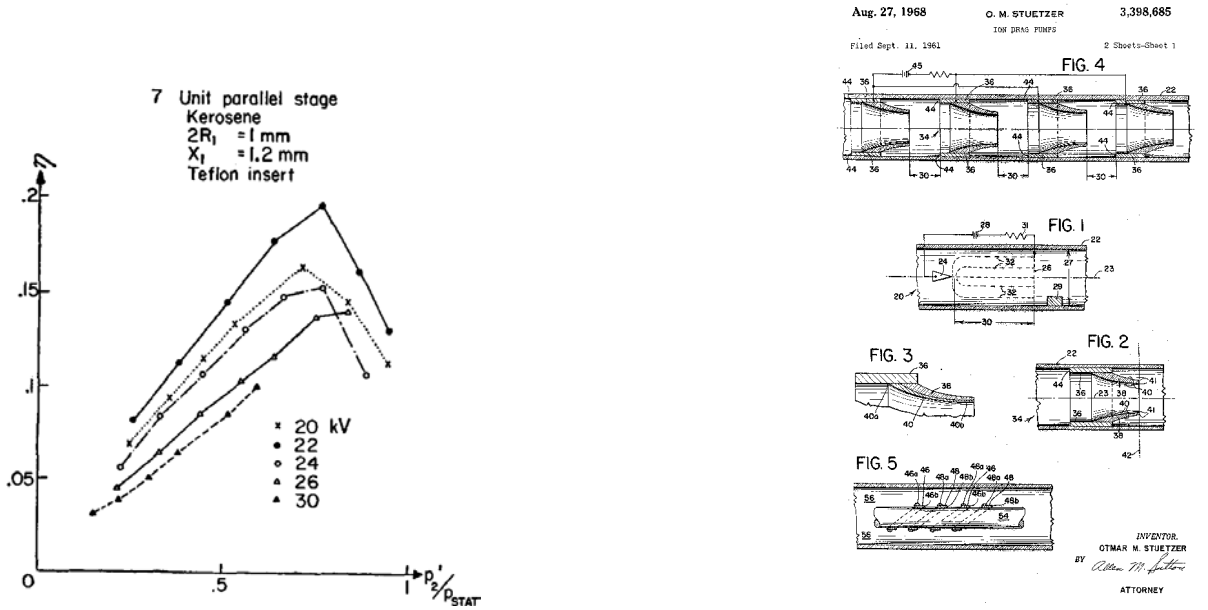
dépend à la fois de la vitesse de *drift* des ions $\mu\mathbf{E}$, de la vitesse du fluide $\mathbf{u}$ et de l'angle entre le champ électrique la direction de l'écoulement $\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$ [17]. Il obtient ainsi une expression du rendement local η, c'est à dire du rapport entre puissance électrique injectée localement et puissance mécanique récupérée par le fluide sous la forme

$$\eta = \frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}|}{|\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}| + |\rho\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|}. \tag{1.12}$$

Cette expression traduit le fait que la puissance transmise au fluide dépend du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{EHD}$. Notamment lorsque le champ électrique est perpendiculaire à la direction de l'écoulement la puissance mécanique est nulle. Inversement cette dernière est maximale lorsque le champ électrique est aligné avec la direction de l'écoulement. En supposant donc en première approximation que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{u}$ sont colinéaires on obtient une expression simplifiée :

$$\eta \approx \frac{u}{u + \mu E} = \frac{u}{u_i} \tag{1.13}$$

Il apparaît que plus la vitesse des ions est proche de celle du fluide, meilleur est le rendement. En particulier la mobilité des ions est un paramètre déterminant. Dans l'air à pression atmosphérique elle est typiquement de 10^{-4} $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}.\mathrm{V}^{-1}$ alors qu'elle est généralement inférieur à 10^{-6} $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}.\mathrm{V}^{-1}$ dans les liquides. Stuetzer [16, 18] explique ainsi que le rendement est bien plus élevé dans les liquides que dans les gaz. La figure 1.7a, obtenu par Stuetzer dans du kérozène peut être comparée à la figure 1.6c obtenu par Robinson dans l'air. Tandis que Stuetzer obtient des rendements de l'ordre de 15% dans le kérozène, Robinson mesure un rendement inférieur à 1% pour le vent ionique. Il est intéressant de noter que Kim *et al.* [20] ont obtenu en 2010 une expression identique à celle de Stuetzer avec une approche différente. Tandis que Stuetzer a une approche type "milieu continu" avec les équations consitutives de l'électro-hydrodynamique, Kim *et al.* partent quant à eux des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie lors des multiples collisions élastiques à l'échelle microscopique. En décrivant le processus de collisions élastiques entre particule Kim montre par ailleurs que le reste de la puissance électrique injectée est dissipée sous forme de chaleur. Les études théoriques concernant l'influence de la vitesse du fluide sur le rendement EHD sont assez rares [21, 22], sans doute à cause du fait



(a) **(b)**

Figure 1.7 – *(a) Rendement expérimental obtenu par Stuetzer [16] dans du kerozen.(b) Extrait d'un brevet [19] pour une pompe EHD.*

que bien souvent les études expérimentales portent sur le vent ionique par décharge couronne, où la vitesse du fluide (quelques mètres par seconde pour l'air) est négligeable devant la vitesse de *drift* des ions (proche d'une centaine de mètres par seconde). Elles mettent en avant une amélioration du rendement avec la vitesse du fluide, comme prédit par l'équation (1.12).

Le faible rendement ainsi qu'une force de pompage assez faible dans les gazs font que les pompes EAD (Electro-AeroDynamique) n'ont pas trouvé immédiatement d'application industrielle. L'électro-hydrodynamique a connu un essor important pour les liquides notamment dans les électro-spray [23] grâce à leurs caractéristiques uniques [24], utilisés dans divers procédés, comme la peinture ou la nano-gravure par exemple.

Les recherches sur le vent ionique n'ont pas cessé pour autant. En aérodynamique tout d'abord, la recherche sur les actionneurs à plasma a connu un essor très important depuis la fin des années 90. Ces actionneurs sont utilisés afin de manipuler la couche limite à la surface d'objets dont on souhaite minimiser la traînée aérodynamique, comme des ailes. De nombreuses configurations ont été testées, qui ne peuvent toutes être détaillées ici. Une configuration simple consiste à poser deux électrodes sur une surface diélectrique afin de contrôler la couche limite se développant sur cette surface [25, 26]. Cette configuration se différencie des dispositifs à vent ionique classiques par la présence de la paroi diélectrique qui modifie d'une part l'écoulement d'air, mais aussi la caractéristique courant-tension de l'actionneur. En effet, l'accumulation de charges piégées sur la surface non conductrice modifie le champ électrique et le courant circulant entre les électrodes. Afin de limiter cette accumulation, la tension entre les électrodes est alternative. Ce type de configuration où les deux électrodes sont placées en surface est limitée par l'apparition d'arc électrique (*spark*) lorsque la tension est trop importante. Dans un second temps, pour retarder le passage à l'arc, des configuration dites à barrière diélectrique (DBD : *Dielectric Barrier Discharge)* ont été testées : l'une des électrodes est alors encapsulée dans le matériaux isolant [27]. Ce type de configuration semble plus favorable au contrôle d'écoulement dans la mesure ou le vent ionique généré peut atteindre des vitesses plus importantes, typiquement 4 m/s. La physique de ce type de décharge est assez complexe, la présence de la paroi

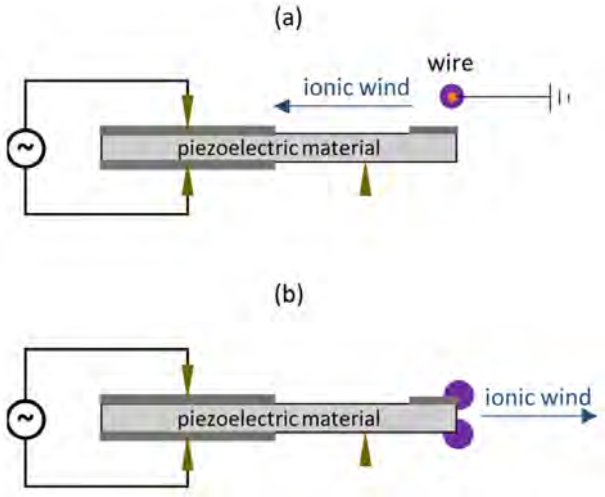


Figure 1.8 – *Amplificateur piézoélectrique appliqué à la génération de vent ionique, d'après Johnson et al. [35].*

diélectrique entre les électrode pouvant mener à la formation de décharges en filaments [28]. A nombre de Reynolds modéré, $Re = u_0 c/\nu \approx 10^5$ avec ν la viscosité cinématique de l'air et c la corde du profil d'aile, il est possible de retarder le décrochage d'une aile aux forts angles d'incidence [27].

Plus récemment, le vent ionique a attiré l'attention dans le domaine de l'électronique, par sa capacité à évacuer la chaleur par convection forcée[29, 30]. La technologie suscite un intérêt pour le refroidissement de diode électroluminescente (LED) de forte intensité [31, 32, 33]. L'absence de partie mécanique mobiles rendent les systèmes EHD très attractifs pour des applications à petite échelle, contrairement aux ventilateurs classiques qui perdent en efficacité à faible nombre de Reynolds. Á l'heure actuelle les ordinateurs ne sont pas équipés de ce type de système, ce qui n'empêche pas certains d'y voir déjà un intérêt commercial [1]. De nombreux travaux portent sur la miniaturisation des systèmes EHD en vue de leur intégration dans des systèmes de faible dimension [34]. La question se pose en particulier de l'intégration d'un amplificateur de tension de dimension réduite. Une réponse pourrait être l'utilisation de transformateurs piézoélectrique comme proposé par Johnson *et al.*[35], qui convertissent directement une basse tension alternative en une haute tension. Le coefficient d'amplification dépend des propriété des coefficients de couplage en vibration extensionnelle et longitudinale (k_{23} et k_{33}) du cristal piézoélectrique

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} \propto k_{23} k_{33} Q \frac{L}{T} \tag{1.14}$$

ainsi que du rapport d'aspect longueur sur épaisseur L/T. Les essais de Johnson, permettent d'atteindre un coefficient d'amplification proche de 1000, ce qui en fait une technologie assez prometteuse.

Enfin, dans le domaine du spatial il est clair que le vent ionique ne peut se produire dans le vide. Cependant l'électro-hydrodynamique pourrait être utilisée pour augmenter les transfert de chaleur dans les conduites contenant un liquide caloporteur. En l'absence de gravité la convection naturelle due aux instabilités de Rayleigh-Bénard ne peut avoir lieu dans ces conduites, ce qui conduit à un amoindrissement de l'efficacité des échangeurs de chaleurs utilisés pour réguler la température des satellites. Des expériences menées en vol zéro-G montrent que la convection forcée par EHD peut être une solution pour augmenter l'échange de chaleur [36].

1. Ventiva, www.ventiva.com, consulté en mai 2018.

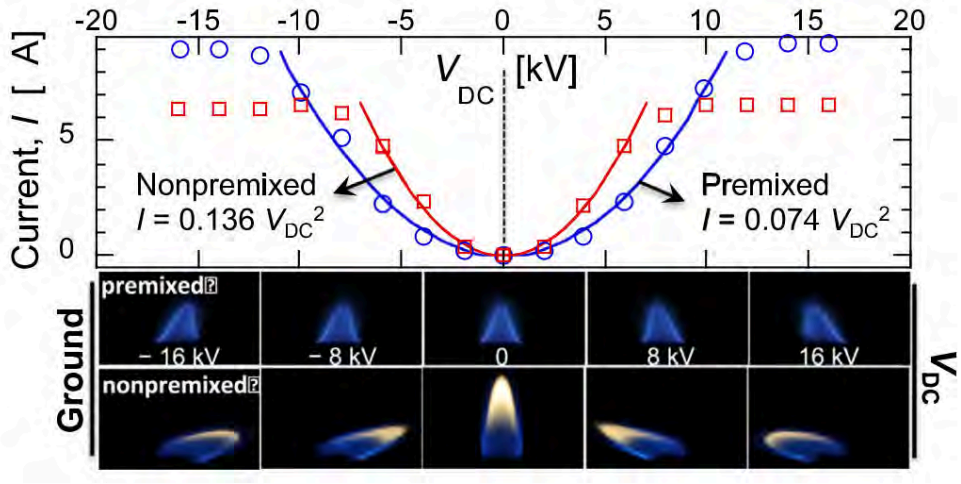


Figure 1.9 – *Caractéristique courant-tension d'une flamme soumise à un champ électrique d'après Park [39].*

D'autres applications comme le séchage de denrées alimentaires sont également à l'étude, le vent ionique permettant de sécher les aliments sans les porter à haute température [37]. Enfin il est intéressant de noter que dans la plupart des dispositifs à vent ionique, la décharge électrique est le moyen utilisé pour charger électriquement le volume d'air. D'autres mécanismes de génération de charges, peuvent néanmoins être employés, comme la combustion par exemple. Kuhl *et al.* [38], et d'autres avant eux, ont mesuré au moyen de diagnostiques lasers avancés l'influence du champ électrique sur les différentes caractéristiques d'une flamme laminaire. De manière plus visuelle, figure 1.9, Park *et al.*[39] montrent qu'un champ électrique transversal modifie l'inclinaison d'une flamme par effet de dérive des espèces chargés positivement. On remarquera l'évolution quadratique du courant avec la tension avant d'atteindre un régime de saturation.

1.1.3 Vers une application à la propulsion EHD ?

Il faut bien admettre que l'idée d'avoir un système propulsif électrique sans aucune partie mécanique mobile a de quoi séduire. La propulsion Electro-HydroDynamique (EHD), ou plutôt Electro-AéroDynamique (EAD), propose une manière simple, non polluante et silencieuse de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique par l'intermédiaire d'un processus de transfert de quantité de mouvement des ions vers l'air ambiant. Le tableau historique dressé précédemment montre que le sujet n'est pas nouveau et que les essais précédents n'ont pas aboutis. Alors pourquoi s'y intéresser à nouveau ? Plusieurs raisons peuvent être avancées, à la fois commerciales et scientifiques.

Tout d'abord le besoin de nouveaux moyens de propulsions, aussi bien pour le secteur spatial que pour le secteur aéronautique. On assiste en effet à une électrification progressive des avions et à l'émergence de la propulsion tout électrique pour les satellites commerciaux, comme en atteste la nouvelle génération de satellites géostationnaires électriques : EUTELSAT 115 West B (Boeing) lancé en 2015 puis EUTELSAT 172B (Airbus) lancé en 2017 [40] en sont les premiers exemples. Cependant il est complètement irréaliste d'envisager la propulsion EHD pour des avions commerciaux type A320 (trop faible poussée) ou pour de la propulsion satellite dans le vide (le vent ionique a lieu en présence d'une atmosphère).

En revanche on assiste en parallèle à l'émergence de nouvelles solutions où le secteur spatial et aéronautique se rejoignent. Le récent succès en 2016 de Solar Impulse montre le potentiel

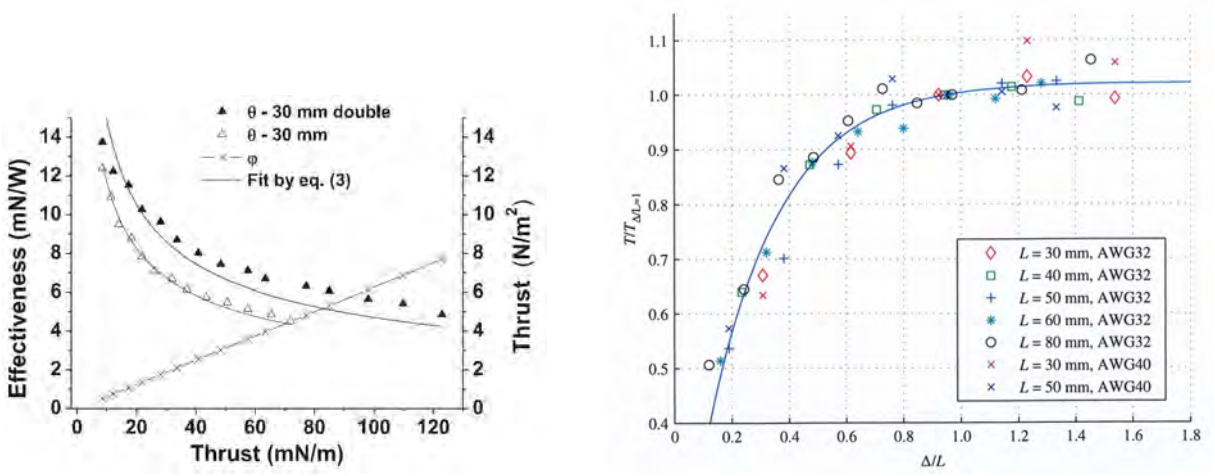
encore peu exploré des aéronefs ultra-légers à énergie solaire, tout comme le projet américain Hélios en 2001. Du côté commercial, on explore des solutions moins onéreuses que les satellites pour fournir un accès à internet ou pour l'observation terrestre. En particulier, de grandes entreprises envisagent d'utiliser des drones solaires pour l'observation (drone Zephyr d'Airbus) ou les télécommunications (drone Aquila de Facebook ou le projet Skybender de Google finalement abandonné). D'autres solutions à base de ballons dirigeables sont aussi envisagées (ballon Stratobus de Thales Alenia Space). Difficile de savoir si ces projets ont une de chance de s'imposer, face aux futures constellations de micro-satellites notamment. Toujours est-il que des démonstrateurs existent et qu'il semble y avoir un réel intérêt commercial pour ce type de plateformes.

Dans ce contexte, la propulsion EHD peut avoir un intérêt, et des études de faisabilité commencent à voir le jour [41]. Elles se heurtent à notre faible connaissance scientifique dans ce domaine. Jusqu'en 2010, en dehors des travaux de Christenson & Moller en 1967 [4] de Tajmar [8] ou du rapport de la NASA [10], il existait peu d'études quantifiant les performances des systèmes EHD. De récents travaux expérimentaux ont ramené le sujet sur la scène scientifique. En 2013, une équipe américaine Masuyama & Barrett [42] annoncent avoir mesuré un rapport poussé/puissance (notée Θ) allant jusqu'à 110 N/kW, contre 3 N/kW pour un turboréacteur classique. Le paramètre Θ est essentiel pour un système propulsif car il détermine la consommation énergétique du système pour une poussée donnée. Pour la construction d'un avion en particulier, c'est lui qui détermine la quantité de carburant/batterie et donc la masse supplémentaire à embarquer. La comparaison entre système thermique et électrique est quelque peu aventureuse sur la base de ce seul critère car en pratique les carburants fossiles ont une densité énergétique (J/kg) plusieurs dizaines de fois plus importante que les batteries actuelles [43]. De plus les mesures de Masuyama & Barrett n'ont pas été reproduites à ce jour, nous en discutons au chapitre suivant. Cependant la même année Moreau *et al.* [44] publient les résultats d'une étude expérimentale poussée mettant en avant l'influence des principaux paramètres géométriques : distance entre émetteur et collecteur (d), rayon du collecteur (r_c), polarité, forme de l'émetteur. Le vent ionique mesuré par tube de Pitot atteint environ 2 m/s au niveau du collecteur, pour une poussée de 44 mN/m dans cette configuration. L'efficacité Θ atteint au plus 20 N/kW, pour de faibles distances inter-électrodes. Cette étude paramétrique constitue un socle solide qui met en avant l'effet non négligeable de la taille du collecteur, qui est pourtant une électrode passive. Ce dernier effet est confirmé par une étude similaire conduite indépendamment en 2014 [45]. Dans une étude ultérieure, Moreau *et al.* [46] identifient la traînée aérodynamique due au collecteur comme un mécanisme causant une diminution sensible des performances. En utilisant deux collecteurs ils obtiennent une poussée plus élevée pour un même courant électrique, figure 1.10 (a).

De l'autre côté de l'atlantique Gilmore & Barret [47] étudient la mise en parallèle de plusieurs paires d'électrodes. Leurs résultats montrent qu'il existe une distance minimale en dessous de laquelle les interactions entre pairs d'électrodes détériorent la poussée, figure 1.10 (b). De plus en 2017 la même équipe propose un modèle pour évaluer les performances de ce type de système en haute altitude[48] un peu comme Pekker *et al.* [49] avant eux. Une approche purement électrohydrodynamique est adoptée et la physique de la décharge est introduite au moyen de lois empiriques comme la formule de Peek.

1.2 Origine des forces électro-hydrodynamiques

Cette section traite de l'origine de la force EHD, en partant de l'échelle atomique jusqu'à l'échelle macroscopique.



(a) **(b)**

Figure 1.10 – *(a) Amélioration de l'efficacité* Θ *pour une configuration double collecteur, Moreau et al. [46]. (b) Effet de l'écartement relatif entre deux paires d'électrodes mises en parallèle sur la poussée, Gilmore & Barrett [47].*

1.2.1 Approche microscopique

Pour comprendre l'origine de cette force, il faut se placer à l'échelle microscopique des molécules du gaz. Par défaut les gaz sont électriquement neutres, c'est à dire qu'ils contiennent une quantité très négligeable de charges électriques sous forme d'ions ou d'électrons libres. En revanche sous des conditions de fort champ électrique, des phénomènes d'ionisation surviennent et injectent de grandes quantités de particules chargées au sein du gaz. Quel que soit le processus d'injection de ces particules, ions ou électrons, elles sont fortement accélérées dans la direction imposée par le champ électrique appliqué par les électrodes. En parcourant le chemin qui sépare les électrodes, les particules chargés entrent en collision avec les molécules neutres du gaz et, en moyenne statistique, "poussent" ces dernières dans la direction du champ électrique appliqué. Lors de chaque collision, supposée élastique, une particule chargée de masse m_p voit sa vitesse changer d'une quantité $\Delta\mathbf{u}_p$ tandis que la particule neutre, de masse m_n, voit sa vitesse modifiée d'une quantité $\Delta\mathbf{u}_n$. La conservation de la quantité de mouvement du système global permet alors d'établir $m_n\Delta\mathbf{u}_n = -m_p\Delta\mathbf{u}_p$. En considérant la fréquence moyenne des collisions particule-neutre ν_{pn} et en sommant la contribution de chaque collision sur un petit volume élémentaire de fluide $\mathrm{d}\mathcal{V}$, on obtient

$$f_{p\to n} = -\frac{1}{\mathrm{d}\mathcal{V}}\sum_{\mathrm{d}\mathcal{V}} \nu_{pn} m_p \Delta\mathbf{u}_p \tag{1.15}$$

qui n'est autre que la force par unité de volume exercée par les particules chargées sur les neutres. De plus, entre chaque collision une particule possédant une charge q est soumise à la force de Coulomb $q\mathbf{E}$ pendant une durée $1/\nu_{pn}$ ce qui lui fait gagner une quantité de mouvement $q\mathbf{E}/\nu_{pn}$. On fait à présent l'hypothèse que les particules chargées évoluent en moyenne à une vitesse constante. C'est à dire qu'en moyenne la somme des accélérations liés au champ électrique et des décélérations lors des collisions est nulle, ce qui s'écrit formellement $m_p\sum_{\mathrm{d}\mathcal{V}}\Delta\mathbf{u}_p = -\sum_{\mathrm{d}\mathcal{V}} q\mathbf{E}/\nu_{pn}$. En injectant cette hypothèse dans (1.15) on obtient finalement

$$f_{p\to n} = \frac{1}{\mathrm{d}\mathcal{V}}\sum_{\mathrm{d}\mathcal{V}} q\mathbf{E} = \rho\mathbf{E} \tag{1.16}$$

où ρ désigne la densité de charge par unité de volume. Dans les liquides, le processus d'injection de charge ainsi que le mode de déplacement des ions sont sensiblement différents. L'expression de la force EHD reste cependant inchangée, à condition qu'il n'y ait pas de forte variation de la permittivité diélectrique ε.

1.2.2 Approche thermodynamique, tenseur des contraintes

De manière générale, la force électrique par unité de volume s'exerçant sur un milieu diélectrique est donnée par la formule de Korteweg-Helmholtz[50].

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla\left[\left(\varepsilon - \rho_f \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_f}\bigg|_T\right)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right] \tag{1.17}$$

où ε désigne la permittivité diélectrique du fluide et ρ_f la masse volumique du fluide. Cette formule peut s'obtenir par le principe des travaux virtuels appliqué à un volume élémentaire de fluide, comme proposé par Landau [51]. Il s'agit de la somme des forces de Coulomb et des forces pondéromotives liées aux inhomogénéités de ε. Dans les gaz à pression atmosphérique la permittivité varie très peu et reste proche de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Fa.m^{-1}, ce qui explique que les forces pondéromotives soient négligées.

1.2.3 Approche par bilan de quantité de mouvement

En 2005 Boeuf & Pitchford [52] se sont penchés sur l'origine des forces dans un plasma collisionnel et en particulier sur le cas des décharges DBD. Ils considèrent pour cela le cas canonique d'une décharge à deux espèces : des ions positifs et des électrons. De manière générale, l'équation de quantité de mouvement stationnaire d'une espèce k ($k = i, e$ pour les ions et les électrons respectivement) s'écrit

$$\nabla\cdot(n_k m_k \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k) + \nabla\cdot\mathbb{P}_k \pm e n_k\mathbf{E} = \underbrace{-n_k m_k \nu_{kn}\mathbf{u}_k}_{\mathbf{f}_{n\to k}} \tag{1.18}$$

avec $\mathbb{P}_k = n_k k_B T_k \mathbb{I}$ le tenseur de pression et ν_{kn} la fréquence de collision de l'espèce k avec les neutres. Le terme $\mathbf{f}_{n\to k}$ représente la force moyenne exercée par les neutres vers l'espèce k par l'intermédiaire des collisions. Cette force est de direction opposée à la vitesse moyenne de l'espèce k. La force totale exercée par les espèces chargées sur les neutres s'obtient en sommant les équations de quantité de mouvement de chaque espèce

$$f_{i,e\to n} = (n_i - n_e)e\mathbf{E} - \nabla\cdot(n_i m_i \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e\mathbf{u}_e) - \nabla(n_i k_B T_i) - \nabla(n_e k_B T_e). \tag{1.19}$$

Le premier terme correspond à la force de Coulomb, le second correspond à l'inertie des ions et des électrons, tandis que le dernier correspond au gradient de pression partielle des espèces chargées. Pour évaluer l'importance relative de chaque terme, l'expression précédente est adimensionalisée de sorte à ce que le terme de Coulomb pour les électrons soit pris égal à 1. De plus la vitesse des particules est supposée égale à la vitesse de dérive $u_k \approx \mu_k E$.

$$\frac{f_{i,e\to n}}{n_e e E} \approx \left(\frac{n_i}{n_e} - 1\right) - \left(\frac{n_i m_i \mu_i^2 E}{n_e e L_0} + \frac{m_e \mu_e^2 E}{e L_0}\right) - \left(\frac{n_i k_B T_i}{n_e e E L_0} + \frac{k_B T_e}{e E L_0}\right) \tag{1.20}$$

La longueur L_0 est une échelle caractéristique choisie pour adimensionaliser les dérivées spatiale. Dans le cas d'une décharge couronne on prendra la plus petite échelle disponible afin de ne pas sous-estimer les gradients, à savoir le rayon de courbure de l'électrode émettrice : $L_0 \approx 10$ μ m. Le champ électrique varie fortement, mais en accord avec l'échelle des longueurs on prendra le

champ électrique à la surface de l'émetteur $E \approx 10^7$ V/m. La masse des ions dans l'air est de même ordre que celle d'une molécule de diazote N_2 $m_i \approx 10^{-26}$ kg.

$$\frac{f_{i,e\to n}}{n_e e E} \approx (\frac{n_i}{n_e} - 1) - (\frac{n_i}{n_e} \cdot 10^{-3} + 10^{-3}) - (\frac{n_i}{n_e} T_i \cdot 10^{-6} + T_e 10^{-6}) \tag{1.21}$$

Dans un gaz ionisé lors d'une décharge la température des ions est à peu près la même que celle des neutres alors que celle des électrons se compte en dizaine de millier de Kelvin $T_e \approx 10^4$ K. Pour la décharge couronne positive, la concentration maximale en ions positifs est environ cent fois plus importante que la concentration en électrons : $n_i/n_e >> 1$ dans la zone de drift. Le terme de Coulomb est donc très largement majoritaire dans la majeure partie du volume inter-électrodes. Il est cependant possible que dans la zone proche de l'émetteur, où la concentration en ion chute, les autres termes puissent devenir non négligeable vis-à-vis de la force de Coulomb, mais leur intensité reste faible. Il est donc tout à fait raisonnable de ne garder que le terme de Coulomb pour estimer la force totale subie par les neutres dans le volume inter-électrode.

$$f_{i,e\to n} \approx (n_i - n_e)E. \tag{1.22}$$

1.3 Plasmas et décharges électriques dans un gaz

1.3.1 Physique des décharges

Le plasma se différencie des autres états de la matière par la présence d'espèces chargés. Un plasma peut être à l'équilibre thermodynamique, ou hors équilibre et il peut être dit "chaud" ou froid. Le plasma est dit chaud si toutes les espèces (électrons, ions et neutres) ont une température élevée, typiquement quelques milliers de degrés Kelvin. En revanche il est dit "froid" si seuls les électrons ont une température élevé mais que les autres espèces sont à des températures modérés. Ici la température est à comprendre au sens de l'énergie d'agitation thermique, comme le second moment de la fonction de distribution des vitesses.

1.3.2 La décharge couronne

La décharge couronne est un type de décharge électrique se produisant autour d'électrodes à faible rayon de courbure. Elle se caractérise par une zone de forte ionisation proche de l'émetteur. Dans un gaz le principal processus d'ionisation est celui par impact électronique caractérisé par le coefficient $\alpha(E/N)$.

$$e^- + A \to A^+ + 2e^- \tag{1.23}$$

Ce coefficient dépend fortement du champ électrique réduit E/N, N étant le nombre de molécule par unité de volume du gaz. Il donne la probabilité de collision ionisante d'un électron par unité de distance parcourue. Dans le cas des décharges électriques $N \gg n_e$, les collisions entre particules chargées sont donc négligées vis-à-vis des collisions avec les neutres. A partir du libre parcours moyen des électrons, et de l'énergie d'ionisation du gaz [53] il est possible de trouver une expression analytique de ce coefficient.

$$\alpha(E/N) = BN \exp\left(-\frac{A}{|E|/N}\right) \tag{1.24}$$

où N désigne la densité de neutres et B et A sont des coefficients propres au gaz considéré. Les électrons peuvent aussi s'attacher à une molécule initialement neutre et former un ion négatif

$$e^- + A \to A^-. \tag{1.25}$$

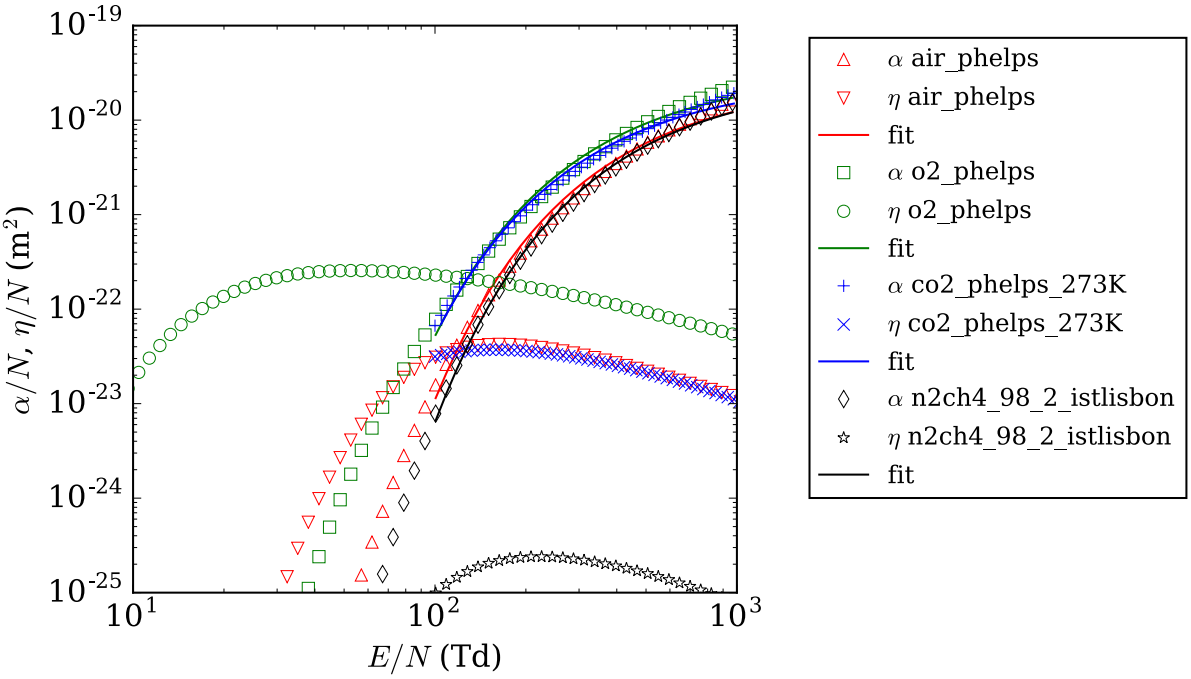


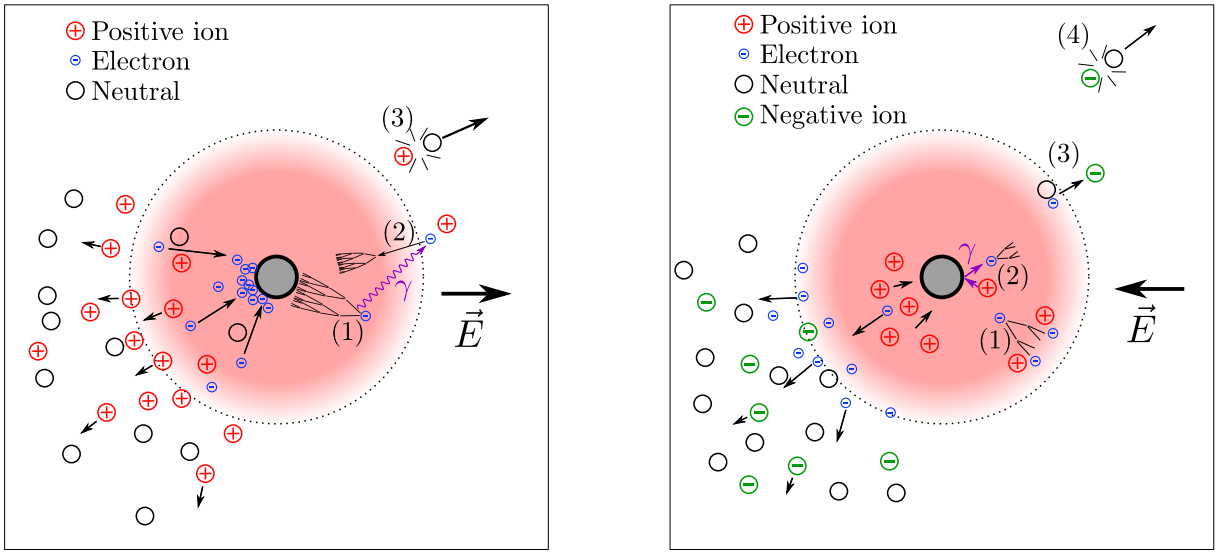
Figure 1.11 – *Coefficient d'ionisation et d'attachement en fonction du champ électrique, calculés par le logiciel Bolsig+[54], (LAPLACE, Toulouse).*

Cette dernière réaction est caractérisée par le coefficient d'attachement η qui dépends lui aussi du champ électrique réduit. Les évolutions de ces deux coefficients sont tracées à titre indicatif sur la figure 1.11 pour différents gaz. De manière générale pour $E/N \gtrsim 100$ Td le coefficient α domine très largement le coefficient η. Dans le cas d'une décharge couronne, le champ électrique est maximal près de l'électrode émettrice puis décroît rapidement en $1/r$ en géométrie cylindrique (fil), ou $1/r^2$ en géométrie sphérique (pointe). Avec une approche de type milieux continus, l'équation de conservation des électrons s'écrit

$$\nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = (\alpha - \eta) n_e |u_e|. \tag{1.26}$$

Une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour que la décharge couronne puisse se former est que le champ électrique soit suffisamment élevé, de sorte que $\alpha - \eta > 0$. De cette manière, un électron primaire pourra créer une avalanche électronique par réaction en chaîne, étape (1) voire figure 1.12. Cette avalanche génère des ions positifs et des électrons. Dans le cas d'une décharge couronne positive, ces ions sont accélérés vers l'extérieur de la décharge. Sur leur trajet jusqu'à l'électrode collectrice (non représentée) ils échangent de la quantité de mouvement avec les neutres par collisions élastiques, étape (3). Dans une décharge couronne négative, le champ électrique est dirigé vers l'émetteur. Les ions positifs sont attirés par l'émetteur tandis que les électrons s'en éloignent. En s'éloignant de l'émetteur, l' intensité du champ électrique diminue jusqu'à ce que l'attachement électronique finisse par dominer l'ionisation par impact : $\alpha - \eta < 0$. Les électrons s'attachent aux neutres, étape (3), pour former un nuage d'ions négatifs qui migrent vers le collecteur et collisionnent avec les neutres, étape (4).

Cependant à ce stade la décharge s'éteindra en l'absence d'autres électrons primaires pour l'alimenter. En vérité, il existe d'autres réactions au sein de la décharge qui permettent d'expliquer qu'elle "survive" sans s'allumer et s'éteindre constamment à chaque passage d'un électron libre à la manière d'un compteur Geiger.



(a) **(b)**

Figure 1.12 – *Décharge couronne (a) positive et (b) négative.*

Critère d'allumage

Quelques électrons sont naturellement présent dans l'air grâce aux rayonnements ionisants comme la radioactivité naturelle ou les rayons cosmique, mais leur taux de création n'est pas suffisant pour entretenir la décharge couronne. En réalité, de nombreuses autres réactions peuvent avoir lieu au sein d'une décharge couronne : excitation/désexcitation d'états métastables, recombinaison entre deux ions de polarités opposés et photo-ionisation pour n'en citer que quelques une. Morrow [55] propose un modèle numérique à quatre espèces (électrons, ions positifs/négatifs et métastables) et met en avant l'influence des réactions secondaires sur la stabilité de la décharge. Ces réactions, bien qu'elles génèrent assez peu d'électrons ou d'ions comparés à l'ionisation par impacte électronique, sont un élément clef dans la vie d'une décharge.

Certaines de ces réactions secondaires génèrent des électrons dit secondaires, suite à une avalanche primaire, qui, à leurs tours déclenchent des avalanches secondaires et ainsi de suite. Ce processus est schématisé par l'étape (2) de la figure 1.12. Le type de réaction secondaire impliquée reste aujourd'hui encore discuté. De manière générale il semble communément admis que, pour les décharges positives, la photo-ionisation est la principale source d'électrons secondaire alors que pour les décharges négative il s'agit de l'arrachement d'électrons à la surface de l'anode par bombardement ionique.

Quelque-soit la réaction impliquée, toujours est-il qu'une avalanche électronique secondaire se forme et vient entretenir la décharge.

Ce mécanisme peut se résumer plus formellement de la manière simplifiée suivante, en s'inspirant des travaux de Naidis [56] et Zheng [57, 58]. On note $N_1 = \int(\alpha - \eta)N_e(r)$ le nombre de collisions ionisantes générés par un électron primaire et l' avalanche qui en découle. Chaque électron secondaire, indexé k, provoque une avalanche secondaire que génère $N_{2,k}$ électrons. Pour que la décharge soit auto-entretenue il faut que le nombre d'électrons générés par les avalanches secondaires soit au moins égal au nombre d'électrons générés par l'avalanche primaire. La condition nécessaire et suffisante d'auto-entretient s'écrit donc

$$\sum_k N_{2,k} = N_1. \tag{1.27}$$

Pour simplifier davantage ce critère on introduit γ la probabilité qu'une collision primaire engendre une réaction secondaire. Une avalanche primaire génère donc en moyenne γN_1 électrons secondaires. On fait de plus l'hypothèse qu'une avalanche secondaire a la même intensité qu'une avalanche primaire : $N_{2,k} = N_1$. Pour une décharge négative c'est une hypothèse qui semble raisonnable dans la mesure où les électrons secondaires sont générés au niveau de l'anode, c'est à dire en amont de la zone de décharge. En revanche pour une décharge positive c'est plus discutable : la photo-ionisation peut générer des électrons aussi bien en dehors de la zone de décharge qu'à l'intérieur.

Le critère d'allumage devient alors :

$$\gamma N_1 = 1 \tag{1.28}$$

On fait l'hypothèse que le champ de vitesse $\mathbf{u}_e$ tel que $\mathbf{j}_e = n_e \mathbf{u}_e$ est à divergence nulle. Comme nous le verrons au chapitre 4, c'est une bonne approximation près de l'émetteur. L'équation (1.26) prise dans un cas unidimensionnel (symétrie sphérique ou cylindrique) peut alors s'exprimer en fonction du nombre d'électrons $N_e(r)$ à la position r dans une avalanche :

$$\frac{dN_e}{dr} = (\alpha - \eta) N_e. \tag{1.29}$$

En notant r_c le point de départ de l'avalance, on calcule le nombre $N_e(r)$ générés par un électron primaire $N_e(r_c) = 1$

$$N_e(r) = \exp\left(\int_r^{r_c} (\alpha - \eta) \mathrm{d}r'\right) \tag{1.30}$$

En injectant cette expression dans (1.28) on obtient alors une forme approchée du célèbre critère de Townsend [14] :

$$\int_{r_e}^{r_c} (\alpha - \eta) \mathrm{d}r = -\ln(\gamma) \tag{1.31}$$

où r_e et r_c désignent le rayon de l'émetteur et la limite extérieure de la zone de décharge, souvent définie par la position où le champ électrique est tel que $\alpha - \eta = 0$. Les coefficients α, η ne dépendent que du gaz et du champ électrique tandis que γ dépend principalement du gaz ou du matériau de l'anode[53, 59]. Le critère (1.31) est une condition sur le champ électrique, en fonction du rayon de l'émetteur et du gaz, pour que la décharge soit auto-entretenue.

De manière beaucoup plus empirique, la loi de Peek [60] donne le champ électrique critique dans l'air à la surface de l'émetteur en fonction de son rayon r_e

$$E_s = 3.1 m \delta \left(1 + \frac{0.0308}{\sqrt{\delta r_e}}\right) \tag{1.32}$$

avec m un facteur empirique de rugosité [53] et δ la densité relative de l'air par rapport aux conditions standard de pression et de température. Cette loi semi-empirique, peut être vue comme une approximation du critère de Townsend, dans le cas où $\alpha - \eta$ est supposé varier de manière quadratique avec le champ électrique [61, 62].

1.3.3 Instabilités dans les décharges couronnes

La description précédente de la décharge couronne ne tient pas compte du caractère parfois instationnaire et inhomogène des décharges couronnes. Dans le cas de la décharge couronne négative, le courant moyen semble constant s'il est mesuré avec un ampèremètre continue. Mais en regardant de plus près avec un oscilloscope, des pulses de courant nommés "pulses de Trichel", apparaissent. De même, sous certaines conditions pour la décharge positive [55]. Par ailleurs ces décharges peuvent présenter de fortes inhomogénéités spatiales. C'est notamment le cas pour

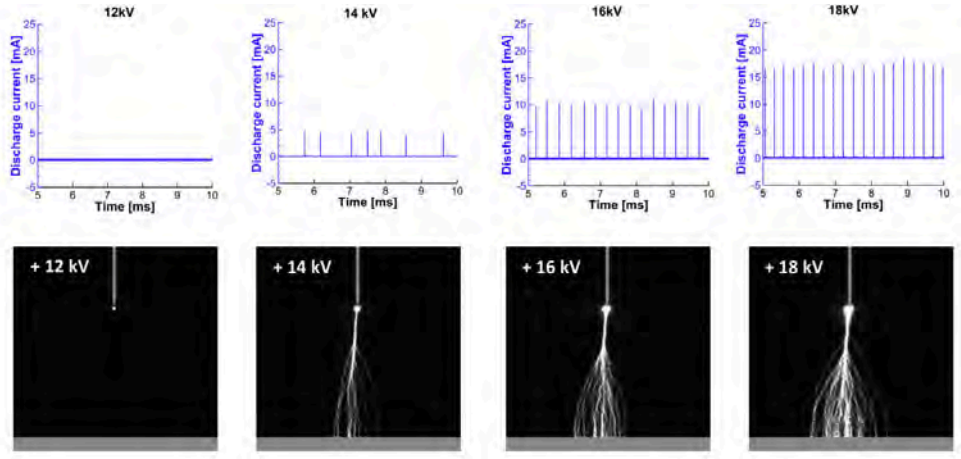


Figure 1.13 – *Streamer dans une décharge positive pour une configuration pointe-plan d'après Moreau [64].*

le régime de *streamer*. Les *streamers* sont des ondes d'ionisation se propageant à très grande vitesse entre les électrodes et laissant dans leur sillage un canal ionisé de quelques dizaine de micromètres. Les simulations de Morrow *et al.* montrent le caractère pulsé [55] et inhomogène des *streamer* [63]. Les images iCCD et les mesures de courant réalisées par Moreau *et al.*[64], figure 1.13 en sont une illustration expérimentale.

1.3.4 Courant de décharge

Dans le cadre de l'électro-hydrodynamique, la recherche du flux moyen d'ions est cependant suffisante pour déterminer le forçage électro-hydrodynamique. De récents travaux conduits par Park *et al.* [65] ont permis d'estimer l'importance relative de la force EHD totale exercée par la charge d'espace moyenne et la force due aux canaux d'ionisation des *streamer*. Leur conclusion indique que la force des *streamer* est en moyenne temporelle d'intensité très faible à cause de leur faible durée de vie. En revanche la contribution de la charge d'espace est beaucoup plus importante, car bien que d'intensité moindre, elle agit sur un grand volume et de manière stationnaire. Du moins pour les décharges en volume comme la décharge couronne. Pour d'autres types de décharges (DBD) la dynamique peut être plus complexe [66].

On s'intéresse donc à la composante continue du courant électrique entre les électrodes. Le courant total pouvant circuler entre deux électrodes est limité par la tension appliquée et la charge d'espace ("Space-charge limited flow"). En d'autres termes, les ions créés dans la zone de décharge décrite précédemment vont s'accumuler dans l'espace entre le collecteur et l'émetteur, appelée «zone de drift». L'accumulation de charge va modifier la distribution de potentiel électrique et en particulier diminuer l'intensité du champ électrique dans la zone de décharge. Or, la quantité d'ions générée dépend fortement de l'intensité du champ électrique dans la zone de décharge. Le flux d'ion maximal pouvant circuler entre les électrodes est donc un compromis entre ionisation et répartition des charges dans l'espace.

Dans le cas limite de deux électrodes planes parallèles, la loi de Mott-Gurney [47] donne la densité de courant maximale pouvant circuler entre les électrodes séparées d'une distance d avec une différence de potentiel V_a. Cette limite est donnée par la condition de champ électrique nul sur l'électrode où les charges sont injectées

$$j_{E_0=0} = \frac{9}{8}\mu\epsilon_r\frac{V_a^2}{d^3} \tag{1.33}$$

avec ε_r la permittivité de l'air et μ la mobilité des ions. En pratique cette limite n'est jamais

atteinte, puisque l'injection de charges ne peut avoir lieu que pour un champ électrique non nul. C'est pourquoi Gilmore & Barret [47, 48] propose une version légèrement modifiée de cette loi prenant en compte $E_0 \neq 0$

$$V_a = \left(\frac{\mu_p \epsilon_r E_0^2}{3j} + \frac{2d}{3} \right) \sqrt{E_0^2 + \frac{2jd}{\mu\epsilon}} + \frac{\mu_p \epsilon_r E_0^2}{3j}. \tag{1.34}$$

Cette relation entre V_a et j donne l'évolution du courant limite, en prenant en compte l'effet de charge d'espace sur la distribution du potentiel entre les électrodes.

Dans le cas de la décharge couronne, la géométrie des électrodes n'est pas plane. La loi de Townsend [14, 15], initialement dédiée aux géométrie cylindrique axisymétrique pour des électrodes de type fil-cylindre, est très souvent utilisée

$$I = CV(V - V_0). \tag{1.35}$$

Le courant suit une évolution quadratique à partir du point V_0 correspondant à la tension d'allumage. Ce point est atteint lorsque le champ électrique à la surface de l'émetteur atteint le champ électrique critique d'auto-entretient (aussi appelé «champ d'allumage») de la décharge discuté précédemment. D'un point de vue expérimental cette loi s'avère satisfaisante pour décrire l'évolution du courant même pour des géométries non axisymétriques. En effet, elle a le bon goût d'être un polynôme d'ordre 2 dont les coefficients V_0 et C peuvent être choisis de manière adéquate.

D'un point de vue théorique cette loi est plus discutable. En effet, il ne s'agit que d'une approximation valable pour de faibles courants d'après Townsend. D'après Sigmond [67] dans le cas axisymétrique fil-cylindre concentriques, le coefficient C peut être obtenu analytiquement

$$C_{cyl} = \frac{8\pi\mu\varepsilon_r}{L^2 \ln(L/a)}. \tag{1.36}$$

Des tentatives plus récentes pour redémontrer cette loi donnent des résultats parfois différents. Dans son livre, Roth [53] propose une démonstration en partant de l'équation de Laplace pour le potentiel et de la conservation du flux d'ion. Il remarque qu'en négligeant certains termes dans les solutions obtenus il obtient une expression très similaire à (1.35) sauf que son coefficient C est inférieur d'un facteur 2 à celui de Sigmond (1.36). En suivant une démarche analytique similaire, puis en linéarisant les solutions, Feng [68] obtient quant à lui une évolution linéaire du courant avec la tension aux faibles courants ce qui le conduit à douter du bien fondé de cette loi.

La justification théorique de la loi de Townsend n'est donc pas si évidente, et elle n'apparaît pas explicitement dans les articles de Townsend en 1914 [14]. Elle sera à nouveau discuté dans les chapitres suivant, en particulier dans la section 4.2.

1.4 Objectifs et plan

Le vent ionique est un phénomène relativement simple à expliquer, mais difficile à modéliser. En particulier le couplage entre le flux d'ions dans la zone de *drift* et la zone d'ionisation de la décharge couronne rend la compréhension fine du phénomène beaucoup plus ardue.

Il est en particulier difficile de prédire, même approximativement, l'influence de la géométrie des électrodes sur le courant de décharge. La force EHD étant reliée au courant électrique, elle est par conséquent difficilement imprévisible.

L'objectif de cette thèse est donc d'établir une compréhension plus fine des phénomènes, afin de mieux évaluer les potentielles applications du vent ionique en général, et à la propulsion en particulier.

Pour cela une approche expérimentale a été menée de front avec des analyses théoriques et numériques, afin mieux appréhender la modélisation du vent ionique par une meilleure compréhension de la physique de la décharge couronne.

Le travail mené dans le cadre de cette thèse peut-être découpé en quatre grands axes :

— Une évaluation expérimentale de la poussée sur de nombreuses configurations simples de référence, et l'estimation des conséquences applicatives pour la propulsion d'aéronefs légers décrite au chapitre 2.

— Une analyse approfondie de l'écoulement dans la zone de *drift* pour ces configurations de référence grâce à des mesures expérimentales par *Particule Image Velocimetry* (PIV) couplée à l'établissement d'une formule théorique générale de la force propulsive développée au chapitre 3. Cette formule générale nécessite cependant de connaitre le courant total de la décharge, c'est à dire la caractéristique courant-tension. Or cette caractéristique dépend fortement de la géométrie des électrodes et nécessite de modéliser la décharge couronne.

— L'analyse théorique (en géométrie axisymétrique) du couplage entre décharge couronne et zone de *drift* au moyen d'une approche asymptotique détaillée au chapitre 4 permet retrouver analytiquement la caractéristique courant-tension.

— Enfin, la généralisation de l'approche asymptotique dans des configurations complexes (non-axisymétriques) par un modèle numérique à l'aide d'une formulation aux éléments finis décrite au chapitre 5.

Chapitre 2

Performances propulsives des sytèmes EHD

Sommaire

2.1 Considérations générales sur les systèmes propulsifs 33
2.1.1 Particularité des systèmes EHD 34
2.2 Description du dispositif expérimental et phénomènes "parasites" . 35
2.3 Article *AIAA Journal* 39

Dans ce chapitre, les performances propulsives d'un dispositif d' électrodes à vent ionique de type fil-cylindre sont évaluées expérimentalement. Un modèle simplifié est proposé qui reprend les approximations classiques unidimentionnelles précédemment utilisées dans la littérature. Cependant, la question applicative associée à la propulsion est approfondie en confrontant les mesures expérimentales aux besoins propulsifs de différents aéronefs. On pourra constater, en lisant l'article reproduit en fin de chapitre que certaines gamme de paramètre permettent une propulsion pertinente pour certains type d'aéronefs. Ces mesures sont aussi discutées de façon critique dans cet article.

2.1 Considérations générales sur les systèmes propulsifs

Cette partie vise à situer les propulseurs EHD vis à vis des systèmes de propulsion classiques, en reprenant les principes généraux de la propulsion en atmosphère et dans l'espace. De manière générale un système propulsif repose sur l'accélération du milieu ambiant (système aérobie en atmosphère) ou sur l'éjection de masse (système anaérobie, dans le vide). Un système propulsif peut se réduire à une section d'entrée A_0 et une section de sortie A_1 comme illustré sur la figure 2.1. De manière générale, en négligeant la viscosité, la forme intégrale du bilan de quantité de mouvement appliqué à un volume fluide délimité par la surface S peut s'écrire :

$$\int_S \rho \mathbf{U}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}s = \underbrace{-\int_{S_{wall}} P\mathbf{n}\,\mathrm{d}s}_{-\mathbf{F}} - \int_{S-S_{wall}} P\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

où S_{wall} désigne les parois solides du systèmes propulsif et $S - S_{wall}$ les autres faces de S. Le terme $-\mathbf{F}$ est l'opposé de la force de poussée, c'est à dire la résultante des efforts de pression sur les parois du propulseur.

Dans le cas générique où les profils de vitesse en entrée et sortie sont uniformes on retrouve

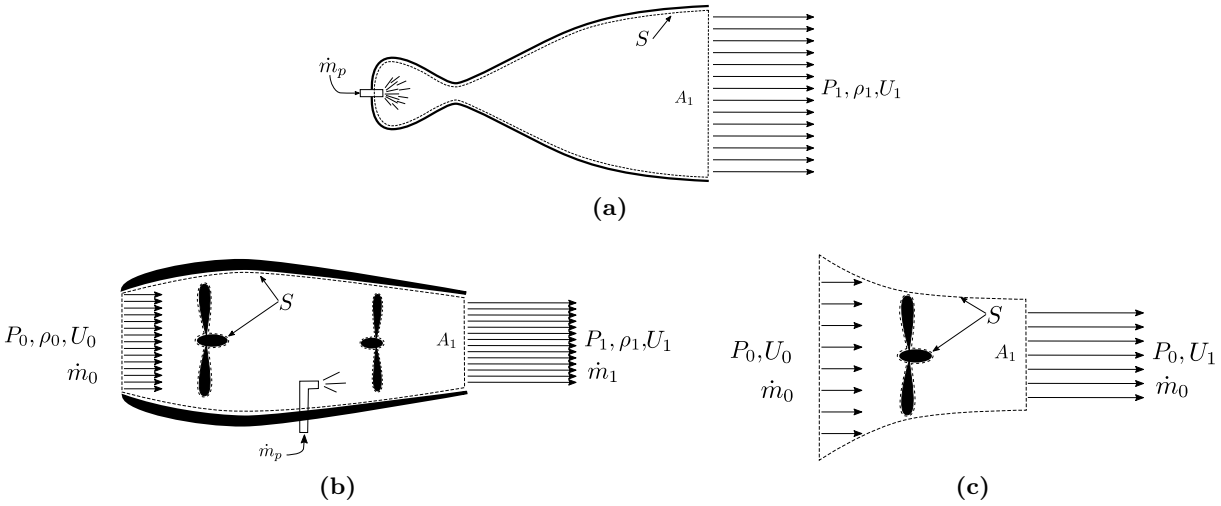


Figure 2.1 – *Bilan de quantité de mouvement pour (a) un moteur de fusée et (b) un turboréacteur et (c) une hélice.*

l'expression classique de la poussée

$$F = (\dot{m}_1 U_1 - \dot{m}_0 U_0) + A_1(P_1 - P_0) \tag{2.2}$$

où $\dot{m}$ est le débit massique et P_1 la pression en sortie et P_0 la pression ambiante, supposée égale à la pression en entrée si applicable. Pour un système anaérobie, comme les moteurs de fusée où les propulseurs de satellites, l'entrée du système se trouve dans le réservoir de carburant. On peut considérer en première approximation que la vitesse y est négligeable et l'équation sur la poussée devient

$$F = \dot{m}_p U_1 + A_1(P_1 - P_0) \tag{2.3}$$

où $\dot{m}_p$ désigne le débit de propergol. En pratique, pour les systèmes aérobie et anaérobie, les tuyères de sortie sont conçues afin de minimiser autant que possible la différence de pression $P_1 - P_0$ en sortie, ce qui correspond à un maximum de poussée. La principale source de poussée vient donc du terme inertiel.

Pour une fusée un apport d'énergie grâce à la combustion d'ergols permet d'augmenter l'enthalpie du propergol. Les propergols sont ensuite détendue dans une tuyère supersonique qui permet de récupérer la poussée. Pour un réacteur, le principe est similaire à ceci près qu'un volume d'air est chauffé par la combustion de carburant avant d'être éjecté par la tuyère. En réalité une partie de l'enthalpie du gaz est récupérée par une turbine qui vient entraîner un compresseur en amont et un fan qui agit comme une hélice. Pour une hélice seule, un moteur thermique ou électrique fournit l'énergie mécanique nécessaire à la rotation des pales. Le mouvement des pales profilées dans l'air génère une surpression à l'intrados et une dépression à l'extrados de ces dernières. La poussée est alors la résultante des efforts de pression sur l'hélice.

Dans tous les cas précédents, la force de poussée est transmise à la structure du système propulsif par l'intermédiaire des efforts de pression à la paroi de ce dernier.

2.1.1 Particularité des systèmes EHD

Pour un propulseur EHD les seules parois solides sont les électrodes. La répartition des efforts de pression à leur surface suite au vent ionique s'oppose au mouvement des électrodes dans l'air, figure 2.2. Ce n'est donc pas la pression exercée par le fluide qui est à l'origine de la poussée. En vérité c'est la résultante des forces électrostatiques exercée par les ions sur les

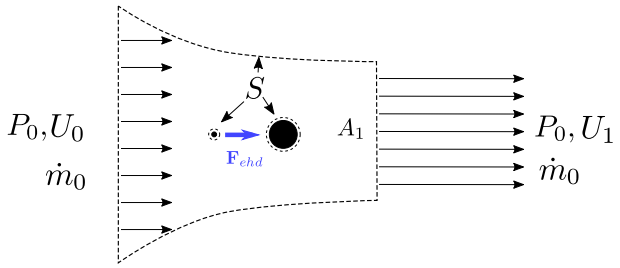


Figure 2.2 – *Schéma de principe d'un propulseur EHD.*

électrodes. Il s'agit donc d'une action à distance, qui se transmet via le champ électrique. Le système EHD s'apparente donc plutôt aux propulseurs ioniques à grilles (*Gridded Ion Engine*, GIE) utilisés dans l'espace. Ces derniers reposent sur l'accélération électrostatique d'une grande quantité d'ions à très haute vitesse par deux grilles entre lesquelles une différence de potentiel électrique est maintenue. Cependant les GIEs fonctionnent dans le vide et reposent uniquement sur le principe d'éjection de matière à haute vitesse dans une direction pour obtenir une force de réaction dans la direction opposée. Pour un propulseur EHD, la plupart des ions sont collectés par l'électrode collectrice.

Le principe de fonctionnement d'un propulseur EHD peut se simplifier ainsi : de manière analogue à une hélice qui "prend appui" sur l'air pour créer de la poussée, le propulseur EHD "prend appui" sur l'atmosphère ambiante par l'intermédiaire des ions et du champ électrique.

2.2 Description du dispositif expérimental et phénomènes "parasites"

Afin de déterminer les performances d'un étage EHD pour diverses configurations géométriques, un système de mesure simple a été mis en place. Il n'est pas original et s'inspire directement de dispositifs déjà utilisés dans d'autres travaux[44, 46, 42, 47, 45]. Dans un tout premier temps, des essais préliminaires ont été menés avec une petite alimentation ne permettant pas de dépasser 12 kV. Ces essais ont permis de corriger un certain nombre de problèmes expérimentaux.

- L'émetteur et le collecteur étant de charges opposées ils s'attirent mutuellement, comme les bornes d'un condensateur. En particulier l'émetteur peut fléchir s'il n'est pas suffisamment tendu. Pour éviter cet effet le fil émetteur en tungstène, plus résistant que le cuivre, était tendu par enroulement autour d'une vis en teflon.
- Les conditions ambiantes de température, pression et humidité pouvant avoir une légère influence sur la décharge, ces données ont été systématiquement enregistrées avant chaque essai.
- La faible intensité des efforts mesurés rend la mesure sensibles aux courants d'airs. En particulier les bouches d'aérations ou les arrivées d'air conditionné peuvent perturber la mesure.

Suite à ces essais préliminaires, le dispositif suivant a finalement été construit. Un cadre isolant en polytétrafluoroéthylène (PTFE) maintient les électrodes et permet d'ajuster la distance d, surface à surface, entre émetteur et collecteur ainsi que l'écartement ("spacing") s entre le/les collecteurs, voire figure 2.3 (a). L'émetteur est placé en haut, enroulé à ses extrémités par des vis en PTFE servant à régler la tension mécanique, et son positionnement précis est assuré par des gorges taillées dans le cadre au niveau des deux pointes visible dans la partie supérieure du cadre. Le collecteur est fixé à un plateau pouvant coulisser verticalement afin d'ajuster la

Date	Pression (hPa)	Température (°C)	RH (%)	d (cm)	s (cm)	N_c
13/07/2016	1021	23.5	43	2,3,4,5,6,9,14	0	1
19/07/2016	1016	27.1	51.4	2,3,4,5,6,9,14	2	2
21/07/2016	1019	24.7	61.6	2,3,4,5,6,9,14	4	2
21/07/2016	1019	25.7	58.6	2,3,4,5,6,9,14	6	2
22/07/2016	1018	24.8	64.5	2,3,4,5,6,9,14	8	2
25/07/2016	1018	25.8	55.3	2,3,4,5,6,9,14	10	2
28/07/2016	1022	26.1	51.4	3	2,3,5	3

Table 2.1 – *Conditions de pression, température, humidité relative et les configurations testées (distance d, spacing s et nombre de collecteurs N_c) lors des différentes sessions de mesure.*

distance entre émetteur et collecteur. Onze trous espacés de 1 cm permettent de fixer un ou plusieurs collecteurs avec des espacements variables.

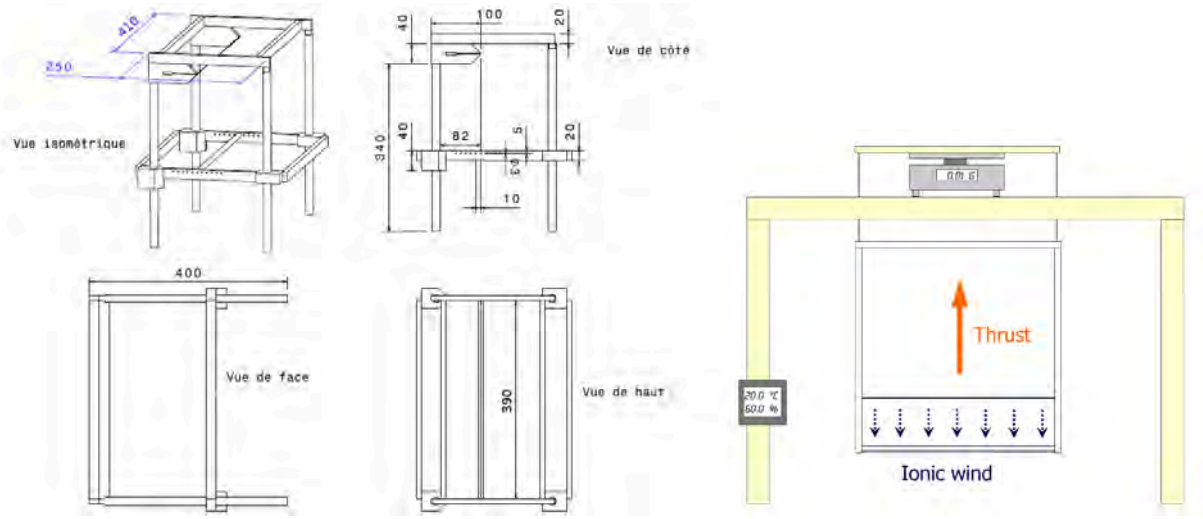


Figure 2.3 – *(a) Dessin et dimensions (mm) du cadre supportant les électrodes. (b) Schéma du montage du cadre sur la balance.*

Ce cadre est suspendu à une balance électronique (Mettler Toledo ME3002) par des fils en nylon attachés à un système boulon/écrou en PTFE permettant d'ajuster la longueur de chaque fil pour pouvoir mettre le dispositif à niveau (figure 2.3 (b)). La balance dispose d'un niveau à bulle et repose sur une planche en polychlorure de vinyle (PVC). Une feuille d'aluminium branchée à la terre fait office de cage de Farraday sous la balance afin de limiter les possibles interférences entre la décharge couronne et l'électronique notamment en cas de passage à l'arc électrique. Le corps de la balance étant métallique, il est lui aussi relié à la prise de terre.

Un capteur placé à la même hauteur que les électrodes permet de mesurer la température, l'hygrométrie ainsi que la pression ambiante. Ces paramètres peuvent jouer sur la mobilité des ions ainsi que sur la tension d'allumage de la décharge couronne et modifier ainsi la caractéristique courant-tension (I-V). En particulier Moreau *et al.* [44] ont montré que le taux d'humidité a un impact modéré entre 48 et 62 %.

Pour les premiers essais à grande distance inter-électrodes, typiquement plus de 6 cm, il a fallu employer des tensions allant jusqu'à 70 kV. Il est apparu que les valeurs de poussée indiquées par la balance mettaient un certain temps à se stabiliser (typiquement entre 10 et 20 s) et ne revenaient pas immédiatement à zéro lorsque l'alimentation était coupée avec un temps

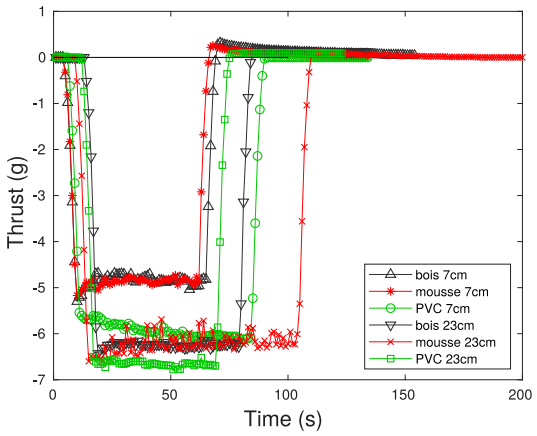


Figure 2.4 – *Effet de la hauteur du cadre par rapport au sol sur la poussée mesurée. Pour de très hautes tensions et à trop faible hauteur (7 et 23 cm), la poussée dépend du matériaux au sol : plaque de bois, mousse antistatique ou plaque de PVC.* $d = 9$ *cm,* $s = 0$ *cm* $V = 65$ *kV.*

caractéristique similaire. Après de multiples tests, c'est l'environnement proche des électrodes qui a été mis en cause. Il s'agit probablement d'une interaction électrostatique avec les matériaux environnant, et en particulier avec le sol. Le temps caractéristique de stabilisation des mesures dépendait en effet du matériau placé au sol sous le cadre. Cet effet est particulièrement visible sur les courbes "bois 7 cm" et "mousse 7 cm" de la figure 2.4. Le dispositif a donc été rehaussé jusqu'à que le matériau au sol n'ai plus d'influence notable sur les mesures : le bord inférieur du cadre se trouvant alors à 50 cm du sol. Afin de minimiser cet effet parasite, les mesures de poussée ont été restreints à des distances allant jusqu'à $d = 6$ cm. Les cas $d = 9cm$ et $d = 14cm$ ont tout de même été mesurés, afin de mettre en avant l'effet de l'allumage d'une décharge secondaire sur le collecteur.

Cet effet de l'environnement sur les mesures de poussée n'est pas documenté dans la littérature sur le sujet [44, 42, 45]. Pour la configuration testée, les mesures biaisées atteignaient typiquement -6.5 g avant de redescendre à $-6.2g$, soit une différence de l'ordre de 0.3 g (≈ 3 mN). Cette variation dans le temps se retrouve sur les valeurs moyennées pendant 20 s pour différents tensions de la figure 2.5. Les mesures issus de deux configurations expérimentales avant et après avoir réhaussé le cadre montrent un écart systématique de quelques milliNewton. A titre indicatif, l'erreur de mesure instrumentale était d'au plus ± 2.5 μA pour le courant, $\pm 35V$ pour la tension et ± 0.01 g pour la poussée. L'incertitude expérimentale associée est relativement faible, et ne suffit donc pas à expliquer les écarts à haute tension (fort courant et poussée importante). En revanche pour des tensions proches de la tension d'allumage V_0 et donc à faible courant et faible poussée, l'incertitude devient non négligeable en particulier pour l'estimation de θ, le rapport poussée/puissance. L'incertitude de mesure de θ est estimée de la manière suivante :

$$\Delta\theta \leq \theta \left(\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta V}{V} \right)$$

L'incertitude de mesure de θ croit de manière importante pour de faibles poussée et de faibles courant. Ce résultat invite à la plus grande prudence quant à l'interprétation des résultats dans cette gamme de paramètre, comme le montre la figure 2.5. Par exemple le rapport poussée/-puissance de 110 N/kW mesuré par Masuyama & Barrett [42] en 2013 est à considérer avec réserve.

En conclusion les écarts de θ pour de très faibles tensions peuvent être attribués à l'incertitude instrumentale. En revanche les écarts observés entre différents essais à hautes tension peuvent

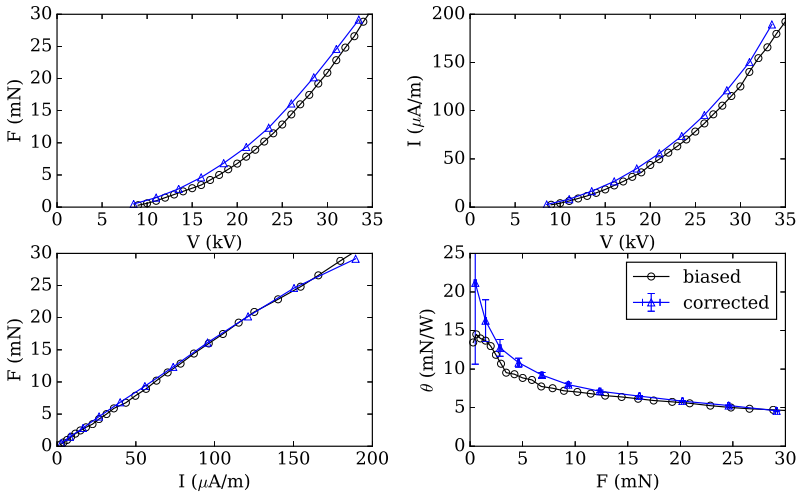


Figure 2.5 – *Effet sur les mesures de la correction apportée en réhaussant le cadre.*

être dus à des efforts électrostatiques parasites avec l'environnement proche des électrodes, si ce dernier n'est pas soigneusement choisi.

2.3 Article *AIAA Journal*

L'article suivant [69] expose les premières conclusions issues des mesures expérimentales sur des cas de référence simples. En particulier en divisant la poussée et la tension par la distance entre les électrodes, deux paramètres qui sont la densité de poussée Ψ et le champ électrique moyen V/d sont introduits. Ces deux paramètres semblent plus universels pour comparer différents systèmes entre eux. En effet, l'évolution de Ψ avec V/d dépend très peu de la distance entre les électrodes ce qui facilite la comparaison entre différents systèmes EHD. Ceci permet de détecter différents régimes de fonctionnement : un régime classique avec évolution quadratique du courant et de la poussée en fonction de la tension appliquée, et un régime détérioré avec l'apparition d'une seconde décharge au niveau du collecteur au-delà d'un certain seuil de tension. Cette seconde décharge augmente la consommation électrique du système sans pour autant augmenter la poussée générée. La taille du collecteur est un paramètre important : plus le rayon du collecteur sera grand, plus le seuil d'allumage de la seconde décharge sera retardé. Cependant un collecteur trop grand peut entraîner une obstruction non négligeable du flux d'air. La comparaison entre des configurations mono-collecteur et bi-collecteur permet d'estimer les pertes aérodynamiques dues à la présence des électrodes. Dans les configurations les moins favorables, la poussée s'en trouve diminuée de près de 30 %.

Electrohydrodynamic thrust for in-atmosphere propulsion

N. Monrolin, F. Plouraboué and O. Praud

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) - Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse FRANCE

The electrohydrodynamic (EHD) thrust generated by wire-cylinder electrodes under high DC voltage is experimentally analysed. Some recent experimental studies have shown that EHD thrusters produced by corona discharge and ionic wind are able to deliver high thrust-to-power ratio which reopens prospects for EHD propulsion. From simple considerations based on ultra-light aircraft mass, aerodynamics, battery mass and experimental EHD thrust densities, we showcase their potential for applications.Furthermore an experimental study is performed, for which the experimental observations are presented in terms of electric field and thrust density. This allows a simplified and synthetic presentation of propulsive properties. Various experimental bias have been identified and corrected. The measure of time-periodic oscillations of the airflow in the back of the thruster pinpoints a possible wake effect due to the impact of ionic wind on electrodes. The variations of the associated drag is studied when varying the position of the collecting electrodes. It is shown that aerodynamic losses can be significant in experimental EHD thrusters.

Nomenclature

$\mathbf{E}$	Electric field, V.m^{-1}
$\mathbf{j}$	Current density, A.m^{-2}
$\mathbf{f}$	Volumetric force, N.m^{-3}
$\mathbf{u}$	Air velocity, m.s^{-1}
μ	Ion mobility, m^2.V^{-1}.s^{-1}
ρ	Charge density, C.m^{-3}
ϕ	Electric potential, V
ε_0	relative permeability, C.V^{-1}.m^{-1}
T	Net Thrust, N
Θ	Thrust to power ratio, N.W^{-1}
η	Efficiency
V	Voltage, V
V_c	Corona onset voltage, V
I	Net electric current, A
C	Dimensional corona current parameter, A.V^{-2}
C_0	Non dimensional corona current parameter
i	Electric current per unit length, A.m^{-1}
Ψ	Thrust per unit surface, N.m^{-2}
P_e	Electric power input, W
M	Net mass of the airplane, kg
m_a	Mass without battery, kg
m_b	Mass of embedded battery, kg
E^*	Energetic density of batteries, Wh.kg^{-1}
L/D	Lift over drag ratio or glide ratio,
S_w	Wetted surface, m^2
g	Gravity acceleration, m.s^{-2}
D	Net Drag, N
r_e	Emitter radius, m
r_c	Collector radius, m
d	Distance between electrodes, m
l	Length of the electrodes, m
d_{drift}	Effective drift distance of the ions, m
s	Spacing between collecting electrodes, m

$\bar{e}$ Time averaged hot wire probe signal,
e' hot wire probe signal fluctuations,
F_{EHD} Net EHD forces, N
Re Reynolds number,
St Strouhal number,
f Frequency, Hz
ρ_g Air density, kg.m^{-3}

I. Introduction

In the past decades EHD thrusters have been popularized with the lifter or "ionocraft" concept. It consists of a light frame supporting two electrodes connected to a high DC voltage supply. At sufficiently high voltages, the device takes off without the help of any mechanical part. This phenomena relies on the electrostatic air acceleration known as ionic wind.

Ionic or electric wind occurs in atmospheric air when a high-voltage is applied between two asymmetric electrodes. A typical electrode configuration consists of two spaced parallel cylinders having significant diameter difference: this is the wire to cylinder case. At the surface of the sharp electrode, the electric field strength exceeds the air breakdown strength. Beyond that threshold, surrounding electrons acquire enough energy to ionize air molecules: this is part of the Townsend breakdown mechanism detailed in [1]. The electric breakdown of the air around sharp electrodes is known as the corona discharge, which can be positive when it occurs at the highest electric potential electrode (anode), and negative when it occurs at the lowest electric potential electrode (cathode). Whatever the polarity, the created ions are strongly accelerated by the electric field in the so-called drift region from the emitting electrode, the wire, to the collecting one, the cylinder. On their way they collide with neutral air molecules. The momentum transfer during collisions is responsible for the airflow acceleration referred to as ionic wind. And finally from the action-reaction principle, a force is exerted on the electrodes: this is the so-called electrohydrodynamic thrust.

First results on electric wind were brought in 1961 by Robinson [2] who measured velocities up to 4 m.s^{-1}. He also found an electric to kinetic energy conversion efficiency lower than 1%. Since then, electric wind has been measured by different groups [3, 4, 5, 6] and it has never exceeded [7] 10 m.s^{-1} whilst the efficiency hardly reached 1.7% [8]. The maximum velocity of the ionic wind can be increased by using multi-stage electrode configurations [9]. It must be noted that the efficiency was always measured in the absence of external airflow whereas it can be inferred from [10, 11] that ambient flow speed would increase it.

EHD devices have been much investigated for their potential applications as flow actuators. As they do not use any mechanical moving part they are of great interest for small size applications. For example, cooling devices [12] or electrosprays [13]. Moreover, their simplicity and fast response make them attractive as they directly convert electric energy into kinetic one. During the past decade EHD has undergone a growing interest in aerodynamic active flow control around airfoils [14]. The so-called Dielectric Barrier Discharge (DBD) actuator is still an active area of research [15]. DBD actuators have demonstrated their ability to prevent the boundary layer detachment on airfoils at moderate Reynolds (i.e. $Re < 10^6$), but hardly affect the flow at higher Reynolds. Many experiments [16] and fully-coupled numerical computations [17, 18] were carried out to solve the fluid dynamic, ion chemistry as well as transport in time-dependant electric fields.

The most salient aspect of EHD we are interested in here is the propulsive force applied on electrodes resulting from ions acceleration. This phenomenon was first reported in 1928 by Thomas Townsend Brown [19, 20] and more deeply explored by the seminal investigation of propulsive EHD carried out by Christenson and Moller [21]. Despite the poor efficiency previously mentioned, further investigations have been pursued throughout the years [22, 23]. These studies concluded that the thrust density was too low to propel conventional aircraft and that the efficiency would strongly decrease with altitude. However, significant improvements are possible [24, 5, 25, 26, 27] using adequate electrode shapes and arrangements. Furthermore, Masuyama and Barret [24] recently highlighted the fact that one relevant parameter for comparing in-atmosphere propulsive systems is the specific power consumption. Simple experimental EHD thrusters were then found to reach more than 20 mN/W [24], a value compatible with operating conditions of electrical aircraft which re-opened the issue of EHD propulsion practical interest.

This work aims to quantify the performances of an EHD thruster and investigate more deeply their practical interest. Section A is dedicated to a simplified one-dimensional theory of EHD thrusters. Relationship between the time-averaged current and thrust are derived and the efficiency is discussed in B. Experimental measurements are compared to the requirements of ultra-light aircraft in C. Section III summarises the experimental results and compares

them to the one dimensional theory predictions. Furthermore a comparison is drawn between our experimental data and previous measurements to showcase high sensibility to the surrounding environment. Finally, section IV is devoted to the analysis of the aerodynamic drag force applied on the collecting electrodes.

II. General considerations

The following simple one-dimensional model has been widely applied to EHD thrusters to predict trends and scaling which can be tested.

A. One-dimensional theory

Recent experiments [5, 24, 25] widely confirm the trends of the EHD propulsion theory derived by Christenson and Moller [21] in 1967. Inside the drift region, the charge density ρ is only due to ions. Ions velocity originates from two distinct contributions: a *convective* one from fluid velocity $\mathbf{u}$ and a *drift* one from electro-convection velocity $\mu\mathbf{E}$, where μ, the ionic mobility, depends on moisture, pressure [28, 29] and $\mathbf{E}$ the electric field [30, 31]. Ionic velocity is given by

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mu\mathbf{E}, \tag{1}$$

whereas current density is

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{u} + \mu\mathbf{E}). \tag{2}$$

The volumetric force $\mathbf{f}$ applied on the fluid is equal to the electrostatic Coulomb force applied by the electrodes on the ions

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}. \tag{3}$$

Thus the net force, $\mathbf{F}_{EHD}$, applied over a volume $\mathcal{V}$ of fluid and the net current, I, flowing through a control surface S are

$$\mathbf{F}_{EHD} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{E}\mathrm{dv} \tag{4}$$

$$I = \iint_{S} \mathbf{j}\mathrm{ds}. \tag{5}$$

The thrust $\mathbf{T}$ is then the opposite of $\mathbf{F}_{EHD}$. Let us now simplify the problem to a constant charge density and constant electric field. In this case $E = -\nabla\phi = V/d$ where d is the length of the drift region and V the applied voltage. The input electric power is written $P_e = VI$, the current is $I = \rho S(u + \mu E)$ and the thrust is $T = \rho E\,\mathcal{V}$. So the thrust-to-power ratio $\Theta = T/P_e$ and propulsive efficiency $\eta = (T \cdot u)/P_e$ can be expressed as the flow velocity and the drift velocity

$$\Theta = \frac{1}{u + \mu E} \tag{6}$$

$$\eta = \frac{u}{u + \mu E}. \tag{7}$$

More general formulas were derived in 1962 by Stuetzer [32] and more recently by Kim [33]. With typical experimental data, $V \approx 20$ kV, $d \approx 2$ cm so that $E \approx 10^6$ V.m^{-1}, $\mu = 2.10^{-4}$ m^2.V^{-1}.s^{-1} we obtain a drift velocity of 200 m/s. With ambient flow field $u = 50$ m/s, the thrust-to-power ratio reaches 4 N.kW^{-1} with a 20% efficiency. As a comparison, according to Masuyama & Barrett [24], typical turbojet engines deliver 2.5 N.kW^{-1} effectiveness at sea level, where the input power is derived from the specific fuel consumption. Our experimental measurements for zero ambient flow speed ($u = 0$) have shown that Θ can reach more than 20 N.kW^{-1} at low voltage, but this is obviously at the cost of low thrust. This simple analysis indicates that the drift velocity must be lowered to increase performances. This can be achieved by two means: decreasing the ion mobility or lowering the electric field.

B. Corona discharge assumptions

In all EHD thrusters previously considered in the literature, air is ionized by a corona discharge, so that ion species and their mobility are not adjustable. Moreover the corona discharge is space-charge limited, which means that the generated charge density is limited by the electric field strength and reciprocally. This dependence is responsible for the well-known corona discharge semi-empirical law in the low current approximation which can be found in [31, 34]:

$$I = CV(V - V_c) \tag{8}$$

Where I [A] is the current, C [A.V^{-2}] is an empirical constant depending on electrodes geometry and V_c [V] is the corona inception voltage. A corona discharge relies on a high electric field to generate ions so it does not allow efficient energy conversion according to (7). Moreover, neglecting the flow velocity $\|\mathbf{u}\| \ll \|\mu\mathbf{E}\|$ and assuming a constant mobility μ allows some simplifications in the theoretical derivation of thrust and thrust-to-power ratio: the charge conservation law in the drift region $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ becomes $\nabla \cdot \rho\mathbf{E} = 0$. The flux of force is therefore conserved in a current tube. Gilmore *et al.* [27] use this property to compute the force and the thrust to power ratio of one current tube, starting from the emitter and ending at the collector.

$$T_{tube} = \frac{I_{tube}\, d_{drift}}{\mu} \tag{9}$$

$$\Theta_{tube} = \frac{d_{drift}}{\mu V} \tag{10}$$

Those results are general and do not depend on the electric field shape [27]. More precisely thrust and thrust-to-power of one current tube *do not depend on the ion path* (electric field lines) but only on the projection d_{drift} of this path along the thruster axis, see fig 2a. In the case of electrodes having a small extend along the thruster axis, the mean path projection of all current tubes is equal to the distance d between the electrodes. Then the net thrust can be computed by integrating the contribution of each current tube

$$T_{th} = \frac{I\, d_{drift}}{\mu} \tag{11}$$

We introduce the thrust density Ψ which is the net thrust per unit gap distance d and per unit electrode length l.

$$\Psi \equiv \frac{T}{ld} = \frac{i}{\mu} \tag{12}$$

with $i = I/l$ [A.m^{-1}] the current per unit electrode length. A simple approximate relationship between Θ and Ψ can be derived. Following [5], we assume that we operate far from the inception point $V_c \ll V$ so that $i \approx CV^2/l$. Substituting into (12) and (10) leads to

$$\Theta = \frac{d}{Vi}\Psi \approx \frac{d}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{C}{l\,\Psi}} \tag{13}$$

A similar relationship was derived in [5]. It failed to predict accurately Θ at low voltage but did however provide a good estimation of the influence of parameters. In simple geometries, such as concentric cylinders [35, 31] or wire to cylinder [5], the constant C is proportional to $l\mu\varepsilon_0/d^2$, leading to

$$\Theta = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\, C_0}}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\Psi}} \tag{14}$$

$$i = \mu\varepsilon_0 C_0 E(E - E_c) \tag{15}$$

with $C_0 = C \cdot d^2/(l\,\mu\,\varepsilon_0)$ a non dimensional constant nearly independent of d, $E = V/d$ and $E_c = V_c/d$. It is noteworthy that with this formalism, thrust to power ratio does not depend on d at fixed Ψ, and i depends only on the mean electric field V/d.

C. Application to aerial propulsion

Although the thrust generated by EHD devices has already been measured, only a few studies compare it to the net thrust required for aerial propulsion. Wilson *et al.* [22] estimates that reaching a thrust density of 20 N.m^{-2} (frontal area) and an effectiveness of 20 N.kW^{-1} simultaneously is necessary for practicable applications besides any justification given. In the following, we compute the thrust per unit area required to fly an electric aircraft and compare it to the thrust density delivered by an experimental thruster. We choose three different types of light aircrafts, whose characteristics are gathered in table 1 and we assumed that every aircraft carries a 90 kg additional payload (e.g. a pilot). We note m_a the mass of the aircraft with its pilot. Considering an aircraft in horizontal flight, the net drag D depends on the weight and the lift over drag ratio as follows

$$D = \frac{Mg}{L/D}, \tag{16}$$

where M [kg], the net mass of the aircraft is

$$M = m_a + m_b, \tag{17}$$

where g [m.s^{-2}] is the gravity acceleration, L/D is the lift over drag ratio and m_b the mass of battery. To sustain horizontal flight, the propulsion system must generate a thrust balancing drag D. The propulsive system is characterized by its thrust to power ratio Θ, which determines its power consumption: $P_e = D/\Theta$. Then, the amount of needed battery m_b for a given flight duration $\mathcal{T}$ can be determined as follows

$$m_b = \frac{P_e \mathcal{T}}{E^*} = \frac{\mathcal{T} D}{\Theta E^*}. \tag{18}$$

E^* [Wh.kg^{-1}] is the energetic density of the batteries. Combining (16), (18) and (17) we obtain the thrust required for horizontal flight as a function of the thrust to power ratio for a given flight duration

$$T = \frac{m_a g}{\left(\frac{L}{D} - \frac{\mathcal{T} g}{\Theta E^*}\right)}. \tag{19}$$

From now on, the propulsive system is assumed resulting from independent distributed electrodes covering the whole external surface of the aircraft, S_w and integrated as a wire-to-wire plasma actuators [14]. In this highly idealized configuration the thrust density Ψ is given by

$$\Psi = \frac{m_a g}{S_w \left(\frac{L}{D} - \frac{\mathcal{T} g}{\Theta E^*}\right)}. \tag{20}$$

Therefore it is now possible to compare the theoretical thrust density required to fly the aircraft given by (20) to the experimental thrust density produced by the electrodes. The results are provided in Fig. 1 and are compared with our experimental measurements (see B).

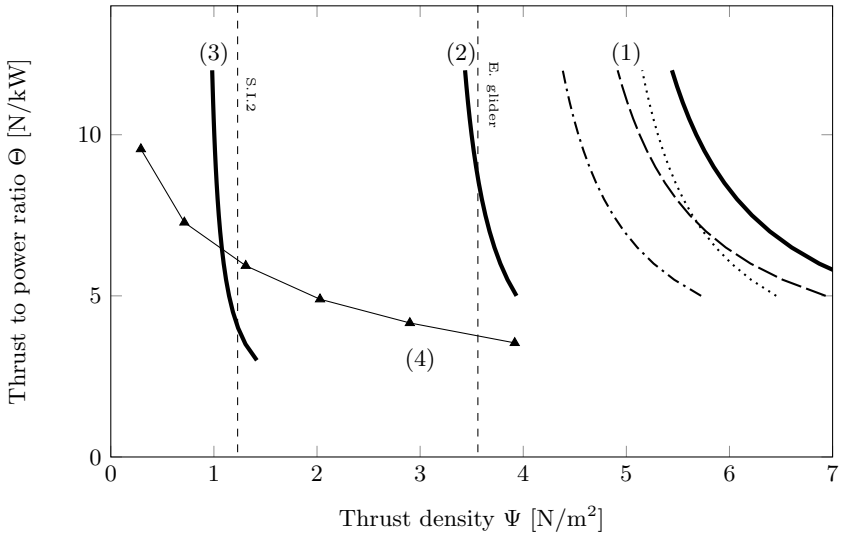


Figure 1. Thrust to power ratio versus required thrust density (eq 20) for a one-hour horizontal flight and for different aircrafts characteristics. (1 solid line) Ultralight aircraft (ULA) whose thermal engine was replaced by batteries. (1 dashed line) same ULA with a 30 kg lighter pilot. (1 dotted line) same ULA with improved battery energetic density $E^* = 260$ Wh/kg. (1 dashed and dotted line) ULA with improved glide ratio $L/D = 30$. (2) Electric glider: the drag/surface ratio corresponding to a mass of 396 kg including 41 kg of batteries (actual mass) is marked by (– – –). (3) Solar Impulse 2: the drag/surface ratio corresponding to a mass of $2,300$ kg including 633 kg of batteries (actual mass) is marked by (– – –). (4) experimental curve: $r_e = 25\,\mu$m, $d = 2$ cm, $r_c = 5$mm and $HR = 41\%$. The aircraft parameters are explicited in table 1.

The glide ratio of Solar Impulse 2 is estimated according to the altitude loss during night-time and its wetted area is approximately twice the solar cell surface (2×270 m^2). For the other electrical aircraft, wetted area are estimated from wing surface: $S_w = 2 \times S_{wing} + S_{fuselage}$, where a surface of $S_{fuselage} = 2$ m^2 is assumed for fuselage. As expected, a high Θ means less battery needs, so that the required thrust is slightly lower. On the contrary, flying with $\Theta \leq 3$ N.kW^{-1} seems unrealistic since battery mass reaches half aircraft net-mass. Not surprisingly, the thrust density

provided by this very row experimental thruster does not reach the needs of classical aircraft (ULA and glider) even with strong improvements in terms of glide ratio, structural mass or battery energetic density. However, as can be seen in Fig. 1, the thrust density that can be reached although smaller is not negligible compare to the one the one required. At least, it shows that EHD thrust can provide interesting effects. Theoretically, it could even provide enough thrust to propel Solar Impulse 2 for one hour. This shows that a low speed aircraft with a wide wetted surface combining all the above improvements could possibly be propelled by EHD means. Whether this statement can reach practical interests still remains dubious. Indeed, it should be noted that the integration of the electrodes at the surface of the wings could reduce the thrust density, since half of the volume between the electrodes would be under the surface of the airfoil and because of skin-friction of the ionic wind along the wing wall. The efficiency of the electric energy conversion process by ions collisions is weak and this remains a serious drawback of EHD systems, even if (7) indicates ways it could be improved. Furthermore the thrust level is expected to decrease with altitude because of lower air density and higher ionic mobility [2, 23]. System reliability, ambient airflow effects on the discharge, security are still important and unsolved open issues. Although EHD propulsion is far from industrial application it nevertheless exhibits some distinct advantages worth considering : it does not involve any mechanical moving parts, the propulsive system can be small and it is noise free. Furthermore, it directly interfaces with battery energy storage at low energy conversion loss, as opposed to the conversion loss associated with electro-mechanical propulsion systems. Given the low thrust generated it is most likely to appear possibly useful, as a distributed propulsion system.

III. Experimental investigation

The following experiment was inspired by previous work [5, 24, 25] using similar set-ups to measure thrust and current. The electrode shape and arrangement was investigated by varying both the emitter and the collector radius (12.5 μm $\leq r_e \leq$ 100 μm and 1.5 mm$\leq r_c \leq$ 5 mm, if not specified: $r_e = 25$ μm and $r_c = 5$ mm), the gap length (2 cm $\leq d \leq$ 6 cm) and the use of two collecting electrodes with varying spacing ($0 \leq s \leq$ 10 cm, if not specified only one collector is used: $s = 0$ cm). This last point highlighted a possible aerodynamic drag effect on the collecting electrodes. Fig. 2a summarises these geometrical parameters.

A. Experimental set-up

The EHD thruster was composed of one emitting tungsten wire and one or several collecting steel cylinders. The electrodes length was $l = 39$ cm, and they were supported by a 40 cm$\times$40 cm PTFE frame. To avoid bending or vibrations the tip of the emitting wire is wound around Nylon screws to ensure sufficient tension. The PTFE frame was hung by Nylon wires to a precise balance ME3002 (0.01 g) as shown in Fig. 2b. The distance between the high voltage electrode and the balance was at least 50 cm. The digital scale was supported by a 2 cm thick PVC plate of the same dimensions as the scale. The whole suspended frame weighed around 2.7 kg. The maximum registered thrust was around -10 g. The high voltage power supply *Iseg* $HP700505p$ provided a positive voltage up to 70 kV. Particular care was taken in the wiring to insure that the weight and the stiffness of the cables do not affect the measurements. The connection was ensured by a thin horizontal wire of the same type as the emitting wire. Flow velocity fluctuations were recorded with a DANTEC P11 hot-wire probe. The sampling frequency was 1 kHz, and the acquisition window lasted 60 seconds.

The power supply displays the value of the applied voltage with a very satisfactory accuracy when compared to the voltage measured with a high voltage probe TESTEC TT-HVP40. The relative measurement difference is less than $2 \cdot 10^{-3}$ for voltages higher than 10 kV. The digital current display precision is less satisfactory for low currents, so a LUTRON $DM9090$ multimeter is connected to ground to measure the current. This dual current measurement highlighted a current difference, referred to as the "current leakage", between the high-voltage branch and ground. This current leakage depends only on the applied voltages. It is more noticeable for large electrode gap d since at a fixed current this required a higher voltage. The current leakage proportion was typically less than 10 % for gap values below 4 cm but could reach more than 50% for a 14 cm gap. This current leakage (see Fig. 3) is due to the thin connecting wires around which corona discharge occurs. Replacing these wires by isolated wires reduces current

Aircraft type	m_a (kg)	L/D	S_w (m^2)	E^* (Wh/kg)
(1) Ultra light (*Sinus* [a])	310	25	27	190
(2) Electric glider (*Taurus* [a])	264	41	26.6	190
(3) Solar aircraft (*Solar Impulse 2* [b])	1757	34	540	260

Table 1. Aircraft parameters

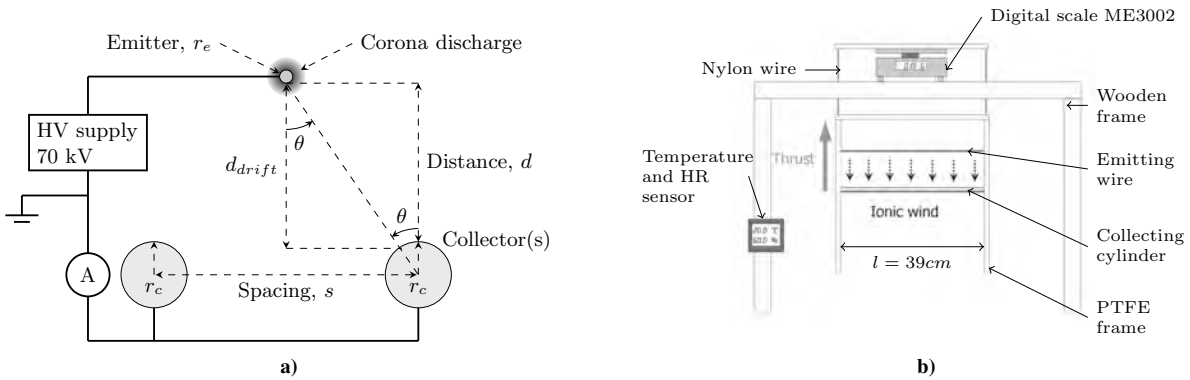


Figure 2. (a) Electrode size and electrical wiring for a positive discharge. (b) Experimental thrust measurement. The minimum distance between balance and high voltage was 50 cm.

leakage but simultaneously disabled thrust measurement because of strong stiffness. Consistently with [5] and [25] the presented current is measured in the grounded part of the circuit. The measurement procedure is the following: high voltage is set to the desired value for at least 5 s and then data are recorded during 20 s at a sampling rate of 20 Hz before being averaged.

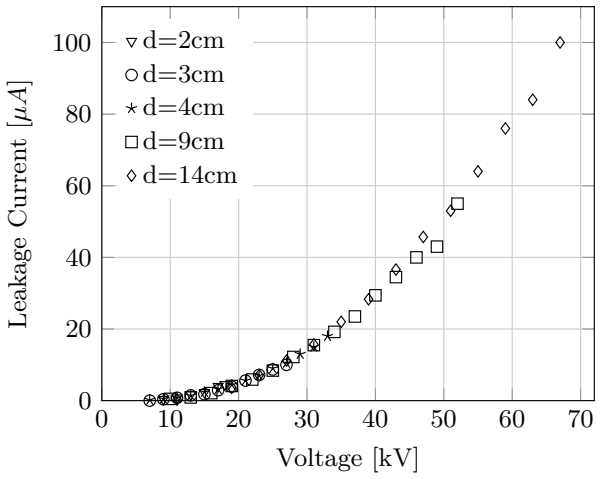


Figure 3. Leakage current versus voltage for different electrode gap.

During the first trial, we observed that the thrust measurement could be affected by parasite electrostatic forces due to the charging of the environment: before any thrust measurement, the scale was calibrated to zero. Then, high voltage was switched-on during 20 s, and finally turned off. Instead going back to zero, the scale indicated a negative thrust (directed downward) slowly decreasing in time. It typically took between 30 s to one minute for the measured force to reach zero again. The decreasing time and amplitude of this anomalous force also depended on the floor material below the PTFE frame: wood, concrete, PVC plate or antistatic foam. To avoid such sensitivity, both the digital scale and the electrode frame were elevated until this effect became negligible and no floor material dependence could be measured. The emitter was 85 cm above the floor and at least 50 cm below the digital scale, whose metallic body was grounded. The lowest part of the PTFE frame was 50 cm above the floor. Thrust measurements have been voluntary restricted to small distances, and relatively low voltages, below 40 kV.

B. Results

The experimental results are presented in terms of thrust, thrust density, applied voltage, current per unit length and thrust-to-power ratio. The measurements are made without ambient flow. The applied voltage is positive, so that a positive corona discharge occurs at the emitter.

A back-discharge can arise when the electric field strength at some points on the collector approaches the dielectric

strength of the air, generating negative ions travelling backward. Most of the time the back-discharge is located at the tips of the cylinder. This parasite current is responsible for the so-called *bilinear performance degradation* described in [24]. It can be detected because current becomes unstable with noise emission. To avoid back-discharge, voltage is limited for all measurements except in the special case of $d = 9$ cm for illustrating its negative impact. In this study the practical maximum thrust density limited by spark formation is not reached.

1. *Comparison with previous measurements*

Measurement of thrust, voltage and current may show sensible variations according to changing atmospheric parameters or electrostatic charging of the surrounding area which generates parasite forces. They are compared with similar previous experiments in Fig.4.

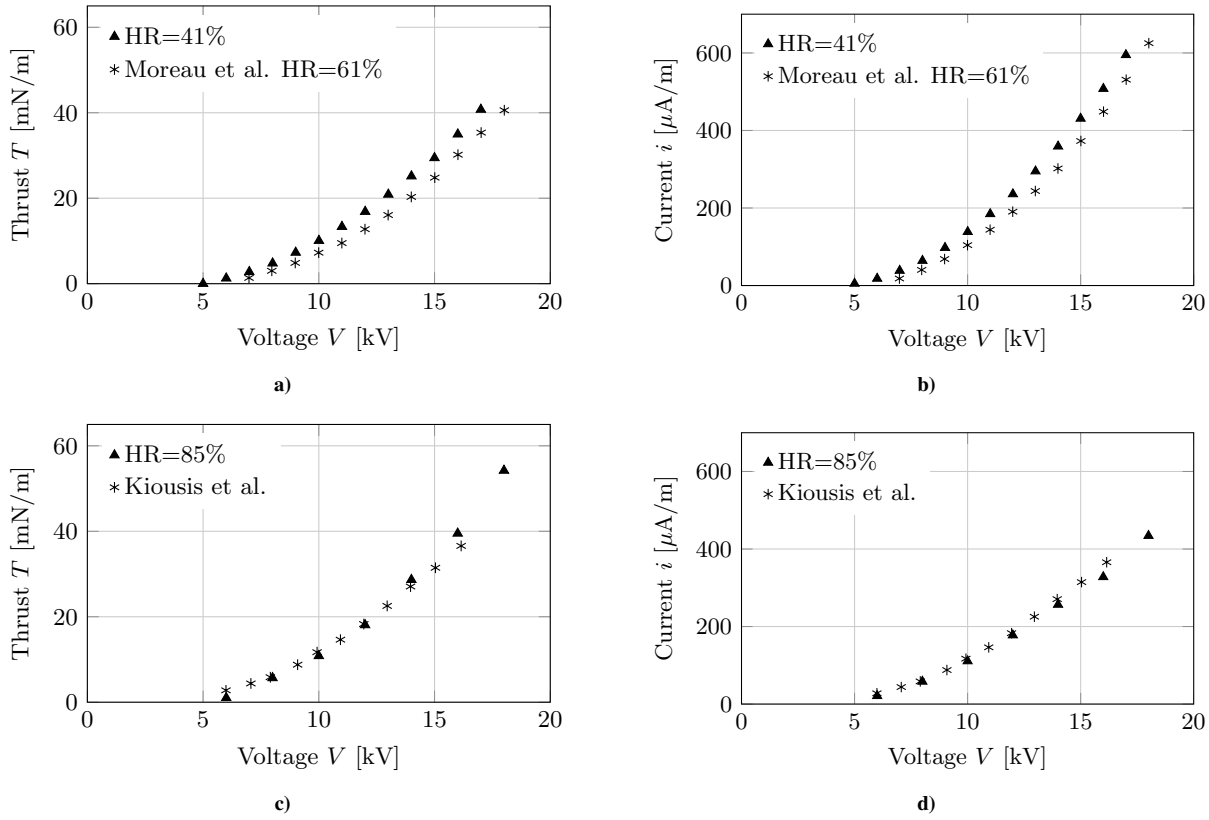


Figure 4. Comparison of thrust and current measurement from literature (∗) with ours (▲) for a positive discharge. Relative humidity is given when available. (a,b) Comparison with [5]: r_e=12.5 μm, r_c=1.5 mm, d=2 cm, Tungsten wire. (c,d) Comparison with [25]: r_e=25 μm, r_c=5 mm, d=3 cm, copper wire.

The T-V and I-V curves are very similar. Only a slight difference between [5] and the presented results is noticeale.

We found however a significant difference with [24] results, typically more than 50 % for voltages higher than 30 kV (not shown). However, we could not reproduce exactly the same configuration as [24] ($r_e = 100\,\mu$m, $r_c = 3.15$ mm, $d = 9$ cm) and used a bigger collector ($r_c = 5$ mm), which should have provided a higher performance according to [5]. Nevertheless Masuyama & Barret's thrust and current [24] are at least twice higher. Furthermore, Masuyama & Barret [24] measured the current directly with the power supply, so leakage current (sec. A) might explain the current difference but still does not explain thrust differences.

2. *Distance effect.*

The distance between the electrodes has two antagonistic effects on performance. First, the strength of the electric field, which also drives the injected charge density, is determined by the voltage gradient. Secondly the net thrust is proportional to the volume of the drift region. So the distance d strongly affects the net EHD thrust. But using quantity rescaled with d it is noteworthy that all experimental curves provided in Fig. 5a and 5b collapse whatever the distance.

This confirms the weak dependence of C_0 on d. We found $\mu\varepsilon_0 C_0 = 1.27 \cdot 10^{-15}$ A.m^{-1}.V^{-2}. However this collapse is not perfect, especially at low electric fields since the corona inception field $E_c = V_v/d =$ varies with d (see Table 2).

As shown in Fig. 5, Thrust-Voltage (T-V) and Current-Voltage (I-V) curves have a very similar shape. This is due to the linear relationship between the current and the EHD forces illustrated in Fig. 5c and predicted by (12). However the effective mobility, given by the slope of the $\Psi - i$ curve does not fall within prediction range: the current conversion into thrust is less efficient than expected. The variations of ions mobility in air with pressure, temperature and humidity (between 1.6 and 2.2 cm^2.V^{-1}.s^{-1} depending on air humidity [28]) are not sufficient to explain the value of the effective mobility, close to 2.66 cm^2.V^{-1}.s^{-1}, obtained in our experiments. This point, related to the drag of the collector, will be discussed later-on in section IV.

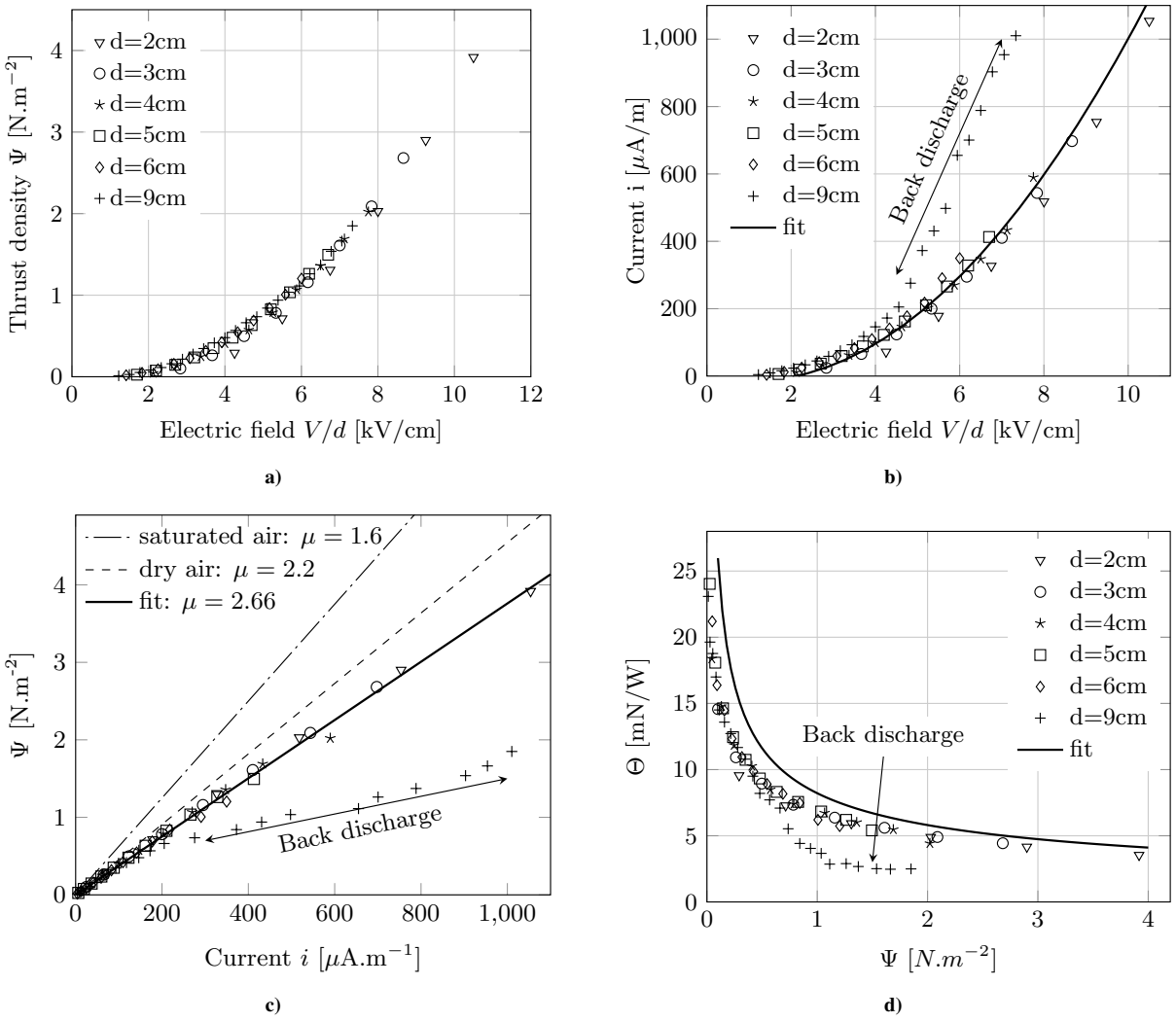


Figure 5. (a) Experimental thrust density versus electric field V/d. (b) Current versus electric field. The case $d = 4$ cm is fitted with equation (15): $\mu\varepsilon_0 C_0 = 1.27 \cdot 10^{-15}$ A.m^{-1}.V^{-2} and $E_c = 2.12$ kV.cm^{-1}. (c) Thrust density versus current. Dashed lines delimit the theoretical prediction range depending on the ion mobility (cm^2.V^{-1}.s^{-1}). The solid line is a linear fit with (eq.12). (d) Thrust to power versus thrust density Ψ, fitted with (14): $\mu = 2.66$ cm^2.V^{-1}.s^{-1} and $\mu\varepsilon_0 C_0 = 1.27 \cdot 10^{-15}$ A.m^{-1}.V^{-2}. Tungsten wire $r_e = 25\,\mu$m, $r_c = 5$ mm, $s = 0$ cm and RH=42%.

For large gap values, the applied voltage is limited by the inception of the negative discharge at the collector. The back-discharge current was voluntary recorded only for distance $d = 9$ cm. It causes a slope change in the $\Psi - i$ characteristic and a drop of Θ. The thrust density is not affected by the back-discharge. This undesired power consumption can be limited by decreasing the electric field at the tip of the collector: for example by increasing the collector radius, up to a limit (see Sec. 4).

In previous studies [24, 25, 26, 27] increasing the gap between the electrodes at fixed net thrust allowed to reach

higher thrust to power ratio. But it automatically led to higher voltages. On a practical point of view, our results show that at fixed thrust density, the distance between the electrodes plays a secondary role. This is both good and bad news. Bad news comes when increasing the gap poorly increases performances, but leads to even easier back-discharge. Good news is : the smaller the gap, the lower the voltage without almost performances degradations. A set of serialised small devices with low voltages (with succession of positive and negative discharge) could then reach similar thrust level as a big one associated with a huge voltage.

3. *Emitter radius effect*

The emitting wire radius must be small compared to the collector so that the electric field reaches its critical inception value only at one electrode. The semi-empirical Peek's formula gives an estimate of the critical electric field $E_{s,c}$ (kV/mm) required at the surface of the wire for corona.

$$E_{s,c} = 3.1 m \delta \left(1 + \frac{0.308}{\sqrt{\delta r}}\right) \tag{21}$$

Where $m = 1$ for a smooth wire, $\delta = \frac{298 * p}{T}$ with p [bar] pressure and T [K] is temperature. The critical inception voltage V_c can be derived from the surface electric field $E_{s,c}$ using analytical solution for the wire-to-cylinder case [36]. Figure 6a displays the inception voltage versus wire radius. Reducing the emitting wire diameter shifts the $\Psi - V$ and $i - V$ curves toward lower voltages because it reduces the corona inception voltage. At fixed thrust, it means less electric power consumption. It is noteworthy that V_c/d (see Table 2) is rather similar to Moreau's data [26], despite Moreau's wire was 25 μm of diameter and our is 50 μm.

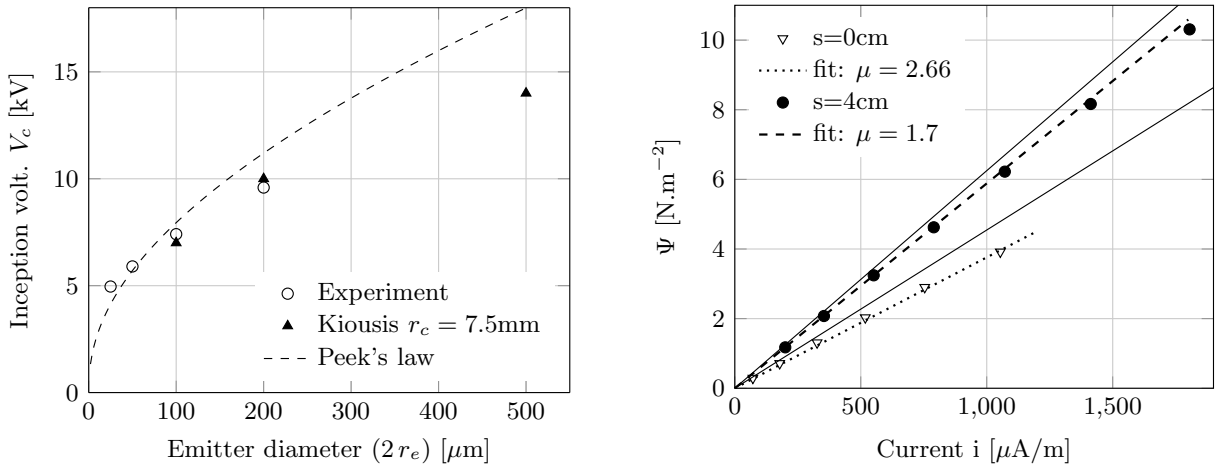


Figure 6. (a) Corona onset voltage versus the emitter diameter for $d = 3$ cm and $r_c = 1.5$ mm. Experimental data (obtained by fitting $i - V$ curves with equation 8) are compared to Kiousis results [25] and to the semi-empirical Peek's formula (21). (b) $\Psi - i$ curve for different spacing, $d = 2$ cm. Model prediction from (12): full line for dry and saturated air, and discontinuous lines for mobility fitted values ($cm^2.s^{-1}.V^{-1}$).

d (cm)	1	1.5	2	3	4	5	6
E_c (kV/cm)			3.15	2.31	2.12	1.70	1.62
Moreau E_c (kV/cm)	4.8	3.6	3.05	2.5	2.2		

Table 2. Comparison of the corona inception field $E_c = V_c/d$ with Moreau's data [5].

4. *Effects of other parameters*

The influence of other parameters has been tested : discharge polarity, collector radius, and the material of the emitting wire. The entire set of collected data are not presented for the sake of conciseness but we obtained results similar to previous study [5, 25].

One result should however be emphasized. Increasing the size of the collecting electrode can increase the thrust at fixed voltage. However, when the size of the collector is further increased, the thrust drops. Moreau [5] finds an optimum diameter around 10 mm for a distance of 2 cm. This collector size change leads to an increase or a decrease of the slope of the linear $\Psi - i$ relationship which should only depend on the ion mobility according to (12). However the same behaviour can be observed when two collectors are used. Figure 6b shows the anomalous slope variation. A strong variation of the ion mobility or of the drift distance due to various collectors seems unlikely. In the following, we argue that the aerodynamic drag force exerted by the ionic wind airflow on the collecting electrode is responsible for this anomalous slope variation. Quantifying this drag is important since it reduces the efficiency of the thruster.

IV. Aerodynamic drag effect

The determination of the aerodynamic drag of the collectors would, in principle, require both velocity profile upstream and downstream. High voltages prevent the use of measurement probe upstream. So a direct drag measurement is difficult. However we can provide evidences that such drag exists and influences the measured performances of EHD thrusters.

1. Ionic wind fluctuations

By measuring the ionic wind velocity profile at the collecting electrode with a home-made glass pressure probe, [5] estimated a thrust 70% higher than the measured one. In the present study, we investigated the flow ($r_e = 25\,\mu$m, $d = 2$ cm) using a hot-wire probe. Since this kind of probe requires a precise calibration which might be sensible to the electric field and discharge current (sharp edges) no precise quantitative measurement were carried out. However, the low response time of the probe highlighted temporal properties of velocity fluctuations in the collector wake 5 cm downstream, far from the discharge zone. Figure 7(a) displays the Power Spectral Density (PSD) of signal

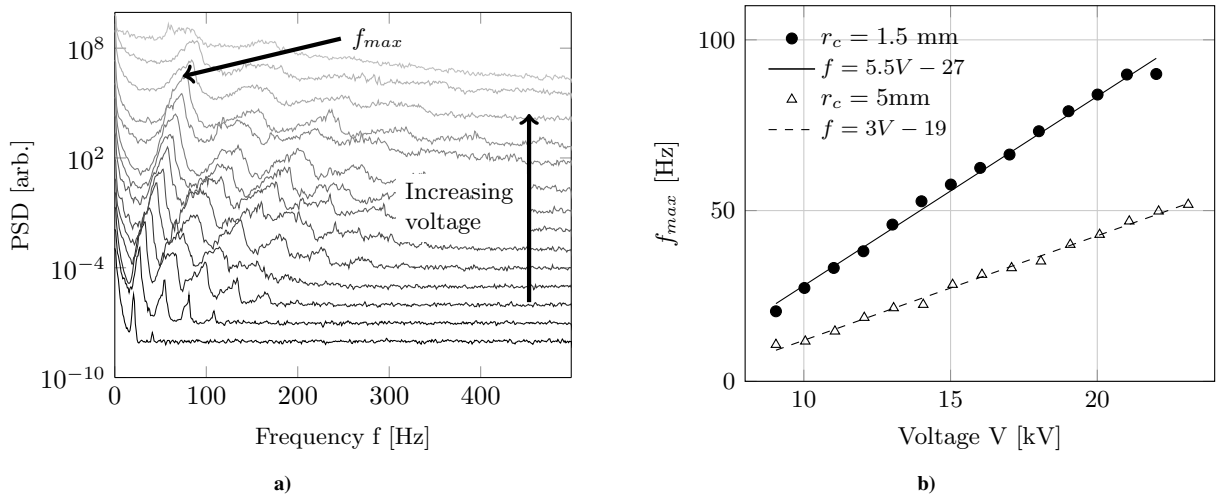


Figure 7. (a) Power Spectral Density estimate of signal fluctuations (without probe calibration) with offset for readability, arbitrary units. (b) Linear evolution of f_{max} with voltage. Symbols are measurements and continuous lines represents linear fit.

fluctuations: $e(t)' = e(t) - \bar{e}$ where $\bar{e}$ is the time average. It shows an obvious maximum at frequency f_{max} which grows linearly with the applied voltage and decreases as the size of the collector increases (Fig. 7(b)). These time periodic velocity fluctuations can be related to a vortex shedding instability mechanism. For an ionic wind of 1 m.s^{-1} [5] and a collector diameter of 1 cm, the Reynolds number Re is close to 600 and falls in the range of the well-known von Karman instability.

The upstream ionic wind velocity can not be directly measured, but it can be estimated by neglecting pressure and viscous effect in the momentum equation of the fluid

$$\rho_g \, u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \rho E. \tag{22}$$

Where ρ_g [kg.m^{-3}] is the air density. The momentum equation can be integrated on a volume including all EHD

forces: $\iiint_{\mathcal{V}} \rho E = F_{EHD} = -T$. The incoming momentum flow being neglected

$$\frac{1}{2}\rho_g\, u(d)^2 \mathcal{S} = F_{EHD} \tag{23}$$

With $\mathcal{S}$ [m^2] the exhaust surface of the integration volume, $u(d)$ is velocity at the exhaust surface. Since $F_{EHD} = I\, d/\mu$ and $I \approx CV^2$, we finally recover the usual ionic wind velocity

$$u(d) \approx \sqrt{\frac{2dC}{\mathcal{S}\rho_g \mu}} \cdot V \tag{24}$$

This result states that ionic wind varies linearly with applied voltage, as shown in [2]. At low Reynolds number the dimensionless vortex frequency, the Strouhal number St, is nearly constant [37]: $St = u\, 2r_c/f \approx 0.2$. So the frequency of vortex shedding is expected to grow linearly with the airflow velocity as so with voltage, which is in agreement with our measurement Fig. 7(b).
Despite no precise velocity measurement has been performed upstream, this experiment highlighted a non-stationary wake, which could potentially lead to non-linear wake interactions in the case of multiple collecting electrodes.

The next part is dedicated to drag estimation and its impact on thruster's performance measurements.

2. *Collector Drag estimation*

A crude estimate of the drag associated with one collector can be obtained using the drag coefficient C_D of a circular cylinder and (23) leading to

$$D = \frac{1}{2}\rho_g u(d)^2 (2\, r_c\, l) C_D = \alpha F_{EHD} \tag{25}$$

with α a constant depending on the drag coefficient. Using (10) and (11) it is possible to estimate the aerodynamic drag D

$$D = T_{th} - T \tag{26}$$

With T the measured thrust and $T_{th} = \frac{I\, d_{drift}}{\mu}$ the theoretical thrust. Using (25) and since $F_{EHD} = T_{th}$ we can rewrite (26)

$$\alpha = 1 - T^* \tag{27}$$

with $T^* = T/T_{th}$ the non dimensional thrust. T_{th} highly depends on the choice of the ionic mobility μ, which varies with air humidity and other atmospheric parameters. However [5] showed that those variations are relatively limited when $48\% \leq RH \leq 62\%$. Our measurements were obtained with relative humidity between 45% and 60%. So we decided to chose a single ionic mobility equals to 1.8 cm^2.V^{-1}.s^{-1} according to precise measurement made in a positive DC corona discharge [38]. Furthermore the drift distance is chosen so that the angle θ between the thruster axis and the ions path is taken into account (see Fig.2a)

$$d_{drift} = d + (1 - \cos\theta) \cdot r_c \tag{28}$$

Comparing various configuration to each other provides evidence that aerodynamic effects are not negligible and highly depends on the electrode position. Fig. 8 shows that the use of several collectors can increase the performances which is in agreement with previous observations [22, 26]. When the non-dimensional spacing is lower than 2, the experimental performances are poor: only 70 % of the expected thrust and thrust to power ratio. This is very probably due to an increase of the drag when the collecting electrodes are placed on the thruster axis, where ionic wind is stronger. However when the spacing is big enough it is possible to nearly reach the theoretical predictions. The optimum non-dimensional spacing depends on the gap size but is in the range $[4, 8]$. On the contrary for a wide spacing the airflow velocity seen by the collectors is lower. At very large spacing, performances drops again, as can be expected from the deflections of the electric field lines driving the flow. A secondary effect is noticeable as the distance increases: the performances are lower when the gap size increases. This is possibly due to a widening of the velocity profile resulting in an increasing drag.

As illustrated on Fig. 9a, the dimensional drag varies almost linearly with d which is in agreement with the variation of the ionic wind velocity with d (24) and the very weak variation of the drag coefficient of a cylinder for the range of Reynolds numbers obtained in the experiments ($Re \sim 200$). The drag also increases with the spacing, even if, for unknown reason, the case $s = 10$ cm seems to behave differently. The non-dimensional drag α slowly increases with d. For small spacing it seems to be independent on the distance, indicating that the drag coefficient remains unchanged. For larger spacing values a small dependence is observed. This effect can be related the variation of the velocity profile upstream of the collectors with the geometric configuration (s and d).

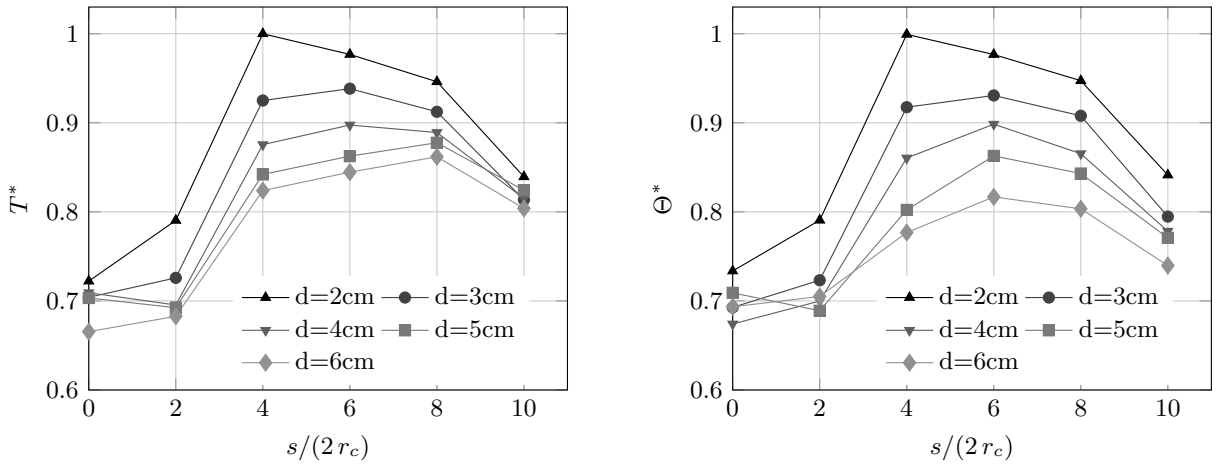


Figure 8. (a) Normalized thrust T^* as a function of distance for various spacing for a fixed current of 250 μA.m^{-1} (interpolated data) (b) Normalized thrust-to-power ratio $\Theta^* = \Theta/(\Theta_{th})$ for various spacings for a fixed thrust of 26 mN.m^{-1} (interpolated data).

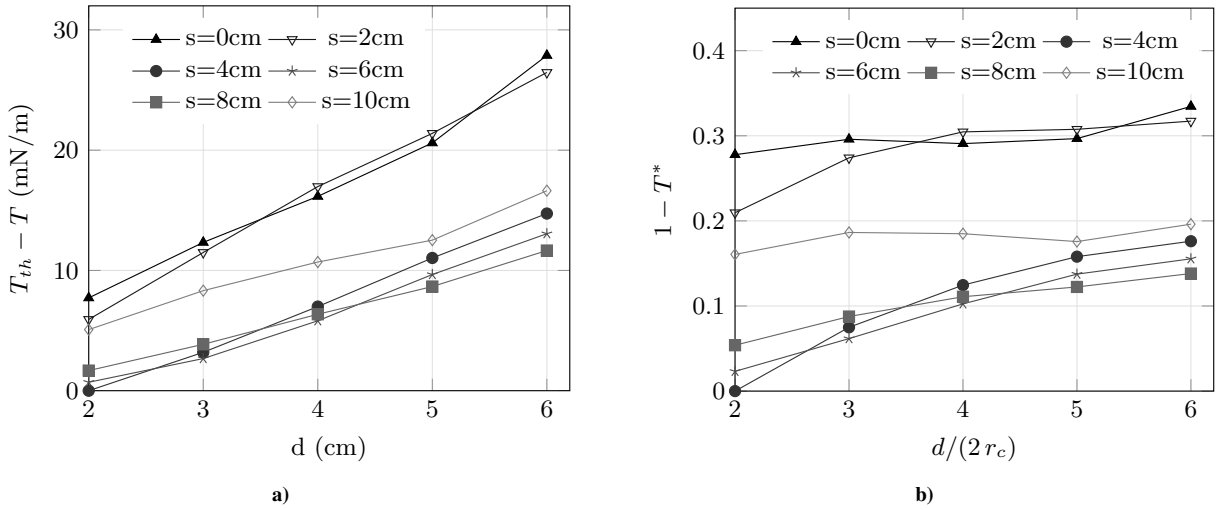


Figure 9. (a) Collector(s) estimated drag as a function of distance for various spacing, $i = 250$ μA.m^{-1}.(b) Non dimensional drag α as a function of the non dimensional distance at fixed current $i = 250$ μA.m^{-1}.

V. Conclusion

This study focused on the propulsive EHD effect of a simple wire-cylinder electrode configuration and its potential use for aerial propulsion. We present the classical model of EHD propulsion and explain the renewed interest for this propulsion device due to its thrust to power ratio. Simple considerations on aircraft performances confronted with experimental results provided evidence that EHD may have interesting unexplored potential for very light, low-speed aircraft propulsion. Whereas most of the presented experiments confirm trends already found in previous studies, we highlighted some new results. First, confrontation of our measurements with other studies showed that experimental bias must be carefully handled: leakage current and parasite thrust errors are not negligible. Secondly, all data were rescaled according to the gap d and we introduced the thrust per unit distance Ψ. On this point of view, the distance between the electrodes does not strongly affect the EHD performances. The practical consequence is that working with small devices at low voltages in a series must be theoretically as efficient as working with only one very high voltage device. Finally, the flow behind the collector exhibited fluctuations typical of a vortex shedding like instability. No precise ionic wind measurements were performed but an indirect drag estimation based on various electrodes configurations, showed that aerodynamic effects are not negligible.

Further measurements on flow dynamic around the electrodes are necessary in order to better quantify the drag force exerted on the collector. This could be achieved by means of non intrusive flow measurement methods such as Laser Doppler Anemometry or Particle Image Velocimetry.

Acknowledgements

NM thanks Region Occitanie and CNES Launcher Directorate for financial support. This research has been funded by CNES research contract 5100015475.

References

[1] Fridman, A., Chirokov, A., and Gutsol, A., "Non-thermal atmospheric pressure discharges," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 38, No. 2, 2005, pp. R1.

[2] Robinson, M., "Movement of air in the electric wind of the corona discharge," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, Vol. 80, No. 2, 1961, pp. 143–150.

[3] Yabe, A., Mori, Y., and Hijikata, K., "EHD study of the corona wind between wire and plate electrodes," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, 1978, pp. 340–345.

[4] Rickard, M., Dunn-Rankin, D., Weinberg, F., and Carleton, F., "Characterization of ionic wind velocity," *Journal of Electrostatics*, Vol. 63, No. 6-10, 2005, pp. 711–716.

[5] Moreau, E., Benard, N., Lan-Sun-Luk, J.-D., and Chabriat, J.-P., "Electrohydrodynamic force produced by a wire-to-cylinder dc corona discharge in air at atmospheric pressure," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 46, No. 47, 2013, pp. 475204.

[6] Mizeraczyk, J., Podlinski, J., Niewulis, A., and Berendt, A., "Recent progress in experimental studies of electro-hydrodynamic flow in electrostatic precipitators," *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 418, 2013, pp. 012068.

[7] Colas, D. F., Ferret, A., Pai, D. Z., Lacoste, D. a., and Laux, C. O., "Ionic wind generation by a wire-cylinder-plate corona discharge in air at atmospheric pressure," *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, No. 10, 2010, pp. 1–7.

[8] Moreau, E. and Touchard, G., "Enhancing the mechanical efficiency of electric wind in corona discharges," *Journal of Electrostatics*, Vol. 66, No. 1-2, 2008, pp. 39–44.

[9] Kim, C., Park, D., Noh, K., and Hwang, J., "Velocity and energy conversion efficiency characteristics of ionic wind generator in a multistage configuration," *Journal of Electrostatics*, Vol. 68, No. 1, 2010, pp. 36–41.

[10] Bondar, H. and Bastien, F., "Effect of neutral fluid velocity on direct conversion from electrical to fluid kinetic energy in an electro-fluid-dynamics (EFD) device," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 19, No. 9, 2000, pp. 1657–1663.

[11] Singhal, V. and Garimella, S. V., "Influence of Bulk Fluid Velocity on the Efficiency of Electrohydrodynamic Pumping," *Journal of Fluids Engineering Transactions of the ASME*, Vol. 127, No. 3, 2005, pp. 484.

[12] Go, D. B., Maturana, R. A., Fisher, T. S., and Garimella, S. V., "Enhancement of external forced convection by ionic wind," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 25–26, 2008, pp. 6047–6053.

[13] Ganan-Calvo, A., Davila, J., and Barrero, A., "Current and droplet size in the electrospraying of liquids. Scaling laws," *Journal of Aerosol Science*, Vol. 28, No. 2, 1997, pp. 249–275.

[14] Moreau, E., "Airflow control by non-thermal plasma actuators," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 40, No. 3, 2007, pp. 605–636.

[15] Benard, N. and Moreau, E., "Electrical and mechanical characteristics of surface AC dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control," *Experiments in Fluids*, Vol. 55, No. 11, 2014.

[16] Benard, N., Debien, a., and Moreau, E., "Time-dependent volume force produced by a non-thermal plasma actuator from experimental velocity field," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 46, No. 24, 2013, pp. 245201.

[17] Unfer, T. and Boeuf, J., "Modelling of a nanosecond surface discharge actuator," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42, No. 19, 2009, pp. 194017.

[18] Hagelaar, G. J. M. and Pitchford, L. C., "Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models," *Plasma Sources Science and Technology*, Vol. 14, No. 4, 2005, pp. 722–733.

[19] Townsend Brown, T., "A method of an apparatus or machine for producing force and motion," 1928, GB Patent 300311.

[20] Townsend Brown, T., "Electrokinetic apparatus," Aug. 16 1960, US Patent 2,949,550.

[21] Christenson, E. and Moller, P., "Ion-Neutral Propulsion in Atmospheric Media," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1768–1773.

[22] Wilson, J., Perkins, H., and Thompson, W., "An Investigation of Ionic Wind Propulsion," Tech. rep., NASA Report NASA/TM, 2009.

[23] Pekker, L. and Young, M., "A model of an ideal Electrohydrodynamic Thruster," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 27, No. 4, 2011, pp. 786–792.

[24] Masuyama, K. and Barrett, S. R. H., "On the Performance of electrohydrodynamic propulsion," *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 50, No. 6, 2013, pp. 1480–1486.

[25] Kiousis, K. N., Moronis, A. X., and Fruh, W. G., "Electro-Hydrodynamic (EHD) Thrust Analysis in Wire-Cylinder Electrode Arrangement," *Plasma Science and Technology*, Vol. 16, No. 4, 2014, pp. 363–369.

[26] Moreau, E., Benard, N., Alicalapa, F., and Douyère, A., "Electrohydrodynamic force produced by a corona discharge between a wire active electrode and several cylinder electrodes. Application to electric propulsion," *Journal of Electrostatics*, Vol. 76, 2015, pp. 194–200.

[27] Gilmore, C. K. and Barrett, S. R. H., "Electrohydrodynamic thrust density using positive corona-induced ionic winds for in-atmosphere propulsion," *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 471, No. 2175, 2015.

[28] Grindley, G. C., "The Mobility of Ions in Air.-Part I. Negative Ions in Moist Air." *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 110, No. 754, 1925, pp. 341–358.

[29] Erikson, H. A., "On the Nature of the Negative and Positive Ions in Air, Oxygen and Nitrogen," *Physical Review*, Vol. 20, No. 2, 1922, pp. 117–126.

[30] Krylov, E. V. and Nazarov, E. G., "Electric field dependence of the ion mobility," *International Journal of Mass Spectrometry*, Vol. 285, No. 3, 2009, pp. 149–156.

[31] Sigmond, R. S., "Simple approximate treatment of unipolar space-charge-dominated coronas: The Warburg law and the saturation current," *Journal of Applied Physics*, Vol. 53, No. 2, 1982, pp. 891–898.

[32] Stuetzer, O. M., "Magnetohydrodynamics and Electrohydrodynamics," *Physics of Fluids*, Vol. 5, No. 5, 1962, pp. 534–544.

[33] Kim, C., Noh, K. C., Hyun, J., Lee, S. G., Hwang, J., and Hong, H., "Microscopic energy conversion process in the ion drift region of electrohydrodynamic flow," *Applied Physics Letters*, Vol. 100, No. 24, 2012, pp. 0–5.

[34] Townsend, J. S., *Electricity in Gases*, 1915.

[35] Roth, J., *Industrial Plasma Engineering, Principles*, Vol. 1, IOP, London, 1995.

[36] Li, S. and Uhm, H., "Investigation of electrical breakdown characteristics in the electrodes of cylindrical geometry," *Physics of Plasmas*, Vol. 11, No. 6, 2004, pp. 3088.

[37] Ponta, F. L. and Aref, H., "Strouhal-reynolds number relationship for vortex streets," *Physical Review Letters*, Vol. 93, No. 8, 2004, pp. 1–4.

[38] Stearns, R. G., "Ion mobility measurements in a positive corona discharge," *Journal of Applied Physics*, Vol. 67, No. 6, 1990, pp. 2789–2799.

Chapitre 3

Mesures du champ de vitesse et force EHD

Sommaire

3.1 Vent ionique et mesures expérimentales : état de l'art 55
3.2 Mesure expérimentale du champ de force 56
3.3 Résultats 64
3.4 Article *Physical Review Fluids* 65

Dans ce chapitre nous discutons certains aspects bibliographiques méthodologiques concernant les mesures experimentales effectuées, ainsi qu'un examen critique des mesures effectuées et de leur possible amélioration. Nous donnons ensuite, en fin de chapitre un exposé détaillé des résultats obtenus dans le cadre d'une publication parue dans *Phys Rev. Fluids*.

3.1 Vent ionique et mesures expérimentales : état de l'art

Les premières mesures expérimentales du vent ionique ont été réalisées dans les année 60 au moyen d'anémomètres à hélice [4] ou de sondes à fil chaud placées en aval du dispositif [12]. En 1961 les mesures de Robinson [12] atteignent des vitesses de 4 m/s avec une conversion de moins de 1% de l'énergie électrique en énergie cinétique. Christenson et Moller [4] s'intéressent à la force de poussée exercée sur les électrodes et mesurent eux aussi une efficacité proche de 1% avec un vent ionique atteignant 2.5 m/s. On peut également citer les travaux de Yabe [70] qui caractérise la pression exercée par le vent ionique à la surface du collecteur pour une configuration pointe-plan. Plus récemment les études de Moreau [71, 44] et de Colas [72] utilisent un tube en verre comme prise de pression dynamique afin de minimiser l'influence de la sonde sur le champ électrique. En traçant le profil de vitesse an aval des électrodes ils en déduisent la puissance mécanique transmise au fluide. L'efficacité mesurée du système n'excède pas 1.7%. Ces mesures ont permis de vérifier des relations simples reliant le courant, la tension et la vitesse du vent ionique. Les modèles 1D ont ainsi montré leur efficacité pour prédire les tendances observées expérimentalement. Cependant les sondes utilisées ne peuvent accéder aux zones de fort champ électrique sans risquer de perturber la décharge ou d'endommager le matériel. Les méthodes optiques permettent de s'affranchir en partie de ces risques.

En 2005 Rickard [73] effectue des mesure PIV (*Particle Image Velocimetry*) de la vitesse du vent ionique en sortie d'un canal avec une tuyère de section variable. Il atteint une vitesse de 2.4 m/s et observe l'influence de la section de sortie sur la génération de vent ionique. Dans sa thèse de 2008 Bérard [74] mesure par LDV (*Laser Doppler Velocimetry*) le profil de vitesse en sortie

d'un système d'électrode de type fil-cylindres. Il atteint des vitesses maximales de l'ordre de 2.4 m/s pour une distance inter-électrode de 1 cm et une tension de 13.6 kV. Mais l'intérêt des mesures optiques consiste à mesurer la vitesse du vent ionique y compris dans les zones de fort champ électrique. La revue dressée par Mizeraczyk en 2013 [75] recense de nombreuses études PIV menées dans des précipitateurs électrostatiques. Ces systèmes ont pour but de collecter des particules en suspension dans l'air en utilisant une décharge couronne et une électrode collectrice. Les forces électrostatiques agissent sur les plus grosses particules qui se retrouvent plaquées contre l'électrode collectrice. En revanche la répartition des particules submicroniques dépend de l'écoulement de l'air entre les électrodes. Il est donc nécessaire de caractériser le champ de vitesse et les méthodes optiques s'y prêtent particulièrement bien puisqu'elles reposent sur le suivi de particules.

En aérodynamique les actionneurs à plasma ont fait l'objet de nombreuses études. Ce type d'actionneur repose sur la manipulation de la couche limite se formant autour d'un objet en générant un vent ionique près des parois. Les électrodes sont en général plaquées à la surface de l'objet et l'électrode collectrice se retrouve encapsulée dans la paroi isolante. La vitesse près de la parois est mesurée au moyen de sondes Pitot adaptées, comme le montre l'état de l'art dressé en 2007 par Moreau et Benard [25, 27]. Le vent ionique atteint typiquement 3 m/s. Les études se sont orientées vers un actionnement pulsé à tension alternative. Il a donc fallu trouver un système de mesure résolu en temps autre que les sondes fil chaud. Avec la PIV il est possible de mesurer le champ de vitesse en fonction du temps [76]. Par ailleurs la mise en série de ce type d'actionneur a permis d'atteindre des vitesses proches de 10 m/s [28]. Plus récemment, en travaillant la forme des électrodes des améliorations significatives ont été apportées [77], ce qui confirme l'importance de la forme et de la position des électrodes dans un dispositif à vent ionique. Enfin en 2013 Benard *et al.* [78] effectuent une mesure indirecte de la force de poussée générée par ce type d'actionneur à partir de champ de vitesse obtenus par PIV. La force de poussée atteint 300 mN/m au maximum lors d'un cycle. Les représentations spatiales de la force volumique appliquée au fluide montre que localement la force électrostatique atteint 1000 à 2000 $\mathrm{N.m^{-3}}$.

L'une des difficultés expérimentales consiste à trouver des traceurs (les particules nécessaires au suivi de l'écoulement) qui n'influencent pas de manière significative la décharge. Ce dernier point est peu quantifié dans les études précédentes, à certaines exceptions près [76]. En 2014 Hamdi [79] teste différents traceurs et met en évidence l'effet néfaste de certains d'entre eux comme la fumée de spectacle (*VDL smoke liquid*) ou les particules Expencel (EMS,Suède) dont la présence modifie significativement le courant électrique de la décharge. D'autres traceurs tels que la fumée d'encens ou les micro-billes de verre ont une influence plus modérée.

3.2 Mesure expérimentale du champ de force

Si le champ de vitesse d'un fluide est obtenu expérimentalement de manière suffisamment résolue en espace et en temps, il est possible d'en déduire la répartition des forces de volumes. On calcule pour cela le membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement

$$\partial_t \mathbf{u} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \mathbf{f}_{ehd} - \nabla P \tag{3.1}$$

avec $\tau_{ij} = \mu(\partial_j U_i + \partial_i U_j)$ le tenseur des contraintes visqueuses. L'une des limites de ce type d'approche pour les écoulements EHD, est de ne pas pouvoir différencier les forces volumiques $\mathbf{f}_{ehd}$ du gradient de pression $-\nabla P$. L'origine physique de ces deux termes réside dans les interactions entre molécules, ions-neutre dans le premier et neutre-neutre pour le second. Ces deux termes agissent de manière similaire et on ne peut que mesurer la somme des deux *a priori*.

Dans les sections suivantes les différentes méthodes employées jusqu'à présent sont passées en revue, avec leurs avantages et leurs limites. En conclusion, une nouvelle méthodologie pouvant s'appliquer à certains types d'écoulements EHD est proposée.

Cas général

On considère un écoulement de fluide visqueux incompressible soumis à une force par unité de volume $\mathbf{f}$. Le modèle de Navier-Stokes s'écrit alors en notation indicielle

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.2}$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla P + \frac{1}{\rho_f}\mathbf{f}_{ehd} \tag{3.3}$$

avec $\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} = \mu(\partial_j U_i + \partial_i U_j)$ et la notation abrégée pour les dérivées

$$\partial_i() = \frac{\partial()}{\partial x_i}$$

Classiquement pour obtenir le champ de pression l'opérateur divergence est appliqué à l'équation (3.3). L'hypothèse d'incompressibilité permet quelques simplifications

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\partial_t \mathbf{u}) = 0 \\
&\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = \partial_i(U_j)\partial_j(U_i) + 0 \\
&\nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) = \nabla \cdot (\mu \Delta \mathbf{u}) = 0
\end{aligned}$$

avec Δ l'opérateur laplacien. On obtient finalement à l'équation de la pression généralisée en présence d'une force volumique quelconque

$$\Delta P = -\rho_f \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{f}. \tag{3.4}$$

Cas de base, sans force volumique

Dans le cas où la force volumique est nulle, on retrouve une équation classique de la pression en écoulement incompressible.

$$\Delta P = -\rho_f \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{3.5}$$

Différentes méthodes de reconstruction du champ de pression à partir de données PIV existent déjà, comme le montre la revue bibliographique réalisée par Van Oudheusden [80]. Elles peuvent être rangées en deux catégories. La première catégorie consiste en une intégration spatiale du membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement. L'intégration peut avoir lieu de différentes manière mais consiste dans tous les cas à partir d'un point de départ qui sert de pression de référence. Une limitation vient de la propagation de l'erreur lors de l'intégration de proche en proche. La seconde catégorie utilise l'équation de la pression (3.5). Il s'agit alors de résoudre un problème de Poisson sur la pression, en utilisant les données PIV dans le membre de droite de et en spécifiant des conditions limites aux frontières du domaine. Cette méthode nécessite que les bords du champ PIV correspondent à des conditions limites simples, ou connues.

Dans le cas des écoulements EHD, la force volumique constitue une inconnue supplémentaire. Le gradient de pression et la pression ne peuvent pas être calculés sans une hypothèse supplémentaire.

Hypothèses pour le calcul de la force EHD

La détermination des forces de volumes à partir d'un champ de vitesse expérimental est un problème qui n'a pour l'instant pas encore trouvé de solution complètement satisfaisante. L'approche la plus réaliste consiste à calculer le membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement, résolue en temps dans le cas instationnaire, pour retrouver la somme des forces de volumes et du gradient de pression. Ensuite il ne reste qu'à "espérer" que le gradient de pression ne soit pas trop important. Benard *et al.* [78] ainsi que Neumann *et al.*[81] utilisent cette approche sur un actionneur à plasma pulsé. Bien que le gradient de pression ne puisse pas être négligé de manière certaine, cette approche permet tout de même d'avoir une idée de l'intensité et de la répartition des forces de volumes. Typiquement lors d'un cycle, l'intensité des forces de volume peut atteindre localement plus de 1000 $\mathrm{N/m^3}$ pour l'actionneur testé.

Une manière de s'affranchir du gradient de pression a été proposée par Albrecht *et al.* [82]. L'approximation d' Albrecht permet d'estimer la composante x de la force volumique en 2D. On fait pour cela apparaître la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ dans l'équation de quantité de mouvement d'un fluide visqueux incompressible

$$\rho_f \partial_t \mathbf{u} + \rho_f \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho_f \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{f} + \mu_f \Delta \mathbf{u} \tag{3.6}$$

puis le gradient de pression est éliminé en prenant le rotationnel ($\nabla\times$) de l'équation de quantité de mouvement

$$\rho_f \partial_t \boldsymbol{\omega} + \rho_f \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{f} + \mu_f \Delta \boldsymbol{\omega}. \tag{3.7}$$

L'hypothèse d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ permet de simplifier le membre de gauche pour obtenir finalement

$$\rho_f \partial_t \boldsymbol{\omega} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \rho_f (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu_f \Delta \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{f}. \tag{3.8}$$

Pour un écoulement bidimensionnel selon x et y, $u_z = 0$ et $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{e}_z = (\partial_x u_y - \partial_y u_x)\mathbf{e}_z$ l'équation précédente se réduit à

$$\rho_f \partial_t \omega_z + \rho_f \left(u_x \partial_x \omega_z + u_y \partial_y \omega_z \right) - \mu_f \left(\partial_x^2 \omega_z + \partial_y^2 \omega_z \right) = \partial_x f_y - \partial_y f_x. \tag{3.9}$$

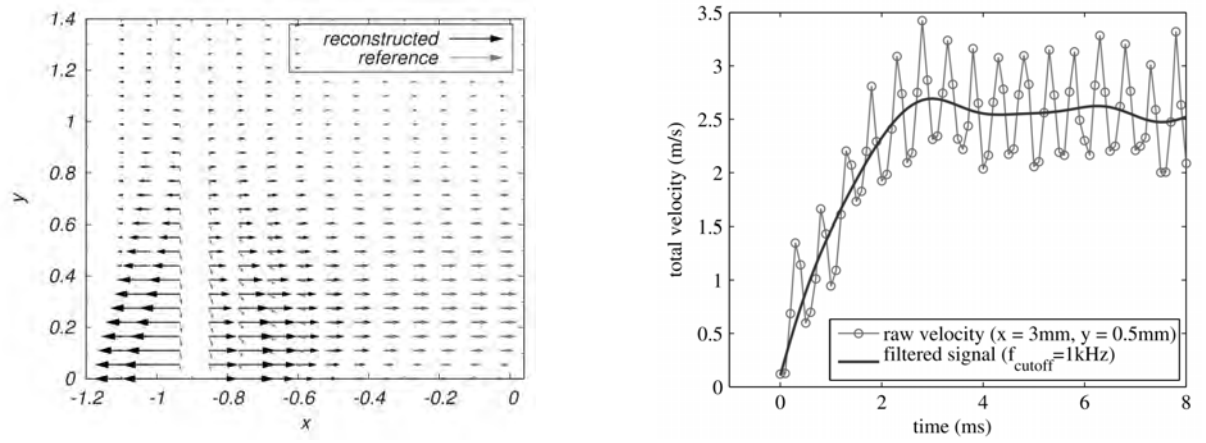
En faisant l'hypothèse que $\partial_y f_x \gg \partial_x f_y$, qui peut se justifier pour certaines zones et pour des géométries avec de grand rapport d'aspect, on obtient l'approximation d' Albrecht. f_x est alors obtenue en intégrant selon y

$$f_x(x, y) \approx - \int_y^\infty \rho_f \partial_t \omega_z + \rho_f \left(u_x \partial_x \omega_z + u_y \partial_y \omega_z \right) - \mu_f \left(\partial_x^2 \omega_z + \partial_y^2 \omega_z \right) \mathrm{d}y \tag{3.10}$$

en partant d'une position où f_x est supposée connue, par exemple en prenant $f_x(y = \infty) = 0$. Pour illustrer la validité de cette approximation, Albrecht fait l'expérience suivante : il réalise une simulation numérique d'un écoulement soumis à un champ de force de référence, puis la méthode décrite précédemment est employée pour reconstruire f_x à partir du champ de vitesse. Les résultats montrent que cette approximation est tout à fait acceptable dans les zones où la deuxième composante de la force varie peu, voire figure 3.1a, mais complètement erronée ailleurs.

Comme les sytèmes EHD ou les actionneurs à plasma reposent sur l'utilisation d'une électrode émettrice de petite taille autour de laquelle le champ électrique $\mathbf{E}$, et par conséquent la force $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$, a une géométrie sphérique (pointe) ou cylindrique (fil), il y a peu d'espoir pour que l'approximation d' Albrecht soit satisfaisante au voisinage de cette électrode.

Pour estimer l'impact du gradient de pression, Benard *et al.* [78] combinent la première approche et l'approximation d'Albrecht. La comparaison entre les deux méthodes montre que



(a) **(b)**

Figure 3.1 – *(a) Champ de force de référence et celui reconstuit par Albrecht et al.[82]. (b) Vitesse filtrée pour l'emploie de la méthode de Kotsonis et al. [83].*

les champs de force calculés sont similaires dans certaines zones mais diffèrent dans d'autres. Étant donné les remarques précédentes, il est difficile de savoir si ces différences sont dues au gradient de pression ou à la validité de l'approximation d'Albrecht.

Une autre méthode a été proposée par Kotsonis *et al.* [83]. Cette méthode repose sur l'hypothèse que la force volumique appliquée est constante. Elle consiste à dériver en temps l'équation de quantité de mouvement, pour supprimer le terme constant de force volumique, puis à réintégré en temps. La constante d'intégration qui apparaît est déterminée par la condition initiale : le fluide est supposé au repos, de sorte que $\nabla P|_{t=0} = \mathbf{0}$. Avec cette intégration on obtient le gradient de pression instationnaire, ce qui permet ensuite d'en déduire la force volumique. Cette méthode ne s'applique donc *a priori* qu'à un écoulement instationnaire, comme par exemple l'écoulement transitoire au moment de l'allumage de l'actionneur. Elle nécessite donc d'avoir un système d'acquisition résolue en temps et d'enregistrer l'évolution du champ de vitesse depuis l'état initial au repos.

Dans le cas du vent ionique stationnaire par décharge couronne continue, les deux méthodes précédentes ne sont pas très intéressantes : soit à cause des approximations géométriques faites pour la méthode d'Albrecht, soit parce qu'elles nécessitent un écoulement instationnaire pour la méthode de Kotsonis. En revanche, en utilisant certaines propriétés de la décharge couronne il semble possible de distinguer le gradient de pression et la force volumique.

Remarque : *Dans le travail de Kotsonis et al. l'hypothèse est faite implicitement que la méthode peut-être étendue au cas où la force varie très rapidement dans le temps. Formellement cela peut se justifier en définissant τ la période caractéristique des variations de $\mathbf{f}$ et la période T d'échantillonnage de la vitesse. On suppose que $T \gg \tau$. On décompose ensuite chaque grandeur $a(t)$ en une composante basse fréquence $\tilde{a}(t) = \langle a(t) \rangle_T$, avec $\langle \cdot \rangle_T$ l'opérateur moyenne temporelle sur une durée T, et une composante haute fréquence $a'(t) = a(t) - \tilde{a}(t)$. Par définition $\langle a'(t) \rangle_T = 0$ et $\langle \tilde{a}(t) \rangle_T = \tilde{a}(t)$. En appliquant ce filtre passe bas à l'équation de quantité de mouvement cette dernière devient*

$$\rho_f \left(\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \rangle_T \right) = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\mathbf{f}} + \mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}. \tag{3.11}$$

Le terme $\tilde{\mathbf{f}}$ est constant dans le temps, puisque l'on a fait l'hypothèse que la force volumique n'admet que des variations à haute fréquence et que l'on a "moyenné" sur un temps T suffisamment long. Ce qui justifie l'hypothèse de Kotsonis selon laquelle la force est "quasi constante" à l'échelle du temps hydrodynamique. En pratique, le signal issu du dispositif cadencé à 10 kHz a

été filtré avec un passe bas dont la fréquence de coupure était de 1 kHz ($T = 1$ ms). La fréquence de la tension de l'actionneur plasma était de 2 kHz ($\tau = 0.5$ ms). La condition $T \gg \tau$ n'était donc pas vraiment respectée. En revanche, rien n'indique que le terme $\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \rangle_T$ soit petit devant les autres termes. Les données résolues en temps de Kotsonis, voire figure 3.1b, semblent au contraire indiquer que les fluctuations à hautes fréquences sont assez importantes. En pratique il faudrait estimer expérimentalement l'importance de ce terme pour savoir s'il est bel et bien négligeable.

Cas de la décharge couronne

Une modélisation communément employée pour la décharge couronne consiste à distinguer deux zones : une zone de taille réduite proche de l'émetteur où l'ionisation est prépondérante, et la zone de *drift* dans le reste du volume inter-électrodes où les ions créés dérivent sous l'effet du champ électrique. C'est dans cette seconde zone qu'a lieu la majorité du transfert de quantité de mouvement. La décharge couronne se différencie donc des actionneurs à plasma de type DBD pour lesquels la limite entre zone d'ionisation et de *drift* n'est pas aussi nette. De manière générale, on fait l'hypothèse que le courant total est conservé entre les électrodes

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{3.12}$$

avec $\mathbf{j} = en_p\mu_p\mathbf{E} - en_n\mu_n\mathbf{E} - en_e\mu_e\mathbf{E}$ le vecteur densité de courant. Dans la zone de *drift*, le champ électrique E étant plus faible qu'à la surface de l'émetteur, le taux d'ionisation y est bien plus faible : $\alpha = B\exp(-C/|E|) \approx 0$. Les autres réactions d'ionisation sont supposées négligeables dans la zone de *drift*. Cette absence de création d'ions permet d'écrire la conservation du flux d'ions

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0. \tag{3.13}$$

L'analyse asymptotique de Durbin & Turyn [84] montre que pour la décharge couronne positive, en dépit de la mobilité plus importante des électrons, c'est le flux d'ions positifs qui domine largement dans la zone de *drift* : $\mathbf{j} = \mathbf{j}_p$. La conservation du courant dans cette zone devient alors

$$\nabla \cdot (en_p\mu_p\mathbf{E}) = 0. \tag{3.14}$$

Les résultats théoriques de Durbin & Turyn sont confirmés par l'analyse numérique de Zheng *et al.* [57]. Par conséquent la concentration d'ions positifs dans la zone de *drift* est donc largement dominante devant celle des électrons et des ions négatifs, ce qui permet d'écrire la densité totale de charge $\rho \approx en_p$. La force EHD ne dépend donc que de la concentration en ions et du champ électrique

$$\mathbf{f}_{ehd} = \rho\mathbf{E} \approx en_p\mathbf{E}. \tag{3.15}$$

En injectant le résultat (3.15) dans l'équation de conservation du courant (3.14) on obtient finalement

$$\nabla \cdot (\mu_p\, \mathbf{f}_{ehd}) = 0. \tag{3.16}$$

De manière tout à fait générale, en particulier à faible pression et donc à fort champ électrique réduit (typiquement $E/N > 100$ Td), la mobilité des ions peut varier, ce qui conduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_{ehd} = -\frac{\rho}{\mu_p}\nabla\mu_p \cdot \mathbf{E} \tag{3.17}$$

On note $\|\mathbf{E}\|$ la norme du champ électrique. En appliquant le théorème de dérivation de fonction composée à $\mu_p(\|\mathbf{E}\|(x))$ on obtient finalement

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_{ehd} = -\frac{\rho}{\mu_p}\frac{\mathrm{d}\mu_p}{\mathrm{d}\|\mathbf{E}\|}\nabla\|\mathbf{E}\| \cdot \mathbf{E} \tag{3.18}$$

Pour les cas usuels de décharge à pression ambiante, la mobilité varie peu avec le champ électrique et le terme $\frac{\mathrm{d}\mu_p}{\mathrm{d}\|\mathbf{E}\|}$ est donc petit. Cette dernière hypothèse est souvent reprise pour les divers modèles numériques de la décharge couronne. Ce qui aboutit au fait que le champ de force est à divergence nulle

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_{ehd} \approx 0. \tag{3.19}$$

Cette propriété du champ de force pour les décharges couronnes positives peut être employée pour isoler le champ de pression à partir des données PIV. En effet l'équation de la pression (3.4) pour un champ de force à divergence nulle devient simplement

$$\Delta P = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) \tag{3.20}$$

ce qui autorise l'emploi de la méthode classique de reconstruction de la pression en résolvant le problème de Poisson. Cette méthode nécessite d'imposer des conditions limites aux bords du domaine. Dans le cadre de cette thèse ce résultat n'a malheureusement pas pu être exploité. Le champ de vision du dispositif PIV est entrecoupé par les structures portant les électrodes. Certains bords se trouvent dans des zones où les conditions de pression ou de gradient de pression sont complètement inconnues ce qui ne permet pas de mettre en place la méthode proposée. Néanmoins en adaptant le champ de vision c'est une piste intéressante pour de futurs travaux. La procédure complète serait alors

1 Mesure du champ de vitesse par PIV.
2 Reconstruction du champ de pression à partir de (3.20).
3 Calcul de $\mathbf{f}_{ehd}$ à partir de l'équation de quantité de mouvement et du gradient de pression reconstruit.

Cas instationnaire avec mesure non résolue en temps

Dans le cas instationnaire il est possible de calculer la dérivée temporelle si le système d'acquisition est résolu en temps. Dans notre cas une approche RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) a été employée. Cette approche ne nécessite pas de calculer la dérivée temporelle, mais uniquement les grandeurs statistiques de l'écoulement : moyenne, variance et covariance des composantes de la vitesse. Cela permet de limiter la fréquence d'échantillonnage et donc de limiter le nombre d'images tout en étalant les mesures dans le temps. Le fait d'avoir une longue durée d'acquisition a permis de s'affranchir des effets à dynamique lente. En particulier, des recirculations peuvent survenir dans l'enceinte de confinement, avec des temps d'oscillation caractéristiques de l'ordre de quelques dizaines de seconde. Il était donc nécessaire de moyenner les mesures sur une durée importante afin d'assurer la convergence des grandeurs statistiques. A titre indicatif, la convergence en moyenne et en variance est tracée en deux points du champ de vitesse sur la figure

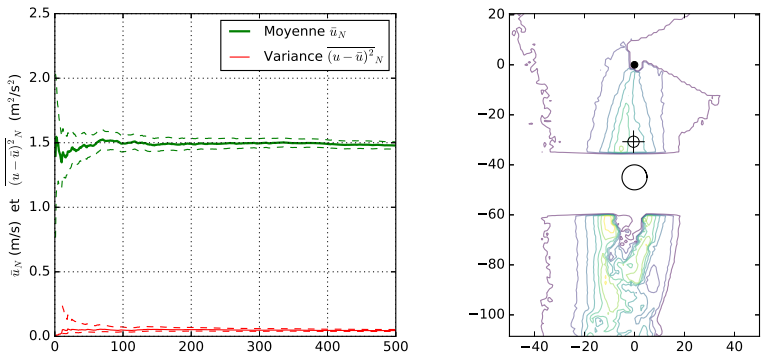
Choix de l'ensemencement

Dans l'idéal les particules utilisées pour l'ensemencement PIV doivent être des traceurs passifs. C'est à dire

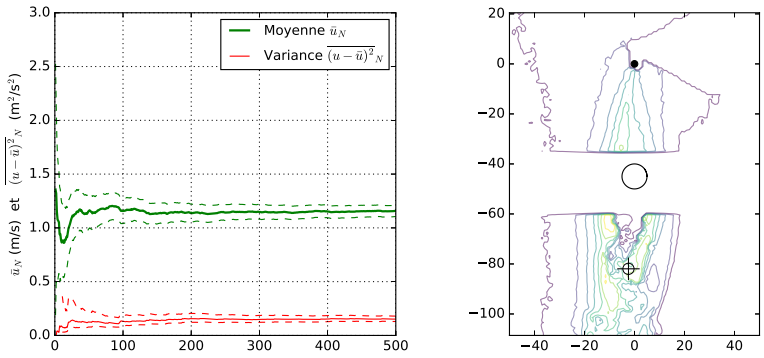
1) avoir une inertie suffisamment faible pour suivre le fluide porteur, ce qui se traduit par un faible nombre de Stokes

$$St = \frac{\rho_p d_p^2 u C_c}{18 \mu_f L} \tag{3.21}$$

où ρ_p est la masse volumique des particules, d_p leur taille caractéristique, $C_c \approx 1$ est le facteur correctif de Cunningham pour les particules de l'ordre du libre parcours des molécules du gaz et L une longueur caractéristique de l'écoulement.



(a)



(b)

Figure 3.2 – *Convergence statistique et intervalles de confiance à 99% pour $d = 4$ cm, $s = 0$ cm, $V = 27.5$ kV pour (a) un point au dessus du collecteur et (b) un point dans le sillage du collecteur.*

2) Les traceurs ne doivent ni "flotter" ni "couler" dans le fluide porteur. Le nombre d'Archimède doit donc être petit

$$Ar = \frac{g d_p^3 \rho_f (\rho_p - \rho_f)}{\mu_f^2}. \tag{3.22}$$

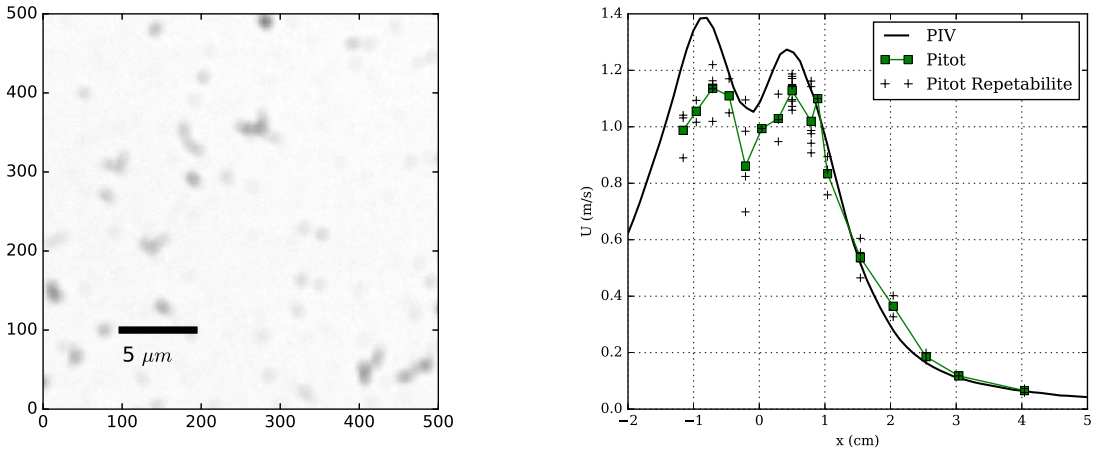
3) D'après Hamdi *et al.* [79] le rapport de mobilité M doit être supérieur à 3

$$M = \frac{\sqrt{\varepsilon_f / \rho_f}}{K} \tag{3.23}$$

où K désigne la mobilité d'une particule chargée électriquement. En supposant que les particules se charge sous l'effet d'un champ électrique il est possible d'estimer la quantité de charges s'accumulant sur les particules en fonction du temps. Hamdi *et al.* estiment que pour la fumée d'encens, les particules ont un diamètre de moins de 1μm, ce qui donne $St = 2.2 \times 10^{-2}$, $Ar \approx 10^{-5}$ et $M \approx 28$. Les particules d'encens semblent convenir à une utilisation en EHD. L'expérience montre cependant que les mesures PIV faites avec de la fumée d'encens tendent à légèrement surestimer la vitesse par rapport à des mesures réalisées avec un tube de Pitot (ou plutôt une simple prise de pression totale). Une étude au microscope optique du dépôt de fumée sur une lamelle en verre confirme les estimations d'Hamdi concernant la taille des particules, figure 3.3a. La résolution optique du microscope étant de toute manière limitée à environ 1μm, on en déduit que les particule ont effectivement une taille inférieure ou égale au micromètre. La différence entre tube de Pitot et PIV à l'encens est également reportée sur la figure 3.3b. Les mesures dites "Pitot" sont en réalité issue d'un tube en verre de 1mm de diamètre servant de prise de pression d'arrêt. Leur précision est toute relative comme en atteste la répétabilité des mesures : chaque croix représente une moyenne du signal de vitesse pendant une minute à une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz. La courbe verte est une moyenne de toutes les données.

En pratique le tube de Pitot est bien moins facile à utiliser. Tout d'abord les pressions dynamiques sont faibles, typiquement moins de 1 Pa. Étant donnée que la précision du capteur de pression Sensirion SDP600-25Pa annoncée à 0.1 Pa, les mesures sont plus exploitables dans les zones où le vent ionique est maximal. Par ailleurs lorsque la vitesse de l'air n'est pas alignée avec l'axe du tube, la pression mesurée ne correspond plus tout à fait à la pression d'arrêt. Même si en moyenne le champ de vitesse est dirigé vers le bas, il peut y avoir des fluctuations instantanées importantes dans le sillage du collecteur ce qui peut introduire un biais dans les mesures. En particulier, les vortex dans le sillage du collecteur peuvent momentanément atteindre des longueurs importantes formant ainsi des zones où l'écoulement "remonte" en direction du collecteur, voire section 3.3.

Pour toutes ces raisons, l'écart entre les mesures obtenues avec le tube de Pitot et PIV dans le sillage du collecteur (-1 cm $< x <$ 1 cm) semble plutôt attribuable à un biais de mesure de la pression dynamique qu'à l'influence de l'ensemencement. De plus, en dehors du sillage, les deux méthodes de mesure de la vitesse sont en assez bon accord.



(a) **(b)**

Figure 3.3 – *(a) Particules d'encens au microscope optique ×100.(b) Comparaison entre la mesure par PIV et par tube Pitot à pression d'arrêt. Profile de vitesse réalisé 4 cm en aval du collecteur pour $d = 4$ cm, $s = 0$ cm, $V = 27.5$ kV.*

3.3 Résultats

De nombreuses configurations ont été étudiées au moyen du dispositif PIV. Pour limiter le nombres de paramètres, la taille des électrodes a été fixée de sorte que le fil émetteur en tungstène avait un diamètre de 50 μm et le collecteur était un tube en acier de 1 cm de diamètre. La liste complète des cas étudiés est fournie à titre indicatif en figure 3.4.

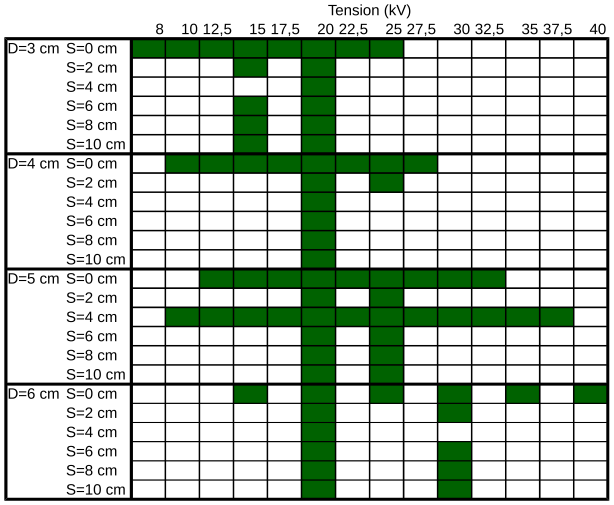


Figure 3.4 – *Liste des configurations (distance, spacing et tension) étudiées par PIV.*

Le plan d'expérience a été choisi de sorte à pouvoir analyser : l'effet de la tension V à configuration géométrique fixée, l'effet du *spacing* s à tension ou à rapport tension/distance fixé, l'effet de la distance d à tension ou à rapport tension/distance fixé. Une première analyse de toutes ces données a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes.

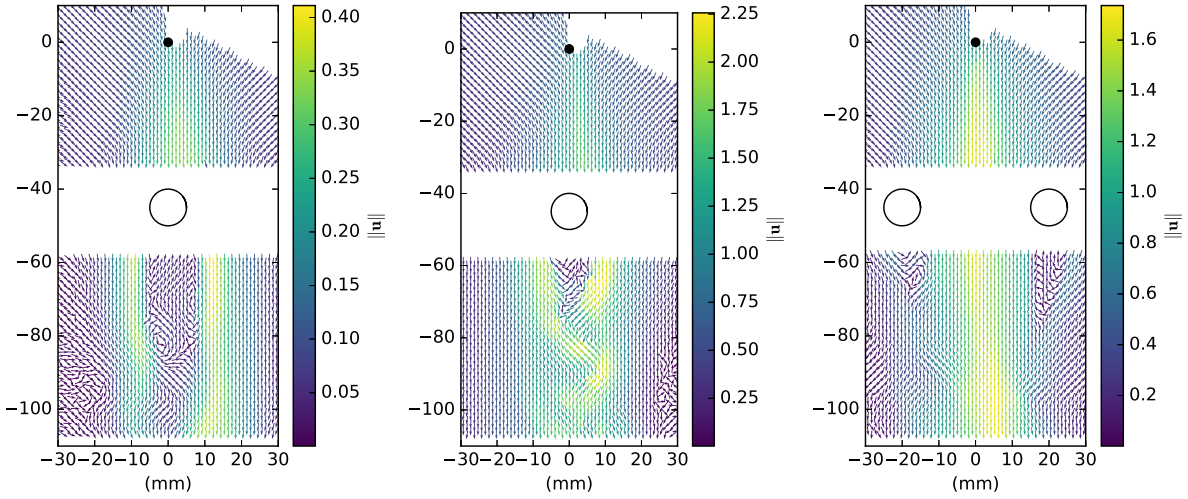
— Un sillage se forme en aval du collecteur. Il est matérialisé tantôt par deux vortex contrarotatifs dont la taille moyenne varie avec la tension appliquée, tantôt par du détachement

tourbillonnaire instationnaire, tantôt par un sillage complètement désorganisé.

— Dans le cas à deux collecteurs, le flux d'air total est plus important. Les vortex de sillage sont attachés à chaque électrode et peuvent interagirent entre eux, typiquement lorsque l'écartement entre les collecteurs est du même ordre que leur rayon. A contrario, plus l'écartement est grand, plus les vortex sont de taille réduite.

— Le jet vertical formé en amont du collecteur peut parfois osciller lentement autour de sa position centrale. L'aspect du sillage s'en trouve considérablement modifié, avec des changements de régimes selon que le jet est centré ou décentré par rapport au collecteur.

Les champs de vitesse instantanés de la figure 3.5 illustrent l'allongement considérable des vortex de sillage à faible tension (a). La cas (b) illustre quant à lui la transition vers un régime de détachement instationnaire de tourbillons en aval du collecteur. Ce régime s'apparente fortement à celui du détachement tourbillonnaire de Van Karman. Le cas (c) à deux collecteurs montre des vortex de bien moindre intensité et un flux d'air moins perturbé par les électrodes.



(a) **(b)** **(c)**

Figure 3.5 – *Champ de vitesse PIV instantané pour $d = 4$ cm et (a) $s = 0$ cm $V = 10$ kV, (b) $s = 0$ cm $V = 27.5$ kV et (c) $s = 4$ cm $V = 20$ kV.*

Une analyse plus détaillée est fournie dans la section suivante, dont le contenu a été publié en juin 2018 [85].

3.4 Article *Physical Review Fluids*

Electro-hydrodynamic ionic wind, force field and ionic mobility in a positive DC wire-to-cylinders corona discharge in air

Nicolas Monrolin, Olivier Praud, and Franck Plouraboué
Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) Université de Toulouse, CNRS, INPT, UPS, Allée du Pr. Camille Soula, 31400 Toulouse, France.
(Dated: October 24, 2018)

Ionic wind refers to the acceleration of partially ionized air between two high-voltage electrodes. We study the momentum transfer from ions to air, resulting from ionic wind created by two asymmetric electrodes and producing a net thrust. This electro-hydrodynamic (EHD) thrust, has already been measured in previous studies with digital scales. In this study, we provide more insights into the electro-hydrodynamic momentum transfer for a wire-to-cylinder(s) positive DC corona discharge. We provide a simple and general theoretical derivation for EHD thrust, which is proportional to the current/mobility ratio and also to an effective distance integrated on the surface of the electrodes. By considering various electrode configurations, our investigation brings out the physical origin of previously obtained optimal configurations, associated with a better trade-off between Coulomb forcing, friction occurring at the collector, and wake interactions. By measuring 2D velocity fields using Particle Image Velocimetry (PIV), we are able to evaluate the resulting local net force, including the pressure gradient. It is shown that the contribution of velocity fluctuations in the wake of the collecting electrode(s) must be taken into account to recover the net thrust. We confirm the proportionality between the EHD force and the current/mobility ratio experimentally, and evaluate the ion mobility from PIV measurements. A spectral analysis of the velocity fluctuations indicates a dominant frequency corresponding to a Strouhal number of 0.3 based on the ionic wind velocity and the collector size. Finally the effective mobility of charge carriers is estimated by a PIV based method inside the drift region.

I. INTRODUCTION

Ionic or electric wind occurs in atmospheric air when a high-voltage is applied between two asymmetric electrodes. A typical electrode configuration consists of two spaced parallel cylinders having a significant difference in their diameters: this is the wire/cylinder case. At the surface of the small electrode, called the emitter int the following, the electric field strength exceeds the air breakdown strength ($\simeq 3$ MV/m), so the electrons acquire enough kinetic energy to ionize air molecules. Above the breakdown limit, also called Townsend breakdown [13], the corona discharge takes place in the vicinity of the emitter. In the rest of the article, we will mainly analyze positive corona discharge occurring at the emitter. Inside a corona discharge, a strong localized production of electrons takes place, the collisions of which ionize air molecules, with the creation of either positive or negative ions. Since the collision-free path of an electron in air at atmospheric pressure, for temperatures between 300 K to 350 K is close to one micron, the electron concentration within the corona discharge displays a sharp peak, and rapidly decreases, outside this small region, which has a length of a few tens of microns. In contrast, ion concentration rises toward a maximum value, which is reached at the edge of the corona discharge. At a distance larger than a few corona discharge widths, the electron concentration is almost zero, but (for positive discharge) positive ions experience strong electro-convection. This unipolar charged region, situated away from the corona discharge and known as the "drift region" is the region where ionic wind occurs. In the drift region, unipolar charges experience a macroscopic Coulomb force, proportional to both the local density of ions and the electric field, which is responsible for a net momentum transfer to the air. Nevertheless, unlike the collisions occuring inside the corona discharge, these events are not energetic enough to generate further reactions and/or ion creations, so they lead to momentum transfer only. This phenomenology has been known for a long time, and analyzed in many studies [2–4, 6, 7, 11–13, 17, 34]. Recent investigations have revived interest in the possible propulsion capabilities of ionic wind, which were previously disregarded [16, 28, 31–33]. Nevertheless, many details concerning the ionic wind are still poorly understood, e.g., the precise chemical composition of the unipolar charges, the spatial dependence of charge ejection out of the corona discharge due to the geometrical configuration of the electrodes and the possible influence of unsteady wake effects downstream. This is why further development of experimental investigations are interesting in this context.

In this paper, we provide the first quantitative measurements inside the drift region and a rigorous theoretical derivation of the EHD lift force obtained from a new surface integral formulation. The ionic wind flow field is analyzed using Particle Image Velocimetry (PIV) measurement. In a quasi-2D wire/cylinder ionic wind generation geometry, the spatial distribution of the volumetric force is recovered as in [2]. However, by considering, for the first time, the effect of velocity fluctuations in the momentum transfer (bringing in the additional effect of the Reynolds stress tensor) as well as for kinetic energy, we show that these supplementary effects are of importance for ionic wind. Also, we explain why the two collector configuration gives better results for the EHD momentum transfer.

The paper is organized as follows. Section II A first discusses the EHD force, its relation to the ion current and its estimation from PIV measurement. Section II B describes the experimental set-up, the PIV protocol and the possible influence of seeding. Section III reports the results obtained for the flow and describes the force field evaluation when voltage is varied as well as their positions. The influence of unsteady wakes behind collectors and, finally, an evaluation of the apparent mobility are also deduced from the measurements prensented, and confronted with a previously proposed, transverse one-dimensional model of the charge flux and EHD thrust, as discussed in section III E.

II. METHODS

A. Force field determination

1. General considerations on EHD force.

In this section we examine the EHD force in the drift region some distance from the corona discharge. In this section we discuss and evaluate the contribution to EHD force associated with the drift region, but we also give at the end, a quantitative argument which permits to justify omitting the corona discharge region contribution. In the drift region, it is generally thought that the electron density is negligible [8, 40]. While this assumption is widely accepted and most often not discussed in recent publications [4] or textbooks [38], it has been justified in a few contributions [11], especially for the net positively charged corona. There are, in fact, three physical reasons for considering the electron concentration n_e to be negligible in the drift region of positive DC corona discharge relative to the unipolar charge concentration n. Firstly, electrons are created by a cascade of collisions inside the corona discharge for which the associated effective ionization coefficient depends exponentially on the electric field E. Hence, free electrons source

term is only present inside regions where the electric field is the largest. Hence, the electron creation from collisions is negligible in the drift region, where the local electric field is too weak. Secondly, free electron creation in the drift region mainly results from secondary photo-ionization radiation. Nevertheless, as considered in [11], the electron density decays exponentially away from the corona, because of the radiation kernel shape. Thirdly, the balance of charge fluxes from the corona region into the drift region leads electron flux inside the corona discharge to become equilibrated with unipolar charges inside the drift region. Since free electron charge flux, scaling as $\mu_e n_e E$, balances unipolar charge flux at the drift region/corona discharge interface $\mu n E$, this leads to $n_e \sim (\mu/\mu_e)n$ (μ_e and μ being the mobility of electron and unipolar charges). Thus, the maximum electron concentration scales as the unipolar charge concentration multiplied by the mobility ratio between the electron and the unipolar charges. Since the mobility ratio (μ/μ_e) is, in general, of the order of 10^{-2}, the electron concentration in the drift region produces a very small correction to the charge density and is not considered relevant for ionic wind. These issues are discussed in greater details in a forthcoming paper [30]. Since, charge density flux conservation holds for each species in the drift region where electro-convection is the dominant ionic wind transport mechanism, for positive ions charge concentration n associated with positive DC corona discharge, it leads to

$$\nabla \cdot (\mu n \mathbf{E}) = 0. \tag{1}$$

But, since the electron charge concentration is very small in the drift region, the charge density $\rho = e(n - n_e) \simeq en$ there, up to $O(\mu/\mu_e)$ corrections so that, (1) also reads, in the case of spatially uniform mobility μ,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{E}) = 0, \tag{2}$$

up to $O(\mu/\mu_e)$ corrections. Most ionic-wind devices consist of an emitting surface, S_e, where electric charges are created or injected, a collecting surface, S_c, and the drift volume Ω in between. Since S_e is the injecting surface of the drift volume, it borders the corona discharge regions, and does not exactly coincide with the emitter surface, as corona discharge regions are generally a few hundred microns thick. In gases, the fluid velocity contribution to the ion velocity can generally be neglected and the electric current density can be written $\mathbf{j} = \rho\mu\mathbf{E}$, with ρ the charge density and, again, μ the unipolar ion mobility, $\mathbf{E}$ the electric field. If S_e and S_c are parallel plates separated by a distance d with a uniform electric field, the classical one-dimensional approximation [6]

$$F_{EHD} = \frac{Id}{\mu} \tag{3}$$

gives the net force on Ω as a function of the net current

$$I = -\int_{S_e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s = \int_{S_c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s \tag{4}$$

Although (3) is derived from a simple 1D argument, it turns out to be an excellent approximation, even for 2D and 3D cases, which exhibit strong electric field variations and complex geometries. Recently, Gilmore and Barrett [16] generalized it in the case of any current tube, showing that (3) is, in fact, independent on the electric field shape.

Here, we derive a simple, general formulation of the force-current relationship that we have not found elsewhere. Let us first write the general expression of the net EHD force in the configuration illustrated in Fig. 1a

$$\mathbf{F}_{EHD} = \int_\Omega \rho \mathbf{E} \mathrm{d}v \tag{5}$$

Using the equality $\nabla \cdot (\mathbf{x} \otimes \rho\mathbf{E}) = \nabla \cdot (\rho\mathbf{E})\mathbf{x} + \rho\mathbf{E}.\nabla_\otimes \mathbf{x} = \nabla \cdot (\rho\mathbf{E})\mathbf{x} + \rho\mathbf{E}$, If μ is spatially homogeneous (constant) the local current density conservation law (2) in (5) leads to

$$\mathbf{F}_{EHD} = \int_\Omega \nabla \cdot (\mathbf{x} \otimes \rho\mathbf{E}) \mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \mathbf{x}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}s, \tag{6}$$

with $\mathbf{n}$ the outward normal and $\partial\Omega = S_e \cup S_c \cup S_{ext}$ the boundary of Ω. Again, we were not able to find this surface integral expression of the EHD force elsewhere. Now, considering again that the ion mobility μ is spatially homogeneous from (4), the following expression is obtained for the current/mobility ratio

$$\frac{I}{\mu} = \int_{S_c} (\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}s. \tag{7}$$

Comparing (6) and (7) thus leads to the direct relation $F_{EHD} = \mathcal{D}I/\mu$, where $\mathcal{D}$ is an integrated characteristic distance between the emitting and collecting electrodes. Three points can be highlighted from expression (6). Firstly, the net thrust is independent of the choice of coordinate origin. Changing the origin from O to O', with $\mathbf{x} = \mathbf{OM}$ does not affect (6) since

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{OM}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{OO'} + \mathbf{O'M})(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s = \mathbf{OO'}\int_{\partial\Omega} (\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} \mathbf{O'M}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s.$$

Since $\mathbf{OO'}$ is constant and because $\int_{\partial\Omega}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s = 0$, we finally obtain

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{OM}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \mathbf{O'M}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s.$$

Secondly, the contribution of S_{ext} is not obvious to determine theoretically. This issue can be tackled by choosing borders parallel to the electric field lines $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$. In this case, S_{ext} defines a current tube starting in S_e and ending at S_c and encompassing the whole domain. In practice the current density is distributed mainly in the inter-electrode space: if S_{ext} is far enough from the electrodes its contribution can be neglected.

Thirdly, (6) can be used to explain the robustness of the 1D result (3). For two parallel plates (as depicted in Fig. 1b) defined by $S_e = \{\mathbf{x}|x = 0\}$ and $S_c = \{\mathbf{x}|x = \Delta x\}$, the derivation is straightforward. The integral on S_e is zero since $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, so the net force is simply

$$\mathbf{F}_{EHD} = \mathbf{\Delta x}\int_{S_c} \rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s = \mathbf{\Delta x}\frac{I}{\mu} \tag{8}$$

with I the net current and $\mathbf{\Delta x} = (\Delta x, 0, 0)$. For the parallel wire-to-cylinder case illustrated in Fig. 1c, with an emitter wire centred at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and with d the face-to-face distance between the emitting and collecting electrodes, the net force results from three contributions

$$\mathbf{F}_{EHD} = \underbrace{-\int_{S_e} r_e\mathbf{n}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s}_{F_e} + \underbrace{\int_{S_c} (r_e + d + R_c)\mathbf{e_x}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s}_{F_d} + \underbrace{\int_{S_c} R_c\mathbf{n}(\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s}_{F_c}.$$

The norm of each term can be estimated as :$\|F_e\| \leq r_e\frac{I}{\mu}$, $\|F_d\| = (r_e + d + R_c)\frac{I}{\mu}$ and $\|F_c\| \leq R_c\frac{I}{\mu}$, respectively. In experimental EHD devices the following hierarchy of scale $r_e \ll R_c \ll d$ finally leads to

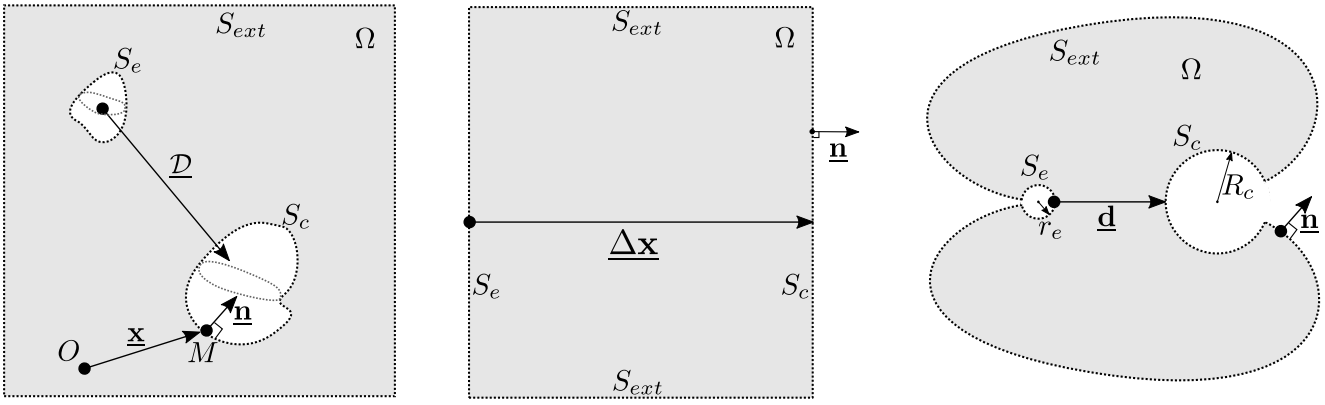
$$F_{EHD} \approx (r_e + d + R_c)\frac{I}{\mu} \approx F_d + O(\frac{r_e}{d}, \frac{R_c}{d}) \tag{9}$$

In practice, the approximation $r_e \ll d$ is well verified in most ionic wind devices since the corona discharge occurs near sharp points of electrodes. However, the collector(s) can be quite large. The current density is not uniformly distributed around the collector; it is concentrated on the surface region that faces the emitter, following Warburg's law or similar.

Finally, we would like to provide some quantitative argument for neglecting the corona discharge contribution to the EHD force. As known from many studies (e.g. [46]), unipolar charges are created inside the corona discharge, so as to reach their maximum concentration at the interface between the corona discharge and the drift region. Furthermore since the unipolar charge flux is balanced from the drift region the conserved emitted current in the drift region results from unipolar charge flux at the corona dicharge/drift region interface (up to a very small electron flux associated with secondary photo-emission Cf [30], for more details). It is then possible to provide an upper bound the EHD force, $\mathbf{F}^{CD}_{EHD}$ associated with the corona discharge region, hereby denoted Ω_{CD}, from using (5), $\mathbf{F}^{CD}_{EHD} = \int_{\Omega_{CD}} \rho\mathbf{E}\mathrm{d}v < \int_{\Omega_{DC}} en\mathbf{E}\mathrm{d}v < r_e.\int_{\partial\Omega_{DC}\equiv S_e} en\mathbf{E}\mathrm{d}s$. Since the unipolar charge flux from DC corona equals the total current divided by mobility, i.e, $\int_{\partial\Omega_{DC}\equiv S_e} en\mathbf{E}\mathrm{d}s = I/\mu$, we find that $\mathbf{F}^{CD}_{EHD} < r_e I/\mu$ so that, from (9), $\mathbf{F}^{CD}_{EHD} \ll \mathbf{F}_{EHD}$, since $r_e \ll d$.

2. Principle of PIV reconstruction

Here, various approaches based on the fluid momentum equation are discussed to estimate the instantaneous spatial distribution of the volumetric force and net averaged momentum transfer. In an example given in a previous work [2],



(a) (b) (c)

FIG. 1: Schematic diagrams of (a) 3D general case, (b) 1D planar case and (c) 2D wire/cylinder case.

the force field around a DBD plasma actuator was derived from the space and time derivatives of the velocity field

$$\underbrace{\rho_f \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho_f(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}}_{\text{Experimentally estimated}} = \underbrace{-\nabla P + \mathbf{f}_{EHD}}_{\text{unknown force}} \tag{10}$$

where $\mathbf{U} = (U, V, W)$ is the velocity vector, P the scalar pressure field, $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu_f(\nabla\mathbf{U} + \nabla^T\mathbf{U})$ the deviatoric stress tensor with $\mu_f = 1.8\cdot10^{-5}$ Pa.s the dynamic viscosity, and $\mathbf{f}_{EHD}$ the unknown volumetric electro-hydrodynamic force. This method, referred to as the *derivative method* throughout this paper, gives insights into the force distribution and its evolution with time. It also enables the computation of the net averaged force by integrating in space and time. In unsteady periodic flows, however, this necessitates a phase-locked PIV setup in order to compute phase averaged velocity fields as differentiating raw instantaneous velocity fields provides inaccurate results. Another method to determine the force applied to a given fluid volume Ω would be to integrate the momentum flux through the surface $\partial\Omega$ as in the next paragraph. This method, referred to as the *integral method*, does not provide *a priori* spatial information. For a steady EHD flow, the momentum balance is written

$$\int_{\partial\Omega}(\rho_f\mathbf{U})\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega}\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}\,\mathbf{n}\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega}P\,\mathbf{n}\mathrm{d}s + \int_{\Omega}\mathbf{f}_{EHD}\mathrm{d}\mathrm{v} \tag{11}$$

Assuming uniform pressure and considering only the horizontal x-component, the integral formulation reduces to the classical result

$$\rho_f \int (U_{outlet}^2 - U_{inlet}^2)\,\mathrm{d}y = F_x \tag{12}$$

with F_x the x-component of the resultant force applied to the air volume between the *inlet* and *outlet*. This simplified version of the integral momentum equation has been applied to an EHD thruster [32] with mitigated success: the thrust computed with U_{outlet} was overestimated by 70% when compared to the reference measurements performed with a digital scale. The author explains that the knowledge of U_{inlet} and a better positioning of the outlet should improve the measurement.

The integral method can be used more directly and effectively with Particle Image Velocimetry for example. PIV has already been applied to a pulsed DBD plasma actuator [2, 24, 25]. However, in [24] the integral method seems to systematically underestimate the net force applied to the control volume, a weakness that does not occur with time averaged derivative method. This indicates that temporal information is required to recover the net thrust precisely.

3. An approach for averaged velocity fields.

In a DC corona actuator, despite the steady actuation, strong velocity fluctuations can occur in the wake of the collecting electrode. Further details are given in section III B. Since their occurrence can be chaotic, it is hard to

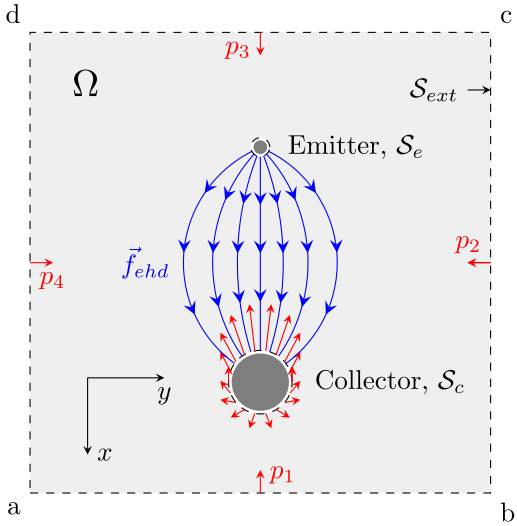


FIG. 2: Schematic of the control volume Ω and its contour $\partial\Omega = S_e \cup S_c \cup S_{ext}$. The blue streamlines represent the ion paths, hence EHD force. The red arrows represent pressure and viscous forces applied to the air by the collector.

synchronize any measurement device on them. In the following, we formulate an integral method that takes unsteady effects into account without recquiring a time-resolved nor a phase-locked PIV set-up. Following the classic Reynolds decomposition the velocity and pressure are split into a time averaged part $\bar{U}$ and a time dependent one $u'(t)$ with $\mathbf{U}(t) = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}'(t)$ and $P(t) = \bar{P} + p'(t)$. Using this decomposition, $\overline{u'} = \overline{p'} = 0$ by definition. Decomposing 11 into average and fluctuation finally leads to

$$\int_{\partial\Omega} (\rho_f \overline{\mathbf{U}})\overline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} \rho_f (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'})\, \mathbf{n} \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\tau}}\, \mathbf{n} \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \overline{P}\, \mathbf{n} \mathrm{d}s + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_{EHD} \mathrm{d}v \tag{13}$$

The local averaged formulation can be written

$$\rho_f \overline{\mathbf{U}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{U}} + \rho_f \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) - \mu_f \Delta \overline{\mathbf{U}} = -\nabla \overline{P} + \bar{\mathbf{f}}_{EHD} \tag{14}$$

bringing to the fore the usual Reynolds tensor $\left[\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}\right]_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$. In the present case, the flow is not, of course, truly turbulent but velocity fluctuations are comparable with the mean flow velocity. In the following, we focus on the vertical projection of the momentum equation. The x-projection of the left hand side based on Fig. 2 becomes

$$\int_{ab} \bar{U}^2 + \overline{u'^2} \mathrm{d}y + \int_{bc} \bar{U}\bar{V} + \overline{u'v'} \mathrm{d}x - \int_{cd} \overline{U}^2 + \overline{u'^2} \mathrm{d}y - \int_{da} \bar{U}\bar{V} + \overline{u'v'} \mathrm{d}y = \frac{1}{\rho_f}(-F_D + F_{EHD}) \tag{15}$$

In this expression, it is assumed that the viscous shear stress is negligible on *abcd* and that the pressure is uniform on *abcd*. F_{EHD} is the net force exerted on the air due to the ion drift. F_D is the aerodynamic drag, resulting from viscous friction and non-uniform pressure distribution on the electrodes - mainly on the collector, which is a hundred times larger than the emitter. The net thrust, T, applied to the electrodes, which can be measured with a digital scale, is the opposite of the forces applied to the air

$$T = -F_{EHD} + F_D \tag{16}$$

With the chosen axis convention, the EHD force applied to the air is positive (downward), which implies that the thrust on the electrodes is negative (upward). For the sake of clarity, we plot the absolute value of the thrust in all figures.

B. Experimental Configuration

1. General settings

The net thrust measurements were performed with a digital scale. This first set-up has been extensively used in previous publications [22, 29, 31, 32] and was used as a reference here. A frame made of PTFE was supporting electrodes of length $L = 39$ cm, a thin tungsten wire of diameter $r = 50$ μm (emitter) and one or more steel cylinders with diameter $R = 1$ cm (collector(s)). The frame was hung 50 cm below the digital scale (Mettler Toledo®ME3002 0.01g). The distance d (face-to-face) between the emitter and the collector(s) was varied between 3 and 6 cm, while the spacing, s, between the centres of the collectors was set from 0 ($s = 0$ cm corresponds to a single collector) to 10 cm. The mean current was measured by the power supply, with an accuracy of $\pm$ 2.5 μA. The same frame was considered for PIV velocity measurements. In this second set-up, the electrodes were placed in the middle of a cubic wooden box of edge 1 m. The emitter and the collector were positioned approximately 40 cm away from the walls. Two glass windows allowed optical access to the inside of the box. The light sheet was generated with two 130 mJ lasers (Quantel CFR 200, 532 nm). The time-lapse between two laser shots was adjusted so that the maximum displacement of the particle remained less than 10 pixels on the camera sensor (SensiCam PCO 1280x1024). Images were processed with the laboratory software CPIV2.2: three pass algorithm, final interrogation windows of 16 pixels and logarithmic sub-pixel interpolation, with a 50% overlap. A universal outliers detection algorithm [44] allowed for spurious vector detection.

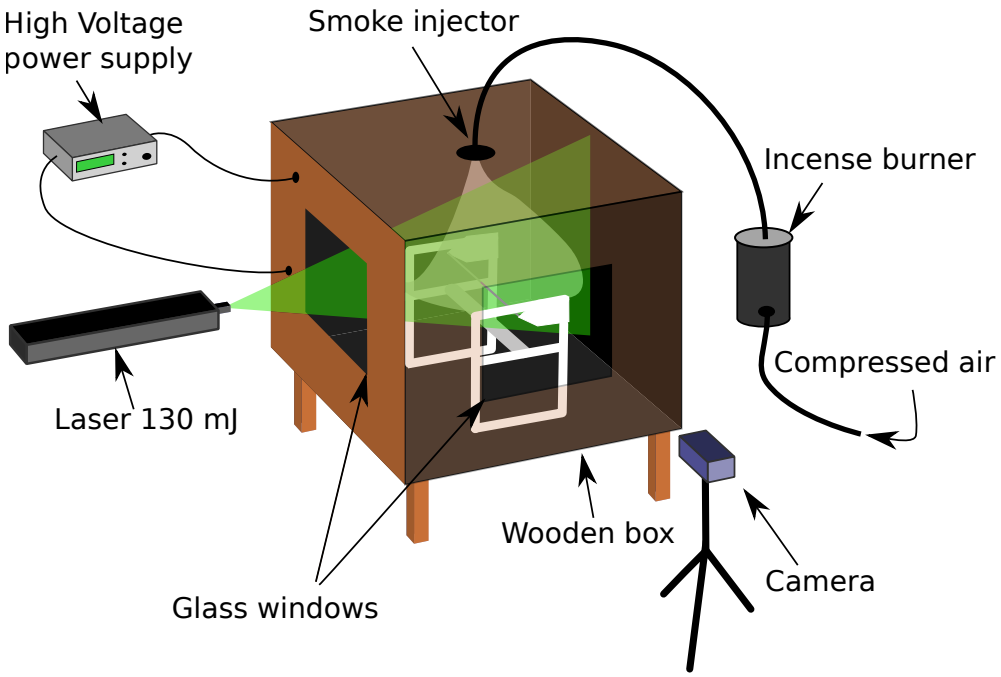
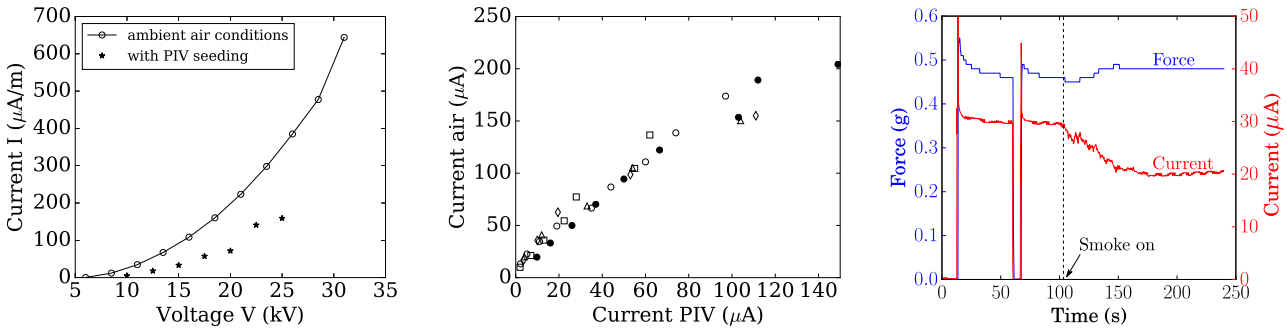


FIG. 3: Experimental PIV setup.

2. Effect of Seeding

Measuring velocity in electro-hydrodynamic flows is more difficult than in usual aerodynamic or hydrodynamic flows. Standard techniques, such as hot wire anemometry, are inadvisable in particular between the emitter and the collector, as the probe may not withstand or may perturb the high electric field. In the present study, the optical, non-intrusive PIV measurement technique was employed to quantitatively investigate the ionic wind. This method has already been successfully used for EHD flows [9, 23, 36, 39]. PIV requires the introduction of tracer particles into the fluid which are assumed to follow the fluid's motion. Tracer particles must satisfy two requirements.



(a) (b) (c)

FIG. 4: (a) Typical current-voltage characteristic curves obtained with and without incense smoke $d = 4$ cm, $s = 0$ cm. (b) Measured intensity in ambient air vs measured intensity with incense smoke for various cases. (c) Force (digital scale) and current versus time ($d = 4$ cm, $s = 0$ cm): voltage is set to 15 kV at $t = 13$ s, switched off at $t = 60$ s, then on again at $t = 104$ s with injection of smoke.

Firstly, they should behave as passive tracers, so their drift velocity with respect to the ionic wind must be negligible. Secondly, tracer particles should neither alter the electric field distribution nor influence the charge concentration. Incense smoke tracer particles were chosen as they are recognized in the literature as being among the ideal and recommendable tracers for PIV measurements in EHD gaseous flow [18, 27]. Incense smoke particles have a typical density ρ_p =1100 kg.m^{-3} and a typical diameter $d_p \approx 1$ μm. The latter was estimated by microscopy and its value was in agreement with previous observations [18]. The ability of particles to follow the flow is quantified by the Stokes number $St = \tau_p/\tau_f$, which compares the particle relaxation time scale, $\tau_p = d_p^2\rho_p/18\mu_f$, with the characteristic time of the carrier fluid, τ_f. For incense smoke particles in air ($\mu_f = 1.85$ kg.m^{-1}.s^{-1}) a characteristic time of the flow based upon the typical measured mean velocity of the ionic wind ($U_0 \approx 1$ m.s^{-1}), and the diameter of the collector, $2R_c = 0.01$ m, we estimated a Stokes number $St \approx 3.10^{-4}$, a value much lower than unity. The particle settling velocity, given by $d_p^2\Delta\rho g/18\mu_f$, where g is the gravitational acceleration and $\Delta\rho$ the density difference between the fluid and the tracers, was close to 3.10^{-5} m.s^{-1} which is much lower than the typical measured velocity of the fluid. We can therefore consider that the tracers followed the fluid motion passively. The question regarding how PIV tracer particles might modify the ionic wind, by locally influencing the charge concentration has been investigated by Hamdi *et al.* [18]. They show that the effect of incense smoke particles on the ionic wind characteristics is weak, as is the effect of an electric field on the particles. This statement is supported by our measurements which show excellent agreement between the thrust computed with PIV and the thrusts directly measured by a digital scale (see III C). These observations confirm the good accuracy of the PIV measurement and indicate that air flow and the local electro-hydrodynamic force in air were only weakly affected by the smoke. The influence of incense smoke on the electrical characteristics of the discharge was also investigated. Fig. 4(a) and (b), reveal that current-voltage curves were modified by incense smoke, with a decrease by a factor of around 2 in the measured intensity, a ratio which can depend on voltage. Considering (8), this decrease can be attributed to a decrease of the electrical mobility due the incense particles which modifies the air characteristics in the experimental box (Cf Fig. 3). Remarkably, Fig. 4(c) also shows that the resulting net EHD force (in blue) was weakly affected by a 50% change in the current. This observation was robustly reproduced in all experiments conducted when varying the incense smoke concentration. This result can be understood from the theoretical prediction (9) that the net EHD force depends only on the intensity to mobility ratio, so any intensity variations concomitant with a similar mobility change (as investigated further in section III C 2) result in the same EHD force.

III. RESULTS AND DISCUSSION

A. PIV field

We first discuss the physics of the observed ionic wind. In this section we mainly discuss the time-averaged flow field, leaving the discussion of the flow non-stationarity to section III B. The streamlines are computed from the time-average PIV velocity field in the plane orthogonal to the emitter axis. They are displayed below in Figs. 5, 7

and 8.

1. Effect of voltage

When the emitter voltage was increased from 10 to 25 kV, a strong effect was observed on the resulting velocity, increasing its intensity by a factor of almost five. This increase of ionic wind production took place with subtle changes in the flow field topology. For every electric potential, the air converged downstream of the emitter (the upper black spot), where a longitudinal gradient of velocity caused the airto accelerate. Since the flow field was mainly two-dimensional, providing the very small Mach number associated with this flow, incompressibility combined with longitudinal acceleration was responsible for the convergent structure of the flow field seen downstream of the emitter. At the same time, clear recirculating eddies were also visible downstream of the collector, at a distance of a few diameters from it. The intensity of these eddies also increased with the applied voltage. Following [26], we evaluated the downstream stream-function $\psi(x,y) = \int_0^y U_x(x,y')dy'$ by transversely integrating the longitudinal velocity field, so as to be able to clearly identify the edges of the eddies at the separation line $\psi = 0$. Using this separation line, we evaluated the longitudinal length of the eddies as the distance from the cylinder center to the rear stagnation point. Fig.6 compares this length with the formation length evaluated for the classical cylinder wake [15, 45]. At moderate Reynolds number, the eddies appear longer than their classical counterparts, but, since their size decreases as the ionic wind velocity increases, this difference shrinks at higher Reynolds number.

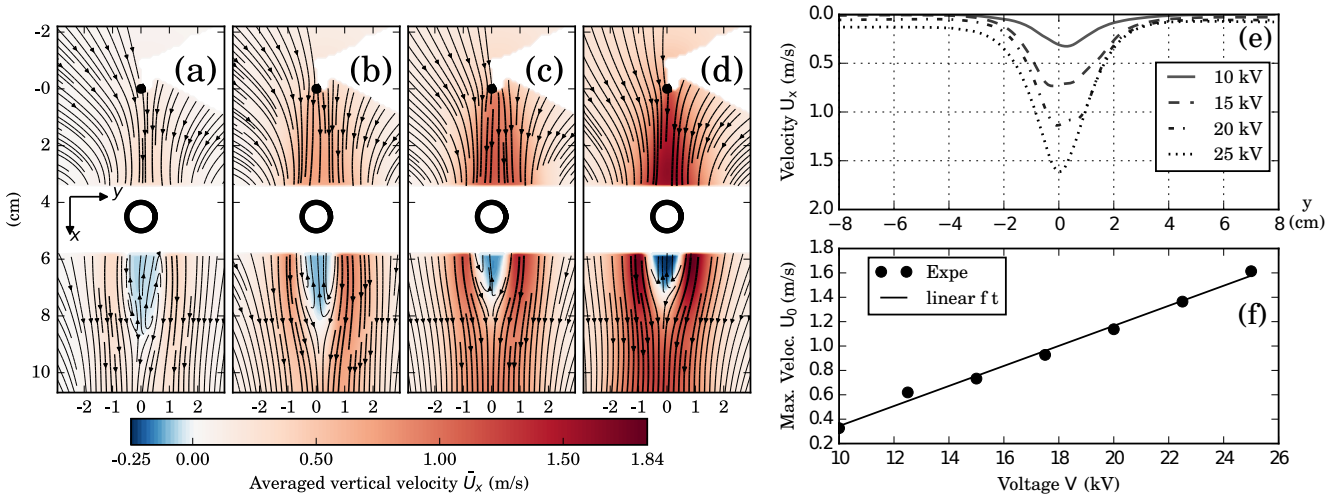


FIG. 5: (a-d) Vertical averaged velocity field $\bar{U}_x$ and streamlines for V=10, 15, 20, 25 kV. Distance $d = 4$ cm, spacing $s = 0$ cm.(e) Velocity profiles 1 cm upstream of the collector and (f) maximum velocity 1 cm upstream of the collector ($x = 3$ cm).

2. *Effect of distance*

We now discuss the effect of the emitter/collector distance. Previous contributions (see [29] and references therein for more details) have shown that the electrode distance linearly affects the net EHD thrust, which is also proportional to the total current intensity. For a given applied electrical potential V, the local applied electric field scales as $E \sim V/d$, thus decreasing with d. Fig. 7 represents the velocity field measured for various distances d, but for a constant applied Electric field defined by $E = V/d$. The longitudinal velocities are quite comparable in all panels of Fig. 7, for any emitter/collector distance d. The subset Fig. 7(e) and (f) shows that the resulting transversal velocity profile varies only slightly as the distance between electrodes changes, for a fixed applied electric field. This can be understood from the fact that the expected ionic wind scales with the size d of the drift volume $U_d \sim \sqrt{2d\rho E/\rho_f}$, while the Coulomb forcing term is inversely proportional to d. Briefly, the electrostatic Poisson equation $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon$ indicates that the charge density scales as V/d^2 where V is the characteristic potential difference and d the characteristic length of the

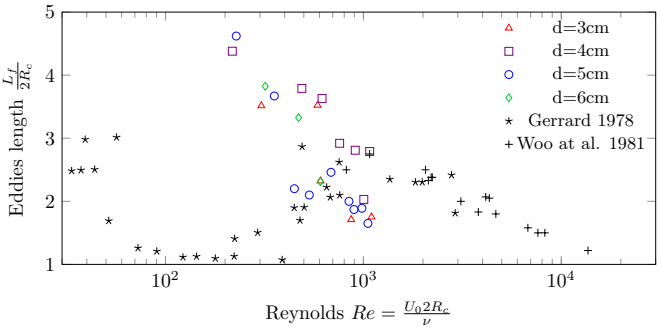


FIG. 6: Eddy length versus Reynolds number, mono-collector configuration, $R_c = 5$ mm.

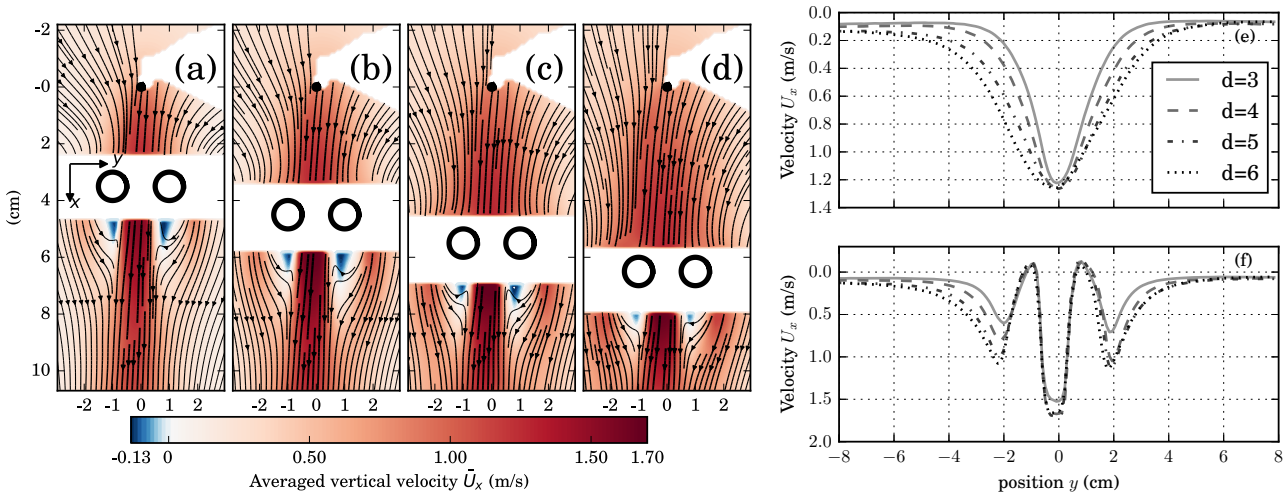


FIG. 7: (a-d) Vertical averaged velocity field $\bar{U}_x$ and streamlines for distance of $d = 3, 4, 5$, and 6 cm respectively. (e) and (f) Vertical velocity profile 1 cm upstream and downstream respectively, of the collector surface. Spacing $s = 2$ cm, electric field $V/d = 5$ kV/cm.

problem. Now keeping the ratio V/d constant will automatically result in $\rho \propto 1/d$. Reinjecting this scaling into the momemtum equation of the fluid $\rho_f(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = \rho\mathbf{E}$ leads to $\rho_f U_d^2 \propto E \approx V/d$.

3. *Effect of spacing*

We now consider the effect of varying the spacing of collecting electrodes while keeping the applied voltage constant. Fig. 8 clearly shows that when the collecting electrodes are six diameters apart, the recirculating downward eddies are almost suppressed compared to the situation observed with a single collector, for which, as already mentioned in sub-section III A 1, the recirculating eddies spread over several collector diameter downstream. As a result, the longitudinal velocity field is much more transversely uniform, but less intense, in Fig. 8c than in Fig. 8b. It can then be foreseen that the electrode separation will produce two opposite effects on the ionic wind. On the one hand, for small separation, it accelerates the flow downstream, with a strong transverse gradient coming from shear layers nearby collectors and significant downstream wake interactions. On the other hand, for large separation, the resulting ionic wind is much more transversely uniform, with a much smaller influence of shear layers near the collectors as well as downstream wakes but, since the local Coulomb forcing is less intense, the resulting ionic wind weakens. These velocity fields are thus clearly show that there should be an optimal separation for maximum momentum transfer into the fluid. This is then fully consistent with previously reported results (See [29] and references therein) showing an optimal thrust to power ratio for intermediate values of the collector separation.

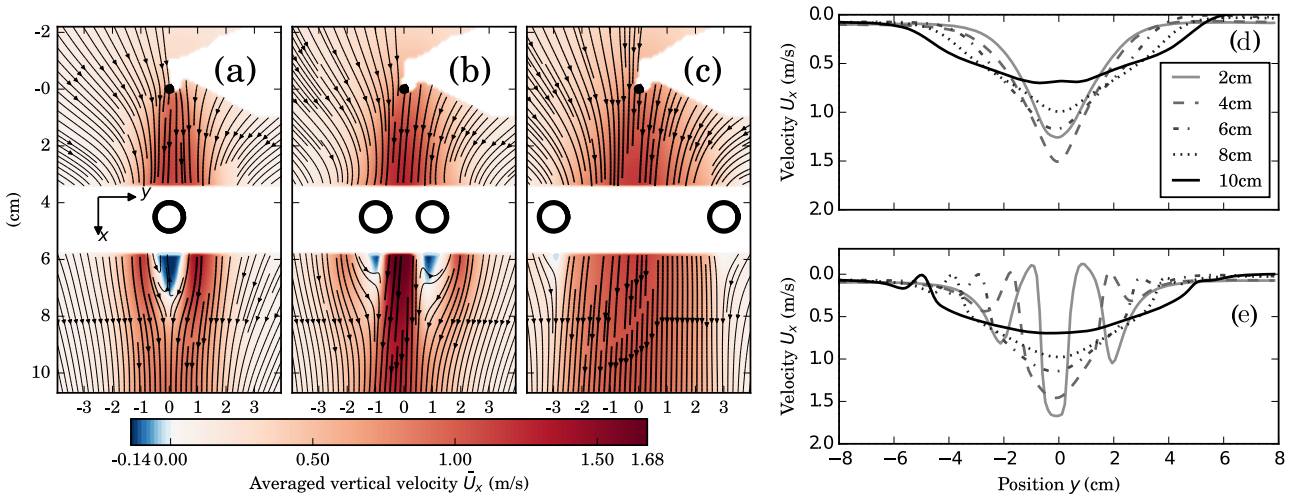


FIG. 8: (a-c)Vertical averaged velocity field $\bar{U}_x$ and streamlines for various collector spacing. (e) and (f) transversal velocity profile 1cm upstream and downstream from the collector surface. Distance $d = 4$ cm, voltage $v = 20$ kV.

B. Wake and its fluctuations

Observation of the instantaneous velocity field downstream of the collecting electrode revealed an unsteady wake associated with strong time-dependent velocity fluctuations. A spectral analysis of these velocity fluctuations in the wake of the collector were performed from the signal analysis of a hot wire probe, $e(t)$, located 5 cm downstream of the collector. Since the probe might be sensitive to the electric field and discharge current, no precise quantitative measurement of the velocity was carried out. However, the response time was small enough for a relevant spectral analysis to be performed and temporal properties of velocity fluctuations to be highlighted. The probe-to-electrodes distance is sufficiently large to ensure that the modification of the electric field between the electrodes was negligible. The signal was recorded for 60 seconds at a frequency of 1 kHz.

The power spectral density of signal fluctuations exhibited a dominant frequency, f, which was related to a vortex shedding instability mechanism [29]. The Strouhal number was defined as $Sr = 2fR_c/U_0$, with U_0 the maximum x-velocity 1 cm upstream of collector. The variation of the Strouhal number versus Reynolds number, $Re = U_0 2R_c/\nu$, is illustrated in Fig. 9. It is very similar to that observed in the classical cylinder wake [5, 37]. Sr first increases at low Reynolds number ($Re < 700$) to reach a nearly constant value of 0.3, at larger Reynolds number ($Re \sim 1000$). This is slightly larger than its classical counterpart ($Sr \sim 0.2$)[37]. Although the upstream velocity profile is not uniform the experiment highlights an unsteady wake exhibiting temporal properties similar to those of the canonical cylinder wake.

C. PIV thrust computation and comparison

1. *Force field deduced by the derivative method*

The distribution of the volumetric force in the wire-to-cylinder coronal wind can be strongly affected by the electrode position. Firstly, the position of the collecting electrodes affects the electric field strength at the emitter, as well as the injected charge density. Secondly, it also changes the ion path and consequently the size of the accelerated area. Thirdly, the airflow is directly affected when the collectors are next to the axis of the ionic wind generator, see section III A 3. Because of this three way coupling, it is hard to predict the best positions of the collecting electrodes in terms of effective momentum transfer. In the following, we reconstruct the force field from the measured velocity field. The left-hand-side of (14) gives the superposition of pressure gradient $\nabla\overline{P}$ and the volumetric electro-hydrodynamic force $\mathbf{f}_{EHD}$. Both terms rely on a similar physical mechanism, neutral-neutral interactions for $\nabla\overline{P}$ versus ion-neutral molecular interactions for $\mathbf{f}_{EHD}$, the distinction between them being purely theoretical. Experimentally it is not possible to distinguish them, even though $\nabla\overline{P}$ is often neglected [2]. First order and second order derivatives are

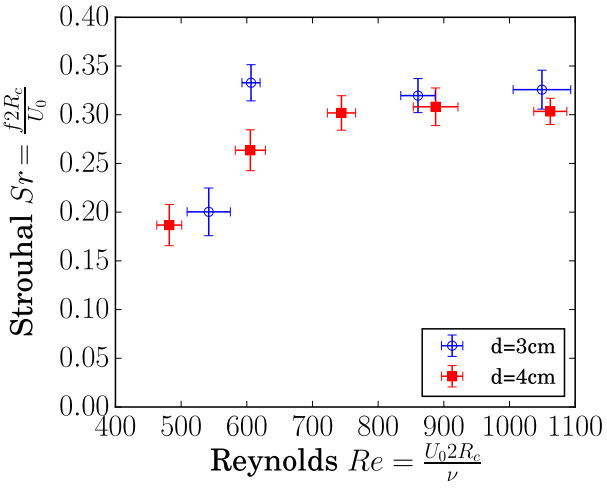


FIG. 9: Strouhal number of the velocity fluctuations in the wake of the collector versus the Reynolds number for two different distances.

estimated with a second order centered finite difference scheme. The air density is assumed constant and equal to 1.2 kg/m^3.

The computed force field is plotted in Fig. 10. In all configurations, the force field is mainly directed along x, following the ion drift direction from the emitter to the collector. For small spacing values (case (a) and (b)), the stagnation point on the collector generates a vertical pressure gradient that balances, and even dominates the EHD forces in the vicinity of the collector. The intensity of the force field and the size of the drift volume both increase when two collectors are used at moderate spacing values (case's (b), (c) and (d)). For a spacing/distance ratio higher than one, the drift volume continues to widen but also weakens. This is simply caused by a decrease of the electric field, due to the larger effective distance between emitter and collector. The best positioning of the electrodes is then a trade-off between increased charge injection, when the collectors are next to the thruster axis, and aerodynamic efficiency, which requires electrodes far from the axis.

The volumetric force, i.e. the electric current density, does not spread far from the electrodes. Visually, the typical width of the drift volume is similar to the spacing distance, which remains smaller than the camera field-of-view ~ 16 cm. Hence, the hypothesis that the ion flow on S_{ext} is negligible (Sec.II A 1) is experimentally verified.

2. Net momentum by the integral method

The net force applied to the fluid could be retrieved by integrating the force field computed by the derivative method over the whole domain. However, in the present case, integration was not possible because some parts of the velocity field were missing : they were hidden by the frame supporting the electrodes. In the following, we use the integral method defined in (15). To do this, we need the velocity profile all around the domain. Still, a small part of the information on borders *bc, cd* and *da* (Cf Fig. 2 sketch) is missing because of the frame. This does not significantly affect the results because the contribution of borders *bc* and *da* represents only 1% of the total net integral, whereas border *cd* contributes less than 15%, with only one quarter of the *cd* velocity profile on the right side missing. More than 85% of the net integral results from the velocity profile on border *ab*, which is fully available. In the following, we make the assumption that the pressure is homogeneous on the integration contour.

The results of configuration ($d = 5$ cm, $s = 0$ cm) are presented in Fig. 11a. The contribution of the averaged velocity field $F_{\bar{u}} = \int_{abcd} (\rho \bar{\mathbf{U}}) \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s \cdot \mathbf{e}_x$ closely follows the digital scale measurements for voltages lower than 20 kV. However for higher voltages the thrust is slightly underestimated, which is consistent with previous measurements made on plasma actuators [24]. This effect can be corrected by taking account of the contribution of the velocity fluctuations $F_{u'} = \int_{abcd} \rho \overline{\mathbf{u'} \otimes \mathbf{u'}} \mathbf{n} \mathrm{d}s \cdot \mathbf{e}_x$. The sum of both contributions agrees much better with the digital scale measurements. Fig. 11b displays the thrust computed with PIV versus that measured by the digital scale for the configurations given in Table I.

Fig. 11b clearly confirms the good accuracy of the PIV integral method. It is interesting to note that, for the largest

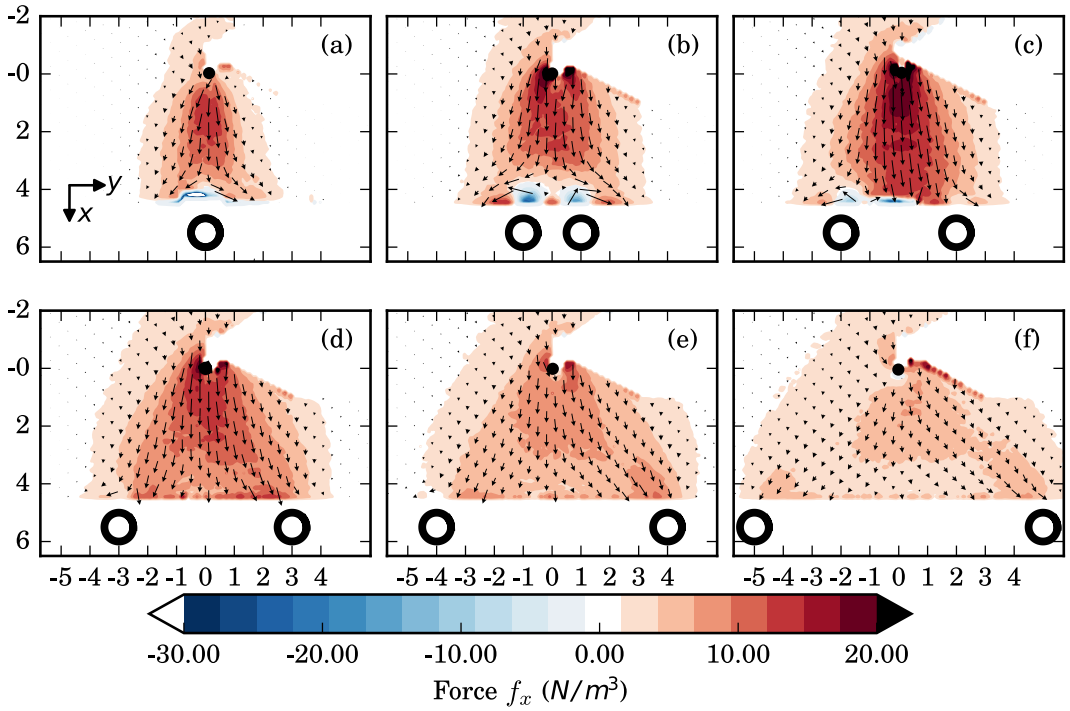


FIG. 10: (a-f) Volumetric force reconstructed from PIV measurement (arrows), and vertical component of the force F_x (colors). Voltage $V = 20$ kV, distance $d = 5$ cm, spacing $s = 0, 2, 4, 6, 8$ cm.

d (cm)	3	4	5	5	6
s (cm)	0	0	0	4	0
V (kV)	[10..25]	[10..27.5]	[12.5..32.5]	[10..35]	[15..35]

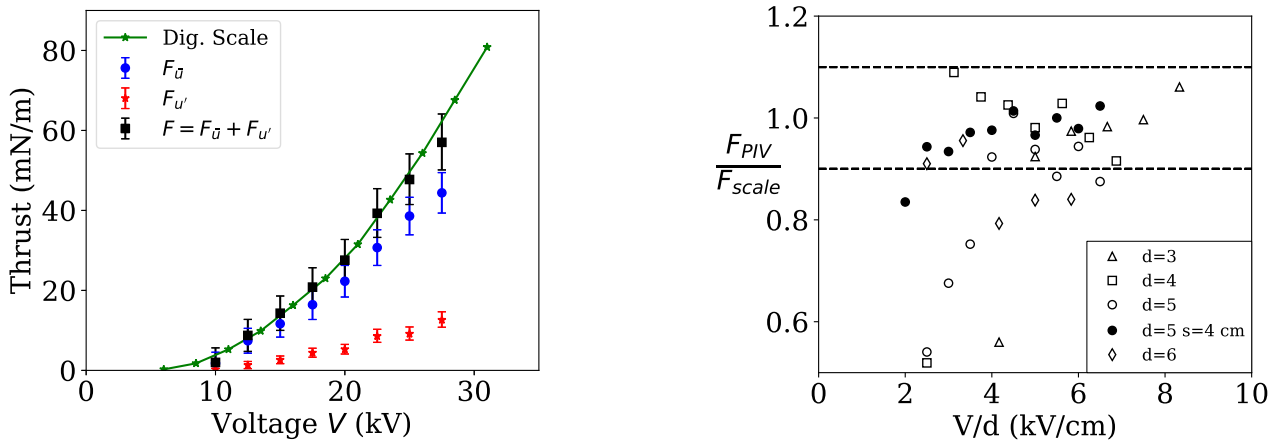
TABLE I: Configurations associated with Fig. 11b.

electrode gaps ($d = 5$ cm and $d = 6$ cm), the PIV thrust is slightly underestimated. This can be explained by the integration contour being limited by the camera field of view, so that the border ab (see Fig. 2 sketch) eventually falls in the depression of the collector wake, thus breaking the assumption of homogeneous pressure. The minimum distance necessary between border ab and the collector to avoid the pressure gradient depends on the size of the wake eddies. The pressure effect in the "near wake region" is clearly perceptible when the size of the integration frame changes (Fig. 12a). The near wake region grows as the ionic wind decreases, which explains why most low voltage cases show lower thrust than the digital scale. This could be corrected by increasing the camera field in the x-direction. With spaced electrodes (case $d = 5$ cm $s = 4$ cm), the wake is much weaker (see Fig. 8) and the associated pressure gradient did not affect our measurement.

One distinctive feature, occuring when the size of the rectangular integration frame is varied, is the possibility to test relation (8) which provides the slope of the momentum versus Δx in the drift region for a given electrode arrangement. The collapse of the reduced curves on Fig. 12b shows that this slope is proportional to the current to mobility ratio. A typical ion mobility value of 1.8 $cm^2.V^{-1}.s^{-1}$ [41] was used to reduce the force in that case. Conversely, current measurements combined with the momentum growth could be used to estimate the ion mobility.

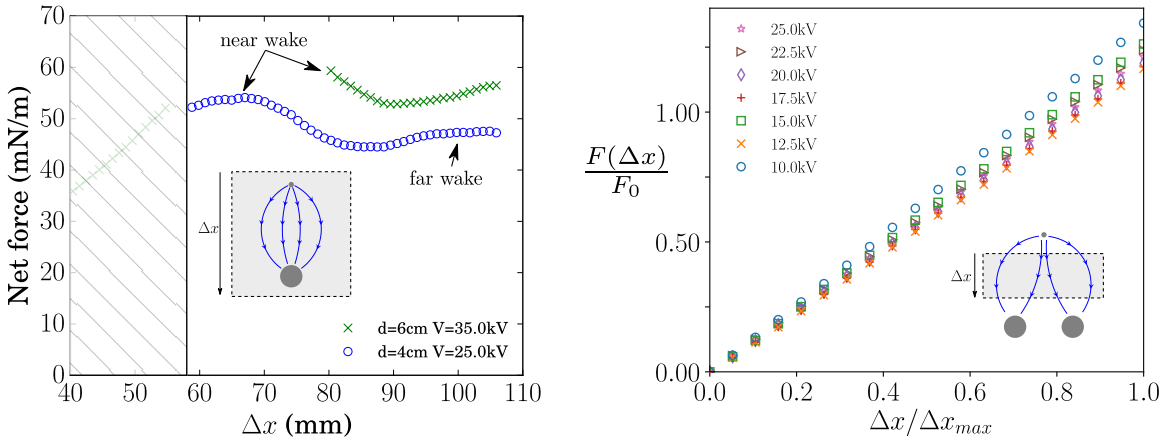
D. Energy dissipation

The proportion of electric power imparted to the fluid as kinetic energy defines the mechanical efficiency $\eta = P_{flow}/P_{elec}$. On the one hand Eq. (6) indicates that the net momentum transfer per unit power scales as the gap distance between the electrodes whatever the electric field shape: $F_{EHD}/P_{elec} \approx \mathcal{D}/\mu V$. On the other hand the



(a) (b)

FIG. 11: (a) Integral method compared to the digital scale measurement. Geometry: $s = 0$ cm, $d = 4$ cm.(b) Comparison scale/PIV for various geometries and voltages, with distinction between mono-collector and bi-collector cases. Dashed lines represent +/- 10% error range.



(a) (b)

FIG. 12: (a) Integrated force $F = F_{\overline{u}} + F_{u'}$ versus integration frame length when border ab is in the collector wake. (b) Non-dimensional integrated force, with $F_o = I \cdot \Delta x_{max}/\mu_0$ and $\mu_0 = 1.8$ cm^2.V^{-1}.s^{-1} , versus non-dimensional integration frame length: $d = 5$ cm, $s = 4$ cm. The integration frame starts below the emitter at $x_0 = 1$ cm to avoid hidden areas.

mechanical power imparted scales as the scalar product between fluid velocity and Coulomb forcing [21, 42]. The theoretical explanation is quite straightforward, but remains poorly quantified experimentally. In the following the variation of efficiency with geometry is investigated. First of all, let us write the kinetic energy integral balance

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \overline{\rho \frac{\|\mathbf{U}\|^2}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}} \, \mathrm{d}s}_{P_{flow}} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{EHD} \cdot \mathbf{U} \mathrm{d}v}_{P_{EHD}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} P\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s}_{P_p} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{U} \cdot (\underline{\underline{\tau}}\mathbf{n}) \mathrm{d}s}_{P_{vis}} . \tag{17}$$

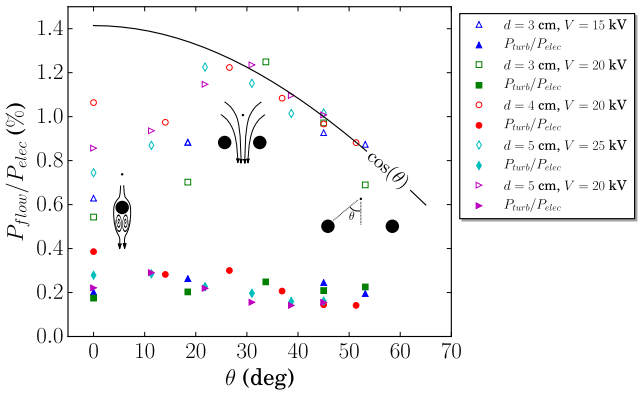


FIG. 13: Kinetic to electric power ratio versus collector spacing angle $\tan\theta = s/(2d)$. Empty symbols combine both stationary and fluctuating contributions while filled symbols are the contribution of fluctuating contributions only.

P_{flow} is the total kinetic power gained by the airflow and P_{EHD}, P_p and P_{vis} are the kinetic power source/sink due to electro-hydrodynamic forces, pressure and viscous dissipation respectively. Note that $P_p = 0$ since $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ on $\mathcal{S}_e$ and $\mathcal{S}_c$ and $P_{ext}\int_{\mathcal{S}_{ext}} \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s = 0$ because of incompressibility. To account for the unsteady wake, we apply the Reynolds decomposition $[\mathbf{U}]_i = \overline{U}_i + u'_i$ to Eq. (17). Introducing the mean flow specific kinetic energy $\overline{K} = \overline{U}_i\overline{U}_i/2$ and the turbulent specific kinetic energy $k = \overline{u'_i u'_i}/2$, the momentum balance reads

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho K \bar{U}_j\, n_j\, \mathrm{d}s}_{P_{mean}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (k\bar{U}_j + \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i u'_j} + \bar{U}_i\overline{u'_i u'_j})\, n_j\, \mathrm{d}s}_{P_{turb}} = P_{EHD} + P_{vis}. \tag{18}$$

The evaluation of $P_{flow} = P_{mean} + P_{turb}$ from PIV data is made possible by neglecting the third component of the velocity. Note that this assumption holds only for a strictly two-dimensional flow and not, properly speaking, for a 3D turbulent flow. Fig. 13 shows that the electric to kinetic energy conversion efficiency depends strongly on the spacing between the electrodes. For $\theta < 20°$, a non-negligible part of the power imparted is dissipated in the shear layers and eddies induced by the collector(s). Then for $\theta \approx 30°$ the efficiency reaches a maximum before decreasing with increasing angle θ. This decrease relies on the scalar product inside P_{EHD}, so that the efficiency should scale as $\cos(\theta)$. The contribution of velocity fluctuations P_{turb}/P_{elec} to the net kinetic power is approximately constant. The proportion of turbulent to mean kinetic power typically varies between 16% for $\theta = 30°$ and 50% in the mono-collector case.

E. Effective mobility

In this section, the effect of incense smoke on the ionic wind generator is analyzed in terms of effective mobility. We first review the parameters influencing the mobility of positive air ions and the associated experiments. Then, we introduce a new method for quantifying the effective mobility inside the corona drift region.

1. *Mobility of positive air ions*

The positive ion mobility in air is subject to variations depending on pressure, temperature, humidity and lifetime, and even electric field strength when $E/N \gtrsim 40$ Td ($E \geq 10^6$ V/m in standard atmospheric conditions). This last dependence, illustrated by Fig. 14b, is not expected to play a major role in the drift region where $E \sim V/d < 8.10^5$ V/m. There are numerous measurements of the mobility of corona ions [1, 14, 32, 41], with values ranging from 1.1 to 3 $\mathrm{cm}^2.\mathrm{V}^{-1}.\mathrm{s}^{-1}$ depending on the method used. Most of the time, the mobility is measured near the inception voltage, by linearizing the I-V characteristic. This method, discussed and enhanced by Stearn [41], provides information only at the inception voltage and gives values near 1.8 $\mathrm{cm}^2.\mathrm{V}^{-1}.\mathrm{s}^{-1}$. When calculating the ionic mobility from the thrust/current ratio at various voltages in a corona thruster, Moreau [32] found 3 $\mathrm{cm}^2.\mathrm{V}^{-1}.\mathrm{s}^{-1}$. This method, as explained by Moreau and Monrolin [29, 31], is however biased by the aerodynamic drag on the collector. Besides mass

spectrometry/differential mass analyser experiments [1, 14] give a mobility between 1.2 and 1.4 $cm^2.V^{-1}.s^{-1}$ (results from [1] transposed to 293 K with Eq. (2) given in the reference). This method shows that ion mobility decreases for ages greater than 10 ms. However, in typical corona devices with $d < 6$ cm, $E > 1$ kV/cm and $\mu > 1$ $cm^2.V^{-1}.s^{-1}$, the time-of-flight $d/\mu E$ between the electrodes is less than 6 ms. Hence, the previous considerations concerning ion ageing are not relevant to our experimental conditions. Calculations based on the ion clustering kinetics [20] with the most common positive air ions, $H_3O^+(H_2O)_n$, $O_2^+(H_2O)_n$, $NO^+(H_2O)_n$, and $NO_2^+(H_2O)_n$, show that clustering for n=1,..,7 occurs in less than 1ms. Fig. 14b, retrieved from the Lxcat typically [35], shows that cluster ions mobility decreases as the number of aggregated water molecules increases. Other contaminant vapors (ethanol, acetone or ammonia) can also aggregate to ions [19], and this could be the case with incense burning products. In Appendix 1 we quantify the influence of incense smoke on the effective mobility.

IV. CONCLUSION

In this paper a surface formulation of the EHD force in DC-corona discharge is developped and applied to the wire-to cylinder configuration so as to derive simple theoretical expressions for its dependence on the current to mobility ratio, and a geometrically dependant length. By combining PIV measurements with force-field reconstruction, we show that velocity fluctuation effects considered in momentum transfer have non negligible effects on the EHD force calculation. We identify that these unsteady effects are associated with downstream vortex shedding at collectors, for which we measure the corresponding constant Strouhal number (close to 0.3). We also analyze the eddies associated with the downstream wake and compare them with classical ones.

Looking deeper into the physical mechanisms associated with maximum EHD lift force configuration in the separated collector pair configuration, we visualize and quantify for the first time, the disappearance of the eddies, which explains the suppression of wake shedding and results in an increase of the lift force.

Finally, the efficiency variation with geometry are fully consistant with the picture emerging from the previous momentum transfer analysis. The energy transfer is found to be maximum for a suitably separated collector pair, and the effect of the fluctuation is indeed weakened when the separation suppresses the wake shedding.

Acknowledgment.

This work was supported by the CNES (research contract 5100015475) and the French Occitanie region. We thank P. Elyakime for the CPIV software support and S. Cazin, M. Marchal and I. Loukili for their technical assistance. The authors also acknowledge L. Pitchford and JP. Boeuf for useful discussions on ionic mobility.

APPENDIX

A method for estimating the effective mobility directly inside the corona drift region is proposed, by measuring the ionic wind momentum growth rate. First, the fluid momentum equation for the control surface described in Fig. 12b, inside the drift region:

$$\int_{\partial\Omega(\Delta x)} (\rho_f \mathbf{U})\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s = F_{EHD}(\Delta x), \tag{19}$$

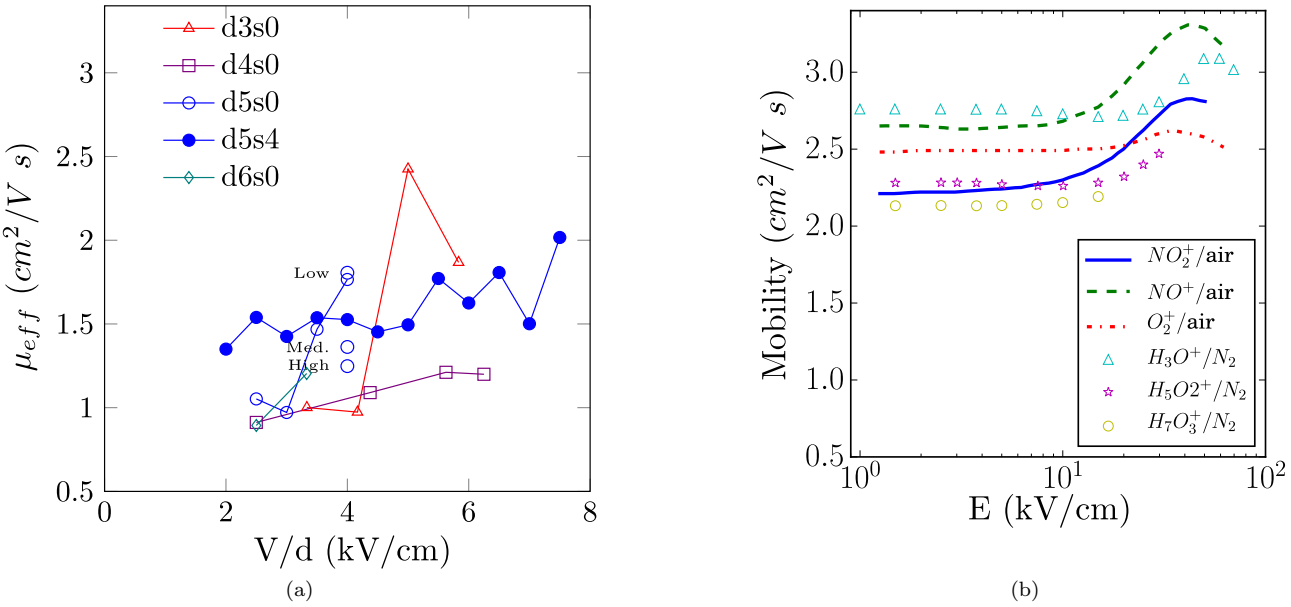
where Δx is the size of the integration frame sketched in Fig. 12b. An obvious linear trend i svisible, predicted by (8). We assume that pressure gradient are negligible inside the chosen control surface. From (8) giving $F_{EHD}(\Delta x)$ and by differentiating Eq. (19) along Δx, the effective mobility reads

$$\mu_{eff} = \frac{I}{\frac{d}{d(\Delta x)}\int_{abcd}(\rho_f \mathbf{U})\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s}. \tag{20}$$

The effective mobility μ_{eff} obtained using (20) is presented in Fig. 14a. The measurement shows that μ_{eff} ranges from 1 to 2.5 $cm^2.V^{-1}.s^{-1}$ and that there is a global increasing trend with increasing applied voltage. No definitive conclusion can be drawn since the recorded growth is of the same order as the uncertainty level. The points "Low", "Med." and "High" in Fig. 14a correspond to the case ($d = 5$ cm, $s = 0$ cm, $V = 20$ kV) with three different

seeding densities: low, medium and high. The measured currents were respectively 56, 55 and 46 μA/m compared to 127 μA/m obtained without seeding. On the other hand, the net integrated thrust gave 23.8, 20.8 and 19.7 mN/m compared to 21.4 mN/m obtained with a digital scale without seeding. Meanwhile, the effective mobility varied from 1.8 to 1.25 cm^2.V^{-1}.s^{-1}. The measured mobility increased by at least 40% when smoke concentration decreased. It can further be shown that smoke dissipation is increased by strong ionic wind, so the increasing mobility trend could be due to a decreasing averaged smoke density at high voltages.

It is, however, undeniable that smoke concentration has little effect on the thrust whilst, on the contrary, the current is nearly halved, even at low smoke concentration. Sec II A 1 highlights that $F \sim I/\mu \sim \rho E$ is independent of mobility, while $I \sim \rho\mu E$ is proportional to it. This observation indicates that the effective mobility of the charge carriers is decreased in the presence of smoke. This is in accordance with the measured ionic mobility which was in the range 1-1.5 cm^2.V^{-1}.s^{-1} while typical mobility of corona ions lies around 1.8 cm^2.V^{-1}.s^{-1} [41]. The precise explanation of why the effective mobility drops remains unclear. As previously discussed, the ion clustering process could change in the presence of incense burning products. Since the kinetics and composition of the air ion mixture is rather complex, most studies on corona discharge consider a constant mobility. One might voice the possibility that some incense particles become charged in the drift region, thus contributing to the momentum transfer, as ions. If true, this should be detectable experimentaly by particles following electric field lines rather than airflow streamlines, which is never observed. From the theoretical viewpoint, the electro-drifting velocity of the particles, resulting from the balance between Coulomb force and Stokes drag is $d_p^2\rho E/18\mu_f$, and in experimental conditions, it is close to 3.10^{-2} m.s^{-1} which is much lower than the typical measured velocity. So this effect is not relevant here.



(a) (b)

FIG. 14: (a) Effective mobility μ_{eff} versus reference electric field V/d. (b) Measured mobility of positive core ions in air or pure nitrogen at 300 K, 1bar from Vielhand [43], retrieved with Lxcat.net.

[1] M. Alonso, J. Santos, E. Hontañón, and E. Ramiro. First differential mobility analysis (DMA) measurements of air ions produced by radioactive source and corona. Aerosol Air Qual. Res., 9(4):453–457, 2009.

[2] N. Benard, A. Debien, and E. Moreau. Time-dependent volume force produced by a non-thermal plasma actuator from experimental velocity field. J. Phys. D Appl. Phys., 46(24):245201, 2013.

[3] H. Bondar and F. Bastien. Effect of neutral fluid velocity on direct conversion from electrical to fluid kinetic energy in an electro-fluid-dynamics (EFD) device. J. Phys. D Appl. Phys., 19(9):1657–1663, 2000.

[4] D. Cagnoni, F. Agostini, T. Christen, N. Parolini, I. Stevanovic, and C. de Falco. Multiphysics simulation of corona discharge induced ionic wind. J. Appl. Phys., 114(23):233301, 2013.

[5] A. Capone, C. Klein, F. Di Felice, and M. Miozzi. Phenomenology of a flow around a circular cylinder at sub-critical and critical Reynolds numbers. Phys. Fluids, 28(7):074101, 2016.

[6] E.A. Christenson and P.S. Moller. Ion-Neutral Propulsion in Atmospheric Media. AIAA. J., 5(10):1768–1773, 1967.

[7] D. F. Colas, A. Ferret, D. Z. Pai, D. a. Lacoste, and C. O. Laux. Ionic wind generation by a wire-cylinder-plate corona discharge in air at atmospheric pressure. J. Appl. Phys., 108(10):1–7, 2010.

[8] P. Cooperman. A Theory for space charge limited currents with application to electrical precipitation. Trans. AIEE, Part I: Communication and Electronics, 79(1):47–50, 1960.

[9] A. Debien, N. Benard, and E. Moreau. Streamer inhibition for improving force and electric wind produced by dbd actuators. J. Phys. D Appl. Phys., 45(21):215–201, 2012.

[10] E. Defoort, N. Benard, E. Moreau. Ionic Wind produced by an Electro-aerodynamic pump based on corona and dielectric barrier discharges. J. Electrostat.., 88:35–40, 2017.

[11] P. Durbin and L. Turyn. Analysis of the positive DC corona between coaxial cylinders. J. Appl. Phys., 20:1490–1495, 1987.

[12] H. A. Erikson. On the Nature of the Negative and Positive Ions in Air, Oxygen and Nitrogen. Phys. Rev., 20(2):117–126, 1922.

[13] A. Fridman, A. Chirokov, and A. Gutsol. Non-thermal atmospheric pressure discharges. J. Phys. D Appl. Phys., 38(2):R1, 2005.

[14] N. Fujioka, Y. Tsunoda, A. Sugimura, and K. Arai. Influence of Humidity on Variation of Ion Mobility with Life Time in atmospheric Air. IEEE T. Power Ap. Syst., PAS-102(4):911–917, 1983.

[15] J.H. Gerrard. The Wakes of Cylindrical Bluff Bodies at low Reynolds Number. Philos. T. R. Soc. A, 288(1354):351–382, 1978.

[16] C. K. Gilmore and S. R. H. Barrett. electro-hydrodynamic thrust density using positive corona-induced ionic winds for in-atmosphere propulsion. Proc. R. Soc. A, 471(2175), 2015.

[17] D. B. Go, R. A. Maturana, T. S. Fisher, and S. V. Garimella. Enhancement of external forced convection by ionic wind. Int. J. Heat Mass Tran., 51(25-26):6047–6053, 2008.

[18] M. Hamdi, M. Havet, O. Rouaud, and D. Tarlet. Comparison of different tracers for piv measurements in ehd airflow. Exp. Fluids, 55(4):1702, 2014.

[19] M. L. Huertas, A. M. Marty, J. Fontan, and G. Duffa. Measurement of mobility and mass of atmospheric ions. J. Aerosol. Sci., 2:145–150, 1971.

[20] M.L. Huertas and J. Fontan. Evolution times of tropospheric positive ions. Atmos. Environ., 9(11):1018 – 1026, 1975.

[21] C. Kim, K. Noh, J. Hyun, S.G. Lee, J. Hwang, and H. Hong Microscopic energy conversion process in the ion drift region of electrohydrodynamic flow. Appl. Phys. Lett., 100(24), 2012.

[22] K. N. Kiousis, A. X. Moronis, and W. G. Fruh. Electro-Hydrodynamic (EHD) Thrust Analysis in Wire-Cylinder Electrode Arrangement. Plasma Sci. Technol., 16(4):363–369, 2014.

[23] M. Kotsonis and S. Ghaemi. Experimental and numerical characterization of a plasma actuator in continuous and pulsed actuation. Sensors and Actuators A: Physical, 187:84–94, 2012.

[24] M. Kotsonis, S. Ghaemi, L. Veldhuis, and F. Scarano. Measurement of the body force field of plasma actuators. J. Appl. Phys., 44, 2011.

[25] M. Kotsonis. Diagnostics for Characterisation of Plasma Actuators. Meas. Sci. Technol., 092001:92001, 2015.

[26] D. Lo Jacono, M. Nazarinia, and M. Brøns. Experimental vortex breakdown topology in a cylinder with a free surface. Physics of fluids, 21(11):111704, 2009.

[27] P. Magnier, D. Hong, A. Leroy-Chesneau, J.-M. Bauchire, and J. Hureau. Control of separated flows with the ionic wind generated by a dc corona discharge. Experiments in fluids, 42(5):815–825, 2007.

[28] K. Masuyama and S. R. H. Barrett. On the Performance of electro-hydrodynamic propulsion. Proc. R. Soc. A, 50(6):1480–1486, 2013.

[29] N. Monrolin, F. Plouraboué, and O. Praud. Electro-hydrodynamic thrust for in-atmosphere propulsion. AIAA J., 55(12):4296–4305 , 2017.

[30] N. Monrolin, F. Plouraboué, and O. Praud. Revisiting the positive DC corona discharge theory: beyond Peek's and Townsend's law. In revision for Plasma Physics, 2018.

[31] E. Moreau, N. Benard, F. Alicalapa, and A. Douyère. Electro-hydrodynamic force produced by a corona discharge between a wire active electrode and several cylinder electrodes - Application to electric propulsion. J. Electrostat., 76:194–200, 2015.

[32] E. Moreau, N. Benard, J.-D. Lan-Sun-Luk, and J.-P. Chabriat. Electro-hydrodynamic force produced by a wire-to-cylinder dc corona discharge in air at atmospheric pressure. J. Phys. D Appl. Phys., 46(47):475204, 2013.

[33] E. Moreau and G. Touchard. Enhancing the mechanical efficiency of electric wind in corona discharges. J. Electrostat., 66(1-2):39–44, 2008.

[34] R. Morrow. The theory of positive glow corona. J. Phys. D Appl. Phys., 30:3099–3114, 1999.

[35] FLINDERS database, www.lxcat.net, retrieved on September 12, 2017.

[36] E. Pescini, DS Martínez, M.G. De Giorgi, and A. Ficarella. Optimization of micro single dielectric barrier discharge plasma actuator models based on experimental velocity and body force fields. Acta Astronautica, 116:318–332, 2015.

[37] F. L. Ponta and H. Aref. Strouhal-Reynolds number relationship for vortex streets. Phys. Rev. Lett., 93(8):1–4, 2004.

[38] J.R. Roth, Industrial Plasma Engineering (IOP Publishing Ltd, London, 1995), Vol. 1, Chap. 8, p. 251–269.

[39] A. Santhanakrishnan, J. D. Jacob, and Y. B. Suzen. Flow control using plasma actuators and linear/annular plasma synthetic jet actuators. In 3rd AIAA Flow Control Conference, volume 3033, 2006.

[40] R.S. Sigmond. Simple approximate treatment of unipolar space-charge-dominated coronas: The Warburg law and the saturation current. J. of Appl. Phys., 53(2):891–898, 1982.
[41] R. G. Stearns. Ion mobility measurements in a positive corona discharge. J. Appl. Phys., 67(6):2789–2799, 1990.
[42] O. Stuetzer. Magnetohydrodynamics and Electrohydrodynamics. Phys. Fluids, 5(5):534–544, 1962.
[43] L. Viehland and C. Kirkpatrick. Relating ion/neutral reaction rate coefficients and cross-sections by accessing a database for ion transport properties. Int. J. Mass Spectrom., 149:555 – 571, 1995. Honour Biography David Smith.
[44] J. Westerweel and F. Scarano. Universal outlier detection for PIV data. Exp. Fluids, 39(6):1096–1100, 2005.
[45] H. G. C. Woo, J. E. Cermak, and J. A. Peterka. Experiments on vortex shedding from stationary and oscillating cables in a linear shear flow. Technical report, Colorado State University, Fort Collins, 1981.
[46] Y. Zheng, B. Zhang, and J. He. Currentvoltage characteristics of dc corona discharges in air between coaxial cylinders. Phys. Plasmas, 22(2):023501, 2015.

Chapitre 4

Analyse asymptotique de la décharge couronne

Sommaire

4.1 Approches pour la modélisation de la décharge couronne 86

4.2 Une brève justification de la loi de Townsend 87

4.3 La méthode des développements asymptotiques raccordés (MDAR) 89

4.3.1 Principe de la méthode au travers d'un exemple 89

4.3.2 Application à la décharge couronne. 90

4.4 Article *Physics of Plasmas* 92

Le vent ionique est finalement un phénomène assez simple à comprendre et à modéliser, pour peu que l'on connaisse le flux d'ions injecté par la décharge couronne. En revanche la connaissance de ce flux d'ions repose sur la physique de la décharge couronne, dont la compréhension et la modélisation est beaucoup plus complexe. Le flux d'ions généré par la décharge dépend bien sûr du taux d'ionisation près de l'émetteur, mais l'inverse est aussi vrai dans la mesure où la densité de charge autour de l'émetteur modifie le champ électrique et donc le taux d'ionisation. On a donc affaire à un problème couplé, entre zone de décharge et zone de *drift*. Mais, nous verrons plus loin que lorsqu'on s'intéresse de près à sa modélisation ce problème s'avère posséder de nombreuses caractéristiques qui le rendent particulièrement délicat à traiter, car il est très fortement non-linéaire (avec un dépendance exponentielle du taux de création de charge avec le champ électrique) hyperbolique, et fortement non-local (nous verrons que le terme non-local est même indispensable à l'activation du phénomène de décharge).

Ainsi, il n'est pas simple de connaître le courant de décharge pour une configuration donnée. Jusqu'où faut-il pousser la modélisation pour obtenir des résultats réalistes vis à vis des mesures expérimentales ? Quelles sont les phénomènes essentiels à ne pas négliger ? Comment les différents paramètres telles que la géométrie des électrodes, les propriétés du gaz où la tension appliquée influencent-ils la décharge ? Nous tenterons d'apporter des réponses claires à ces questions au vus des éléments présents de la littérature que nous analysons ci-dessous. Dans ce chapitre nous discutons brièvement les différentes approches pour modéliser ce type de décharge puis nous présentons une analyse asymptotique, inspirée et adaptée de travaux antérieurs dans le cas d'une configuration axi-symétrique 2D, à deux électrodes de type fil-cylindre concentriques. Des résultats analytiques permettent d'obtenir l'influence des principaux paramètres physiques sur le courant de la décharge.

4.1 Approches pour la modélisation de la décharge couronne

L'approche la plus complète pour modéliser la décharge couronne consiste à résoudre numériquement le système d'équations couplées comprenant l'équation de Poisson associée au potentiel électrique, couplée aux équations de conservation des différentes espèces ioniques. Les premières simulations numériques de ce type réalisées par Morrow [55, 63], considèrent quatre espèces : les électrons, les ions positifs, les ions négatifs et une molécule en état métastable O_2^*. En reprenant les notations de Morrow, les réactions suivantes sont prises en compte : ionisation par impact électronique (α), attachement électronique (η), recombinaison entre ions de polarités opposées (β), excitation d'états métastables (α_m), détachement électronique par collision avec un métastable (k_d), désexcitation des états métastables (*quenching* k_q) et la photo-ionisation (S_{photo}). Il est connu que les mécanismes primaires d'ionisations sont l'impact et l'attachement électronique (α et η) avec plus ou moins d'importance selon que la décharge est positive ou négative. Cependant Morrow montre que les réactions secondaires jouent elles aussi un rôle capital pour que la décharge soit auto-entretenue. Il identifie la photo-ionisation et le détachement électronique par collision entre ions négatifs et métastables comme étant les principales sources d'électrons secondaires (S_{photo} et k_d). Cependant ces simulations ont un coût de calcul très important qui devient prohibitif lorsque l'on passe à des configurations 2D non-axi-symétriques. De plus, les conditions de stabilité des schémas numériques imposent des pas de temps très petits : les électrons se déplacent le plus vite dans les zones de fort champ électrique, qui, bien entendu, sont aussi celles où le maillage doit être le plus raffiné. Les temps longs sont donc difficilement accessibles à ces simulations directes. Or, la vitesse du vent ionique est un phénomène très lent en comparaison des vitesses de déplacement des charges. Il en résulte des contraintes sur les temps d'intégration très préjudiciable à la modélisation. Des méthodes numériques asynchrones et multi-échelles peuvent permettre de limiter ce problème, comme proposée par Unfer *et al.* [66]. L'évaluation du terme non-local de photo-ionisation à chaque itération a lui aussi un coup non-négligeable. C'est pourquoi des approches simplifiées sont aussi développées pour étudier et comprendre l'origine et les mécanismes des instabilités de la décharge [86, 87].

A contrario, des approches plus simples existent où la zone d'ionisation est remplacée par une condition limite effective. Au lieu de prendre en compte les diverses réactions d'ionisation, une certaine quantité d'ions est injectée à la surface de l'émetteur. Ces modèles, dits à "injection de charge", nécessitent précisément de connaître au préalable la quantité de charge à injecter. Différentes fonctions d'injection de charge ont été proposées [88]. Le choix du modèle d'injection de charge repose essentiellement sur des bases empiriques, calés pour chaque configuration par comparaison avec des résutlats expérimentaux. Une autre approche communément employée dans la littérature consiste à fixer le champ électrique à la surface de l'émetteur, quelle que soit la tension appliquée (hypothèse de Kaptzov). La loi empirique de Peek sert alors de référence pour fixer la valeur du champ électrique à l'émetteur. Les modèles à injection de charge sont beaucoup moins coûteux en temps de calcul. Cependant le choix de la loi d'injection de charge est un élément critique de la modélisation. Or à ce jour, aucun argument en lien avec la physique de la décharge ne permet de justifier un modèle phénoménologique plutôt qu'un autre.

Une approche intermédiaire consiste à ne garder que les réactions dominantes d'ionisation primaire et d'attachement (α et η) et à simplifier le processus d'ionisation secondaire. Tiramula *et al.* [89] comparent un modèle à injection de charge uniforme à un modèle simplifié de la décharge prenant en compte le coefficient d'ionisation primaire. Dans le modèle avec ionisation, la décharge est alimentée par un flux uniforme d'électrons de valeur adéquate. Les résultats de la figure 4.1 montrent que pour des géométries non axi-symétriques, la différence de répartition des ions est très importante.

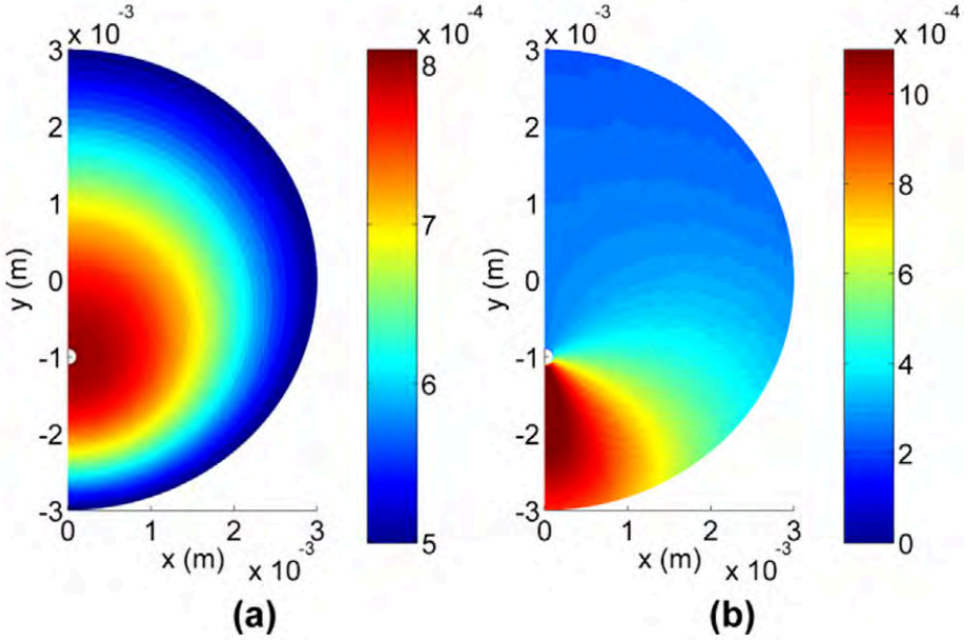


Figure 4.1 – *Densité d'ions positifs calculée par Tiramula [89].(a) Modèle à injection uniforme, (b) Modèle avec ionisation.*

De nombreux travaux, discutés dans les sections à suivre, se sont intéressés au modèle simplifié de la décharge. Cette approche permet même dans certains cas d'obtenir des bribes de solutions analytiques comme nous le montrons dans la section suivante. La résolution complète nécessite de coupler à la fois la zone de *drift* et la zone d'ionisation, ce que nous proposons de faire avec la méthode des développements asymptotiques raccordés. Nous nous concentrons, dans ce chapitre sur le cas purement axisymétrique, mais nous discuterons de la généralisation numérique de cette approche à des cas 2D non-axisymétriques dans le chapitre suivant.

4.2 Une brève justification de la loi de Townsend

Dans cette section un modèle à injection de charge est utilisé pour estimer le courant de décharge. Ceci permet de retrouver la loi quadratique de Townsend. Étant donné l'utilisation systématique de la loi de Townsend pour décrire les données expérimentales dans de nombreux travaux, une brève justification théorique semble être un prérequis intéressant. Nous montrons ici que cette loi est une approximation valable aux faibles courants. Pour une géométrie cylindrique il est possible de retrouver l'expression du courant en fonction de la tension à partir de la loi de Gauss et de la conservation du courant.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r} \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{j} = \rho \mu_p \mathbf{E}$ le vecteur densité de courant, porté par les ions positifs. En résolvant ce système d'équations en coordonnées cylindriques, et en notant le rayon de l'émetteur a, celui du collecteur L et en fixant $\rho(r = a) = \rho_a$ et $E(r = a) = E_a$ on obtient [90]

$$E(r) = \sqrt{\frac{I}{2\pi\epsilon_r\mu}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2} \tag{4.3}$$

Avec $I = 2\pi\mu\rho_a E_a = 2\pi\mu\rho(r)E(r)$ le courant total par unité de longueur. Les conditions aux limites sur le potentiel $V(r = a) = V_a$, $V(r = L) = 0$ sont appliquées de la manière suivante

$$\int_a^L E(r) = V_a \tag{4.4}$$

Cette condition implicite fixe le courant I en fonction de V_a. Il est possible d'obtenir une approximation de I au moyen du théorème des fonctions implicites. Pour cela on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$J = \frac{I_a L^2}{2\pi\epsilon_r\mu_p V_a}$$
$$A = \frac{aE_a}{V_a}$$
$$\hat{r} = \frac{r}{L}$$

où L est le rayon du collecteur. Avec ces notations la condition (4.4) devient

$$\int_{\hat{a}}^1 \sqrt{J\left(1 - \frac{\hat{a}^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{A^2}{\hat{r}^2}}\,\mathrm{d}\hat{r} = 1. \tag{4.5}$$

L'intégrale peut être calculée analytiquement comme le propose Feng [68] où comme nous l'avons fait lors de l'analyse asymptotique à suivre [91]. Ici nous nous contenterons d'expliquer le principe de la démarche sans pour autant expliciter le détail du calcul analytique. La relation (4.5) est une relation implicite, pouvant se mettre sous la forme $f(J, A) = 0$, qui lie le courant adimensionnel J au paramètre A qui contient la tension V_a. Le théorème des fonctions implicites nous permet d'obtenir la dérivée $\partial_A J$ de la fonction implicite $J(A)$ par rapport à A pour un point quelconque (J_0, A_0). Si f est dérivable au voisinage de ce point, $\partial_A J$ s'obtient ainsi

$$\partial_A J|_{(J_0,A_0)} = -\left.\frac{\partial_A f}{\partial_J f}\right|_{(J_0,A_0)} \tag{4.6}$$

Un développement de Taylor de $J(A)$ nous donne ensuite la relation linéarisée

$$J = J_0 + \partial_A J|_{A_0}(A - A_0) + O(A - A_0)^2. \tag{4.7}$$

En suivant cette démarche, et donc en linéarisant la relation $J(A)$ au voisinage du point d'allumage de la décharge en $J_0 = 0$, $A_0 = -1/\ln(\hat{a})$ on obtient finalement l'expression suivante pour J

$$J \approx \frac{-4}{2\ln(\hat{a})\hat{a}^2 - \hat{a}^2 + 1}\left(A + \frac{1}{\ln(\hat{a})}\right). \tag{4.8}$$

Dans la mesure où $\hat{a} = a/L \ll 1$, il est possible de réécrire l'expression précédente de la manière simplifiée suivante

$$J \approx -4\left(A - \frac{1}{\ln(1/\hat{a})}\right) \tag{4.9}$$

En repassant en variables dimensionnelles on obtient exactement la loi de Townsend énoncée précédemment dans le chapitre d'introduction.

$$I \approx \frac{8\pi\mu\epsilon_r}{L^2\ln(L/a)} V_a(V_a - V_0). \tag{4.10}$$

Avec $V_0 = aE_a\ln(L/a)$ la tension d'allumage, donnée par le champ électrique d'allumage.

4.3 La méthode des développements asymptotiques raccordés (MDAR)

4.3.1 Principe de la méthode au travers d'un exemple

La méthode des développements asymptotiques (MDA) est une méthode perturbative qui permet de résoudre des équations dont l'un des termes est petit devant les autres. La petitesse de ce terme se mesure avec le paramètre $\varepsilon \ll 1$. La solution est alors recherchée sous la forme d'une série en puissance successive de ε. Cette méthode est dite "raccordée" (MDAR) lorsqu'il faut distinguer plusieurs zones : l'une où le terme d'ordre ε est effectivement petit, et l'une où il ne l'est pas. Il faut alors distinguer les deux cas pour obtenir deux solutions distinctes qu'il faudra raccorder entre elles. Les problèmes de raccord asymptotiques interviennent chaque fois qu'un petit paramètre multiplie le terme de dérivé le plus élevé. Ce terme, même s'il est généralement petit, ne peut plus être négligé dans des régions de faible épaisseurs, que l'on appelle, par généralisation de la terminologie utilisée en mécanique des fluides des 'couches limites'.

Prenons un exemple associé à une équation différentielle ordinaire 1D et linéaire pour illustrer la méthode. On cherche la solution $u(x)$ au problème suivant :

$$\varepsilon u'' + u' = -1 \tag{4.11}$$
$$u(x=0) = 0 \text{ et } u(x=1) = 0. \tag{4.12}$$

Une première approche naïve consisterait à négliger le termes d'ordre ε. Mais dans ce cas le problème serait mal posé car il y aurait deux conditions limites pour une équation différentielle d'ordre 1.

La première idée du développement asymptotique raccordé consiste à distinguer deux zones : la première où le terme d'ordre ε est bel et bien négligeable (appelée zone externe) et une autre, appelée zone interne où il ne l'est pas car la dérivée seconde devient d'ordre $1/\varepsilon^2$. Ce comportement est visible sur la solution exacte de la figure 4.2 b et c. Quand $x \sim 1$, c'est à dire presque partout, la dérivée seconde est presque nulle, le terme $\varepsilon u''$ est effectivement négligeable. En revanche quand $x \to 0$ une fine couche limite se forme où la solution varie de manière abrupte : la dérivée seconde n'est plus négligeable. Mathématiquement on écrit deux équations : l'une pour la zone externe $x \sim 1$ où la solution "naïve" sera $u(x)$, et l'une pour la zone interne où l'on dilate l'espace de sorte que $X = x/\varepsilon$ et $u(x) = U(X)$, $u'(x) = U'(X)/\varepsilon$ et $u''(x) = U''(X)/\varepsilon^2$. En ne gardant que les termes d'ordre 0 dans chaque zone on obtient

$$u' = -1$$
$$U'' + U' = 0.$$

La deuxième idée du développement asymptotique consiste à écrire la solution dans chaque zone sous forme de série en ε

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...$$
$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + ...$$

que l'on injecte ensuite dans les équations internes et externes. En pratique on se contente souvent de résoudre uniquement à l'ordre dominant u_0 et U_0. Dans notre cas on obtient après résolution

$$u_0 = -x + k$$
$$U_0 = K_1 e^{-X} + K_2$$

où k,K_1 et K_2 sont des constantes à déterminer grâce aux conditions limites et à la condition de raccord entre u et U. Différentes méthodes de raccord peuvent être employées mais la plus courante et la plus intuitive à l'ordre dominant s'écrit

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{X\to\infty} U(X). \tag{4.13}$$

Dans notre cas les solutions raccordées s'obtiennent sans difficulté avec cette condition de raccord.

$$u(x) = u_0(x) + O(\varepsilon) = 1 - x + O(\varepsilon)$$
$$U(X) = U_0(X) + O(\varepsilon) = 1 - e^{-X} + O(\varepsilon)$$

A ce stade la résolution est terminée. On a donc une solution valide dans la zone interne et une autre valide dans la zone externe. Il peut être intéressant de construire une solution composite qui combine ces deux solutions pour obtenir une approximation globale. Une manière simple de procéder consiste à prendre la somme des deux solutions à laquelle on retranche la valeur du raccord $\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{X\to\infty} U(X) = 1$. La solution composite s'écrit alors

$$u_c(x) = u(x) + U(x/\varepsilon) - 1. \tag{4.14}$$

Une comparaison des différentes solutions avec la solution exacte est fournie en figure 4.2. Plus ε est petit, plus l'épaisseur de la couche limite est faible et meilleure est la solution asymptotique.

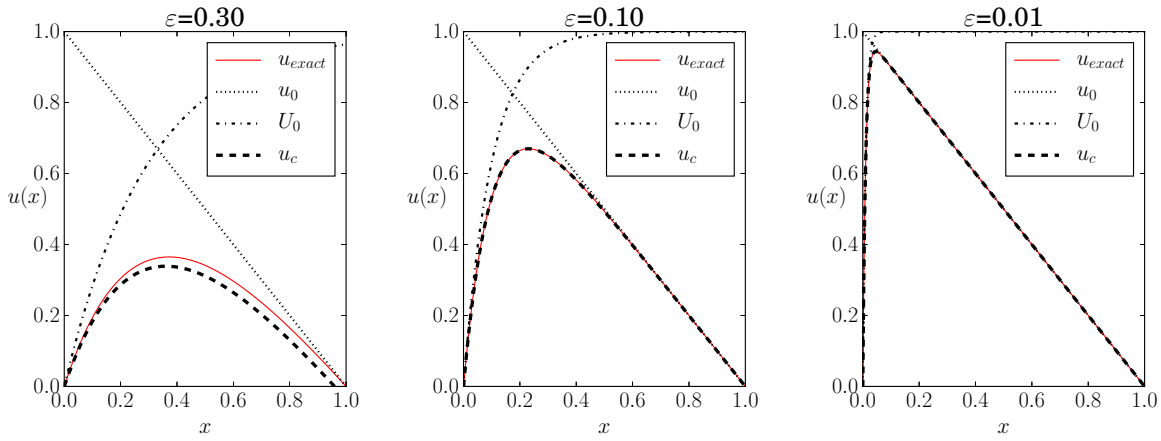


Figure 4.2 – *Solution exacte comparée aux solutions internes, externes et composites pour (a)* $\varepsilon = 0.3$*, (b)* $\varepsilon = 0.1$*, (c)*$\varepsilon = 0.01$*.*

4.3.2 Application à la décharge couronne.

L' analyse asymptotique raccordée de la décharge couronne a été proposée et réalisée pour la première fois par Durbin & Turyn en 1987 [84]. Peu d'études s'y sont cependant intéressées depuis, à l'exception de certains travaux menés à l'ONERA [92] dans lesquels la méthode est adaptée à un actionneur à plasma à double décharge.

L'article de la section suivante [91] étudie la décharge couronne dans le cadre d'une analyse asymptotique raccordée. Nous nous contenterons ici d'expliquer les grandes lignes. L' approche proposée étends et précise celle de Durbin & Turyn [84] en incluant l'attachement électronique

et en plus des petits paramètres de base ε et $\exp(-1/\varepsilon)$ d'autres petits paramètres sont mis en avant, comme le rapport des mobilités et le coefficient d'ionisation secondaire, de même qu'un développement multi-polaire sur le terme non-local de photo-ionisation.

En appliquant la MDAR à la décharge couronne on obtient deux systèmes de quatre équations décrivant le potentiel électrique (Φ et ϕ), et la conservation des électrons (N_e et n_e), des ions positifs (N_p et n_p) et des ions négatifs (N_n et n_n). La méthode met en avant les points suivants qui sont récapitulés de manière graphique sur la figure 4.3.

1) Dans la zone interne, le potentiel électrique est harmonique : la densité de charge peut être négligée car les variations du potentiel sont comparativement très grandes. Ce résultat est *a priori* contre-intuitif car c'est aussi dans la zone interne que la concentration en ion atteint un maximum. En vérité le potentiel n'est pas entièrement découplé de la densité de charge car cette dernière altère significativement le potentiel de la zone externe qui transmet l'information à la zone interne via la condition de raccord.
2) Les coefficients d'ionisation jouent un rôle principalement dans la zone interne et sont négligés ailleurs.
3) La condition de raccord pour les électrons est particulièrement subtile. En effet la solution externe dépend de la solution interne via l'opérateur non local de photo-ionisation. De plus, cette même condition de raccord aboutit à une condition très similaire au critère de Townsend. Cette condition fixe le champ électrique dans la zone interne en fonction de la géométrie des électrodes et des propriétés d'ionisation du gaz. Il est intéressant de noter que le champ électrique interne ne dépend pas de la tension appliquée, ce qui fourni une justification de l'hypothèse de Kaptzov dans le cas axisymétrique.
4) Dans la zone externe, la concentration en ions positifs domine très largement celle des autres espèces. La densité de charge est donc largement positive et portée par la concentration en ions positifs n_p.
5) Il existe un fort couplage entre le potentiel électrique et la densité des ions dans la zone externe. La prise en compte minutieuse de ce couplage est cruciale pour déterminer la caractéristique courant-tension de la décharge.

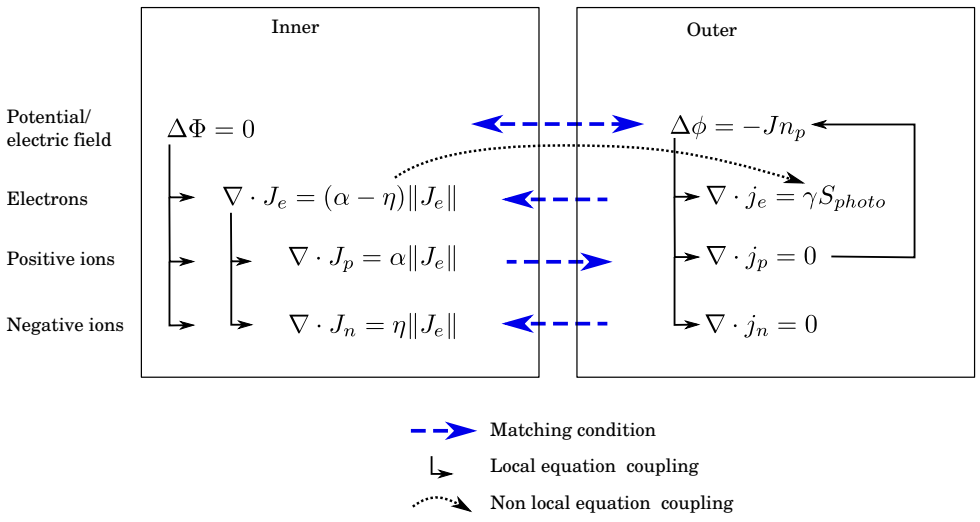


Figure 4.3 – *Illustration des différents couplages entre les équations et entre les zones.*

4.4 Article *Physics of Plasmas*

L'article suivant [91] détaille la méthode MDAR appliquée à la décharge couronne. Une attention particulère est portée aux conditions de raccords entre les solutions internes et externes. Ces conditions de raccords nous renseignent sur le courant de décharge et le champ électrique à l'émetteur. Le principal intérêt de cette étude, en plus de la compréhension fine des différents couplages, est l'obtention de solutions analytiques explicites. Ces dernières fournissent un moyen simple d'évaluer la sensibilité du courant de décharge aux différents paramètres physiques : tension appliquée, géométrie, propriétés d'ionisation du gaz.

Abstract

The classical positive Corona Discharge (CD) theory in cylindrical axisymmetric configuration is revisited in order to find analytically the influence of gas properties and thermodynamic conditions on the corona current. The matched asymptotic expansion of Durbin & Turyn of a simplified but self-consitent problem is performed and explicit analytical solutions are derived. The mathematical derivation permits to express a new positive DC corona current-voltage charachteristic, either chosing dimensionless or dimensional formulation. In dimensional variables the current voltage law and the corona inception voltage explicitly depends on electrodes size and on physical gas properties such as ionization and photoionization parameters. The analytical predictions are successfully confronted with experiments and with Peek's and Townsend's laws. An analytical expression of the corona inception voltage φ_{on} is proposed, which depends on known values of the physical parameters without adjustable parameters. As a proof of consistency, the classical Townsend current-voltage law $I = C\varphi(\varphi - \varphi_{on})$ is retrieved by linearizing the non-dimensional analytical solution. A brief parametric study showcases the interest of this analytical current model especially for exploring small corona wires or considering various thermodynamic conditions.

Revisiting the positive DC corona discharge theory: beyond Peek's and Townsend's law.

September 18, 2018

1 Introduction

Corona Discharge (CD) is useful in many valuable applications such as electrostatic precipitators, ozonizers or micro-heat coolers and, for this reason, has been quite extensively studied. CD is a special example of localized gas discharge, for which, in the vicinity of high-tension wire, the ionization of various ionic species is generated by electron collisions. Furthermore, the finite extension of CD in high-electric fields region is edged by vanishing free-electron resulting from secondary processes such as photo-ionizing radiation produced inside the CD region. The intimate physico-chemical description of CD is thus quite complex, the details of which also depends on the gas composition, temperature and the physical properties of generated ions. Nevertheless, albeit this complexity is attested, it did not prevent many simplified models to be successfully compared with experimental measurements, [1, 2, 3, 4, 5, 6] to cite only a few. But all of them derive only implicit current-voltage laws. In order to investigate the capabilities of corona discharge for new applications, there is a growing need for simplified models. For applications involving small emitting electrodes, such as ionic wind devices [7, 8], an analytical model of the corona discharge current would be a valuable tool.

The current-voltage characteristic $I = f(V)$ is a key property for most corona discharge devices. The case of cylindrical geometry provides a nice configuration for testing model's prediction. It is characterized by two features: the "starting point", e.g. onset voltage, and its "shape", e.g. of $I = f(V)$.

The onset voltage is classically computed from the early phenomenological Peek's law [9] propounding the critical electric field E_a at the emitter surface, in cylindrical geometry, in air. Peek's law however suffers from providing a purely phenomenological dependency of the critical electric field E_a with the emitter's radius a, and it is restricted to CD in air in atmospheric conditions for relatively large wires. This is why many theoretical studies have been dedicated to improve basic knowledge on CD in order to predict the critical electric field, and its dependency on the geometrical and physical parameters in a more general context. More generally, the critical electric field E_a can be obtained from numerically solving the implicit breakdown criterion, e. g [10, 11, 12] $\int \alpha - \eta = K$ with good agreement with experiments. Nevertheless some analytical solution to this problem is also interesting since it provides a direct insight into the influence of each parameter. For example, Lowke *et al.* [13, 14] were able to recover an expression similar to Peek' law by injecting a quadratic fit of the ionization coefficient $\alpha(E/N) - \eta(E/N)$ at low E/N into the breakdown criterion.

Now considering the "shape" of the current-voltage curve, many applications of the corona discharge require accurate current predictions, and simplified corona models are crucial for exploring new applications at low computational cost. Approximations such as two-scale models [15, 16] or perturbative approaches [17, 18] are often confronted to the widely accepted quadratic law derived by Townsend [19] one century ago. However, according to his own words [20] the quadratic equation applies only for "small currents", otherwise an implicit expression should be used. In order to derive analytically the current, "compartmental" models were developed by involving a corona radius r_i. It has influenced many modeling for which this key parameter permits to separate two distinct phenomenological regions : the "glow discharge" region nearby the emitter and the "drift" region away from it, at the interface of which the continuity of the electrical field is prescribed [5, 21, 2]. Even empirically successful and interesting, these 'compartmental models' of CD can not predict the dependency of the critical electric field E_a or the total current I without further assumptions on the exact location of the corona radius r_i. The choice of r_i affects the solution [5].

On the contrary, in a seminal contribution, Durbin & Turyn [1] re-considered the CD problem in the framework of matched asymptotic analysis. Their approach has permitted to obtain the relationship between the CD region relative size (relative to some typical length in the drift region) with some typical ionization electric field E_i to be defined later. Durbin & Turyn [1] also numerically solved the matching condition so as to produce a new theoretical prediction for the (dimensionless) current-voltage $I = f(V)$. Unfortunately their theoretical predictions have been poorly confronted with experimental measurements. Furthermore, they only solve the matching conditions numerically and did not produce any explicit results on how their theoretical predictions associated with the critical electric field or the current-voltage characteristics depends on physical parameters.

In this contribution we revisit Durbin & Turyn [1] matched asymptotic approach to positive CD cylindrical problem and extend it to a more general framework. An explicit analytical solution for the matching conditions is found. This permits to easily evaluate the impact of each physical parameters such as effective mobility, ionization, photo-ionization or electrode size on the corona current and onset. The analytical current-voltage $I = f(V)$ is found, which, in the limit of small currents, derives exactly Townsend's law $I = C\varphi(\varphi - \varphi_{on})$. The theoretical predictions are analyzed in various ways : (i) their ability to predict current-voltage characteristics in different gas as compared with experimental measurements (ii) their validity range as compared with Townsend's law (iii) the quality of the asymptotic approximation (iv) the dependency of the produced current to physical parameters such as thermodynamic conditions.

The paper is organized as follows: first, the simplified constitutive equations of the CD are presented in section 2. Then, their dimensionless formulation is presented in 2.1 as well as their mathematical asymptotic analysis in 2.2 and 2.3. Section 3 describes how the theoretical predictions of 2 can be analyzed in dimensionless (section 3.1) or dimensional formulation (section 3.2) so as to assess the quality of the asymptotic approximation and how they compare with Peek's law or other onset criterion for corona onset and Townsend's law for current. In section 3.3 The analytical solution is compared with current-voltage measurements in various gas and conditions. Section 3.3.1 discuss the validity and limits of the analytical shape of the effective ionization coefficient. Finally section 4 showcases the applications of the presented analytical model with a brief parametric study.

2 Physical model and method

The matched asymptotic method is used to solve equations with physical processes being dominant in some region (a boundary layer) and negligible elsewhere. In their analysis, Durbin & Turyn [1] have mathematically shown that the corona problem has two distinct regions: an inner and an outer region. In the inner region, they show that the leading order of the electrical potential solution is harmonic (no space charge effects) which greatly simplifies the computation of the source terms for charge production caused by electronic impact and attachment. This is the "glow corona" region. The charge-free potential is often employed at the inception voltage [11, 12, 6, 10] but Durbin & Turyn proved that it still holds at higher voltages. However the "boundary condition" at the edge of the inner region depends on the solution in the outer region, which make the inner solution not completely independent of space charge effects. In the outer region, the concentration of the electrons is found to be evanescent, the positive charges are electro-convected, and coupled with the electrical potential through the classical electrostatic Poisson problem (not harmonic in this region). This outer region is the "drift" region. In figure 1, an intermediate zone is introduced, to be discussed in the mathematical matching section.

2.1 Governing equations

As mentioned in the introduction, the effective fluid model of the positive DC corona is considered. The production of positive ions, electrons and negative ions (respective density n_p, n_e and n_n) is governed by the impact ionization coefficient α and the attachment coefficient η. The ionization coefficient dependency with electric field will take the standard Townsend form

$$\alpha = \beta \exp(-E_i/E) \tag{1}$$

where β and E_i are two physical parameters which depends on the gas composition, thermodynamic conditions and supposed to be known. The attachment coefficient is assumed to vanish at low electric fields. Section 3.3.1 provides more information about how they were evaluated and in which conditions relation

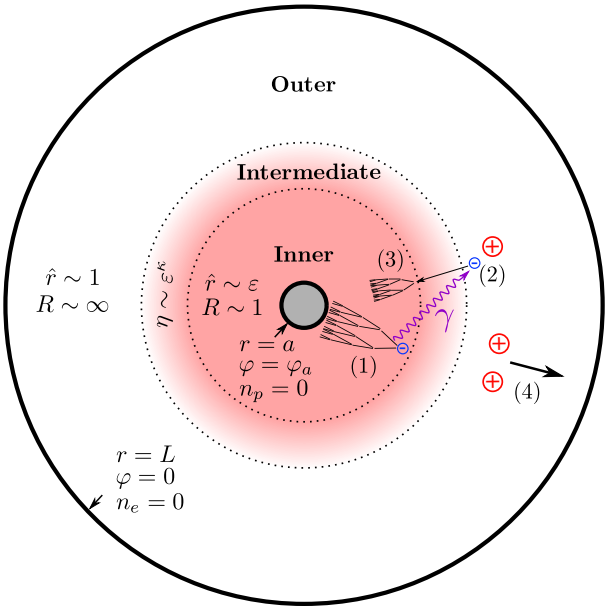


Figure 1: Coaxial electrodes geometry, asymptotic regions and corresponding physical processes. (1) primary electron avalanche, (2) Secondary ionization, (3) Secondary electron avalanche, (4) Ion drift.

(1) is accurate and reliable. Hence, combining the previous effects provides the following constitutive model

$$\nabla^2\varphi = \frac{e}{\epsilon_0}(n_e + n_n - n_p) \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j_p} = \alpha\|\mathbf{j_e}\| + S \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j_e} = (\alpha-\eta)\|\mathbf{j_e}\| + S \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j_n} = \eta\|\mathbf{j_e}\| \tag{5}$$

Where e is the elementary charge, $\mathbf{j_e} = \mu_e n_e \nabla\varphi$, $\mathbf{j_p} = -\mu_p n_p \nabla\varphi$, and $\mathbf{j_n} = \mu_n n_n \nabla\varphi$ are the local fluxes of the electron, positive and negative charges. One complex aspect of CD modeling concerns the generation of secondary electrons. Even if secondary ionization is very small compared to the impact ionization, it is necessary to explain the onset of the discharge. Here the photo-ionization is the main source of secondary electron

$$S(\mathbf{r}) = \lambda\gamma \int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,(\alpha(r') - \eta(r'))\|\mathbf{j_e}(\mathbf{r}')\| d^3\mathbf{r}'. \tag{6}$$

$S(\mathbf{r})$ is the number of photo-ionizing events at position $\mathbf{r}$ per unit time and volume. The coefficient γ is the secondary electron efficiency, identical to the one introduced by Zheng [22]. The effective absorption coefficient is named λ (and not μ as in [1, 22] to avoid confusion with mobility) and $\lambda G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ its associated effective absorption function. The photon absorption function may have different forms [11, 1, 23] (for now, no particular shape is assumed).

Following [1], all quantities are rescaled with the radius of the collector L, the positive ion mobility μ_p, the applied voltage φ_a and the net current I per unit length at the collector to build the following non-dimensional quantities (hat stands for non dimensional):

$$\hat{r} = \frac{r}{L},\ \ \hat{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_a},\ \ \hat{n}_k = \frac{n_k}{n_{k,0}},\ \ \hat{a} = \frac{a}{L} \tag{7}$$

with $n_{k,0} = I/(2\pi\mu_k e\varphi_a)$, $k \equiv e, p, n$, and a the emitter radius. As mentionned by Durbin [1], the reaction coefficients have to scale as follows

$$\frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon} = L\alpha = \frac{\hat{\beta}}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon\hat{E}}\right)$$

$$\frac{\hat{\eta}}{\varepsilon} = L\eta$$

with $\hat{\beta} = \beta L\varepsilon$. For conciseness $\hat{\alpha}_{ef} = \hat{\alpha} - \hat{\eta}$ is the effective ionization coefficient. The small asymptotic parameter ε is defined by

$$\varepsilon = \frac{\varphi_a}{LE_i}. \tag{8}$$

A distinct reference density is chosen for the ions and the electrons because, physically, their flux only is expected to match. Hence the ratio of electron to positive ions density is merely proportional to the inverse ratio of their respective mobility. Positive and negative ions have similar mobilities $\mu_p \approx \mu_n$. Using this non-dimensional formulation, the governing equations are now expressed in 2D cylindrical axi-symetrical configurations. Realizing that the fluxes are radial, so that $\hat{\mathbf{j}}_\mathbf{e} = \hat{j}_e \mathbf{e_r}$ and $-\nabla\hat{\varphi} = \hat{E}\mathbf{e}_r$, dimensionless governing equations reads

$$\frac{1}{\hat{r}}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi}) = -J(\hat{n}_p - \delta_\mu \hat{n}_e - n_n) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\hat{r}}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\hat{j}_p) = -\frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon}\hat{j}_e - \hat{S}(\hat{r}) \tag{10}$$

$$\frac{1}{\hat{r}}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\hat{j}_e) = -\frac{\hat{\alpha}-\hat{\eta}}{\varepsilon}\hat{j}_e - \hat{S}(\hat{r}) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\hat{r}}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\hat{j}_n) = -\frac{\hat{\eta}}{\varepsilon}\hat{j}_e \tag{12}$$

with $\hat{S}(\hat{r}) = \hat{\lambda}\gamma \int G(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') \left[\frac{\hat{\alpha}-\hat{\eta}}{\varepsilon}\hat{j}_e\right](\hat{\mathbf{r}}') d^{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{r}}'$. Note that the volume integral was transformed into a surface integral by integrating along the electrode axis: $G_{2D}(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(r,\theta,z)\mathrm{d}z$. The minus sign in the left-hand-side comes from $|\hat{j}_e| = -\hat{j}_e$ since the voltage gradient is negative. The dimensionless parameter J, acting as a dimensionless current, or space charge parameter, is defined as

$$J = \frac{n_{0,p}L^2}{\epsilon_0\varphi_a^2} = \frac{IL^2}{2\pi\mu_p\epsilon_0\varphi_a^2} \tag{13}$$

Note that contrary to Durbin & Turyn we differentiate the adimensionalization for ions and electrons so that $\hat{n}_e \sim \hat{n}_p \sim 1$. This is why the small parameter $\delta_\mu = n_{e,0}/n_{p,0} = \mu_p/\mu_e$ appears in (9). δ_μ typically takes values smaller than 10^{-2} in air.

The mobility of each species can be assumed to be constant without loss of generality. The charge conservation equation (10) and (11) are indeed written in term of flux, the mobility dependence on electric field is then transparent for charge conservation equations. Besides, the upcoming section 2.2 states that in the high electric field region, where the mobility most likely varies, the species concentration can be dropped in the potential equation (9).

It is important to mention that the original model considered by Durbin [1] does not present a balanced distribution of the photo-ionization which is only a source term for electrons, but not for positive ions. As a result, the total current produced at the CD edge is not exactly conserved at the interface inner/outer. This issue, is more benign than first suggested. As a matter of fact, the current inconsistency scales with the small parameter γ (see the section 2.4.2). The small photo-ionization efficiency (typically $\gamma < 10^{-3}$) results in a very weak correction to the overall positive ion current. This is completely coherent with previous results [22] where the computed positive ion flux is conserved in the outer region, indicating negligible source terms. So photo-ions can be neglected. The number of negative ions is also a small quantity compared to positive ions. First, negative ions production rate is very small $n_{n,max}/n_{p,max} \sim \eta/\alpha \ll 1$ and secondly they are produced only in the inner region, where the space charge will be negligible. For concision, the rest of the analysis focuses on the relevant species: positive ions and electrons.

2.2 Inner expansion

In the inner region the scaling is small $\hat{r} \sim \varepsilon$. To keep a $O(1)$ space variable, it is rescaled $R = \hat{r}/\varepsilon$. Every variable $\hat{x}$ is then rewritten so that $X(R) = \hat{x}(\hat{r})$, where capital letters denotes the inner whereas hated ones, the outer. This scaling implies a contraction of both derivatives and reaction coefficient, i.e

$$\partial_R\Phi = \varepsilon\,\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi} \quad J_k = \varepsilon\hat{j}_k \quad \hat{\alpha}(\varepsilon R) = \hat{\alpha}(\hat{r})$$

The set of consitutive equations can then be rewritten

$$\frac{1}{R}\partial_R(R\partial_R\Phi) = -\varepsilon^2 J(N_p - \delta_\mu N_e) \tag{14}$$

$$\frac{1}{R}\partial_R(RJ_p) = -\hat{\alpha}J_e - \varepsilon^2\hat{\lambda}\gamma \int G\,\hat{\alpha}J_e\, d^{\mathbf{2}}\mathbf{R}' \tag{15}$$

$$\frac{1}{R}\partial_R(RJ_e) = -\hat{\alpha}J_e - \varepsilon^2\hat{\lambda}\gamma \int G\,\hat{\alpha}J_e\, d^{\mathbf{2}}\mathbf{R}' \tag{16}$$

The solution inside the inner region is sought after from the following double asymptotic expansion resulting from the balance of the various terms

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \frac{1}{\varepsilon}\exp^{-(\frac{1}{\varepsilon})}\Phi_2 + ... \tag{17}$$

$$N_p = N_{p,0} + \varepsilon N_{p,1} + \frac{1}{\varepsilon}\exp^{-(\frac{1}{\varepsilon})}N_{p,2} + ... \tag{18}$$

$$N_e = N_{e,0} + \varepsilon N_{e,1} + \frac{1}{\varepsilon}\exp^{-(\frac{1}{\varepsilon})}N_{e,2} + ... \tag{19}$$

Keeping with the leading order and dropping the index 0 for notation simplicity (whilst obviously consistently ignoring the influence of the further terms of the expansion in the following), leads to the leading order inner problem.

$$\frac{1}{R}\partial_R(R\partial_R\Phi) = 0 \tag{20}$$

$$\partial_R\Pi_p = \hat{\alpha}(\varepsilon R)\Pi_e \tag{21}$$

$$\partial_R\Pi_e = -\hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R)\Pi_e, \tag{22}$$

where we have considered the (normalized) total fluxes $\Pi_k = \frac{1}{2\pi}\int_{C(R)}(\mathbf{J}_k\cdot\mathbf{n})Rd\theta = \pm J_k R$, $k \equiv e, p$.

2.3 Outer expansion

Let us now consider the outer scaling variable $\hat{r} \sim 1$. In the outer region, the photoionization term can be developed into a classical multi-polar expansion, since, the main contribution of the convolution product comes from the contribution of the inner region ($\hat{\mathbf{r}}' = \varepsilon\mathbf{R}'$). This non-local term is expanded with the hierarchy of moments of the electron flux inside the inner region : a mono-polar leading order term associated with the zeroth moment of electron flux, a bipolar correction associated with the first moment , etc...

$$\begin{aligned}\int G\,\hat{\alpha}J_e\, d^{\mathbf{2}}\mathbf{R}' &= \int G(\hat{\mathbf{r}}, \varepsilon\mathbf{R}')\,[\hat{\alpha}_{ef}J_e]_{(\mathbf{R}')}d^2(\mathbf{R}') \\ &= G(\hat{\mathbf{r}}, 0)\int [\hat{\alpha}_{ef}J_e]_{(\mathbf{R}')}\mathrm{d}^2(\mathbf{R}') \\ &\quad + \varepsilon\nabla G(\hat{\mathbf{r}}, 0)\cdot\int [\hat{\alpha}_{ef}J_e]_{(\mathbf{R}')}\mathbf{R}'\mathrm{d}^2(\mathbf{R}') \\ &\quad + ...\end{aligned}$$

In the special case of axi-symmetric solutions, the first order $O(\varepsilon)$ dipole correction cancels. Using a similar asymptotic expansion (17-19), in outer constitutive equations (9-11), again dropping the index and keeping only the leading-order set of equations, one finds

$$\frac{1}{\hat{r}}\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi}) = -J(\hat{n}_p - \delta_\mu\hat{n}_e) \tag{23}$$

$$\partial_{\hat{r}}\hat{\pi}_p = 0 \tag{24}$$

$$\partial_{\hat{r}}\hat{\pi}_e = -2\pi\gamma\hat{r}\hat{\lambda}G(\hat{r}, 0)\int_{a/\varepsilon}^{\infty}\hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R')\Pi_e\mathrm{d}R' \tag{25}$$

The solution for the electron flux $\hat{\pi}_e$ can easily be obtained from integrating (25), given the radiation kernel $G(\hat{r},0)$. Following [1, 23], an asymptotic cylindrical radiative kernel $G(\hat{r},0) = \exp(-\lambda\hat{r})/2\pi\hat{r}$ produces the leading-order electron flux

$$\hat{\pi}_e = -\gamma \exp(-\hat{\lambda}\hat{r}) \int_{a/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}(\varepsilon R')\Pi_e \mathrm{d}R',$$

which provides an evanescent exponentially decaying secondary electron flux in the outer region with typical decaying length $1/\hat{\lambda}$. Furthermore, both photo-ionization coefficient γ and the mobility ratio between the electrons and the positive charges are small (again typically $\delta_\mu \sim 10^{-2} \ll 1$) so that, the back-coupling of photo-emitted induced electrons into the electrical potential can be neglected. This issue can be more formally re-casted into searching for a solution given by a second regular asymptotic expansion in mobility ratio

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_0 &= \hat{\varphi}_{00} + \delta_\mu \tilde{\varphi}_{01} + ... \\
n_{p,0} &= \tilde{n}_{p,00} + \delta_\mu \tilde{n}_{p,01} + ... \\
n_{e,0} &= \tilde{n}_{e,00} + \delta_\mu \tilde{n}_{e,01} + ...
\end{aligned}$$

Keeping with the leading order, and again, for notation simplicity dropping the index, leads to re-formulate (23-25) into the leading order set of equation

$$\partial_{\hat{r}}(\hat{r}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi}) = -J\hat{n}_p \tag{26}$$

$$\partial_{\hat{r}}\hat{\pi}_p = 0 \tag{27}$$

which are in fact the classical 'drift' region equations for which the influence of the electron charges are neglected. This set of equation can be solved analytically, but some constant will remain undetermined, like the non dimensional parameter J. A complete solution can be obtained by matching the outer and inner set of solutions.

2.4 Matching conditions

The resolution of the inner and outer set of equation is not especially difficult but for the stack of conciseness the reader might refer to previous works[1, 5, 2, 21, 6]. Whatever, at this stage the inner and outer solutions are not fully consistant since they contain four undetermined constants : A, K_1 and J for the potential and $\Pi_{e\infty}$ for the electron, to be defined in the coming section or in [1]. This uncertainty can be raised by adjusting inner and outer solutions so that they match in an intermediate zone.

2.4.1 Matching for electrons

The inner solution for electrons total flux writes

$$\Pi_e(R) = \Pi_{e\infty} \exp\left(\int_R^{\infty} \hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R')\mathrm{d}R'\right).$$

In the outer region the total flux of electrons writes

$$\hat{\pi}_e(\hat{r}) = -\gamma \exp(-\hat{\lambda}\hat{r}) \int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R')\Pi_e \mathrm{d}R'.$$

The matching condition $\lim_{R\to\infty} \Pi_e = \lim_{\hat{r}\to 0} \hat{\pi}_e$ leads to

$$\Pi_{e\infty} = \gamma \int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}_{ef}\Pi_e \mathrm{d}R'. \tag{28}$$

The integral term can be expressed as the difference between the inner and outer flux since, using (22), $\int \alpha_{ef}\Pi_e \mathrm{d}\mathbf{R} = \int -\partial_R(\Pi_e)\mathrm{d}\mathbf{R} = \Pi_{e,a} - \Pi_{e\infty}$. Using the inner solution, we substitute $\Pi_{e,a} = \Pi_{e\infty}\exp\left(\int \alpha_{ef}\mathrm{d}R\right)$, so that the matching condition finally reads

$$\Pi_{e\infty} = \gamma \left[\Pi_{e\infty} \exp\left(\int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R')\mathrm{d}R'\right) - \Pi_{e\infty}\right],$$

which can be rearranged into a Townsend's like onset criterion

$$\ln(1+\gamma^{-1}) = \int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R')\mathrm{d}R' \tag{29}$$

This is an implicit condition on the electric field that can be solved numerically [10]. The accurate prediction of the corona onset, and especially of the constant $K = \ln(1+\gamma^{-1})$ is still an ongoing work [11, 12]. The criterion (29) is nonetheless widely used and remains satisfying for most applications.

2.4.2 Matching for ions

The inner solution for ions writes

$$\Pi_p(R) = -\Pi_{e\infty} \int_{\hat{a}/\varepsilon}^{R} \hat{\alpha}(R') \exp\left(\int_{R'}^{\infty} \hat{\alpha} - \hat{\eta}\, \mathrm{d}R''\right) \mathrm{d}R'$$

while in the outer, the definition of the ion flux $\int_{\hat{r}=1} \hat{\pi}_p \mathrm{d}\theta = 2\pi$ gives

$$\hat{\pi}_p = 1.$$

More precisely, without neglecting photoionization for ions and negative ions the outer solution should be:

$$\hat{\pi}_p = 1 - \hat{\pi}_e - \hat{\pi}_n. \tag{30}$$

But as shown in the previous section, the outer electron flux $\hat{\pi}_e$ is very small since it scales with γ. The negative ion flux is exactly zero because it is zero at the collector (imposed boundary condition) and there is asymptotically no electron attachment in the outer region. So the matching condition $\lim_{R\to\infty} N_p = \lim_{\hat{r}\to 0} \hat{n}_p$ gives the value of the incoming electron flux

$$\Pi_{e\infty} = \left[\exp\left(\int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \hat{\alpha}\mathrm{d}R'\right) - 1 - \int_{\hat{a}/\varepsilon}^{\infty} \eta \exp\left(\int_{R}^{'\infty} \hat{\alpha} - \hat{\eta}\mathrm{d}R''\right)\right]^{-1} \tag{31}$$

2.4.3 Matching for potential

The matching condition on electric potential is more technical than the previous ones. Integrating the Poisson equation gives four constants: two in the inner region and two in the outer. Two constants are determined by applying the boundary conditions in $R = \hat{a}/\varepsilon$ and $\hat{r} = 1$, while the two remaining, J and K_1, are provided by matching conditions. Durbin [1] applies intuitively conditions on electric flux $r\partial_r\varphi$ and on the potential, which leads to an implicit relationship between the space charge parameter J and the surface electric field parameter A.

$$\int_a^1 \sqrt{J + A^2/r^2}\mathrm{d}r = 1 \tag{32}$$

Finding the relationship $J = f(A)$ is equivalent to finding the current-voltage law $I = f(V)$. Here, a more sophisticated, although classical, intermediate variable matching (see Hinch [24]) is applied. The derivation is summarized in the appendix. The matching condition gives

$$1 - A\ln\left(\frac{1}{\hat{a}}\right) = \sqrt{J+A^2} - A + A\ln\left(\frac{2A}{\sqrt{J+A^2}+A}\right). \tag{33}$$

which provides an unambiguous and integrated expression, with rigorous derivation. This implicit law $f(A, J, \hat{a}) = 0$ gives the non dimensional current J as a function of the non dimensional surface field A. Solving this equation and extracting the dimensional variables will give the current-voltage law as shown in Sec.3.

3 Results

The previous matching conditions are further analyzed. Results of practical interest are derived such as current-voltage and corona inception field as functions of ionization coefficient and geometry.

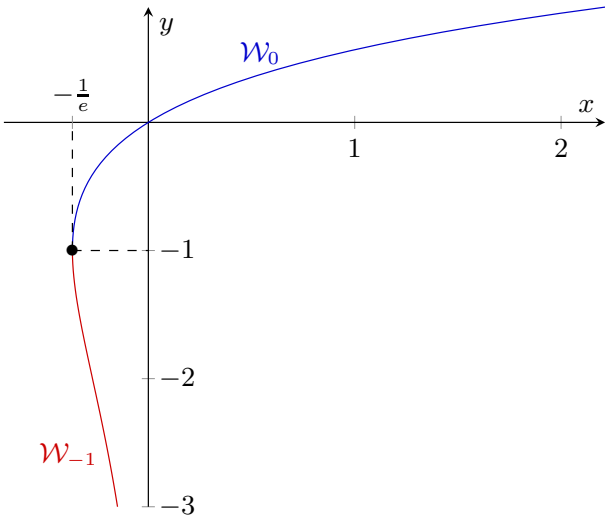


Figure 2: The real branches of Lambert $\mathcal{W}$ function.

3.1 Non dimensional results

3.1.1 Onset criterion

In order to find an explicit analytical solution for the matching condition, the effective ionization coefficient is assumed to behave like α. Taking $\alpha_{ef} = \beta_{ef} \exp(-E_{ief}/E)$ is quite relevant at high electric fields since α will dominate η, see section 3.3.1. From (20) the inner electric field writes $E = -\partial_R \Phi = A/R$ with A to be determined. Injecting the electric field in $\hat{\alpha}_{ef}(\varepsilon R) = \beta_{ef} L \varepsilon \exp(-\varepsilon R/\varepsilon_{ef} A)$ and integrating leads to a condition similar to the one obtained by Durbin [1]

$$\ln(1+\gamma^{-1}) = A\beta/\varepsilon_{ef} \exp(-\hat{a}/(\varepsilon_{ef} A)) \tag{34}$$

but with $\varepsilon_{ef} = \varphi_a / L E_{ief}$. To obtain an explicit expression for A, (34) is rearranged

$$\frac{\hat{a}\hat{\beta}}{\ln(1+\gamma^{-1})} = \hat{a}/(\varepsilon_{ef} A) \exp(\hat{a}/(\varepsilon_{ef} A)).$$

A is then expressed with the Lambert $\mathcal{W}$ function[1] see figure 2

$$\mathcal{W}\left(\frac{\hat{a}\beta_{ef} L}{\ln(1+\gamma^{-1})}\right) = \frac{\hat{a}}{\varepsilon_{ef} A}.$$

Since $\hat{a}\beta_{ef} L / \ln(1+\gamma^{-1}) > 0$, the branch 0 of the Lambert $\mathcal{W}$ function must be used.

$$A = \hat{a}/\varepsilon_{ef} \left[\mathcal{W}_0\left(\frac{\hat{a}\beta_{ef} L}{\ln(1+\gamma^{-1})}\right)\right]^{-1} \tag{35}$$

In practice $A = -\hat{a}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi}|_{\hat{a}}$ is linked to the surface voltage gradient at the emitter. So the non-dimensional condition (35) sets the surface electric field as a function of the physical parameters $\hat{a}$, $\beta_{ef} L$ and γ as well as the effective asymptotic parameter ε_{ef} . The practical consequences of this result are further developed in Sec. 3.2.1.

3.1.2 Non dimensional current.

The matching condition (33) is still an implicit relationship, which does not bring much advantages compared to the previous analytical works [1, 5, 25] or numerical methods. It can be rearranged in two ways.

[1] By definition $\mathcal{W}(y\mathrm{e}^y) = y$ for $y \in \mathsf{R}$ and $x = \mathcal{W}(x)\mathrm{e}^{\mathcal{W}(x)}$ for $x \geq -1/e$.

The first way consists to notice that

$$V = 1/A \ln(1/\hat{a}) = \varphi_a / a E_a \ln(L/a)$$

is the ratio between onset voltage and applied voltage and that

$$C = J/A^2 = IL^2/(2\pi\mu_p \epsilon_0 a^2 E_a^2)$$

is proportional to the current I, since E_a is independent of the applied voltage, see section3.2.1. Rearranging the matching condition we obtain

$$V = 1 + \frac{1}{\ln(1/\hat{a})}\Big[1+\sqrt{C+1} - \ln\Big(1+\sqrt{C+1}\Big) - (2-\ln(2))\Big]. \tag{36}$$

This expression gives the reduced voltage V against the reduced current C. Similar results were originally obtained by Thompson and Thompson as explained by Jones [5] for example. Their non dimensional parameters are slightly different since they involve a corona radius as explained earlier, but the analytical expressions are very similar. It matches with typical implicit models, as shown in the appendix B.

The second way is less straightforward but more interesting since it allows to recover an explicit expression of J. First (36) is reorganized using notation $Y = 1+\sqrt{C+1}$ and $K = \ln(1/\hat{a})(V-1)+2-\ln(2)$

$$K = Y - \ln(Y). \tag{37}$$

Then exponentiating and arranging leads to

$$e^K = \frac{1}{Y} e^Y$$
$$-e^{-K} = -Y e^{-Y}.$$

The solution is given by the Lambert W function. Applying the definition of $\mathcal{W}$ gives $-Y = \mathcal{W}\big(-e^{-K}\big)$. Re-injecting C in the expression finally leads to

$$C = \big[1+\mathcal{W}_{-1}\big(-e^{-K}\big)\big]^2 - 1, \tag{38}$$

or equivalently, using $-e^{-K} = -2\mathrm{e}^{-2}\,(1/\hat{a})^{V-1}$ and injecting J and A:

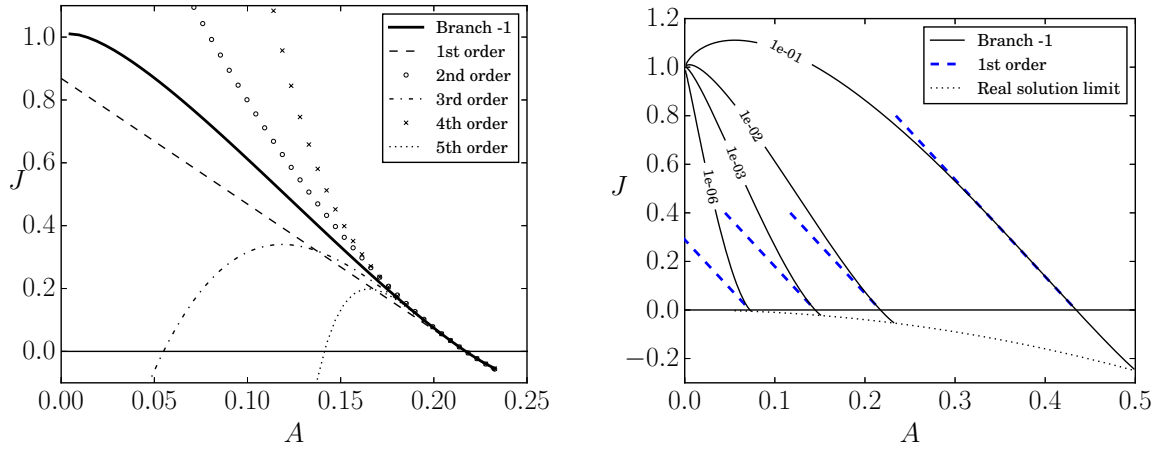
$$\frac{J}{A^2} = \mathcal{F}\big(-2e^{-2}\hat{a}^{V-1}\big), \tag{39}$$

with $\mathcal{F}$ given by

$$\mathcal{F}(x) = [1+\mathcal{W}_{-1}(x)]^2 - 1. \tag{40}$$

More properties concerning this function $\mathcal{W}$ can be found in [26], for example. Three remarks concerning this solution.

- For the particular value $A\ln(1/\hat{a}) = 1$ the space charge equals zero $J = 0$. In dimensional variables the condition writes $aE_a \ln(L/a)/\varphi_a = 1$ or $\varphi_a = aE_a \ln(L/a)$. This corresponds to the charge free solution for electric potential which holds only at the corona inception point.
- $-e^{-K} < 0$ and $\mathcal{W}(x)$ has two real branches when $x \in [-1/e; 0[$, see figure 2. Only the branch $\mathcal{W}_{-1}$ gives positive values of J. The branch 0 is also a solution but provides negative values of J, which is not relevant in the case considered here. Nevertheless, this further branch might be of interest when considering dynamical solutions associated with the stability of CD for example.
- This equation admits a real solution only if $-e^{-K} \geq -1/e$. The solution is complex otherwise. This condition writes $\frac{1}{A} \geq \ln(2/\hat{a}) - 1$, which is a condition on voltage and electric field at the emitting electrode in dimensional variables $\frac{\varphi_a}{aE_a} \geq \ln(2L/a) - 1$. Once again obtaining negative values of J, below the inception condition is not obvious to interpret.



(a) (b)

Figure 3: (a) Matching condition for J and A for $\hat{a} = 10^{-2}$ and first terms of the Taylor expansion (41). (b) Analytical solution $J = f(A)$ for various emitter diameter: $\hat{a} \in [10^{-6}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}]$.

The corona inception point $J = 0$ is of particular interest. Since the Taylor expansion of $\mathcal{W}$ is rather fastidious [26], the software Maple is used to compute the first five orders. The expansion of J around the point $A = 1/\ln(1/\hat{a})$ with $X = A - 1/\ln(1/\hat{a})$ then writes:

$$\begin{aligned} J = & -4X \\ & +2\ln(\hat{a})(2+\ln(\hat{a}))X^2 \\ & +\frac{2}{3}\ln(\hat{a})^4 X^3 \\ & +\frac{1}{6}\ln(\hat{a})^5(5\ln(\hat{a})+4)X^4 \\ & +\frac{1}{30}\ln(\hat{a})^6(41\ln(\hat{a})^2+50\ln(\hat{a})+20)X^5 \\ & +O(X^6) \end{aligned} \tag{41}$$

The consecutive expansion orders are plotted in figure 3a. Increasing the order of the expansion does not provide much progress since the high order terms strongly diverge far from $J = 0$. It is interesting that $J(A)$ can be linearly approximated with the universal slope -4. The validity range of the linearized law, figure 3b, decreases as $\hat{a}$ decreases. This is because the second order term of the Taylor expansion scales as $\ln(\hat{a})^2$. This has practical consequences concerning the well-known Townsend law, as further discussed in section 3.2.2.

3.2 Dimensional laws

3.2.1 Onset Electric field expression

Injecting the dimensional variables $\hat{a} = a/L$ and $A = aE_a/\varphi_a$ into (35) gives the inception voltage as a function of the gas ionization properties and the emitter radius

$$E_a = E_{ief}\left[\mathcal{W}_0\left(\frac{a\beta_{ef}}{\ln(1+\gamma^{-1})}\right)\right]^{-1}. \tag{42}$$

It is quite interesting to note that, for the leading order solution considered here, the surface electric field E_a does not depend on the applied voltage φ_a, but only on the gas properties and geometry. Equation (42) is similar to the well-known Peek's law since it provides the value of the surface electric field versus

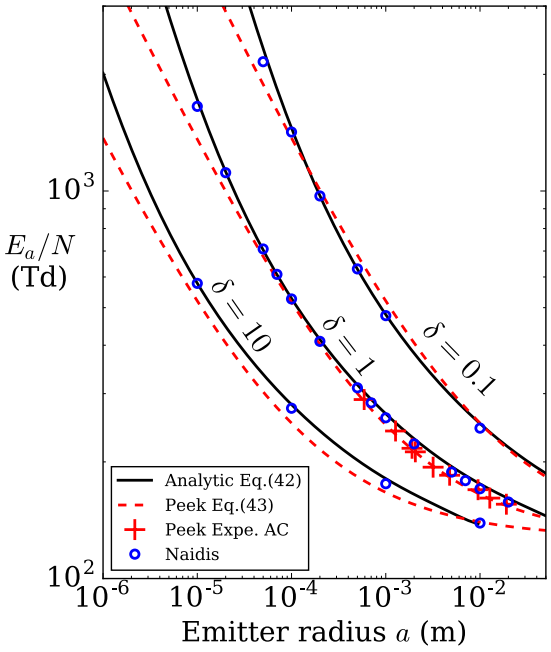


Figure 4: Reduced onset field versus emitter radius in air at different densities $\delta = N/N0$, with $N0 = 2.5\times10^{25}$. Comparison between Peek [9] and Naidis [11] and Eq.(42) with $E_{ief} = CN$ and $\beta_{ef} = BN$, B and C from table 1, and $K = \ln(1+\gamma^{-1})$ given by [11].

emitter diameter. As a reminder Peek's law writes[9]:

$$E_a = 3.1\times10^6\delta\left(1+\frac{0.0308}{\sqrt{\delta\, a}}\right)\ \text{(V/m)} \tag{43}$$

with a density correction factor $\delta = N/N_0$ and $N_0 = 2.5\times10^{25}$ m^{-3} the standard air density at 298 K and 1013.25 hPa. Since (42) relies on the electron matching condition, similar to the classical onset criterion, it directly involves the ionization coefficient. By fitting α_{ef} in air, see Sec. 3.3.1, we obtain the critical surface electric field. The comparison, figure 4, shows that the matching condition is very similar to Peek's law for relatively large corona wires (0.1mm $< a <$ 1cm) with an agreement of less than 5%. This corresponds to the range covered by the experimental data used by Peek [9] to fit the well-known empirical law (figure 4).

Outside this range, sensible variations are noticeable. For big wires , typically $a > 1$ cm, the asymptotic solution looses accuracy because it is a $O(\varepsilon)$ approximation. The value of ε at the corona inception point can be used to assert the precision of the asymptotic approach as shown in figure 5. Using (42) and $\varphi_{on} = aE_a\ln(L/a)$ gives the value $\varepsilon_{on} = \varphi_{on}/(LE_i)$

$$\varepsilon_{on} = \hat{a}/\ln(1/\hat{a})\left[\mathcal{W}_0\left(\frac{\hat{a}L\beta_{ef}}{\ln(1+\gamma^{-1})}\right)\right]^{-1}. \tag{44}$$

But the main reason probably relies in the approximation made concerning the functional form of α_{ef} at low electric field (see sec 3.3.1).

In the submillimeter range, the general criterion (29) is more relevant than Peek's law for two reasons. First, Peek's empirical law was calibrated with experiments for relatively large emitters (see figure 4). Second, Peek's law can be theoretically retrieved by quadratically approximating the ionization coefficient $\alpha_{ef}(E)$[13]. This approximation fails for small wires because of the particular shape of α_{ef} at high elecric field. This is confirmed by Naidis onset criterion [11] for $a < 10\mu m$. Since expression (35) relies on a direct integration, it takes full consideration of the non-linear behavior of α_{ef} especially at high E/N. Hence, (42) matches very well Naidis onset criterion, despite a slightly different value of α_{ef} was used. Besides, (42) can easily be applied to other gases and various densities N since $\beta = BN$ and $E_i = CN$

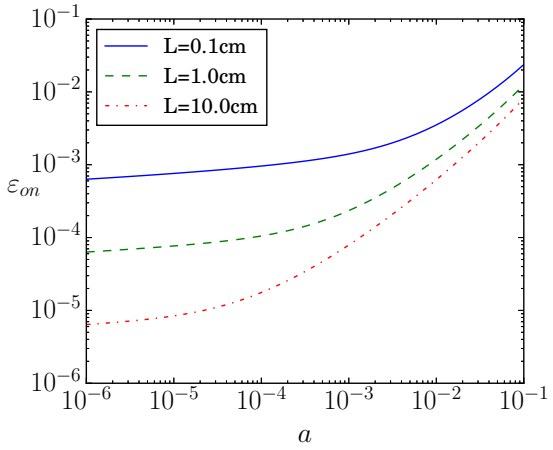


Figure 5: Asymptotic parameter ε_{on} versus emitter radius $\hat{a} = a/L$ at the corona inception point.

with B and C gas constants. This statement must be tempered by the fact that the value of γ is not well established. However in air, Naidis [11] provides the integral $K = \ln(1+\gamma^{-1})$ for various thermodynamic conditions.

One limitation comes from the evaluation of the secondary electron emission coefficient γ which is poorly documented. This coefficient can encapsulate several physical processes such as wall ion-bombardment (for high energy positive ions in negative coronas), photoelectric emission at the surface of the collector, photoionization or detachment from negative ions [27, 2]. For large electrode gaps L, we assume that photo-ionization is dominant. For small gaps, of the same order as the absorption length $1/\lambda$, the secondary emission process could change because the collector surface would be exposed to radiations and strong ion flux. In such a case, γ could depend on the collector material work function. A typical value of $\lambda = N \times 8.02 \cdot 10^{-18}$ cm^{-1} [27] gives a typical absorption length around $1/\lambda \approx 500$ μm at atmospheric pressure in air ($N = 2.5 \times 10^{19}$ cm^{-3}). In more recent publications [11, 22], multiple ionizing radiations are considered, with typical maximum absorption length up to 1 mm.

3.2.2 I-V curve

Using (39, 13, 56) and rearranging the solution gives the dimensional current-voltage $I-V$ law:

$$I = \frac{k\,\varphi_{on}^2}{L^2 \ln\left(\frac{L}{a}\right)^2}\,\mathcal{F}\left(-2e^{-2}\left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{\varphi_a}{\varphi_{on}}-1}\right) \tag{45}$$

with $k = 2\pi\mu_p\epsilon_g$ and $\varphi_{on} = aE_a \ln(L/a)$ and $\mathcal{F}$ given by (40). This law gives the evolution of current per unit length I (A/m) with the applied voltage φ_a. The condition of zero current still writes $\varphi_a = \varphi_{on}$. It is interesting to compare this law with the Townsend law[19] $I = C_g\varphi_a(\varphi_a - \varphi_{on})$, where C_g is an empirical constant depending on the gas and the electrode geometry. For coaxial cylinders in the low current approximation, Townsend's law writes [4]

$$C_g = \frac{8\pi\mu_p\epsilon_0}{L^2\ln(L/a)} \tag{46}$$

In some works [28] the prefactor is halved, but obviously, using 4π instead of 8π does not match with experiments. Figure 7 shows that the asymptotic expression (45) matches Townsend's law at low voltage. However, at high voltage the Townsend law underestimates current. This is not surprising since it is a "low current" approximation. To our knowledge, the "low current" condition is not well defined. Here we propose a simple justification of this approximation and assess its validity range. Consider the first term of the Taylor expansion (41). This linearized non-dimensional law writes $J = -4(A - \frac{1}{\ln(1/\hat{a})})$. By substituting $J = \frac{IL^2}{2\pi\epsilon_0\mu_p\varphi_a^2}$ and $A = \frac{a\,E_a}{\varphi_a}$ it is remarkable that the resulting approximated current-voltage

law exactly matches the Townsend expression:

$$I = \frac{8\pi\mu_p\epsilon_0}{L^2\ln(L/a)}\varphi_a(\varphi_a - \varphi_{on}) \tag{47}$$

with $\varphi_{on} = aE_a\ln(L/a)$. In other words, Townsend's law is the first order approximation of the asymptotic solution and its validity range can be assessed with the second order term in (41), which scales as $\ln(a/L)^2$. The smaller the reduced emitter radius, the weaker the Townsend approximation.

3.3 Comparison with experimental results.

3.3.1 Estimation of effective ionization

In order to derive the analytical expression (35) it is tempting to neglect the attachment η in the matching condition (29). In the following it is shown that it is an acceptable approximation for the calculation of E_a at very low density and for small corona wires only. The matching condition (29) is rewritten

$$K = \int_a^\infty \alpha \mathrm{d}r\,[1 - f(a, E_a)] \tag{48}$$

with $f(a, E_a) = \int_a^\infty \eta \mathrm{d}r / \int_a^\infty \alpha \mathrm{d}r$. $f(a, E_a)$ is *a priori* small quantity because $\eta \ll \alpha$ at high reduced electric field. And the smaller the corona wire, the higher the onset reduced electric field $E_n = E/N$. By changing the integration variable to $E_n(r) = aE_{na}/r$, because this is in the inner region, f then writes as a function of the surface electric field only

$$f(E_{na}) = \frac{\int_0^{E_{na}} \eta(E_n)/E_n^2 \mathrm{d}E_n}{\int_0^{E_{na}} \alpha(E_n)/E_n^2 \mathrm{d}E_n}. \tag{49}$$

From the measured ionization and attachment coefficient it is now obvious that f will be small for large E_{na}. Now writting this in non dimensional variables ($\hat{N} = L^3N$), the asymptotic gives the scaling $\hat{E}_{na} = A/(\hat{N}\hat{a}) \sim 1/(\hat{N}\hat{a})$. So f can be rewritten $f \approx \delta_{Na} g(E_{na})$ with $g \sim O(1)$ an order one quantity and

$$\delta_{Na} = \frac{\int_0^{1/\hat{N}\hat{a}} \eta(\hat{E}_n)/\hat{E}^2 \mathrm{d}\hat{E}_n}{\int_0^{1/\hat{N}\hat{a}} \hat{\alpha}(\hat{E}_n)/\hat{E}_n^2 \mathrm{d}\hat{E}_n}. \tag{50}$$

This parameter is a measure of the dominance of α over η in the inner region. It should be small when $Na \to 0$, because the ionization coefficient dominates attachment at high electric field. In air, CO_2 or pure N_2 in the limit $Na = 0$, it is equal to $\delta_0 \approx 10^{-2}$ while for pure O_2 the attachment is larger and $\delta_0 \approx 0.1$. Performing the asymptotic analysis by injecting $\hat{E}_a = \hat{E}_{a0} + \delta_{Na}\hat{E}_{a1} + ...$ into (48) gives

$$\begin{aligned} K = &\int_{\hat{a}}^\infty \hat{\alpha}(\hat{E}_{a0})\mathrm{d}\hat{r} \\ &+\delta_{Na}\left[\int_{\hat{a}}^\infty \left.\frac{\mathrm{d}\hat{\alpha}}{\mathrm{d}E}\right|_{\hat{E}_{a0}} \hat{E}_{a1}\mathrm{d}\hat{r} - g(\hat{E}_{a0})\right] \\ &+O(\delta_{Na}^2) \end{aligned}$$

The leading order term is exactly condition (29) without attachment. This simplified condition gives the parameter $\hat{E}_{a0}$, which is an approximation of the exact $\hat{E}_a$ with accuracy $O(\delta_{Na})$. In a nutschell, neglecting the attachment is relevant if $L^2Na \to 0$, e.g. very small wires at low density discharge. In practice this is not often the case, in typical corona experiments δ_{Na} 0.5 is not small enough.

As a consequence we need to find a functional form for the effective ionization. It is assumed that it takes the form

$$\alpha_{ef}/N = B_{ef}\exp\left(-\frac{C_{ef}}{E/N}\right), \tag{51}$$

with N the gas number density. This formulation is quite convenient because knowing B_{ef} and C_{ef} allows to easily compute the value of α_{ef} for any gas density with the simple conversion $\beta_{ef} = B_{ef} \times N$ and $E_{ief} = C_{ef} \times N$. The ratio E/N is given in units Townsend (Td) with 1 Td = 10^{-21} V.m^2. Even

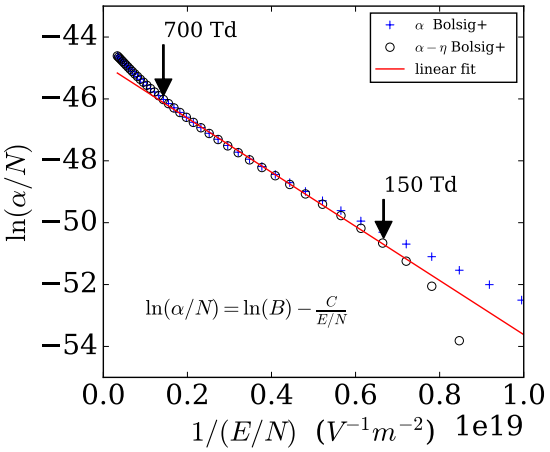


Figure 6: Linear fit of $\ln(\alpha_{ef})$ in synthetic air $80N_2{+}20O_2$.

	Air($N_2{+}O_2$)	O_2	N_2	$98N_2{+}2CH_4$
C_{ef} (V.m^2)	$8.52e{-}19$	$7.93e{-}19$	$8.48e{-}19$	$8.62e{-}19$
B_{ef} (m^2)	$2.93e{-}20$	$4.60e{-}20$	$2.54e{-}20$	$2.90e{-}20$

Table 1: effective ionization $\alpha_{ef} = \alpha - \eta$ coefficient fitted from Bolsig+ solver.

though other analytical forms exists at low or high electric fields [12, 11, 29], this form has the advantage to cover a wide range of E/N and is justified by the fact that α dominates η. The coefficients are obtained by linearly fitting the data obtained with Bolsig+ solver [30]. The calculations were run from the online cross section databases [2]. Figure 6 shows that in the range 150 and 700 Td the effective ionization coefficient is well described by an equation similar to (51). This approximation and the chosen fitting range is satisfying for the experiment presented in table 2. In practice, even when the electric field is higher than 700 Td it remains a good approximation. From (42), we see that the correct evalutation of the constant E_{ief} is the most critical.

3.3.2 Experimental current-voltage curves.

The cylindrical symmetry simplifies the mathematical resolution, but on the experimental point of view it is quite sensitive to emitter centering and makes the optical access difficult. Hence, most corona experiments focuses on point-to-plane, wire-to-plate or parallel wire-to-cylinder geometries. Some studies did however use the coaxial geometry to characterize the corona discharge since theoretical implicit laws are available[5, 21, 2, 1, 19]. This theoretical laws are used to recover effective parameters, such as mobility or onset electric field. Given the complex corona ion chemistry, making mobility predicitions is uncertain. Indeed μ_p depends on the gas composition, humidity, and more generally on vapor contaminant [31, 32, 33]. That's why it is often retrieved by fitting experimental current-voltage curves[34] with Townsend's expression (29). While rather simple, this method tends to overestimate the mobility value [3]. More advanced method [5], relies on implicit laws with the concept of ionization radius, but then the fitted mobility depends on the chosen radius definition.

In the following, expression (45) is compared to experimental and numerical results. Since the effective ionization coefficient are relatively well-known for a given gas, see section 3.3.1, the only adjustable parameters are μ and $K = \ln(1{+}\gamma^{-1})$. The mobility determines the "slope" while the secondary efficiency controls the inception voltage φ_{on}. The particular case of the corona discharge in air has already been extensively studied. In a recent investigation, Zheng *et al.* [12] numerically solve the three species corona model, they call it the "general fluid model", for cylindrical axisymmetric electrodes. For the positive corona, they find that a mobility $\mu_p = 1.9$ cm^2.V^{-1}.s^{-1} and a surface electric field $E_a = 65.478$ kV/cm gives excellent agreement with experiment.

[2] IST-lisbon (N2,CH4) and Phelps database (N2,O2), www.lxcat.net, retrieved on October 10, 2017

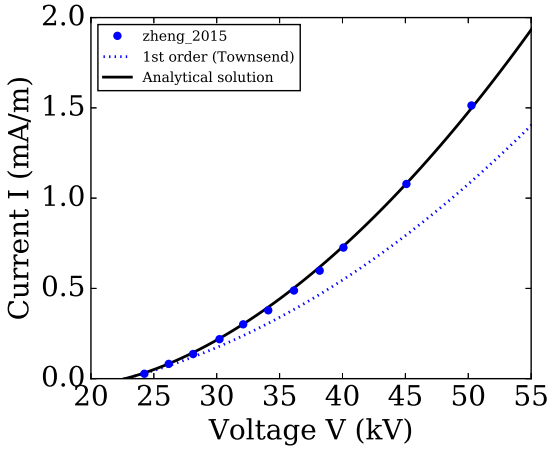
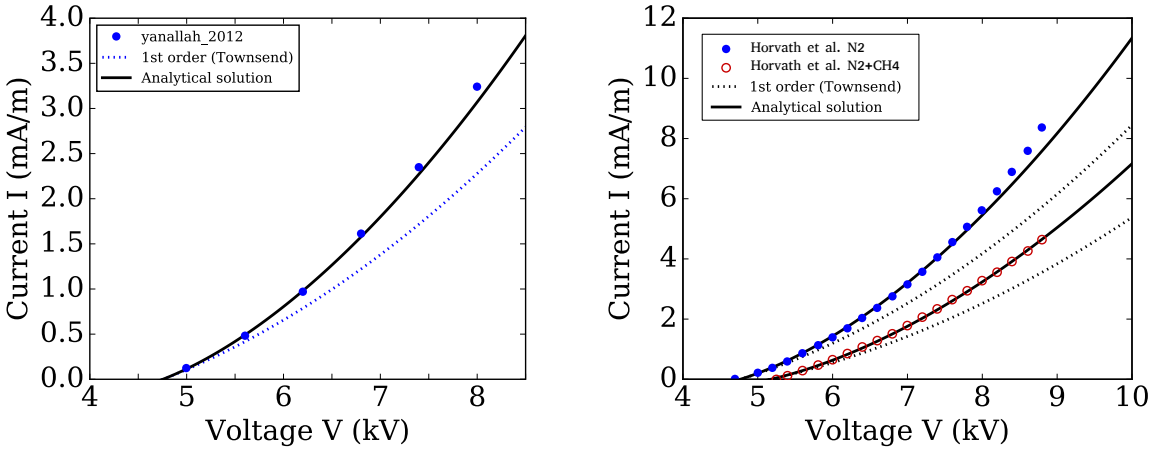


Figure 7: Current voltage characteristic in ambient air from Zheng [12].



(a) (b)

Figure 8: (a) Current voltage characteristic in pure oxygen from Yanallah [6]. (b) Current voltage characteristic in pure N_2 gas and N_2-CH_4(98:2) mixture from Horvath *et al.*[34]

Now, in order to assess the validity of the analytical solution, the previous parameters were injected into Eq.(45). The electric field prescribed by Zheng corresponds to an inception voltage $\varphi_{on} = 22.878$ kV. The comparison between Zheng's experimental data (and so the numerical solution of the model) is shown in figure 7 and shows an excellent agreement. Furthermore this value of the mobility is close to the precise ion mobility measurement made by Stearn [3] in a positive DC corona $\mu_p = 1.8$ cm^2.V^{-1}.s^{-1}. The small difference is very probably due to different temperature and pressure conditions between Zheng and Stearns setups. Fitting the values of Zheng *et al.* [12] gives $\mu = 1.86$ cm^2.V^{-1}.s^{-1}.

For the experiments in pure oxygen gas, figure 8a, performed by Yanallah *et al.* [6] μ_p and γ are obtained by fitting to experimental data. The mobility is much larger than in air, probably because there is less ion clustering in a high purity gas resulting in small ions such as O_2^+. The corona inception field is higher in pure oxygen, resulting in a lower secondary ionization efficiency. The comparison of those results would be fully relevant with pressure and temperature corrections, but the experimental conditions are not always given in the published works.

Horvath *et al.* [34] investigates the influence of a small amount of CH_4 in N_2 gas, figure 8b. Once again the theoretical law can be adjusted to the experimental data. The presence of a small amount of CH_4 results in a smaller mobility value and smaller secondary coefficient. The lower mobility is consistent

	Air[12]	O_2[6]	N_2 [34]	$98N_2{+}2CH_4$[34]
P_0 (Pa)	1010e+2	-	-	-
T_0 (K)	298	-	-	-
E_i (V.m^{-1})	2.09e+7	1.99e+07	2.12e+07	2.16e+07
β (m^{-1})	7.20e+5	1.15e+06	6.35e+05	7.26e+05
L (m)	1.03$e-1$	1.10$e-02$	8.00$e-03$	8.00$e-03$
a (m)	7.00$e-4$	6.25$e-05$	6.25$e-05$	6.25$e-05$
γ (-)	2$e-3$	1$e-6$	5$e-04$	4$e-05$
μ_p (m^2.V^{-1}.s^{-1})	1.86$e-4$	2.47$e-04$	2.25$e-04$	1.56$e-04$

Table 2: Experimental conditions and fitted values of γ and μ_p. When experimental pressure and temperature are not given, standard condition are used: $P_0 = 1013$ hPa and $T_0 = 293$ K.

with the larger ions generated by ionized CH_4 molecules. The theoretical curves very favorably compares with experiments, even if a small discrepancy is observed for pure N_2 gas at high voltages.

The experimental parameters and fitted values are gathered in Table 2. They favorably compare with experimental mobility values[3]. In those experiments, the parameter $\hat{a} = a/L$ is rather small, between 0.005 and 0.008, which illustrate the low accuracy of Townsend's law far from the inception point.

4 Discussion

4.1 Practical example.

The previous simplified model of the corona discharge allows to quickly investigate the influence of each parameter. In planar a gas discharge one figure of merit is the Paschen's law. This law governs the breakdown voltage as a function of the parameter $N \times d$ (or classically $P \times d$), for parallel plates separated by a distance d at gas number density N (or classically pressure P). Paschen's law directly derives from Townsend's criterion applied to planar electrodes [28]

$$V_{b,plate} = \frac{C \times Nd}{\ln(B \times Nd / \ln(1{+}\gamma^{-1}))} \tag{52}$$

With $V_{b,plate}$ the voltage at which the Townsend breakdown criterion is fulfilled. The onset of the corona discharge can be seen as a local gas breakdown, or partial breakdown, nearby the emitter. Injecting the condition $V_{b,cyl} = E_a a \ln(L/a)$ into the expression (42) gives the corona onset law for cylindrical electrodes

$$\frac{V_{b,cyl}}{\ln(L/a)} = \frac{C \times Na}{\mathcal{W}_0(B \times Na / \ln(1{+}\gamma^{-1}))}. \tag{53}$$

The analogy with the classical Paschen's law is striking. The parameter Nd is changed to Na, the logarithm by the Lambert W function and a geometric correction factor $\ln(L/a)$ appears. But the corona onset curve in cylindrical geometry shown in figure 9a fundamentally differs from the planar Paschen curve. Indeed for a corona discharge in the air, the secondary electron emission process depends on the quenching of emitting states of nitrogen molecules, which breaks the dependency on Na [11]. In other words, $\frac{V_{b,cyl}}{\ln(L/a)}$ depends on a and N separately.

No minimum is apparently visible on the corrected breakdown voltage $V_{b,cyl}/\ln(L/a)$. But there is a minimum for $V_{b,cyl}$ as a decreases. The radius for minimum breakdown voltage a_{min} can be obtained by differentiating (53) with respect to a and looking for the zero. In practice, at atmospheric pressure a_{min} is around a few microns. When Na is very small, the expression can be approximated by linearizing the Lambert function $\mathcal{W}_0(x) \sim x$ when $x \to 0$

$$\frac{V_{b,cyl}}{\ln(L/a)} \sim \frac{C}{B} \ln(1{+}\gamma^{-1}). \tag{54}$$

The condition to reach this regime writes $Na \ll \ln(1{+}\gamma^{-1})/B \approx 10^{20}$ which corresponds at atmospheric pressure in air to an emitter smaller than 5 μm. figure 9a illustrates this asymptote, and the

[3]Phelps and Vielhand databases, www.lxcat.net, retrieved on October 10, 2017

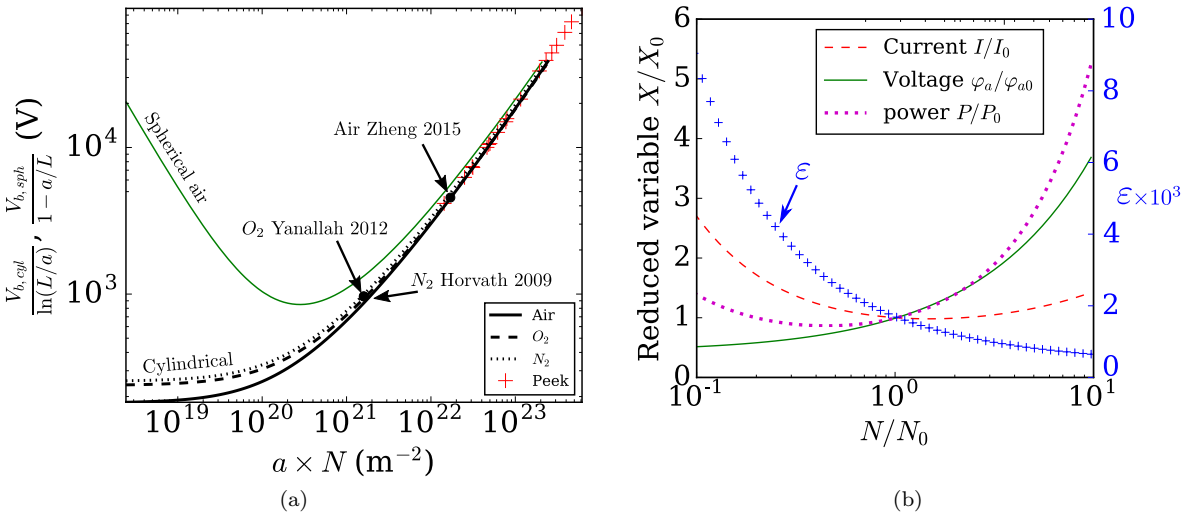


Figure 9: (a) Corona onset curve for cylindrical Eq.(53) and spherical (29) electrodes in air at $N/N_0 = 1$. (b) Current, voltage and power normalized with their value at $N_0 = 2.5\times10^{25}$ m^{-3} (lines, left axis) and the asymptotic parameter $\varepsilon = \varphi_a/LE_i$ (crosses, right axis).

position of typical experimental corona realized at atmospheric pressure. In practice this could concern this regime could concern miniaturized corona devices, such as ionic wind cooling devices.

It is tempting to extrapolate the asymptotic approach to the spherical case. But despite our efforts, no explicit analytical solution was found for the matching conditions. In figure 9a we solve numerically the onset criterion (29) with an inner voltage gradient of the type $\partial_R\Phi = A/R^2$.

Another parametric use of the asymptotic model is illustrated in figure 9b. It shows the evolution of current, voltage and power consumption with gas density for a small corona wire. The input parameters are $L = 10$ cm, $a = 10$ μm and the mobility is assumed to be inversely proportional to air density $\mu_p = \mu_{p0}N_0/N$. The applied voltage is assumed to depend on the inception voltage so that the voltage ratio is constant $\varphi_a = 1.5\varphi_{on}$. But power consumption and net corona current both exhibit minimums at different location.

The two previous applicative examples of this analytical model illustrate its interest when exploring the parameter space with the two matching equation (42) and (45). Some limitations of the model can be anticipated:

1. The validity range of shape (51) for α_{ef}. In the previous example at low gas density $N/N_0 = 0.1$, the reduced electric field at the wire surface was $E/CN \approx 6$, far above typical values for CD in standard conditions.

2. The asymptotic parameter $\varepsilon = \varphi_a/LE_i$ should remain small.

3. In practice the secondary ionization process $K = \ln(1+\gamma^{-1})$ is mainly documented in air, but not in other gases.

5 Conclusion

We revisit the theoretical analysis of the positive DC corona using asymptotic matching without much noticeable changes to [1] but for some clarification in the derivation, including attachment, and much more importantly explicit analytical solutions for the matching conditions. This dimensionless formulations are then transformed into the dimensional onset electric field (42), expressed as explicit functions of the gas ionization properties and electrodes size, and dimensional current (45), expressed as explicit function of mobility, onset voltage and electrode size. Both results are independant from each other and can be used separatly. This is to our knowledge the first time that an explicit analytical expression of the

current voltage law is derived.
First concerning the onset criterion.

- Despite the simplified form of α_{ef}, the onset field matches well with more sophisticated onset criterion in air.
- The analytical onset voltage for cylindrical electrodes is recovered. A surprising analogy is found with Paschen's law for breakdown between plane electrodes.

Then concerning the "shape" of the current voltage curve:

- The analytical model successfully predicts corona current in air. It perfectly matches the numerical solution performed by Zheng for the very same equations and the experiments.
- The low current approximation of the non dimensional analytical solution is linear with universal slope -4 and writes $J = -4(A+1/\ln(\hat{a}))$. In dimensional variables it exactly matches Towsend's expression.
- The validity range of Townsend's law is assessed depending on the parameter $\ln(a/L)^2$. Townsend's approximation loses accuracy for small emitting corona electrodes.

This analytical solution can easily be used to determine the onset voltage and ion mobility. It also provides a good reference for testing new numerical algorithms dedicated to corona current predictions with much better accuracy than Townsend's law. The analytical solution is helpful for exploring new corona applications, especially with small corona wires.

Acknowledgments

The authors thank the french space agency CNES and Region Occitanie for financial support, L. Pitchford and JP. Boeuf for introducing the LXcat project. This research has been funded by CNES research contract 5100015475

Appendix A

The matching on potential is performed with an intermediate variable η. It is a three steps procedure:

(i) Expressing the inner and outer solutions in an intermediate zone $\eta = \hat{r}/\varepsilon^{\kappa} = R\varepsilon^{1-\kappa}$ with $0 < \kappa < 1$.

(ii) Expanding $\Phi(\eta)$ and $\hat{\varphi}(\eta)$ in the limit $\varepsilon \to 0$, which corresponds to $R \to \infty$ and $\hat{r} \to 0$.

(iii) Comparing the inner and outer expansions term by term. The equalization of each term gives a matching condition.

(i)The inner solution writes

$$\Phi(R) = 1 - A\ln\left(\frac{R}{\hat{a}/\varepsilon}\right). \tag{55}$$

The inner boundary condition $\Phi_a = 1$ has already been applied and A is a constant to determine by the electron matching condition, see (35). A can be interpreted as the non dimensional surface electric field

$$A = -\hat{a}/\varepsilon(\partial_R\Phi)|_a = -\hat{a}(\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi})|_a = \frac{aE_a}{\varphi_a} \tag{56}$$

The outer solution is obtained in two steps. First integration of (23) with $\hat{\pi}_p = \hat{n}_p\hat{r}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi} = 1$ gives the electric field flux

$$(\hat{r}\partial_{\hat{r}}\hat{\varphi})^2 = J\hat{r}^2 + K_1. \tag{57}$$

Integrating again gives the electric potential in the outer region

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\hat{r}) = &-\sqrt{J\hat{r}^2+K_1} \\ &+\sqrt{K_1}\ln\left(\frac{\sqrt{J\hat{r}^2+K_1}+\sqrt{K_1}}{\sqrt{J\hat{r}^2}}\right) \\ &+K_2.\end{aligned}$$

The constant K_2 can be determined with the outer boundary condition $\hat{\varphi}(1) = 0$

$$K_2 = \sqrt{J+K_1} - \sqrt{K_1}\ln\left(\frac{\sqrt{J+K_1}+\sqrt{K_1}}{\sqrt{J}}\right). \tag{58}$$

The outer solution writes

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\hat{r}) =& \sqrt{J+K_1} - \sqrt{J\hat{r}^2+K_1} \\ &+ \sqrt{K_1}\ln\left(\frac{\sqrt{J\hat{r}^2+K_1}+\sqrt{K_1}}{\hat{r}\,(\sqrt{J+K_1}+\sqrt{K_1})}\right).\end{aligned} \tag{59}$$

Now rewriting the previous expressions with the intermediate variable $\eta = \hat{r}/\varepsilon^\kappa = R\varepsilon^{1-\kappa}$ with $0 < \kappa < 1$ leads to

$$\begin{aligned}\varphi(\eta) =& 1 - A\ln\left(\frac{\eta\varepsilon^\kappa}{a}\right) \\ &+ \varepsilon\varphi_1 + \cdots \\ \Phi(\eta) =& \sqrt{J+K_1} - \sqrt{J\varepsilon^{2\kappa}\eta^2+K_1} \\ &+ \sqrt{K_1}\ln\left(\frac{\sqrt{J\varepsilon^{2\kappa}\eta^2+K_1}+\sqrt{K_1}}{\varepsilon^\kappa\eta\,(\sqrt{J+K_1}+\sqrt{K_1})}\right) \\ &+ \varepsilon\Phi_1 + \cdots\end{aligned}$$

(ii) The previous expression is expended in the limit $\varepsilon \to 0$ at fixed η. To perform the matching it is more convenient to reorganize the terms from the dominant one in $\ln(\varepsilon)$ to the weaker one ε^0

$$\begin{aligned}\Phi \underset{\varepsilon\to 0}{\sim}& -\sqrt{K_1}\kappa\ln(\varepsilon) \\ &\sqrt{J+K_1} - \sqrt{K_1} + \sqrt{K_1}\ln\left(\frac{2\sqrt{K_1}}{\eta(\sqrt{J+K_1}+\sqrt{K_1})}\right) \\ &+ O(\varepsilon\ln\varepsilon) \\ \varphi \underset{\varepsilon\to 0}{\sim}& -A\kappa\ln(\varepsilon) \\ &+ 1 - A\ln\left(\frac{\eta}{a}\right) \\ &+ O(\varepsilon\ln\varepsilon)\end{aligned}$$

The $O(\varepsilon\ln\varepsilon)$ terms comes from the first order terms $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\Phi}_1$ which are not further detailed here because they are not needed for the leading order solution. (iii) The two series have to match term by term. Matching dominant terms in $O(\ln\varepsilon)$ gives

$$\sqrt{K_1} = A. \tag{60}$$

Then matching the terms in ε^0 while injecting (60) and simplifying gives

$$1 - A\ln\left(\frac{1}{\hat{a}}\right) = \sqrt{J+A^2} - A + A\ln\left(\frac{2A}{\sqrt{J+A^2}+A}\right).$$

Appendix B

Usually, the relation between current and voltage is retrieved with a charge injection model such as the "ion flow model" described by Zheng *et al.* [12]. In the following the link with the asymptotic model is discussed. In the charge injection model, the electric field can be analytically expressed

$$E(r) = \sqrt{\frac{I}{2\pi\epsilon_0\mu}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2} \tag{61}$$

and the current I is then given by the condition on electric potential

$$\varphi(a)-\varphi(L)=\int_a^L E(r)\mathrm{d}r. \tag{62}$$

The non dimensional expression of condition (62)

$$1=\int_{\hat{a}}^1 \sqrt{J\left(1-\frac{\hat{a}^2}{\hat{r}^2}\right)+\frac{A^2}{\hat{r}^2}}\mathrm{d}r \tag{63}$$

or equivalently

$$V=\frac{1}{\ln(1/\hat{a})}\int_{\hat{a}}^1 \sqrt{C\left(1-\frac{\hat{a}^2}{\hat{r}^2}\right)+\frac{1}{\hat{r}^2}}\mathrm{d}r. \tag{64}$$

is similar to the matching condition of Durbin & Turyn but with an additional term $J\hat{a}^2/\hat{r}^2$. This additional term, which is small since it scales as $\hat{a}^2$, is the consequence of the charge injection directly at the surface of the emitter while for the asymptotic approach, the "injection" occurs at the edge (intermediate zone) of the ionization layer. Both approaches give similar results for small values of $\hat{a}$, typically for most corona applications. Indeed, performing the integration of Eq. (64) leads to

$$\begin{aligned} V=&\sqrt{1-\hat{a}^2C} \\ &+\frac{1}{\ln(1/\hat{a})}\Big[-1+\sqrt{C+1-\hat{a}^2C} \\ &+\sqrt{1-\hat{a}^2C}\ln\left(\frac{\sqrt{1-\hat{a}^2C}+1}{\sqrt{1-\hat{a}^2C}+\sqrt{C+1-\hat{a}^2C}}\right)\Big] \end{aligned} \tag{65}$$

which exactly matches the asymptotic result given by Eq. (36), for $\hat{a}\to 0$. The reduced current voltage curves are compared on figure 10. No difference is visible for reasonably small corona wires $\hat{a}\lesssim 0.01$.

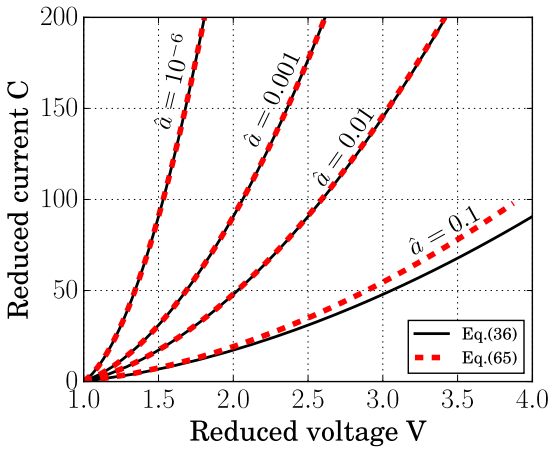


Figure 10: Current with the charge injection and the asymptotic model, for different emitter sizes.

References

[1] P Durbin and L Turyn. Analysis of the positive DC corona between coaxial cylinders. J. Phys. D: Appl. Phys., 20:1490–1495, 1987.

[2] R G Stearns. The positive corona in air: A simplified analytic approach. J. Appl. Phys., 66(7):2899–2913, 1989.

[3] Richard G Stearns. Ion mobility measurements in a positive corona discharge. J. Appl. Phys., 67(6):2789–2799, 1990.

[4] R S Sigmond. Simple approximate treatment of unipolar space-charge-dominated coronas: The Warburg law and the saturation current. J. Appl. Phys., 53(2):891–898, 1982.
[5] J E Jones, J Dupuy, G O S Schreiber, and R T Waters. Boundary conditions for the positive direct-current corona in a coaxial system. J. Phys. D: Appl. Phys., 21(2):322–333, 1988.
[6] K Yanallah, F Pontiga, Y Meslem, and A Castellanos. An analytical approach to wire-to-cylinder corona discharge. J. Electrostat., 70(4):374–383, 2012.
[7] Michael J. Johnson and David B. Go. Recent advances in electrohydrodynamic pumps operated by ionic winds: A review. Plasma Sources Sci. T., 26(10), 2017.
[8] N Monrolin, F Plouraboué, and O Praud. Electrohydrodynamic Thrust for In-Atmosphere Propulsion. AIAA J., 55:12:4296–4305, 2017.
[9] F W Peek. Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering, chapter 3, pages 38–78. McGraw-Hill Book Company Inc., 1915.
[10] S Z Li and H S Uhm. Investigation of electrical breakdown characteristics in the electrodes of cylindrical geometry. Phys. Plasmas, 11(6):3088, 2004.
[11] G. V. Naidis. Conditions for inception of positive corona discharges in air. J. Phys. D: Appl. Phys., 38(13):2211–2214, 2005.
[12] Y Zheng, B Zhang, and J He. Current-voltage characteristics of dc corona discharges in air between coaxial cylinders. Phys. Plasmas, 22(2):023501, 2015.
[13] J J Lowke and F D'Alessandro. Onset corona fields and electrical breakdown criteria. J. Phys. D: Appl. Phys., 36(21):2673–2682, 2003.
[14] J J Lowke and R Morrow. Theory of electric corona including the role of plasma chemistry. Pure Appl. Chem., 66(6):1287–1294, 1994.
[15] P Seimandi, G Dufour, and F Rogier. An asymptotic model for steady wire-to-wire corona discharges. Math. and Comput. Model., 50(3-4):574–583, 2009.
[16] P Seimandi, G Dufour, and F Rogier. A two scale model of air corona discharges. Procedia Comput. Sci., 1(1):627–635, 2010.
[17] H Shibata, Y Watanabe, and K Suzuki. Performance prediction of electrohydrodynamic thrusters by the perturbation method. Phys. Plasmas, 23(5), 2016.
[18] H Shibata and R Takaki. A novel method to predict current voltage characteristics of positive corona discharges based on a perturbation technique. I. Local analysis. AIP Adv. 115026, 2017.
[19] J S Townsend and P J Edmunds. The discharge of electricity from cylinders and points. Philos. Mag., 27(161):789–801, 1914.
[20] J S Townsend. Electricity in Gases. 1915.
[21] J Feng. An analysis of corona currents between two concentric cylindrical electrodes. J. Electrostat., 46(1):37–48, 1999.
[22] Y Zheng, B Zhang, and J He. Self-sustained criterion with photoionization for positive dc corona plasmas between coaxial cylinders. Phys. Plasmas, 22(6):063514, 2015.
[23] G W Penney and G T Hummert. Photoionization measurements in air, oxygen, and nitrogen. J. Appl. Phys., 41(2):572–577, 1970.
[24] E J Hinch. Perturbation Methods. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1991.
[25] R T Waters and W B Stark. Characteristics of the stabilized glow discharge in air. J. Phys. D: Appl. Phys., 8:416–426, 1975.
[26] R M Corless, G H Gonnet, D E G Hare, D J Jeffrey, and D E Knuth. On the Lambert W function. Adv. Comput. Math., 5(1):329–359, 1996.
[27] J M Meek and J D Craggs. Electrical Breakdown of gases, chapter 1, pages 1–78. Oxford University Press, 1953.
[28] J R Roth. Industrial Plasma Engineering, Principles, volume 1, chapter 8, pages 237–282. IOP Publishing Ltd, London, 1995.
[29] R Morrow. The theory of positive glow corona. J. Phys. D: Appl. Phys., 30:3099–3114, 1999.
[30] G J M Hagelaar and L C Pitchford. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. Plasma Sources Sci. T., 14(4):722–733, 2005.
[31] M L Huertas, A M Marty, J Fontan, and G Duffa. Measurement of mobility a n d mass of atmospheric ions. J. Aerosol. Sci., 2:145–150, 1971.
[32] M L Huertas and J Fontan. Evolution times of tropospheric positive ions. Atmos. Environ., 9:1018–1026, 1975.
[33] N Fujioka, Y Tsunoda, A Sugimura, and K Arai. Influence of Humidity on Variation of Ion Mobility

with Life Time in atmospheric Air. IEEE T. Power Ap. Syst., PAS-102(4):911–917, 1983.
[34] G Horvath, J D Skalny, N J Mason, M Klas, M Zahoran, R Vladoiu, and M Manole. Corona discharge experiments in admixtures of N2 and CH4: a laboratory simulation of Titan's atmosphere. Plasma Sources Sci. T., 18:1–7, 2009.

Chapitre 5

Modélisation non axisymétrique

Sommaire

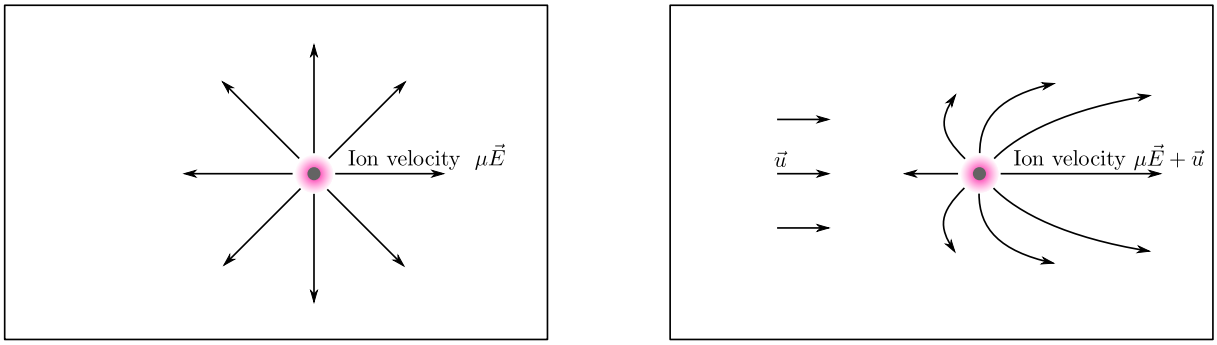
5.1 Motivation : influence d'un écoulement extérieur sur la décharge . 117
5.1.1 Travaux antérieurs 119
5.1.2 Illustration par l'expérience 123
5.2 Modélisation numérique 125
5.2.1 Notations 125
5.2.2 La zone externe 126
5.2.3 La zone interne 131
5.3 Décomposition de domaine appliquée à la décharge couronne. . . . 136
5.3.1 Équations constitutives 137
5.3.2 Formulation faible 138
5.3.3 Implémentation : construction de la matrice 139
5.4 Résultats 140
5.4.1 Convergence numérique 140
5.4.2 Perspectives 143
5.5 Conclusion 144

Dans le chapitre précédent, le cas de la décharge couronne axisymétrique a été analysé théoriquement par une méthode asymptotique. Cette méthode permet de retrouver de manière convaincante les caractéristiques courant/tension, nécessaires pour déterminer le flux d'ions dans la zone de *drift* et donc le forçage EHD. Dans la suite nous allons nous intéresser au cas plus général où l'invariance par rotation de la géométrie autour de l'émetteur est brisée. En effet, la modélisation de la décharge couronne dans des géométries non-axisymétriques est primordiale pour pouvoir prédire de manière réaliste le flux d'ions émis et sa répartition entre les électrodes. En effet, si, dans le cas axisymétrique, on connaît assez bien les conditions d'injection qu'il faut appliquer pour prédire la densité unipolaire de charge dans la zone de *drift*, il n'en est plus de même dans le cas général. Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche numérique/théorique pour pallier cette ignorance.

5.1 Motivation : influence d'un écoulement extérieur sur la décharge

Manipuler la distribution des charges

La géométrie des électrodes n'est pas la seule cause pouvant mener à une répartition non-axisymétrique de la charge électrique (ou charge d'espace "space charge") autour de la décharge



(a) **(b)**

Figure 5.1 – *Illustration de l'effet d'un écoulement extérieur sur les lignes de courant des ions émis par une décharge couronne (a) pour un $Re_{el} \ll 1$ et (b) pour $Re_{el} \sim 1$.*

couronne. Lorsque la vitesse du fluide **u** se rapproche de la vitesse de *drift* $\mu\mathbf{E}$ des ions, les lignes d'émission des ions s'incurvent dans la direction de l'écoulement. Cet effet peut sembler négligeable au premier abord puisque la vitesse d'électro-convection est généralement beaucoup plus importante que celle de l' écoulement d'air. Dans le cas du vent ionique, on retient en général l'ordre de grandeur suivant : $\mu E \approx \mu V/d \sim 100$ m/s et $u \sim 1$ m/s. Pourtant, pour des applications à l'aérodynamique externe des véhicules ou dans des environnement ventés, il n'est pas rare que la vitesse de l'air atteigne ou dépasse 30 m/s. De plus, les ordres de grandeurs présentés précédemment sont vrais uniquement dans une zone à définir à proximité des électrodes. Autrement dit, entre les électrodes la vitesse de *drift* $\mu\mathbf{E}$ est effectivement dominante mais, comme le champ électrique décroît loin des électrodes, il y a inévitablement des zones où la vitesse de convection **u** domine le mouvement des ions. Dans le cas où l'écoulement d'air est relativement important, la vitesse de convection **u** des ions vient s'ajouter à leur vitesse de dérive par électro-convection $\mu\mathbf{E}$. Dans la zone de *drift*, les équations constitutives deviennent

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} \tag{5.1}$$

$$\nabla \cdot (-\rho\mu\nabla\varphi + \rho\mathbf{u}) = 0 \tag{5.2}$$

où ρ désigne la densité de charge et ε_r la permittivité diélectrique de l'air, proche de celle du vide en pratique. D'un point de vue adimensionnel, deux nombres permettent alors de décrire le système. Pour les mettre en évidence, on introduit φ_0 la différence de potentiel entre émetteur et collecteur, d la distance caractéristique émetteur/collecteur, u_0 la vitesse du fluide et ρ_0 la concentration d'ions à l'émetteur, en faisant l'hypothèse que la densité de charge est due majoritairement aux ions émis par la décharge couronne. Le système s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\tilde{\Delta}\tilde{\varphi} = -J\tilde{\rho} \tag{5.3}$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (-\tilde{\rho}\tilde{\nabla}\tilde{\varphi}) + Re_E\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \tag{5.4}$$

avec $J = \frac{\rho_0 d^2}{\varepsilon_r \varphi_0}$ le courant adimensionnel et $Re_E = \frac{Lu_0}{\mu\varphi_0}$ le Reynolds électrique, qui définit le rapport entre vitesse fluide et vitesse *drift*. Dans le cas où $Re_E \ll 1$, on retrouve le modèle usuel de la zone de *drift*. L'effet de Re_E est illustré par le schéma 5.1. La notation Re_E est choisie en accord avec les standards du comité technique de l'IEEE [93].

Couplage entre distribution des charges et loi d'injection

Quelle que soit la cause de la dissymétrie de la distribution des charges, il est intéressant de noter que c'est la répartition de cette distribution des charges qui limite le courant émis, comme

nous l'avons détaillé mathématiquement dans le chapitre précédent au moyen du paramètre J. En d'autres termes, la répartition des charges a un impact sur le taux de réaction à l'intérieur de la zone de décharge.

Pour s'en convaincre, considérons ce qu'il se passe au-delà de la tension critique d'allumage dans la zone de décharge. En toute logique, le nombre d'avalanches électroniques devrait y croître de manière illimitée. En effet, l'auto-entretient de la décharge a lieu, par définition, dès que le nombre d'électrons secondaires émis est supérieur ou égal au nombre d'électrons primaires qui les ont générés. De manière plus formelle, on peut décrire ce processus comme une suite d'avalanches générant chacune un nombre $\exp(\xi(E))N_k$ d'électrons, où $\xi(E) = \int_{r_0}^{r_\infty} \alpha - \eta \mathrm{d}r$ est le coefficient d'amplification moyen d'une avalanche entre r_0 (rayon de l'émetteur) et r_∞ (limite extérieure de la décharge couronne) et N_k est le nombre d'électrons primaires qui ont déclenché l'avalanche k. Au cours de l'avalanche, N_{k+1} électrons secondaires vont être générés. Ils alimenteront à leur tour les avalanches suivantes. On suppose que le nombre d'électrons secondaires N_{k+1} est proportionnel au nombre total d'électrons générés par l'avalanche k

$$N_{k+1} = \gamma \exp(\xi(E))N_k \tag{5.5}$$

avec γ la proportion d'électrons secondaires émis par chaque avalanche. Comme le processus se répète, le nombre d'électrons qui alimentent la décharge est une suite géométrique $(N_k)_{k=1,2...}$ de raison $\zeta = \gamma \exp(\xi(E))$

$$N_k = \zeta^k N_0 \tag{5.6}$$

Plusieurs cas se distinguent en fonction de la valeur du coefficient d'amplification $\xi(E)$ et donc du champ électrique.

- Lorsque $\zeta < 1$, le nombre d'électrons décroît pour tendre vers 0 lorsque $k \to \infty$.
- Lorsque $\zeta = 1$ la décharge est auto-entretenue. Cette condition peut se réécrire

$$\xi(E) = \ln(1/\gamma). \tag{5.7}$$

  une forme proche du critère de Townsend.
- Et enfin lorsque l'on augmente un petit peu plus le champ électrique, et donc le coefficient d'amplification $\xi(E)$, on obtient $\zeta > 1$: le nombre d'électrons devrait tendre vers l'infini.

En pratique le nombre d'électrons ne tend pas vers l'infini, le courant mesuré expérimentalement a une valeur finie. En supposant que le paramètre γ est constant, le seul moyen de modifier la raison de la suite $(N_k)_{k=1,2...}$ est de modifier le coefficient d'amplification $\xi(E)$ en jouant sur le champ électrique. Or d'après l'analyse asymptotique de Durbin [84], seuls les ions émis par la décharge modifient de manière significative la distribution du potentiel électrique. En particulier, le potentiel est principalement impacté dans la zone de *drift* et de manière indirecte dans la zone interne grâce aux conditions de raccord entre les deux zones. C'est donc bien la distribution des charges qui est à l'origine de la limitation du champ électrique, donc qui permet de limiter le taux de réaction dans la zone interne et donc *in fine* le courant.

Toute cette analyse permet de mettre en évidence que la distribution des charges dans la zone de *drift* a un effet indirect sur le taux de réaction dans la zone interne, et donc sur la loi d'injection des charges au niveau de l'émetteur. Une modélisation adéquate de la loi d'injection de charge couplée avec la distribution des charges est donc primordiale pour simuler le phénomène.

5.1.1 Travaux antérieurs

Le phénomène de vent ionique est souvent étudié comme un couplage dans un seul sens : le mouvement des ions crée une charge d'espace qui accélère le gaz, mais le couplage inverse est souvent négligé. Il existe assez peu d'études portant sur le couplage inverse. En 1961 Robinson

[12] montre expérimentalement que pour un écoulement d'air de moins de 15 m/s le courant de décharge est peu affecté. Ses mesures montrent une très légère augmentation du courant au delà de 10 m/s. En 1970 Chapman [94] réalise des essais avec des moyens colossaux. Il place une pointe portée à un haut potentiel dans une soufflerie transsonique pressurisée. Les mesures présentées sont faites avec des vitesses atteignant 394 m/s à une pression de 0.18 atm et 110 m/s à 1.93 atm. Il observe globalement la tendance suivante : le courant augmente à tension fixée lorsque la vitesse imposée par la soufflerie augmente, et la loi courant/tension devient linéaire à haute vitesse. La pente de la droite $I = f(V)$ est fonction de la vitesse de la soufflerie. Chapman propose la loi empirique suivante, qui généralise la loi quadratique de Townsend :

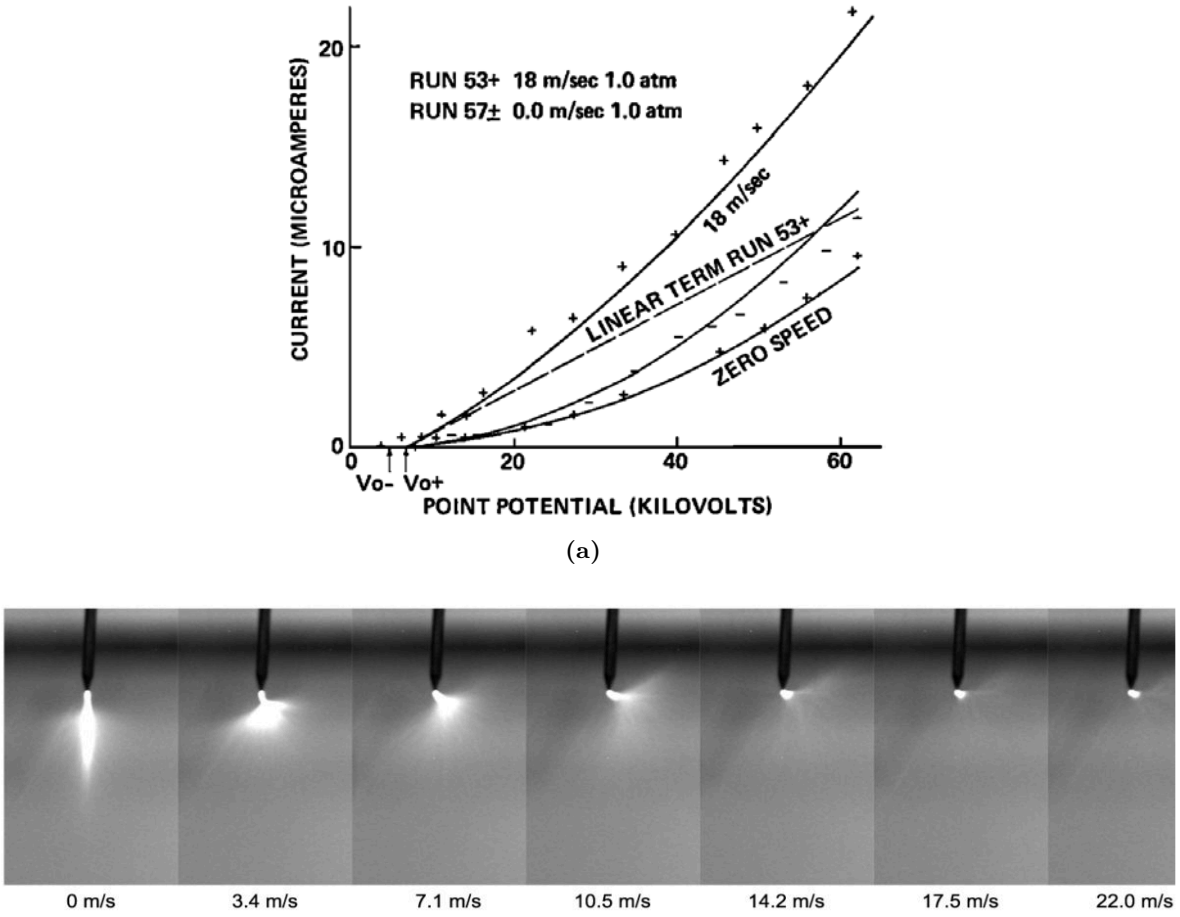
$$I = Ku(V - V_0) + CV(V - V_0) \tag{5.8}$$

où K et C sont des coefficients empiriques qui dépendent de la géométrie, de la permittivité diélectrique, de la densité du gaz, de la mobilité des ions et V_0 est la tension d'allumage de la décharge qui semble peu affectée par la présence d'un écoulement d'air important. Chapman propose les valeurs suivantes

$$K = 1.315\varepsilon_0 \left(\frac{N_0}{N}\right)^{0.81} \qquad (\text{A.s.m}^{-1}.\text{V}^{-1})$$
$$C = 1.785\varepsilon_0\mu \left(\frac{N_0}{N}\right) \qquad (\text{A.V}^{-2})$$

La figure 5.2a illustre l'évolution du courant avec la vitesse imposée. On remarquera que pour une vitesse imposée de seulement 18 m/s le courant est presque multiplié par un facteur deux. Cette observation est en apparente contradiction avec les mesures de Robinson [12] qui ne mesurait presque aucun effet à 15 m/s. Cependant il faut aussi considérer que les deux expériences utilisent des dispositifs de taille très différente. Typiquement la distance émetteur-collecteur de Robinson est de 0.038 m pour au plus 50 kV soit un champ moyen $V/d \approx 13$ kV/cm tandis que chez Chapman les conditions sont mal définies : l'émetteur est une aiguille placée dans une veine de soufflerie rectangulaire de 2.5 m de large où les murs sont susceptibles de jouer le rôle de collecteurs pour une tension d'au plus 60 kV. Le champ électrique moyen est donc beaucoup plus faible $V/d \approx 0.6kV/cm$: les vitesses de *drift* des ions sont donc très différentes, ce qui pourrait expliquer l'impact beaucoup plus fort de l'écoulement dans le dispositif de Chapman.

Le problème de la distorsion de la distribution des charges autour de la décharge couronne sous l'effet d'un écoulement extérieur a été assez peu traité. Pourtant il existe des concepts d'anémomètres à décharge couronne qui utilisent précisément cet effet [95]. Le problème a principalement été étudié dans le cadre de la protection contre la foudre, où des conducteurs pointus servent à "accrocher" la foudre et sont sujets à des décharges couronnes par temps d'orage.



(a)

(b)

Figure 5.2 – *(a) Courant de décharge avec et sans écoulement extérieur d'après Chapman [94]. (b) Imagerie UV d'une décharge positive en configuration pointe-plan avec $V = 100$ kV, $d = 20$ cm et une pointe d'environ 0.5 mm de rayon de courbure soumise à un écoulement d'air de la gauche vers la droite, d'après Vogel [96].*

Malgré la longue histoire des actionneurs à plasma en aérodynamique, peu d'études quantifient l'influence de l'écoulement sur la décharge. Les travaux de Pereira *et al.* [97] mettent en avant une certaine sensibilité de la décharge DBD : l'imagerie CCD met en avant des variations de l'intensité lumineuse en fonction de la vitesse imposée, allant jusqu'à 60 m/s.

La plupart des efforts de modélisation de la décharge couronne repose sur l'hypothèse que le champ électrique à l'émetteur est constant. On peut citer, entre autres, les travaux de Feng [98] qui utilise une méthode de Newton pour calculer la solution stationnaire. Différentes loies d'injection des charges existent. La plupart d'entre elles sont recensées et testées par Cagnoni [88] et reposent sur l'idée que la densité de charges injectée s'ajuste de sorte que le champ électrique à la surface de l'émetteur prenne une valeur prescrite et que la condition de dirichlet sur le potentiel soit respectée. Un premier pas vers la modélisation non axisymétrique simplifiée a été franchie en 2017 par Nguyen *et al.* [99]. Une discrétisation des équations de la zone de *drift* avec des éléments finis hybride Galerkin discontinus (HDG) permet de simuler la distribution des charges émise par un fil plongé dans un fort champ électrique (application à la foudre). Comme la couche d'ionisation est négligée, une condition d'injection de charge est utilisée à l'émetteur. Cette loi d'injection repose sur l'hypothèse que la distribution des charges injectée est telle que le champ électrique à la surface de l'émetteur reste proche d'une valeur prescrite E_p donnée par

la formule empirique de Peek. Formellement cette condition limite s'écrit

$$\rho(x) = \beta(E(x) - E_p) \quad sur \quad \Gamma_{em}$$

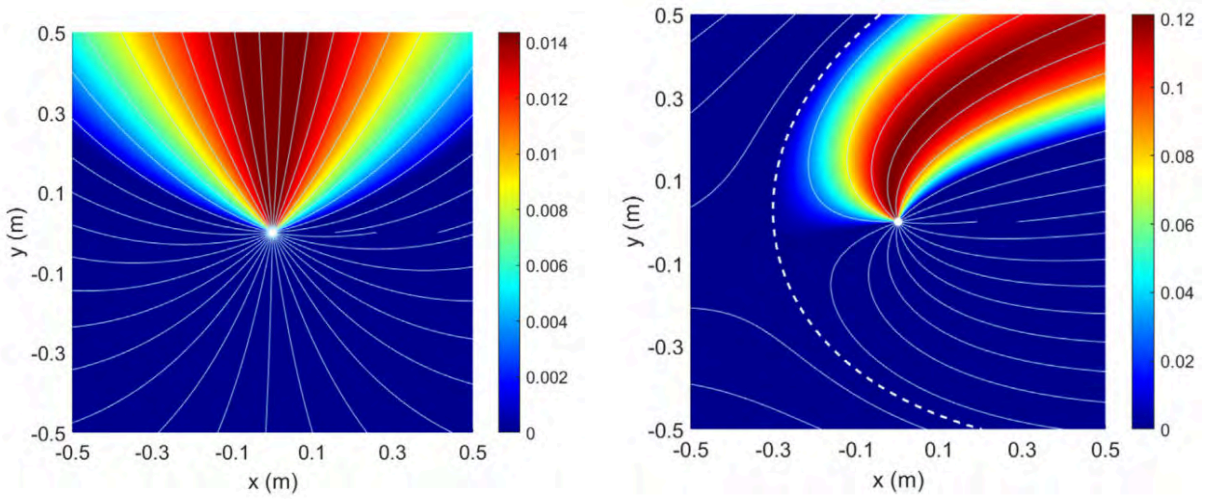
où le paramètre β doit être choisi de manière empirique. Typiquement il faut résoudre, en plusieurs itérations, le système d'équations jusqu'à trouver une valeur de β qui garantisse que le champ électrique est "suffisamment proche" de E_p.

$$E_p \leq E(x) \leq E_p(1 + \delta_E) \tag{5.9}$$

avec δ_E la tolérance sur le champ électrique. Cette condition limite intuitive a le mérite d'autoriser une injection de charge non-uniforme à l'émetteur. Cependant, la répartition de charge dépend assez fortement du choix de δ_E comme le montre [99]. Sur la figure 5.3, les résultats obtenus pour un champ électrique imposé vertical avec et sans écoulement extérieur montrent que l'injection de charge peut être modifiée par la présence d'un écoulement extérieur avec ce type de condition limite. Le sujet est d'actualité comme le montre la récente publication d'articles durant la rédaction de ce manuscrit [100, 96, 64]. Moreau *et al.* [64] montrent que l'intensité du vent ionique peut dépendre du régime de décharge. Les récentes expériences de Vogel [96] offrent une visualisation directe de l'impact de l'écoulement d'air sur la décharge, voir figure 5.2b. Même pour des vitesses modérées, la brisure de symétrie dans l'émission UV de la décharge est flagrante. D'après Vogel, l'effet est bien visible pour le régime à haute tension dit "breakdown streamer", il est cependant moins marqué voire inobservable à plus basse tension, dans le régime "glow corona". La modélisation numérique proposée par Guan *et al.* [100] repose sur une couche d'ionisation simplifiée dans laquelle les ions sont créés au moyen d'un terme source adéquat. L'intensité du terme source est choisi de sorte à redonner le courant électrique mesuré expérimentalement. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur le champ électrique. L'inconvénient est qu'elle ne permet pas de prédire le courant. De plus, le terme source S ($\mathrm{C.m^{-3}.s^{-1}}$) étant constant à une tension donnée, le flux d'ions injecté est lui aussi indépendant de la vitesse du fluide

$$I = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (qn_p\mathbf{u} + qn_p\mu\mathbf{E})\mathrm{d}v = \int_{\Omega_i} S\mathrm{d}v = cst \tag{5.10}$$

où Ω_i désigne le volume de la zone d'ionisation. Ce modèle ne permet donc pas de retrouver la dépendance linéaire du courant avec la vitesse du fluide mesurée par Chapman [94].



(a) **(b)**

Figure 5.3 – *Densité de charge obtenue par Nguyen et al. [99] autour d'un fil conducteur de 1 cm de rayon plongé dans un champ électrique de 25 kV/m, $\delta_E = 0.25$ %, pour un vent de (a) $u_\infty = 0$ m/s, (b) $u_\infty = 20$ m/s.*

5.1.2 Illustration par l'expérience

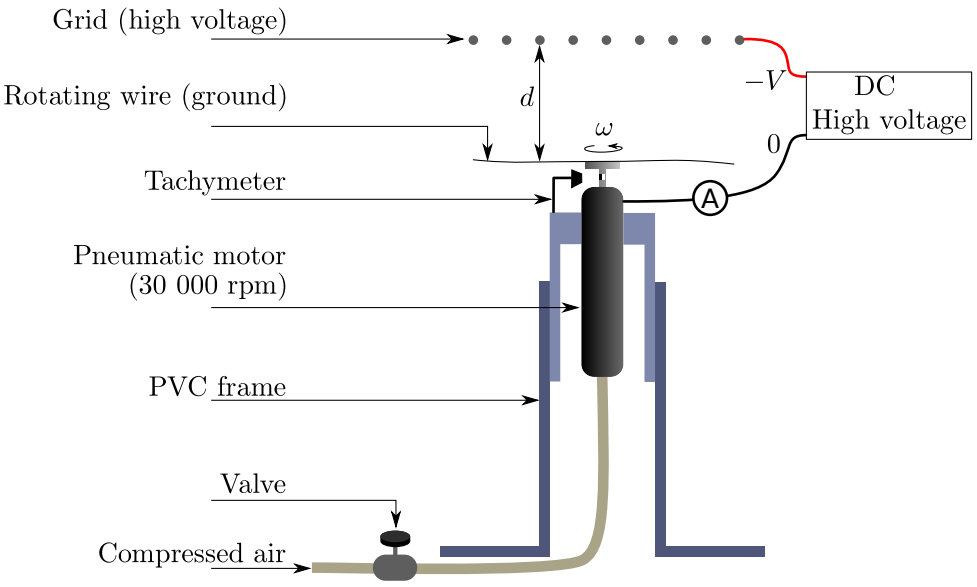


Figure 5.4 – *Schéma du montage expérimental, expérience du fil tournant.*

Il est relativement coûteux expérimentalement de reproduire des conditions où la vitesse de l'air $\mathbf{u}$ se rapproche de la vitesse des ions $\mu\mathbf{E}$. Les souffleries atteignant des vitesses proches de la centaine de mètres par seconde ne sont pas nombreuses, leur utilisation est coûteuse en énergie. En s'inspirant des travaux de Bondar & Bastien [21], un dispositif tournant simple a été mis en place pour mettre en évidence l'influence d'un écoulement d'air extérieur à la décharge, voir figure 5.4.

Un fil émetteur en tungstène de 50 μm de diamètre et d'une longueur $L = 15$ cm est fixé sur une roue à inertie en acier (diamètre 3cm, épaisseur 5 mm) entraînée par un moteur

pneumatique (meuleuse Deltair MDC400-S400, 250 W, 40 000 tour/min) alimenté par le circuit d'air comprimé du laboratoire. Un détendeur, un filtre et un système de lubrification en ligne sont installés en amont de l'entrée du moteur pour assurer un fonctionnement stable du moteur. La vitesse de rotation du moteur est contrôlée en ajustant finement le débit d'air comprimé au moyen d'une vanne à pointeau. Un tachymètre optique fabriqué par le service "Signaux et Images" du laboratoire permet de mesurer la vitesse de rotation ω. Avec cette configuration, les vitesses de rotation maximales sont légèrement supérieures à 30000 tour/min ($\omega = 1000\pi$ rad/s), ce qui correspond à une vitesse en bout de fil, proche de $\omega L/2 = 235$ m/s. Le corps métallique du moteur pneumatique est relié à la terre. Afin de générer une décharge couronne positive au niveau du fil émetteur, c'est la grille collectrice qui est portée à une haute tension négative. Le courant est mesuré au moyen d'un ampèremètre.

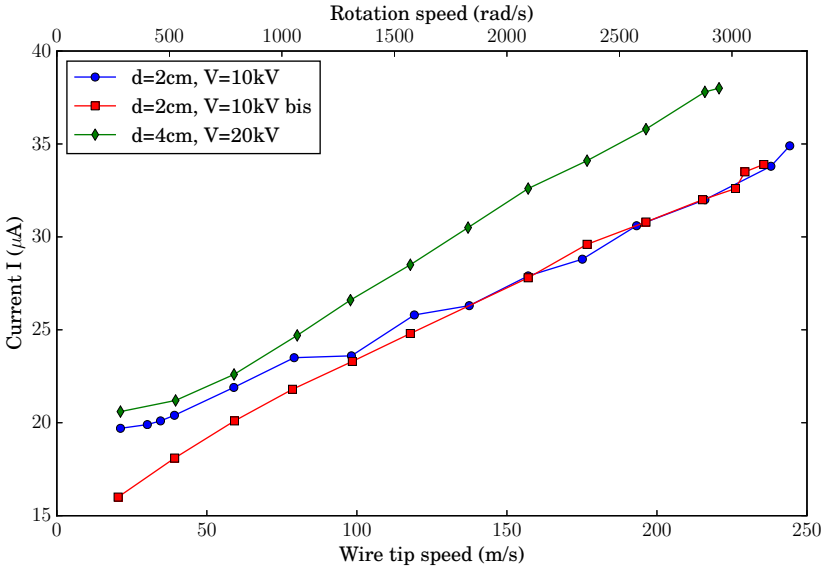


Figure 5.5 – *Courant à l'émetteur en fonction de la vitesse de rotation du fil.*

Les résultats obtenus, voir figure 5.5, montrent que le courant augmente de manière linéaire avec la vitesse de rotation du moteur. Cette première observation est en accord avec la loi courant-tension généralisée eq.(5.8). Ces mesures ne sont répétables qu'à haute vitesse de rotation, comme le montrent les deux cas à $d = 2$cm réalisés avec deux fils de diamètre et longueur identique. La différence entre les deux cas vient de la courbure naturelle du fil (vendu en bobine) qui se fait sentir à basse vitesse ($\omega \lesssim 1500$ rad/s), lorsque la force centrifuge n'est plus assez importante pour tendre le fil. En augmentant la distance à 4 cm mais en gardant le ratio V/d constant, on observe une augmentation linéaire, avec une pente similaire au premier cas.

L'augmentation du courant avec la vitesse de rotation du fil est sensible puisque l'on passe de 26 μA à 1800 rad/s à plus de 34 μA à 3200 rad/s. Il faut garder à l'esprit que dans ce dispositif la vitesse "vue" par le fil $u = r\omega$ est localement plus faible au centre qu'aux extrémités. Ce qui est mesuré ici est une augmentation moyenne du courant sur toute la longueur du fil, alors que le courant linéique augmente sans aucun doute beaucoup plus aux extrémités qu'au centre. Pour mesurer plus précisément les variations de courants pour une vitesse donnée, il faudrait enrober le centre du fil d'un matériaux isolant afin de ne laisser que les extrémités dénudées et soumises à la décharge couronne. Cette amélioration n'a pas été réalisée car l'objectif fixé avait déjà été atteint : nous avons pu vérifier par nous-même que l'écoulement d'air a une influence non-négligeable sur le courant de décharge.

5.2 Modélisation numérique

5.2.1 Notations

Pour alléger les notations, les grandeurs adimensionnelles sont désormais notées sans chapeaux, par exemple la densité d'ions adimensionnelle était notée $\hat{n}_p$ dans le chapitre précédent, elle est désormais noté n_p. De plus, pour faciliter la compréhension du développement asymptotique, nous avons introduit comme Durbin & Turyn la notation $\hat{\alpha}/\varepsilon = L\alpha$ (avec la convention d'écriture du chapitre précédent). Dans ce chapitre, avec la nouvelle convention d'écriture cette relation devient $\alpha = L^*\alpha^*$, où α est le coefficient adimensionnel et L^* (m) et α^* (m^{-1}) sont les grandeurs dimensionnelles. De même, $(\hat{\alpha} - \hat{\eta})/\varepsilon = L(\alpha - \eta)$ devient $(\alpha - \eta) = L^*(\alpha^* - \eta^*)$ avec attachement électronique.

Le modèle fluide retenu à trois espèces est identifque que celui présenté dans le chapitre précédent. Il s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -J(n_p - \delta_\mu n_e - n_n) \\
\nabla \cdot (n_p \nabla\phi) &= -\alpha n_e E + S_{photo} \\
\nabla \cdot (n_e \nabla\phi) &= (\alpha - \eta) n_e E + S_{photo} \\
\nabla \cdot (n_n \nabla\phi) &= \eta n_e E.
\end{aligned}$$

où l'on a défini $E = \|\nabla\phi\|$, la norme du champ électrique. Le terme de photo-ionisation S_{photo} fera l'objet d'un traitement spécial dans les sections suivantes. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles du modèle asymptotique précédent. À l'émetteur les conditions sont

$$\phi(a) = 1 \tag{5.11}$$
$$n_p(a) = 0 \tag{5.12}$$

et au collecteur

$$\phi(L) = 0 \tag{5.13}$$
$$n_e(L) = 0 \tag{5.14}$$
$$n_n(L) = 0. \tag{5.15}$$

La démarche présentée par la suite consiste à résoudre numériquement ces équations en tirant parti de l'approche asymptotique, comme présenté sur la figure 5.6. Pour cela nous allons distinguer la zone interne (domaine Ω_1) et la zone externe (domaine Ω_2) et résoudre séparément les systèmes d'équations simplifiés associés à chaque sous-domaine. L'intérêt de cette méthode vient du fait qu'elle ne résout que des systèmes d'équations simplifiés dans chaque sous-domaine. En particulier, le terme de photo-ionisation non-local devient asymptotiquement local comme le développement multi-polaire décrit au chapitre précédent l'a montré, ce qui permet de grandement simplifier les couplages.

Une première méthode itérative s'appuyant sur deux sous-domaines a été utilisée dans le cadre d'une méthode de point fixe par Wettervik *et al.*[101]. L'algorithme de résolution proposé en [101] consiste à calculer d'abord la solution dans le domaine Ω_1 pour un potentiel ϕ donné, ce qui permet d'obtenir une première estimation du flux d'ions éjecté par la décharge couronne. Puis, ce flux d'ion est injecté à son tour dans le domaine Ω_2 en tant que condition limite pour les ions. En utilisant les densités de charge dans les régions Ω_1 et Ω_2, le potentiel est recalculé. Puis on recommence en recalculant le flux d'ions dans Ω_1 et ainsi de suite, jusqu'à ce que la norme L_2 de l'incrément des solutions passe en dessous d'une valeur seuil.

La méthode présentée ici est différente et vise à résoudre simultanément toutes les équations sur les deux domaines. Pour cela nous nous inspirons des méthodes de décomposition de

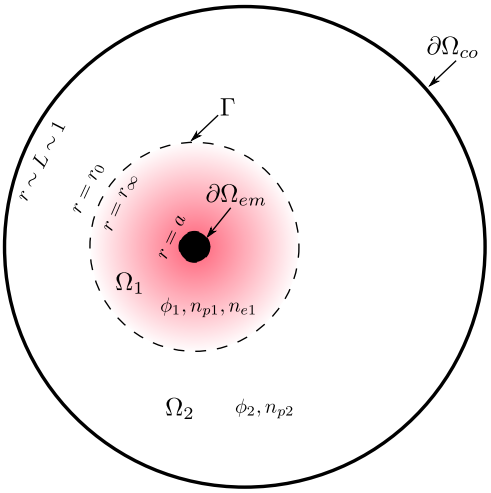


Figure 5.6 – *Décomposition de domaine appliquée à la décharge couronne.*

domaines. Ce type de décomposition et la formulation faible associée se prête particulièrement bien à une discrétisation par éléments finis comme nous allons le voir par la suite. Elle permet de modéliser la couche d'ionisation (zone interne) de manière suffisamment simplifiée pour pouvoir être étendue à des géométries complexes et, en même temps, de manière suffisamment réaliste pour garantir une injection de charge dans la zone de *drift* (zone externe) qui soit représentative de la physique de la décharge couronne. Ce type d'approche peut permettre de valider, ou non, les conditions aux limites phénoménologiques couramment employées. Elles reposent, pour la plupart, sur l'hypothèse d'un champ électrique constant et uniforme autour de l'émetteur (hypothèse de Kaptzov).

Dans un premier temps nous allons nous concentrer sur le système d'équations de la zone externe car ce dernier présente un caractère non-linéaire dû au couplage entre la distribution des ions des ions et le potentiel électrique. Une formulation faible est proposée et un algorithme de résolution ainsi que son implémentation dans Freefem++ sont détaillés.

Dans un second temps nous présenterons la formulation faible pour les équations de la zone interne ainsi que leur implémentation dans Freefem++. Plus de détails sur Freefem++ sont disponibles dans la présentation du logiciel par F. Hecht [102] et sur la page web officielle [1].

Dans un troisième temps, nous "raccordons" les deux modèles au moyen d'une méthode de décomposition de domaine en imposant les contraintes adéquates sur l'interface Γ. Contrairement au cas classique de décomposition de domaine pour des équations elliptiques, la présence d'équations de transport hyperboliques nécessite quelques adaptations. Enfin, dans un dernier temps, cette méthode de décomposition de domaine est comparée au modèle asymptotique analytique de la décharge couronne.

5.2.2 La zone externe

On cherche à résoudre le problème couplé charge/potentiel dans la zone de drift. La solution (ϕ, n_p) dans la zone externe doit vérifier

$$\Delta\phi = -Jn_p \tag{5.16}$$

$$\nabla \cdot (n_p \nabla\phi) = 0. \tag{5.17}$$

Avec des conditions aux limites de type Dirichlet. On choisit $\phi_{\partial\Omega_{co}} = 0$ et à la frontière interne $\phi_\Gamma = 1$ et $n_{p,\Gamma} = 1$. Dans l'optique finale du raccord, les conditions aux limites à la frontière

1. www.freefem.org

interne seront données par les résultats de la zone interne. Conformément au développement asymptotique du chapitre précédent, le terme source de photo-ionisation est alors absent dans ce domaine. L'équation pour les électrons dans la zone externe n'est *a priori* pas nécessaire pour le calcul du flux d'ions dans la zone externe. Cependant nous aurons besoin de connaître la valeur du flux d'électrons à l'interface Γ pour alimenter la condition limite dans la zone interne. En développant le terme de photo-ionisation comme dans le chapitre précédent, la conservation du flux d'électrons $\mathbf{j}_e = n_e \nabla\phi$ s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_e = \gamma\lambda G(r;0) \int_{\Omega_1} \alpha \|\mathbf{j}_{e1}\|. \tag{5.18}$$

avec $\mathbf{j}_{e1}$ le flux d'électrons dans la zone interne et λ le coefficient de photo-absorption. On remarque que le terme source ne dépend que de r, c'est-à-dire de la position radiale et pas de la position azimutale θ (Cf figure 5.7). Dans la suite, nous allons simplifier cette équation de conservation pour en déduire directement une condition limite pour la zone interne.

En intégrant l'équation précédente sur un petit tube de courant $\delta\Omega_2(\theta)$, qui correspond à un tube de courant de champ électrique schématisé sur la figure 5.7, et sachant que le flux d'électrons en $\partial\Omega_{co}$ provenant du collecteur est nul (condition limite) on obtient

$$\int_{\delta\Gamma} \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{n} = \gamma \int_{\delta\Omega_2(\theta)} \lambda G(r;0) \int_{\Omega_1} \alpha \|\mathbf{j}_{e1}\|. \tag{5.19}$$

La fonction d'absorption ne dépend que de r donc le terme $\int_{\delta\Omega_2(\theta)} \lambda G(\mathbf{r};0)$ varie peu avec θ. Ce constat est d'autant plus affirmé que la longueur de photo-absorption $1/\lambda$, qui caractérise la décroissance exponentielle du flux de photons (de l'ordre de quelques millimètres au plus), sera petite devant le rayon de courbure des lignes de champ (du *même* ordre de grandeur que la distance entre les électrodes). Ainsi, dans la limite asymptotique où $1/\lambda \ll L$ où L est la longueur caractéristique des champs (typiquement la distance collecteur-émetteur) dans la zone de *drift*, alors ce terme ne dépend pas de θ (plus précisément l'ordre dominant du développement asymptotique est invariant selon θ).

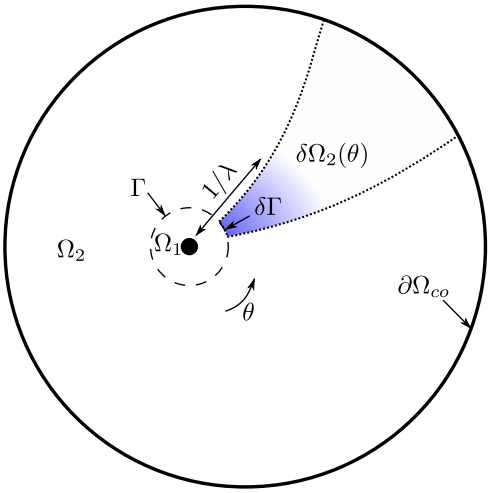


Figure 5.7 – *Représentation du tube de courant $\delta\Omega_2(\theta)$ pour une configuration non-axisymmétrique.*

On peut donc, en première approximation, imposer une condition limite uniforme pour le flux d'électrons incident dans la zone interne, même pour une configuration non-axisymétrique.

$$\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{n}|_\Gamma \delta\Gamma \approx \gamma_{eff} \int_{\Omega_1} \alpha \|\mathbf{j}_{e1}\| \tag{5.20}$$

Solution analytique de référence

Il est possible de trouver une solution analytique de ce système dans le cas cylindrique axisymétrique qui servira donc de référence [53, 90]. Pour la densité d'ions on part de la conservation du flux d'ion et de la condition $n_p(r_0) = 1$ pour obtenir

$$n_p(r) = \frac{r_0 \partial_r \phi|_{r_0}}{r \partial_r \phi(r)}. \tag{5.21}$$

Ensuite le champ électrique radial est obtenu en injectant $n_p(r)$ dans l'équation du potentiel électrique. Après intégration

$$-\partial_r \phi(r) = \sqrt{J r_0 \partial_r \phi|_{r_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{r_0 \partial_r \phi|_{r_0}}{r^2}}. \tag{5.22}$$

La constante de champ électrique à la surface émettrice $\partial_r \phi|_0$ est donnée par les conditions aux limites sur le potentiel

$$\int_{r_0}^{L} \partial_r \phi(r)\, \mathrm{d}r = 1 \tag{5.23}$$

En pratique, on résout numériquement cette condition pour trouver $\partial_r \phi|_{r_0}$, qui, contrairement à la condition de raccord donnée dans le chapitre précédent, n'admet pas de solution analytique du type $\partial_r \phi_0 = f(J)$. Pour le cas de référence ($r_0 = 0.01$, $J = 0.5$) la solution numérique à la douzième décimale près vaut $r_0 \partial_r \phi|_{r_0} = 0.195130614084$. Les profils radiaux de densité de charge et de champ électrique sont représentés en figure 5.8

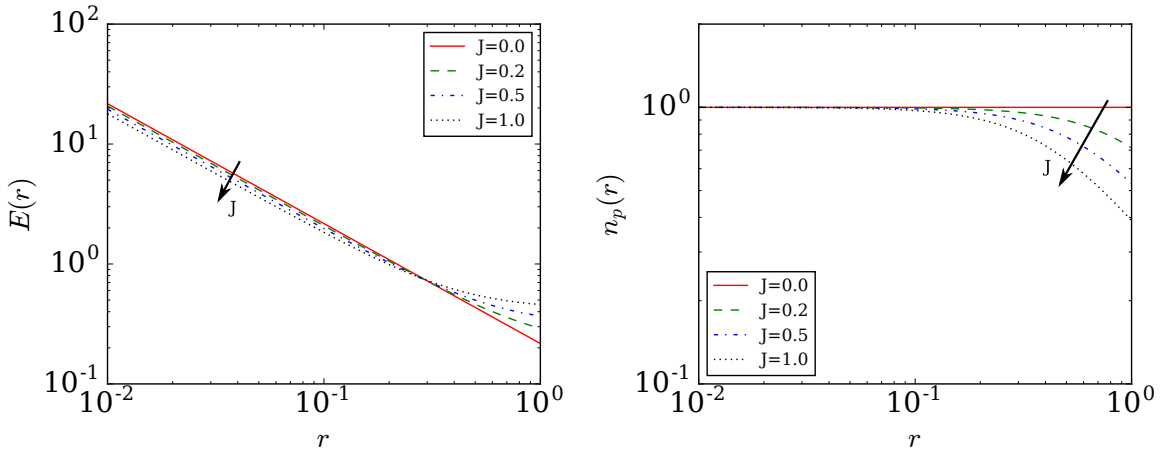


Figure 5.8 – *Profils analytiques de densité de charge et de champ électrique.*

Le paramètre J contrôle la distribution des charges (ou "charge d'espace"). Dans le cas $J = 0$ correspondant à une charge d'espace négligeable, le potentiel électrique est harmonique et varie en $\ln(r)$, de sorte que le champ électrique varie en $1/r$. En revanche pour J non nul, le champ électrique est déformé par la charge d'espace et la répartition de cette dernière s'en trouve affectée. Ces solutions analytiques seront utilisées pour valider le modèle numérique à venir.

Formulation faible

Pour trouver une formulation faible, on introduit les fonctions tests u et v appartenant aux espaces de fonctions $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. En multipliant les équations consitutives précédentes par des

fonctions tests on obtient deux fonctionnelles que l'on regroupe en un vecteur de fonctionnelles $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_2\left(\begin{pmatrix}\phi\\ n_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\int_{\Omega_2}-\nabla\phi\cdot\nabla u+\int_{\Omega_2}Jn_pu+\int_{\partial\Omega_2}\partial_n\phi u\\ \int_{\partial\Omega_2}n_p\partial_n\phi v-\int_{\Omega_2}n_p\nabla\phi\cdot\nabla v\end{pmatrix}$$

où ∂_n désigne la dérivée selon la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω (nous utilisons ici les conventions usuelles des formulations variationnelles où les éléments infinitéssimaux d'intégration volumiques/surfaciques/linéiques sont omis). Les intégrales de bord sont notée de la même manière que les intégrales de volume, seul le domaine d'intégration est différent. La solution (ϕ, n_p) doit satisfaire le principe variationnel suivant

$$\mathcal{F}_2\left(\begin{pmatrix}\phi\\ n_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\qquad\forall(u,v)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}.\tag{5.24}$$

Les espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces de fonctions éventuellement différents. Pour $\mathcal{U}$ on choisira un espace dont les fonctions et leurs dérivées appartiennent à $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $\mathcal{U}\subset H^1(\Omega)$. Pour $\mathcal{V}$ on prendra aussi dans un premier temps des fonctions appartenant $H^1(\Omega)$ et dont les dérivées sont de norme L_2 finie. En effet, le champ de vitesse $\nabla\phi$ étant continu et de norme strictement positive, il n'y aura pas de discontinuité de n_p. Dans un cas plus général, on peut anticiper des difficultés lorsque le champ de vitesse des ions prend en compte la vitesse du fluide $\nabla\phi+\mathbf{u}$. En effet il se peut dans ce cas que le champ de vitesse s'annule localement. Au niveau de ces points d'arrêts, des discontinuités de n_p peuvent apparaître, il faudra alors choisir des espaces de fonctions autorisant les discontinuités, avec une approche Galerkin discontinue par exemple. Contentons nous pour l'instant de fonctions relativement régulières. La formulation précédente n'est pas linéaire en n_p et ϕ. En effet, il existe des termes de couplage qui rendent la fonctionnelle $\mathcal{F}_2$ non-linéaire. On utilise donc un algorithme itératif de Newton pour trouver la solution. Pour cela on linéarise le système d'équations à chaque itération en calculant la différentielle (au sens de Fréchet pour les fonctionnelles) $\delta\mathcal{F}_2((\phi,n_p),(u,v),(\delta\phi,\delta n_p))$ de $\mathcal{F}_2$ au point $\mathbf{x}=(\phi,n_p)$ et s'appliquant à l'incrément $(\delta\phi,\delta n_p)$

$$\delta\mathcal{F}_2\left(\begin{pmatrix}\phi\\ n_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\delta\phi\\ \delta n_p\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\int_{\Omega_2}\nabla(\delta\phi)\cdot\nabla u+\int_{\Omega_2}J\delta n_pu+\int_{\partial\Omega_2}\partial_n\delta\phi u\\ \int_{\partial\Omega_2}\delta n_p\partial_n\phi v+n_p\partial_n\delta\phi v-\int_{\Omega_2}\delta n_p\nabla\phi\cdot\nabla v+n_p\nabla\delta\phi\cdot\nabla v\end{pmatrix}$$

L'algorithme complet est donné par l' algorithme 1. Avec une méthode de Newton, le choix de la solution initiale $\mathbf{x}_0$ peut être critique. Ce point est discuté dans la section de validation. Le critère d'arrêt est atteint lorsque la norme des résidus passe en dessous d'un certains seuil. Typiquement une méthode de Newton converge quadratiquement jusqu'à ce que la norme des résidus soit du même ordre que la précision numérique de la machine soit environ 10^{-16}.

L'implémentation de l'algorithme de Newton et la résolution du système linéaire à chaque itération a été réalisée avec *Freefem++ v3.55*. Un code commenté est fourni dans l'appendice AA.1, et une formulation faible alternative y est aussi détaillée.

Validation

Les résultats de convergence sont présentés sur les figures 5.9 pour la formulation proposée. Les résultats pour la formulation alternative sont en annexe (figures A.1 et A.2). Lorsque le

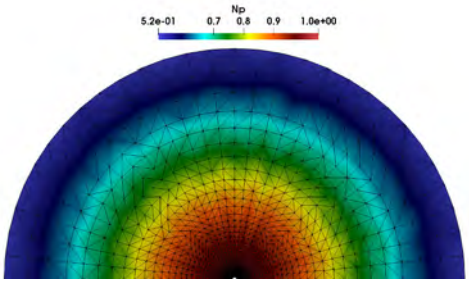
Algorithm 1 Newton : find solution $\mathbf{x}$ of $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0$

$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_0$: initial guess
while $\|\mathcal{F}(\mathbf{x})\|_{L2} > \epsilon$ **do**
    build $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ and $\delta\mathcal{F}(\mathbf{x})$
    solve $\delta\mathbf{x}$ so that $\mathcal{F}(\mathbf{x}) + \delta\mathcal{F}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} = 0$
    update variables $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$

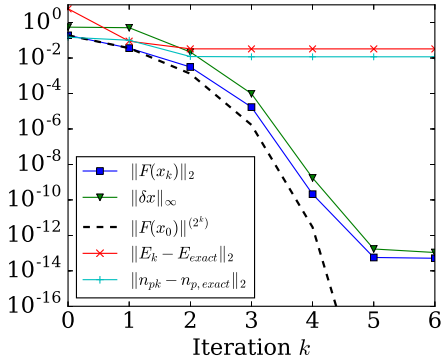
nombre de degrés de liberté n'est pas indiqué, un maillage composé de 5662 triangles et 2871 nœuds a été utilisé, ce qui correspond à 60 éléments sur chaque frontière circulaire. Le détail du calcul des différents indicateurs de convergence est donné dans l'appendice AA.1.

Quelle que soit la formulation faible utilisée, l'algorithme de Newton converge de manière quadratique (courbe de référence en pointillés sur la figure 5.9(b)). La norme L_2 des résidus n'est pas normalisée. Typiquement, en moins de six itérations les résidus se stabilisent autour de $10^{-16} \times \sqrt{N_{dof}}$ où N_{dof} désigne le nombre de degrés de liberté, lié au maillage et à l'ordre des éléments finis choisis. Ici les éléments finis utilisés (notés P_n) sont des triangles 2D sur lesquels les fonctions de forme sont polynomiales d'ordre n =1,2 ou 3. La précision (ou erreur) est définie comme l'écart quadratique moyen entre la solution numérique et la solution analytique, elle se stabilise en trois itérations. La convergence vers la solution analytique est assez robuste, du moment que la solution initiale respecte les conditions limites. Il faut rajouter à cela que ϕ_0 doit être continu afin de garantir un champ électrique borné et qu'il est préférable d'éviter une solution avec un point critique $\|\nabla\phi\| = 0$ qui mène inévitablement à une densité n_p discontinue et à des instabilités numériques pouvant nuire à la convergence.

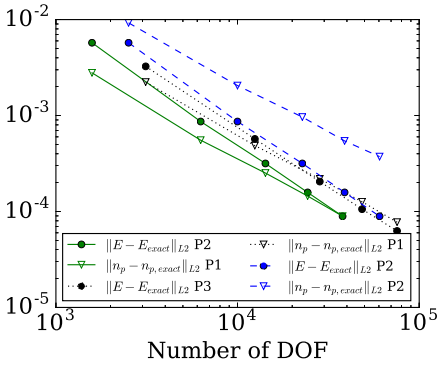
La précision de la solution numérique dépend de la formulation choisie. Sur la figure 5.9(c), la convergence de l'erreur avec le nombre de degré de liberté est à peu près d'ordre 1.



(a)



(b)



(c)

Figure 5.9 – *Résultats formulation faible 1, éléments P3 pour le potentiel et P1 pour n_p. (a) Champ de densité d'ions n_p, (b) Convergence de l'algorithme de Newton et (c) Convergence en maillage.*

5.2.3 La zone interne

Dans la zone interne, les équations constitutives décrivent plusieurs espèces chargées : les ions positifs, les électrons et éventuellement les ions négatifs.

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= 0 \\
\nabla\cdot(n_p\nabla\phi) &= -L^*\alpha^* n_e E \\
\nabla\cdot(n_e\nabla\phi) &= L^*(\alpha^*-\eta^*) n_e E \\
\nabla\cdot(n_n\nabla\phi) &= L^*\eta^* n_e E.
\end{aligned}$$

où l'on a défini $E = \|\nabla\phi\|$, la norme du champ électrique. L^* est la longueur de référence choisie pour l'adimensionalisation et α^* et η^* (m^{-1}) sont les coefficients d'ionisation et d'attachement. Les ions négatifs ne jouent aucun rôle dans ce modèle, ils sont esclaves de la concentration en électrons et du champ électrique mais n'ont aucune influence en retour. En revanche l'attachement η modifie légèrement la concentration en électrons et indirectement celle des ions positifs qui contrôlent à leur tour la distribution des charges dans la zone externe et donc indirectement le potentiel dans la zone interne. En gardant à l'esprit que c'est la loi d'injection des ions positifs qui est recherchée, le modèle interne se réduit à

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= 0 \\
\nabla\cdot(n_p\nabla\phi) &= -\alpha n_e E \\
\nabla\cdot(n_e\nabla\phi) &= (\alpha-\eta) n_e E.
\end{aligned}$$

Ce modèle ne conserve pas le courant dans la zone interne, mais il peut facilement le devenir en rajoutant les ions négatifs. Pour alléger les formulations faibles, et accessoirement, le temps

de calcul, dans un premier temps l'équation de conservation des ions négatifs n'est pas résolue. C'est un des aspects mineurs de modélisation que nous avons choisi d'écarter, par manque de temps à la fin de cette thèse, mais ce modèle minimum est cohérent avec le choix de Durbin [84] que nous avions analysé au chapitre précédent. Pour être pleinement cohérent avec l'analyse de Durbin et pour pouvoir comparer les résultats numériques avec les solutions analytiques, nous avons négligé l'attachement électronique η. Les conditions aux limites choisies sont les suivantes : $\phi_{\partial\Omega_{em}} = 1$, $\phi_\infty = 1 - A\ln(r_\infty/a)$, $n_{p,émetteur} = 0$ et $n_{e,\infty} = 1$. Le rayon de l'émetteur est noté a tandis que le rayon de la zone externe de la zone de décharge est notée r_∞. Dans une logique purement asymptotique, on devrait avoir $r_\infty = +\infty$ ou plus exactement dans notre cas cylindrique $r_\infty = 1/\varepsilon$. On se contentera ici de fixer r_∞ à une valeur donnée et de vérifier que la solution numérique converge vers la solution analytique, pour valider la méthode de résolution. Un second aspect mineur que nous aurions souhaité développer mais que nous n'avons pas eu le temps de mettre en oeuvre aurait été de traiter le raccord dans une perspective asymptotique où le domaine de la zone interne croit comme $1/\epsilon$, et celui de la zone externe reste unitaire, d'analyser la convergence numérique. Cependant cette première approche donnera une première version validant une solution de principe de la méthode de raccord bi-domaine présentée. Pour faire "communiquer" les deux domaines, nous utilisons une méthode de décomposition de domaine avec des contraintes de continuité à l'interface détaillée dans la section 5.3.

Solution analytique de référence

Afin de disposer de solutions analytiques de référence, nous allons devoir négliger l'attachement η. Dans le cas cylindrique axisymétrique, Durbin [84] obtient des solutions analytiques aux équations de la zone interne en négligeant l'attachement et en prenant un coefficient d'ionisation α adimensionnel du type

$$\alpha = \beta \exp(-1/\varepsilon E). \tag{5.25}$$

Dans le cas asymptotique, le champ électrique radial dans la zone interne s'écrit $E = A/r$ avec A une constante déterminée par le raccord. En intégrant les équations de conservation des électrons et des ions et en négligeant l'attachement, Durbin obtient :

$$\pi_e(r) = \pi_{e,\infty} \exp\left(\int_r^{r_\infty} \frac{\alpha(r')}{\varepsilon} \mathrm{d}r'\right) \tag{5.26}$$

$$\pi_p(r) = \pi_{e,\infty} \left[\exp\left(\int_a^{r_\infty} \frac{\alpha(r')}{\varepsilon} \mathrm{d}r'\right) - \exp\left(\int_r^{r_\infty} \frac{\alpha(r')}{\varepsilon} \mathrm{d}r'\right)\right]. \tag{5.27}$$

Les résultats précédents sont écrits en variables adimensionnelles externes. En injectant (5.25) et $E = A/r$ nous pouvons obtenir de manière explicite les profils de concentrations en ions et en électrons.

$$n_e(r) = \frac{\pi_{e,\infty}}{A} \exp\left(A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r}{\varepsilon A}\right) - A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r_\infty}{\varepsilon A}\right)\right) \tag{5.28}$$

$$n_p(r) = \frac{\pi_{e,\infty}}{A} \left[\exp\left(A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-a}{\varepsilon A}\right) - A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r_\infty}{\varepsilon A}\right)\right) - \exp\left(A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r}{\varepsilon A}\right) - A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r_\infty}{\varepsilon A}\right)\right)\right] \tag{5.29}$$

où $\pi_{e,\infty} = n_e|\nabla\phi| = n_e E\, r = n_{e,\infty} A$ désigne le flux incident d'électrons intégré. L'influence de chaque paramètre est illustrée par les figures 5.10 et 5.11. $A = aE_a$ est lié au flux de champ électrique adimensionnel interne : lorsque A augmente, à flux d'électrons incident fixé, les concentrations en espèces chargés augmentent.

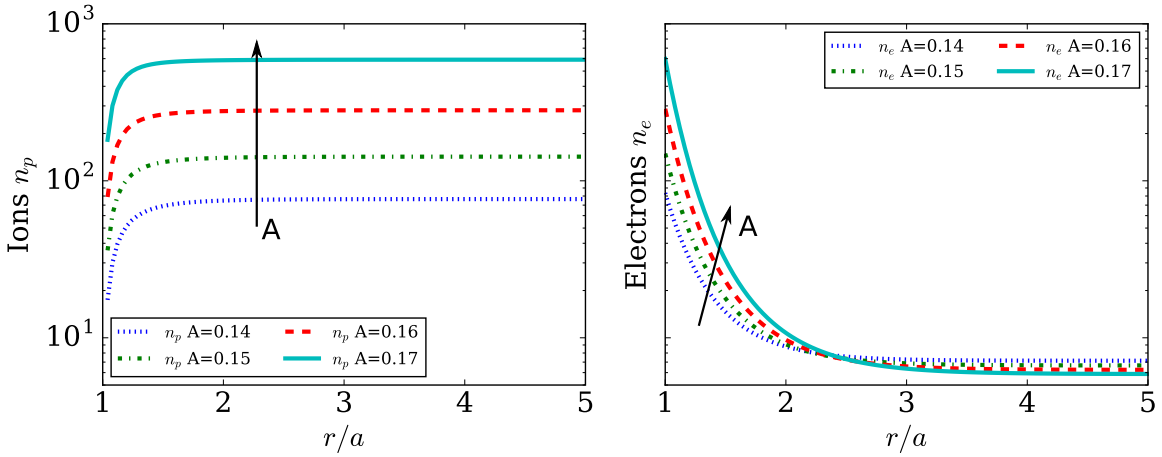
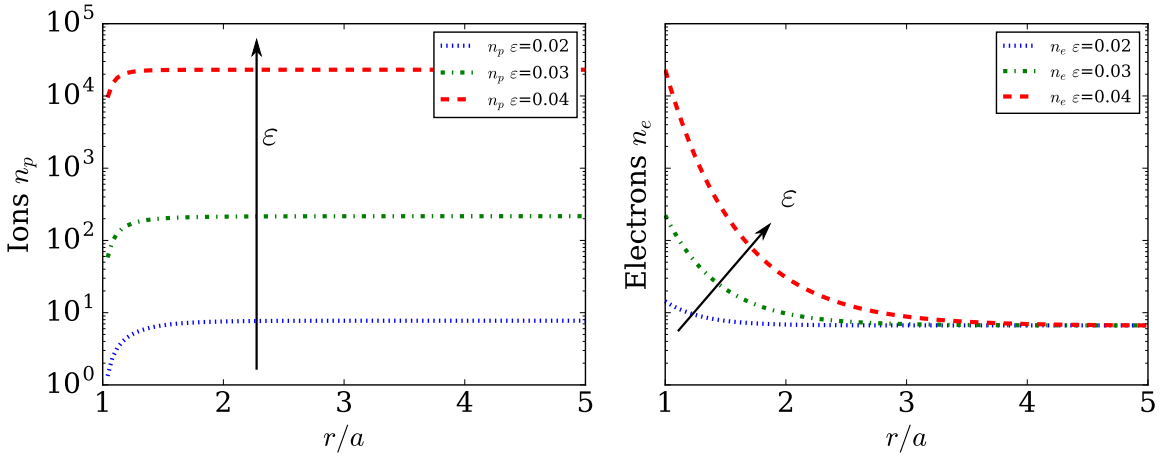


Figure 5.10 – *Profil de densité adimensionnelle d'ions et d'électrons à flux d'électron incident fixé ($\pi_{e,\infty} = 1$, $a = 0.01$, $\eta = 0$, $\beta = L^*\beta^* = 7200$) pour A variable $\varepsilon = 0.029$*

Par définition, le paramètre $\varepsilon = \phi_a/(LE_i)$ est l'épaisseur de la couche d'ionisation (figure 5.11) qui est liée à la tension appliquée ϕ_a. De manière générale la concentration en électrons croit de manière exponentielle en direction de l'émetteur. La longueur caractéristique de croissance est liée à A, β et ε. La concentration en ions positifs évolue de manière inverse : elle est nulle à l'émetteur et croit de manière très rapide avec r. Elle tend plus rapidement vers une valeur constante que les électrons. La longueur caractéristique de décroissance des courbes est contrôlée par $A\varepsilon$. Typiquement sur la figure 5.11 (b) on voit clairement qu'à une distance $r/a > \varepsilon/a$ la concentration en électrons est constante. L'exercice qui consiste à regarder l'influence de chaque



(a)

Figure 5.11 – *Profil de densité adimensionnel d'ions et d'électrons dans la zone interne à flux d'électron incident fixé ($\pi_{e,\infty} = 1$, $a = 0.01$, $\eta = 0$, $\beta = L^*\beta^* = 7200$) pour ε variable et $A = 0.15$.*

paramètre séparément est intéressant d'un point de vue mathématique mais n'a pas beaucoup de sens d'un point de vue de la physique car A et $\pi_{e,\infty}$ varient simultanément avec ε. Par exemple le raccord axi-symmétrique montre que le produit $A\varepsilon$ est constant pour une géométrie et des coefficients d'ionisation donnés. Pour déterminer la variation des flux d'ions et d'électrons avec la tension appliquée il faudrait raccorder les solutions. Pour l'instant nous nous contenterons

des solutions proposées pour valider le modèle numérique avec des conditions limites $\pi_{e,\infty}$ et un champ électrique A imposé.

En anticipant tout de même la phase de raccord entre les modèles numériques interne et externe, il est intéressant de noter que la solution interne dépend a priori des dimensions du domaine interne r_∞ (figure 5.6). Du point de vue asymptotique adapté au chapitre précédent, la frontière extérieure de la zone interne n'est pas définie car $r_\infty = +\infty$. Dans le cadre d'un modèle numérique, le domaine aura nécessairement une taille finie. On peut légitimement se poser la question de la validité du raccord dans le cas où la solution intérieure ne tend pas vers l'infini. On regardant les solutions analytiques, il est possible d'estimer l'erreur commise lorsque r_∞ prend une valeur finie. En quelques mots : pour la concentration en ions cette erreur est liée à des termes qui varient en $\exp(-r_\infty/(\varepsilon A))$. Si $r_\infty/(\varepsilon A) \gg 1$ l'erreur sera négligeable. Pour les électrons en revanche, l'adimensionalisation choisie permet directement d'imposer $\Pi_{e,\infty} = \gamma$. Le terme de photo-ionisation est alors indirectement pris en compte via la condition sur le flux d'électron arrivant dans la zone interne. Des compléments concernant l'effet de taille finie sont fournis dans l'annexe B.1.

Formulation faible

De manière analogue à ce qui a été fait dans la zone externe, on construit une formulation faible qui est ensuite linéarisée en vue de sa résolution par un algorithme de Newton. La formulation faible s'appuie sur une démarche similaire à celle employée pour la deuxième formulation dans la zone externe, en substituant cette fois $\Delta\phi = 0$ dans les équations de conservation des espèces.

$$\mathcal{F}_1\left(\begin{pmatrix}\phi\\ n_p\\ n_e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Omega_1} \nabla\phi\cdot\nabla u - \int_{\partial\Omega_1} u\,\partial_n\phi \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_1} n_p\partial_n\phi v - \int_{\Omega_1} n_p\nabla\phi\cdot\nabla v + \int_{\Omega_1}\alpha n_e E\, v \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_1} n_e\partial_n\phi v - \int_{\Omega_1} n_e\nabla\phi\cdot\nabla v - \int_{\Omega_1}\alpha n_e E\, w \end{pmatrix}$$

où l'on a défini $E = \|\nabla\phi\|$, la norme du champ électrique. La forme linéarisée s'obtient, quant à elle, en calculant les dérivées de Fréchet de chaque fonctionnelle en ϕ, n_p et n_e.

$$\delta\mathcal{F}_1\left(\begin{pmatrix}\phi\\ n_p\\ n_e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\delta\phi\\ \delta n_p\\ \delta n_e\end{pmatrix}\right) =$$
$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Omega_1} \nabla\delta\phi\cdot\nabla u - \int_{\partial\Omega_1} u\,\partial_n\delta\phi \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_1} (\delta n_p\partial_n\phi + n_p\partial_n\delta\phi)v - \int_{\Omega_1}(\delta n_p\nabla\phi\cdot\nabla + n_p\nabla\delta\phi\cdot\nabla)v + \int_{\Omega_1}(\alpha\delta n_e E + \alpha n_e\delta E + \delta\alpha n_e E)v \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_1} (\delta n_e\partial_n\phi + n_e\partial_n\delta\phi)w - \int_{\Omega_1}(\delta n_e\nabla\phi\cdot\nabla + n_e\nabla\delta\phi\cdot\nabla)w - \int_{\Omega_1}(\alpha\delta n_e E + \alpha n_e\delta E + \delta\alpha n_e E)w \end{pmatrix}$$

Le terme $\delta E = \|\nabla(\phi+\delta\phi)\| - \|\nabla\phi\|$ est obtenue en linéarisant E de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\|\nabla(\phi+\delta\phi)\| &= \sqrt{\nabla(\phi+\delta\phi)\cdot\nabla(\phi+\delta\phi)} \\ &= \sqrt{\|\nabla\phi\|^2 + 2\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi + \|\nabla\delta\phi\|^2} \\ &= E\sqrt{1+\frac{2\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi}{\|\nabla\phi\|^2}+\frac{\|\nabla\delta\phi\|^2}{\|\nabla\phi\|^2}} \\ &= E + \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi}{E} + O\left(\frac{\|\nabla\delta\phi\|^2}{\|\nabla\phi\|}\right).\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\delta E = \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi}{E} \tag{5.30}$$

Le terme $\delta\alpha$ est obtenu, quant à lui, en linéarisant le coefficient d'ionisation $\alpha(E) = \beta\exp(-1/\varepsilon E)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\alpha(E+\delta E) &= \beta\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon(E+\delta E)}\right) \\ &= \beta\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon E}\left[1-\frac{\delta E}{E}+o\left(\frac{\delta E}{E}\right)\right]\right) \approx \alpha(E)\exp\left(\frac{\delta E}{\varepsilon E^2}\right) \\ &\approx \alpha(E)\left(1+\frac{\delta E}{\varepsilon E^2}\right).\end{aligned}$$

On obtient finalement $\delta\alpha = \alpha(E+\delta E) - \alpha(E)$

$$\delta\alpha = \alpha(E)\frac{\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi}{\varepsilon E^3}$$

Notons que dans un cadre plus général, d'autres réactions (que ce soit d'ionisation, d'attachement ou de recombinaison) peuvent aisément s'ajouter à la formulation faible proposée. La linéarisation de ces coefficients dépendra bien sûr de la forme analytique de ces derniers, comme par exemple lorsque des polynômes sont utilisés pour faire des régressions sur des données expérimentales. La différentielle de ces coefficients par rapport au champ électrique pourrait aussi être calculée numériquement à partir de valeurs tabulées.

A chaque itération de l'algorithme de Newton le système d'équation linéarisées est résolu pour trouver l'incrément $(\delta\phi, \delta n_p, \delta n_e)$. La recherche de l'incrément se fait au moyen de la formulation faible suivante

$$\mathcal{F}_1\left(\begin{pmatrix}\phi\\n_p\\n_e\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right)+\delta\mathcal{F}_1\left(\begin{pmatrix}\phi\\n_p\\n_e\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\delta\phi\\\delta n_p\\\delta n_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \forall(u,v,w)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}\times\mathcal{W} \tag{5.31}$$

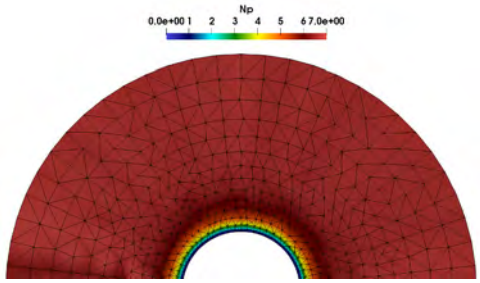
L'algorithme de Newton ainsi que la résolution du système matriciel découlant de cette formulation faible sont réalisés avec *Freefem++*. Un code commenté minimal est fourni en annexe A.2.

Validation

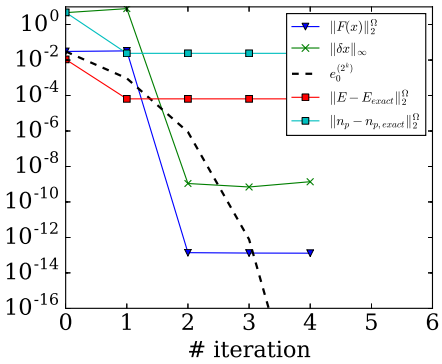
Une étude de convergence de la solution numérique a été menée, de manière analogue à celle menée dans la zone interne. Au premier regard la convergence de la méthode de Newton est très rapide, figure 5.12 (b). Il suffit de deux itérations pour que les résidus convergent. Mais lorsque l'on compare la solution obtenue avec la solution analytique les résultats sont moins probants. La zone interne est une zone difficile à résoudre d'un point de vue numérique pour deux raisons.

1) Les champs de concentration varient de manière extrêmement abruptes au voisinage de l'émetteur. Nous avons en partie contourné cette difficulté en adaptant le maillage.
2) Le couplage très particulier entre $\nabla\phi$, n_p et n_e génère une propagation de l'erreur : la concentration en ions dépend à la fois du gradient de potentiel et de la concentration en électrons qui dépend elle-même du gradient de potentiel.

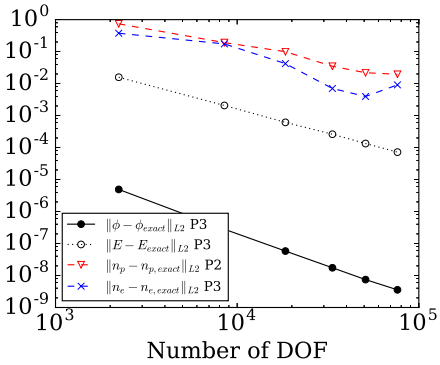
Cette effet de propagation de l'erreur numérique est particulièrement visible sur les graphes 5.12 (c) et (d). L'erreur entre solution numérique et solution analytique est systématiquement plus élevée pour les ions que pour les électrons et que pour le potentiel.



(a)



(b)



(c)

Figure 5.12 – *(a) Maillage grossier et champ de concentration n_p pour $r_\infty/a = 4$. Discrétisation [P3,P2,P3] pour $[\phi, n_p, n_e]$ et (b) Convergence de la méthode de Newton pour le même cas. (c) Convergence en maillage pour différentes discrétisations spatiales. Paramètres : $a = 0.01$, $r_\infty = 0.04$, $\varepsilon = 0.02890069370$, $A = 0.15$, $\beta = 7200$.*

Au final, le modèle $[\phi, n_p, n_e]$ de la couche interne nécessite une discrétisation spatial d'ordre élevé du type $[P3, P2, P3]$ et un maillage relativement raffiné autour de l'émetteur, là où les gradients de densité de charge sont les plus importants.

5.3 Décomposition de domaine appliquée à la décharge couronne.

Maintenant que nous avons un modèle numérique pour chaque zone, nous allons les raccorder entre eux. Dans l'idéal, une méthode asymptotique raccordée, comme celle du chapitre précédent, utilise la condition de raccord suivante entre la zone interne Ω_1 et la zone externe Ω_2 pour les flux des différentes espèces et notamment des ions.

$$\lim_{r\to\infty} \pi_{p1}(r) = \lim_{r\to 0} \pi_{p2}(r) \tag{5.32}$$

En pratique les domaines de calcul ont une taille fini, et nous devrons nous contenter dans un premier temps d'une contrainte de continuité des flux à l'interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$

$$n_{p,1}\partial_n\phi_1|_\Gamma = n_{p,2}\partial_n\phi_2|_\Gamma \tag{5.33}$$

D'après Durbin [84], la condition de raccord pour le potentiel peut se comprendre comme un double raccord à la fois sur le champ électrique (continuité de la dérivée du potentiel) et sur la valeur du potentiel lui-même (continuité du potentiel). Dans notre cas le raccord s'écrit alors

$$\partial_n\phi_1|_\Gamma = \partial_n\phi_2|_\Gamma \tag{5.34}$$

$$\phi_1|_\Gamma = \phi_2|_\Gamma. \tag{5.35}$$

Pour implémenter numériquement cette condition, une méthode de décomposition de domaine a été employée. La contrainte de continuité du potentiel à l'interface Γ entre zones interne et externe permet d'assurer à la fois la continuité du potentiel, mais également celle du champ électrique par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange, comme, par exemple dans [103].

5.3.1 Équations constitutives

Dans le formalisme de la décomposition de domaine, chaque équation est résolue séparément sur les sous-domaines et ce sont les multiplicateurs de Lagrange λ qui font communiquer les domaines entre eux via les conditions limites aux interfaces. Plus formellement, la formulation avec les multiplicateurs de Lagrange peut être vue comme la recherche du point selle d'un lagrangien découlant d'un problème de minimisation sous contrainte. Ce point de vue est détaillé dans l' annexe B.2. Ici nous partons directement des équations constitutives et des contraintes associées au raccord.

Tout d'abord pour le potentiel électrique ϕ les équations constitutives raccordées s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l|l} \Delta\phi_1 = 0 & \phi_1|_{\partial\Omega_{em}} = 1 \quad \partial_n\phi_1|_\Gamma = -\lambda_\phi \\ \Delta\phi_2 = -Jn_{p2} & \qquad\qquad \partial_n\phi_2|_\Gamma = \lambda_\phi \quad \phi_1|_{\partial\Omega_{co}} = 0 \\ (\phi_1 - \phi_2)|_\Gamma = 0 & \end{array}\right. \tag{5.36}$$

où $\partial\Omega_{em}$ et $\partial\Omega_{co}$ désignent la surface de l'émetteur et du collecteur respectivement. La notation Γ désigne l'interface entre les sous-domaines avec la convention que la normale $\mathbf{n}$ est identique à la normale sortante du domaine Ω_2. Cette convention explique la différence de signe des conditions de Neuman pour le gradient de potentiel sur Γ. La contrainte de raccord est double

(i) la continuité de ϕ à l'interface est imposée par la condition $\phi_1 - \phi_2 = 0$

(ii) la continuité du flux $\partial_n\phi$ est imposée au moyen du multiplicateur de Lagrange λ_ϕ.

Pour les ions positifs les équations raccordées s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l|l} \nabla\cdot(n_{p1}\nabla\phi_1) = -S & n_{p1}\partial_n\phi_1|_{\partial\Omega_{em}} = 0 \\ \nabla\cdot(n_{p2}\nabla\phi_2) = 0 & \qquad\qquad n_{p2}\partial_n\phi_2|_\Gamma = \lambda_n \\ (\lambda_n - n_{p1}\partial_n\phi_1)|_\Gamma = 0 & \end{array}\right. \tag{5.37}$$

S désigne les termes sources dans la zone interne, c'est-à-dire dans notre cas $\alpha n_e E_1$ (E_1 est la norme du champ électrique dans le domaine 1). On notera donc que l'on a besoin, pour le raccord des deux domaines de deux multiplicateurs de Lagrange (définit sur l'interface Γ) : l'un associé au potentiel et noté λ_ϕ, l'autre associé aux charges unipolaires (positives) et noté λ_n. Pour les ions positifs, c'est la continuité du flux d'ions à l'interface Γ qui est imposée. Comme le problème est hyperbolique, il ne nécessite qu'une seule condition au limite sur chaque sous-domaine. Cette condition est imposée sur la frontière où le flux d'ions est "entrant" c'est-à-dire

dirigé vers l'intérieur du domaine. Pour le domaine Ω_1, le flux entrant sur $\partial\Omega_{em}$ est nul : on fait l'hypothèse qu'aucun ion n'est émis par la surface de l'émetteur. Pour le domaine Ω_2 le flux entrant arrive par Γ et sa valeur doit correspondre à celle du flux sortant de Ω_1.

Pour les électrons nous optons pour une approche simplifiée. Il est nécessaire de connaître la densité électronique dans la zone interne afin de pouvoir déterminer la quantité d'ions générés par unité de temps et de volume S. Si nous avons fait le choix de ne pas modéliser les électrons dans la zone externe, il est primordial que la décharge couronne soit malgré tout alimentée par un flux d'électrons extérieur. Dans le chapitre précédent nous avons modélisé ce flux extérieur par un terme de photo-ionisation. Ce flux d'électrons extérieur peut dépendre légèrement de l'angle θ, mais comme nous l'avons montré dans la section sur la zone externe, cette dépendance est asymptotiquement négligeable. Nous contenterons donc d'imposer un flux d'électrons constant, dont la valeur est estimée au moyen du raccord asymptotique axi-symétrique :

$$\nabla \cdot (n_{e1}\nabla\phi_1) = \alpha n_{e1} E \quad n_{e1}\partial_n\phi_1|_\Gamma = \pi_{e\infty}/r_\infty \quad = \gamma/r_\infty \tag{5.38}$$

5.3.2 Formulation faible

La formulation faible associée au système d' équations constitutives couplées fait intervenir les fonctionnelles $\mathcal{F}_1$ (5.2.3) et $\mathcal{F}_2$ (5.2.2) ainsi que de nouveaux termes associés aux contraintes sur les bords et aux multiplicateurs de Lagrange. On note μ_ϕ et μ_n les fonctions tests définies sur $\partial\Omega$ et $\mathcal{R}$ l'espace fonctionnel associé.

$$\mathcal{F}_1\left(\begin{pmatrix}\phi_1\\ n_{p1}\\ n_{e1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\\ w_1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-\int_\Gamma \lambda_\phi u_1\\ 0\\ \int_\Gamma \gamma/r_\infty w_1\end{pmatrix}=0 \qquad \forall(u_1,v_1,w_1)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{V}_1\times\mathcal{W}_1 \tag{5.39}$$

$$\mathcal{F}_2\left(\begin{pmatrix}\phi_2\\ n_{p2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}\int_\Gamma \lambda_\phi u_2\\ \int_\Gamma \lambda_{n_p} v_2\end{pmatrix}=0 \qquad \forall(u_2,v_2)\in\mathcal{U}_2\times\mathcal{V}_2 \tag{5.40}$$

$$\int_\Gamma \mu_\phi(\phi_2-\phi_1)=0 \qquad \forall\mu_\phi\in\mathcal{R} \tag{5.41}$$

$$\int_\Gamma \mu_n(\lambda_n - n_{p1}\partial_n\phi_1)=0 \qquad \forall\mu_n\in\mathcal{R} \tag{5.42}$$

Les équations étant non linéaires, la différentielle doit être calculée pour obtenir un système linéarisé à chaque itération k de l'algorithme de Newton. Par soucis de lisibilité on utilise les notations abrégées

$$\mathcal{F}((x_1,x_2..,x_n),(u,v...z)) = \mathcal{F}(x_1,x_2..,x_n)$$
$$\delta\mathcal{F}((x_1,x_2,\cdots,x_n),(u,v,\cdots z),(\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_n)) = \delta\mathcal{F}(\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_n)$$

Ce qui donne finalement

$$\delta\mathcal{F}_1\begin{pmatrix}\delta\phi_1\\ \delta n_{p1}\\ \delta n_{e1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\int_\Gamma \delta\lambda_\phi u_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=-\mathcal{F}_1\begin{pmatrix}\phi_1\\ n_{p1}\\ n_{e1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\int_\Gamma \lambda_\phi u_1\\ 0\\ \int_\Gamma \gamma/r_\infty w_1\end{pmatrix} \tag{5.43}$$

$$\delta\mathcal{F}_2\begin{pmatrix}\delta\phi_2\\ \delta n_{p2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\int_\Gamma \delta\lambda_\phi u_2\\ \int_\Gamma \delta\lambda_{n_p} v_2\end{pmatrix}=-\mathcal{F}_2\begin{pmatrix}\phi_2\\ n_{p2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\int_\Gamma \lambda_\phi u_2\\ \int_\Gamma \lambda_{n_p} v_2\end{pmatrix} \tag{5.44}$$

$$\int_\Gamma \mu_\phi(\delta\phi_2-\delta\phi_1)=-\int_\Gamma \mu_\phi(\phi_2-\phi_1) \tag{5.45}$$

$$\int_\Gamma \mu_n(\delta\lambda_n-\delta n_{p1}\partial_n\phi_1-n_{p1}\partial_n\delta\phi_1)=-\int_\Gamma \mu_{n_p}(\lambda_n-n_{p1}\partial_n\phi_1) \tag{5.46}$$

5.3.3 Implémentation : construction de la matrice

On définit de manière générique l'opérateur bilinéaire suivant :

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & \mathcal{L}\times\mathcal{K} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (l,k) & \mapsto & \int_\Gamma lk \end{array} \tag{5.47}$$

Les espaces $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ pouvant prendre les valeurs $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{V}_2$ ou $\mathcal{R}$, on peut définir autant d'opérateurs bilinéaires qu'il y a de combinaisons entre les différents espaces. On pourra utiliser la notation compacte $\langle\cdot,k\rangle$ pour désigner la forme linéaire

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,k\rangle & : & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & l & \mapsto & \int_\Gamma lk \end{array} \tag{5.48}$$

de même on pourra noter de manière simplifiée

$$\begin{array}{rccc} \langle f(\cdot),k\rangle & : & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & l & \mapsto & \int_\Gamma f(l)k \end{array} \tag{5.49}$$

Ces opérateurs sont nécessaires pour aboutir à une formulation faible des contraintes de raccord. Avec ces notations, la formulation faible linéarisée précédente s'écrit maintenant de la manière suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} & \delta\mathcal{F}_1(\cdot,\cdot,\cdot) & & 0 & 0 & -\langle\cdot,u_1\rangle & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \langle\cdot,u_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\delta\mathcal{F}_2(\cdot,\cdot)} & 0 & \langle\cdot,v_2\rangle \\ \hline -\langle\cdot,\mu_\phi\rangle & 0 & 0 & \langle\cdot,\mu_\phi\rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle n_{p1}\partial_n(\cdot),\mu_n\rangle & \langle(\cdot)\partial_n\phi_1,\mu_n\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle\cdot,\mu_n\rangle \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} \delta\phi_1 \\ \delta n_{p1} \\ \delta n_{e1} \\ \hline \delta\phi_2 \\ \delta n_{p2} \\ \hline \delta\lambda_\phi \\ \delta\lambda_n \end{array}\right) = \mathbf{B} \tag{5.50}$$

avec, le membre de droite $\mathbf{B}$ donné par

$$\mathbf{B} = -\left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_1 \\ \hline \mathcal{F}_2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \langle\phi_1,u_1\rangle \\ 0 \\ \langle\gamma/r_\infty,w_1\rangle \\ \hline \langle\phi_2,u_2\rangle \\ \langle\lambda_n,v_2\rangle \\ \hline \langle\phi_2,\mu_\phi\rangle - \langle\phi_1,\mu_\phi\rangle \\ \langle n_1\partial_n\phi_1,\mu_n\rangle + \langle\lambda_n,\mu_n\rangle \end{array}\right) \tag{5.51}$$

Cette formulation est légèrement différente des cas classiques de décomposition de domaine pour des équations différentielles elliptiques. Dans le cas classique des problèmes elliptiques, les contraintes agissent sur les deux domaines simultanément : l'information se propage indifféremment du sous-domaine Ω_2 vers le sous-domaine Ω_1 ou inversement du sous-domaine Ω_1 vers le sous-domaine Ω_2. En effet lorsque l'on résout l'équation de Poisson sur un sous-domaine donné il faut une condition limite sur chaque bord : la condition à l'interface Γ est alors donnée par les multiplicateurs de Lagrange. Pour les problèmes hyperboliques du type $\nabla\cdot\mathbf{f}(n_p) = 0$ où $\mathbf{f}(n_p) = -n_p\nabla\phi$ désigne le flux d'ions, il faut distinguer les frontières dites "entrantes", telles que $\mathbf{f}(n_p).\mathbf{n} < 0$, des frontières sortantes $\mathbf{f}(n_p).\mathbf{n} > 0$ où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante au sous-domaine considéré. Pour un problème hyperbolique isolé, seule une condition limite sur le bord entrant est nécessaire, autrement le problème est mal posé. Dans le cadre du raccord asymptotique, la frontière Γ est vue comme un bord sortant pour le sous-domaine Ω_1, et comme un bord entrant pour le sous-domaine Ω_2, d'où la formulation choisie, qui n'impose aucune contrainte sur le bord Γ pour le domaine Ω_1.

5.4 Résultats

Le code Freefem++ servant à implémenter numériquement la formulation précédente est fourni dans l'annexe A.3. Le code fourni implémente exactement la formulation faible précédente et fournit donc des résultats adimensionnels. Le choix des variables adimensionnelles, se justifie pour la validation. En effet, les résultats adimensionnels peuvent facilement être comparés aux solutions analytiques précédentes déjà existantes.

5.4.1 Convergence numérique

La convergence numérique de la méthode peut être envisagée de différents points de vues : du point de vue de la convergence de la méthode de Newton, du point de vue de la convergence sur chaque sous-domaine vers la solution locale ou encore du point de vue de la convergence de la solution globale.

Du point de vue de la convergence de l'algorithme de Newton, la convergence des résidus est assez rapide, figure 5.13, comme pour les cas précédents à un seul domaine. L'algorithme est assez robuste aux conditions initiales pour les densités de charges, du moment que ces dernières respectent les conditions limites. En revanche la convergence peut être compromise si le potentiel dans la zone interne est mal initialisé. En effet le coefficient d'ionisation est très sensible au champ électrique et une mauvaise estimation de ce dernier dans la condition initiale peut compromettre la convergence numérique. En réalité le problème peut facilement être contourné en initialisant le potentiel avec la solution analytique $\phi_1 = 1 - A\log(r/a)$ dans la zone interne. De cette manière les résidus convergent en moins de 6 itérations comme le montre la figure 5.13. Comme pour les cas précédents, les résidus convergent vers une valeur liée à la précision numérique de la machine et au nombre de degrés de liberté d'environ $10^{-16}\sqrt{N_{dof}}$. On note cependant un léger "rebond" lors de la première itération qui amène une augmentation des résidus. Une fois ce saut initial franchi, on retrouve une convergence quadratique classique des résidus. Pour ce cas test le

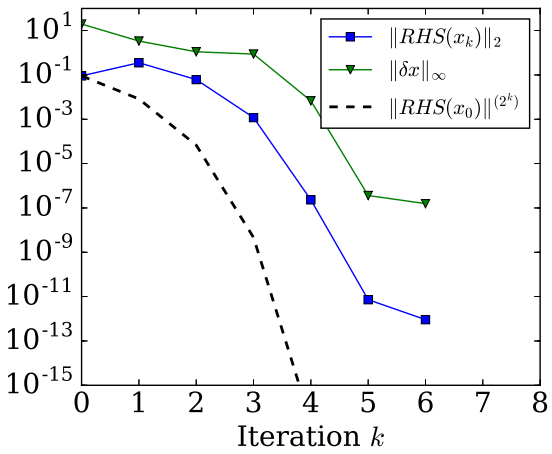
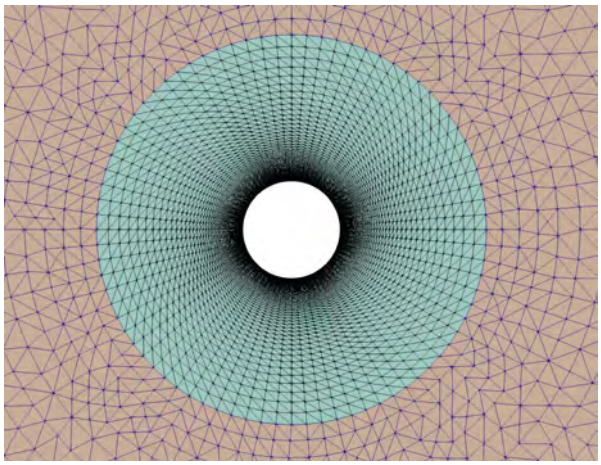


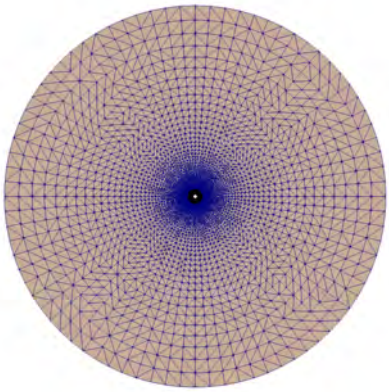
Figure 5.13 – *Convergence des résidus* $\|\mathbf{B}\|_2$ *de la méthode de Newton pour le problème raccordé. RHS signifie Right Hand Side.*

rayon du collecteur était $L^* = 0.01$ m. Les paramètres adimensionnels suivants ont été utilisés : $a = 0.01$, $L = 1$, $r_0 = r_\infty = 4a$, $\varepsilon = 0.035$, $\gamma = 10^{-4}$, $A = 0.18$ et $J = 0.175$. L'algorithme a été initialisé avec un potentiel harmonique dans la zone interne, en accord avec les remarques précédentes concernant la sensibilité de l'algorithme dans la zone interne vis-à-vis de la condition initiale pour ϕ_1.

Différents types de maillages ont été testés, structurés ou non structurés. Le maillage de la zone interne est de loin le plus problématique car il doit être particulièrement raffiné autour de l'émetteur, à cause des forts gradients de concentrations. Nous avons donc opté pour un maillage structuré dont l'espacement entre les mailles peut être contrôlé à loisir. Le maillage de la zone externe est quant à lui beaucoup moins exigeant. Il doit cependant être conforme au maillage interne sur le bord Γ comme le montrent les figures 5.14 (a) et (b).



(a)



(b)

Figure 5.14 – *(a) Maillage structuré de la zone interne et interface conforme avec le maillage externe. (b) Maillage de la zone externe.*

Les solutions obtenues sont très encourageantes. D'une part les contraintes de continuité sont bien respectées pour les différents champs, que ce soit la densité d'ions, le potentiel ou le champ électrique, comme le montrent les figures 5.15 (a) et (b). Et d'autre part, les solutions obtenues dans chaque sous-domaine sont très proches des solutions analytiques obtenues par raccord asymptotique, en dépit du fait que le raccord numérique est réalisé par continuité au point $r = r_0 = r_\infty$. Les solutions analytiques sont celles obtenues dans le chapitre précédent, en prenant un coefficient d'attachement égal à zéro. Dans la zone interne

$$E_1 = A/r \tag{5.52}$$

$$\phi_1 = 1 - A\ln(r/a) \tag{5.53}$$

$$n_{p1} = \frac{\gamma}{A}\left(\exp\left[A\varepsilon\beta\exp(-a/(\varepsilon A))\right] - \exp\left[A\varepsilon\beta\exp(-r/(\varepsilon A))\right]\right) \tag{5.54}$$

$$n_{e1} = \frac{\gamma}{A}\exp\left[A\varepsilon\beta\exp(-r/(\varepsilon A))\right] \tag{5.55}$$

Et dans la zone externe

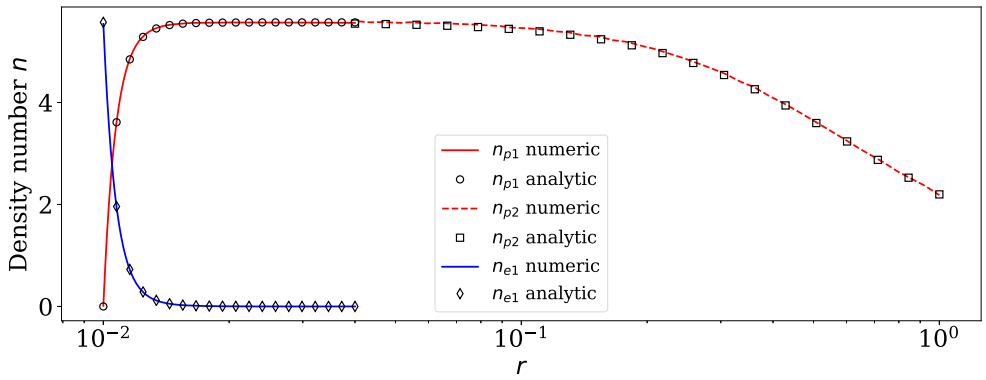
$$E_2 = \sqrt{J + A^2/r^2} \tag{5.56}$$

$$\phi_2 = \sqrt{J + A^2} - \sqrt{Jr^2 + A^2} + A\ln\left(\frac{\sqrt{Jr^2 + A^2} + A}{r(\sqrt{J + A^2} + A)}\right) \tag{5.57}$$

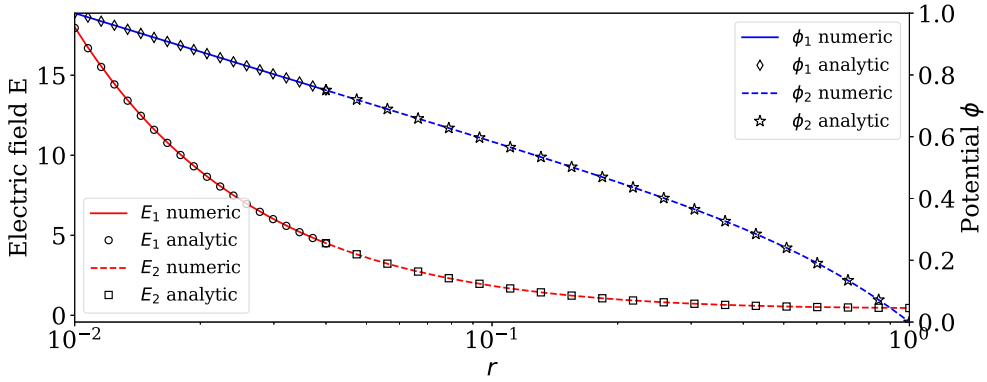
$$n_{p2} = \frac{1}{rE_2(r)} \tag{5.58}$$

De plus les solutions numériques raccordées ont un aspect aussi "propre" que les solutions calculées sur chaque sous-domaine en imposant des conditions limites effectives. Ce dernier point n'était pas évident *a priori* car la discrétisation spatiale des multiplicateurs de Lagrange est

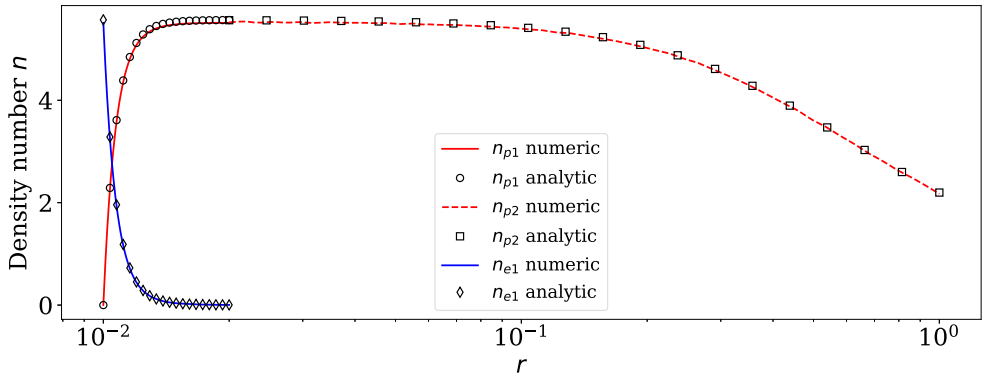
d'ordre peu élevé. Dans notre cas, l'espace des fonctions tests pour les multiplicateurs de Lagrange était les polynômes d'ordre 1 (P1) tandis que les différents champs sont discrétisés sur des espaces allant du $P1$ au $P3$. Le détail des discrétisations utilisées est donné en annexe A.3.



(a)



(b)



(c)

Figure 5.15 – *(a) Profils des densités d'ions et d'électrons en fonction de la distance à l'émetteur r. (b) Profils de champ électrique et de potentiel en fonction de r. (c) Profils de densités pour $r_0 = 2a$.*

5.4.2 Perspectives

Validation poussée

A l'heure de la rédaction de ces lignes, il est évident que le code proposé n'est pas encore pleinement opérationnel. Quelques étapes de validation restent encore à franchir, en déterminant la sensibilité de la convergence numérique pour différentes discrétisations. Le choix de la position exacte pour r_0 reste encore à déterminer, même si les résultats préliminaires semblent peu sensibles vis-à-vis de ce paramètre. La sensibilité du code aux différents paramètres physiques pourrait être davantage explorée. Plus important encore, pour l'instant le code est adimensionnel ce qui explique la présence du paramètre adimensionnel J qui doit être injecté dans l'équation de Poisson, pour garantir la condition d'adimensionalisation de flux unitaire pour les ions $\pi_{p2} = 1$. Ce paramètre, pour l'instant, est calculé à partir du raccord analytique axisymétrique. A terme il pourrait être bien avantageux de réécrire une version du code avec des variables dimensionnelles, ce qui éviterait ce genre d'artifice. Pour l'instant nous avons volontairement négligé l'attachement électronique afin de disposer de solutions analytiques pour valider les résultats numériques. Il n'y a cependant aucune difficulté à ajouter d'autres réactions, voire d'autres espèces dans la formulation faible proposée. Pour certaines applications différentes du vent ionique où l'on s'intéresse aux concentrations des différentes espèces il peut être avantageux de n'avoir à calculer les concentrations que dans la zone interne et non pas sur tout le domaine.

Les points soulevés dans le paragraphe précédent n'ont pas été mis en pratique par simple manque de temps, mais ils ne présentent aucune difficulté.

Le dernier point qui doit encore faire l'objet d'une attention particulière est le raccord pour les électrons. Pour l'instant nous nous sommes contentés d'une condition fixée sur le flux d'électrons. Dans les sections précédentes une condition plus réaliste a été proposée :

$$\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{n}|_\Gamma \mathrm{d}\Gamma \approx \gamma \int_{\Omega_1} \alpha \|\mathbf{j}_{e1}\|. \tag{5.59}$$

Cette condition, une fois linéarisée dans le cas d'un algorithme de Newton, pourrait être intégrée comme une condition supplémentaire dans le système d'équations.

Un cas non axisymmétrique

A titre de perspective, nous montrons l'intérêt de la méthode proposée pour connaître la répartition d'ions dans un cas non axisymétrique, similaire à celui proposé par Wettervik [101]. Le collecteur est légèrement excentré vis-à-vis de l'émetteur. En gardant les mêmes paramètres que dans le cas axisymétrique, les résultats présentés sur la figure 5.16 montrent à quel point la loi d'injection des ions peut varier autour de l'émetteur. L'émetteur n'est pourtant excentré que de 0.2 alors que le rayon du collecteur est de une unité adimensionnelle.

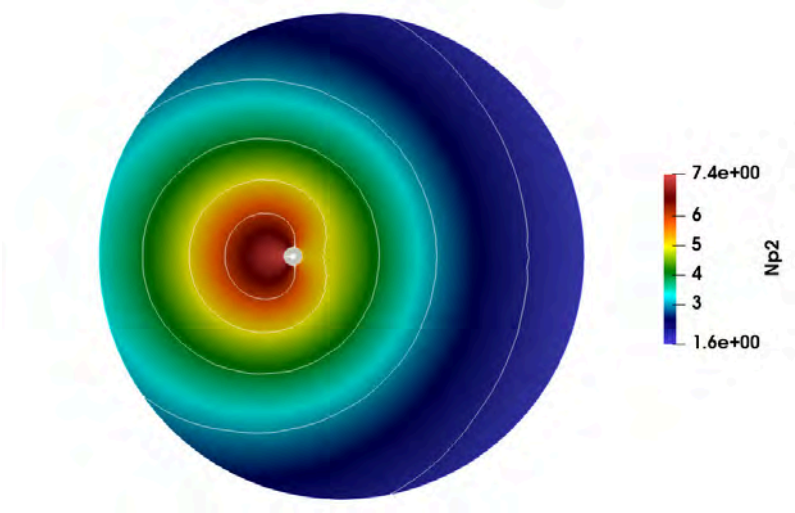


Figure 5.16 – *Contour de densité d'ions n_p dans la zone externe pour un cas non axisymmétrique. Le collecteur est centré en $x = 0.2$. La zone interne est en gris au centre.*

Ce simple cas illustre et confirme que cette méthode s'applique à des configurations géométriques complexes. L'intérêt de la méthode réside dans le fait que des discrétisations et des maillages différents peuvent être utilisés dans les zones internes et externes. Typiquement un maillage très régulier peut être employé dans la zone interne tandis qu'un maillage non structuré peut être généré automatiquement dans la zone externe et s'adapter facilement à des géométries complexes.

5.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons présenté de manière progressive la construction d'une formulation théorique et son implémentation numérique pour la modélisation de la décharge couronne avec décomposition de domaine. Cette décomposition de domaine permet de tirer partie des simplifications asymptotiques du chapitre précédent dans chaque zone de la décharge. Dans un premier temps et sans perte de généralité, seule l'ionisation directe α par impact électronique est considérée. De cette façon nous disposons de solutions analytiques pour valider les résultats numériques.

Le raccord entre les zones est prescrit différemment pour chaque champ : continuité du potentiel et du flux de champ électrique à l'interface pour l'équation de Poisson, et continuité du flux d'ions positifs à l'interface. Le cas particulier des équations de conservation hyperboliques est traité avec soin. Une condition de raccord adaptée est décrite.

Ce démonstrateur numérique ouvre la porte à la modélisation couplée de la décharge couronne. Sur la base de la méthode proposée, le modèle physique de la zone interne peut facilement être complété avec de nombreuses réactions supplémentaires ou d'autres espèces, et venir alimenter un modèle propre à la zone externe, sans pour autant avoir à résoudre toutes les équations sur l'ensemble du domaine de calcul.

Par manque de temps, la validation du modèle et son application n'a pas pu être aussi poussée plus loin. Cependant le modèle numérique implémenté en éléments finis a permis d'obtenir des premiers résultats très prometteurs : la solution numérique globale converge vers la solution analytique globale obtenue par raccord asymptotique. Un premier cas non axisymétrique montre que cette méthode peut facilement être étendue à des géométries plus complexes que le cas académique étudié pour la validation du modèle.

Conclusion générale

Les travaux menés durant cette thèse ont porté sur la compréhension fine du phénomène de vent ionique et son éventuelle application à la propulsion en atmosphère. La revue bibliographique ainsi que le contexte scientifique montrent que le phénomène de vent ionique (électrohydrodynamique EHD ou électroaérodynamique EAD) suscite un réel intérêt dans plusieurs domaines allant du contrôle d'écoulement et la propulsion au refroidissement de composants électroniques en passant par le séchage de denrées alimentaires. Les applications envisagées sont nombreuses et il y a fort à parier que certaines technologies utilisant le vent ionique seront utilisées à l'avenir. Le vent ionique étant inextricablement lié au phénomène de décharge électrique, une compréhension fine de ce dernier est nécessaire.

Résultats

Dans un premier temps des mesures expérimentales de la poussée générée par une décharge couronne ont permis de caractériser grossièrement l'influence des paramètres géométriques sur les performances propulsives du système. Sur la base de considérations simples mais réalistes, les performances mesurées expérimentalement ont pu être comparées aux besoins propulsifs d'aéronefs ultra-légers. Aussi surprenant que cela puisse paraître, la poussée rapportée par unité de surface du vent ionique est du même ordre de grandeur que la traînée aérodynamique par unité de surface pour les aéronefs considérés. Le vent ionique pourrait donc être envisagé comme un moyen de propulsion distribué pour aéronefs ultra-légers.

Dans un second temps, le vent ionique a été caractérisé beaucoup plus finement au moyen de mesures PIV. La structure de l'écoulement ainsi que les interactions de sillage dans des cas à plusieurs collecteurs ont été mises à jour. Dans le même temps, une analyse de la zone *drift* a permis de réécrire la poussée totale comme une quantité dépendant uniquement du flux d'ions à la surface des électrodes. Ce résultat est une généralisation du modèles 1D couramment utilisé. L'une des conséquences directe de ce résultat est que, pour de petites électrodes, la poussée EHD ne dépend *que* du rapport entre le flux de particules chargées I (le courant électrique dans le cas d'un flux de charges unipolaires) et la mobilité des particules μ, multiplié par une distance caractéristique d séparant le plan émetteur du plan collecteur. Ainsi donc, à courant fixé, et pour une distance plan émetteur à plan collecteur donnée, quelle que soit la configuration des électrodes la poussée totale restera inchangée. Ce résultat néglige bien sûr les pertes aérodynamiques dont nous montrons par ailleurs qu'elles peuvent représenter une perte de poussée et de rendement pouvant atteindre 30%. Par ailleurs, nous avons constaté expérimentalement que la présence de fumée d'encens entre les électrodes réduit significativement le courant électrique mais que la poussée reste inchangée.

Le rendement est connu pour être très faible pour les systèmes EHD dans l'air : de l'ordre de 1%. Ce constat expérimental est appuyé par la théorie et tient au fait que le rapport $u/\mu E$ est très petit dans l'air. Pour comprendre comment ce rapport évolue en fonction du gaz dans lequel la décharge a lieu, des conditions thermodynamiques et de la géométrie, un modèle ana-

lytique de la décharge couronne pour un cas 1D axisymétrique a été analysé. Sur la base d'un développement asymptotique raccordé, des expressions analytiques nouvelles pour le courant et la tension d'allumage ont été obtenues. Ces expressions permettent d'obtenir explicitement l'influence de chaque paramètre physique et l'importance relative de chacun d'entre eux. Par ailleurs, en supposant tous les paramètres physiques connus, le modèle asymptotique permet de prédire la caractéristique courant-tension de manière bien plus précise que la classique approximation de Townsend $I = CV(V - V_0)$, mais il redonne aussi cette expression (et ses coefficient C et V_0 en fonction des paramètres physiques) comme une limite de la théorie à faible intensité.

Enfin, en partant du constat que la simulation numérique directe de la décharge couronne est un problème compliqué aussi bien du point de vue de la physique que du point de vue numérique, nous avons élaboré une approche numérique visant à trouver une solution stationnaire. En partant du développement asymptotique précédent, une approche multi-échelles et multi-domaines devrait permettre de retrouver le principal paramètre d'intérêt pour le vent ionique : le flux d'ions émis. D'un point de vue algorithmique, la solution est obtenue en moins de 10 itérations par une méthode de Newton. La discrétisation par éléments finis se prête particulièrement bien à l'approche multi-domaines et au "raccord" entre les domaines. Les solutions numériques ont été validées dans le cas axisymétrique à partir des résultats analytiques obtenus précédemment. L'approche présentée dans ce manuscrit est encore incomplète, car il lui manque une dernière condition de raccord entre les deux domaines : la condition de raccord pour les électrons. Cependant les premiers résultats obtenus sont très encourageants : ils permettent de retrouver les solutions analytiques pour un flux d'électrons donné. Cette méthode offre de nouvelles perspectives de modélisation relativement réaliste à moindre coût, puisque la convergence de l'algorythme a lieu généralement en moins de dix itérations, et prend moins de cinq minutes sur un ordinateur de bureau.

Perspectives

Différentes voies peuvent être envisagées pour donner suite aux travaux menés au cours de cette thèse.

- Étant donné les résultats obtenus, il est parfaitement envisageable de fabriquer un démonstrateur à échelle réduite d'aéronef propulsé par vent ionique. La propulsion par vent ionique étant quasi-inexplorée, elle remet en cause la manière classique de concevoir un avion. Du point de vue aérodynamique tout d'abord car elle permet une propulsion distribuée sur l'ensemble de la voilure. La propulsion distribuée est actuellement en plein essor : le système propulsif devient alors aussi un moyen de contrôler l'attitude de l'aéronef et de modifier les performances aérodynamiques localement. Par ailleurs, du point de vue énergétique la propulsion ionique s'interface avec une autre révolution en cours pour la propulsion des aéronefs : la propulsion électrique. On peut imaginer générer des hautes tensions à masse et encombrement réduits. L'utilisation de cellules photovoltaïques mises en série est une voie à explorer. Ainsi, même si le rendement de la propulsion par vent ionique est certes faible (à basse vitesse), elle peut trouver sa place au sein de l'architecture d'un aéronefs pour les avantages qu'elle offre par ailleurs, ou comme une composante de propulsion supplémentaire intéressante.
- Du point de vue plus fondamental, la modélisation du vent ionique reste encore insatisfaisante car elle repose soit sur des modèles extrêmement simplifiés de la décharge couronne, soit sur des simulations directes de la décharge extrêmement coûteuses en temps de calcul. Des efforts doivent être entrepris pour développer des modèles intermédiaires suffisamment réalistes et moins coûteux en temps de calcul. Une première brique a été proposée dans le dernier chapitre de cette thèse en combinant une approche asymptotique avec

une stratégie de décomposition de domaine. Les efforts dans cette direction doivent se poursuivre pour comparer les prédictions théoriques avec des mesures expérimentales afin de valider la modélisation.

- Enfin du point de vue de la physique du vent ionique, il n'existe, à notre connaissance actuellement aucun travail cherchant à modifier directement les porteurs de charge. Dans la plupart des expériences, seule la géométrie des électrodes est testée. Or les travaux présentés indiquent que de la simple fumée d'encens peut suffire à modifier l'efficacité transfert de quantité de mouvement : quid des autres aérosols ? Par ailleurs l'expérience simple avec fil tournant a confirmé ce que d'autres expériences, avaient montré, en particulier celle de Chapman [94] à savoir qu'un écoulement peut modifier le flux des charges émises de façon importante. D'autres stratégies d'amélioration de l'injection des charges pourraient donc être envisagées tant du point de vue de la géométrie des émetteurs de charges que de leur mouvement.

Appendices

Annexe A

Code Freefem++

A.1 Implémentation sous Freefem++ : Zone externe.

La formulation faible de la section 5.2.2 est implémentée directement dans le logiciel Freefem++ v3.55 [102], qui se charge ensuite automatiquement de l'assemblage de la matrice et de la résolution du système linéaire. Ici le solveur fait appel à la routine UMFPACK pour résoudre le système linéaire à chaque itération de Newton.

```
/*---------------------------------------
    Monodomain approach: OUTER
 ---------------------------------------*/
real r0 = 0.01, L = 1., J=0.5;
macro grad(u) [dx(u),dy(u)] // EOF
func r = sqrt(x^2+y^2);
// Mesh and element definition
border emitter(t=0,2*pi){ x=r0*cos(t); y=r0*sin(t); label=1;}
border collector(t=0,2*pi){ x=L*cos(t); y=L*sin(t); label=2;}
mesh Th = buildmesh(emitter(-100)+collector(100),nbvx=1e6);
fespace Xh(Th,[P2,P1]); Xh [phi,np];
// Problem definition
varf vDF1([dp,dnp],[u,v])=
  int2d(Th)(-(grad(dp)'*grad(u))) +int2d(Th)(J*dnp*u) + on(1,2,dp=0.)
  -int2d(Th)(dnp*grad(phi)'*grad(v) + np*grad(dp)'*grad(v) )
  + int1d(Th,1)(1.*grad(dp)'*[N.x,N.y]*v) // Dirichlet => dnp=0
  + int1d(Th,2)(dnp*grad(phi)'*[N.x,N.y]*v+np*grad(dp)'*[N.x,N.y]*v);

varf vF1([dp,dnp],[u,v])=
  int2d(Th)(-(grad(phi)'*grad(u))) +int2d(Th)(J*np*u) + on(1,2,dp=0.)
  -int2d(Th)(np*grad(phi)'*grad(v))
  + int1d(Th,1)(1.*grad(phi)'*[N.x,N.y]*v)  // Dirichlet condition np=1
  + int1d(Th,2)(np*grad(phi)'*[N.x,N.y]*v);
// Build Matrix
matrix DF;
real[int] F(Xh.ndof), du(Xh.ndof);
macro Buildmat(){
  DF= vDF1(Xh,Xh); set(DF,solver=UMFPACK);
  F = vF1(0,Xh); F = -F;} // END macro
// Initial guess
[phi, np] = [(L-r)/(L-r0), 1.];
// Solve
for (int k=0; k<5; k++){
  Buildmat // Build DF and F
  du = DF^-1*F; // solve
  phi[] += du; // update solution for phi and np
```

```
}
plot(np,fill=true, value=true,cmm="Np");
```

L'algorithme est assez robuste vis à vis de la solution initiale, du moment que champ de potentiel initial est dérivable et respecte les conditions limites. La densité d'ions initiale doit simplement respecter la condition limite $n_p(r_e) = 1$. Ici le potentiel initial est linéaire et la densité de charge est constante. Dans l'extrait de code précédent, c'est la formulation faible de base qui a été implémentée. De manière tout à fait analogue, une formulation "bis" peut être utilisée. Dans cette seconde formulation la divergence du flux d'ion est développée en deux terme et le terme en $n_p\Delta\phi$ est changé en $-Jn_p^2$ en utilisant l'équation du potentiel. Cette deuxième formulation s'écrit

$$\mathcal{F}_{1,bis}((\phi,n_p),(u,v)) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega -\nabla\phi\cdot\nabla u + \int_\Omega Jn_p u + \int_{\partial\Omega}\partial_n\phi u = 0 & \forall u\in\mathcal{U}_h \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla n_p\cdot\nabla\phi\, v - \int_\Omega Jn_p^2 v = 0 & \forall v\in\mathcal{V}_h \end{cases} \tag{A.1}$$

et le terme linéarisé

$$\delta\mathcal{F}_{1,bis}((\phi,n_p),(u,v))\cdot(\delta\phi,\delta n_p) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega -\nabla(\delta\phi)\cdot\nabla u + \int_\Omega J\delta n_p u + \int_{\partial\Omega}\partial_n(\delta\phi)u \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla(\delta n_p)\cdot\nabla\phi\, v + \nabla n_p\cdot\nabla(\delta\phi)\, v) - \int_\Omega 2Jn_p\delta n_p\, v \end{cases}$$

Le code correspondant à la définition de ce problème consiste simplement à changer la formulation faible.

```
varf vDF1bis([dp,dnp],[u,v])=   // DF
  int2d(Th)(-(grad(dp)'*grad(u))) +int2d(Th)(J*dnp*u) + on(1,dp=0.) + on(2,dp
      =0.)
  -int2d(Th)(grad(dnp)'*grad(phi)*v +grad(np)'*grad(dp)*v - J*2*dnp*np*v )
  + on(1,dnp=0.);

varf vF1bis([dp,dnp],[u,v])=  // F
  int2d(Th)(-(grad(phi)'*grad(u))) +int2d(Th)(J*np*u) + on(1,dp=0.) + on(2,dp
      =0.)
  -int2d(Th)(grad(np)'*grad(phi)*v - J*np*np*v) + on(1,dnp=0.);
```

Pour vérifier la convergence de l'algorithme de Newton la norme L_2 des résidus, le δx à chaque itération de la méthode de Newton peuvent être récupérés au moyen du code suivant :

```
real delta = du.linfty; // maximum of the increment du.
real residuals = F.l2; // L2 norm of the residuals
```

Et pour finir, l'erreur moyenne entre la solution analytique u_a et la solution numérique u_h est définie comme la norme du vecteur contenant l'erreur à chaque degré de liberté, normalisée par le nombre de degrés de libertés.

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{1}{N_{dof}}\sum_{k=0}^{N_{dof}} |u_{h,k} - u_a(x_k)|^2}. \tag{A.2}$$

Ici N_{dof} est le nombre de degrés de liberté associés au champ u_h. Dans le cas où plusieurs champ coexistent (ϕ_h et $n_{p,h}$ par example), il y a un nombre de degré de liberté associé à chaque champ.

Lorsque les discrétisations sont différentes, par exemple lorsque le potentiel ϕ_h est discrétisé avec des éléments P2 et la densité $n_{p,h}$ avec des éléments P1, le nombre de degré de liberté associé à chaque champ peut varier de manière significative.

Convergence numérique de la formulation "bis" : zone Externe

Sur la figure A.1, la deuxième formulation est utilisée. Cette fois aucune oscillation n'est visible, figure A.1(a). Lorsque l'on passe d'une discrétisation P1 à une discrétisation P2, l'erreur diminue franchement, à la fois pour le champ électrique et pour la densité de chargres, figure A.1(c). La discrétisation $P3$ n'améliore pas significativement la précision, au contraire : elle augmente considérablement le nombre de degrés de liberté même pour des maillages de faible qualité à la surface de l'émetteur (40 éléments au moins).

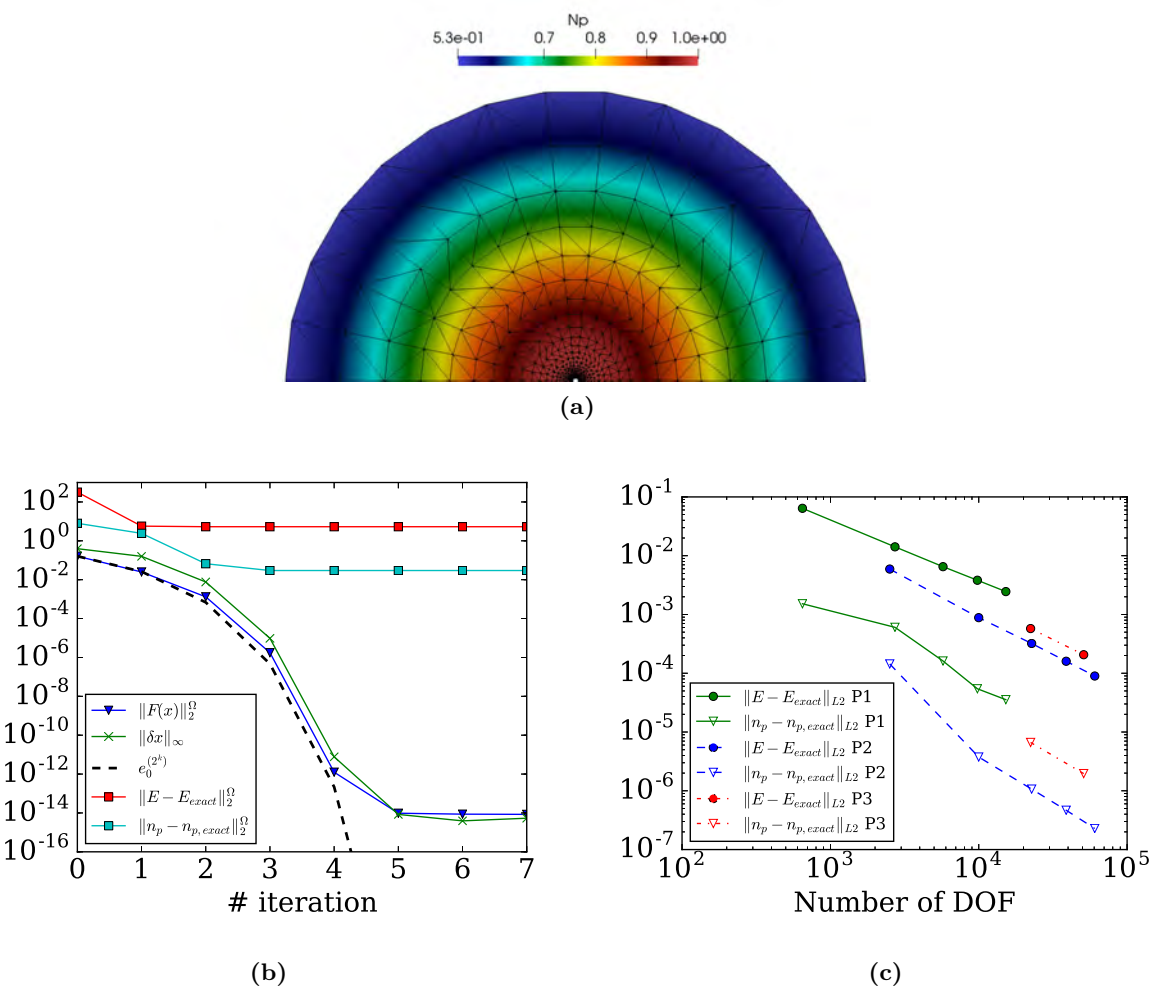
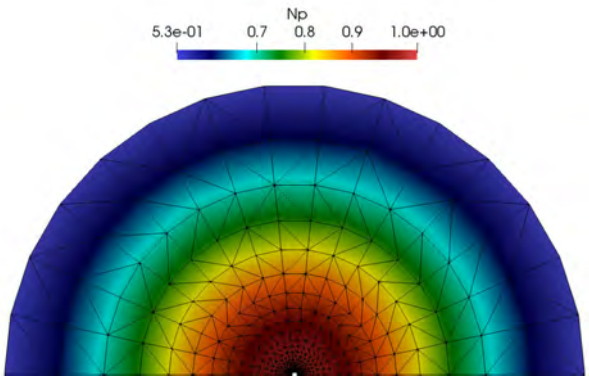


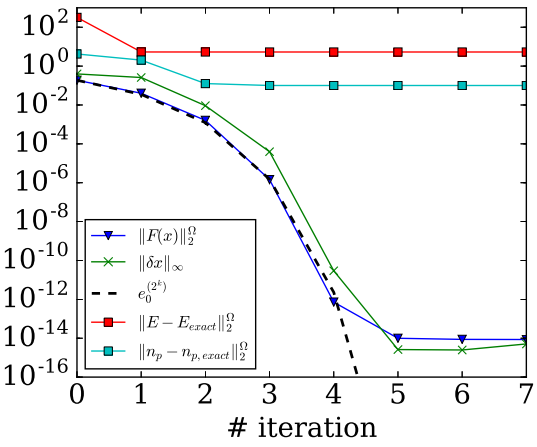
Figure A.1 – *Résultats formulation faible 2, éléments P2. (a) Champ de densité d'ions n_p, (b) Convergence de l'algorithme de Newton et (c) Convergence en maillage.*

Enfin, des discrétisations différentes pour le potentiel et pour la densité de charge ont été testées, figure A.2. Globalement la précision est bonne, et la discrétisation (P2,P1) permet d'atteindre une précision équivalente à la discrétisation (P2,P2) présentée précédemment. La discrétisation (P3,P2) n'apporte pas beaucoup d'amélioration. En effet, elle souffre du même défaut que la discrétisation (P3,P3) précédente : une forte augmentation de nombre de degré de liberté, même pour un maillage grossier. Or le champ électrique est particulièrement sensible

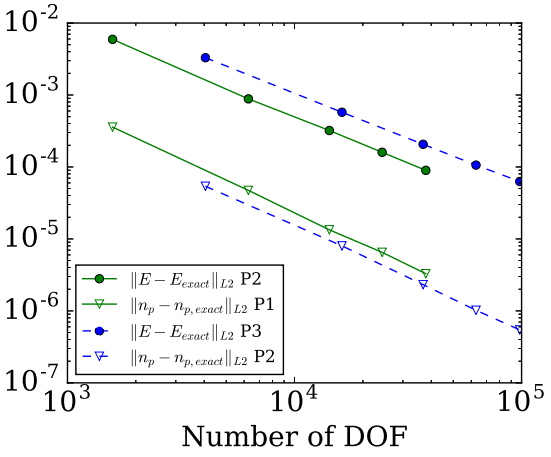
à la précision géométrique du maillage à la surface des électrodes. Par conséquent, même si la discrétisation spatiale P3 est de bonne qualité en terme de nombre de degré de libertés, le maillage reste trop grossier pour capturer de manière satisfaisante la courbure de la surface des électrodes. À nombre équivalent de degrés de libertés, la discrétisation (P2,P1) nécessite un maillage beaucoup plus fin qui assure un bien meilleur rendu de la géométrie des électrodes.



(a)



(b)



(c)

Figure A.2 – *Résultats formulation faible 2 avec des éléments de degré différents. (a) Champ de densité d'ions n_p (P2,P1) (b) Convergence de l'algorithme de Newton (P2,P1) et (c) Convergence en maillage pour (P2,P1) et (P3,P2).*

En conclusion l'algorithme présenté converge de manière quadratique avec une précision finale variable selon la formulation faible et le degré des éléments finis. Au final la formulation "bis" est plus robuste et une discrétisation (P2,P2) ou (P2,P1) pour les champs (ϕ,n_p) fourni de bons résultats.

A.2 Implémentation sous Freefem++ : Zone interne.

Le code Freefem++ commenté pour la formulation faible de la zone interne. Afin de limiter le nombre de noeuds du maillage, la fonction d'adaptation du maillage est utilisée. Le maillage est raffiné en fonction du gradient de densité d'ions. on utilise pour cela une fonction issue des

solutions analytiques de la zone interne

$$f_{mesh} = \exp\left[A\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-r}{A\varepsilon}\right)\right] \tag{A.3}$$

```
/*--------------------------------------
    Monodomain approach: INNER
 --------------------------------------*/
real a = 0.01, r0=4*a, Lstar = 1e-2; //Lstar=dimensional collector radius (
    meters)
real beta = 7.2e5*Lstar, epsilon = 0.02, gamma=1e-4; // Ionisation coefficients
func real ALPHA(real e){ return beta*exp(-1./(epsilon*e)); }
real jeInf = gamma/r0; // Outer electron flux
real A = 0.2;
macro grad(u) [dx(u),dy(u)] // EOF define the gradient operator
func r = sqrt(x^2+y^2);
// Initial mesh
border emitter(t=0,2*pi){ x=a*cos(t); y=a*sin(t); label=1;}
border collector(t=0,2*pi){ x=r0*cos(t); y=r0*sin(t); label=2;}
int Nmesh=100;
mesh Th = buildmesh(emitter(-Nmesh)+collector(Nmesh),nbvx=1e6);
// Mesh adaptation
func fmesh = exp( A*epsilon*beta*exp(-r/(epsilon*A))) + 1-A*log(r/a);
Th = adaptmesh(Th,fmesh,iso=false,err=8e-3,errg=1e-3,ratio=1.2,rescaling=true,
    nbvx=1e5);
// Element
load "Element_P3"
fespace Vh(Th,P3);   Vh alpha, E;
fespace Xh(Th,[P3,P2,P3]); Xh [phi,np,ne];

//--------------Weak formulation-------------------------
varf vDF1([dp,dnp,dne],[u,v,w])=
  int2d(Th)(grad(dp)'*grad(u)) +on(1,2,dp=0)
  +int2d(Th)(-dnp*grad(phi)'*grad(v) - np*grad(dp)'*grad(v) + alpha*dne*E*v +
      alpha*ne*grad(phi)'*grad(dp)/E*v + ne*alpha*grad(phi)'*grad(dp)/(epsilon*E
      ^2)*v)
  +int1d(Th,2)(dnp*grad(phi)'*[N.x,N.y]*v + np*grad(dp)'*[N.x,N.y]*v)
  +int2d(Th)(-dne*grad(phi)'*grad(w) - ne*grad(dp)'*grad(w) - alpha*dne*E*w -
      alpha*ne*grad(phi)'*grad(dp)/E*w - ne*alpha*grad(phi)'*grad(dp)/(epsilon*E
      ^2)*w)
  +int1d(Th,1)(dne*grad(phi)'*[N.x,N.y]*w + ne*grad(dp)'*[N.x,N.y]*w);

varf vF1([dp,dnp,dne],[u,v,w])=
  int2d(Th)(grad(phi)'*grad(u)) +on(1,2,dp=0) //Phi
  +int2d(Th)(-np*grad(phi)'*grad(v) + alpha*ne*E*v ) //Np
  +int1d(Th,2)(np*grad(phi)'*[N.x,N.y]*v)
  +int2d(Th)(-ne*grad(phi)'*grad(w) - alpha*ne*E*w) //Ne
  +int1d(Th,1)(ne*grad(phi)'*[N.x,N.y]*w)
  +int1d(Th,2)(-jeInf*w); // Flux condition for electrons
// Other formulation
varf vDF1bis([dp,dnp,dne],[u,v,w])=
  int2d(Th)(grad(dp)'*grad(u)) +on(1,2,dp=0)
  +int2d(Th)( grad(dnp)'*grad(phi)*v + grad(np)'*grad(dp)*v + alpha*dne*E*v +
      alpha*ne*grad(phi)'*grad(dp)/E*v + ne*alpha*grad(phi)'*grad(dp)/(epsilon*E
      ^2)*v) + on(1,dnp=0)
  +int2d(Th)( grad(dne)'*grad(phi)*w + grad(ne)'*grad(dp)*w - alpha*dne*E*w -
      alpha*ne*grad(phi)'*grad(dp)/E*w - ne*alpha*grad(phi)'*grad(dp)/(epsilon*E
      ^2)*w ) +on(2,dne=0);

varf vF1bis([dp,dnp,dne],[u,v,w])=
```

```
  int2d(Th)(grad(phi)'*grad(u)) +on(1,2,dp=0)
  +int2d(Th)(grad(np)'*grad(phi)*v + alpha*ne*E*v) +on(1,dnp=0)
  +int2d(Th)(grad(ne)'*grad(phi)*w - alpha*ne*E*w) +on(2,dne=0);

// Build Matrix
matrix DF1;
real[int] F1(Xh.ndof), du(Xh.ndof);
macro Buildmat(){
  DF1= vDF1(Xh,Xh);  set(DF1,solver=UMFPACK,strategy=1);
  F1 = vF1(0,Xh);    F1 = -F1;
} // END macro
// Initial guess
[phi, np, ne] = [1.-A*log(r/a), 0., 1.]; // initialize ne with non zero entry
// Solving
for (int k=0; k<10; k++){
  E = sqrt( grad(phi)'*grad(phi) ); // update electric field
  alpha = ALPHA(E); // update alpha
  Buildmat; // update matrix
  du = DF1^-1*F1; // solve one Newton iteration
  phi[] += du; // update solution
  cout<<"Iter "+k<<"  res = "+F1.l2/sqrt(Xh.ndof)<<endl; // print residuals
  if (F1.l2/sqrt(Xh.ndof) < 1e-15){ break;}
}
plot(np,cmm="Np",fill=true,value=true); // plot results
```

A.3 Implémentation sous Freefem++ : équations raccordées.

Dans cette annexe, un code aussi minimaliste que possible est fourni. Globalement la structure du script est la même que ceux des deux autres annexes. Cependant la partie maillage est un petit peu plus longue pour obtenir un maillage interne conforme et suffisement raffiné. Nous utilisons pour cela les outils disponibles dans Freefem++. Tou d'abord un maillage carré de 1x1 est généré. Ensuite, les noeuds du maillage subissent une première transformation pour suivre une répartion géométrique plus dense près du bord 4 (l'émetteur). Ensuite le carré est déformé et déplacé en vue de sa transformation finale. Enfin, chaque point de l'espace est déformé en suivant la transformation du plan complexe suivante

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T} : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & e^z \\ & x+iy & \mapsto & e^x e^{iy} \end{array} \tag{A.4}$$

On obtient ainsi un maillage cylindrique raffiné près du bord intérieur. Ensuite le reste du code est similaire aux deux précédents. Les formulations faibles de chaque domaine sont définies avec la syntaxe propre à FreeFem++, les blocs de matrice associés à chacune d'elle sont créés puis la matrice globale est assemblée. A cela s'ajoute les blocs liés aux contraintes et aux multiplicateurs de Lagrange. Enfin, après initialisation, l'algorythme de Newton converge en quelques itérations. Ce code fonctionne sous Ubuntu 16.04 avec FreeFem++ v3.55 sur un simple ordinateur de bureau.

```
//MATCHING of inner and outer problem.
// Definition of parameters
real a = 0.01, r0=4*a, L=1, Lstar = 1e-2; // Lstar = dimensional collector
    radius (meters)
real beta = 7.2e5*Lstar, epsilon = 0.035, gamma=1e-4; // Ionisation coefficient
func real ALPHA(real e){ return beta*exp(-1./(epsilon*e)); }
real A = 0.18, J=0.175;
```

```
real neInf = gamma/A; // Outer electron concentration
func r = sqrt(x^2+y^2);
macro grad(u) [dx(u),dy(u)] // gradient
macro ngrad(u) [dx(u),dy(u)]'*[N.x,N.y] // gradient to local normal N.

// INNER MESH by conformal transformation
/* Mesh border
          3
      o-------o                              3 /.
      |       |     Conformal mapping         /  .
    4 |       | 2   ------------------> 4 )   . 2
      |       |          z --> exp(z)         \  .
      o-------o                              1 \.
          1
*/
real theta=2*pi;
mesh Th1 = square(50,80,flags=0.); // generate a square
real coef=2;
Th1=movemesh(Th1,[(exp(coef*x)-1)/(exp(coef)-1),y]); // Mesh refinement
real x0 = log(a), x1 = log(r0);
real y0 = 0.5;
Th1=movemesh(Th1,[(x1-x0)*x+x0,(y-y0)*theta]); // Conformal transform
func uui= exp(x)*cos(y);
func vvi= exp(x)*sin(y);
Th1=movemesh(Th1,[uui,vvi]); // Conformal transform
// OUTER MESH
border gamma21(t=0,2*pi){ x=r0*cos(t); y=r0*sin(t); label=4;}
border collector(t=0,2*pi){ x=L*cos(t); y=L*sin(t); label=2;}
mesh Th2=buildmesh(gamma21(-80)+collector(80),fixedborder=true,nbvx=1e5);
// BOUNDARY MESH
mesh Sh = emptymesh(Th2); // mesh on the boundary for lagrange multiplier
// Finite element space
load "Element_P3";
fespace VhOut(Th2,P2); VhOut po,uho;
fespace Xh2(Th2,[P3,P1]); Xh2 [phi2,np2];
fespace VhInn(Th1,P3); VhInn pi,uhi,E1,alpha;
fespace Xh1(Th1,[P3,P2,P3]); Xh1 [phi1,np1,ne1];
fespace XRh(Sh,[P1,P1]); XRh [q,l]; //lagrange mult. MUST be P1
/*-------------------------------------------------
      Initialisation of potential
-------------------------------------------------*/
problem PoissonDirichletOUT(po,uho,solver=LU)=
  -int2d(Th2)(grad(po)'*grad(uho))
  +int1d(Th2,4)(A/r0*uho)
  +on(2,po=0.);

problem PoissonDirichletINN(pi,uhi,solver=LU)=
  -int2d(Th1)(grad(pi)'*grad(uhi))
  +int1d(Th1,2)(-A/r0*uhi)
  +on(4,pi=1.-A*log(r/a));
/*-------------------------------------------------
   Weak formulation of the matched problem.
-------------------------------------------------*/
// INNER
varf vDF1([dp,dnp,dne],[u,v,w]) =
  -int2d(Th1)(grad(dp)'*grad(u)) + on(4,dp=0)
  +int2d(Th1)(-dnp*grad(phi1)'*grad(v) - np1*grad(dp)'*grad(v) + alpha*dne*E1*v
      + alpha*ne1*grad(phi1)'*grad(dp)/E1*v + ne1*alpha*grad(phi1)'*grad(dp)/(
      epsilon*E1^2)*v)
  +int1d(Th1,2)(dnp*grad(phi1)'*[N.x,N.y]*v + np1*grad(dp)'*[N.x,N.y]*v)
  +int2d(Th1)(-dne*grad(phi1)'*grad(w) - ne1*grad(dp)'*grad(w) - alpha*dne*E1*w
```

```
      - alpha*ne1*grad(phi1)'*grad(dp)/E1*w - ne1*alpha*grad(phi1)'*grad(dp)/(
      epsilon*E1^2)*w)
  +int1d(Th1,2)(neInf*ngrad(dp)*w)
  +int1d(Th1,4)(dne*grad(phi1)'*[N.x,N.y]*w + ne1*grad(dp)'*[N.x,N.y]*w);
varf vF1([dp,dnp,dne],[u,v,w]) =
  -int2d(Th1)(grad(phi1)'*grad(u)) + on(4,dp=0)
  +int2d(Th1)(-np1*grad(phi1)'*grad(v) + alpha*ne1*E1*v )
  +int1d(Th1,2)(np1*grad(phi1)'*[N.x,N.y]*v)
  +int2d(Th1)(-ne1*grad(phi1)'*grad(w) - alpha*ne1*E1*w)
  +int1d(Th1,2)(neInf*ngrad(phi1)*w)
  +int1d(Th1,4)(ne1*grad(phi1)'*[N.x,N.y]*w);

// OUTER
varf vDF2([dp,dnp,unused],[u,v,w]) =
  int2d(Th2)(J*dnp*u) - int2d(Th2)(grad(dp)'*grad(u)) + on(2,dp=0)
  +int2d(Th2)(-dnp*grad(phi2)'*grad(v) - np2*grad(dp)'*grad(v) )
  +int1d(Th2,2)(dnp*ngrad(phi2)*v+np2*ngrad(dp)*v );
varf vF2([dp,dnp],[u,v]) =
  int2d(Th2)(J*np2*u) - int2d(Th2)(grad(phi2)'*grad(u)) + on(2,dp=0)
  +int2d(Th2)( -np2*grad(phi2)'*grad(v))
  +int1d(Th2,2)( np2*ngrad(phi2)*v);

// Lagrange multiplier projection in domain 1
varf vDLp1([dq,dl],[u,v]) =  int1d(Sh,4)(-dq*u);
varf vLp1([dq,dl],[u,v]) = int1d(Sh,4)(-q*u);
varf vDL1c([dp,dnp,unused],[mu,mv,mw]) = int1d(Sh,4)(-dp*mu + (dnp*grad(phi1)'*[
    N.x,N.y]+np1*grad(dp)'*[N.x,N.y])*mv);
varf vL1c([dp,dnp,unused],[mu,mv,mw]) = int1d(Sh,4)(-phi1*mu + np1*grad(phi1)'*[
    N.x,N.y]*mv); //WARNING local normal in Sh is the opposite of normal in
    domain 1.

// Lagrange multiplier projection in domain 2
varf vDL2([dq,dl],[u,v]) =  int1d(Sh,4)( dq*u + dl*v);
varf vL2([dq,dl],[u,v]) = int1d(Sh,4)( q*u + l*v);
varf vDL2c([dp,dnp],[mu,mv]) = int1d(Sh,4)( dp*mu );
varf vL2c([dp,dnp],[mu,mv]) = int1d(Sh,4)( phi2*mu + l*mv);
varf penL2([dq,dl],[mu,mv])=int1d(Sh,2)(1e-30*(dq*mu+dl*mv))+ int1d(Sh,4)( dl*mv
    );
/*-------------------------------------------------
   Building the System DF(u)*du = B(u)
-------------------------------------------------*/
matrix DF;
int N1 = Xh1.ndof, N2 = Xh2.ndof, Nl = XRh.ndof;
real[int] B(N1+N2+Nl), du(N1+N2+Nl);
macro BuildMat(){
  matrix DF1 = vDF1(Xh1,Xh1);
  matrix DF2 = vDF2(Xh2,Xh2);
  matrix DLp1 = vDLp1(XRh,Xh1);
  matrix DL1c = vDL1c(Xh1,XRh);
  matrix DL2 = vDL2(XRh,Xh2);
  matrix DL2c = vDL2c(Xh2,XRh);
  matrix PL2 = penL2(XRh,XRh);
  DF =[[DF1 , 0   , DLp1],
       [0   , DF2 , DL2 ],
       [DL1c, DL2c, PL2 ]];
  set(DF,solver=UMFPACK,strategy=1);
  real[int] R1 = vF1(0,Xh1); R1 += vLp1(0,Xh1);
  B(0:N1-1) = -R1;
  real[int] R2 = vF2(0,Xh2); R2 += vL2(0,Xh2);
  B(N1:N1+N2-1) = -R2;
  real[int] La = vL1c(0,XRh); La += vL2c(0,XRh);
```

```
121   B(N1+N2:N1+N2+Nl-1)= -La ;
122 } // End macro
123 /*-------------------------------------------------
124       ALGORYTHM
125 -------------------------------------------------*/
126 PoissonDirichletINN; // solve Poisson in the Inner
127 [phi1,np1,ne1] = [pi, 0., neInf]; // Init INNER
128 PoissonDirichletOUT; // solve Poisson in the Outer
129 [phi2,np2]=[po, 0.]; // Init OUTER
130 [q,l] = [0., 0.]; // Init LAGRANGE multiplier
131 // Newton algorythm.
132 for(int k=0;k<7;k++){
133   E1 = sqrt( grad(phi1)'*grad(phi1) ); // Update E1 and alpha
134   alpha = ALPHA(E1); // update alpha
135   BuildMat // update matrix
136   du=DF^-1*B; // Solve the linear problem with UMFPACK
137   phi1[] += du(0:N1-1); // update inner
138   phi2[] += du(N1:N1+N2-1); // update outer
139   q[] += du(N1+N2:N1+N2+Nl-1); // update lagrange multipliers
140   cout<<"Iter "+k+"\tRes = "+B.l2+"\t|du| = "+du.linfty<<endl;
141   plot(np1,np2,value=true,fill=true,bb=[[0,0],[2*r0,2*r0]]);
142 }
143 // END
```

Annexe B

Compléments multi-domaine

B.1 Effet de la taille finie de la zone interne

Dans une logique asymptotique analogue à celle de Durbin [84] où $r_\infty = +\infty$, nous avons obtenu les conditions de raccords suivantes. Le flux incident d'électrons est donné par la condition de raccord sur les flux d'ions.

$$\pi_{e,\infty} = \left[\exp\left(A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-a}{A\varepsilon}\right]\right) - 1\right]^{-1} \tag{B.1}$$

tandis que le raccord des flux d'électrons donne

$$A = \frac{a}{\varepsilon\mathcal{W}_0}. \tag{B.2}$$

où $\mathcal{W}_0$ est une notation abrégée de $\mathcal{W}_0\left(\frac{a\beta}{\ln(1+\gamma^{-1})}\right)$. En injectant (B.2) dans (B.1) on obtient un flux intégré d'électrons indépendant de ε.

$$\pi_{e,\infty} = \left[\exp\left(\frac{a}{\mathcal{W}_0}\beta\exp\left(\mathcal{W}_0\right)\right) - 1\right]^{-1} \tag{B.3}$$

ce qui peut davantage se simplifier en utilisant la définition de la fonction Lambert W

$$\pi_{e,\infty} = \gamma \tag{B.4}$$

Le résultat n'est pas surprenant puisque les conditions de raccord ont justement été construites de sorte que $\lim_{r\to\infty}\pi_{e,inn} = \lim_{r\to 0}\pi_{e,out}$.

Dans le cas où le domaine est de dimension finie, le flux $\pi_{e,\infty}$ et on gardant la condition d'adimensionalisation $\pi_{p,\infty} = 1$, le flux d'électron sera légèrement différent

$$\pi_{e,\infty} = \left[\exp\left(A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-a}{A\varepsilon}\right] - A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-r_\infty}{A\varepsilon}\right]\right) - 1\right]^{-1}. \tag{B.5}$$

Le champ électrique A doit lui aussi être déterminé par une condition de raccord modifiée $\pi_{e,inn}(r_\infty) = \pi_{e,out}(r_\infty)$ ce qui donne

$$\pi_{e,\infty} = \gamma\pi_{e,\infty}\left[\exp\left(A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-a}{A\varepsilon}\right] - A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-r_\infty}{A\varepsilon}\right]\right) - 1\right]\exp(-\mu r_\infty) \tag{B.6}$$

Si la longueur d'absorption des rayons ionisants $1/\mu$ est suffisamment grande devant r_∞ on obtient $\exp(-\mu r_\infty) = 1$ d'où

$$\ln\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) = A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-a}{A\varepsilon}\right] - A\varepsilon\beta\exp\left[\frac{-r_\infty}{A\varepsilon}\right]. \tag{B.7}$$

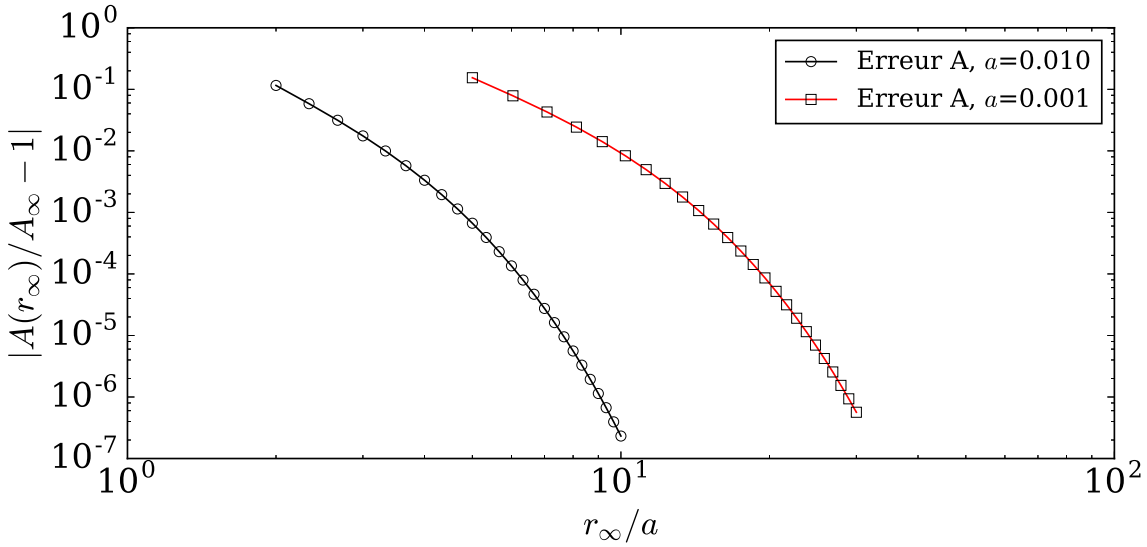


Figure B.1 – *Erreur relative A due à la taille finie du domaine de calcul pour différents émetteurs a.*

En réinjectant (B.7) dans (B.5) on trouve $\pi_{e,\infty} = \gamma$, qui n'est pas affecté par r_∞.

Cette dernière expression ne peut pas être inversée simplement pour obtenir $A\varepsilon$ en fonction de β,γ et a. Pour estimer la différence entre le cas idéal (B.2), noté A_∞, et le cas à taille finie (B.7), noté $A(r_\infty)$, on résout numériquement (B.7) que l'on compare ensuite à la solution idéale (B.2). La différence relative est tracée sur la figure B.1 pour $a = 0.01$ et $a = 0.001$ et avec les coefficients d'ionisation suivant $\eta = 0$, $\beta = L^*\beta^* = 7200$, $\gamma = 1e-4$.

Comme l'on pouvait s'y attendre, plus la taille du domaine intérieur est grande, plus la différence est faible. On remarque aussi que plus l'émetteur est petit plus il faut que la taille relative de la zone interne soit grande pour garder une erreur relative faible. Typiquement pour $a = 0.01$ il suffit de prendre $r_\infty/a = 5$ pour avoir une différence relative de seulement 10^{-3} alors que pour $a = 0.001$ il faut prendre $r_\infty/a = 15$ pour obtenir le même résultat. Les courbes présentées sont indépendantes de la valeur de ε.

B.2 Décomposition de domaine et multiplicateurs de Lagrange

Pour un problème elliptique comme l'équation de Poisson $\Delta u = f$, la solution u_0 sur un domaine Ω est telle que l'énergie potentielle $\mathcal{E}(u)$ du système est minimale.

$$u_0 = \text{argmin}_u \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - fu \right) \tag{B.8}$$

De manière plus générale, on note u la solution d'un problème de minimisation d'une grandeur $\mathcal{E}(u)$. Il est possible d'adjoindre des contraintes d'égalité sur u, notées $\text{h}(\mathbf{u}) = 0$. Minimiser $\mathcal{E}(u)$ sous la contrainte $\text{h}(\mathbf{u}) = 0$, revient à chercher le point selle $(\tilde{u}, \tilde{\lambda})$ du Lagrangien suivant

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \mathcal{E}(u) + \lambda \text{h}(u). \tag{B.9}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Dans le cas d'équations aux dérivées partielles, il s'agit ensuite de trouver une formulation faible de ce problème et de résoudre numériquement par une discrétisation de type éléments finis par exemple. L'une des premières formulation faible

utilisant les multiplicateurs de Lagrange a été proposée en 1973 par Ivo Babuska [104]. Ce type de formulation se prête très bien à une discrétisation par éléments finis.

Dans la suite nous allons utiliser les multiplicateurs de lagrange pour raccorder deux domaines Ω_1 et Ω_2 possedant une frontière Γ en commun. Ce type d'approche est déjà largement utilisé pour décomposer de vastes domaines de calculs en sous domaines de tailles plus restreintes. Un exemple de formulation pour le problème de Poisson ainsi qu'une interprétation du rôle des multiplicateurs sont proposés par Magoules [103].

Pour imposer la continuité des champs u_1 et u_2 entre les sous domaines Ω_1 et Ω_2, il faut rechercher le point selle du Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \lambda) = \mathcal{E}_1(u_1) + \mathcal{E}_2(u_2) + \int_\Gamma \lambda(u_2 - u_1). \tag{B.10}$$

Les fonctionnelles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ doivent être minimisée sur chaque sous domaine en respectant la contrainte de continuité $h(u) = u_2 - u_1 = 0$ au bord $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$. Pour alléger les notations on note $u = (u_1, u_2)$ le vecteur des inconnus, $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_1(u_1) + \mathcal{E}_2(u_2)$ la fonctionnelle à minimiser. Trouver ce point selle revient à trouver le point où le gradient de $\mathcal{L}$ s'annule, c'est à dire le point $\tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{\lambda})$ tel que :

$$\nabla\mathcal{L}(\tilde{u}) = \begin{bmatrix} \nabla_u^T \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\lambda}) \\ \nabla_\lambda^T \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_u^T \mathcal{E}(\tilde{u}) + \int_\Gamma \tilde{\lambda} \nabla_u^T h(\tilde{u}) \\ \int_\Gamma h(\tilde{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

Le principe variationnel de recherche du point selle s'écrit alors

$$\mathcal{F}_1(u_1, v_1) - \int_\Gamma \lambda v_1 = 0 \qquad \forall v_1 \in \mathcal{V}_1 \tag{B.12}$$

$$\mathcal{F}_2(u_2, v_2) + \int_\Gamma \lambda v_2 = 0 \qquad \forall v_2 \in \mathcal{V}_2 \tag{B.13}$$

$$\int_\Gamma \mu(u_2 - u_1) = 0 \qquad \forall \mu \in \mathcal{R} \tag{B.14}$$

avec v_1, v_2 et μ les fonctions tests et respectivement $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{R}_h$ les espaces des fonctions test pour les solutions dans les domaines Ω_1, Ω_2 et pour les multiplicateurs de Lagrange sur la frontière $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$. $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont les fonctionnelles associées à la formulation faible de $\nabla_{u_1}\mathcal{E}_1 = 0$ et $\nabla_{u_2}\mathcal{E}_2 = 0$.

Dans le cas où les opérateurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne sont pas linéaires, on applique une méthode de Newton. Cette méthode d'optimisation non linéaire sous contrainte est aussi appelée méthode de Lagrange-Newton. Un exemple d'implémentation de cette méthode à un problème de mécanique en éléments finis est donné par Pebrel [105]. Il s'agit de résoudre la relation linéarisée suivante à chaque itération

$$\nabla^2\mathcal{L}(u^k, \lambda^k) \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = -\nabla\mathcal{L}(u^k, \lambda^k) \tag{B.15}$$

avec $\nabla^2\mathcal{L}$ la Hessiennne de $\mathcal{L}$. La solution (u^k, λ^k) est incrémentée à chaque itération : $(u^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (u^k + \delta u, \lambda^k + \delta\lambda)$. De manière plus détaillée ce système s'écrit

$$\begin{bmatrix} \nabla_u^2 \mathcal{E}(u^k) & \int_\Gamma \nabla_u^T h(u^k) \\ \int_\Gamma \nabla_u h(u^k) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_u^T \mathcal{E}(u^k) + \int_\Gamma \lambda \nabla_u^T h(u^k) \\ \int_\Gamma h(u^k) \end{bmatrix}. \tag{B.16}$$

Comme la contrainte est linéaire en u, les dérivées secondes de la contrainte sont nulles. En terme de formulation faible le système devient

$$\delta\mathcal{F}_1(\delta u_1, v_1) - \int_\Gamma \delta\lambda\, v_1 = -\mathcal{F}_1(u_1^k, v_1) + \int_\Gamma \lambda^k v_1 \qquad \forall v_1 \in \mathcal{V}_1 \tag{B.17}$$

$$\delta\mathcal{F}_2(\delta u_2, v_2) + \int_\Gamma \delta\lambda\, v_2 = -\mathcal{F}_2(u_2^k, v_2) - \int_\Gamma \lambda^k v_2 \qquad \forall v_2 \in \mathcal{V}_2 \tag{B.18}$$

$$\int_\Gamma \mu(\delta u_2 - \delta u_1) = -\int_\Gamma \mu(u_2^k - u_1^k) \qquad \forall \mu \in \mathcal{R} \tag{B.19}$$

où l'indice k fait référence au numéro de l'itération : u^0 solution initiale, u^1 le résultat de la première itération ...etc. Les fonctionnelles linéarisées $\delta\mathcal{F}_1$ et $\delta\mathcal{F}_2$ sont obtenus en calculant la différentielle de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ par rapport à u_1 et u_2. Il s'agit d'une différentielle au sens de Fréchet, puisqu'elle s'applique à des fonctionnelles.

Bibliographie

[1] Thomas F Valone. Review of Electrogravitics & Electrokinetics Propulsion. *International Journal of Geosciences*, I(April) :413–428, 2015.

[2] T. Townsend Brown. A method of an apparatus or machine for producing force and motion, 1928. GB Patent 300311.

[3] T. Townsend Brown. Electrokinetic apparatus, August 16 1960. US Patent 2,949,550.

[4] E.A. Christenson and P.S. Moller. Ion-Neutral Propulsion in Atmospheric Media. *AIAA Journal*, 5(10) :1768–1773, 1967.

[5] Unknown Author. Ion propelled aircraft. *Popular mechanics*, 122(2), August 1964.

[6] R.L. Talley. Twenty First Century Propulsion Concept. Technical report, Veritay Technology, Inc., East Amherst, NY, 1990. PL-TR-91-3009.

[7] Thomas B. Bahder and Chris Fazi. Force on an asymmetric capacitor. Technical report, Army Research Laboratory, March 2003. OMB Number 0704-0788.

[8] M. Tajmar. Biefeld-brown effect : Misinterpretation of corona wind phenomena. *AIAA Journal*, 42(2) :315–318, 2004.

[9] J. L. Naudin. http ://jnaudin.free.fr/. retrieved on April 4 2018.

[10] Jack Wilson, Hugh Perkins, and William Thompson. An investigation of ionic wind propulsion. Technical report, NASA, December 2009. NASA/TM-2009-215822.

[11] M Chattock. On the Velocity and mass of the Ions in the Electric Wind in Air. *Philosophical magazine*, 48 :110–112, 1899.

[12] M. Robinson. Movement of air in the electric wind of the corona discharge. *American Institute of Electrical Engineers, Part I : Communication and Electronics*, 80(2) :143–150, 1961.

[13] Jean-Marcel Rax. *Physique des Plasmas*. Dunod, Paris, 2005.

[14] J S Townsend and P J Edmunds. The discharge of electricity from cylinders and points. *Philosophical Magazine Series 6*, 27(161) :789–801, 1914.

[15] J. S. Townsend. *Electricity in Gases*. Humphrey Milford M.A., Oxford, oxford university press edition, 1915.

[16] O. M. Stuetzer. Ion drag pumps. *Journal of Applied Physics*, 31(1) :136–146, 1960.

[17] Otmar M. Stuetzer. Magnetohydrodynamics and Electrohydrodynamics. *Physics of Fluids*, 5(5) :534–544, 1962.

[18] O. M. Stuetzer. Ion Drag Pressure Generation. *Journal of Applied Physics*, 30(7) :984–994, 1959.

[19] O.M. Stuetzer. Ion drag pumps, August 27 1968. US Patent 3,398,685.

[20] C. Kim, D. Park, K.C. Noh, and J. Hwang. Velocity and energy conversion efficiency characteristics of ionic wind generator in a multistage configuration. *Journal of Electrostatics*, 68(1) :36–41, 2010.

[21] H Bondar and F Bastien. Effect of neutral fluid velocity on direct conversion from electrical to fluid kinetic energy in an electro-fluid-dynamics (EFD) device. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 19(9) :1657–1663, 2000.

[22] Vishal Singhal and Suresh V. Garimella. Influence of Bulk Fluid Velocity on the Efficiency of Electrohydrodynamic Pumping. *Journal of Fluids Engineering*, 127(3) :484, 2005.

[23] John Shrimpton. *Charge Injection Systems*. Springer, Berlin, 2009.

[24] A.M. Ganan-Calvo, J. Davila, and A. Barrero. Current and droplet size in the electrospraying of liquids. Scaling laws. *Journal of aerosol science*, 28(2) :249–275, 1997.

[25] Eric Moreau. Airflow control by non-thermal plasma actuators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40(3) :605–636, 2007.

[26] J. Reece Roth, D. Sherman, and S. Wilkinson. Electrohydrodynamic Flow Control with a Glow-Discharge Surface Plasma. *AIAA Journal*, 38(7) :1166–1172, 2000.

[27] N. Benard and E. Moreau. Electrical and mechanical characteristics of surface AC dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control. *Experiments in Fluids*, 55(11), 2014.

[28] Antoine Debien, Nicolas Benard, and Eric Moreau. Streamer inhibition for improving force and electric wind produced by DBD actuators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 45 :215201, 2012.

[29] N. E. Jewell-Larsen, H Ran, Y Zhang, M K Schwiebert, K a Honer, and a V Mamishev. Electrohydrodynamic (ehd) cooled laptop. *Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium*, pages 261–266, 2009.

[30] David B Go, Raul A Maturana, Timothy S Fisher, and Suresh V Garimella. Enhancement of external forced convection by ionic wind. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(25–26) :6047–6053, 2008.

[31] I.Y. Chen, C.-J. Chen, and C.C. Wang. Influence of electrode configuration on the heat transfer performance of a led heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 77 :795 – 801, 2014.

[32] Jing Wang, Yi-xi Cai, Xiao-hua Li, Yun-fei Shi, Ya-chao Bao, Jun Wang, and Yun-xi Shi. Ionic Wind Development in Corona Discharge for LED Cooling. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 46(5) :1821–1830, 2018.

[33] Noris Gallandat, Federico Bonetto, and J. Rhett Mayor. Ionic Wind Heat Transfer Enhancement in Vertical Rectangular Channels : Experimental Study and Model Validation. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 9(2) :021005, 2017.

[34] Michael J. Johnson and David B. Go. Recent advances in electrohydrodynamic pumps operated by ionic winds : A review. *Plasma Sources Science and Technology*, 26(10), 2017.

[35] Michael J. Johnson and David B. Go. Piezoelectric transformers for low-voltage generation of gas discharges and ionic winds in atmospheric air. *Journal of Applied Physics*, 118(24), 2015.

[36] Daniele Testi, Francesco D'Ettorre, Davide Della Vista, and Walter Grassi. Parabolic flight results of electrohydrodynamic heat transfer enhancement in a square duct. *International Journal of Thermal Sciences*, 117 :1–13, 2017.

[37] Y. H. Chen and N. N. Barthakur. Potato slab dehydration by air ions from corona discharge. *International Journal of Biometeorology*, 35(2) :67–70, 1991.

[38] J. Kuhl, T. Seeger, L. Zigan, S. Will, and A. Leipertz. On the effect of ionic wind on structure and temperature of laminar premixed flames influenced by electric fields. *Combustion and Flame*, 176 :391–399, 2017.

[39] D.G. Park, S.H. Chung, and M.S. Cha. Visualization of ionic wind in laminar jet flames. *Combustion and Flame*, 184 :246–248, 2017.

[40] Airbus. http ://www.airbus.com/newsroom/press-releases/en/2017/10/EUTELSAT-172B-satellite.html. retrieved on April 17 2018.

[41] E. van Wynsberghe and A. Turak. Station-keeping of a high-altitude balloon with electric propulsion and wireless power transmission : A concept study. *Acta Astronautica*, 128 :616–627, 2016.

[42] Kento Masuyama, S. R. H. Barrett, I Angelov, N Wadefalk, Jörgen Stenarson, and Student Member. On the Performance of electrohydrodynamic propulsion. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 50(6) :1480–1486, 2013.

[43] Martin Hepperle. Electric flight - potential and limitations. In *Energy Efficient Technologies and Concepts of Operation*, Lisbon, Portugal, October 2012. NATO Science and Technology Organization. STO-MP-AVT-209.

[44] Eric Moreau, Benard Nicolas, Lan-Sun-Luk Jean-Daniel, and Chabriat Jean-Pierre. Electrohydrodynamic force produced by a wire-to-cylinder dc corona discharge in air at atmospheric pressure. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 46(47) :475204, 2013.

[45] Konstantinos N. Kiousis, Antonios X. Moronis, and Wolf G. Fruh. Electro-Hydrodynamic (EHD) Thrust Analysis in Wire-Cylinder Electrode Arrangement. *Plasma Science and Technology*, 16(4) :363–369, 2014.

[46] Eric Moreau, Nicolas Benard, Frédéric Alicalapa, and Alexandre Douyère. Electrohydrodynamic force produced by a corona discharge between a wire active electrode and several cylinder electrodes – Application to electric propulsion. *Journal of Electrostatics*, 76 :194–200, 2015.

[47] Christopher K. Gilmore and S. R. H. Barrett. Electrohydrodynamic thrust density using positive corona-induced ionic winds for in-atmosphere propulsion. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2175) :20140912–20140912, 2015.

[48] Christopher K Gilmore and Steven R H Barrett. Electroaerodynamic thruster performance as a function of altitude and flight speed. *AIAA Journal*, 56(3) :1105–1117, 2017.

[49] L Pekker and M Young. A model of an ideal Electrohydrodynamic Thruster. *Journal of propulsion and powezr*, 27(4) :786–792, 2011.

[50] H. C. Chang and L. Y. Yeo. *Elecctrokinetically Driven Microfluidics and Nanofluidics*. Cambridge university press, New York, 2010.

[51] S. C. Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, Oxford, 1960.

[52] J. P. Boeuf and L. C. Pitchford. Electrohydrodynamic force and aerodynamic flow acceleration in surface dielectric barrier discharge. *Journal of Applied Physics*, 97(10), 2005.

[53] J Roth. *Industrial Plasma Engineering, Principles*, volume 1. IOP, London, 1995.

[54] G J M Hagelaar and L C Pitchford. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. *Plasma Sources Science and Technology*, 14(4) :722–733, 2005.

[55] R Morrow. The theory of positive glow corona. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 30 :3099–3114, 1999.

[56] G. V. Naidis. Conditions for inception of positive corona discharges in air. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 38(13) :2211–2214, 2005.

[57] Yuesheng Zheng, Bo Zhang, and Jinliang He. Self-sustained criterion with photoionization for positive dc corona plasmas between coaxial cylinders. *Physics of Plasmas*, 22(6) :063514, 2015.

[58] Yuesheng Zheng, Bo Zhang, and Jinliang He. Onset conditions for positive direct current corona discharges in air under the action of photoionization. *Physics of Plasmas*, 18(12), 2011.

[59] S Li and H Uhm. Investigation of electrical breakdown characteristics in the electrodes of cylindrical geometry. *Physics of Plasmas*, 11(6) :3088, 2004.

[60] Franck William Peek. *Dielectric phenomena in high voltage engineering*. McGrow-Hill Book Company, New-York, 1915.

[61] A Fridman, A Chirokov, and A Gutsol. Non-thermal atmospheric pressure discharges. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 38, 2005.

[62] J J Lowke and F D'Alessandro. Onset corona fields and electrical breakdown criteria. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 36(21) :2673–2682, 2003.

[63] R. Morrow and J. J. Lowke. Streamer propagation in air. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 30(4) :614–627, 1997.

[64] Eric Moreau, Pierre Audier, and Nicolas Benard. Ionic wind produced by positive and negative corona discharges in air. *Journal of Electrostatics*, 93(October 2017) :85–96, 2018.

[65] S. Park, U. Cvelbar, W. Choe, and S.Y. Moon. The creation of electric wind due to the electrohydrodynamic force. *Nature Communications*, 9(1), 2018.

[66] T Unfer and J Boeuf. Modelling of a nanosecond surface discharge actuator. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 42(19) :194017, 2009.

[67] R. S. Sigmond. Simple approximate treatment of unipolar space-charge-dominated coronas : The Warburg law and the saturation current. *Journal of Applied Physics*, 53(2) :891–898, 1982.

[68] James Feng. An analysis of corona currents between two concentric cylindrical electrodes. *Journal of Electrostatics*, 46(1) :37–48, 1999.

[69] Nicolas Monrolin, Franck Plouraboué, and Olivier Praud. Electrohydrodynamic Thrust for In-Atmosphere Propulsion. *AIAA Journal*, 55(12) :4296–4305, 2017.

[70] A. Yabe, Y. Mori, and K. Hijikata. EHD study of the corona wind between wire and plate electrodes. *AIAA Journal*, 16(4) :340–345, 1978.

[71] Eric Moreau and Gérard Touchard. Enhancing the mechanical efficiency of electric wind in corona discharges. *Journal of Electrostatics*, 66(1-2) :39–44, 2008.

[72] Dorian F. Colas, Antoine Ferret, David Z. Pai, Deanna a. Lacoste, and Christophe O. Laux. Ionic wind generation by a wire-cylinder-plate corona discharge in air at atmospheric pressure. *Journal of Applied Physics*, 108(10) :1–7, 2010.

[73] Matthew Rickard, Derek Dunn-Rankin, Felix Weinberg, and Fred Carleton. Characterization of ionic wind velocity. *Journal of Electrostatics*, 63(6-10) :711–716, 2005.

[74] Philippe Bérard. *Etude du vent ionique produit par décharge couronne à pression atmosphérique pour le contrôle d'écoulement aérodynamique*. PhD thesis, Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion, 2008.

[75] J Mizeraczyk, J Podlinski, a Niewulis, and a Berendt. Recent progress in experimental studies of electro-hydrodynamic flow in electrostatic precipitators. *Journal of Physics : Conference Series*, 418 :012068, 2013.

[76] Vincent Boucinha, Pierre Magnier, Régine Weber, Annie Leroy-Chesneau, BinJie Dong, Dunpin Hong, and R. Joussot. Characterization of the Ionic Wind Induced by a Sine DBD Actuator Used for Laminar-to-Turbulent Transition Delay. In *4th Flow Control Conference*, pages AIAA 2008–4210, Seattle, Washington, 2008.

[77] E. Moreau, J. Cazour, and N. Benard. Influence of the air-exposed active electrode shape on the electrical, optical and mechanical characteristics of a surface dielectric barrier discharge plasma actuator. *Journal of Electrostatics*, 93(October 2017) :146–153, 2018.

[78] N. Benard, a Debien, and E Moreau. Time-dependent volume force produced by a non-thermal plasma actuator from experimental velocity field. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 46(24) :245201, 2013.

[79] M. Hamdi, M. Havet, O. Rouaud, and D. Tarlet. Comparison of different tracers for PIV measurements in EHD airflow. *Experiments in Fluids*, 55(4), 2014.

[80] B. W. Van Oudheusden. PIV-based pressure measurement. *Measurement Science and Technology*, 24(3), 2013.

[81] Mathias Neumann, Christian Friedrich, Jürgen Czarske, Jochen Kriegseis, and Sven Grundmann. Determination of the phase-resolved body force produced by a dielectric barrier discharge plasma actuator. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 46(4), 2013.

[82] Thomas Albrecht, Tom Weier, Gunter Gerbeth, Hans Metzkes, and Jörg Stiller. A method to estimate the planar, instantaneous body force distribution from velocity field measurements. *Physics of Fluids*, 23(2) :10–14, 2011.

[83] M. Kotsonis, S. Ghaemi, L. Veldhuis, and F. Scarano. Measurement of the body force field of plasma actuators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 44 :045204, 2011.

[84] P Durbin and L Turyn. Analysis of the positive DC corona between coaxial cylinders. *Journal of Applied Physics*, 20 :1490–1495, 1987.

[85] Nicolas Monrolin, Olivier Praud, and Franck Plouraboué. Electrohydrodynamic ionic wind, force field, and ionic mobility in a positive dc wire-to-cylinders corona discharge in air. *Physical Review Fluids*, 3(6) :063701, 2018.

[86] Lipeng Liu and Marley Becerra. On the transition from stable positive glow corona to streamers. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 49(22) :225202, 2016.

[87] Lipeng Liu and Marley Becerra. An efficient model to simulate stable glow corona discharges and their transition into streamers. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 50(10), 2017.

[88] Davide Cagnoni, Francesco Agostini, Thomas Christen, Nicola Parolini, Ivica Stevanovic, and Carlo de Falco. Multiphysics simulation of corona discharge induced ionic wind. *Journal of Applied Physics*, 114(23) :233301, 2013.

[89] Rakshit Tirumala and David B. Go. Comparative study of corona discharge simulation techniques for electrode configurations inducing non-uniform electric fields. *Journal of Electrostatics*, 72(2) :99–106, 2014.

[90] Yuesheng Zheng, Bo Zhang, and Jinliang He. Current-voltage characteristics of dc corona discharges in air between coaxial cylinders. *Physics of Plasmas*, 22(2) :1–7, 2015.

[91] Nicolas Monrolin and Olivier Praud. Revisiting the positive DC corona discharge theory : Beyond Peek's and Townsend's law. *Physics of Plasmas*, 25(063503), 2018.

[92] P Seimandi, G Dufour, and F Rogier. An asymptotic model for steady wire-to-wire corona discharges. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(3-4) :574–583, 2009.

[93] IEEE-DEIS-EHD Technical Committee. Recommended international standard for dimensionless parameters used in electrohydrodynamics. In *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, volume 10, pages 3–6, 2003.

[94] Seville Chapman. Corona point current in wind. *Journal of Geophysical Research*, 75(12) :2165–2169, 1970.

[95] PA Durbin, DJ Mckinzie, and EJ Durbin. An anemometer for highly turbulent or recirculating flows. *Experiments in Fluids*, 5 :184–188, 1987.

[96] Stephan Vogel and Joachim Holboll. Experimental evaluation of discharge characteristics in inhomogeneous fields under air flow. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 25(2) :721–728, 2018.

[97] Ricardo Pereira, Daniele Ragni, and Marios Kotsonis. Effect of external flow velocity on momentum transfer of dielectric barrier discharge plasma actuators. *Journal of Applied Physics*, 116(10), 2014.

[98] J Q Feng. Application of Galerkin finite-element method with Newton iterations in computing steady-state solutions of unipolar charge currents in corona devices. *Journal of Computational Physics*, 151(2) :969–989, 1999.

[99] N. C. Nguyen, C. Guerra-Garcia, J. Peraire, and M. Martinez-Sanchez. Computational study of glow corona discharge in wind : Biased conductor. *Journal of Electrostatics*, 89 :1–12, 2017.

[100] Yifei Guan, Ravi Sankar Vaddi, Alberto Aliseda, and Igor Novosselov. Experimental and numerical investigation of electrohydrodynamic flow in a point-to-ring corona discharge. *Physical Review Fluids*, 3(043701) :1–14, 2018.

[101] Benjamin Wettervik, Tomas Johnson, Stefan Jakobsson, Andreas Mark, and Fredrik Edelvik. A domain decomposition method for three species modeling of multi-electrode negative corona discharge – With applications to electrostatic precipitators. *Journal of Electrostatics*, 77 :139–146, 2015.

[102] F. Hecht. New development in freefem+. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) :251–265, 2012.

[103] Frédéric Magoulès and François Xavier Roux. Lagrangian formulation of domain decomposition methods : A unified theory. *Applied Mathematical Modelling*, 30(7) :593–615, 2006.

[104] Ivo Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.

[105] J. Pebrel, Christian Rey, and P. Gosselet. A Nonlinear Dual-Domain Decomposition Method : Application to Structural Problems with Damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251–262, 2008.