

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Genie industriel

Présentée et soutenue par :

Mme QUAN LIU

le lundi 28 mai 2018

Titre :

Modélisation bayésienne des interactions multidimensionnelles dans un système complexe. Application à la gestion des risques de crues.

Ecole doctorale :

Systèmes (Systèmes)

Unité de recherche :

Laboratoire Génie de Productions de l'ENIT (E.N.I.T-L.G.P.)

Directeur(s) de Thèse :

M. FRANÇOIS PERES

Rapporteurs :

M. ERIC LEVRAT, UNIVERSITÉ LORRAINE

M. ERIC ZAMAI, INP GRENOBLE

Membre(s) du jury :

M. ANTOINE GRALL, UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES, Président

M. AYELEY TCHANGANI, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

MI. FRANÇOIS PERES, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TARBES, Membre

Mme SOPHIE SAUVAGNARGUES, ENS Mines- IMT Alès, Membre

Remerciements

Je remercie toutes les personnes qui m'ont permis d'aller au bout de ce travail et je présente mes excuses à toutes celles que je pourrais oublier de citer dans ces quelques lignes.

Je remercie mes directeurs de thèse, François PERES et Ayeley TCHANGANI, qui m'ont permis d'avancer dans mes propres travaux. Merci à François pour m'avoir donné toute sa confiance et ses conseils professionnels et personnels. Merci à Ayeley pour ses idées et conseils scientifiques toujours pertinents. Merci aussi pour vos encouragements à poursuivre mes travaux et à améliorer mon français. Je tiens à vous remercier pour toutes les corrections que vous avez apportées à ce mémoire.

Je voudrais faire une mention spéciale à mes deux rapporteurs Monsieur Eric LEVRAT (Professeur à l'Université de Lorraine) et Monsieur Eric ZAMAÏ (Maître de Conférences HDR à Grenoble INP) dont la lecture minutieuse et les nombreux conseils et remarques ont contribué à améliorer la qualité de ce mémoire.

Je tiens à remercier les autres membres du jury Monsieur Antoine GRALL, Madame Sophie SAUVAGNARGUES et Monsieur Bertrand JOUVE, qui malgré leurs charges m'ont fait l'honneur de leur présence à ma soutenance.

Je tiens à remercier enfin, tous ceux et celles au sein du LGP qui m'ont accueillie. Merci à Eliane CASTA, Marie TEIXEIRA et Marie Cécile DE BARROS pour leur aide dans le suivi des procédures administratives. Merci à tous mes amis-collègues du laboratoire. Ils m'ont non seulement aidée dans mes travaux mais ils m'ont aussi apporté, toujours dans la bonne humeur, le témoignage de leur véritable amitié.

Je fais une mention spéciale à Jose Ronald LEANDRO ELIZONDO, MING Lu, ZHAO Yinshen et XU Da. Ils m'ont toujours soutenue. Je finirai ces remerciements par ceux que j'adresse à mes parents ainsi qu'à mon mari WANG Qirong. C'est bien vous qui m'avez soutenue pendant ces années. C'est bien grâce à vous que je suis venue à bout de ces travaux.

Notations

$CPT(\cdot,\cdot)$ – base de données dans laquelle sont stockés les paramètres des variables de tous les objets

$CPT(N_m^{o_{y_k}^{x_j}}, c)$ – paramètres d'une variable en fonction de sa nature par rapport aux dimensions dans la base de données, $c = 0$ pour les variables non-dimensionnelles ; $c = 1$, pour les variables dimensionnelles initiales ; $c = 2$, pour les variables dimensionnelles ; pour ne pas alourdir les notations, on abrègera l'écriture par $CPT(N_m^{j,k}, c)$.

$P(\cdot,\cdot)$ – base de données dans laquelle sont stockées les probabilités marginales calculées pour les variables de tous les objets

$P\left(N_m^{o_{y_k}^{x_j}}, l\right)$ – probabilités marginales calculées pour les variables conservées dans la base de données ; $P\left(N_m^{j,k}, l\right)$ correspond à la notation abrégée

l – entier, indice d'itérations du nombre d'inférence dans un RBM ; $l = 1$ propagation d'information initiale dans le RBM ; $l > 1$ propagation d'évidence dans le RBM

y_k- $k^{ème}$ objet sur la dimension « Y »

O^j- $j^{ème}$ objet sur la dimension « X »

$N_m^{\cdot}$- variable générique dans un objet

$N_e^{\cdot}$- variable d'entrée dans un objet

$N_i^{\cdot}$- variable interne dans un objet

$N_s^{\cdot}$- variable de sortie dans un objet

$N_{iy}^{\cdot}$- variable interne qui évolue selon la dimension « Y » dans un objet

$pa(N_m^{\cdot})$- parents pour une variable dans un objet

$P(N_m^{\cdot})$- probabilité d'une variable

$E_{i,s}^{o_{ey_k}^{ex_j}}$ – variable interne/sortie d'évidence dans l'objet $O_{ey_k}^{ex_j}$; $E_{i,s}^{e,j,k}$ correspond à sa notation abrégée

$O_{ey_k}^{ex_j}$ – objet pour lequel une variable est observée

$\omega_l^{N_{i,s}^{o_{ey_k}^{ex_j}}}$ - modalité associée à une évidence dans une variable ; $\omega_l^{N_{i,s}^{e,j,k}}$ correspond à sa notation abrégée

$C_{y_k}^{x_j}$ – classe multiéchelles ; $C^{j,k}$ correspond à sa notation abrégée

$C_{y_k}^{px_j}$ – classe composante dans la classe multiéchelles $C_{y_k}^{x_j}$, où p indique le numéro de composante ; $C^{pj,k}$ correspond à sa notation abrégée

$\theta_{mqr}^{j,k}$- paramètre de variable $N_m^{\cdot}$ à l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ avec $N_m^{\cdot} = r, pa(N_m^{\cdot}) = q$

NOM_{mqr}- nombre de cas correspond à $N_m^{\cdot} = r, pa(N_m^{\cdot}) = q$

Table des matières

Introdution Générale 1

Chapitre I Modélisation des Systèmes Complexes 3

I.1 Généralités sur la complexité 3

I.2 Modélisation de la complexité 6

I.3 Définition de la problématique de la thèse 14

I.4 Structuration du mémoire 15

I.5 Conclusion 16

Chapitre II Vers les Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM) .. 17

II.1 Méthodes basées sur les réseaux Bayesiens 17

II.1.1 Réseaux Bayesiens (RB) 17

II.1.2 Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) 30

II.1.3 Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) et Résesaux Bayesiens Hiérarchiques (RBH) 31

II.1.4 Synthèse 32

II.2 Proposition d'une nouvelle approche : Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM) 33

II.2.1 Verrous 33

II.2.2 Eléments de base 34

II.2.3 Synthèse 41

II.2.4 Principes de construction d'un RBM 41

II.3 Conclusion 45

Chapitre III Instanciation dans un RBM 47

III.1 Instanciation dans un RBM 47

III.1.1 Méthode d'instanciation 47

III.1.2 Approches d'apprentissage existantes pour les RBOO 51

III.2 Etat de l'art relatif à l'apprentissage par transfert 52

III.3 Apprentissage par transfert dans les RBM 53

III.3.1 Généralités 53

III.3.2 Modes de calculs pour l'apprentissage par transfert 55

III.3.3 Procédure principale 61

III.4 Conclusion 69

Chapitre IV Inférence dans un RBM 71

IV.1 Caractéristiques d'un RBM 71

IV.1.1 Particularités d'inférence d'un RBM 71

IV.1.2 Propriétés d'un RBM 73

IV.1.3 Inférence a priori et Inférence a posteriori 74

IV.2 Inférence a priori 75

IV.3 Inférence a posteriori 80

IV.4 Inférence de rang supérieur à 1 91

IV.5 Inférence dans un RBM à trois dimensions 94

IV.5.1 Inférence a priori en 3 dimensions 95

IV.5.2 Inférence a posteriori en 3 dimensions 98

IV.6 Généralisation à n dimensions 106

IV.7 Inférence dans les RBM multiéchelles 108

IV.8 Conclusion 112

Chapitre V Application à la modélisation des risques de crues 113

V.1 Contexte 113

V.2 Construction de la structure du RBM d'un bassin versant 114

V.2.1 Système étudié 114

V.2.2 Construction du RBM 116

V.3 Instanciation du RBM 123

V.3.1 Réunir les données 123

V.3.2 Identifier les objets 124

V.3.3 Caractériser les variables 124

V.3.4 Paramétrer et stocker les objets 138

V.4 Inférence 138

V.4.1 Inférence a priori *138*

V.4.2 Inférence a posteriori *139*

V.5 Conclusion **148**

Conclusions et Perspectives **149**

Conclusions **149**

Perspectives **150**

Références Bibliographiques **153**

Annexes **161**

Annexe 1 : Liste de variables et de relations **161**

Annexe 2 : Code Java pour la programmation des principes d'inférence **165**

Annexe 3 : Paramètre origine de RBM pour l'étude de cas **174**

Annexe 4 : Paramètre estimé par l'apprentissage par transfert pour l'étude de cas **195**

Introduction Générale

La nécessité de maîtriser les risques aussi bien naturels que ceux engendrés par les activités humaines et/ou les systèmes créés par l'homme appelle à traiter scientifiquement ces problèmes. Le traitement scientifique de tout problème passe par l'établissement d'un modèle aussi fiable et représentatif que possible du phénomène étudié. Or les systèmes, naturels ou anthropiques, que doivent modéliser les scientifiques afin d'évaluer les risques associés sont de plus en plus complexes. La notion de complexité est en effet aujourd'hui une notion incontournable quand il s'agit de la modélisation des systèmes. La complexité revêt plusieurs dimensions comme un nombre important de composants, les interactions et les rétroactions entre composants, l'incertitude... Selon l'Institut d'Etudes de Systèmes Complexes de Toulouse, un système complexe est constitué de nombreuses entités dont les interactions produisent un comportement global difficilement prévisible appelé « émergence ».

Afin de prendre des décisions éclairées au regard du risque, les décideurs ont besoin d'indicateurs chiffrés pour définir la mesure du risque. De manière générale, il est admis que le risque doit être mesuré à travers la vraisemblance ou probabilité d'occurrence d'un événement redouté et de son impact ou de ses conséquences directes ou indirectes. Dans un cadre de gestion des risques il faut donc pouvoir mesurer ces deux composantes.

A ces fins le modélisateur a besoin d'outils adéquats de modélisation pour lever les verrous caractérisant la problématique abordée. Dans le cadre du travail relaté dans cette thèse nous nous intéressons à la mesure de la probabilité d'occurrence d'un risque. Les approches traditionnelles de modélisation comme l'approche analytique s'avèrent inadaptées quand il s'agit d'appréhender les aspects fondamentaux des systèmes complexes et en particulier la modélisation des incertitudes. Une approche structurée de modélisation des systèmes complexes dans un cadre de gestion des risques est indispensable. Cette approche doit permettre de mesurer les risques en considérant à la fois les facteurs d'incertitude et/ou le comportement dynamique de certaines variables mais aussi les interactions entre les différentes entités ou composantes du système étudié.

Dans la littérature des outils existent qui permettent de modéliser différentes facettes de la complexité. Par leur capacité à prédire le comportement d'un système et sur la base de techniques simples de représentation, les approches comme « Dynamic Systems », les Réseaux de Petri, les Chaînes de Markov et les Réseaux Bayesiens conviennent à la modélisation des interactions non-linéaires entre différentes entités dans un cadre d'évolution dynamique. Si les chaînes de Markov et les réseaux bayesiens sont bien adaptés à la mesure de l'incertitude, aucun outil n'a la capacité de modéliser toutes les facettes de la complexité dans un cadre d'analyse des risques. C'est un des challenges de ce travail que de proposer un outil de modélisation capable d'appréhender simultanément l'incertitude, la dynamique et l'aspect de grande taille associé aux systèmes. Le support à ce travail sera les Réseaux Bayesiens.

Les Réseau Bayesiens (RB) autorisent la modélisation de l'incertitude par la représentation des connaissances combinant la théorie des graphes et la théorie probabiliste. Lorsque les données sont disponibles, les RB ont une capacité d'apprentissage permettant de renseigner leurs paramètres. L'inférence permet ensuite de mettre à jour les connaissances du réseau global à partir d'une connaissance observée. Les aspects de diagnostic permettant l'explicitation des causes d'un événement observé ou les aspects pronostic permettant de figurer les conséquences d'un choix ou d'une situation considérée peuvent ainsi être abordés via les RB. Un réseau bayesien est, en outre, facile à comprendre et à construire grâce à sa représentation graphique.

Dans ce travail, et afin de prendre en compte la grande taille des systèmes évoluant dans un cadre incertain et leur caractère multiéchelles, nous présenterons une nouvelle approche basée sur l'approche bayesienne associée au paradigme de modélisation orientée objet pour donner naissance à un nouvel outil de modélisation : les « Réseaux Bayesiens Multidimensionnels » (RBM).

Les RBM héritent de la capacité d'apprentissage et d'inférence des réseaux bayesiens classiques tout en facilitant le travail de construction et en simplifiant le calcul au niveau des systèmes possédant un grand nombre de variables. Dans cette thèse, le travail présenté autour des RBM abordera successivement leurs principes de construction, les techniques d'apprentissage qui leur sont associées (détermination des paramètres du réseau en termes de probabilités conditionnelles et/ou a priori) et l'inférence pour l'exploitation quantitative de ces modèles dans un cadre d'aide à la décision.

Ce manuscrit est organisé autour de cinq chapitres brièvement décrits ci-dessous.

Le premier chapitre introduit la modélisation des systèmes complexes et de la complexité. Le contexte général du travail est présenté et a problématique de la thèse est énoncée. Elle concerne la modélisation des systèmes complexes en vue de leur analyse sous l'angle des risques.

A partir d'un état de l'art sur les réseaux bayesiens, le deuxième chapitre met en évidence 4 verrous à lever pour la modélisation des systèmes complexes. Dans cet objectif, la notion de « Réseaux Bayesiens Multidimensionnels » (RBM) est introduite. Les éléments de base de ce type d'outils ainsi qu'un guide pour leur construction sont exposés.

Une des tâches principales dans le processus de construction d'un « Réseau Bayesien » est l'étape du paramétrage c'est-à-dire la spécification des intensités des relations entre variables en termes de probabilités conditionnelles ou a priori. L'explicitation de cette tâche dans le cadre des RBM fait l'objet du chapitre trois. Une technique particulière d'apprentissage des RBM est présentée.

Le quatrième chapitre aborde les techniques d'inférence adaptées aux RBM. Les cas bi et tridimensionnels sont abordés dans un premier temps avant une généralisation de la modélisation d'un système à n dimensions.

L'ensemble des concepts précédemment introduits est déployé sur un cas d'étude associé à la modélisation d'un phénomène de crue éclair dans un grand bassin versant pour la prédiction des catastrophes naturelles associées aux inondations torrentielles.

Une conclusion et les perspectives de continuation du travail terminent le mémoire.

Chapitre I

Modélisation des Systèmes Complexes

Introduction

Ce premier chapitre, introductif du travail de thèse relaté dans ce mémoire, aborde le thème de la complexité. Le cadre général de la modélisation d'un système complexe dans différents domaines est tout d'abord présenté. Les diverses acceptions données à la complexité sont présentées sous la forme d'un bref état de l'art. Sur la base de ces définitions et du cadre général délimitant la notion de complexité, une description plus fine de ses composantes est introduite. L'analyse bibliographique qui en résulte débouche sur la formulation de la problématique de thèse et la structuration de la suite du mémoire.

I.1 Généralités sur la complexité

La « complexité » est un mot qui regroupe un ensemble de concepts dont la signification est fortement dépendante du contexte [1, 2, 3, 4, 5]. La définition d'un système complexe varie en fonction de la discipline à laquelle il s'applique. De nos jours, les avancées scientifiques mettent chaque jour davantage en évidence cette notion de complexité dans des domaines aussi variés que la chimie, la physique, la biologie, l'économie, les sciences humaines, ... Dans son acception générale, l'adjectif « complexe » décrit un système ou un composant qui, relativement à sa conception ou sa fonction, est difficile à comprendre et à vérifier. Au cours de la dernière décennie, l'analyse des systèmes complexes (le domaine de la complexité) a été identifiée comme distincte des études conduites classiquement dans le cadre des sciences mathématiques et physiques [6]. En vue de mieux comprendre les réactions associées à un phénomène ou un mécanisme, la modélisation des comportements et des interactions joue un rôle important. Cependant, la diversité des systèmes en termes d'architecture, de fonction, d'environnement rend impossible la formulation de lois générales permettant de les modéliser tous. Afin de définir au mieux ces systèmes et de les modéliser au plus proche de la réalité, la compréhension et la caractérisation de leur complexité est essentielle. A la suite, nous décrivons plusieurs formes de complexité associées à plusieurs systèmes dans différents domaines.

L'univers met en jeu un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certains principes ou règles. Un système devient complexe lorsqu'il est constitué d'un grand nombre d'entités en interaction qui empêchent l'observateur de prévoir son évolution par le calcul [7].

La notion de complexité est de plus souvent utilisée dans notre quotidien mais dans des expressions toutes faites qui ne définissent pas la teneur d'un système complexe. On parlera ainsi de projet complexe, situation complexe, personnalité complexe, ...

Avant de définir des invariants associés à la notion de complexité, nous présentons à la suite plusieurs systèmes complexes.

- Système corporel

Commençons par un exemple simple, le corps humain. Notre corps est composé de différentes parties aux formes, matières ou fonctions distinctes. La tête contrôle les différentes parties corporelles, les jambes autorisent le mouvement, les mains facilitent la préhension, le cœur permet la circulation sanguine et le transport d'oxygène fourni par les poumons alimente les muscles, …. Il est clair que le corps fonctionne comme un grand système. La complexité qui lui est associée se traduit par des aspects multicomposants comme on vient de le voir mais aussi multiéchelles (du comportement de la

cellule à la dynamique corporelle), multifonctions (déplacement, respiration, réflexion, émotion, …) auxquels se rajoutent des notions d'interactions, dans des cadres dynamiques et incertains. Sur ce dernier point, on peut considérer que l'incertitude n'existe pas vraiment mais que la complexité des mécanismes mis en jeu est telle qu'il s'avère presqu'impossible d'identifier une forme d'évolution complètement déterministe. Des signaux biologiques dont on ne maîtrise pas complètement la nature permettent de caractériser la dynamique corporelle par des interactions cellulaires et une évolution temporelle basée sur des échelles de temps différentes (jour/nuit, été/hiver, âge, …) et des environnements distincts (position, température, activité, émotion, …).

- Système économique

Un système économique n'est ni déterministe, ni complètement prévisible et ne répond pas toujours de la même façon, en tout cas en apparence, aux stimuli pourtant identiques censés le faire évoluer. La modélisation de ce type de système vise à définir des tendances économiques pour l'évaluation d'un produit ou de dépenses d'investissement. La complexité s'exprime ici par une grande dépendance entre les composantes de ce type de système et l'incertitude relative à l'évolution dynamique des paramètres gouvernant son évolution. Dans une activité financière, par exemple, l'incertitude est omniprésente [8].

Considérons à titre d'illustration les activités boursières. La spéculation repose le plus souvent sur l'anticipation de l'évolution du prix d'une action en fonction de paramètres externes. Ce prix est lui-même piloté par la loi de l'offre et de la demande. Chaque investisseur cherche à anticiper ce ratio pour prévoir un gain potentiel. Supposons qu'un investisseur soit susceptible d'acheter un certain type d'actions. Son modèle d'investissement reposera en partie sur le prix de l'action, l'estimation probable du nombre d'acheteurs et des options potentielles de revente. Si son modèle (intuitif ou analytique) démontre qu'un grand nombre d'investisseurs va se porter prochainement acquéreur de l'action considérée, le prix de l'action va monter. Il a donc intérêt à anticiper sa transaction. A l'inverse, si, en l'état actuel des choses, son analyse conclut que l'action n'intéresse potentiellement que peu d'acheteurs, ceci induira mécaniquement une baisse de son prix. Il aura donc intérêt à différer son achat. Du côté du vendeur, la mise à prix de l'action repose sur une même logique mais avec des objectifs inverses. Pour optimiser son profit il a intérêt à vendre un maximum d'actions au plus haut prix. Mais, on vient de le voir ce nombre dépend du modèle de l'acheteur qui repose en partie sur ses propres hypothèses. On entre alors dans une boucle d'interactions infinies qui ne pourra être résolue que par une prise de décision unilatérale basée sur un niveau de risque calculé [9, 10]. Aucun modèle d'anticipation "correct" ne peut être considéré comme une connaissance commune et, du point de vue des agents, le problème est mal défini. Cette incertitude et la dynamique qui en résulte illustrent une des composantes de la complexité de ce type de systèmes.

- Systèmes physico-chimiques

Les études menées en chimie ou en physique présentent également des caractéristiques de systèmes complexes. Cette complexité s'explique en particulier par une sensibilité importante aux conditions initiales et aux petites perturbations, à la taille et aux nombres de composants du système et à une grande combinatoire d'événements susceptibles de le faire évoluer. L'analyse des systèmes physico-chimiques repose généralement sur des équations différentielles non linéaires.

Dans une réaction chimique, par exemple, les équilibres qui se créent sont liés aux interactions entre les composants et sont très sensibles aux dosages, aux conditions externes voire à l'ordre dans lequel sont introduits les différents produits. La caractérisation dynamique d'une réaction est également un phénomène important, difficile à modéliser. Les approches

les plus communes utilisées pour ce type de modélisation s'appuient sur des hypothèses simplificatrices visant à linéariser des phénomènes ou utiliser des méthodes non-analytiques pour guider l'opération.

En mécanique des fluides on peut également citer comme phénomène à nature complexe le passage de l'état laminaire à l'état turbulent d'un écoulement. Ce passage est classiquement modélisé par le nombre de Reynolds à partir duquel on considère que le flux est laminaire s'il est en deçà de cette valeur et turbulent au-delà. Pourtant, à mesure qu'on s'approche de cette valeur frontière, le flux développe souvent des structures régulières complexes. La description des premiers stades de cette progression du flux laminaire à l'écoulement turbulent est bien décrite et sert souvent à démontrer le caractère complexe de la mécanique des fluides. Les stades ultimes de ce passage restent pour l'heure des problèmes ouverts au sein de la discipline [11, 12, 13, 14, 15].

- Système biologique

En biologie, les origines de nombreuses maladies humaines comme le cancer, le diabète et les troubles neurologiques sont des sujets majeurs. Ces maladies viennent souvent de dysfonctionnements de certains organes en partie liées à des anomalies de communication. Cette notion de communication est centrale car elle peut être, si elle est défaillante, la cause de plusieurs maladies ou troubles du fonctionnement. Les différentes parties du corps à travers les cellules échangent des informations enregistrées puis retransmises par le cerveau. Si le signal biologique envoyé n'est pas bon ou mal interprété il peut conduire à des dysfonctionnements de fonctions a priori non directement affectées par un trouble. En outre les cellules interagissant entre elles, des signaux contradictoires peuvent être émis rendant le corps humain le siège d'une formidable complexité basée sur la coopération en réseaux d'une multiplicité d'agents pseudo-autonomes et interconnectés [6].

- Système nerveux

Des progrès dans les neurosciences ont révélé la complexité étonnante des systèmes nerveux même simples. Cela se reflète dans leur fonction, leur histoire évolutive, leur structure et les schémas de codage qu'ils utilisent pour représenter l'information. Le cerveau est d'ailleurs souvent décrit comme le système le plus complexe de l'univers. Cette complexité n'est pas simplement due à un grand nombre de composants (neurones). Il est en effet important de comprendre la notion de fonctionnalité attendue du cerveau qu'il faut dissocier du concept d'existence brute d'autres systèmes comme, par exemple, les milliards d'étoiles formant une galaxie. L'évolution dynamique de la plupart des systèmes complexes est liée à des réactions en chaîne. Le cerveau, lui, a une mission proactive associée à des fonctions de régulation, protection, décision. Les actions qu'il commande intègrent des informations exprimées selon de nombreuses modalités et captées à partir des différents sens de l'individu (vue, ouïe, odorat, toucher, goût) et éventuellement de son intuition. Il traite ces informations à partir de modèles pertinents prenant en compte l'environnement bruyant, non stationnaire et souvent imprévisible pour décider d'une action en fonction de ses conséquences à plus ou moins long terme.

La seule notion de déplacement d'un individu et sa gestion par le cerveau est un système complexe. Le concept d'équilibre dynamique met en jeu par exemple des actions de coordination du tronc et des appendices articulés en fonction de la nature du sol, de sa topologie, du relief, de l'environnement, … dans un environnement perpétuellement fluctuant en fonction des nouvelles conditions caractéristiques du lieu et du contexte.

Le processus de mémorisation est un autre exemple de complexité avec une construction basée sur l'enregistrement permanent ou temporaire d'informations de toute nature et une capacité à les récupérer de façon consciente ou

inconsciente. La durée de mémorisation dépasse souvent la durée de vie des cellules qui ont permis d'enregistrer l'information. La mémoire utilise des modèles implicites et explicites du monde et de sa dynamique dont le niveau de fiabilité peut conduire d'ailleurs à des oublis ou à une déformation de la réalité.

Le comportement général d'un individu repose sur un ensemble de postures physiques ou intellectuelles guidées par une activité cérébrale qui formera son caractère. La réponse des individus qui l'entourent conduira à l'enclenchement de processus traduisant la sympathie, la défiance, l'amour, la colère, l'indifférence… Cette réponse externe sera susceptible alors de faire évoluer dynamiquement le comportement de la personne dans un processus complexe d'interactions et de tentative de régulation des signaux captés et transmis.

Ces quelques exemples montrent l'immense complexité de l'être humain et sa gestion par le système nerveux dans des cadres multiéchelles, interactifs et fortement couplés.

• Système climatique

L'étude du climat met également en jeu des notions de complexité : le déterminisme au milieu du chaos, l'imprévisibilité au milieu de la compréhension [16]. Le vent à la surface de l'océan est, à titre d'illustration, affecté par les gradients de température dans l'océan, eux-mêmes modifiés par le forçage du vent. Dans cet exemple, on observe un bouclage entre vent et température. Les conséquences de ce processus se font particulièrement sentir dans le cas du phénomène comme El Niño et La Niña. El Niño et La Niña sont les phénomènes les plus connus et le plus souvent utilisés pour illustrer la fragilité des équilibres et les bouleversements en cascade induits par l'entrée en contact de masses d'eaux chaudes et froides dans l'est Pacifique provoquées par des courants marins eux-mêmes en retour influencés par les phénomènes qu'ils ont initiés [17]. Les différents rapports sur le changement climatique ont mis en évidence depuis plusieurs années l'effet prépondérant du forçage radiatif conduisant au réchauffement de la planète. Ce phénomène s'explique a priori par une augmentation du CO_2 et d'autres gaz conduisant à la formation d'une couche gazeuse en altitude provoquant un effet de serre [18]. La vapeur d'eau, la couverture nuageuse, la température des océans et les banquises sont affectées par ce réchauffement et les changements qui en résultent modifient à leur tour le phénomène d'effet de serre. Modéliser ce phénomène est complexe de par la présence de ces interactions mais aussi de l'incertitude associée aux paramètres qui le gouvernent.

On le voit dans ces quelques exemples classiques, le climat revêt une grande complexité et l'amélioration des outils permettant de l'appréhender sera particulièrement utile aux climatologues ainsi qu'aux prévisionnistes en météorologie.

Ces quelques illustrations dans des champs scientifiques divers montrent que la complexité est omniprésente et revêt différentes formes. Nous proposons dans le paragraphe suivant un état de l'art sur les différentes définitions d'un système complexe ainsi que sur les différentes composantes de la complexité.

I.2 Modélisation de la complexité

Dans ce paragraphe nous proposons tout d'abord une liste de définitions de la notion de complexité au travers de références relatives à des domaines scientifiques très différents, susceptibles d'appréhender un système complexe selon des vues différentes ou complémentaires.

Définition	Référence
In one characterization, a complex system is one whose evolution is very sensitive to initial conditions or to small perturbations, one in which the number of independent interacting components is large, or one in which there are multiple pathways by which the system can evolve. Analytical descriptions of such systems typically require nonlinear differential equations. A second characterization is more informal; that is, the system is complicated" by some subjective judgment and is not amenable to exact description, analytical or otherwise.	[1]
To us, complexity means that we have structure with variations.	[4]
In a general sense, the adjective “complex" describes a system or component that by design or function or both is difficult to understand and verify. [...] complexity is determined by such factors as the number of components and the intricacy of the interfaces between them, the number and intricacy of conditional branches, the degree of nesting, and the types of data structures.	[6]
Complexity theory indicates that large populations of units can self-organize into aggregations that generate pattern, store information, and engage in collective decision-making.	[19]
Complexity in natural landform patterns is a manifestation of two key characteristics. Natural patterns form from processes that are nonlinear, those that modify the properties of the environment in which they operate or that are strongly coupled; and natural patterns form in systems that are open, driven from equilibrium by the exchange of energy, momentum, material, or information across their boundaries.	[20]
A complex system is literally one in which there are multiple interactions between many different components.	[16]
Common to all studies on complexity are systems with multiple elements adapting or reacting to the pattern these elements create.	[8]
In recent years the scientific community has coined the rubric `complex system' to describe phenomena, structure, aggregates, organisms, or problems that share some common theme: (i) They are inherently complicated or intricate [...]; (ii) they are rarely completely deterministic; (iii) mathematical models of the system are usually complex and involve non-linear, ill-posed, or chaotic behavior; (iv) the systems are predisposed to unexpected outcomes (so-called emergent behaviour).	[21]
Un système complexe est un système avec un grand nombre d'éléments, de blocs ou d'agents. Ces éléments sont capables d'échanger des informations les uns avec les autres ainsi qu’avec leur environnement. L'interaction entre les éléments ne peut se produire qu'avec des voisins immédiats ou des voisins éloignés ; les agents peuvent être tous identiques ou différents ; ils peuvent se déplacer dans l'espace ou s’occuper des positions fixes, et peuvent être dans un état ou plusieurs états	[22]
A system that can be analyzed into many components having relatively many relations among them, so that the behavior of each component depends on the behavior of others	Herbert Simons
A system that involves numerous interacting agents whose aggregate behaviors are to be understood. Such aggregate activity is nonlinear, hence it cannot simply be derived from summation of individual components behavior.	Jerom Singer

Les propositions dans le tableau au-dessus présentent la complexité dans différents domaines : biologie, mathématique, économie etc. Dans ce travail nous faisons nôtre la réflexion conduite par l’institut des systèmes complexes de Toulouse qui définit la complexité ainsi :

- ***Un système complexe*** est constitué de nombreuses entités dont les interactions produisent l’émergence d’un comportement global qui ne peut pas être expliqué à partir des seules propriétés individuelles de ses constituants. Le plus souvent, les interactions des individus entre eux se superposent aux comportements individuels. Bien définir les interactions dont il est le siège constitue une clef importante pour la compréhension et la maîtrise de l’évolution d’un système complexe. Ces interactions sont d’abord temporelles, c’est-à-dire qu’elles évoluent dans le temps. Elles sont aussi multiéchelles c’est-à-dire qu’elles opèrent à différents niveaux sur le système. Dans un réseau par exemple, une entité considérée comme élémentaire peut agir sur un système situé à un niveau supérieur dont elle fait partie ou dont elle subit l’influence : on parle alors de rétroaction. Ces phénomènes de rétroactions, qui ne sont pas toujours explicites,

entraînent des comportements globaux qui sont dits non-linéaires au sens où ils ne sont pas simplement proportionnels aux comportements individuels des composants de base. Peuvent s'en suivre des phénomènes de cascades, appelés aussi « effets dominos », et des bifurcations dans l'évolution du système induisant de brusques changements qualitatifs difficiles à analyser, à comprendre et à prédire. Une approche « Systèmes Complexes » consiste donc à se focaliser sur les dynamiques d'interactions dans toute leur diversité.

Un système est composé de deux éléments cruciaux : les composants et les relations entre composants ; chaque composant dans un système possède sa propre fonction (voir Figure I.1). Pour un système non-complexe, comme un système, qu'il soit simple ou compliqué, tous les composants se comportent de façon indépendante ; la fonction du système est la somme des fonctions de chaque composant. Les composants dans un système complexe ont aussi leurs propres fonctions ; cependant la somme des fonctions ne suffit pas à décrire complètement la fonction du système global. Des caractéristiques supplémentaires apparaissent associées aux relations intercomposants quand ceux-ci sont simultanément sollicités, rendant impossible la représentation isolée du comportement d'un composant particulier. La mesure de la complexité est ainsi liée aux nombre de composants et d'interrelations entre ceux-ci. Nous présentons à la suite les caractéristiques principales associées à la définition même de la complexité.

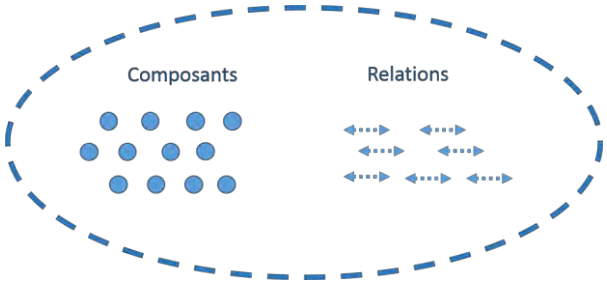


Figure I.1 Système

- Emergence [22, 23, 24, 3, 25, 19, 26, 27, 28, 29]

Le tout est plus que la somme des parties [Thalès, Anaximandre, Grèce antique]

Le tout avant les parties [Aristote, Grèse antique]

Le concept d'émergence joue un rôle central dans les sciences de la complexité. Pourtant, bien que son importance semble substantielle, certain chercheurs n'en donnent qu'une définition vague, ou la définissent plus par des exemples qu'à travers la caractérisation des conditions d'application nécessaires et suffisantes. Certaines structures et/ou les fonctions apparaissent à un niveau macroscopique dans un système complexe. Ces structures/fonctions ne peuvent pas être observées ou prédites à un niveau microscopique. Certaines propriétés n'apparaissent que lorsque les observations sont faites au niveau du système. On appelle ce phénomène l'émergence facteur discriminant essentiel entre système complexe et non-complexe. L'émergence apparaît quand plusieurs parties du système interagissent ou coopèrent. D'une part, l'émergence présuppose qu'il y a une apparition de nouveauté en termes de propriétés, structures, formes ou fonctions ; et d'autre part, elle implique l'impossibilité de décrire, d'expliquer ou de prédire ces nouveaux phénomènes en termes physiques à partir des conditions de base définies aux niveaux inférieurs. Les propriétés de l'émergence sont liées d'une part à un comportement non linéaire dynamique correspondant au fait que la somme des fonctions élémentaires ne correspond pas au résultat de l'ensemble ; enfin à l'impossibilité d'appliquer la théorie du réductionnisme dont les propriétés sont inverses de celles de la complexité. L'émergence est liée au nombre d'interactions entre composants, interactions irréductibles et non-négligeables. La théorie linéarité ne fonctionne donc pas dans ce cas-là. L'émergence est ainsi un résultat d'ensemble. Deux personnes réunies peuvent, par association, être plus fortes que la somme de leurs

individualités. Une colonie de fourmi a beaucoup plus de puissance que la somme de chaque fourmi. Les principes du réductionnisme basés sur la décomposition du système en blocs élémentaires indépendants et les théories mathématiques qu'il sous-tend ne s'appliquent pas dans le cas d'un système complexe. Le poids des hypothèses autorisant les simplifications à la base de la réduction en éléments simples est trop fort pour que celles-ci soient crédibles. La plupart des systèmes complexes économiques, environnementaux, sociétaux font ainsi apparaître des phénomènes d'émergence liés à l'impossibilité même de les décrire par le comportement de leurs entités élémentaires. Malgré tout, la théorie de la complexité peut le cas échéant considérer indépendants les phénomènes qui la caractérise (non linéarité dynamique, bouclage, évolution dans un cadre incertain, organisation auto adaptative,…)

- Systèmes multiéchelles [30, 8, 16, 31, 32, 33, 34, 29]

Si la complexité est liée au nombre de composants, elle est fonction également du caractère multiéchelles du système. En sciences de l'ingénieur, mathématiques, physique, chimie, bioinformatique, biologie computationnelle, météorologie et informatique, la modélisation multiéchelles ou les mathématiques multiéchelles s'attachent à résoudre des problèmes associés à des systèmes décrits par différentes caractéristiques à plusieurs échelles de temps et/ou espace.

En physique et en chimie, par exemple, la modélisation multiéchelles a pour but de calculer, à un niveau donné de granularité, les propriétés des matériaux ou le comportement du système à l'aide d'informations ou de modèles provenant de niveaux plus élémentaires. A chaque niveau, des approches particulières sont utilisées pour décrire un système. On distingue généralement les niveaux associés : aux modèles de mécaniques quantiques, aux modèles de dynamique moléculaire, aux modèles à gains grossiers aux échelles méso ou nano,… Chaque niveau décrit un phénomène sur une période de temps et une durée spécifique. La modélisation multiéchelles est particulièrement importante en science des matériaux, car elle permet de prédire les propriétés ou le comportement du système à partir de la connaissance des relations entre processus, structure et propriétés.

Dans le domaine de la recherche opérationnelle, la modélisation multiéchelle s'attaque aux défis auxquels sont confrontés les décideurs qui proviennent de phénomènes multiéchelles à l'échelle organisationnelle, temporelle et spatiale. Cette théorie fusionne la théorie de la décision et les mathématiques à plusieurs échelles et est désignée sous le nom de prise de décision multiéchelles. Elle s'appuie sur les analogies entre les systèmes physiques et les systèmes complexes créés par l'homme.

En météorologie, la modélisation à échelles multiples est la modélisation à différentes échelles spatiales et temporelles de l'interaction entre des systèmes météorologiques à l'origine des phénomènes climatiques que nous connaissons. La tâche la plus difficile consiste à modéliser la façon dont les systèmes météorologiques interagissent, ce qui implique de définir l'échelle considérée pour trouver le meilleur compromis entre précision et rapidité des calculs.

D'une manière générale, les recherches associées aux méthodes pour une résolution efficace des problèmes de modélisation multiéchelles reposent sur des développements mathématiques et algorithmiques en pris avec des notions de modélisation analytique, modélisation continue ou discrète, modélisation réticulaire, modélisation statistique. Les techniques de réductionnisme peuvent s'appliquer au cas de phénomènes multiéchelles dès lors qu'aucune interaction directe ne soit observée entre les différentes entités du système. Mais dans ce cas on sort du cadre de la définition d'un système complexe et les notions de couplage ou non linéarité devront être superposées à l'analyse pour appréhender la complexité.

Remarquons également que le niveau considéré ou la taille de l'échelle ne conditionnent pas la précision du résultat mais correspondent à des objectifs différents et parfois complémentaires. L'examen d'un patient par un médecin peut conduire à l'identification d'une pathologie. Le biologiste qui fera l'examen sanguin mettre en évidence quant à lui le dysfonctionnement d'un organe ou d'une fonction corporelle. On le voit la profondeur d'exploration d'un système complexe multiéchelles permet de compléter de façon biunivoque, des perceptions établies à différents niveaux de décomposition.

- Interactions et Bouclages [8, 35, 33, 34, 3, 24, 16, 36]

Le phénomène de bouclage correspond à la relation réciproque qu'entretiennent deux entités en interaction. La dynamique à l'intérieur de la boucle entre deux entités s'apparente à un processus complexe, générant des effets différents et cumulatifs au fil des cycles initiés au sein de la boucle causale. Chacune des entités impliquées dans l'interaction peut avoir des effets non linéaires potentiels sur elle-même induits par le phénomène de bouclage. Cet effet de boucle peut générer des effets de causalité indirecte non linéaires dans le temps. Ils sont plus connus sous le vocable d'effets dits "multiplicateurs". Ces effets peuvent augmenter lorsque les valeurs des effets directs augmentent. Les effets peuvent devenir supérieurs à 1 lorsque la valeur de l'effet de boucle en tant que multiplicateur devient supérieure à 1. Les entités peuvent s'amorcer mutuellement dans la dynamique causale de leur interaction, en s'appuyant sur le pouvoir génératif de l'interaction et de son effet multiplicateur non linéaire potentiel. Ils sont à la base d'une nouvelle réflexion sur la causalité en tant que concept non linéaire et sur son rôle dans la nouvelle pensée relative à la complexité causale.

Plusieurs exemples permettent d'illustrer ce concept. Dès que l'abeille ingère le sucre des fleurs, elle recueille et transporte le pollen. Les plantes bénéficient du transport de pollen par les abeilles et en retour, ces dernières profitent d'une récompense en nectar et pollen. Un lien d'indépendance interactive est ainsi établi entre ces deux entités vivantes. Pour les plantes, cette symbiose assure la reproduction et la diversité génétique nécessaire à leur évolution ; alors que pour les abeilles, la quête de nectar et de pollen est indispensable à leur survie.

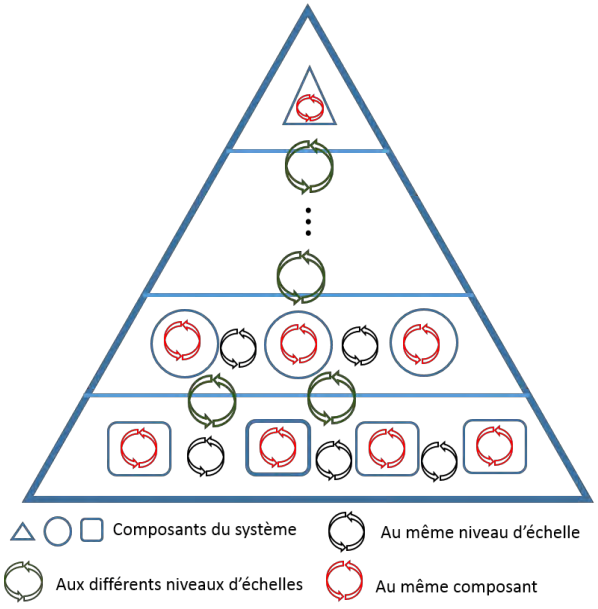


Figure I.2 Système complexe multiéchelles avec bouclages

On peut retrouver ce genre d'interactions dans beaucoup d'autres domaines : système immunitaire (qui protège des infections mais qui se trouve affaiblit par leur présence), système économique (qui fixe le prix du marché en fonction de l'offre et de la demande), écosystème (au sein d'une biocénose par exemple, différents types d'interactions sont observés entre individus d'espèces différentes (interactions interspécifiques) ou de la même espèce (interactions intraspécifiques). Ces interactions peuvent être nuisibles, neutres ou bénéfiques.

On distinguera trois types de bouclages : le bouclage entre échelles, le bouclage entre composants de la même échelle, le bouclage au sein d'une même entité ou d'un même composant voir la Figure I.2.

Prenons l'exemple d'un écosystème de type forêt. Une interaction multiéchelles (dans la dimension « qui mange qui ») peut par exemple être observée au sein de la faune et de la flore. Beaucoup plus qu'ils ne se côtoient, les organismes végétaux et animaux d'un écosystème forestier ont, en effet, un besoin vital les uns des autres. Cette chaîne de la vie peut s'illustrer, dans le sens proie prédateur, par les feuilles qui nourrissent les chenilles, à leur tour consommées par la mésange qui finalement servira de proie à l'épervier. Dans le sens inverse, le risque de prédation induit des comportements typés (camouflage, protection naturelle, fuite, difficulté d'accès à l'habitat,…) A une même échelle les interactions peuvent se caractériser par une relation de compétitions entre composants comme par exemple la lutte entre arbres pour accéder à la lumière par exemple dans une forêt dense. Au sein d'un même composant on pourra par exemple mettre en évidence des interactions reposant sur une association interne entre deux partenaires. La connexion entre les deux partenaires est telle qu'on dit que les deux partenaires agissent comme un seul organisme. C'est ainsi le cas entre un champignon et une plante. Il y a bénéfice réciproque pour les deux partenaires. Le champignon retire des éléments organiques fournies par la plante du fait de la photosynthèse. Le champignon permet d'augmenter la surface d'absorption au niveau du système racinaire de la plante. Il va donner à la plante de l'azote et du phosphore, et va être capable de stocker et de libérer des éléments à la demande de la plante.

- Auto-adaptation-organisation (AAO) [22, 5, 33, 24, 37, 20, 23, 29, 38, 39]

De nombreux systèmes naturels (cerveaux, systèmes immunitaires, écosystèmes, sociétés) et, de plus en plus, de nombreux systèmes artificiels (systèmes informatiques parallèles et distribués, systèmes d'intelligence artificielle, réseaux neuronaux artificiels, programmes évolutifs) se caractérisent par des comportements apparemment complexes qui émergent à la suite d'interactions spatio-temporelles souvent non linéaires entre un grand nombre de systèmes composants à différents niveaux d'organisation. Ces systèmes sont récemment connus sous le nom de systèmes adaptatifs complexes. Le cadre théorique dans lequel s'inscrivent ces systèmes est fondé à la base sur les travaux en sciences naturelles. Leur analyse est effectuée au moyen d'une combinaison de méthodes appliquées, théoriques et expérimentales le plus souvent du domaine des mathématiques et/ou de la simulation informatique.

Les systèmes adaptatifs sont des systèmes dynamiques capables de s'adapter et d'évoluer dans un environnement changeant. Notons qu'il n'y a pas de séparation entre un système et son environnement dans l'idée qu'un système s'adapte toujours à un environnement changeant. Le concept à examiner est plutôt celui d'un système étroitement lié à tous les autres systèmes connexes constitutifs de l'écosystème. Dans un tel contexte, le changement doit être considéré en termes de coévolution avec l'ensemble des systèmes auxquels ils sont connectés, plutôt que comme une adaptation à un environnement distinct et distinct.

Le concept de coévolution part du principe que les éléments d'un système peuvent changer en fonction de leurs propres interactions et de l'influence de l'environnement dans lequel ils évoluent. En outre, les modèles de comportement de

chaque entité peuvent eux-mêmes évoluer dans le temps. Les systèmes adaptatifs sont aussi sensibles aux conditions initiales. Les changements dans les caractéristiques ou les règles d'entrée ne sont pas corrélés de façon linéaire avec les résultats. De petits changements peuvent ainsi avoir un impact fort sur le comportement du système global, ou à l'inverse, un énorme bouleversement du système peut être sans conséquence sur un composant.

Les recherches sur les systèmes adaptatifs complexes ont mis en évidence une dynamique combinant ordre et chaos. Cette découverte renforce l'idée d'instabilité limitée ou limite du chaos qui se caractérise par un état paradoxal : stabilité et instabilité, compétition et coopération, ordre et désordre.

- Non-linéarité et Dynamique [22, 8, 20, 36, 40, 27]

Un système dynamique est un système dont l'état (et les variables) évoluent dans le temps, en fonction de certaines règles. La façon dont un système évolue dans le temps dépend à la fois de ces règles et de ses conditions initiales, c'est-à-dire de l'état du système à un moment donné. L'introduction de cet état initial dans les règles génère une solution (une trajectoire à travers l'espace de phase), qui explique comment le système va évoluer au fil du temps.

Un système linéaire obéit au principe de superpositions (homogénéité et additivité) : toute combinaison linéaire des variables de ce système est elle-même une variable du système. Au contraire, un système complexe présente un caractère non-linéaire dynamique. Il réagit ainsi de façon non proportionnelle à la cause ou à l'entrée caractéristique d'un stimuli (un petit caillou dévalant une pente peut déclencher une avalanche).

Dans un système non linéaire, les équations de mouvement comprennent au moins un terme incluant la puissance carrée ou supérieure, un produit de variables du système (ou des combinaisons de fonctions plus complexes), ou une fonction seuil, de sorte que l'ajout de deux solutions ne donne pas une nouvelle solution valide, quelle que soit la façon dont les variables du système sont définies. Tous les systèmes physiques pouvant être décrits en termes d'équations classiques de mouvement sont non linéaires.

Les conséquences de la non-linéarité sont profondes. Les systèmes non linéaires peuvent tout d'abord présenter plusieurs formes de comportement ou de réaction à des variations externes. La non-linéarité dynamique est en effet liée aux interactions entre composants et est fortement associée aux conditions initiales. Cette sensibilité aux états initiaux rend difficile la prévision.

La non-linéarité peut également donner lieu à des formes de comportement particulières. Des cycles peuvent être observés à l'intérieur de l'espace d'état du système avant de se stabiliser en se refermant sur eux-mêmes. Il est même possible (et assez courant) qu'une trajectoire soit confinée à une région de l'espace d'état où il n'y a pas de cycles limites ou de points fixes stables. Le système semble alors suivre une trajectoire irrégulière qui semble se rapprocher d'une position limite mais sans jamais l'atteindre. Deux systèmes identiques qui se rapprochent arbitrairement l'un de l'autre dans l'espace peuvent ensuite diverger rapidement. Ces phénomènes sont désignés sous le vocable de chaos. Il s'agit de mouvements ne conduisant pas systématiquement à une stabilisation sur un point fixe ou s'inscrivant dans un cycle limite. Le système reste ainsi confiné dans une région finie de l'espace d'état mais ne revient jamais exactement à l'un des points qu'il a visités auparavant. En fait, presque tous les systèmes dynamiques sont chaotiques pour certaines valeurs de paramètres.

Les effets de la non-linéarité deviennent beaucoup plus difficiles à caractériser ou à prévoir lorsque de nombreux degrés de liberté interagissent. La complexité des solutions peut alors devenir immense et de nombreuses questions

mathématiques fondamentales sur ces systèmes constituent encore aujourd'hui des problèmes ouverts. Néanmoins, le langage et les techniques associées à l'étude de la dynamique des phénomènes non linéaires sont utiles pour formaliser des problèmes et proposer des formes de modélisation approchée.

- Incertitude [22, 8, 23, 33, 25, 24, 36, 1, 20, 27]

La notion d'incertitude est présente quelles que soient les échelles du système considérées. Elle est liée bien sûr à la non-linéarité des phénomènes observés mais aussi aux interactions entre composants.

L'incertitude associée à une variable ou à un paramètre, dont dépend le comportement variable dans le temps d'un système complexe (machine, structure, écosystème, être humain, etc...), peut être considérée selon deux schémas alternatifs :

1. Conflit entre valeurs alternatives disjointes. Par exemple, dans le cas d'un jeu de dés, des valeurs alternatives et conflictuelles sont possibles. Ici, le conflit naît du fait que la survenance d'une valeur exclut toutes les autres valeurs et contraste avec la prévision a priori. La modélisation de ce type d'incertitude correspond à la théorie moderne des probabilités.

2. Non-spécificité par rapport à un ensemble de valeurs alternatives, chacune devant être considérée comme également possible. Par exemple, une mesure obtenue à l'aide d'un instrument à faible sensibilité donne un intervalle de valeurs possibles ; si une analyse plus poussée obtient une valeur précise, elle n'entrerait pas en conflit avec la prévision a priori, à condition qu'elle se situe à l'intérieur de cet intervalle. Ce type d'incertitude fait l'objet d'une analyse par intervalle ou plus généralement de la théorie classique des ensembles.

Une première dimension relative à la notion d'incertitude établit un lien entre le type d'incertitude et la nature du jugement. L'incertitude modale est l'incertitude relative à ce qui est possible, logique, concevable, faisable... Cette incertitude concerne donc la composition de l'espace des états et des conséquences, et donc les actions possibles. (Dans le cas le plus grave d'incertitude modale, on n'est pas conscient de certains états et/ou conséquences). L'incertitude empirique est l'incertitude quant à ce qui est (ou a été ou serait) le cas. Une telle incertitude peut être présente même si toutes les incertitudes modales sont résolues, puisqu'elle est liée à l'état actuellement (ou précédemment ou ultérieurement) occupé par le système (notons que le contraire est également vrai : on peut être sûr de l'état actuel du monde, tout en étant incertain de ce qu'il aurait pu être). Finalement, l'incertitude normative est l'incertitude relative à ce qui est souhaitable ou devrait l'être. L'incertitude normative peut être présente même si toute l'incertitude modale et empirique est résolue. L'état du système est connu, mais on ne sait pas quelle valeur attacher aux conséquences qui découlent de la réalisation d'une action lorsque cet état est dominant. (Le contraire est également possible : on peut être sûr de la valeur à attacher à un résultat sans savoir l'on se trouve vraiment dans l'état dans lequel il se produira) [41, 42, 43, 44].

Une deuxième dimension concerne la difficulté à évaluer la force de l'incertitude. Sa valeur est une caractéristique qui dépend de la quantité d'information pertinente à disposition, de la cohérence de cette information et des capacités d'inférence et de jugement. On distinguera dans un ordre décroissant de sévérité de l'incertitude :

1. l'ignorance : lorsque aucune information pertinente n'est disponible.

2. l'incertitude grave : lorsqu'on ne dispose que de peu d'informations pour porter un jugement partiel ou imprécis (on parle aussi d'ambiguïté).

3. l'incertitude faible : lorsque la quantité d'informations à disposition du décideur est suffisamment représentative pour qu'il puisse porter un jugement statistiquement fondé.

4. la certitude : lorsque la signification du jugement est donnée ou connue.

L'évaluation des incertitudes s'appuie classiquement sur la théorie de probabilités mais peuvent également nécessiter l'apport d'autres techniques comme la théorie de la non-linéarité dynamique, la théorie du Chaos, la théorie des réseaux, la théorie des graphes ou les systèmes multi-agents pour n'en citer que quelques-unes.

De cette analyse des différentes caractéristiques constitutives de la complexité il ressort que celles-ci sont souvent liées. L'émergence est profondément linéaire, incertaine et d'autant plus imprédictible que le nombre de composants caractéristiques de sa structure est grand ; les systèmes auto organisés mettent en avant des formes d'interaction inter ou intra échelles ; … Appréhender un système complexe nécessitera le plus souvent d'être capable d'appréhender simultanément plusieurs de ces caractéristiques. Les principes de l'ingénierie système constituent un guide intéressant pour mener à bien ce type d'analyse.

Dans ce travail, nous proposons un outil susceptible de combiner plusieurs facettes de la complexité associées respectivement au nombre de composants et d'échelles, aux formes d'interactions et de bouclage, aux niveaux d'incertitude, à la non-linéarité dynamique et aux modèles multi-agents.

Le prochain paragraphe précise les ambitions du travail réalisé dans le cadre de la thèse.

I.3 Définition de la problématique de la thèse

Le travail qui sera entrepris aborde la modélisation et l'analyse de systèmes complexes, caractérisés, dans un cadre incertain et évolutif, par de nombreuses interactions entre composants. Dans un cadre de gestion des risques, le travail visera à créer un modèle causal spatio-temporel pour l'explication et la probabilisation de certains événements redoutés à des fins de diagnostic et de pronostic. Le travail de modélisation sera basé sur l'approche bayesienne et, plus particulièrement, sur les Réseaux Bayesiens (RB).

A partir d'une représentation graphique, les réseaux bayesiens définissent un modèle causal entre variables influentes vis-à-vis du phénomène étudié. L'inférence permet ensuite de calculer les valeurs (probabilités) associées à chaque variable du modèle. L'intérêt des réseaux bayesiens réside dans le fait qu'ils prennent en compte l'incertitude dans le processus d'analyse et de raisonnement et permettent, et c'est là leur point fort, la propagation des connaissances (observations) dans le modèle pour l'actualisation des probabilités.

Lorsque la composante temporelle entre en jeu, les Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) peuvent être des outils pertinents. Les RBD sont construits par superposition de plusieurs instances de RB, chaque instance correspondant aux interactions entre composantes à un instant t. Le RBD complet est obtenu par ajout de liens entre les instances temporelles. Ce mode de construction utilisé par les RBD permet de réduire la taille des réseaux par la réutilisation et l'instanciation d'une structure de base à différents pas de temps. Cette structure de base s'apparente à un objet utilisable selon une dimension temporelle.

Dans l'optique de considérer des systèmes de grande taille et de représenter leur complexité spatio-temporelle, leur caractère multiéchelle et incertain dans un cadre dynamique, l'idée de ce travail est alors d'étendre le concept des RBD et d'utiliser le paradigme Orienté Objet pour l'appliquer aux réseaux bayesiens.

Ce concept de Réseau Bayesien Orienté Objet n'est pas complètement nouveau. Plusieurs formalismes existent s'appuyant sur l'approche bayesienne dont ils sont une extension. A ce niveau on distinguera différentes techniques telles que les Probabilistic Relational Models [45], Multi-Sectionned Bayesian Networks [46], Relational Bayesian Networks [47], Object Oriented Bayesian Networks [48], Probabilistic Frame-Based Systems [49], Multi-Entity Bayesian Networks [50]. Wuillemin et Torti fournissent un état de l'art intéressant sur le sujet [51].

La représentation structurée offerte par les techniques orientées objets permet d'améliorer les performances des réseaux bayesiens en termes de complexité de spécification et d'inférence de systèmes de grande taille. Un réseau bayesien Orienté Objet, est issu d'une application directe du paradigme objet. L'élément de base est la classe, un fragment de réseau bayesien, dont les nœuds sont décomposés en trois ensembles : une interface d'entrée, de sortie et des nœuds internes. Dans leur forme actuelle, les réseaux bayesiens orientés objet permettent de créer des instances réutilisables mais non instanciables. En d'autres termes, cela implique que l'objet généré est susceptible d'être appelé plusieurs fois dans la construction d'un modèle mais sans pour autant que ces paramètres (tables de probabilités marginales ou conditionnelles) ne soient modifiés.

Ce travail de thèse vise à combler cette lacune en proposant une approche structurée permettant de construire des grands systèmes à base d'objets (caractérisés par des réseaux bayesiens simples) dont les paramètres peuvent être actualisés en fonction de l'instant ou du contexte de leur appel et de leur utilisation. Ce concept sera plus tard concrétisé sous la forme de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels par leur propension à combiner plusieurs dimensions, qu'elles soient spatiales ou temporelles. Les champs applicatifs ce type d'outils sont nombreux. Ils concerneront de nombreux domaines comme la maintenance, la gestion du risque, le marketing, la finance, la biologie et, d'une manière générale, tous les processus induisant des notions de complexité.

I.4 Structuration du mémoire

Pour atteindre l'objectif que nous venons de fixer, le reste du mémoire est subdivisé en 4 parties.

Le deuxième chapitre décrit le mode de construction des Réseaux Bayesiens Multidimensionnels. La théorie associée aux réseaux bayesiens classiques est tout d'abord abordée à travers un rappel des principes de base de l'inférence bayesienne et des méthodes d'apprentissage. Cette théorie est ensuite étendue aux Réseaux Bayesiens Dynamiques. La notion de Réseau Bayesien Orienté Objet est introduite dans sa version courante. Après avoir identifié les limites actuelles de ce type de modélisation, une nouvelle approche « paramétrable » est proposée. Le paradigme de la théorie des objets est rappelé et déployé sur les réseaux bayesiens pour donner naissance aux Réseaux Bayesiens Multidimensionnels.

Le troisième chapitre traite la problématique de paramétrage des variables et, plus particulièrement, les techniques d'apprentissage des Réseaux Bayesiens Multidimensionnels. Si, en ce qui concerne les réseaux bayesiens, les techniques d'apprentissage sont largement éprouvées, il n'en est pas de même pour les Réseaux Bayesiens Orientés Objets. Des techniques basées sur des algorithmes d'apprentissage dédiés existent mais s'avèrent compliquées à mettre en œuvre dès lors que le modèle grandit en taille. L'apprentissage des Réseaux Bayesiens Multidimensionnels vise à définir les

interactions entre les variables du réseau, à l'image de l'apprentissage d'un réseau bayesien classique, mais aussi à établir les liens entre les instances temporelles. Pour des systèmes partiellement observables, la complexité des modèles obtenus impose des algorithmes d'apprentissage spécifiques [8] dont la complexité augmente exponentiellement avec la taille du modèle. Ce chapitre vise à réduire cette complexité.

Sur la base de ces développements, le quatrième chapitre aborde les principes d'inférence dans les réseaux bayesiens Multidimensionnels. Deux cas sont considérés. Le calcul de l'information a priori permettant d'établir les valeurs de probabilités des différentes modalités de chaque variable est d'abord présenté. Dans un deuxième temps, les principes d'inférence associés à l'intégration d'une connaissance supplémentaire dans le réseau (évidence ou mise à jour d'une valeur de probabilité) sont établis.

Finalement, dans l'optique de validation des concepts développés dans le cadre de cette thèse, les développements seront appliqués à la modélisation et l'analyse du comportement de systèmes autonomes interconnectés (ou systèmes de systèmes). Face à un événement indésirable subi par un de ces systèmes, et pour une évaluation globale de risques encourus par l'ensemble, il est nécessaire de prendre en compte la propagation de l'impact initial à travers l'interdépendance et le temps. Au regard de la quantité de données à traiter et de son caractère stochastique, le cas d'étude concernera la modélisation du système pour l'évaluation du risque d'inondation induit par des crues torrentielles en zone montagneuse. Dans ce cadre, les systèmes concernés par l'étude sont des systèmes naturels (topologie, météorologie, hydrologie) ou anthropiques (infrastructures). Les données à collecter sont nombreuses et mettent en jeu des capteurs, des bases de données et de l'expertise.

I.5 Conclusion

A des fins de positionnement du travail de recherche, cette partie a été consacrée à une introduction illustrée de la notion de système complexe. Des exemples ont été fournis qui montrent le caractère complètement transverse de la recherche associée à la complexité en tant que discipline. Aujourd'hui encore il semble qu'il n'y ait pas un vrai consensus sur la notion de complexité. Plusieurs définitions ont ainsi été proposées dans ce chapitre. Par la suite, une segmentation de la théorie de la complexité a permis de mettre en évidence des recherches relatives aux notions d'émergence, de systèmes multiéchelles, de phénomènes d'interaction ou de bouclage, de structures auto organisées ou adaptatives, de comportement non linéaire dynamiques ou d'incertitude. De la synthèse réalisée ressort également que la quantification est une étape essentielle de la modélisation des systèmes complexes en vue de réaliser des prédictions et de mieux contrôler ce type de système. Sur la base de ce constat, la problématique de thèse a été établie. Elle concerne la proposition d'un cadre méthodologique et analytique pour la construction de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels. La structure du mémoire vient clore ce premier chapitre.

Chapitre II

Vers les Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM)

Introduction

Les modèles graphiques probabilistes facilitent la représentation des relations complexes en termes notamment d'incertitude et de dynamique entre les composants d'un système. Parmi ces modèles graphiques, les réseaux bayesiens (RB) constituent un outil efficace. Ils ont été largement utilisés dans de nombreux champs d'application de la vie moderne [52, 48, 53]. Néanmoins, quand la taille des systèmes à modéliser et le nombreux de relations entre composants augmentent, les RB voient leur capacité de modélisation limitée notamment en termes d'interprétation visuelle du modèle, de détermination de ses paramètres ou de propagation des observations locales. Pour lever ce verrou, le concept orienté objet a été introduit afin de pourvoir découper, lorsque ses caractéristiques s'y prêtent, un grand système en sous-ensembles de taille facilement appréhendable. Cette notion de découpage en entités élémentaires a alors ouvert la voie aux Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) [54, 55, 56]. Cette forme de modélisation n'est cependant pas universelle et n'est envisageable que si la décomposition conduit à des sous-systèmes homogènes, voire identiques. On peut également faire référence dans le cadre de la prise en compte de la grande taille des systèmes à modéliser, en plus des RBOO, les RB hiérarchiques [57]. L'utilisation des RBOO pour modéliser des systèmes de grande taille à composants hétérogènes n'est donc pas adaptée. Dans l'objectif d'étendre l'utilisation des réseaux Bayesiens pour modéliser des systèmes à forte complexité, nous introduisons dans ce chapitre une extension des RBOO classiques qualifiés par la suite de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM). L'objectif est de modéliser des systèmes de grande taille à composants hétérogènes (essentiellement en matière de paramètres) et pouvant évoluer sur plusieurs dimensions (modélisation par exemple de l'évolution spatio-temporelle d'un système). Le chapitre est organisé autour de deux grandes parties. La première partie rappelle les principes de fonctionnement des Réseaux Bayesiens (RB), Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) et Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) dans leur forme actuelle. La deuxième partie est consacrée à l'introduction du concept de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM). La définition des concepts de base de cette nouvelle approche de modélisation est suivie par l'énoncé des règles de construction de ce type de modèle.

II.1 Méthodes basées sur les réseaux Bayesiens

II.1.1 Réseaux Bayesiens (RB)

Les réseaux bayesiens sont des modèles graphiques autorisant une représentation facile et graphique des relations « cause-effet » entre les variables d'un domaine de connaissance où les variables sont représentées par des nœuds et les relations par des arcs orientés. Les variables peuvent prendre leurs modalités (i) dans un ensemble discret, on parle dans ce cas de nœuds discret et on désigne les valeurs par modalités ou (ii) dans un ensemble continu, on parlera dans ce cas de nœuds continus. Les RB peuvent se prévoir de beaucoup de vertus en termes de modélisation : facilité de représentation des relations entre variables ; possibilité d'apprentissage des paramètres par l'analyse statistique et connaissance experte ; la possibilité de propagation (inférence) d'une observation ou évidence locale pour remettre à jour les connaissances sur l'ensemble ou partie des variables du réseau. L'ensemble de ces caractéristiques ont conduit à leur utilisation dans beaucoup de domaines comme l'industrie, la biologie, le génie civil, la finance, l'économie, la médecine, la robotique, … [57, 52, 48, 58] et au développement de plateformes logicielles basées sur cette technique. Le principe mathématique sous-jacent des RB est le théorème de Bayes. Nous le rappelons ci-dessous.

II.1.1.1 Théorie de Bayes

Le théorème de Bayes [59] du nom du mathématicien et pasteur Britannique, permet de mettre à jour des estimations de probabilités à partir d'observations. On appelle cela l'inférence statistique. Le principe est le suivant : étant donnés deux événements A et B, le théorème de Bayes permet de déterminer la probabilité de A sachant que B a eu lieu notée $P(A|B)$. Si $P(A)$ et $P(B)$ $avec$ $P(B) \neq 0$ sont les probabilités respectives a priori des événements A et B alors $P(A|B)$ est donnée par l'équation (**1**) :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \textbf{\textit{Equation 1}}$$

Le théorème de Bayes s'appuie sur le théorème des probabilités conditionnelles et sur celui des probabilités totales. Il permet de corriger les probabilités a priori avec de nouvelles informations. Ces caractéristiques lui confèrent des vertus d'utilisation comme outil d'aide à la décision. Pour illustrer ce propos considérons le problème de décision suivant :

Il s'agit de déterminer si un patient a la fièvre ou pas (événement F) en prenant sa température (événement T). Avant la prise de température, et par expérience de la population dans laquelle vit le patient, on dispose des données suivantes :

- $P(F)$ *: probabilité a priori d'avoir la fièvre pour un individu lambda tiré au hasard ;*
- $P(T)$ *: probabilité a priori d'avoir un certain niveau de température*
- $P(T|F)$ *: probabilité d'avoir un certain niveau de température lorsque le patient a la fièvre*

Si la température du patient est connue, on peut calculer la probabilité $P(F|T)$ *qu'il ait la fièvre en utilisant la formule de Bayes :*

$$P(F|T) = \frac{P(T|F)P(F)}{P(T)}$$

Le médecin peut se servir de la valeur de cette probabilité pour établir son diagnostic (prendre une décision).

II.1.1.2 Définition formelle de RB [60, 61, 62, 63]

Formellement un Réseau Bayesien (RB) est donné par un graphe orienté acyclique $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon)$ où $\mathcal{V} = (N_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'ensemble des nœuds modélisant les variables aléatoires et ε est l'ensemble des arcs représentant les relations causales entre nœuds. Un nœud N_i est caractérisé par $N_i = \{\Omega, \Theta\}$ où Ω représente l'ensemble des modalités associées à un nœud discret et l'ensemble des valeurs possibles pour un nœud continu. Θ correspond aux paramètres associé à N_i (table de probabilité conditionnelle (CPT) pour un nœud discret ou fonction densité de probabilité conditionnelle pour un nœud continu).

Ainsi un RB est complètement défini par la description qualitative des indépendances conditionnelles entre les variables et la caractérisation quantitative des dépendances en termes de probabilités conditionnelles. La probabilité conjointe $P(N_1, N_2, \dots, N_n)$ d'avoir les n événements ou variables s'obtient par la relation de l'équation (2) représentant le théorème de Bayes sur le réseau.

$$P(N_1, N_2, \dots, N_n) = P(N_1)P(N_2|N_1)P(N_3|N_2, N_1) \dots P(N_n|N_{n-1} \dots N_1) \qquad \textbf{\textit{Equation 2}}$$

Exemple illustratif

Pour illustrer l'utilisation d'un RB pour la modélisation d'un problème concret, considérons le cas suivant. Le modèle concerne la caractérisation du volume d'eau recueilli par un bassin versant et susceptible de ruisseler pour générer une crue. Selon les experts hydrauliciens et géographes les variables influentes sont : les précipitations (liquides : pluie et solide : neige), la température, le manteau neigeux, la fonte de neige, l'ensoleillement (radiations), l'humidité de l'air, et le ruissellement (approvisionnement en eau). Les variables identifiées ici sont continues. Afin de les prendre en compte dans un réseau bayesien on les discrétise en intervalles d'appartenance appelés modalités (Tableau II.1).

Nom	***Modalités***
précipitation	*Faible, Moyenne, Forte*
précipitation liquide : pluie	*Faible, Moyenne, Forte*
précipitation solide : neige	*Faible, Moyenne, Forte*
température	*Basse, Moyenne, Haute*
manteau neigeux	*Léger, Moyen, Fort*
fonte de neige	*Légère, Moyenne, Forte*
ensoleillement : radiations	*Faible, Moyenne, Forte*
humidité d'air	*Faible, Moyenne, Forte*
ruissellement : approvisionnement en eau	*Faible, Moyenne, Forte*

Tableau II.1 Liste de variables

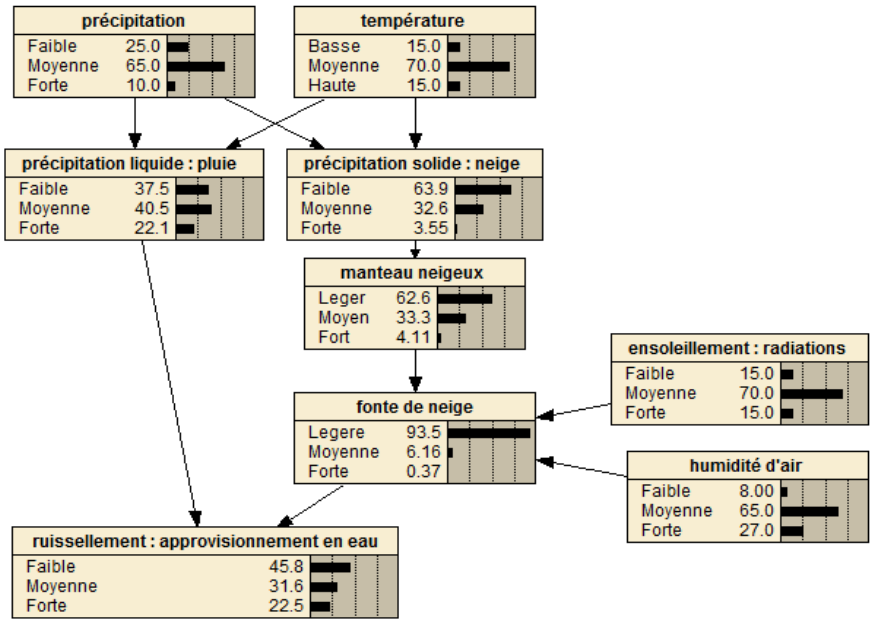


Figure II.1 Exemple de Réseau Bayesien

En termes de relations entre ces variables, et toujours d'après les experts, les variables Précipitation, Température, Radiations, Humidité Air ne sont influencées par aucune autre variable ; les variables Précipitation Liquide et Précipitation Solide sont influencées chacune par les variables Précipitation et Température ; Précipitation Solide influence la variable Manteau Neigeux qui à son tour et conjointement avec les variables Radiations et Humidité Air influence la variable Fonte Neige ; enfin la variable Approvisionnement en eau est

influencée conjointement par les variables Précipitation Liquide et Fonte Neige. En termes de RB, les relations décrites ci-dessus se traduisent par le graphe de la Figure II.1.

Pour finir la modélisation, il faut définir les paramètres. Cela concerne tout d'abord les nœuds n'ayant pas de parent pour lesquels on définit des probabilités a priori associées à chaque modalité. Les nœuds concernés ici sont les nœuds Précipitation, Température, Radiations, Humidité Air. Il faut ensuite définir les tables de probabilités conditionnelles associées aux nœuds enfant. Les variables concernées sont ici : Précipitation Liquide, Précipitation Neige, Manteau Neige, Fonte Neige, Approvisionnement Eau. A titre d'illustration nous donnons, les paramètres correspondant aux nœuds Température et Manteau Neige respectivement (Tableau II.2 et Tableau II.3).

Probabilité de Température	
basse	*15%*
moyenne	*70%*
haute	*15%*

Tableau II.2 Paramètres de la variable Température

Parent (Précipitation Neige)	***Probabilités conditionnelles de Manteau Neige***		
	léger	*moyen*	*fort*
faible	*85%*	*15%*	*0%*
moyenne	*25%*	*70%*	*5%*
forte	*5%*	*25%*	*70%*

Tableau II.3 Paramètres de la variable Manteau Neige

L'objectif principal de la modélisation du comportement système par les RB est d'utiliser ce modèle comme outil d'aide à la décision. Cela passe par la mise en place de techniques d'inférence. Les principes associés au déploiement de l'inférence seront considérés dans la section suivante.

II.1.1.3 Techniques d'inférence

Un atout important des RB est leur capacité à inférer les informations locales c'est-à-dire à propager les informations locales au réseau global en vue de la mise à jour des connaissances a priori. En matière de techniques d'inférences rencontrées dans la littérature, on distingue : l'inférence exacte et l'inférence approchée. Pour l'inférence exacte, trois algorithmes principaux sont utilisés respectivement intitulés « passage de messages » [63, 64], « Arbre de Jonction » [60] et méthode de « Shafer-Shenoy » [60, 65]. Pour les méthodes approchées, l'échantillonnage et les méthodes variationnelles sont les méthodes couramment utilisées. Actuellement, les algorithmes de « Shafer-Shenoy » et la méthode de « l'Arbre de Jonction » sont les plus implémentées dans les logiciels pour faire de l'inférence exacte.

II.1.1.3.1 Inférence exacte

II.1.1.3.1.1 Inférence par passage de message

Le principe de la méthode de l'inférence par passage des messages est le suivant : chaque nœud envoie des messages en termes de probabilités à ses voisins [64]. La mise à jour des probabilités est basée sur le théorème de Bayes de proche en

proche. Malheureusement cette méthode n'est applicable que pour des réseaux sous forme d'arbres (au sens de la théorie des graphes, chaque nœud du graphe ne doit pas avoir plus d'un parent) ou de poly-arbres (graphe connecté acyclique orienté simplement) [66] comme illustré par la Figure II.2. Cette contrainte limite considérablement l'utilisation de cette méthode pour l'inférence d'un grand nombre de cas pratiques.

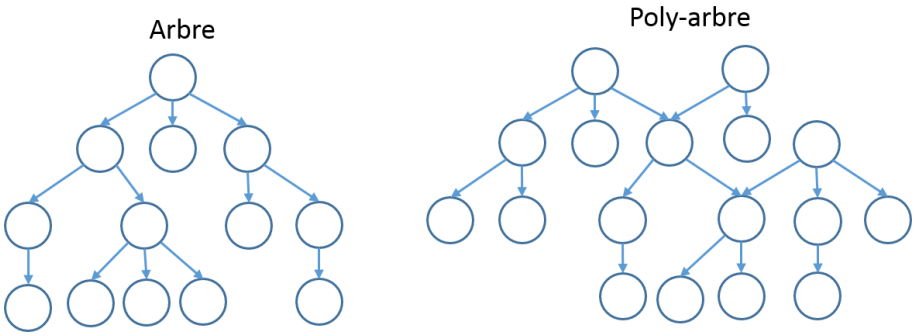


Figure II.2 Arbre et Poly-arbre

Il y a donc besoin d'un algorithme d'inférence plus général. L'algorithme basé sur l'arbre de jonction introduit par Jensen [60, 67] et que nous présentons par la suite vient lever ce verrou.

II.1.1.3.1.2 Inférence par la méthode de l'arbre de jonction

L'idée principale de « Arbre de Jonction » est la transformation du graphe orienté en un arbre non orienté. L'arbre de jonction est construit à partir d'entités élémentaires appelées « cliques ». Une clique est un ensemble de variables du graphe moralisé et triangulé (notions qui seront expliquées par la suite). La construction de l'arbre de jonction d'un réseau bayesien s'effectue en trois étapes :

1. moralisation du graphe original (réseau bayesien original)
2. triangulation du graphe moral
3. construction de l'arbre de jonction à partir du graphe triangulé

A partir de la construction du graphe, l'inférence permet de calculer les probabilités quand de nouvelles informations concernant un ou plusieurs nœuds sont propagées à l'ensemble du réseau. Il permet la mise à jour de toutes les probabilités marginales du réseau. L'arbre de jonction peut être utilisé plusieurs fois pour propager informations dans un RB. La construction d'un arbre de jonction peut se faire sur tout type de réseau, il n'y a pas de restriction structurelle comme c'est le cas pour la méthode de passage de messages. Nous détaillons ci-dessous les étapes de l'inférence par l'arbre de jonction.

- ***Moralisation*** : la moralisation consiste à marier les parents (deux parents ayant un enfant commun doivent être reliés entre eux) de chaque nœud et à supprimer les orientations. Consécutivement à l'étape de moralisation, le graphe est qualifié de graphe moral.
- ***Triangulation*** : tout cycle de longueur supérieure à 3 dans un graphe moral doit contenir une corde. Une corde est une arête qui relie deux sommets non consécutifs sur le cycle.

La triangulation sur un graphe moral lui confère le statut de graphe triangulé. Dans [68, 69], les auteurs présentent les principes de triangulation d'un graphe.

- ***Clique*** : c'est un sous-graphe dont les nœuds sont complètement connectés.
- ***Clique maximale*** : une clique est dite maximale si en lui ajoutant un nœud il perd la propriété de clique.
- ***Arbre de jonction*** : c'est un graphe non-orienté construit à partir d'un graphe triangulé en suivant un ordre d'élimination. Dans un arbre de jonction, les cliques sont reliées par les séparateurs.
- ***Séparateur*** : c'est un ensemble de nœuds à l'intersection de deux cliques. Ces nœuds autorisent la communication entre cliques.

L'exemple ci-dessous illustre les principes de construction d'un arbre de jonction :

Etape1 : Moralisation

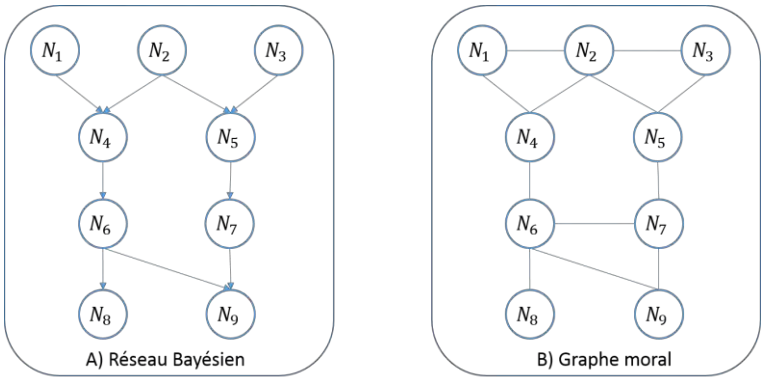


Figure II.3 Un réseau bayesien et son graphe moral

Figure II.3 présente un réseau bayesien constitué de neuf nœuds et le graphe moral qui lui correspond.

Etape 2 : Triangulation

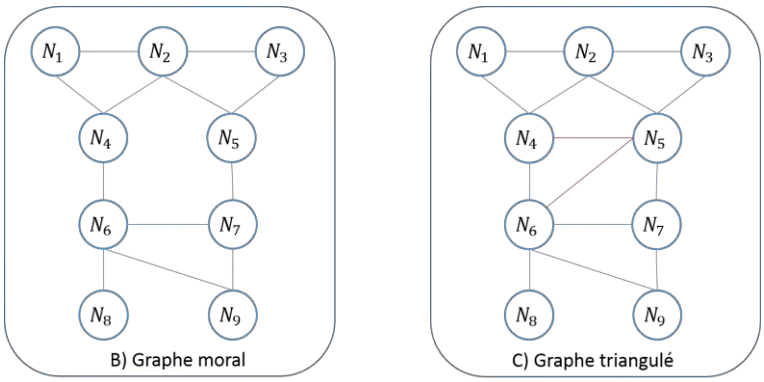


Figure II.4 Graphe moral et Graphe triangulé

Figure II.4 présente le graphe triangulé issu du graphe moral. Les deux arêtes rouges dans C sont les cordes. Le graphe triangulé n'est pas toujours unique comme dans C les cordes peuvent être en reliant $N_4 - N_7$ ainsi que $N_5 - N_6$.

Etape 3 : Construction d'un arbre de jonction

L'arbre de jonction est établi à partir du graphe triangulé obtenu à l'issue de l'étape précédente. Comme l'ordre d'élimination peut varier, l'arbre de jonction du réseau n'est pas unique [70, 60]. Ici nous suivrons l'ordre $N_1, N_2, N_4, (N_6, N_3, N_5, N_8, N_7, N_9)$ pour avoir l'arbre comme sur la Figure II.5.

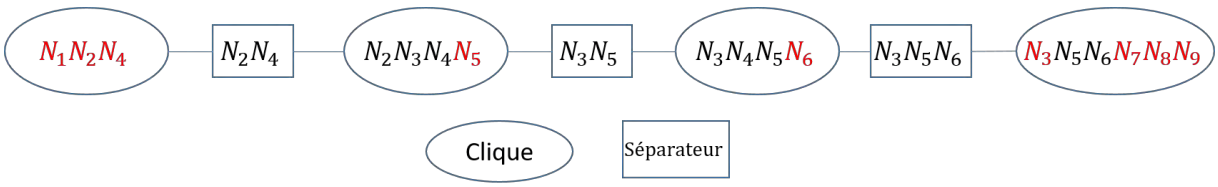


Figure II.5 Arbre de jonction

La phase de propagation dont l'objectif est de calculer les probabilités marginales dans le réseau s'effectue après avoir construit et initialisé l'arbre de jonction. La technique utilisée résulte de l'application de la loi conjointe en faisant la somme du produit des fonctions des cliques ou des séparateurs pour fusionner les informations associées à chaque variable. L'initialisation d'un arbre de jonction consiste à :

1. affecter la valeur 1 à chaque séparateur;
2. associer les probabilités conditionnelles des variables de chaque clique.

Par exemple, sur la Figure II.5, la variable en rouge dans une clique représente une association de probabilités. A la clique $N_3N_5N_6\ N_7N_8N_9$ sont associées les probabilités de $N_3{-}p(\ N_3), N_7 - p(\ N_7|N_5), N_8 - p(N_8|N_6), N_9 - p(N_9|N_6\ N_7)$. Après l'initialisation des cliques, on évalue les probabilités marginales afin de préparer l'information pour le séparateur. Par exemple, pour la propagation initiale (sans évidence) du schéma de la Figure II.5, on effectue dans la clique $N_1N_2N_4$, le produit $f(\ N_1N_2N_4) = p(N_1)p(N_2)p(N_4|\ N_1, N_2)$ et pour avoir la probabilité marginale de la variable N_4 on fait l'addition du produit des fonctions : $p(N_4) = \sum_{N_1N_2} f(\ N_1N_2N_4)$ en éliminant les variables $N_1\ et\ N_2$. L'information envoyée au séparateur N_2N_4 est obtenue en additionnant le produit des fonctions de la clique considérée $\sum_{N_1} f(\ N_1N_2N_4)$ en éliminant la variable N_1. Dans les séparateurs, les informations reçues sont mises à jour et transmises à la clique correspondante [60, 66].

A des fins de rapidité de calcul, l'approche de Hugin présentée dans [71, 72, 73] utilise le stockage de résultats intermédiaires à partir de séparateurs (par exemple on stocke $\sum_{N_1} f(\ N_1N_2N_4)$) pour la réalisation progressive des calculs. Pour augmenter l'efficacité et la vitesse de calcul, la méthode « Lazy Propagation » [71, 74] quant à elle retarde au maximum la réalisation de la multiplication. Considérons la clique $N_3N_5N_6\ N_7N_8N_9$ dans le cas de propagation initiale pour préparer l'information à envoyer au séparateur $N_3N_5N_6$. On doit d'abord calculer le produit des fonctions $f(\ N_3N_5N_6N_7N_8N_9) = p(\ N_3)p(\ N_7|N_5)p(N_8|N_6)p(N_9|N_6\ N_7)$, puis éliminer les variables $N_7N_8N_9$ par addition. En opérant la multiplication après la somme le calcul est simplifié et conduit à transmettre la valeur $p(\ N_3)$ au séparateur $N_3N_5N_6$ car $\sum_{N_7} p(\ N_7|N_5) \sum_{N_8} p(N_8|N_6) \sum_{N_9} p(N_9|N_6\ N_7) = 1$.

II.1.1.3.2 Inférence approchée

L'inférence exacte s'appuie sur des tables de probabilités (probabilités conjointes) pour l'établissement des calculs. Si la table de probabilité est large, le calcul exact sera difficile et coûteux en temps de calcul. Pour contourner cette difficulté, des auteurs ont proposé des techniques d'inférence approchée. Il existe trois approches pour réaliser des inférences approchées comme les méthodes « loopy belief propagations » [75], Markov chaine Monte Carlo [76, 77] ou bien encore l'Inférence variationnelle [78, 79, 80].

II.1.1.3.2.1 Loopy belief propagation (LBP)

L'inférence par passage des messages [64] fonctionne sur des structures en forme d'arbres ou de poly-arbre. Cette approche a été adaptée par Pearl [81] pour effectuer une inférence approchée dans les réseaux à boucles. L'idée principale de la méthode LBP est de continuer à passer des messages dans le réseau jusqu'à ce qu'un état (ou une probabilité) de convergence soit atteint. Nous définissons ici quelques notations utilisées dans l'algorithme :

- $\lambda_X(U)$: message envoyé par X à son parent U
- $\pi_X(U)$: message reçu par X de son parent U
- $\lambda_X(X)$: message envoyé par X à lui-même si X est observé

Nous allons illustrer cette approche sur le graphe de la Figure II.6. A l'itération k, la variable X reçoit les messages de ses enfants $\lambda_{Y_j}(X)$ $(Y_j \to X)$ et de ses parents $\pi_X(U_i)$ $(U_i \to X)$, puis la variable X envoie un message à ses enfants $\pi_{Y_j}(X)(X \to Y_j)$ et à ses parents $\lambda_X(U_i)$ $(X \to U_i)$.

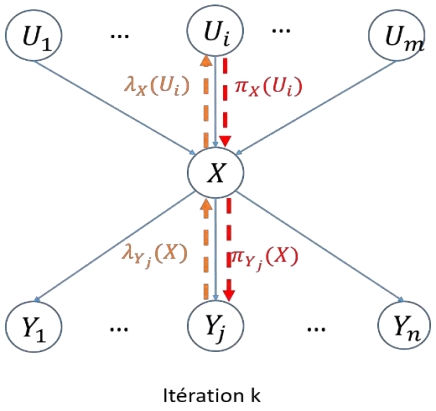


Figure II.6 Propagation des messages

A l'itération k on calcule le paramètre $BEL(X)$ donné par $BEL^{(k)}(X) = \alpha\lambda^{(k)}(X)\pi^{(k)}(X)$ sur lequel le test d'arrêt est effectué où αest un facteur de normalisation et $\lambda^{(k)}(X)$ et $\pi^{(k)}(X)$ sont donnés par les relations ci-dessous :

$$\lambda^{(k)}(X) = \lambda_X(X)\prod_j \lambda_{Y_j}^{(k)}(X)$$

$$\pi^{(k)}(X) = \sum_U P(X|U)\prod_i \pi_X^{(k)}(U_i)$$

$\lambda^{(k)}(X)$ correspond à l'agrégation de toutes les influences enfants (Y_j) de X et $\pi^{(k)}(X)$ celles de ses parents. Le processus est répété jusqu'à ce que la différence des valeurs de BEL obtenues entre deux itérations consécutives soit inférieure à un seuil donné.

II.1.1.3.2.2 Echantillonnage de Gibbs (Markov Chain Monte Carlo)

L'échantillonneur de Gibbs peut être adapté afin de retrouver les probabilités quand les lois de probabilités conditionnelles sont connues [76, 82]. Cette approche utilise la méthode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) qui exploite la topologie du réseau et effectue un échantillonnage de Gibbs sur des sous-ensembles locaux de variables de façon séquentielle et concurrente.

Par exemple, pour un réseau bayesien avec n variables et une observation sur la modalité (ω_e) de la variable $N_{observé}$, on fait l'inférence approchée pour trouver la probabilité d'une variable d'enquête $P(N_{enquête} = \omega_{enquête} | N_{observé} = \omega_e)$ où $\omega_{enquête}$ correspond à sa modalité. L'algorithme d'inférence par l'échantillonnage de Gibbs est présenté dans les encadrés ci-dessous :

Inférence par échantillonnage de Gibbs

1. Initialiser les valeurs des variables $N^{(0)} = \{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, \dots, N_{observé}, \dots N_n\}$

   // Fixer la variable observée à sa modalité ω_e

   // Sélectionner les valeurs de toutes les variables non-observées de manière aléatoire $N_{nonobservé}^{(0)} = \omega_j$

   // où ω_j présente une modalité de la variable non-observée considérée

2. Pour k← 1 jusqu'à K

   // Effectuer k (K=1,2,…k…) fois un tirage aléatoire dans l'ensemble des variables non-observées

3. Donner les valeurs des variables $N^{(k)} \leftarrow N^{(k-1)}$

4. Choisir une variable non-observée N_m

5. Calculer $P(N_m^{(k)} | N_1^{(k)}, N_2^{(k)}, \dots N_{observé}, \dots N_n)$

6. Remplacer la modalité $N_m^{(k)} \leftarrow \omega_j$ avec $argmax_{\omega_j}\{P\left(N_i^{(k)} = \omega_j \middle| N_1^{(k)}, N_2^{(k)}, \dots N_{observé}, \dots N_n\right)\}$

7. Répéter les étapes 4 à 6

8. Calculer $p\left(N_{enquête} = \omega_j | N_{observé} = \omega_e\right) = \frac{K_{\omega_j}}{K}$ où K_{ω_j} correspond à la fréquence $N_m = \omega_j$ dans la base de l'itération.

II.1.1.3.2.3 Inférence variationnelle

L'idée principale de l'inférence variationnelle est de transformer un problème d'inférence probabiliste en un problème d'optimisation variationnelle (« variational optimization » en anglais) par transformation variationnelle (« variational transformation ») [78, 79, 80].

Le principe d'inférence variationnelle se décline comme suit. Supposons que dans un RB, une évidence $E = e$ soit observée. Les variables sans évidence sont $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$. Afin de calculer la probabilité $P(Z|E = e)$, on définit une fonction objectif à maximiser donnée par l'équation (**3**) ci-dessous :

$$J(Q) = log\left(P(E = e)\right) - KL[Q(Z), P(Z|E = e)] \qquad \textbf{\textit{Equation 3}}$$

où $Q(Z)$ est une fonction approchée de $P(Z|E = e)$ appelée distribution variationnelle (« variational distribution »). $KL[Q(Z), P(Z|E = e)]$ est la distance entre la distribution variationnelle $Q(Z)$ et probabilité a posteriori $P(Z|E = e)$. L'équation (**3**) peut être développée comme ci-dessous :

$$J(Q) = \log\left(P(E = e)\right) - \sum_Z Q(Z) log \frac{Q(Z)}{P(Z|E = e)} = -\sum_Z Q(Z) log Q(Z) + \sum_Z Q(Z) log P(Z, E = e)$$

Comme la distance KL ne peut pas être négative, la fonction objectif atteint son maximum quand la probabilité a posteriori $P(Z|E=e)$ est égale à la distribution variationnelle $Q(Z)$. Une procédure itérative est utilisée pour trouver $Q(Z)$ maximisant $J(Q)$.

Les algorithmes d'inférence développés ou adaptés dans cette thèse concernent le cas d'inférence exact.

L'inférence est l'étape ultime dans l'utilisation des RB comme outils d'aide à la décision ; mais pour faire de l'inférence il faut avoir les relations structurelles et les paramètres du réseau après avoir établi les relations structurelles, c'est l'étape de l'apprentissage qui précède en pratique l'étape d'inférence. L'apprentissage au niveau de RB est de deux types, l'apprentissage des relations entre les variables aussi appelé apprentissage structurel ou non supervisé et l'apprentissage des intensités des relations entre les variables qualifié parfois d'apprentissage paramétrique ou supervisé. Si théoriquement il est possible d'apprendre la structure d'un RB, en pratique cette tâche s'avère ardue. L'architecture d'un RB est d'ailleurs souvent déduite de la configuration connue d'un système ou d'un processus. Pour ces raisons nous focalisons principalement notre attention sur l'apprentissage paramétrique qui sera décrit à la suite.

II.1.1.4 Apprentissage

Le réseau bayesien permet la représentation de connaissances fondée sur une description des relations causales entre variables. Une des capacités remarquables d'un réseau bayesien concerne l'apprentissage, qu'il soit paramétrique ou structurel. L'objectif de l'apprentissage est de caractériser le mieux possible les relations de causalité entre variables, compte tenu des données et/ou l'expertise dont dispose. Si la structure est fixée, les paramètres peuvent être appris à partir des données complètes ou incomplètes. A l'inverse, si la structure n'est pas connue d'avance, elle devra être apprise à partir des informations à disposition.

II.1.1.4.1 Apprentissage de la structure

On dénombre deux approches principales pour l'apprentissage de la structure respectivement fondées sur la recherche d'indépendance conditionnelle et les méthodes basées sur un score [66].

II.1.1.4.1.1 Approches basées sur la recherche d'indépendance conditionnelle

La première approche consiste à rechercher les différentes indépendances conditionnelles existant entre variables. Plusieurs algorithmes peuvent être utilisés pour l'implémentation de cette méthode :

- IC (Inductive Causation) développé par Pearl [63],
- IC* (Inductive Causation*) variantes de l'algorithme IC, également développé par Pearl et Verma [83] et prenant en compte les variables latentes. Les variables latentes sont des variables non directement observées, mais déduites d'autres variables directement mesurées.
- PC (du nom des inventeur Peter&Clark) [84].

Le principe de ces algorithmes est basé sur la méthode de recherche d'indépendances conditionnelles. Ici on présente le test du khi-deux (noté χ^2) [85] permettant de valider des hypothèses d'indépendance (H_0) ou de dépendance (H_1) entre les variables dans une base de cas. Soient deux variables discrètes N_A et N_B avec r_A et r_B leurs nombres de modalités respectifs, O_{ij} la fréquence observée pour $N_A = n_{a_i}\ et\ N_B = n_{b_j}$, $NOM_{i.}$ le nombre de cas où $N_A = n_{a_i}$ et $NOM_{.j}$ le

nombre de cas où $N_B = n_{b_j}$. Alors $E_{ij} = \frac{NOM_{i.} * NOM_{.j}}{NOM}$ représente la fréquence théorique correspondant à l'hypothèse H_0 où NOM est la fréquence totale observée. On calcule alors la valeur de χ^2 par l'équation (**4**).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad \textbf{Equation 4}$$

L'hypothèse H_0 est vérifiée si $\chi^2 < \chi^2_\alpha\big((r_A - 1)(r_B - 1)\big)$ où $\chi^2_\alpha((r_A - 1)(r_B - 1))$ est la valeur de la distribution χ^2 pour l'argument $(r_A - 1)(r_B - 1)$ et α est un seuil de confiance. Si H_0 n'est pas vérifiée, l'hypothèse H_1 est prise et un arc orienté est rajouté entre deux variables.

L'essentiel de toutes les méthodes existantes repose sur la détermination des relations d'indépendance conditionnelle entre deux variables. Elles requièrent cependant la réalisation d'un nombre de tests statistiques ; lorsque la taille de réseau augmente, le nombre de tests augmente aussi.

II.1.1.4.1.2 Approches basées sur un score

La deuxième approche contrairement à la première associe un score à chaque réseau bayesien estimé pour résoudre le problème du nombre de tests d'indépendances conditionnelles. Il s'agit de chercher une structure maximisant un certain score ou de combiner les résultats issus des meilleures structures [86]. Le principe des méthodes basées sur le score (principe du rasoir d'Occam) consiste à trouver une structure/réseau ($\mathcal{B}$) qui représente le mieux les données ($\mathcal{D}$) et qui soit le plus simple possible ($Dim(\mathcal{B})$).

Les scores souvent utilisés sont le BD (le score Bayesien Dirichlet), AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), MDL (Minimum Description Length), etc. [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94].

On définit d'abord la *dimension d'un réseau bayesien* $Dim(\mathcal{B})$ possédant le nombre de paramètres nécessaires pour décrire toutes les distributions de probabilités du réseau $\mathcal{B}$. Considérons un réseau bayesien de n variables $N = \{N_1, N_2, \dots N_m, \dots N_n\}$. Si r_m correspond au nombre de modalités de la variable N_m, alors, pour une configuration des parents de N_m, le nombre de paramètres pour représenter la distribution de probabilités $P(N_m|Pa(N_m))$ est égale à $r_m - 1$. Le nombre de configurations possibles pour les parents de N_m est donné par :

$$q_m = \prod_{N_j \in Pa(N_m)} r_j$$

La dimension du réseau bayesien est donnée par :

$$Dim(\mathcal{B}) = \sum_{m=1}^{n} Dim(N_m, \mathcal{B}) = \sum_{m=1}^{n} (r_m - 1) * q_m$$

Différents scores comme BD ([88]), AIC ([87]), BIC ([90]) et MDL ([93]) présentés ci-dessous sont généralement utilisés.

$$ScoreBD(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = P(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \int_\theta L(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{B})\, P(\theta|\mathcal{B}) P(\mathcal{B}) d\theta = P(\mathcal{B}) \int_\theta L(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{B})\, P(\theta|\mathcal{B}) d\theta$$

$$ScoreAIC(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \log L(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{B}) - Dim(\mathcal{B})$$

$$ScoreBIC(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \log L(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{B}) - \frac{1}{2} Dim(\mathcal{B}) log NOM_{mqr}$$

$$ScoreMDL(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \log L(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{B}) - |Arc_B| log NOM_{mqr} - \mathcal{C} \cdot Dim(\mathcal{B})$$

où $\log L(\mathcal{D}|\theta,\mathcal{B})$ correspond à la log-vraisemblance entre données et structure estimée avec ses paramètres correspondants. $|Arc_B|$ est le nombre d'arcs dans la structure (B) et $\mathcal{C}$ est le nombre de bits utilisés pour stocker chaque paramètre numérique. L'ensemble des variables (nœuds) est $N = \{N_1, N_2, \dots N_m, \dots N_n\}$.

II.1.1.4.2 Apprentissage des paramètres

Le but de l'apprentissage des paramètres consiste à estimer, à partir d'une base de données, les valeurs associées à chaque modalité d'une variable conditionnellement à ses nœuds parents. Dans cette section, nous présentons les techniques classiques de l'apprentissage des paramètres dans un réseau bayesien. Les techniques d'apprentissage paramétrique varient suivant la représentativité des données (complètes ou incomplètes ; riches ou rares).

Lorsque les données sont complètes plusieurs approches peuvent être utilisées :

- Approche statistique classique généralement connue sous le vocable de méthode du maximum de vraisemblance (MV)
- Approche bayesienne ou Méthode du Maximum a Posteriori (MAP)
- Approche mixte permettant la prise en compte de l'ajoutant l'expertise dans l'approche statistique classique

Lorsque les données sont incomplètes, ce qui est le cas le plus fréquent, l'essentiel des travaux de la littérature concerne la manière de compléter les données manquantes. L'algorithme le plus largement employé dans ce cadre, est basé sur la méthode de maximisation de l'espérance (EM) [95].

Nous présentons à la suite la formulation mathématique associée à chacune de ces méthodes d'apprentissage.

Par la suite, $\mathcal{D}$ est considérée comme une base de données complète où N_{mqr} est le nombre de fois où la modalité r de la variable N_m est observée quand ses parents sont dans la configuration q.

Approche statistique classique (MV)

Si toutes les variables sont observées, l'estimation du paramètre utilise l'algorithme de maximum de vraisemblance. La méthode MV consiste à maximiser la probabilité conditionnelle $P(N_m = r|pa(N_m) = q)$ donnée par l'équation (5) ci-dessous :

$$\hat{\theta}_{mqr}^{MV} = P(N_m = r|pa(N_m) = q) = \frac{NOM_{mqr}}{\sum_{r=1}^{r_m} NOM_{mqr}} \qquad \textbf{\textit{Equation 5}}$$

avec le nombre de modalités d'une variable N_m est $1 \leq r \leq r_m$; NOM_{mqr} est le nombre de cas quand la valeur de la variables N_m correspondant à la modalité r et ses parents sont dans la configuration q.

Approche bayesienne (MAP)

L'approche bayesienne consiste à trouver le paramètre θ le plus probable sachant que certaines données ont été observées en utilisant une loi a priori $p(\theta)$ sur le paramètre à estimer. La distribution conjuguée du paramètre estimé est choisie comme la loi a priori associée à la variable N_m. Quand la loi a priori et la loi a posteriori ont la même forme, on parle de loi a priori conjuguée. Le choix des lois a priori est une étape essentielle dans l'approche bayesienne.

A titre d'illustration nous présentons cette approche sous l'hypothèse que la probabilité $P(N_m)$ est multinomiale, sa conjuguée est la distribution de Dirichlet. La formule de MAP s'écrit alors :

$$\hat{\theta}^{MAP} = argmax P(\theta|\mathcal{D}) = argmax\ P(\mathcal{D}|\theta)P(\theta) \qquad \textbf{Equation 6}$$

Avec $P(N) \propto \prod_{m=1}^{M}\prod_{q=1}^{q_m}\prod_{r=1}^{r_m}(\theta_{mqr})^{\alpha_{mqr}-1}$ où α_{mqr} sont les coefficients de la distribution de Dirichlet associée à θ_{mqr} et $1 \leq m \leq M, 1 \leq q \leq q_m, 1 \leq r \leq r_m$.

Dans ce cas, l'approche du maximum a posteriori consiste à estimer le paramètre de la probabilité a posteriori à partir d'une base donnée qui est observée en avance. L'estimateur de MAP est définit par l'équation (**7**) :

$$\hat{\theta}_{mqr}^{MAP} = P(N_m = r|pa(N_m) = r) = \frac{NOM_{mqr} + \alpha_{mqr} - 1}{\sum_{r=1}^{r_m}(NOM_{mqr} + \alpha_{mqr} - 1)} \qquad \textbf{Equation 7}$$

Une variante de cette approche se base sur l'espérance a posteriori (EAP) θ_{mqr} au lieu du maximum. On a ainsi :

$$\hat{\theta}_{mqr}^{EAP} = P(N_m = r|pa(N_m) = q) = \frac{NOM_{mqr} + \alpha_{mqr}}{\sum_{r=1}^{r_m}(NOM_{mqr} + \alpha_{mqr})} \qquad \textbf{Equation 8}$$

Approche mixte

C'est une approche qui consiste à associer les méthodes MV/MAP combinées à de l'expertise. L'objectif est d'augmenter la précision relative à l'estimation des paramètres dans des cas particuliers. Il s'agit d'intégrer les avis d'experts dans la procédure d'apprentissage.

Données incomplètes

Si la base de données $\mathcal{D}$ n'est pas complète, correspondant indifféremment à une absence aléatoire de données ou à une absence dépendant des variables observées, il est possible de compléter les données manquantes par l'approche « case analyse » ou en utilisant l'algorithme « Expectation Maximisation » (EM). En cas de manque total de données sur certaines variables, l'ajout d'une expertise s'avère nécessaire. Une fois les données complétées, la procédure est alors la même que dans le cas des données complètes [95, 96, 97, 86].

Soit la base de données $\mathcal{D}_o$ incomplète et $\mathcal{D}_m$ la base des informations manquantes. En se fixant un modèle de référenceθ^*, il est possible d'estimer la probabilité des données manquantes $P(\mathcal{D}_m|\theta^*)$, et ainsi d'optimiser n'importe quel critère. L'optimisation de l'espérance log-vraisemblance revient, par exemple, à maximiser le paramètre $Q(\theta: \theta^*)$ défini par (9):

$$Q(\theta: \theta^*) = E_{\theta^*}[logPro(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_m|\theta^*)] \qquad \textbf{Equation 9}$$

où $Q(\theta: \theta^*)$ est l'espérance de la vraisemblance d'un jeu de paramètres θ quelconque, calculée en utilisant une distribution des données manquantes [86]. L'algorithme Expectation Maximisation est présenté ci-dessous :

Algorithme itératif

1. Initialiser les paramètres θ^0
2. (Expectation) Estimer les valeurs manquantes à partir des paramètres actuels $\theta^{(t)}$
    a. Calculer $P\left(N_{manquant}\middle|N_{mesurés}\right)$ dans le RB
    b. Réaliser des inférences dans le RB muni des paramètres $\theta^{(t)}$

3. (Maximisation) Ré-estimer les paramètres $\theta^{(t+1)}$ à partir des données complétées puis, choisir la meilleure valeur des paramètres $\theta^{(t+1)}$ en maximisant Q. On utilisant pour cela les algorithmes classiques (MV, MAP, etc.)
4. Répéter les étapes 2 et 3

La convergence de l'algorithme EM est prouvée par [96]. L'algorithme EM peut aussi s'appliquer dans le cadre bayesien en remplaçant le maximum de vraisemblance de l'étape *maximisation* par un maximum (ou une espérance) a posteriori.

Un réseau bayesien est une approche de représentation des connaissances et de raisonnement par un modèle graphique probabiliste. La représentation par un réseau bayesien d'un système de grande taille se traduit généralement par l'augmentation du nombre de nœuds occasionnant des calculs parfois lourds pour l'inférence et la propagation des informations. En outre, les réseaux bayesiens considérés jusque-là sont statiques, or pour certaines applications il s'avère indispensable de suivre l'évolution de certaines variables selon une dimension donnée et en particulier le temps. Pour pallier ce problème, la notion de Réseau Bayesien Dynamique (RBD) a été introduite [98]. Nous présentons ses caractéristiques dans la section suivante.

II.1.2 Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD)

La nécessité de suivre l'évolution temporelle de certaines variables dans un système a conduit à l'introduction des Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) [98, 99, 100, 101, 102, 103] qui généralisent les systèmes dynamiques [104, 105]. Le travail présenté dans [98] donne une vue complète des principes de définition, modélisation, inférence et apprentissage associés à l'emploi des RBD.

Un RBD est un réseau bayesien dans lequel certaines variables évoluent avec le temps. Un exemple est donné sur la Figure II.7 sur laquelle on peut voir que la variable N_2 évolue en fonction du temps.

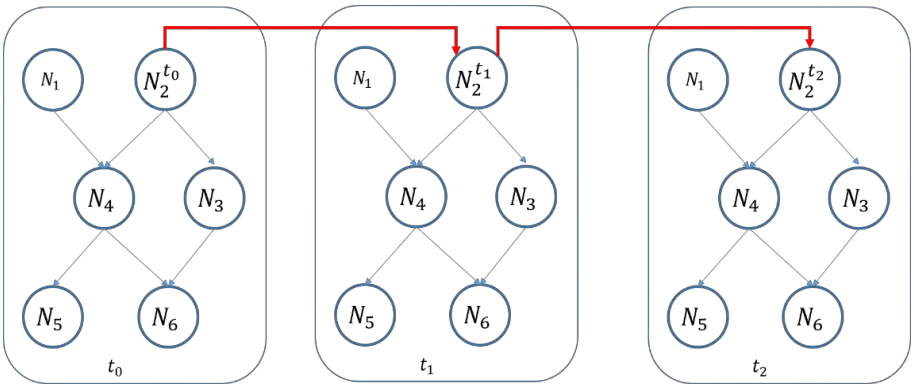


Figure II.7 Réseau Bayesien Dynamique

En général, on considère le temps sous la forme d'une variable discrète n'autorisant des modifications qu'à des instants précis *t, t+1, t+2*, …, etc. dont l'intervalle dépend du pas de temps choisi. En théorie, à un instant t donné, l'état d'une variable peut dépendre de son état aux instants, *t-1, t-2, ..., t-k* et, plus généralement de toute une histoire passée correspondant à son évolution. Le rang définit le nombre pas de temps maximum arrière dont une variable dépend. La prise en compte de rangs élevés conduit à des réseaux dont la complexité empêche une utilisation pratique. Pour éviter cet écueil on préfère souvent faire l'hypothèse d'une modélisation de rang 1 c'est-à-dire que le comportement d'un système à l'instant *t* ne dépend que de ce qui s'est passé à l'instant *t-1* (Figure II.7). A chaque instant, le réseau se comporte comme un réseau bayesien classique.

Pour la paramétrisation de ce type de réseau il faut ajouter les paramètres suivants à ceux d'un réseau classique :

- distribution de probabilité sur les nœuds dynamiques à l'instant initial (par exemple par rapport au réseau de la Figure II.7, le paramètre $\pi = P(N_2^{t_0})$).
- relation dynamique ou fonction de transition qui donne l'intensité des relations entre l'instant actuel et l'instant précédent pour les variables dynamiques (par exemple le paramètre $A_{t,t-1} = P(N_2^t|N_2^{t-1})$ pour le nœud dynamique du réseau de la Figure II.7).

La technique classique d'inférence dans les RBD est l'algorithme « Forward-Backward » [105, 104, 106]. Dans [98] l'auteur a développé un algorithme sous forme d'arbre de jonction appelé d'algorithme d'interface (« Interface algorithm »). Cet algorithme est aujourd'hui le plus souvent utilisé dans les logiciels de par sa facilité de codage. Le principe de l'algorithme d'interface est de construire un arbre de jonction pour chaque instant *t* en ajoutant la partie commune à t+1. Par rapport à l'algorithme classique de l'arbre de jonction, l'algorithme d'interface caractérise la relation entre 2 instances temporelles permettant de généraliser la communication entre deux pas de temps. L'interface peut ainsi être réutilisée dans l'inférence ce qui permet de réduire le temps de calcul et d'augmenter l'efficacité de la méthode. L'apprentissage dans les RBD est adapté des techniques classiques d'apprentissage des RB.

L'approche RBD permet de résoudre le problème de modélisation dynamique incertaine ; la technique d'inférence issue des travaux de [98] et largement implémentée aujourd'hui dans les plateformes logicielles a contribué largement à sa démocratisation. Cependant quand le système devient plus grand, le temps et l'espace de calcul se heurtent aux mêmes limites que celles identifiées dans le calcul d'inférence des RB classiques. De plus, l'hypothèse souvent faite de dépendance entre des instants consécutifs constitue une limitation sérieuse pour la modélisation des systèmes complexes.

Une autre façon d'appréhender le verrou de la taille des systèmes dans l'approche bayesienne est le concept de Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) dont les RBD peuvent être considérés, dans une certaine mesure, comme appartenant à cette catégorie. Cette approche est l'objet de la section suivante.

II.1.3 Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) et Résesaux Bayesiens Hiérarchiques (RBH)

Comme évoqué plus haut, les RB en tant qu'outil de modélisation des relations entre variables dans un système atteignent très vite des limites quand le nombre des variables, ou de modalités augmente. Pour pallier cette limite, des auteurs ont tenté de d'appliquer le concept « orienté objet » aux réseaux bayesiens afin d'exploiter les propriétés classiques d'héritage et de hiérarchie pour modéliser par ce biais des systèmes complexes [54, 56]. Dans [56], la notion orienté objet est introduite par une fonction possédant certaines propriétés. La classe est la structure d'un réseau bayesien et les objets sont définis comme une collection de propriétés associées à une entité d'un domaine. Dans [107] la notion d'hiérachique est intoduite dans les réseaux bayesiens pour modéliser un dispositif composé de plusieurs sous-composants auxquels la dénomination Réseaux Bayesiens Hiérarchiques (RBH) a été donnée.

Dans [54] la notion de Réseau Bayesien Orienté Objet est considérée sous l'angle de construction « top-down » d'un système. C'est une représentation compacte d'une structure répétitive. Un objet a trois types de nœuds : les nœuds d'entrée, les nœuds internes et les nœuds de sortie. Dans un objet, seules les sorties peuvent être visibles depuis l'extérieur ; autrement dit, l'objet défini par l'auteur dans [56] est simplement une fonction de programmation possédant des

attributs/propriétés et une sortie caractérisant la valeur de retour. Les définitions sont plus intuitives comparativement aux travaux présentés dans [56]. Les caractéristiques d'un objet ou d'une classe tels que définis dans [54] sont l'encapsulation, la hiérarchie, et la répétitivité. Ce type de modélisation se prête à la représentation d'un système à structure répétitive. C'est le cas par définition d'un RBD qui dispose d'une variable « autoréférence » pour récupérer les informations dynamiques. Entre chaque pas de temps le réseau bayesien est le même et peut donc être considéré comme un objet. Sur le plan de l'apprentissage, l'hypothèse de base est l'invariabilité des paramètres d'un objet à l'autre pour une classe donnée, ce qui peut constituer une limite pour certaines applications. Cette hypothèse offre une procédure très efficace même si le réseau est formé de beaucoup d'objets car l'apprentissage se fait par lot [108]. En revanche cette invariance des paramètres entre deux objets fait perdre de l'intérêt à ce type de représentation et n'est pas souvent vérifiée en pratique lorsqu'il s'agit de modéliser des systèmes via ce biais.

En utilisant les propriétés associées aux objets, il devient possible de construire un grand système à travers la notion de hiérarchie et la réutilisation d'objets. Les objets encapsulent les informations et permettent de transférer celles-ci via des interfaces de communication (entrées et sorties). La technique MSBN [109, 110, 46] est ainsi utilisée pour la propagation d'informations.

Le MSBN (« Multiply Sectioned Bayesian Networks ») [109, 110, 46, 111] est assimilable à un réseau bayesien. La technique d'inférence dans les MSBN [109, 110, 46, 111] est basée sur la construction d'une grande « forêt d'arbres de jonction » à partir de plusieurs arbres de taille réduite connectés et reliés par des séparateurs. L'avantage d'un MSBN réside dans sa capacité à propager de façon indépendante de l'information dans un sous-ensemble d'un grand réseau, cela permet de l'appliquer dans le RBOO de [56]. Hélas la construction d'une forêt de jonction, conduit au mélange des objets et lui fait perdre l'avantage lié à la construction modulaire propre à l'approche orientée objet. En effet, la propagation des informations dans les MSBN pour faire l'inférence se fait en développant le MSBN en un grand RB classique [54, 55, 112].

Les deux propositions de RBOO [56] et [54] permettent de construire des RBOO de grands systèmes constitués de composants répétitifs. L'approche présentée dans [56] développe s'appuie sur un langage spécifique de construction et sur les principes de propagation tirés de la technique MSBN. Elle présente cependant des limites quant à l'introduction de la dimension dynamique. L'approche présentée dans [54] est beaucoup plus intuitive en matière de construction mais n'a pas fait l'objet de développement académique relativement aux techniques d'inférence et d'apprentissage.

II.1.4 Synthèse

Dans cette partie, nous avons abordé les approches de la littérature relatives aux techniques de modélisation graphiques probabilistes des systèmes. Ces modèles sont de plusieurs natures. Les Réseaux Bayesiens classiques (RB) par exemple permettent d'appréhender facilement les relations incertaines entre les composants d'un système de taille relativement faible. Les Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) offrent la possibilité de modéliser l'évolution temporelle des variables ou composants d'un système. Finalement, dans l'idée de représenter des systèmes complexes, les Réseaux Bayesiens Orientés Objets (RBOO) constituent une alternative intéressante. Le support de la technique MSBN contribue grandement à maîtriser la phase d'inférence mais peut se révéler rapidement inefficace lorsque la taille du système croît. De plus, que ce soient pour les RBD ou les RBOO, une certaine linéarité ou une dimensionnalité est requise alors qu'en pratique il n'est pas rare de trouver des cas où un système doit être étudié selon plusieurs dimensions. L'analyse spatio-temporelle est par exemple une illustration de ce besoin de représentation multidimensionnelle. A ces fins, la partie suivante considère

donc l'extension de la modélisation des systèmes complexes autour des outils probabilistes en essayant d'aller plus loin que les outils présentés précédemment aussi bien en matière de construction que de développement d'outils d'apprentissage et d'inférence.

II.2 Proposition d'une nouvelle approche : Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM)

Les réseaux bayesiens et les réseaux bayesiens dynamiques s'avèrent difficiles à utiliser lorsque la taille des systèmes devient très importante. Le concept « orienté objet » peut, sous certaines conditions, être utilisé pour modéliser les systèmes de grande échelle par réutilisation d'une brique de base. Mais la recherche présentée dans la littérature autour des RBOO se concentre majoritairement sur la construction [56, 54]. Au-delà de ces méthodologies de caractérisation de la structure des objets, notre approche vise à considérer de nouvelles techniques d'inférence et d'apprentissage adaptées aux Réseaux Bayesiens Orientés Objets. Nous introduirons pour cela le concept Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM). Dans cette perspective nous faisons abstraction de la signification de la dimension afin de rendre le modèle aussi générique que possible. Nous proposons dans un premier temps, les verrous à l'utilisation des techniques probabilistes graphiques pour la modélisation des systèmes complexes, verrous que nous souhaitons lever par l'introduction des RBM. Nous donnons ensuite la définition des concepts de base régissant le mode de construction et de fonctionnement des RBM. Nous terminons finalement par une proposition de méthodologie de construction d'un RBM.

II.2.1 Verrous

Nous avons rappelé dans le premier chapitre les composantes conférant à un système un statut de système complexe. Grande taille, interactions nombreuses, évolution dynamique, incertitude, multiplicité des composants, évolution suivant des dimensions multiples, couplage, bouclages, émergence sont autant de caractéristiques qu'il s'agit de considérer pour la représentation de ce type de systèmes. Parmi les verrous représentés par l'ensemble de ces caractéristiques, nous abordons à la suite 4 notions essentielles dans la modélisation de la complexité associées respectivement aux caractéristiques de taille (système multicomposants), évolution multidimensionnelle, complexité calculatoire et flexibilité.

- **Verrou 1** : taille et hétérogénéité (multi-domaines) des systèmes

La nécessité de pouvoir modéliser et analyser des systèmes de grande taille évoluant potentiellement dans plusieurs domaines physiques couplée avec la difficulté (notamment en matière de visualisation) de représentation de tels systèmes par les réseaux bayesiens classiques, nécessite le développement d'une nouvelle approche de modélisation. Cette approche, que nous allons présenter dans la section suivante, devra permettre, d'une part de construire le réseau de manière hiérarchique par une analyse locale conduisant à l'établissement d'une structure générique et, d'autre part, de rendre possible la notion de communication entre les différents modèles locaux pour l'obtention d'un modèle global.

- **Verrou 2** : multidimensionnalité des systèmes

Le principe guidant l'utilisation des RBD est basé sur le concept de répétition d'une structure de base évoluant suivant une dimension temporelle avec souvent une hypothèse de relation unique entre deux instants consécutifs. Les RBOO rencontrés dans la littérature reprennent pour la plupart cette hypothèse de répétitivité et d'évolution suivant un seul axe.

Or, en pratique, il n'est pas rare de rencontrer des cas où le système doit être analysé suivant plusieurs dimensions (spatio-temporelles par exemple), et donc la nécessité pour le réseau de se prêter à ce type de représentation. L'approche qui va être présentée dans cette section, devra permettre de modéliser le comportement d'un système suivant un nombre quelconque de dimensions.

- **Verrou 3** : complexité de calcul

Les travaux scientifiques sur les RBOO couramment rencontrés dans la littérature concernent essentiellement la structuration du réseau. Peu de développements ont concerné les techniques de calcul au sein des objets. Certains travaux existent toutefois comme les techniques développées dans les MSBN [109, 110, 46] mais qui ne sont pas applicables pour les cas que nous développons ici. L'approche calculatoire considérée dans [54] passe par le développement du RBOO en un RB de taille pouvant être prohibitive. Le traitement qui en découle, basé sur des techniques classiques comme l'arbre de jonction conduit non seulement à perte de la notion orienté objet et sa capacité à travailler sur des modèles simples et génériques mais s'avère également coûteuse en termes de temps de traitement. La technique qui sera proposée devra offrir la possibilité d'inférence locale au sein de chaque objet mais aussi globale pour la caractérisation des valeurs de probabilités associées à chaque variable du modèle complet.

- **Verrou 4** : lisibilité et flexibilité des réseaux

L'utilisation d'un outil sera d'autant plus conviviale qu'elle permettra l'exploitation ultérieure des modèles par des personnes autres que celles ayant conduit à leur réalisation. La notion d'intelligibilité et de lisibilité est donc cruciale. En outre, la possibilité de changer la configuration ou les valeurs associées aux réseaux pour l'intégration de nouvelles hypothèses, le rajout ou la suppression d'une variable ou la modification d'un paramètre est importante pour rendre l'outil flexible et adaptable à différents contextes d'utilisation. L'approche envisagée devra favoriser cette intelligibilité du modèle.

Les outils de la littérature introduits précédemment, basés respectivement sur le concept de Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) ou Orientés Objets (RBOO), ne couvrent pas l'ensemble des exigences précédemment énoncées comme la taille, l'hétérogénété des paramètres, ou encore l'évolution multidimensionnelle. Une approche innovante devra être inventée. Nous qualifions l'outil correspondant par le vocable Réseau Bayesien Multidimensionnel (RBM).

II.2.2 Eléments de base

L'étude réalisée dans le cadre de cette thèse vise à améliorer l'utilisation classique des Réseaux Bayesiens Orientés Objet. Les travaux engagés dans cette voie ont conduit, en effet, à des développements d'objets « statiques » par le fait qu'ils n'autorisent pas de changements de paramètres liés à une caractérisation de l'objet en fonction du contexte de modélisation. C'est cette limitation que nous souhaitons contourner en autorisant une instanciation des paramètres du réseau bayesien objet en fonction de l'environnement observé, dans la dimension considérée. Dans cette optique, il nous faut dans un premier temps introduire les notions de base que sont les notions de classe et d'objet.

II.2.2.1 Réseau Bayesien Multidimensionnel

Un Réseau Bayesien Multidimensionnel est un réseau bayesien global construit à partir d'objets interconnectés. Chaque objet est susceptible d'évoluer selon plusieurs dimensions. Deux niveaux seront considérés dans le cadre de la modélisation par un RBM distinguant le niveau local (objet) et le niveau global (système).

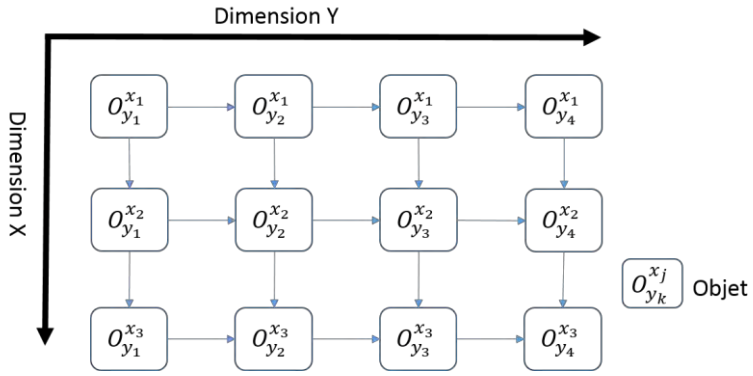


Figure II.8 Réseau Bayesien Multidimensionnel « X-Y »

La Figure II.8 montre un RBM 2D « X-Y ». Chaque objet $O_{y_k}^{x_j}$ est ainsi capable de communiquer avec ses voisins suivant les deux dimensions.

Le développement de cette nouvelle approche de modélisation nécessite l'introduction de quelques éléments de vocabulaires que nous présentons dans les paragraphes suivants.

II.2.2.2 Classe, objet et canal de communication

II.2.2.2.1 Classe

La classe (C) est un graphe acyclique orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon)$ où $\mathcal{V}$ est un ensemble de variables ou nœuds et ε l'ensemble des liens ou arcs entre ces variables

- L'ensemble des variables est structuré comme suit$\mathcal{V} = \{N_e, N_i, N_s\}$ où N_e est l'ensemble des variables d'entrée ; N_i est l'ensemble des variables internes et N_s est l'ensemble des variables de sortie ;
- Tout nœud $N \in \mathcal{V}$ est caractérisé par la paire $\{\Omega, \Theta_C\}$ où Ω est regroupe l'ensemble de ses modalités et Θ_C caractérise la structure de ses paramètres ;
- ε est la relation de cause à effet entre les variables d'une classe.

- ***Variables d'entrée (N_e):*** variables d'une classe susceptibles de recevoir les informations (probabilité) communiquées par l'extérieur.
- ***Variables internes (N_i):*** variable d'une une classe dont tous les parents et enfants appartiennent à la même classe.
- ***Variables de sortie (N_s):*** variables d'une classe communiquant des informations (probabilités) vers l'extérieur.

La classe (C) caractérise la partie structurelle (S) du réseau bayesien. Pour la représentation des variables d'une classe, trois types de nœuds seront donc considérés: les nœuds d'entrées (N_e), les nœuds de sorties (N_s), et les nœuds internes

(N_i). *Par la suite nous utiliserons les termes : « entrée » pour qualifier un « nœud d'entrée » et « sortie » pour désigner un « nœud de sortie ».*

Seules les entrées et les sorties peuvent avoir des relations avec l'extérieur d'une classe. A partir des règles de construction, la classe peut aussi échanger des informations (probabilités) uniquement par ses entrées et ses sorties.

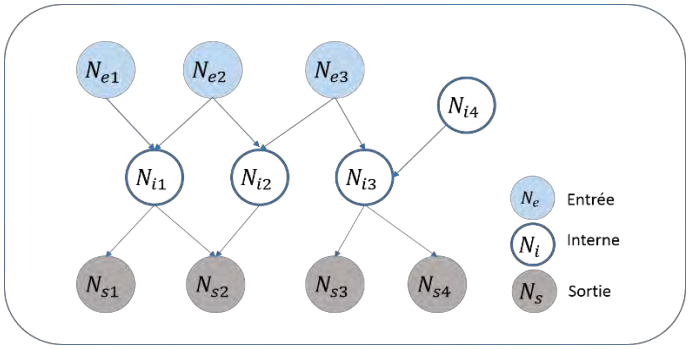


Figure II.9 Exemple de structure d'une Classe

La Figure II.9 présente un exemple de structure de classe en générale. Les nœuds d'entrées sont $N_e = \{N_{e1}, N_{e2}, N_{e3}\}$ et les nœuds de sortie sont $N_s = \{N_{s1}, N_{s2}, N_{s3}, N_{s4}\}$; les nœuds internes sont $N_i = \{N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}, N_{i4}\}$.

Une classe caractérise la structure (nœuds et liens) d'un réseau bayesien.

II.2.2.2.2 Objet

Un objet (O) est un réseau bayesien établi par instanciation d'une classe. $O = \{C, \Theta\}$, avec $C = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$ est la classe correspondante comprenant des variables ($N_{e,i,s}$), leurs modalités (Ω) et la structure des paramètres (Θ_C) qui leur sont associés ;

- L'instanciation d'une classe est le processus visant à attribuer une valeur aux paramètres associés à chaque variable ;
- Pour les variables d'entrée N_e le paramètre $P(N_e)$ est influencé par les variables de sortie connectés à cet objet.
- L'objet échange ses informations seulement à travers ses entrées et sorties.

Les trois types de variables doivent suivre les règles de constructions ci-dessous qui permettent de conserver la notion d'orienté objet, la communication entre les objets se faisant uniquement à travers entrées/sorties.

- Règle 1 : Les entrées ne peuvent pas avoir de parents dans la classe/objet. Elles correspondent à une projection d'une sortie d'une autre classe/objet ;
- Règle 2 : Les nœuds internes ne peuvent pas avoir d'enfants ni parents à l'extérieur de la classe ;
- Règle 3 : Les sorties ne peuvent pas avoir d'enfants dans la classe ou des parents en dehors de la classe.

La Figure II.10 montre l'exemple d'un objet avec ses deux caractéristiques à savoir sa structure ou partie qualitative ($C = \{\mathcal{V}, \varepsilon\}$) caractérisé par la classe à laquelle il appartient et sa partie quantitative (Θ), une instanciation des paramètres. On montre en particulier sur la figure l'instanciation des paramètres des nœuds N_{i3} et N_{s2} complètement définis par la table de probabilités conditionnelles qui leur est associée.

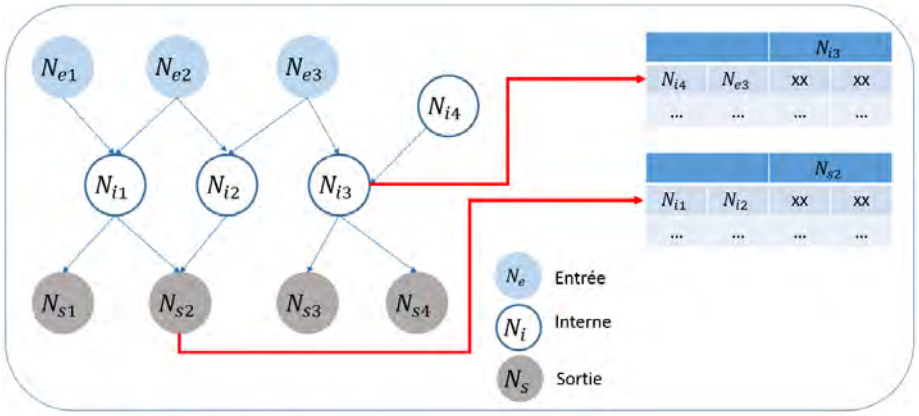


Figure II.10 Objet

II.2.2.2.1 Canal de communication

L'objet communique avec les autres objets seulement par ses entrées N_e et ses sorties N_s. Nous qualifions le lien établi entre les sorties d'un objet et les entrées d'un autre objet de « ***canal de communication*** ». Le canal de communication permet l'échange d'informations (probabilités) avec les autres objets. L'utilisation du canal de communication confère à l'objet les informations nécessaires lors de l'inférence relative aux calculs locaux. Un objet encapsule la partie structurelle héritée de sa classe ainsi que la partie quantitative par instanciation de ses paramètres. L'objet ainsi défini autorise la construction de l'arbre de jonction qui lui correspond et les calculs d'inférence qui en découlent. Il est donc autonome et possède une capacité de calcul local.

Pour la modélisation complète il sera donc nécessaire de distinguer le niveau local (objet) et le niveau global (système).

II.2.2.2.2 Synthèse

Les avantages d'une classe et d'un objet à partir des définitions et des règles de construction sont les suivantes :

1. Une classe encapsule toutes les informations structurelles, elle correspond au paradigme.
2. Un objet encapsule toutes les informations quantitatives, il est la brique élémentaire d'un RBM.
3. Un objet a un ou plusieurs canaux de communication autorisant la communication avec les autres objets dans différents directions (dimensions).

Afin de traiter les systèmes multidimensionnels, la question se pose relativement à l'ajout d'une dimension au sein d'une classe. Les principes de modélisation dynamique exposés dans [54] ne permettent pas de lever ce verrou. L'approche que nous proposons pour cela nécessite d'introduire deux notions supplémentaires relatives respectivement aux concepts de variable dimensionnelle et de nœud virtuel.

II.2.2.3 Variable dimensionnelle et nœud virtuel

II.2.2.3.1 Variable dimensionnelle

Variable dimensionnelle est une variable qui dépend d'elle-même pour la caractérisation de son évolution au sein de la dimension considérée. Une variable dimensionnelle possède un parent conditionnant son évolution par projection entre deux instances connectées au sein de cette dimension.

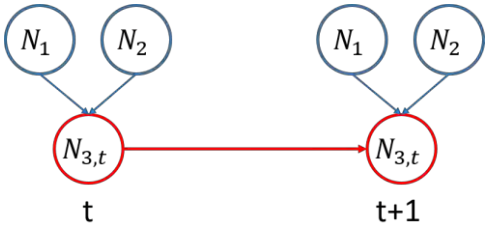


Figure II.11 Réseau dynamique avec une variable dimensionnelle

Prenons l'exemple d'un système dynamique (Figure II.11). Dans le modèle, la variable $N_{3,t}$ à l'instant $t+1$ dépend de son état à l'instant t. La variable $N_{3,t}$ dépend de deux variables simples N_1, N_2 et une variable dynamique $N_{3,t}$ à l'instant t. La variable $N_{3,t}$ est la variable dimensionnelle, car elle introduit une dépendance vis-à-vis d'elle-même dans la dimension temporelle.

II.2.2.3.2 Nœud virtuel

Afin d'introduire une évolution dimensionnelle, nous proposons un nouveau nœud nommé nœud virtuel correspondant à une variable d'entrée ou une variable de sortie dans une classe.

Il permet d'établir les liens entre variables dimensionnelles. La relation dimensionnelle est établie à partir de la probabilité conditionnelle entre le nœud associé à la variable dimensionnelle et un nœud virtuel d'entrée dans l'objet associé à cette même variable.

- $R_{m-1,m} = P(N_{i,m}|N_{e,m-1})$ caractérise la relation dans une dimension entre l'objet m-1 et l'objet m
- $R_{m,m+1} = P(N_{s,m+1}|N_{i,m}) = 1$ correspond à une transmission de l'information de l'objet m à l'objet m+1

où N_m est un nœud interne qui évolue suivant une dimension ; $N_{e,m-1}$ est l'entrée virtuelle qui reçoit l'information de l'objet dimensionnel m-1 ; $N_{s,m+1}$ est la sortie virtuelle qui transmet l'information à l'objet m+1.

Pour illustrer la notion de nœud virtuel prenons deux exemples.

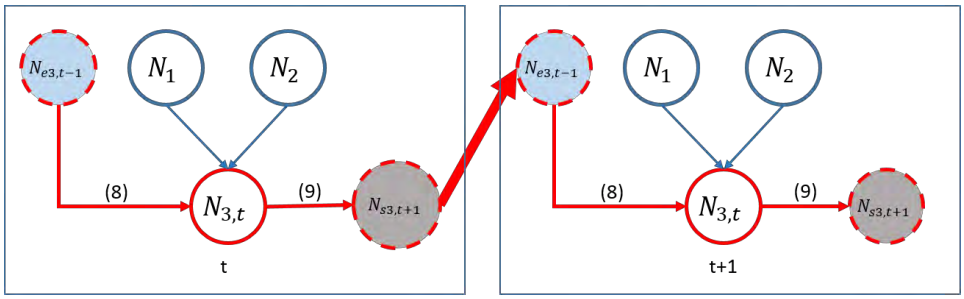


Figure II.12 Système dynamique avec les nœuds virtuels

Sur la Figure II.11, précédemment introduite, la variable $N_{3,t}$ est une variable dimensionnelle. La caractérisation d'un RBM nécessitera l'ajout d'une entrée virtuelle $N_{e3,t-1}$ et d'une sortie virtuelle $N_{s3,t+1}$ comme montré en Figure II.12. Les relations dimensionnelles ou dynamiques pourront être alors établies à partir des équations (**10**) et (**11**) ci-dessous :

$$R_{t-1,t} = P(N_{3,t}|N_{e3,t-1}) \qquad \textit{Equation 10}$$

$$R_{t+1,t} = P(N_{s3,t+1}|N_{3,t}) \qquad \textit{Equation 11}$$

La Figure II.12 présente un RBM simple possédant une seule dimension dynamique « t ». La communication s'opère à travers une paire de nœuds virtuels. Considérons maintenant le cas à deux dimensions : « x, t ».

La Figure II.13 introduit un objet avec a deux entrées de dimension « x » : N_{e1} *et* N_{e2}, deux sorties N_{s1} *et* N_{s2} et trois nœuds internes : N_{i1}, N_{i2} *et* N_{i3}.

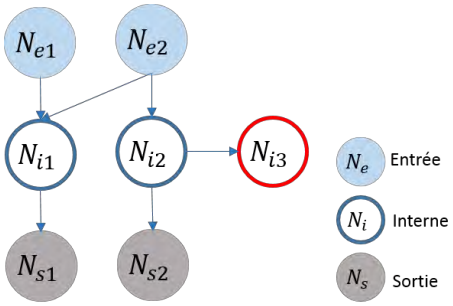


Figure II.13 Objet dynamique

Suppons qu'à certain instant, nous trouvions que cet objet évolue à une autre dimension « temps ». C'est-à-dire qu'à l'instant t la variable dynamique dépend à l'instant t-1 (C'est une hypothèse qui permet de simplifier l'exemple). La variable dimensionnelle est la variable interne dynamique N_{i3}. Le système développe sur deux dimensions « X –Temps ». Nous ajoutons l'entrée virtuelle $N_{e3,t-1}$ et la sortie virtuelle $N_{s3,t+1}$. La relation dynamique entre les objets représente par les paramètres entre l'entrée virtuelle, l'interne dynamique et l'interne dynamique et la sortie virtuelle comme les équations (12) et (13)

$$R_{t-1,t} = P\left(N_{3,t} \middle| N_{e3,t-1}\right) \qquad \textbf{Equation 12}$$

$$R_{t,t+1} = P\left(N_{s3,t+1} \middle| N_{3,t}\right) = 1 \qquad \textbf{Equation 13}$$

L'équation (12) représente la relation entre l'instant t et t-1 et l'équation (13) transfère la probabilité de l'instant t à l'instant t+1 comme la Figure II.14.

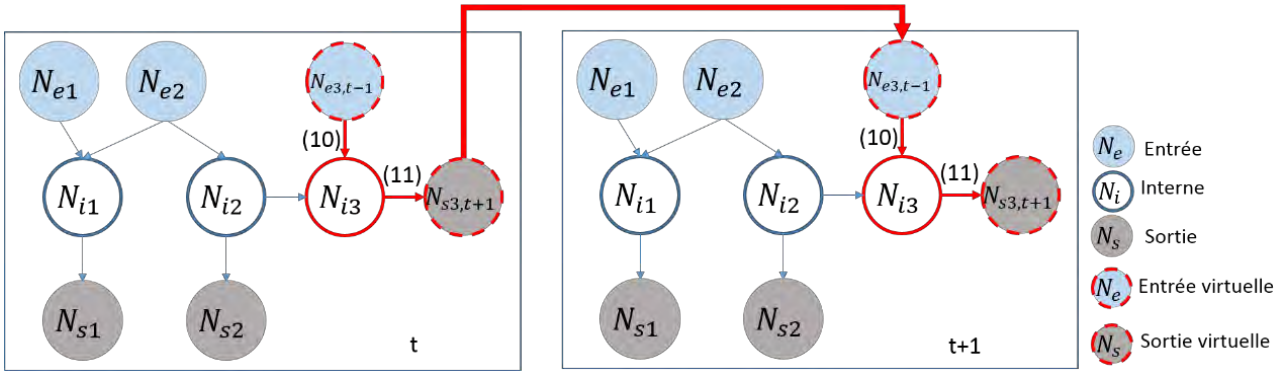


Figure II.14 Un objet dynamique avec l'entrée virtuelle et la sortie virtuelle

L'exemple des Figure II.11 et Figure II.14, montre que l'ajout d'une dimension dans un objet ne perturbe pas sa structure principale. Le nœud virtuel respecte les règles de construction de la classe et permet de conserver la notion d'encapsulation d'un objet quelle que ce soit sa structure ou les paramètres. Les objets échangent des informations seulement par le canal de communication correspondant au lien entre la sortie et l'entrée de l'objet connecté. L'ajout d'une nouvelle dimension est rendu facile par l'intégration de nœuds virtuels autour de la variable dimensionnelle et des paramètres correspondants à cette variable. Cet ajout de nœuds virtuels permet de considérer potentiellement autant de dimensions que nécessaire

directement au niveau l'objet. Cela permet et c'est la que cette nouvelle approche prend tout son sens, de réduire le temps de l'instanciation et la mise à jour des paramètres correspondants.

Les nœuds virtuels permettent non seulement de faciliter l'introduction de nouvelles dimensions dans un objet, mais aussi de réduire la complexité de dépendance entre objets.

II.2.2.4 Classe hiérarchique

L'objectif du principe « Orienté Objet » est la simplification de la construction de modèle pour des systèmes de grande envergure, possédant plusieurs dimensions, répétitifs, à plusieurs échelles, etc.

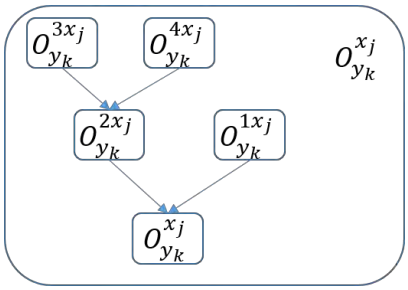


Figure II.15 Objet hiérarchique

Une notion supplémentaire peut être introduite relative à la notion de dimension hiérarchique (par exemple un modèle générique peut indifféremment représenter le comportement d'une organisation, d'une équipe au sein de cette organisation ou d'un individu dans une équipe). Notre approche permet de considérer ce genre de systèmes hiérarchiques comme le montre la Figure II.15. Pour cela il est nécessaire de définir certaines notions complémentaires.

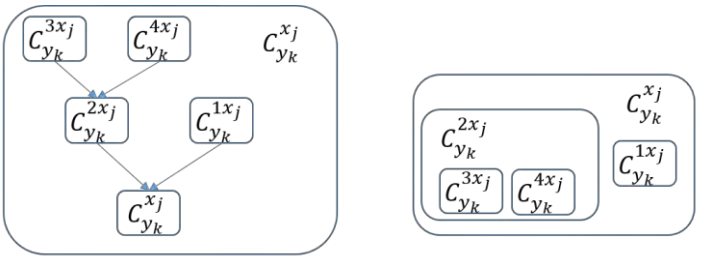


Figure II.16 Classe hiérarchique

- **Parent classe (PC)[1] :** un parent classe est une classe positionnée en début d'un arc reliant deux classes.
- **Enfant classe (EC)[2] :** un enfant classe est une classe positionnée à l'extrémité d'un arc entre deux classes.

Sur la Figure II.16, les classes $C_{y_k}^{3x_j}$ et $C_{y_k}^{4x_j}$ sont les parents de la classe $C_{y_k}^{2x_j}$. $C_{y_k}^{2x_j}$ s'appelle l'enfant des classes $C_{y_k}^{3x_j}$ et $C_{y_k}^{4x_j}$. Les parents et les enfants respectent les règles de construction d'une classe, ils communiquent par les canaux de communications. Nous écrirons $PC(C_{y_k}^{2x_j}) = C_{y_k}^{3x_j}, C_{y_k}^{4x_j}$ qui représente les parents classes de $C_{y_k}^{2x_j}$ sont $C_{y_k}^{3x_j}, C_{y_k}^{4x_j}$.

- **Entrée hiérarchique :** une entrée qui reçoit la sortie de ses parents classe s'appelle une entrée hiérarchique.

[1] Parent classe marche aussi sur les objets

[2] Enfant classe marche aussi sur les objets

- **Racine classe :** une classe qui n'a pas d'enfant classe.
- **Feuille classe :** une classe qui n'a pas de parent classe.

Une racine classe a deux types d'entrées ; **les entrées hiérarchiques** qui reçoivent les sorties de ses parents classes ; **les entrées normales** qui reçoivent les sorties extérieures de $C_{y_k}^{x_j}$ de la classe considérée. Seule la classe racine a la possibilité de communiquer avec les classes extérieures. Dans l'exemple précédent, les classes $C_{y_k}^{1x_j}$, $C_{y_k}^{2x_j}$, $C_{y_k}^{3x_j}$ et $C_{y_k}^{4x_j}$ ont seulement des entrées hiérarchiques. Les classes feuilles sur la Figure II.16 sont $C_{y_k}^{1x_j}$, $C_{y_k}^{3x_j}$ et $C_{y_k}^{4x_j}$.

Si une classe peut être coupée en sous ensemble plus élémentaires possédant une relation de dépendance (voir Figure II.16) alors la notion de hiérarchie peut être introduite pour faciliter la construction du réseau. Au lieu de construire une grande classe, une suite de classes hiérarchiques plus élémentaires peut être définie.

II.2.3 Synthèse

En synthèse des développements précédents on notera que la classe, l'objet, le canal de communication et les nœuds virtuels sont les caractéristiques principales des RBM. La classe prend en charge la définition de la structure tandis que l'objet est une instanciation d'une classe correspondante. Les objets communiquent entre eux par les canaux de communication qui permettent de garder l'encapsulation d'un objet. Enfin, les nœuds virtuels offrent la capacité d'introduire de nouvelles dimensions dans la classe sans modifications majeures.

La différence entre RBM et RB est mise en évidence dans le tableau ci-dessous.

	Réseau Bayesien	**Réseau Bayesien Multidimensionnel**
Structure	Un seul réseau	1. Un objet est un RB 2. Un RBM est formé de plusieurs objets
Paramètre	A chaque nœud est associé un paramètre	1. A chaque nœud est associé un paramètre 2. A chaque nœud d'entrée est connectée un nœud de sortie, $P\left(N_e^{Oj}\right) = P\left(N_s^{Oj-1}\right)$
Propagation/ Inférence	Construction d'un arbre de jonction ; propagation dans tout le réseau	1. Une classe donne lieu à un arbre de jonction 2. Propagation d'information dans un objet 3. Propagation entre objets par un canal de communication

Tableau II.4 Différences entre Réseau Bayesien et Réseau Bayesien Multidimensionnel

Dans les paragraphes précédents nous avons explicité la notion de modélisation orientée objet supportée par l'approche bayesienne et caractérisée par une nouvelle famille d'outils, les Réseaux Bayesiens Multidimensionnels. Les éléments de base pour la définition d'un RBM ont été introduits. Nous allons maintenant détailler les modes de construction d'un RBM selon des relations dimensionnelles linéaires ou hiérarchiques.

II.2.4 Principes de construction d'un RBM

Construire un grand réseau bayesien multidimensionnel peut constituer un travail difficile et long, surtout quand il faut prendre en compte l'interdisciplinarité et un grand nombre de dimensions suivant lesquelles le système à modéliser peut

évoluer. Nous proposons à la suite un guide pour la construction de ce type de modèle. Avant de présenter les principes de construction, nous détaillons les deux niveaux dans un RBM : le niveau local (objet) et le niveau global (système) [113, 114, 115, 116].

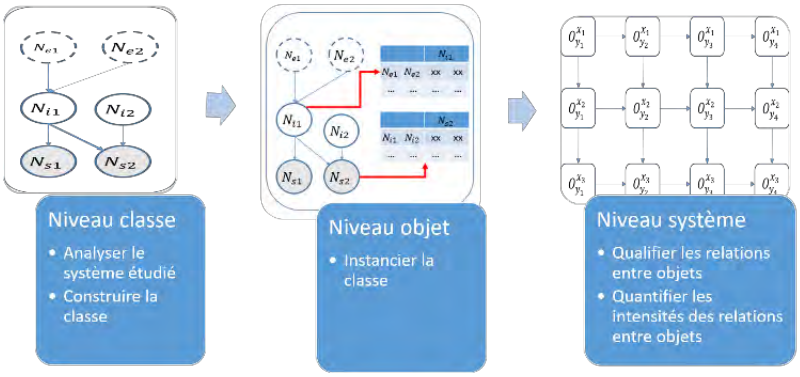


Figure II.17 Construction d'un RBM

Un RBM doit être considéré selon deux niveaux ; local (objet) et global (système). Sa construction passe par trois étapes essentielles : le niveau classe, le niveau local et le niveau système. La Figure II.17 montre les 3 étapes nécessaires à la construction d'un RBM. Après l'identification de la structure globale du système, il faut définir les classes puis, par instanciation des paramètres correspondants caractériser les objets. Finalement, l'établissement du modèle complet nécessite la spécification des chemins de communication.

Les tâches à réaliser, les structurations à déterminer, les fonctions ou procédures à réaliser à chaque niveau dans le processus de construction d'un RBM sont rappelés ci-dessous.

II.2.4.1 Niveau classe

- Analyser le système étudié (Fonction, Données disponibles, Structure, etc.)
- Construire la classe
    - Construire un RB classique sans considérer l'aspect multidimensionnel du problème
    - Identifier les nœuds nécessitant la communication entre les dimensions du problème
    - Identifier les nœuds dimensionnels
    - Ajouter les nœuds virtuels pour les nœuds dimensionnels
    - Identifier les entrées et les sorties (l'entrée et la sortie doivent avoir les mêmes modalités)

II.2.4.2 Niveau local

Le niveau local est établi par instanciation d'une classe et la génération des objets correspondants. Dans un RBM on distingue deux types d'objets : les objets initiaux et les autres. Le nombre d'objets à initialiser dépend du nombre de dimensions, et du nombre d'objets par dimension, etc…

Instancier la classe : paramétrer (par expertise, par apprentissage) les classes pour obtenir les objets en donnant des valeurs aux probabilités conditionnelles $P(internes|entrées)$, $P(internes|internes)$, $P(sorties|internes)$. $P(entrée)$ est la probabilité correspondante récupérée en sortie de l'objet amont sur le chemin de communication dans la dimension considérée (sauf pour les objets initiaux).

II.2.4.3 Niveau global

Le niveau global concerne la définition des relations entre les objets et la quantification des relations à l'intérieur des objets.

L'identification des relations entre objets permet d'établir le canal de communication entre ceux-ci par connexion des entrées et sorties correspondantes.

La quantification des relations à l'intérieur des objets correspond à la spécification des tables de probabilités conditionnelles et probabilités a priori. Les sorties et les entrées sur chaque dimension doivent être identifiées et connectées pour autoriser la transmission d'informations. Par exemple, un RBM à deux dimensions comme celui de la Figure II.8 a besoin de communiquer sur l'axe « x » et « y ».

- Communication par le canal de communication sur l'axe « x » : $x \to x+1$: $O_{x_i}^{y_j} \xrightarrow{p\left(N_{sx_i}^{y_j}\right)=p(N_{ex_{i+1}}^{y_j})} O_{x_{i+1}}^{y_j}$
- Communication par le canal de communication sur l'axe « y » : $y \to y+1$: $O_{x_i}^{y_j} \xrightarrow{p\left(N_{sx_i}^{y_j}\right)=p(N_{ex_i}^{y_{j+1}})} O_{x_i}^{y_{j+1}}$

II.2.4.4 Matrice de relation, rang et décalage

La matrice de relation est une représentation compacte d'un RBM. C'est une matrice carrée dont la dimension dépend du système.

- ***Matrice de relation (MR) :*** Matrice qui représente les interactions des objets entre les dimensions dans un réseau global. C'est une matrice qui permet de décrire la structure répétitive des relations entre objets (mis à part les objets initiaux) ; chaque intersection est évaluée par :
    - 1 : lorsqu'il y a transmission d'informations entre deux objets $O_1 \to O_2$;
    - -1 : lorsqu'il y a réception d'informations entre deux objets $O_2 \leftarrow O_1$;
    - 0 : lorsque qu'il n'y a pas de lien entre objets.

Outre la matrice de la matrice des relations, on peut introduire les notions de rang et de décalage dans un RBM.

- ***Rang dans une dimension (RD) :*** représente le nombre d'objets susceptibles d'influencer l'objet considéré dans la même dimension.
- ***Décalage entre deux dimensions (D) :*** correspond à la notion de rang par rapport à une autre dimension, c'est le nombre d'objets dans une autre dimension dont dépend l'objet considéré.

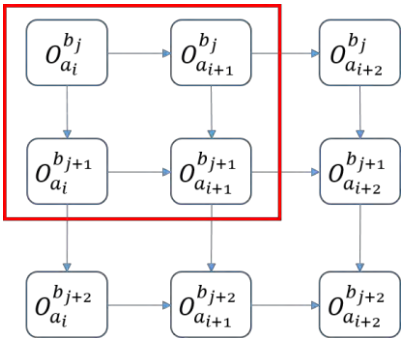


Figure II.18 RBM 1

Figure II.18 les rangs (RD) suivant les dimensions a et b sont de 1 et il n'y a pas de décalage entre deux dimensions. Le système est une répétition de quatre objets (carré rouge) et la matrice relation est donnée ci-dessous :

$$MR_a^b = \begin{array}{c|cccc} & O_{a_i}^{b_j} & O_{a_{i+1}}^{b_j} & O_{a_i}^{b_{j+1}} & O_{a_{i+1}}^{b_{j+1}} \\ O_{a_i}^{b_j} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ O_{a_{i+1}}^{b_j} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ O_{a_i}^{b_{j+1}} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ O_{a_{i+1}}^{b_{j+1}} & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

La dimension de cette matrice est $4 * 4$. La somme totale des termes de la matrice est 0 car le nombre d'informations envoyées doivent être égal au nombre d'informations reçues. Si l'on décrypte la deuxième, ligne par exemple représentée par le vecteur $[-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, le premier terme montre que l'objet $O_{a_{i+1}}^{b_j}$ reçoit une information de $O_{a_i}^{b_j}$, les deuxième et troisième termes affectés d'une valeur « 0 » indiquent une absence de lien entre objets concernés soit entre $O_{a_{i+1}}^{b_j}$ et lui-même ainsi qu'entre $O_{a_{i+1}}^{b_j}$ et $O_{a_i}^{b_{j+1}}$; enfin le quatrième terme révèle une transmission d'information de $O_{a_{i+1}}^{b_j}$ vers $O_{a_{i+1}}^{b_{j+1}}$.

Le réseau de Figure II.19 présente un RBM de rang de 2 suivant la dimension de a et 1 suivant la dimension b ; avec un décalage de 1 entre a et b. Le système est une répétition de six objets (carré rouge). La matrice des relations est donnée ci-dessous :

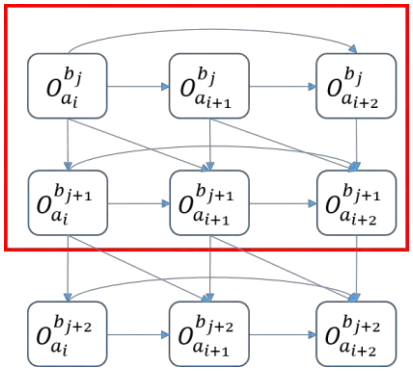


Figure II.19 RBM 2

$$MR_a^b = \begin{array}{c|cccccc} & O_{a_i}^{b_j} & O_{a_{i+1}}^{b_j} & O_{a_{i+2}}^{b_j} & O_{a_i}^{b_{j+1}} & O_{a_{i+1}}^{b_{j+1}} & O_{a_{i+2}}^{b_{j+1}} \\ \hline O_{a_i}^{b_j} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ O_{a_{i+1}}^{b_j} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ O_{a_{i+2}}^{b_j} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ O_{a_i}^{b_{j+1}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ O_{a_{i+1}}^{b_{j+1}} & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ O_{a_{i+2}}^{b_{j+1}} & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

La matrice de relation traduit, on le voit, les interactions entre les différents objets elle permet la représentation d'un RBM.

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la modélisation des systèmes complexes et notamment incertains en utilisant les outils graphiques probabilistes et en particulier les réseaux bayesiens. Nous avons rappelé les principes sous-tendant cette technique en partant des réseaux élémentaires que constituent les réseaux bayesiens classiques étendus ensuite à la notion de réseaux bayesiens dynamiques et prolongés finalement au concept de réseaux bayesiens orientés. Nous avons rappelé à chaque fois les raisons qui ont guidé la nécessité de passage d'un type de réseau à l'autre ; des raisons liées essentiellement à la montée en complexité des systèmes que les chercheurs et les ingénieurs sont appelés à modéliser et à analyser. Il ressort de ce panorama que même si les outils actuels peuvent servir à modéliser et analyser beaucoup de systèmes en pratique dans beaucoup de domaines existants, certaines caractéristiques associées à la complexité nécessitent le développement de nouvelles formes de modélisation. Dans cette perspective, nous avons proposé une nouvelle approche autour du concept orienté objet pour donner naissance aux Réseaux Bayesiens Multidimensionnels. Cette nouvelle génération de réseaux bayesiens introduit de nouveaux concepts comme les canaux de communication à travers l'introduction des nœuds virtuels et offrent la possibilité de pouvoir considérer l'analyse d'un système suivant un nombre quelconque de dimensions. Un des objectifs du développement d'un modèle est de pouvoir l'utiliser comme un outil d'aide à la décision. En ce qui concerne les modèles développés autour du concept bayesien, la possibilité d'aide à la décision repose sur la capacité d'inférence de ces modèles. Pour réaliser l'inférence il faut toutefois pouvoir caractériser quantitativement les intensités des relations établies entre les variables, c'est l'étape instanciation (apprentissage). Ces deux étapes feront l'objet des Chapitres 3 (instanciation) et 4 (inférence).

Chapitre III

Instanciation dans un RBM

Introduction

Les RBM présentés dans le chapitre précédent constituent une nouvelle approche de modélisation des systèmes complexes permettant d'appréhender certaines de leurs caractéristiques comme la hiérarchie, l'évolution suivant plusieurs dimensions, ou encore le très grand nombre d'entités les composant, etc. La modélisation des systèmes par l'approche bayesienne passe par trois principales étapes : (i) la construction structurelle du modèle, (ii) son instanciation (c'est-à-dire la spécification des intensités des relations entre variables en termes de probabilités conditionnelles), et (iii) l'inférence qui confère au modèle un statut d'outil d'aide à la décision. Les notions de base et les étapes de construction ont été présentées dans le chapitre précédent ; les techniques d'inférence quant à elles feront l'objet du chapitre suivant. Ce chapitre est donc dédié à l'instanciation c'est-à-dire à la caractérisation quantitative des relations établies entre les variables dans différents objets que l'on qualifiera par la suite de paramètres du modèle. Généralement la quantification des paramètres peut se faire à partir :

1. d'une connaissance exacte associée à un dénombrement de cas finis
2. de techniques d'apprentissage réalisées sur un nombre d'expérience fini.
3. d'avis d'experts lorsque les deux autres options ne s'appliquent pas ou ne sont pas suffisamment représentatives.

Ce chapitre sera essentiellement consacré à l'apprentissage comme technique d'instanciation d'un RBM ; cependant pour les RBM, la procédure de paramétrage s'avère plus compliquée que pour les RB. Un RBM a plusieurs classes susceptibles de donner naissance, par instanciation, à des objets qui diffèrent par la valeur de leurs paramètres. Le grand nombre de variables dans un RBM conduit à des difficultés algorithmiques si l'apprentissage se fait sur des variables. Néanmoins, il existe certaines relations entre les objets de même classe qui peuvent être exploitées pour simplifier la procédure d'apprentissage ou améliorer ses résultats. Dans cette perspective les techniques d'apprentissage dites par transfert [117, 118] semblent bien adaptées pour traiter les variables relationnelles.

Ce chapitre est organisé comme suit : après une présentation de la méthodologie générale d'instanciation d'un RBM, les généralités de la méthode de l'apprentissage par transfert adaptée pour l'apprentissage dans un RBM seront présentées. Les notions d'apprentissage par transfert appliqué aux RBM viendront conclure ce chapitre.

III.1 Instanciation dans un RBM

La procédure de caractérisation quantitative des relations entre les variables d'une classe pour la génération d'un objet s'appelle « instanciation ». Un RBM est construit par ses objets. L'objet est le réseau bayesien obtenu en paramétrant la classe. Une classe peut avoir plusieurs objets après paramétrage. Certains objets partagent une même structure (la classe), mais sont donc susceptibles d'être distincts par leurs paramètres. Dans la section ci-dessous un algorithme et une fonction pour l'instanciation d'un RBM seront présentés.

III.1.1 Méthode d'instanciation

La méthode d'instanciation repose sur deux étapes principales : l'initialisation et le paramétrage.

Comme un RBM communique par ses canaux de communication, les objets échangent des informations entre entrées et sorties ce qui nécessite une procédure d'initialisation.

Dans cette section, nous présentons cette procédure basée sur la spécification des paramètres associés aux variables internes, aux variables de sorties, et aux variables dites dimensionnelles dont la définition est rappelée ci-dessous.

Rappel : Variable dimensionnelle

- **Variable dimensionnelle** : c'est une variable qui dépend d'elle-même dans son évolution suivant une dimension donnée. Le nœud correspondant à cette variable dans un objet doit avoir un parent virtuel, une projection du même nœud dans l'objet précédent dans la dimension considérée. Par exemple sur le réseau représenté sur la Figure II.14 avec deux dimensions, la variable N_{i3} est une variable dimensionnelle selon la dimension « Temps ».

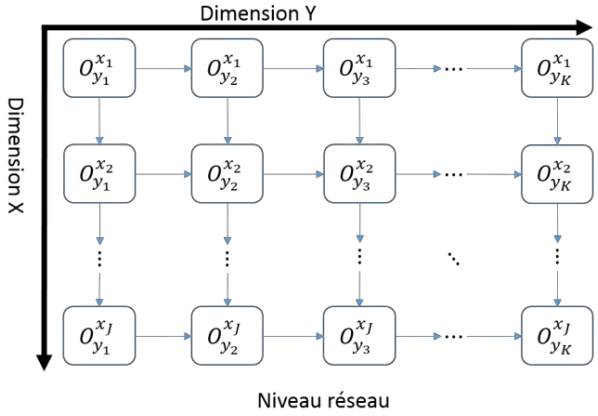


Figure III.1 RBM à deux dimensions « X-Y »

Dans cette partie, nous limitons volontairement au cas des RBM à deux dimensions comme celui schématiquement représenté sur la Figure III.1 dont les deux dimensions sont désignées par « X-Y ». La nouvelle approche de formalisation d'un RBM profite de tous les avantages du paradigme « orienté objet » et en particulier des vertus associées à une modification rendue aisée par la manipulation d'un objet de taille réduite et la possibilité de calcul local. Notons que l'algorithme présenté pour un RBM à deux dimensions peut être généralisé selon les mêmes principes au cas des RBM de dimension n au prix d'une complexification croissante.

La Figure III.2 ci-dessous décrit symboliquement le processus d'obtention des objets ; un objet est obtenu en instanciant la classe correspondante via l'introduction des valeurs associées aux tables de probabilités conditionnelles (CPT). Le processus d'instanciation suit la procédure décrite dans l'encadré Algorithme III.1.

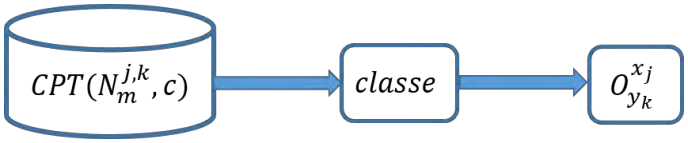


Figure III.2 Procédure d'instanciation de la classe dans un RBM

La Figure III.2 présente la procédure d'instanciation d'un RBM. Il s'agira :

- d'identifier les paramètres utiles de la base de données,
- de distinguer les paramètres initiaux caractérisant les variables dimensionnelles,

- d'installer les variables sans parents des objets initiaux selon une dimension donnée,
- d'affecter les paramètres aux variables non dimensionnelles

On distinguera la nature des objets par un indice c caractérisant l'évolution dimensionnelle tel que :

1. $c = 0$ pour les variables non-dimensionnelles dans un objet $O_{y_k}^{x_j}$
2. $c = 1$ pour les variables dimensionnelles initiales dans un objet $O_{y_k}^{x_j}$
3. $c = 2$ pour les variables dimensionnelles dans un objet $O_{y_k}^{x_j}$

La paramétrisation des objets se fait suivant la procédure suivante : tous les objets d'une dimension (par exemple la dimension « X » pour fixer les idées) et les objets de rang 1 et 2 sur la deuxième dimension pour cause d'initialisation (comme entre $y_1$et y_2 ; si nous supposons que y_k dépend seulement $de\ \ y_{k-1}$) sont paramétrés. Au premier instant la relation dimensionnelle est affectée de l'indice 1 ; l'évolution dimensionnelle commencera à partir du deuxième instant. Pour les variables non-dimensionnelles, les paramètres sont invariants, $c = 0$ pour tous les objets $O_{y_k}^{x_j}$.

Dans la base de données, nous utilisons la notation $CPT(N_m^{j,k}, c)$ pour stocker tous les paramètres. La représentation de la base de données est similaire à la matrice ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} O_{y_1}^{x_1} & O_{y_2}^{x_1} \\ O_{y_1}^{x_2} & O_{y_2}^{x_2} \\ \vdots & \vdots \\ O_{y_1}^{x_{J-1}} & O_{y_2}^{x_{J-1}} \\ O_{y_1}^{x_J} & O_{y_2}^{x_J} \end{bmatrix}$$

Dans un bloc $O_{y_k}^{x_j}$ de la matrice précédente avec $j = 1,2,\cdots,J\ et\ k = 1\ et\ 2$, la représentation de la base est comme de la forme :

$$[N_{1,c} \quad \cdots \quad N_{m,c} \quad \cdots \quad N_{M,c}]'$$

où $N_{m,c}$ est la variable dans l'objet $O_{y_k}^{x_j}$.

L'algorithme ci-dessous présente la procédure d'instanciation des objets pour un RBM quand tous les paramètres sont connus et stockés dans la base de données $CPT(N_m^{j,k}, c)$. Si les variables sont non-dimensionnelles, nous proposons une fonction $Para(j,k)$ pour trouver et affecter les paramètres.

Instanciation des objets dans un RBM

Entrées : C - la classe

J - le nombre d'objet suivant la dimension « X »

K - le nombre d'objet suivant la dimension « Y »

$CPT\left(N_m^{j,k}, c\right)$ - la base de données qui stocke les paramètres de toutes variables

Sorties : les objets $(O_{j,k})$ // Nous utilisons ici $O_{j,k}$ au lieu de $O_{y_k}^{x_j}$ pour simplifier la présentation des algorithmes

1 **Début**

2 **Si** $k = 1$ **alors** // il y a une évolution dimensionnelle suivant « Y »

3 $P\left(N_{iy}^{j,k} \middle| pa\left(N_{iy}^{j,k}\right)\right) \leftarrow CPT(N_m^{j,k}, 1)$ //affectation des paramètres initiaux suivant la dimension « Y »

// $N_{iy}^{j,k}$ est la variable dimensionnelle suivant la dimension « Y »

4 Para (j,k) // appel de la fonction qui paramètre les autres variables

5 **Sinon**

6 $P\left(N_{iy}^{j,k}\middle|pa\left(N_{iy}^{j,k}\right)\right) \leftarrow CPT(N_m^{j,k},2)$ // affectation des paramètres suivant la dimension « Y »

7 Para (j,k)

8 **FinSi**

9 **Fin**

Algorithme III.1 Instanciation des objets dans un RBM

Le fonctionnement de la fonction *Para(j,k)* évoqué dans l'encadré précédent est détaillé dans l'encadré suivant.

Fonction Para (j, k)

Données: j - le numéro de l'objet suivant la dimension « X »

k - le numéro de l'objet suivant la dimension « Y »

1 **Début**

2 **Pour** j←1 **jusqu'à** J **faire**

3 $P\left(N_{s,i}^{j,k}\middle|pa\left(N_{s,i}^{j,k}\right)\right) \leftarrow CPT(N_{s,i}^{j,k},0)$

//Affectation des paramètres sur les variables internes et sorties $N_{s,i}^{\cdot}$ de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$

// pour les variables non-dimensionnelles (c=0).

4 **Si** j=1 **alors** // Pour le premier objet de la dimension « X », ses entrées doivent être initialisées

5 $p\left(N_e^{1,k}\right) \leftarrow CPT(N_e^{1,k},0)$ // Affectation des entrées suivant la dimension « X »

6 Stocker l'objet $O_{y_k}^{x_1}$ // Stockage de l'objet $O_{y_k}^{x_1}$ dans une place de la base de données

7 **Sinon**

// Les objets pour lesquels $j \neq 1$ reçoivent les entrées via leur canal de communication ;

// Ces entrées sont les sorties de l'objet en amont

// Il n'y a donc pas de procédure spécifique d'affection de leurs paramètres

8 Stocker l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ // Sans affection des paramètres sur les entrées

9 **FinSi**

10 **FinPour**

11 **Fin**

Fonction III.1 Paramétrage d'un objet

L'algorithme de l'encadré Algorithme III.1 et la fonction de l'encadré Fonction III.1 constituent les procédures générales d'instanciation d'une classe pour obtenir un objet. Dans le cas où le nombre de dimensions est supérieur à 2, il faut d'abord identifier les variables dimensionnelles suivant chaque dimension et adapter l'algorithme et la fonction présentés précédemment.

Dans cette section nous avons présenté les principes d'affectation des paramètres aux classes pour l'instanciation des objets dans un RBM. Cette procédure nécessite d'être en mesure d'identifier ces paramètres (par introduction d'une valeur connue, par expertise, ou par apprentissage). La suite de ce chapitre sera consacrée à l'obtention des paramètres par

apprentissage. A ces fins, nous rappelons dans la section suivante les approches d'apprentissage utilisées dans la littérature concernant l'approche orientée objet.

III.1.2 Approches d'apprentissage existantes pour les RBOO

Un RBM sous la forme d'un RB simple dont la taille serait prohibitive. Dans cette perspective, [108] propose une méthode d'apprentissage avec une hypothèse « Orienté Objet » pour les RBOO. L'hypothèse de base de ce travail est que tous les objets partageant une même structure sont instanciés avec les mêmes paramètres et peuvent donc être considérés comme identiques. Sur la base de cette hypothèse, la méthode d'apprentissage s'appuie sur toutes les données observées et l'estimation n'est faite qu'une fois pour tous les objets. Mais cette hypothèse peut dans bien des cas être simpliste. Selon les systèmes à représenter, les objets de même structure n'ont pas toujours des paramètres identiques. Dans ce cas, la proposition de [108] revient à réaliser un apprentissage classique. Chaque objet lance l'apprentissage indépendamment des autres réduisant ainsi les avantages liés à l'utilisation du paradigme objet. Le travail présenté dans [108] propose une autre méthode d'apprentissage RBOO en introduisant un indice au niveau des variables permettant de les distinguer au sein des différents objets. A partir de cet indice, l'apprentissage sur chaque variable est opéré par les méthodes classiques (ML ou MAP [71]). Les deux méthodes [108, 119] effectuent l'apprentissage directement à partir des variables. Ils ne considèrent pas la relation quantitative ou qualitative entre objets. Même si dans [108] les auteurs utilisent une notion orienté objet, l'utilisation de la méthode est limitée et ne propose pas de solution exacte pour distinguer les variables dans les objets de même structure mais de paramètres différents. [119] distingue les variables entre objets ; cependant il ne considère pas de relations entre ces objets. Les deux propositions ne sont pas transposables au cas des RBM pour lesquels des liens existent entre objets (voir Exemple III.1 ci-dessous).

Pour étayer notre affirmation considérons le problème ci-dessous.

> *On souhaite modéliser l'approvisionnement en eau dans un grand bassin versant pour analyser et évaluer le risque d'inondation. Afin d'avoir les résultats aussi précis que possible, le bassin est découpé en petites zones considérées comme élémentaires par les experts hydrauliciens et/ou géographes. En termes de modèle RBM, chaque zone constitue un objet. L'homogénéité requise dans le formalisme RBM signifie que chaque zone est caractérisée par les mêmes variables et les mêmes relations « cause-effet » entre variables, en d'autres termes que chaque zone soit décrite par la même structure ou la même classe. Il est aisé d'admettre que d'une zone à l'autre les intensités des relations entre variables, c'est-à-dire la partie quantitative ou paramètres du RBM correspondant, ne seront pas les mêmes. En effet, par rapport à une variable comme l'ensoleillement par exemple, une zone située en altitude ou dans une région fortement boisée ne sera pas traitée quantitativement de la même manière. C'est aussi le cas pour la température qui dépend de l'altitude. Ce type de connaissances peut être introduit au niveau du modèle créant ainsi des relations numériques entre les zones.*
>
> ***Exemple III.1 Modélisation d'inondation***

Comme montré dans l'exemple ci-dessus, des relations peuvent exister entre objets de même classe. Ce type de connaissance en se combinant aux données observées permet d'améliorer la qualité des résultats estimés. En outre, la prise en compte des relations entre variables permet de simplifier la procédure d'apprentissage en transférant d'un objet à l'autre les informations déduites des relations existantes.

L'exploitation des relations dans les RBM pour simplifier le calcul ou augmenter la précision sur un paramètre sera ainsi effectuée à travers la notion d'apprentissage par transfert d'un objet à l'autre de la connaissance. Dans le cadre de ce travail, ne seront considérées que les relations entre objets de même classe.

Dans la section suivante nous allons présenter un état de l'art sur l'apprentissage par transfert.

III.2 Etat de l'art relatif à l'apprentissage par transfert

Les techniques d'apprentissage classiques traitent les objets d'un réseau indépendamment les uns des autres ; elles ne considèrent pas la relation entre objets. De manière générale l'apprentissage consiste à trouver la structure et/ou les paramètres à partir des données et/ou des avis d'experts notamment dans le cas des RB classiques [120]. Il existe beaucoup d'algorithmes d'apprentissage ; les techniques classiques ont été présentées dans le deuxième chapitre. L'idée de transfert est introduite dans notre modèle RBM en profitant des relations identifiées entre certains objets. Nous présentons à la suite les travaux de base (peu nombreux) relatifs à l'apprentissage par transfert appliqué aux RB.

L'apprentissage par transfert est une méthode d'apprentissage qui permet d'utiliser tout ou partie des connaissances relatives à un contexte ou une situation donnée pour caractériser le comportement d'un contexte ou d'une situation présentant certaines analogies. Dans le domaine de la santé par exemple des données relatives à la population française (connaissances stockées) peuvent être utilisées en totalité ou partiellement dans le cadre d'études du même type menées au sein de la population d'un autre pays. En ce qui concerne les RB, l'approche de transfert peut s'avérer intéressante pour l'apprentissage de paramètres et de structure.

L'idée de transfert est proposée dans [117, 118]. L'objectif est le transfert des informations des réseaux sources aux réseaux cibles. Le principe est organisé autour des éléments suivants :

- Réseau source (domaine source) : c'est le réseau pour lequel on dispose d'un nombre représentatif de données observées.
- Réseau cible (domaine cible): c'est le réseau dont on veut estimer les paramètres et pour lequel on ne dispose pas d'un nombre d'observation suffisant mais qui présente un degré de similarité avec le réseau source.

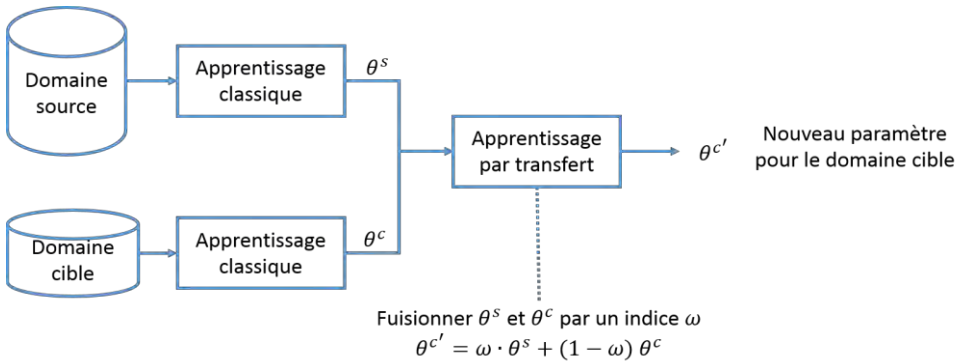


Figure III.3 Apprentissage par transfert appliqué au Réseau Bayesien

La technique de transfert s'applique sur l'apprentissage. Des recherches sont actuellement en cours afin d'adapter la technique de transfert au réseau bayesien pour l'apprentissage des paramètres [121]. L'idée essentielle de transfert est illustrée sur la Figure III.3. Il s'agit tout d'abord de trouver les domaines sources correspondantes au domaine cible. Les

paramètres θ^s et θ^c des domaines source et cible respectivement sont ensuite appris séparément. Le paramètre du domaine cible est alors modifié par le biais d'une fusion pondérée (à transfert un indice de fusion) des deux paramètres précédents. L'indice de fusion compris entre 0 et 1 permet d'ajuster la confiance placée dans chaque domaine. La problématique de trouver les meilleurs domaines sources et le choix de l'indice constitue les défis actuels de la technique d'apprentissage par transfert.

Deux verrous majeurs doivent être levés pour prétendre réaliser des apprentissages par transfert :

- Identification des domaines sources. Il s'agit ici d'évaluer le degré de similarité entre les domaines autorisant le transfert total ou partiel d'information. Parfois domaines cibles et domaines sources peuvent exhiber des niveaux de similarité sans pour autant être identiques en termes de structure. C'est le cas de l'exemple de la Figure III.4. Il est nécessaire dans ce cas de déterminer la cohérence entre variables des domaines source et cible. Dans [122], un algorithme est proposé pour cela afin d'estimer la similarité de structure entre les domaines. A partir de l'information relative au degré de similarité il s'agit alors d'estimer l'indice de fusion pour la paramétrisation du domaine cible.
- C'est une question inhérente à toutes les techniques d'apprentissage par transfert que les deux domaines aient la même structure ou pas. Dans [121], une méthode basée sur la divergence de KL (Kullback-Leibler) [123] est proposée pour améliorer l'apprentissage par transfert dans les RB par une meilleure estimation de l'indice de fusion entre le réseau cible et les réseaux sources. Cet indice dépend du nombre de cas observés et de la qualité de paramètres associés à une variable. D'autres travaux comme [122] proposent d'estimer cet indice en s'appuyant sur la notion de similarité de structure des réseaux.

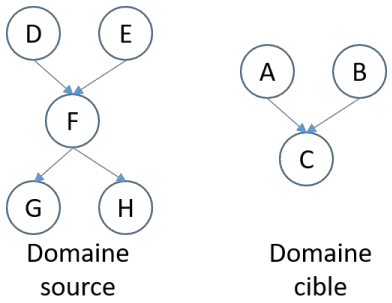


Figure III.4 Domaines liés mais structures différentes

La motivation du transfert est de profiter du nombre de données dans un domaine sources pour améliorer les résultats d'estimation des paramètres dans un domaine cible. En synthèse, on peut dire que les procédures de transfert, dans l'approche d'apprentissage des réseaux bayesien, sont bien définies dans la littérature [122, 121] et sont le plus souvent fondées sur les techniques proposées par [118, 117]. Nous présentons à la suite l'introduction des techniques de transfert au niveau des Réseaux Bayesiens Multidimensionnels.

III.3 Apprentissage par transfert dans les RBM

III.3.1 Généralités

L'idée de transfert est d'utiliser les données connexes entre un réseau source et un réseau cible. Dans notre cas, un RBM est constitué de nombreux objets. Chaque objet peut contenir beaucoup de variables. Le grand nombre de variables

constitue une difficulté dans le traitement des RBM. Si l'apprentissage est effectué sur chaque variable comme dans [119], la procédure peut s'avérer longue et compliquée. Dans la situation où peu de données sont disponibles pour la caractérisation des paramètres d'un objet, le résultat estimé sera peu précis. L'utilisation de la connaissance relative aux relations existantes entre objets par rapport à leur positionnement sur une dimension particulière peut permettre d'améliorer la procédure d'identification des paramètres. C'est l'essence même de la notion de transfert qui s'appuie sur des données connexes entre domaines sources et domaine cible. La connexion des données correspondant à la relation entre objets dans un RBM.

Considérons ici les deux verrous relatifs respectivement à l'estimation du degré de similarité et à l'évaluation de l'indice de fusion dont nous avons souligné au paragraphe précédent qu'ils étaient à la base de la qualité de l'apprentissage par transfert.

Dans le cas de RBM, le premier verrou n'en est pas un dans la mesure où les objets sont composés des mêmes variables traduisant, à travers la classe, les mêmes relations « cause-effet » et leur conférant par ce biais des structures identiques.

Le second verrou relatif à la détermination de l'indice de fusion demeure par contre ouvert.

A la suite, nous adaptons au contexte d'utilisation des RBM les méthodes d'apprentissage par transfert précédemment introduites. Cette forme d'apprentissage est centrale dans la construction d'un RBM.

Plusieurs niveaux d'apprentissage par transfert peuvent être distingués (Figure III.5) : niveau objet, niveau variable, niveau paramètre.

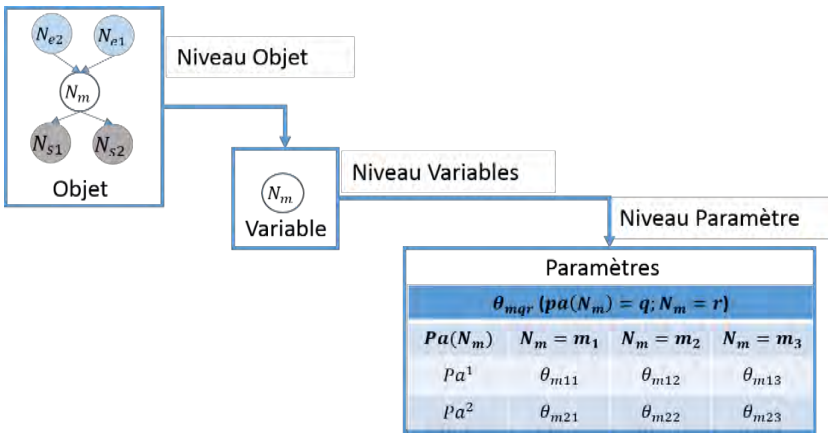


Figure III.5 Niveaux d'apprentissage dans un RBM

Clairement l'apprentissage au niveau objet n'est pas envisageable de par la lourdeur des calculs qui impliqueraient d'apprendre toutes les variables simultanément sans tenir compte des relations existantes entre objets. En outre des redondances/divergences d'apprentissage pourraient être induites en cas de variables communes à plusieurs objets qui, d'une part, ne profiteraient pas de la totalité des informations permettant leur paramétrage et, d'autre part, seraient susceptibles d'être différemment paramétrées.

L'estimation des paramètres doit donc être réalisée aux niveaux « variable » et « paramètre ».

III.3.2 Modes de calculs pour l'apprentissage par transfert

Nous proposons une nouvelle méthode de transfert pour un RBM dans cette partie en distinguant deux formes de transfert. Si la relation est au niveau paramètre, le transfert se fait au niveau des probabilités (transfert à un niveau) ; dans le cas où la relation concerne les données, on effectue le transfert au niveau des données et au niveau des probabilités (transfert à deux niveaux).

III.3.2.1 Transfert à un niveau

Le premier cas consiste à transférer directement des probabilités. Deux cas sont à distinguer :

1. Variables à paramètres identiques. Quand plusieurs objets font appel à une même variable (nœud) $N_m^{\cdot}$ et que celle-ci possède les mêmes paramètres quels que soient les objets ($O^{j,k}$), toutes les données disponibles au niveau de chaque variable peuvent être utilisées pour l'apprentissage à partir des algorithmes ML ou MAP. Les paramètre $\theta_{mqr}^{\cdot}$, calculés sont alors transférés aux variables correspondantes $N_m^{j,k}$.
2. S'il existe une relation entre les objets alors on peut transférer directement les probabilités associées aux paramètres en appliquant au domaine source la relation correspondante pour la détermination des paramètres du domaine cible.

III.3.2.2 Transfert à deux niveaux

Pour la deuxième situation, nous élargissons les champs de transfert aux données relationnelles. Connaissant la relation entre domaine cible et domaine source, les données du domaine source peuvent être transférées au domaine cible pour constituer un jeu de données relationnelles. Celles-ci peuvent être alors fusionnées avec les données disponibles originellement sur le domaine cible dans une proportion dépendant de l'indice de fusion.

Après avoir obtenu les données transformées, il faut considérer l'indice de fusion. La méthode de « Local Linear Pool (LoLP) » [121] peut être utilisée pour l'identification de cet indice. C'est une méthode développée dans le cadre d'un apprentissage par transfert classique. Elle donne de bons résultats lorsque les domaines sources et cibles sont proches ce qui est généralement le cas dans le cadre de l'instanciation des RBM dans la mesure où les objets sont proches dans la dimension considérée.

Les étapes principales de la méthode LoLP sont décrites ci-dessous :

1. Obtenir la moyenne des probabilités sur les objets sources

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \qquad \textbf{\textit{Equation 14}}$$

où p_i est le paramètre estimé à partir de données de transfert selon la relation et n est le nombre de données source.

2. Fusionner les paramètres entre la moyenne et la cible

$$p'_{cible} = f_{cible} * p_{cible} + (1 - f_{cible}) * \bar{p} \qquad \textbf{\textit{Equation 15}}$$

L'indice de fusion est f_{cible} ; c'est un facteur qui dépend du nombre de cas observés (N_{cas}) et de la taille du tableau de probabilités conditionnelles estimé (T_{cpt}). f_{cible} est définie par :

$$f_{cible} = \begin{cases} 1 - \dfrac{log(c_f)}{c_f} & si\ c_f \geq 3 \\ 1 - \dfrac{c_f * log(3)}{3} & si\ c_f < 3 \end{cases} \qquad \textbf{Equation 16}$$

avec $c_f = \frac{N_{cas}}{2 * T_{cpt}}$.

La méthode originale proposée dans [121] établit la valeur des probabilités par fusion entre paramètres établis sur les nœuds sources et cibles. Notre méthode rajoute une notion supplémentaire liée aux relations susceptibles d'exister entre objets pour lesquelles un nœud cible peut être déduit d'un nœud source. Dans notre cas la fusion se fait donc au niveau des données entre celles observées sur le nœud cible et celles déduites du nœud source par la relation (on qualifie ce dernier jeu de données de valeurs sources améliorées).

Comme l'illustre la Figure III.6, nous utilisons les données et la relation pour calculer les valeurs « théoriques » de domaine cible dans le cas de transfert au niveau des données. Notons que le processus de fusion qui consiste à regrouper les données issues de sources diverses permet d'améliorer la qualité de l'apprentissage.

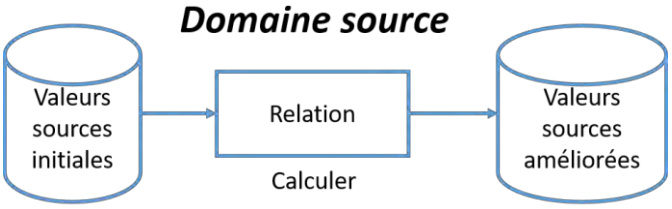


Figure III.6 Transformer les données

Exemple : Relation quantitative

Considérons un RBM avec une variable commune à trois objets. La distribution réelle de ces trois variables est présentée sur le Tableau III.1. Les valeurs observées pour chaque objet sont répertoriées dans le Tableau III.2 et la relation théorique entre les trois objets est telle que : $N_m^{O^2} = N_m^{O^1} + 2;\ N_m^{O^3} = N_m^{O^2} + 2.$

	$N_m^{O^1}$	$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^3}$
0 to 1	*2,27*	*0,021*	*0,008*
1 to 2	*4,97*	*0,11*	*0,044*
2 to 3	*9,01*	*0,5*	*0,19*
3 to 4	*13,6*	*1,69*	*0,67*
4 to 5	*17*	*4,51*	*1,94*
5 to 6	*17,6*	*9,4*	*4,54*
6 to 7	*15,2*	*15,3*	*8,7*
7 to 8	*10,8*	*19,6*	*13,6*
8 to 9	*6,44*	*19,6*	*17,4*
9 to 10	*3,18*	*15,3*	*18,1*
10 to 11	*0*	*9,4*	*15,4*
11 to 12	*0*	*4,51*	*10,7*
12 to 13	*0*	*0*	*6,04*
13 to 14	*0*	*0*	*2,79*

Tableau III.1 Tableau de probabilités

	$N_m^{O^1}$	$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^3}$		$N_m^{O^1}$	$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^3}$
1	4,116	9,234	10,972	26	4,279	6,853	7,404
2	3,291	7,270	10,285	27	6,981	7,777	8,801
3	6,113	7,245	5,7204	28	7,014	9,308	12,481
4	9,089	7,284	10,579	29	0,403	7,220	11,178
5	4,737	3,889	10,244	30	7,065	9,077	9,759
6	4,886	7,087	4,030	31	5,611	6,694	5,809
7	5,886	10,54	9,594	32	6,334	5,929	11,598
8	4,299	4,873	9,577	33	8,787	9,312	7,107
9	8,537	7,968	7,480	34	4,942	6,388	8,571
10	4,574	4,285	11,871	35	4,104	4,625	10,572
11	2,527	9,266	5,639	36	7,707	10,35	9,078
12	5,109	9,619	10,321	37	7,458	9,565	7,119
13	7,796	6,213	7,690	38	6,481	9,553	11,723
14	5,532	7,592	9,733	39	4,672	10,482	9,211
15	4,644	8,484	6,989	40	1,352	7,508	11,493
16	5,801	6,226	7,895	41	0,896	8,778	9,758
17	6,934	9,313	11,313	42	5,198	11,913	7,254
18	2,587	9,808	8,132	43	5,003	8,524	4,146
19	3,871	7,700	7,5632	44	6,102	11,915	6,553
20	9,262	10,704	11,298	45	6,633	9,249	7,787
21	5,794	8,755	9,347	46	1,212	9,835	7,866
22	8,711	9,986	10,416	47	5,994	6,202	12,503
23	5,492	8,440	6,4708	48	6,004	8,777	9,870
24	7,316	8,755	8,603	49	7,586	10,345	9,593
25	4,386	11,242	5,110	50	5,431	7,617	11,824

Tableau III.2 Valeurs observées pour chaque objet

Nous donnons à la suite un exemple d'apprentissage de transfert réalisé sur ce jeu de 50 données. Les domaines sources sont caractérisés par les nœuds $N_m^{O^2}$ et $N_m^{O^3}$ qui serviront à déterminer la probabilité associée au nœud $N_m^{O^1}$ (domaine cible) à partir des relations établies.

- *Au niveau données :*
  - *Pour $N_m^{O^2}$: déduire 2 sur chaque donnée. Stocker les données $DN_m^{sO^2}$ (Tableau III.3)*
  - *Pour $N_m^{O^3}$: déduire 4 sur chaque donnée. Stocker les données $DN_m^{sO^3}$ (Tableau III.4)*
- *Au niveau probabilités :*
  - *Objet cible O^1 : faire l'apprentissage en utilisant l'algorithme MV (maximum de vraisemblance) sur la variable $N_m^{O^1}$ avec les données $DN_m^{O^1}$. Stocker le paramètre source $\theta_{m\cdot\cdot}^{cO^1}$*
  - *Objet source O^2 : faire l'apprentissage en utilisant l'algorithme MV sur la variable $N_m^{O^2}$ avec les données $DN_m^{sO^2}$. Stocker le paramètre source $\theta_{m\cdot\cdot}^{sO^2}$*
  - *Objet source O^3 : faire l'apprentissage en utilisant l'algorithme MV sur la variable $N_m^{O^3}$ avec les données $DN_m^{sO^3}$. Stocker le paramètre source $\theta_{m\cdot\cdot}^{sO^3}$*

	$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^2}-2$		$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^2}-2$
1	9,234	7,234	26	6,853	4,853
2	7,270	5,270	27	7,777	5,777
3	7,245	5,245	28	9,308	7,308
4	7,284	5,284	29	7,220	5,220
5	3,889	1,889	30	9,077	7,077
6	7,087	5,087	31	6,694	4,694
7	10,54	8,54	32	5,929	3,929
8	4,873	2,873	33	9,312	7,312
9	7,968	5,968	34	6,388	4,388
10	4,285	2,285	35	4,625	2,625
11	9,266	7,266	36	10,35	8,35
12	9,619	7,619	37	9,565	7,565
13	6,213	4,213	38	9,553	7,553
14	7,592	5,592	39	10,482	8,482
15	8,484	6,484	40	7,508	5,508
16	6,226	4,226	41	8,778	6,778
17	9,313	7,313	42	11,913	9,913
18	9,808	7,808	43	8,524	6,524
19	7,700	5,700	44	11,915	9,915
20	10,704	8,704	45	9,249	7,249
21	8,755	6,755	46	9,835	7,835
22	9,986	7,986	47	6,202	4,202
23	8,440	6,440	48	8,777	6,777
24	8,755	6,755	49	10,345	8,345
25	11,242	9,242	50	7,617	5,617

Tableau III.3 Valeurs sources $N_m^{O^2}$ améliorées

	$N_m^{O^3}$	$N_m^{O^3}-4$		$N_m^{O^3}$	$N_m^{O^3}-4$
1	10,972	6,972	26	7,404	3,404
2	10,285	6,285	27	8,801	4,801
3	5,7204	1,7204	28	12,481	8,481
4	10,579	6,579	29	11,178	7,178
5	10,244	6,244	30	9,759	5,759
6	4,030	0,030	31	5,809	1,809
7	9,594	5,594	32	11,598	7,598
8	9,577	5,577	33	7,107	3,107
9	7,480	3,480	34	8,571	4,571
10	11,871	7,871	35	10,572	6,572
11	5,639	1,639	36	9,078	5,078
12	10,321	6,321	37	7,119	3,119
13	7,690	3,690	38	11,723	7,723
14	9,733	5,733	39	9,211	5,211
15	6,989	2,989	40	11,493	7,493
16	7,895	3,895	41	9,758	5,758
17	11,313	7,313	42	7,254	3,254
18	8,132	4,132	43	4,146	1,146
19	7,5632	3,5632	44	6,553	2,553
20	11,298	7,298	45	7,787	3,787
21	9,347	5,347	46	7,866	3,866
22	10,416	6,416	47	12,503	8,503
23	6,4708	2,4708	48	9,870	5,870
24	8,603	4,603	49	9,593	5,593
25	5,110	1,110	50	11,824	7,824

Tableau III.4 Valeurs sources $N_m^{O^3}$ améliorées

- *Paramètre de fusion : calculer l'indice de fusion avec c_f, f_{cible} (Tableau III.5) et calculer la probabilité source moyenne $\bar{\theta}^{source}$ (Tableau III.6)*

Paramètre de fusion : f_{cible}, c_f		
Nombre de cas (N_{cas})		50
Taille du tableau de probabilités conditionnelles (T_{cpt})		1*14
$c_f = \frac{N_{cas}}{2 * T_{cpt}}$		1,786
$c_f \geq 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{log c_f}{C_f}$	0,859
$c_f < 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{c_f * log 3}{3}$	**0,716**

Tableau III.5 Paramètres de fusion

Comme $c_f = 1{,}786 < 3$*, le paramètre de fusion est 0,716.*

Paramètre source estimé $(\theta_{N_m}^{sO^2})$***(%)***		***Moyenne*** $(\bar{\theta}^{source})$	***Paramètre source estimé*** $(\theta_{N_m}^{sO^3})$***(%)***	
0 to 1	*1,67*	*3,335*	*0 to 1*	*5*
1 to 2	*3,33*	*5,83*	*1 to 2*	*8,33*
2 to 3	*6,67*	*6,67*	*2 to 3*	*6,67*
3 to 4	*3,33*	*10,815*	*3 to 4*	*18,3*
4 to 5	*11,7*	*10,015*	*4 to 5*	*8,33*
5 to 6	*20*	*19,15*	*5 to 6*	*18,3*
6 to 7	*13,3*	*13,3*	*6 to 7*	*13,3*
7 to 8	*23,3*	*19,15*	*7 to 8*	*15*
8 to 9	*10*	*7,5*	*8 to 9*	*5*
9 to 10	*6,67*	*4,17*	*9 to 10*	*1,67*
10 to 11	*0*	*0*	*10 to 11*	*0*
11 to 12	*0*	*0*	*11 to 12*	*0*
12 to 13	*0*	*0*	*12 to 13*	*0*
13 to 14	*0*	*0*	*13 to 14*	*0*

Tableau III.6 Paramètre estimé sur les variables sources améliorées et leur moyenne $\bar{\theta}^{source}$

- *Objet cible* O^1 *: fusionner les paramètres* $\theta_m^{cO^{1\prime}} = f_{cible} * \theta_m^{cO^1} + (1 - f_{cible}) * \bar{\theta}^{source}$*. Stocker le paramètre cible* $\theta_m^{cO^{1\prime}}$ *(Tableau III.7)*

Paramètre cible avant transfert $\theta_{N_m}^{cO^1}$***(%)***		***Paramètre cible après transfert*** $\theta_{N_1}^{cO^{1\prime}}$***(%)***	
0 to 1	*5*	*0 to 1*	*4,527*
1 to 2	*5*	*1 to 2*	*5,236*
2 to 3	*5*	*2 to 3*	*5,474*
3 to 4	*5*	*3 to 4*	*6,652*
4 to 5	*20*	*4 to 5*	*17,164*
5 to 6	*20*	*5 to 6*	*19,759*
6 to 7	*15*	*6 to 7*	*14,517*
7 to 8	*13,3*	*7 to 8*	*14,961*
8 to 9	*6,67*	*8 to 9*	*6,906*
9 to 10	*5*	*9 to 10*	*5,960*
10 to 11	*0*	*10 to 11*	*0*
11 to 12	*0*	*11 to 12*	*0*
12 to 13	*0*	*12 to 13*	*0*
13 to 14	*0*	*13 to 14*	*0*

Tableau III.7 Variable cible avant transfert et après transfert

Les mêmes étapes sont déroulées pour les variables $N_m^{O^2}$ et $N_m^{O^3}$. On suppose ici que quand $N_m^{O^2}$ est l'objet cible, $N_m^{O^1}$ et $N_m^{O^3}$ sont les objets sources et, de la même façon, quand $N_m^{O^3}$ est l'objet cible, $N_m^{O^1}$ et $N_m^{O^2}$ sont les objets sources. Les valeurs sources améliorées sont calculées par la matrice ci-dessous :

	$N_m^{O^1}$	$N_m^{O^2}$	$N_m^{O^3}$
$N_m^{O^1}$	0	-2	-4
$N_m^{O^2}$	$+2$	0	-2
$N_m^{O^3}$	$+4$	$+2$	0

Les résultats de l'apprentissage par transfert et de l'apprentissage direct sont présentés dans le Tableau III.8 :

Paramètre estimé par transfert	$\boldsymbol{N_m^{O^1}}$	$\boldsymbol{N_m^{O^2}}$	$\boldsymbol{N_m^{O^3}}$	***Paramètre estimé sans transfert***	$\boldsymbol{N_m^{O^1}}$	$\boldsymbol{N_m^{O^2}}$	$\boldsymbol{N_m^{O^3}}$
0 to 1	*4,527*	*1,61*	*1,56*	*0 to 1*	*5*	*1,61*	*1,56*
1 to 2	*5,236*	*1,61*	*1,56*	*1 to 2*	*5*	*1,61*	*1,56*
2 to 3	*5,474*	*2,527*	*1,56*	*2 to 3*	*5*	*1,61*	*1,56*
3 to 4	*6,652*	*4,145*	*1,56*	*3 to 4*	*5*	*3,23*	*1,56*
4 to 5	*17,164*	*6,221*	*4,246*	*4 to 5*	*20*	*6,45*	*4,69*
5 to 6	*19,759*	*5,513*	*6,702*	*5 to 6*	*20*	*3,23*	*7,81*
6 to 7	*14,517*	*11,990*	*6,026*	*6 to 7*	*15*	*11,3*	*6,25*
7 to 8	*14,961*	*19,159*	*13,426*	*7 to 8*	*13,3*	*19,4*	*17,2*
8 to 9	*6,906*	*13,127*	*9,809*	*8 to 9*	*6,67*	*12,9*	*7,81*
9 to 10	*5,960*	*20,072*	*17,654*	*9 to 10*	*5*	*22,6*	*17,2*
10 to 11	*0*	*8,534*	*12,727*	*10 to 11*	*0*	*9,68*	*12,5*
11 to 12	*0*	*5,534*	*14,980*	*11 to 12*	*0*	*6,45*	*14,1*
12 to 13	*0*	*0*	*5,578*	*12 to 13*	*0*	*0*	*4,69*
13 to 14	*0*	*0*	*2,670*	*13 to 14*	*0*	*0*	*1,56*

Tableau III.8 Résultat d'apprentissage

La divergence de KL [123] sur les deux méthodes est donnée sur le Tableau III.9 :

	transfert	***sans transfert***
$N_m^{O^1}$	*2,138*	*3,634*
$N_m^{O^2}$	*3,785*	*5,012*
$N_m^{O^3}$	*4,028*	*5,479*

Tableau III.9 Divergence de KL sur les résultats

Les résultats obtenus par l'apprentissage par transfert sont plus proches des valeurs réelles selon la divergence de KL. La différence entre la qualité de l'apprentissage avec ou sans transfert est plus marquée quand la taille du tableau de probabilités conditionnelles augmente et que les données sont rares.

III.3.3 Procédure principale

Nous présentons ici la procédure principale d'apprentissage spécifique à un RBM. Dans cette section, la méthode d'apprentissage présentée à travers l'exemple de la Figure III.7 ci-dessous. Chaque étape générique du processus sera explicitée de façon théorique puis déployée sur cet exemple. Quatre étapes majeures jalonnent ce processus conduisant respectivement à :

Etape 1. identifier les objets ;

Etape 2. caractériser les variables ;

Etape 3. paramétrer les objets ;

Etape 4. stocker les objets.

La procédure de caractérisation des paramètres sera effectuée comme nous l'avons énoncé précédemment aux niveaux « variable » et « paramètre ».

Il est considéré ici que l'analyse du système a été déjà faite c'est-à-dire que la structure du RBM et le nombre de classes sont connus avant instanciation. Pour illustrer les procédures d'instanciation d'un RBM, nous prenons l'exemple relatif au phénomène d'inondation introduit précédemment (voir Exemple III.1). La présentation physique du bassin versant correspond à la partie gauche de la Figure III.7.

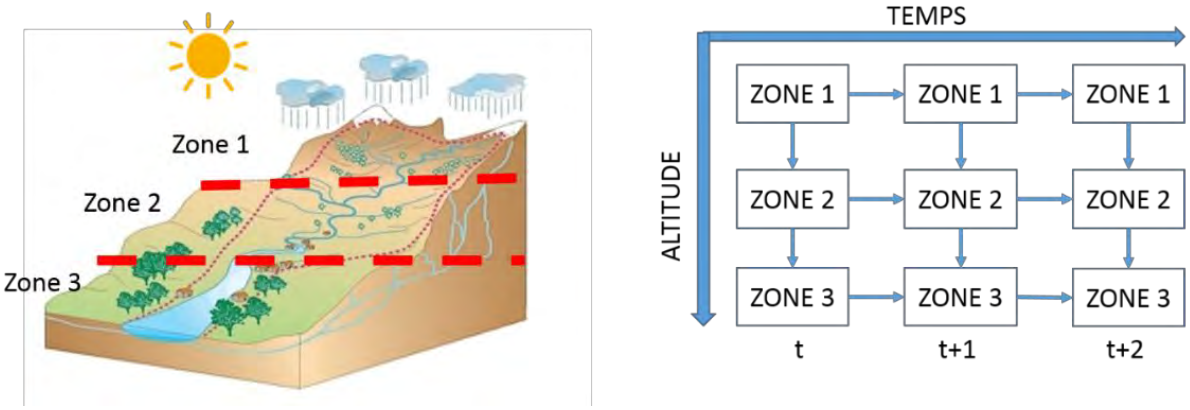


Figure III.7 Bassin versant

Le système caractérisé par le réseau global du bassin est présenté sur la partie droite de cette même figure. Afin de simplifier l'exemple, les hypothèses suivantes sont considérées :

1. *Le bassin versant est homogène.*
2. *Le bassin versant est coupé en trois zones distinctes selon l'altitude.*
3. *Le système ne possède qu'une seule classe.*
4. *L'évolution dynamique est observée au niveau des trois zones.*

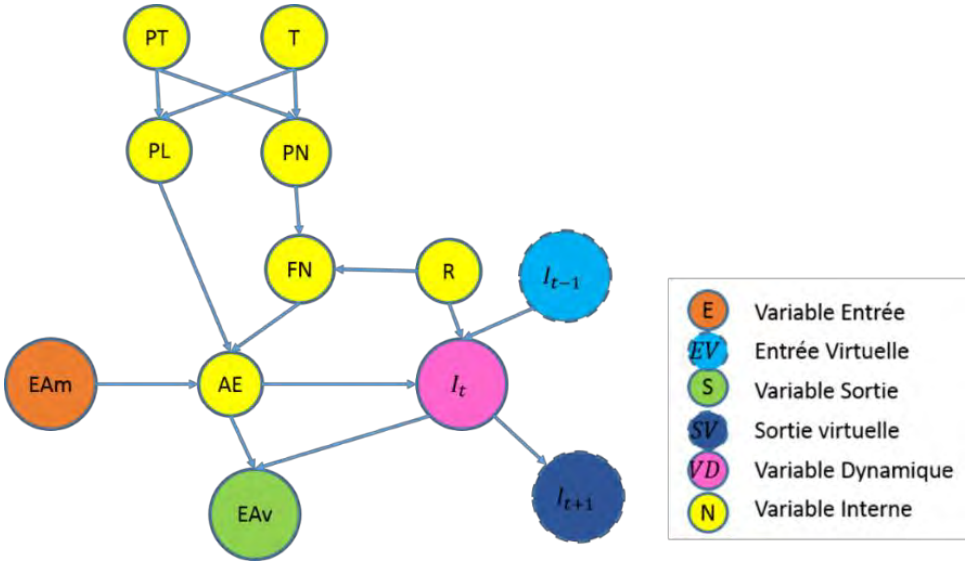


Figure III.8 Classe du bassin versant

L'unique classe considérée au niveau du RBM est présentée sur la Figure III.8 et les variables associées à cette classe sont listées dans le Tableau III.10.

Type de la variable	***Nom de la variable***	***Modalités de la variable***
Entrée	*Eau en amont (EAm)*	*faible, moyenne, forte*
Entrée virtuelle	*Infiltration à t-1 (I_{t-1})*	*faible, moyenne, forte*
Sortie	*Eau en aval (EAv)*	*faible, moyenne, forte*
Sortie virtuelle	*Infiltration pour t+1 (I_{t+1})*	*faible, moyenne, forte*
Variable dynamique	*Infiltration à t (I_t)*	*faible, moyenne, forte*
Variable interne	*Précipitation totale (PT)*	*faible, moyenne, forte*
	Précipitation liquide (PL)	*faible, moyenne, forte*
	Précipitation neige (PN)	*faible, moyenne, forte*
	Fonte neige (FN)	*faible, moyenne, forte*
	Température (T)	*basse, moyenne, haute*
	Radiation (R)	*faible, moyenne, forte*
	Approvisionnement en eau (A)	*faible, moyenne, forte*

Tableau III.10 Liste de variables

Dans notre démonstration, les variables sont continues mais discrétisées.

La procédure principale pour apprendre les paramètres dans un RBM est présentée sur la Figure III.9 qui résume les 4 étapes du processus précédemment énoncées et qui, de par sa généricité est susceptible d'être déployée pour tout type de RBM.

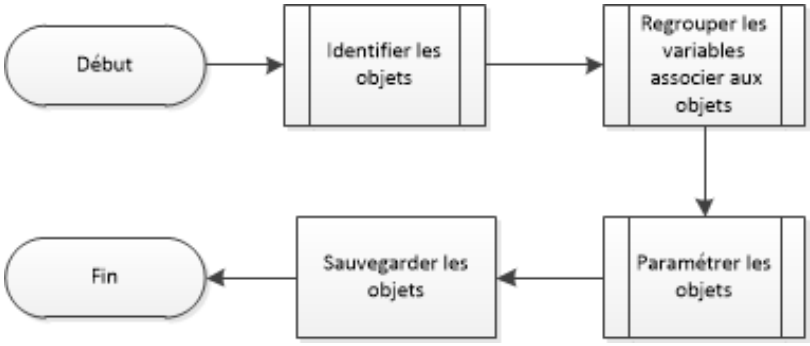


Figure III.9 Procédure générale d'apprentissage dans un RBM

III.3.3.1 Etape 1 : Identifier les objets

Les principes associés à cette première phase de l'instanciation d'un RBM sont explicités en Figure III.10.

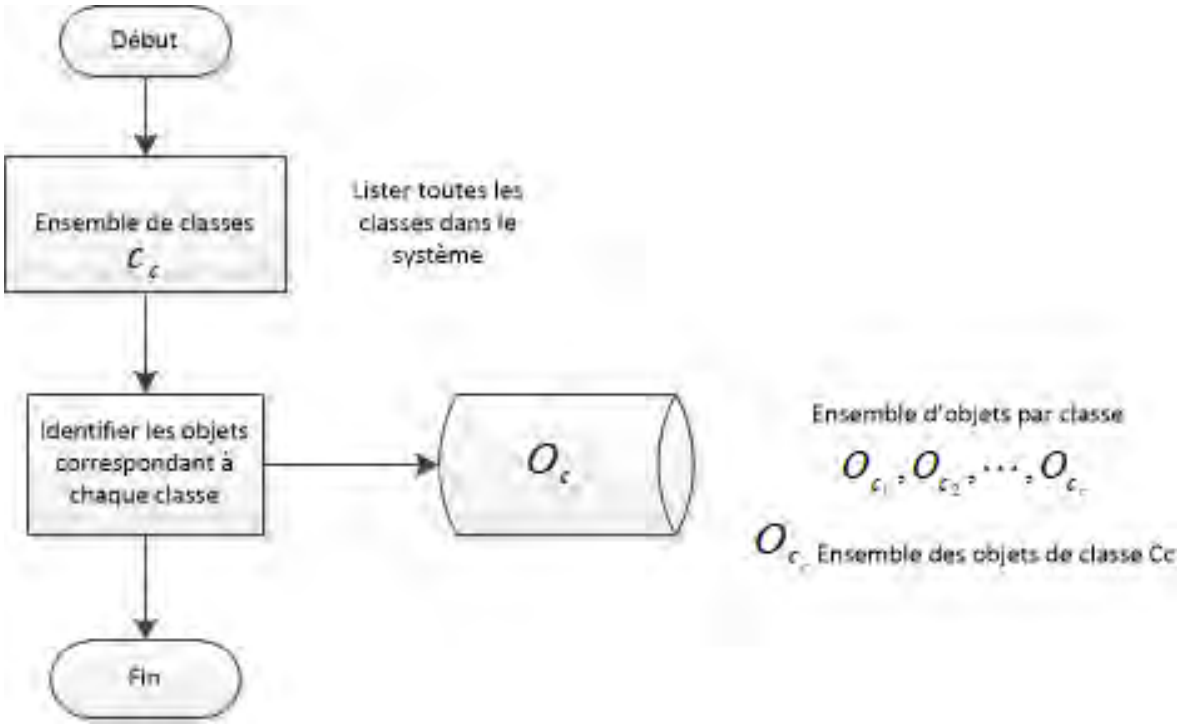


Figure III.10 Identifier les objets

Le nombre de classes et la représentation du réseau en différents objets sont déduites de l'analyse du système. Les différentes classes susceptibles d'être identifiées au sein d'un système sont regroupées dans un ensemble $C = \{C_1, C_2, \dots\}$. A partir de cet ensemble, les objets correspondant à chaque classe C_c, sont regroupés dans l'ensemble $O_C = \{O_{C_1}, O_{C_2}, \dots\}$ où O_{C_c} est l'ensemble des objets contenus dans la classe C_c.

Pour l'exemple considéré, lequel une seule classe est considérée, c'est-à-dire $C = \{C_1\}$ (*Figure III.8). Le bassin versant étant divisé en trois zones, le nombre d'objet correspond à l'ensemble* $O_{C_1} = \{O_1, O_2, O_3\}$ *caractérisant les zones 1, 2 et 3. La représentation du bassin versant en version RBM est donnée sur la Figure III.11 (trois objets évoluant sur 3 pas de temps.)*

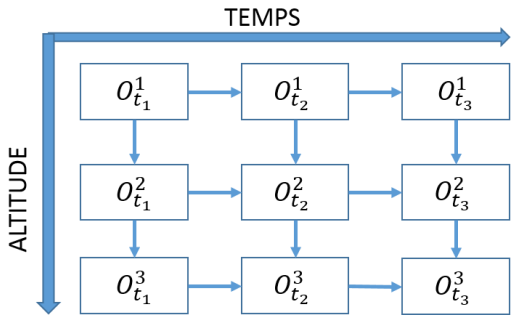


Figure III.11 RBM pour la modélisation de l'inondation

III.3.3.2 Etape 2 : Caractériser les variables

Le regroupement des variables est la phase essentielle dans l'instanciation. La motivation liée au regroupement des variables est liée à la qualité d'apprentissage qui sera d'autant meilleure que la base de données sera fournie. Ce sera le cas si les données associées aux variables identiques (car leurs paramètres sont identiques) mais disséminées dans des objets différents sont regroupées.

L'étape « Caractérisation des variables » est présentée sur la Figure III.12.

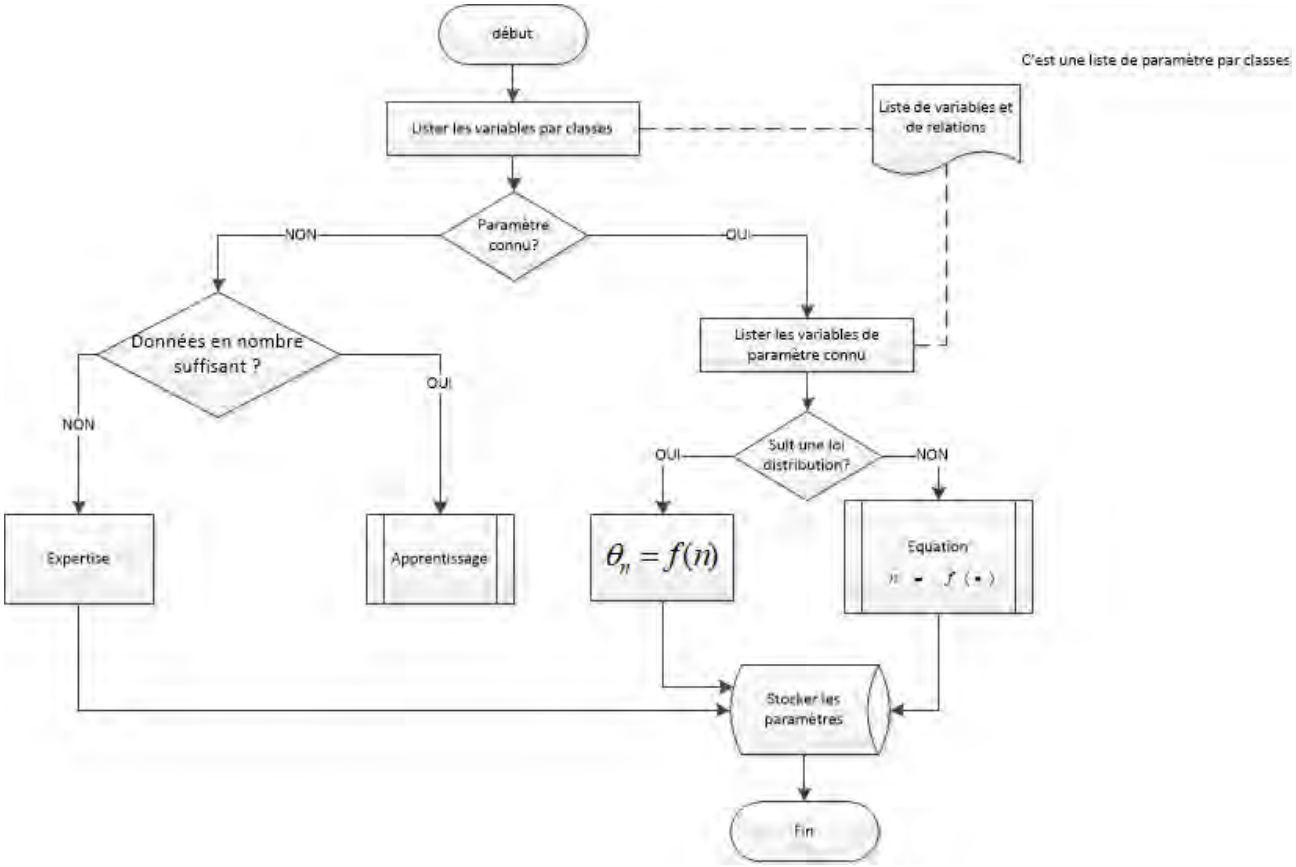


Figure III.12 Caractérisation des variables

III.3.3.2.1 Etablir les relations entre variables inter-objets

Les variables (nœuds) $N_m^{j,k}$ sont listées par classe et font apparaître l'indice de l'objet dans lequel elles se positionnent. L'écriture $O_{y_k}^{x_j}$ est simplifiée par la suite et s'écrira j,k. Si les paramètres des variables sont connus, la liste de variables et de relations est complétée par ajout de ces variables aux objets correspondants.

Les objectifs de la liste de variables et de relations sont les suivants :

1. Guider l'apprentissage : la liste contient toutes les informations relatives aux variables et aux relations qualitatives ou quantitatives entre variables possiblement contenues dans différents objets. L'estimation des paramètres par apprentissage sera influencée par le type de relations entre variables et les objets dans lesquelles elles se trouvent.
2. Stocker les informations : la liste permet de conserver les informations relatives à toutes les variables (paramètres, équation, distribution, …). Le nombre potentiel d'objets et de variables étant susceptible d'être grand, le stockage des informations s'avère nécessaire pour leur mise à jour et leur traçabilité.
3. Corriger/réactualiser les informations : en cas de résultats non conformes la liste permet de procéder à des réglages, corrections, modifications pour améliorer la qualité des informations issues de l'apprentissage.

Dans le cadre d'un apprentissage par transfert, essentiel lorsque l'on souhaite utiliser un RBM, l'identification de la nature des liens entre variables est essentielle. Quatre types de variables peuvent être distinguées :

- Variables à paramètres Identiques (VI) : pour lesquelles la variable est dupliquée d'un objet à l'autre
- Variables à paramètres Liées (VL) : pour lesquelles on observe une relation entre tous les paramètres.
- Variables à paramètres en Partie-Liées (VPL) : pour lesquelles seules certains paramètres sont reliés
- Variables à paramètres Non-Liées (VNL) : pour lesquelles les paramètres sont totalement indépendants.

Pour l'apprentissage par transfert l'identification des relations entre les variables d'objets différents est importante. Cette relation peut être qualitative (par exemple « *le niveau des précipitations décroît avec l'altitude* ») ou quantitative (par exemple « *quand l'altitude augmente de 100 mètres, la température baisse de 0.6 degré* ».

L'identification de la nature de la relation dépend :

1. du système analysé
2. des caractéristiques de la variable (modalités, niveau de discrétisation, etc.)
3. des données (connues ou déduites)
4. du périmètre des objets

A titre d'exemple, la Figure III.13 liste une partie des variables associées à la problématique d'inondation avec, pour chacune, les paramètres connus et relationnels.

Variables	Paramètres connus			Paramètres relationnels					
	Paramètres connus	Objets connus	Distributions/Equations/ Informations diverses	VI	VL	VPL	VNP	Objets en relation	Relations
précipitation totale (PT)					x			O_{1t}, O_{2t}, O_{3t}	$PT^{1t} = PT^{2t} + 70$ $PT^{2t} = PT^{3t} + 50$
température (T)					x			O_{1t}, O_{2t}, O_{3t}	
radiation (R)					x			O_{1t}, O_{2t}, O_{3t}	
infiltration (I)					x			O_{1t}, O_{2t}, O_{3t}	L'effet d'infiltration augmente dès que l'altitude baisse. Sauf quand AE est en modalité faible, tous les objets ont les mêmes paramètres. O_{1t} est 20% plus faible que O_{2t} ; O_{2t} est 20 % plus faible que O_{3t}.
fonte neige (FN)	x	tous	Quand *T = haute* les paramètres sont connus par les experts	x				tous	

Figure III.13 Caractérisation des relations entre variables inter-objets

III.3.3.2.2 Déterminer les paramètres associés aux variables

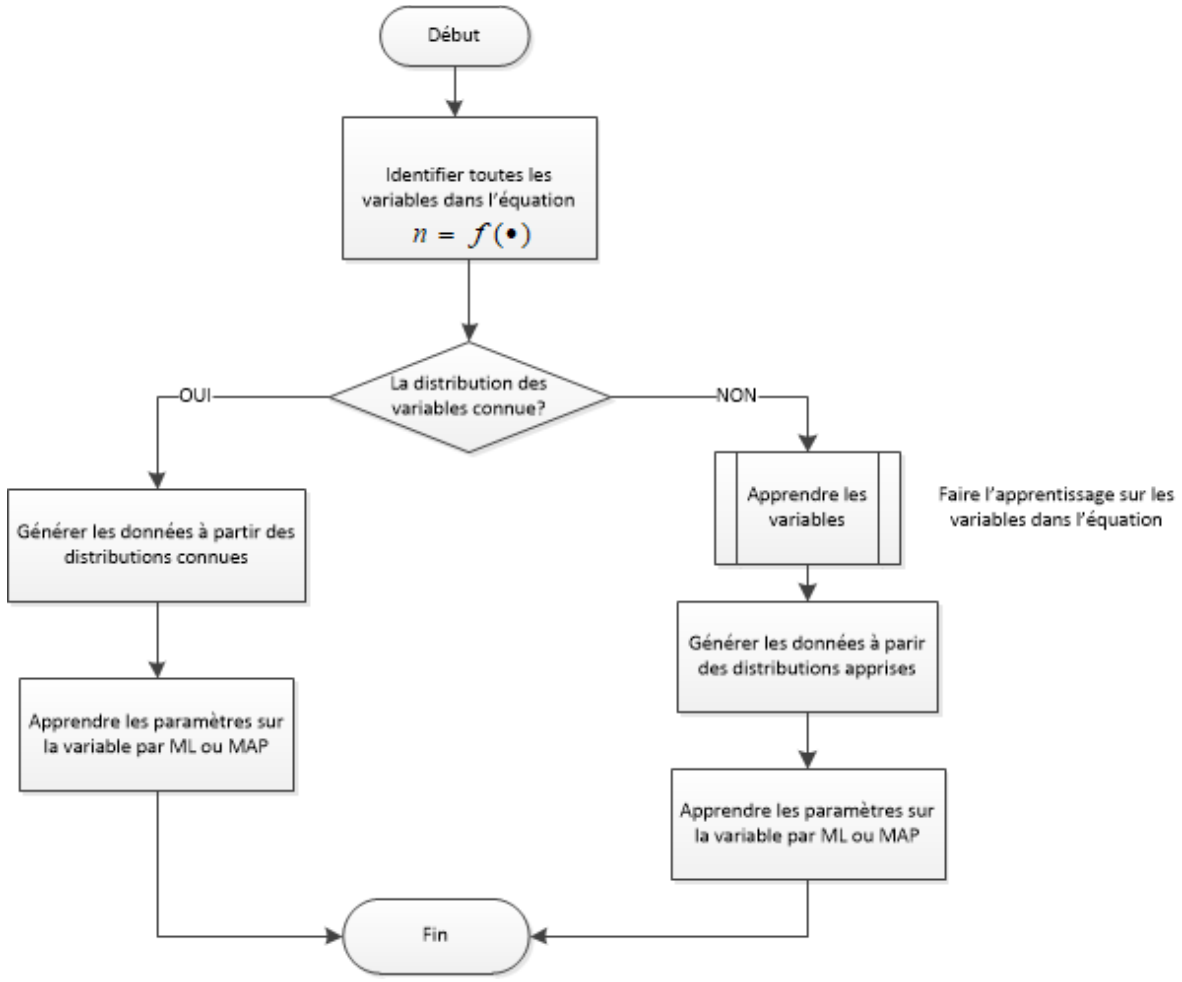


Figure III.14 Estimation des paramètres d'une variable exprimée sous forme d'équation

Les paramètres peuvent ensuite être déterminés de trois façons selon que la variable suive une loi de distribution connue ($\theta_{mqr}^{j,k} = f(\theta)$) qu'elle soit déterminée par une équation mathématique ou que l'on dispose de données ou de relations.

- **Distribution connue** : dans ce cas les paramètres sont ceux de la distribution.
- **Equation** : Dans ce cas les données sont générées à partir de l'expression analytique et les paramètres sont appris à partir des informations ainsi créées. Les détails sont présentés en Figure III.14.

Lorsqu'une variable est décrite par une équation numérique $n = f(\cdot)$ fonction de ses nœuds parents, 2 situations peuvent se présenter. Soit tous les paramètres de l'équation sont connus, soit certains ne le sont pas.

- Dans le premier cas, les données peuvent être générées par la méthode de Monte-Carlo puis apprises selon des principes classiques d'apprentissage à partir des méthodes ML ou MAP décrites au chapitre II.
- Dans le deuxième cas, l'estimation est plus complexe car des variables de l'équation sont indéterminées au niveau de leurs paramètres. Dans ce cas il est nécessaire de procéder à un apprentissage préliminaire de cette variable si des données ou des relations sont disponibles ou faire appel à des distributions a priori ou des avis d'experts.

- **Données** : si la loi de distribution du paramètre est méconnue, la procédure d'estimation par apprentissage des données est nécessaire. Les données relatives aux variables liées (identiques ou en relation) doivent être établies par calcul (dans le cas où une relation existe) puis regroupées en une seule base par agrégation de toutes les données associées à chaque variable individuelle. L'apprentissage se fera sur cette base ainsi constituée. Les détails de la procédure d'apprentissage sont donnés en Figure III.15.

- Variables à paramètres identiques (VI): à ce niveau les techniques classiques d'apprentissage (ML ou MAP) s'appliquent.
- Variables à paramètres liés (VL) : l'apprentissage par transfert s'applique à partir des relations identifiées entre les objets. Les variables ayant les mêmes modalités, seul l'indice de fusion ω est à déterminer. Dans notre procédure, nous augmentons le champ de transformation ; nous gardons l'équation fusionnée avec ω, et proposons un transfert de données entre les objets. La méthodologie est présentée dans la partie III.3.2.
- Variables à paramètres en partie-liés : c'est un cas un peu plus compliqué de l'apprentissage. Comme une partie de paramètres dans le tableau de probabilité conditionnelle est liée avec les autres objets, nous effectuons l'apprentissage par transfert sur la partie liée, et l'apprentissage sur le reste se fait indépendamment ; les données ici sont partiellement réunies. Nous regroupons uniquement la partie relationnelle (la variable et ses parents) pour faire le transfert. Même si nous pouvons utiliser toutes les données pour apprendre et s'il n'y a pas de relation entre certains paramètres (l'indice $\omega = 0$).
- Variables à paramètres non liés : c'est le cas le plus simple ; l'apprentissage est fait objet par objet dans ce cas, il n'est pas nécessaire de réunir les données ni d'identifier l'indice de fusion.

La dernière étape dans la Figure III.15 (*Stocker les paramètres par objets*) permet de stocker les résultats de l'apprentissage dans une base de données pour, par la suite, procéder à l'association. Les paramètres sont stockés avec leurs indices $N_m^{j,k}$ où j est l'indice sur la dimension « X » et k est l'indice sur la dimension « Y ».

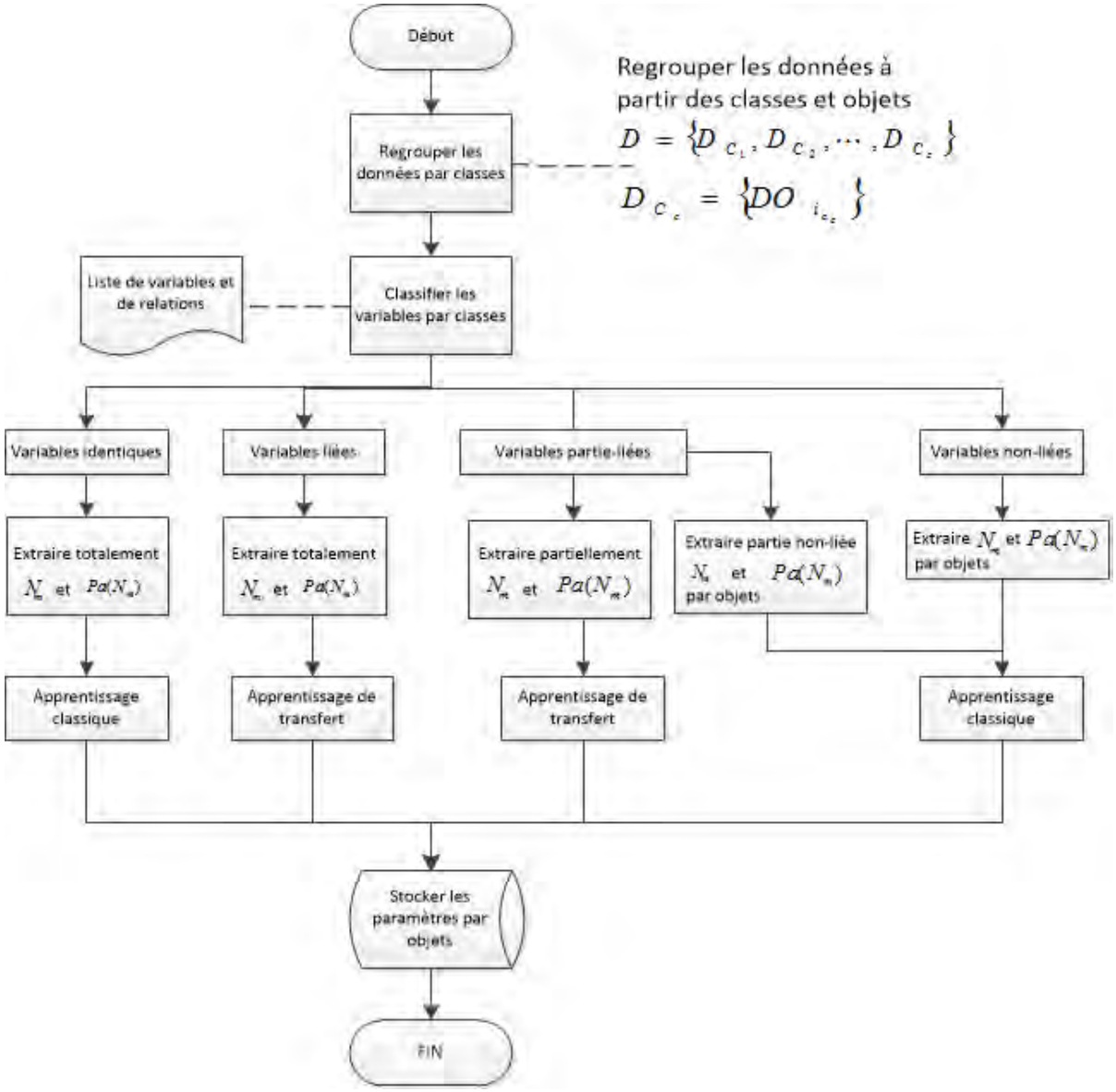


Figure III.15 Apprentissage

L'apprentissage de paramètres est fait par variable dans un RBM avec la relation entre les variables d'objets différents. Les cinq étapes essentielles aident à estimer les paramètres plus logiquement et clairement pour un grand réseau global.

III.3.3.3 Etape 3 : Paramétrer les objets

L'objectif de la procédure « paramétrer » les objets est l'association des paramètres à la bonne variable. Puisqu'il y a beaucoup de variables qui ont le même nom, et nous utilisons les indices j *et* k pour distinguer les variables de dimension et d'objet différent.

D'abord il faut prendre le bon paramètre dans la base de données qui stocke tous les paramètres Θ ; ensuite selon les indices j *et* k il faut trouver la bonne variable afin d'affecter les paramètres sur la variable.

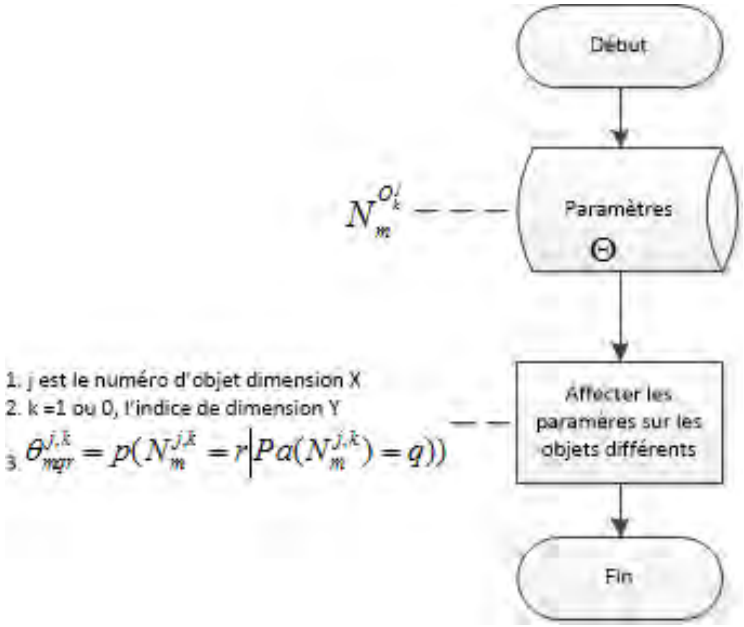


Figure III.16 Paramétrer les objets

Le paramétrage est fait objet par objet en évitant d'ignorer des variables et de mal affecter de paramètres.

III.3.3.4 Etape 4 : Stocker les objets

Enfin il faut sauvegarder les objets paramétrés dans le réseau. A ce niveau le RBM est bien construit non seulement sur sa partie qualitative (la structure) mais aussi sur sa partie quantitative (les paramètres). Nous sauvegardons le RBM qui peut servir comme outil d'aide à la décision par inférence dans le réseau, objet du prochain chapitre.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'instrumentation ou l'instanciation du modèle graphique de classes pour obtenir un modèle graphique d'objets des RBM a été considéré. Nous avons commencé par présenter les différentes possibilités qui s'offrent au modélisateur pour instancier un RBM à savoir l'existence directe des données, l'expertise, et/ou l'apprentissage. Cette dernière possibilité a fait l'objet de développement plus poussé et constitue en réalité l'objectif principal et la valeur ajoutée de ce chapitre. Pour ce faire les approches existantes pour traiter de l'apprentissage dans les réseaux orientés objets ont été présentées avec leur limitation au regard des objectifs que poursuivent cette thèse à travers la notion de RBM. Il est apparu que, compte tenu des caractéristiques des RBM, la technique d'apprentissage dite par transfert peut être adaptée aux cas d'apprentissage associés à ce type de réseau. Ainsi nous avons développé les processus et les conditions d'adaptation de la technique d'apprentissage par transfert aux RBM. Les illustrations ont montré l'intérêt des algorithmes d'apprentissage par transfert que nous avons développé en l'occurrence dans le cas des données insuffisantes, ce qui est le cas dans nombre d'applications pratiques en général et dans celles visées par cette thèse en particulier à savoir la modélisation des phénomènes d'inondation en vue d'assister les décideurs dans la gestion des effets de ces phénomènes physiques.

Le chapitre suivant concerne les modes d'utilisation des modèles probabilistes et graphiques comme outils d'aide à la décision à savoir la propagation d'une évidence ou observation locale dans le réseau pour déterminer les niveaux de probabilités des autres variables. C'est l'inférence.

Chapitre IV

Inférence dans un RBM

Introduction

L'utilisation d'un RBM comme outil d'aide à la décision passe par la propagation d'une observation locale à travers le réseau afin de déduire l'état probable des nœuds d'une autre partie du réseau. On parle d'*inférence*. C'est la troisième et dernière étape dans le processus d'utilisation d'un RBM pour gérer un système, après l'étape de modélisation (construction du réseau) présentée dans le chapitre 2 et celle d'instanciation présentée au chapitre 3 (détermination de l'intensité des relations entre nœuds en termes de probabilités conditionnelles et/ou a priori). Nous présentons donc dans ce chapitre les techniques d'inférence que nous avons développées afin d'exploiter la puissance du paradigme objet spécifique au RBM. Les techniques d'inférence existantes dans la littérature que l'on pourrait utiliser ou adapter au cas des RBM sont essentiellement : les techniques utilisées dans le formalisme Multi-Section Bayesian Networks ou MSBN [110, 46, 109] et les techniques qui consistent à développer le réseau RBM en un grand réseau bayesien classique afin d'utiliser les techniques d'inférence des RB classiques. Cette dernière paraît toutefois peu intéressante dans la mesure où elle élimine l'avantage conféré par l'approche orientée objet sensée autoriser le traitement local des objets. Outre cet inconvénient majeur, la demande en moyens et en temps de calcul ainsi que l'espace de stockage rendent cette solution caduque. Afin de conserver la notion orienté objet et de profiter de certaines propriétés des RBM, nous proposons dans ce chapitre une technique particulière d'inférence adaptée à ce type de réseau. Cette technique qui permet de conserver le formalisme objet se prête à la réalisation de calculs locaux pour certaines variables et autorise l'interconnexion entre nœuds appartenant à des objets différents. En outre, la technique proposée est valide pour un réseau constitué de nœuds discrets et/ou continus.

Le chapitre est organisé comme suit : la première partie présente les caractéristiques des RBM qui rendent la procédure d'inférence des RB classique inapplicable au cas des RBM. Les propriétés permettant de lever les difficultés associées à la propagation d'information au sein des RBM sont introduites dans les deuxième et troisième parties. La quatrième partie est consacrée à l'inférence dans les RBM de rang élevé (la notion de rang fait référence au décalage entre variables dans une dimension). Les méthodes de propagation a priori et a posteriori dans un RBM en trois dimensions sont présentées dans la cinquième partie. Les principes de généralisation de propagation a priori et a posteriori dans un RBM à n dimensions font l'objet de la sixième partie. Finalement, la dernière partie est centrée sur les techniques de propagation dans un RBM multiéchelle avec des objets organisés de manière hiérarchique.

IV.1 Caractéristiques d'un RBM

IV.1.1 Particularités d'inférence d'un RBM

Comme nous l'avons présenté dans le deuxième chapitre, un RBM est construit autour des objets. Chaque objet est un réseau bayesien classique. Un RBM est un réseau d'objets constitués individuellement de variables. On distingue ainsi deux niveaux suivants niveau système et niveau objet. L'ajout d'information au niveau système (réseau) consiste donc en ajout d'un ou de plusieurs objets alors qu'un ajout d'information au niveau local (composant) correspond à l'ajout de variables. Cette distinction de niveau induit des différences de traitement entre un RBM et un RB en termes de structure, de paramètres, et de la façon avec laquelle est propagée l'information. La Figure IV.1 montre un exemple de réseau RBM à deux niveaux :

- **Niveau global** : la relation qualitative entre les objets suivant différentes dimensions.
- **Niveau local** : les informations détaillées d'un objet. Cela correspond à un RB en termes de structure et de paramètres affectés à chaque variable.

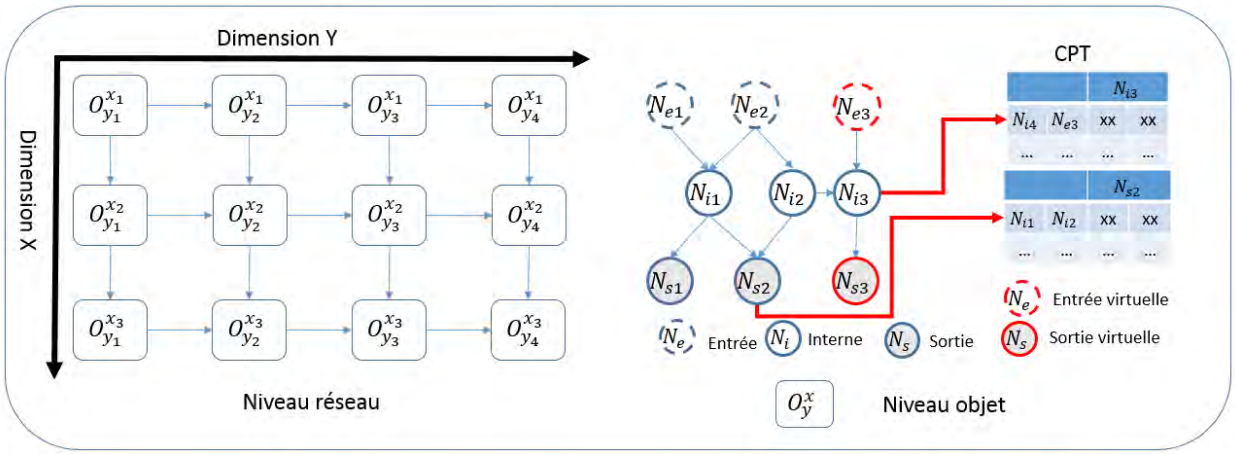


Figure IV.1 Niveaux associés à un RBM

Un RB étant le niveau inférieur ou primal dans un RBM car constitué de nœuds avec leurs modalités et paramètres comme le montre la Figure IV.1. En termes d'inférence on doit donc partir de ce niveau pour ensuite chercher à remonter au niveau système (RBM). La technique de propagation d'information d'observation locale dans un réseau bayesien consiste en la multiplication et la marginalisation des probabilités. Afin de simplifier les calculs, la technique de l'arbre de jonction est introduite. La plupart des méthodes de propagation rencontrées dans la littérature ou implémentées dans les logiciels commerciaux (HUGIN Propagation, Lazy Propagation ou SS propagation [60, 70, 66]), sont développées à partir de l'arbre de jonction qui permet de faciliter le calcul en retardant au maximum l'instant de marginalisation. L'arbre de jonction d'un RB est obtenu par changement graphique de ce réseau en un graphe non orienté ayant la structure d'un arbre au sens de la théorie des graphes (voir Chapitre II). L'arbre de jonction permet la réalisation rapide de calculs et la propagation de plusieurs informations dans un réseau bayesien. Il n'est cependant construit dans sa version conventionnelle que pour un réseau bayesien entier ; c'est-à-dire qu'à un réseau bayesien correspond un arbre de jonction. Dans un réseau bayesien classique l'inférence se fait par propagation d'information à travers les cliques de l'arbre de jonction correspondant à toutes les variables du réseau. Ainsi, la taille de l'arbre de jonction croît au même rythme que grandit le réseau augmentant par la même occasion les temps de calculs nécessaires pour faire l'inférence. L'arbre de jonction étant construit sur un réseau entier, sa taille ne pourra jamais être réduite afin de simplifier les traitements liés à l'inférence. En présence de réseaux de grande taille des alternatives à cette technique d'inférence doivent être imaginées.

La première tentative de la littérature pour lever le verrou de la taille des réseaux en matière d'inférence vient de la technique Multi-Section Bayesian Network ou MSBN [109, 110, 46]. La technique MSBN consiste à découper un grand réseau en un certain nombre de sections (réseaux indépendants) puis à construire une forêt d'arbres de jonction où chaque arbre correspond à une section. Ainsi l'inférence est faite dans le réseau par propagation des informations entre sections à partir des résultats obtenus au niveau des arbres de jonction correspondants. Cette technique MSBN n'est hélas applicable que sous certaines contraintes. Il n'est pas possible, en effet, de construire un MSBN pour n'importe quel réseau. Par rapport à un RBOO, par exemple, la section ne coïncide pas forcément avec un objet car une section au sens de MSBN pour un RBOO peut être à cheval entre plusieurs objets. De plus la traduction d'un grand réseau en MSBN nécessite plus de temps et de précautions dans la construction des sections et de la spécification des paramètres.

Sur la base de ce constat, l'objectif poursuivi dans ce chapitre en matière d'inférence est de développer une méthode de propagation d'information qui tienne compte des aspects ci-dessous :

- Conservation du formalisme « orienté objet » permettant à chaque objet d'être considéré dans son entièreté lors de la propagation d'information.
- Assurance d'une certaine flexibilité afin de pouvoir contrôler la procédure de propagation.
- Minimisation du temps de calcul et de l'espace de stockage.
- Facilitation d'installation de la procédure sur les plateformes de modélisation de RB par des utilisateurs non nécessairement experts du domaine.

Nous allons présenter dans la section suivante les principales caractéristiques des RBM sur lesquelles nous allons nous baser pour développer notre nouvelle méthode d'inférence qui tienne compte des préoccupations soulevées ci-dessus.

IV.1.2 Propriétés d'un RBM

Les RBM possèdent certaines propriétés naturelles permettant d'adapter les techniques d'inférence à leurs caractéristiques structurelles :

- Homogénéité au niveau de la classe : tous les objets ont la même structure.
- Particularisation au niveau local : la différentiation d'un objet à l'autre provient de la spécification des paramètres ; en effet même si les objets d'une même classe ont la même structure, leurs paramètres (les tables ou densités de probabilités conditionnelles) ne sont pas forcément identiques ; voir l'exemple du bassin versant à la Figure III.7 qui considère la modélisation d'une vaste zone géographique pour la prévision des phénomènes d'inondations.

Considérons le problème soulevé à la Figure III.7. On souhaite modéliser l'approvisionnement en eau dans un grand bassin versant afin d'utiliser le modèle pour analyser et évaluer le risque d'inondation. Afin d'avoir les résultats aussi précis que possible, le bassin est découpé en petites zones par les experts hydrauliciens et/ou géographes. Trois zones sont considérées dans notre exemple qui diffèrent par rapport à l'altitude. En termes de modèle RBM, chaque zone constitue un objet. L'homogénéité requise dans le formalisme RBM signifie que chaque zone est caractérisée par les mêmes variables et les mêmes relations entre variables, en d'autres termes la même structure ou classe. Il est aisé d'admettre que d'une zone à l'autre les intensités des relations entre variables, c'est-à-dire la partie quantitative ou paramètres du RBM correspondant, ne seront pas les mêmes. Par rapport à une variable comme l'ensoleillement (variable « Radiation » à la Figure III.8) par exemple, une zone située en altitude ou dans la région fortement boisée ne sera pas traitée quantitativement de la même manière.

Sur la base de la définition de RBM, les objets encapsulent non seulement les relations qualitatives de type « cause-effet » entre variables mais aussi les relations quantitatives caractérisées par des probabilités conditionnelles évaluant les intensités des relations entre variables. En termes d'inférences, les objets dans un RBM ont toutes les informations nécessaires pour propager une information conduisant à une procédure que nous qualifierons de ***calcul local*** correspondant à la propagation d'information dans un objet RBM et qui peut être déployé selon les deux principes suivants :

1. Pour un objet initial (objet situé à l'entrée du réseau et ne possédant pas d'objets parents), le calcul peut être effectué à tout moment.
2. Pour un autre objet (objet possédant des parents), le calcul ne pourra être effectué que quand celui-ci aura reçu toutes les informations au niveau de ses nœuds d'entrées.

La propagation d'une information dans un RBM est réalisée par calcul local dans un objet puis par communication entre objets. Les objets appartenant à une même classe ont un arbre de jonction identique. Ainsi, le calcul local est la propriété principale d'inférence dans un RBM. L'arbre de jonction dépend uniquement, en effet, de la structure d'un réseau bayesien et donc dans un RBM, les objets qui viennent d'une même classe sont caractérisés par le même arbre de jonction. La capacité de calcul local permet de faciliter le processus d'inférence dans un RBM.

Pour étayer cette affirmation, considérons le cas d'un RBM avec une dimension dynamique ; en vue de l'inférence si nous déroulons tous les objets à chaque instant et les regroupons dans un RB classique, la taille de réseau ainsi obtenue s'accroît avec le nombre d'objets et le nombre d'instants que nous voulons simuler ; ce qui aura pour conséquence d'alourdir de façon quasi prohibitive les traitements de calcul et l'espace de stockage.

Il apparaît de façon évidente que la modification éventuelle d'un RBM sera d'autant plus simple qu'elle s'effectuera au niveau local.

La décomposition en objet permet, tout d'abord, d'en rajouter ou d'en supprimer au gré des besoins induits par la modélisation. Cela se fait simplement par ajout des paramètres correspondants dans l'espace de stockage et réglage du canal de communication entre l'objet ajouté et ceux avec lesquels ils communiquent. Inutile ensuite de reconstruire un arbre de jonction tentaculaire si l'inférence peut être réalisée dans un premier temps au niveau local puis propagée dans un deuxième temps au niveau système. Enfin, en ce qui concerne la mise à jour au niveau local, s'il y a un changement dans un objet, consistant soit en une modification de la structure, soit en une modification des paramètres, on peut agir directement sur la classe pour le changement structurel ou sur l'espace de stockage pour la modification du paramètre. Clairement, la localisation et la réalisation d'un changement est plus facile dans un RBM que dans un RB classique. La décomposition en objets permet au système d'être considéré à travers le traitement de réseaux simples et indépendants. L'inférence s'en trouve également facilitée par la réalisation séparée et locale d'arbres de jonction autorisant la propagation progressive d'informations communiquées aux niveaux des nœuds d'entrée de chaque objet.

IV.1.3 Inférence a priori et Inférence a posteriori

En termes d'inférence nous distinguons deux types d'inférence selon qu'il y ait une observation dans une partie du réseau ou pas.

- **Inférence a priori** : nous désignons par inférence a priori le fait de propager les informations initiales c'est-à-dire les probabilités marginales des nœuds n'ayant pas de parents à travers le réseau pour déterminer les probabilités marginales des autres nœuds.
- **Inférence a posteriori** : il s'agit ici de propager les informations relatives à une observation dans une partie du réseau pour mettre à jour les paramètres des nœuds susceptibles d'être affectés par cette nouvelle connaissance.

L'inférence dans un RBM se fait en deux étapes :

- calcul local au niveau des objets disposant des informations relatives à leurs nœuds d'entrée
- propagation des résultats par les canaux de communication pour les objets voisins, qui à leur tour peuvent réaliser leur propre calcul local.

La distinction entre inférence a priori et inférence a posteriori est nécessaire car les procédures diffèrent. Elles seront explicitées à la suite.

IV.2 Inférence a priori

Le RBM est un réseau global permettant de considérer plusieurs dimensions. En ce sens, le processus d'inférence dans ce type de réseau diffère de celui des réseaux bayesiens classiques du fait de la partition réalisée entre niveau local et niveau global. Les objets dans un RBM communiquant via les canaux de communication, la réalisation de l'inférence revient à définir et contrôler les principes de circulation des informations entre objets. La circulation des informations sur un axe dimensionnel peut-être bidirectionnelle. Dans le sens amont vers aval on recherche l'impact d'une nouvelle information sur le comportement du système, c'est une action de pronostic [124, 125, 126, 127, 128, 129]. Dans le sens aval vers amont on explique les causes relatives à un événement observé, c'est une action de diagnostic. Les échanges dans un RBM se font par passage d'information des sorties vers les entrées. Un objet disposant des informations sur ces entrées peut procéder à un calcul local. La caractérisation des principes d'inférence revient donc à déterminer des directions de circulation d'information transitant par les canaux de communication.

Un RBM étant un réseau multidimensionnel, la communication se fait aussi bien entre dimensions qu'au sein même d'une dimension. La communication entre objets doit être ordonnée. Un objet ne peut pas, par exemple, communiquer avec des objets situés en amont sur une dimension avant que ceux-ci n'aient fini leur calcul. A titre d'illustration, sur la Figure IV.2, l'objet $O_{y_3}^{x_2}$ ne peut communiquer avec ses objets en amont ($O_{y_2}^{x_2}$ et $O_{y_3}^{x_1}$) que si ceux-ci ont procédé à leur propre inférence locale car dans le cas d'inférence a priori la direction d'échanges suit le sens de relation entre des objets.

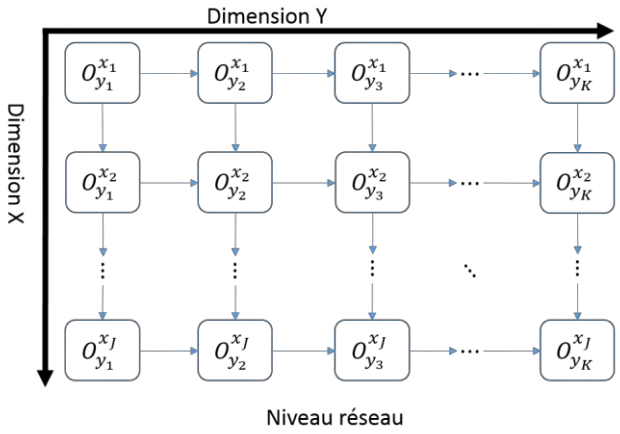


Figure IV.2 RBM à deux dimensions « X-Y »

La technique d'inférence des RBM présentée à la suite et dans la partie suivante prend en compte les trois hypothèses ci-dessous :

1. Le système n'est composé que de deux dimensions.

2. Le rang sur les deux dimensions est de 1 (c'est-à-dire qu'un objet ne dépend que des objets immédiatement situés en amont sur chaque dimension).
3. Il n'y a pas de décalage entre deux dimensions.

En pratique, on peut être confronté à des systèmes (réseaux) ne répondant pas immédiatement aux hypothèses précédentes. Pour solutionner ce problème, nous présentons en section 4 une transformation permettant de ramener n'importe quel réseau à la configuration se prêtant aux principes de calcul que nous allons exposer à la suite. Les parties IV.5 et IV.6 présenteront les méthodes d'inférences applicables aux RBM de dimensions ($n > 3$).

Le réseau de la Figure IV.2 est un réseau bayesien bidimensionnels suivant les axes « X » et « Y » de premier ordre (le rang est 1) sans décalage ; sa matrice de relations est donnée ci-dessous :

$$MR_y^x = \begin{array}{c|cccc} & O_{y_k}^{x_j} & O_{y_{k+1}}^{x_j} & O_{y_k}^{x_{j+1}} & O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}} \\ O_{y_k}^{x_j} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ O_{y_{k+1}}^{x_j} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ O_{y_k}^{x_{j+1}} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}} & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

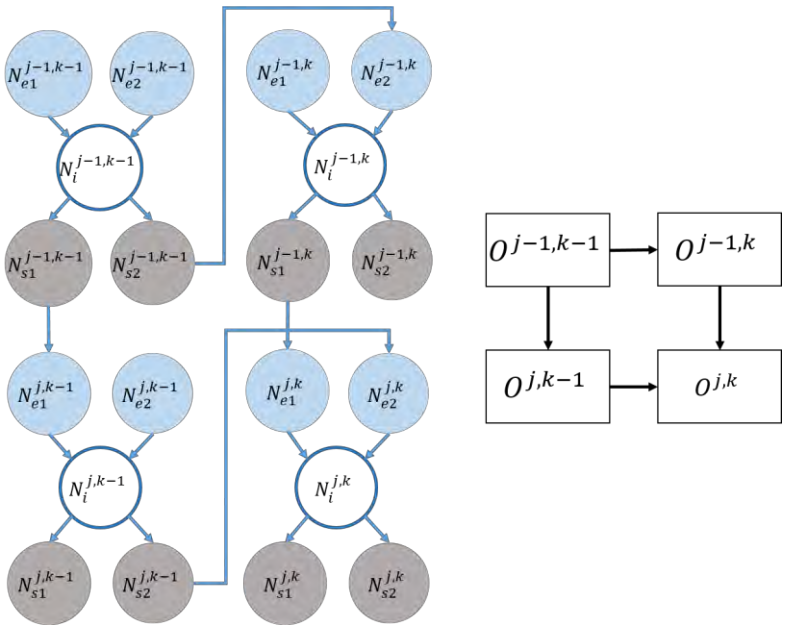


Figure IV.3 RBM avec 4 objets

Afin d'éviter des probabilités conjointes lors de l'inférence nous introduisons la notion de réseau virtuel. Pour illustrer cette notion, considérons l'exemple du réseau de la Figure IV.3 formé de 4 objets avec son développement en RB notamment. Le calcul de probabilité au niveau $N_i^{j,k}$ nécessite de disposer de la probabilité conjointe des nœuds $N_{e1}^{j,k}$ et $N_{e2}^{j,k}$ comme le montre l'équation ci-dessous

$$P\left(N_i^{j,k}\right) = \sum_{N_{e1,e2}^{j,k}} P\left(N_i^{j,k}, N_{e1}^{j,k}, N_{e2}^{j,k}\right) = \sum_{N_{e1,e2}^{j,k}} P\left(N_i^{j,k} | N_{e1}^{j,k}, N_{e2}^{j,k}\right) * P\left(N_{e1}^{j,k}, N_{e2}^{j,k}\right)$$

La probabilité jointe $P\left(N_{e1}^{j,k}, N_{e2}^{j,k}\right)$ ne peut pas être calculée dans l'objet $O^{j,k}$ elle nécessite de disposer des probabilités des nœuds $N_{s1}^{j-1,k}$ et $N_{s2}^{j,k-1}$. Comme les entrées $N_{e1}^{j,k}$ et $N_{e2}^{j,k}$ correspondent aux sorties $N_{s1}^{j-1,k}$ et $N_{s2}^{j,k-1}$, nous devons

d'abord trouver la probabilité jointe $P\left(N_{s1}^{j-1,k}, N_{s2}^{j,k-1}\right)$; pour cela nous proposons de construire un réseau auxiliaire formé des sorties des objets $O^{j-1,k}$ et $O^{j,k-1}$ comme le montre la Figure IV.4 dont l'objectif est d'obtenir la probabilité jointe $P\left(N_{s1}^{j-1,k}, N_{s2}^{j,k-1}\right) = P\left(N_{e1}^{j,k}, N_{e2}^{j,k}\right)$.

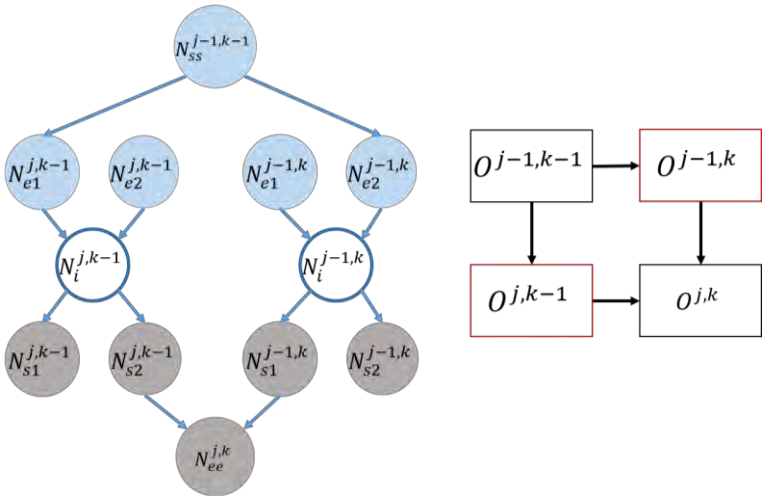


Figure IV.4 Réseau Auxiliaire 1

L'encadré Algorithme IV.1 présente le déroulement du processus de propagation dans un RBM. Celui-ci démarre par l'objet initial $O_{y_1}^{x_1}$ et continue via les objets dans la dimension « X » ($O_{y_k}^{x_j}$avec $j = \{1,2,\cdots,J\}$ où J est le nombre total d'objets sur la dimension « X »). Une fois la propagation sur la dimension « X » terminée on passe à la dimension « Y ».

Propagation dans un réseau

Entrées : $O_{j,k}$: Objet

J, K : le nombre total d'objets sur les dimensions « X » et « Y »

Sorties : $P(N_{i,s}^{O_{j,k}})$ //probabilité marginale de sortie/interne conservée dans la base de données $P(N_m^{O_{j,k}}, l)$

Début
Pour $k \leftarrow$ **1 jusqu'à K faire**
  Si k= 1 **alors**
    Pour j←1 **jusqu'**à J **faire**
      Si j=1 **alors** //traiter le premier objet $O_{y_1}^{x_1}$ qui dispose de toutes les informations //nécessaires pour le calcul local
        Compiler l'objet $O_{j,k}$
        $P(N_m^{j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données pour l'indice $l = 1$
      Sinon // traiter les objets $O_{y_1}^{x_j}$ où $1 < j \leq J$ chaqun de ces objets a besoin // d'une entrée sur la dimension « X »
        $P(N_s^{j-1,k}) \leftarrow P(N_s^{j-1,k}, 1)$ //récupérer la probabilité de sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$
        $P(N_e^{j,k}) \leftarrow P(N_s^{j-1,k})$ //affecter la sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ à l'entrée de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$
        Compiler l'objet $O_{y_k}^{x_j}$
        $P(N_m^{j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de donnée avec l'indice $l = 1$

```
13              FinSi
14            FinPour
15          Sinon
16            Pour j← 1 jusqu'à J faire        // traiter les objets O_{y_k}^{x_j} où 1 < k ≤ K
17              Si j =1 alors                  // traiter l'objet O_{y_2}^{x_1}, qui a besoin d'une entrée sur la dimension « Y »
18              P(N_s^{j,k-1}) ← P(N_s^{j,k-1}, 1)   // récupérer la probabilité de sortie de l'objet O_{y_{k-1}}^{x_1}
19              P(N_e^{j,k}) ← P(N_s^{j,k-1})        // affecter la sortie de O_{y_{k-1}}^{x_1} à l'entrée de O_{y_k}^{x_1}
20              Compiler l'objet O_{y_k}^{x_j}
21              P(N_m^{j,k}, 1) ← P(N_{i,s}^{j,k})   // stocker les probabilités dans la base de donnée avec l'indice l=1
22              Sinon                          // traiter les objets O_{y_k}^{x_j}, où j ≥ 2, k ≥ 2, chaqun de ces objets a besoin
                                               // de deux entrées selon les dimensions « X » et « Y »
23              Fonction  ProbabilitéJointe(j,k,l)   // rappeler la fonction ProbabilitéJointe(j,k,l)
24              P(N_s^{j,k}) ← P(N_{ee}^{j,k}, l)    // récupérer la probabilité de sortie P(N_{ee}^{j,k}, l) de la l^ème itération
25              P(N_e^{j,k}) ← P(N_s^{j,k}, l)       // affecter la probabilité à la combinaisions des entrées de l'objet O^{j,k}
26              Compiler l'objet O_{y_k}^{x_j}
27              P(N_m^{j,k}, 1) ← P(N_{i,s}^{j,k})   // stocker les probabilités dans la base de donnée avec l'indice l=1
28              FinSi
29            FinPour
30          FinSi
31      Fin
```

Algorithme IV.1 Propagation a priori dans un RBM

L'encadré ci-dessous présente la fonction PropabilitéJointe() à laquelle on a fait référence dans l'algorithme précédent.

Fonction ProbabilitéJointe(j, k, l)

```
Données : j, k, l   // j, k sont les indices sur les dimensions « X » et « Y » ; l est l'indice du résultat de la l^ème itération
1       Début
2       Lire le réseau auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}
3       P(N_s^{j-1,k-1}) ← P(N_ss^{j-1,k-1}, l)   // affecter la combinaision de probabilité N_{s1}^{j-1,k-1} et N_{s2}^{j-1,k-1} de la l^ème itération
4       Compiler le réseau auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}
5       P(N_e^{j,k}, l) ← P(N_ee^{j,k})   // stocker les probabilités de N_e^{j,k} dans la base de données avec l'indice l
6       Fin
```

Fonction IV.1 Fonction Probabilité Jointe (j,k,l)

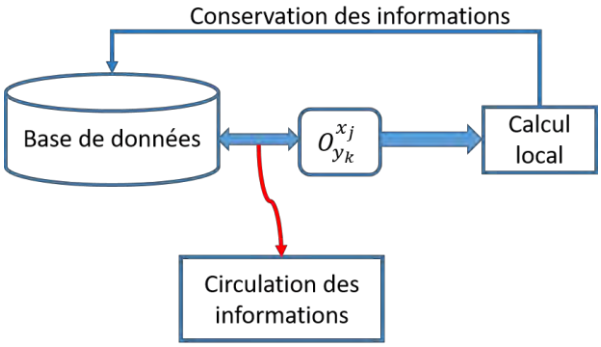


Figure IV.5 Procédure essentielle relative à l'inférence dans un RBM

La Figure IV.5 présente la procédure dynamique d'inférence. Les informations associées aux paramètres (tables de probabilités marginales ou conditionnelles) pour chaque variable sont conservées dans une base de données. Lors de la propagation des informations dans un RBM, chaque objet fait son propre calcul local après avoir reçu l'ensemble des informations nécessaires. Les probabilités marginales associées à l'objet sont alors stockées dans la base de données en vue d'alimenter la propagation des informations vers les autres objets. Le point capital de la procédure concerne le respect des principes de direction de circulation des informations entre entrées et sorties. En ce qui concerne l'inférence a priori, les directions de circulations correspondent aux liens de connexion entre les objets. Dans le cas de l'introduction d'une observation (inférence a posteriori) dans un RBM, les directions de circulation changeront. Ce cas fera l'objet de la partie suivante. L'Algorithme IV.1 exploite les avantages du paradigme « orienté objet ». Un objet communique avec les objets de son voisinage pour récupérer ses entrées puis calcule et sauvegarde les probabilités dans une base de données. Tous les calculs sont effectués localement ce qui permet de réduire le temps de traitement de par, tout d'abord, la différence de taille entre l'objet (niveau local) et le système (niveau global) mais aussi du fait que l'inférence des objets est réalisée à partir des mêmes arbres de jonction. De plus l'Algorithme IV.1 permet une certaine contrôlabilité des propagations. Il est possible en effet, de faire des calculs locaux par portion du réseau. Par exemple sur la Figure IV.6 les calculs peuvent être réalisés au niveau de l'objet $O_{y_3}^{x_2}$ à partir des seuls calculs réalisés au niveau des cinq objets $\{O_{y_1}^{x_1}, O_{y_2}^{x_1}, O_{y_3}^{x_1}, O_{y_1}^{x_2}, O_{y_2}^{x_2}\}$.

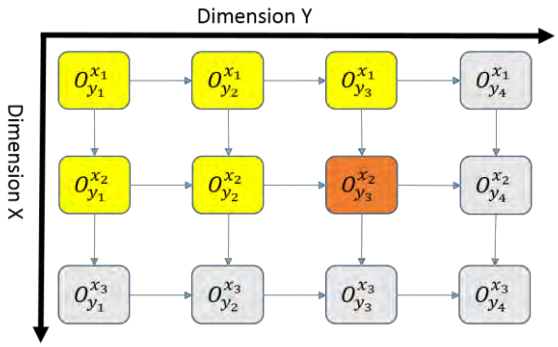


Figure IV.6 RBM avec 3 objets sur la dimension « X » et 4 objets sur la dimension « Y »

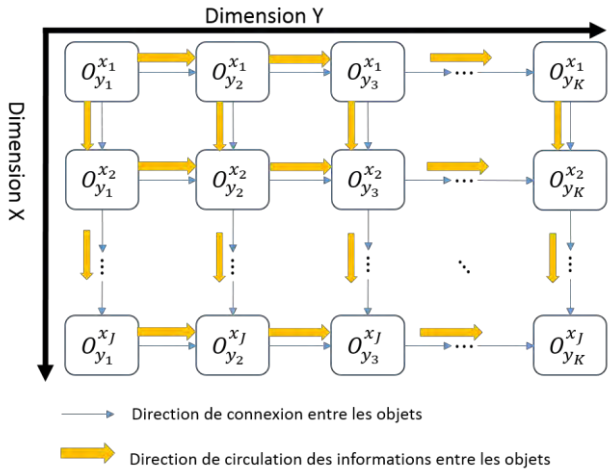


Figure IV.7 Schématisation de l'inférence a priori pour un RBM

En conclusion par rapport à l'inférence a priori, les directions de circulation globales lors de la propagation sont présentées sur la Figure IV.7 . L'Algorithme IV.1 permet de faire des calculs locaux sur des objets à partir de la connaissance de l'état d'un nombre restreint d'objet.

IV.3 Inférence a posteriori

L'objectif principal d'un modèle RBM comme outil d'aide à la décision est de pouvoir déterminer l'état de certains nœuds quand une observation particulière sur d'autres nœuds est faite : c'est l'inférence a posteriori. L'inférence a posteriori consiste donc à faire une mise à jour des informations dans tous le RBM compte tenu des observations dont on dispose.

Considérons par exemple le réseau de la Figure IV.8 pour lequel une observation est faite au niveau de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$. Il s'agit de propager cette information afin de mettre à jour les connaissances au niveau des autres objets.

L'inférence sur le réseau de la Figure IV.8 doit être considérée selon deux niveaux distinguant les niveaux local et global. Le travail principal revient à contrôler correctement les directions de circulation d'information entre objets voisins.

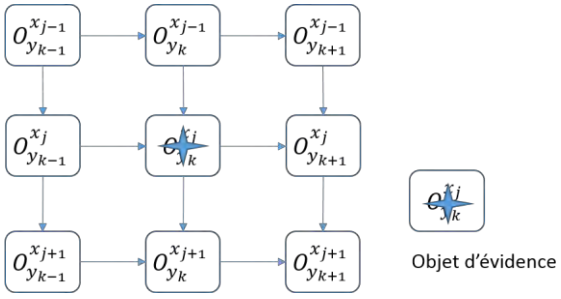


Figure IV.8 Evidence observée au niveau de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ d'un RBM

Avant de présenter les directions de circulation, il est nécessaire de préciser certaines caractéristiques numériques dans un objet. La Figure IV.9 présente un objet possédant une entrée normale, une entrée virtuelle, une variable dynamique interne, une sortie normale et une sortie virtuelle. Les paramètres et les informations sont soit reçus en amont pour les entrées, soit calculés localement. Ces paramètres sont résumés ci-dessous :

- informations reçues en amont ou instanciée localement : $P(N_e)$, $P(N_{i,t-1})$ ou $P(N_e, N_{i,t-1})$

- paramètre : $P(N_{i,t}|N_e, N_{i,t-1})$, $P(N_s|N_{i,t})$ et $P(N_{i,t+1}|N_{i,t})$
- informations calculées : $P(N_e, N_{i,t-1}|N_{i,t})$, $P(N_{i,t}|N_s)$ et $P(N_{i,t}|N_{i,t+1})$

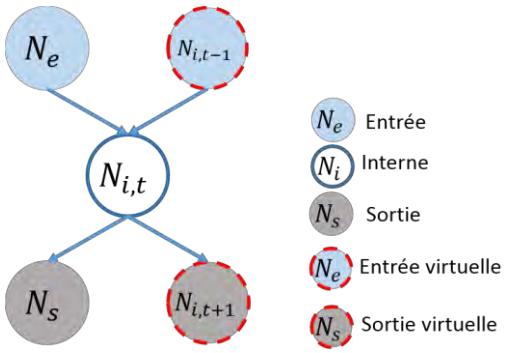


Figure IV.9 Objet générique

Pour calculer les paramètres de la troisième colonne, on applique les relations des équations (**17**, **18**, **19**) ci-dessous :

$$P(N_e, N_{i,t-1}|N_{i,t}) = \frac{P(N_{i,t}|N_e, N_{i,t-1})P(N_e, N_{i,t-1})}{P(N_{i,t})} \qquad \textit{Equation 17}$$

$$P(N_{i,t}|N_s) = \frac{P(N_s|N_{i,t})P(N_{i,t})}{P(N_s)} \qquad \textit{Equation 18}$$

$$P(N_{i,t}|N_{i,t+1}) = \frac{P(N_{i,t+1}|N_i)P(N_{i,t})}{P(N_{i,t+1})} \qquad \textit{Equation 19}$$

Où $P(N_{i,t}) = \sum_{N_e,N_{i,t-1}} P(N_{i,t}|N_e, N_{i,t-1})\ P(N_e, N_{i,t-1})$; $P(N_s) = \sum_{N_{i,t}} P(N_s|N_{i,t})P(N_{i,t})$ et $P(N_{i,t+1}) = \sum_{N_{i,t}} P(N_{i,t+1}|N_{i,t})P(N_{i,t})$.

Le processus de mise à jour dépend du type de nœud et peut concerner :

1. un nœud d'entrée.
2. un nœud interne.
3. un nœud de sortie.
4. deux types de sorties (normale et dynamique).

Pour le premier cas, il n'est pas nécessaire de distinguer le nombre d'entrées devant être mises à jour, dans la mesure où celles-ci sont indépendantes grâce à la structure du réseau de l'objet. Si la mise à jour disponible est $P^e(N_e)$, les probabilités des autres variables sont calculées à partir des équations **20** à **22** :

$$P^{e,N_e}(N_{i,t-1}) = \sum_{N_e,N_{i,t}} P(N_{i,t}|N_e, N_{i,t-1})\ P^e(N_e)P(N_{i,t-1}) = P(N_{i,t-1}) \qquad \textit{Equation 20}$$

$$P^{e,N_e}(N_{i,t}) = \sum_{N_e,N_{i,t-1}} P(N_{i,t}|N_e, N_{i,t-1})\ P^e(N_e)P(N_{i,t-1}) \qquad \textit{Equation 21}$$

$$P^{e,N_e}(N_s) = \sum_{N_{i,t}} P(N_s|N_{i,t})\ P^e(N_{i,t}) \qquad \textit{Equation 22}$$

La procédure et les étapes de calcul ne changent pas si l'on dispose d'informations sur plusieurs entrées.

Seules les probabilités associées aux variables internes et de sorties seront modifiées.

Le deuxième cas est simple, dans la mesure où la mise à jour d'une variable interne $P^e(N_{i,t})$, se fait selon les principes classiques appliqués aux RB. Les probabilités des entrées et sorties sont ainsi mises à jour par les équations (**23**) et (**24**):

$$P^{e,N_{i,t}}(N_e) = \sum_{N_{i,t-1},N_{i,t}} P\left(N_e, N_{i,t-1}|N_{i,t}\right) * P^e(N_{i,t}) \qquad \textit{Equation 23}$$

$$P^{e,N_{i,t}}(N_s) = \sum_{N_{i,t}} P(N_s|N_{i,t}) * P^e(N_{i,t}) \qquad \textit{Equation 24}$$

Les probabilités $P^{e,N_{i,t}}\left(N_{i,t-1}\right)$ et $P^{e,N_{i,t}}\left(N_{i,t+1}\right)$ sont calculées de la même manière.

Le troisième cas concerne une sortie, suivant la dimension « X » ou suivant la dimension « Y », par exemple $P^e(N_s)$; dans ce cas comme pour le deuxième cas, toutes les probabilités doivent être mises à jours par les équations (**25**, **26**, **27**):

$$P^{e,N_s}\left(N_{i,t}\right) = \sum_{N_s} P(N_{i,t}|N_s) * P^e(N_s) \qquad \textit{Equation 25}$$

$$P^{e,N_s}\left(N_{i,t+1}\right) = \sum_{N_{i,t}} P(N_{i,t+1}|N_{i,t}) * P^{e,N_s}\left(N_{i,t}\right) \qquad \textit{Equation 26}$$

$$P^{e,N_s}(N_e) = \sum_{N_{i,t}N_{i,t-1}} P\left(N_e, N_{i,t-1}|N_{i,t}\right) * P^{e,N_s}\left(N_{i,t}\right) \qquad \textit{Equation 27}$$

$P^{e,N_s}\left(N_{i,t-1}\right)$ est obtenue également par l'équation (**27**).

Le quatrième cas est différent du troisième dans la mesure où deux types de sorties sont influencées par l'entrée de deux objets différents. Une sortie normale peut par exemple dépendre de l'entrée normale d'un objet en aval dans une dimension « X » et une sortie virtuelle d'un autre objet également situé en aval mais dans une dimension « Y ». Les évidences sont alors $P^e(N_s)$ et $P^e\left(N_{i,t+1}\right)$ et les probabilités de mise à jour sont alors calculées à partir de l'équation (**28**).

$$P^{e,(N_s,N_{i,t+1})}\left(N_{i,t}\right) = \sum_{N_s,N_{i,t+1}} P(N_{i,t}|N_s, N_{i,t+1}) * P^e(N_s, N_{i,t+1}) \qquad \textit{Equation 28}$$

Dans ce cas, sachant que $P^e(N_s, N_{i,t+1}) \neq P^e(N_s) * P^e(N_{i,t+1})$, une probabilité jointe est requise pour la mise à jour. Pour résoudre ce problème, nous proposons de construire un réseau auxiliaire comprenant deux types d'entrées en aval et un parent relié à ces entrées. Le détail de ce réseau auxiliaire est présenté sur la Figure IV.10 ci-dessous.

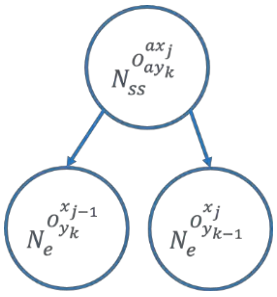


Figure IV.10 Réseau auxiliaire $AO_{ay_k}^{ax_j}$

Nous allons ici décrire ce que nous appelons objet auxiliaire.

Un objet auxiliaire ($AO_{ay_k}^{ax_j}$) est un réseau de combinant plusieurs variables (ici 3) comme indiqué sur la Figure IV.10 dont les variables sont obtenues par combinaison de certaines entrées ou sorties. Cet objet auxiliaire permet de regrouper deux types d'informations pour opérer la diagonalisation sur les deux dimensions. Le résultat du calcul dans la dernière étape de l'inférence consiste en deux types de sorties suivant les dimensions « X » et « Y ». La transmission se fait vers deux objets différents. Comme le calcul local dans l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ avec $k < ek \,\&\, j < ej$ a besoin de la probabilité conjointe $P(N_e^{O_{y_k}^{x_{j-1}}}, N_e^{O_{y_{k-1}}^{x_j}})$ où $N_e^{O_{y_k}^{x_{j-1}}}$ est l'entrée de l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ et $N_e^{O_{y_{k-1}}^{x_j}}$ l'entrée dimensionnelle dans l'objet $O_{y_{k-1}}^{x_j}$, le calcul doit passer par un objet intermédiaire pour rassembler les deux entrées. Pour cette raison, nous qualifions cette procédure de « calcul semi-local ». Elle est présentée par la Fonction IV.3 décrite à la suite.

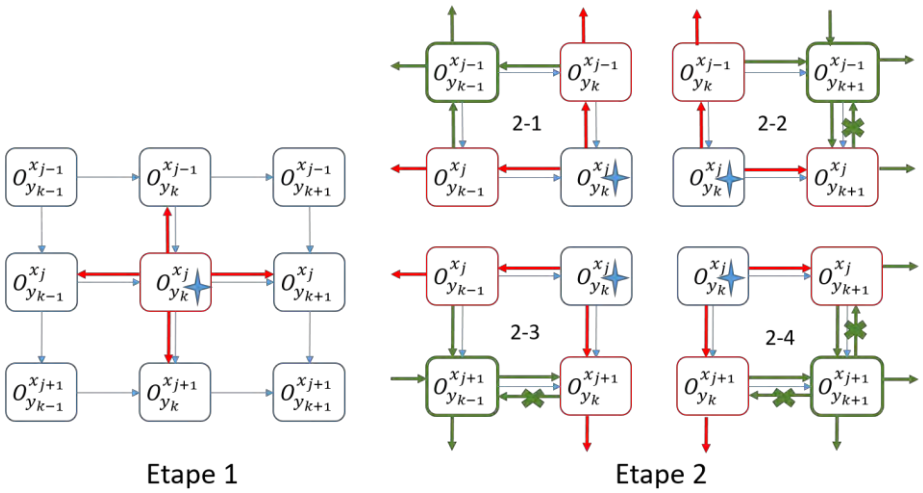


Figure IV.11 Procédure essentielle relative à l'inférence a posteriori

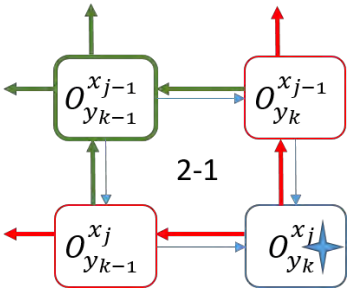
Dès qu'une évidence est observée dans un objet $O_{y_k}^{x_j}$, un calcul local est réalisé au sein de cet objet et les informations recueillies (à partir de ses entrées et sorties) sont communiquées dans quatre directions (voir « Etape 1 » sur la Figure IV.11). Quatre objets vont recevoir des informations suivant les flèches rouges via leur canal de communication. $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ et $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ sont mis à jour par leurs sorties et $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ et $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ sont mis à jour par leurs entrées.

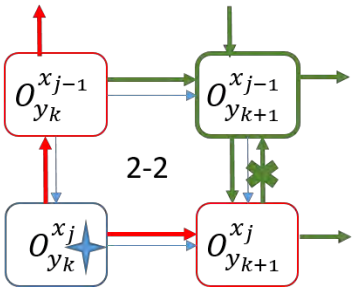
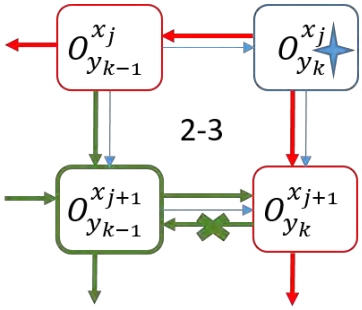
L'étape 2 peut être divisée en quatre sous étapes indépendantes.

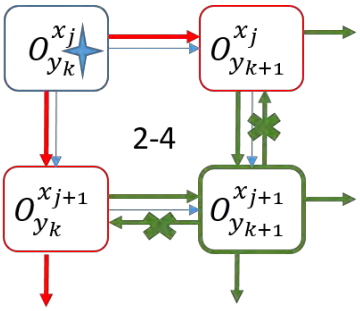
Etape 2-1.

L'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ reçoit une sortie suivant la dimension « X » et l'objet $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ reçoit une sortie suivant la dimension « Y ». Les deux objets réalisent un calcul local et envoient les valeurs associées à leurs entrées à l'objet $O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}}$ via les flèches vertes sur la figure ci-contre.

L'objet est ici considéré comme une variable. La construction d'un arbre de jonction à partir des objets $O_{y_k}^{x_j}$, $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, $O_{y_{k-1}}^{x_j}$, $O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}}$, fait apparaître deux cliques $O_{y_k}^{x_j}$, $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ et $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, $O_{y_{k-1}}^{x_j}$, $O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}}$ et un séparateur $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, $O_{y_{k-1}}^{x_j}$. Dès qu'une évidence est introduite dans $O_{y_k}^{x_j}$, les informations transmises à $O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}}$



doivent être envoyées via les séparateurs $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, $O_{y_{k-1}}^{x_j}$. L'information de mise à jour est tout d'abord communiquée à l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$, puis à $O_{y_{k-1}}^{x_j}$, pour finalement arriver à $O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}}$.	
Etape 2-2. L'objet $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ reçoit une entrée via le canal de communication de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ suivant la dimension « Y » (équation 20). L'entrée de $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ suivant la dimension « X » ne change pas. Par conséquent, la flèche verte de $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ à $O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$ peut être supprimée. L'objet $O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$ ne reçoit pas d'informations de l'objet en aval suivant la dimension « X ». L'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ doit communiquer sa valeur d'entrée à l'objet en amont $O_{y_k}^{x_{j-2}}$ suivant la dimension « X » via la flèche rouge et sa valeur de sortie à l'objet en aval $O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$ suivant la dimension « Y » via la flèche verte. L'objet $O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$ doit recevoir deux entrées dans les deux dimensions « X-Y » et communiquer sa valeur de sortie respectivement aux objets $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ et $O_{y_{k+2}}^{x_{j-1}}$. Mais l'objet $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ reçoit l'entrée « X » et « Y » séparément, deux mises à jour seront nécessaires dans cet objet pour l'obtention des valeurs finales. Les traitements dans cet objet seront donc mis en attente jusqu'à obtention de toutes les informations requises.	
Etape 2-3. L'objet $O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$ ne reçoit aucune information de l'objet en aval $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ car celui-ci reçoit une entrée dans la dimension « X » qui ne modifie pas l'entrée de la dimension « Y ». Par conséquent, la flèche verte de $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ à $O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$ peut être supprimée. L'objet $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ reçoit une information en sortie suivant la dimension « Y ». Il communique sa valeur d'entrée à l'objet en amont $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ suivant cette dimension via la flèche rouge et sa valeur de sortie à l'objet en aval $O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$ dans la dimension « X » via la flèche verte. L'objet $O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$ doit recevoir deux entrées dans les deux dimensions « X-Y » et communique sa valeur de sortie aux objets $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ et $O_{y_{k-1}}^{x_{j+2}}$.	

Finalement $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ reçoit des valeurs en entrées séparément selon les dimensions « X » et « Y » comme l'objet $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ à l'étape 2-2.	
Etape 2-4 L'objet $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ reçoit une entrée et communique des informations en sortie aux objets en aval $O_{y_k}^{x_{j+2}}$ et $O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$. Comme les entrées sont indépendantes entre elles, l'objet $O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$ ne peut pas envoyer une entrée vers l'objet en amont $O_{y_{k+1}}^{x_j}$. L'objet $O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$ reçoit deux valeurs en entrées.	

Les directions de circulation des informations entre objets sont présentées dans une sous partie de RBM sur la Figure IV.11.

La Figure IV.12 montre les directions de circulation des informations suivant les deux dimensions : entre $y_{k-1} \rightarrow y_k$ & $x_{j-1} \rightarrow x_{j+1}$ et $y_k \rightarrow y_{k+1}$ & $x_{j-1} \rightarrow x_{j+1}$. Il y a six objets dans chaque figure avec une évidence supposée sur l'objet ($O_{y_k}^{x_j}$).

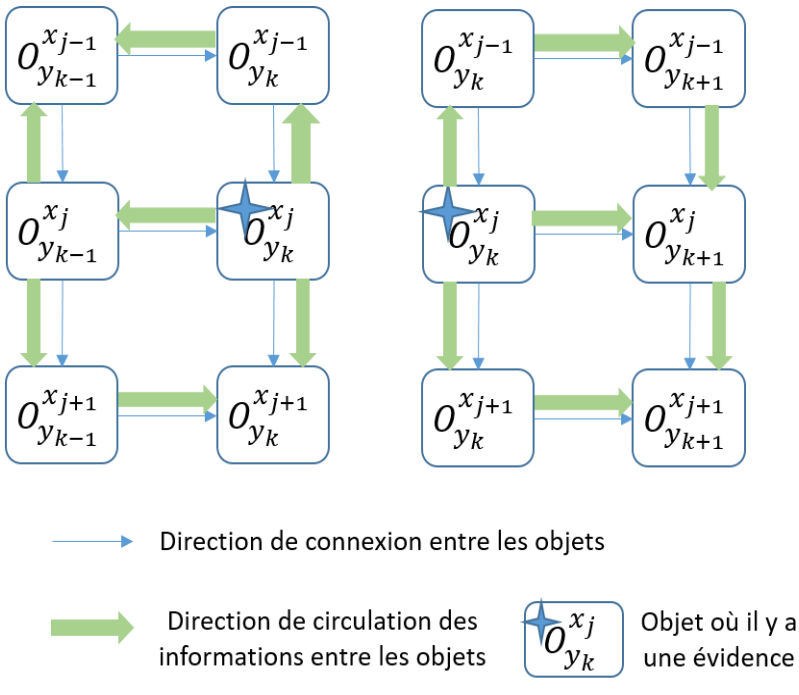


Figure IV.12 La circulation entre $y_{k-1} \rightarrow y_k$ & $x_{j-1} \rightarrow x_{j+1}$ et $y_k \rightarrow y_{k+1}$ & $x_{j-1} \rightarrow x_{j+1}$

L'ensemble des directions de circulation des informations est résumé dans les tableaux Table 4.1 et Table 4.2 ci-dessous où la flèche rouge ← indique le sens inverse de la direction de connexion.

Direction de connexion (inférence a priori)	Direction de circulation (inférence a posteriori)
$O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j-1}}$	$O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}} \leftarrow O_{y_k}^{x_{j-1}}$
$O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_{k-1}}^{x_j}$	$O_{y_{k-1}}^{x_{j-1}} \leftarrow O_{y_{k-1}}^{x_j}$
$O_{y_k}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_k}^{x_j}$	$O_{y_k}^{x_{j-1}} \leftarrow O_{y_k}^{x_j}$
$O_{y_{k-1}}^{x_j} \rightarrow O_{y_k}^{x_j}$	$O_{y_{k-1}}^{x_j} \leftarrow O_{y_k}^{x_j}$
$O_{y_{k-1}}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$	$O_{y_{k-1}}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}}$
$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$	$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$
$O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$	$O_{y_{k-1}}^{x_{j+1}} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$

Tableau IV.1 Directions de circulation des informations dans le cas d'inférence a priori et a posteriori 1 (Figure IV.12)

Direction de connexion (inférence a priori)	Direction de circulation (inférence a posteriori)
$O_{y_k}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$	$O_{y_k}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}}$
$O_{y_k}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_k}^{x_j}$	$O_{y_k}^{x_{j-1}} \leftarrow O_{y_k}^{x_j}$
$O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_j}$	$O_{y_{k+1}}^{x_{j-1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_j}$
$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_j}$	$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_j}$
$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$	$O_{y_k}^{x_j} \rightarrow O_{y_k}^{x_{j+1}}$
$O_{y_{k+1}}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$	$O_{y_{k+1}}^{x_j} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$
$O_{y_k}^{x_{j+1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$	$O_{y_k}^{x_{j+1}} \rightarrow O_{y_{k+1}}^{x_{j+1}}$

Tableau IV.2 Directions de circulation des informations dans le cas d'inférence a priori et a posteriori 2 (Figure IV.12)

Un objet peut recevoir deux fois des entrées en provenance de dimensions différentes. C'est le cas, par exemple, à l'étape 2-2 de la Figure IV.11. Afin de ne pas faire deux fois les calculs, un ordre est proposé pour la réalisation de l'inférence. L'algorithme d'inférence est résumé dans l'encadré Algorithme IV.2 et consiste à examiner six cas respectivement dénommés cas A, cas B, cas C, cas D, cas E et cas F. Ces six cas correspondent à l'ordre prévenant la répétition de calculs. Les fonction Propagation() et SemiCal() sont respectivement présentées dans les encadrés Fonction IV.2 et Fonction IV.3.

Inférence RBM

Entrées : RBM

$E_{i,s}^{e,j,k}$ - l'évidence // l'évidence concerne soit une variable interne soit une sortie dans un objet $O_{y_k}^{x_j}$

Sorties : $P^e(N_{i,s}^{j,k}, l)$ // la probabilité marginale pour les variables de sortie/interne qui est conservée dans la base de données

1 **Début**

2 **Lire** l'évidence $E_{i,s}^{e,j,k} \leftarrow \omega_l^{N_{i,s}^{e,j,k}}$ // ω_l est la modalité de $N_{i,s}^{e,j,k}$ qui est observée

3 Compiler l'objet d'évidence $O_{ey_k}^{ex_j}$ // construire l'arbre de jonction et calculer les probabilités selon l'évidence

4 $P(N_m^{j,k}, l) \leftarrow P^e(N_{e,i,s}^{e,j,k})$ // stocker toutes les probabilités marginales pour $l^{ème}$ fois de l'inférence

5 **Selon** j & k

6 **Cas** $j = ej$ & $1 \leq k < ek$ // *Cas A :* chaque objet reçoit une sortie dans la dimension « Y »

7 **Pour** $k \leftarrow ek - 1$ jusqu'à $k = 1$ faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$ où $j = ej, ej - 1$ *et* $ek - 1 \geq k \geq 1$

8 $P(N_s^{j,k}) \leftarrow P(N_e^{j,k+1}, l)$ // récupérer l'entrée de l'objet $O_{y_{k+1}}^{x_j}$ et l'affecter sur la sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$

9 Compiler l'objet

10 $P(N_m^{j,k}, l) \leftarrow P^e(N_m^{j,k})$ // stocker les probabilités avec l'indice l

11 **FinPour**

12 **Autrement** $k = ek$ & $1 \leq j < ej$ // *Cas B* : chaque objet reçoit une sortie suivant la dimension « X »

13 **Pour** $j \leftarrow ej - 1$ jusqu'à $j = 1$ faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$ où $k = ek\ et\ ej - 1 \geq j \geq 1$

14 $P(N_s^{j,k}) \leftarrow P(N_e^{j+1,k}, l)$ // récupérer l'entrée de l'objet $O_{y_k}^{x_{j+1}}$ et l'affecter sur la sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$

15 Compiler l'objet $O_{y_k}^{x_j}$

16 $P(N_m^{j,k}, l) \leftarrow P^e(N_m^{j,k})$ // stocker les probabilités avec l'indice l

17 **FinPour**

18 **FinCas**

19 **Selon** j & k

20 **Cas 1** $ek + 1 \leq k \leq K$ & $1 \leq j \leq ej$ // *Cas C*: chaque objet reçoit ses entrées suivant les dimensions «Y ou X-Y»

21 **Pour** $k \leftarrow ek + 1$ jusqu'à K faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$où $1 \leq j \leq ej\ et\ ek + 1 \leq k \leq K$

22 **Pour** $j \leftarrow 1$ jusqu'à ej faire

23 Propagation (j, k, ej, K, l) // rappeler la fonction Propagation (j,k,ej,K)

24 **FinPour**

25 **FinPour**

26 **Cas 2** $ej + 1 \leq j \leq J$ &&$1 \leq k \leq ek$ // *Cas D*: chaque objet reçoit ses entrées dans les dimensions «Y ou X-Y»

27 **Pour** $k \leftarrow 1$ jusqu'à ek faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$où $1 \leq k \leq ek\ et\ ej + 1 \leq j \leq J$

28 **Pour** $j \leftarrow ej + 1$ jusqu'à J faire

29 Propagation (j, k, J, ek, l) // rappeler la fonction Propagation (j,k,J,ek)

30 **FinPour**

31 **FinPour**

32 **Autrement faire** // *Cas E* : chaque objet reçoit deux types de sorties « x » et « y »

33 **Pour** $k \leftarrow ek - 1$ jusqu'à 1 faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$où $ek > k \geq 1$ et $ej > j \geq 1$

34 **Pour** $j \leftarrow ej - 1$ jusqu'à 1 faire

35 SemiCal(j, k, l) // rappeler la fonction SemiCal(j,k)

36 **FinPour**

37 **FinPour**

38 **FinCas**

39 **Pour** $k \leftarrow ek + 1$ jusqu'à T faire // *Cas F :* chaque objet reçoit deux types d'entrées « X-Y »

40 **Pour** $j \leftarrow ej + 1$ jusqu'à J faire // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$où $ej < j \leq J\ et\ ek < k \leq K$

41 Propagation (j, k, J, K, l) // rappeler la fonction Propagation (j,k,J,K)

42 **FinPour**

43 **FinPour**

44 **Fin**

Algorithme IV.2 Inférence a posteriori dans un RBM

Tous les résultats calculés sont enregistrés dans une base de données $P(N_m^{j,k}, l)$, où l correspond à la $l^{ème}$ itération de calcul. Pour l'inférence en présence d'une évidence, l doit être supérieur à 1 ($l = 2,3, ...$). L'indice l permet de conserver les résultats de chaque étape. En effet, chaque évidence fait évoluer le modèle et dans l'hypothèse où plusieurs évidences non simultanées sont observées dans un RBM, il s'avère nécessaire de stocker ces informations. Cet indice permet également d'analyser l'historique du comportement d'un système et facilite la propagation partielle dans un RBM (notion qui sera présentée plus tard). La base de données $P(N_m^{j,k}, l)$ se présente comme ci-dessous :

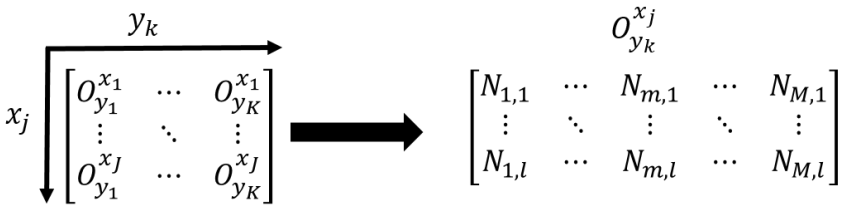


Figure IV.13 Base de données pour conserver les résultats

La Figure IV.13 présente la structure de la base de données permettant d'archiver les résultats de calcul. Dans ce schéma, les probabilités marginales calculées sont enregistrées dans la base et peuvent servir aux calculs d'inférence ou à la traçabilité de l'historique du système.

L'encadré ci-dessous décrit la fonction Propagation() appelée dans l'algorithme précédent.

Fonction Propagation (j, k, J, K, l)

Données : $j, k, J, K, l, O_{y_k}^{x_j}$ // j, k sont les indices de l'objet à partir duquel commence la propagation
// J, K sont les indice de l'objet où se termine la propagation
// l est l'indice du résultat de la $l^{ème}$ propagation

Début
Lire j, k, J, K, l
Pour k **jusqu'à** K **faire**
  Si k= 1 **alors**
    Pour j **jusqu'**à J **faire**
      Si j=1 **alors** // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$ où $j = 1$ et $k = 1$
        // à cet instant, l'objet a toutes les informations nécessaires
      Compiler l'objet $O_{y_k}^{x_j}$
      $P(N_m^{j,k}, l) \leftarrow P(N_{i,s}^{j,k})$[3] // stocker les probabilités dans la base de données avec l'indice l
      Sinon // traiter les objets $O_{y_k}^{x_j}$ où $j \in [j, J]$ où $j > 1$,
        // chaque objet a besoin d'une entrée sur la dimension « X »
      $P(N_s^{j-1,k}) \leftarrow P(N_s^{j-1,k}, l)$ // récupérer la probabilité de sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ de la $l^{ème}$ itération
      $P(N_e^{j,k}) \leftarrow P(N_s^{j-1,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ à l'entrée de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$
      Compiler l'objet $O_{y_k}^{x_j}$
      $P(N_m^{j,k}, l) \leftarrow P(N_{i,s}^{j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données avec l'indice l
      FinSi
    FinPour

[3] Seules les variables internes et les sorties sont stockées, car les entrées sont déjà archivées comme sorties dans un objet en amont. Cela permet d'économiser de l'espace de stockage.

```
16          Sinon
17              Pour j jusqu'à J faire
18                  Si j =1 alors        // traiter les objets O_{y_k}^{x_j} où k ∈ [k,K], k > 1 une entrée sur la dimension « Y » est requise
19                  P(N_s^{j,k-1}) ← P(N_s^{j,k-1}, l)  // récupérer la probabilité de sortie de l'objet O_{y_{k-1}}^{x_1} de la l^ème itération
20                  P(N_e^{j,k}) ← P(N_s^{j,k-1})       // affecter la sortie de O_{y_{k-1}}^{x_1} à l'entrée de O_{y_k}^{x_1}
21                  Compiler l'objet O_{y_k}^{x_j}
22                  P(N_m^{j,k}, l) ← P(N_{i,s}^{j,k})  // stocker les probabilités dans la base de donnée avec l'indice l
23                  Sinon                // traiter les objets O_{y_k}^{x_j}, où j > 2, k > 2,
                                         // chaque objet a besoin de deux entrées suivant les deux dimensions « X » et « Y »
24                  Fonction ProbabilitéJointe(j,k,l)
25                  P(N_s^{j,k}) ← P(N_ee^{j,k}, l)     // récupérer la probabilité de sortie conjointe de l'objet auxiliaire
26                  P(N_e^{j,k}) ← P(N_s^{j,k})         // affecter la sortie de réseau auxiliaire à l'entrée de O_{y_k}^{x_j}
27                  Compiler l'objet O_{y_k}^{x_j}
28                  P(N_m^{j,k}, l) ← P(N_{i,s}^{j,k})  // stocker les probabilités dans la base de donnée avec l'indice l
29                  FinSi
30              FinPour
31          FinSi
32      Fin
```

Fonction IV.2 Propagation normal dans un RBM

L'encadré ci-dessous présente la fonction SemiCal() à laquelle on a fait référence dans l'algorithme précédent.

Fonction SemiCal (j, k, l)

```
Données : j, k, l   // j, k sont les indices sur les dimensions « X » et « Y » ; l est l'indice du résultat de la l^ème itération
1       Début
2       Lire le réseau auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}
3       Compiler le réseau auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}
4       P(N_e^{j-1,k}) ← P(N_e^{j-1,k}, l)   // récupérer la probabilité d'entrée de l'objet O_{y_k}^{x_{j-1}} de la l^ème itération
5       P(N_e^{j,k-1}) ← P(N_e^{j,k-1}, l)   // récupérer la probabilité d'entrée de l'objet O_{y_{k-1}}^{x_j} de la l^ème itération
6       Compiler l'objet auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}   // construire l'arbre de jonction et utiliser les entrées de « X » et « Y »
7       P(N_ss^{j,k}, l) ← P(N_s^{O_{ay_k}^{ax_j}})   // stocker les probabilités de la sortie N_ss^{j,k} dans la base de données avec l'indice l
8       P(N_ss^{j,k}) ← P(N_ss^{j,k}, l)   // récupérer la probabilité de sortie de l'objet auxiliaire AO_{ay_k}^{ax_j}
9       Compiler l'objet O_{y_k}^{x_j}
10      P(N_m^{j,k}, l) ← P(N_m^{j,k})   // stocker les probabilités dans la base de données avec l'indice l
11      Fin
```

Fonction IV.3 Semi-calcul pour un objet

L'inférence dans le réseau global s'effectue en quatre étapes.

1. Calcul local dans l'objet d'évidence
2. Calcul dans le cas A et le cas B
3. Calcul dans le cas C, D et E
4. Calcul dans le cas F

La Figure IV.14 résume le processus d'inférence a posteriori quand il y a une évidence dans un RBM.

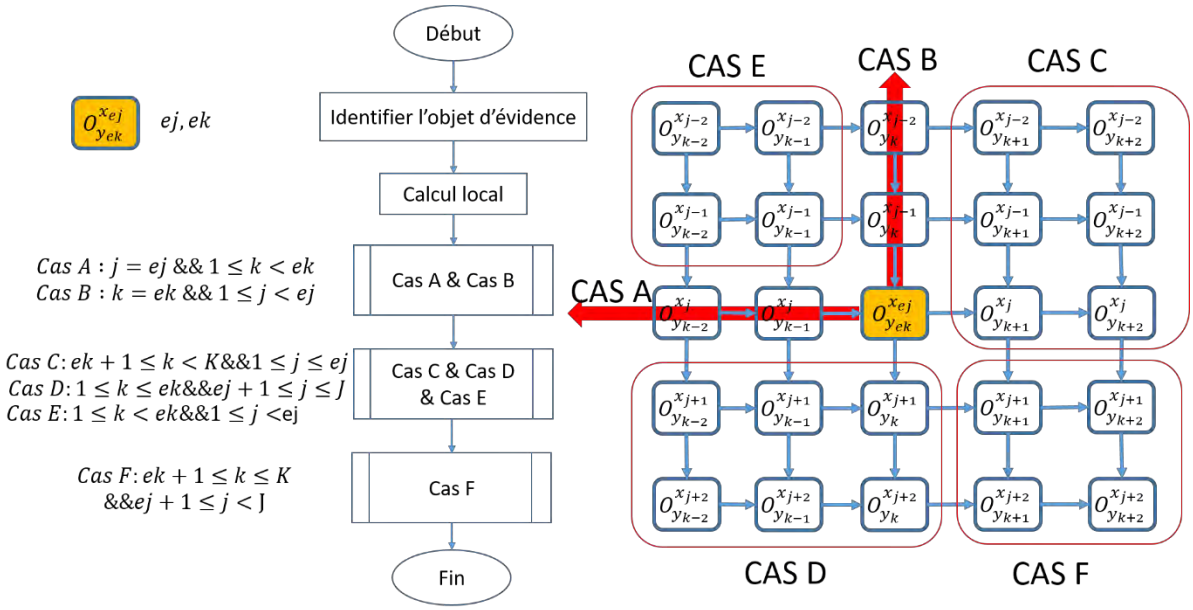


Figure IV.14 Algorithme d'inférence a posteriori dans un RBM

Un des avantages de cet algorithme est la possibilité de paralléliser les calculs. Les traitements dans le cas A et le cas B peuvent être réalisés simultanément, réduisant ainsi le temps de calcul global. Le cas E correspond à une forme de diagnostic suivant les deux axes et peut donc être optionnel si le calcul dans cette partie n'est pas nécessaire pour le calcul suivant (cas F). La propagation des informations dans un RBM est également plus contrôlable que dans le cas de RBOO classique puisque l'objet cible peut être isolé pour récupérer les informations requises. A titre d'illustration, pour l'obtention des informations relatives au cas C, il suffit de réaliser les calculs correspondant aux cas B et C. La base de données présentée sur la Figure IV.13 permet de conserver les résultats intermédiaires en vue de propager des informations dans certaines zones lors d'une itération puis de propager les informations à d'autres zones lors de l'itération suivante. La propagation partielle dans les zones A, B et C peut, par exemple, être réalisée et stockée en base. En vue de propager à tout le réseau une autre évidence nouvellement observée, il suffit de récupérer les résultats de la dernière mise à jour pour les zones D, E et F puis de réaliser à partir de là les calculs. On le voit, l'algorithme présente une flexibilité d'utilisation appréciable.

La propagation des informations dans un RBM a été traitée dans les parties IV.2 et IV.3 en utilisant les caractéristiques spécifiques du paradigme « orienté objet ». Les algorithmes d'inférence développés aussi bien pour l'inférence a priori que pour l'inférence a posteriori sont assez efficaces sous conditions de respect des hypothèses sous-tendant ces algorithmes. Or dans la pratique, on peut imaginer par exemple que l'évolution actuelle du système suivant une dimension dépende d'un chaînage arrière supérieur à 1 ; par exemple que l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ puisse dépendre des objets $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ et $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ ou plus suivant la dimension « Y ». Ceci est particulièrement le cas pour les systèmes dynamiques dont la dimension principale est temporelle et pour lesquels l'évolution dépend souvent de son histoire. De même on peut imaginer des

systèmes évoluant en fonction d'un nombre de dimensions supérieur à deux, hypothèse retenue jusqu'alors dans ce chapitre.

Une tentative de réponse à ce questionnement est proposée dans les parties suivantes qui abordent tout d'abord le cas de systèmes faisant apparaître un rang supérieur à 1, ou un décalage entre dimensions (parties IV.4 et IV.5) puis considèrent le cas multidimensionnel pour une généralisation des principes d'inférence a priori et a posteriori au sein des RBM (partie IV.6).

IV.4 Inférence de rang supérieur à 1

L'algorithme proposé dans la partie précédente résout le problème pour un système de rang 1 sans décalage. Si le système varie suivant une dimension, comme par exemple, un système dynamique, son comportement à l'instant t peut dépendre non seulement de son état à l'instant $t-1$ mais aussi à l'instant $t-2$ voire plus. La question qui se pose alors est de savoir si l'algorithme d'inférence présenté plus haut est adapté ou adaptable à ce cas.

La complexité d'un RBM croît fortement avec le rang (relations dans une dimension entre objets non consécutifs) et/ou le décalage (relations décalées entre objets de dimensions différentes). L'algorithme Algorithme IV.1 relatif à l'inférence a priori reste valable pour le traitement de ces cas. Par contre, l'Algorithme IV.2 correspondant au cas d'inférence a posteriori ne peut être utilisé en l'état compte tenu du nombre accru des relations d'influence. Comme il n'est pas souhaitable de développer un algorithme pour chaque nouvelle configuration, nous proposons des transformations du réseau complexe pour ramener le modèle à un réseau respectant les hypothèses des algorithmes développés (réseau similaire à celui de la Figure IV.2). Cela passera en particulier par une augmentation des nœuds virtuels.

L'atteinte de cet objectif implique de générer des nœuds virtuels qui fournissent la possibilité de modifier la structure d'un objet pour ramener son rang à 1 et supprimer le décalage sans augmentation de la complexité de calcul (taille des tables de probabilités conditionnelles). Le processus de réduction du rang suit la règle suivante.

Si le rang (D) est supérieur à 1, des sorties virtuelles doivent être ajoutées et reliées aux entrées virtuelles. Le nombre de sorties virtuelles supplémentaires est égal à D-1.

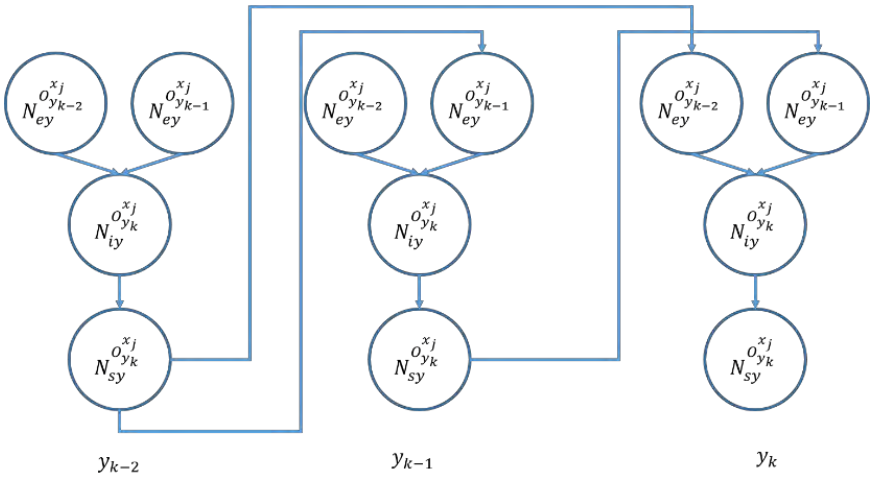


Figure IV.15 Exemple d'un RBM de rang 2

Pour illustrer cette règle, considérons un réseau à deux dimensions « X » et « Y » et un rang de 2 sur la dimension « Y » ($O_r = 2$ c'est-à-dire que l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ dépend des objets $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ et $O_{y_{k-2}}^{x_j}$) (Figure IV.15).

L'objet de la Figure IV.15 est un objet composé de quatre nœuds, deux entrées dimensionnelles $N_{ey}^{o_{y_{k-2}}^{x_j}}$ et $N_{ey}^{o_{y_{k-1}}^{x_j}}$, un nœud dimensionnel $N_{iy}^{o_{y_k}^{x_j}}$ et une sortie virtuelle $N_{sy}^{o_{y_k}^{x_j}}$; c'est un objet de rang 2 ($O_r = 2$).

La transformation de ce réseau en un réseau de rang 1 (la Figure IV.17) est obtenu par ajout d'un nœud virtuel sur la dimension « Y » par rapport à l'objet $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ comme le montre la Figure IV.16 sur laquelle on peut voir que la probabilité conditionnelle recopie l'information de $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ $P\left(N_{sy}^{o_{y_{k-1}}^{x_j}} \middle| N_{ey}^{o_{y_{k-1}}^{x_j}}\right) = 1$. Par cette modification, l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ peut encapsuler les informations des objets $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ et $O_{y_{k-1}}^{x_j}$ réduisant ainsi la complexité du réseau global. La comparaison entre le RBM normal (à gauche) et le RBM transformé (à droite) est présentée sur la Figure IV.18

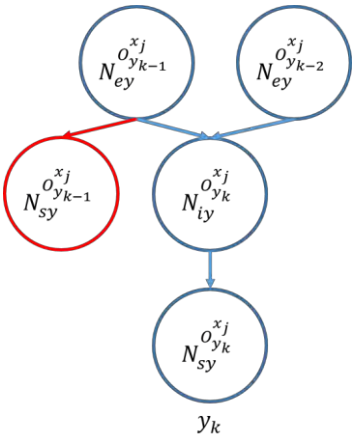


Figure IV.16 Classe avec un deuxième rang

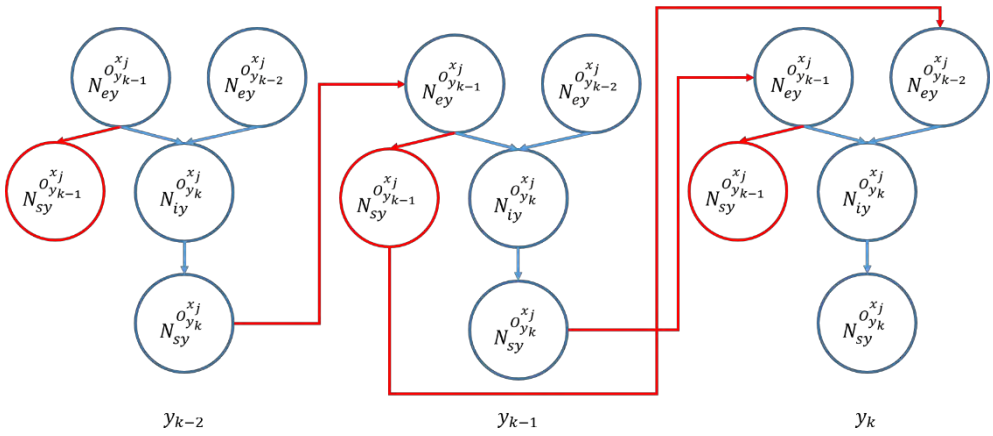


Figure IV.17 RBM de rang 2

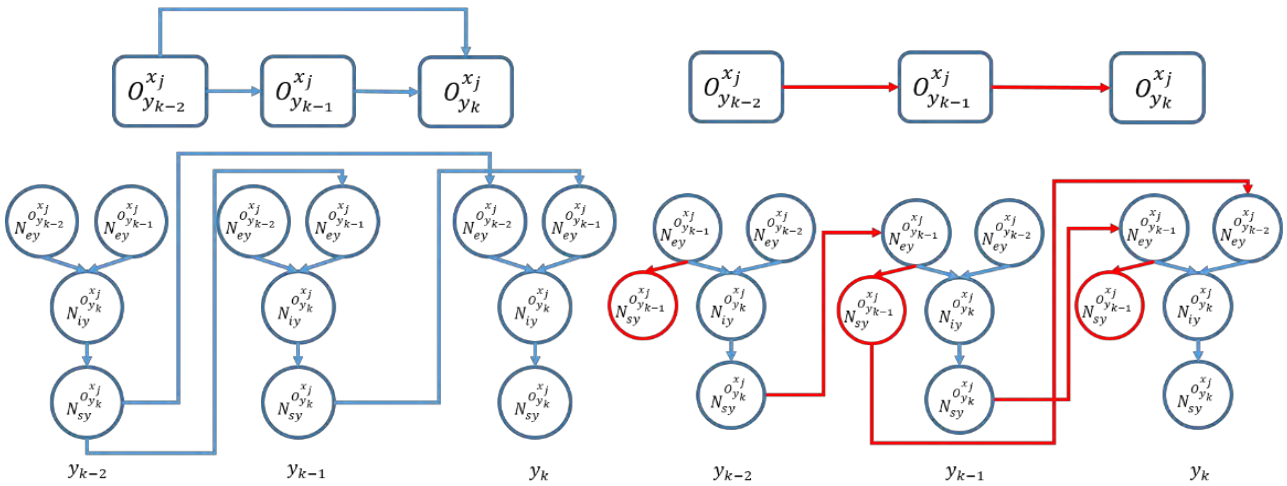


Figure IV.18 Comparaison entre réseau initial et réseau transformé

La Figure IV.18 présente deux structures différentes pour une même classe d'un RBM de rang 2. A gauche on retrouve le RBM initial ou originel tandis qu'à droite figure sa transformée permettant de ramener à 1 le rang du RBM. L'existence du lien entre l'objet $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ et $O_{y_k}^{x_j}$ complique la structure au niveau global. Après rajout d'une sortie virtuelle (schéma de droite à la Figure IV.18), la structure au niveau global est semblable à celle de la Figure IV.2 et les algorithmes (Algorithme IV.1 et Algorithme IV.2) peuvent s'appliquer. Comme une seule sortie virtuelle est appliquée dans la classe, ce changement ne complique pas la structure de la classe ni le paramètre affecté. La complexité de calcul dans un objet n'augmente pas puisqu'il permet de supprimer un lien entre les objets $O_{y_{k-2}}^{x_j}$ et $O_{y_k}^{x_j}$.

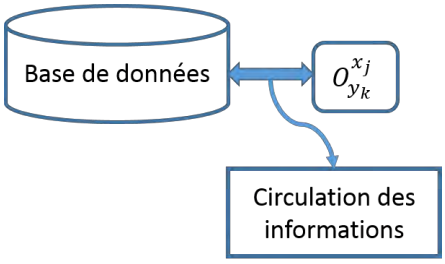


Figure IV.19 Procédure d'inférence dans un RBM

En ajoutant des sorties virtuelles correspondant à plusieurs rangs, on réduit la complexité structurelle du réseau global. Par cette transformation, il devient possible de traiter des systèmes plus compliqués possédant plusieurs rangs suivant une dimension et/ou des systèmes de dimension supérieure à 2. La transformation d'un réseau de rang supérieur à 2 et de décalage supérieur ou égal à 1 est réalisée à partir de la notion de « nœud virtuel ». L'objectif principal de la transformation est de toujours se ramener à un réseau similaire à celui de la Figure IV.2 qui respecte les trois hypothèses sur lesquelles sont basés les algorithmes d'inférence développés dans cette thèse. L'idée principale de l'inférence dans un RBM est de contrôler la circulation des informations entre les objets. Une base de données est utilisée pour cela. Les directions de circulation de l'information sont matérialisées sur la Figure IV.19.

La plupart des systèmes physiques naturels ou construits par l'homme se positionne dans un espace à 3 dimensions. De plus, la prise en compte de leur évolution dans le temps rajoute une dimension supplémentaire. La possibilité de traiter par modélisation sous forme de RBM des systèmes multidimensionnels a donc du sens. La partie 5 5 ci-dessous considère le cas d'un système à 3 dimensions.

IV.5 Inférence dans un RBM à trois dimensions

La technique de propagation des informations à deux dimensions a été présentée dans les parties IV.2 et IV.3. Même si les réseaux à deux dimensions permettent de modéliser beaucoup de systèmes, nous cherchons à étendre les résultats à des systèmes faisant apparaître 3 dimensions. Pour ce faire la méthode de propagation que nous allons maintenant présentée s'appuiera sur la représentation d'une situation réelle. Les règles pour propager les informations au réseau de trois dimensions sont exprimées à travers deux algorithmes génériques.

Considérons un système de trois dimensions avec deux dimensions spatiales (une dimension longitudinale X, une dimension latérale Y), et une dimension temporelle T.

Un exemple d'objet à 3 dimensions est donné en Figure IV.20. Pour des dimensions supérieures à 2, nous désignons un objet par $O_{dimensions}$, où l'indice "$dimensions$" regroupe toutes les dimensions du système. Dans notre système présenté à la Figure IV.21, les trois dimensions sont $X, Y\ et\ T$ et l'objet correspondant sera donc selon ce postulat désigné par O_{xyt}. L'objet communique selon trois directions : longitude, latitude et temps. Seul le cas de rang 1 sur chaque dimension est considéré ici. Chaque objet doit recevoir trois types d'entrée et générer trois types de sorties. Par exemple, l'objet O_{221} reçoit les informations en amont de O_{121} suivant la dimension X et de O_{211} dans la dimension Y ; il envoie les informations en aval à O_{321} suivant la dimension X ; à O_{231} suivant la dimension Y et à O_{222} dans la dimension T. Nous utilisons le système de la Figure IV.21 pour illustrer les techniques d'inférence a priori et a posteriori.

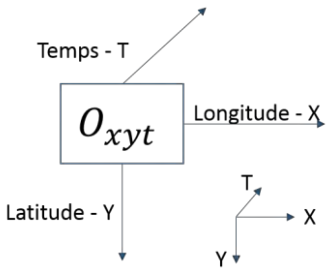


Figure IV.20 Objet à trois dimensions

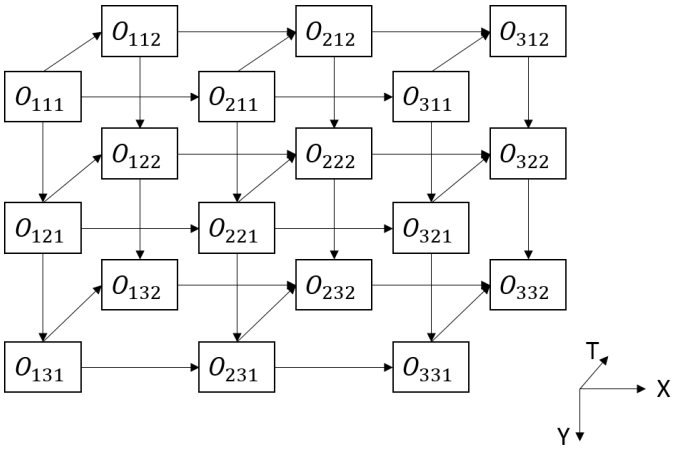


Figure IV.21 RBM à trois dimensions

Même si nous utilisons un système « spatio-temporel » pour illustrer sur notre cas d'étude les règles de propagation, ces règles fonctionnent quelle que soit la nature physique des dimensions prises en compte.

IV.5.1 Inférence a priori en 3 dimensions

De façon similaire au cas bidimensionnel, le problème principal d'inférence d'un système à trois dimensions concerne le contrôle de la circulation des informations entre objets. La différence se fait en termes de nombre de canaux de communication qui passent de 2 à 3. Pour l'inférence a priori, la circulation des informations suivant une direction se fait de l'amont vers l'aval. Il s'agit de déterminer les directions de circulation des informations transitant par les différents canaux de communication. La résolution du calcul des probabilités jointes repose toujours sur la construire de réseaux auxiliaires.

La communication entre objets doit suivre un certain ordre dans le RBM tridimensionnel. La forme générique du réseau est présentée sur la Figure IV.22. Le réseau doit respecter la matrice des relations donnée par l'équation (29).

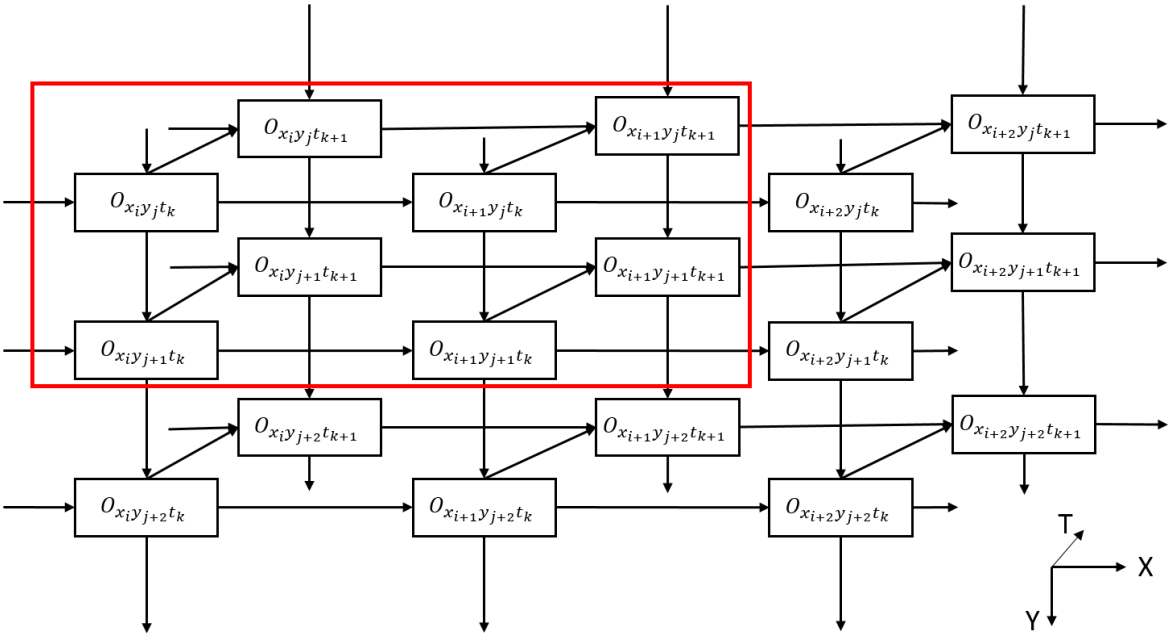


Figure IV.22 Forme générique d'un RBM tridimensionnel

La matrice des relations donnée par l'équation (29) est valide pour un RBM à trois dimensions de rang 1 sur chaque dimension et sans décalage entre dimensions. L'objet dépend seulement d'un objet en amont sur chaque dimension. Les mêmes hypothèses que dans le cas d'un système bidimensionnel (voir la section 2) sont prises.

$MR_{xyt} =$

	$O_{x_iy_jt_k}$	$O_{x_{i+1}y_jt_k}$	$O_{x_iy_{j+1}t_k}$	$O_{x_{i+1}y_{j+1}t_k}$	$O_{x_iy_jt_{k+1}}$	$O_{x_{i+1}y_jt_{k+1}}$	$O_{x_iy_{j+1}t_{k+1}}$	$O_{x_{i+1}y_{j+1}t_{k+1}}$
$O_{x_iy_jt_k}$	0	1	1	0	1	0	0	0
$O_{x_{i+1}y_jt_k}$	−1	0	0	1	0	1	0	0
$O_{x_iy_{j+1}t_k}$	−1	0	0	1	0	0	1	0
$O_{x_{i+1}y_{j+1}t_k}$	0	−1	−1	0	0	0	0	1
$O_{x_iy_jt_{k+1}}$	−1	0	0	0	0	1	1	0
$O_{x_{i+1}y_jt_{k+1}}$	0	−1	0	0	−1	0	0	1
$O_{x_iy_{j+1}t_{k+1}}$	0	0	−1	0	−1	0	0	1
$O_{x_{i+1}y_{j+1}t_{k+1}}$	0	0	0	−1	0	−1	−1	0

Equation 29

Le réseau sur la Figure IV.21 nécessite de propager tout d'abord les informations de l'objet initial O_{111}. Un ordre de priorité de propagation parmi les dimensions doit être défini. L'évolution dynamique du système considéré reposant sur la dimension temporelle et deux dimensions spatiales, la propagation sera d'abord réalisée suivant les dimensions spatiales avant de considérer l'évolution avec le temps. Les dimensions « X-Y » ont la même priorité en l'absence de contraintes particulières. Une fois la dimension à traiter sélectionnée, cet ordre devra être impérativement conservé pendant la propagation. Les règles à respecter dans le cas de propagation dans un RBM à 3 dimensions sont rappelées ci-dessous.

- **Règle 1** : les directions de circulation des informations vont de l'amont vers l'aval.
- **Règle 2** : un objet doit recevoir toutes les informations pour mener à bien son calcul local.
- **Règle 3** : les propagations suivant les dimensions se font à la fin.
- **Règle 4** : on propage d'abord les informations sur les dimensions pour lesquelles on n'observe pas d'influence d'une variable sur elle-même entre 2 objets. L'ordre de traitement de ces dimensions est indifférent.
- **Règle 5** : les autres dimensions pour lesquelles on observe une influence d'une variable sur elle-même entre 2 objets (la dimension temporelle par exemple) ont le même niveau de priorité. Le choix de la dimension à traiter en premier est laissé à l'utilisateur.
- **Règle 6** : dès que l'ordre d'évolution est décidé, il ne peut pas changer une fois la propagation enclenchée.
- **Règle 7** : l'ordre d'évolution dépend des contraintes dans un système.

Les règles ci-dessus constituent le guide de propagation dans un RBM à 3 dimensions. Nous proposons un algorithme ci-dessous (voir Algorithme IV.3) relatif au système de la Figure IV.22, pour la propagation selon l'ordre $x \rightarrow y \rightarrow t$. Les informations sont propagées d'abord sur la dimension « X » et sur la dimension « Y » avant que la dimension temporelle « T » ne soit finalement prise en compte.

Propagation dans un réseau à 3 dimensions

Entrée : $O_{i,j,k}$: Objet

I, J, K : le nombre total des objets sur les dimensions « X », « Y » et « T » respectivement

Sortie : $P(N_{i,s}^{O_{i,j,k}})$ // probabilité marginale de sortie/interne qui est conservée dans la base de données $P(N_m^{O_{i,j,k}}, l)$

Début
Pour $t \leftarrow 1$ **jusqu'à** K **faire**
  Si $t = 1$ **alors**
    Pour $j \leftarrow 1$ **jusqu'à** J **faire**
      Si $j = 1$ **alors** // traiter les objets $O_{i,j,k}$ sur « X-Y » avec $j = k = 1$ en suivant l'ordre "$X \rightarrow Y$"
        Pour $i \leftarrow 1$**jusqu'à** I **faire** // traiter les objets à dimension « X » $O_{i,j,k}$ avec $j = k = 1$
          Si $i = 1$ **alors** // traiter l'objet initial O_{111}, il a toutes les informations
            Compiler objet $O_{i,j,k}$
            $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données,
            // comme il s'agit de la propagation initiale, l égale à 1
          Sinon // traiter O_{i11} où $1 < i \leq I$, chaque objet a besoin d'une entrée sur la dimension « X »
            $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i-1,j,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i-1,1,1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,1,1}$
            Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
            $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités

14 **FinSi**
15 **FinPour**
16 **Sinon** // traiter les objets $O_{i,j,k}$ sur « X-Y » avec $k = 1$ en suivant l'ordre "$X \rightarrow Y$"
17 **Pour** $i \leftarrow 1$**jusqu'à** I **faire** // traiter les objets sur la dimension « X » $O_{i,j,k}$ avec $k = 1, j$
18 **Si** $i = 1$ **alors** // traiter l'objet $O_{i,j,k}$ avec $i = k = 1$ besoin d'une entrée « Y »
19 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j-1,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i,j-1,1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,j,1}$
20 Compiler objet $O_{i,j,k}$
21 $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données,
22 **Sinon** // traiter O_{ij1} où $1 < i \leq I$, chaque objet a besoin de deux entrées sur les dimensions « X-Y »
23 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i-1,j,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i-1,1,1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,1,1}$
24 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j-1,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i,j-1,1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,j,1}$
25 Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
26 $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités
27 **FinSi**
28 **FinPour**
29 **FinPour** // la propagation sur « X-Y » à $k = 1$ est fini
30 **Sinon** // traitement des objets suivant k
31 **Pour** $j \leftarrow 1$ **jusqu'à** J **faire**
32 **Si** $j = 1$ **alors** // traiter les objets $O_{i,j,k}$ sur « X-Y » avec $j = 1$ en suivant l'ordre "$X \rightarrow Y$"
33 **Pour** $i \leftarrow 1$**jusqu'à** I **faire** // traiter les objets à dimension « X » $O_{i,j,k}$ avec $j = 1$
34 **Si** $i = 1$ **alors** // traiter l'objet $O_{1,1,k}$ besoin d'une entrée temporelle « T »
35 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j,k-1})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{1,1,k-1}$ à l'entrée de l'objet $O_{1,1,k}$
36 Compiler objet $O_{i,j,k}$
37 $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données,
38 **Sinon** // traiter O_{i1k} où $1 < i \leq I$, chaque objet a besoin de deux entrées de « X-T »
39 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i-1,j,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i-1,1,k}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,1,k}$
40 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j,k-1})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{i,1,k-1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,1,k}$
41 Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
42 $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités
43 **FinSi**
44 **FinPour**
45 **Sinon** // traiter les objets $O_{i,j,k}$ sur « X-Y » avec $k > 1$ en suivant l'ordre "$X \rightarrow Y$"
46 **Pour** $i \leftarrow 1$**jusqu'à** I **faire** // traiter les objets sur la dimension « X » $O_{i,j,k}$
47 **Si** $i = 1$ **alors** // traiter l'objet $O_{i,j,k}$ avec $i = 1$, il a besoin de deux entrées « Y-T »
48 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j-1,k})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{1,j-1,k}$ à l'entrée de l'objet $O_{1,j,k}$
49 $P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j,k-1})$ // affecter la sortie de l'objet $O_{1,j,k-1}$ à l'entrée de l'objet $O_{1,j,k}$
50 Compiler objet $O_{i,j,k}$
51 $P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$ // stocker les probabilités dans la base de données,

52	**Sinon**	// traiter O_{ijk} chaque objet a besoin de trois entrées sur les dimensions « X-Y-T »
53	$P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i-1,j,k})$	// affecter la sortie de l'objet $O_{i-1,j,k}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,j,k}$
54	$P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j-1,k})$	// affecter la sortie de l'objet $O_{i,j-1,k}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,j,k}$
55	$P(N_e^{i,j,k}) \leftarrow P(N_s^{i,j,k-1})$	// affecter la sortie de l'objet $O_{i,j,k-1}$ à l'entrée de l'objet $O_{i,j,k}$
56	Compiler l'objet $O_{i,j,k}$	
57	$P(N_m^{i,j,k}, 1) \leftarrow P(N_{i,s}^{i,j,k})$	// stocker les probabilités
58	**FinSi**	
59	**FinPour**	
60	**FinPour**	
61	**FinSi**	
62	**FinPour**	
63	**Fin**	

Algorithme IV.3 Propagation à trois dimensions

L'Algorithme IV.3 présente la propagation a priori dans un RBM en 3 dimensions. Les informations se propagent en premier dans la dimension « X » puis dans la dimension « Y » et enfin dans la dimension « T ». L'ordre d'évolution dans cet algorithme respecte les règles énoncées plus haut. Même si cet algorithme correspond à la Figure IV.22, il fonctionne sur toute autre situation et peut donc être considéré comme un algorithme générique. Par exemple, pour un système a trois dimensions « X-Y-Z ». Si deux évolutions dimensionnelles sur « X » et « Y » sont observées au niveau du système, l'ordre d'évolution est modifié par « $Z \rightarrow X \rightarrow Y$ » et les dimensions correspondantes sont remplacées dans l'Algorithme IV.3.

Pour conclure, les principes d'inférence a priori en 2 et 3 dimensions sont très similaires car les directions de circulation des informations sont identiques (de l'objet amont vers l'objet aval). Les points essentiels de ce cas particulier concernent l'identification du nombre de canaux de communication et l'ordre de traitement des différentes dimensions.

IV.5.2 Inférence a posteriori en 3 dimensions

L'inférence a posteriori est un atout du RB parce qu'elle permet la mise à jour d'informations dans le réseau étant données les observations. Le RBM, nous l'avons vu précédemment se prête fort heureusement à ce genre de traitement. Nous déployons dans cette partie les techniques d'inférence a posteriori pour des systèmes à trois dimensions.

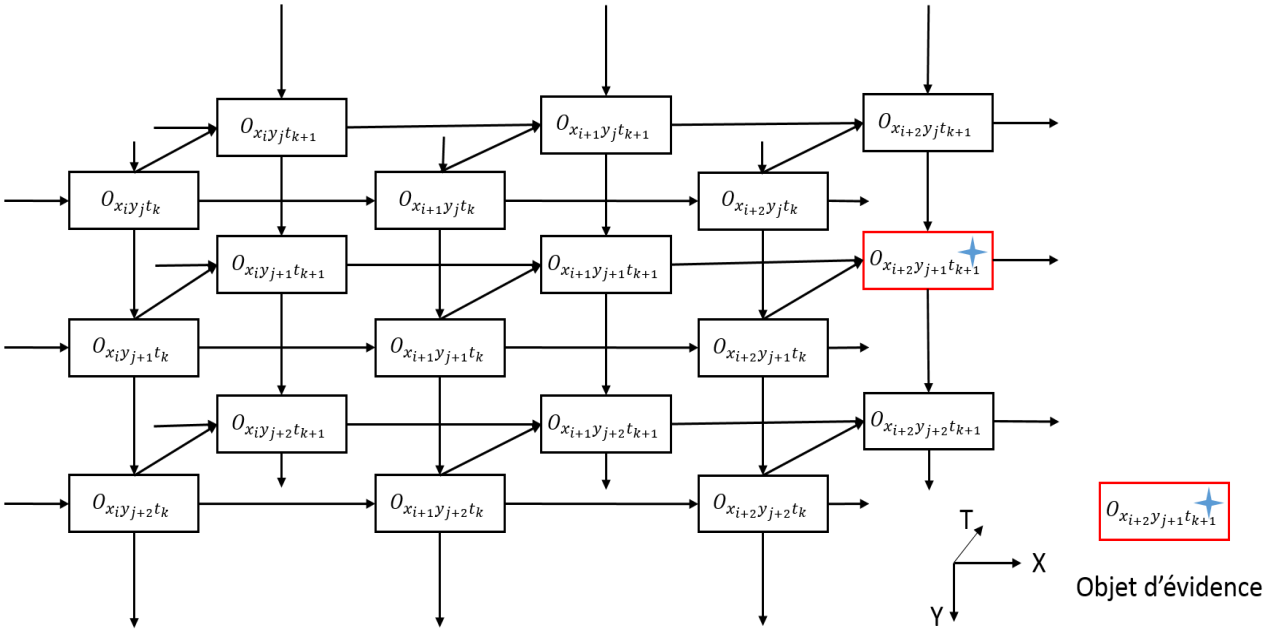


Figure IV.23 RBM à trois dimensions avec une évidence

Considérons un réseau comme celui de la Figure IV.23 en trois dimensions « X-Y-T » pour lequel une observation est faite au niveau de l'objet $O_{x_{i+2} y_{j+1} t_{k+1}}$. Le verrou à lever concerne la propagation de cette information afin de mettre à jour les connaissances au niveau des autres objets. Comme pour la version bidimensionnelle du problème, il s'agit de contrôler les directions de circulation des informations. Les éléments qui diffèrent entre les cas à deux et trois dimensions sont le nombre de canaux de communication et l'ordre de traitement des dimensions. La propagation des informations en deux dimensions se fait suivant une ligne ou un axe, alors que celle en trois dimensions s'effectue sur selon un plan.

En fonction de la quantité d'informations reçue, quatre groupes peuvent être identifiés. Les 3 premiers groupes reçoivent des valeurs respectivement en sortie d'une, deux ou trois dimensions. Le quatrième groupe reçoit des valeurs respectivement en entrée d'une, deux ou trois dimensions.

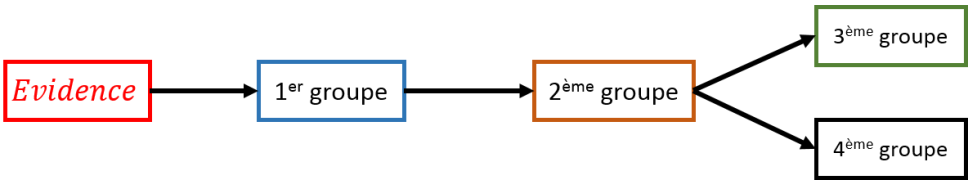


Figure IV.24 Ordre de l'inférence a posteriori

Pour éviter les calculs répétés dans les objets qui reçoivent au moins deux entrées, nous ordonnons les objets. L'ordre des actions à réaliser pour les calculs d'inférence a posteriori est présenté sur la Figure IV.24. Les trois premiers groupes reçoivent des informations respectivement sur une, deux ou trois de leurs sorties. Le quatrième groupe est mis à jour par une ou plusieurs de ses trois entrées à partir desquelles les actions de propagation normales sont réalisées.

Le premier groupe communique tout d'abord via son canal de communication et un calcul local est réalisé. Dans la continuité, les objets de deuxième groupe reçoivent les informations leur permettant à leur tour de mener à bien un calcul local. Notons que les objets des 2 premiers groupes sont assimilables aux cas A et B précédemment introduits dans le traitement du problème à deux dimensions de la Figure IV.14. Une fois les calculs réalisés au sein des groupes 1 et 2, les objets des 3ème et 4ème groupes peuvent être traités de façon indépendante et simultanée. Le troisième groupe qui

correspond à la diagonalisation sur trois dimensions est assimilable au cas E en deux dimensions de la Figure IV.14. Le quatrième groupe est similaire à l'ensemble des cas C, D et F en deux dimensions de Figure IV.14.

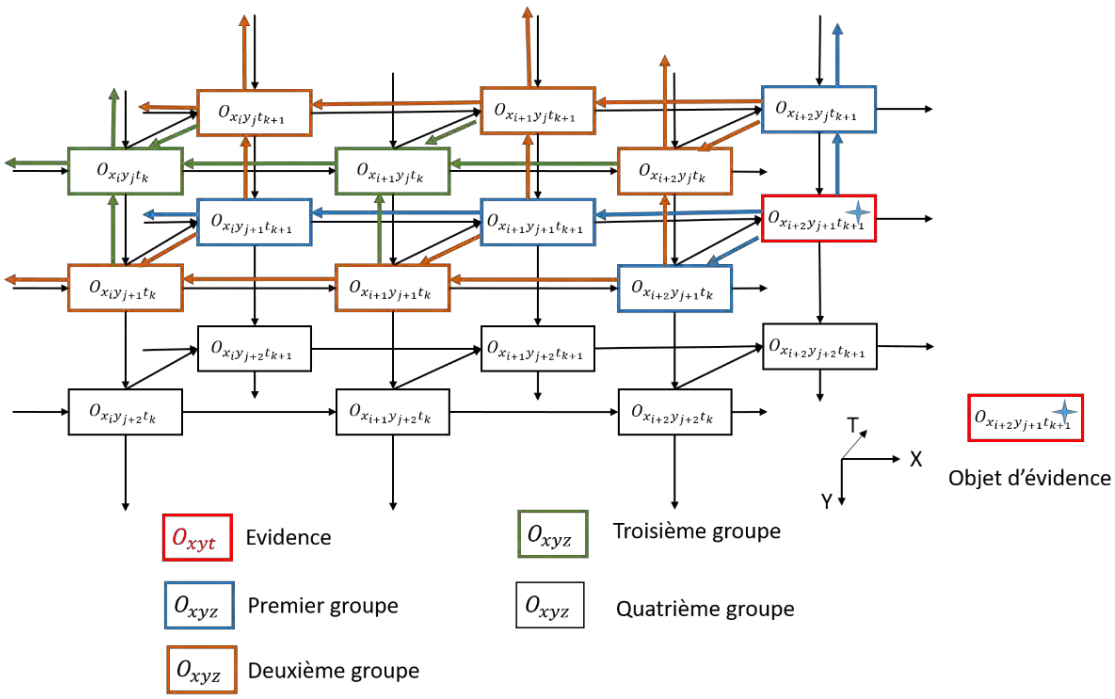


Figure IV.25 Inférence a posteriori 1

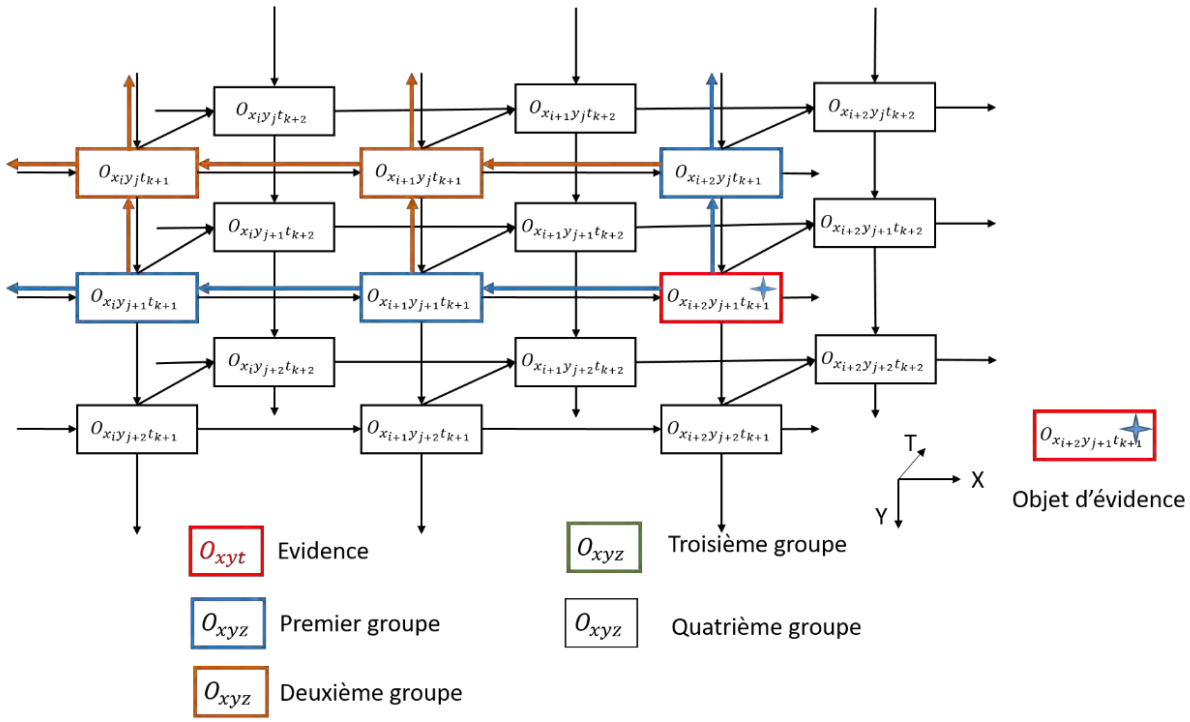


Figure IV.26 Inférence a posteriori 2

Les Figure IV.25 et Figure IV.26 résument la répartition des objets en quatre groupes et les directions de circulation des informations dans un RBM en trois dimensions. Pour plus de lisibilité nous avons établi deux réseaux séparés selon le plan passant par l'objet d'évidence à l'instant de celle-ci.

Pendant la propagation dans les deuxièmes et troisièmes groupes, l'utilisation d'un réseau auxiliaire dont nous avons précédemment introduit le principe s'avère nécessaire. Pour le deuxième groupe, le réseau auxiliaire est le même que dans la version du problème bidimensionnel (voir Figure IV.10). Trois variables issues de la combinaison de certaines entrées sont caractérisées suivant deux dimensions différentes. Pour le troisième groupe, le réseau auxiliaire conduit à l'identification de quatre variables obtenues par concaténation cartésienne de certaines entrées selon trois dimensions différentes.

L'algorithme d'inférence d'un RBM à 3 dimensions est présenté ci-dessous :

Inférence RBM en trois dimensions

Entrée : RBM

$E_{i,s}^{ei,ej,ek}$: évidence [4] // l'évidence est soit sur une variable interne soit une sortie dans un objet $O_{i,j,k}$

Sortie : $P^e(N_{i,s}^{i,j,k}, l)$ // probabilité marginale pour les variables de sortie/interne conservée dans la base de données

Début

Lire l'évidence $E_{i,s}^{ei,ej,ek} \leftarrow \omega_l^{N_{i,s}^{ei,ej,ek}}$ // ω_l est la modalité de $N_{i,s}^{e,i,j,k}$ observée

Compiler l'objet d'évidence $O_{ei,ej,ek}$

Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$

Selon i & j & k // traiter les objets du premier groupe *CAS 1*, propager sur une ligne/axe (Figure IV.27)

  Cas 1 $i = ei$ & $j = ej$ & $1 \leq k < ek$ // *Cas 1-1* propagation sur l'axe « T »

    Pour $k \leftarrow ek - 1$ jusqu'à $k = 1$ faire

    Récupérer l'entrée de l'objet $O_{i,j,k+1}$ dans la dimension « T » et l'affecter sur la sortie de l'objet $O_{i,j,k}$

    Compiler l'objet $O_{i,j,k}$

    Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$

    FinPour

  Cas 2 $i = ei$ & $1 \leq j < ej$ & $k = ek$ // *Cas 1-2* propagation sur l'axe « Y »

    Pour $j \leftarrow ej - 1$ jusqu'à $j = 1$ faire

    Récupérer l'entrée de l'objet $O_{i,j+1,k}$ dans la dimension « Y » et l'affecter sur la sortie de l'objet $O_{i,j,k}$

    Compiler l'objet $O_{i,j,k}$

    Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$

    FinPour

  Autrement $1 \leq i < ei$ & $j = ej$ & $k = ek$ // *Cas 1-3* propagation sur l'axe « X »

    Pour $i \leftarrow ei - 1$ jusqu'à $i = 1$ faire

    Récupérer l'entrée de l'objet $O_{i+1,j,k}$ dans la dimension « X » et l'affecter sur la sortie de l'objet $O_{i,j,k}$

    Compiler l'objet $O_{i,j,k}$

    Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$

[4] $E_{i,s}^{ei,ej,ek}$: L'indice i en haut désigne l'objet alors que l'indice i en bas désigne une variable interne

```
23          FinPour
24      FinCas                  // finir la propagation du premier groupe
25  Selon i & j & k             // traiter les objets de deuxième groupe CAS 2, propager sur un plan (Figure IV.27)
26      Cas 1 1 ≤ i < ei & j = ej & 1 ≤ k < ek          // Cas 2-1 sur le plan « X-T »
27          Pour i ← ei − 1 jusqu'à i = 1 faire
28              Pour k ← ek − 1 jusqu'à k = 1 faire
29              SemiCal(i,k,l)                          // faire appel à la fonction SemiCal(j,k,l)
30              FinPour
31          FinPour
32      Cas 2 i = ei & 1 ≤ j < ej & 1 ≤ k < ek          // Cas 2-2 sur le plan « Y-T »
33          Pour j ← ej − 1 jusqu'à j = 1 faire
34              Pour k ← ek − 1 jusqu'à k = 1 faire
35              SemiCal(j,k,l)                          // faire appel à la fonction SemiCal(j,k,l)
36              FinPour
37          FinPour
38      Autrement 1 ≤ i < ei & 1 ≤ j < ej & k = ek      // Cas 2-3 sur le plan « X-Y »
39          Pour i ← ei − 1 jusqu'à i = 1 faire
40              Pour j ← ej − 1 jusqu'à j = 1 faire
41              SemiCal(i,j,l)                          // faire appel à la fonction SemiCal(j,k,l)
42              FinPour
43          FinPour
44      FinCas
45  Selon i & j & k     // traiter les objets de troisième groupe CAS 3 et quatrième groupe CAS 4 (Figure IV.28)
46      Cas 1 1 ≤ i < ei & 1 ≤ j < ej & 1 ≤ k < ek  // CAS 3
                        // Cas 3 traiter le troisième groupe qui reçoit trois types de sorties « X, Y et T »
47          Pour i ← ei jusqu'à 1 faire
48              Pour j ← ej jusqu'à 1 faire
49                  Pour k ← ek jusqu'à 1 faire
50                  SemiCal*(i,j,k,l)                   // faire appel à la fonction
51                  FinPour
52              FinPour
53          FinPour
54      Cas 2 ei + 1 ≤ i ≤ I & 1 ≤ j ≤ ej & 1 ≤ k ≤ ek  // Cas 4-1 traiter les objets sur « X-Y-T »
55          Pour i ← ei + 1 jusqu'à I faire
56              Pour j ← 1 jusqu'à ej faire
57                  Pour k ← 1jusqu'à ek faire
58                  Récupérer les sorties des objets O_{i−1,j,k}, O_{i,j−1,k} et O_{i,j,k−1} et
                     l'affecter sur les entrées de l'objet O_{i,j,k}
59                  Compiler l'objet O_{i,j,k}
60                  Stocker les probabilités dans la base de données P(N_m^{i,j,k}, l)
61                  FinPour
```

```
62              FinPour
63          FinPour
64      Cas 3 1 ≤ i ≤ ei & 1 ≤ j ≤ ej & ek + 1 ≤ k ≤ K    // Cas 4-2 traiter les objets sur « X-Y-T »
65          Pour i ← 1 jusqu'à ei faire
66              Pour j ← 1 jusqu'à ej faire
67                  Pour k ← ek + 1 jusqu'à ek faire
68                  Récupérer les sorties des objets O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k} et O_{i,j,k-1} et
                     l'affecter sur les entrées de l'objet O_{i,j,k}
69                  Compiler l'objet O_{i,j,k}
70                  Stocker les probabilités dans la base de données P(N_m^{i,j,k}, l)
71                  FinPour
72              FinPour
73          FinPour
74      Autrement faire 1 ≤ i ≤ ei & ej + 1 ≤ j ≤ J & 1 ≤ k ≤ ek   // Cas 4-3 traiter les objets sur « X-Y-T »
75          Pour i ← 1 jusqu'à ei faire
76              Pour j ← ej + 1 jusqu'à J faire
77                  Pour k ← 1 jusqu'à ek faire
78                  Récupérer les sorties des objets O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k} et O_{i,j,k-1} et
                     l'affecter sur les entrées de l'objet O_{i,j,k}
79                  Compiler l'objet O_{i,j,k}
80                  Stocker les probabilités dans la base de données P(N_m^{i,j,k}, l)
81                  FinPour
82              FinPour
83          FinPour
84      FinCas
85  Selon i & j & k          // traiter les objets du quatrième groupe en CAS 5 (Figure IV.29)
86      Cas 1 ei + 1 ≤ i ≤ I & ej + 1 ≤ j ≤ J & 1 ≤ k ≤ ek                    // Cas 5-1
87          Pour i ← ei + 1 jusqu'à I faire
88              Pour j ← ej + 1 jusqu'à J faire
89                  Pour k ← 1 jusqu'à ek − 1 faire
90                  Récupérer les sorties des objets O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k} et O_{i,j,k-1} et
                     l'affecter sur les entrées de l'objet O_{i,j,k}
91                  Compiler l'objet O_{i,j,k}
92                  Stocker les probabilités dans la base de données P(N_m^{i,j,k}, l)
93                  FinPour
94              FinPour
95          FinPour
96      Cas 2 ei + 1 ≤ i ≤ I & 1 ≤ j ≤ ej & ek + 1 ≤ k ≤ K                    // Cas 5-2
97          Pour i ← ei + 1 jusqu'à I faire
98              Pour j ← 1 jusqu'à ej − 1 faire
```

99 **Pour** $k \leftarrow ek + 1$ jusqu'à K faire
100 Récupérer les sorties des objets $O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k}$ et $O_{i,j,k-1}$ et l'affecter sur les entrées de l'objet $O_{i,j,k}$
101 Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
102 Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$
103 **FinPour**
104 **FinPour**
105 **FinPour**
106 **Autrement faire** $1 \leq i \leq ej$ & $ej + 1 \leq j \leq J$ & $ek + 1 \leq k \leq K$ // *Cas 5-3*
107 **Pour** $i \leftarrow 1$ jusqu'à $ei - 1$ faire
108 **Pour** $j \leftarrow ej + 1$ jusqu'à J faire
109 **Pour** $k \leftarrow ek + 1$ jusqu'à K faire
110 Récupérer les sorties des objets $O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k}$ et $O_{i,j,k-1}$ et l'affecter sur les entrées de l'objet $O_{i,j,k}$
111 Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
112 Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$
113 **FinPour**
114 **FinPour**
115 **FinPour**
116 **FinCas**
117 **Pour** $i \leftarrow ej + 1$ jusqu'à J faire // traiter les objets du quatrième groupe en *CAS 6* (Figure IV.29)
118 **Pour** $j \leftarrow ej + 1$ jusqu'à J faire
119 **Pour** $k \leftarrow ek + 1$ jusqu'à K faire
120 Récupérer les sorties des objets $O_{i-1,j,k}, O_{i,j-1,k}$ et $O_{i,j,k-1}$ et l'affecter sur les entrées de l'objet $O_{i,j,k}$
121 Compiler l'objet $O_{i,j,k}$
122 Stocker les probabilités dans la base de données $P(N_m^{i,j,k}, l)$
123 **FinPour**
124 **FinPour**
125 **FinPour**
126 **Fin**

Algorithme IV.4 Inférence a posteriori en trois dimensions

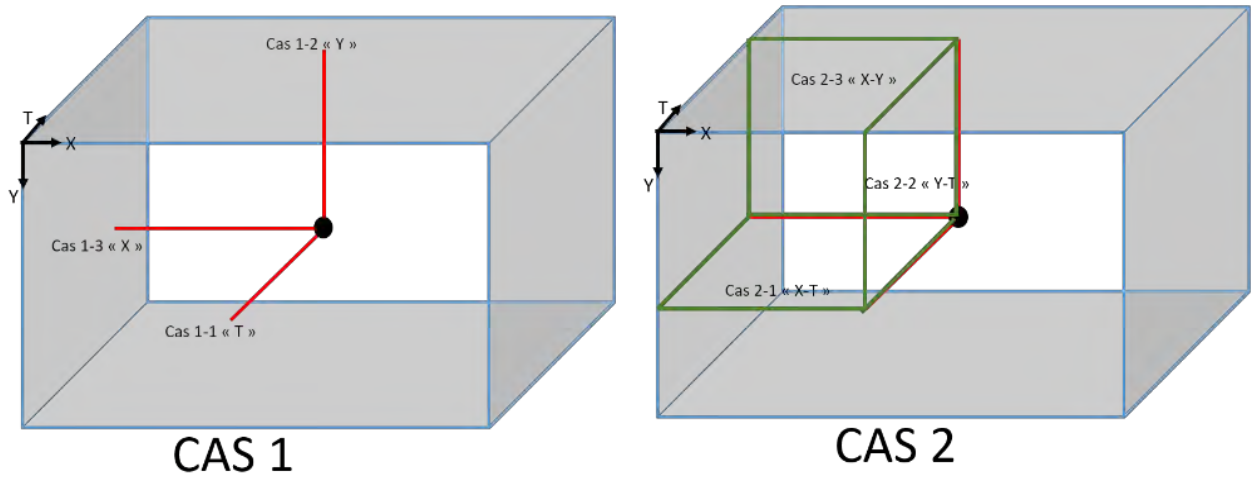


Figure IV.27 Inférence – Cas 1 et Cas 2

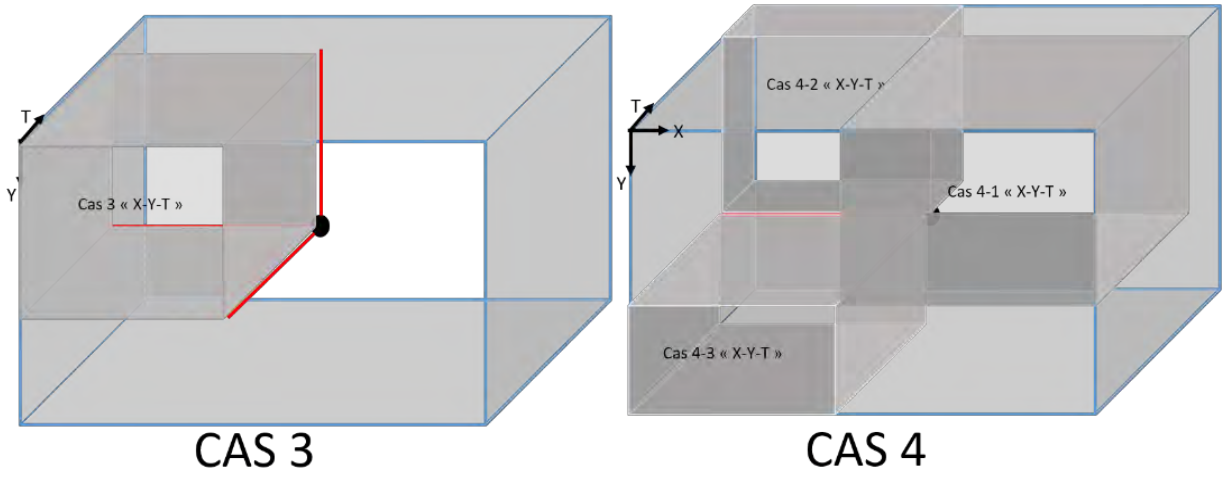


Figure IV.28 Inférence – Cas 3 et Cas 4

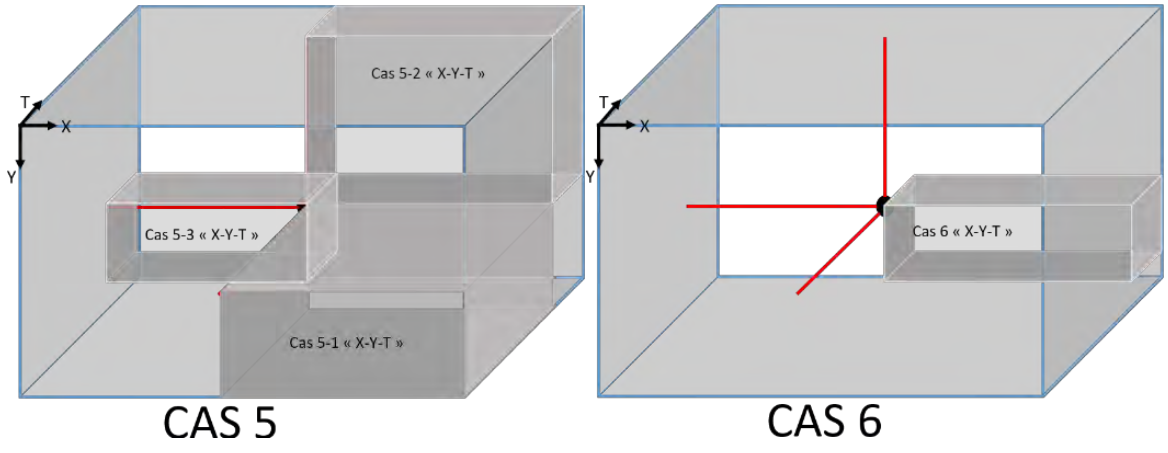


Figure IV.29 Inférence – Cas 5 et Cas 6

Les Figure IV.27 à Figure IV.29 illustrent les six cas différents de l'algorithme correspondant au traitement des quatre groupes d'objets. Pour les cas « CAS 2 » et « CAS 3 » correspondant aux Figure IV.27 et Figure IV.28, il faut réaliser un semi calcul via un réseau auxiliaire dont la construction est similaire au cas du problème à deux dimensions auquel se rajoute une troisième sortie rattachée au « Cas 3 » (voir Figure IV.10). La fonction $Semicalcul^*(i,j,k,l)$ au linge 50 du « CAS 3 » de la Figure IV.28 est la fonction $Semicalcul(j,k,l)$ à laquelle se rajoute la troisième entrée pour le résultat

cartésien de la Fonction IV.4. Si les objets ont un indice (i ou k ou j) à 1, ils doivent être considérés sur la dimension concernée comme des objets amont et les paramètres correspondants sont des paramètres initiaux.

En synthèse on peut dire que les algorithmes d'inférence a posteriori en deux/trois dimensions sont similaires (Algorithme IV.2 et Algorithme IV.4). En trois dimensions, le réseau devient un espace en 3D pendant la propagation a priori et a posteriori. Le nombre de canaux de communication est de trois. La méthode de propagation proposée par les Algorithme IV.3 et Algorithme IV.4 fonctionne pour tout type de réseau tridimensionnel.

IV.6 Généralisation à n dimensions

Pour un RBM de n dimensions, on suppose que chaque objet (mis à part les objets initiaux) doit recevoir n groupes d'entrées. Ces entrées viennent de n objets en amont dans n dimensions différentes. Les informations sont transmises à n objets en aval suivant n dimensions différentes. On considère qu'il n'y a pas de décalage entre dimensions et que chaque dimension est de rang 1. On qualifiera ce cas de RBM standard. Les propositions de propagation a priori et a posteriori sont présentées pour un RBM standard.

Un objet est représenté par O_{D^n} avec $D^n = \{d^1 d^2 d^3 \cdots d^n\}$, où n est le nombre de dimensions dans le RBM et $d^{\#}$ est une dimension du réseau. Sa matrice de relation est une matrice de dimension $2^n * 2^n$. La valeur « 1 » ou un « -1 » dans la matrice, traduit la présence d'un canal de communication entre deux objets. Il y a $A^{d^{\#}}$ objets dans une dimension $d^{\#}$. La position de l'objet sur une dimension est définie par $a_{\cdot}^{d^{\#}}$ un indice dimensionnel tel que $1 \leq a_{\cdot}^{d^{\#}} \leq A^{d^{\#}}$. Ainsi, par exemple, $O_{a_3^{d^1} a_5^{d^2} a_2^{d^3} a_7^{d^4}}$ est un objet dans un RBM de quatre dimensions ; il se situe à la 3ème position sur la dimension d^1, à la 5ème position sur la dimension d^2, à la 2ème position sur la dimension d^3 et à la 7ème position sur la dimension d^4.

A la suite nous présentons la méthode de propagation d'informations a priori dans un RBM à n dimensions puis montrons comment propager une évidence dans ce type de réseau.

Propagation des informations a priori

1 **Début**
2 **Identifier** l'ordre de propagation sur les dimensions.
3 Pour la première dimension à propager, tous les objets (sauf l'objet initial) :
- reçoivent un groupe d'entrées de cette dimension en amont
- réalisent un calcul local
- communiquent un groupe de sorties de cette dimension à l'objet en aval.

4 Pour la $n^{ème}$ dimension à propager, tous les objets :
- reçoivent n groupes d'entrées de cette dimension ainsi que des autres dimensions pour lesquels la propagation en amont est terminée
- réalisent un calcul local
- communiquent 1,2 jusqu'à n groupes de sorties de cette dimension à l'objet en aval selon la situation de l'objet.

5 **Fin**

Algorithme IV.5 Propagation a priori dans un RBM standard

L'ordre de propagation est défini selon le réseau et le problème traité comme cela a été présenté dans la partie précédente. Par exemple, dans un RBM standard de n dimensions ne mettant pas en avant de priorité particulière, le traitement des dimensions peut se faire dans l'ordre croissant $d^1 \rightarrow d^2 \rightarrow d^3 \cdots \rightarrow d^n$. Une fois l'ordre arrêté, les propagations a priori et a posteriori doivent le respecter.

Une inférence a posteriori est réalisée quand une observation/évidence est introduite dans un objet. L'idée principale de propagation est la même que dans les cas de deux ou trois dimensions sauf qu'ici il s'agira de réaliser n propagations en contre sens pour les objets ayant un indice inférieur à celui de l'objet pour lequel une évidence a été observée. Le calcul en parallèle reste possible dans un RBM standard mais dépend de la dimension considérée. Les détails de propagation d'une évidence sont présentés dans l'Algorithme IV.6.

Propagation d'une évidence

Début
Faire le calcul local dans l'objet d'évidence $O_{D^{e,n}}$.
Propager sur une dimension jusqu'à n-1 dimensions // *Groupe 1*
  Propager sur une dimension // *CAS 1*
  Fixer n-1 dimensions d'évidence //pour la propagation à la dimension $d^{\#}$, on fixe $a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^n}$ sauf $a_e^{d^{\#}}$
  Pour $a_e^{d^{\#}}$ jusqu'à $a_1^{d^{\#}}$
    Envoyer un groupe d'entrées de l'objet $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^n}}$ au groupe
      de sorties de l'objet $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^n}}$
    Faire le calcul local dans l'objet $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^n}}$
    Répéter Etapes 4-8 sur toutes les dimensions //changer une dimension et fixer les autres n-1 dimensions
  Propager sur deux dimensions // *CAS 2*
  Fixer n-2 dimensions //si nous propageons entre dimensions $d^{\#}$ et $d^{\#+1}$, nous fixons $a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^n}$ sauf $a_e^{d^{\#}}$ et $a_e^{d^{\#+1}}$
  Pour $a_e^{d^{\#}} \& a_e^{d^{\#+1}}$ jusqu'à $a_1^{d^{\#}} \& a_1^{d^{\#+1}}$
    Envoyer le regroupement d'entrées des objets $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^n}}$ *et* $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^{\#+1}} \cdots a_e^{d^n}}$
      au groupe de sorties de l'objet $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^{\#}} a_{e-1}^{d^{\#+1}} \cdots a_e^{d^n}}$
    Faire le calcul local dans l'objet $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^{\#}} a_{e-1}^{d^{\#+1}} \cdots a_e^{d^n}}$
    Répéter Etapes 10-14 sur toutes les deux dimensions
……
  Propager sur n-1 dimensions
  Fixer 1 dimension // *CAS n-1* avec n est le nombre de dimensions dans le RBM
  Pour $a_e^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^{\#+n-1}}$ jusqu'à $a_1^{d^{\#}} \cdots a_1^{d^{\#+n-1}}$
    Envoyer le regroupement d'entrées des objets $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^{\#}} \cdots a_e^{d^n}} \cdots O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^{\#+n-1}} a_e^{d^n}}$

au groupe de sortie de l'objet $O_{a_{e-1}^{d^1} a_{e-1}^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^\#} a_{e-1}^{d^{\#+1}} \cdots a_e^{d^n}}$

20 **Faire** le calcul local dans l'objet $O_{a_{e-1}^{d^1} a_{e-1}^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^\#} a_{e-1}^{d^{\#+1}} \cdots a_e^{d^n}}$

21 **Répéter** 16-20 sur toutes les n-1 dimensions

22 **Propager** sur n dimensions *// Groupe 2*

23 **Pour** $a_e^{d^1} \cdots a_e^{d^n}$ jusqu'à $a_1^{d^1} \cdots a_1^{d^n}$

24 **Envoyer** le regroupement d'entrées de tous les objets $O_{a_e^{d^1} a_e^{d^2} \cdots a_e^{d^n}}$

au groupe de sorties de l'objet $O_{a_{e-1}^{d^1} a_{e-1}^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^n}}$

25 **Faire** le calcul local dans l'objet $O_{a_{e-1}^{d^1} a_{e-1}^{d^2} \cdots a_{e-1}^{d^n}}$

26 **Répéter** Etapes 22-24 sur toutes les n dimensions

27 **Propager** normalement dans les autres objets sur n dimensions *// Groupe 3 et 4*

28 **Fin**

Algorithme IV.6 Propagation a posteriori dans un RBM standard

Jusqu'à présent, nous avons proposé les algorithmes de propagation aux cas de deux et trois dimensions pour terminer par une généralisation pour un RBM dit standard. Pour considérer le cas des RBM non standards, c'est à dire présentant un, ou plusieurs rangs supérieur à 1 et/ou un ou plusieurs décalages, il faut changer la structure de classe en utilisant les méthodes proposées dans la partie « IV.4 Inférence de rang supérieur à 1 » pour avoir un RBM sous forme standard.

Dans la section suivante nous considérons le cas d'inférence dans des RBM hiérarchiques qualifiés aussi de RBM multiéchelles.

IV.7 Inférence dans les RBM multiéchelles

Notre objectif dans cette section est de considérer les systèmes construits autour des objets de manière hiérarchique comme le montre la Figure IV.30 (rappel de la Figure II.15). L'objectif principal visé en matière d'inférence est toujours la possibilité de calcul local sur les objets puis la transmission des informations entre objets.

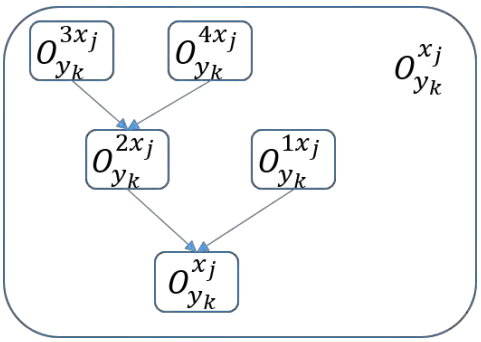


Figure IV.30 Objet hiérarchique

Considérons la situation suivante :

- Le système étudié est représenté par un RBM de deux dimensions « X-Y » comme la Figure IV.31 (rappel de la Figure IV.6).

- L'objet $O_{y_k}^{x_j}$ a quatre composants, et chaque composant est également un objet. La structure de relation est donnée par la Figure IV.30. L'objet $O_{y_k}^{x_j}$ est formé par $O_{y_k}^{1x_j}, O_{y_k}^{2x_j}, O_{y_k}^{3x_j}$ et $O_{y_k}^{4x_j}$.
- Les objets élémentaires internes ne communiquent pas avec l'extérieur.

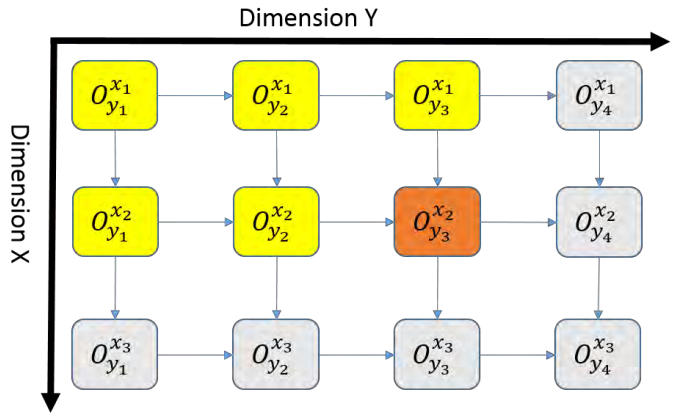


Figure IV.31 RBM avec 3 objets sur la dimension « X » et 4 objets sur la dimension « Y »

L'inférence dans ce type de RBM comporte trois étapes principales :

1. Réaliser le calcul local dans l'objet élémentaire où il y a évidence
2. Circuler les informations entre les objets élémentaires de même niveau
3. Remonter successivement les informations en partant du niveau élémentaire jusqu'au niveau global en utilisant les algorithmes présentés dans les algorithmes Algorithme IV.1 et Algorithme IV.2

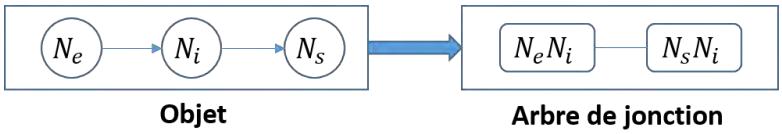


Figure IV.32 Objet simplifié et son Arbre de jonction

Le calcul local au niveau de l'objet d'évidence ayant été réalisé, il s'agit alors de traiter le problème de circulation des informations dans l'objet $O_{y_k}^{x_j}$. La construction d'un objet encapsule la structure d'un réseau bayesien : les entrées n'ont pas des parents et les sorties n'ont pas d'enfants dans l'objet. Toutes les communications doivent passer par les canaux de communication. Un objet peut être simplifié comme un réseau bayesien de trois variables en chaîne comme le montre la Figure IV.32 et son arbre de jonction se présente comme dans la partie droite de la Figure IV.32. C'est un arbre avec deux cliques.

L'arbre de jonction sur le déroulement de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ est présenté en la Figure IV.33. L'arbre du modèle hiérarchique est un arbre dont les branches et les feuilles sont les arbres de jonction des niveaux ; c'est-à-dire qu'il respecte l'algorithme d'inférence classique du réseau bayesien. Si une évidence est introduite au niveau de l'objet $O_{y_k}^{2x_j}$, un calcul local est réalisé et les informations qui en découlent sont transmises aux entrées des objets $O_{y_k}^{3x_j}$ et $O_{y_k}^{4x_j}$ et aux sorties de l'objet $O_{y_k}^{x_j}$. Un calcul local est alors réalisé au sein de cet objet et les informations obtenues sont communiquées aux entrées de l'objet$O_{y_k}^{1x_j}$. A la fin du processus de communication interne à l'objet $O_{y_k}^{x_j}$, les informations sont communiquées aux autres objets $O_{y_k}^{x_j}$ (comme $O_{y_k}^{x_{j-1}}$ ou $O_{y_{k+1}}^{x_j}$) et donc on peut appliquer les algorithmes précédents à savoir Algorithme

IV.2 et Algorithme IV.1. L'ordre de calcul est le même que l'ordre de propagation dans un arbre de jonction, tous les calculs respectent la propriété de calcul local du RBM.

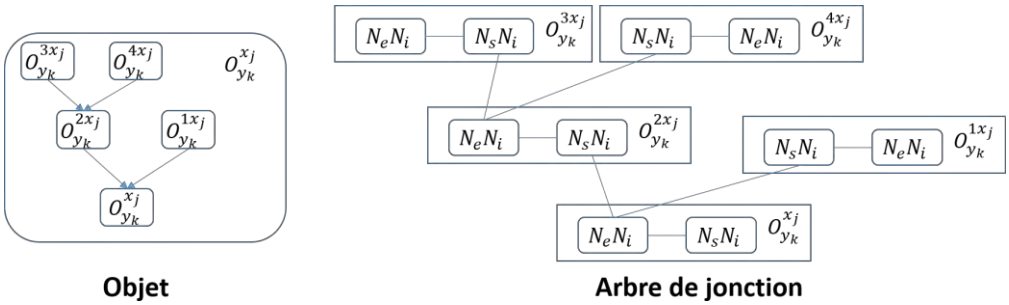


Figure IV.33 Arbre de jonction relatif à l'objet $O_{y_k}^{x_j}$

Le principe de propagation dans l'objet d'évidence $O_{y_k}^{2x_j}$ contenue dans l'objet $O_{y_k}^{x_j}$ se présente comme dans l'encadré ci-dessous :

Propagation interne dans un objet hiérarchique

Donnée : Probabilité marginale $P(N_m^{pj,k}, l)$

1 **Début**

2 $P(N_m^{j',k'}) \leftarrow P(N_m^{j,k}, l)$ // $N_m^{O_{y_k}^{x_j'}}$ est soit une entrée soit une sortie qui dépend de la position de l'objet $O_{y_k}^{x_j'}$ // (cas A à E)

3 Compiler l'objet $O_{y_k}^{x_j'}$

4 **Pour** $O_{y_k}^{px_j'} \leftarrow O_{y_k}^{x_j'}$ **jusqu'aux objets feuilles**

// commencer par la racine objet, parce que seule la racine objet peut communiquer avec l'extérieur

5 $P(N_e^{PC(O_{y_k}^{px_j'})}) \leftarrow P(N_s^{pj',k'}, l)$

// récupérer la sortie de l'objet $O_{y_k}^{px_j'}$ et l'affecter à l'entrée de son parent objet $PC(O_{y_k}^{px_j'})$

6 Compiler l'objet $PC(O_{y_k}^{px_j'})$

7 $P(N_m^{PC(O_{y_k}^{px_j'})}, l) \leftarrow P(N_{e,i,s}^{PC(O_{y_k}^{px_j'})})$ // stocker la probabilité dans la base de données avec l'indice l

8 **FinPour**

9 **Fin**

Fonction IV.4 Propagation interne dans un objet hiérarchique

Propagation d'évidence dans un objet hiérarchique

Donnée : $\omega_l^{N_{i,s}^{e,pj,k}}$ // la modalité d'une évidence ω_l dans un objet $O_{ey_k}^{epx_j}$

1 **Début**

2	Lire l'évidence $E_{i,s}^{e,pj,k} \leftarrow \omega_l^{N_{i,s}^{e,pj,k}}$ // ω_l est la modalité de $N_{i,s}^{O_{ey_k}^{ex_j}}$ où il y a eu évidence
3	Compiler l'objet d'évidence $O_{ey_k}^{epx_j}$
4	$P(N_m^{pj,k}, l) \leftarrow P^e(N_{e,i,s}^{e,pj,k})$ // stocker la probabilité dans la base de données avec l'indice l
5	**Pour** $O_{y_k}^{px_j} \leftarrow$ PC($O_{ey_k}^{epx_j}$) **jusqu'aux objets feuilles**
6	$P(N_s^{PC(O_{y_k}^{px_j})}) \leftarrow P(N_e^{pj,k}, l)$ // récupérer les entrées de l'objet $O_{y_k}^{px_j}$ et // affecter ses entrées à la sortie de l'objet parent $O_{y_k}^{px_j}$
7	Compiler objet $PC(O_{y_k}^{px_j})$
8	$P(N_m^{PC(O_{y_k}^{px_j})}, l) \leftarrow P^e(N_{e,i,s}^{PC(O_{y_k}^{px_j})})$ // stocker la probabilité dans la base de données avec l'indice l
9	**FinPour**
10	**Pour** $O_{y_k}^{px_j} \leftarrow$ EC($O_{ey_k}^{epx_j}$) **jusqu'aux objets racines**
11	$P(N_e^{EC(O_{ey_k}^{px_j})}) \leftarrow P(N_s^{pj,k}, l)$ // récupérer les sortie de l'objet $O_{y_k}^{px_j}$ et affecter ses sorties // à l'entrée de l'objet enfant $O_{y_k}^{px_j}$
12	Compiler objet $EC(O_{y_k}^{px_j})$
13	$P(N_m^{EC(O_{y_k}^{px_j})}, l) \leftarrow P^e(N_{e,i,s}^{EC(O_{y_k}^{px_j})})$ // stocker la probabilité dans la base de données avec l'indice l
14	**FinPour**
15	**Pour** $O_{y_k}^{px_j} \leftarrow O_{y_k}^{x_j}$ **jusqu'aux objets feuilles** // commencer par la racine objet
16	$P(N_e^{PC(O_{y_k}^{px_j})}) \leftarrow P(N_s^{pj,k}, l)$ // récupérer la sortie de l'objet $O_{y_k}^{px_j}$ et // affecter ses sorties à l'entrée de l'objet enfant $O_{y_k}^{px_j}$
17	Compiler $PC(O_{y_k}^{px_j})$
18	$P(N_m^{PC(O_{y_k}^{px_j})}, l) \leftarrow P^e(N_{e,i,s}^{PC(O_{y_k}^{px_j})})$ // stocker la probabilité dans la base de données avec l'indice l
19	**FinPour**
20	**Fin**

Fonction IV.5 Propagation d'une évidence dans un objet hiérarchique

La propagation d'une évidence dans un objet hiérarchique peut se faire à partir de la Fonction IV.5 . La Fonction IV.4 peut être utilisée en l'absence d'évidence dans un objet hiérarchique.

Les Figure IV.34 et Figure IV.35 présentent les directions de circulations d'information au sein d'un objet hiérarchique avec ou sans évidence.

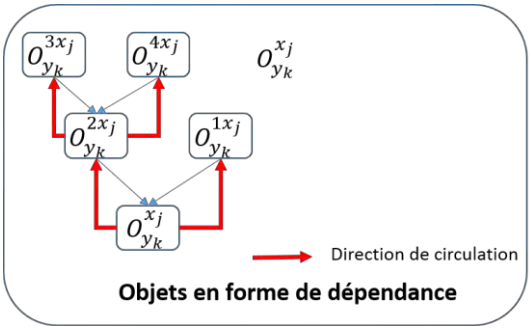


Figure IV.34 Direction de circulation d'information dans un objet hiérarchique sans évidence

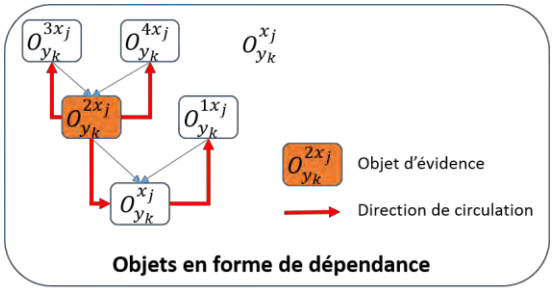


Figure IV.35 Direction de circulation d'information dans un objet hiérarchique avec une évidence

Les deux fonctions respectent le principe de calcul local dans un objet. Le contrôle de la circulation des informations dans un objet hiérarchique est similaire à celui d'un objet normal dans un RBM au niveau global. Un objet peut ainsi être décomposé en sous-ensembles sur lesquels des calculs indépendants peuvent être réalisés. Dans ce travail, nous avons toutefois considéré que les droits de communication sur les objets étaient limités aux objets non racines et que les objets intérieurs à un objet hiérarchique $O_{y_k}^{x_j}$ communiquaient uniquement entre eux. La levée de cette hypothèse est une perspective de continuation de ce travail.

IV.8 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé des algorithmes d'inférence adaptés au nouveau formalisme des réseaux bayesiens multidimensionnels considérés dans ce travail de thèse. Ces algorithmes intègrent bien les caractéristiques du paradigme « orienté objet » qui permettent de réduire les temps de calcul et augmentent la contrôlabilité durant les phases de calcul. L'introduction de la notion de « nœud virtuel » a permis d'établir des procédures de transformation permettant de passer de RBM très complexes à des réseaux indépendants beaucoup plus simples à traiter. Les cas de réseaux présentant plusieurs rangs dans une dimension et / ou ceux ayant un décalage entre dimensions ont également été traités. Pour ce faire nous avons introduit une méthode de transformation du réseau correspondant. Cette transformation permet l'utilisation sans autre modification des algorithmes établis sous hypothèses de rang 1 sans décalage. A l'inverse de la plupart des travaux de la littérature, les algorithmes établis sont indépendants de la nature des nœuds (discrets ou continus). Ces algorithmes fonctionnent sur des réseaux hybrides en adaptant les procédures à chaque type de nœuds après une éventuelle transformation. La procédure de contrôle de directions de circulations des informations est indépendante des calculs de bas niveau et les algorithmes établis sont généralisables à tout type de système. Enfin, le concept d'objets hiérarchiques introduit dans la dernière section de ce chapitre apporte des opportunités nouvelles d'extension des algorithmes au cas de réseaux de dimensions élevées au prix d'une complexification des objets par l'introduction de nœuds virtuels. En pratique un compromis entre cette complexification structurelle et la simplicité d'utilisation des algorithmes est à trouver.

Chapitre V

Application à la modélisation des risques de crues

Introduction

Dans un objectif de démonstration de faisabilité et de validation des concepts introduits dans les chapitres précédents, cette dernière partie du mémoire de thèse vise à déployer les éléments théoriques au cas d'étude d'un système réel correspondant à la modélisation d'un phénomène d'inondation via l'utilisation d'un Réseau Bayesien Multidimensionnel. Les principes de construction, l'instanciation et l'inférence seront détaillés étape par étape.

V.1 Contexte

De nombreux modèles ont été développés pour prévenir les inondations et leurs dommages potentiels. Ces systèmes sont destinés à (i) aider les managers à décider préventivement des meilleures stratégies pour faire face aux menaces de crues et (ii) informer en temps réel la protection civile pour minimiser les dommages sur les enjeux (vies humaines et biens matériels). La plupart du temps, les systèmes de prévision des inondations s'appuient sur des modèles déterministes de précipitation et de ruissellement. Ces modèles peuvent être simples et génériques ou au contraire très complexes ou spécifiques. L'utilisation d'un modèle spécifique et précis augmente le degré de confiance dans le dispositif d'alerte des inondations mais il est en contrepartie plus complexe à construire ou à interpréter. La complexité mathématique liée aux notions d'ordre de grandeur, d'incertitude, de conditions initiales ou de paramétrage dans des équations conduit à des représentations intelligibles par des experts hydrauliciens mais peu adaptées, dans leur forme courante, à une prise de décision par un manager de terrain. Dans ce contexte, l'objectif du travail ici est de faire une prédiction probabiliste en temps réel susceptible d'être utilisée par un analyste ou un décideur non nécessairement scientifique et/ou spécialiste de l'hydrologie. L'idée principale est d'encoder la connaissance et les modèles déterministes dans un cadre probabiliste pour fournir en temps réel aux manageurs des résultats environnés par une incertitude destinée à l'évaluation des niveaux de risques encourus. Il s'agit tout d'abord de représenter le phénomène d'inondation (le modèle déterministe, l'évolution dynamique, la taille du système, les niveaux d'échelle,…) mais aussi et surtout de rendre les modèles générés compréhensibles et manipulables par des non spécialistes de la mécanique des fluides ou des théories probabilistes. Par leur caractère convivial en termes de construction et d'interprétation causale dans un cadre stochastique les réseaux bayesiens semblent bien adaptés à la caractérisation et la prédiction des phénomènes de crues. La taille des territoires, la variabilité des paramètres et l'évolution dynamique entre les différentes zones requiert l'utilisation d'outils adaptés à une représentation multidimensionnelle du problème. En ce sens l'emploi de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels semble adapté.

Trois étapes essentielles à la modélisation de ces RBM sont présentées ci-dessous :

1. Construire la structure du réseau pour la représentation du territoire considéré :
    a. Analyser le système
    b. Construire la classe
2. Instancier les paramètres du réseau pour la caractérisation des zones élémentaires
3. Propager les informations dans le réseau pour l'aide à la prise de décision

V.2 Construction de la structure du RBM d'un bassin versant

Dans cette partie, nous présentons les principes de construction d'un RBM pour la représentation d'un phénomène d'inondations.

V.2.1 Système étudié

La modélisation concerne un bassin versant de montagne pour lequel les inondations prennent la forme de crues éclair particulièrement dévastatrices. Un bassin versant (voir Figure V.1) désigne l'ensemble du territoire drainé par un cours d'eau principal et par ses affluents. Dans un bassin versant, l'écoulement des eaux se fait de l'amont vers l'aval au travers d'un réseau hydrographique (réseau de drainage) de taille variable. Chaque bassin versant est composé de plusieurs sous-bassins versants qui, à leur tour, englobent des sous-bassins versants plus élémentaires [130]. Chaque bassin versant se caractérise par différents paramètres comme la surface, la pente, la capacité d'infiltration, la présence de bâtiments (urbanisme), la répartition de la couverture végétale etc. Dans notre étude, nous faisons l'analyse sur un bassin versant générique. Chaque bassin versant est spécifique par ses paramètres mais tous partagent une même structure. Nous commencerons par décrire celle-ci pour la définition d'un modèle de bassin versant générique.

Pour simplifier la démonstration, nous faisons certaines hypothèses mentionnées ci-dessous :

1. Les variables sont toutes discrètes ; sauf la température et les précipitations, les autres variables ont trois modalités qualitatives : *faible, moyen et fort*.
2. Les sous-bassins versants sont homogènes.
3. L'évolution dynamique est invariante pendant la simulation.
4. A l'instant t la variable dynamique dépend seulement de l'instant $t-1$.

Dans un premier temps, le modèle sera simplifié sur la base des hypothèses posées, parfois peu représentatives de la réalité. Mais au-delà de l'utilisation directe du modèle comme outil d'aide à la décision dans une configuration de risque de crue, l'objectif ici reste la validation des principes de construction d'un RBM. Au fil du chapitre le modèle sera affiné.

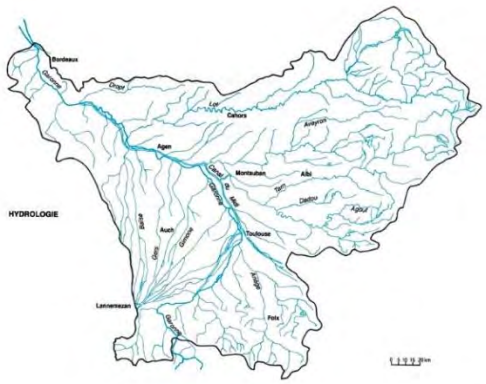


Figure V.1 Exemple du bassin versant de la Garonne

En hydrologie l'apport en eau alimentant un cours d'eau est déduit de la quantité de précipitation versée sous forme liquide (pluie) ou solide (neige) sur le bassin versant. Une part de l'eau recueillie directement sous forme de pluie ou indirectement par fonte de neige ruissellera et terminera dans le cours d'eau, le reste s'infiltrera dans le sol et alimentera

des nappes phréatiques ou des écoulements subsurfaciques, susceptibles d'ailleurs de réalimenter le cours d'eau en surface par résurgence. Une petite partie de l'eau à la surface du sol est aussi rendue à l'atmosphère par évapotranspiration. Le ruissellement s'écoule vers le point de sortie de la zone considérée appelé exutoire (voir Figure V.2).

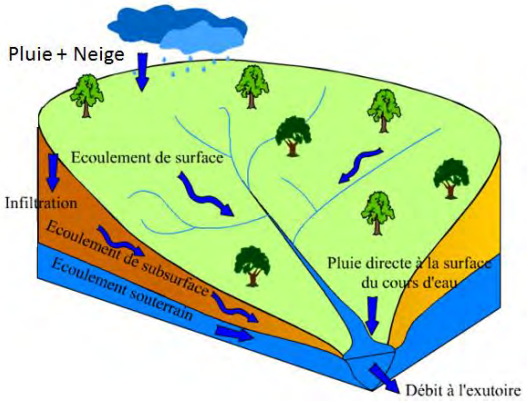


Figure V.2 Bassin versant

Le RBM utilisé pour la représentation d'un bassin versant sera tridimensionnel. Outre la dimension temporelle, on considérera deux dimensions spatiales séparant longitude et attitude/latitude (regroupées en une seule dimension) Le modèle générique est présenté à la Figure V.3.

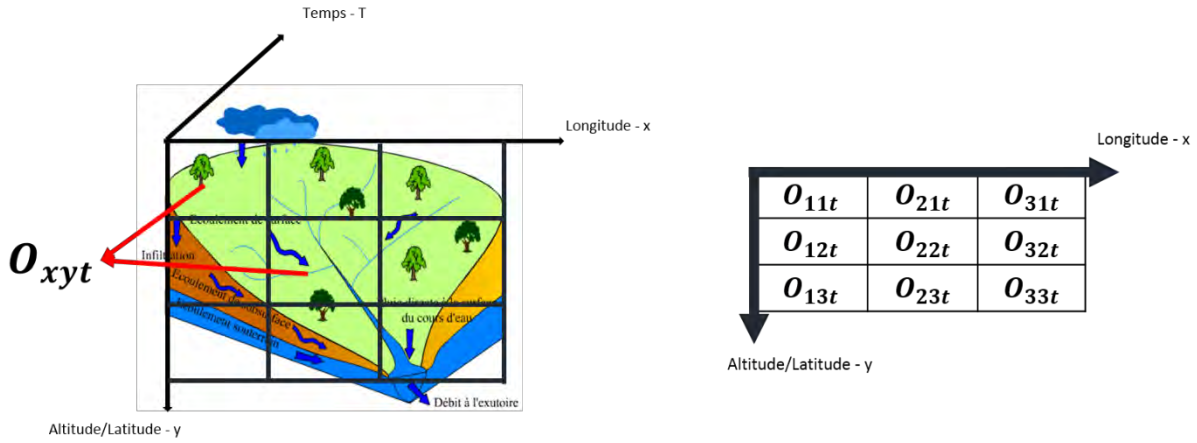


Figure V.3 Modèle 3-D d'un bassin versant

On suppose qu'il y a neuf objets dans le bassin versant étudié :

- Chaque objet a une évolution dynamique.
- O_{xyt} correspond ainsi à un objet évoluant selon 3 dimensions « X, Y, T ».
- Les objets initiaux dans la dimension « X » sont O_{11t}, O_{12t} *et* O_{13t}, les objets initiaux dans la dimension « Y » sont O_{11t}, O_{21t} *et* O_{31t}.
- O_{12t} et O_{13t} avec $t \geq 2$ reçoivent les entrées sur les dimensions « Y » et « T » ; O_{21t} et O_{31t} avec $t \geq 2$ ont besoin des entrées sur les dimensions « X » et « T ».
- Les autres objets comme $O_{22t}, O_{32t}, O_{23t}, O_{33t}$ reçoivent trois entrées en provenance de trois dimensions.

V.2.2 Construction du RBM

V.2.2.1 Définition de la classe

L'établissement de la classe se fait selon les principes énoncés au Chapitre II. Il faut donc :

- Construire un RB classique sans considérer l'aspect multidimensionnel du problème
- Identifier les nœuds autorisant la communication entre les dimensions du problème
- Identifier les nœuds dimensionnels
- Associer les nœuds virtuels aux nœuds dimensionnels
- Identifier les entrées et les sorties (l'entrée et la sortie doivent avoir les mêmes modalités)

V.2.2.1.1 Construire un RB classique sans considérer l'aspect multidimensionnel du problème

Les variables essentielles de ce système sont rattachées aux différents processus : approvisionnement en eau ; fonction de production de ruissellement (surface et subsurface) ; fonction de transfert et évapotranspiration. Ils sont présentés en Figure V.4. L'analyse de chaque processus permet de définir une partie de la classe [131].

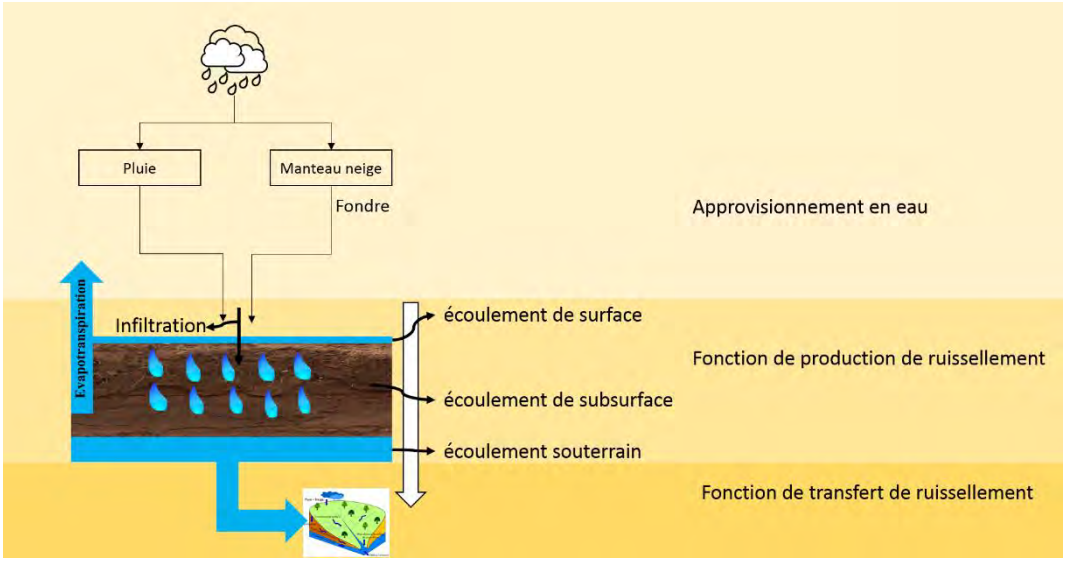


Figure V.4 Fonctions du bassin versant

Approvisionnement en eau

Le réseau bayesien et ses variables sont présentés sur la Figure V.5 et le Tableau V.1.

La prévision des inondations nécessite de séparer les précipitations totales (PT) en précipitation solides (PS : neige) et précipitations liquides (PL : pluie). Cette séparation, dépendante de la température, est essentielle pour quantifier d'une part les phénomènes de ruissellement direct et d'infiltration et, d'autre part, la hauteur du manteau neigeux (MN). La fonte des neiges (FN) dépend du transfert de chaleur entre le manteau neigeux et son environnement ambiant direct : sol, atmosphère, lui-même fonction du niveau de radiation (R) et de la couverture de sol (CS) (végétation, nature de la surface : argileuse, calcaile,…). Les liens entre les variables introduites jusqu'à présent sont repérés sur la figure ci-dessous.

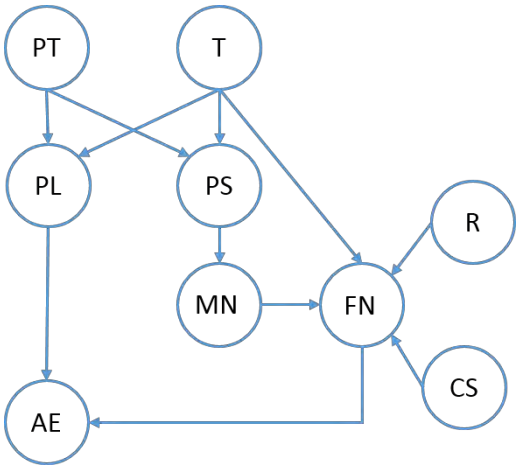


Figure V.5 Réseau Bayesien relatif au processus d'Approvisionnement en Eau

Nom de Variable	Abréviation
Précipitation Totale	PT
Précipitation Liquide	PL
Précipitation Solide	PS
Manteau Neige	MN
Fonte Neige	FN
Approvisionnement en Eau	AE
Radiation	R
Couverture de Sol	CS
Température	T

Tableau V.1 Liste des variables impliquées dans le processus d'Approvisionnement en Eau

Afin de se rapprocher des phénomènes continus caractérisés par les variations de température ou les volumes de précipitations, les variables correspondantes sont discrétisées par 10 modalités chacune. On suppose que le champ de température varie de -10 à 40 degrés Celsius et que la hauteur de précipitation par unité de surface est inférieure à 500 millimètres. En l'absence de spécification supplémentaire toutes les autres variables sont caractérisées par trois modalités correspondant à des niveaux d'intensité : « *faible, moyen, fort* ». Les variables et leurs modalités sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Température		Précipitation totale/liquide/solide	
Niveau 1	[-10,-5)	Niveau 1	[0,50)
Niveau 2	[-5,0)	Niveau 2	[50,100)
Niveau 3	[0,5)	Niveau 3	[100,150)
Niveau 4	[5,10)	Niveau 4	[150,200)
Niveau 5	[10,15)	Niveau 5	[200,250)
Niveau 6	[15,20)	Niveau 6	[250,300)
Niveau 7	[20,25)	Niveau 7	[300,350)
Niveau 8	[25,30)	Niveau 8	[350,400)
Niveau 9	[30,35)	Niveau 9	[400,450)
Niveau 10	[35,40]	Niveau 10	[450,500]

Tableau V.2 Discrétisation des variables « température et précipitation »

Fonction de production de ruissellement

Les écoulements de surface et de subsurface sont à l'origine de la fonction de production de ruissellement. Le processus d'infiltration détermine la quantité d'eau traversant les couches supérieures du sol et donc le ruissellement direct (débit de surface). Afin d'estimer le débit de surface résultant d'un apport en eau (AE), de nombreux facteurs doivent être considérés. Le réseau bayésien et ses variables sont présentés à la Figure V.6 et le Tableau V.3. L'écoulement souterrain correspondant à l'infiltration de l'eau de pluie transitant lentement dans les nappes vers les exutoires est un

processus « lent » qui ne sera pas pris en compte dans notre modèle censé caractériser une dynamique rapide caractéristique aux phénomènes de crues éclair.

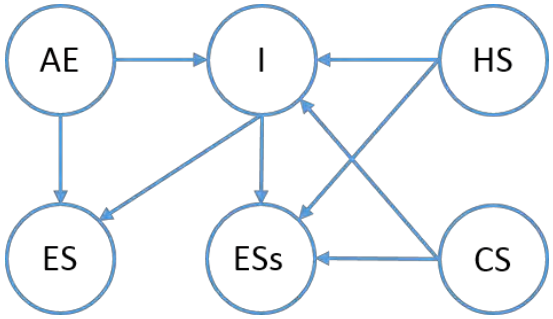


Figure V.6 Réseau Bayesien relatif à la « Fonction de production de ruissellement »

Nom de Variable	Abréviation
Approvisionnement en Eau	AE
Ecoulement de Surface	ES
Ecoulement de Subsurface	ESs
Infiltration	I
Humidité du Sol	HS
Couverture de Sol	CS

Tableau V.3 Liste des variables impliquées dans le processus de fonction de production de ruissellement

Evapotranspiration

Comme son nom le laisse présager, l'évapotranspiration combine les phénomènes d'évaporation et de transpiration. La recharge des nappes phréatiques par les précipitations tombant en période d'activité du couvert végétal peut être limitée. En effet, la majorité de l'eau est évapotranspirée par la végétation. Elle englobe la perte en eau due au climat, les pertes provenant de l'évaporation du sol et de la transpiration des plantes. Dans le RBM en construction, l'évapotranspiration sera représentée par la variable (EVP). Sa dépendance vis-à-vis des autres variables introduites jusqu'alors est représentée en figure la Figure V.7.

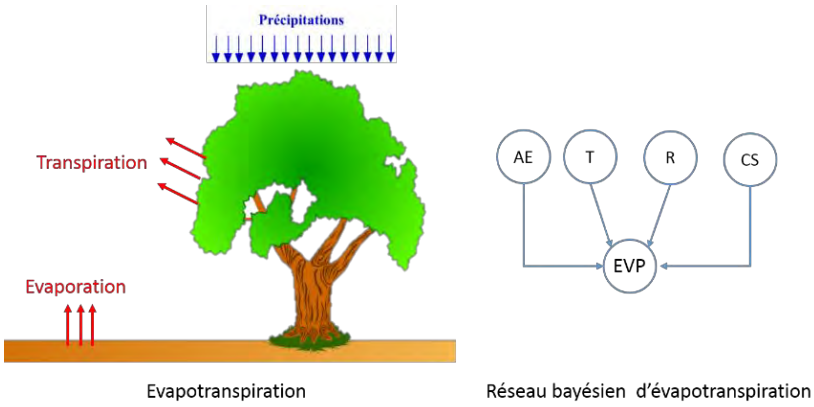


Figure V.7 Réseau Bayesien relatif au processus d'évapotranspiration

Fonction de transfert

À l'échelle locale, chaque zone homogène d'un bassin versant (Figure V.3) communique avec ses zones voisines par un transfert d'eau de l'exutoire de la zone amont vers l'entrée de la zone considérée. La direction, la vitesse et la quantité de cet écoulement dépendent de nombreux facteurs (pentes, nature du sol, caractéristiques géométriques des cours d'eau). Le transfert d'eau dans les couches souterraines (écoulements souterrains) est contrôlé par les propriétés du sol, la végétation (à travers son système racinaire), les conditions d'humidité du sol. Les facteurs dominants qui contrôlent le transfert de ruissellement des écoulements de surface et de subsurface d'une zone à l'autre sont les caractéristiques du

courant, l'humidité du sol et la couverture de sol. Un réseau bayésien et ses variables est présenté sur la Figure V.8 et le Tableau V.4.

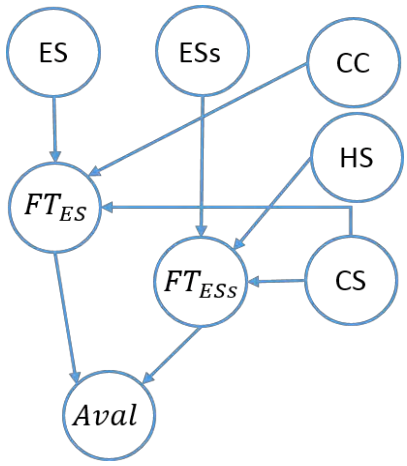


Figure V.8 Réseau Bayesien relatif à la « Fonction de transfert »

Nom de Variable	Abréviation
Ecoulement de Surface	ES
Ecoulement de Subsurface	ESs
Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Surface	FT_{ES}
Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Subsurface	FT_{ESs}
Caractéristiques du Courant	CC
Humidité du Sol	HS
Couverture de Sol	CS
Approvisionnement en aval	$Aval$

Tableau V.4 Liste des variables impliquées dans le processus de transfert

Construction du Réseau Bayesien

Les variables principales caractérisant sur une zone élémentaire les processus physiques impliqués dans un phénomène de crue éclair ont été caractérisées. La réunion des différents réseaux bayesiens qui les relient conduit à l'établissement d'un réseau global (la Figure V.9). A ce modèle, une variable est ajoutée en amont caractérisant la quantité d'eau en provenance de la zone amont.

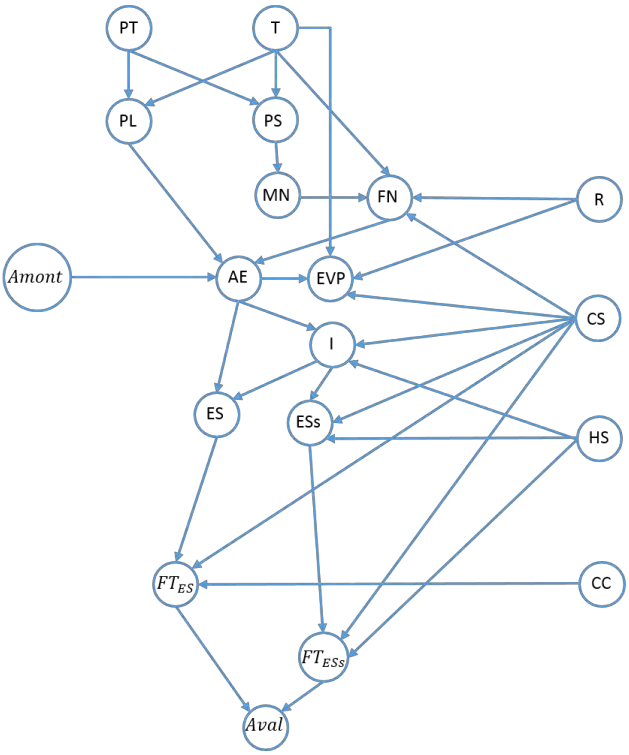


Figure V.9 Réseau Bayesien représentatif du ruissellement d'eau à l'exutoire d'une zone élémentaire

19 variables composent ce réseau. Les variables $Amont\ et\ Aval$ autorisent la communication avec les zones voisines.

V.2.2.1.2 Identifier les nœuds autorisant la communication entre les dimensions du problème

Le modèle de la Figure V.9 correspond à une échelle locale homogène d'un bassin versant. Cette zone locale communique avec ses voisines par transfert de débit. Le débit en eau correspond à la variable permettant de relier les zones selon la dimension géographique et sera donc considéré comme un canal de communication dans le modèle. Les nœuds $Amont$ et $Aval$ s seront les nœuds de communication relatifs à la dimension spatiale du modèle (Figure V.10).

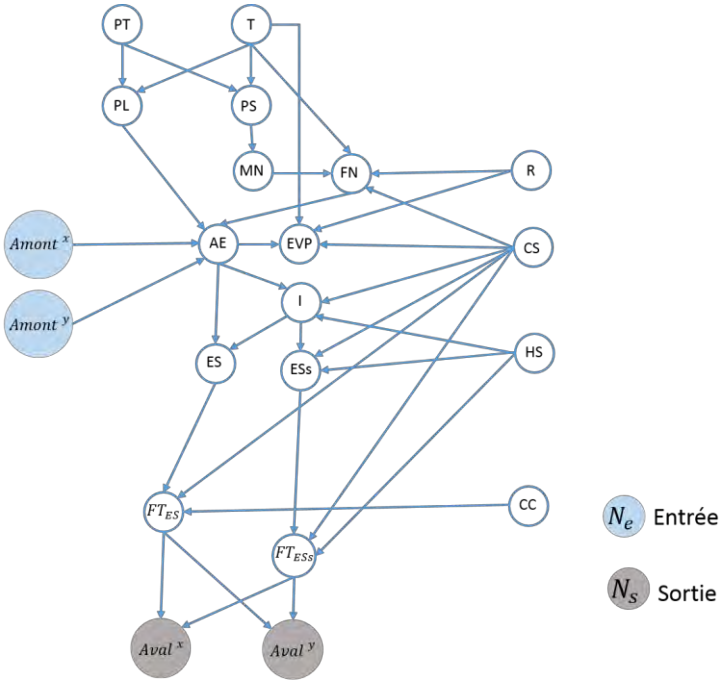


Figure V.10 Classe associée à la modélisation des inondations

Le caractère bidimensionnel de la spatialité considérée, séparant longitude et altitude/latitude implique de distinguer les débits amont et aval selon ces deux dimensions (X et Y). On introduira pour cela les entrées $Amont^x$ et $Amont^y$et les sorties $Aval^x$ et $Aval^y$.

V.2.2.1.3 Identifier les nœuds dimensionnels

Des nœuds dimensionnels sont associés aux variables ayant une influence sur elle-même entre deux instances de discrétisation de la dimension considérée. Les variables dynamiques par définition sont des variables dimensionnelles dans la mesure où leur valeur à un instant t influe sur leur valeur à l'instant t+1. La prise en compte de la dimension temporelle dans notre réseau se fera à partir des variables :

- Humidité de Sol (HS_t) à l'instant t
- Manteau Neige (MN_t) à l'instant t

V.2.2.1.4 Associer les nœuds virtuels aux nœuds dimensionnels

A chaque variable dynamique identifiée, une entrée et une sortie virtuelles sont associées. Dans le cas étudié, 4 nœuds virtuels sont donc ajoutés : HS_{t-1} et HS_{t+1} pour HS_t ainsi que MN_{t-1} et MN_{t+1} pour MN_t.

- Entrée virtuelle : Humidité de Sol (HS_{t-1}) et Manteau Neige (MN_{t-1})
- Sortie virtuelle : Humidité de Sol (HS_{t+1}) et Manteau Neige (MN_{t+1})

V.2.2.1.5 Identifier les entrées et les sorties

Sur la base des éléments précédemment introduits, la Figure V.11 présente la classe dynamique complète C_1 associée au RBM en construction.

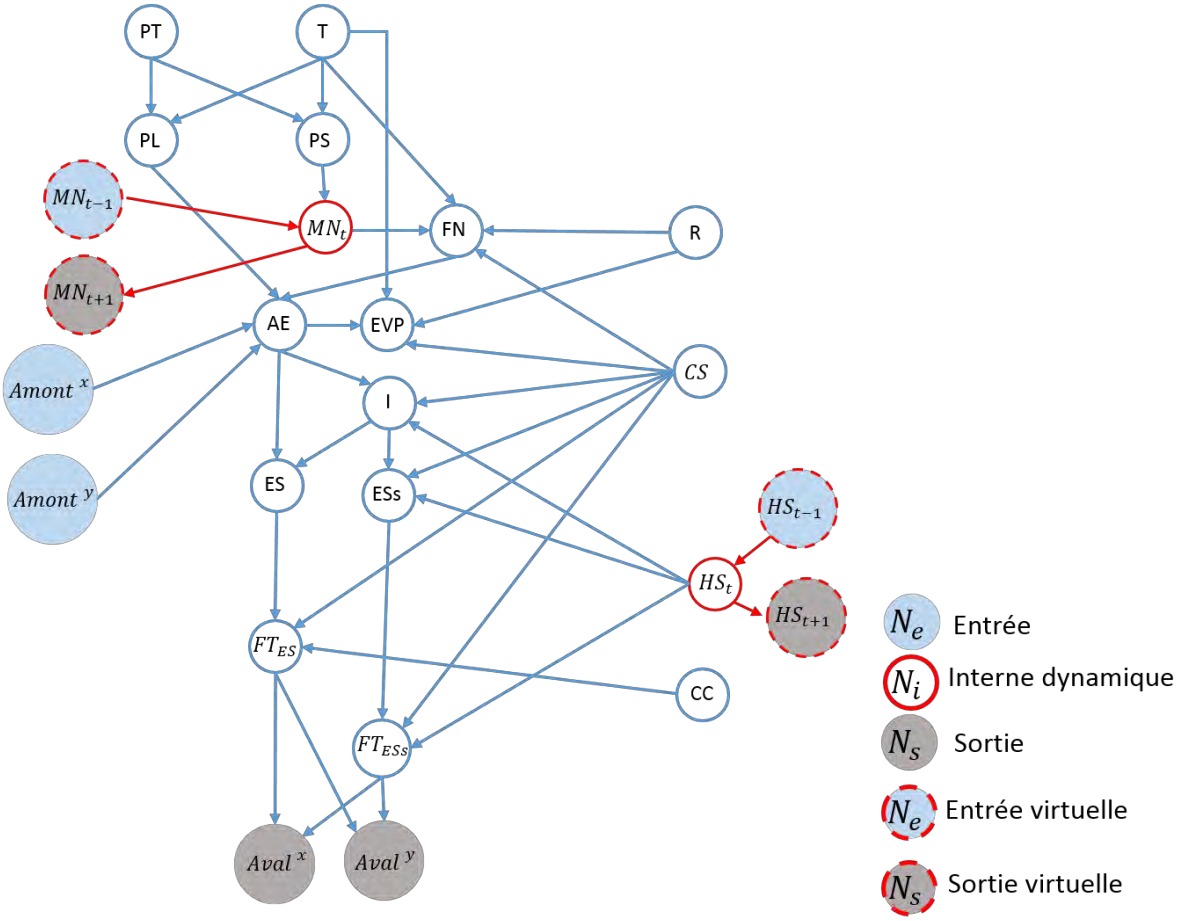


Figure V.11 Classe dynamique complète

La liste des entrées et sorties ainsi que des variables internes est fournie au niveau des Tableau V.5 et Tableau V.6.

Entrées		**Sorties**	
Entrée spatiale	Entré virtuelle	Sortie spatiale	Sortie virtuelle
Approvisionnement en amont longitude ($Amont^x$)	Humidité de Sol (HS_{t-1})	Approvisionnement en aval longitude ($Aval^x$)	Humidité de Sol (HS_{t+1})
Approvisionnement en amont altitude/latitude ($Amont^y$)	Manteau Neige (MN_{t-1})	Approvisionnement en aval altitude/latitude ($Aval^y$)	Manteau Neige (MN_{t+1})

Tableau V.5 Liste des variables entrées et sorties.

Nom de Variable	Abréviation	Nombre de parents
Précipitation Totale	PT	0
Précipitation Liquide	PL	2
Précipitation Solide	PS	2
Fonte Neige	FN	4
Approvisionnement en Eau	AE	4
Evapotranspiration	EVP	4
Ecoulement de Surface	ES	2
Ecoulement de Subsurface	ESs	3
Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Surface	FT_{ES}	3
Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Subsurface	FT_{ESs}	3
Infiltration	I	3
Humidité de Sol à t	HS_t	1
Manteau Neige à t	MN_t	2
Température	T	0
Radiation	R	0
Caractéristiques du Courant	CC	0
Couverture de Sol	CS	0

Tableau V.6 Liste des variables internes

V.2.2.2 Construction du RBM

En retenant les hypothèses de rang 1 et d'absence de décalage le modèle RBM global du bassin composé de 9 objets est donné en Figure V.12.

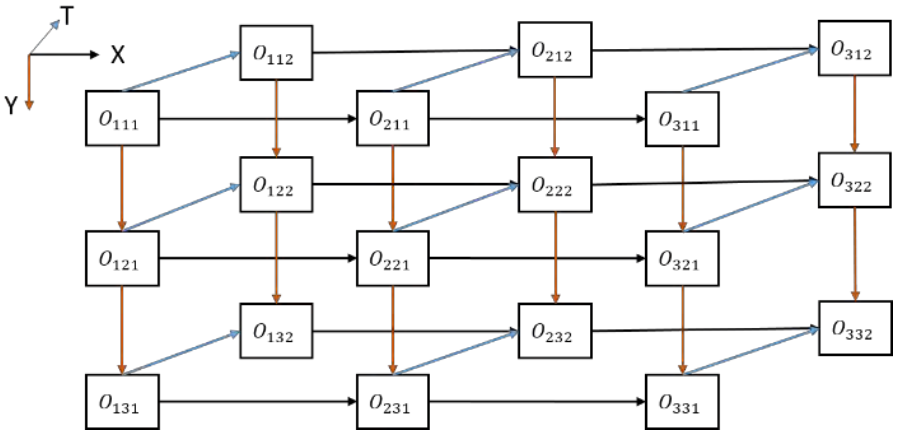


Figure V.12 Modélisation d'inondation par un RBM

Cette étape correspond à la fin de la construction structurelle du modèle RBM ; il faut maintenant passer à l'étape d'instanciation correspond à la caractérisation quantitative des relations établies dans le modèle structurel ; ceci fait l'objet de la section suivante.

V.3 Instanciation du RBM

Cette partie est dédiée à la caractérisation quantitative des relations établies entre les variables dans chaque réseau classe pour obtenir un réseau objets. Comme décrit dans le Chapitre III, plusieurs techniques peuvent être utilisées pour l'instanciation d'un RBM ; Nous considérons ici l'instanciation par estimation ou apprentissage. La procédure principale pour estimer les paramètres dans un RBM suit quatre étapes : identifier les objets ; regrouper les variables associées aux objets ; paramétrer les objets et sauvegarder les objets. Nous présentons cette procédure d'instanciation proposée au Chapitre III étape par étape pour le système étudié. Dans le cas étudié on peut mettre en évidence des relations entre variables contenues dans des objets différents ; par exemple à la même latitude/altitude, on peut considérer que la température est identique pour tous les objets situés à ce niveau (comme O_{11t}, O_{21t},O_{31t}). Ces relations seront exploitées pour améliorer les résultats des estimations et/ou réduire/simplifier la procédure d'apprentissage.

V.3.1 Réunir les données

Avant de présenter la procédure d'instanciation, nous présentons le contexte pour l'établissement des données devant servir à cette instanciation pour le système considéré. Nous considérons que, dans le RBM d'étude, cohabitent des variables à paramètres connus (avis d'experts) et des variables à paramètres inconnus qu'il faut apprendre. Nous présentons dans le Tableau V.7 des hypothèses sur chaque variable du modèle, les détails peuvent être consultés à l'Annexe 1. La deuxième colonne de ce Tableau donne la quantité de données disponibles (en fait générées aléatoirement) par niveau d'altitude.

Nom	Information sur les données
Précipitation Totale (PT)	50 données à PT^{x1t} ; 50 données à PT^{x2t} ; 50 données à PT^{x3t}
Fonte Neige (FN)	150 données à FN^{x1t} ; 150 données à FN^{x2t} ; 150 données à FN^{x3t}
Approvisionnement en Eau (AE)	150 données à AE^{x1t} ; 150 données à AE^{x2t} ; 150 données à AE^{x3t}
Evapotranspiration (EVP)	100 données à EVP^{x1t} ; 100 données à EVP^{x2t} ; 100 données à EVP^{x3t}
Ecoulement de Surface (ES)	100 données à ESs^{x1t} ; 100 données à ESs^{x2t} ; 100 données à ESs^{x3t}
Ecoulement de Subsurface (ESs)	300 données à ESs^{x1t} ; 300 données à ESs^{x2t} ; 300 données à ESs^{x3t}
Infiltration (I)	200 données à I^{x2t}
Couverture de Sol (CS)	60 données à CS^{x1t} ; 60 données à CS^{x2t} ; 60 données à CS^{x3t}
Humidité de Sol à t (HS_t)	50 données à HS_t^{x1t} ; 50 données à HS_t^{x2t} ; 50 données à HS_t^{x3t}
Manteau Neige à t (MN_t)	50 données à MN_t^{x1t} ; 50 données à MN_t^{x2t} ; 50 données à MN_t^{x3t}
Température (T)	50 données à PT^{x1t} ; 50 données à PT^{x2t} ; 50 données à PT^{x3t}
Radiation (R)	50 données à T^{x1t} ; 50 données à T^{x2t} ; 50 données à T^{x3t}
Caractéristique du Courant (CC)	50 données à CC^{x1t} ; 50 données à CC^{x2t} ; 50 données à CC^{x3t}
Approvisionnement en aval longitude ($Aval_x$)	200 données à $Aval_x^{x1t}$; 200 données à $Aval_x^{x2t}$; 200 données à $Aval_x^{x3t}$
Approvisionnement en aval altitude/latitude ($Aval_y$)	50 données à $Aval_y^{x1t}$; 50 données à $Aval_y^{x2t}$; 50 données à $Aval_y^{x3t}$

Tableau V.7 Information sur les données

V.3.2 Identifier les objets

La première phase de la procédure d'instanciation commence par l'identification des objets. Pour le système étudié, les zones élémentaires étant considérées homogènes, on ne considère qu'une seule classe $C = \{C_1\}$. L'ensemble des objets est défini par $O_{c_1} = \{O_{xyt}\}$ où $x \in [1,3], y \in [1,3]$. Le système évoluant avec le temps, à l'instant initial ($t = 1$), les neuf objetsO_{xy1} requièrent l'introduction de paramètres initiaux dynamiques.

V.3.3 Caractériser les variables

Après avoir listé tous les objets du réseau, les variables de même nom appartenant aux différents objets sont regroupées.

Le système de bassin versant (voir la Figure V.11), comporte 25 variables au niveau de la classe. Chaque variable se retrouvera dans chacun des 9 objets instanciés. En regroupant les informations connues pour chaque variable à paramètres invariants entre objets on augmente la base de données garantissant ainsi un apprentissage meilleur. La « liste de variables et de relations » est présentée en Annexe 1. Trois grands types de variables peuvent être identifiés dans le système étudié. On distinguera ainsi les variables :

- Variables VC. Pour ces variables, la loi de distribution de probabilité est supposée connue. Exemple : précipitation liquide (PL), précipitation solide (PS), fonction de transfert à l'écoulement de surface (FT_ES), fonction de transfert à l'écoulement de subsurface (FT_ESs), humidité de sol pour $t+1$ (HS_{t+1}), manteau neige pour $t+1$ (MN_{t+1})
- Variables VI. Variables de même nom mais appartenant à différents objets, pour lesquelles tous les paramètres sont identiques
  Exemple : évapotranspiration (EVP), humidité de sol à t (HS_t) et manteau neige à t (MN_t)

- Variables mixtes :
  - Variables VIL. Variables de même nom mais appartenant à différents objets, pour lesquelles certains paramètres sont identiques et d'autres sont liés par une relation.
    Exemple : précipitation totale (PT), écoulement de surface (ES), écoulement de subsurface (ESs), couverture de sol (CS), température (T), radiation (R), caractéristique du courant (CC), approvisionnement en aval longitude ($Aval_x$), approvisionnement en aval altitude/latitude ($Aval_y$)

  - Variables VCI. Variables de même nom mais appartenant à différents objets, pour lesquelles certains paramètres sont connus et d'autres sont liés par une relation.
    Exemple : approvisionnement en eau (AE) et fonte neige (FN)

  - Variables VCIL. Variables de même nom mais appartenant à différents objets, pour lesquelles certains paramètres sont connus et identiques et d'autres sont liés par une relation.
    Exemple : infiltration (I)

Variables	Paramètres connus			Paramètres relationnels					
	Paramètres connus	Objets connus	Distributions/Equations/ Information diverses	VI	VL	VPL	VNP	Objets en relation	Relations
Précipitation Totale (PT)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$PT^{11t} = PT^{21t} = PT^{31t}$ $PT^{12t} = PT^{22t} = PT^{32t}$ $PT^{13t} = PT^{23t} = PT^{33t}$
					x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	$PT^{x1t} = PT^{x2t} + 70$ $PT^{x2t} = PT^{x3t} + 50$
Précipitation Liquide (PL)	x	tous							
Infiltration (I)	x	tous	Quand *AE=faible*, les paramètres sont connus par experts.	x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$I^{11t} = I^{21t} = I^{31t}$ $I^{12t} = I^{22t} = I^{32t}$ $I^{13t} = I^{23t} = I^{33t}$
					x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'effet d'infiltration augmente dès que l'altitude baisse. Sauf quand AE est en modalité faible, tous les objets ont les mêmes paramètres. O_{x1t} est 20% plus faible que O_{x2t} ; O_{x2t} est 20 % plus faible que O_{x3t}.
Fonte Neige (FN)	x	tous	Quand *T = niveau 1,2,6,7,8,9,10* les paramètres sont connus par les experts	x				tous	

Transfert à deux niveaux

Transfert à un niveau

Figure V.13 Exemple de « Liste de variables et de relations »

La Figure V.13 présente, à titre d'exemple un extrait de la liste de variables et de relations mettant en évidence les quatre types de variables (à paramètres connus (précipitation liquide), à paramètres connus et paramètres identiques (fonte neige), à paramètres identiques et liés (précipitation totale) et à paramètres connus, identiques et liés (infiltration)).

Deux niveaux de transfert seront nécessaires pour l'apprentissage du système étudié :

- transfert à un niveau pour les variables à paramètres identiques
- transfert à deux niveaux (données et probabilités) pour les variables à paramètres liés[5]

Les variables à paramètres connus sont directement introduites dans la base de données. Dans le cas du système étudié, aucune variable ne sera introduite sous forme d'équation mathématique ou physique. La procédure dans la Figure III.14 ne s'appliquera donc pas ici. Pour les autres variables une procédure d'apprentissage sera implémentée.

V.3.3.1 Apprentissage

La procédure d'apprentissage est déployée variable par variable en utilisant les relations entre variables de même nom appartenant à différents objets. La technique d'apprentissage par transfert est retenue pour estimer les paramètres dans le réseau.

V.3.3.1.1 Transfert à un niveau

Les variables de même nom appartenant à différents objets à paramètres identiques sont paramétrées par apprentissage par transfert à un niveau. Toutes les données disponibles sont réunies et l'apprentissage réalisé sur cette base de données élargie. Le paramètre estimé est intégré à tous les objets. Nous traitons à la suite le cas des variables « Approvisionnement en eau » (AE) et « Infiltration » (I)

[5] sauf pour la variable « infiltration » pour laquelle seules les données de zones situées au milieu du bassin sont disponibles

Approvisionnement en eau

La table de probabilités conditionnelles est identique entre les neuf objets. Il s'agit d'une variable totalement liée. La procédure d'apprentissage dans ce cas est donc la suivante :

1. Collecter l'ensemble des données relatives à la variable « Approvisionnement en eau » dans tous les objets. Les données comprennent la variable « Approvisionnement en Eau » et ses parents ($PL, FN, Aval_x \; et \; Aval_y$).
2. Regrouper les données dans un fichier de données « *Données_AE* ».
3. Apprendre les paramètres à partir de ce fichier ;

   L'apprentissage se fait ici à partir de 450 cas (150*3). L'algorithme MV sera utilisé comme procédure d'apprentissage. L'estimation des paramètres se fera à partir de l'équation suivante :

$$\hat{\theta}_{mqr}^{MV} = P(N_m = r | pa(N_m) = q) = \frac{NOM_{mqr}}{\sum_{r=1}^{r_m} NOM_{mqr}}$$

Apprentissage par les données regroupées						
PL	Amont_x	Amont_y	FN	faible	moyen	fort
niveau1	faible	faible	faible	0,5	0,25	0,25
niveau1	faible	faible	moyen	0,333	0,333	0,333
niveau1	faible	faible	fort	0,25	0,25	0,5
niveau1	faible	moyen	faible	0,25	0,5	0,25
niveau1	faible	moyen	moyen	0,333	0,333	0,333
niveau1	faible	moyen	fort	0,2	0,2	0,6
niveau1	faible	fort	faible	0,2	0,2	0,6
niveau1	faible	fort	moyen	0,333	0,333	0,333
niveau1	faible	fort	fort	0,167	0,167	0,667
niveau1	moyen	faible	faible	0,2	0,6	0,2
niveau1	moyen	faible	moyen	0,25	0,5	0,25
niveau1	moyen	faible	fort	0,2	0,2	0,6
niveau1	moyen	moyen	faible	0,1	0,3	0,6
niveau1	moyen	moyen	moyen	0,111	0,444	0,444
niveau1	moyen	moyen	fort	0,167	0,167	0,667
niveau1	moyen	fort	faible	0,25	0,25	0,5
niveau1	moyen	fort	moyen	0,143	0,143	0,714
niveau1	moyen	fort	fort	0,2	0,2	0,6
niveau1	fort	faible	faible	0,333	0,333	0,333
niveau1	fort	faible	moyen	0,333	0,333	0,333
niveau1	fort	faible	fort	0,333	0,333	0,333
niveau1	fort	moyen	faible	0,25	0,25	0,5
niveau1	fort	moyen	moyen	0,2	0,2	0,6
niveau1	fort	moyen	fort	0,2	0,2	0,6
niveau1	fort	fort	faible	0,333	0,333	0,333
niveau1	fort	fort	moyen	0,25	0,25	0,5
…	…	…	…	…	…	…

Tableau V.8 Extrait de la table des paramètres estimés de la variable Approvisionnement en Eau

La table de probabilités conditionnelles estimées pour la variable « Approvisionnement en eau » possède $6 * 3 * 3 * 3 = 162$ lignes et 3 colonnes, les paramètres estimés sont donnés dans l'annexe. Nous présentons ici une partie de paramètres estimés dans le Tableau V.8.

4. Transférer les paramètres aux neuf objets.
   Comme la variable « Approvisionnement en Eau » est partagée par 9 objets, chacun d'entre eux sera affecté des valeurs des paramètres estimés par cette procédure d'apprentissage.

Afin de vérifier la qualité des résultats obtenus, les paramètres estimés seront confrontés à la procédure d'apprentissage sur des données non-regroupées relatives aux objets $O_{x1\cdot}, O_{x2\cdot}, O_{x3\cdot}$considérés séparément. Chaque fichier de données contient 150 cas et les résultats de l'estimation normale (sans regroupement et sans transfert) et de l'estimation par transfert sont comparés en utilisant la divergence de Kullback-Leibler donnée sur le Tableau V.9.

Divergence de KL	
$KL(AE_{origine}\|\|\widehat{AE}^{x1\cdot}_{seul})$	53,568
$KL(AE_{origine}\|\|\widehat{AE}^{x2\cdot}_{seul})$	50,571
$KL(AE_{origine}\|\|\widehat{AE}^{x3\cdot}_{seul})$	50,316
$KL(AE_{origine}\|\|\widehat{AE}^{\cdot}_{transfert})$	34,734

Tableau V.9 Divergence de KL de l'approvisionnement en eau

Sur le Tableau V.9, on note que la divergence de KL est plus forte quand l'apprentissage normal est réalisé sans transfert. L'intérêt de ce principe d'apprentissage est donc évident.

Infiltration

La variable « infiltration » a été retenue pour illustrer le cas où les données à disposition sont en quantité insuffisante. En effet, pour ce cas précis, on ne dispose que des informations relatives aux objets caractérisant le milieu du territoire d'étude. Les données relatives aux objets $O_{x1\cdot}$et $O_{x3\cdot}$sont manquantes. La connaissance des relations entre objets permet cependant d'appliquer le principe de transfert. Pour cela il faut :

1. Extraire toutes les données de l'infiltration dans la base de données (relatives à la variables « Infiltration » et ses parents (AE, CS, HS_t).
2. Apprendre les paramètres à partir de données en utilisant la méthode MV.

Les résultats d'apprentissage sont consignés dans le Tableau V.10.

3. Transfert des paramètres entre objets

Dans cette étape, le transfert de probabilité est réalisé entre objets. L'infiltration étant par exemple 20% plus faible dans la zone m correspondant à l'objet O_{xmt} que dans celle relative à l'objet O_{xnt} , on transfère cette information au niveau des paramètres. La probabilité de la modalité « *forte* » dans l'objet O_{xmt} est donc 20% moindre que celle de la même modalité dans l'objet O_{xnt} . Ce processus se répète entre modalités voisines de manière répartie.

			$\hat{I}^{x2t}$		
AE	CS	HS_t	faible	moyen	fort
faible	faible	faible	1	0	0
faible	faible	moyen	1	0	0
faible	faible	fort	1	0	0
faible	moyen	faible	1	0	0
faible	moyen	moyen	1	0	0
faible	moyen	fort	1	0	0
faible	fort	faible	1	0	0
faible	fort	moyen	1	0	0
faible	fort	fort	1	0	0
moyen	faible	faible	0,412	0,529	0,059
moyen	faible	moyen	0,538	0,385	0,077
moyen	faible	fort	0,563	0,375	0,063
moyen	moyen	faible	0,5	0,464	0,036
moyen	moyen	moyen	0,435	0,522	0,043
moyen	moyen	fort	0,389	0,556	0,056
moyen	fort	faible	0,556	0,383	0,056
moyen	fort	moyen	0,316	0,632	0,053
moyen	fort	fort	0,429	0,429	0,143
fort	faible	faible	0,286	0,429	0,286
fort	faible	moyen	0,375	0,5	0,125
fort	faible	fort	0,222	0,556	0,222
fort	moyen	faible	0,272	0,364	0,364
fort	moyen	moyen	0,176	0,412	0,412
fort	moyen	fort	0,091	0,364	0,545
fort	fort	faible	0,083	0,333	0,583
fort	fort	moyen	0,3	0,3	0,4
fort	fort	fort	0,412	0,529	0,059

Tableau V.10 Paramètres estimés relatifs à la variable « Infiltration »

La table de calcul de cette procédure de transfert est présentée sur le Tableau V.11.

			I^{x2t}_objet source			I^{x1t}_objet cible		
AE	CS	HS_t	faible	moyen	fort	faible(z)=faible+moyen*0,2	moyen(y)=moyen*0,8+fort*0,2	fort(x)=fort*0,8
moyen	faible	faible	0,5	0,4	0,1	0,58	0,34	0,08
moyen	faible	moyen	0,412	0,529	0,059	0,518	0,435	0,047
moyen	faible	fort	0,538	0,385	0,077	0,615	0,323	0,062
moyen	moyen	faible	0,563	0,375	0,063	0,63758	0,313	0,05
moyen	moyen	moyen	0,5	0,464	0,036	0,593	0,379	0,029
moyen	moyen	fort	0,435	0,522	0,043	0,539	0,426	0,035
moyen	fort	faible	0,389	0,556	0,056	0,500	0,456	0,044
moyen	fort	moyen	0,556	0,389	0,056	0,633	0,322	0,044
moyen	fort	fort	0,316	0,632	0,053	0,442	0,516	0,042
fort	faible	faible	0,429	0,429	0,143	0,514	0,371	0,114
fort	faible	moyen	0,286	0,429	0,286	0,371	0,400	0,229
fort	faible	fort	0,375	0,5	0,125	0,475	0,425	0,1
fort	moyen	faible	0,222	0,556	0,222	0,333	0,489	0,178
fort	moyen	moyen	0,273	0,364	0,364	0,345	0,364	0,291
fort	moyen	fort	0,176	0,412	0,412	0,259	0,412	0,329
fort	fort	faible	0,091	0,364	0,545	0,164	0,400	0,436
fort	fort	moyen	0,083	0,333	0,583	0,150	0,383	0,467
fort	fort	fort	0,3	0,3	0,4	0,36	0,32	0,32

Tableau V.11 Transfert de paramètre de I^{x2t} à I^{x1t}

Les probabilités sont transférées entre objets source et cible par application de la relation sans fusion entre paramètres sources et cibles.

La procédure est déployée entre les objets O_{x1t}, O_{x2t} et O_{x3t}, l'objet source étant O_{x2t}. La table de calcul de cette procédure de transfert est présentée sur le Tableau V.12.

Divergence de KL					
I^{x1t}_sans transfert	-	I^{x2t}_sans transfert	0,461	I^{x3t}_sans transfert	-
I^{x1t}_transfert	0,391	I^{x2t}_transfert	-	I^{x3t}_transfert	0,707

Tableau V.12 Divergence de KL de l'infiltration

L'utilisation de cette technique de transfert permet de combler l'absence totale d'informations dans les zones 1 et 3 et peut donc se substituer à l'avis d'expert, seule solution disponible lorsqu'aucune donnée explicite n'existe pour estimer, par apprentissage, les probabilités associées à chaque modalité.

La même procédure a été ensuite appliquée aux autres variables (Fonte Neige (FN), Evapotranspiration (EVA), Humidité Sol (HS) et Manteau Neigeux (MN)) pour lesquelles l'apprentissage par transfert est possible. Les résultats de comparaison en termes de divergences de KL sont présentés dans les Tableaux ci-dessous :

Divergence de KL	
$KL(FN_{origine}\|\|\widehat{FN}^{x1\cdot}_{seul})$	16,764
$KL(FN_{origine}\|\|\widehat{FN}^{x2\cdot}_{seul})$	17,403
$KL(FN_{origine}\|\|\widehat{FN}^{x3\cdot}_{seul})$	19,659
$KL(FN_{origine}\|\|\widehat{FN}^{\cdot}_{transfert})$	9,188

Tableau V.13 Divergence de KL de la fonte neige

Divergence de KL	
$KL(EVP_{origine}\|\|\widehat{EVP}^{x1\cdot}_{seul})$	82,689
$KL(EVP_{origine}\|\|\widehat{EVP}^{x2\cdot}_{seul})$	84,271
$KL(EVP_{origine}\|\|\widehat{EVP}^{x3\cdot}_{seul})$	85,231
$KL(EVP_{origine}\|\|\widehat{EVP}^{\cdot}_{transfert})$	71,227

Tableau V.14 Divergence de KL de l'évapotranspiration

Divergence de KL	
$KL(HS_{t_{origine}}\|\|\widehat{HS}_{t_{seul}}^{x1\cdot})$	0,037
$KL(HS_{t_{origine}}\|\|\widehat{HS}_{t_{seul}}^{x2\cdot})$	0,047
$KL(HS_{t_{origine}}\|\|\widehat{HS}_{t_{seul}}^{x3\cdot})$	0,041
$KL(HS_{t_{origine}}\|\|\widehat{HS}_{t_{transfert}}^{\cdot})$	0,012

Tableau V.15 Divergence de KL de l'humidité sol à l'instant t

Divergence de KL	
$KL(MN_{t_{origine}}\|\|\widehat{MN}_{t_{seul}}^{x1\cdot})$	7,251
$KL(MN_{t_{origine}}\|\|\widehat{MN}_{t_{seul}}^{x2\cdot})$	7,841
$KL(MN_{t_{origine}}\|\|\widehat{MN}_{t_{seul}}^{x3\cdot})$	7,669
$KL(MN_{t_{origine}}\|\|\widehat{MN}_{t_{transfert}}^{\cdot})$	6,603

Tableau V.16 Divergence de KL du manteau neigeux à l'instant t

Les tableaux V.13 à V.16 présentent les divergences de KL entre les paramètres originaux et les paramètres estimés suivant différentes méthodes. Les paramètres estimés par transfert présentent une divergence de KL plus faible que les paramètres estimés sans transfert.

V.3.3.1.2 Transfert à deux niveaux

Quand une relation peut être mise en évidence entre variables de même nom appartenant à différents objets et que des données sont également disponibles au niveau de chaque objet pour les variables concernées, les techniques

d'apprentissage par transfert à deux niveaux peuvent s'appliquer. L'apprentissage est tout d'abord réalisé au niveau de chaque objet après transformation des données concernées par les relations établies entre objets source et cible. Les paramètres associés à ces objets sont ensuite estimés à partir de ces jeux de donnés ainsi constitués. Finalement, à partir de l'estimation d'un indice de fusion f_{cible}, une fusion entre paramètres source et cible est réalisée.

Deux types de relations sont identifiés dans le cas d'étude. Certaines variables comme « température » et « précipitation totale » sont caractérisées par des équations mathématiques. D'autres sont définies par des distributions probabilistes.

La procédure d'apprentissage par transfert à deux niveaux sera illustrée ici sur les variables « Précipitation Totale » et « Caractéristique Courant ».

Précipitation totale

La variable $\boldsymbol{PT}$ a les paramètres identiques dans les objets ci-dessous :

$$\begin{cases} O_{x1t} \text{ où } x = 1,2,3 \\ O_{x2t} \text{ où } x = 1,2,3 \\ O_{x3t} \text{ où } x = 1,2,3 \end{cases}$$

Pour l'objet O_{x2t} on dispose en outre d'une relation selon la dimension « Y » donnée par l'équation (**30**)

$$\begin{cases} PT^{x1t} = PT^{x2t} + 70 \text{ où } x = 1,2,3 \\ PT^{x2t} = PT^{x3t} + 50 \text{ où } x = 1,2,3 \end{cases} \qquad \textit{Equation 30}$$

La variable $\boldsymbol{PT}$ est une variable mixte à paramètres identiques et liés.

En vue de réaliser l'apprentissage, les données sont extraites et stockées dans un fichier de données affectées de l'indice xyt afin de distinguer les différents objets. L'apprentissage par transfert est effectué sur les PT^{x1t}, PT^{x2t} et PT^{x3t} en 3 étapes :

$$\begin{cases} Etape\ 1 : variable\ cible\ PT^{x1t}, variables\ sources\ PT^{x2t}\ et\ PT^{x3t} \\ Etape\ 2 : variable\ cible\ PT^{x2t}, variables\ sources\ PT^{x1t}\ et\ PT^{x3t} \\ Etape\ 3 : variable\ cible\ PT^{x3t}, variables\ sources\ PT^{x1t}\ et\ PT^{x2t} \end{cases}$$

La première étape est présentée de façon détaillée, les étapes 2 et 3 suivent les mêmes procédures.

Cas 1 : variable cible $\boldsymbol{PT^{x1t}}$ & variables sources $\boldsymbol{PT^{x2t}}$ et $\boldsymbol{PT^{x3t}}$

Au niveau données :

1. $\boldsymbol{PT^{x1t}}$ **:** extraire toutes les données de PT^{x1t} et les stocker dans DPT^{x1t}_{cible}
2. $\boldsymbol{PT^{x2t}}$ **:** extraire toutes les données de PT^{x2t} . Ajouter 70 sur chaque donnée et les stocker dans $DPT^{x2t}_{amélioré}$
3. $\boldsymbol{PT^{x3t}}$ **:** extraire toutes les données de PT^{x2t} . Ajouter 120 $(50 + 70 = 120)$ sur chaque donnée et les stocker dans $DPT^{x3t}_{amélioré}$

Au niveau paramètres :

1. Variable cible $\boldsymbol{PT^{x1t}}$: faire l'apprentissage sur la variable PT^{x1t} avec les données DPT^{x1t}_{cible} . Stocker le paramètre cible θ^{cx1t}_{PT}
2. Variable source améliorée $\boldsymbol{PT^{x2t}}$: faire l'apprentissage sur la variable améliorée PT^{x2t} avec les données $DPT^{x2t}_{amélioré}$. Stocker le paramètre source amélioré θ^{sx2t}_{PT}
3. Variable source améliorée $\boldsymbol{PT^{x3t}}$: faire l'apprentissage sur la variable améliorée PT^{x3t} avec les données $DPT^{x3t}_{amélioré}$. Sstocker le paramètre source amélioré θ^{sx3t}_{PT}
4. Paramètre fusionné : calculer l'indice de fusion c_f , f_{cible} et la probabilité source moyenne $\bar{\theta}^{source}$ (voir le Tableau V.17 et Tableau V.18)

Paramètres de fusion : f_{cible}, c_f		
Nombre de cas (N_{cas})		50
Taille du tableau de probabilités conditionnelles (T_{cpt})		1*10
$c_f = \frac{N_{cas}}{2 * T_{cpt}}$		2.5
$c_f \geq 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{log c_f}{C_f}$	0.841
$c_f < 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{c_f * log 3}{3}$	**0.602**

Tableau V.17 Paramètres de fusion de PT^{cx1t}

Comme $c_f = 2.5$ dans le cas d'étude, la valeur retenue pour f_{cible} correspond à la cellule en bleu soit $f_{cible} = 0.602$.

Les résultats de cette procédure sont consignés dans les tableaux ci-dessous.

Paramètre estimé (θ^{sx2t}_{PT})(%)			Moyenne ($\bar{\theta}^{source}$)	Paramètre estimé (θ^{sx3t}_{PT})(%)		
niveau1	[0,50]	1,67	1,67	niveau1	[0,50]	1,67
niveau2	[50,100]	3,33	2,5	niveau2	[50,100]	1,67
niveau3	[100,150]	3,33	2,5	niveau3	[100,150]	1,67
niveau4	[150,200]	5	3,335	niveau4	[150,200]	1,67
niveau5	[200,250]	8,33	9,165	niveau5	[200,250]	10
niveau6	[250,300]	11,7	20	niveau6	[250,300]	28,3
niveau7	[300,350]	31,7	27,5	niveau7	[300,350]	23,3
niveau8	[350,400]	10	18,35	niveau8	[350,400]	26,7
niveau9	[400,450]	15	9,165	niveau9	[400,450]	3,33
niveau10	[450,500]	10	5,835	niveau10	[450,500]	1,67

Tableau V.18 Paramètres estimés sur les variables sources améliorées et leur moyenne $\bar{\theta}^{source}$

5. Variable cible PT^{x1t}: fusionner les paramètres $\theta^{cx1t\prime}_{PT} = f_{cible} * \theta^{cx1t}_{PT} + (1 - f_{cible}) * \bar{\theta}^{source}$ (voir le Tableau V.19)

Paramètre cible avant transfert θ_{PT}^{cx1t}(%)			Paramètre cible après transfert $\theta_{PT}^{cx1t'}$(%)		
niveau1	[0,50]	0,006	niveau1	[0,50]	1,67
niveau2	[50,100]	0,078	niveau2	[50,100]	2,000
niveau3	[100,150]	0,68	niveau3	[100,150]	2,000
niveau4	[150,200]	3,58	niveau4	[150,200]	6,344
niveau5	[200,250]	11,6	niveau5	[200,250]	8,662
niveau6	[250,300]	23	niveau6	[250,300]	20
niveau7	[300,350]	28	niveau7	[300,350]	27,982
niveau8	[350,400]	20,9	niveau8	[350,400]	19,344
niveau9	[400,450]	9,54	niveau9	[400,450]	7,662
niveau10	[450,500]	2,67	niveau10	[450,500]	4,326

Tableau V.19 Variable cible avant transfert et après transfert

L'étape 1 est terminée. Elle a permis d'identifier les paramètres de « précipitation totale » de l'objet O_{x1t} où $x = 1,2,3$. Pour les étapes 2 et 3, la procédure est identique, mis à part que les données sources améliorées ont besoin d'être adaptées selon la relation mathématique de l'équation (**Equation 30**).

La divergence de KL de variable « précipitation totale » avec la variable cible PT^{x1t} et sources PT^{x2t} et PT^{x3t} est présentée dans le Tableau V.20.

Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible PT^{x1t}, variables sources PT^{x2t} et PT^{x3t}	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{seul}^{x1\cdot})$	2,864
	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{transfert}^{\cdot})$	2,593
ETAPE 2 : variable cible PT^{x2t}, variables sources PT^{x1t} et PT^{x3t}	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{seul}^{x2\cdot})$	5,949
	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{transfert}^{\cdot})$	3,557
ETAPE 3 : variable cible PT^{x3t}, variables sources PT^{x1t} et PT^{x2t}	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{seul}^{x3\cdot})$	5,077
	$KL(PT_{origine}\|\|\widehat{PT}_{transfert}^{\cdot})$	3,025

Tableau V.20 Divergence de KL de la précipitation totale

On note que les l'apprentissage par transfert améliore la qualité des résultats.

Caractéristique du courant (CC)

La caractéristique du courant (CC) est une variable mixte mettant en avant deux types de relation (variable à paramètres identiques (VI) et liés (VL)).

Les objets de même niveau d'altitude/latitude ont des paramètres identiques. Ainsi, les variables à paramètres identiques sont telles que :

$$\begin{cases} CC^{11t} = CC^{21t} = CC^{31t} \\ CC^{12t} = CC^{22t} = CC^{32t} \\ CC^{13t} = CC^{23t} = CC^{33t} \end{cases}$$

La relation entre les objets entre différents niveaux d'altitude/latitude est connue à travers la relation physique indiquant une augmentation de 20% de la variable d'une zone élémentaire à une autre dans la dimension considérée. Comme précédemment l'apprentissage par transfert sera conduit en 3 étapes :

$$\begin{cases} Etape\ 1 : variable\ cible\ CC^{x1t}, variables\ sources\ CC^{x2t}\ et\ CC^{x3t} \\ Etape\ 2 : variable\ cible\ CC^{x2t}, variables\ sources\ CC^{x1t}\ et\ CC^{x3t} \\ Etape\ 3 : variable\ cible\ CC^{x3t}, variables\ sources\ CC^{x1t}\ et\ CC^{x2t} \end{cases}$$

Seule l'étape 1 sera décrite à la suite. Les étapes 2 et 3 suivent les mêmes procédures.

CAS 1 : variable cible CC^{x1t} & variables sources CC^{x2t} et CC^{x3t}

Au niveau données :

1. **CC^{x1t} :** extraire toutes les données de CC^{x1t} et les stocker dans DCC_{cible}^{x1t}
2. **CC^{x2t} :** extraire toutes les données de CC^{x2t} et les stocker dans DCC_{source}^{x2t}
3. **CC^{x3t} :** extraire toutes les données de CC^{x2t} et les stocker dans DCC_{source}^{x3t}

Au niveau paramètres :

1. Variable cible **CC^{x1t}** : faire l'apprentissage sur la variable CC^{x1t}avec les données DCC_{cible}^{x1t}. Stocker le paramètre cible θ_{CC}^{cx1t}(voir le Tableau V.21)

Paramètre cible θ_{CC}^{cx1t} (%)	
faible	20,8
moyen	32,1
fort	47,2

Tableau V.21 Paramètre cible CC^{x1t}

2. Variable source améliorée **CC^{x2t}** : faire l'apprentissage sur la variable source CC^{x2t} avec les données DCC_{source}^{x2t} . Stocker le paramètre source θ_{CC}^{sx2t}. Calculer le paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx2t'}$(voir le Tableau V.22)

Paramètre source origine θ_{CC}^{sx2t} (%)		Paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx2t'}$(%)	
faible	32,1	faible (z) = faible+moyen*0.2	28,094
moyen	26,4	moyen(y) = moyen*0.8+fort*0.2	20,031
fort	41,5	fort(x) = fort*0.8	51,875

Tableau V.22 Paramètre source amélioré CC^{x2t}

3. Variable source améliorée **CC^{x3t}** : faire l'apprentissage sur la variable CC^{x3t} avec les données DCC_{source}^{x3t} . Stocker le paramètre source θ_{CC}^{sx3t} . Calculer le paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx3t'}$(voir le Tableau V.23)

Paramètre source origine θ_{CC}^{sx3t} (%)		Paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx3t\to x2t}$ (%)		Paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx3t'}$ (%)	
faible	26,4	faible(z)=faible-y*0.2	20,375	faible(z')=z $- y' * 0.2$	15,938
moyen	34	moyen(y)=(moyen-0.2*x)/0.8	30,125	moyen(y')=($y - 0.2 * x'$)/0.8	22,188
fort	39,6	fort(x)=fort/0.8	49,5	fort(x')=x/0.8	61,875

Tableau V.23 Paramètre source amélioré CC^{x3t}

Tableau V.23 présente la procédure pour calculer le paramètre source amélioré ; car la variable « caractéristique du courant » de l'objet O_{x3t} a une relation avec l'objet O_{x2t} et l'objet O_{x2t} a une relation avec l'objet cible O_{x1t}. Ici nous avons introduit un paramètre source amélioré auxiliaire $\theta_{CC}^{sx3t\to x2t}$ qui transforme le paramètre obtenu de O_{x3t} à O_{x2t} ; à partir duquel nous calculons le paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx3t'}$.

4. Paramètre fusionné : calculer l'indice de fusion c_f, f_{cible} . Calculer la probabilité source moyenne $\bar{\theta}^{source}$ (voir les Tableau V.24 et Tableau V.25)

Paramètres de fusion : f_{cible}, c_f		
Nombre de cas (N_{cas})		50
Taille du tableau de probabilités conditionnelles (T_{cpt})		3
$c_f = \frac{N_{cas}}{2 * T_{cpt}}$		8.33
$c_f \geq 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{log c_f}{C_f}$	**0.890**
$c_f < 3$	$f_{cible} = 1 - \frac{c_f * log3}{3}$	-0.325

Tableau V.24 Paramètre de fusion de CC^{x1t}

	Paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx2t'}$ (%)	Paramètre source amélioré $\theta_{CC}^{sx3t'}$ (%)	moyen $\bar{\theta}^{source}$(%)
faible	28,094	22,016	15,938
moyen	20,032	21,109	22,188
fort	51,875	56,875	61,875

Tableau V.25 Paramètre source moyenne $\bar{\theta}^{source}$

Comme $c_f = 8.33$ dans le cas d'étude, la valeur retenue pour f_{cible} correspond à la cellule en bleu soit $f_{cible} = 0.89$.

5. Variable cible CC^{x1t}: fusionner les paramètres $\theta_{PT}^{cx1t\prime} = f_{cible} * \theta_{CC}^{cx1t} + (1 - f_{cible}) * \bar{\theta}^{source}$

Paramètre cible avant transfert θ_{CC}^{cx1t}(%)		Paramètre cible après transfert $\theta_{CC}^{cx1t'}$(%)	
faible	20,8	faible	20,934
moyen	32,1	moyen	30,886
fort	47,2	fort	48,269

Tableau V.26 Variable cible CC^{x1t} avant transfert et après transfert

La différence de traitement entre la variable CC et la variable PT (traitée juste avant) réside dans le fait que pour la variable PT, l'apprentissage est réalisé au niveau des données sources améliorées alors que dans le cas de la variable CC, les données sources originelles sont utilisées pour l'apprentissage des paramètres qui sont ensuite modifiés en fonction de la relation connue.

Nous effectuons les mêmes procédures pour les **CAS 2 et 3**, et les divergences de KL sont données au Tableau V.27.

Divergence de KL		
ETAPE1 : variable cible CC^{x1t}, variables sources CC^{x2t} et CC^{x3t}	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{x1\cdot}_{seul})$	0,534
	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{\cdot}_{transfert})$	0,397
ETAPE 2 : variable cible CC^{x2t}, variables sources CC^{x1t} et CC^{x3t}	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{x2\cdot}_{seul})$	0,145
	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{\cdot}_{transfert})$	0,089
ETAPE 3 : variable cible CC^{x3t}, variables sources CC^{x1t} et CC^{x2t}	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{x3\cdot}_{seul})$	1,045
	$KL(CC_{origine}\|\|\widehat{CC}^{\cdot}_{transfert})$	0,817

Tableau V.27 Divergence de KL de la caractéristique du courant

Tableau V.27 montre qu'en termes de divergences – les paramètres estimés par transfert sont plus proche des paramètres d'origine.

La même procédure de transfert à deux niveaux est appliquée aux autres variables de la même catégorie. Les résultats en termes de divergences de KL sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

Couverture sol (CS): Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible CS^{x1t}, variables sources CS^{x2t} et CS^{x3t}	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{x1\cdot}_{seul})$	0,103
	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{\cdot}_{transfert})$	0,062
ETAPE 2 : variable cible CS^{x2t}, variables sources CS^{x1t} et CS^{x3t}	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{x2\cdot}_{seul})$	1,076
	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{\cdot}_{transfert})$	0,871
ETAPE 3 : variable cible CS^{x3t}, variables sources CS^{x1t} et CS^{x2t}	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{x3\cdot}_{seul})$	0,164
	$KL(CS_{origine}\|\|\widehat{CS}^{\cdot}_{transfert})$	0,280

Tableau V.28 Divergence de KL de la couverture sol

Approvisionnement en aval longitude ($Aval^x$): Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible $Aval^{x\,x1t}$, variables sources $Aval^{x\,x2t}$ et $Aval^{x\,x3t}$	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{x1\cdot}_{seul})$	0,312
	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{\cdot}_{transfert})$	0,257
ETAPE : variable cible $Aval^{x\,x2t}$, variables sources $Aval^{x\,x1t}$ et $Aval^{x\,x3t}$	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{x2\cdot}_{seul})$	0,339
	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{\cdot}_{transfert})$	0,338
ETAPE : variable cible $Aval^{x\,x3t}$, variables sources $Aval^{x\,x1t}$ et $Aval^{x\,x2t}$	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{x3\cdot}_{seul})$	0,306
	$KL(Aval^x{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^x}^{\cdot}_{transfert})$	0,299

Tableau V.29 Divergence de KL de l'approvisionnement d'eau en longitude aval

Approvisionnement en aval altitude/longitude ($Aval^y$): Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible $Aval^{y\,x1t}$, variables sources $Aval^y$ et $Aval^{y\,x3t}$	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^y}^{x1\cdot}_{seul})$	1,064
	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|Aval^{y\cdot}_{transfert})$	0,964
ETAPE 2 : variable cible $Aval^{y\,x2t}$, variables sources $Aval^{y\,x1t}$ et $Aval^{y\,x3t}$	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^y}^{x2\cdot}_{seul})$	0,766
	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^y}^{\cdot}_{transfert})$	0,750
ETAPE 3 : variable cible $Aval^{y\,x3t}$, variables sources $Aval^{y\,x1t}$ et $Aval^{y\,x2t}$	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^y}^{x3\cdot}_{seul})$	0,953
	$KL(Aval^y{}_{origine}\|\|\widehat{Aval^y}^{\cdot}_{transfert})$	0,907

Tableau V.30 Divergence de KL de l'approvisionnement d'eau en altitude/latitude aval

Radiation (R) : Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible R^{x1t}, variables sources R^{x2t} et R^{x3t}	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{x1\cdot}_{seul})$	0,111
	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{\cdot}_{transfert})$	0,094
ETAPE 2 : variable cible R^{x2t}, variables sources R^{x1t} et R^{x3t}	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{x2\cdot}_{seul})$	0,760
	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{\cdot}_{transfert})$	0,513
ETAPE 3 : variable cible R^{x3t}, variables sources R^{x1t} et R^{x2t}	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{x3\cdot}_{seul})$	1,679
	$KL(R_{origine}\|\|\hat{R}^{\cdot}_{transfert})$	1,444

Tableau V.31 Divergence de KL de la radiation

Température (T) : Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible T^{x1t}, variables sources T^{x2t} et T^{x3t}	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{x1\cdot}_{seul})$	3,110
	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{\cdot}_{transfert})$	2,745
ETAPE 2 : variable cible T^{x2t}, variables sources T^{x1t} et T^{x3t}	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{x2\cdot}_{seul})$	4,107
	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{\cdot}_{transfert})$	2,519
ETAPE 3 : variable cible T^{x3t}, variables sources T^{x1t} et T^{x2t}	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{x3\cdot}_{seul})$	2,722
	$KL(T_{origine}\|\|\hat{T}^{\cdot}_{transfert})$	2,104

Tableau V.32 Divergence de KL de la température

Ecoulement surface (ES): Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible ES^{x1t}, variables sources ES^{x2t} et ES^{x3t}	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{x1\cdot}_{seul})$	0,825
	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{\cdot}_{transfert})$	0,729
ETAPE 2 : variable cible ES^{x2t}, variables sources ES^{x1t} et ES^{x3t}	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{x2\cdot}_{seul})$	0,511
	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{\cdot}_{transfert})$	0,486
ETAPE 3 : variable cible ES^{x3t}, variables sources ES^{x1t} et ES^{x2t}	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{x3\cdot}_{seul})$	0,582
	$KL(ES_{origine}\|\|\widehat{ES}^{\cdot}_{transfert})$	0,496

Tableau V.33 Divergence de KL de l'écoulement surface

Ecoulement subsurface (ESs) : Divergence de KL		
ETAPE 1 : variable cible ESs^{x1t}, variables sources ESs^{x2t} et ESs^{x3t}	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{x1\cdot}_{seul})$	0,550
	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{\cdot}_{transfert})$	0,732
ETAPE 2 : variable cible ESs^{x2t}, variables sources ESs^{x1t} et ESs^{x3t}	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{x2\cdot}_{seul})$	0,599
	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{\cdot}_{transfert})$	0,538
ETAPE 3 : variable cible ESs^{x3t}, variables sources ESs^{x1t} et ESs^{x2t}	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{x3\cdot}_{seul})$	1,083
	$KL(ESs_{origine}\|\|\widehat{ESs}^{\cdot}_{transfert})$	0,657

Tableau V.34 Divergence de KL de l'écoulement subsurface

D'une manière générale, les Tableau V.28 à Tableau V.34 démontrent une amélioration de la qualité des paramètres estimés lorsque l'apprentissage est réalisé par transfert.

V.3.4 Paramétrer et stocker les objets

Une fois les tables de probabilités conditionnelles estimées, les paramètres sont affectés aux variables. Les indices xyt sont utilisés pour distinguer les variables des trois dimensions. L'Algorithme III.1 et la Fonction III.1 servent à paramétrer et stocker les objets.

Le RBM décrivant le modèle d'inondation dans un bassin versant est maintenant complètement terminé et peut être utilisé comme outil d'aide à la décision. Les calculs d'inférence a priori et a posteriori permettant la mise à jour des probabilités font l'objet de la section suivante.

V.4 Inférence

Un des objectifs d'un RBM est de servir d'outils d'aide à la décision à travers la possibilité de propager une information ou observation locale. Pour le bassin versant que nous venons de modéliser, 2 objectifs sont poursuivis : la propagation dynamique sans observations ou inférence a priori ; la prévision des résultats suite à l'introduction d'une nouvelle connaissance (ou une observation) quelque part dans le réseau ou inférence a posteriori.

Nous rappelons que le système étudié correspond à un système à trois dimensions – longitude, latitude/altitude et temps. Les algorithmes et fonctions de propagation d'information ont été proposés au Chapitre IV.

V.4.1 Inférence a priori

Le système étudié étant de rang 1 sans décalage, il n'y a pas de modifications à faire et les algorithmes de propagation peuvent être directement appliqués.

Arbitrairement, nous considérons que la propagation des informations se fait dans un premier temps selon les dimensions spatiales (dimensions géographiques « X » et « Y ») en négligeant les temps d'écoulement entre zones situées à des altitudes différentes, puis, dans un second temps, selon la dimension temporelle (Figure V.14).

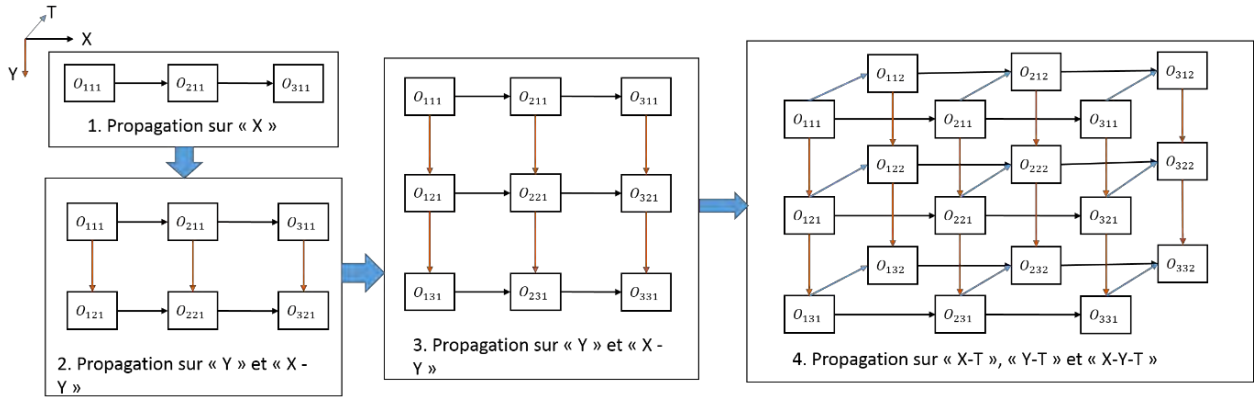


Figure V.14 Processus de l'inférence a priori

Le bassin versant étant découpé en 9 zones géographiques et sur la base d'une simulation de 6 pas de temps, le RBM déployé sera composé de 54 objets et 1350 variables (25 variables par objet).

La plateforme de simulation utilisée s'appuie sur le logiciel NETICA et des algorithmes en JAVA et mySQL développés par nos soins.

La Figure V.14 décrit les quatre premières étapes de l'inférence a priori :

1. Les calculs commencent au sein de l'objet initial O_{111}, objet initial à trois dimensions « X-Y-T ». Les informations sont ensuite propagées sur la dimension « X » (longitude géographique). O_{111} communique les valeurs de son nœud de sortie ($Aval^{x}_{111}$) à l'objet en aval sur la même dimension ($Amont^{x}_{211}$). Les objets O_{211} et O_{311} communiquent par leur canal de communication. Le nœud $Aval^{x}_{211}$ envoie ainsi au nœud $Amont^{x}_{311}$les informations correspondant à ses probabilités marginales (cadre 1 de la Figure V.14 terminé).
2. La propagation sur la dimension « Y » démarre via l'objet O_{121}, objet initial pour les dimensions correspondant à la longitude (« X ») et au temps (« T »). Il n'a donc besoin que de l'information en entrée de la dimension « Y », (altitude/latitude géographique), information qui lui sera communiquée par l'objet amont O_{111} via son nœud d'entrée $Amont^{y}_{121}$. Le calcul local peut donc être réalisé au sein de l'objet O_{121} qui communiquera à son tour ses sorties à l'objet en aval sur la dimension « X » (O_{221}). A partir des informations à sa disposition relatives aux nœuds $Aval^{x}_{121}$ et $Aval^{y}_{211}$, O_{221} pourra réaliser son calcul local et transmettre les informations à ses voisins par ses nœuds de sortie $Aval^{y}_{211}$. Selon les mêmes principes, l'objet O_{321} pourra alors réaliser son calcul local (cadre de la Figure V.14 terminé).
3. La même démarche est poursuivie par propagation des informations des objets O_{x21} vers les objets du niveau suivant dans la dimension « X » Les calculs locaux pourront alors être réalisés progressivement au sein des objets O_{131}, O_{231}, O_{331} (cadre 3 de la Figure V.14 terminé).
4. Finalement, les informations sont propagées dans la dimension temporelle selon les mêmes principes. Le tout dernier calcul concernera le nœud O_{333} sera en mesure de réaliser son évaluation locale à partir des informations en provenance respective des trois dimensions communiquées par les nœuds de sortie $Aval^{x}_{232}$, $Aval^{x}_{322}$, $Aval^{x}_{331}$ (cadre 4 de la Figure V.14 terminé).

V.4.2 Inférence a posteriori

L'objectif d'une inférence a posteriori est la propagation d'une observation dans un réseau. Nous présentons l'inférence a posteriori appliqué au cas d'étude traité dans ce chapitre en considérant l'hypothèse que trois observations ont été réalisées au sein de trois objets différents. Les démarches d'inférence seront détaillées à la suite mais les résultats ne seront pas commentés car obtenus à partir de données fictives.

La simulation est faite en considérant qu'à l'instant t=3, le niveau de la fonte des neiges est important sur les zones du milieu de la dimension correspondant à la longitude géographique. Sur la base de cette hypothèse, les variables FN^{123}, FN^{223},FN^{323} au sein des objets de même indice voient leur modalité « *forte* » affectée de la probabilité 1 puisqu'il s'agit d'une évidence (voir Figure V.15). Cette observation doit alors être propagée aux autres objets du réseau.

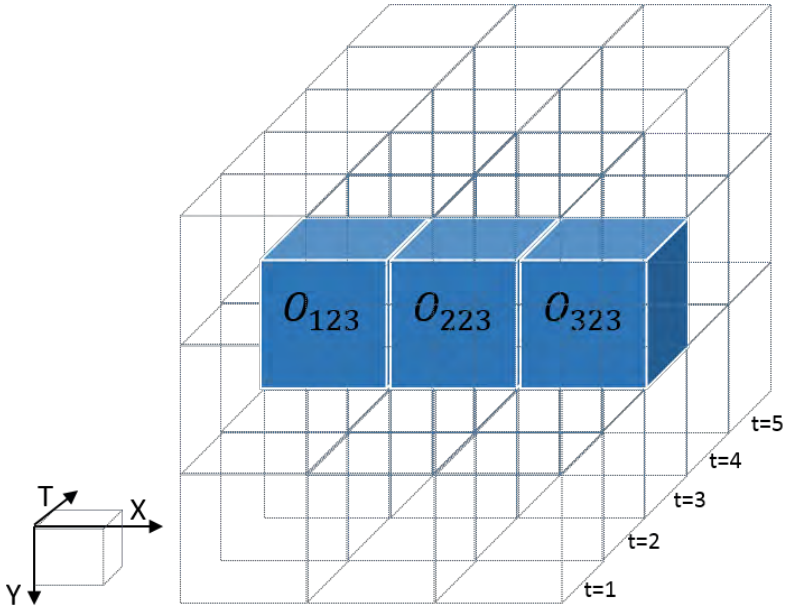


Figure V.15 Evidence dans le RBM

Les étapes de l'inférence a posteriori sont résumées en Figure V.16. On distingue 6 cas pour mener à bien les calculs et propager l'information observée.

- le « Cas 1 » correspond à la propagation des informations vers les objets amonts sur les 3 axes après le calcul local dans l'objet d'évidence ;
- le « Cas 2 » démarre après le cas 1. Il décrit la propagation vers les objets situés sur les plans « X-Y », « X-T » et « Y-T ». Il correspond à une forme de diagnostic dans la mesure où, partant d'une situation avérée, on recherche ses causes racines (ici sur les trois plans).

Les deux premiers cas sont des étapes obligatoires dans la propagation a posteriori dans un RBM. Les cas 3 et 4 dépendent des objectifs poursuivis et peuvent être réalisés en parallèle.

- le « Cas 3 » correspond à un diagnostic complet sur les 3 dimensions en remontant jusqu'aux origines du modèle.

On notera que le « Cas 2 » et le « Cas 3 » ont besoin de réseaux auxiliaires pour le transfert des différentes informations. Dans le « Cas 2 » correspondant aux entrées « X-Y », « X-T » et « Y-T » 3 réseaux auxiliaires sont à construire pour chaque plan vert de la Figure V.16. Pour le « Cas 3 » un seul réseau auxiliaire sera nécessaire pour transférer les informations correspondant aux entrées « X-Y-T ».

- La propagation dans les « Cas 4, 5, 6 » suit les mêmes directions de propagation que l'inférence à priori. L'ordre de traitement est imposé et doit être réalise selon la séquence suivante : « $Cas\ 4 \rightarrow Cas\ 5 \rightarrow Cas\ 6$ »

On notera que les trois espaces grisés du « Cas 4 » et « du Cas 5 » peuvent conduire à des calculs parallèles.

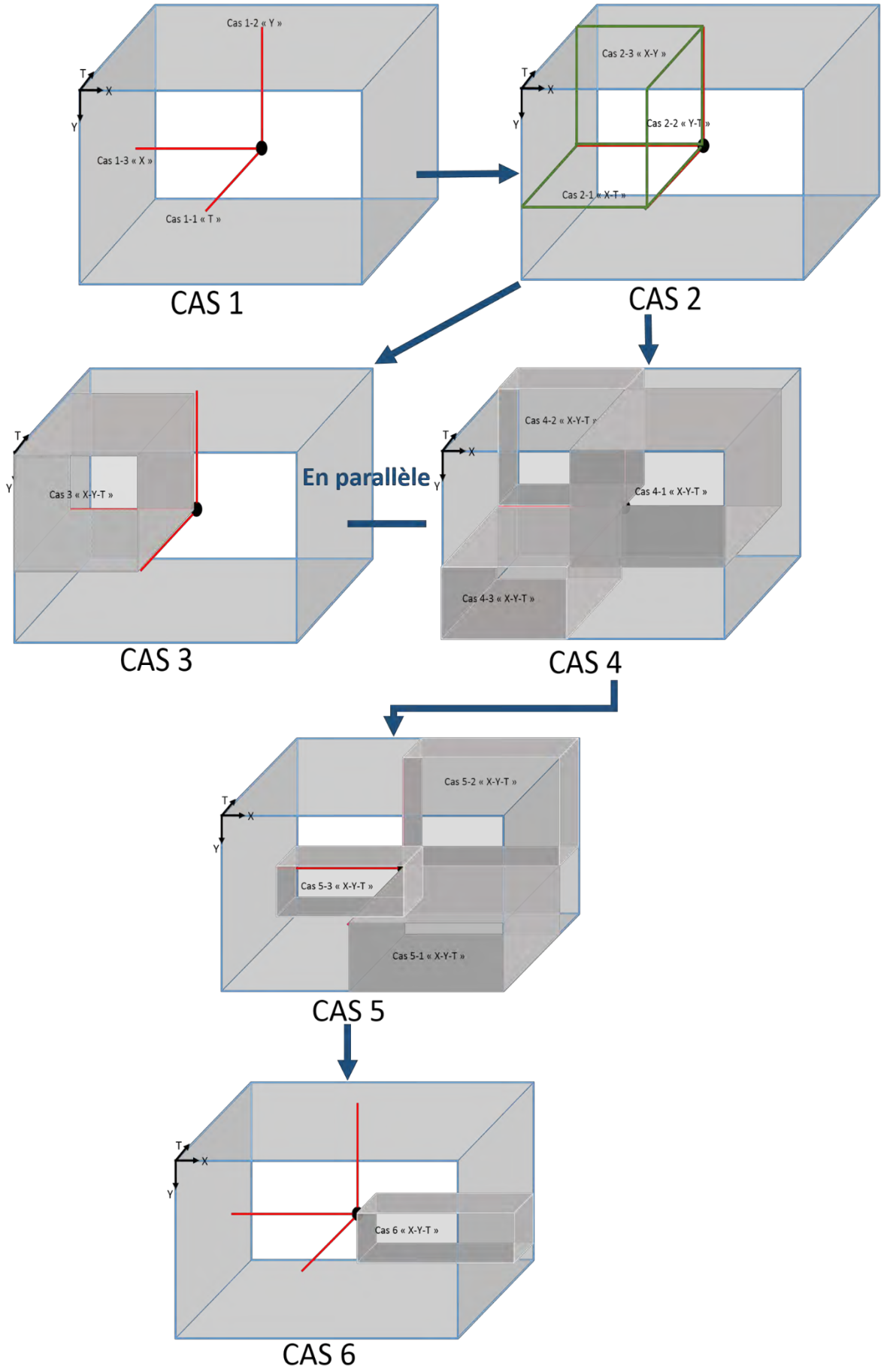


Figure V.16 Inférence a posteriori en trois dimensions

A la suite, nous étudions la propagation des informations $FN^{123} = fort$, $FN^{223} = fort$, $FN^{323} = fort$ en ne considérant qu'une observation à la fois.

Première observation : $FN^{123} = fort$ dans l'objet O_{123}

« Cas 1 » : on a que deux dimensions « Y » et « T » à considérer car l'objet O_{123} est un objet initial sur la dimension « X ». La circulation des informations est décrite dans les tableaux ci-dessous :

Axe « Y »	
Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorites
$O_{123} \rightarrow O_{113}$	$Amont_y^{123} \rightarrow Aval_y^{123}$

Tableau V.35 Circulation des informations relatives au « Cas 1 – Dimension Y » avec $FN^{123} = fort$

Axe « T »	
Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorties
$O_{123} \rightarrow O_{122}$	$MN_{t-1}^{123} \rightarrow MN_{t+1}^{122}, HS_{t-1}^{123} \rightarrow HS_{t+1}^{122}$
$O_{122} \rightarrow O_{121}$	$MN_{t-1}^{122} \rightarrow MN_{t+1}^{121}, HS_{t-1}^{122} \rightarrow HS_{t+1}^{121}$

Tableau V.36 Circulation des informations relatives au « Cas 1 – Dimension T » avec $FN^{123} = fort$

« Cas 2 » : deux plans sont à considérer car l'objet O_{123} est l'objet initial sur la dimension « X » et les détails de circulations des informations sont indiqués sur le tableau ci-dessous :

Plan « Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Entrée → Sortie
1	$\begin{cases} O_{122}(Axe\ Y) \\ O_{113}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{112}$	$\begin{cases} Amont_y^{122} \rightarrow Aval_y^{122} \\ MN_{t-1}^{113} \rightarrow MN_{t+1}^{112}, HS_{t-1}^{113} \rightarrow HS_{t+1}^{112} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{121}(Axe\ Y) \\ O_{112}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{111}$	$\begin{cases} Amont_y^{121} \rightarrow Aval_y^{111} \\ MN_{t-1}^{112} \rightarrow MN_{t+1}^{111}, HS_{t-1}^{112} \rightarrow HS_{t+1}^{111} \end{cases}$

Tableau V.37 Circulation des informations relatives au « Cas 2 – Plan Y-T » avec $FN^{123} = fort$

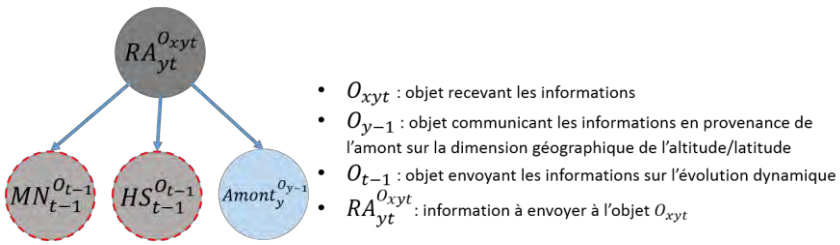


Figure V.17 Réseau auxiliaire relatif au plan « Y-T »

Tableau V.37 montre les communications entre objets pour le « Cas 2 ». Les informations relatives aux dimensions géographique altitude/latitude (« Y ») et temporelle (« T ») sur un plan sont remontées. La première colonne du Tableau V.37 indique l'ordre à suivre entre objets sur le plan. La communication nécessitant de combiner deux types d'informations, il est nécessaire de construire un réseau auxiliaire Figure V.17 pour l'estimation des variables $RA_{yt}^{O_{111}}$ et $RA_{yt}^{O_{112}}$ dont les valeurs seront ensuite communiquées aux nœuds O_{111} et O_{112}.

« Cas 3 » : Comme l'objet d'évidence O_{123} est le premier objet suivant l'axe « X », il n'y a pas de « Cas 3 » ici.

« Cas 4 » : Ce cas possède trois sous-espaces grises et les détails de circulation se présentent sur le tableau ci-dessous :

Cas 4-1 « X-Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Sorties → Entrées
1	$O_{111}(AxeX) \rightarrow O_{211}$	$Aval_x^{111} \rightarrow Amont_x^{211}$
2	$O_{211}(AxeX) \rightarrow O_{311}$	$Aval_x^{211} \rightarrow Amont_x^{311}$
3	$\begin{cases} O_{121}(Axe\ X) \\ O_{211}(Axe\ Y) \end{cases} \rightarrow O_{221}$	$\begin{cases} Aval_x^{121} \rightarrow Amont_x^{221} \\ Aval_y^{211} \rightarrow Amont_y^{221} \end{cases}$
4	$\begin{cases} O_{221}(Axe\ X) \\ O_{311}(Axe\ Y) \end{cases} \rightarrow O_{321}$	$\begin{cases} Aval_x^{221} \rightarrow Amont_x^{321} \\ Aval_y^{311} \rightarrow Amont_y^{321} \end{cases}$
5	$\begin{cases} O_{112}(Axe\ X) \\ O_{211}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{212}$	$\begin{cases} Aval_x^{112} \rightarrow Amont_x^{212} \\ MN_{t+1}^{211} \rightarrow MN_{t-1}^{212}, HS_{t+1}^{211} \rightarrow HS_{t-1}^{212} \end{cases}$
6	$\begin{cases} O_{212}(Axe\ X) \\ O_{311}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{312}$	$\begin{cases} Aval_x^{212} \rightarrow Amont_x^{312} \\ MN_{t+1}^{311} \rightarrow MN_{t-1}^{312}, HS_{t+1}^{311} \rightarrow HS_{t-1}^{312} \end{cases}$
7	$\begin{cases} O_{122}(Axe\ X) \\ O_{212}(Axe\ Y) \\ O_{221}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{222}$	$\begin{cases} Aval_x^{122} \rightarrow Amont_x^{222} \\ Aval_y^{212} \rightarrow Amont_y^{222} \\ MN_{t+1}^{221} \rightarrow MN_{t-1}^{222}, HS_{t+1}^{221} \rightarrow HS_{t-1}^{222} \end{cases}$
8	$\begin{cases} O_{222}(Axe\ X) \\ O_{312}(Axe\ Y) \\ O_{321}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{322}$	$\begin{cases} Aval_x^{222} \rightarrow Amont_x^{322} \\ Aval_y^{312} \rightarrow Amont_y^{322} \\ MN_{t+1}^{321} \rightarrow MN_{t-1}^{322}, HS_{t+1}^{321} \rightarrow HS_{t-1}^{322} \end{cases}$
9	$\begin{cases} O_{113}(Axe\ X) \\ O_{212}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{213}$	$\begin{cases} Aval_x^{113} \rightarrow Amont_x^{213} \\ MN_{t+1}^{212} \rightarrow MN_{t-1}^{213}, HS_{t+1}^{212} \rightarrow HS_{t-1}^{213} \end{cases}$
10	$\begin{cases} O_{213}(Axe\ X) \\ O_{312}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{313}$	$\begin{cases} Aval_x^{213} \rightarrow Amont_x^{313} \\ MN_{t+1}^{312} \rightarrow MN_{t-1}^{313}, HS_{t+1}^{312} \rightarrow HS_{t-1}^{313} \end{cases}$
11	$\begin{cases} O_{123}(Axe\ X) \\ O_{213}(Axe\ Y) \\ O_{222}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{223}$	$\begin{cases} Aval_x^{123} \rightarrow Amont_x^{223} \\ Aval_y^{213} \rightarrow Amont_y^{223} \\ MN_{t+1}^{222} \rightarrow MN_{t-1}^{223}, HS_{t+1}^{222} \rightarrow HS_{t-1}^{223} \end{cases}$
12	$\begin{cases} O_{223}(Axe\ X) \\ O_{313}(Axe\ Y) \\ O_{322}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{323}$	$\begin{cases} Aval_x^{223} \rightarrow Amont_x^{323} \\ Aval_y^{313} \rightarrow Amont_y^{323} \\ MN_{t+1}^{322} \rightarrow MN_{t-1}^{323}, HS_{t+1}^{322} \rightarrow HS_{t-1}^{323} \end{cases}$

Tableau V.38 Circulation des informations relatives au « Cas 4 – 1 » avec $FN^{123} = fort$

Les objets concernés dans ce cas reçoivent leurs entrées selon leur position :

- O_{211}, O_{311} ont besoin d'une entrée par objet ;
- $O_{221}, O_{321}, O_{212}, O_{312}, O_{213}$ et O_{313} ont besoin de deux types d'entrées selon leur position ;
- tous les autres objets ont besoin de trois types d'entrées.

Les communications entre les entrées/sorties sont détaillées sur le Tableau V.38.

Le traitement des « Cas 4 -2 » et « Cas 4-3 » se fait selon les mêmes principes que pour le « Cas 4 -1 ». Le « Cas 4-2 » correspond à un plan « Y-T » et permet la mise à jour des objets $O_{114}, O_{124}, O_{115}, O_{125}, O_{116}$et O_{126} . Le « Cas 4-3 » correspond également à un plan « Y-T » et permet la mise à jour des objets O_{131} et O_{132} (dans l'ordre indiqué).

Notons que les trois cas peuvent faire leur inférence en parallèle.

« Cas 5 » : Une fois le « Cas 4 » terminé, toutes les informations sont disponibles pour faire l'inférence correspondant au « CAS 5 ». Trois sous-espaces sont également à considérer ci-après dénommés « Cas 5-1 », « Cas 5-2 » et « Cas 5-3 ». Seul le « Cas 5-2 » sera détaillé. Les étapes du calcul sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Cas 5-2 « X-Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Sorties → Entrées
1	$\begin{cases} O_{114}(Axe\ X) \\ O_{213}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{214}$	$\begin{cases} Aval_x^{114} \rightarrow Amont_x^{214} \\ MN_{t+1}^{213} \rightarrow MN_{t-1}^{214}, HS_{t+1}^{213} \rightarrow HS_{t-1}^{214} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{214}(Axe\ X) \\ O_{313}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{314}$	$\begin{cases} Aval_x^{214} \rightarrow Amont_x^{314} \\ MN_{t+1}^{313} \rightarrow MN_{t-1}^{314}, HS_{t+1}^{313} \rightarrow HS_{t-1}^{314} \end{cases}$
3	$\begin{cases} O_{124}(Axe\ X) \\ O_{214}(Axe\ Y) \\ O_{223}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{224}$	$\begin{cases} Aval_x^{124} \rightarrow Amont_x^{224} \\ Aval_y^{214} \rightarrow Amont_y^{224} \\ MN_{t+1}^{223} \rightarrow MN_{t-1}^{224}, HS_{t+1}^{223} \rightarrow HS_{t-1}^{224} \end{cases}$
4	$\begin{cases} O_{224}(Axe\ X) \\ O_{314}(Axe\ Y) \\ O_{323}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{324}$	$\begin{cases} Aval_x^{224} \rightarrow Amont_x^{324} \\ Aval_y^{314} \rightarrow Amont_y^{324} \\ MN_{t+1}^{323} \rightarrow MN_{t-1}^{324}, HS_{t+1}^{323} \rightarrow HS_{t-1}^{324} \end{cases}$
5	$\begin{cases} O_{115}(Axe\ X) \\ O_{214}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{215}$	$\begin{cases} Aval_x^{115} \rightarrow Amont_x^{215} \\ MN_{t+1}^{214} \rightarrow MN_{t-1}^{215}, HS_{t+1}^{214} \rightarrow HS_{t-1}^{215} \end{cases}$
6	$\begin{cases} O_{215}(Axe\ X) \\ O_{314}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{315}$	$\begin{cases} Aval_x^{215} \rightarrow Amont_x^{315} \\ MN_{t+1}^{314} \rightarrow MN_{t-1}^{315}, HS_{t+1}^{314} \rightarrow HS_{t-1}^{315} \end{cases}$
7	$\begin{cases} O_{125}(Axe\ X) \\ O_{215}(Axe\ Y) \\ O_{224}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{225}$	$\begin{cases} Aval_x^{125} \rightarrow Amont_x^{225} \\ Aval_y^{215} \rightarrow Amont_y^{225} \\ MN_{t+1}^{224} \rightarrow MN_{t-1}^{225}, HS_{t+1}^{224} \rightarrow HS_{t-1}^{225} \end{cases}$
8	$\begin{cases} O_{225}(Axe\ X) \\ O_{315}(Axe\ Y) \\ O_{324}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{325}$	$\begin{cases} Aval_x^{225} \rightarrow Amont_x^{325} \\ Aval_y^{315} \rightarrow Amont_y^{325} \\ MN_{t+1}^{324} \rightarrow MN_{t-1}^{325}, HS_{t+1}^{324} \rightarrow HS_{t-1}^{325} \end{cases}$
9	$\begin{cases} O_{116}(Axe\ X) \\ O_{215}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{216}$	$\begin{cases} Aval_x^{116} \rightarrow Amont_x^{216} \\ MN_{t+1}^{215} \rightarrow MN_{t-1}^{216}, HS_{t+1}^{215} \rightarrow HS_{t-1}^{216} \end{cases}$
10	$\begin{cases} O_{216}(Axe\ X) \\ O_{315}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{316}$	$\begin{cases} Aval_x^{216} \rightarrow Amont_x^{316} \\ MN_{t+1}^{315} \rightarrow MN_{t-1}^{316}, HS_{t+1}^{315} \rightarrow HS_{t-1}^{316} \end{cases}$
11	$\begin{cases} O_{126}(Axe\ X) \\ O_{216}(Axe\ Y) \\ O_{225}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{226}$	$\begin{cases} Aval_x^{126} \rightarrow Amont_x^{226} \\ Aval_y^{216} \rightarrow Amont_y^{226} \\ MN_{t+1}^{225} \rightarrow MN_{t-1}^{226}, HS_{t+1}^{225} \rightarrow HS_{t-1}^{226} \end{cases}$
12	$\begin{cases} O_{226}(Axe\ X) \\ O_{316}(Axe\ Y) \\ O_{325}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{326}$	$\begin{cases} Aval_x^{226} \rightarrow Amont_x^{326} \\ Aval_y^{316} \rightarrow Amont_y^{326} \\ MN_{t+1}^{325} \rightarrow MN_{t-1}^{326}, HS_{t+1}^{325} \rightarrow HS_{t-1}^{326} \end{cases}$

Tableau V.39 Circulation des informations relatives au « Cas 5 – 2 » avec $FN^{123} = fort$

Les 12 objets concernés dans ce cas reçoivent leurs entrées selon leur position :

- $O_{214}, O_{314}, O_{215}, O_{315}, O_{216}$ et O_{316} ont besoin d'une entrée par objet sur les dimensions « X » et « T » ;
- les autres objets ont besoin de trois types d'entrées selon leur position.

Les communications entre entrées/sorties sont détaillées sur le Tableau V.39.

Le traitement des « Cas 5 -1 » et « Cas 5-3 » se fait selon les mêmes principes que pour le « Cas 5 -2 ». Le « Cas 5-1 » correspond à un plan « Y-T » et permet la mise à jour des objets $O_{231}, O_{331}, O_{232}, O_{332}, O_{233}$ et O_{333} . Le « Cas 5-3 » correspond également à un plan « Y-T » et permet la mise à jour des objets O_{134}, O_{135} et O_{136} (dans l'ordre indiqué).

« Cas 6 » : C'est la dernière étape de l'inférence à posteriori relative à l'observation $\mathrm{FN}^{123} = \mathrm{fort}$ dans l'objet O_{123} (voir Tableau V.40).

Cas 6 « X-Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Sorties → Entrées
1	$\begin{cases} O_{134}(Axe\ X) \\ O_{224}(Axe\ Y) \rightarrow O_{234} \\ O_{233}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{134} \rightarrow Amont_x^{234} \\ Aval_y^{224} \rightarrow Amont_y^{234} \\ MN_{t+1}^{233} \rightarrow MN_{t-1}^{234}, HS_{t+1}^{233} \rightarrow HS_{t-1}^{234} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{234}(Axe\ X) \\ O_{324}(Axe\ Y) \rightarrow O_{334} \\ O_{333}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{234} \rightarrow Amont_x^{334} \\ Aval_y^{324} \rightarrow Amont_y^{334} \\ MN_{t+1}^{333} \rightarrow MN_{t-1}^{334}, HS_{t+1}^{333} \rightarrow HS_{t-1}^{334} \end{cases}$
3	$\begin{cases} O_{135}(Axe\ X) \\ O_{225}(Axe\ Y) \rightarrow O_{235} \\ O_{234}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{135} \rightarrow Amont_x^{235} \\ Aval_y^{225} \rightarrow Amont_y^{235} \\ MN_{t+1}^{234} \rightarrow MN_{t-1}^{235}, HS_{t+1}^{234} \rightarrow HS_{t-1}^{235} \end{cases}$
4	$\begin{cases} O_{235}(Axe\ X) \\ O_{325}(Axe\ Y) \rightarrow O_{335} \\ O_{334}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{235} \rightarrow Amont_x^{335} \\ Aval_y^{325} \rightarrow Amont_y^{335} \\ MN_{t+1}^{334} \rightarrow MN_{t-1}^{335}, HS_{t+1}^{334} \rightarrow HS_{t-1}^{335} \end{cases}$
5	$\begin{cases} O_{136}(Axe\ X) \\ O_{226}(Axe\ Y) \rightarrow O_{236} \\ O_{235}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{136} \rightarrow Amont_x^{236} \\ Aval_y^{226} \rightarrow Amont_y^{236} \\ MN_{t+1}^{235} \rightarrow MN_{t-1}^{236}, HS_{t+1}^{235} \rightarrow HS_{t-1}^{236} \end{cases}$
6	$\begin{cases} O_{236}(Axe\ X) \\ O_{326}(Axe\ Y) \rightarrow O_{336} \\ O_{335}(Axe\ T) \end{cases}$	$\begin{cases} Aval_x^{236} \rightarrow Amont_x^{336} \\ Aval_y^{326} \rightarrow Amont_y^{336} \\ MN_{t+1}^{335} \rightarrow MN_{t-1}^{336}, HS_{t+1}^{335} \rightarrow HS_{t-1}^{336} \end{cases}$

Tableau V.40 Circulation des informations relatives au « Cas 6 » avec $FN^{123} = fort$

Deuxième observation : $FN^{223} = fort$ à l'objet O_{223}

La propagation dans ce cas procède de la même logique, mis à part que le « CAS 3 » est également à traiter.

« Cas 1 » : L'observation étant centrale au niveau du RBM, le « Cas 1 » concerne les trois dimensions. Les détails sont consignés dans les tableaux ci-dessous :

Axe « X »	
Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorites
$O_{223} \rightarrow O_{123}$	$Amont_x^{223} \rightarrow Aval_x^{123}$

Tableau V.41 Circulation des informations relatives au « Cas 1 – Dimension X » avec $FN^{223} = fort$

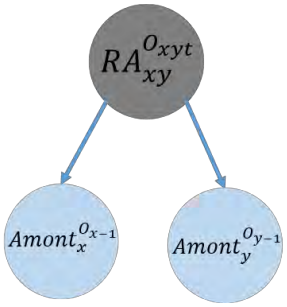
Axe « Y »	
Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorites
$O_{223} \rightarrow O_{213}$	$Amont_y^{223} \rightarrow Aval_y^{213}$

Tableau V.42 Circulation des informations relatives au « Cas 1 – Dimension Y» avec $FN^{223} = fort$

Axe « T »	
Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorites
$O_{223} \rightarrow O_{222}$	$MN_{t-1}^{223} \rightarrow MN_{t+1}^{222}, HS_{t-1}^{223} \rightarrow HS_{t+1}^{222}$
$O_{222} \rightarrow O_{221}$	$MN_{t-1}^{222} \rightarrow MN_{t+1}^{221}, HS_{t-1}^{222} \rightarrow HS_{t+1}^{221}$

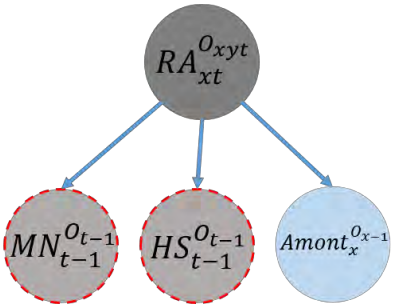
Tableau V.43 Circulation des informations relatives au « Cas 1 – Dimension T » avec $FN^{223} = fort$

« Cas 2 » : Il s'agit de propager les informations sur des plans « X-Y », « X-T » ou « Y-T » La direction de communication correspond à une transmission d'information de sorties en entrées. Les objets concernés dans ce cas-là ont besoin de deux types de sorties. Un réseau auxiliaire est donc nécessaire pour le traitement des objets sur chaque plan concerné. Sur les Figure V.17, Figure V.18 et Figure V.19 sont représentés les réseaux auxiliaires pour le traitement respectif des objets appartenant aux plans « X-Y », « X-T » et « Y-T ».



- O_{xyt} : objet recevant les informations
- O_{x-1} : objet communicant les informations en provenance de l'amont sur la dimension géographique de la longitude
- O_{y-1} : objet communicant les informations en provenance de l'amont sur la dimension géographique de l'altitude/latitude
- $RA_{xy}^{O_{xyt}}$: information à envoyer à l'objet O_{xyt}

Figure V.18 Réseau auxiliaire relatif au plan « X-Y »



- O_{xyt} : objet recevant les informations
- O_{x-1} : objet communicant les informations en provenance de l'amont sur la dimension géographique de la longitude
- O_{t-1} : objet envoyant les informations sur l'évolution dynamique
- $RA_{xt}^{O_{xyt}}$: information à envoyer à l'objet O_{xyt}

Figure V.19 Réseau auxiliaire relatif au plan « X-T »

Les réseaux des Figure V.17, Figure V.18 et Figure V.19 permettent de réunir les différents types d'entrées par réalisation d'un produit cartésien. Les directions de circulation des informations concernées sont consignées dans les tableaux ci-dessous :

Plan « X-Y »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorties
1	$\begin{cases} O_{213}(Axe\ X) \\ O_{123}(Axe\ Y) \end{cases} \rightarrow O_{113}$	$\begin{cases} Amont_x^{213} \rightarrow Aval_x^{113} \\ Amont_y^{123} \rightarrow Aval_y^{113} \end{cases}$

Tableau V.44 Circulation des informations relatives au « Cas 2 – Plan X-Y » avec $FN^{223} = fort$

Plan « X-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorties
1	$\begin{cases} O_{222}(Axe\ X) \\ O_{123}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{122}$	$\begin{cases} Amont_x^{222} \rightarrow Aval_x^{122} \\ MN_{t-1}^{123} \rightarrow MN_{t+1}^{122}, HS_{t-1}^{123} \rightarrow HS_{t+1}^{122} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{221}(Axe\ X) \\ O_{122}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{121}$	$\begin{cases} Amont_x^{221} \rightarrow Aval_x^{121} \\ MN_{t-1}^{122} \rightarrow MN_{t+1}^{121}, HS_{t-1}^{122} \rightarrow HS_{t+1}^{121} \end{cases}$

Tableau V.45 Circulation des informations relatives au « Cas 2 – Plan X-T » avec $FN^{223} = fort$

Plan « Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorties
1	$\begin{cases} O_{222}(Axe\ Y) \\ O_{213}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{212}$	$\begin{cases} Amont_y^{222} \rightarrow Aval_y^{212} \\ MN_{t-1}^{213} \rightarrow MN_{t+1}^{212}, HS_{t-1}^{213} \rightarrow HS_{t+1}^{212} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{221}(Axe\ Y) \\ O_{212}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{211}$	$\begin{cases} Amont_y^{221} \rightarrow Aval_y^{211} \\ MN_{t-1}^{212} \rightarrow MN_{t+1}^{211}, HS_{t-1}^{212} \rightarrow HS_{t+1}^{211} \end{cases}$

Tableau V.46 Circulation des informations relatives au « Cas 2 – Plan Y-T » avec $FN^{223} = fort$

« Cas 3 » : C'est une forme de « diagnostic » dans la mesure où la propagation est réalisée sur les trois dimensions. Un réseau auxiliaire est également requis pour regrouper les trois types d'entrées (voir Figure V.20).

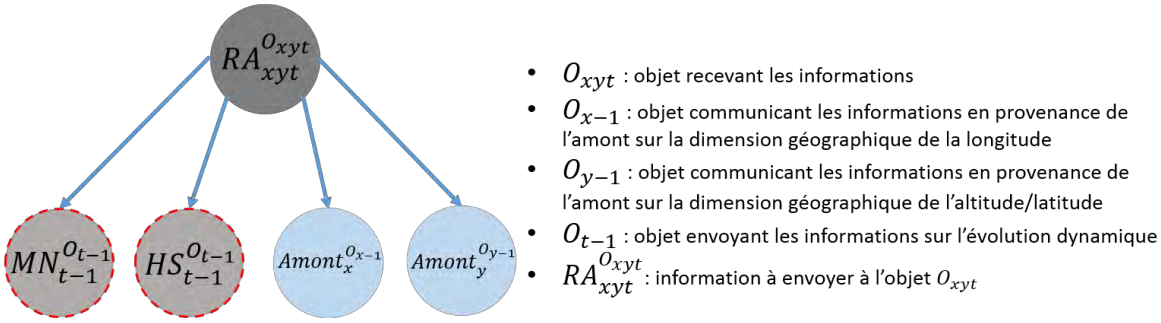


Figure V.20 Réseau relatif au volume « X-Y-T »

Les directions de circulation des informations concernées sont consignées dans les tableaux ci-dessous :

Cas 3 «X-Y-T »		
Ordre	Direction de circulation d'information au niveau local	Entrées → Sorties
1	$\begin{cases} O_{212}(Axe\ X) \\ O_{122}(Axe\ Y) \\ O_{113}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{112}$	$\begin{cases} Amont_x^{212} \rightarrow Aval_x^{112} \\ Amont_y^{122} \rightarrow Aval_y^{112} \\ MN_{t-1}^{113} \rightarrow MN_{t+1}^{112}, HS_{t-1}^{113} \rightarrow HS_{t+1}^{112} \end{cases}$
2	$\begin{cases} O_{211}(Axe\ X) \\ O_{121}(Axe\ Y) \\ O_{112}(Axe\ T) \end{cases} \rightarrow O_{111}$	$\begin{cases} Amont_x^{211} \rightarrow Aval_x^{111} \\ Amont_y^{121} \rightarrow Aval_y^{111} \\ MN_{t-1}^{112} \rightarrow MN_{t+1}^{111}, HS_{t-1}^{112} \rightarrow HS_{t+1}^{111} \end{cases}$

Tableau V.47 Circulation des informations relatives au « Cas 3 – X- Y-T » avec $FN^{223} = fort$

Les « Cas 4, 5, 6 » sont assimilables aux cas correspondants étudiés dans le cas de la première observation avec une direction de circulation entre objets qui correspond à une transmission d'information d'entrées en sorties.

Troisième observation : $FN^{323} = fort$ dans l'objet O_{323}

Ce cas ne sera pas traité car il suit les mêmes principes d'inférence que ceux décrits lors de l'explicitation des procédures relatives aux observations 1 et 2.

V.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre la possibilité d'utiliser le formalisme des Réseaux Bayésiens Multidimensionnels (RBM) pour la construction d'un outil d'aide à la décision. Plus précisément, le cas étudié ici concernait un modèle d'approvisionnement en eau d'un cours d'eau. Le modèle, volontairement simplifié ici, a vocation à être utilisé pour la gestion de risques ou de crises liés aux inondations. Les trois étapes principales du processus de construction d'un modèle RBM : construction structurelle du modèle, instanciation par apprentissage et utilisation en termes d'inférence, ont été illustrées. Pour ce faire, le bassin versant correspondant au système étudié a été divisé en neuf zones élémentaires homogènes. Chaque zone correspond à un objet dans le RBM. L'instanciation du modèle de classe par apprentissage (en utilisant la technique d'apprentissage par transfert) a été illustrée sur des données générées aléatoirement afin de montrer sa potentialité dès lors que l'on dispose des données. Enfin les algorithmes pour l'inférence a priori et a posteriori développés dans la thèse et codés sous la plateforme NETICA et les logiciels de programmation JAVA et mySQL ont été illustrés pour ce modèle de bassin versant. Même si le système étudié ici est plus démonstratif qu'un cas réel, on décèle à travers lui les potentialités d'utilisation du formalisme RBM pour modéliser des systèmes réels avec éventuellement le développement des méthodes spécifiques d'analyse de sensibilité et de précision par exemple.

Conclusions

et

Perspectives

Conclusions

Les objectifs de ce travail de thèse consistaient à modéliser et analyser des systèmes complexes dans un cadre incertain et évolutif. Un système complexe met en jeu de nombreuses interactions entre composants dans un cadre d'évolution dynamique et le plus souvent non-linéaire.

Après la présentation de quelques systèmes complexes dans différents domaines, une analyse bibliographique de la notion de complexité a été réalisée. Cette analyse a permis la proposition d'une définition d'un système complexe et mis en évidence ses composantes majeures reposant sur les notions d'émergence, de grande taille, d'interactions et de bouclages, de non linéarité, d'auto-organisation ou bien encore d'incertitude.

Le travail de modélisation s'est appuyé sur l'approche bayésienne et, plus particulièrement, sur les réseaux bayesiens. Un état de l'art du domaine a montré que malgré des vertus très intéressantes, les réseaux bayesiens devenaient rapidement difficiles d'utilisation lorsque la taille des systèmes croît et que la complexité augmente. Pour lever ce verrou de modélisation, des formes de représentation structurée supportée par les techniques orientées objets ont été développées. Elles visent à améliorer les performances des Réseaux Bayésiens en termes de complexité de spécification et d'inférence de systèmes de grande taille. Un Réseau Bayésien Orienté Objet, est issu d'une application directe du paradigme objet. Hélas, dans leur forme actuelle, ce type d'outil permet de créer des instances réutilisables mais non instanciables. En d'autres termes, cela implique que l'objet généré est susceptible d'être appelé plusieurs fois dans la construction d'un modèle mais sans pour autant que ces paramètres (tables de probabilités marginales ou conditionnelles) ne soient modifiés.

Reposant sur le paradigme Orienté Objet, nous avons proposé dans ce travail de thèse une forme originale de réseaux bayesiens pour la représentation de systèmes complexes : les Réseaux Bayesiens Multidimensionnels (RBM).

La présentation des éléments théoriques associés à la caractérisation d'un RBM a été séparée en trois parties dissociant les principes de construction structurelle, d'instanciation et d'inférence.

La partie dédiée à la définition de la structure du réseau a nécessité l'introduction de plusieurs notions. Nous avons introduit, en particulier, le concept de classe. La classe peut être assimilable à un réseau bayesien classique dont les paramètres (modalités) sont non quantifiés. Elle sert de base à l'instanciation des objets dont la définition se base sur la quantification des modalités en lien avec le contexte de modélisation considéré. Dans une classe ou un objet, trois types de variables peuvent être identifiés : variable d'entrée ; variable interne et variable de sortie. Dans l'optique de mettre en évidence des principes d'évolution dimensionnelle (au sein d'une même dimension ou entre dimensions de natures différentes), des variables virtuelles ont été imaginées. Toutes ces notions ont été décrites et rassemblées sous la forme d'une méthodologie de construction d'un RBM.

La deuxième partie a été consacrée à l'instanciation du RBM pour l'identification des valeurs attribuées aux modalités de chacune des variables identifiées pour chaque objet. Dans ce but, les techniques d'apprentissage semblent adaptées. Celles conçues pour les RB classiques ne sont toutefois pas directement utilisables si l'on souhaite conserver la notion d'objets et éviter ainsi, pour la réalisation de l'inférence, de devoir déployer le RBM sous la forme d'un RB simple dont la taille serait prohibitive. L'apprentissage par transfert semble en revanche une solution ad hoc. Le principe d'un RBM repose en effet sur la définition d'objets établis à partir d'une classe unique mais susceptibles de différer par leurs paramètres. La notion de classe induit, par essence même, des liens entre les objets qu'elle permet d'identifier. L'exploitation de ces

relations permet d'améliorer la quantification des paramètres. La technique de transfert permet alors, lorsque le système s'y prête, de simplifier et améliorer la qualité des résultats de la paramétrisation des objets. Deux niveaux de transfert ont été considérés séparant données et paramètres. Selon le niveau, le transfert peut ainsi se faire sur la base d'une mutualisation des informations relatives à chaque variable ou par fusion entre des données originelles et un jeu de données transformées à partir de la relation connue avec un objet voisin. Dans ce dernier cas, un indice de fusion est déterminé.

L'un des atouts d'un réseau bayesien est sa capacité à propager des informations par inférence. On parle d'inférence a priori lorsqu'aucune observation n'est introduite dans le modèle initial. On qualifiera d'inférence a posteriori le traitement visant à propager une information correspondant à une évidence sur ou plusieurs variables. Dans le cas d'un RBM, l'inférence est rendue plus complexe par la notion même d'objet. Certaines techniques, comme les Multiple Section Bayesian Network (MSBN), permettent de réaliser l'inférence. Elles sont toutefois en contradiction avec la philosophie sous tendue par le paradigme objet dans la mesure où elles impliquent de réunir tous les objets dans un seul même réseau bayesien pour la construction d'un grand arbre de jonction. Les temps de calcul résultant sont longs, le modèle perd en efficacité et en simplicité d'utilisation. Pour pallier ce problème, le travail développé dans le cadre de cette thèse a conduit au développement d'une méthodologie d'inférence des RBM conservant la représentation orientée objet. Basés sur des notions de calcul local et de canal de communication, des algorithmes dédiés ont ainsi été développés pour la réalisation des calculs d'inférence a priori et a posteriori. La levée de ce verrou a nécessité de mettre en évidence l'ordre d'enchaînement des opérations et l'indépendance entre calculs en fonction des objets et du positionnement de l'évidence dans le réseau global (système). Les cas à 2 puis 3 dimensions ont d'abord été traités avant une généralisation de la méthodologie pour un nombre quelconque de dimensions.

La dernière partie du mémoire avait pour objectif la démonstration de faisabilité des techniques de construction des RBM développés dans les chapitres précédents et la validation des principes de calcul par inférence dans cette forme de Réseau Bayesien Orienté Objets. Le cas d'étude considéré a concerné un modèle de prédiction de crues éclair pour la gestion des risques et des crises sur un territoire associé à un bassin versant. Les scientifiques prévoient en effet que les modifications du climat vont accroître la fréquence des fortes pluies, exposant de nombreuses communautés au risque d'inondations. Dans les zones montagneuses, ce risque est accru par le relief et ses conséquences en termes de cinématiques d'écoulement des eaux. La mise en place de méthodes de protection, de prévention, de sécurisation et la maîtrise du risque d'inondation en général nécessite une meilleure connaissance des phénomènes de crues. Cela passe par une meilleure capacité à modéliser ces phénomènes. A ces fins, un RBM a été construit. Pour le système modélisé, les étapes de structuration du RBM ont ainsi permis de valider les principes de construction du réseau (classe), d'instanciation des paramètres pour la définition des objets par expertise ou apprentissage et la réalisation des calculs d'inférence a priori et a posteriori.

Perspectives

Les travaux et résultats présentés dans ce mémoire concernaient le développement et l'exploitation d'outils d'analyse établis pour la modélisation, l'instanciation et l'évaluation de systèmes complexes dans un cadre d'aide à la décision.

Les perspectives de continuation du travail sont à trois niveaux.

Dans l'optique d'améliorer la méthodologie développée dans le cadre de ce travail et en particulier la phase d'instanciation via apprentissage par transfert, des améliorations pourront concerner la détermination du coefficient de fusion. Celui-ci pourra, en particulier, être évalué dynamiquement par rapport au contexte (type de variables, forme de relations,

représentativité des données, …). Des modifications pourront aussi concerner le périmètre des objets cibles et objets source utilisés pour la fusion d'informations. Aujourd'hui limité à une seule classe, il serait intéressant d'adapter les techniques d'apprentissage par transfert à la combinaison d'informations relatives à des variables partagées par plusieurs classes d'objets.

La plupart des systèmes dynamiques étant basés sur des phénomènes continus, des travaux futurs devront également aborder le traitement de RBM constitués d'objets à variables continues ou hybrides (i.e. combinant phénomènes discrets et continus). La levée de ce verrou permettra de modéliser par des réseaux bayesiens des équations déterministes représentatives de comportement ou de relations entre variables continues. Aujourd'hui, la plupart des outils appréhendent la continuité par des formes de discrétisation simple des variables pour une manipulation classique basée sur des techniques de Monte-Carlo. Cette approche traditionnelle débouche sur des tables de probabilités conditionnelles de très grande taille (dépendantes du nombre de nœuds parents mais surtout proportionnelles au nombre d'intervalles de discrétisation choisis pour caractériser l'intervalle de variation de chaque nœud). D'autres formes de représentation devront être explorées. La deuxième approche concernera donc la définition de principes de discrétisation dynamique pour, à la manière des codes éléments finis, resserrer les mailles près des zones pour lesquelles de faibles variations des paramètres conduisent à des modifications sensibles du résultat. Cette approche conduira à réduire les temps de calcul mais nécessite des temps d'optimisation préliminaire non négligeables. L'idée serait alors de pouvoir manipuler directement des phénomènes continus à partir de nœuds gaussiens. Cette approche requiert que les phénomènes soient linéaires, hypothèse très restrictive. Des méthodes de linéarisation par parties des fonctions considérées pourront alors être utilisées et, en particulier, des techniques de type MTE (Mixture of Truncated Exponentials) ou MOP (Mixture of Polynomials).

La dernière piste de développement futur concernera la prise en compte des aspects hiérarchiques et multiéchelles associés à la modélisation par RBM. Cette possibilité a déjà été évoquée au chapitre 2 mais les connexions entre objets de niveaux différents dans la nomenclature proposée ont été limités aux nœuds non racines. Cette hypothèse restrictive mériterait quelque attention pour donner au modélisateur le pouvoir de s'en affranchir et lui offrir encore plus de souplesse en termes de modélisation.

A ces pistes d'amélioration se rajoute finalement un besoin lié à une implémentation informatique adaptée. Le codage des principes de modélisation considérés dans cette thèse a été réalisé via une plateforme logicielle combinant un code JAVA et un outil de modélisation par réseau bayesien : NETICA. L'outil est utilisable mais manque de convivialité pour des non-initiés à la programmation et/ou à la modélisation bayesienne. Une interface simple d'utilisation et convivial devra donc être conçu et réalisé pour la mise à disposition de la puissance des RBM a un public de décideurs non spécialistes des techniques probabilistes ou de la programmation orientée objet.

.

Références Bibliographiques

[1] G. M. Whitesides et R. F. Ismagilov, «Complexity in chemistry» *science,* vol. 284, n° 15411, pp. 89-92, 1999.

[2] K. Mainzer, Thinking in complexity: The computational dynamics of matter, mind, and mankind, Springer Science & Business Media, 2007.

[3] E. Morin, Introduction à la pensée complexe, Le Seuil, 2015.

[4] N. Goldenfeld et L. P. Kadanoff, «Simple lessons from complexity» *science,* vol. 284, n° 15411, pp. 87-89, 1999.

[5] M. Gell-Mann, «What is complexity?» chez *Complexity and industrial clusters*, Springer, 2002, pp. 13-24.

[6] G. Weng, U. S. Bhalla et R. Iyengar, «Complexity in biological signaling systems» *Science,* vol. 284, n° 15411, pp. 92-96, 1999.

[7] P. Cilliers, «Boundaries, hierarchies and networks in complex systems» *International Journal of Innovation Management,* vol. 5, n° 102, pp. 135-147, 2001.

[8] W. B. Arthur, «Complexity and the economy» *science,* vol. 284, n° 15411, pp. 107-109, 1999.

[9] A. P. Tchangani, «A model to support risk management decision-making» *Studies in Informatics and Control,* vol. 20, n° 13, pp. 209-220, 2011.

[10] A. P. Tchangani, «Integrating human attitude in risk assessment process» *Journal of Uncertain Systems,* vol. 9, n° 13, pp. 175-182, 2015.

[11] P. Alivisatos, P. F. Barbara, A. W. Castleman, J. Chang, D. A. Dixon, M. L. Klein, G. L. McLendon, J. S. Miller, M. A. Ratner, P. J. Rossky et others, «From molecules to materials: Current trends and future directions» *Advanced Materials,* vol. 10, n° 116, pp. 1297-1336, 1998.

[12] P. G. Wolynes, «Randomness and complexity in chemical physics» *Accounts of chemical research,* vol. 25, n° 111, pp. 513-519, 1992.

[13] W. Ehrfeld, V. Hessel et H. Lehr, «Microreactors for chemical synthesis and biotechnology—current developments and future applications» chez *Microsystem technology in chemistry and life science*, Springer, 1998, pp. 233-252.

[14] G. Blankenstein et U. D. Larsen, «Modular concept of a laboratory on a chip for chemical and biochemical analysis» *Biosensors and Bioelectronics,* vol. 13, n° 13-4, pp. 427-438, 1998.

[15] S. Bramwell, P. Holdsworth et J.-F. Pinton, «Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena» *Nature,* vol. 396, n° 16711, pp. 552-554, 1998.

[16] D. Rind, «Complexity and climate» *science,* vol. 284, n° 15411, pp. 105-107, 1999.

[17] W. S. Broecker, D. M. Peteet et D. Rind, «Does the ocean-atmosphere system have more than one stable mode of operation?» *Nature,* vol. 315, n° 16014, pp. 21-26, 1985.

[18] J. T. Houghton, Climate change 1995: The science of climate change: contribution of working group I to the second assessment report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, vol. 2, Cambridge University Press, 1996.

[19] J. K. Parrish et L. Edelstein-Keshet, «Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation» *Science,* vol. 284, n° 15411, pp. 99-101, 1999.

[20] B. Werner, «Complexity in natural landform patterns» *Science,* vol. 284, n° 15411, pp. 102-104, 1999.

[21] R. Foote, «Mathematics and complex systems» *science,* vol. 318, n° 15849, pp. 410-412, 2007.

[22] L. A. Amaral et J. M. Ottino, «Complex networks» *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems,* vol. 38, n° 12, pp. 147-162, 2004.

[23] J. L. Casti, «On system complexity: Identification, measurement, and management» chez *Complexity, language, and life: Mathematical approaches*, Springer, 1986, pp. 146-173.

[24] J. Ladyman, J. Lambert et K. Wiesner, «What is a complex system?» *European Journal for Philosophy of Science,* vol. 3, n° 11, pp. 33-67, 2013.

[25] C. Koch et G. Laurent, «Complexity and the nervous system» *Science,* vol. 284, n° 15411, pp. 96-98, 1999.

[26] Y. Bar-Yam, «General features of complex systems» *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), UNESCO, EOLSS Publishers, Oxford, UK,* 2002.

[27] D. Larsen-Freeman, «Chaos/complexity science and second language acquisition» *Applied linguistics,* vol. 18, n° 12, pp. 141-165, 1997.

[28] J. P. Crutchfield, «The calculi of emergence: computation, dynamics and induction» *Physica D: Nonlinear Phenomena,* vol. 75, n° 11, pp. 11-54, 1994.

[29] C. Gershenson et F. Heylighen, «How can we think the complex» *Managing organizational complexity: philosophy, theory and application,* vol. 3, pp. 47-62, 2005.

[30] P. W. Anderson et others, «More is different» *Science,* vol. 177, n° 14047, pp. 393-396, 1972.

[31] P. Davies, Cosmic Blueprint: New Discoveries In Natures Ability To Order Universe, Templeton Foundation Press, 2004.

[32] M. M. Waldrop, Complexity: The emerging science at the edge of order and chaos, Simon and Schuster, 1993.

[33] C. E. Hmelo-Silver et R. Azevedo, «Understanding complex systems: Some core challenges» *The Journal of the learning sciences,* vol. 15, n° 11, pp. 53-61, 2006.

[34] U. Wilensky et M. Resnick, «Thinking in levels: A dynamic systems approach to making sense of the world» *Journal of Science Education and technology,* vol. 8, n° 11, pp. 3-19, 1999.

[35] S. Galea, M. Riddle et G. A. Kaplan, «Causal thinking and complex system approaches in epidemiology» *International Journal of Epidemiology,* vol. 39, n° 11, pp. 97-106, 2010.

[36] K. E. Limburg, R. V. O'Neill, R. Costanza et S. Farber, «Complex systems and valuation» *Ecological economics,* vol. 41, n° 13, pp. 409-420, 2002.

[37] J. M. Ottino, «Complex systems» *AIChE Journal,* vol. 49, n° 12, pp. 292-299, 2003.

[38] C. Gershenson et F. Heylighen, «When can we call a system self-organizing?» *Advances in artificial life,* pp. 606-614, 2003.

[39] L. K. Comfort, «Self-organization in complex systems» *Journal of Public Administration Research and Theory: J-PART,* vol. 4, n° 13, pp. 393-410, 1994.

[40] J. D. Sterman, «Learning in and about complex systems» *System Dynamics Review,* vol. 10, n° 12-3, pp. 291-330, 1994.

[41] E. Villeneuve, C. Béler, F. Pérès, L. Geneste et E. Reubrez, «Decision-Support Methodology to Assess Risk in End-of-Life Management of Complex Systems» *IEEE Systems Journal,* vol. 11, n° 13, pp. 1579-1588, 2017.

[42] E. Villeneuve, C. Béler, F. Pérès et L. Geneste, «Hybridization of bayesian networks and belief functions to assess risk. application to aircraft deconstruction» 2011.

[43] E. Villeneuve, C. Béler, F. Pérès et L. Geneste, «Hybridization of statistical and cognitive experience feedbacks to perform risk assessment» chez *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), Hong-Kong, China*, 2012.

[44] E. Villeneuve, F. Pérès, C. Béler et V. Gonzalez-Prida, «Evidential Network for Multi-Sensor Fusion in an Uncertain Environment».

[45] M. Jaeger, «On the complexity of inference about probabilistic relational models» *Artificial Intelligence,* vol. 117, n° 12, pp. 297-308, 2000.

[46] Y. Xiang, F. V. Jensen et X. Chen, «Inference in multiply sectioned bayesian networks: Methods and performance comparison» *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics),* vol. 36, n° 13, pp. 546-558, 2005.

[47] M. Jaeger, «Relational bayesian networks: a survey» *Electronic Transactions in Artificial Intelligence,* vol. 6, p. 60, 2002.

[48] P. Weber et L. Jouffe, «Complex system reliability modelling with dynamic object oriented Bayesian networks (DOOBN)» *Reliability Engineering & System Safety,* vol. 91, n° 12, pp. 149-162, 2006.

[49] D. Koller et A. Pfeffer, «Probabilistic frame-based systems» chez *AAAI/IAAI*, 1998.

[50] K. B. Laskey, «MEBN: A language for first-order Bayesian knowledge bases» *Artificial intelligence,* vol. 172, n° 12-3, pp. 140-178, 2008.

[51] P.-H. Wuillemin et L. Torti, «Structured probabilistic inference» *International Journal of Approximate Reasoning,* vol. 53, n° 17, pp. 946-968, 2012.

[52] N. Khakzad, «Application of dynamic Bayesian network to risk analysis of domino effects in chemical infrastructures» *Reliability Engineering & System Safety,* vol. 138, pp. 263-272, 2015.

[53] P. Weber, G. Medina-Oliva, C. Simon et B. Iung, «Overview on Bayesian networks applications for dependability, risk analysis and maintenance areas» *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* vol. 25, n° 14, pp. 671-682, 2012.

[54] O. Bangso et P.-H. Wuillemin, «Object Oriented Bayesian Networks A framework for topdown specification of Large Bayesian Networks and repetitive structures» 2000.

[55] O. Bangso et P.-H. Wuillemin, «Top-Down Construction and Repetetive Structures Representation in Bayesian Networks.» chez *FLAIRS Conference*, 2000.

[56] D. Koller et A. Pfeffer, «Object-oriented Bayesian networks» chez *Proceedings of the Thirteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*, 1997.

[57] A. P. Dawid, J. Mortera et P. Vicard, «Object-oriented Bayesian networks for complex forensic DNA profiling problems» *Forensic Science International,* vol. 169, n° 12, pp. 195-205, 2007.

[58] G. Weidl, A. L. Madsen et S. Israelson, «Applications of object-oriented Bayesian networks for condition monitoring, root cause analysis and decision support on operation of complex continuous processes» *Computers & chemical engineering,* vol. 29, n° 19, pp. 1996-2009, 2005.

[59] M. Bayes et M. Price, «An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, frs communicated by mr. price, in a letter to john canton, amfrs» *Philosophical Transactions (1683-1775),* pp. 370-418, 1763.

[60] F. V. Jensen, An introduction to Bayesian networks, vol. 210, UCL press London, 1996.

[61] T. Bayes, R. Price et J. Canton, An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, C. Davis, Printer to the Royal Society of London, 1763.

[62] R. E. Neapolitan et others, Learning bayesian networks, vol. 38, Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2004.

[63] J. Pearl, «Causality: models, reasoning and inference» *Econometric Theory,* vol. 19, n° 1675-685, p. 46, 2003.

[64] J. H. Kim et J. Pearl, «A computational model for causal and diagnostic reasoning in inference systems.» chez *IJCAI*, 1983.

[65] G. R. Shafer et P. P. Shenoy, «Probability propagation» *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence,* vol. 2, n° 11-4, pp. 327-351, 1990.

[66] P. Naïm, P.-H. Wuillemin, P. Leray, O. Pourret et A. Becker, Réseaux bayésiens, Editions Eyrolles, 2011.

[67] F. V. Jensen et F. Jensen, «Optimal junction trees» chez *Proceedings of the Tenth international conference on Uncertainty in artificial intelligence*, 1994.

[68] M. C. Golumbic, Algorithmic graph theory and perfect graphs, vol. 57, Elsevier, 2004.

[69] R. E. Tarjan et M. Yannakakis, «Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs» *SIAM Journal on computing,* vol. 13, n° 13, pp. 566-579, 1984.

[70] R. G. Cowell, P. Dawid, S. L. Lauritzen et D. J. Spiegelhalter, Probabilistic networks and expert systems: Exact computational methods for Bayesian networks, Springer Science & Business Media, 2006.

[71] T. D. Nielsen et F. V. Jensen, Bayesian networks and decision graphs, Springer Science & Business Media, 2009.

[72] F. V. Jensen, K. G. Olesen et S. K. Andersen, «An algebra of bayesian belief universes for knowledge-based systems» *Networks,* vol. 20, n° 15, pp. 637-659, 1990.

[73] S. L. Lauritzen et D. J. Spiegelhalter, «Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems» *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological),* pp. 157-224, 1988.

[74] A. L. Madsen et F. V. Jensen, «Lazy propagation: a junction tree inference algorithm based on lazy evaluation» *Artificial Intelligence,* vol. 113, n° 11-2, pp. 203-245, 1999.

[75] K. P. Murphy, Y. Weiss et M. I. Jordan, «Loopy belief propagation for approximate inference: An empirical study» chez *Proceedings of the Fifteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*, 1999.

[76] S. Geman et D. Geman, «Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images» *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence,* n° 16, pp. 721-741, 1984.

[77] W. R. Gilks, A. Thomas et D. J. Spiegelhalter, «A language and program for complex Bayesian modelling» *The Statistician,* pp. 169-177, 1994.

[78] A. E. Gelfand et A. F. Smith, «Sampling-based approaches to calculating marginal densities» *Journal of the American statistical association,* vol. 85, n° 1410, pp. 398-409, 1990.

[79] J. Grimmer, «An introduction to Bayesian inference via variational approximations» *Political Analysis,* vol. 19, n° 11, pp. 32-47, 2011.

[80] S. Relaxation, «Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. S. Geman and D. Geman» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,* vol. 6, pp. 721-741, 1984.

[81] J. Pearl, Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference, Elsevier, 2014.

[82] S. L. Lauritzen, Graphical models, vol. 17, Clarendon Press, 1996.

[83] J. Pearl et T. S. Verma, «A theory of inferred causation» *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* vol. 134, pp. 789-811, 1995.

[84] P. Spirtes, C. Glymour et R. Scheines, «Causation, prediction, and search» 1993.

[85] K. Pearson, The grammar of science, Рипол Классик, 1900.

[86] P. Leray, «Réseaux bayésiens: apprentissage et modélisation de systèmes complexes» 2006.

[87] H. Akaike, «Statistical predictor identification» *Annals of the Institute of Statistical Mathematics,* vol. 22, n° 11, pp. 203-217, 1970.

[88] G. F. Cooper et E. Herskovits, «A Bayesian method for the induction of probabilistic networks from data» *Machine learning,* vol. 9, n° 14, pp. 309-347, 1992.

[89] J. Rissanen, «Modeling by shortest data description» *Automatica,* vol. 14, n° 15, pp. 465-471, 1978.

[90] G. Schwarz et others, «Estimating the dimension of a model» *The annals of statistics,* vol. 6, n° 12, pp. 461-464, 1978.

[91] R. R. Bouckaert, «Probabilistic network construction using the minimum description length principle» chez *European conference on symbolic and quantitative approaches to reasoning and uncertainty*, 1993.

[92] W. Lam et F. Bacchus, «Learning Bayesian belief networks: An approach based on the MDL principle» *Computational intelligence,* vol. 10, n° 13, pp. 269-293, 1994.

[93] W. Lam et F. Bacchus, «Using causal information and local measures to learn Bayesian networks» chez *Uncertainty in Artificial Intelligence, 1993*, Elsevier, 1993, pp. 243-250.

[94] J. Suzuki, «Learning Bayesian belief networks based on the MDL principle: an efficient algorithm using the branch and bound technique» 1996.

[95] D. B. Rubin, «Inference and missing data» *Biometrika,* pp. 581-592, 1976.

[96] A. P. Dempster, N. M. Laird et D. B. Rubin, «Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm» *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological),* pp. 1-38, 1977.

[97] R. M. Neal et G. E. Hinton, «A view of the EM algorithm that justifies incremental, sparse, and other variants» chez *Learning in graphical models*, Springer, 1998, pp. 355-368.

[98] K. P. Murphy, «Dynamic bayesian networks: representation, inference and learning» 2002.

[99] M. Godichaud, F. Pérès, V. Gonzalez, A. Tchangani, A. Crespo et E. Villeneuve, «Integration of warranty as a decision variable in the process of recertification of parts resulting from end-of-life system dismantling» chez *Quality and Reliability (ICQR), 2011 IEEE International Conference on*, 2011.

[100] M. Godichaud, F. Pérès et A. Tchangani, «Disassembly process planning using Bayesian network» chez *Engineering Asset Lifecycle Management*, Springer, 2010, pp. 280-287.

[101] M. Godichaud, A. Tchangani, F. Pérès et B. Iung, «Sustainable management of end-of-life systems» *Production Planning & Control,* vol. 23, n° 12-3, pp. 216-236, 2012.

[102] G. Matthieu, P. François et A. Tchangani, «Optimising end-of-life system dismantling strategy» *International journal of production research,* vol. 50, n° 114, pp. 3738-3754, 2012.

[103] A. Tchangani et F. Pérès, «Modeling and Analyzing Performance of a Production Unit Using Dynamic Bayesian Networks» chez *International Conference on Intelligent Systems in Production Engineering and Maintenance*, 2017.

[104] L. R. Rabiner, «A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition» *Proceedings of the IEEE,* vol. 77, n° 12, pp. 257-286, 1989.

[105] L. Rabiner et B. Juang, «An introduction to hidden Markov models» *ieee assp magazine,* vol. 3, n° 11, pp. 4-16, 1986.

[106] Z. Ghahramani, «Learning dynamic Bayesian networks» chez *Adaptive processing of sequences and data structures*, Springer, 1998, pp. 168-197.

[107] V. Delcroix, S. Piechowiak et J. Rodriguez, «Diagnostic à base de réseaux bayésiens hiérarchiques» *National Days of Models Reasoning, INRETS ESTAS,* pp. 51-66, 2001.

[108] H. Langseth et O. Bangso, «Parameter learning in object-oriented Bayesian networks» *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence,* vol. 32, n° 11, pp. 221-243, 2001.

[109] Y. Xiang et F. V. Jensen, «Inference in multiply sectioned Bayesian networks with extended Shafer-Shenoy and lazy propagation» chez *Proceedings of the Fifteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*, 1999.

[110] Y. Xiang et V. Lesser, «Justifying multiply sectioned Bayesian networks» chez *MultiAgent Systems, 2000. Proceedings. Fourth International Conference on*, 2000.

[111] Y. Xiang, D. Poole et M. P. Beddoes, «MULTIPLY SECTIONED BAYESIAN NETWORKS AND JUNCTION FORESTS FOR LARGE KNOWLEDGE-BASED SYSTEMS» *Computational Intelligence,* vol. 9, n° 12, pp. 171-220, 1993.

[112] O. Bangso, M. J. Flores et F. V. Jensen, «Plug & Play Object Oriented Bayesian Networks» chez *Current Topics in Artificial Intelligence*, Springer, 2004, pp. 457-467.

[113] Q. Liu, A. Tchangani, B. Kamsu-Foguem et F. Pérès, «Modelling a large scale system for risk assessment» chez *Industrial Engineering and Systems Management (IESM), 2015 International Conference on*, 2015.

[114] Q. Liu, F. Pérès et A. Tchangani, «Object Oriented Bayesian Network for complex system risk assessment» *IFAC-PapersOnLine,* vol. 49, n° 128, pp. 31-36, 2016.

[115] Q. Liu, A. Tchangani et F. Pérès, «Modelling a Manufacturing Line using Extended Object Oriented Bayesian Network» *IFAC-PapersOnLine,* vol. 50, n° 11, pp. 6196-6201, 2017.

[116] Q. Liu, A. Tchangani et F. Pérès, «Modelling complex large scale systems using object oriented Bayesian networks (OOBN)» *IFAC-PapersOnLine,* vol. 49, n° 112, pp. 127-132, 2016.

[117] S. J. Pan et Q. Yang, «A survey on transfer learning» *IEEE Transactions on knowledge and data engineering,* vol. 22, n° 110, pp. 1345-1359, 2010.

[118] L. Torrey et J. Shavlik, «Transfer learning» *Handbook of Research on Machine Learning Applications and Trends: Algorithms, Methods, and Techniques,* vol. 1, p. 242, 2009.

[119] N. Friedman, L. Getoor, D. Koller et A. Pfeffer, «Learning probabilistic relational models» chez *IJCAI*, 1999.

[120] F. Pérès, L. Bouzaïene, J.-C. Bocquet, F. Billy, A. Lannoy et P. Haïk, «Anticipating aging failure using feedback data and expert judgment» *Reliability Engineering & System Safety,* vol. 92, n° 12, pp. 200-210, 2007.

[121] R. Luis, L. E. Sucar et E. F. Morales, «Inductive transfer for learning Bayesian networks» *Machine learning,* vol. 79, n° 11, pp. 227-255, 2010.

[122] Y. Zhou, «New Techniques for Learning Parameters in Bayesian Networks.» 2015.

[123] S. Kullback et R. A. Leibler, «On information and sufficiency» *The annals of mathematical statistics,* vol. 22, n° 11, pp. 79-86, 1951.

[124] W. Ben Hassen, F. Auzanneau, L. Incarbone, F. Pérès et A. P. Tchangani, «Distributed sensor fusion for wire fault location using sensor clustering strategy» *International Journal of Distributed Sensor Networks,* vol. 11, n° 14, p. 538643, 2015.

[125] W. Ben Hassen, F. Auzanneau, L. Incarbone, F. Pérès et A. P. Tchangani, «On-line diagnosis using Orthogonal Multi-Tone Time Domain Reflectometry in a lossy cable» chez *Proceedings of the 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'13)*, 2013.

[126] W. Ben Hassen, F. Auzanneau, F. Pérès et A. Tchangani, «Ambiguity Cancellation for Wire Fault Location based on Cable Life Profile» *IFAC Proceedings Volumes,* vol. 47, n° 13, pp. 9593-9598, 2014.

[127] W. Ben Hassen, F. Auzanneau, L. Incarbone, F. Pérès et A. P. Tchangani, «OMTDR using BER estimation for ambiguities cancellation in ramified networks diagnosis» chez *Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing, 2013 IEEE Eighth International Conference on*, 2013.

[128] W. Ben Hassen, F. Auzanneau, F. Pérès et A. P. Tchangani, «Diagnosis sensor fusion for wire fault location in CAN bus systems» chez *SENSORS, 2013 IEEE*, 2013.

[129] W. BEN HASSEN, F. Auzanneau, F. Pérès et A. Tchangani, «A distributed diagnosis strategy using bayesian network for complex wiring networks» *IFAC Proceedings Volumes,* vol. 45, n° 131, pp. 42-47, 2012.

[130] [En ligne]. Available: http://www.grobec.org/definition.php.

[131] Q. Liu, B. Boutkhamouine, A. Tchangani et F. Pérès, «Proposition of Flash Flood Framework Using Object Oriented Bayesian Approach» 2017.

Annexes

Annexe 1 : Liste de variables et de relations

	Variables	Paramètres connus			Paramètres relationnels					
		Paramètres connus	Objets connus	Distributions/ Equations/ Informations diverses	VI	VL	VPL	VNP	Objets en relation	Relations
1	Précipitation Totale (PT)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$PT^{11t} = PT^{21t} = PT^{31t}$ $PT^{12t} = PT^{22t} = PT^{32t}$ $PT^{13t} = PT^{23t} = PT^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	$PT^{x1t} = PT^{x2t} + 70$ $PT^{x2t} = PT^{x3t} + 50$
2	Précipitation ¨Liquide (PL)	x	$tous$							
3	Précipitation Solide (PS)	x	$tous$							
4	Fonte Neige (FN)	x	$tous$	Quand $T = niveau$ 1,2,6,7,8,9,10, les paramètres sont connus par experts.	x				$tous$	
5	Approvisionnement en Eau (AE)	x	$tous$	Quand $PL = iveau$ 7,8,9,10, les paramètres sont connus par experts.	x				$tous$	
6	Evapotranspiration (EVP)				x				$tous$	
7	Ecoulement de Surface (ES)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$ES^{11t} = ES^{21t} = ES^{31t}$ $ES^{12t} = ES^{22t} = ES^{32t}$ $ES^{13t} = ES^{23t} = ES^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'écoulement de surface devient plus fort dès que l'altitude augmente. O_{x1t} est 25% plus fort que O_{x2t} ; O_{x2t} est 20 % plus fort que O_{x3t}.
8	Ecoulement de Subsurface (ESs)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$ESs^{11t} = ESs^{21t} = ESs^{31t}$ $ESs^{12t} = ESs^{22t} = ESs^{32t}$ $ESs^{13t} = ESs^{23t} = ESs^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'écoulement de subsurface devient plus fort dès que l'altitude augmente.

										Mais quand l'infiltration est forte, ESs sera fort pour tous les objets. O_{x1t} est 10% plus fort que O_{x2t} ; O_{x2t} est 10 % plus fort que O_{x3t}.
9	Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Surface (FT_{ES})	x	$tous$							
10	Fonction de Transfert à l'Ecoulement de Subsurface (FT_{ESs})	x	ous							
11	Infiltration (I)	x	$tous$	Quand $AE = faible$, les paramètres sont connus par experts.	x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$I^{11t} = I^{21t} = I^{31t}$ $I^{12t} = I^{22t} = I^{32t}$ $I^{13t} = I^{23t} = I^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'effet d'infiltration augmente dès que l'altitude baisse. Sauf quand AE est en modalité faible, tous les objets ont les mêmes paramètres. O_{x1t} est 20% plus faible que O_{x2t} ; O_{x2t} est 20 % plus faible que O_{x3t}.
12	Couverture de Sol (CS)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$CS^{11t} = CS^{21t} = CS^{31t}$ $CS^{12t} = CS^{22t} = CS^{32t}$ $CS^{13t} = CS^{23t} = CS^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$t	La couverture de sol est plus riche quand l'altitude est plus bas. O_{x1t} est 40% plus faible que $_{x2t}$; O_{x2t} est 40 % plus faible que O_{x3t}.
13	Humidité de Sol à t (HS_t)				x				$tous$	
14	Manteau Neige à t (MN_t)				x				$tous$	
15	Température (T)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$T^{11t} = T^{21t} = T^{31t}$ $T^{12t} = T^{22t} = T^{32t}$ $T^{13t} = T^{23t} = T^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	La température varie selon l'altitude.

										$O_{x1t} = O_{x2t} - 5$ $O_{x2t} = O_{x3t} - 5$
16	Radiation (R)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$R^{11t} = R^{21t} = R^{31t}$ $R^{12t} = \ ^{22t} = R^{32t}$ $R^{13t} = R^{23t} = R^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	La radiation est plus forte quand l'altitude est plus haute. O_{x1t} est 10% plus forte que O_{x2t} ; O_{x2t} est 10 % plus forte que O_{x3t}.
17	Caractéristique du Courant (CC)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$CC^{11t} = CC^{21t} = CC^{31t}$ $CC^{12t} = CC^{22t} = CC^{32t}$ $CC^{13t} = CC^{23t} = CC^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	La caractéristique du courant est plus forte quand l'altitude est plus haute. O_{x1t} est 20% plus forte que O_{x2t} ; O_{x2t} est 20 % plus forte que O_{x3t}.
18	Approvisionnement en aval longitude ($Aval_x$)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$Aval^{11t} = Aval_x^{21t} = Aval_x^{31t}$ $Aval_x^{12t} = Aval_x^{22t} = Aval_x^{32t}$ $Aval_x^{13t} = Aval_x^{23t} = Aval_x^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'approvisionnement d'eau est plus forte quand l'altitude est plus haute. O_{x1t} est 10% plus forte que O_{x2t} ; O_{x2t} est 10 % plus forte que O_{x3t}.
19	Approvisionnement en aval altitude/latitude ($Aval_y$)				x				$O_{x1t}, O_{x2t}, O_{x3t}$	$Aval_y^{11t} = Aval_y^{21t} = Aval_y^{31t}$ $Aval_y^{12t} = Aval_y^{22t} = Aval_y^{32t}$ $Aval_y^{13t} = Aval_y^{23t} = Aval_y^{33t}$
						x			$O_{1yt}, O_{2yt}, O_{3yt}$	L'approvisionnement d'eau est plus forte quand l'altitude est plus haute. $_{x1t}$ est 10% plus forte que O_{x2t} ; O_{x2t} est 10 % plus forte que O_{x3t}.

20	Humidité de Sol pour t+1 (HS_{t+1})	x	$tous$	$P(HS_{t+1}\|HS_t) = 1$						
21	Manteau Neige pour t+1 (MN_{t+1})	x	$tous$	$P(MN_{t+1}\|MN_t) = 1$						
1	Approvisionnement en amont latitude ($Amont_x$)	Elles sont les entrées. L'entrée ne participe pas l'apprentissage, sauf l'entrée initiale.								
2	Approvisionnement en amont altitude ($Amont_y$)									
3	Humidité de Sol à t-1 (HS_{t-1})									
4	Manteau Neige à t-1 (MN_{t-1})									

Annexe 2 : Code Java pour la programmation des principes d'inférence

Ici on vous présente les codes développés pour la propagation d'un RBM dans les phénomènes d'inondations. Comme les codes sont plus de milles lignes, on vous donne la partie essentielle.

Construire la classe :

```
/*build the class */
import norsys.netica.*;
import norsys.neticaEx.aliases.Node;
public class Classe_1{
   public static void main(String[] args){
      try{
         Node.setConstructorClass ("norsys.neticaEx.aliases.Node");
         Environ env = new Environ ("+Site/ENIT_project/120,310-6-A/3485");
         Net net = new Net();
         net.setName("Class_Zone");
         // Input nodes: Amont_x,Amont_y
         Node Amont_x= new Node("Amont_x", "faible,moyen,fort", net);
         Node Amont_y= new Node("Amont_y", "faible,moyen,fort", net);
         // Virtuel Input: CS_t_1, HS_t_1,MN_t_1
         Node HS_t_1= new Node("Humidie_sol_t_1", "faible,moyen,fort", net);
         Node MN_t_1= new Node("Manteau_neige_t_1", "faible,moyen,fort", net);
         // Input - produit cartésien à axe T
         Node In_T = new Node ("Input_cartesien_T", "FaFa, FaMo,FaFo,MoFa, MoMo,MoFo,FoFa, FoMo,FoFo",net);
         // Output nodes: Aval_x,Aval_y
         Node Aval_x = new Node("Aval_x","faible,moyen,fort",net);
         Node Aval_y = new Node("Aval_y","faible,moyen,fort",net);
         Node HS_t_out= new Node("Humidie_sol_t_out", "faible,moyen,fort", net);
         Node MN_t_out= new Node("Manteau_neige_t_out", "faible,moyen,fort", net);
         // Output- produit cartésien à axe T
```

```
Node Out_T = new Node ("Output_cartesien_T", "FaFa, FaMo,FaFo,MoFa, MoMo,MoFo,FoFa, FoMo,FoFo",net);

  // output -produit cartésien à xy, xt, yt, xyt

Node Out_XY = new Node("Output_XY", "FaFa, FaMo, FaFo, MoFa, MoMo, MoFo, FoFa, FoMo, FoFo", net);

Node Out_XT = new Node ("Output_XT", "FaFaFa, FaFaMo,FaFaFo,FaMoFa, FaMoMo,FaMoFo,FaFoFa, FaFoMo,FaFoFo,"

        +"MoFaFa, MoFaMo,MoFaFo,MoMoFa, MoMoMo,MoMoFo,MoFoFa,MoFoMo,MoFoFo,"

        +"FoFaFa, FoFaMo,FoFaFo,FoMoFa, FoMoMo,FoMoFo,FoFoFa, FoFoMo,FoFoFo",net);

Node Out_YT = new Node ("Output_YT","FaFaFa, FaFaMo,FaFaFo,FaMoFa, FaMoMo,FaMoFo,FaFoFa, FaFoMo,FaFoFo,"

        +"MoFaFa, MoFaMo,MoFaFo,MoMoFa, MoMoMo,MoMoFo,MoFoFa,MoFoMo,MoFoFo,"

        +"FoFaFa, FoFaMo,FoFaFo,FoMoFa, FoMoMo,FoMoFo,FoFoFa, FoFoMo,FoFoFo",net);

Node Out_XYT = new Node ("Output_XYT","FaFaFaFa,FaFaFaMo,FaFaFaFo,FaFaMoFa,FaFaMoMo,FaFaMoFo,FaFaFoFa,FaFaFoMo,FaFaFoFo,
"
+"FaMoFaFa,FaMoFaMo,FaMoFaFo,FaMoMoFa,FaMoMoMo,FaMoMoFo,FaMoFoFa,FaMoFoMo,FaMoFoFo,"
+"FaFoFaFa,FaFoFaMo,FaFoFaFo,FaFoMoFa,FaFoMoMo,FaFoMoFo,FaFoFoFa,FaFoFoMo,FaFoFoFo,"
+"MoFaFaFa,MoFaFaMo,MoFaFaFo,MoFaMoFa,MoFaMoMo,MoFaMoFo,MoFaFoFa,MoFaFoMo,MoFaFoFo,"
+"MoMoFaFa,MoMoFaMo,MoMoFaFo,MoMoMoFa,MoMoMoMo,MoMoMoFo,MoMoFoFa,MoMoFoMo,MoMoFoF
o,"
+"MoFoFaFa,MoFoFaMo,MoFoFaFo,MoFoMoFa,MoFoMoMo,MoFoMoFo,MoFoFoFa,MoFoFoMo,MoFoFoFo,"
+"FoFaFaFa,FoFaFaMo,FoFaFaFo,FoFaMoFa,FoFaMoMo,FoFaMoFo,FoFaFoFa,FoFaFoMo,FoFaFoFo,"
+"FoMoFaFa,FoMoFaMo,FoMoFaFo,FoMoMoFa,FoMoMoMo,FoMoMoFo,FoMoFoFa,FoMoFoMo,FoMoFoFo,"
+"FoFoFaFa,FoFoFaMo,FoFoFaFo,FoFoMoFa,FoFoMoMo,FoFoMoFo,FoFoFoFa,FoFoFoMo,FoFoFoFo",net);

// Internal node:

Node PT = new
Node("Precipitation_total","niveau1,niveau2,niveau3,niveau4,niveau5,niveau6,niveau7,niveau8,niveau9,niveau10",net)
;

Node PL = new Node("Precipitation_Liquide",
"niveau1,niveau2,niveau3,niveau4,niveau5,niveau6,niveau7,niveau8,niveau9,niveau10",net);

Node PS = new Node
("Precipitation_solide","niveau1,niveau2,niveau3,niveau4,niveau5,niveau6,niveau7,niveau8,niveau9,niveau10",net);

Node FN = new Node("Fonte_neige","faible,moyen,fort",net);

Node AE = new Node("Approvisionnement_eau", "faible,moyen,fort",net);

Node EVP = new Node("Evapotranspiration", "faible,moyen,fort",net);

Node ES = new Node("Ecoulment_surface", "faible,moyen,fort",net);
```

```
Node ESs = new Node ("Ecoulement_subsurface","faible,moyen,fort",net);

Node FT_ES = new Node ("FonTran_ES","faible,moyen,fort",net);

Node FT_ESs = new Node ("FonTran_ESs","faible,moyen,fort",net);

Node I = new Node ("Infiltration","faible,moyen,fort",net);

Node T = new Node
("Temperature","niveau1,niveau2,niveau3,niveau4,niveau5,niveau6,niveau7,niveau8,niveau9,niveau10",net);

Node R = new Node("Radiation","faible,moyen,fort",net);

Node CC = new Node("Caracteristique_courant","faible,moyen,fort",net);

Node CS = new Node("Couverture_sol", "faible,moyen,fort", net);

// Dynamic interal node: CS_t,HS_t,MN_t

Node HS_t = new Node("Humidite_sol_t", "faible,moyen,fort", net);

Node MN_t = new Node("Manteau_neige_t", "faible,moyen,fort", net);

// Set title for some variables

HS_t_1.setTitle("Humidite de sol at t-1");

MN_t_1.setTitle("Manteau neige at t-1");

//CS_t.setTitle("Couverture de sol at t");

HS_t.setTitle("Humidite de sol at t");

MN_t.setTitle("Manteau neige at t");


HS_t_out.setTitle("Humidite de sol for t+1");

MN_t_out.setTitle("Manteau neige for t+1");

FT_ES.setTitle("Fonction de transfert a l'ecoulement de surface");

FT_ESs.setTitle("Fonction de transfert a l'ecoulement de subsurface");

// child.addLink(parent)

// precipitation liquide

PL.addLink(PT);

PL.addLink(T);

// precipitaiton solid

PS.addLink(PT);

PS.addLink(T);

// Fonte neige
```

```
FN.addLink(T);
FN.addLink(R);
FN.addLink(MN_t);
FN.addLink(CS);
// approvisionnement eau
AE.addLink(Amont_x);
AE.addLink(Amont_y);
AE.addLink(PL);
AE.addLink(FN);
// evapotranspiration
EVP.addLink(T);
EVP.addLink(AE);
EVP.addLink(R);
EVP.addLink(CS);
// ecoulement surface
ES.addLink(AE);
ES.addLink(I);
// ecoulement subsurface
ESs.addLink(I);
ESs.addLink(CS);
ESs.addLink(HS_t);
//ESs.addLink(TS);
//Fonction de transfert ecoulement surface
FT_ES.addLink(ES);
FT_ES.addLink(CS);
FT_ES.addLink(CC);
//Fonction de transfert ecoulment subsurface
FT_ESs.addLink(ESs);
FT_ESs.addLink(CS);
FT_ESs.addLink(HS_t);
// infilitration
```

```
I.addLink(AE);

I.addLink(CS);

I.addLink(HS_t);

// Couverture de sol at t

HS_t.addLink(HS_t_1);

// Manteau Neige at t

MN_t.addLink(MN_t_1);

MN_t.addLink(PS);

// Couverture de sol for t+1

// Humidite de sol for t+1

HS_t_out.addLink(HS_t);

// Manteau Neige for t+1

MN_t_out.addLink(MN_t);

// Aval_x

Aval_x.addLink(FT_ES);

Aval_x.addLink(FT_ESs);

// Aval_y

Aval_y.addLink(FT_ES);

Aval_y.addLink(FT_ESs);

// for variable cartesien in axe T : In_T has two children

//CS_t_1.addLink(In_T);

HS_t_1.addLink(In_T);

MN_t_1.addLink(In_T);

// for variable cartésein in axe T : Out_T has two parents

Out_T.addLink(HS_t_out);

Out_T.addLink(MN_t_out);

// for variable cartésienne entre les axes XY XT YT XYT

Out_XY.addLink(Aval_x);

Out_XY.addLink(Aval_y);

Out_XT.addLink(Aval_x);

Out_XT.addLink(Out_T);
```

```
        Out_YT.addLink(Aval_y);
        Out_YT.addLink(Out_T);
        Out_XYT.addLink(Aval_x);
        Out_XYT.addLink(Aval_y);
        Out_XYT.addLink(Out_T);
        Streamer stream = new Streamer("Class zone homogene.dne");
        net.write(stream);
      }
      catch(Exception e){
      e.printStackTrace();
      }
   }
}
```

Propagation a priori :

```
import norsys.netica.*;
import norsys.neticaEx.aliases.Node;
import java.sql.*;

public class Propagation{
   public static void main(String[] args){
      try{
         Node.setConstructorClass ("norsys.neticaEx.aliases.Node");
         Environ env = new Environ ("+Site/ENIT_project/120,310-6-A/3485");
         propagation_inference clear = new propagation_inference();
         clear.ClearAll();
         Compile com = new Compile();
         int axe_t = 30;
         int axe_x = 3;
         int axe_y = 3;
         String NomReseau = "Class zone homogene";
```

```
        for (int t=1; t<= axe_t; t++){
            for (int y=1;y<=axe_y; y++){
                for(int x=1; x<=axe_x; x++){
                    com.compileO(x, y, t, "Zone"+x+y+t, NomReseau);
                }
            }
        }
      }
      catch(Exception e){
      System.out.println("the test program is wrong! HAHAHAHA");
      }
   }
}
```

Propagation a posteriori :

```
import norsys.netica.*;
import norsys.neticaEx.aliases.Node;
import java.sql.*;
public class Propagation_evidence{
   public static void main(String[] args){
      propagation_inference pro_info = new propagation_inference();
      try{
         Node.setConstructorClass ("norsys.neticaEx.aliases.Node");
         Environ env = new Environ ("+Site/ENIT_project/120,310-6-A/3485");
         // netroyer les données existé
        //   pro_info.ClearAll();
         // propager normal
         Compile com = new Compile();
         int axe_t = 6;
         int axe_x = 3;
         int axe_y = 3;
         String NomReseau = "Class zone homogene";
```

```
//          for (int t=1; t<= axe_t; t++){
//              for (int y=1;y<=axe_y; y++){
//                  for(int x=1; x<=axe_x; x++){
//                      com.compileO(x, y, t, "Zone"+x+y+t, NomReseau);
//                  }
//              }
//          }
          // NETTOYER LES RESULTATS DE 3EME FOIS
         //  pro_info.ClearPart(axe_y, axe_y, axe_t, 3);
          // propagation normal est fini ici!
          // si nous voulons ajouter les observations, commence ici.
          /* set evidence*/
          Evidence_information evi_info = new Evidence_information();
          int xe = 3;
          int ye = 2;
          int te = 3;
          int me = 3;
          int stop_x = 1;
          int stop_y = 1;
          int stop_t = 1;
          int fini_x=axe_x;
          int fini_y=axe_y;
          int fini_t=axe_t;
          String index_evi = "Zone"+xe+ye+te+"_"+me;
          String node_evidence = "Fonte_neige";
          String etat_evidence= "fort";
          evi_info.SetEvidence(xe, ye, te, node_evidence, etat_evidence, index_evi);
          // SetEvidence(/*String object,*/ int x,int y,int t, String node_evi, String state,String index)
          if (fini_x>axe_x && fini_y>axe_y && fini_t>axe_t){
          System.out.println("Parametre wrong!");}
          // popager l'évidence sur l'axe X Y T
```

```
            pro_info.cas1(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t);
            // propager sur les 3 plans -- CAS 2
            pro_info.cas2(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t);
           // propagation sur les XYT à la direction diagnostique --- CAS 3
            pro_info.cas3(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t);
            // propagation sur les trois espace au cas 4


            pro_info.cas4(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t, fini_x, fini_y, fini_t);
            // propagation sur les trois espace au cas 5
            pro_info.cas5(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t, fini_x, fini_y, fini_t);
            // propagation sur les trois espace au cas 6
            pro_info.cas6(xe, ye, te, me, stop_x, stop_y, stop_t, fini_x, fini_y, fini_t);
        }catch(Exception e){
           System.out.println("Test sur l'espace cas 6 n'est pas bonne!");
        }
       }
}
```

Annexe 3 : Paramètre origine de RBM pour l'étude de cas

Approvisionnement en eau en amont longitude ($Amont^x$)			
Variable	faible	moyen	fort
$Amont^{x110}$	0,25	0,3	0,5
$Amont^{x120}$	0,2	0,3	0,5
$Amont^{x130}$	0,15	0,3	0,55

Approvisionnement en eau en amont altitude/latitude ($Amont^y$)			
Variable	faible	moyen	fort
$Amont^{y110}$	0,25	0,25	0,5
$Amont^{y210}$	0,15	0,2	0,65
$Amont^{y310}$	0,25	0,30	0,45

Approvisionnement en eau en aval longitude ($Aval^x$)					
variable	Pa_ft_es	Pa_ft_ess	faible	moyen	fort
$Aval^{xx10}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,5	0,5	0
	faible	fort	0,1	0,6	0,3
	moyen	faible	0,5	0,5	0
	moyen	moyen	0	0,6	0,4
	moyen	fort	0	0,2	0,8
	fort	faible	0	0,3	0,7
	fort	moyen	0	0,2	0,8
	fort	fort	0	0	1
$Aval^{xx20}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,6	0,4	0
	faible	fort	0,16	0,56	0,3
	moyen	faible	0,6	0,4	0
	moyen	moyen	0	0,63	0,4
	moyen	fort	0	0,28	0,7
	fort	faible	0	0,37	0,6
	fort	moyen	0	0,28	0,7
	fort	fort	0	0	1
$Aval^{xx30}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,64	0,36	0
	faible	fort	0,21	0,54	0,3
	moyen	faible	0,64	0,36	0
	moyen	moyen	0	0,67	0,3
	moyen	fort	0	0,35	0,6
	fort	faible	0	0,43	0,6
	fort	moyen	0	0,35	0,6
	fort	fort	0	0	1

Approvisionnement en eau en aval altitude/latitude ($Aval^y$)					
variable	Pa_ft_es	Pa_ft_ess	faible	moyen	fort
$Aval^{x10}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,5	0,5	0
	faible	fort	0,1	0,6	0,3
	moyen	faible	0,5	0,5	0
	moyen	moyen	0	0,6	0,4
	moyen	fort	0	0,2	0,8
	fort	faible	0	0,3	0,7
	fort	moyen	0	0,2	0,8
	fort	fort	0	0	1
$Aval^{yx20}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,6	0,4	0
	faible	fort	0,16	0,56	0,3
	moyen	faible	0,6	0,4	0
	moyen	moyen	0	0,63	0,4
	moyen	fort	0	0,28	0,7
	fort	faible	0	0,37	0,6

	fort	moyen	0	0,28	0,7
	fort	fort	0	0	1
y^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	0,64	0,36	0
	faible	fort	0,21	0,54	0,3
	moyen	faible	0,64	0,36	0
	moyen	moyen	0	0,67	0,3
	moyen	fort	0	0,35	0,6
	fort	faible	0	0,43	0,6
	fort	moyen	0	0,35	0,6
	fort	fort	0	0	1

Caractéristique du courant (CC)			
Variable	faible	moyen	fort
CC^{x10} où $x = 1,2,3$	0,25	0,25	0,5
CC^{x20} où $x = 1,2,3$	0,3	0,3	0,4
CC^{x30} où $x = 1,2,3$	0,36	0,32	0,3

Couverture sol (CS)			
Variable	faible	moyen	fort
CS^{x10} où $x = 1,2,3$	0,34	0,4	0,26
CS^{x20} où $x = 1,2,3$	0,18	0,4	0,42
CS^{x30} où $x = 1,2,3$	0,1	0,2	0,7

Radiation (R)			
Variable	faible	moyen	fort
R^{x10} où $x = 1,2,3$	0,1	0,4	0,5
R^{x20} où $x = 1,2,3$	0,15	0,4	0,45
R^{x30} où $x = 1,2,3$	0,2	0,4	0,4

Ecoulement surface (ES)					
variable	Pa_ae	Pa_i	faible	moyen	fort
ES^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	1	0	0
	faible	fort	1	0	0
	moyen	faible	0,1	0,9	0
	moyen	moyen	0,4	0,6	0
	moyen	fort	0,6	0,4	0
	fort	faible	0,1	0,4	0,5
	fort	moyen	0,1	0,5	0,4
	fort	fort	0,3	0,4	0,3
ES^{x20} où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	1	0	0
	faible	fort	1	0	0
	moyen	faible	0,3	0,7	0
	moyen	moyen	0,5	0,5	0
	moyen	fort	0,5	0,5	0
	fort	faible	0,2	0,4	0,4
	fort	moyen	0,2	0,5	0,3
	fort	fort	0,4	0,35	0,3
ES^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	1	0	0
	faible	moyen	1	0	0
	faible	fort	1	0	0
	moyen	faible	0,4	0,6	0
	moyen	moyen	0,6	0,4	0
	moyen	fort	0,6	0,4	0
	fort	faible	0,3	0,35	0,3
	fort	moyen	0,3	0,45	0,3
	fort	fort	0,5	0,3	0,2

Ecoulement subsurface (ESs)						
variable	Pa_i	Pa_cs	Pa_hs_t	faible	moyen	fort
ESs^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	0,95	0,05	0
	faible	faible	fort	0,95	0,03	0
	faible	moyen	faible	0,9	0,08	0
	faible	moyen	moyen	0,9	0,05	0,1
	faible	moyen	fort	0,9	0,05	0,1
	faible	fort	faible	0,85	0,1	0,1
	faible	fort	moyen	0,85	0,08	0,1
	faible	fort	fort	0,8	0,1	0,1
	moyen	faible	faible	0	1	0
	moyen	faible	moyen	0	0,95	0,1
	moyen	faible	fort	0	0,95	0,1
	moyen	moyen	faible	0	0,9	0,1
	moyen	moyen	moyen	0	0,9	0,1
	moyen	moyen	fort	0	0,9	0,1
	moyen	fort	faible	0	0,8	0,2
	moyen	fort	moyen	0	0,8	0,2
	moyen	fort	fort	0	0,8	0,2
	fort	faible	faible	0	0	1
	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1
Es^{x20} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	0,95	0,05	0
	faible	faible	fort	0,95	0,03	0
	faible	moyen	faible	0,9	0,08	0
	faible	moyen	moyen	0,9	0,05	0,1
	faible	moyen	fort	0,9	0,05	0,1
	faible	fort	faible	0,9	0,06	0
	faible	fort	moyen	0,9	0,05	0,1
	faible	fort	fort	0,82	0,1	0,1
	moyen	faible	faible	0,1	0,9	0
	moyen	faible	moyen	0,1	0,85	0,1
	moyen	faible	fort	0,1	0,85	0,1
	moyen	moyen	faible	0,1	0,8	0,1
	moyen	moyen	moyen	0,1	0,8	0,1
	moyen	moyen	fort	0,1	0,8	0,1
	moyen	fort	faible	0,15	0,7	0,2
	moyen	fort	moyen	0,15	0,7	0,2
	moyen	fort	fort	0,15	0,7	0,2
	fort	faible	faible	0	0	1
	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1
ESs^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	0,95	0,05	0
	faible	faible	fort	0,95	0,03	0
	faible	moyen	faible	0,91	0,07	0
	faible	moyen	moyen	0,92	0,04	0
	faible	moyen	fort	0,92	0,04	0
	faible	fort	faible	0,92	0,04	0
	faible	fort	moyen	0,9	0,05	0,1
	faible	fort	fort	0,84	0,08	0,1
	moyen	faible	faible	0,2	0,8	0
	moyen	faible	moyen	0,2	0,75	0,1
	moyen	faible	fort	0,2	0,75	0,1
	moyen	moyen	faible	0,2	0,7	0,1
	moyen	moyen	moyen	0,2	0,7	0,1
	moyen	moyen	fort	0,2	0,7	0,1
	moyen	fort	faible	0,23	0,65	0,1
	moyen	fort	moyen	0,23	0,65	0,1
	moyen	fort	fort	0,23	0,65	0,1

	fort	faible	faible	0	0	1
	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1

Evapotranspiration(EVP)							
variable	Pa_t	Pa_ae	Pa_r	Pa_cs	faible	moyen	fort
	niveau1	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau1	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau1	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	fort	1	0	0
	niveau1	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau1	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	fort	fort	faible	1	0	0
	niveau1	fort	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	fort	fort	1	0	0
	niveau2	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau2	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau2	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau2	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau2	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	fort	1	0	0
	niveau2	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau2	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	faible	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	fort	fort	faible	1	0	0
	niveau2	fort	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	fort	fort	1	0	0
	niveau3	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau3	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau3	faible	fort	faible	1	0	0

	niveau3	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau3	moyen	faible	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	faible	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	faible	fort	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	moyen	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	moyen	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	moyen	fort	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	fort	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	fort	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	moyen	fort	fort	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	faible	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	faible	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	faible	fort	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	moyen	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	moyen	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	moyen	fort	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	fort	faible	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	fort	moyen	0,95	0,05	0
	niveau3	fort	fort	fort	0,95	0,05	0
	niveau4	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau4	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau4	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau4	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau4	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau4	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau4	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau4	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau4	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau4	moyen	faible	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	faible	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	faible	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	moyen	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	moyen	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	moyen	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	fort	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	moyen	fort	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	faible	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	faible	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	faible	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	moyen	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	moyen	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	moyen	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	fort	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	fort	fort	fort	0,9	0,1	0
	niveau5	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau5	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau5	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau5	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau5	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau5	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau5	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau5	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau5	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau5	moyen	faible	faible	0,9	0,1	0
	niveau5	moyen	faible	moyen	0,9	0,1	0
	niveau5	moyen	faible	fort	0,9	0,1	0
	niveau5	moyen	moyen	faible	0,85	0,15	0
	niveau5	moyen	moyen	moyen	0,85	0,15	0
	niveau5	moyen	moyen	fort	0,8	0,2	0
	niveau5	moyen	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau5	moyen	fort	moyen	0,8	0,2	0
	niveau5	moyen	fort	fort	0,8	0,2	0
	niveau5	fort	faible	faible	0,9	0,1	0
	niveau5	fort	faible	moyen	0,9	0,1	0
	niveau5	fort	faible	fort	0,9	0,1	0
	niveau5	fort	moyen	faible	0,85	0,15	0
	niveau5	fort	moyen	moyen	0,85	0,15	0
	niveau5	fort	moyen	fort	0,8	0,2	0
	niveau5	fort	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau5	fort	fort	moyen	0,8	0,2	0
	niveau5	fort	fort	fort	0,8	0,2	0

	niveau6	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau6	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau6	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau6	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau6	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau6	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau6	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau6	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau6	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau6	moyen	faible	faible	0,8	0,2	0
	niveau6	moyen	faible	moyen	0,8	0,2	0
	niveau6	moyen	faible	fort	0,8	0,2	0
	niveau6	moyen	moyen	faible	0,8	0,2	0
	niveau6	moyen	moyen	moyen	0,7	0,3	0
	niveau6	moyen	moyen	fort	0,7	0,3	0
	niveau6	moyen	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau6	moyen	fort	moyen	0,7	0,3	0
	niveau6	moyen	fort	fort	0,7	0,3	0
	niveau6	fort	faible	faible	0,8	0,2	0
	niveau6	fort	faible	moyen	0,8	0,2	0
	niveau6	fort	faible	fort	0,8	0,2	0
	niveau6	fort	moyen	faible	0,8	0,2	0
	niveau6	fort	moyen	moyen	0,7	0,3	0
	niveau6	fort	moyen	fort	0,7	0,3	0
	niveau6	fort	fort	faible	0,9	0,1	0
	niveau6	fort	fort	moyen	0,7	0,3	0
	niveau6	fort	fort	fort	0,7	0,3	0
	niveau7	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau7	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau7	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau7	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau7	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau7	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau7	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau7	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau7	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau7	moyen	faible	faible	0,8	0,2	0
	niveau7	moyen	faible	moyen	0,8	0,2	0
	niveau7	moyen	faible	fort	0,8	0,2	0
	niveau7	moyen	moyen	faible	0,8	0,2	0
	niveau7	moyen	moyen	moyen	0,5	0,5	0
	niveau7	moyen	moyen	fort	0,5	0,5	0
	niveau7	moyen	fort	faible	0,5	0,5	0
	niveau7	moyen	fort	moyen	0,5	0,5	0
	niveau7	moyen	fort	fort	0,5	0,5	0
	niveau7	fort	faible	faible	0,8	0,2	0
	niveau7	fort	faible	moyen	0,8	0,2	0
	niveau7	fort	faible	fort	0,8	0,2	0
	niveau7	fort	moyen	faible	0,8	0,2	0
	niveau7	fort	moyen	moyen	0,5	0,5	0
	niveau7	fort	moyen	fort	0,5	0,5	0
	niveau7	fort	fort	faible	0,5	0,5	0
	niveau7	fort	fort	moyen	0,5	0,5	0
	niveau7	fort	fort	fort	0,5	0,5	0
	niveau8	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau8	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau8	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau8	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau8	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau8	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau8	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau8	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau8	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau8	moyen	faible	faible	0,5	0,5	0
	niveau8	moyen	faible	moyen	0,5	0,5	0
	niveau8	moyen	faible	fort	0,5	0,5	0
	niveau8	moyen	moyen	faible	0,5	0,5	0
	niveau8	moyen	moyen	moyen	0,4	0,6	0
	niveau8	moyen	moyen	fort	0,4	0,6	0
	niveau8	moyen	fort	faible	0,4	0,6	0
	niveau8	moyen	fort	moyen	0,4	0,6	0
	niveau8	moyen	fort	fort	0,4	0,6	0
	niveau8	fort	faible	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau8	fort	faible	moyen	0,5	0,4	0,1

	niveau8	fort	faible	fort	0,5	0,4	0,1
	niveau8	fort	moyen	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau8	fort	moyen	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau8	fort	moyen	fort	0,4	0,4	0,2
	niveau8	fort	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau8	fort	fort	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau8	fort	fort	fort	0,4	0,4	0,2
	niveau9	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau9	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau9	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau9	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau9	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau9	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau9	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau9	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau9	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau9	moyen	faible	faible	0,5	0,5	0
	niveau9	moyen	faible	moyen	0,5	0,5	0
	niveau9	moyen	faible	fort	0,5	0,5	0
	niveau9	moyen	moyen	faible	0,5	0,5	0
	niveau9	moyen	moyen	moyen	0,4	0,6	0
	niveau9	moyen	moyen	fort	0,4	0,6	0
	niveau9	moyen	fort	faible	0,4	0,6	0
	niveau9	moyen	fort	moyen	0,4	0,6	0
	niveau9	moyen	fort	fort	0,4	0,6	0
	niveau9	fort	faible	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau9	fort	faible	moyen	0,5	0,4	0,1
	niveau9	fort	faible	fort	0,5	0,4	0,1
	niveau9	fort	moyen	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau9	fort	moyen	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau9	fort	moyen	fort	0,4	0,4	0,2
	niveau9	fort	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau9	fort	fort	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau9	fort	fort	fort	0,4	0,4	0,2
	niveau10	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau10	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau10	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau10	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau10	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau10	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau10	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau10	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau10	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau10	moyen	faible	faible	0,5	0,5	0
	niveau10	moyen	faible	moyen	0,5	0,5	0
	niveau10	moyen	faible	fort	0,5	0,5	0
	niveau10	moyen	moyen	faible	0,5	0,5	0
	niveau10	moyen	moyen	moyen	0,4	0,6	0
	niveau10	moyen	moyen	fort	0,4	0,6	0
	niveau10	moyen	fort	faible	0,4	0,6	0
	niveau10	moyen	fort	moyen	0,4	0,6	0
	niveau10	moyen	fort	fort	0,4	0,6	0
	niveau10	fort	faible	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau10	fort	faible	moyen	0,5	0,4	0,1
	niveau10	fort	faible	fort	0,5	0,4	0,1
	niveau10	fort	moyen	faible	0,5	0,4	0,1
	niveau10	fort	moyen	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau10	fort	moyen	fort	0,4	0,4	0,2
	niveau10	fort	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau10	fort	fort	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau10	fort	fort	fort	0,4	0,4	0,2

Approvisionnement en eau (AE)							
variable	Pa_$Amont^x$	Pa_$mont^y$	Pa_pl	Pa_fn	faible	moyen	fort
	faible	faible	niveau1	faible	1	0	0
	faible	faible	niveau1	moyen	0	1	0
	faible	faible	niveau1	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau2	faible	0,9	0,1	0
	faible	faible	niveau2	moyen	0	0,8	0,2
	faible	faible	niveau2	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau3	faible	0,4	0,6	0
	faible	faible	niveau3	moyen	0	0,5	0,5
	faible	faible	niveau3	fort	0	0	1

	faible	faible	niveau4	faible	0	0,9	0,1
	faible	faible	niveau4	moyen	0	0,5	0,5
	faible	faible	niveau4	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau5	faible	0	0,8	0,2
	faible	faible	niveau5	moyen	0	0,4	0,6
	faible	faible	niveau5	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau6	faible	0	0,6	0,4
	faible	faible	niveau6	moyen	0	0,35	0,6
	faible	faible	niveau6	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau7	faible	0	0	1
	faible	faible	niveau7	moyen	0	0	1
	faible	faible	niveau7	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau8	faible	0	0	1
	faible	faible	niveau8	moyen	0	0	1
	faible	faible	niveau8	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau9	faible	0	0	1
	faible	faible	niveau9	moyen	0	0	1
	faible	faible	niveau9	fort	0	0	1
	faible	faible	niveau10	faible	0	0	1
	faible	faible	niveau10	moyen	0	0	1
	faible	faible	niveau10	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau1	faible	0	0,9	0,1
	faible	moyen	niveau1	moyen	0	0,8	0,2
	faible	moyen	niveau1	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau2	faible	0	0,8	0,2
	faible	moyen	niveau2	moyen	0	0,7	0,3
	faible	moyen	niveau2	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau3	faible	0	0,7	0,3
	faible	moyen	niveau3	moyen	0	0,6	0,4
	faible	moyen	niveau3	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau4	faible	0	0,5	0,5
	faible	moyen	niveau4	moyen	0	0,5	0,5
	faible	moyen	niveau4	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau5	faible	0	0,4	0,6
	faible	moyen	niveau5	moyen	0	0,3	0,7
	faible	moyen	niveau5	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau6	faible	0	0,3	0,7
	faible	moyen	niveau6	moyen	0	0,3	0,7
	faible	moyen	niveau6	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau7	faible	0	0	1
	faible	moyen	niveau7	moyen	0	0	1
	faible	moyen	niveau7	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau8	faible	0	0	1
	faible	moyen	niveau8	moyen	0	0	1
	faible	moyen	niveau8	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau9	faible	0	0	1
	faible	moyen	niveau9	moyen	0	0	1
	faible	moyen	niveau9	fort	0	0	1
	faible	moyen	niveau10	faible	0	0	1
	faible	moyen	niveau10	moyen	0	0	1
	faible	moyen	niveau10	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau1	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau1	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau1	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau2	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau2	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau2	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau3	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau3	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau3	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau4	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau4	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau4	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau5	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau5	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau5	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau6	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau6	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau6	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau7	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau7	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau7	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau8	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau8	moyen	0	0	1

	faible	fort	niveau8	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau9	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau9	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau9	fort	0	0	1
	faible	fort	niveau10	faible	0	0	1
	faible	fort	niveau10	moyen	0	0	1
	faible	fort	niveau10	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau1	faible	0	0,9	0,1
	moyen	faible	niveau1	moyen	0	0,8	0,2
	moyen	faible	niveau1	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau2	faible	0	0,85	0,2
	moyen	faible	niveau2	moyen	0	0,8	0,2
	moyen	faible	niveau2	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau3	faible	0	0,4	0,6
	moyen	faible	niveau3	moyen	0	0,35	0,6
	moyen	faible	niveau3	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau4	faible	0	0,3	0,7
	moyen	faible	niveau4	moyen	0	0,25	0,8
	moyen	faible	niveau4	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau5	faible	0	0,2	0,8
	moyen	faible	niveau5	moyen	0	0,2	0,8
	moyen	faible	niveau5	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau6	faible	0	0,2	0,8
	moyen	faible	niveau6	moyen	0	0,2	0,8
	moyen	faible	niveau6	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau7	faible	0	0	1
	moyen	faible	niveau7	moyen	0	0	1
	moyen	faible	niveau7	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau8	faible	0	0	1
	moyen	faible	niveau8	moyen	0	0	1
	moyen	faible	niveau8	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau9	faible	0	0	1
	moyen	faible	niveau9	moyen	0	0	1
	moyen	faible	niveau9	fort	0	0	1
	moyen	faible	niveau10	faible	0	0	1
	moyen	faible	niveau10	moyen	0	0	1
	moyen	faible	niveau10	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau1	faible	0	0,5	0,5
	moyen	moyen	niveau1	moyen	0	0,4	0,6
	moyen	moyen	niveau1	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau2	faible	0	0,5	0,5
	moyen	moyen	niveau2	moyen	0	0,4	0,6
	moyen	moyen	niveau2	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau3	faible	0	0,4	0,6
	moyen	moyen	niveau3	moyen	0,5	0,3	0,2
	moyen	moyen	niveau3	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau4	faible	0	0,3	0,7
	moyen	moyen	niveau4	moyen	0	0,25	0,8
	moyen	moyen	niveau4	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau5	faible	0	0,2	0,8
	moyen	moyen	niveau5	moyen	0	0,2	0,8
	moyen	moyen	niveau5	fort	0	0	1
	moyen	moyen	niveau6	faible	0	0	1
	moyen	moyen	niveau6	moyen	0	0	1
	moyen	moyen	niveau6	fort	0	1	0
	moyen	moyen	niveau7	faible	0	1	0
	moyen	moyen	niveau7	moyen	0	1	0
	moyen	moyen	niveau7	fort	0	1	0
	moyen	moyen	niveau8	faible	0	1	0
	moyen	moyen	niveau8	moyen	0	1	0
	moyen	moyen	niveau8	fort	0	1	0
	moyen	moyen	niveau9	faible	0	1	0
	moyen	moyen	niveau9	moyen	0	1	0
	moyen	moyen	niveau9	fort	0	1	0
	moyen	moyen	niveau10	faible	0	1	0
	moyen	moyen	niveau10	moyen	0	1	0
	moyen	moyen	niveau10	fort	0	1	0
	moyen	fort	niveau1	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau1	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau1	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau2	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau2	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau2	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau3	faible	0	0	1

	moyen	fort	niveau3	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau3	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau4	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau4	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau4	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau5	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau5	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau5	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau6	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau6	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau6	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau7	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau7	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau7	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau8	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau8	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau8	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau9	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau9	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau9	fort	0	0	1
	moyen	fort	niveau10	faible	0	0	1
	moyen	fort	niveau10	moyen	0	0	1
	moyen	fort	niveau10	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau1	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau1	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau1	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau2	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau2	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau2	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau3	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau3	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau3	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau4	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau4	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau4	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau5	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau5	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau5	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau6	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau6	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau6	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau7	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau7	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau7	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau8	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau8	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau8	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau9	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau9	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau9	fort	0	0	1
	fort	faible	niveau10	faible	0	0	1
	fort	faible	niveau10	moyen	0	0	1
	fort	faible	niveau10	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau1	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau1	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau1	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau2	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau2	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau2	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau3	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau3	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau3	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau4	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau4	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau4	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau5	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau5	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau5	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau6	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau6	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau6	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau7	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau7	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau7	fort	0	0	1

	fort	moyen	niveau8	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau8	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau8	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau9	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau9	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau9	fort	0	0	1
	fort	moyen	niveau10	faible	0	0	1
	fort	moyen	niveau10	moyen	0	0	1
	fort	moyen	niveau10	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau1	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau1	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau1	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau2	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau2	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau2	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau3	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau3	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau3	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau4	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau4	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau4	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau5	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau5	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau5	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau6	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau6	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau6	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau7	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau7	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau7	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau8	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau8	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau8	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau9	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau9	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau9	fort	0	0	1
	fort	fort	niveau10	faible	0	0	1
	fort	fort	niveau10	moyen	0	0	1
	fort	fort	niveau10	fort	0	0	1

Fonte neige (FN)							
variable	Pa_t	Pa_r	Pa_MN_t	Pa_cs	faible	moyen	fort
	niveau1	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau1	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau1	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	faible	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	moyen	fort	fort	1	0	0
	niveau1	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau1	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	faible	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	moyen	fort	1	0	0
	niveau1	fort	fort	faible	1	0	0
	niveau1	fort	fort	moyen	1	0	0
	niveau1	fort	fort	fort	1	0	0
	niveau2	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau2	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau2	faible	moyen	faible	1	0	0

	niveau2	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau2	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	faible	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	moyen	fort	fort	1	0	0
	niveau2	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau2	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	faible	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	moyen	fort	1	0	0
	niveau2	fort	fort	faible	1	0	0
	niveau2	fort	fort	moyen	1	0	0
	niveau2	fort	fort	fort	1	0	0
	niveau3	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau3	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	faible	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	moyen	fort	1	0	0
	niveau3	faible	fort	faible	1	0	0
	niveau3	faible	fort	moyen	1	0	0
	niveau3	faible	fort	fort	1	0	0
	niveau3	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau3	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau3	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau3	moyen	moyen	faible	0,9	0,1	0
	niveau3	moyen	moyen	moyen	0,9	0,1	0
	niveau3	moyen	moyen	fort	0,9	0,1	0
	niveau3	moyen	fort	faible	0,85	0,1	0,1
	niveau3	moyen	fort	moyen	0,85	0,1	0,1
	niveau3	moyen	fort	fort	0,85	0,1	0,1
	niveau3	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau3	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau3	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau3	fort	moyen	faible	0,8	0,2	0
	niveau3	fort	moyen	moyen	0,8	0,2	0
	niveau3	fort	moyen	fort	0,8	0,2	0
	niveau3	fort	fort	faible	0,8	0,1	0,1
	niveau3	fort	fort	moyen	0,8	0,1	0,1
	niveau3	fort	fort	fort	0,8	0,1	0,1
	niveau4	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau4	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau4	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau4	faible	moyen	faible	0,9	0,1	0
	niveau4	faible	moyen	moyen	0,9	0,1	0
	niveau4	faible	moyen	fort	0,9	0,1	0
	niveau4	faible	fort	faible	0,85	0,1	0,1
	niveau4	faible	fort	moyen	0,85	0,1	0,1
	niveau4	faible	fort	fort	0,85	0,1	0,1
	niveau4	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau4	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau4	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau4	moyen	moyen	faible	0,1	0,9	0
	niveau4	moyen	moyen	moyen	0,1	0,9	0
	niveau4	moyen	moyen	fort	0,1	0,9	0
	niveau4	moyen	fort	faible	0,1	0,8	0,1
	niveau4	moyen	fort	moyen	0,1	0,8	0,1
	niveau4	moyen	fort	fort	0,1	0,8	0,1
	niveau4	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau4	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau4	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau4	fort	moyen	faible	0,05	0,95	0
	niveau4	fort	moyen	moyen	0,05	0,95	0
	niveau4	fort	moyen	fort	0,05	0,95	0

	niveau4	fort	fort	faible	0,1	0,5	0,4
	niveau4	fort	fort	moyen	0,1	0,5	0,4
	niveau4	fort	fort	fort	0,1	0,5	0,4
	niveau5	faible	faible	faible	1	0	0
	niveau5	faible	faible	moyen	1	0	0
	niveau5	faible	faible	fort	1	0	0
	niveau5	faible	moyen	faible	0,05	0,95	0
	niveau5	faible	moyen	moyen	0,05	0,95	0
	niveau5	faible	moyen	fort	0,05	0,95	0
	niveau5	faible	fort	faible	0,05	0,1	0,9
	niveau5	faible	fort	moyen	0,05	0,1	0,9
	niveau5	faible	fort	fort	0,05	0,1	0,9
	niveau5	moyen	faible	faible	1	0	0
	niveau5	moyen	faible	moyen	1	0	0
	niveau5	moyen	faible	fort	1	0	0
	niveau5	moyen	moyen	faible	0,05	0,95	0
	niveau5	moyen	moyen	moyen	0,05	0,95	0
	niveau5	moyen	moyen	fort	0,05	0,95	0
	niveau5	moyen	fort	faible	0,05	0,1	0,9
	niveau5	moyen	fort	moyen	0,05	0,1	0,9
	niveau5	moyen	fort	fort	0,05	0,1	0,9
	niveau5	fort	faible	faible	1	0	0
	niveau5	fort	faible	moyen	1	0	0
	niveau5	fort	faible	fort	1	0	0
	niveau5	fort	moyen	faible	0	1	0
	niveau5	fort	moyen	moyen	0	1	0
	niveau5	fort	moyen	fort	0	1	0
	niveau5	fort	fort	faible	0	0,5	0,5
	niveau5	fort	fort	moyen	0	0,5	0,5
	niveau5	fort	fort	fort	0	0,5	0,5
	niveau6	faible	faible	faible	0	0	1
	niveau6	faible	faible	moyen	0	0	1
	niveau6	faible	faible	fort	0	0	1
	niveau6	faible	moyen	faible	0	0	1
	niveau6	faible	moyen	moyen	0	0	1
	niveau6	faible	moyen	fort	0	0	1
	niveau6	faible	fort	faible	0	0	1
	niveau6	faible	fort	moyen	0	0	1
	niveau6	faible	fort	fort	0	0	1
	niveau6	moyen	faible	faible	0	0	1
	niveau6	moyen	faible	moyen	0	0	1
	niveau6	moyen	faible	fort	0	0	1
	niveau6	moyen	moyen	faible	0	0	1
	niveau6	moyen	moyen	moyen	0	0	1
	niveau6	moyen	moyen	fort	0	0	1
	niveau6	moyen	fort	faible	0	0	1
	niveau6	moyen	fort	moyen	0	0	1
	niveau6	moyen	fort	fort	0	0	1
	niveau6	fort	faible	faible	0	0	1
	niveau6	fort	faible	moyen	0	0	1
	niveau6	fort	faible	fort	0	0	1
	niveau6	fort	moyen	faible	0	0	1
	niveau6	fort	moyen	moyen	0	0	1
	niveau6	fort	moyen	fort	0	0	1
	niveau6	fort	fort	faible	0	0	1
	niveau6	fort	fort	moyen	0	0	1
	niveau6	fort	fort	fort	0	0	1
	niveau7	faible	faible	faible	0	0	1
	niveau7	faible	faible	moyen	0	0	1
	niveau7	faible	faible	fort	0	0	1
	niveau7	faible	moyen	faible	0	0	1
	niveau7	faible	moyen	moyen	0	0	1
	niveau7	faible	moyen	fort	0	0	1
	niveau7	faible	fort	faible	0	0	1
	niveau7	faible	fort	moyen	0	0	1
	niveau7	faible	fort	fort	0	0	1
	niveau7	moyen	faible	faible	0	0	1
	niveau7	moyen	faible	moyen	0	0	1
	niveau7	moyen	faible	fort	0	0	1
	niveau7	moyen	moyen	faible	0	0	1
	niveau7	moyen	moyen	moyen	0	0	1
	niveau7	moyen	moyen	fort	0	0	1
	niveau7	moyen	fort	faible	0	0	1
	niveau7	moyen	fort	moyen	0	0	1

	niveau7	moyen	fort	fort	0	0	1
	niveau7	fort	faible	faible	0	0	1
	niveau7	fort	faible	moyen	0	0	1
	niveau7	fort	faible	fort	0	0	1
	niveau7	fort	moyen	faible	0	0	1
	niveau7	fort	moyen	moyen	0	0	1
	niveau7	fort	moyen	fort	0	0	1
	niveau7	fort	fort	faible	0	0	1
	niveau7	fort	fort	moyen	0	0	1
	niveau7	fort	fort	fort	0	0	1
	niveau8	faible	faible	faible	0	0	1
	niveau8	faible	faible	moyen	0	0	1
	niveau8	faible	faible	fort	0	0	1
	niveau8	faible	moyen	faible	0	0	1
	niveau8	faible	moyen	moyen	0	0	1
	niveau8	faible	moyen	fort	0	0	1
	niveau8	faible	fort	faible	0	0	1
	niveau8	faible	fort	moyen	0	0	1
	niveau8	faible	fort	fort	0	0	1
	niveau8	moyen	faible	faible	0	0	1
	niveau8	moyen	faible	moyen	0	0	1
	niveau8	moyen	faible	fort	0	0	1
	niveau8	moyen	moyen	faible	0	0	1
	niveau8	moyen	moyen	moyen	0	0	1
	niveau8	moyen	moyen	fort	0	0	1
	niveau8	moyen	fort	faible	0	0	1
	niveau8	moyen	fort	moyen	0	0	1
	niveau8	moyen	fort	fort	0	0	1
	niveau8	fort	faible	faible	0	0	1
	niveau8	fort	faible	moyen	0	0	1
	niveau8	fort	faible	fort	0	0	1
	niveau8	fort	moyen	faible	0	0	1
	niveau8	fort	moyen	moyen	0	0	1
	niveau8	fort	moyen	fort	0	0	1
	niveau8	fort	fort	faible	0	0	1
	niveau8	fort	fort	moyen	0	0	1
	niveau8	fort	fort	fort	0	0	1
	niveau9	faible	faible	faible	0	0	1
	niveau9	faible	faible	moyen	0	0	1
	niveau9	faible	faible	fort	0	0	1
	niveau9	faible	moyen	faible	0	0	1
	niveau9	faible	moyen	moyen	0	0	1
	niveau9	faible	moyen	fort	0	0	1
	niveau9	faible	fort	faible	0	0	1
	niveau9	faible	fort	moyen	0	0	1
	niveau9	faible	fort	fort	0	0	1
	niveau9	moyen	faible	faible	0	0	1
	niveau9	moyen	faible	moyen	0	0	1
	niveau9	moyen	faible	fort	0	0	1
	niveau9	moyen	moyen	faible	0	0	1
	niveau9	moyen	moyen	moyen	0	0	1
	niveau9	moyen	moyen	fort	0	0	1
	niveau9	moyen	fort	faible	0	0	1
	niveau9	moyen	fort	moyen	0	0	1
	niveau9	moyen	fort	fort	0	0	1
	niveau9	fort	faible	faible	0	0	1
	niveau9	fort	faible	moyen	0	0	1
	niveau9	fort	faible	fort	0	0	1
	niveau9	fort	moyen	faible	0	0	1
	niveau9	fort	moyen	moyen	0	0	1
	niveau9	fort	moyen	fort	0	0	1
	niveau9	fort	fort	faible	0	0	1
	niveau9	fort	fort	moyen	0	0	1
	niveau9	fort	fort	fort	0	0	1
	niveau10	faible	faible	faible	0	0	1
	niveau10	faible	faible	moyen	0	0	1
	niveau10	faible	faible	fort	0	0	1
	niveau10	faible	moyen	faible	0	0	1
	niveau10	faible	moyen	moyen	0	0	1
	niveau10	faible	moyen	fort	0	0	1
	niveau10	faible	fort	faible	0	0	1
	niveau10	faible	fort	moyen	0	0	1
	niveau10	faible	fort	fort	0	0	1
	niveau10	moyen	faible	faible	0	0	1

	niveau10	moyen	faible	moyen	0	0	1
	niveau10	moyen	faible	fort	0	0	1
	niveau10	moyen	moyen	faible	0	0	1
	niveau10	moyen	moyen	moyen	0	0	1
	niveau10	moyen	moyen	fort	0	0	1
	niveau10	moyen	fort	faible	0	0	1
	niveau10	moyen	fort	moyen	0	0	1
	niveau10	moyen	fort	fort	0	0	1
	niveau10	fort	faible	faible	0	0	1
	niveau10	fort	faible	moyen	0	0	1
	niveau10	fort	faible	fort	0	0	1
	niveau10	fort	moyen	faible	0	0	1
	niveau10	fort	moyen	moyen	0	0	1
	niveau10	fort	moyen	fort	0	0	1
	niveau10	fort	fort	faible	0	0	1
	niveau10	fort	fort	moyen	0	0	1
	niveau10	fort	fort	fort	0	0	1

Fonction de transfert écoulement surface (FT_ES)						
variable	Pa_es	Pa_cs	Pa_cc	faible	moyen	fort
FT_ES^{xy0} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	faible	faible	0,1	0,9	0
	moyen	faible	moyen	0,05	0,95	0
	moyen	faible	fort	0,05	0,95	0
	moyen	moyen	faible	0,15	0,85	0
	moyen	moyen	moyen	0,1	0,9	0
	moyen	moyen	fort	0,1	0,9	0
	moyen	fort	faible	0,2	0,8	0
	moyen	fort	moyen	0,15	0,85	0
	moyen	fort	fort	0,15	0,85	0
	fort	faible	faible	0,1	0,1	0,8
	fort	faible	moyen	0,05	0,1	0,9
	fort	faible	fort	0,05	0,1	0,9
	fort	moyen	faible	0,1	0,15	0,8
	fort	moyen	moyen	0,1	0,1	0,8
	fort	moyen	fort	0,1	0,1	0,8
	fort	fort	faible	0,1	0,2	0,7
	fort	fort	moyen	0,05	0,2	0,8
	fort	fort	fort	0,05	0,2	0,8

Fonction de transfert écoulement surface (FT_ESs)						
variable	Pa_ess	Pa_cs	Pa HS_t	faible	moyen	fort
FT_ESs^{xy0} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	faible	faible	0,15	0,85	0
	moyen	faible	moyen	0,1	0,9	0
	moyen	faible	fort	0,1	0,9	0
	moyen	moyen	faible	0,1	0,9	0
	moyen	moyen	moyen	0,05	0,95	0
	moyen	moyen	fort	0,05	0,95	0
	moyen	fort	faible	0	1	0
	moyen	fort	moyen	0	1	0
	moyen	fort	fort	0	1	0
	fort	faible	faible	0,1	0,1	0,8
	fort	faible	moyen	0,05	0,1	0,9
	fort	faible	fort	0,05	0,1	0,9
	fort	moyen	faible	0,05	0,1	0,9

	fort	moyen	moyen	0	0,1	0,9
	fort	moyen	fort	0	0,1	0,9
	fort	fort	faible	0,1	0,1	0,8
	fort	fort	moyen	0	0,1	0,9
	fort	fort	fort	0	0,1	0,9

Humidité sol à l'instant t-1 (HS_{t-1})			
variable	faible	moyen	fort
HS_{t-1}^{x11} où $x = 1,2,3$	0,25	0,25	0,5
HS_{t-1}^{x21} où $x = 1,2,3$	0,3	0,3	0,4
HS_{t-1}^{x31} où $x = 1,2,3$	0,34	0,31	0,35

Humidité sol à l'instant t (HS_t)				
variable	Pa_HS_{t-1}	faible	moyen	fort
HS_t^{xy1} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	1	0	0
	moyen	0	1	0
	fort	0	0	1
HS_t^{xy2} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	0,6	0,2	0,2
	moyen	0,1	0,6	0,3
	fort	0,2	0,3	0,5

Humidité sol pour l'instant t+1 (HS_{t+1})				
variable	Pa_HS_t	faible	moyen	fort
HS_t^{xy1} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	1	0	0
	moyen	0	1	0
	fort	0	0	1

Infiltration (I)						
variable	Pa_ae	Pa_cs	Pa_HS_t	faible	moyen	fort
I^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,68	0,32	0
	moyen	fort	moyen	0,64	0,36	0
	moyen	fort	fort	0,52	0,48	0
	moyen	fort	faible	0,61	0,39	0
	moyen	fort	moyen	0,61	0,39	0
	moyen	fort	fort	0,58	0,42	0
	moyen	fort	faible	0,61	0,39	0
	moyen	fort	moyen	0,58	0,42	0
	moyen	fort	fort	0,55	0,45	0
	fort	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	fort	fort	moyen	0,33	0,43	0,2
	fort	fort	fort	0,3	0,51	0,2
	fort	fort	faible	0,18	0,63	0,2
	fort	fort	moyen	0,22	0,42	0,4
	fort	fort	fort	0,2	0,41	0,4
	fort	fort	faible	0,2	0,41	0,4
	fort	fort	moyen	0,18	0,4	0,4
	fort	fort	fort	0,17	0,38	0,4
I^{x20} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,6	0,4	0
	moyen	fort	moyen	0,56	0,44	0
	moyen	fort	fort	0,52	0,48	0
	moyen	fort	faible	0,56	0,44	0
	moyen	fort	moyen	0,52	0,48	0

	moyen	fort	fort	0,48	0,52	0
	moyen	fort	faible	0,52	0,48	0
	moyen	fort	moyen	0,48	0,52	0
	moyen	fort	fort	0,44	0,56	0
	fort	fort	faible	0,3	0,46	0,2
	fort	fort	moyen	0,25	0,45	0,3
	fort	fort	fort	0,19	0,58	0,2
	fort	fort	faible	0,15	0,62	0,2
	fort	fort	moyen	0,13	0,42	0,4
	fort	fort	fort	0,12	0,4	0,5
	fort	fort	faible	0,12	0,4	0,5
	fort	fort	moyen	0,11	0,37	0,5
	fort	fort	fort	0,1	0,34	0,6
I^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,5	0,5	0
	moyen	fort	moyen	0,45	0,55	0
	moyen	fort	fort	0,4	0,6	0
	moyen	fort	faible	0,45	0,55	0
	moyen	fort	moyen	0,4	0,6	0
	moyen	fort	fort	0,35	0,65	0
	moyen	fort	faible	0,4	0,6	0
	moyen	fort	moyen	0,35	0,65	0
	moyen	fort	fort	0,3	0,7	0
	fort	fort	faible	0,2	0,5	0,3
	fort	fort	moyen	0,15	0,5	0,3
	fort	fort	fort	0,1	0,45	0,4
	fort	fort	faible	0,05	0,5	0,4
	fort	fort	moyen	0,05	0,4	0,6
	fort	fort	fort	0,05	0,35	0,6
	fort	fort	faible	0,05	0,35	0,6
	fort	fort	moyen	0,05	0,3	0,6
	fort	fort	fort	0,05	0,25	0,7

Manteau neige à l'instant t-1 (MN_{t-1})			
variable	faible	moyen	fort
MN_{t-1}^{x11} où $x = 1,2,3$	0,25	0,6	0,15
MN_{t-1}^{x21} où $x = 1,2,3$	0,45	0,45	0,1
MN_{t-1}^{x31} où $x = 1,2,3$	0,55	0,35	0,1

Manteau neige à l'instant t (MN_t)					
variable	Pa_MN_{t-1}	Pa_ps	faible	moyen	fort
MN_t^{xy1} où $x = 1,2,3$ $y = 1,2,3$	faible	niveau1	1	0	0
	faible	niveau2	1	0	0
	faible	niveau3	1	0	0
	faible	niveau4	1	0	0
	faible	niveau5	1	0	0
	faible	niveau6	1	0	0
	faible	niveau7	1	0	0
	faible	niveau8	1	0	0
	faible	niveau9	1	0	0
	faible	niveau10	1	0	0
	moyen	niveau1	0	1	0
	moyen	niveau2	0	1	0
	moyen	niveau3	0	1	0
	moyen	niveau4	0	1	0
	moyen	niveau5	0	1	0
	moyen	niveau6	0	1	0
	moyen	niveau7	0	1	0
	moyen	niveau8	0	1	0
	moyen	niveau9	0	1	0
	moyen	niveau10	0	1	0
	fort	niveau1	0	0	1
	fort	niveau2	0	0	1
	fort	niveau3	0	0	1

	fort	niveau4	0	0	1
	fort	niveau5	0	0	1
	fort	niveau6	0	0	1
	fort	niveau7	0	0	1
	fort	niveau8	0	0	1
	fort	niveau9	0	0	1
	fort	niveau10	0	0	1
MN^{xy2} où $x = 1,2,3$ $y = 1,2,3$	faible	niveau1	1	0	0
	faible	niveau2	1	0	0
	faible	niveau3	1	0	0
	faible	niveau4	0,5	0,5	0
	faible	niveau5	0,5	0,5	0
	faible	niveau6	0,5	0,5	0
	faible	niveau7	0,25	0,25	0,5
	faible	niveau8	0,25	0,25	0,5
	faible	niveau9	0,25	0,25	0,5
	faible	niveau10	0,25	0,25	0,5
	moyen	niveau1	0,25	0,75	0
	moyen	niveau2	0,25	0,75	0
	moyen	niveau3	0,25	0,75	0
	moyen	niveau4	0,15	0,7	0,2
	moyen	niveau5	0,15	0,7	0,2
	moyen	niveau6	0,15	0,7	0,2
	moyen	niveau7	0	0,2	0,8
	moyen	niveau8	0	0,2	0,8
	moyen	niveau9	0	0,2	0,8
	moyen	niveau10	0	0,2	0,8
	fort	niveau1	0	0	1
	fort	niveau2	0	0	1
	fort	niveau3	0	0	1
	fort	niveau4	0	0	1
	fort	niveau5	0	0	1
	fort	niveau6	0	0	1
	fort	niveau7	0	0	1
	fort	niveau8	0	0	1
	fort	niveau9	0	0	1
	fort	niveau10	0	0	1

Manteau neige pour l'instant t+1 (MN_{t+1})				
variable	Pa MN_t	faible	moyen	fort
MN_t^{xy1} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	1	0	0
	moyen	0	1	0
	fort	0	0	1

Précipitation totale (PT)										
Variable	Niveau1	Nieveau2	Niveau3	Niveau4	Niveau5	Niveau6	Niveau7	Niveau8	Niveau9	Niveau10
PT^{x10} $x = 1,2,3$	2E-05	0,00078	0,0068	0,0358	0,116	0,2301	0,2798	0,2086	0,0954	0,0267
PT^{x20} $x = 1,2,3$	0,002	0,0139	0,0605	0,161	0,2626	0,2626	0,161	0,0605	0,0139	0,002
PT^{x30} $x = 1,2,3$	0,1206	0,2392	0,2909	0,2169	0,0992	0,0278	0,0048	0,0005	5,00E-05	5,00E-05

Température (T)										
Variable	Niveau1	Nieveau2	Niveau3	Niveau4	Niveau5	Niveau6	Niveau7	Niveau8	Niveau9	Niveau10
T^{x10} $x = 1,2,3$	0,0359	0,1163	0,2306	0,2805	0,2092	0,0956	0,0268	0,0046	0,00047	3,00E-05
T^{x20} $x = 1,2,3$	0,0067	0,0357	0,1155	0,2291	0,2786	0,2077	0,095	0,0266	0,0046	0,0005
T^{x30} $x = 1,2,3$	0,0008	0,0067	0,0357	0,1155	0,229	0,2785	0,2077	0,095	0,0266	0,0045

Précipitation liquide (PL)												
variable	Pa_pt	Pa_t	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10
	N1	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	N1	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N3	0,1	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N4	0,2	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N3	0,05	0,15	0,8	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N4	0	0,1	0,9	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N3	0,01	0,04	0,15	0,8	0	0	0	0	0	0
	N4	N4	0	0,02	0,08	0,9	0	0	0	0	0	0
	N4	N5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N4	N6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N4	N7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N4	N8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N4	N9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N4	N10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	N5	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N3	0,01	0,03	0,04	0,12	0,8	0	0	0	0	0
	N5	N4	0	0,01	0,03	0,06	0,9	0	0	0	0	0
	N5	N5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N5	N6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N5	N7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N5	N8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N5	N9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N5	N10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	N6	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N3	0,01	0,02	0,03	0,04	0,1	0,8	0	0	0	0
	N6	N4	0	0,01	0,02	0,02	0,05	0,9	0	0	0	0
	N6	N5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N6	N6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N6	N7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N6	N8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N6	N9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N6	N10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	N7	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N3	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,8	0	0	0
	N7	N4	0,005	0,005	0,01	0,01	0,03	0,04	0,9	0	0	0
	N7	N5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N7	N6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N7	N7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N7	N8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N7	N9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N7	N10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	N8	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N3	0,005	0,005	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,8	0	0
	N8	N4	0,005	0,005	0,005	0,005	0,01	0,03	0,04	0,9	0	0
	N8	N5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	N8	N6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	N8	N7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	N8	N8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	N8	N9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	N8	N10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

	N9	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N3	0,005	0,005	0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,8	0
	N9	N4	0,005	0,005	0,005	0,005	0,01	0,01	0,02	0,04	0,9	0
	N9	N5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N9	N6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N9	N7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N9	N8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N9	N9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N9	N10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	N10	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N3	0,005	0,005	0,005	0,005	0,02	0,02	0,04	0,04	0,06	0,8
	N10	N4	0,005	0,005	0,005	0,005	0,01	0,01	0,01	0,02	0,03	0,9
	N10	N5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	N10	N6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	N10	N7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	N10	N8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	N10	N9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Précipitation solide (*PS*)												
variable	Pa_pt	Pa_t	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10
	N1	N1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N3	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N4	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N2	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N1	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N2	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N3	0,8	0,1	0,1	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N4	0,9	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N3	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N1	0,05	0,05	0,05	0,85	0	0	0	0	0	0
	N4	N2	0,05	0,05	0,1	0,8	0	0	0	0	0	0
	N4	N3	0,8	0,1	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0
	N4	N4	0,8	0,1	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0
	N4	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N4	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,8	0	0	0	0	0
	N5	N2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,8	0	0	0	0	0
	N5	N3	0,8	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0	0	0	0
	N5	N4	0,8	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0	0	0	0
	N5	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N5	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,75	0	0	0	0

	N6	N2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,75	0	0	0	0
	N6	N3	0,75	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0	0	0
	N6	N4	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667	0	0	0	0
	N6	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N6	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N1	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,76	0	0	0
	N7	N2	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,76	0	0	0
	N7	N3	0,76	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0	0	0
	N7	N4	0,76	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0	0	0
	N7	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N7	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N1	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,05	0,05	0,75	0	0
	N8	N2	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,05	0,05	0,75	0	0
	N8	N3	0,75	0,05	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0	0
	N8	N4	0,75	0,05	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0	0
	N8	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N8	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,04	0,78	0
	N9	N2	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,04	0,78	0
	N9	N3	0,78	0,04	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0
	N9	N4	0,78	0,04	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0
	N9	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N9	N10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,04	0,76
	N10	N2	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,04	0,76
	N10	N3	0,76	0,04	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	N10	N4	0,76	0,04	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	N10	N5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N10	N9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Annexe 4 : Paramètre estimé par l'apprentissage par transfert pour l'étude de cas

Approvisionnement en eau en aval longitude ($Aval^x$)					
variable	Pa_ft_es	Pa_ft_ess	faible	moyen	fort
$Aval^{x\,x10}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,85239479	0,07261975	0,07498565
	faible	moyen	0,30448786	0,60706937	0,08844285
	faible	fort	0,08355133	0,648254	0,26819475
	moyen	faible	0,39580453	0,55213517	0,05205988
	moyen	moyen	0,03286118	0,56079343	0,40634588
	moyen	fort	0,01916092	0,1380415	0,84279756
	fort	faible	0,03051711	0,30661946	0,66286362
	fort	moyen	0,03744357	0,30995795	0,65259822
	fort	fort	0	0	1
$Aval^{x\,x20}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,78597017	0,10795593	0,10607401
	faible	moyen	0,58355694	0,3204946	0,09594847
	faible	fort	0,15436237	0,50682124	0,33881638
	moyen	faible	0,63264802	0,29394344	0,07340908
	moyen	moyen	0,04249268	0,6619137	0,29559322
	moyen	fort	0,02658405	0,23335767	0,74005811
	fort	faible	0,0643609	0,53210225	0,40353639
	fort	moyen	0,05568048	0,27392487	0,67039472
	fort	fort	0,02445668	0,02088398	0,95465966
$Aval^{x\,x30}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,85594665	0,07286921	0,07118434
	faible	moyen	0,50188424	0,45910195	0,03901382
	faible	fort	0,27281006	0,50665309	0,22053685
	moyen	faible	0,58356567	0,33846243	0,07797132
	moyen	moyen	0,05024299	0,69070076	0,25905651
	moyen	fort	0,04133516	0,44574945	0,51291538
	fort	faible	0,06350362	0,25932001	0,67717602
	fort	moyen	0,04573967	0,27367495	0,68058536
	fort	fort	0,02426502	0,04307976	0,93265488

Approvisionnement en eau en aval altitude/latitude ($Aval^y$)					
variable	Pa_ft_es	Pa_ft_ess	faible	moyen	fort
$Aval^{y\,x10}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,37710985	0,30877534	0,31411397
	faible	moyen	0,2675237	0,5940684	0,1384079
	faible	fort	0,21310302	0,47148359	0,31541253
	moyen	faible	0,52722651	0,31232063	0,16045286
	moyen	moyen	0,09762502	0,59331081	0,30906409
	moyen	fort	0,11010817	0,35849599	0,53139585
	fort	faible	0,1245996	0,36098606	0,51441427
	fort	moyen	0,15580933	0,16093514	0,68325639
	fort	fort	0,06115727	0,03890595	0,89993697
$Aval^{y\,x20}$ où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,67882155	0,16090734	0,16027104
	faible	moyen	0,47301376	0,29529143	0,23169481
	faible	fort	0,22562428	0,55110179	0,22327385
	moyen	faible	0,48054721	0,28043883	0,23901395
	moyen	moyen	0,14359981	0,45469731	0,40170202
	moyen	fort	0,05830783	0,34656933	0,59512284
	fort	faible	0,18991485	0,23024566	0,57983942
	fort	moyen	0,12645444	0,23913735	0,63440828
	fort	fort	0,07736712	0,07673081	0,84590226
y^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,59474072	0,20536442	0,19989479
	faible	moyen	0,38567632	0,4837094	0,13061427
	faible	fort	0,2869178	0,55665622	0,15642591
	moyen	faible	0,25538017	0,54898503	0,19563479
	moyen	moyen	0,20019984	0,58295992	0,21684016
	moyen	fort	0,08667197	0,31898431	0,59434381
	fort	faible	0,15283649	0,41212269	0,43503997
	fort	moyen	0,11141265	0,21049227	0,67809515
	fort	fort	0,09702649	0,11169582	0,79127771

Caractéristique du courant (CC)			
Variable	faible	moyen	fort
CC^{x10} où $x = 1,2,3$	0,209343244	0,308855552	0,482690706
CC^{x20} où $x = 1,2,3$	0,31182588	0,27087575	0,41735361
CC^{x30} où $x = 1,2,3$	0,2744001	0,3383801	0,38727506

Couverture sol (CS)			
Variable	faible	moyen	fort
CS^{x10} où $x = 1,2,3$	0,306398	0,425108	0,269364
CS^{x20} où $x = 1,2,3$	0,22941	0,31317	0,45744
CS^{x30} où $x = 1,2,3$	0,08648222	0,20899444	0,70403333

Radiation (R)			
Variable	faible	moyen	fort
R^{x10} où $x = 1,2,3$	0,11457828	0,38355289	0,50103458
R^{x20} où $x = 1,2,3$	0,20073624	0,33757078	0,33757078
R^{x30} où $x = 1,2,3$	0,19752218	0,51466949	0,51466949

Ecoulement surface (ES)					
variable	Pa_ae	Pa_i	faible	moyen	fort
ES^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,77801342	0,09307274	0,1289137
	faible	moyen	0,76323385	0,10165736	0,13510899
	faible	fort	0,476422	0,25338298	0,27019431
	moyen	faible	0,13008128	0,79679185	0,07312719
	moyen	moyen	0,39099114	0,56972068	0,03928816
	moyen	fort	0,41441887	0,51739454	0,06818632
	fort	faible	0,20189891	0,17735564	0,62074545
	fort	moyen	0,16077768	0,51757653	0,32164579
	fort	fort	0,30063593	0,36692378	0,33244014
ES^{x20} où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,69661554	0,1485516	0,15483351
	faible	moyen	0,82276178	0,08521052	0,09202813
	faible	fort	0,75375272	0,12733442	0,11891272
	moyen	faible	0,32703993	0,59199477	0,08096538
	moyen	moyen	0,49825115	0,46735892	0,03438996
	moyen	fort	0,36433921	0,58784379	0,04781695
	fort	faible	0,25892479	0,33260706	0,40846814
	fort	moyen	0,23036261	0,52840291	0,24123448
	fort	fort	0,30246091	0,2952345	0,40230389
ES^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	0,73707611	0,13683084	0,12609314
	faible	moyen	0,72311651	0,1427372	0,13414706
	faible	fort	0,81760198	0,1022434	0,08015447
	moyen	faible	0,37220831	0,57574793	0,05204357
	moyen	moyen	0,62634531	0,33810816	0,03554634
	moyen	fort	0,60090706	0,36515953	0,03393342
	fort	faible	0,35952097	0,2817947	0,35868433
	fort	moyen	0,50700282	0,33699198	0,1560052
	fort	fort	0,31185962	0,44008723	0,24805301

Ecoulement subsurface (ESs)						
variable	Pa_i	Pa_cs	Pa_hs_t	faible	moyen	fort
ESs^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	0,735316462	0,12433388	0,14034977
	faible	faible	moyen	0,800781073	0,09203438	0,10718455
	faible	faible	fort	0,81876382	0,09465831	0,08657815
	faible	moyen	faible	0,721785276	0,11834827	0,15986677
	faible	moyen	moyen	0,820704023	0,09235911	0,08693689
	faible	moyen	fort	0,759815098	0,08286629	0,15731861
	faible	fort	faible	0,788456871	0,07052747	0,1410154
	faible	fort	moyen	0,796565812	0,07106165	0,13237295
	faible	fort	fort	0,683411378	0,14414669	0,17244182
	moyen	faible	faible	0,049184256	0,87772318	0,07309268
	moyen	faible	moyen	0,098884931	0,80415829	0,09695682
	moyen	faible	fort	0,056076451	0,84106933	0,10285447
	moyen	moyen	faible	0,071706698	0,80500469	0,12328859
	moyen	moyen	moyen	0,043143769	0,78942063	0,1674356
	moyen	moyen	fort	0,035148324	0,82590979	0,13894205
	moyen	fort	faible	0,080729207	0,78609286	0,13317787
	moyen	fort	moyen	0,066831709	0,78486638	0,14830193
	moyen	fort	fort	0,101703396	0,80670645	0,09159026
	fort	faible	faible	0	0	1

	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1
ESs^{x20} où $= 1,2,3$	faible	faible	faible	0,709635796	0,14345914	0,14690511
	faible	faible	moyen	0,764155164	0,11569741	0,12014743
	faible	faible	fort	0,767634879	0,13757859	0,09478692
	faible	moyen	faible	0,752122522	0,11764887	0,13022883
	faible	moyen	moyen	0,815521163	0,08912684	0,09535182
	faible	moyen	fort	0,718600491	0,10452853	0,17687098
	faible	fort	faible	0,804052588	0,08173814	0,11420921
	faible	fort	moyen	0,832869595	0,06944453	0,09768615
	faible	fort	fort	0,675899493	0,18070936	0,14339104
	moyen	faible	faible	0,111444118	0,81653625	0,07201981
	moyen	faible	moyen	0,243018818	0,66409773	0,09288333
	moyen	faible	fort	0,135364298	0,76965721	0,09497853
	moyen	moyen	faible	0,144898305	0,74245529	0,11264649
	moyen	moyen	moyen	0,11774876	0,73194477	0,15030647
	moyen	moyen	fort	0,088699439	0,75838632	0,1529143
	moyen	fort	faible	0,167988147	0,64663191	0,18538034
	moyen	fort	moyen	0,13359206	0,73831737	0,12809063
	moyen	fort	fort	0,223817622	0,68845027	0,08773215
	fort	faible	faible	0	0	1
	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1
ESs^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	0,680610414	0,16307987	0,15630976
	faible	faible	moyen	0,712006644	0,14612748	0,14186588
	faible	faible	fort	0,74765968	0,13611053	0,11623041
	faible	moyen	faible	0,64452387	0,17729118	0,17818511
	faible	moyen	moyen	0,774721911	0,13768593	0,08759212
	faible	moyen	fort	0,674437977	0,12059762	0,2049644
	faible	fort	faible	0,798207269	0,07841386	0,1233786
	faible	fort	moyen	0,834500772	0,09352196	0,07197768
	faible	fort	fort	0,704387904	0,11754763	0,17806419
	moyen	faible	faible	0,224421376	0,70433566	0,07124317
	moyen	faible	moyen	0,2380779	0,63723403	0,12468805
	moyen	faible	fort	0,193857269	0,68612613	0,12001711
	moyen	moyen	faible	0,241632719	0,67244678	0,08592082
	moyen	moyen	moyen	0,200517719	0,65431465	0,14516764
	moyen	moyen	fort	0,209740504	0,69227315	0,09798641
	moyen	fort	faible	0,213263137	0,67617364	0,11056319
	moyen	fort	moyen	0,248742363	0,62839059	0,12286707
	moyen	fort	fort	0,251031883	0,65461105	0,09435711
	fort	faible	faible	0	0	1
	fort	faible	moyen	0	0	1
	fort	faible	fort	0	0	1
	fort	moyen	faible	0	0	1
	fort	moyen	moyen	0	0	1
	fort	moyen	fort	0	0	1
	fort	fort	faible	0	0	1
	fort	fort	moyen	0	0	1
	fort	fort	fort	0	0	1

Evapotranspiration(EVP)							
variable	Pa_t	Pa_ae	Pa_r	Pa_cs	faible	moyen	fort
	niveau1	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	faible	fort	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau1	faible	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	moyen	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau1	moyen	moyen	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau1	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	moyen	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau1	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	moyen	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau1	fort	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau1	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau1	fort	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	faible	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau2	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	moyen	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau2	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau2	faible	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	faible	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	moyen	faible	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau2	moyen	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	moyen	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	moyen	moyen	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau2	moyen	moyen	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau2	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	moyen	fort	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau2	moyen	fort	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau2	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	moyen	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau2	fort	moyen	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau2	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau2	fort	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau3	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	faible	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau3	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	faible	moyen	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau3	faible	moyen	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau3	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	faible	fort	moyen	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau3	faible	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	moyen	faible	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau3	moyen	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau3	moyen	moyen	faible	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau3	moyen	moyen	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau3	moyen	moyen	fort	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau3	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	moyen	fort	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau3	moyen	fort	fort	0,714286	0,142857	0,142857

	niveau3	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	fort	moyen	faible	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau3	fort	moyen	moyen	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau3	fort	moyen	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau3	fort	fort	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau3	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau3	fort	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau4	faible	faible	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau4	faible	faible	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	faible	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau4	faible	moyen	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau4	faible	moyen	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	faible	moyen	fort	0,714286	0,142857	0,142857
	niveau4	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau4	faible	fort	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	faible	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau4	moyen	faible	faible	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau4	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau4	moyen	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau4	moyen	moyen	faible	0,571429	0,285714	0,142857
	niveau4	moyen	moyen	moyen	0,666667	0,222222	0,111111
	niveau4	moyen	moyen	fort	0,75	0,125	0,125
	niveau4	moyen	fort	faible	0,7	0,2	0,1
	niveau4	moyen	fort	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	moyen	fort	fort	0,625	0,25	0,125
	niveau4	fort	faible	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau4	fort	faible	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	fort	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau4	fort	moyen	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau4	fort	moyen	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau4	fort	moyen	fort	0,625	0,25	0,125
	niveau4	fort	fort	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau4	fort	fort	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau4	fort	fort	fort	0,5	0,375	0,125
	niveau5	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau5	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau5	faible	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau5	faible	moyen	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau5	faible	moyen	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau5	faible	moyen	fort	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau5	faible	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau5	faible	fort	moyen	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau5	faible	fort	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau5	moyen	faible	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau5	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau5	moyen	faible	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau5	moyen	moyen	faible	0,75	0,125	0,125
	niveau5	moyen	moyen	moyen	0,625	0,25	0,125
	niveau5	moyen	moyen	fort	0,222222	0,666667	0,111111
	niveau5	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau5	moyen	fort	moyen	0,777778	0,111111	0,111111
	niveau5	moyen	fort	fort	0,8	0,1	0,1
	niveau5	fort	faible	faible	0,25	0,5	0,25
	niveau5	fort	faible	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau5	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau5	fort	moyen	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau5	fort	moyen	moyen	0,625	0,25	0,125
	niveau5	fort	moyen	fort	0,75	0,125	0,125
	niveau5	fort	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau5	fort	fort	moyen	0,571429	0,285714	0,142857
	niveau5	fort	fort	fort	0,444444	0,444444	0,111111
	niveau6	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	faible	faible	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau6	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	faible	moyen	fort	0,777778	0,111111	0,111111
	niveau6	faible	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau6	faible	fort	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau6	faible	fort	fort	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau6	moyen	faible	faible	0,25	0,5	0,25
	niveau6	moyen	faible	moyen	0,5	0,25	0,25

	niveau6	moyen	faible	fort	0,666667	0,222222	0,111111
	niveau6	moyen	moyen	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau6	moyen	moyen	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau6	moyen	moyen	fort	0,545455	0,363636	0,0909091
	niveau6	moyen	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau6	moyen	fort	moyen	0,4	0,4	0,2
	niveau6	moyen	fort	fort	0,625	0,25	0,125
	niveau6	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	fort	faible	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau6	fort	faible	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau6	fort	moyen	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau6	fort	moyen	moyen	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau6	fort	moyen	fort	0,5	0,4	0,1
	niveau6	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau6	fort	fort	moyen	0,6	0,2	0,2
	niveau6	fort	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau7	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	faible	faible	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau7	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	faible	moyen	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau7	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	faible	fort	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau7	faible	fort	fort	0,714286	0,142857	0,142857
	niveau7	moyen	faible	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau7	moyen	faible	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau7	moyen	faible	fort	0,25	0,5	0,25
	niveau7	moyen	moyen	faible	0,6	0,2	0,2
	niveau7	moyen	moyen	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau7	moyen	moyen	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau7	moyen	fort	faible	0,4	0,4	0,2
	niveau7	moyen	fort	moyen	0,333333	0,5	0,166667
	niveau7	moyen	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau7	fort	faible	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau7	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	fort	moyen	faible	0,25	0,5	0,25
	niveau7	fort	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	fort	moyen	fort	0,571429	0,285714	0,142857
	niveau7	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau7	fort	fort	fort	0,2	0,6	0,2
	niveau8	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	fort	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau8	faible	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	faible	fort	fort	0,6	0,2	0,2
	niveau8	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	moyen	moyen	0,166667	0,666667	0,166667
	niveau8	moyen	moyen	fort	0,333333	0,5	0,166667
	niveau8	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	moyen	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	faible	fort	0,25	0,5	0,25
	niveau8	fort	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	moyen	moyen	0,25	0,5	0,25
	niveau8	fort	moyen	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau8	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau8	fort	fort	fort	0,666667	0,166667	0,166667
	niveau9	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333

	niveau9	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	faible	fort	fort	0,5	0,25	0,25
	niveau9	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	moyen	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	moyen	faible	0,5	0,25	0,25
	niveau9	fort	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau9	fort	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	faible	fort	moyen	0,5	0,25	0,25
	niveau10	faible	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	moyen	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	faible	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	faible	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	faible	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	moyen	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	moyen	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	moyen	fort	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	fort	faible	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	fort	moyen	0,333333	0,333333	0,333333
	niveau10	fort	fort	fort	0,333333	0,333333	0,333333

Humidité sol à l'instant t (HS_t)				
variable	Pa_HS_{t-1}	faible	moyen	fort
HS_t^{xy2} où $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$	faible	0,51667	0,23333	0,25
	moyen	0,11905	0,52381	0,35714
	fort	0,19298	0,31579	0,49123

Infiltration (I)						
variable	Pa_ae	Pa_cs	Pa_HS_t	faible	moyen	fort
I^{x10} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,58	0,34	0,08
	moyen	fort	moyen	0,5176474	0,4352943	0,0470588

	moyen	fort	fort	0,615385	0,32307662	0,06153848
	moyen	fort	faible	0,6375	0,3125	0,05
	moyen	fort	moyen	0,5928572	0,37857166	0,02857144
	moyen	fort	fort	0,5391308	0,42608686	0,03478264
	moyen	fort	faible	0,5000002	0,45555592	0,04444448
	moyen	fort	moyen	0,6333338	0,32222232	0,04444448
	moyen	fort	fort	0,4421048	0,51578952	0,04210528
	fort	fort	faible	0,5142852	0,3714282	0,1142856
	fort	fort	moyen	0,3714282	0,3999996	0,2285712
	fort	fort	fort	0,475	0,425	0,1
	fort	fort	faible	0,3333332	0,4888892	0,1777776
	fort	fort	moyen	0,3454542	0,363636	0,2909088
	fort	fort	fort	0,258824	0,411765	0,329412
	fort	fort	faible	0,1636363	0,3999998	0,436364
	fort	fort	moyen	0,1499999	0,383333	0,4666664
	fort	fort	fort	0,36	0,32	0,32
I^{x20} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,5	0,4	0,1
	moyen	fort	moyen	0,411765	0,529412	0,0588235
	moyen	fort	fort	0,538462	0,384615	0,0769231
	moyen	fort	faible	0,5625	0,375	0,0625
	moyen	fort	moyen	0,5	0,464286	0,0357143
	moyen	fort	fort	0,434783	0,521739	0,0434783
	moyen	fort	faible	0,388889	0,555556	0,0555556
	moyen	fort	moyen	0,555556	0,388889	0,0555556
	moyen	fort	fort	0,315789	0,631579	0,0526316
	fort	fort	faible	0,428571	0,428571	0,142857
	fort	fort	moyen	0,285714	0,428571	0,285714
	fort	fort	fort	0,375	0,5	0,125
	fort	fort	faible	0,222222	0,555556	0,222222
	fort	fort	moyen	0,272727	0,363636	0,363636
	fort	fort	fort	0,176471	0,411765	0,411765
	fort	fort	faible	0,0909091	0,363636	0,545455
	fort	fort	moyen	0,0833333	0,333333	0,583333
	fort	fort	fort	0,3	0,3	0,4
I^{x30} où $x = 1,2,3$	faible	faible	faible	1	0	0
	faible	faible	moyen	1	0	0
	faible	faible	fort	1	0	0
	faible	moyen	faible	1	0	0
	faible	moyen	moyen	1	0	0
	faible	moyen	fort	1	0	0
	faible	fort	faible	1	0	0
	faible	fort	moyen	1	0	0
	faible	fort	fort	1	0	0
	moyen	fort	faible	0,40625	0,46875	0,125
	moyen	fort	moyen	0,283088469	0,643382656	0,073529375
	moyen	fort	fort	0,447115944	0,456730281	0,096153875
	moyen	fort	faible	0,47265625	0,44921875	0,078125
	moyen	fort	moyen	0,386160644	0,569196781	0,044642875
	moyen	fort	fort	0,307065644	0,638586781	0,054347875
	moyen	fort	faible	0,253472225	0,677083875	0,0694445
	moyen	fort	moyen	0,461805975	0,468750125	0,0694445
	moyen	fort	fort	0,161183725	0,773026375	0,0657895
	fort	fort	faible	0,330356813	0,491070938	0,17857125
	fort	fort	moyen	0,196428375	0,446428125	0,3571425
	fort	fort	fort	0,2578125	0,5859375	0,15625
	fort	fort	faible	0,097221875	0,625000625	0,2777775
	fort	fort	moyen	0,20454525	0,34090875	0,454545
	fort	fort	fort	0,099265063	0,386029688	0,51470625
	fort	fort	faible	0,034091038	0,284090313	0,68181875
	fort	fort	moyen	0,036458363	0,234374688	0,72916625
	fort	fort	fort	0,25	0,25	0,5

Manteau neige à l'instant t (MN_t)					
variable	Pa MN_{t-1}	Pa_ps	faible	moyen	fort
MN_t^{xy2} où $x = 1,2,3$ $y = 1,2,3$	faible	niveau1	0,970588	0,0147059	0,0147059
	faible	niveau2	0,5	0,25	0,25
	faible	niveau3	0,333333	0,333333	0,333333
	faible	niveau4	0,6	0,2	0,2
	faible	niveau5	0,333333	0,333333	0,333333
	faible	niveau6	0,333333	0,333333	0,333333
	faible	niveau7	0,25	0,5	0,25
	faible	niveau8	0,25	0,25	0,5
	faible	niveau9	0,333333	0,333333	0,333333
	faible	niveau10	0,333333	0,333333	0,333333
	moyen	niveau1	0,258621	0,724138	0,0172414
	moyen	niveau2	0,25	0,5	0,25
	moyen	niveau3	0,333333	0,333333	0,333333
	moyen	niveau4	0,333333	0,333333	0,333333
	moyen	niveau5	0,25	0,5	0,25
	moyen	niveau6	0,142857	0,571429	0,285714
	moyen	niveau7	0,25	0,5	0,25
	moyen	niveau8	0,2	0,2	0,6
	moyen	niveau9	0,333333	0,333333	0,333333
	moyen	niveau10	0,333333	0,333333	0,333333
	fort	niveau1	0,0909091	0,0909091	0,818182
	fort	niveau2	0,333333	0,333333	0,333333
	fort	niveau3	0,25	0,25	0,5
	fort	niveau4	0,333333	0,333333	0,333333
	fort	niveau5	0,25	0,25	0,5
	fort	niveau6	0,25	0,25	0,5
	fort	niveau7	0,333333	0,333333	0,333333
	fort	niveau8	0,25	0,25	0,5
	fort	niveau9	0,333333	0,333333	0,333333
	fort	niveau10	0,333333	0,333333	0,333333

Précipitation totale (PT)					
variable PT^{x10} $x = 1,2,3$		variable PT^{x20} $x = 1,2,3$		variable PT^{x30} $x = 1,2,3$	
Niveau1	0,0167	Niveau1	0,02669982	Niveau1	0,11988005
Niveau2	0,020000089	Niveau2	0,04005997	Niveau2	0,23349867
Niveau3	0,020000089	Niveau3	0,05644038	Niveau3	0,25963927
Niveau4	0,063439828	Niveau4	0,11988005	Niveau4	0,22048068
Niveau5	0,086619969	Niveau5	0,18330164	Niveau5	0,06313996
Niveau6	0,2	Niveau6	0,27981919	Niveau6	0,02994011
Niveau7	0,279819192	Niveau7	0,17663838	Niveau7	0,02332006
Niveau8	0,193439583	Niveau8	0,05342013	Niveau8	0,0167
Niveau9	0,076620146	Niveau9	0,04681995	Niveau9	0,0167
Niveau10	0,043259906	Niveau10	0,0167	Niveau10	0,0167

Température (T)					
variable T^{x10} $x = 1,2,3$		variable T^{x20} $x = 1,2,3$		variable T^{x30} $x = 1,2,3$	
Niveau1	0,04005997	Niveau1	0,0167	Niveau1	0,0167
Niveau2	0,14005997	Niveau2	0,02662015	Niveau2	0,0167
Niveau3	0,17674123	Niveau3	0,11988005	Niveau3	0,03331988
Niveau4	0,24681919	Niveau4	0,2102399	Niveau4	0,14005997
Niveau5	0,17981919	Niveau5	0,23350044	Niveau5	0,16301888
Niveau6	0,11650044	Niveau6	0,15963927	Niveau6	0,25368036
Niveau7	0,03993994	Niveau7	0,14999911	Niveau7	0,19354154
Niveau8	0,02669982	Niveau8	0,04668003	Niveau8	0,11650044
Niveau9	0,0167	Niveau9	0,02000009	Niveau9	0,04668003
Niveau10	0,0167	Niveau10	0,0167	Niveau10	0,02000009

Résumé

Le travail aborde la modélisation et l'analyse de systèmes complexes, caractérisés, dans un cadre incertain et évolutif, par de nombreuses interactions entre composants. Dans un cadre de gestion des risques, le travail vise à créer un modèle causal spatio-temporel pour l'explication et la probabilisation de certains événements redoutés à des fins de diagnostic et de pronostic. Le travail de modélisation est basé sur l'approche bayésienne et, plus particulièrement, sur les Réseaux Bayesiens (RB). Dans l'optique de considérer des systèmes de grande taille et de représenter leur complexité spatio-temporelle, leur caractère multiéchelles et incertain dans un cadre dynamique, l'idée de ce travail est alors d'étendre le concept des Réseaux Bayesiens Dynamiques (RBD) et d'utiliser le paradigme Orienté Objet pour l'appliquer aux réseaux bayesiens. Dans leur forme actuelle, les réseaux bayesiens orientés objet permettent de créer des instances réutilisables mais non instanciables. En d'autres termes, cela implique que l'objet généré est susceptible d'être appelé plusieurs fois dans la construction d'un modèle mais sans pour autant que ces paramètres (tables de probabilités marginales ou conditionnelles) ne soient modifiés.
Ce travail de thèse vise à combler cette lacune en proposant une approche structurée permettant de construire des grands systèmes à base d'objets (caractérisés par des réseaux bayésiens simples) dont les paramètres peuvent être actualisés en fonction de l'instant ou du contexte de leur appel et de leur utilisation. Ce concept est concrétisé sous la forme de Réseaux Bayesiens Multidimensionnels par leur propension à combiner plusieurs dimensions qu'elles soient spatiales ou temporelles.

Mots clés : réseaux bayesiens multidimensionnels, évolution dynamique, orienté objet, modélisation de système complexe, gestion des risques

Abstract

The work addresses the modelling and analysis of complex systems, characterized, in an uncertain and evolving framework, by numerous interactions between components. Within a risk management framework, the work aims to create a spatio-temporal causal model for the explanation and probability of certain feared events for diagnostic and prognostic purposes. The modelling work is based on the Bayesian approach and, more specifically, on the Bayesian Networks (BN). In an attempt to consider large-scale systems and represent their spatio-temporal complexity, their multi-scale and uncertain character in a dynamic framework, the idea of this work is then to extend the concept of Dynamic Bayesian Networks (DBN) and use the Object Oriented paradigm to apply it to Bayesian networks. In their current form, object-oriented Bayesian networks can create reusable but not instantiable instances. In other words, this implies that the generated object is likely to be called several times in the construction of a model, but without these parameters (marginal or conditional probabilities tables) being modified. This thesis aims to fill this gap by proposing a structured approach to construct large object-based systems (characterized by simple Bayesian networks) whose parameters can be updated according to the moment or context of their call and use. This concept is embodied in the form of Bayesian Multidimensional Networks by their propensity to combine several dimensions, whether spatial or temporal.

Keywords: multidimensional Bayesian networks, dynamic assessment, object-oriented, complex system modelling, risk management