UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

école normale supérieure rennes

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DE RENNES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par
Marine FONTAINE

Modèles mathématiques de type « Hamiltonian Mean-Field »: stabilité et méthodes numériques autour d'états stationnaires.

Thèse présentée et soutenue à Bruz, le 8 Juin 2018
Unité de recherche : UMR 6625 du CNRS: IRMAR, Institut de Recherche Mathématiques de Rennes, UFR de Mathématiques

Rapporteurs avant soutenance :

Bruno DESPRES	Professeur, Univ. Pierre et Marie Curie
Marjolaine PUEL	Professeur, Univ. Nice Sophia-Antipolis

Composition du Jury :

Mihai BOSTAN	Professeur, Univ. Aix-Marseille
Nicolas CROUSEILLES	Chargé de recherche INRIA, Rennes
Bruno DESPRES	Professeur, Univ. Pierre et Marie Curie
Marjolaine PUEL	Professeur, Univ. Nice Sophia-Antipolis

Directeurs de thèse :

Mohammed LEMOU	Directeur de Recherche CNRS, Rennes
Florian MEHATS	Professeur, Univ. Rennes 1

À Jean et Victor

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Florian Méhats et Mohammed Lemou. Merci à Florian pour la patience et la rigueur dont il a fait preuve pour répondre à toutes mes questions. Merci à Mohammed pour son enthousiasme et ses conseils avisés. Merci à eux deux pour tout le temps qu'ils m'ont accordé durant ces trois ans. Nos rendez-vous hebdomadaires du jeudi après-midi ont plus d'une fois regonflé ma motivation lorsque je bloquais depuis plusieurs jours. Cette thèse leur doit énormément.

Je remercie également Marjolaine Puel et Bruno Després d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci à eux pour leur lecture minutieuse. Merci à Mihaï Bostan et Nicolas Crouseilles qui me font le plaisir de venir compléter mon jury.

Merci à l'ensemble du personnel de l'IRMAR. Que ce soit le personnel administratif qui m'a toujours accueilli avec un grand sourire lorsque je sollicitais son aide. Merci en particulier à Carole Wosiak, Marie-Aude Verger, Xhensila Lachambre, Nicole Iglesia, Emmanuelle Guiot, Chantal Halet, Nelly Loton et Hélène Rousseaux. Ou bien l'ensemble des chercheurs, notamment ceux avec qui j'ai eu la chance de partager un déjeuner ou un café dans la cuisine de l'IRMAR. Je remercie tous les membres des équipes EDP et Analyse Numérique. Un merci tout particulier à Vincent Duchêne, à qui il tient à coeur d'intégrer les doctorants au sein des équipes d'analyse. Merci à lui d'avoir initié les Journées des doctorantes et des doctorants en analyse de l'IRMAR. Tous ces gens font de l'IRMAR un lieu où il est très agréable de travaillller.

Je tiens également à remercier les équipes de l'ENS, notamment les gens du groupe de travail. Les exposés (et les crêperies) étaient toujours de bons moments. Merci à Elodie Lequoc, Marie-Pierre Briand et Aude Charpentier de m'avoir aidé dans les démarches administratives qui sont loin d'être simples lorsqu'on est rattaché à trois établissements différents.

Durant ces trois ans de thèse, j'ai eu la chance d'enseigner à l'ENS Rennes. Merci à Benoît Cadre de m'avoir donné cette opportunité. Un grand merci à Thibaut Deheuvels avec qui j'ai eu le plaisir d'assurer l'enseignement d'Intégration de Lebesgue. Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont tout de suite mise à l'aise alors même qu'il passait pour moi du statut de professeur à celui de collègue. J'ai beaucoup appris à ses côtés. Merci à Karine Beauchard pour sa bonne humeur et son énergie. Merci à Benjamin Boutin de m'avoir laissé enseigner en Calcul Scientifique au sein de la préparation à l'agrégation. Ce fut très enrichissant.

Je remercie Pierre Navaro pour son aide très précieuse en Informatique. Merci pour la patience dont il a fait preuve lorsqu'il fallait m'expliquer les mystères de la parallélisation

et des tunnels SSH. Merci également à Romain Horsin qui m'a fait gagner un temps précieux en me donnant son code semi-lagrangien. Merci aussi pour toutes ces discussions très éclairantes sur les systèmes HMF.

Ces trois ans de thèse ont été l'occasion de me plonger dans le monde de la recherche et notamment d'assister à des conférences en France et à l'étranger. Ce sont des moments privilégiés pour découvrir la communauté mathématique. J'ai notamment eu le plaisir de faire la connaissance d'Anaïs Crestetto et de Nathalie Ayi.

Si j'en suis ici aujourd'hui, c'est en partie grâce à des personnes qui ont su me donner envie de faire des mathématiques. Je pense notamment à M. Caron au lycée et son célèbre "CVED": la couleur du veston est déchirée. Acronyme qu'il inscrivait sur les copies lorsqu'il lisait des phrases mathématiques qui n'avaient pas de sens. Merci à Etienne Mahé de ne **pas** avoir confirmé mes craintes sur la réputation des professeurs de CPGE. Ses qualités humaines et pédagogiques ainsi que ses expressions datant d'un autre siècle resteront dans ma mémoire. Merci à Stéphane Legros de m'avoir soutenu alors même que j'explorais les bas-fonds des classements. Son flegme, son humour piquant ainsi que ses talents de pédagogue en font un professeur auquel j'ai envie de ressembler. Si il fallait ne retenir qu'une chose de mes cours à l'ENS, ce serait le large sourire de Michel Pierre lorsqu'il nous initiait à la beauté de la topologie. J'espère garder la même passion que la sienne après 30 ans d'enseignement. De mes cours à l'Université de Rennes 1, je retiendrais en particulier deux personnes qui m'ont fait découvrir le monde des EDP. Tout d'abord, François Castella qui manie la métaphore comme personne et qui, de l'oral du magistère aux oraux co-encadrés ensemble durant ma dernière année de thèse, n'aura cessé de faire vivre les maths par son langage fleuri. Puis, Florian Méhats dont les preuves sont tellement propres, qu'elles en sont limpides.

Ces trois années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans ces déjeuners quotidiens avec tous les doctorants. Merci aux anciens: Salomé (dont j'ai pris le bureau mais que j'ai eu la chance de côtoyer quelques mois), Hélène et Julie (les inséparables qui m'ont vanté les séminaires au Grand Hôtel des Thermes de St Malo), Jean-Phi, Damien, Charles, Blandine, Basile (et ses tagliatelles mangue-crevettes), Florian B., Vincent, Yvan, Alexandre L.M., Maxime, Mac, Hélène H. (et ses temps sur 10 bornes qui me font rêver), Alexandre B. (et ses cahiers format raisin), Néstor (et sa bonne humeur), Federico, Valentin (qui a versé une petite larme à mon mariage). Merci à ceux de mon année: Cyril (toujours prêt des semaines en avance), Thom-Thom (et sa thèse bouclée en deux ans), Clément, Tristan (et son record mémorable aux 10 bornes un certain dimanche de décembre). Merci aux nouveaux: Joackim (qui répondait toujours avec le sourire à mes questions numériques), Simon, Adrien, Kevin, Ninon, Florian L. et Camille (pour m'avoir initié au Fat Day), Thi, Paul, Zoïs, Tho (et son "Bonne journée de la femme"), Jesùs David, Angelo et Mercedes.

Je tiens à remercier tous ces amis que j'ai rencontrés durant mes sept années à Rennes. Tout d'abord les amis de la promo Math 2011: Tristan et Jean-Jérôme (dont les blagues

m'ont tant manqué ces trois dernières années), Pauline (que nous avons eu la joie d'accueillir périodiquement dans notre appartement), Grégory (bonne continuation en Mongolie!). Un merci tout particulier à Coralie qui m'a accompagné pendant mes sept années à Rennes et avec qui j'ai notamment partagé mon bureau pendant trois ans (euh disons plutôt deux ;-)). Merci à elle de m'avoir déculpabilisé lorsque je quittais le bureau "un peu tôt" et qui était toujours prête à descendre boire un café pour faire une pause. Les amis scouts: Myrèse et Christian dont l'hospitalité m'a bluffé à peu près 15 minutes après notre première rencontre. Claire et Magali qui m'ont accueilli chez les Multifruits et qui sont maintenant de véritables amies. Merci aux Piqueuses d'Idées: Florence, Céline, Catherine et Lou avec qui j'oubliais les maths au son des machines à coudre.

Merci aux amis plus anciens. Merci à Clémentine, ma plus vieille amie (14 années dans la même classe dont 12 années consécutives!). Les amies du lycée: Aude et sa bonne humeur communicative, Clémence et son franc-parler, Domitille et sa douceur, amies que je revois toujours avec beaucoup de plaisir. Un merci tout particulier à Constance qui d'amie du lycée est maintenant une amie tout court. Merci aussi de m'avoir fait la plus belle robe de mariée. Les amis de prépa: Chloé R. la fidèle amie de sup, les gens du groupe de tarot. Un merci tout particulier à Chloé G. avec qui on semble toujours s'être quittée la veille.

Une belle découverte pendant ma thèse fut celle d'Axel. Merci pour toutes ces courses partagées ainsi que ces séances de fractionné le long de la Vilaine, qu'il pleuve (souvent) ou qu'il neige (jamais). Merci à lui pour sa bienveillance, son esprit pratique et sa capacité à toujours voir le verre à moitié plein (contrairement à son assiette qui est toujours déjà vide). Une des plus belles rencontres de mes années rennaises est peut-être celle d'Anaïs et Quentin. De petits 1A rencontrés au running dinner, ils sont devenus de grands amis. Merci tout simplement à eux d'être ce qu'ils sont. Merci à Mathilde pour sa présence à sa façon à tous les évènements importants de ma vie.

Merci à Jacques et Pascale de m'avoir accueilli dans leur famille avec simplicité et bienveillance. Merci à Pierre et Adèle de m'avoir laissé une place dans leur fratrie.

Merci à mes frères Nathan et Wandrille et à ma soeur Clémentine qui répondent toujours présents lorsque j'ai besoin d'eux. Merci à mes parents Marc et Anne-Cécile qui ont essayé, pendant trois ans, de retenir mon sujet de thèse. Merci avant tout pour leur confiance et leur amour. Cette thèse leur doit beaucoup plus qu'ils ne peuvent l'imaginer.

Merci à toi, petite crevette, qui a accompagné de tes coups, les derniers mois de cette thèse. J'ai tellement hâte de te rencontrer.

Enfin à toi, Adrien, à mes côtés depuis huit ans. Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans tes encouragements. Merci de croire en moi. Merci pour ton amour et ton indéfectible soutien. Mais surtout, merci de rendre ma vie si belle.



FIGURE 1. *Les Cigares du Pharaon.*
Extrait du blog de Maël Goarzin, "Billet d'automne: nouvelles de la thèse au seuil de l'année 2015/2016".

Table des matières

CHAPITRE 1. Introduction 15
1.1. Modèles galactiques et systèmes de Vlasov-Poisson 15
1.1.1. Modélisation des galaxies 15
1.1.2. Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel 16
1.1.3. Les modèles de type Hamiltonian Mean-Field dit modèles HMF 16
1.1.3.1. Le modèle HMF cosinus 17
1.1.3.2. Le modèle HMF Poisson 17
1.1.4. Propriétés conservatives des équations de Vlasov 18
1.1.5. Stabilité orbitale des états stationnaires 18
1.1.5.1. Le système de Vlasov-Poisson 19
1.1.5.2. Le système HMF cosinus 22
1.2. Critère de stabilité non linéaire pour le modèle HMF cosinus 23
1.2.1. Stratégie de la preuve 24
1.2.2. Réarrangements généralisés par rapport à l'énergie microscopique 24
1.2.3. Résultats clés permettant de démontrer le critère de stabilité non linéaire 25
1.2.3.1. Contrôle de la différence des vecteurs magnétisation 27
1.2.3.2. Contrôle de la fonction f 28
1.3. Stabilité orbitale d'états stationnaires du système HMF Poisson 28
1.3.1. Problème de minimisation à une contrainte 30
1.3.2. Problème de minimisation à deux contraintes 33
1.3.3. Problème de minimisation à un nombre infini de contraintes 37
1.4. Schémas numériques pour les modèles HMF 40
1.4.1. Schémas conservant exactement un état stationnaire donné 41
1.4.2. Schémas conservant exactement deux états stationnaires donnés dont l'état stationnaire nul 41
1.4.3. Comparaison du schéma de splitting semi-lagrangien dit schéma classique avec les schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires donnés 42
1.4.4. Schéma conservant exactement tous les états stationnaires de la forme (1.4.1) 43
1.4.4.1. Construction du projecteur 44
1.4.4.2. Principe du schéma 45

CHAPITRE 2. Stable ground states for the HMF Poisson model 47
2.1. Introduction and main results 48
2.1.1. The HMF Poisson model 48
2.1.2. Statement of the results 49
2.1.2.1. One-constraint problem 49
2.1.2.2. Two-constraints problem 51
2.1.2.3. Infinite number of constraints problem 52
2.2. Minimization problem with one constraint 53
2.2.1. Existence of ground states 53
2.2.1.1. Properties of the infimum 53

2.2.1.2. Proof of Theorem 2.1.2 55
2.2.2. Orbital stability of the ground states 58
2.2.2.1. Uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition 58
2.2.2.2. Proof of Theorem 2.1.5 59
2.3. Problem with two constraints 62
2.3.1. Toolbox for the two constraints problem 62
2.3.2. Existence of ground states 67
2.3.2.1. Properties of the infimum 67
2.3.2.2. Proof of Theorem 2.1.6 68
2.3.3. Orbital stability of the ground states 70
2.3.3.1. Local uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition 70
2.3.3.2. Proof of Theorem 2.1.8 75
2.4. Problem with an infinite number of constraints 79
2.4.1. Generalized rearrangement with respect to the microscopic energy 79
2.4.2. Existence of ground states 81
2.4.2.1. Properties of the infimum 81
2.4.2.2. Proof of Theorem 2.1.10 82
2.4.3. Orbital stability of the ground states 83
2.4.3.1. Proof of Theorem 2.1.11 83
2.4.3.2. Expression of the minimizers 87

CHAPITRE 3. Méthodes numériques préservant les états stationnaires pour les modèles de type HMF 89
3.1. Résolution numérique des systèmes HMF 91
3.1.1. Méthode des différences finies 91
3.1.2. Méthode de splitting en temps 92
3.1.3. Méthode de résolution spectrale 93
3.1.4. Méthode de résolution semi-lagrangienne 94
3.1.5. Résolution de l'équation de Poisson 96
3.1.5.1. Cas du système HMF cosinus 96
3.1.5.2. Cas du système HMF Poisson 96
3.2. Schémas numériques préservant des états stationnaires donnés 97
3.2.1. Schéma numérique conservant exactement un état stationnaire f_0 donné 97
3.2.2. Schéma numérique conservant exactement deux états stationnaires donnés dont l'état stationnaire nul 98
3.3. Existence d'états stationnaires pour les systèmes HMF cosinus et HMF Poisson 99
3.3.1. Pour le système HMF cosinus 99
3.3.1.1. Résultat théorique 99
3.3.1.2. Détermination numérique dans le cas d'une distribution de type Maxwell-Boltzmann 100
3.3.2. Pour le système HMF Poisson 102
3.4. Mise en oeuvre numérique des différents schémas 107
3.4.1. Mise en oeuvre numérique des schémas de splitting spectral et semi-lagrangien 107

3.4.1.1. Schéma spectral 107
3.4.1.2. Schéma semi-lagrangien 109
3.4.2. Mise en oeuvre numérique des deux schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires 110
3.5. Comparaison du schéma de splitting semi-lagrangien dit schéma classique avec les schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires donnés 112
3.5.1. Résolution numérique du système HMF cosinus 112
3.5.2. Résolution numérique du système HMF Poisson 114
3.6. Construction d'un schéma préservant exactement tous les états stationnaires de la forme (3.6.1) 115
3.6.1. Construction du projecteur 116
3.6.2. Principe du schéma 118
3.7. Mise en oeuvre numérique du schéma avec projecteur 120
3.7.1. Construction des états stationnaires numériques 120
3.7.2. Consistance des états stationnaires numériques avec les états stationnaires analytiques 121
3.8. Comparaison du schéma classique avec le schéma avec projecteur 122
3.8.1. Résolution numérique du système HMF cosinus 122
3.8.2. Résolution numérique du système HMF Poisson 125
3.9. Etude numérique des états stationnaires de HMF Poisson 126
3.9.1. Observations numériques 126
3.9.1.1. Cas $\beta < 1$ 127
3.9.1.2. Cas $\beta \in]1, 4]$ 128
3.9.1.3. Cas $\beta \in]4, 9]$ 128
3.9.1.4. Cas $\beta \in]9, 20]$ 129
3.9.2. Récapitulatif et conjecture 130

Annexe A. Preuve du Lemme 2.2.2 du Chapitre 2 133
Références 136

CHAPITRE 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la stabilité orbitale des états stationnaires des systèmes HMF (Hamiltonian mean-field models), en premier lieu d'un point de vue théorique et en second lieu d'un point de vue numérique. Plus précisément, dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous étudions la stabilité orbitale de certains états stationnaires du système HMF Poisson. Puis, dans le Chapitre 3, nous introduisons de nouveaux schémas numériques préservant exactement des états stationnaires des modèles HMF. Cette propriété de conservation exacte des états stationnaires permet à ces nouveaux schémas d'être plus précis concernant l'étude de la stabilité des états stationnaires. Dans la Section 1.1 de ce chapitre, nous présentons le système de Vlasov-Poisson gravitationnel ainsi que les modèles HMF qui en découlent. Nous introduisons la notion de stabilité orbitale et nous discutons des résultats de stabilité pour le système de Vlasov-Poisson et les modèles HMF. Dans la Section 1.2, nous détaillons les résultats de l'article [61] de Lemou, Luz et Méhats où un critère de stabilité orbitale est exhibé. Dans la Section 1.3, nous présentons de manière détaillée les résultats obtenus dans le Chapitre 2 de cette thèse. Dans la Section 1.4, nous présentons le Chapitre 3 de cette thèse.

1.1. Modèles galactiques et systèmes de Vlasov-Poisson

1.1.1. **Modélisation des galaxies.** Il est classique de modéliser les galaxies par un système fermé composé d'un très grand nombre d'étoiles (plusieurs centaines de milliards). Par exemple, notre galaxie, la Voie Lactée, compte environ 10^{11} étoiles. On considère que les étoiles ne sont soumises qu'aux forces gravitationnelles qu'elles exercent les unes sur les autres. En effet, on néglige, dans une première approximation, le rôle joué par les planètes car leur masse est très petite devant celle des étoiles. Les forces non-gravitationnelles sont également négligées. Dans un cadre simple non relativiste, notre problème peut être vu comme un problème à N corps de Newton avec N très grand. Le problème à trois corps n'étant pas encore résolu, on comprend que l'étude de l'évolution des galaxies vue comme un problème à N corps est immensément compliquée.

Face aux difficultés soulevées par le problème à N corps pour N grand, une idée de Maxwell et Boltzmann fut de décrire le problème de manière statistique pour $N \to +\infty$. C'est cette approche appliquée aux cas des gaz collisionnels qui permit à Boltzmann, en 1872, d'écrire sa célèbre équation éponyme. Bien que les collisions entre les étoiles soient quasi inexistantes du fait de leur éloignement les unes par rapport aux autres, Vlasov

étendit, dans les années 30, l'approche statistique de Boltzmann aux systèmes gravitationnels. Une méthode, dite de champ moyen, fut développée pour passer à la limite lorsque N tend vers l'infini. A la place d'un système discret composé de nombreuses équations différentielles liées entre elles, il obtint un système continu composé d'une unique équation aux dérivées partielles non linéaire en les variables d'espace et de vitesse. Ainsi furent obtenues les équations dites de Vlasov, elles avaient déjà été introduites en 1910 par le physicien Jeans. Le système le plus célèbre est celui de Vlasov-Poisson dont nous allons décrire la version gravitationnelle dans la partie suivante. Ce système décrit de manière très satisfaisante l'évolution des galaxies sur de grandes échelles de temps.

1.1.2. **Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel.** Ce système composé d'une équation de transport non linéaire est un modèle bien connu en astrophysique qui permet de décrire la dynamique d'un système stellaire soumis à sa propre gravité ou bien de décrire la dynamique des galaxies, voir par exemple [16, 47, 72, 73]. Le système est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t=0,x,v) = f_{init}(x,v) \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $f = f(t,x,v)$ est la fonction de distribution. Le potentiel associé ϕ_f, aussi appelé champ moyen gravitationnel, est défini pour $x \in \mathbb{R}^3$ par

$$\phi_f(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * \rho_f, \qquad \text{avec} \qquad \rho_f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)\mathrm{d}v.$$

Le potentiel ϕ_f est également appelé potentiel de Poisson car il satisfait l'équation elliptique de Poisson:

$$\Delta \phi_f = \rho_f, \tag{1.1.2}$$

ce qui confère son nom au système de Vlasov-Poisson.

1.1.3. **Les modèles de type Hamiltonian Mean-Field dit modèles HMF.** Les modèles de type Hamiltonian mean-field (modèle Hamiltonien champ moyen en français), dits modèles HMF, [2, 76] sont des modèles dérivés du système de Vlasov-Poisson (1.1.1). Ils sont une version simplifiée du modèle de Vlasov-Poisson. En effet, ce sont des modèles unidimensionnels qui décrivent l'évolution du mouvement de particules en interaction sur un cercle. Leur caractère unidimensionnel en fait des modèles particulièrement agréables pour effectuer des simulations numériques. Bien que ce modèle n'ait pas toujours de signification physique directe, il est couramment utilisé dans la littérature physique comme modèle-jouet pour décrire des systèmes gravitationnels [7, 8, 10, 19, 20]. En particulier, il est utilisé pour l'étude des transitions de phase hors équilibre [3, 28, 80, 87], des mouvements des clusters [9, 94] ou des processus de relaxation [6, 31, 93]. A noter également que ce modèle présente de nombreuses similitudes avec le modèle de Kuramoto pour les oscillateurs couplés, dans sa limite continue [12, 34, 43].

Le système HMF est le suivant:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_\theta f - \partial_\theta \phi_f(\theta)\partial_v f = 0, \quad (t,\theta,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \\ f(t=0,\theta,v) = f_{init}(\theta,v) \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

où $f = f(t,\theta,v)$ est la fonction de distribution et $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il existe différentes façons de définir le potentiel associé ϕ_f pour le modèle HMF comme le potentiel en cosinus que nous verrons à la Partie 1.1.3.1 ou le potentiel de Poisson que nous verrons à la Partie 1.1.3.2 ou encore le potentiel de Poisson écranté [30, 78] que nous n'étudierons pas ici.

1.1.3.1. *Le modèle HMF cosinus.* Ce modèle est le plus populaire, le potentiel ϕ_f associé au système (1.1.3) est défini pour $\theta \in \mathbb{T}$ par:

$$\phi_f(\theta) = -\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \tilde{\theta})\rho_f(\tilde{\theta})\mathrm{d}\tilde{\theta}, \quad \text{avec} \quad \rho_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta,v)\mathrm{d}v. \tag{1.1.4}$$

Remarquons que le potentiel ϕ_f est 2π-périodique et de moyenne nulle. Si on introduit le vecteur M_f appelé magnétisation de f défini par

$$M_f = \int_0^{2\pi} \rho_f(\theta)u(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad \text{avec} \quad u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)^T, \tag{1.1.5}$$

alors le potentiel ϕ_f s'écrit

$$\phi_f(\theta) = -M_f \cdot u(\theta). \tag{1.1.6}$$

1.1.3.2. *Le modèle HMF Poisson.* Le modèle de HMF Poisson est plus proche du système de Vlasov-Poisson (1.1.1) que le modèle HMF cosinus. En effet, l'équation (1.1.7) vérifiée par le potentiel ϕ_f est une version périodique et unidimensionnelle de l'équation de Poisson (1.1.2) vérifiée par le potentiel ϕ_f dans le système de Vlasov-Poisson (1.1.1). Le potentiel ϕ_f associé au système (1.1.3) est donc défini pour $\theta \in \mathbb{T}$ par:

$$\partial_\theta^2 \phi_f = \rho_f - \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi}, \qquad \rho_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta,v)\mathrm{d}v \tag{1.1.7}$$

ou de manière équivalente, par:

$$\phi_f(\theta) = \int_0^{2\pi} W(\theta - \tilde{\theta})\rho_f(\tilde{\theta})\mathrm{d}\tilde{\theta}, \tag{1.1.8}$$

où la fonction W est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$W \text{ est } 2\pi\text{-périodique }, \quad \forall\theta \in [-\pi,\pi], \quad W(\theta) = -\frac{\theta^2}{4\pi} + \frac{|\theta|}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Remarquons que la fonction W est de moyenne nulle, continue sur $\mathbb{R}$ et que ϕ_f est 2π-périodique de moyenne nulle.

1.1.4. **Propriétés conservatives des équations de Vlasov.** Les équations de Vlasov, qu'elles soient tridimensionnelles (dans le cas du système de Vlasov-Poisson) ou unidimensionnelles (dans le cas des systèmes HMF), laissent invariantes au cours du temps certaines quantités.

- *les fonctions Casimir*: toute fonction de distribution f assez régulière vérifiant une équation de Vlasov sur un intervalle de temps $[0,T]$ avec $f(t=0)=f_{init}$ satisfait

$$\forall t\in[0,T],\quad \iint j(f(t,x,v))\mathrm{d}x\mathrm{d}v=\iint j(f_{init}(x,v))\mathrm{d}x\mathrm{d}v,$$

pour toute fonction $j\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telle que $j(0)=0$. En particulier, l*es normes de Lebesgue*: $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$, pour Vlasov-Poisson et $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ pour les systèmes HMF sont conservées au cours du temps. De manière équivalente, *la fonction de distribution* de f est conservée au cours du temps:

$$\forall t\in[0,T],\quad \mu_{f(t)}=\mu_{f_{init}}.$$

La fonction de distribution μ_f de f est définie pour $s\in\mathbb{R}_+$ par:

$$\mu_f(s)=|\{(x,v)\in\mathbb{R}^6, f(x,v)>s\}|,\quad \text{pour le système de Vlasov-Poisson,} \tag{1.1.9}$$

$$\mu_f(s)=|\{(\theta,v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}, f(\theta,v)>s\}|,\quad \text{pour les systèmes HMF,} \tag{1.1.10}$$

où $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble A. On dira que la solution f de l'équation de Vlasov reste **équimesurable** à sa donnée initiale f_{init} au cours du temps.

- *l'énergie totale du système*, aussi appelé Hamiltonien:

$$\mathcal{H}(f(t))=\iint\frac{|v|^2}{2}f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\iint\phi_f(t,x)f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v. \tag{1.1.11}$$

Dans le cas du système de Vlasov-Poisson, respectivement du modèle de HMF Poisson, le Hamiltonien se réécrit, en utilisant l'équation de Poisson (1.1.2), respectivement l'équation (1.1.7), de la manière suivante:

$$\mathcal{H}(f(t))=\iint\frac{|v|^2}{2}f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int|\nabla_x\phi_f(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$

1.1.5. **Stabilité orbitale des états stationnaires.** Nous introduisons dans ce paragraphe la notion de stabilité utilisée pour le système de Vlasov-Poisson et les modèles HMF. Au regard, des invariants du système (fonctions Casimir et Hamiltonien), il est naturel de mesurer la stabilité de la façon suivante: pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\mathcal{D}(f_{init},f_0):=\|f_{init}-f_0\|_{\mathrm{L}^1}+|\mathcal{H}(f_{init})-\mathcal{H}(f_0)|\leq\eta\quad\Longrightarrow\quad\forall t\geq0,\quad\mathcal{D}(f(t),f_0)\leq\varepsilon. \tag{1.1.12}$$

Cependant, il faut tenir compte du groupe de symétries du système d'évolution et voir si ces dernières sont "capturées" par la distance utilisée. Or, le système de Vlasov-Poisson et

les systèmes HMF vérifient l'invariance de Galilée:

$$\text{si } f(t,x,v) \text{ est solution alors } f(t,x+v_0t,v+v_0) \text{ est également solution.}$$

Cette propriété rend impossible la stabilité des états stationnairess au sens classique (1.1.12). C'est pourquoi, une autre définition de stabilité doit être introduite. On définit alors la notion de *stabilité orbitale.*

Définition 1.1.1 (Stabilité orbitale)**.** *Soit f_0 un état stationnaire du système de Vlasov-Poisson (respectivement du système HMF), f_0 est dit orbitalement stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telle que pour toute donnée initiale f_{init} vérifiant $\mathcal{D}(f_{init}, f_0) \leq \eta$, il existe une translation $x(.)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\mathcal{D}(f(t,x+x(t),v), f_0(x,v)) \leq \varepsilon,$$

où $f(t)$ est une solution de (1.1.1) (resp. de (1.1.3)) de donnée initiale f_{init}.

Le contrôle par la quantité $\mathcal{D}$ peut sembler arbitraire mais il peut être complété, selon les situations étudiées, par un contrôle de certaines fonctions Casimir. Ce sera, par exemple, le cas pour le Théorème 2.1.5 où un contrôle sur une fonction Casimir est ajouté ou bien dans [65] où un contrôle de la norme infinie est ajouté.

Les questions de stabilité orbitale vont de pair avec les questions d'existence des états stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson ou les systèmes HMF. Dans les deux Sections suivantes 1.1.5.1 et 1.1.5.2, nous faisons le point sur les résultats actuels de stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson et le système HMF cosinus.

1.1.5.1. *Le système de Vlasov-Poisson.* Les équations de Vlasov (1.1.1) possèdent, *a priori*, une infinité d'états stationnaires qu'on ne sait pas décrire entièrement. Néanmoins, Batt, Faltenbacher et Horst fournissent dans [11] une classification complète des états stationnaires à symétrie sphérique (ou radiale) c'est à dire des états fonctions de $|x|$, $|v|$ et $x \cdot v$. Le Théorème de Jeans affirme que les états stationnaires s'écrivent sous la forme

$$f_0(x,v) = F(e_0(x,v), l(x,v)),$$

où $e_0(x,v)$ et $l(x,v)$ sont respectivement l'énergie microscopique et le moment cinétique du système définis par

$$e_0(x,v) = \frac{|v|^2}{2} + \phi_{f_0}(x) \quad \text{et} \quad l(x,v) = |x \wedge v|^2.$$

A ce jour, les différents résultats connus sur la stabilité concernent des états stationnaires de ce type. Les cas décroissant $F' < 0$ est particulièrement étudié par la communauté physique car régulièrement rencontré lorsqu'on considère des minima d'énergies.

Dans [77], Mouhot dresse un résumé détaillé et complet de l'ensemble des résultats de stabilité orbitale concernant le système de Vlasov-Poisson gravitationnel. Les premiers résultats de stabilité, énoncés dans un cadre linéarisé, sont dûs à Antonov dans les années 60 [4, 5]. Dans le continuité de ces travaux, Doremus, Baumann et Feix [37] montrèrent la stabilité linéaire d'états stationnaires fonctions décroissantes de leur énergie microscopique.

Ce résultat est basé sur des propriétés de coercivité du Hamiltonien linéarisé sous des contraintes, connues sous le nom de propriété de coercivité d'Antonov, voir [74]. Cependant, rien ne garantit, *a priori*, que l'étude de stabilité linéarisée implique la stabilité non linéaire. Cette question bien plus complexe fut l'objet de nombreuses investigations. Les premiers travaux émanèrent de Wolansky, Guo et Rein [49, 50, 52, 53, 92], puis plus récemment arrivèrent des résultats de Dolbeault, Sanchez et Soler [36, 84, 85] et des résultats de Lemou, Méhats et Raphaël [62, 64]. Ces travaux ont en commun le développement de méthodes variationnelles dans le but de construire et montrer la stabilité non linéaire d'états stationnaires dans des espaces, dit d'énergie, du type

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0 \text{ tel que } \|f\|_{\mathrm{L}^1} + \|f\|_{\mathrm{L}^p} + \|v^2 f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty\}.$$

La méthode générale utilisée peut être résumée en quatre étapes.

Première étape. Construire un état stationnaire comme minimiseur d'un problème de minimisation sous contrainte. La fonctionnelle à minimiser et les contraintes doivent être conservées par le flot. Ainsi on minimise une fonctionnelle d'énergie-Casimir c'est à dire la somme du Hamiltonien et d'une fonctionnelle de Casimir sous des contraintes qui sont des fonctions de Casimir telles que les normes L^p, par exemple.

Deuxième étape. Montrer la compacité des suites minimisantes pour ce problème variationnel : cette propriété est souvent basée sur les lemmes de concentration-compacité de Lions [69, 70].

Troisième étape. Montrer la séparation des minimiseurs. Une façon plus forte de le faire est de montrer l'unicité du minimiseur. Par exemple, dans le cas de Vlasov-Poisson, on peut se ramener, à partir de l'équation de Poisson, à une équation différentielle ordinaire pour laquelle l'unicité des solutions est assurée grâce aux contraintes du problème variationnel. Cependant, l'unicité des minimiseurs n'est pas toujours vérifiée et cette séparation des minimiseurs peut s'avérer très délicate lorsque le modèle se complique.

Quatrième étape. Démontrer la stabilité orbitale à proprement dite en raisonnant par l'absurde. On considère alors une suite minimisante qui ne reste pas proche de la solution stationnaire f_0. Puis grâce à la deuxième étape, on aboutit à la limite à un état stationnaire qui minimise le même problème variationnel mais qui est différent de f_0. Cela contredit la troisième étape.

Cette stratégie de preuve, bien que puissante et menée avec succès dans de nombreux cas pour l'équation de Vlasov-Poisson ne permet de montrer la stabilité non linéaire que de certaines classes d'états stationnaires plus restreintes que la classe des états stationnaires fonction de leur énergie microscopique.

Une première tentative de résolution du cas général fut menée par Guo, Rein et Lin. Ils démontrèrent dans [51, 54] la stabilité non linéaire dans le cadre de perturbations à

symétrie radiale de la classe correspondante au modèle de King

$$F(e) = (\exp(e_0 - e) - 1)_+ .$$

Leur approche est basée sur la propriété de coercivité d'Antonov et une linéarisation directe du Hamiltonien au voisinage de la distribution de King.

Le résultat le plus général est dû à Lemou, Méhats et Raphaël [65]. Ils démontrèrent la stabilité non linéaire pour toutes les fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. Pour cela, ils introduisirent de nouvelles méthodes basées sur la notion de réarrangements généralisés que nous introduirons en détail dans la Partie 1.2. Leur preuve comporte trois étapes principales.

(1) **Propriété de monotonie du Hamiltonien par rapport aux réarrangements généralisés.** Cette propriété est inspirée d'idées introduites dans la littérature physique [1, 48, 91]. Définissons pour une fonction de distribution f, son symmétrisé de Schwarz par

$$f^{\#}(s) = \inf\{\tau \geq 0 : \mu_f(\tau) \leq s\}, \qquad \text{pour } s \geq 0.$$

De manière équivalente, $f^{\#}$ est l'unique fonction décroissante telle que

$$\mu_f = \mu_{f^{\#}},$$

où μ_f est définie par (1.1.9) et $\mu_{f^{\#}}$ est défini par analogie avec μ_f en utilisant la mesure de Lebesgue en dimension 1. Etant donné un potentiel ϕ suffisamment régulier pour que l'on puisse définir ce qui suit, on définit le réarrangement symétrique décroissant généralisé de f par rapport à l'énergie microscopique $e(x,v) = \frac{|v|^2}{2} + \phi(x)$ comme l'unique fonction de e qui est équimesurable à f_0. De façon explicite, on a

$$f^{*\phi}(x,v) = f^{\#} \circ a_\phi((e(x,v)),$$

avec

$$a_\phi(e) = \left| \left\{ (x,v) \in \mathbb{R}^6, \frac{|v|^2}{2} + \phi(x) < e \right\} \right|.$$

Tout état stationnaire f_0 du système de Vlasov-Poisson (1.1.1) qui est fonction décroissante de son énergie microscopique vérifie

$$f_0^{*\phi_{f_0}} = f_0.$$

De plus, le Hamiltonien (1.1.11) satisfait une propriété de monotonie non linéaire:

$$\mathcal{H}(f) \geq \mathcal{H}(f^{*\phi_f}). \tag{1.1.13}$$

Pour des perturbations équimesurables à f_0, on peut préciser la borne inférieure du Hamiltonien en le minorant par une fonctionnelle qui ne dépend que du potentiel de Poisson:

$$\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(f_0) \geq \mathcal{J}(\phi_f) - \mathcal{J}(\phi_{f_0}), \tag{1.1.14}$$

où la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est définie par

$$\mathcal{J}(\phi) = \mathcal{H}(f_0^{*\phi_f}) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{f_0^{*\phi}} - \nabla_x \phi|^2.$$

Cette fonctionnelle se décompose en deux termes:

$$\mathcal{J}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi(x) \right) f_0^{*\phi}(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{1.1.15}$$

(2) **Coercivité de la Hessienne de la fonctionnelle $\mathcal{J}$.** La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est linéarisée au voisinage de ϕ_{f_0} et la coercivité de la Hessienne en ϕ_{f_0} est obtenue en réinterprétant l'expression de cette forme quadratique comme une inégalité du type Poincaré. A l'issue de cette étape, est obtenue une caractérisation variationnelle de l'état stationnaire f_0, respectivement du potentiel associé ϕ_{f_0} comme minimum local, unique à translation près, des problèmes variationnels sous contraintes, respectivement sans contrainte, suivants:

$$\inf_{f^\# = f_0^\#} \mathcal{H}(f) \quad \text{et} \quad \inf \mathcal{J}(\phi).$$

On peut alors montrer, grâce la conservation au cours du temps de l'équimesurabilité et du Hamiltonien (1.1.11) que le Théorème 1.2., résultat principal de [65], est équivalent à la compacité, à translation près, dans un "bon" espace d'énergie, des suites minimisantes généralisées suivantes:

$$f_n^\# \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^\# \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \mathcal{H}(f_n) \leq \mathcal{H}(f_0).$$

(3) **Compacité des suites minimisantes généralisées à une translation près.** Une amélioration de la borne (1.1.14) permet d'obtenir la compacité relative, à une translation près, de

$$\nabla_x \phi_{f_n}(.+x_n) \longrightarrow \nabla_x \phi_{f_0} \quad \text{dans } \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

La convergence forte de la suite minimisante dans l'espace d'énergie découle de la convergence forte des potentiels, puis de propriétés de monotonie du Hamiltonien (1.1.13) et de propriétés des réarrangements généralisés.

1.1.5.2. *Le système HMF cosinus.* Nous nous intéressons à l'existence puis à la stabilité orbitale d'états stationnaires de la forme

$$f_0(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta) \right), \tag{1.1.16}$$

avec F une fonction décroissante. Tout d'abord, remarquons que pour n'importe quelle distribution F, l'état homogène $F\left(\frac{v^2}{2}\right)$ est une solution stationnaire du système HMF cosinus. La difficulté réside en l'existence ou non d'états stationnaires inhomogènes. Chavanis, Vatteville et Bouchet montrent dans [31] un critère d'existence sur la distribution F pour les états stationnaires inhomogènes. Plus précisément, la Proposition 4.6.1 de [57] fournit

une condition suffisante sur la fonction de distribution F qui assure l'existence d'états stationnaires inhomogènes.

De nombreux résultats existent concernant la stabilité des états stationnaires du système HMF cosinus. Barré, Olivetti et Yamaguchi ont obtenu dans [7, 8] des résultats concernant la dynamique des états stationnaires inhomogènes perturbés. D'autres résultats [10, 28, 79] traitent la stabilité linéaire d'états stationnaires. Lemou, Luz et Méhats exhibent dans [61] un critère de stabilité non linéaire pour les états stationnaires inhomogènes. Ils adaptent au cas du système HMF cosinus les nouvelles techniques de réarrangements généralisés développées dans [63, 65]. Nous allons, dans la Partie 1.2 suivante, introduire ces nouveaux outils et synthétiser la démarche suivie. Cela nous permettra d'expliquer dans la Partie 1.3, le cheminement que nous avons suivi pour démontrer la stabilité orbitale d'états stationnaires pour le système HMF Poisson. Dans le cas des états stationnaires homogènes, Faou et Rousset ont mené dans [42] une analyse de l'amortissement de Landau non linéaire dans des espaces de Sobolev.

1.2. Critère de stabilité non linéaire pour le modèle HMF cosinus

Dans cette Section, nous présentons les résultats et méthodes de l'article [61] de Lemou, Luz et Méhats. Le but de cet article est d'obtenir un critère de stabilité non linéaire pour les états stationnaires du système HMF (1.1.3) avec un potentiel en cosinus (1.1.4) qui sont des fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. Plus précisément, on considère les états stationnaires de la forme

$$f_0(\theta, v) = F(e_0(\theta, v)), \quad \text{avec} \quad e_0(\theta, v) = \frac{v^2}{2} + \phi_0(\theta), \tag{1.2.1}$$

où ϕ_0 est le potentiel associé à f_0 par la relation (1.1.4) et prend le forme simplifiée suivante

$$\phi_0(\theta) = -m_0 \cos\theta, \quad \text{avec} \quad m_0 > 0.$$

On suppose les hypothèses suivantes:
Hypothèse 1: La fonction F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, e_*]$ avec $e_* < \infty$ telle que $F' < 0$ sur cet intervalle. On suppose également que $F(e) = 0$ pour $e \geq e_*$.

Remarque 1.2.1. *Contrairement au cas du système de Vlasov-Poisson où il est nécessaire de supposer les états stationnaires à support compact pour mener à bien l'analyse, le critère de stabilité de [61] pour le système de HMF cosinus reste valable dans le cas où F n'est pas à support compact, c'est à dire $e_* = \infty$. Néanmoins, nous le présentons pas ici pour alléger l'énoncé des théorèmes et propositions.*

Hypothèse 2: Critère de stabilité non linéaire. On suppose que f_0 satisfait le critère suivant

$$\kappa_0 < 1,$$

avec

$$\kappa_0 = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F'(e_0(\theta,v))| \left(\frac{\int_{\mathcal{D}} (\cos\theta - \cos\theta')(e_0(\theta,v) - \phi_0(\theta'))^{-1/2} \mathrm{d}\theta'}{\int_{\mathcal{D}} (e_0(\theta,v) - \phi_0(\theta'))^{-1/2} \mathrm{d}\theta'} \right)^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v,$$

où

$$\mathcal{D} = \{\theta' \in \mathbb{T} : \phi_0(\theta') < e_0(\theta,v)\}.$$

1.2.1. **Stratégie de la preuve.** Pour démontrer ce critère de stabilité, Lemou, Luz et Méhats adaptent au cas du système HMF cosinus les nouveaux outils développés dans [65]. Leur preuve repose également sur trois étapes principales.

(1) **Monotonie du Hamiltonien par rapport au réarrangements généralisés.** Un différence fondamentale entre le système de Vlasov-Poisson et le système HMF cosinus est que, dans le cas de ce dernier, le potentiel ϕ_f associé à la distribution f s'écrit simplement (1.1.6). La fonctionnelle $\mathcal{J}$ (1.1.15) introduite pour le système de Vlasov-Poisson peut alors être définie sur $\mathbb{R}_+$ pour le système de HMF cosinus par

$$\mathcal{J}(m) = \frac{m^2}{2} + \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta) \right) f_0^{*\phi} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v,$$

où $\phi(\theta) = -m\cos\theta$.

(2) **Coercivité de la Hessienne de la fonctionnelle $\mathcal{J}$.** Il est plus facile d'étudier la différentiabilité d'une fonctionnelle réelle que d'une fonction définie sur une classe de fonctions comme c'est le cas pour le système de Vlasov-Poisson. Cette étape, quoique assez technique et calculatoire, est beaucoup plus simple que dans le cas de Vlasov-Poisson où on a besoin de montrer une inégalité de type Poincaré. Par ailleurs, à la différence du système de Vlasov-Poisson, un critère apparaît pour obtenir la coercivité de la Hessienne. C'est cela qui fait apparaître le critère de stabilité des états stationnaires.

(3) **Contrôle de f.** Dans le cas de Vlasov-Poisson, ce contrôle été obtenu dans [65] en utilisant des arguments de compacité, résultat étendu dans [60] par un contrôle quantitatif utilisant des inégalités fonctionnelles. Ici, on utilisera une inégalité fonctionnelle établie dans [60] qui permet d'obtenir un contrôle quantitatif de $\|f - f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ par la quantité

$$\iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta) \right) (f - f_0) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v,$$

à des termes de réarrangements près dépendant seulement de f^* et f_0^* et qui sont préservés par le flot.

1.2.2. **Réarrangements généralisés par rapport à l'énergie microscopique.** Dans la Partie 1.2.3, nous expliquons les étapes clés permettant de montrer le critère de stabilité non linéaire. Nous avons besoin pour énoncer ces résultats d'introduire la notion de réarrangements généralisés. Le but de cette partie est donc de définir les réarrangements symétriques décroissants généralisés par rapport à l'énergie microscopique $e = \frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$, où $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ est une fonction donnée. Avant toute chose, rappelons la définition des

réarrangements classiques pour des fonctions définies sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f\in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ positive, on définit sa fonction de distribution pour $s\geq 0$, par

$$\mu_f(s)=|\{(\theta,v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R} : f(\theta,v)>s\}|, \tag{1.2.2}$$

où $|A|$ est la mesure de Lebesgue d'un ensemble A. Soit $f^{\#}$ le pseudo-inverse de μ_f défini pour $s\geq 0$ par

$$f^{\#}(s)=\inf\{t\geq 0, \mu_f(t)\leq s\}.$$

On définit alors le réarrangement f^* de f par

$$f^*(\theta,v)=f^{\#}\left(\left|B(0,\sqrt{\theta^2+v^2})\cap\mathbb{T}\times\mathbb{R}\right|\right),$$

où $B(0,R)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ centrée en 0 et de rayon R.

Définissons maintenant les réarrangements généralisés. On commence, pour cela, par introduire la quantité suivante définie pour tout $e\in\mathbb{R}$:

$$a_\phi(e)=\left|\left\{(\theta,v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R} : \frac{v^2}{2}+\phi(\theta)<e\right\}\right|. \tag{1.2.3}$$

Cette quantité s'écrit de manière explicite:

$$a_\phi(e)=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{(e-\phi(\theta))_+}\mathrm{d}\theta,$$

avec $x_+=\max(0,x)$. On est alors en mesure de définir le réarrangement généralisé par rapport à l'énergie microscopique.

Lemme 1.2.2. *Soit $\phi\in\mathcal{C}^\infty([0,2\pi])$ et soit a_ϕ définie par (1.2.3). Soit f une fonction positive de $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, alors la fonction*

$$f^{*\phi}(\theta,v)=f^{\#}\left(a_\phi\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right)\right),\quad (\theta,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$$

est équimesurable à f, c'est à dire $\mu_{f^{*\phi}}=\mu_f$ où μ_f est définie par (1.2.2). La fonction $f^{*\phi}$ est appelée réarrangement décroissant par rapport à l'énergie microscopique $\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)$.

1.2.3. **Résultats clés permettant de démontrer le critère de stabilité non linéaire.** Le Théorème 1.2.3 suivant est le résultat principal de l'article [61].

Théorème 1.2.3. *Soit f_0 un état stationnaire de la forme (1.2.1) satisfaisant les Hypothèses 1 et 2. Il existe $\delta>0$ tel que pour tout $f\in\mathrm{L}^1((1+v^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v)$ vérifiant*

$$|M_f-M_{f_0(.-\theta_f)}|<\delta, \tag{1.2.4}$$

on ait

$$\|f-f_0(.-\theta_f)\|_{\mathrm{L}^1}^2\leq C\left(\mathcal{H}(f)-\mathcal{H}(f_0)+C(1+\|f\|_{\mathrm{L}^1})\|f^*-f_0^*\|_{\mathrm{L}^1}\right),$$

où C est une constante positive dépendant seulement de f_0. Le paramètre θ_f est défini par $M_f=|M_f|(\cos\theta_f,\sin\theta_f)^T$.

Il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.2.3 pour obtenir la stabilité orbitale des états stationnaires de la forme (1.2.1) vérifiant les Hypothèses 1 et 2. Dans ce qui suit, nous expliquons brièvement les grandes étapes de la démonstration du Théorème 1.2.3 et mettons en lumière les similitudes et différences entre cette démonstration et celle de Vlasov-Poisson. Dans le cas de Vlasov-Poisson, nous avons pour un état stationnaire f_0 l'identité suivante

$$\mathcal{H}(f)-\mathcal{H}(f_0)=\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f_0}(x)\right)(f-f_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\|\nabla_x\phi_f-\nabla_x\phi_{f_0}\|_{\mathrm{L}^2}^2. \tag{1.2.5}$$

Notons, dans un premier temps, que le terme $\mathcal{H}(f)-\mathcal{H}(f_0)$ ne pose pas de souci car est conservé par le flot. La stratégie est alors, d'une part, de montrer par des arguments de compacité que la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f_0}(x)\right)(f-f_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}v,$$

contrôle $f-f_0$. D'autre part, il faut contrôler la différence

$$-\frac{1}{2}\|\nabla_x\phi_f-\nabla_x\phi_{f_0}\|_{\mathrm{L}^2}^2,$$

par une quantité du type $\mathcal{J}(\phi_f)-\mathcal{J}(f_0)$ avec $\mathcal{J}$ une fonctionnelle bien choisie pour laquelle ϕ_{f_0} sera un minimum local strict et qui possède des propriétés permettant de la relier au Hamiltonien.

L'équivalent de l'identité (1.2.5) pour le système de HMF cosinus est le suivant

$$\mathcal{H}(f)-\mathcal{H}(f_0)=\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\left(\frac{v^2}{2}+\phi_{f_0}(\theta)\right)(f-f_0)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v-\frac{1}{2}|M_f-M_{f_0}|^2.$$

On remarque que le terme $\frac{1}{2}\|\nabla_x\phi_f-\nabla_x\phi_{f_0}\|_{\mathrm{L}^2}^2$ de Vlasov-Poisson s'exprime simplement dans le cas de HMF cosinus par la différence des vecteurs magnétisation de f et f_0. Cela vient du fait que pour HMF cosinus, le potentiel s'écrit sous la forme simplifiée (1.1.6). Ainsi il suffira pour contrôler ce terme, d'introduire une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}$. Il sera alors plus simple de montrer que cette fonctionnelle admet ϕ_{f_0} comme minimum local strict. Néanmoins, cela ne sera le cas que lorsque l'Hypothèse 2 sera vérifiée. Enfin, il reste à montrer que le terme

$$\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\left(\frac{v^2}{2}+\phi_{f_0}(\theta)\right)(f-f_0)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v,$$

contrôle $f-f_0$. Encore une fois, cela sera plus facile que dans le cas de Vlasov-Poisson car des arguments de compacité ne seront pas nécessaires, il suffira d'appliquer une inégalité fonctionnelle démontrée dans [60].

Dans les deux sous-parties suivantes, on détaille le contrôle des différents termes évoqués ci-dessus.

1.2.3.1. *Contrôle de la différence des vecteurs magnétisation.* Par analogie avec (1.1.15), on introduit pour un état stationnaire f_0 de la forme (1.2.1) la fonctionnelle suivante définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\mathcal{J}(m) = \frac{m^2}{2} + \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) f_0^{*\phi} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v, \tag{1.2.6}$$

où $\phi(\theta) = -m\cos\theta$ et $f_0^{*\phi}$ est le réarrangement généralisé de f_0 défini dans le Lemme 1.2.2.

Proposition 1.2.4. *Si f_0 vérifie l'Hypothèse 2 alors sa magnétisation m_0 est un minimum local strict de $\mathcal{J}$, on a*

$$\mathcal{J}'(m_0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}''(m_0) = 1 - \kappa_0 > 0.$$

Ebauche de preuve: En utilisant des propriétés des réarrangements généralisés, voir Lemme 2.4 dans [61], on remarque que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{J}(m) = \frac{m^2}{2} + m\int_0^{+\infty} g(m,s)\mathrm{d}s,$$

avec

$$g(m,s) = f_0^{\#}(s)\alpha_1^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right),$$

où la fonction α_1 est définie par

$$a_\phi(e) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{(e+m\cos\theta)_+}\mathrm{d}\theta = \sqrt{m}\alpha_1\left(\frac{e}{m}\right).$$

La différentiabilité de $\mathcal{J}$ repose donc sur celle de la fonction g et en particulier sur celle de la fonction α_1. Dans le cas de HMF cosinus, cela s'obtient relativement facilement grâce à l'expression sympathique du potentiel comme un cosinus. □

Ainsi, pour M_f dans un voisinage de M_{f_0}, ce qui correspond à l'hypothèse (1.2.4) dans le Théorème 1.2.3, on a

$$\frac{1}{2}(|M_f| - |M_{f_0}|)^2 \leq \mathcal{J}(|M_f|) - \mathcal{J}(|M_{f_0}|).$$

Or on peut montrer que $|M_f - M_{f_0}|^2 \leq (|M_f| - |M_{f_0}|)^2$ et on obtient

$$\frac{1}{2}|M_f - M_{f_0}|^2 \leq \mathcal{J}(|M_f|) - \mathcal{J}(|M_{f_0}|).$$

Il reste alors à relier la différence $\mathcal{J}(|M_f|) - \mathcal{J}(|M_{f_0}|)$ à des quantités invariantes par le flot. C'est l'objet de la Proposition 1.2.5 suivante.

Proposition 1.2.5. *Pour tout $f \in \mathrm{L}^1((1+v^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v)$, on a*

$$\mathcal{J}(|M_f|) - \mathcal{J}(|M_{f_0}|) \leq \mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(f_0) + (2m_0 + 3\|f\|_{\mathrm{L}^1} + (Supp f_0)^2)\|f^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1},$$

avec $\mathcal{J}$ définie par (1.2.6).

Cette preuve repose de manière très forte sur les propriétés des réarrangements généralisés et en particulier le fait que l'état stationnaire f_0 est un point fixe de la transformation $f^{*\phi}$ ce qui se traduit par $f_0 = f_0^{*\phi_{f_0}}$.

Ainsi en utilisant conjointement les résultats des Propositions 1.2.4 et 1.2.5, on réussit à contrôler la différence des magnétisations par des termes conservés par le flot.

1.2.3.2. *Contrôle de la fonction f.* Il reste alors à montrer que la quantité

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{v^2}{2}+\phi_{f_0}(\theta)\right)(f-f_0)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v,$$

permet de contrôler quantitativement $\|f-f_0\|_{\mathrm{L}^1}$, à des termes de réarrangements près dépendant seulement de f^* et f_0^* qui sont préservés par le flot. Ce contrôle est donné par la Proposition 1.2.6 suivante.

Proposition 1.2.6. *Soit un état stationnaire f_0 de la forme (1.2.1) satisfaisant l'Hypothèse 1. Il existe une constante K_0 dépendant seulement de f_0 telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^1((1+v^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v)$, on ait*

$$\begin{aligned}(\|f-f_0\|_{\mathrm{L}^1}+\|f_0\|_{\mathrm{L}^1}-\|f\|_{\mathrm{L}^1})^2 \leq K_0 &\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\left(\frac{v^2}{2}+\phi_{f_0}(\theta)\right)(f-f_0)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\\ &+\left(m_0+\frac{1}{8\pi^2}(Supp f_0)^2\right)\|f^*-f_0^*\|_{\mathrm{L}^1}.\end{aligned}$$

La preuve repose sur le Théorème 1 de [60] ainsi qu'une forte exploitation des propriétés des réarrangements généralisés.

Dans les parties suivantes, nous introduisons les Chapitres 2 et 3 en mettant en évidence les résultats démontrés et en soulignant les méthodes utilisées ainsi que les difficultés rencontrées.

1.3. Stabilité orbitale d'états stationnaires du système HMF Poisson

Dans cette Section, nous présentons les résultats du Chapitre 2 de cette thèse. La première partie du travail que j'ai effectué en thèse consistait à essayer d'adapter, pour le système HMF (1.1.3) avec un potentiel de Poisson (1.1.7), les méthodes développées dans [65], puis dans [61] pour démontrer la stabilité non linéaire ou bien un critère de stabilité non linéaire pour les états stationnaires, fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. J'ai, naturellement, commencé par tenter d'appliquer les preuves de [61] puisque que dans cet article est démontré un critère de stabilité pour un système de type HMF: le système HMF cosinus. Cependant, le système HMF cosinus a un potentiel ϕ_f associé à une solution f qui s'écrit sous une forme très simple (1.1.6). Ce potentiel peut également s'écrire pour un certain $\theta_M \in \mathbb{T}$,

$$\phi_f(\theta) = |M_f|\cos(\theta-\theta_M),$$

où M_f est la magnétisation de f définie par (1.1.5). Comme nous l'avons vu à la Partie 1.2, cette propriété très particulière du système HMF cosinus permet de se ramener à

l'étude d'une fonctionnelle $\mathcal{J}$ définie sur $\mathbb{R}$, contrairement au cas de Vlasov-Poisson où la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est définie pour une classe donnée de fonctions. Cela simplifie grandement l'étude. Dans le cas du système HMF Poisson, le potentiel est donné de manière équivalente par l'équation de Poisson (1.1.7) ou le produit de convolution (1.1.8). On ne peut pas l'écrire sous une forme simplifiée comme c'est le cas du système HMF cosinus. On doit donc introduire une fonctionnelle $\mathcal{J}$ définie sur une classe de fonctions. Posons donc pour f_0 un état stationnaire de HMF Poisson et $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$,

$$\mathcal{J}(\phi) = \mathcal{H}(f_0^{*\phi}) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\phi'_{f_0^{*\phi}}(\theta) - \phi'(\theta))^2 \mathrm{d}\theta.$$

Rappelons que $f_0^{*\phi}$ désigne le réarrangement généralisé de f_0 par rapport à son énergie microscopique défini par le Lemme 1.2.2 et $\mathcal{H}$ désigne le Hamiltonien du système défini par (1.1.11). Cette fonctionnelle peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{J}(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) f_0^{*\phi}(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \tag{1.3.1}$$

Dans l'optique d'obtenir la coercivité de la Hessienne de $\mathcal{J}$ comme dans la preuve de stabilité pour Vlasov-Poisson, on doit différentier la fonctionnelle $\mathcal{J}$. Le premier terme de $\mathcal{J}$ dans son expression (1.3.1) se différentie facilement. C'est le deuxième terme de (1.3.1) qui va poser problème, nous allons voir pourquoi. Une propriété des réarrangements généralisés énoncée dans le Lemme 2.4.2 du Chapitre 2, nous permet d'écrire ce deuxième terme sous la forme:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) f_0^{*\phi}(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} a_\phi^{-1}(s) f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s,$$

où a_ϕ est défini par (1.2.3). Ainsi différentier ce terme par rapport à ϕ revient à différentier la fonction a_ϕ par rapport à ϕ. Rappelons que la fonction a_ϕ peut s'écrire sous la forme explicite suivante

$$a_\phi(e) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(e - \phi(\theta))_+}\mathrm{d}\theta,$$

où $(.)_+$ est la notation classique pour $(x)_+ = \max(x, 0)$. Le problème auquel je me suis heurtée est avant tout technique. Je n'ai pas réussi, jusqu'à lors, à différentier la fonction a_ϕ. Un des principaux blocages est que le potentiel ϕ peut présenter des plateaux et que donc la quantité $e - \phi(\theta)$ peut s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle. Dans le cas du système de Vlasov-Poisson, le potentiel ϕ peut éventuellement présenter des plateaux mais cela ne pose pas de problème car la fonction a_ϕ a l'expression explicite suivante

$$a_\phi(e) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\int_{\mathbb{R}^3} (e - \phi(x))_+^{3/2}\mathrm{d}x.$$

La puissance "3/2" plus grande que 1 permet de ne pas se soucier des éventuels plateaux du potentiel ϕ. On peut alors montrer que a_ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et c'est la première étape dans l'obtention de la différentiabilité de la fonctionnelle $\mathcal{J}$, pour le système de Vlasov-Poisson. La différence entre les deux systèmes tient, en fait, à la dimension puisque

la puissance "3/2" ou "1/2" vient du fait que $v \in \mathbb{R}^3$ pour Vlasov-Poisson et $v \in \mathbb{R}$ pour HMF Poisson. Contrairement à ce qu'on pouvait attendre, le fait d'être en dimension 1 pour HMF Poisson ne facilite pas l'étude de la différentiabilité de a_ϕ.

Face à ces difficultés, nous avons modifié le projet initial qui était d'adapter les méthodes de [61, 65] et d'obtenir la stabilité non linéaire pour tous les états stationnaires, fonctions décroissantes de leur énergie cinétique. Nous avons, dès lors, cherché à montrer la stabilité orbitale d'états stationnaires minimiseurs d'un certain problème variationnel avec contraintes. Cette stratégie s'inspire des méthodes variationnelles classiques [36, 49, 50, 52, 53, 62, 64, 84, 85, 92] évoquées dans la Partie 1.1.5.1 pour résoudre des problèmes de stabilité non linéaire. Néanmoins, on introduit une approche générale qui nous permet de montrer la stabilité non linéaire d'une grande classe d'états stationnaires grâce à l'étude de problèmes variationnels avec *une, deux ou un nombre infini de contraintes.*

1.3.1. **Problème de minimisation à une contrainte.** Dans la Partie 2.2 du Chapitre 2 de cette thèse, nous montrons la stabilité orbitale des états stationnaires qui sont des minimiseurs du problème variationnel suivant

$$\mathcal{I}(M) = \inf_{f\in E_j, \|f\|_{\mathrm{L}^1}=M} \mathcal{H}(f) + \iint j(f(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \tag{1.3.2}$$

La constante $M > 0$ est fixée, $\mathcal{H}$ désigne le Hamiltonien du système HMF Poisson défini par (1.1.11) et E_j désigne l'espace d'énergie:

$$E_j = \left\{ f \geq 0, \|(1+v^2)f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty, \left| \iint j(f(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \right| < +\infty \right\}, \tag{1.3.3}$$

où $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est soit la fonction définie par $j(t) = t\ln(t)$ pour $t > 0$ et $j(0) = 0$ soit une fonction satisfaisant les hypothèses suivantes:

(H1) $j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$; $j(0) = j'(0) = 0$ et $j''(t) > 0$ pour tout $t > 0$,

(H2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{j(t)}{t} = +\infty$.

Remarquons que $j(t) = t\ln(t)$ satisfait (H2) mais pas (H1) puisque $j'(0) \neq 0$ dans ce cas.

La stratégie que nous suivons pour prouver la stabilité orbitale des états stationnaires qui sont minimiseurs du problème variationnel (1.3.2) reprend les quatre mêmes grandes étapes, détaillées dans la Partie 1.1.5.1, appliquées pour démontrer la stabilité non linéaire de certaines classes d'états stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson.

Tout d'abord, nous montrons l'existence d'états stationnaires minimiseurs du problème variationnel sous contraintes (1.3.2). C'est l'objet du Théorème 1.3.1 démontré à la Partie 2.2.1 du Chapitre 2.

Théorème 1.3.1. *Soit j la fonction $j(t) = t\ln(t)$ ou une fonction vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). On a:*

(1) *Dans les deux cas, l'infimum (1.3.2) existe et est atteint en un minimiseur f_0 qui est un état stationnaire du système HMF (1.1.3) avec potentiel de Poisson (1.1.7).*
(2) *Si j vérifie les hypothèses (H1) et (H2), tout minimiseur f_0 de (1.3.2) est continu, à support compact, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et prend la forme*

$$f_0(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\lambda_0 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_0}(\theta)\right)_+ \quad \textit{pour } \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

La fonction $(.)_+$ est définie par $(x)_+ = x$ si $x \geq 0$, 0 sinon.
(3) *Si $j(t) = t\ln(t)$, tout minimiseur f_0 de (1.3.2) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et prend la forme*

$$f_0(\theta, v) = \exp\left(\lambda_0 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_0}(\theta)\right) \textit{ pour } \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

Ebauche de preuve: Cette preuve comporte deux étapes. Tout d'abord, on montre l'existence d'un minimiseur. Cela se fait de manière classique en exhibant la limite L^1-faible d'une suite minimisante, on utilise pour cela le théorème de Dunford-Pettis [38]. Puis, on montre la convergence forte dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ du potentiel associé. Pour finir, on obtient que cette limite est effectivement un minimiseur en utilisant des propriétés classiques de semi-continuité inférieure des fonctions convexes. La convergence forte du potentiel est plus facile à obtenir pour le système HMF Poisson que pour le système de Vlasov-Poisson. En effet, une simple application du théorème de convergence dominée suffit, contrairement au cas du système de Vlasov-Poisson où il faut utiliser les lemmes de concentration-compacité de Lions [69, 70]. La seconde étape consiste à déterminer les équations d'Euler-Lagrange des minimiseurs. La méthode utilisée s'inspire des méthodes employées dans [65], ces dernières consistant à introduire les réarrangements généralisés qui possèdent des propriétés de monotonie par rapport au Hamiltonien. Dans notre cas, étant donné un potentiel ϕ, nous introduisons une nouvelle fonction de distribution F^ϕ de masse M, qui jouit de propriétés de monotonie par rapport à la fonctionnelle d'énergie-Casimir J définie par

$$J(f) = \mathcal{H}(f) + \iint j(f(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v, \tag{1.3.4}$$

avec $\mathcal{H}$ le Hamiltonien du système défini par (1.1.11). L'existence d'une telle fonction de distribution est donnée par le Lemme 1.3.2.

Lemme 1.3.2. *Soit j une fonction vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) ou $j(t) = t\ln(t)$ et soit $M > 0$. Pour toute fonction $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue, il existe un unique réel $\lambda \in]\min\phi, +\infty[$ pour j satisfaisant (H1) et (H2) et $\lambda \in \mathbb{R}$ pour $j(t) = t\ln(t)$ telle que la fonction $F^\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\begin{cases} F^\phi(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\lambda - \frac{v^2}{2} - \phi(\theta)\right)_+ \textit{ pour } j \textit{ vérifiant (H1), (H2)} \\ F^\phi(\theta, v) = \exp\left(\lambda - \frac{v^2}{2} - \phi(\theta)\right) \textit{ pour } j(t) = t\ln(t), \end{cases} \tag{1.3.5}$$

satisfasse $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1} = M$.

Dans le but d'obtenir les propriétés de monotonie de la fonctionnelle d'énergie-Casimir J définie par (1.3.4) par rapport à la fonction F^ϕ, on introduit un second problème de minimisation. Soit $M > 0$, soit $j(t) = t\ln(t)$ ou j une fonction donnée vérifiant les hypothèses (H1) et (H2), on pose

(1.3.6)

$$\mathcal{J}_0 = \inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0} \mathcal{J}(\phi) \text{ avec } \mathcal{J}(\phi) = \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) F^\phi(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta + \iint j(F^\phi),$$

où F^ϕ est définie par le Lemme 1.3.2. Notons l'analogie entre les deux premiers termes de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ (1.3.6) ci-dessus et la fonctionnelle $\mathcal{J}$ (1.3.1) que nous aurions voulue introduire dans le but d'adapter les preuves de Vlasov-Poisson au système HMF Poisson. On obtient pour le système de HMF Poisson, un résultat analogue à la Proposition 2.7 de [65], à savoir une monotonie de la fonctionnelle d'énergie-Casimir (1.3.4) par rapport à la fonction de distribution F^ϕ.

Lemme 1.3.3. *On a les inégalités suivantes:*

(1) Pour tout $\phi \in H^2([0,2\pi])$ tel que $\phi(0) = \phi(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, on a $J(F^\phi) \leq \mathcal{J}(\phi)$.

(2) Pour tout $f \in E_j$ avec $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$, on a

$$\mathcal{I}(M) \leq J(F^{\phi_f}) \leq \mathcal{J}(\phi_f) \leq J(f).$$

De plus, $\mathcal{I}(M) = \mathcal{J}_0$.

La preuve des équations d'Euler-Lagrange repose sur l'égalité suivante permettant de relier la fonctionnelle d'énergie-Casimir (1.3.4) à la fonctionnelle $\mathcal{J}$ (1.3.6). On a

$$J(f) = \mathcal{J}(\phi_f) + \iint (j(f) - j(F^{\phi_f}) - j'(F^{\phi_f})(f - F^{\phi_f}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \tag{1.3.7}$$

Puis en utilisant cette égalité (1.3.7) et le Lemme 1.3.3, on obtient que pour $\bar{f}$ un minimiseur de (1.3.2), on a

$$\iint (j(\bar{f}) - j(F^{\phi_{\bar{f}}}) - j'(F^{\phi_{\bar{f}}})(\bar{f} - F^{\phi_{\bar{f}}}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 0.$$

En utilisant les formules de Taylor et la convexité de j, on obtient $\bar{f} = F^{\phi_{\bar{f}}}$ et cela nous donne les équations d'Euler-Lagrange attendues. □

En suivant le schéma de preuve des méthodes variationnelles pour montrer la stabilité non linéaire, on doit maintenant démontrer la séparation des minimiseurs. Dans le cas du système HMF Poisson, nous avons un résultat plus fort puisque les minimiseurs sont uniques, à translation près, sous condition d'équimesurabilité. C'est le résultat du Lemme 1.3.5 mais tout d'abord rappelons la définition de deux fonctions équimesurables.

Définition 1.3.4. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions positives de $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Les fonctions f_1 et f_2 sont dites équimesurables, si et seulement si, $\mu_{f_1} = \mu_{f_2}$ où μ_f désigne la fonction de distribution de f, définie par*

$$\mu_f(s) = |\{(\theta, v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R} : f(\theta, v) > s\}|, \quad \textit{pour tout } s \geq 0, \tag{1.3.8}$$

et $|A|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble A.

Lemme 1.3.5 (Unicité des minimiseurs sous condition d'équimesurabilité)**.** *Soient f_1 et f_2 deux états stationnaires de (1.1.3) équimesurables qui minimisent (1.3.2) avec $j(t) = t\ln(t)$ ou avec j une fonction vérifiant (H1) and (H2). Alors les états stationnaires f_1 et f_2 sont égaux à une translation près en θ.*

Pour démontrer le Lemme 1.3.5, on se ramène classiquement à une équation différentielle ordinaire pour laquelle les contraintes du problème variationnel impliquent l'unicité.

Nous arrivons, enfin, aux deux dernières étapes qui représentent le coeur de la preuve de stabilité non linéaire, à savoir la compacité des suites minimisantes et la preuve de stabilité orbitale à proprement dite. Ces résultats sont contenus dans le Théorème 1.3.6 suivant.

Théorème 1.3.6 (Stabilité orbitale des états stationnaires)**.** *Considérons le problème variationnel (1.3.2) avec $j(t) = t\ln(t)$ ou bien j une fonction vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Dans les deux cas, on a le résultat suivant. Pour tout $M > 0$, tout état stationnaire f_0 de (1.1.3) qui minimise (1.3.2) est* ***orbitalement stable*** *sous le flot de (1.1.3). Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que l'assertion suivante soit vraie. Considérons $f_{init} \in E_j$ vérifiant $\|(1+v^2)(f_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$ et $|\iint j(f_{init}) - \iint j(f_0)| < \eta(\varepsilon)$. Soit $f(t)$ une solution faible globale de (1.1.3) définie sur $\mathbb{R}_+$ de donnée initiale f_{init} telle que les fonctions Casimir sont préservées durant l'évolution et telle que $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. Alors il existe une translation $\theta(.)$ à valeurs dans $[0, 2\pi]$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, on ait*

$$\|(1+v^2)(f(t,\theta+\theta(t),v) - f_0(\theta,v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

La stabilité orbitale à proprement dite se démontre de façon classique en raisonnant par l'absurde. Il reste alors à montrer la compacité des suites minimisantes. Ce point ne nécessite pas l'utilisation des lemmes de concentration-compacité de Lions [69, 70] car le fait d'avoir un domaine borné en espace nous permet d'utiliser des méthodes plus élémentaires (type théorème de convergence dominée, lemme de Brezis-Lieb [18]...). Tout cela est détaillé dans la Partie 2.2.2.2 du Chapitre 2.

1.3.2. **Problème de minimisation à deux contraintes.** Le Théorème 1.3.6 permet d'obtenir la stabilité non linéaire des états stationnaires minimiseurs du problème variationnel *à une contrainte* (1.3.2). Cette classe d'états stationnaires est plus restreinte que la classe des états stationnaires, fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. Pour se rapprocher de l'objectif initial qui était de montrer la stabilité de **tous** les états stationnaires, fonctions décroissantes de leur énergie microscopique, on va tenter d'agrandir la classe des états stationnaires minimiseurs d'un certain problème variationnel avec contraintes. On va alors montrer la stabilité orbitale d'états stationnaires minimiseurs d'un problème variationnel *à deux contraintes.* La classe ainsi obtenue est plus grande que la classe des états stationnaires minimiseurs du problème variationnel *à une contrainte* (1.3.2). Cependant, elle ne la contient pas puisque les hypothèses que nous allons prendre sur la fonction j, dans cette partie, n'englobent pas le cas $j(t) = t\ln(t)$.

Dans la Partie 2.3 du Chapitre 2 de cette thèse, nous montrons la stabilité orbitale des états stationnaires qui sont des minimiseurs du problème variationnel suivant:

$$\mathcal{I}(M_1, M_j) = \inf_{\substack{f\in E_j \\ \|f\|_{\mathrm{L}^1}=M_1, \|j(f)\|_{\mathrm{L}^1}=M_j}} \mathcal{H}(f) \tag{1.3.9}$$

où E_j est le même espace d'énergie que dans le cas une contrainte, $\mathcal{H}$ est le Hamiltonien (1.1.11) du système HMF Poisson et la fonction j satisfait les hypothèses (H1) et (H2) ainsi que l'hypothèse supplémentaire suivante:

(H3) Il existe $p, q > 1$ tels que $p \leq \frac{tj'(t)}{j(t)} \leq q$, pour t>0.

De même que pour le cas une contrainte, nous suivons les quatre mêmes grandes étapes, détaillées dans la Partie 1.1.5.1, appliquées pour démontrer la stabilité non linéaire de certaines classes d'états stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson. Cependant, des difficultés inhérentes aux deux contraintes vont apparaître.

Tout d'abord, nous montrons l'existence d'états stationnaires minimiseurs du problème variationnel à deux contraintes (1.3.9). C'est l'objet du Théorème 1.3.7 démontré à la Partie 2.1.6 du Chapitre 2.

Théorème 1.3.7. *Soit j une fonction satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) et (H3). On a les propriétés suivantes:*

(1) L'infimum (1.3.9) existe et est atteint en un minimiseur f_0 qui est un état stationnaire du système HMF (1.1.3) avec potentiel de Poisson (1.1.7).

(2) Tout état stationnaire f_0 obtenu comme minimiseur de (1.3.9) est continu, à support compact, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et prend la forme

$$f_0(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta) - \lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \quad \text{avec } (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-. \tag{1.3.10}$$

(3) La densité associée ρ_{f_0} est continue et le potentiel associé ϕ_{f_0} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{T}$.

L'existence des minimiseurs dans le cas deux contraintes est plus compliquée que dans le cas une contrainte. Les méthodes standards ne fonctionnent plus car si on considère une suite minimisante du problème (1.3.9), on ne sait pas montrer que sa limite faible, obtenue grâce au théorème de Dunford-Pettis (voir [38]), vérifie les deux contraintes. Dans le cas une contrainte, la convergence L^1-faible impliquait directement une conservation de la masse. C'est pourquoi, il nous faut introduire de nouveaux outils. On va définir, dans le Lemme 1.3.8, une nouvelle fonction notée F^ϕ. Notons que cette fonction F^ϕ est différente de celle introduite pour le cas une contrainte. Cependant, elle peut être vue comme un équivalent de (1.3.5) dans le sens où les deux fonctions F^ϕ vérifient les contraintes des problèmes à une et deux contraintes. Néanmoins, il n'y aura pas de confusion possible puisque la fonction F^ϕ (1.3.5) ne sera plus utilisée. Cette nouvelle fonction va nous permettre de montrer l'existence des minimiseurs. En effet, la suite $(F^{\phi_{f_n}})_n$ a de meilleures propriétés de compacité que la suite $(f_n)_n$. De plus, la suite $(F^{\phi_{f_n}})_n$ nous permettra d'obtenir la

compacité de la suite $(f_n)_n$ grâce à des propriétés de monotonie du Hamiltonien vis-à-vis de la transformation F^ϕ. Le Lemme suivant 1.3.8 nous donne l'existence d'une telle fonction F^ϕ.

Lemme 1.3.8. *Soit j une fonction vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et soit $M_1, M_j > 0$. Pour tout fonction $\phi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ tel que la fonction $F^\phi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$F^\phi(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \phi(\theta) - \lambda}{\mu}\right)_+ \text{ vérifie } \|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1} = M_1,\ \|j(F^\phi)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j. \tag{1.3.11}$$

La preuve de ce lemme, détaillée à la Partie 2.3.1 du Chapitre 2, ne présente pas de difficultés majeures mais est particulièrement technique. Puis, dans le but d'obtenir les propriétés de monotonie du Hamiltonien par rapport à la fonction F^ϕ, on introduit un second problème de minimisation. On fixe $M_1, M_j > 0$ et on pose

$$\mathcal{J}_0 = \inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0} \mathcal{J}(\phi) \text{ avec } \mathcal{J}(\phi) = \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) F^\phi(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta, \tag{1.3.12}$$

où F^ϕ est définie par le Lemme 1.3.8. Comme dans le cas une contrainte, on peut noter l'analogie entre cette fonctionnelle (1.3.12) et la fonctionnelle (1.3.1). On obtient alors pour le système HMF Poisson un résultat analogue à la Proposition 2.7 de [65], à savoir une propriété de monotonie du Hamiltonien vis-à-vis de la transformation F^ϕ.

Lemme 1.3.9. *On a les inégalités suivantes:*

(1) Pour tout $\phi \in H^2([0, 2\pi])$ tel que $\phi(0) = \phi(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, on a $\mathcal{H}(F^\phi) \leq \mathcal{J}(\phi)$.

(2) Pour tout $f \in E_j$ avec $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ et $\|j(f)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$, on a

$$\mathcal{I}(M_1, M_j) \leq \mathcal{H}(F^{\phi_f}) \leq \mathcal{J}(\phi_f) \leq \mathcal{H}(f).$$

De plus, $\mathcal{I}(M_1, M_j) = \mathcal{J}_0$.

Ebauche de la preuve du Théorème 1.3.7: La première étape consiste à montrer l'existence des minimiseurs. On considère une suite minimisante $(f_n)_n$ du problème variationnel à deux contraintes (1.3.9). Par des arguments de compacité faible (Théorème de Dunford-Pettis), on montre que cette suite converge faiblement dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ vers une fonction $\bar{f}$. Puis, on introduit le suite $(F^{\phi_{f_n}})_n$ définie par le Lemme 1.3.8. Grâce au Lemme 1.3.9, on montre que la suite $(F^{\phi_{f_n}})_n$ est elle aussi une suite minimisante du problème variationnel à deux contraintes (1.3.9). Par des arguments de compacité élémentaires, on montre que cette suite converge fortement dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ vers la fonction $F^{\bar{\phi}}$ dont l'expression est donnée par

$$F^{\bar{\phi}}(\theta, v) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta) - \bar{\lambda}}{\bar{\mu}}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v,$$

où $\bar{\phi}$ est le potentiel associé à la fonction $\bar{f}$ et $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ est l'unique couple tel que

$$(\|F^{\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1}, \|j(F^{\bar{\phi}})\|) = (M_1, M_j).$$

La fonction $F^{\bar{\phi}}$ vérifie les deux contraintes et est donc un bon candidat pour être minimiseur de (1.3.9). En utilisant les inégalités classiques sur les propriétés de semi-continuité inférieure des fonctions convexes, voir [59], on obtient que la fonction $F^{\bar{\phi}}$ est effectivement un minimiseur de (1.3.9). On a, à ce stade, montré l'existence d'un minimiseur mais ce n'est pas *a priori* un état stationnaire du système HMF (1.1.3) avec potentiel de Poisson (1.1.7). L'étape 2 de cette preuve consiste donc à montrer que $F^{\bar{\phi}}$ est un état stationnaire et pour cela, il suffit de montrer que $\phi_{F^{\bar{\phi}}} = \bar{\phi}$. Les arguments clés pour montrer cette égalité sont le Lemme 1.3.9 et la relation suivante

$$\mathcal{J}(\phi) = \mathcal{H}(F^{\phi}) + \frac{1}{2}\|\phi'_{F^{\phi}} - \phi'\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Il ne nous reste alors plus qu'à obtenir les équations d'Euler-Lagrange des minimiseurs. On doit montrer que tout minimiseur $\bar{f}$ s'écrit $F^{\phi_{\bar{f}}}$. La technique employée est la même que dans le cas une contrainte et repose sur le Lemme 1.3.9 et l'égalité suivante

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{J}(\phi_f) - \mu \iint (j(f) - j(F^{\phi_f}) - j'(F^{\phi_f})(f - F^{\phi_f}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

Pour finir, la régularité du potentiel ϕ_f s'obtient en utilisant des injections de Sobolev. □

Vient ensuite l'étape de la séparation des minimiseurs. Cette étape est plus compliquée que dans le cas une contrainte. Pour le cas deux contraintes, on a seulement réussi à obtenir une unicité locale, à translation près, sous condition d'équimesurabilité. Le résultat obtenu fait l'objet du Lemme 1.3.10 suivant. On rappelle qu'un état stationnaire f_0 est dit homogène si $\phi_{f_0} = 0$ et inhomogène si $\phi_{f_0} \neq 0$.

Lemme 1.3.10 (Unicité locale des minimiseurs sous condition d'équimesurabilité)**.** *Soit $f_0 \in E_j$ un état stationnaire de (1.1.3) qui minimise (1.3.9). Il s'écrit sous la forme (1.3.10) avec $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. On a les cas suivants:*

- *f_0 est un état stationnaire homogène, alors c'est l'unique minimiseur de (1.3.9) sous condition d'équimesurabilité.*
- *f_0 est un état stationnaire inhomogène, alors il existe $\delta_0 >$ tel que pour tout $f \in E_j$ état stationnaire inhomogène de (1.1.3) et minimiseur de (1.3.9) équimesurable à f_0 qui s'écrit sous la forme (1.3.10) avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$, on a*
  - *soit $\mu_0 \neq \mu$ et $||\mu| - |\mu_0|| > \delta_0$,*
  - *soit $\mu_0 = \mu$ et $f = f_0$ à une translation près en θ.*

La preuve du Lemme 1.3.10 est assez technique et nécessite l'introduction de trois lemmes intermédiaires. Tout cela est détaillé dans la Partie 2.3.3.1 du Chapitre 2. Cette unicité locale suffit pour obtenir par la suite la stabilité des états stationnaires minimiseurs de (1.3.9). Ce dernier résultat fait l'objet du Théorème 1.3.11 suivant.

Théorème 1.3.11 (Stabilité orbitale des états stationnaires)**.** *Soient $M_1, M_j > 0$, tout état stationnaire f_0 de (1.1.3) qui minimise (1.3.9) est* ***orbitalement stable*** *sous le flot de (1.1.3). Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que l'assertion suivante soit vraie. Considérons $f_{init} \in E_j$ vérifiant $\|(1 + v^2)(f_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$ et*

$|\iint j(f_{init}) - \iint j(f_0)| < \eta(\varepsilon)$. *Soit $f(t)$ une solution faible globale de (1.1.3) définie sur $\mathbb{R}_+$ de donnée initiale f_{init} telle que les fonctions Casimir sont préservées durant l'évolution et telle que $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. Alors il existe une translation $\theta(.)$ à valeurs dans $[0, 2\pi]$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, on ait*

$$\|(1+v^2)(f(t,\theta+\theta(t),v) - f_0(\theta,v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

La preuve de la stabilité orbitale à proprement dite est un peu plus délicate que celle dans le cas une contrainte. En effet, on ne dispose, dans le cas deux contraintes, que d'une unicité locale. Néanmoins, elle s'obtient de manière classique en raisonnant par l'absurde, voir Partie 2.3.3.2. Quant à la compacité des suites minimisantes, elle s'obtient par l'intermédiaire de la transformation F^ϕ introduite dans le Lemme 1.3.8 et des propriétés de monotonie du Hamiltonien vis-à-vis de cette transformation.

1.3.3. **Problème de minimisation à un nombre infini de contraintes.** Toujours dans l'optique de nous rapprocher de notre projet initial qui était de montrer la stabilité de **tous** les états stationnaires, fonctions décroissantes de leur énergie microscopique, on va de nouveau tenter d'agrandir la classe des états stationnaires en considérant cette fois-ci un problème variationnel avec *un nombre infini de contraintes.* Cependant, cette classe d'états stationnaires étant très étendues, nous ne sommes pas certains de conserver l'unicité des minimiseurs sous condition d'équimesurabilité. Nous n'avons, par ailleurs, pas réussi à obtenir ne serait-ce qu'une unicité locale. C'est pourquoi le résultat final que nous obtenons est la stabilité orbitale de **l'ensembl**e des états stationnaires minimiseurs du problème variationnel à un nombre infini de contraintes (1.3.14).

Dans la Partie 2.4 du Chapitre 2 de cette thèse, nous montrons la stabilité orbitale de l'ensemble des états stationnaires qui sont minimiseurs d'un problème variationnel à une infinité de contraintes. Dans cette partie, nous considérons l'espace d'énergie suivant

$$\mathcal{E} = \{f \geq 0, \|(1+v^2)f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty, \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty\}. \tag{1.3.13}$$

Soit $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. On notera $Eq(f_0)$ l'ensemble des fonctions équimesurables à f_0. Le problème variationnel que l'on considère est le suivant

$$H_0 = \inf_{f\in Eq(f_0), f\in\mathcal{E}} \mathcal{H}(f). \tag{1.3.14}$$

C'est bien un problème avec un nombre infini de contraintes puisque la condition d'équimesurabilité sur f est équivalente au fait que f a les mêmes fonctions Casimir que f_0:

$$\|j(f)\|_{\mathrm{L}^1} = \|j(f_0)\|_{\mathrm{L}^1}$$

pour toute fonction j continue telle que $j(0) = 0$. Dans cette partie, nous adoptons une nouvelle définition des suites minimisantes.

Définition 1.3.12. *On dira que la suite $(f_n)_n$ est une suite minimisante de (1.3.14) si $(f_n)_n$ est uniformément bornée et*

$$\mathcal{H}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H_0 \quad \text{et} \quad \|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tout d'abord, nous montrons l'existence de minimiseurs au problème variationnel (1.3.14) puis nous montrons que ces minimiseurs sont effectivement des états stationnaires du système HMF (1.1.3) avec potentiel de Poisson (1.1.7). Ces résultats font l'objet du Théorème 1.3.13, démontré à la Partie 2.4.2.2 du Chapitre 2.

Théorème 1.3.13. *L'infimum (1.3.14) est fini et est atteint en un minimiseur $\bar{f} \in \mathcal{E}$ qui est un état stationnaire de (1.1.3).*

L'idée de preuve du Théorème 1.3.13 est similaire aux cas 1 et 2 contraintes. On a besoin d'introduire une transformation qui préserve les contraintes et qui, vis-à-vis de laquelle le Hamiltonien, possède des propriétés de monotonie. Dans le cas d'un nombre infini de contraintes, nous allons utiliser les réarrangements généralisés. En effet, pour tout ϕ, le réarrangement généralisé $f_0^{*\phi}$, défini dans le Lemme 1.2.2, est équimesurable à f_0. De plus, aux vues des résultats obtenus sur les réarrangements généralisés dans la Propositon 2.7 de [65], on a bon espoir d'obtenir les propriétés de monotonie attendues. Pour obtenir ces propriétés de monotonie, on introduit un second problème variationnel
(1.3.15)

$$\mathcal{J}^0_{f^*} = \inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0} \mathcal{J}_{f^*}(\phi) \text{ avec } \mathcal{J}_{f^*}(\phi)=\iint \left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right) f^{*\phi}(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta.$$

Notons, qu'on retrouve la même fonctionnelle (1.3.1) qu'on voulait initialement introduire. On obtient alors les résultats de monotonie suivants, regroupés dans le Lemme 1.3.14.

Lemme 1.3.14 (Propriétés de monotonie de $\mathcal{H}$ par rapport à la transformation $f^{*\phi}$)**.** *On a les inégalités suivantes:*

(1) Soit $f \in \mathcal{E}$, pour tout $\phi \in H^2([0,2\pi])$ tel que $\phi(0) = \phi(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, on a $\mathcal{H}(f^{*\phi}) \leq \mathcal{J}_{f^*}(\phi)$.

(2) Pour tout $f \in \mathcal{E}$, $H_0 \leq \mathcal{H}(f^{*\phi_f}) \leq \mathcal{J}_{f^*}(\phi_f) \leq \mathcal{H}(f)$ où H_0 est défini par (1.3.14). De plus, $H_0 = \mathcal{J}^0_{f^*}$.

Nous avons alors tous les outils pour démontrer le Théorème 1.3.13. La preuve est similaire à celle du cas deux contraintes en remplaçant la transformation F^ϕ par les réarrangements généralisés.

Le dernier résultat de cette partie est la stabilité orbitale de l'ensemble des états stationnaires minimiseurs de (1.3.14). En effet, rappelons que l'absence d'unicité locale nous empêche d'obtenir la stabilité orbitale de chaque état stationnaire. Ce dernier résultat fait l'objet du Théorème 1.3.15.

Théorème 1.3.15. *Soit $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. **L'ensemble** des états stationnaires de (1.1.3) qui minimisent (1.3.14) est **orbitalement stable** sous le flot de (1.1.3). Plus précisément, étant donné un minimiseur f_{i_0} de (1.3.14), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que l'assertion suivante soit vraie. Considérons une donnée initiale $f_{init} \in \mathcal{E}$ vérifiant $\|(1+v^2)(f_{init} - f_{i_0})\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$. Soit $f(t)$ une solution faible globale de (1.1.3) définie sur $\mathbb{R}_+$ de donnée initiale f_{init} telle que les fonctions Casimir sont préservées durant l'évolution*

et telle que $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. *Alors il existe* f_{i_1} *minimiseur de (1.3.14) et une translation* $\theta(.)$ *à valeurs dans* $[0, 2\pi]$ *telle que* $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, *on ait*

$$\|(1+v^2)(f(t,\theta+\theta(t),v) - f_{i_1}(\theta,v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

Ebauche de preuve du Théorème 1.3.15: La preuve de stabilité orbitale, proprement dite, se fait de manière classique en raisonnant par l'absurde. La difficulté de la preuve du Théorème 1.3.15 est de montrer la compacité des suites minimisantes. On a, pour cela, besoin d'un lemme intermédiaire qui repose entièrement sur les propriétés des réarrangements généralisés. Le lemme est le suivant

Lemme 1.3.16. *Soit* $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ *et soit* $(f_n)_n$ *une suite minimisante de (1.3.14). Alors* $(f_n)_n$ *possède une limite faible* $\bar{f}$ *dans* $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. *Notons* $\bar{\phi} := \phi_{\bar{f}}$, *on a*

$$\int_0^{\|f_0\|_{\mathrm{L}^\infty}} B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t))\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

où

$$\text{(1.3.16)} \qquad \begin{cases} \beta_{f,g}(t) = |\{(\theta,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R} : f(\theta,v) \leq t < g(\theta,v)\}|, \\ B_{\bar{\phi}}(\mu) = \iint_{\{a_{\bar{\phi}}(\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta))<\mu\}} \left(\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta)\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \end{cases}$$

La démonstration de ce lemme repose sur des techniques introduites dans [60] et est détaillée dans à la fin de la Partie 2.4.3.1 du Chapitre 2. Voyons maintenant comment démontrer la compacité des suites minimisantes grâce à ce lemme. Soit $(f_n)_n$ une suite minimisante de (1.3.14), le but est de montrer que

$$\|f_n - f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, on utilise des techniques sur les réarrangements introduites dans [60], en particulier, on utilise l'égalité suivante établie dans la preuve du Théorème 1 de la Partie 2.3 de [60]

$$\text{(1.3.17)} \qquad \|f_n - f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} = 2\int_0^{+\infty} \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)\mathrm{d}t + \|f_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$$

où $\beta_{f,g}$ est défini par (1.3.16). Le second terme de (1.3.17) tend vers 0 par définition des suites minimisantes. Pour obtenir, la limite forte L^1, il nous suffit donc de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela s'obtient en appliquant le Lemme 1.3.16 et en exploitant la convexité de $B_{\bar{\phi}}$. □

De cette preuve de compacité des suites minimisantes, on peut déduire l'expression des états stationnaires de (1.1.3) qui minimisent (1.3.14). En effet, on a prouvé que toute suite

minimisante $(f_n)_n$ convergeait vers un minimiseur $\bar{f}$ dans $\mathcal{E}$ qui satisfait $\bar{f} = f_0^{*\bar{\phi}}$. Ainsi tout minimiseur de (1.3.14) a l'expression suivante

$$\bar{f} = f_0^{\#}\left(a_{\bar{\phi}}\left(\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta)\right)\right).$$

1.4. Schémas numériques pour les modèles HMF

Dans le Chapitre 3 de cette thèse, nous nous proposons de construire des schémas numériques pour les systèmes HMF conservant exactement des états stationnaires de la forme:

$$f_0(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta)\right) \tag{1.4.1}$$

avec F une fonction décroissante.

De nombreuses méthodes existent déjà pour résoudre des systèmes de type Vlasov-Poisson. Pour discrétiser en temps ces systèmes, on utilise des méthodes de splitting [40, 55] entre les parties linéaire et non linéaire de l'équation de Vlasov. Ces méthodes appliquées aux équations de type Vlasov ont largement été étudiées et de nombreux résultats de convergence ont été obtenus [14, 24, 39]. Puis, pour résoudre numériquement les parties linéaire et non linéaire de l'équation de Vlasov, on peut utiliser des méthodes spectrales [22, 23, 75, 81] ou semi-lagrangiennes [14, 24, 25, 35, 39]. Ces différentes méthodes s'adaptent très bien à la résolution numérique des systèmes HMF. La description et l'adaptation de ces méthodes au cas des systèmes HMF sont décrites dans la Partie 3.1 du Chapitre 3. Notons également que les systèmes HMF sont particulièrement agréables pour effectuer des simulations numériques du fait que les variables $(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Une étude concernant l'effet d'amortissement Landau numérique pour les solutions numériques du système HMF cosinus a été menée par Faou, Horsin et Rousset dans [41].

Les schémas évoqués dans le paragraphe ci-dessus ne préservent pas exactement les états stationnaires de la forme (1.4.1). Commençons, par réécrire le schéma HMF sous la forme condensée suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + T_{\phi_f} f = 0, \quad \text{avec} \quad T_{\phi_f} f = v\partial_\theta f - \partial_\theta \phi_f \partial_v f, \\ f(0, \theta, v) = f_{init}(\theta, v). \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Remarquons, qu'au niveau continu, un état stationnaire f_0 de la forme (1.4.1) vérifie

$$T_{\phi_{f_0}} f_0 = 0.$$

Pour les schémas classiques évoqués précédemment, la discrétisation $T_{\phi_f}^{\Delta\theta,\Delta v}$ de l'opérateur T_{ϕ_f} ne vérifie pas $T_{\phi_{f_0}}^{\Delta\theta,\Delta v} f_0 = 0$. Nous verrons dans les Parties 3.5 et 3.8 que cela peut poser problème si l'on étudie, par exemple, la stabilité d'un état stationnaire f_0. C'est pourquoi

il peut être intéressant de disposer d'un schéma numérique qui préserve exactement un ou des états stationnaires donnés.

1.4.1. **Schémas conservant exactement un état stationnaire donné.** Nous commençons par construire un schéma qui préserve exactement un état stationnaire f_0 donné. Soit f_0 un état stationnaire de HMF (cosinus ou Poisson) donné et $\phi_0 := \phi_{f_0}$ le potentiel associé. Le schéma que nous construisons est basé sur une décomposition micro-macro. Le principe de la décomposition micro-macro a abondamment été exploité pour construire des schémas préservant l'asymptotique (Asymptotic preserving schemes) [58, 67, 71]. L'idée d'utiliser une telle décomposition pour construire un schéma qui préserve un état stationnaire a été introduite dans [45, 82]. Nous décomposons la fonction de distribution f comme suit

$$f = f_0 + g.$$

Injectons cette décomposition dans l'équation (1.4.2). On obtient, f_0 ne dépendant pas du temps,

$$\partial_t g + T_{\phi_f}(f_0 + g) = 0. \tag{1.4.3}$$

De plus, f_0 étant un état stationnaire, on a $T_{\phi_0} f_0 = 0$. L'équation (1.4.3) se réécrit alors

$$\partial_t g + (T_{\phi_f} - T_{\phi_0})(f_0) + T_{\phi_f} g = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme simplifiée suivante:

$$\partial_t g - (\partial_x \phi_g)\partial_v f_0 + T_{\phi_f} g = 0.$$

On résout cette équation avec une méthode de splitting en temps composée des trois étapes élémentaires suivantes:

(1) $\partial_t g = \partial_x \phi_g \partial_v f_0$,
(2) $\partial_t g + v\partial_x g = 0$,
(3) $\partial_t g - \partial_x \phi_f \partial_v g = 0$.

La mise en oeuvre numérique de ce schéma de splitting est détaillée dans la Partie 3.4.2. Dans cette même partie, nous mettons en évidence numériquement que le schéma ainsi construit est d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace et vitesse.

Comme nous le verrons dans la Partie 3.2.1, ce schéma conserve exactement l'état stationnaire f_0, excepté dans le cas où f_0 est l'état stationnaire nul. Le schéma, que nous présentons dans la partie suivante, préserve un état stationnaire donné ainsi que l'état stationnaire nul.

1.4.2. **Schémas conservant exactement deux états stationnaires donnés dont l'état stationnaire nul.** Soit f_0 un état stationnaire de HMF (cosinus ou Poisson) donné et $\phi_0 := \phi_{f_0}$ le potentiel associé. Comme le schéma précédent, la construction est basée sur une décomposition micro-macro. La fonction de distribution f se décompose comme suit:

$$f = \underline{f} + g, \tag{1.4.4}$$

avec $\underline{f} = \Pi_0 f := \frac{\iint f}{\iint f_0} f_0$. On remarque que l'opérateur Π_0 est un projecteur et que $\underline{f}$ ne dépend pas du temps. En effet, la norme 1 de f est conservée au cours du temps par le système HMF. Cependant, notons que $\underline{f}$ n'est pas un état stationnaire du système HMF mais qu'il vérifie

$$T_{\phi_0} \underline{f} = 0 \tag{1.4.5}$$

car $T_{\phi_0}(\lambda f_0) = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Injectons la décomposition (1.4.4) dans l'équation (1.4.2), on obtient

$$\partial_t g + T_{\phi_f}(\underline{f} + g) = 0.$$

Grâce à l'égalité (1.4.5), l'équation se réécrit

$$\partial_t g + (T_{\phi_f} - T_{\phi_0})\underline{f} + T_{\phi_f} g = 0.$$

On peut encore simplifier l'équation comme suit

$$\partial_t g - \partial_x(\underline{\phi} + \phi_g - \phi_0)\partial_v \underline{f} + T_{\phi_f} g = 0,$$

où $\underline{\phi} = \phi_{\underline{f}}$. On résout alors cette équation avec une méthode de splitting en temps composée des trois étapes élémentaires suivantes:

(1) $\partial_t g = \partial_x(\underline{\phi} + \phi_g - \phi_0)\partial_v f_0$,
(2) $\partial_t g + v\partial_x g = 0$,
(3) $\partial_t g - \partial_x \phi_f \partial_v g = 0$.

Nous verrons dans la Partie 3.4.2, que comme le schéma qui préserve un état stationnaire donné; ce schéma, qui en préserve deux, est d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace et vitesse.

1.4.3. **Comparaison du schéma de splitting semi-lagrangien dit schéma classique avec les schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires donnés.** L'utilisation des schémas préservant exactement des états stationnaires donnés est particulièrement intéressante pour conserver les propriétés de stabilité orbitale de la solution. Par exemple, donnons-nous un état stationnaire du système HMF cosinus, de type Maxwell-Boltzmann:

$$f_0(\theta, v) = \alpha \exp\left(-\beta\left(\frac{v^2}{2} - M_0 \cos\theta\right)\right),$$

avec α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 1$. On choisit le paramètre β de façon à ce qu'il existe $M_0 > 0$. L'existence de tels états stationnaires en fonction du paramètre β est discutée à la Partie 3.3.1.2. De plus, comme démontré dans la Partie 4.6.2 de [57], dès qu'il existe $M_0 > 0$, l'état stationnaire f_0 associé est orbitalement stable. On choisit comme donnée initiale pour notre schéma une perturbation de l'état stationnaire f_0:

$$f_{init}(\theta, v) = f_0(\theta, v)(1 + \varepsilon \cos\theta).$$

On observe alors l'évolution au cours du temps de la différence des énergies cinétiques:

$$\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}. \tag{1.4.6}$$

L'état stationnaire f_0 étant orbitalement stable, cette quantité reste bornée au cours du temps. Les courbes portées par la Figure 2 montrent que le schéma classique ne conserve pas la quantité (1.4.6) contrairement à ce qui est attendu. Les schémas que nous avons construits conservent quant à eux la propriété de stabilité orbitale.

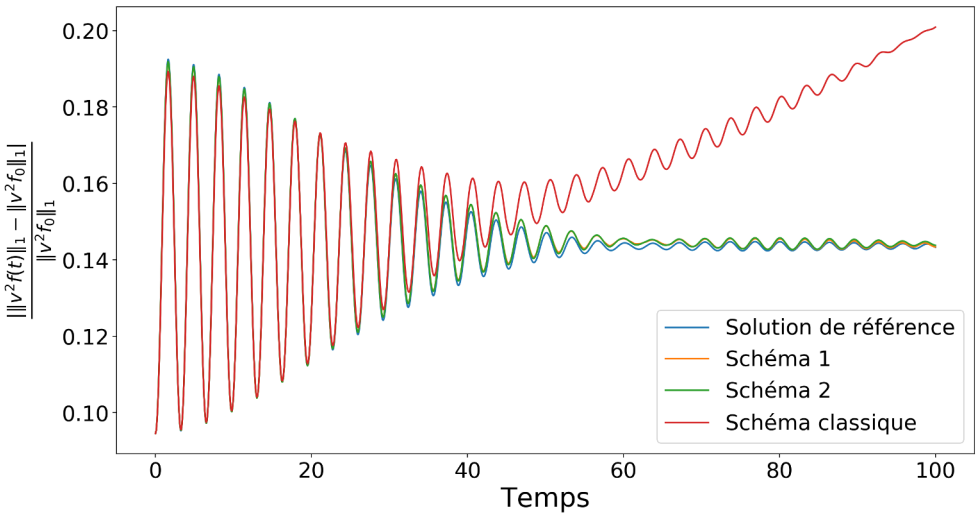


FIGURE 2. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 100]$.

Les détails de cette simulation numérique ainsi que des tests supplémentaires sont présentés dans la Partie 3.5.

1.4.4. **Schéma conservant exactement tous les états stationnaires de la forme (1.4.1).** Dans les Parties 3.2.1 et 3.2.2, étant donné un état stationnaire f_0, sont construits des schémas qui conservent exactement cet état stationnaire. Comme entrevu sur la Figure 2 et détaillé dans la Partie 3.5, ces schémas se comportent mieux que les schémas classiques en terme de préservation de la stabilité de l'état stationnaire f_0. Cependant, ces schémas présentent l'inconvénient de devoir connaître au préalable l'état stationnaire qu'on veut préserver. Or dans la pratique, il peut être utile de préserver des états stationnaires qu'on ne connaît pas à l'avance. C'est pourquoi, il est intéressant de construire un schéma qui conserve tous les états stationnaires de la forme

$$f(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right). \tag{1.4.7}$$

Pour construire un schéma qui préserve de tels états stationnaires, il est nécessaire de choisir une définition numérique des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi$. Pour cela, pour une fonction $\phi : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ donnée, est construit numériquement, dans la Partie 3.6.1, un projecteur L^2-orthogonal sur l'espace $F_\phi = \{f(\theta, v) = h(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta))\}$.

1.4.4.1. *Construction du projecteur.* Pour commencer, on identifie $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ à $[0,2\pi]\times[-v_{\max},v_{\max}]$. Puis, on effectue un maillage uniforme de l'espace $[0,2\pi]\times[-v_{\max},v_{\max}]$. On définit deux suites

- $(\theta_i)_{0\leq\ i\leq I-1}$ telle que $\theta_i = i\Delta\theta$ où $\Delta\theta = \frac{2\pi}{I}$,
- $(v_j)_{0\leq j\leq J-1}$ telle que $v_j = -v_{\max} + j\Delta v$ où $\Delta v = \frac{2v_{\max}}{J}$.

On notera $f_{i,j} = f(\theta_i, v_j)$. Puis, posons pour $\theta\in[0,2\pi]$ et $v\in[-v_{\max},v_{\max}]$

$$e = \frac{v^2}{2} + \phi(\theta).$$

On remarque que $-\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq e \leq \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}$. On discrétise à pas constant Δe l'intervalle $[-\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}, \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}]$. On construit alors une suite

$$(e_k)_{0\leq k\leq K-1} \quad \text{telle que} \quad e_k = -\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} + k\Delta e.$$

Puis, on définit pour $0\leq k\leq K-1$ les sous-intervalles I_k suivants:

$$I_k = \left[-\frac{\Delta e}{2} + e_k, e_k + \frac{\Delta e}{2}\right[.$$

Définition 1.4.1. *On dira qu'une fonction f intégrable est, numériquement, une fonction de $\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)$ si il existe une suite $(f_k)_{0\leq k\leq K-1}$ telle que f s'écrive*

$$f(\theta,v) = \sum_{k=0}^{K-1} f_k \mathbb{1}_{I_k}\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right).$$

Notons F_ϕ l'ensemble des fonctions qui sont numériquement des fonctions de $\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le projecteur sur les fonctions de $\frac{v^2}{2}+\phi$.

Définition 1.4.2. *Soit $\phi : [0,2\pi]\mapsto\mathbb{R}$ une fonction bornée et soit f intégrable. On note $f_{i,j} = f(\theta_i, v_j)$ son échantillonnage sur le maillage uniforme de $[0,2\pi]\times[-v_{\max},v_{\max}]$. On définit alors son projeté sur les fonctions de $\frac{v^2}{2}+\phi$ par*

$$\Pi_\phi^{\Delta e} f(\theta,v) = \sum_{k=0}^{K-1} f_k \mathbb{1}_{I_k}\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right) \quad \textit{pour} \quad (\theta,v)\in[0,2\pi]\times[-v_{\max},v_{\max}]$$

avec

$$f_k = \frac{1}{card\{(i,j), \frac{v_j^2}{2}+\phi(\theta_i)\in I_k\}} \sum_{\{(i,j),\frac{v_j^2}{2}+\phi(\theta_i)\in I_k\}} f_{i,j}.$$

On vérifie aisément que l'opérateur $\Pi_\phi^{\Delta e}$ ainsi défini possède les propriétés suivantes.

Proposition 1.4.3. *L'opérateur $\Pi_\phi^{\Delta e}$ vérifie:*

- *$\Pi_\phi^{\Delta e}$ est un projecteur i.e. $\Pi_\phi^{\Delta e}\circ\Pi_\phi^{\Delta e} = \Pi_\phi^{\Delta e}$,*
- *$\Pi_\phi^{\Delta e}$ est numériquement une fonction de $\frac{v^2}{2}+\phi$,*

- $\Pi_{\phi}^{\Delta e}\big|_{\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})}$ *est un projecteur* L^2*-orthogonal sur le sous-espace* $F_\phi \cap \mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ *de* $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$*,*
- $\Pi_{\phi}^{\Delta e}\big|_{\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})}$ *est un opérateur autoadjoint sur* $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$*.*

Grâce au projecteur construit, nous sommes en mesure de construire un schéma qui préserve tous les états stationnaires de la forme (1.4.7).

1.4.4.2. *Principe du schéma.* Le schéma numérique que nous proposons est basé sur une décomposition micro-macro. On décompose la fonction de distribution f en

$$f = \Pi_{\phi_f}^{\Delta e} f + g \quad \text{avec} \quad \Pi_{\phi_f}^{\Delta e} g = 0.$$

Remarquons dans un premier temps que l'équation du système (1.4.2) est équivalente à l'équation suivante

$$\partial_t f + T_{\phi_f}(I - \Pi_{\phi_f}^{\Delta e}) f = 0.$$

On souhaite alors la résoudre numériquement sur un petit intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. Pour cela, on fige ϕ_f à ϕ_{f^n}, on veut donc résoudre

$$\partial_t f + T_{\phi_{f^n}}(I - \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e}) f = 0. \tag{1.4.8}$$

Appliquant le projecteur $\Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e}$ à l'équation (1.4.8), on obtient $\partial_t(\Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} f) = 0$. En effet, on a pour une fonction $h \in \mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, $(.,.)$ désignant le produit scalaire de $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
(\Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} T_{\phi_{f^n}} g, h) &= (T_{\phi_{f^n}} g, \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} h) \quad \text{car } \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} \text{ est autoadjoint,} \\
&= -(g, T_{\phi_{f^n}} \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} h) \quad \text{après des intégrations par parties,} \\
&= 0 \quad \text{car } \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} h \in F_{\phi_{f^n}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que g vérifie l'équation suivante

$$\partial_t g + T_{\phi_{f^n}} g = 0.$$

Cette équation se résout numériquement, facilement. On obtient alors g^{n+1} et on pose

$$f^{n+1} = \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e} f^n + g^{n+1}.$$

Le schéma ainsi construit possède les propriétés attendues. En effet, commençons par introduire deux définitions.

Définition 1.4.4 (Etats stationnaires analytiques, états stationnaires numériques)**.** *On distingue deux types d'états stationnaires.*

- *On appelle état stationnaire analytique, un état stationnaire de la forme (1.4.7) dont on connaît l'échantillonnage sur un maillage uniforme de la grille* $[0,2\pi]\times[-v_{\max}, v_{\max}]$*.*
- *On appelle état stationnaire numérique, un état stationnaire* f_0 *vérifiant*

$$\Pi_{\phi_{f_0}}^{\Delta e} f_0 = f_0$$

où $\Pi_{\phi}^{\Delta e}$ *est le projecteur numérique construit dans la Partie 3.6.1.*

On est alors en mesure d'énoncer le théorème suivant.

Proposition 1.4.5. *Le schéma numérique ainsi défini, qu'on appellera schéma avec projecteur, préserve exactement les états stationnaires numériques.*

Pour mettre en oeuvre numériquement ce schéma, il est nécessaire de savoir construire, étant donné un état stationnaire analytique, l'état stationnaire numérique associé. Cette construction est détaillée dans la Partie 3.7.1. De plus, nous vérifierons sur des exemples, dans la Partie 3.7.2, que l'état stationnaire numérique ainsi construit est consistant avec l'état stationnaire analytique. La Partie 3.8 présente, quant à elle, plusieurs simulations numériques illustrant la bonne conservation de la propriété de stabilité pour ce schéma par rapport au schéma classique (splitting + semi-lagrangien).

Les trois schémas que nous avons construits sont particulièrement adaptés pour déterminer numériquement la stabilité ou non d'un état stationnaire donné. Dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous avons démontré que les états stationnaires de HMF Poisson qui étaient des minimiseurs du problème de minimisation à une contrainte (1.3.2) étaient orbitalement stables. Ce résultat ne nous permet, malheureusement, pas de conclure sur la stabilité des états stationnaires qui ne sont pas minimiseurs de (1.3.2). C'est pourquoi, il peut être intéressant d'étudier numériquement la stabilité des états stationnaires du système HMF Poisson. Dans la Partie 3.9, nous étudions numériquement la stabilité des états stationnaires de HMF Poisson de la forme $f_0(\theta, v) = F(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta))$ avec F une distribution de Maxwell-Boltzmann i.e. $F(z) = \alpha e^{-\beta z}$. Nous utilisons pour cela le schéma numérique qui préserve un état stationnaire donné ainsi que l'état stationnaire nul. Notons qu'il n'existe pas à ce jour de résultats généraux sur l'existence d'états stationnaires pour le système HMF Poisson. C'est pourquoi, nous avons aussi étudié numériquement l'existence d'états stationnaires de type Maxwell-Boltzmann dans la Partie 3.3.2.

CHAPITRE 2

Stable ground states for the HMF Poisson model

This chapter is the subject of the following article :
M. Fontaine, M. Lemou and F. Méhats, *Stable ground states for the HMF Poisson model*, accepted for publication in *Annales de l'IHP*.

RÉSUMÉ. Dans cet article, on prouve la stabilité orbitale non linéaire d'une grande classe d'états stationnaires solutions du système Hamiltonian Mean Field (HMF) avec potentiel de Poisson. Ces états stationnaires sont des minimiseurs à *une, deux ou une infinité de contraintes* d'une certaine fonctionnelle définie sur un espace d'énergie. La singularité du potentiel de Poisson nous empêche d'appliquer directement la technique générale développée dans [60, 65], qui est basée sur des techniques de réarrangements généralisés, et qui a, récemment, été étendue au cas plus usuel du potentiel en cosinus [61]. Notre approche, dans cet article, est basée sur des techniques variationnelles. Cependant, le caractère borné du domaine nous empêche d'utiliser les invariances habituelles d'échelles, qui sont, en général, très importantes dans l'analyse de problèmes variationnels. Pour remplacer ces arguments d'échelles, on introduit une nouvelle transformation qui, bien que spécifique à notre problème, demeure dans l'esprit des outils de réarrangements introduits dans les références mentionnées ci-avant. En particulier, ces transformations permettent l'ajout d'un nombre arbitraire de contraintes et aboutissent à un résultat de stabilité pour une grande classe d'états stationnaires.

ABSTRACT. In this paper we prove the nonlinear orbital stability of a large class of steady states solutions to the Hamiltonian Mean Field (HMF) system with a Poisson interaction potential. These steady states are obtained as minimizers of an energy functional under *one, two or infinitely many constraints.* The singularity of the Poisson potential prevents from a direct run of the general strategy in [60, 65] which was based on generalized rearrangement techniques, and which has been recently extended to the case of the usual (smooth) cosine potential [61]. Our strategy is rather based on variational techniques. However, due to the boundedness of the space domain, our variational problems do not enjoy the usual scaling invariances which are, in general, very important in the analysis of variational problems. To replace these scaling arguments, we introduce new transformations which, although specific to our context, remain somehow in the same spirit of rearrangements tools introduced in the references above. In particular, these transformations allow for the incorporation of an arbitrary number of constraints, and yield a stability result for a large class of steady states.

2.1. Introduction and main results

2.1.1. **The HMF Poisson model.** The Hamiltonian mean-field (HMF) model [2, 76] describes the evolution of particles moving on a circle under the action of a given potential. The most popular model is the HMF system with an infinite range attractive cosine potential. Although this model has no direct physical relevance, it is commonly used in the physics literature as a toy model to describe some gravitational systems. In particular, it is involved in the study of non equilibrium phase transitions [3, 28, 80, 87], of travelling clusters [9, 94] or of relaxation processes [6, 31, 93]. Many results exist concerning the stability of steady states solutions to the HMF system with a cosine potential. Some are about the dynamics of perturbations of inhomogeneous steady states [7, 8] and others deal with the linear stability of steady states [10, 28, 79]. In [61], the nonlinear stability of inhomogeneous steady states that satisfy an explicit criterion is proved. In the case of homogeneous (i.e. with dependence in velocity only) steady states and a cosine interaction potential , a nonlinear Landau damping analysis has been investigated for the HMF model in Sobolev spaces [42].

There exist other kinds of potentials for the HMF model like the Poisson potential or the screened Poisson potential [30, 78]. In this paper, we study the orbital stability of ground states of a HMF model with a Poisson potential. This model is closer to the Vlasov-Poisson system than the HMF model with a cosine potential. The Poisson interaction potential is however more singular, which induces serious technical difficulties and prevent from a complete application of the strategy introduced in [65] for the Vlasov-Poisson system or in [61] for the HMF model with a cosine potential. For this reason, our analysis is based on variational methods. A general approach is introduced allowing to prove the nonlinear stability of a large class of steady states thanks to the study of variational problems with one, two or infinitely many constraints. Notice that, in our case, since the domain of the position is bounded and since the number of constraints may be infinite, scaling arguments like in [62, 66] cannot be used. New transformations will be introduced to bypass these technical difficulties.

The HMF Poisson system reads

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + v\partial_\theta f - \partial_\theta \phi_f \partial_v f = 0, \quad (t,\theta,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \\ f(t=0,\theta,v) = f_{init}(\theta,v) \geq 0, \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

where $\mathbb{T}$ is the flat torus $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ and $f = f(t,\theta,v)$ is the nonnegative distribution function. The self-consistent potential ϕ_f associated to a distribution function f is defined for $\theta \in \mathbb{T}$ by

$$\partial_\theta^2 \phi_f = \rho_f - \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi}, \qquad \rho_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta,v)\mathrm{d}v \tag{2.1.2}$$

or, equivalently,

$$\phi_f(\theta) = \int_0^{2\pi} W(\theta-\tilde{\theta})\rho_f(\tilde{\theta})\mathrm{d}\tilde{\theta}, \tag{2.1.3}$$

where the function W is defined on $\mathbb{R}$ by

$$W \text{ is } 2\pi\text{-periodic }, \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad W(\theta) = -\frac{\theta^2}{4\pi} + \frac{|\theta|}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Note that W has a zero average, is continuous on $\mathbb{R}$ and that ϕ_f is 2π-periodic with zero average : $\int_0^{2\pi} \phi_f(\theta) \mathrm{d}\theta = 0$.

Some quantites are invariant during the evolution:

- the Casimir functions: $\iint j(f(\theta, v)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v$, for any function $j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ such that $j(0) = 0$;
- the nonlinear energy:

$$\mathcal{H}(f) = \iint \frac{v^2}{2} f(\theta, v) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi_f'(\theta)^2 \mathrm{d}\theta; \tag{2.1.4}$$

- the total momentum: $\iint v f(\theta, v) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v$.

Moreover, the HMF system satisfies the Galilean invariance, that is, if $f(t, \theta, v)$ is a solution, then so is $f(t, \theta + v_0 t, v + v_0)$, for all $v_0 \in \mathbb{R}$.

In Section 2.2, we prove the orbital stability of stationary states which are minimizers of a one-constraint variational problem. It is obtained for two kinds of steady states: the compactly supported ones and the Maxwell-Boltzmann (non compactly supported) distributions [31]. In Section 2.3, we prove the orbital stability of compactly supported steady states which are minimizers of a two constraints problem. In particular, this covers the case of compactly supported steady states which are minimizers of a one constraint problem. Lastly, in Section 2.4, we prove the orbital stability of the set of all the minimizers of a problem with an infinite number of constraints. This set of minimizers contains the minimizers of one and two constraints problems. However, at this stage, our strategy only provides a collective stability result (stability of the set of minimizers) for the minimizers of this problem with infinite number of constraints, instead of the individual stability of each minimizer which is only obtained for the one and two constraints variational problems.

2.1.2. **Statement of the results.**

2.1.2.1. *One-constraint problem.* First, in Section 2.2, we will show the orbital stability of stationary states which are minimizers of the following variational problem

$$\mathcal{I}(M) = \inf_{f \in E_j, \|f\|_{\mathrm{L}^1} = M} \mathcal{H}(f) + \iint j(f(\theta, v)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v. \tag{2.1.5}$$

The constant $M > 0$ is given and E_j is the energy space:

$$E_j = \left\{ f \geq 0, \|(1 + v^2) f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty, \left| \iint j(f(\theta, v)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v \right| < +\infty \right\}, \tag{2.1.6}$$

where $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is either the function defined by $j(t) = t \ln(t)$ for $t > 0$ and $j(0) = 0$ or a function j satisfying the following assumptions

(H1) $j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$; $j(0) = j'(0) = 0$ and $j''(t) > 0$ for all $t > 0$,

(H2) $\lim_{t\to+\infty} \frac{j(t)}{t} = +\infty$.

Note that $j(t) = t\ln(t)$ satisfies (H2) but not (H1) since $j'(0) \neq 0$ in this case.

Definition 2.1.1. *We shall say that a sequence f_n converges to f in E_j and we shall write $f_n \xrightarrow{E_j} f$ if $\|(1+v^2)(f_n - f)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ and $\iint j(f_n(\theta,v))\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \iint j(f(\theta,v))\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v$.*

In our first result, we establish the existence of ground states for the HMF Poisson model (2.1.1) which are minimizers of the variational problem (2.1.5). This theorem will be proved in Section 2.2.1.2.

Theorem 2.1.2 (Existence of ground states)**.** *Let j be the function $j(t) = t\ln(t)$ or a function satisfying (H1) and (H2). We have*

(1) In both cases, the infimum (2.1.5) exists and is achieved at a minimizer f_0 which is a steady state of (2.1.1).

(2) If j satisfies (H1) and (H2), any minimizer f_0 of (2.1.5) is continuous, compactly supported, piecewise $\mathcal{C}^1$ and takes the form

$$f_0(\theta,v) = (j')^{-1}\left(\lambda_0 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_0}(\theta)\right)_+ \quad \text{for some } \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

The function $(.)_+$ is defined by $(x)_+ = x$ if $x \geq 0$, 0 else.

(3) If $j(t) = t\ln(t)$, any minimizer f_0 of (2.1.5) is a $\mathcal{C}^\infty$ function which takes the form

$$f_0(\theta,v) = \exp\left(\lambda_0 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_0}(\theta)\right) \text{ for some } \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

Our second result concerns the orbital stability of the above constructed ground states under the action of the HMF Poisson flow. But first and foremost, we need to prove the uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition. To do that, first recall the definition of the equimeasurability of two functions.

Definition 2.1.3. *Let f_1 and f_2 be two nonnegative functions in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. The functions f_1 and f_2 are said equimeasurable, if and only if, $\mu_{f_1} = \mu_{f_2}$ where μ_f denotes the distribution function of f, defined by*

$$\mu_f(s) = |\{(\theta,v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R} : f(\theta,v) > s\}|, \quad \text{for all } s \geq 0, \tag{2.1.7}$$

and $|A|$ stands for the Lebesgue measure of a set A.

Lemma 2.1.4 (Uniqueness of the minimizer under equimeasurability condition)**.** *Let f_1 and f_2 be two equimeasurable steady states of (2.1.1) which minimize (2.1.5) with $j(t) = t\ln(t)$ or with j given by a function satisfying (H1) and (H2). Then the steady states f_1 and f_2 are equal up to a shift in θ.*

This lemma will be proved in Section 2.2.2.1. Now, using the compactness of all the minimizing sequences of (2.1.5) (which will be obtained along the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2) and the uniqueness result given by Lemma 2.1.4, we can get the following stability result. It will be proved in Section 2.2.2.2.

Theorem 2.1.5 (Orbital stability of ground states)**.** *Consider the variational problem (2.1.5) with $j(t) = t\ln(t)$ or with j given by a function satisfying (H1) and (H2). In both cases, we have the following result. For all $M > 0$, any steady state f_0 of (2.1.1) which minimizes (2.1.5) is orbitally stable under the flow (2.1.1). More precisely for all $\varepsilon > 0$, there exists $\eta(\varepsilon) > 0$ such that the following holds true. Consider $f_{init} \in E_j$ satisfying $\|(1+v^2)(f_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$ and $|\iint j(f_{init}) - \iint j(f_0)| < \eta(\varepsilon)$. Let $f(t)$ be a weak global solution to (2.1.1) on $\mathbb{R}_+$ with initial data f_{init} such that the Casimir functions are preserved during the evolution and that $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. Then there exists a translation shift $\theta(.)$ with values in $[0, 2\pi]$ such that $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, we have*

$$\|(1+v^2)(f(t,\theta+\theta(t),v) - f_0(\theta,v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

2.1.2.2. *Two-constraints problem.* In Section 2.3, we will show the orbital stability of stationary states which are minimizers of the following variational problem

$$\mathcal{I}(M_1, M_j) = \inf_{\substack{f \in E_j \\ \|f\|_{\mathrm{L}^1} = M_1, \|j(f)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j}} \mathcal{H}(f) \tag{2.1.8}$$

where E_j is the same energy space as above and the function j satisfies (H1) and (H2) together with the following additional assumption

(H3) There exist $p, q > 1$ such that $p \leq \frac{tj'(t)}{j(t)} \leq q$, for t>0.

Note that j is a nonnegative function. The first result of this part is the following theorem which will be proved in Section 2.3.2.2.

Theorem 2.1.6 (Existence of ground states)**.** *Let j be a function satisfying (H1), (H2) and (H3). We have*

(1) The infimum (2.1.8) exists and is achieved at a minimizer f_0 which is a steady state of (2.1.1);

(2) Any steady state f_0 obtained as a minimizer of (2.1.8) is continuous, compactly supported, piecewise $\mathcal{C}^1$ and takes the form

$$f_0(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta) - \lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \quad \text{where } (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*; \tag{2.1.9}$$

(3) The associated density ρ_{f_0} is continuous and the associated potential ϕ_{f_0} is $\mathcal{C}^2$ on $\mathbb{T}$.

Since the existence of ground states is established, the natural second result is the uniqueness of these ground states. For the two constraints cases, we are only able to obtain a local uniqueness for the ground states under equimeasurability condition. A steady state f will be said to be homogeneous if $\phi_f = 0$ and inhomogeneous is $\phi_f \neq 0$. We have the following lemma which will be proved in Section 2.3.3.1.

Lemma 2.1.7 (Local uniqueness of the minimizer under equimeasurability condition)**.** *Let $f_0 \in E_j$ be a steady state of (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8). It can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. We have the following cases:*

- *f_0 is a homogeneous steady state. Then it is the only steady state minimizer of (2.1.8) under equimeasurability condition.*

- *f_0 is an inhomogeneous steady states.Then, there exists $\delta_0 > 0$ such that for all $f \in E_j$ inhomogeneous steady state of (2.1.1) and minimizer of (2.1.8) equimeasurable to f_0 which can be written as (2.1.9) with $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$, we have*
  - *either $\mu_0 \neq \mu$ and $||\mu_0| - |\mu|| > \delta_0$,*
  - *or $\mu_0 = \mu$ and $f_0 = f$ up to a translation shift in θ.*

Then, similarly to the one-constraint problem, we will show the following result concerning the orbital stability of the ground states under the action of the HMF Poisson flow. It will be proved in Section 2.3.3.2.

Theorem 2.1.8 (Orbital stability of ground states)**.** *Let $M_1, M_j > 0$. Then any steady state f_0 of (2.1.1) which minimizes (2.1.8) is orbitally stable under the flow (2.1.1). It means that given $\varepsilon > 0$, there exists $\eta(\varepsilon) > 0$ such that the following holds true. Consider $f_{init} \in E_j$ with $\|(1+v^2)(f_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$ and with $\left|\iint j(f_{init}) - \iint j(f_0)\right| < \eta(\varepsilon)$. Let $f(t)$ be a weak global solution to (2.1.1) on $\mathbb{R}_+$ with initial data f_{init} such that the Casimir functions are preserved during the evolution and that $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. Then there exists a translation shift $\theta(.)$ with values in $[0, 2\pi]$ such that $\forall t \in \mathbb{R}^*_+$, we have*

$$\|(1+v^2)(f(t, \theta + \theta(t), v) - f_0(\theta, v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

2.1.2.3. *Infinite number of constraints problem.* Finally, in Section 2.4, we will show the orbital stability of stationary states which are minimizers of a problem with an infinite number of constraints. In this Section, the energy space is the following

$$\mathcal{E} = \{f \geq 0, \|(1+v^2)f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty, \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty\}. \tag{2.1.10}$$

Let $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. We will denote by $Eq(f_0)$ the set of equimeasurable functions to f_0. The variational problem is

$$H_0 = \inf_{f \in Eq(f_0), f \in \mathcal{E}} \mathcal{H}(f). \tag{2.1.11}$$

This is a variational problem with infinitely many constraints since the equimeasurability condition on f is equivalent to say that f has the same casimirs as f_0: $\|j(f)\|_{L^1} = \|j(f_0)\|_{L^1}$, $\forall j$.

Definition 2.1.9. *We shall say that a sequence f_n converges to f in $\mathcal{E}$ and we shall write $f_n \xrightarrow{\mathcal{E}} f$ if $(f_n)_n$ is uniformly bounded and satisfies $\|(1+v^2)(f_n - f)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

We start by showing in Section 2.4.2.2 the existence of ground states for the HMF Poisson model (2.1.1) which are minimizers of the variational problem (2.1.11).

Theorem 2.1.10 (Existence of ground states)**.** *The infimum (2.1.11) is finite and is achieved at a minimizer $\bar{f} \in \mathcal{E}$ which is a steady state of (2.1.1).*

Our second result concerns the orbital stability of the above constructed ground states under the action of the HMF flow. As we do not have the uniqueness of the minimizers under constraint of equimeasurablility, we can just get the orbital stability of the set of minimizers and not the orbital stability of each minimizer. It will be proved in Section 2.4.3.1.

Theorem 2.1.11 (Orbital stability of ground states)**.** *Let $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Then the set of steady states of (2.1.1) which minimize (2.1.11) is orbitally stable under the flow (2.1.1). More precisely given f_{i_0} minimizer of (2.1.11), for all $\varepsilon > 0$, there exists $\eta(\varepsilon) > 0$ such that the following holds true. Consider $f_{init} \in \mathcal{E}$ with $\|(1+v^2)(f_{init} - f_{i_0})\|_{\mathrm{L}^1} < \eta(\varepsilon)$. Let $f(t)$ a weak global solution to (2.1.1) on $\mathbb{R}^+$ with initial data f_{init} such that the Casimir functions are preserved during the evolution and that $\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_{init})$. Then there exist f_{i_1} minimizer of (2.1.11) and a translation shift $\theta(.)$ with values in $[0,2\pi]$ such that $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, we have*

$$\|(1+v^2)(f(t,\theta+\theta(t),v) - f_{i_1}(\theta,v))\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon.$$

2.2. Minimization problem with one constraint

2.2.1. **Existence of ground states.** This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.2.

2.2.1.1. *Properties of the infimum.* For convenience, we set for $f \in E_j$, the below functional

(2.2.1)
$$J(f) = \mathcal{H}(f) + \iint j(f) = \iint \frac{v^2}{2} f(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi_f'(\theta)^2\mathrm{d}\theta + \iint j(f(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

Lemma 2.2.1. *The variational problem (2.1.5) satisfies the following statements.*

1. *Let j be a function satisfying (H1) and (H2) or $j(t) = t\ln(t)$, in both cases, the infimum (2.1.5) exists i.e $\mathcal{I}(M) > -\infty$ for all $M > 0$.*
2. *For any minimizing sequence $(f_n)_n$ of the variational problem (2.1.5), we have the following properties:*
   (a) *The minimizing sequence $(f_n)_n$ is weakly compact in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ i.e. there exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ weakly in L^1.*
   (b) *We have $\|\phi_{f_n} - \phi_{\bar{f}}\|_{H^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Proof. Let us start with the proof of item (1). Let $f \in E_j$ such that $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M$. If j satisfies (H1) and (H2), then j is nonnegative and we have

$$J(f) \geq -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi_f'(\theta)^2\mathrm{d}\theta \geq -\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 M^2$$

and this term is finite for $f \in E_j$. Note that

$$\|\phi_f'\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \tag{2.2.2}$$

If $j(t) = t\ln(t)$, the sign of j is not constant and we have to bound from below the term $\iint j(f(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v$. With Jensen's inequality and the convexity of $t \to t\ln(t)$, we get

$$\iint f\ln\left(\frac{f}{f_1}\right) \geq \left(\iint f\right)\left[\ln\left(\iint f\right) - \ln\left(\iint f_1\right)\right]. \tag{2.2.3}$$

Taking $f_1(\theta,v)=e^{-\frac{v^2}{2}}$ and let $C_1=\ln\left(\iint f_1\right)$, we obtain

$$J(f)\geq -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi_f'^2(\theta)\mathrm{d}\theta+M[\ln(M)-C_1]\geq -\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2+M[\ln(M)-C_1]. \tag{2.2.4}$$

Each term is finite for $f\in E_j$. Thus $\mathcal{I}(M)$ exists for both functions j.

Then let us continue with the proof of item (2). Let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of (2.1.5). By the Dunford-Pettis theorem (see [38]), if $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1}$, $\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}$ and $\iint j(f_n(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v$ are bounded from above, the sequence of functions $(f_n)_n$ is weakly compact in L^1. Notice that the domain in θ is bounded thus contrary to the Vlasov-Poisson system, there is no loss of mass at the inifinity in θ and v. Let us show that $\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}$ is bounded. We have from equality (2.2.1)

$$\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}=2J(f_n)+\int_0^{2\pi}\phi_{f_n}'(\theta)^2\mathrm{d}\theta-2\iint j(f_n(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

If j satisfies the hypotheses (H1) and (H2), this equality becomes

$$\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}\leq 2J(f_n)+2\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2.$$

Since $J(f_n)$ is bounded, we deduce in this case that $\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}$ is bounded. If $j(t)=t\ln(t)$, we have

$$\begin{aligned}\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}&\leq 2J(f_n)+2\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2-2\iint f_n(\theta,v)\ln(f_n(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v,\\&\leq 2J(f_n)+2\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2-2M[\ln(M)-C_1]+\frac{1}{2}\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}\end{aligned}$$

using Jensen's inequality (2.2.3) with $f_1(\theta,v)=e^{-\frac{v^2}{4}}$ and $C_1=\ln(\iint f_1)$. Thus

$$\|v^2f_n\|_{\mathrm{L}^1}\leq 4J(f_n)+4\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2-4M[\ln(M)-C_1]$$

and this quantity is bounded. Let us then show that $\iint j(f_n(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v$ is bounded from above. Let j be a function satisfying (H1) and (H2) or $j(t)=t\ln(t)$, we have

$$\iint j(f_n(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\leq J(f_n)+\pi\|W'\|_{\mathrm{L}^\infty}^2M^2.$$

Each term of this inequality is bounded, therefore this quantity is bounded. Hence by Dunford-Pettis theorem, there exists $\bar{f}\in\mathrm{L}^1$ such that $f_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}\bar{f}$ in L^1_w. This concludes the proof of item (1) of Lemma 2.2.1. Then, let us prove the last result. Since

$$\phi_{f_n}(\theta)-\phi_{\bar{f}}(\theta)=\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}W(\theta-\tilde{\theta})[f_n(\tilde{\theta},v)-\bar{f}(\tilde{\theta},v)]\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}v,$$

and

$$\phi_{f_n}'(\theta)-\phi_{\bar{f}}'(\theta)=\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}W'(\theta-\tilde{\theta})[f_n(\tilde{\theta},v)-\bar{f}(\tilde{\theta},v)]\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}v,$$

we immediately deduce applying dominated convergence and from the weak convergence of f_n in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ that $\|\phi_{f_n}-\phi_{\bar{f}}\|_{H^1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. □

The following lemma is the analogous for $j(t) = t\ln(t)$ of a well-known result about the lower semicontinuity properties of convex nonnegative functions see [59]. The proof is not a direct consequence of the lower semicontinuity properties of convex positive functions since $j(t) = t\ln(t)$ changes sign on $\mathbb{R}_+$. It will be detailed in the appendix.

Lemma 2.2.2. *Let $(f_n)_n$ be a sequence of nonnegative functions converging weakly in L^1 to $\bar{f}$ such that $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = M$, $\|v^2 f_n\|_{\mathrm{L}^1} \leq C_1$ and $|\iint f_n \ln(f_n)| \leq C_2$ where M, C_1 and C_2 do not depend on n, we have the following inequality*

$$\iint \bar{f}\ln(\bar{f})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \leq \liminf_{n\to+\infty} \iint f_n \ln(f_n)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

2.2.1.2. *Proof of Theorem 2.1.2.* We are now ready to prove Theorem 2.1.2.

Step 1 Existence of a minimizer.

Let $M > 0$. From item (1) of Lemma 2.2.1, we know that $\mathcal{I}(M)$ is finite for functions j satisfying (H1) and (H2) or $j(t) = t\ln(t)$. Let us show that there exists a function $\bar{f} \in E_j$ which minimizes the variational problem (2.1.5). Let $(f_n)_n \in E_j^{\mathbb{N}}$ be a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M)$. Thus $J(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(M)$ and $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = M$ where J is defined by (2.2.1). From item (2) of Lemma 2.2.1, we know that there exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ weakly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. The L^1-weak convergence implies $\|\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} = M$ and $\bar{f} \geq 0$ a.e. In the case where j satisfies (H1) and (H2), from lower semicontinuity properties of nonnegative convex functions (see [59]) and from item (b) of Lemma 2.2.1, we get $\bar{f} \in E_j$. For $j(t) = t\ln(t)$, from lower semicontinuity properties of nonnegative convex functions and item (b) of Lemma 2.2.1, we get $\|v^2\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$ and from Lemma 2.2.2 and item (b) of Lemma 2.2.1, we get $\iint \bar{f}\ln(\bar{f}) < +\infty$. Using Jensen's inequality (2.2.3) with $f_1(\theta, v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$, we get

$$M(\ln(M) - C_1) - \iint \frac{v^2}{2}\bar{f}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \leq \iint \bar{f}\ln(\bar{f})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v,$$

and we conclude that $|\iint j(f(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v| < +\infty$ and that $\bar{f} \in E_j$. Therefore, in both cases, we have $\mathcal{I}(M) \leq J(\bar{f})$. Moreover from item (2) of Lemma 2.2.1 and classical inequalities about the lower semicontinuity properties of convex nonnegative functions see [59] for j satisfying (H1) and (H2) and Lemma 2.2.2 for $j(t) = t\ln(t)$, we have the followings inequalities:

$$\mathcal{I}(M) = \lim_{n\to+\infty} J(f_n) \geq \iint \frac{v^2}{2}\bar{f}(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'_{\bar{f}}(\theta)^2\mathrm{d}\theta + \iint j(\bar{f}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

Thus $\mathcal{I}(M) \geq J(\bar{f})$. To recap, we have proved that $\mathcal{I}(M) = J(\bar{f})$ with $\bar{f} \in E_j$ and $\|\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} = M$ thus $\mathcal{I}(M)$ is achieved.

Step 2 Euler-Lagrange equation for the minimizers.

Let $M>0$ and $\bar{f}$ be a minimizer of $\mathcal{I}(M)$, let us write Euler-Lagrange equations satisfied by $\bar{f}$. For this purpose, for any given potential ϕ, we introduce a new distribution function F^ϕ having mass M and displaying nice monotonicity property for the energy-Casimir functional.

Lemma 2.2.3. *Let j be a function verifying (H1) and (H2) or $j(t)=t\ln(t)$ and let $M>0$. For all $\phi:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ continuous function, there exists a unique $\lambda\in]\min\phi,+\infty[$ for j satisfying (H1), (H2) and $\lambda\in\mathbb{R}$ for $j(t)=t\ln(t)$ such that the function F^ϕ:$[0,2\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ defined by*

$$\text{(2.2.5)}\qquad \begin{cases} F^\phi(\theta,v)=(j')^{-1}\left(\lambda-\frac{v^2}{2}-\phi(\theta)\right)_+ & \text{for } j \text{ satisfying (H1), (H2)}\\ F^\phi(\theta,v)=\exp\left(\lambda-\frac{v^2}{2}-\phi(\theta)\right) & \text{for } j(t)=t\ln(t), \end{cases}$$

satisfies $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1}=M$.

Proof. Let $\lambda\in\mathbb{R}$, we define

$$\text{(2.2.6)}\qquad \begin{cases} K(\lambda)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(j')^{-1}\left(\lambda-\frac{v^2}{2}-\phi(\theta)\right)_+\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \text{ for } j \text{ satisfying (H1), (H2)}\\ K(\lambda)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\lambda-\frac{v^2}{2}-\phi(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \text{ for } j(t)=t\ln(t). \end{cases}$$

Since in both cases, j is strictly convex and $\left|\left\{\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)<\lambda\right\}\right|$ is strictly increasing in λ, the map K is strictly increasing on $[\min\phi,+\infty[$ for j satisfying (H1), (H2) and on $\mathbb{R}$ for $j(t)=t\ln(t)$. Note that for j satisfying (H1), (H2), $K(\lambda)=0$ for $\lambda\leq\min\phi$, then we have the following limit: $\lim\limits_{\lambda\to\min\phi}K(\lambda)=0$ by using the monotone convergence theorem. For $j(t)=t\ln(t)$, we have $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}K(\lambda)=0$. For both functions, we have $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}K(\lambda)=+\infty$ by using Fatou's lemma. Hence, there exists a unique λ such that $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1}=M$. □

We introduce a second problem of minimization, we set $M>0$. Let $j(t)=t\ln(t)$ or j given by a function satisfying (H1) and (H2).

(2.2.7)

$$\mathcal{J}_0=\inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0}\mathcal{J}(\phi) \text{ where } \mathcal{J}(\phi)=\iint\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right)F^\phi(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta+\iint j(F^\phi),$$

where F^ϕ is defined by Lemma 2.2.3.

Lemma 2.2.4. *We have the following inequalities:*

(1) For all $\phi\in H^2([0,2\pi])$ such that $\phi(0)=\phi(2\pi)$ and $\int_0^{2\pi}\phi=0$, we have $J(F^\phi)\leq\mathcal{J}(\phi)$.

(2) For all $f\in E_j$ with $\|f\|_{\mathrm{L}^1}=M_1$, we have

$$\mathcal{I}(M)\leq J(F^{\phi_f})\leq\mathcal{J}(\phi_f)\leq J(f).$$

Besides $\mathcal{I}(M)=\mathcal{J}_0$.

Proof. First we will show item (1) of this lemma. Let $\phi \in H^2([0,2\pi])$ such that $\phi(0) = \phi(2\pi)$ and $\int_0^{2\pi} \phi = 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\phi) &= J(F^\phi) - \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}\|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2} + \iint (\phi(\theta) - \phi_{F^\phi}(\theta))F^\phi(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &= J(F^\phi) - \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}\|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_0^{2\pi} (\phi - \phi_{F^\phi})(\phi''_{F^\phi} + \frac{\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi})\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

since ϕ_{F^ϕ} satisfies the Poisson equation (2.1.2). Then, after integrating by parts and gathering the terms, we get

$$\mathcal{J}(\phi) = J(F^\phi) + \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi} - \phi'\|^2_{\mathrm{L}^2}. \tag{2.2.8}$$

Hence $\mathcal{J}(\phi) \geq J(F^\phi)$. Then, let us show the right inequality of item (2). Let $f \in E_j$ such that $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M$. Using $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1} = M$, using the equality (2.2.5), the functional can be written as

$$\begin{aligned}J(f) &= \mathcal{J}(\phi_f) + \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right)(f(\theta,v) - F^{\phi_f}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \iint j(f) - \iint j(F^\phi) \\ &= \mathcal{J}(\phi_f) + \iint (\lambda - j'(F^{\phi_f}))(f(\theta,v) - F^{\phi_f}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \iint j(f) - \iint j(F^\phi).\end{aligned}$$

We get

$$J(f) = \mathcal{J}(\phi_f) + \iint (j(f) - j(F^{\phi_f}) - j'(F^{\phi_f})(f - F^{\phi_f}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \tag{2.2.9}$$

The convexity of j gives us the desired inequality. The others inequalities are straightforward. □

We are now ready to get Euler-Lagrange equations. According to Lemma 2.2.4, if $\bar{f}$ is a minimizer of $\mathcal{I}(M)$, $\bar{\phi} := \phi_{\bar{f}}$ is a minimizer of $\mathcal{J}_0$ and $J(\bar{f}) = \mathcal{J}(\bar{\phi})$. Using (2.2.9), we get

$$\iint (j(\bar{f}) - j(F^{\bar{\phi}}) - j'(F^{\bar{\phi}})(\bar{f} - F^{\bar{\phi}}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 0.$$

Then writing the Taylor's formula for the function $j(\bar{f})$ and integrating over $[0,2\pi] \times \mathbb{R}$, we get

$$\iint (\bar{f} - F^{\bar{\phi}})^2 \int_0^1 (1-u)j''(u(\bar{f} - F^{\bar{\phi}}) + F^{\bar{\phi}})\mathrm{d}u = \iint j(\bar{f}) - \iint j(F^{\bar{\phi}}) - \iint (\bar{f} - F^{\bar{\phi}})j'(F^{\bar{\phi}}).$$

Thus $\iint (\bar{f} - F^{\bar{\phi}})^2 \int_0^1 (1-u)j''(u(\bar{f} - F^{\bar{\phi}}) + F^{\bar{\phi}})\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 0$. As $j'' > 0$, we deduce that $\bar{f} = F^{\bar{\phi}}$. Hence, in the case where j satisfies (H1) and (H2), the minimizer $\bar{f}$ has the following expression

$$\bar{f}(\theta,v) = (j')^{-1}\left(\bar{\lambda} - \frac{v^2}{2} - \phi_{\bar{f}}(\theta)\right)_+ \quad \text{where } \bar{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

In the case where $j(t) = t\ln(t)$, we have

$$\bar{f}(\theta,v) = \exp\left(\bar{\lambda} - \frac{v^2}{2} - \phi_{\bar{f}}(\theta)\right), \quad \text{where } \bar{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

Notice that in the case of j satisfying (H1) and (H2), the minimizer is continuous, piecewise $\mathcal{C}^1$ and compactly supported in v. In the case of $j(t) = t\ln(t)$, $\bar{f}$ is a function of class $\mathcal{C}^\infty$. We have shown that any minimizer of (2.1.5) takes the above form and is at least piecewise $\mathcal{C}^1$ thus clearly any minimizer is a steady state of (2.1.1). The proof of Theorem 2.1.2 is complete.

2.2.2. **Orbital stability of the ground states.** To prove the orbital stability result stated in Theorem 2.1.5, we first need to prove the uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition.

2.2.2.1. *Uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition.* This section is devoted to the proof of Lemma 2.1.4. Let f_1 and f_2 be two equimeasurable minimizers of $\mathcal{I}(M)$. In the case where j satisfies (H1) and (H2), they have the following expressions

$$f_1(\theta,v) = (j')^{-1}\left(\lambda_1 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_1}(\theta)\right)_+, \quad f_2(\theta,v) = (j')^{-1}\left(\lambda_2 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_2}(\theta)\right)_+.$$

In the case where $j(t) = t\ln(t)$, they have the following expressions

$$f_1(\theta,v) = \exp\left(\lambda_1 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_1}(\theta)\right), \quad f_2(\theta,v) = \exp\left(\lambda_2 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_2}(\theta)\right).$$

They can be written in the form

$$f_1(\theta,v) = G\left(\frac{v^2}{2} + \psi_1(\theta)\right), \quad f_2(\theta,v) = G\left(\frac{v^2}{2} + \psi_2(\theta)\right); \tag{2.2.10}$$

where $G(t) = (j')^{-1}((-t)_+)$ or $G(t) = \exp(-t)$ with $\psi_i(\theta) = \phi_{f_i}(\theta) - \lambda_i$. In both cases, G is a continuous, strictly decreasing and piecewise $\mathcal{C}^1$ function. The functions f_1 and f_2 are equimeasurable so $\|f_1\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|f_2\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Since G is a decreasing function, this means that $G(\min\psi_1) = G(\min\psi_2)$. Besides, G being strictly decreasing and continuous on $\mathbb{R}$, it is one-to-one from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}_+$ then $\min\psi_1 = \min\psi_2 = \alpha$. Thus, there exist θ_1 and θ_2 such that

$$\psi_1(\theta_1) = \psi_2(\theta_2) = \alpha, \quad \psi_1'(\theta_1) = \psi_2'(\theta_2) = 0.$$

Therefore, ψ_i satisfies

$$\begin{cases} \Psi''(\theta) = \mathcal{G}(\Psi(\theta)), \\ \Psi'(\theta_i) = 0, \\ \Psi(\theta_i) = \psi_1(\theta_1) = \psi_2(\theta_2) = \alpha, \end{cases}$$

for $i = 1$ or 2 and where $\mathcal{G}(e) = \int_{\mathbb{R}} G(\frac{v^2}{2} + e)\mathrm{d}v - \frac{M}{2\pi}$. In both cases, $\mathcal{G}$ is locally Lipschitz thus according to Cauchy-Lipschitz theorem, $\psi_1 = \psi_2$ up to the translation shift $\theta_2 - \theta_1$. From (2.2.10), we get $f_1 = f_2$ up to a translation shift in θ.

2.2.2.2. *Proof of Theorem 2.1.5.* We will prove the orbital stability of steady states of (2.1.1) which are minimizers of (2.1.5) in two steps. First, we will assume that all minimizing sequences of $\mathcal{I}(M)$ are compact and deduce that all minimizer is orbitally stable. Then, we will show the compactness of all minimizing sequence.

Step 1 Proof of the orbital stability

Assume that all minimizing sequences are compact. Let us argue by contradiction. Let f_0 be a minimizer and assume that f_0 is orbitally unstable. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$, a sequence $(f^n_{init})_n \in E_j^{\mathbb{N}}$ and a sequence $(t_n)_n \in \mathbb{R}_*^+$ such that $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(1+v^2)(f^n_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} = 0$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\iint j(f^n_{init}) - \iint j(f_0)\right| = 0$ and for all n, for all $\theta_0 \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \|f^n(t_n, \theta+\theta_0, v) - f_0(\theta, v)\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0, \\ \text{or } \|v^2(f^n(t_n, \theta+\theta_0, v) - f_0(\theta, v))\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

where $f^n(t_n, \theta, v)$ is a solution to (2.1.1) with initial data f^n_{init}. Let $g_n(\theta, v) = f^n(t_n, \theta, v)$, we have $J(g_n) - J(f_0) \leq J(f^n_{init}) - J(f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since the system (2.1.1) preservs the Casimir functionals and $\mathcal{H}(f^n(t_n)) \leq \mathcal{H}(f^n_{init})$. Introduce $\tilde{g_n}(\theta, v) = g_n(\theta, \frac{v}{\lambda_n})$ with $\lambda_n = \frac{M}{\|g_n\|_{\mathrm{L}^1}}$. This function $\tilde{g_n}$ satisfies $\|\tilde{g_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M$, thus $0 \leq J(\tilde{g_n}) - J(f_0)$. Notice that

$$J(f_0) \leq J(\tilde{g_n}) \leq \lambda_n[(\lambda_n^2 - 1)\iint \frac{v^2}{2} g_n(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - \frac{\lambda_n - 1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'^2_{g_n}(\theta)\mathrm{d}\theta + J(f^n_{init})].$$

It is clear that $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Moreover using inequality (2.2.2), we show that $\left(\int_0^{2\pi} \phi'^2_{g_n}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)_n$ is a bounded sequence. Then, arguing as in the proof of item (2) of Lemma 2.2.1, we get $\left(\|v^2 g_n\|_{\mathrm{L}^1}\right)_n$ is bounded sequence. Thus, $J(f_0) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} J(\tilde{g_n}) \leq J(f_0)$. Hence $(\tilde{g_n})_n$ is a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M)$. According to our assumption, it is a compact sequence in E_j: there exists $\tilde{g} \in E_j$ such that, up to an extraction of a subsequence, we have

$$\|g_n - \tilde{g}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|v^2(g_n - \tilde{g})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \left|\iint j(g_n) - \iint j(\tilde{g})\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.2.12}$$

According to the conservation properties of HMF Poisson system, we have

$$|\{(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, g_n(\theta, v) > t\}| = |\{(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, f^n_{init}(\theta, v) > t\}|.$$

Let $\varepsilon > 0$, we notice that $\forall\, 0 < t < \varepsilon$

$$\begin{cases} \{g_n > t\} \subset \{\{|g_n - \tilde{g}| < \varepsilon\} \cap \{\tilde{g} > t - \varepsilon\}\} \cup \{|g_n - \tilde{g}| \geq \varepsilon\}, \\ \{g_n > t\} \supset \{|g_n - \tilde{g}| < \varepsilon\} \cap \{\tilde{g} > t + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Passing to the limit, we get

$$\limsup_{n\to+\infty} |\{g_n > t\}| \leq |\{\tilde{g} > t - \varepsilon\}|, \qquad \liminf_{n\to+\infty} |\{g_n > t\}| \geq |\{\tilde{g} > t + \varepsilon\}|.$$

Then we pass to the limit as $\varepsilon \to 0$ and we get up to an extraction of a subsequence;

$$\lim_{n\to+\infty} |\{g_n > t\}| = |\{\tilde{g} > t\}| \quad \text{for almost all } t > 0.$$

In the same way, we obtain up to an extraction of a subsequence

$$\lim_{n\to+\infty} |\{f^n_{init} > t\}| = |\{f_0 > t\}| \quad \text{for almost all } t > 0.$$

Noticing that the functions $t \to |\{f_0 > t\}|$ and $t \to |\{\tilde{g} > t\}|$ are right-continuous, we get

$$|\{f_0 > t\}| = |\{\tilde{g} > t\}|, \quad \forall t \geq 0.$$

Thus f_0 and g are two equimeasurable minimizers of $\mathcal{I}(M)$ but according to the previous uniqueness result stated in Lemma 2.1.4, $f_0 = \tilde{g}$ up to a translation shift. To conclude, (2.2.12) contradicts (2.2.11) and we have proved that f_0 is orbitally stable.

Step 2 Compactness of the minimizing sequences

Let j satisfying (H1) and (H2) or $j(t) = t\ln(t)$. Let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M)$. Let us show that $(f_n)_n$ is compact in E_j i.e. that there exists $f_0 \in E_j$ such that $\lim_{n\to+\infty} \|(1+v^2)(f_n - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} = 0$ and $\lim_{n\to+\infty} \left|\iint j(f^n_{init}) - \iint j(f_0)\right| = 0$ up to an extraction of a subsequence. Arguing as before in Section 2.2.1.2, there exists $f_0 \in E_j$ such that $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = M$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f_0$ in L^1_w up to an extraction of a subsequence and $J(f_0) = \mathcal{I}(M)$. From this last equality and the strong convergence in L^2 of the potential established in item (b) of Lemma 2.2.1, we deduce that

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\iint \frac{v^2}{2} f_n(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \iint j(f_n) \right) = \iint \frac{v^2}{2} f_0(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \iint j(f_0). \tag{2.2.13}$$

From equality (2.2.13), from lower semicontinuity properties of nonnegative convex functions (see [59]) and from Lemma 2.2.2, we get

$$\iint j(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \iint j(f_0), \quad \text{and} \quad \iint \frac{v^2}{2} f_n(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \iint \frac{v^2}{2} f_0(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \tag{2.2.14}$$

There remains to show that $\|v^2(f_n - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ and $\|f_n - f_0\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

In the case of $j(t) = t\ln(t)$, the Csiszar-Kullback's inequality, see [90], gives us the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. In our case, this Csiszar-Kullback's inequality writes

$$\|f_n - f_0\|^2_{\mathrm{L}^1} \leq 2M \iint f_n \ln\left(\frac{f_n}{f_0}\right). \tag{2.2.15}$$

Hence, to prove the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$, it is sufficient to prove that

$$\iint f_n \ln\left(\frac{f_n}{f_0}\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Since $f_0(\theta, v) = \exp\left(\lambda_0 - \frac{v^2}{2} - \phi_{f_0}(\theta)\right)$, we have

$$\iint f_n \ln\left(\frac{f_n}{f_0}\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v = J(f_n) - J(f_0) + \frac{1}{2}(\|\phi'_{f_n}\|^2_{\mathrm{L}^2} - \|\phi'_{f_0}\|^2_{\mathrm{L}^2}) + \iint \phi_{f_0}(f_n - f_0). \tag{2.2.16}$$

Note that

(1) $J(f_n) - J(f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since $(f_n)_n$ is a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M)$,
(2) $\|\phi'_{f_n}\|^2_{\mathrm{L}^2} - \|\phi'_{f_0}\|^2_{\mathrm{L}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since of the strong convergence in $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ of the potential established in item (b) of Lemma 2.2.1,
(3) $\iint \phi_{f_0}(\theta)(f_n(\theta,v) - f_0(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since of the weak convergence of f_n to f_0 in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$.

Hence with (2.2.15) and (2.2.16), we get $\|f_n - f_0\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. From this strong convergence in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, we deduce the a.e. convergence of f_n and with Brezis-Lieb's lemma, and the second limit in (2.2.14), we get the strong convergence of $v^2 f_n$ in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Hence the sequence $(f_n)_n$ is compact in E_j.

In the case of j satisfying (H1) and (H2), we again use Brezis-Lieb's lemma, see [18], to get the strong convergence of f_n in L^1. We already have that $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$. Hence, with Brezis-Lieb's lemma, it is sufficient to show that $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.e. Writing the Taylor formula for the function $j(f_n)$ and integrating over $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$, we get

$$\iint (f_n - f_0)^2 \int_0^1 (1-u) j''(u(f_n - f_0) + f_0)\mathrm{d}u = \iint j(f_n) - \iint j(f_0) - \iint (f_n - f_0) j'(f_0). \tag{2.2.17}$$

Note also that

(1) $\iint j(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \iint j(f_0)$,
(2) $\iint j'(f_0)(f_n - f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f_0$ L^1_w. Note that $j'(f_0) \in \mathrm{L}^\infty$ since $f_0 \in \mathrm{L}^\infty$.

Hence with Fubini-Tonelli 's theorem, we get

$$\iint (f_n - f_0)^2 j''((f_n - f_0)u + f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ for almost all } u \in [0,1].$$

Let $u_0 \in [0,1]$ such that $\iint (f_n - f_0)^2 j''((f_n - f_0)u_0 + f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Up to an extraction of a subsequence, we have

$$(f_n - f_0)^2 j''((f_n - f_0)u_0 + f_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ for almost all } (\theta, v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}.$$

This means there exists Ω_{u_0} such that $|\Omega_{u_0}| = 0$ and $\forall (\theta, v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R} \setminus \Omega_{u_0}$,

$$(f_n(\theta,v) - f_0(\theta,v))^2 j''(u_0(f_n(\theta,v) - f_0(\theta,v)) + f_0(\theta,v)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.2.18}$$

Let us show that, up to a subsequence, $f_n(\theta,v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0(\theta,v)$ for $(\theta,v) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}\setminus\Omega_{u_0}$. If $u_0 = 0$, we directly have the wanted convergence. Then let $u_0 \in]0,1]$ and let $l(\theta,v)$ be a limit point of $(f_n(\theta,v))_n$. Assume that $l(\theta,v) \neq f_0(\theta,v)$.

- First case: $l(\theta,v)<+\infty$. As j'' is continous and $j''>0$, we have

$$(f_n(\theta,v)-f_0(\theta,v))^2 j''(u_0(f_n(\theta,v)-f_0(\theta,v))+f_0(\theta,v)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (l(\theta,v)-f_0(\theta,v))^2 j''(u_0(l(\theta,v)-f_0(\theta,v))+f_0(\theta,v))>0.$$

  This contradicts (2.2.18).
- Second case: $l(\theta,v)=+\infty$. Thus:

$$(f_n(\theta,v)-f_0(\theta,v))^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ and } u_0(f_n(\theta,v)-f_0(\theta,v))+f_0(\theta,v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{2.2.19}$$

  However the hypothesis (H2) implies that $t^2 j''(t)$ does not converge to 0 when t goes to infinity. Indeed, arguing by contradiction, integrating twice over $[x_0,x]$ and taking the limit for $x\to+\infty$, we get

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \text{such that } \forall x>M,\ 0\le \frac{j(x)}{x}\le \frac{\varepsilon}{x_0}+j'(x_0).$$

  This inequality contradicts (H2) then $t^2 j''(t)$ does not converge to 0 when t goes to infinity and (2.2.19) contradicts (2.2.18).

Hence $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.e and we conclude using the Brezis-Lieb's lemma. The minimizing sequence is compact in E_j.

2.3. Problem with two constraints

2.3.1. **Toolbox for the two constraints problem.** In this section, we define a new function denoted by F^ϕ. Note that the function F^ϕ of (2.3.1) differs from the one of Section 2.2.1.2. However it can be seen as an equivalent of (2.2.5) in the sense that both functions F^ϕ satisfy the constraints of the one and two constraints problem respectively. There will be no possible confusion since the function F^ϕ of Section 2.2.1.2 will no longer be used. First, thank to this new function, the existence of minimizers is shown. Indeed the sequence $(F^{\phi_{f_n}})_n$ has better compactness properties than the sequence $(f_n)_n$. Then, we get the compactness of the sequence $(f_n)_n$ via the sequence $(F^{\phi_{f_n}})_n$ thanks to monotonicity properties of $\mathcal{H}$ with respect to the transformation F^ϕ. These properties will be detailed in Lemma 2.3.2. More precisely, we have the following lemma:

Lemma 2.3.1. *Let j be a function verifying (H1), (H2) and (H3) and let $M_1, M_j>0$. For all $\phi:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ continuous function, there exists a unique pair $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$ such that the function $F^\phi:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ defined by*

$$F^\phi(\theta,v)=(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)-\lambda}{\mu}\right)_+ \text{ satisfies } \|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1}=M_1,\ \|j(F^\phi)\|_{\mathrm{L}^1}=M_j. \tag{2.3.1}$$

Proof. Let $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$, we define

$$K(\lambda,\mu)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)-\lambda}{\mu}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

We set $\mu \in \mathbb{R}_-^*$, since j is strict convex and $\left|\left\{\frac{v^2}{2} + \phi(\theta) < \lambda\right\}\right|$ is strictly increasing in λ, the map $\lambda \to K(\lambda, \mu)$ is strictly increasing on $[\min\phi, +\infty[$. Note that $K(\lambda, \mu) = 0$ for $\lambda \leq \min\phi$. We also have the following limits: $\lim_{\lambda \to \min\phi} K(\lambda, \mu) = 0$ using the monotone convergence theorem and $\lim_{\lambda \to +\infty} K(\lambda, \mu) = +\infty$ using Fatou's lemma. Therefore, there exists a unique $\lambda = \lambda(\mu) \in]\min\phi, +\infty[$ such that $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$. We now define the map:

$$G : \begin{cases} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu \to \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} j \circ (j')^{-1} \left(\frac{\frac{v^2}{2} + \phi(\theta) - \lambda(\mu)}{\mu} \right)_+ \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v. \end{cases}$$

Our purpose is to show that G is continuous, strictly increasing on $\mathbb{R}_-^*$ and that $\lim_{\mu \to -\infty} G(\mu) = 0$ and $\lim_{\mu \to 0} G(\mu) = +\infty$. This claim would imply that there exists a unique $\mu \in \mathbb{R}_-^*$ such that $G(\mu) = M_j$ and the proof of the lemma will be ended.

To get the monotony of G and the continuity of λ on $\mathbb{R}_-^*$, we first have to show the decrease of λ. Since $K(\lambda(\mu), \mu) = M_1$, using that both functions $\lambda \mapsto K(\lambda, \mu)$ and $\mu \mapsto K(\lambda, \mu)$ are increasing, we get that the map λ is nonincreasing on $\mathbb{R}_-^*$. According to the definition of G, it is sufficient to show that $\mu \to \lambda(\mu)$ is continuous on $\mathbb{R}_-^*$ to get the continuity of G on $\mathbb{R}_-^*$. To prove the continuity of λ, we argue by contradiction. Assume that $\mu \to \lambda(\mu)$ is discontinous at $\mu_0 < 0$. Assume on the one hand that λ is left-discontinous, ie there exist $\varepsilon_0 > 0$ and an increasing sequence $(\mu_n)_n \in (\mathbb{R}_-^*)^{\mathbb{N}}$ converging to μ_0 such that $|\lambda(\mu_n) - \lambda(\mu_0)| > \varepsilon_0$. λ being nonincreasing and j being convex, we get

$$M_1 \geq K(\lambda(\mu_0) + \varepsilon_0, \mu_n).$$

Applying Fatou's lemma, we have

$$K(\lambda(\mu_0) + \varepsilon_0, \mu_n) \geq K(\lambda(\mu_0) + \varepsilon_0, \mu_0).$$

Since $K(\lambda(\mu_0) + \varepsilon_0, \mu_0) > M_1$, we get a contradiction and λ is left-continuous. On the other hand, assume that λ is right-discontinuous at $\mu_0 < 0$, ie there exist $\varepsilon_0 > 0$ and a decreasing sequence $(\mu_n)_n \in (\mathbb{R}_-^*)^{\mathbb{N}}$ converging to μ_0 such that $|\lambda(\mu_n) - \lambda(\mu_0)| > \varepsilon_0$. λ being nonincreasing and j being convex, we get

$$M_1 \leq K(\lambda(\mu_0) - \varepsilon_0, \mu_n).$$

Using a generalization of the Beppo Levi's theorem for the decreasing functions, we get

$$K(\lambda(\mu_0) - \varepsilon_0, \mu_n) \leq K(\lambda(\mu_0) - \varepsilon_0, \mu_0).$$

Since $K(\lambda(\mu_0) - \varepsilon_0, \mu_0) < M_1$, we get a contradiction and λ is right-continuous. We conclude that the map λ is continuous on $\mathbb{R}_-^*$. Let us show the increase of G. Before that, notice that $K(\lambda, \mu)$ can be written as

$$K(\lambda, \mu) = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{j'' \circ (j')^{-1}(t)} \sqrt{(\mu t + \lambda - \phi(\theta))_+} \mathrm{d}t \mathrm{d}\theta, \tag{2.3.2}$$

by performing a change of variables: $t = \frac{\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)-\lambda}{\mu}$ and an integration by parts. By doing the exact same thing for G, we can also write

$$G(\mu) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{t}{j''\circ(j')^{-1}(t)}\sqrt{(\mu t+\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta. \tag{2.3.3}$$

Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_-^*$ be such that $\mu_1 \neq \mu_2$. Thanks to the previous step, there exists for $i = 1, 2$, $\lambda_i := \lambda(\mu_i) \in]\min\phi, +\infty[$ such that $K(\lambda_i, \mu_i) = M_1$. Hence, by using the equality (2.3.2) and by setting for $i = 1, 2$, $A_{\mu_i} := \mu_i t + \lambda_i - \phi(\theta)$, we get

$$K(\lambda_1,\mu_1) - K(\lambda_2,\mu_2) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{j''\circ(j')^{-1}(t)}[(A_{\mu_1})_+^{\frac{1}{2}} - (A_{\mu_2})_+^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = 0. \tag{2.3.4}$$

Then, by using (2.3.3) and (2.3.4), we have for all $C \in \mathbb{R}$

$$G(\mu_1) - G(\mu_2) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{t+C}{j''\circ(j')^{-1}(t)}[(A_{\mu_1})_+^{\frac{1}{2}} - (A_{\mu_2})_+^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta.$$

We set $C_0 := \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_1-\mu_2}$ and we get

$$(\mu_1-\mu_2)(G(\mu_1) - G(\mu_2)) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(A_{\mu_1}-A_{\mu_2})}{j''\circ(j')^{-1}(t)}[(A_{\mu_1})_+^{\frac{1}{2}} - (A_{\mu_2})_+^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta. \tag{2.3.5}$$

Since the function $t \mapsto (t)_+^{\frac{1}{2}}$ is nondecreasing, we have $(A_{\mu_1} - A_{\mu_2})[(A_{\mu_1})_+^{\frac{1}{2}} - (A_{\mu_2})_+^{\frac{1}{2}}] \geq 0$. Hence G is a nondecreasing function. We now notice that $(A_{\mu_1} - A_{\mu_2})[(A_{\mu_1})_+^{\frac{1}{2}} - (A_{\mu_2})_+^{\frac{1}{2}}] > 0$ for $\theta \in \{\phi < \lambda_1\}$ and $t \in]0, \frac{\phi(\theta)-\lambda_1}{\mu_1}[$. Besides the measure of the set $\{\phi < \lambda_1\}$ is strictly positive because $\lambda_1 > \min\phi$. Thus, the function G is strictly increasing on $\mathbb{R}_-^*$.

It remains to compute the limits of G. First let us prove that $\lim\limits_{\mu\to-\infty}\lambda(\mu) = +\infty$. The function λ being nonincreasing, $\lim\limits_{\mu\to-\infty}\lambda(\mu)$ exists and we denote it by λ_∞. Assume that $\lambda_\infty < \infty$. We have

$$M_1 = K(\lambda(\mu),\mu) \leq K(\lambda_\infty,\mu) \underset{\mu\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

This is a contradiction then $\lim\limits_{\mu\to-\infty}\lambda(\mu) = +\infty$. Then let us prove that $\lim\limits_{\mu\to0^-}\lambda(\mu) = \min\phi$. λ being nonincreasing, $\lim\limits_{\mu\to0^-}\lambda(\mu)$ exists and we denote it by λ_0. We have to deal with three cases. First, notice that (H2) and (H3) imply $\lim\limits_{t\to+\infty}(j')^{-1}(t) = +\infty$, then we get

$$\begin{cases} \text{if } \lambda_0 > \min\phi : M_1 = K(\lambda(\mu),\mu) > K(\lambda_0,\mu) \underset{\mu\to0^-}{\longrightarrow} +\infty, & \text{applying Fatou's lemma,} \\ \text{if } \lambda_0 < \min\phi : M_1 = K(\lambda(\mu),\mu) < K(\frac{\min\phi+\lambda_0}{2},\mu) = 0 & \text{since } \frac{\min\phi+\lambda_0}{2} < \min\phi. \end{cases}$$

Hence only the third case can occur ie $\lim\limits_{\mu\to0^-}\lambda(\mu) = \min\phi$.

Let us continue with the computation of $\lim_{\mu\to 0^-} G(\mu)$. Performing the change of variables: $u = \frac{v}{\sqrt{2(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}}$, we get

$$G(\mu) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\, j\circ (j')^{-1}\left(\frac{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}{|\mu|}(1-u^2)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u$$

and

$$M_1 = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\,(j')^{-1}\left(\frac{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}{|\mu|}(1-u^2)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u. \tag{2.3.6}$$

Then applying Jensen's inequality to the convex function j, we obtain

$$j\left(\frac{M_1}{\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\mathrm{d}\theta}\right)_+ \le \frac{G(\mu)}{\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\mathrm{d}\theta}.$$

Hence

$$G(\mu) \ge \frac{j\left(\frac{M_1}{\alpha(\mu)}\right)}{\frac{M_1}{\alpha(\mu)}} M_1 \text{ with } \alpha(\mu) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{(\lambda(\mu)-\phi(\theta))_+}\mathrm{d}\theta. \tag{2.3.7}$$

Using the dominated convergence theorem, we show that $\alpha(\mu) \underset{\mu\to 0^-}{\longrightarrow} 0$. But j satisfies (H2) therefore

$$\frac{j\left(\frac{M_1}{\alpha(\mu)}\right)}{\frac{M_1}{\alpha(\mu)}} \underset{\mu\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty \text{ and } \lim_{\mu\to 0^-} G(\mu) = +\infty.$$

Let us continue with the computation of $\lim_{\mu\to-\infty} G(\mu)$. The hypothesis (H3) implies the following inequality:

$$\frac{t(j')^{-1}(t)}{q} \le j\circ(j')^{-1}(t) \le \frac{t(j')^{-1}(t)}{p}. \tag{2.3.8}$$

Thanks to (2.3.8), we can estimate

$$0 \le G(\mu) \le \frac{M_1}{p}\frac{(\lambda(\mu)-\min\phi)_+}{|\mu|} \tag{2.3.9}$$

Let us show that $\frac{M_1}{p}\frac{(\lambda(\mu)-\min\phi)_+}{|\mu|} \underset{\mu\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Using the expression of M_1 given by (2.3.6), we get

$$M_1 \ge \sqrt{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}\,4\pi\sqrt{2}\int_0^1 (j')^{-1}\left(\frac{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}{|\mu|}(1-u^2)\right)\mathrm{d}u \ge 0.$$

For $|\mu|$ sufficiently large, we have $(\lambda(\mu)-\max\phi)_+ > 0$. Therefore, we have

$$\frac{M_1}{\sqrt{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}}\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \ge \int_0^1 (j')^{-1}\left(\frac{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}{|\mu|}(1-u^2)\right)\mathrm{d}u \ge 0,$$

the term on the left side converges to 0. Hence using Fatou's lemma, we get

$$\int_0^1 \liminf_{\mu\to-\infty}(j')^{-1}\left(\frac{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}{|\mu|}(1-u^2)\right)\mathrm{d}u = 0.$$

We deduce that $\frac{(\lambda(\mu)-\max\phi)_+}{|\mu|} \underset{\mu\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ and we conclude with (2.3.9) that $\lim_{\mu\to-\infty} G(\mu) = 0$. The proof is complete. □

As mentionned before the sequence $(F^{\phi_{f_n}})_n$ will be used to show the existence of minimizers of (2.1.8) and the compactness of minimizing sequences. To do that, we need to link $\mathcal{H}(f_n)$ and $\mathcal{H}(F^{\phi_{f_n}})$. For this purpose, we introduce a second problem of minimization and we set $M_1, M_j > 0$.

(2.3.10)
$$\mathcal{J}_0 = \inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0} \mathcal{J}(\phi) \text{ where } \mathcal{J}(\phi) = \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) F^\phi(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta,$$

where F^ϕ is defined by Lemma 2.3.1.

Lemma 2.3.2. *We have the following inequalities:*

(1) For all $\phi \in H^2([0,2\pi])$ such that $\phi(0) = \phi(2\pi)$ and $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, we have $\mathcal{H}(F^\phi) \le \mathcal{J}(\phi)$.

(2) For all $f \in E_j$ with $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(f)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$, we have

$$\mathcal{I}(M_1, M_j) \le \mathcal{H}(F^{\phi_f}) \le \mathcal{J}(\phi_f) \le \mathcal{H}(f).$$

Besides $\mathcal{I}(M_1, M_j) = \mathcal{J}_0$.

Proof. First, let us show item (1) of this lemma. Let $\phi \in H^2([0,2\pi])$ such that $\phi(0) = \phi(2\pi)$ and $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\phi) &= \mathcal{H}(F^\phi) - \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}\|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2} + \iint (\phi(\theta) - \phi_{F^\phi}(\theta))F^\phi(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &= \mathcal{H}(F^\phi) - \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}\|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_0^{2\pi} (\phi - \phi_{F^\phi})(\phi''_{F^\phi} + \frac{\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi})\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

since ϕ_{F^ϕ} satisfies the Poisson equation (2.1.2). Then, after integrating by parts and gathering the terms, we get

(2.3.11)
$$\mathcal{J}(\phi) = \mathcal{H}(F^\phi) + \frac{1}{2}\|\phi'_{F^\phi} - \phi'\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Hence $\mathcal{J}(\phi) \ge \mathcal{H}(F^\phi)$. Then, let us show the right inequality of item (2). Let $f \in E_j$ such that $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(f)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. Using $\|F^\phi\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(F^\phi)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$, using equality (2.1.4), the Hamiltonian can be written in the form

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f) &= \mathcal{J}(\phi_f) + \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right)(f(\theta, v) - F^{\phi_f}(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &= \mathcal{J}(\phi_f) + \iint (\mu j'(F^{\phi_f}) + \lambda)(f(\theta, v) - F^{\phi_f}(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

We get

(2.3.12)
$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{J}(\phi_f) - \mu \iint (j(f) - j(F^{\phi_f}) - j'(F^{\phi_f})(f - F^{\phi_f}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

The convexity of j gives us the desired inequality. The other inequalities are straightforward. □

2.3.2. **Existence of ground states.** This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.6.

2.3.2.1. *Properties of the infimum.*

Lemma 2.3.3. *The variational problem (2.1.8) satisfies the following statements.*

(1) The infimum (2.1.8) exists i.e. $\mathcal{I}(M_1, M_j) > -\infty$ for $M_1, M_j > 0$.

(2) For any minimizing sequence $(f_n)_n$ of the variational problem (2.1.8), we have the following properties:

(a) The minimizing sequence $(f_n)_n$ is weakly compact in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ i.e. there exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ weakly in L^1.

(b) We have $\|\phi_{f_n} - \phi_{\bar{f}}\|_{H^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

The proof of Lemma 2.3.3 is similar to the one of Lemma 2.2.1.

Lemma 2.3.4. *Let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of the variational problem (2.1.8) and let $\phi_n := \phi_{f_n}$ be the associated potential. Using Lemma 2.3.1, there exists a unique pair $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_-$ such that $F^{\phi_n}(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\phi_n(\theta)-\lambda_n}{\mu_n}\right)_+$ verifies $\|F^{\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(F^{\phi_n})\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. The sequences $(\lambda_n)_n$ and $(\mu_n)_n$ are bounded.*

Proof. Let us first prove that the sequence $(\lambda_n)_n$ is bounded. We argue by contradiction. Hence up to an extraction of a subsequence, $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. According to the expression (2.1.3) of the potential ϕ_n, we have $\|\phi_n\|_{\mathrm{L}^\infty} \le 2\pi\|W\|_{\mathrm{L}^\infty} M_1 := C$. Using the expression of M_1 given by (2.3.6), we get

$$M_1 \ge \sqrt{(\lambda_n - C)_+}\, 4\pi\sqrt{2} \int_0^1 (j')^{-1}\left(\frac{(\lambda_n - C)_+}{|\mu_n|}(1-u^2)\right) \mathrm{d}u \ge 0.$$

Then, we argue as at the end of the proof of Lemma 2.3.1 and we deduce that $\frac{(\lambda_n - C)_+}{|\mu_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. With the hypothesis (H3) and $\|\phi_n\|_{\mathrm{L}^\infty} \le C$, we can estimate M_j as follows:

$$0 \le M_j \le \frac{M_1}{p}\frac{(\lambda_n + C)_+}{|\mu_n|}.$$

The term of the right side converges to 0 then we get a contradiction. The sequence $(\lambda_n)_n$ is hence bounded. Now, we shall prove that the sequence $(\mu_n)_n$ is bounded. Using the expression (2.3.6) of M_1 and the fact that λ_n is bounded, we have

$$\frac{M_1}{4\pi\sqrt{2}\tilde{C}} \le (j')^{-1}\left(\frac{\tilde{C}}{|\mu_n|}\right) \qquad \text{where } \tilde{C} \text{ is a constant.}$$

Therefore we obtain

$$0 \le |\mu_n| \le \frac{\tilde{C}}{j'\left(\frac{M_1}{4\pi\sqrt{2}\tilde{C}}\right)}$$

and we deduce that the sequence $(\mu_n)_n$ is bounded. This achieves the proof of this lemma. □

2.3.2.2. *Proof of Theorem 2.1.6.* We are now ready to prove Theorem 2.1.6.

Step 1 Existence of a minimizer.

Let $M_1, M_j > 0$. From Lemma 2.3.3, we know that $\mathcal{I}(M_1, M_j)$ is finite. Let us show that there exists a function of E_j which minimizes the variational problem (2.1.8). Let $(f_n)_n \in E_j^{\mathbb{N}}$ be a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M_1, M_j)$. Thus $\mathcal{H}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(M_1, M_j)$, $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(f_n)\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. From item (2) of Lemma 2.3.3, there exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ weakly in L^1. In what follows, we will denote by ϕ_n the potential ϕ_{f_n} defined by (2.1.3). Thanks to the weak convergence in L^1, we only get that $\|\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(\bar{f})\|_{\mathrm{L}^1} \leq M_j$. The idea is to introduce a new sequence which is a minimizing sequence of (2.1.8) and which has better compactness properties. For this purpose, we define

$$F^{\phi_n}(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \phi_n(\theta) - \lambda_n}{\mu_n}\right)_+ \tag{2.3.13}$$

where (λ_n, μ_n) is the unique pair of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ such that $\|F^{\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(F^{\phi_n})\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. According to Lemma 2.3.1, F^{ϕ_n} is well-defined and notice that the pair (λ_n, μ_n) depends on ϕ_n this is why we will denote by $\lambda_n = \lambda(\phi_n)$ and $\mu_n = \mu(\phi_n)$. Besides, using Lemma 2.3.2, we see that $(F^{\phi_n})_n$ is a minimizing sequence of (2.1.8). According to item (b) of Lemma 2.3.3, ϕ_n converges to $\bar{\phi} := \phi_{\bar{f}}$ strongly in $\mathrm{L}^2([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. Thus, up to an extraction of a subsequence, ϕ_n converges to $\bar{\phi}$ a.e. Let us prove that the sequences $(\lambda_n)_n$ and $(\mu_n)_n$ converge. Using Lemma 2.3.4, we get that the sequences $(\lambda_n)_n$ and $(\mu_n)_n$ are bounded. Therefore, there exists λ_0 and μ_0 such that, up to an extraction of a subsequence, $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ and $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu_0$. Let us prove that $\mu_0 < 0$. Assume that $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. First assume that $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_0 \neq \min \bar{\phi}$. From assumptions on j, this implies

$$(j')^{-1}\left(\frac{\lambda_n - \frac{v^2}{2} - \phi_n(\theta)}{|\mu_n|}\right)_+ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ for almost all } (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

And using Fatou's lemma, we get a contradiction. Then assume that $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \min \bar{\phi}$, using inequality (2.3.7), we get

$$M_j \geq \frac{j\left(\frac{M_1}{\alpha_n}\right)}{\frac{M_1}{\alpha_n}} \quad \text{with} \quad \alpha_n = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\lambda_n - \phi_n(\theta))_+}\mathrm{d}\theta. \tag{2.3.14}$$

Using the dominated convergence theorem, we show that $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. But j satisfies (H2) thus $\frac{j\left(\frac{M_1}{\alpha_n}\right)}{\frac{M_1}{\alpha_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ and we get a contradiction with (2.3.14). Besides $\lambda_0 \neq \min \bar{\phi}$ since otherwise F^{ϕ_n} converges to 0 and we get a contradiction with $\|F^{\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$. Hence we have proved that F^{ϕ_n} converges to $(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta) - \lambda_0}{\mu_0}\right)_+$ a.e. Now let us show that

$\lambda_0 = \lambda(\bar{\phi})$ and $\mu_0 = \mu(\bar{\phi})$ to get that $(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta)-\lambda_0}{\mu_0}\right)_+$ satisfies the two constraints. For this purpose, we first prove by the dominated convergence theorem, $\|\phi_n\|_{\mathrm{L}^\infty}$ being bounded, that

$$\text{(2.3.15)} \qquad \begin{cases} \|F^{\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta)-\lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v, \\ \|j(F^{\phi_n})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} j\circ(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta)-\lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \end{cases}$$

But $(\|F^{\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1}, \|j(F^{\phi_n})\|) = (M_1, M_j)$ then

$$M_1 = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta)-\lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v, \quad M_j = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} j\circ(j')^{-1}\left(\frac{\frac{v^2}{2}+\bar{\phi}(\theta)-\lambda_0}{\mu_0}\right)_+ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.$$

According to Lemma 2.3.1, the couple $(\lambda(\bar{\phi}), \mu(\bar{\phi}))$ is unique, so $\lambda_0 = \lambda(\bar{\phi})$ and $\mu_0 = \mu(\bar{\phi})$. Hence F^{ϕ_n} converges to $F^{\bar{\phi}}$ a.e. . But $\|F^{\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} = \|F^{\bar{\phi_n}}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ then according to Brezis-Lieb's lemma, $F^{\phi_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F^{\bar{\phi}}$ strongly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. We already know that $F^{\bar{\phi}}$ satisfies the two constraints, there remains to show that $\mathcal{H}(F^{\bar{\phi}}) = \mathcal{I}(M_1, M_j)$. The strong convergence in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ of F^{ϕ_n} to $F^{\bar{\phi}}$ implies that $\phi'_{F^{\phi_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi'_{F^{\bar{\phi}}}$ strongly in L^2. Therefore using classical inequalities about the lower semicontinuity properties of convex nonnegative functions see [59] and the convergence in $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ of $\phi'_{F^{\phi_n}}$, we get

$$\mathcal{I}(M_1, M_j) \geq \iint \frac{v^2}{2} F^{\bar{\phi}}(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'_{F^{\bar{\phi}}}(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$

Thus $\mathcal{I}(M_1, M_j) \geq \mathcal{H}(F^{\bar{\phi}})$. As $F^{\bar{\phi}}$ satisfies the two constraints and belongs to E_j, we have $\mathcal{I}(M_1, M_j) \leq \mathcal{H}(F^{\bar{\phi}})$. Therefore we get the equality and we have shown the existence of a minimizer.

Step 2: The minimizer is a steady state of (2.1.1).

To prove that the minimizer $F^{\bar{\phi}}$ is a stationary state of the system (2.1.1), it is sufficient to show that $\bar{\phi} = \phi_{F^{\bar{\phi}}}$. First, $(F^{\phi_n})_n$ being a minimizing sequence of (2.1.8), we have $\mathcal{H}(F^{\phi_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(M_1, M_j)$. Then, using Lemma 2.3.2, we know that $\mathcal{J}_0 = \mathcal{I}(M_1, M_j)$ and that $\mathcal{I}(M_1, M_j) \leq \mathcal{J}(\phi_n) \leq \mathcal{H}(f_n)$. Hence $(\phi_n)_n$ is a minimizing sequence of $\mathcal{J}_0$: we have $\mathcal{J}(\phi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(M_1, M_j) = \mathcal{J}_0$. Hence using the equality (2.3.11), we get

$$\|\phi'_{F^{\phi_n}} - \phi'_n\|^2_{\mathrm{L}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Passing to the limit $n \to +\infty$ and knowing that $\bar{\phi}$ has a zero average, we deduce that $\bar{\phi} = \phi_{F^{\bar{\phi}}}$ a.e.

Step 3: Euler-Lagrange equation for minimizers.

There remains to prove part (2) of Therorem 2.1.6. We obtain Euler-Lagrange equation for the minimizer in the same way as in the proof of Theorem 2.1.2 in Section 2.2.1.2. Indeed, according to Lemma 2.3.2, if $\bar{f}$ is a minimizer of $\mathcal{I}(M_1, M_j)$, $\bar{\phi} := \phi_{\bar{f}}$ is a minimizer of $\mathcal{J}_0$ and $\mathcal{H}(\bar{f}) = \mathcal{J}(\bar{\phi})$. Using (2.3.12), we get

$$\iint (j(\bar{f}) - j(F^{\bar{\phi}}) - j'(F^{\bar{\phi}})(\bar{f} - F^{\bar{\phi}}))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 0.$$

Then writing the Taylor's formula for j and using $j'' > 0$, we can deduce as in Section 2.2.1.2 that $\bar{f} = F^{\bar{\phi}}$.

Step 4: Regularity of the potential ϕ_f.

First, we will show that $\phi_f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$. Thanks to the Sobolev embedding

$$W^{2,3}([0, 2\pi]) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,\frac{2}{3}}([0, 2\pi]),$$

it is sufficient to show that $\phi_f \in W^{2,3}([0, 2\pi])$. We know that $f \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$, then with expression (2.1.3), we get $\phi_f \in \mathrm{L}^\infty([0, 2\pi]) \subset L^3([0, 2\pi])$. In the same way, $\phi_f' \in \mathrm{L}^3([0, 2\pi])$. Besides ϕ_f satisfies (2.1.2), then let us show that $\rho_f \in \mathrm{L}^3([0, 2\pi])$. According to the previous step, f is compactly supported and since $\phi_f \in \mathrm{L}^\infty$, we get $f \in \mathrm{L}^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. We also have $v^2 f \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. Therefore with a classical argument, we show $\rho_f \in \mathrm{L}^3([0, 2\pi])$ and we get $\phi_f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$. Then, according to its expression (2.1.3), ρ_f is continuous. Hence $\phi_f'' \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ and $\phi_f' \in W^{1,3}([0, 2\pi]) \cap \mathcal{C}^0([0, 2\pi])$, then we can write for x, $y \in [0, 2\pi]$

$$\phi_f'(y) - \phi_f'(x) = \int_x^y \phi_f''(t)\mathrm{d}t. \tag{2.3.16}$$

We deduce from (2.3.16) that $\phi_f' \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ then $\phi_f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$.

2.3.3. **Orbital stability of the ground states.** To prove the orbital stability result stated in Theorem 2.1.8, we first need to prove the local uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition.

2.3.3.1. *Local uniqueness of the minimizers under equimeasurability condition.* In this section, we prove Lemma 2.1.7. To this purpose, we first need to prove some preliminary lemmas.

Lemma 2.3.5. *Let f_1, f_2 be two equimeasurable steady states of (2.1.1) which minimizes (2.1.8), they can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$, we have for all $e \geq 0$*

(2.3.17)

$$|\mu_1|^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (\psi_1(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta = |\mu_2|^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (\psi_2(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta \quad \textit{where} \quad \psi_i = \frac{\phi_{f_i} - \lambda_i}{\mu_i},\ i = 1, 2.$$

Besides, if f_1 and f_2 are inhomogeneous then there exist $p_1 = p_1(\phi_{f_1}) \in \mathbb{N}^*$ and $p_2 = p_2(\phi_{f_2}) \in \mathbb{N}^*$ such that

$$\frac{p_1|\mu_1|^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\left|a(e_0) - \frac{1}{|\mu_1|^{\frac{1}{2}}}c_0\right|}} = \frac{p_2|\mu_2|^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\left|a(e_0) - \frac{1}{|\mu_2|^{\frac{1}{2}}}c_0\right|}}, \tag{2.3.18}$$

where

$$\begin{cases} a(e_0) = \int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(e_0 - \frac{v^2}{2}\right)_+ & \text{with } e_0 = max\left(\frac{\phi_{f_i} - \lambda_i}{\mu_i}\right), \quad i = 1, 2; \\ c_0 = \frac{M_1}{2\pi}. \end{cases}$$

Lemma 2.3.6. *Let $\psi \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ such that there exists a finite number p of values $\xi \in [0, 2\pi]$ satisfying $\psi(\xi) = \max(\psi) := e_0$. We will denote them by ξ_i for $i \in \{1, .., p\}$. Besides we assume that for all $i \in \{1, .., p\}$, we have $\psi''(\xi_i) \neq 0$ thus we have*

$$\int_0^{2\pi} (\psi(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta = \varepsilon \sum_{i=1}^{p} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\psi''(\xi_i)|}} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s + o(\varepsilon) \qquad \text{with } \varepsilon = e_0 - e.$$

We first show Lemma 2.1.7 using Lemmas 2.3.5 and 2.3.6 then Lemmas 2.3.5 and 2.3.6 will be proved.

Proof of Lemma 2.1.7. Let f_0 be a homogeneous steady state of (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8). It can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. First, let f be a homogeneous steady state of (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8) equimeasurable to f_0. It can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. We can also write

$$\begin{cases} f_0(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu_0|} + \psi_0(\theta)\right)_+ & \text{with} \quad \psi_0(\theta) = \frac{\phi_{f_0}(\theta) - \lambda_0}{|\mu_0|}, \\ f(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu|} + \psi(\theta)\right)_+ & \text{with} \quad \psi(\theta) = \frac{\phi_f(\theta) - \lambda}{|\mu|}. \end{cases} \tag{2.3.19}$$

The homogeneity and equimeasurability of f_0 and f implies $\frac{\lambda_0}{|\mu_0|} = \frac{\lambda}{|\mu|}$. Besides replacing in equality (2.3.17) of Lemma 2.3.5, we get $\mu_0 = \mu$ and then $\lambda_0 = \lambda$. Thus $f_0 = f$. Then let f be an inhomogeneous steady state (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8) equimeasurable to f_0. The minimizer f can be written in the form (2.3.19). The equimeasurability of f_0 and f implies $\max(\psi_0) = \max(\psi)$. We note this value e_0 and we notice that $\psi_0(\theta) = e_0$ for all $\theta \in [0, 2\pi]$. Replacing in equality (2.3.17) of Lemma 2.3.5, we get

$$2\pi|\mu_1|^{\frac{1}{2}}(e_0 - e)_+^{\frac{1}{2}} = |\mu_2|^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (\psi_2(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta.$$

To estimate the right term of this equality, we will apply Lemma 2.3.6 and we get

$$2\pi|\mu_1|^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varepsilon} = \left(|\mu_2|^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p_2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\psi_2''(\xi_j)|}} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s\right) \varepsilon + o(\varepsilon).$$

This last equality show us that this case cannot occur. Thus f_0 is the only homogeneous steady states of (2.1.1) and minimizer of (2.1.8) under equimeasurability condition.

Let f_0 be an inhomogeneous steady state of (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8), it can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. Let f be an inhomogeneous steady state of (2.1.1) and a minimizer of (2.1.8) equimeasurable to f_0. It can be written in the form (2.1.9) with $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. Let assume that $\mu_0 = \mu$ then we can write our two minimizers like that

$$f_0(\theta, v) = G\left(\frac{v^2}{2} + \psi_0(\theta)\right), \quad f(\theta, v) = G\left(\frac{v^2}{2} + \psi(\theta)\right),$$

with $G(t) = (j')^{-1}\left(\left(\frac{t}{\mu}\right)_+\right)$ and $\psi_i(\theta) - \lambda_i$. Arguing as the one constraint case, we get $f_0 = f$ up to a translation shift in θ. Let assume that $\mu_0 \neq \mu$ and let us show that μ_0 is isolated. Since f_0 and f are inhomogeneous, they verify (2.3.18) according to Lemma 2.3.5. Define for $x > 0$, $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{|a(e_0) - x^{-\frac{1}{2}} c_0|}}$ and introduce the set

$$E = \underset{p \in \mathbb{N}}{\cup} \{\mu \text{ s.t. } pF(|\mu|) = A_0\}.$$

If E is finite, the result is trivial. Otherwise E is countable, it can be written in the form $E = (\mu_n)_n$ with μ_n injective and satisfying for all $n \in \mathbb{N}$, there exists p_n such that $p_n F(|\mu_n|) = A_0$. Let μ_1 a limit point of the sequence $(\mu_n)_n$, it verifies $F(|\mu_1|) = 0$. Indeed, the sequence $(p_n)_n$ cannot take an infinity of times the same value since in equality (2.3.18), for p fixed, there are at the most 4 μ. Therefore $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Thus $\mu_1 = 0$. As $\mu_0 < 0$, it is isolated. Thus there exists $\delta_0 > 0$ such that for all $f \neq f_0$ inhomogeneous steady state of (2.1.1) and minimizer of (2.1.8), we have $||\mu| - |\mu_0|| > \delta_0$. □

Now, let us prove Lemma 2.3.6.

Proof of Lemma 2.3.6. Let $\psi \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ satisfying the assumptions noted above, we have

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\psi(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{(\psi(\theta)-e)_+} s^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{e_0 - e} s^{-\frac{1}{2}} \left|\{e + s \leq \psi \leq e_0\}\right| \mathrm{d}s, \\ &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} \left|\{e_0 - \varepsilon(1 - s) \leq \psi \leq e_0\}\right| \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

using Fubini's theorem, putting $\varepsilon = e_0 - e$ and performing a change of variables $\tilde{s} = \frac{s}{\varepsilon}$. We define $E_\varepsilon = \{\theta \in [0, 2\pi], e_0 - \varepsilon(1 - s) \leq \psi \leq e_0\}$. We can write $[0, 2\pi] = \cup_{i=1}^p E_i$ with

$$\begin{cases} E_1 = [0, \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}] \\ E_i = [\frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2}, \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}] \text{ for } i \in \{2, .., p-1\} \\ E_p = [\frac{\xi_{p-1} + \xi_p}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

Thus $E_\varepsilon = \cup_{i=1}^p E_\varepsilon^i$ with $E_\varepsilon^i = \{\theta \in E_i, -\varepsilon(1-s) \leq \psi(\theta) - e_0 \leq 0\}$ and we get

$$\int_0^{2\pi} (\psi(\theta) - e)_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta = \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} |E_\varepsilon^i| \mathrm{d}s.$$

The next step is to compute for $i \in \{1...p\}$ the limit of $|E_\varepsilon^i|$ when ε goes to 0. Notice that there is a unique ξ_i in each interval E_i for $i \in \{1...p\}$, and use the Taylor formula for ψ, to get

$$E_\varepsilon^i = \left\{ \theta \in E_i, -\varepsilon(1-s) \leq (\theta - \xi_i)^2 \int_0^1 (1-u)\psi''(u(\theta - \xi_i) + \xi_i) \mathrm{d}u \leq 0 \right\}.$$

Let $A(\theta, \xi) = \int_0^1 (1-u)\psi''(u(\theta - \xi) + \xi) \mathrm{d}u$, we can write

$$E_\varepsilon^i = \left\{ \theta \in E_i, \frac{|\theta - \xi_i|}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|A(\theta, \xi_i)|} \leq \sqrt{1-s} \right\}.$$

Then we have

$$|E_\varepsilon^i| = 2\sqrt{\varepsilon} \left| \left\{ \theta \in E_i, \theta \sqrt{|B(\theta, \xi_i)|} \leq \sqrt{1-s} \} \right\} \right| \text{ where } B(\theta, \xi_i) = \int_0^1 (1-u)\psi''(u\sqrt{\varepsilon}\theta + \xi_i) \mathrm{d}u.$$

Recall that $\psi''(\xi_i) \neq 0$ hence by continuity of ψ'', we have $\psi'' \neq 0$ on a neighborhood of ξ_i. Thus for e close to e_0 i.e. for ε sufficiently small, we have $B(\theta, \xi_i) \neq 0$. Thus we can write

$$\frac{|E_\varepsilon^i|}{\sqrt{\varepsilon}} = 2 \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{\left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{|B(\theta, \xi_i)|}} \right\}} \mathrm{d}\theta.$$

Applying the dominated convergence theorem, we get for $i \in \{1...p\}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|E_\varepsilon^i|}{\sqrt{\varepsilon}} = 2 \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sqrt{|\psi''(\xi_i)|}}.$$

This ends the proof of Lemma 2.3.6. □

To prove Lemma 2.3.5, we need a last technical lemma.

Lemma 2.3.7. *Let f be an inhomogenenous minimizer of the variational problem (2.1.8) given by (2.1.9) with $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. We denote by $e_0 := \max \psi$ where $\psi(\theta) = \frac{\phi_f(\theta) - \lambda}{\mu}$. Then there is only a finite number of values ξ satisfying $\psi(\xi) = e_0$.*

Proof. Let us argue by contradiction. Assume there is an infinite number of different values ξ satisfying $\psi(\xi) = e_0$. We define a strictly increasing sequence $(\xi_n)_n$ such that for all n, $\psi(\xi_n) = e_0$. In particular we have $\psi'(\xi_n) = 0$. Then we apply Rolle's theorem on each interval $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ and we build a new sequence $(\tilde{\xi}_n)_n$ such that $\psi''(\tilde{\xi}_n) = 0$. We have $(\tilde{\xi}_n)_n \in [0, 2\pi]^{\mathbb{N}}$ thus there exists $\tilde{\xi}$ such that $\tilde{\xi}_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\xi}$ up to an extraction of a subsequence. With the continuity of ψ'' and Theorem 2.1.6, we get $\psi''(\tilde{\xi}) = 0$. By construction, we have for all n, $\tilde{\xi}_{n-1} < \xi_n < \tilde{\xi}_n$. Thus up to an extraction of a subsequence $\xi_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tilde{\xi}$ and the limit satisfies $\psi'(\tilde{\xi}) = 0$ and $\psi(\tilde{\xi}) = e_0$. Besides we know that

$$\psi'' = \frac{\phi_f''}{\mu} = \frac{\rho_f - \frac{M_1}{2\pi}}{\mu},$$

then $\rho_f(\tilde{\xi}) = \frac{M_1}{2\pi}$. Using the expression of ρ_f, we get for all $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho_f(\theta) \leq \rho_f(\tilde{\xi})$ and $\max(\rho_f) = \rho_f(\tilde{\xi}) = \frac{M_1}{2\pi}$. Since $\int_{\mathbb{R}} \rho_f = M_1$, we deduce that for all $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho_f(\theta) = \frac{M_1}{2\pi}$. Thus for all θ, $\phi_f''(\theta) = 0$. Since ϕ_f has a zera average and $\phi_f(0) = \phi_f(2\pi)$, we get $\phi_f = 0$. Contradiction. □

We are now ready to prove Lemma 2.3.5.

Proof. Let f_1 and f_2 be two steady states of (2.1.1) and two minimizers of (2.1.8) equimeasurable. They can be written in the form (2.1.9) and we can write

$$f_1(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{v^2}{2\mu_1} + \psi_1(\theta)\right)_+, \qquad f_2(\theta, v) = (j')^{-1}\left(\frac{v^2}{2\mu_2} + \psi_2(\theta)\right)_+$$

where $\psi_i(\theta) = \frac{\phi_{f_i}(\theta) - \lambda_i}{\mu_i}$ for $i = 1$ or 2. Since f_1 and f_2 are equimeasurable, we know that for all $t \geq 0$

$$\left|\left\{(j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu_1|} + \psi_1(\theta)\right)_+ > t\right\}\right| = \left|\left\{(j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu_2|} + \psi_2(\theta)\right)_+ > t\right\}\right|.$$

We have for $i = 1$ or 2,

$$\begin{aligned}\left|\left\{(j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu_i|} + \psi_i(\theta)\right)_+ > t\right\}\right| 1 &= \left|\left\{\frac{v^2}{2} - |\mu_i|\psi_i(\theta) < -|\mu_i| j'(t)\right\}\right| \\ &= 2\sqrt{2}|\mu_i|^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (\psi_i(\theta) - j'(t))_+^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Thus for all $e \geq 0$, we have equality (2.3.17). Then let assume that $\phi_{f_1} \neq 0$ and $\phi_{f_2} \neq 0$. According to the third point of Theorem 2.1.6, ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$. Besides according to Lemma 2.3.7, there exists for $i = 1$ or 2, $p_i = p_i(\phi_{f_i})$ such that ψ_i has p_i values ξ satisfying $\psi_i(\xi) = e_0$. We note them $\{\xi_{i,1}, .., \xi_{i,p_i}\}$. In order to apply Lemma 2.3.6, let us show that $\psi_i''(\xi_{i,j}) \neq 0$ for $j \in \{1, .., p_i\}$ and $i = 1$ or 2. If $\psi_i''(\xi_{i,j}) = 0$, since $\xi_{i,j}$ is a maximum of ψ too, we are in the same case as the end of the proof of Lemma 2.3.7 and we get a contradiction. Hence we are allowed to use Lemma 2.3.6 and get

$$|\mu_1|^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p_1} \frac{1}{\sqrt{|\psi_1''(\xi_{1,j})|}} = |\mu_2|^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p_1} \frac{1}{\sqrt{|\psi_2''(\xi_{1,j})|}}.$$

Notice that we have for $i = 1$ or 2

$$\begin{aligned}\psi_i''(\theta) = \phi_{f_i}''(\theta) = \frac{\rho_{f_i}(\theta) - \frac{M_1}{2\pi}}{\mu_i} &= \frac{1}{\mu_i}\left(\int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2|\mu_i|} + \psi_i(\theta)\right)_+ \mathrm{d}v - \frac{M_1}{2\pi}\right), \\ &= -|\mu_i|^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} (j')^{-1}\left(\frac{-v^2}{2} + \psi_i(\theta)\right)_+ \mathrm{d}v - \frac{1}{|\mu_i|^{\frac{1}{2}}}\frac{M_1}{2\pi}\right).\end{aligned}$$

Thus we have

$$\psi_i''(\xi_{i,j}) = -|\mu_i|^{-\frac{1}{2}} \left(a(e_0) - \frac{1}{|\mu_i|} \frac{M_1}{2\pi} \right)$$

with $a(e_0) = \int_{\mathbb{R}} (j')^{-1} \left(e_0 - \frac{v^2}{2} \right)_+ \mathrm{d}v$, and therefore equality (2.3.18) is proved. □

2.3.3.2. *Proof of Theorem 2.1.8.* We will prove the orbital stability of steady states of (2.1.1) which are minimizers of (2.1.8) in two steps. First we will show that any minimizing sequence is compact.

Step 1 Compactness of the minimizing sequences

Let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of $\mathcal{I}(M_1, M_j)$. Let us show that $(f_n)_n$ is compact in E_j i.e. there exists $f_0 \in E_j$ such that $f_n \xrightarrow{E_j} f_0$ up to an extraction of a subsequence. Using item (2) of Lemma 2.3.3, there exists $f_0 \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} f_0$ weakly in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ and we denote by $\phi_0 := \phi_{f_0}$. In the same way as the proof of Theorem 2.1.6 in Section 2.3.2.2, we introduce the function F^{ϕ_n} defined by (2.3.13). According to Step 1 of the proof of Theorem 2.1.6 in Section 2.3.2.2, it is a minimizing sequence of (2.1.8), F^{ϕ_n} converges to F^{ϕ_0} strongly in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ and F^{ϕ_0} is a minimizer of $\mathcal{I}(M_1, M_j)$. Our goal is to prove that $f_0 = F^{\phi_0}$ and $f_n \xrightarrow{E_j} f_0$.

In order to do that, let us start with the proof of the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ of f_n to F^{ϕ_0}. First, we notice that $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = \|F^{\phi_0}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$, then thanks to Brezis-Lieb's lemma, it is sufficient to show that f_n converges to F^{ϕ_0} a.e. in order to get the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$. To this purpose, let us write

$$f_n - F^{\phi_0} = f_n - F^{\phi_n} + F^{\phi_n} - F^{\phi_0}.$$

As the a.e. convergence of F^{ϕ_n} to F^{ϕ_0} is already known, the next step is to show that $f_n - F^{\phi_n}$ converges to 0 a.e. For this purpose, we wil argue as in the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2. We notice that we have

$$\iint (j(f_n) - j(F^{\phi_n}) - j'(F^{\phi_n})(f_n - F^{\phi_n})) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.3.20}$$

Indeed, using equality (2.3.12), we get

$$\iint (j(f_n) - j(F^{\phi_n}) - j'(F^{\phi_n})(f_n - F^{\phi_n})) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v = \frac{\mathcal{J}(\phi_n) - \mathcal{H}(f_n)}{\mu}.$$

There remains to argue as in Step 2 of the proof of Theorem 2.1.6 in Section 2.3.2.2 to get the desired limit. Then writing the Taylor's formula for the function $j(f_n)$ and integrating over $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, we get

$$\iint (f_n - F^{\phi_n})^2 \int_0^1 (1-u) j''(u(f_n - F^{\phi_n}) + F^{\phi_n}) \mathrm{d}u = \iint j(f_n) - \iint j(F^{\phi_n}) - \iint (f_n - F^{\phi_n}) j'(F^{\phi_n}).$$

Thus $\iint (f_n - F^{\phi_n})^2 \int_0^1 (1-u) j''(u(f_n - F^{\phi_n}) + F^{\phi_n}) \mathrm{d}u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Arguing in the same way as the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2., we get $f_n - F^{\phi_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ a.e. To recap,

we have obtained that $\|f_n - F^{\phi_0}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. But $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0$ weakly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ then by uniqueness of the limit, we have $F^{\phi_0} = f_0$. Therefore $\|f_n - f_0\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. To show the convergence in E_j, there remains to show that

$$\|v^2(f_n - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{and} \quad \|j(f_n)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|j(f_0)\|_{\mathrm{L}^1}.$$

The second limit clearly comes from the fact that $f_0 = F^{\phi_0}$ satisfies the constraints. For the first limit, we write

$$\iint v^2(f_n(\theta,v) - f_0(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 2(\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(f_0)) + \|\phi_n'\|_{\mathrm{L}^2}^2 - \|\phi_0'\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Then $\|v^2 f_n\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}$. Besides the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ of f_n to f_0 implies that $v^2 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v^2 f_0$ a.e. up to an extraction of a subsequence. We conclude with Brezis-Lieb's lemma. Hence the minimizing sequence is compact in E_j.

Step 2 Proof of the orbital stability

Before starting the proof of Theorem 2.1.8, notice the following fact. As mentioned in Section 2.3.2.2, it is possible to obtain Euler-Lagrange equations for the minimizers in the same way as in the proof of Theorem 2.1.2. This method provides the expressions of λ and μ. In particular, we have

$$\mu = -\frac{\|v^2 f\|_{\mathrm{L}^1}}{C_f} \text{ with } C_f = \iint f j'(f)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - M_j. \tag{2.3.21}$$

If f_1 and f_2 are equimeasurable, then $C_{f_1} = C_{f_2}$. Hence, we can rewrite the first point of Lemma 2.1.7 as follows.

Lemma 2.3.8. *Let f_0 be an inhomogeneous steady state of (2.1.1) which is a minimizer of (2.1.8). Let $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$ be the Lagrange multipliers associated with f_0 according to (2.1.9). There exists $\delta_0 > 0$ such that for all $f \in E_j$ inhomogeneous steady state of (2.1.1) which is minimizer of (2.1.8) and which is equimeasurable to f_0 with $\mu_0 \neq \mu$, where μ is the Lagrange constant associated with f in the expression (2.1.9), we have*

$$\left|\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f\|_{\mathrm{L}^1}\right| > \delta_0. \tag{2.3.22}$$

This characterization will be used in the proof of the orbital stability of steady states.

Before proving the orbital stability of minimizers, we need to prove a preliminary lemma.

Lemma 2.3.9. *Let f_0 be an inhomogeneous steady state of (2.1.1) which minimizes (2.1.8). We denote by δ_0 the constant associated with f_0 as defined in Lemma 2.1.7. We have: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta > 0$ such that $\forall f_{init} \in E_j$*

$$\|(1+v^2)(f_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} \leq \eta \text{ and } \left|\iint j(f_{init}) - \iint j(f_0)\right| \leq \eta$$
$$\Rightarrow \left[\forall t > 0, \left[\left|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}\right| \leq \frac{\delta_0}{2} \Rightarrow \left|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}\right| \leq \varepsilon\right]\right],$$

where $f(t)$ is a solution to (2.1.1) with initial data f_{init}.

With this lemma, we are able to prove Theorem 2.1.8. We will prove Lemma 2.3.9 after the proof of Theorem 2.1.8.

Proof of Theorem 2.1.8. Let us argue by contradiction, let f_0 be an inhomogeneous minimizer of (2.1.8). Assume that f_0 is orbitally unstable. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$, a sequence $(f^n_{init})_n \in E_j^{\mathbb{N}}$ and a sequence $(t_n)_n \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ such that $f^n_{init} \xrightarrow{E_j} f_0$ and for all n, for all $\theta_0 \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \|f^n(t_n, \theta + \theta_0, v) - f_0(\theta, v)\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0, \\ \text{or } \|v^2(f^n(t_n, \theta + \theta_0, v) - f_0(\theta, v))\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0, \end{cases} \tag{2.3.23}$$

where $f^n(t_n, \theta, v)$ is a solution to (2.1.1) with initial data f^n_{init}. Let $g_n(\theta, v) = f^n(t_n, \theta, v)$, we have $\mathcal{H}(g_n) \leq \mathcal{H}(f^n_{init})$ from the conservation property of the flow (2.1.1). Introduce $\bar{g_n}(\theta, v) = \gamma_n g_n\left(\theta, \frac{\gamma_n}{\lambda_n} v\right)$ where (γ_n, λ_n) is the unique pair such that $\|\bar{g_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(\bar{g_n})\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. Besides γ_n and λ_n satisfy

$$\lambda_n = \frac{M_1}{\|g_n\|_{\mathrm{L}^1}} \text{ and } \gamma_n \text{ is such that } \frac{\|j(\gamma_n g_n)\|_{\mathrm{L}^1}}{\gamma_n} = \frac{M_j \|g_n\|_{\mathrm{L}^1}}{M_1}. \tag{2.3.24}$$

The existence and uniqueness of such (γ_n, λ_n) can be proved exactly the same way as Lemma A.1 in [66]. As $\bar{g_n}$ satisfies the two constraints of the minimization problem (2.1.8), we have $\mathcal{H}(f_0) \leq \mathcal{H}(\bar{g_n})$. Besides we have

$$\mathcal{H}(f_0) \leq \mathcal{H}(\bar{g_n}) \leq \lambda_n^2 \left(\left(\frac{\lambda_n}{\gamma_n^2} - 1 \right) \|\frac{v^2}{2} g_n\|_{\mathrm{L}^1} + \mathcal{H}(f^n_{init}) \right). \tag{2.3.25}$$

Notice that

$$\|g_n\|_{\mathrm{L}^1} = \|f^n_{init}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M_1 \text{ since } \|f^n_{init} - f_0\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ and } \|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = M_1. \tag{2.3.26}$$

Hence the sequence $(g_n)_n$ is bounded in L^1. We also have

$$\left\| \frac{v^2}{2} g_n \right\|_{\mathrm{L}^1} = \mathcal{H}(g_n) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi'^2_{g_n}(\theta) \mathrm{d}\theta \leq C + \pi \|W'\|^2_{\mathrm{L}^\infty} \|g_n\|^2_{\mathrm{L}^1} \text{ where } C \text{ is a constant,}$$

and therefore the sequence $(\|\frac{v^2}{2} g_n\|_{\mathrm{L}^1})_n$ is bounded too. Let us then show that λ_n and γ_n converge to 1. With (2.3.24), we get $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. To deal with the case of γ_n, we will use the fact that the hypothesis (H3) is equivalent to the hypothesis (H3bis)

(H3bis) : $b^p j(t) \leq j(bt) \leq b^q j(t)$, $\forall b \geq 1$, $t \geq 0$ and $b^q j(t) \leq j(bt) \leq b^p j(t)$, $\forall b \leq 1$, $t \geq 0$.

Therefore using (H3bis), we get

$$\min(C_n^{\frac{1}{p-1}}, C_n^{\frac{1}{q-1}}) \leq \gamma_n \leq \max(C_n^{\frac{1}{p-1}}, C_n^{\frac{1}{q-1}}), \text{ where } C_n = \left(\frac{M_j}{M_1} \frac{\|g_n\|_{\mathrm{L}^1}}{\|j(g_n)\|_{\mathrm{L}^1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

But $\|j(g_n)\|_{\mathrm{L}^1} = \|j(f^n_{init})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|j(f_0)\|_{\mathrm{L}^1}$ and therefore $C_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Thus $\gamma_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. We deduce with (2.3.25) that $\lim_{n \to +\infty} \mathcal{H}(\bar{g_n}) = \mathcal{H}(f_0)$ and thus $(\bar{g_n})_n$ is a minimizing sequence of (2.1.8). According to the previous step, this sequence is compact, hence, up to an

extraction of a subsequence, there exists $\bar{g} \in E_j$ such that $\bar{g_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{g}$ in E_j. It is easy to show with Brezis-Lieb's lemma that $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{g}$ in E_j up to an extraction of a subsequence. This implies that

$$\|g_n - \bar{g}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \|v^2(g_n - \bar{g})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ and } |\iint j(g_n) - \iint j(\bar{g})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.3.27}$$

Then we deduce of this convergence that $\mathcal{H}(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}(\bar{g})$, but $\mathcal{H}(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(M_1, M_j)$ and $\mathcal{I}(M_1, M_j) = \mathcal{H}(\bar{g})$. Besides $\bar{g}$ satisfies the two constraints therefore $\bar{g}$ is a minimizer of (2.1.8). Furthermore in the same way as the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2, we prove that $\bar{g}$ and f_0 are equimeasurable. In summary, f_0 and $\bar{g}$ are equimeasurable minimizers of $\mathcal{I}(M_1, M_j)$. According to Lemma 2.1.7, g cannot be a homogeneous steady state. Thus g is an inhomogeneous minimizer and has the form (2.1.9) with $(\lambda_{\bar{g}}, \mu_{\bar{g}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. The inhomogeneous minimizer f_0 also has the form (2.1.9) with $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$. If $\mu_{\bar{g}} = \mu_0$, according to Lemma 2.1.7, $f_0 = \bar{g}$ up to a translation in θ. Then (2.3.27) contradicts (2.3.23) and we have proved that f_0 is an orbitally stable steady state. Otherwise, $\mu_{\bar{g}} \neq \mu_0$ and according to Lemma 2.3.8, there exists δ_0 such that (2.3.22) holds. Now, let us show that $|\|v^2\bar{g}\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \delta_0$. In order to do that, let us prove that for all n,

$$|\|v^2 g_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{2}. \tag{2.3.28}$$

We will show that $\forall t \geq 0$, $|\|v^2 f^n(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{2}$. Let us argue by contradiction and assume there exists $t \geq 0$ such that $|\|v^2 f^n(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| > \frac{\delta_0}{2}$. As $\|(1+v^2)(f^n_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, we can assume $\forall n$, $\|(1+v^2)(f^n_{init} - f_0)\|_{\mathrm{L}^1} \leq \frac{\delta_0}{4}$. This implies $\forall n$, $|\|v^2 f^n_{init}\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{4}$. Thus we have

$$|\|v^2 f^n(0)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{4} \text{ and } \exists t > 0 \text{ s.t. } |\|v^2 f^n(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| > \frac{\delta_0}{2}.$$

By continuity of the map $t \mapsto \|v^2 f^n(t)\|_{\mathrm{L}^1}$, there exists $t_0 >$ such that

$$|\|v^2 f^n(t_0)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| = \frac{\delta_0}{3} < \frac{\delta_0}{2},$$

therefore according to Lemma 2.3.9, for all $\varepsilon > 0$, we have $|\|v^2 f^n(t_0)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \varepsilon$. For instance with $\varepsilon = \frac{\delta_0}{5}$, we get a contradiction. Hence: $\forall t \geq 0$, $|\|v^2 f^n(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{2}$ and we deduce (2.3.28). Recall that we have $\|v^2(g_n - \bar{g})\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, hence with (2.3.28), we deduce that $|\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2\bar{g}\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \delta_0$. We get a contradiction with (2.3.22) and $\mu_0 = \mu_{\bar{g}}$ then $f_0 = \bar{g}$ up to a translation shift in θ. Then (2.3.27) contradicts (2.3.23) and we have proved that f_0 is an orbitally stable steady state.

If f_0 is a homogeneous minimizer of (2.1.8). We follow the same reasoning by contradiction and we build an other equimeasurable minimizer $\bar{g}$. Two cases arise: first, $\bar{g}$ is inhomogeneous and in fact, this case cannot occur according to the third point of Lemma 2.3.5. Hence we get a contradiction. Secondly, $\bar{g}$ is homogeneous and we have $f_0 = \bar{g}$

according to the first point of Lemma 2.1.7. We get the same kind of contradiction as in the case of f_0 inhomogeneous. Hence, we have proved that f_0 is an orbitally stable steady state. □

To end this section, let us prove the preliminary lemma 2.3.9.

Proof of Lemma 2.3.9. Let us argue contradiction. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$, a sequence $(f^n_{init})_n \in E_j^{\mathbb{N}}$ and a sequence $(t_n)_n \in \mathbb{R}_*^+$ such that $f^n_{init} \xrightarrow{E_j} f_0$ and for all n,

$$|\|v^2 f^n(t_n)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \frac{\delta_0}{2} \quad \text{and} \quad |\|v^2 f^n(t_n)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}| > \varepsilon_0, \tag{2.3.29}$$

where $f^n(t_n)$ is a solution to (2.1.1) with initial data f^n_{init}. Let $g_n(\theta, v) = f^n(t_n, \theta, v)$, exactly like in the proof of Theorem 2.1.8, we introduce $\bar{g_n}(\theta, v) = \gamma_n g_n\left(\theta, \frac{\gamma_n}{\lambda_n} v\right)$ where (γ_n, λ_n) is the unique pair such that $\|\bar{g_n}\|_{\mathrm{L}^1} = M_1$ and $\|j(\bar{g_n})\|_{\mathrm{L}^1} = M_j$. In the same way as the proof of Theorem 2.1.8 in Section 2.3.3.2, we prove that $\bar{g}$ is a minimizer of (2.1.8) and as in the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2, we show that $\bar{g}$ and f_0 are equimeasurable. Using the first inequality of (2.3.29) and the convergence of $\|v^2 g_n\|_{\mathrm{L}^1}$ to $\|v^2 \bar{g}\|_{\mathrm{L}^1}$, we get

$$|\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 \bar{g}\|_{\mathrm{L}^1}| \leq \delta_0 \tag{2.3.30}$$

Therefore according to Lemma 2.1.7, we deduce that $f_0 = \bar{g}$ up to a translation in θ and we get a contradiction with the second inequality of (2.3.29) and the convergence in E_j of g_n to $\bar{g}$. □

2.4. Problem with an infinite number of constraints

2.4.1. **Generalized rearrangement with respect to the microscopic energy.** In the same way as in the two-constraints problem, we introduce a new function denoted by $f^{*\phi}$. The sequence $(f^{*\phi_n})_n$ has better compactness properties than the sequence $(f_n)_n$. We get the compactness of $(f_n)_n$ via the compactness of $(f^{*\phi_n})_n$ thanks to monotonicity properties of $\mathcal{H}$ with respect to the transformation $f^{*\phi}$ which will be detailed in Lemma 2.4.4. To define this new function, we use the generalization of symmetric rearrangement with respect to the microscopic energy $e = \frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$ introduced in [61]. For more generalized results, see also [60]. We first recall the usual notion of rearrangement which is adapted here to functions defined on the domain $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. For more details on this subject see [59] and [68]. For any nonnegative function $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$, we define its distribution function with (2.1.7). Let $f^{\#}$ be the pseudo-inverse of the function μ_f defined by (2.1.7):

$$f^{\#}(s) = \inf\{t \geq 0, \mu_f(t) \leq s\} = \sup\{t \geq 0, \mu_f(t) > s\}, \text{ for all } s \geq 0. \tag{2.4.1}$$

We notice that $f^{\#}(0) = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $f^{\#}(+\infty) = 0$. It is well known that μ_f is right-continuous and that for all $s \geq 0$, $t \geq 0$,

$$f^{\#}(s) > t \iff \mu_f(t) > s. \tag{2.4.2}$$

Next, we define the rearrangement f^* of f by

$$f^*(\theta,v)=f^{\#}\left(\left|B(0,\sqrt{\theta^2+v^2})\cap\mathbb{T}\times\mathbb{R}\right|\right), \tag{2.4.3}$$

where $B(0,R)$ denotes the open ball in $\mathbb{R}^2$ centered at 0 with radius R. Then in order to generalize the rearrangements, we introduce for $\phi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ the quantity

$$a_\phi(e)=\left|\left\{(\theta,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}:\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)<e\right\}\right|. \tag{2.4.4}$$

From this quantity, we can adapt the proofs in Section 2.1 of [61] to the case of $\phi\in\mathcal{C}^2$ and we are able to define the generalized rearrangement with respect to the microscopic energy. We get the following properties gathered in Lemma 2.4.1. The last item of this lemma is proved in the Step 2 of the proof of Proposition 2.3 in [61].

Lemma 2.4.1 (Properties of a_ϕ)**.** *We have the following statements.*

(1) The function a_ϕ is continuous on $\mathbb{R}$, vanishes on $]-\infty,\min\phi]$ and is strictly increasing from $[\min\phi,+\infty[$ to $[0,+\infty[$.

(2) The function a_ϕ is invertible from $[\min\phi,+\infty[$ to $[0,+\infty[$, we denote its inverse by a_ϕ^{-1}. This inverse satisfies

$$\frac{s^2}{32\pi^2}+\min\phi\le a_\phi^{-1}(s)\le\frac{s^2}{32\pi^2}+\max\phi,\quad\forall s\in\mathbb{R}_+. \tag{2.4.5}$$

(3) Let $\phi\in\mathcal{C}^2([0,2\pi])$ and let a_ϕ be the function defined by (2.4.4). Let f be a non-negative function in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Then the function

$$f^{*\phi}(\theta,v)=f^{\#}\left(a_\phi\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right)\right),\quad(\theta,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$$

is equimeasurable to f, that is $\mu_{f^{*\phi}}=\mu_f$ where μ_f is defined by (2.1.7). The function $f^{*\phi}$ is called the decreasing rearrangement with respect to the microscopic energy $\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)$.

(4) Let $f\in\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ and ϕ_f is the potential associated to f defined by (2.1.3), we have

$$\iint\left(\frac{v^2}{2}+\phi_f(\theta)\right)(f(\theta,v)-f^{*\phi_f}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\ge0, \tag{2.4.6}$$

The next lemma, proved in Section 3.1 of [60], is a technical lemma about rearrangements which will be used in Lemma 2.4.6.

Lemma 2.4.2. *Let $\phi\in\mathcal{C}^2([0,2\pi])$ and $f\in\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, we have the following identity*

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{v^2}{2}+\phi(\theta)\right)f^{*\phi}(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v=\int_0^{+\infty}a_\phi^{-1}(s)f^{\#}(s)\mathrm{d}s.$$

In the rest of this Section, we adopt the following definition of minimizing sequences.

Definition 2.4.3 (Minimizing sequence)**.** *We shall say that $(f_n)_n$ is a minimizing sequence of (2.1.11) if $(f_n)_n$ is uniformly bounded and*

$$\mathcal{H}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H_0 \quad \text{and} \quad \|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

As mentionned at the beginning of this section, we need to link $\mathcal{H}(f_n)$ and $\mathcal{H}(f^{*\phi_n})$ to get compactness for f_n. Hence, we introduce a second problem of minimization

(2.4.7)
$$\mathcal{J}^0_{f^*} = \inf_{\int_0^{2\pi}\phi=0} \mathcal{J}_{f^*}(\phi) \text{ where } \mathcal{J}_{f^*}(\phi) = \iint \left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) f^{*\phi}(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'(\theta)^2\mathrm{d}\theta.$$

Lemma 2.4.4 (Monotonicity properties of $\mathcal{H}$ with respect to the transformation $f^{*\phi}$)**.** *We have the following inequalities:*

(1) Let $f \in \mathcal{E}$, for all $\phi \in H^2([0, 2\pi])$ such that $\phi(0) = \phi(2\pi)$ and $\int_0^{2\pi}\phi = 0$, we have $\mathcal{H}(f^{*\phi}) \leq \mathcal{J}_{f^*}(\phi)$.

(2) For all $f \in \mathcal{E}$, $H_0 \leq \mathcal{H}(f^{*\phi_f}) \leq \mathcal{J}_{f^*}(\phi_f) \leq \mathcal{H}(f)$ where H_0 is defined by (2.1.11). Besides $H_0 = \mathcal{J}^0_{f^*}$.

Proof. The first item of this lemma is proved exactly like item (2) of Lemma 2.3.2. Hence we have

$$\mathcal{J}_{f^*}(\phi) = \mathcal{H}(f^{*\phi}) + \frac{1}{2}\|\phi'_{f^{*\phi}} - \phi'\|^2_{\mathrm{L}^2} \tag{2.4.8}$$

Then, let us prove the right inequality of item (2). Let $f \in \mathcal{E}$, the hamiltonian can be written as

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f) &= \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right) f^{*\phi_f}(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi'_f(\theta)^2\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right)(f(\theta, v) - f^{*\phi_f}(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &= \mathcal{J}_{f^*}(\phi_f) + \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right)(f(\theta, v) - f^{*\phi_f}(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Using (2.4.6), we get that $\mathcal{H}(f^{*\phi}) \leq \mathcal{J}_{f^*}(\phi)$. Thanks to the two above inequalities, we easily deduce $H_0 = \mathcal{J}^0_{f^*}$. □

2.4.2. **Existence of ground states.** This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.10.

2.4.2.1. *Properties of the infimum.*

Lemma 2.4.5. *The variational problem (2.1.11) satisfies the following statements.*

(1) The infimum (2.1.11) exists i.e. $H_0 > -\infty$.

(2) For any minimizing sequence $(f_n)_n$ of the variational problem (2.1.11), we have the following properties:

(a) There exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ *such that* $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{f}$ *weakly in* L^1.
(b) We have $\|\phi_{f_n} - \phi_{\bar{f}}\|_{H^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

The proof of item (1) from Lemma 2.4.5 is similar to the one of Lemma 2.2.1. In the spirit of Lemma 2.2.1, noticing that $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_n^*\|_{\mathrm{L}^1}$ is bounded and using Dunford-Pettis's theorem, we get the weak convergence of $(f_n)_n$ in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. The proof of item (b) is similar to the one of item (2) in Lemma 2.2.1.

2.4.2.2. *Proof of Theorem 2.1.10.* We are now ready to prove Theorem 2.1.10.

Step 1: Existence of a minimizer.

From item (1) of Lemma 2.4.5, we know that H_0 is finite. Let us show that there exists a function which minimizes the variational problem (2.1.11). Let $(f_n)_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ be a minimizing sequence of (2.1.11). From item (a) of Lemma 2.4.5, there exists $\bar{f} \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ in L^1_w. From item (b) of Lemma 2.4.5, ϕ_{f_n} strongly converges to $\phi_{\bar{f}}$ in $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ and ϕ'_{f_n} strongly converges to $\phi'_{\bar{f}}$ in $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$.

In the following paragraphs, we will note $\phi_n := \phi_{f_n}$ and $\bar{\phi} := \phi_{\bar{f}}$. Notice using item (2) of Lemma 2.4.4 that $(\phi_n)_n$ is a minimizing sequence of (2.4.7). As in the proof of Theorem 2.1.6, we introduce a new minimizing sequence which has better compactness properties than $(f_n)_n$. The sequence $(f_0^{*\phi_n})_n$ is well-defined according to Lemma 2.4.1. Since $(\phi_n)_n$ is a minimizing sequence of (2.4.7) and using the second item of Lemma 2.4.4, we directly get $\mathcal{H}(f_0^{*\phi_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H_0$. The next step is to prove that $\mathcal{H}(f_0^{*\phi_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}(f_0^{*\bar{\phi}})$. In order to do that, let us show that $f_0^{*\phi_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^{*\bar{\phi}}$ strongly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. From general properties of rearrangements, see [59] and [68], we have $\|f_0^{*\phi_n}\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ and $\|f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ and therefore using Brezis-Lieb, see [18], it is sufficient to show that $f_0^{*\phi_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^{*\bar{\phi}}$ a.e. to get the strong convergence in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Using the dominated convergence theorem, we easily get that

$$a_{\phi_n}\left(\frac{v^2}{2} + \phi_n(\theta)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_{\bar{\phi}}\left(\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta)\right) \text{ a.e. up to a subsequence.}$$

As by hypothesis, $f_0 \in \mathcal{E}\cap\mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, $f_0^{\#}$ is continuous then $f_0^{*\phi_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^{*\bar{\phi}}$ a.e. up to an extraction of a subsequence. Thus, we get $\|f_0^{*\phi_n} - f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Then, from classical inequality about lower semicontinuous functions (see [59]) and the convergence in $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ of ϕ_n, we deduce that

$$H_0 \geq \iint \frac{v^2}{2} f_0^{*\bar{\phi}}(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \phi'_{f_0^{*\bar{\phi}}}(\theta)^2\mathrm{d}\theta = \mathcal{H}(f_0^{*\bar{\phi}}) \tag{2.4.9}$$

Since $f_0^{*\bar\phi} \in \mathcal{E}$ and is equimeasurable to f_0, we get $H_0 \leq \mathcal{H}(f_0^{*\bar\phi})$. Hence with the inequality (2.4.9), we deduce $H_0 = \mathcal{H}(f_0^{*\bar\phi})$ and $f_0^{*\bar\phi}$ is a minimizer of (2.1.11).

Step 2: The minimizer is a steady state of (2.1.1).

The minimizer $f_0^{*\bar\phi}$ is a stationary state of the system (2.1.1) and to prove that it is sufficient to show that $\bar\phi = \phi_{f_0^{*\bar\phi}}$. The proof is similar to the one of two-constraints case in Section 2.3.2.2, we use Lemma 2.4.4 and equality (2.4.8) to get the result.

2.4.3. **Orbital stability of the ground states.**

2.4.3.1. *Proof of Theorem 2.1.11.* This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.11. As we do not have the uniqueness of the minimizers under constraint of equimeasurability, we can only get the orbital stability of the set of minimizers and not the orbital stability of each minimizer.

First, we need to the following lemma which is at the heart of the proof of the compactness of minimizing sequences. This lemma will be proved at the end of the proof of Theorem 2.1.11.

Lemma 2.4.6. *Let $f_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^0([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ and let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of (2.1.11). Then $(f_n)_n$ has a weak limit $\bar f$ in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Denoting $\bar\phi := \phi_{\bar f}$, we have*

$$\int_0^{\|f_0\|_{\mathrm{L}^\infty}} B_{\bar\phi}(\mu_{f_0}(t)+\beta_{f_n,f_0^{*\bar\phi}}(t)) + B_{\bar\phi}(\mu_{f_0}(t)-\beta_{f_n,f_0^{*\bar\phi}}(t)) - 2B_{\bar\phi}(\mu_{f_0}(t))\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

where

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_{f,g}(t) = |\{(\theta,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R} : f(\theta,v)\leq t < g(\theta,v)\}|, \\ B_{\bar\phi}(\mu) = \iint_{\{a_{\bar\phi}(\frac{v^2}{2}+\bar\phi(\theta))<\mu\}} \frac{v^2}{2}+\bar\phi(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v. \end{array}\right. \tag{2.4.10}$$

Step 1: Compactness of the minimizing sequences

Let $(f_n)_n$ be a minimizing sequence of (2.1.11), let us show that $(f_n)_n$ is compact in $\mathcal{E}$. Using Lemma 2.4.5, there exists $\bar f \in \mathrm{L}^1$ such that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar f$ weakly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ and $\phi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar\phi$ strongly in $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ where $\bar\phi := \phi_{\bar f}$. Arguing as in the proof of Theorem 2.1.10 in Section 2.4.2.2, we also get $f_0^{*\phi_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^{*\bar\phi}$ strongly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Our aim is now to show that $\|f_n - f_0^{*\bar\phi}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. In order to do that, we will use some techniques about rearrangements introduced in [60]. In particular, we will use the following equality established in the proof of Theorem 1 in Section 2.3 in [60]

$$\|f_n - f_0^{*\bar\phi}\|_{\mathrm{L}^1} = 2\int_0^{+\infty} \beta_{f_n,f_0^{*\bar\phi}}(t)\mathrm{d}t + \|f_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|f_0\|_{\mathrm{L}^1} \tag{2.4.11}$$

where $\beta_{f,g}$ is defined in (2.4.10). The second term of (2.4.11): $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ goes to 0 when n goes to infinity. Indeed, according to Definition 2.4.3 of a minimizing sequence, we have: $\|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ then $\|f_n^*\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_n\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ using rearrangements properties, see [59]. Hence to prove that: $\|f_n - f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, we need to prove that $\int_0^{+\infty} \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. For this purpose, it is sufficient to show that $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Indeed, this a direct application of the dominated convergence theorem

- $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- $0 \leq \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \leq \mu_{f_0}(t)$ and $\int_0^{+\infty} \mu_{f_0}(t)\mathrm{d}t = \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ using Fubini's theorem.

To get the a.e. convergence to 0 of $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)$, we will use Lemma 2.4.6. By convexity of $B_{\bar{\phi}}$ given by Theorem 1 in [60],

$$B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t)) \geq 0$$

therefore Lemma 2.4.6 implies that

$$B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ for almost } t \geq 0.$$

Notice that $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(0) = 0$ and for all $t > 0$,

$$0 < \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \leq \frac{1}{t}\|f\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Thus the sequence $(\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t))_n$ is bounded and has a convergent subsequence. Let us suppose that $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \neq 0$, then by strict convexity of $B_{\bar{\phi}}$,

$$\begin{aligned} &B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t)) \\ &\qquad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + l) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - l) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t)) > 0. \end{aligned}$$

Absurd then $\beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ for almost $t \geq 0$. Hence $\|f_n - f_0^{*\bar{\phi}}\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Besides we have proved that $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{f}$ weakly in $\mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$, hence by uniqueness of the limit, we get $f_0^{*\bar{\phi}} = \bar{f}$. Since by definition, a minimizing sequence is uniformly bounded, to prove the compactness of the sequence $(f_n)_n$ in the energy space $\mathcal{E}$, there remains show that

$$\|v^2(f_n - \bar{f})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notice that

$$\iint v^2(f_n(\theta, v) - \bar{f}(\theta, v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 2(\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(\bar{f})) + \|\phi_n'\|_{\mathrm{L}^2}^2 - \|\bar{\phi}'\|_{\mathrm{L}^2}^2,$$

thus $\|v^2 f_n\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|v^2\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1}$ since $(f_n)_n$ is a minimizing sequence and $\bar{f}$ is a minimizer. Moreover $v^2 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v^2\bar{f}$ up to an extraction of a subsequence since $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{f}$ strongly in L^1. Thanks to Brezis Lieb's lemma (see [18]), we deduce that $\|v^2(f_n - \bar{f})\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

To conclude, we have proved that the sequence $(f_n)_n$ is compact in $\mathcal{E}$.

Step 2: Proof of the orbital stability

Let us argue by contradiction, let f_{i_0} be a steady state of (2.1.1) which minimizes (2.1.11). Assume that f_{i_0} is orbitally unstable. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$, a sequence $(f^n_{init})_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ and a sequence $(t_n)_n \in (\mathbb{R}^+_*)^{\mathbb{N}}$ such that $f^n_{init} \xrightarrow{\mathcal{E}} f_{i_0}$ and for all n, for all $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, for all f_i minimizer of (2.1.11),

$$\begin{cases} \|f^n(t_n, \theta + \theta_0, v) - f_i(\theta, v)\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0, \\ \text{or } \|v^2(f^n(t_n, \theta + \theta_0, v) - f_i(\theta, v))\|_{\mathrm{L}^1} > \varepsilon_0, \end{cases} \tag{2.4.12}$$

where $f^n(t_n, \theta, v)$ is a solution to (2.1.1) with initial data f^n_{init}. Let $g_n(\theta, v) = f^n(t_n, \theta, v)$. Notice that

$$\begin{aligned} \|(f^n_{init})^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} &= \|(f^n_{init})^* - f_{i_0}^*\|_{\mathrm{L}^1} \quad \text{since } f_{i_0} \in Eq(f_0), \\ &\leq \|f^n_{init} - f_{i_0}\|_{\mathrm{L}^1} \quad \text{by contractivity of rearrangement (see [59])}, \end{aligned}$$

but from conservation properties of the flow (2.1.1), we have $g_n^* = (f^n_{init})^*$ together with $\|g_n\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|f^n_{init}\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Therefore $g_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^*$ strongly in L^1 and $(g_n)_n$ is uniformly bounded. Finally, from item (2) of Lemma 2.4.4 and from the conservation property of the flow (2.1.1), we have

$$H_0 \leq \mathcal{H}(f_0^{*\phi_{g_n}}) \leq \mathcal{H}(g_n) \leq \mathcal{H}(f^n_{init}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H_0.$$

Thus $\mathcal{H}(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H_0$ and the sequence $(g_n)_n$ is a minimizing sequence of (2.1.11). According to the previous step, this sequence is compact, hence, up to an extraction of a subsequence, there exists $f_I \in \mathcal{E}$ such that $g_n \xrightarrow{\mathcal{E}} f_I$. This implies that

$$\|g_n - f_I\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{and} \quad \|v^2(g_n - f_I)\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.4.13}$$

Arguing as in the proof of Theorem 2.1.5 in Section 2.2.2.2, we prove that $\mathcal{H}(f_I) = H_0$ and that f_I is equimeasurable to f_{i_0}. We deduce that f_I is equimeasurable to f_0 and hence this is a minimizer of (2.1.11). We get a contradiction with (2.4.13) and (2.4.12). There remains to show Lemma 2.4.6.

Proof of Lemma 2.4.6. The existence of the weak limit $\bar{f}$ is given by item (3) of Lemma 2.4.5. Many techniques in this proof have been introduced in [60]. By convexity of $B_{\bar{\phi}}$, see Theorem 1 in [60], we have

$$\int_0^{\|f_0\|_{\mathrm{L}^\infty}} B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t))\mathrm{d}t \geq 0.$$

Using the remark following Theorem 1 in [60] , we have

$$\int_0^{\|f_0\|_{\mathrm{L}^\infty}} B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) + \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) + B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t) - \beta_{f_n, f_0^{*\bar{\phi}}}(t)) - 2B_{\bar{\phi}}(\mu_{f_0}(t))\mathrm{d}t \leq A_n + B_n$$

where

$$\begin{cases} A_n = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta)\right)(f_n(\theta,v) - f_0^{*\bar{\phi}}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v, \\ B_n = \int_0^{+\infty}[a_{\bar{\phi}}^{-1}(2\mu_{f_0}(s))\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) - a_{\bar{\phi}}^{-1}(\mu_{f_0}(s))\beta_{f_0^*,f_n^*}(s)]\mathrm{d}s. \end{cases}$$

Then let us show that $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. After integrating by parts, we get

$$A_n = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v^2}{2} + \bar{\phi}(\theta)\right)(f_n(\theta,v) - f_0^{*\bar{\phi}}(\theta,v))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = \mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(f_0^{*\bar{\phi}}) + \frac{1}{2}\|\phi_n' - \bar{\phi}'\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

We have seen in Step 1 of the proof of Theorem 2.1.10 in Section 2.4.2.2 that $\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(f_0^{*\bar{\phi}})$ converges to 0 and $\|\phi_n' - \bar{\phi}'\|_{\mathrm{L}^2}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; therefore $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finally let us show that $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. We have the following inequality using inequality (2.4.5)

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^{+\infty}[a_{\bar{\phi}}^{-1}(2\mu_{f_0}(s))\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) - a_{\bar{\phi}}^{-1}(\mu_{f_0}(s))\beta_{f_0^*,f_n^*}(s)]\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^{+\infty}\left(\frac{4\mu_{f_0}(s)^2}{32\pi^2} + \max\bar{\phi}\right)\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) - \left(\frac{\mu_{f_0}(s)^2}{32\pi^2} + \min\bar{\phi}\right)\beta_{f_0^*,f_n^*}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Using the following identity, see the proof of Proposition 4.1 in [61],

$$\int_0^{+\infty}\beta_{f_0^*,f_n^*}(s)\mathrm{d}s + \int_0^{+\infty}\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s = \|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1},$$

we get

$$B_n \leq \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{+\infty}\mu_{f_0}(s)^2\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s + (\max\bar{\phi} + \min\bar{\phi})\int_0^{+\infty}\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s - \min\bar{\phi}\|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Notice that $\min\bar{\phi}\|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ since $(f_n)_n$ is a minimizing sequence of (2.1.11). Besides

$$\begin{aligned} (\max\bar{\phi} + \min\bar{\phi})\int_0^{+\infty}\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s &\leq \max\bar{\phi}\int_0^{+\infty}\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s \\ &\leq \max\bar{\phi}\int_0^{+\infty}(f_n^* - f_0^*)_+\mathrm{d}s \\ &\leq \max\bar{\phi}\|f_n^* - f_0^*\|_{\mathrm{L}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Finally, let us prove that

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{+\infty}\mu_{f_0}(s)^2\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

First notice that $\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Indeed we shall apply the dominated convergence theorem to $\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) = \iint \mathbb{1}_{\{f_n^*(\theta,v)\leq s<f_0^*(\theta,v)\}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v$ for $s > 0$. We first have

- $\mathbb{1}_{\{f_n^*(\theta,v)\leq s<f_0^*(\theta,v)\}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\{f_0^*(\theta,v)\leq s<f_0^*(\theta,v)\}}$ a.e. since $f_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_0^*$ strongly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$,

- $\mathbb{1}_{\{f_n^*(\theta,v)\leq s<f_0^*(\theta,v)\}} \leq \mathbb{1}_{\{s<f_0^*(\theta,v)\}}$. But $\iint \mathbb{1}_{\{s<f_0^*(\theta,v)\}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = \mu_{f_0}^*(s) = \mu_{f_0}(s) < \infty$ since $f_0 \in \mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$.

Hence by the dominated convergence theorem, we get for all $s>0$, $\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. For $s=0$, $\beta_{f_n^*,f_0^*}(0) = |\varnothing| = 0$, thus for all $s\geq 0$, $\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. There remains to dominate the term $\mu_{f_0}(s)^2\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)$. Notice that $\mu_{f_0}(s)^2\beta_{f_n^*,f_0^*}(s) \leq \mu_{f_0}(s)^3$. However we have

$$\int_0^{+\infty} s^2 f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty}\left(\int_{0\leq s<\mu_{f_0}(t)} s^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\mu_{f_0}(t)^3\mathrm{d}t.$$

So to prove the integrability of $s\to\mu_{f_0}(s)^3$, it is sufficient to show that $\int_0^{+\infty}s^2 f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s<\infty$. Using equality (2.4.5), identity $\int f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s = \|f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ and Lemma 2.4.2, we get

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s^2 f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s &\lesssim \int_0^{+\infty}(a_{\bar\phi}^{-1}(s)+1)f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{+\infty} a_{\bar\phi}^{-1}(s)f_0^{\#}(s)\mathrm{d}s + \|f_0\|_{\mathrm{L}^1},\\ &= \iint\left(\frac{v^2}{2}+\bar\phi(\theta)\right)f_0^{*\bar\phi}(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v + \|f_0\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty\end{aligned}$$

since $f_0^{*\bar\phi}$ satisfies $H_0 = \mathcal{H}(f_0^{*\bar\phi})$ and $f_0\in\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$. Hence $\int_0^{+\infty}\mu_{f_0}(t)^3\mathrm{d}t<+\infty$. We conclude by dominated convergence that

$$\int_0^{+\infty}\mu_{f_0}(s)^2\beta_{f_n^*,f_0^*}(s)\mathrm{d}s \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Therefore $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ and the lemma is proved. □

2.4.3.2. *Expression of the minimizers.* From the proof of compactness of minimizing sequences in Section 2.4.3.1, we can deduce the expression of the steady states of (2.1.1) which minimizes (2.1.11). Indeed, we have proved that any minimizing sequences $(f_n)_n$ converge to a minimizer $\bar f$ in $\mathcal{E}$ which satisfies $\bar f = f_0^{*\bar\phi}$. Hence any minimizer $\bar f$ of (2.1.11) has the following expression:

$$\bar f = f_0^{\#}\left(a_{\bar\phi}\left(\frac{v^2}{2}+\bar\phi(\theta)\right)\right).$$

CHAPITRE 3

Méthodes numériques préservant les états stationnaires pour les modèles de type HMF

RÉSUMÉ. L'objectif principal de ce chapitre est l'élaboration de schémas numériques préservant exactement les états stationnaires des systèmes HMF de la forme $f_0(\theta, v) = F(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta))$ avec F une fonction décroissante. Nous commençons par construire des schémas qui conservent exactement un état stationnaire f_0 donné de la forme ci-avant. Une fois ces schémas construits, nous les comparons aux schémas classiques (type schéma de splitting et semi-lagrangien) et nous mettons en évidence leurs atouts dans l'étude de la stabilité orbitale des états stationnaires. Puis, pour obtenir un schéma encore plus performant, nous construisons un schéma qui préserve tous les états stationnaires f_0 de la forme $f_0(\theta, v) = F(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta))$. Nous le comparons aux schémas classiques. Pour finir, la dernière partie de ce chapitre vient compléter l'étude théorique menée au Chapitre 2 de cette thèse sur la stabilité des états stationnaires du système HMF Poisson.

L'objectif de ce chapitre est de construire des schémas numériques qui conservent exactement des états stationnaires donnés des systèmes Hamiltonian Mean Field (HMF) [2, 76]. On rappelle que les systèmes HMF sont de la forme suivante:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_\theta f - \partial_\theta \phi_f \partial_v f = 0, \quad (t,\theta,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \\ f(t=0,\theta,v) = f_{init}(\theta,v) \geq 0, \end{cases} \tag{3.0.14}$$

où $\mathbb{T}$ est le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $f = f(t,\theta,v)$ est la fonction de distribution. Le potentiel ϕ_f associé à la fonction de distribution f peut être défini de différentes manières selon le modèle HMF que l'on considère. Le modèle le plus populaire est de celui de HMF cosinus, souvent utilisé comme modèle jouet dans la littérature physique bien qu'il n'ait pas de signification directe [3, 6, 9, 31, 80, 87, 93, 94]. Le potentiel est défini pour $\theta \in \mathbb{T}$ par

$$\phi_f(\theta) = -\int_0^{2\pi} \rho_f(\theta') \cos(\theta - \theta') \mathrm{d}\theta', \qquad \rho_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta, v) \mathrm{d}v. \tag{3.0.15}$$

Il existe également d'autres sortes de potentiels comme le potentiel de Poisson ou le potentiel de Poisson écranté [30, 78]. Le cas du potentiel de Poisson écranté ne sera pas abordé ici. Rappelons que pour le modèle HMF avec potentiel de Poisson, dont nous avons étudié la stabilité des états stationnaires dans le Chapitre 2 de cette thèse, le potentiel est défini pour $\theta \in \mathbb{T}$ par

$$\partial_\theta^2 \phi_f = \rho_f - \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi}, \qquad \rho_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta, v) \mathrm{d}v \tag{3.0.16}$$

ou de manière équivalente par,

$$\phi_f(\theta) = \int_0^{2\pi} W(\theta - \tilde{\theta}) \rho_f(\tilde{\theta}) \mathrm{d}\tilde{\theta}, \tag{3.0.17}$$

où la fonction W est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$W \text{ est } 2\pi\text{-périodique }, \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad W(\theta) = -\frac{\theta^2}{4\pi} + \frac{|\theta|}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Dans l'optique d'étudier numériquement la stabilité orbitale des états stationnaires des systèmes HMF, on souhaite construire un schéma qui préserve exactement des états stationnaires f_0 donnés. Écrivons le système HMF (3.0.14) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + T_{\phi_f} f = 0, \quad \text{avec} \quad T_{\phi_f} f = v\partial_\theta f - \partial_\theta \phi_f \partial_v f, \\ f(0,\theta,v) = f_{init}(\theta,v). \end{cases} \tag{3.0.18}$$

On remarque qu'un état stationnaire f_0 vérifie $T_{\phi_{f_0}} f_0 = 0$. Construire un schéma numérique consiste, en partie, à discrétiser l'opérateur T_{ϕ_f}. Cependant, après l'avoir discrétisé en un opérateur numérique $T_{\phi_f}^{\Delta_\theta, \Delta_v}$, rien ne garantit que l'état stationnaire f_0 vérifie toujours $T_{\phi_{f_0}}^{\Delta_\theta, \Delta_v} f_0 = 0$. L'enjeu de ce chapitre est donc de trouver une "bonne" discrétisation de l'opérateur T_{ϕ_f} pour que les états stationnaires soient conservés

exactement au cours du temps.

La première Partie 3.1 de ce chapitre sera consacrée à la description de différentes méthodes standards pour résoudre numériquement les systèmes HMF (3.0.14). La Partie suivante 3.2 exposera la construction de deux schémas numériques conservant exactement un état stationnaire f_0 donné, pour l'un, et pour l'autre, un état stationnaire f_0 donné et l'état stationnaire nul. Il s'agit dans cette partie de résultats nouveaux. Dans la Partie 3.3.1, nous évoquerons des résultats généraux d'existence d'états stationnaires pour le système HMF cosinus. De tels résultats n'existent pas encore pour le système HMF Poisson, c'est pourquoi nous étudierons numériquement l'existence d'états stationnaires pour ce système dans la Partie 3.3.2. Puis dans la Partie 3.4, nous mettrons en oeuvre numériquement les différents schémas que nous avons introduits afin d'en déterminer, numériquement, les ordres de convergence. Dans la Partie 3.5, nous exposerons différents cas tests permettant de comparer nos nouveaux schémas aux schémas standards. La Partie 3.6 introduira un troisième schéma préservant tous les états stationnaires qui sont des fonctions décroissantes de $\frac{v^2}{2} + \phi$. La construction et la mise en oeuvre de ce schéma font l'objet de travaux en cours. Pour finir dans la Partie 3.9, une étude numérique de la stabilité orbitale des états stationnaires de type Maxwell-Boltzmann pour le système HMF Poisson viendra compléter l'étude théorique effectuée dans le Chapitre 2 de cette thèse.

3.1. Résolution numérique des systèmes HMF

L'objectif de cette partie est d'évoquer différentes méthodes numériques classiques permettant de résoudre de manière approchée le système HMF (3.0.14). Ces méthodes sont l'adaptation aux systèmes HMF de méthodes développées pour le système de Vlasov-Poisson. Leur coût de calcul est plus faible car pour les systèmes HMF, $(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ contrairement au système de Vlasov-Poisson où $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. La méthode PIC (Particle-In-Cells), couramment utilisée pour résoudre numériquement ce type de systèmes, ne sera pas décrite ici car elle n'a pas été utilisée au cours de cette thèse, pour plus de détails sur cette méthode voir les livres [17, 56].

3.1.1. **Méthode des différences finies.** Une première méthode simple consiste à résoudre cette équation par différences finies. On veut résoudre le système (3.0.14) sur un intervalle $[0, T]$ et on confond l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. Considérons

- une discrétisation en temps $t^n = n\Delta t$, $n = 0, .., N$ telle que $N\Delta t = T$,
- une discrétisation en espace $\theta_i = i\Delta\theta$, $i = 0...I$, telle que $\Delta\theta = \frac{2\pi}{I}$,
- une discrétisation en vitesse $v_j = -v_{\max} + j\Delta v$, $j = 0...J$, telle que $\Delta v = \frac{2v_{\max}}{J}$.

On définit une suite $(f^n)_n$ telle que $f^n = (f^n_{i,j})_{i,j}$ et $f^n_{i,j}$ approche $f(t^n, \theta_i, v_j)$. On utilise un schéma aux différences finies décentré amont et la suite est alors définie par récurrence

par l'égalité ci-dessous:

$$\frac{f_{ij}^{n+1}-f_{ij}^{n}}{\Delta t}+(v_j)_+\frac{f_{ij}^{n}-f_{i-1j}^{n}}{\Delta\theta}+(v_j)_-\frac{f_{i+1j}^{n}-f_{ij}^{n}}{\Delta\theta}$$
$$+(E_{f^n(\theta_i)})_+\frac{f_{ij}^{n}-f_{ij-1}^{n}}{\Delta v}+(E_{f^n}(\theta_i))_-\frac{f_{ij+1}-f_{ij}^{n}}{\Delta v}=0$$

où $(x)_+=\max(x,0)$ et $(x)_-=\min(x,0)$. De plus, le champ E_{f^n} est donné par

$$E_{f^n}(\theta)=-\partial_\theta\phi_{f^n}(\theta).$$

Rappelons que f^n étant connu, le potentiel ϕ_{f^n} se calcule en résolvant l'équation de Poisson donnée par (3.0.15) pour HMF cosinus et par (3.0.16) pour HMF Poisson. La périodicité en espace nous invite à utiliser des méthodes spectrales, cela sera détaillé dans la Partie 3.1.5. Les paramètres de discrétisation sont soumis à une condition CFL de stabilité. Par conséquent, si on prend un grand nombre de points en espace et vitesse, on est obligé de prendre un pas de temps très petit, ce qui entraîne des temps de calculs assez longs.

3.1.2. **Méthode de splitting en temps.** Le principe de cette méthode consiste à séparer une équation en plusieurs équations que l'on sait facilement résoudre à l'aide de méthodes standards (par exemple méthode spectrale ou semi-lagrangienne). Pour des généralités sur les méthodes de splitting, voir [40, 55]. Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées pour la résolution numérique des équations de type Vlasov et il existe une abondante littérature mathématique sur des résultats de convergence de ces méthodes [14, 24, 39]. Il est donc naturel d'appliquer ces méthodes de splitting aux systèmes HMF. Dans le cas de HMF, pour résoudre de manière approchée l'équation (3.0.14), on sépare l'équation de Vlasov en une équation de transport libre et une équation de transport non linéaire avec le potentiel:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t f+v\partial_\theta f=0,\\ \partial_t f-\partial_\theta\phi_f\partial_v f=0.\end{array}\right. \tag{3.1.1}$$

Puis, on considère une discrétisation en temps $t^n=n\Delta t$, $n=0,..,N$ telle que $N\Delta t=T$ où T est le temps final. On souhaite calculer une suite $(f^n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $f^n\simeq f(t^n)$. On calcule les termes de notre suite par récurrence, connaissant f^n au temps t^n, on détermine f^{n+1} en résolvant (3.0.14) par splitting avec donnée initiale f^n sur l'intervalle de temps $[t^n,t^{n+1}]$. Plus précisément, on procède comme suit.

(1) **Initialisation:** La donnée initiale f^0 est connue, on calcule le champ initial $E^0=-\partial_\theta\phi_{f^0}$ en résolvant l'équation de Poisson (par une méthode spectrale par exemple, cela sera détaillé dans la Partie 3.1.5).
(2) **Hérédité, passage de t^n à t^{n+1}:** La fonction f^n est connue, ainsi que le champ $E^n=-\partial_\theta\phi_{f^n}$.
   (a) On calcule f^* en résolvant, par méthode spectrale ou semi-lagrangienne, l'équation

$$\partial_t f+E^n\partial_v f=0 \tag{3.1.2}$$

avec donnée initiale f^n sur un demi-pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$.

(b) On calcule f^{**} en résolvant l'équation

$$\partial_t f + v\partial_\theta f = 0, \tag{3.1.3}$$

avec donnée initiale f^* sur un pas de temps Δt.

(c) On calcule la densité $\rho^{n+1} = \iint f^{**}$ et le champ correspondant E^{n+1} en résolvant l'équation de Poisson.

(d) On calcule f^{n+1} en résolvant l'équation

$$\partial_t f + E^{n+1}\partial_v f = 0 \tag{3.1.4}$$

avec donnée initiale f^{**} sur un demi-pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$.

Cette méthode d'ordre 2 s'appelle *splitting de Strang* et a été initialement introduite dans [88, 89]. Remarquons que la densité ρ^{n+1} calculée en utilisant f^{**} est égale à la densité calculée à partir de f^{n+1}. En effet, f^{n+1} est calculée à partir de f^{**} en résolvant (3.1.4) et on remarque en intégrant cette équation par rapport à v que $\partial_t \rho_f = 0$. Ainsi la densité n'est pas modifiée durant cette étape.

Dans les deux parties suivantes, nous présentons deux méthodes standards (spectrale et semi-lagrangienne) permettant de résoudre les équations (3.1.3), (3.1.2) et (3.1.4).

3.1.3. **Méthode de résolution spectrale.** Les méthodes de résolution spectrale ont, initialement, été introduites par Orszag [81] en 1971 pour des problèmes de mécanique des fluides afin d'obtenir une précision élevée lors de la résolution d'équations différentielles. Une très abondante littérature existe sur le sujet, pour ne citer que quelques ouvrages [22, 75]. Le terme *méthodes spectrales* est utilisé ici dans le sens standard en analyse numérique. C'est à dire qu'il désigne une classe de méthodes utilisant la Transformée de Fourier Rapide (FFT) et présentant des ordres de convergence très élevés quand la solution est très régulière [23]. On parle alors de *précision spectrale*: l'erreur tend vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance fixée de N où N est le nombre de points de la grille.

On souhaite résoudre le système suivant sur l'intervalle $[0, \Delta t]$:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_\theta f = 0, \\ f(0, \theta, v) = f_{init}(\theta, v). \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Pour ce faire, on applique la transformée de Fourier par rapport à la variable θ à l'équation (3.1.5). La fonction de distribution dépendant de trois variables (t, θ, v), lorsqu'on applique la transformée de Fourier par rapport à θ, les deux autres variables t et v sont vues comme des paramètres. On note $\hat{f}^\theta(t, k, v)$ la transformée de Fourier par rapport à la variable θ. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \hat{f}^\theta(t, k, v) + ikv\hat{f}^\theta(t, k, v) = 0, \\ \hat{f}^\theta(0, k, v) = \hat{f}^\theta_{init}(k, v). \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Ce système est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont la solution est donnée par

$$\hat{f}^{\theta}(\Delta t, k, v) = e^{-ikv\Delta t}\hat{f}^{\theta}_{init}(k, v).$$

On applique la transformée de Fourier inverse et on obtient $f^*(\theta, v)$ la solution de (3.1.5) au temps Δt. En pratique, pour calculer la transformée de Fourier de f par rapport à θ, on utilise l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) et pour calculer f^* à partir de $\hat{f}^{\theta}$ celui de la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT).

On souhaite ensuite résoudre sur $[0, \Delta t]$, le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + E_f(t,\theta)\partial_v f = 0, \quad \text{où} \quad E_f(t,\theta) = -\partial_\theta \phi_f(t,\theta), \\ f(0,\theta,v) = f^*(\theta, v). \end{array}\right. \tag{3.1.7}$$

On commence par fixer $E_f(t,\theta)$ à $E_{f^*}(\theta)$, cette dernière quantité ne dépend alors plus du temps et on est ramené à la résolution d'une équation de transport libre. On applique la transformée de Fourier par rapport à la variable v à l'équation (3.1.7). Les variables (t,θ) sont alors vues comme des paramètres. On note $\hat{f}^v(t,\theta,l)$ la transformée de Fourier par rapport à la variable v. On obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \hat{f}^v(t,\theta,l) + ilE_{f^*}(\theta)\hat{f}^v(t,\theta,l) = 0, \\ \hat{f}^v(0,\theta,l) = \hat{f^*}^v(\theta,l). \end{array}\right. \tag{3.1.8}$$

Il s'agit également d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont la solution est donnée par

$$\hat{f}^v(\Delta t,\theta,l) = e^{-il\Delta t E_{f^*}(\theta)}\hat{f^*}^v(\theta,l).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la transformée de Fourier inverse pour obtenir la solution de (3.1.7) au temps Δt.

3.1.4. **Méthode de résolution semi-lagrangienne.** L'utilisation de méthodes semi-lagrangiennes pour résoudre de manière approchée l'équation de Vlasov a, initialement, été introduite par Cheng et Knorr [32] en 1976. Les méthodes semi-lagrangiennes ont, ensuite, été réactualisées par Sonnendrücker [86] à la fin des années 90. Elles reposent sur le fait que la fonction de distribution est constante le long des courbes caractéristiques. De part leur structure, les méthodes semi-lagrangiennes s'appliquent naturellement sur la partie de transport libre ainsi que sur la partie de transport non linéaire des équations cinétiques, l'équation globale étant résolues en utilisant des méthodes de splitting, voir Partie 3.1.2.

Plus précisément, considérons l'équation de transport suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + a(x,t)\cdot\nabla_x f = 0, \\ f(0,x) = f_{init}(x), \end{array}\right. \tag{3.1.9}$$

où $f(t,x)$ est la fonction de distribution, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ avec $n > 0$ et a est le champ d'advection que l'on suppose suffisamment régulier pour avoir existence et unicité des

courbes caractéristiques. Ces dernières sont alors solutions du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = a(X(t), t), \\ X(s) = x. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

On notera $X(t; x, s)$ l'unique solution du système (3.1.10). Le principe est alors de remonter les caractéristiques afin de se ramener au temps précédent. Plus précisement, on procède comme suit:

(1) Au temps t^{n+1}, on calcule le pied de la caractéristique $X(t^n; x_i, t^{n+1})$ pour tout point x_i du maillage.
(2) La valeur cherchée $f^{n+1}(x_i) = f^n(X(t^n; x_i, t^{n+1}))$ se calcule par interpolation de la fonction f^n aux points $X(t^n; x_i, t^{n+1})$. Pour une bonne précision, on utilisera une méthode d'interpolation par des splines cubiques, voir [46]. La méthode semi-lagrangienne n'est pas assez précise lorsque l'interpolation est de bas degré, par exemple si on utilise une interpolation linéaire.

Comme on l'a vu dans la Partie 3.1.2, la technique du splitting d'opérateur permet de séparer l'équation de Vlasov du système (3.0.14) en deux équations d'advection (3.1.1). On est donc ramené à résoudre numériquement deux équations de transport. De nombreux résultats de convergence des schémas semi-lagrangiens pour le système de Vlasov-Poisson existent dans la littérature mathématique [13, 15, 21, 26, 44, 83].

Appliquons ces méthodes aux systèmes HMF. La première équation que l'on souhaite résoudre numériquement sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ est la suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_\theta f = 0, \\ f(t^n) = f^n. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

La fonction de distribution f dépend des trois variables $(t, \theta, v) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Le terme de transport étant seulement porté par la dérivée partielle par rapport à θ, on peut considérer l'équation (3.1.11) comme une équation de transport libre. Les courbes caractéristiques sont solutions du système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\Theta(t)}{\mathrm{d}t} = v, \\ \Theta(t^n) = \theta. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Ce système différentiel admet une unique solution donnée par $\Theta(t; \theta, t^n) = v(t - t^n) + \theta$. On procède comme suit:

(1) Au temps t^{n+1}, on calcule le pied de la caractéristique $\Theta(t^n; \theta, t^{n+1})$ pour tout point θ du maillage en espace.
(2) La valeur cherchée $f^*(\theta, v) = f^n(\Theta(t^n; \theta, t^{n+1}), v)$ se calcule par interpolation de la fonction f^n aux points $\Theta(t^n; \theta, t^{n+1})$.

On procède de manière similaire pour résoudre sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ le système

$$\begin{cases} \partial_t f + E^n\partial_v f = 0, \\ f(t^n) = f^*. \end{cases} \tag{3.1.13}$$

La quantité E^n ne dépendant pas de v, cette équation peut alors être vue comme une équation de transport libre. Les courbes caractéristiques sont alors solutions du système différentiel:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = E^n, \\ V(t^n) = v. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

Ce système admet, lui aussi, une unique solution donnée par $V(t; v, t^n) = E^n(t - t^n) + v$. On procède comme suit:

(1) Au temps t^{n+1}, on calcule le pied de la caractéristique $V(t^n; v, t^{n+1})$ pour tout point v du maillage en vitesse.
(2) La valeur cherchée $f^{n+1}(\theta, v) = f^n(\theta, V(t^n; v, t^{n+1}))$ se calcule par interpolation de la fonction f^n aux points $V(t^n; v, t^{n+1})$.

3.1.5. **Résolution de l'équation de Poisson.** Dans le système HMF (3.0.14), l'équation de Vlasov est couplée avec une équation de Poisson. Cette dernière permet de calculer le potentiel ϕ_f associé à la fonction de distribution f. Dans cette thèse, nous avons étudié deux types de système HMF couplés avec des équations de Poisson différentes. Pour le système HMF cosinus, l'expression du potentiel ϕ_f est donnée par (3.0.15). Pour le système HMF Poisson, le potentiel est donné de manière équivalente par (3.0.16) et (3.0.17). Dans cette partie, nous expliquons comment, numériquement, connaissant la fonction de distribution f, on peut calculer le potentiel ϕ_f associé.

3.1.5.1. *Cas du système HMF cosinus.* Une méthode spectrale est utilisée pour calculer le potentiel ϕ_f dans le cas du système HMF cosinus. Rappelons que l'expression du potentiel est donnée par (3.0.15) et passons en Fourier dans cette égalité. On obtient

$$\begin{cases} (\hat{\phi}_f)_k = 0, \quad \text{pour } |k| \neq 1, \\ (\hat{\phi}_f)_k = -\pi(\hat{\rho}_f)_k, \quad \text{pour } |k| = 1, \end{cases} \tag{3.1.15}$$

où $(\hat{g}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $g(\theta)$ du tore $\mathbb{T}$. Il nous reste alors à calculer $(\hat{\rho}_f)_k$ pour $|k| = 1$. Il suffit pour cela de remarquer que

$$(\hat{\rho}_f)_k = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(k, v)\mathrm{d}v = 2v_{\max}\widehat{\hat{f}^\theta}^v(k, 0). \tag{3.1.16}$$

Numériquement pour calculer la transformée de Fourier de f par rapport à θ et v, on utilise la transformée de Fourier rapide (FFT). A l'aide des expressions (3.1.16), (3.1.15) et de la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT), on obtient le potentiel ϕ_f.

3.1.5.2. *Cas du système HMF Poisson.* On utilise également une méthode spectrale pour calculer le potentiel dans le cas du système de HMF Poisson. Cependant, dans ce cas, on ne va pas utiliser l'expression de ϕ_f en fonction de ρ_f mais l'équation différentielle (3.0.16) vérifiée par ϕ_f. Passons en Fourier dans cette équation différentielle, on obtient

$$-k^2(\hat{\phi}_f)_k = \widehat{\left(\rho_f - \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^1}}{2\pi}\right)}_k. \tag{3.1.17}$$

Pour calculer la densité ρ_f à partir de f, on calcule l'intégrale la définissant à l'aide d'une méthode des rectangles. On calcule ensuite la transformée de Fourier du terme de droite grâce à l'algorithme de la FFT. On en déduit alors à l'aide de (3.1.17), la transformée de Fourier de ϕ_f. On obtient ϕ_f en appliquant Fourier inverse.

3.2. Schémas numériques préservant des états stationnaires donnés

Les schémas classiques de résolution des systèmes HMF, que nous avons évoqués dans la partie précédente, ne préservent pas de manière exacte les états stationnaires des systèmes HMF. Si on considère un état stationnaire f_0 d'un système HMF et qu'on choisit comme donnée initiale $f_{init} = f_0$, on aura, au temps T, $\|f_{init} - f(T)\| \neq 0$. Cette quantité sera certes "petite" mais non nulle. Cela peut poser problème lorsqu'on étudie, par exemple, la stabilité d'un état stationnaire f_0. Comme nous le verrons sur des exemples dans la Partie 3.5, certains états stationnaires stables perturbés vont évoluer avec les schémas classiques comme des états stationnaires instables. Pour remédier à ce problème, une solution est de construire un schéma numérique qui va conserver de manière exacte un état stationnaire f_0 donné. La construction d'un tel schéma fait l'objet de la sous-partie suivante.

3.2.1. Schéma numérique conservant exactement un état stationnaire f_0 donné.

Soit f_0 un état stationnaire de HMF (cosinus ou Poisson) donné et $\phi_0 := \phi_{f_0}$ le potentiel associé. Le schéma que nous construisons est basé sur une décomposition micro-macro. Le principe de la décomposition micro-macro a abondamment été exploité pour construire des schémas préservant l'asymptotique (Asymptotic preserving schemes) [58, 67, 71]. L'idée d'utiliser une telle décomposition pour construire un schéma qui préserve un état stationnaire a été introduite dans [45, 82]. Nous décomposons la fonction de distribution f comme suit

$$f = f_0 + g.$$

Injectons cette décomposition dans l'équation (3.0.18). On obtient, f_0 ne dépendant pas du temps,

$$\partial_t g + T_{\phi_f}(f_0 + g) = 0. \tag{3.2.1}$$

De plus, f_0 étant un état stationnaire, on a $T_{\phi_0} f_0 = 0$. L'équation (3.2.1) se réécrit alors

$$\partial_t g + (T_{\phi_f} - T_{\phi_0})(f_0) + T_{\phi_f} g = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme simplifiée suivante:

$$\partial_t g - (\partial_x \phi_g)\partial_v f_0 + T_{\phi_f} g = 0. \tag{3.2.2}$$

On résout cette équation avec une méthode de splitting en temps composée des trois étapes élémentaires suivantes:

(1) $\partial_t g = \partial_x \phi_g \partial_v f_0$,
(2) $\partial_t g + v\partial_x g = 0$,
(3) $\partial_t g - \partial_x \phi_f \partial_v g = 0$.

Si on intègre par rapport à v l'étape (1), on observe que $\rho_g = \int_{\mathbb{R}} g$ est constant et par conséquent ϕ_g aussi. L'équation de l'étape 1 est finalement une équation linéaire et donc s'intègre facilement en temps. Les équations des étapes (2) et (3) peuvent être résolues numériquement à l'aide de méthodes spectrales ou semi-lagrangiennes décrites dans les Parties 3.1.3 et 3.1.4.

Ce schéma, contrairement aux schémas classiques, présente l'avantage de conserver exactement l'état stationnaire f_0. En effet, si on choisit $f_{init} = f_0$ comme donnée initiale alors $g_{init} = 0$ et comme le splitting en temps conserve la solution nulle, on obtient pour tout temps T, $f(T) = f_0$ en double précision. Cependant, si on choisit une donnée initiale nulle, la solution au temps T n'est pas nulle. En effet, on a alors $g = -f_0$ et rien ne garantit que g soit conservé de manière exacte par notre splitting. On aimerait donc construire un schéma qui conserve l'état nul, trivialement stationnaire, ainsi qu'un état stationnaire f_0 donné. La construction d'un tel schéma est détaillée dans la partie suivante.

3.2.2. **Schéma numérique conservant exactement deux états stationnaires donnés dont l'état stationnaire nul.** Soit f_0 un état stationnaire de HMF (cosinus ou Poisson) donné et $\phi_0 := \phi_{f_0}$ le potentiel associé. Comme le schéma précédent, la construction est basée sur une décomposition micro-macro. La fonction de distribution f se décompose comme suit:

$$f = \underline{f} + g, \tag{3.2.3}$$

avec $\underline{f} = \Pi_0 f := \frac{\iint f}{\iint f_0} f_0$. On remarque que l'opérateur Π_0 est un projecteur et que $\underline{f}$ ne dépend pas du temps. En effet, la norme 1 de f est conservée au cours du temps par le système HMF. Cependant, notons que $\underline{f}$ n'est pas un état stationnaire du système HMF mais qu'il vérifie

$$T_{\phi_0} \underline{f} = 0 \tag{3.2.4}$$

car $T_{\phi_0}(\lambda f_0) = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Injectons la décomposition (3.2.3) dans l'équation (3.0.18), on obtient

$$\partial_t g + T_{\phi_f}(\underline{f} + g) = 0.$$

Grâce à l'égalité (3.2.4), l'équation se réécrit

$$\partial_t g + (T_{\phi_f} - T_{\phi_0})\underline{f} + T_{\phi_f} g = 0.$$

On peut encore simplifier l'équation comme suit

$$\partial_t g - \partial_x(\underline{\phi} + \phi_g - \phi_0)\partial_v \underline{f} + T_{\phi_f} g = 0, \tag{3.2.5}$$

où $\underline{\phi} = \phi_{\underline{f}}$. On résout alors cette équation avec une méthode de splitting en temps composée des trois étapes élémentaires suivantes:

(1) $\partial_t g = \partial_x(\underline{\phi} + \phi_g - \phi_0)\partial_v f_0$,
(2) $\partial_t g + v\partial_x g = 0$,
(3) $\partial_t g - \partial_x \phi_f \partial_v g = 0$.

Si on intègre par rapport à v, l'équation de l'étape (1), on obtient comme pour le schéma précédent que ϕ_g est constant. Or ϕ_0 et $\underline{\phi}$ ne dépendent pas non plus du temps et donc l'équation de l'étape (1) est linéaire et s'intègre facilement en temps. Les équations des étapes (2) et (3) peuvent être résolues numériquement à l'aide de méthodes spectrales ou semi-lagrangiennes décrites dans les Parties 3.1.3 et 3.1.4.

Le schéma ainsi construit préserve exactement l'état stationnaire f_0. En effet, partons de la donnée initiale $f_{init} = f_0$, on a alors $\underline{f} = f_0$ et donc $g = 0$. Le splitting en temps conservant la solution nulle, on obtient pour tout temps T, $f(T) = f_0$ en double précision. Vérifions que ce schéma conserve également la solution nulle, si on part de la donnée initiale $f_{init} = 0$, on a $\underline{f} = 0$ et donc $g = 0$. Le splitting en temps conservant la solution nulle, on obtient le résultat attendu. Ainsi ce deuxième schéma conserve bien l'état stationnaire f_0 que l'on s'est donné ainsi que la solution nulle.

3.3. Existence d'états stationnaires pour les systèmes HMF cosinus et HMF Poisson

Dans la Partie 3.2 précédente, nous avons construit deux schémas numériques préservant des états stationnaires donnés. Ainsi, il est nécessaire de connaître des états stationnaires des systèmes HMF et de savoir les calculer numériquement. C'est pourquoi, dans cette partie, nous nous intéressons à l'existence d'états stationnaires inhomogènes de la forme

$$f_0(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta)\right), \tag{3.3.1}$$

avec F une fonction décroissante. Comme nous le verrons, pour le système HMF cosinus, il existe déjà des résultats permettant d'affirmer l'existence d'états stationnaires inhomogènes sous condition que la fonction F vérifie certaines propriétés, voir [57] et [31]. En ce qui concerne le système de HMF Poisson, il n'existe pas encore de résultats sur l'existence d'états stationnaires inhomogènes. Nous nous limiterons donc à la détermination numérique d'états stationnaires inhomogènes de la forme (3.3.1) pour les distributions de Maxwell-Boltzmann.

3.3.1. **Pour le système HMF cosinus.**

3.3.1.1. *Résultat théorique.* Dans le cas du système HMF cosinus, le potentiel vérifie l'égalité (3.0.15), cette relation peut se réécrire

$$\phi_f(\theta) = -M_1 \cos(\theta) - M_2 \sin(\theta) \tag{3.3.2}$$

où

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \rho_f(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad M_2 = \int_0^{2\pi} \rho_f(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

On cherche l'existence d'états stationnaires de la forme

$$f_0(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} - M_0\cos(\theta)\right). \tag{3.3.3}$$

Le paramètre M_0 est un réel positif appelé, dans la littérature physique, *magnétisation* de l'état stationnaire f_0. Il est clair que si $M_0 = 0$, il existe toujours des états stationnaires de la forme (3.3.3), on parlera d'états stationnaires homogènes. La Proposition 4.6.1 de [57] fournit une condition suffisante sur la fonction F qui assure l'existence d'états stationnaires inhomogènes i.e. tels que $M_0 > 0$. Il existe, dans la littérature physique, beaucoup d'exemples de fonctions F pour lesquelles une magnétisation non nulle existe, pour en citer quelques unes:

- Distributions de Maxwell-Boltzmann (voir [7, 8, 29, 31])
$$F(e) = \alpha e^{-\beta e}.$$
- Distributions de Lynden-Bell (voir [27])
$$F(e) = \frac{\alpha}{1 + e^{\beta e}}.$$
- Distributions de Tsallis à support compact (voir [27, 28])
$$F(e) = \alpha (E - e)^{\frac{1}{q-1}} \mathbb{1}_{\{E \geq e\}}(e).$$
- Distributions de Water-bag (voir [7])
$$F(e) = \alpha \mathbb{1}_{\{E \geq e\}}(e).$$

Notons que l'existence d'une magnétisation non nulle dépend des divers paramètres α, β, E, q. Par exemple, dans le cas où F est une distribution de Maxwell-Boltzmann, la Proposition 4.6.4 de [57] nous assure que si les paramètres α et β vérifient $\alpha\sqrt{\beta} < \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, il existe $M_0 > 0$ tel que f_0 de la forme (3.3.3) soit un état stationnaire inhomogène de (3.0.14). Ce résultat est également montré dans [31]. Dans [61] est démontré un critère de stabilité orbitale pour les états stationnaires fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. La Proposition 4.6.5 de [57], quant à elle, traite le cas particulier des distributions de Maxwell-Boltzmann et nous assure qu'un état stationnaire inhomogène de type Maxwell-Boltzmann est orbitalement stable. Ainsi, si un état stationnaire inhomogène de type Maxwell-Boltzmann existe, il est orbitalement stable. Cette propriété nous sera utile lorsqu'on effectuera des cas tests pour comparer les schémas que nous avons construits dans la Partie 3.2 aux schémas standards (type splitting semi-lagrangien).

3.3.1.2. *Détermination numérique dans le cas d'une distribution de type Maxwell-Boltzmann.* On cherche à calculer $M_0 > 0$ tel que f_0 de la forme (3.3.3) avec F une distribution de Maxwell-Boltzmann soit un état stationnaire de HMF cosinus. Cherchant f_0 de la forme (3.3.3), il doit vérifier l'égalité $-M_0 \cos(\theta) = \phi_{f_0}(\theta)$, il faut donc que M_0 vérifie l'équation suivante

$$M_0 = \iint \alpha e^{-\beta\left(\frac{v^2}{2} - M_0 \cos(\theta)\right)} \cos(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v. \tag{3.3.4}$$

On choisit α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 1$, l'équation (3.3.4) se simplifie alors en

$$M_0 = \frac{\int_0^{2\pi} e^{\beta M_0 \cos\theta} \cos\theta \mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi} e^{\beta M_0 \cos\theta} \mathrm{d}\theta}. \tag{3.3.5}$$

On peut montrer, de manière théorique, voir [31] ou la Section 6 du Chapitre 4 de [57], que l'équation (3.3.5) possède une solution strictement positive si et seulement si $\beta > 2$. Sinon $M_0 = 0$ est la seule solution de cette équation. En procédant comme dans [57], on résout numériquement l'équation (3.3.5) par dichotomie. Le graphe ci-dessous, porté par la Figure 3, représente l'évolution de M_0 en fonction de β.

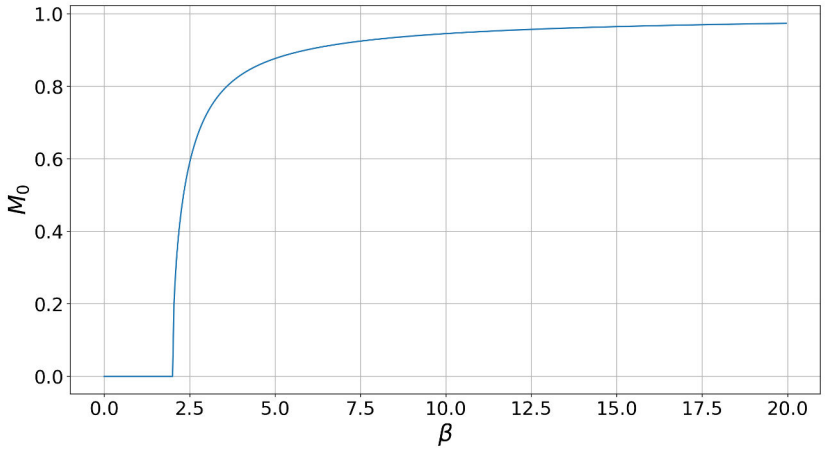


FIGURE 3. Evolution de M_0 en fonction de β.

On retrouve numériquement le fait que $\beta = 2$ est la valeur critique en dessous de laquelle $M_0 = 0$ est la seule solution. Dans les Parties 3.5 et 3.8, on testera nos schémas numériques sur un état stationnaire de type Maxwell-Boltzmann, c'est à dire un état stationnaire de la forme suivante:

$$f_0(\theta, v) = \alpha e^{-\beta\left(\frac{v^2}{2} - M_0 \cos\theta\right)} \quad \text{avec } \alpha \text{ tel que } \|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 1. \tag{3.3.6}$$

On prendra les paramètres suivants:

$$\beta = 10 \quad \text{et} \quad M_0 \simeq 0.9455421864232982.$$

La précision de la magnétisation M_0 à l'erreur machine est importante pour que l'état stationnaire f_0 calculé soit le "plus possible" un état stationnaire de HMF cosinus. En effet, la construction des schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires donnés, décrite à la Partie 3.2, repose sur le fait qu'un état stationnaire f_0 vérifie, au niveau continu, $T_{\phi_{f_0}} f_0 = 0$. Si la magnétisation M_0 n'est pas calculée de façon suffisamment précise, la valeur de $T_{\phi_{f_0}} f_0$ sera trop éloignée de 0 et le schéma obtenu ne sera pas consistant en temps avec le schéma semi-lagrangien classique (splitting en temps + semi-lagrangien).

3.3.2. **Pour le système HMF Poisson.** Il n'existe pas, pour l'heure, de résultats généraux assurant l'existence d'états stationnaires inhomogènes de la forme (3.3.1) du système HMF (3.0.14) dans le cas d'un potentiel de Poisson (3.0.16). Nous avons donc commencé par rechercher numériquement des états stationnaires de la forme (3.3.1) avec F une distribution de Maxwell-Boltzmann pour le système HMF Poisson.

Dans la suite, on étudie donc numériquement l'existence d'états stationnaires de la forme

$$f_0(\theta, v) = \alpha \exp\left(-\beta\left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta)\right)\right). \tag{3.3.7}$$

Déterminer un état stationnaire f_0 de la forme (3.3.7) revient à déterminer le potentiel ϕ_{f_0} associé. On choisit le paramètre α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 2\pi$, ainsi le potentiel ϕ_{f_0} satisfaisant l'équation de Poisson (3.0.16), il vérifie le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \phi'' = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} e^{-\beta\phi}} e^{-\beta\phi} - 1, \\ \phi(0) = \phi(2\pi), \\ \int_0^{2\pi} \phi = 0. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Tout d'abord, remarquons que si la fonction ϕ est solution de (3.3.8) alors sa translatée $\tilde{\phi}(\theta) = \phi(\theta + \gamma)$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$, est également solution de (3.3.8). Ainsi, dès qu'il existe un état stationnaire inhomogène, il en existe, en fait, une infinité et ils sont tous égaux à translation près. L'objectif est donc de déterminer les états stationnaires distincts à translation près. L'équation du système (3.3.8) se réécrit

$$\phi'' = \mu_\phi e^{-\beta\phi} - 1 \quad \text{avec} \quad \mu_\phi = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} e^{-\beta\phi}} > 0.$$

Posons la fonction $\psi = \phi + C$ où ϕ est une solution du système (3.3.8) et C est l'unique réel tel que $\mu_\phi e^{\beta C} = 1$. La fonction ψ est alors solution du système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \psi'' = e^{-\beta\psi} - 1, \\ \psi(0) = \psi(2\pi). \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Réciproquement, si ψ est solution du système (3.3.9), la fonction $\phi = \psi - C$ avec $C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi$ est solution du système (3.3.8). Il est donc équivalent de résoudre le système (3.3.8) ou le système (3.3.9). Introduisons le système de Cauchy suivant paramétré par un réel λ:

$$\begin{cases} \psi'' = e^{-\beta\psi} - 1, \\ \psi(0) = \lambda, \\ \psi'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

L'ensemble $\{\psi_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ des solutions du système (3.3.10) paramétrées par λ contient, à translation près, toutes les solutions du système (3.3.9). En effet, soit ψ_λ l'unique solution

du système (3.3.10), définissons l'application

$$g : \lambda \to \psi_\lambda(0) - \psi_\lambda(2\pi). \tag{3.3.11}$$

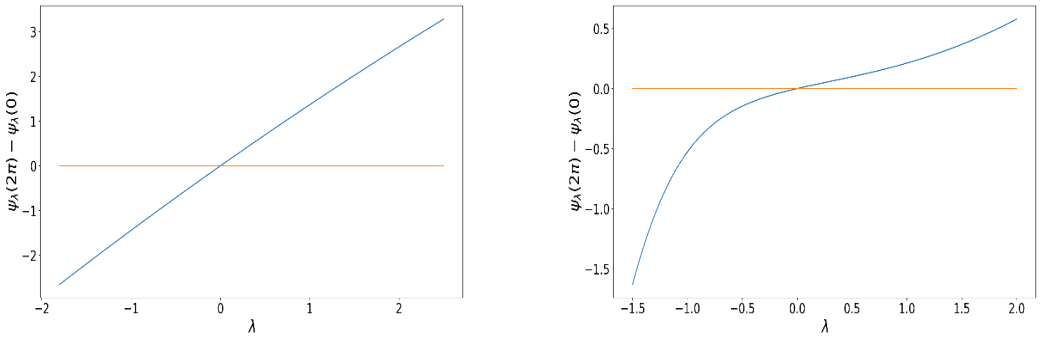
Cette fonction s'annule toujours au moins en un point, $\lambda = 0$, quelle que soit la valeur du paramètre β. Notons λ_0 un zéro de la fonction g, la fonction associée ψ_{λ_0} est alors solution du système (3.3.9). De plus, en multipliant l'équation du système (3.3.10) par ψ' et en intégrant entre 0 et 2π, on remarque que $\psi'_{\lambda_0}(0) = \psi'_{\lambda_0}(2\pi)$. Quitte à les translater pour que leur maximum soit atteint en 0, toutes les solutions ψ de (3.3.9) sont de la forme ψ_{λ_0} avec $\lambda_0 = \psi(0)$. Pour finir, on obtient toutes les solutions de (3.3.8) en posant $\phi = \psi_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$.

Ainsi pour étudier, pour des valeurs de β données, l'existence d'états stationnaires de la forme (3.3.7), nous avons suivi la démarche ci-dessous:

(1) Résoudre numériquement le système (3.3.10). Nous avons pour cela utilisé une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
(2) Chercher numériquement les zéros de la fonction g définie par (3.3.11). Pour cela, nous avons procédé par dichotomie.
(3) Calculer les constantes $C_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{\lambda_0}$ avec λ_0 zéros de la fonction g et ψ_{λ_0} solutions du système (3.3.10). Nous avons utilisé une méthode des rectangles pour calculer les intégrales.
(4) Poser $\phi = \psi_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$ pour obtenir les potentiels associés aux états stationnaires de la forme (3.3.7).

Les observations qui suivent ne se veulent pas exhaustives mais ont pour but de donner un bref aperçu du nombre et de la nature des états stationnaires de la forme (3.3.7) en fonction du paramètre β. Nous avons observé les situations suivantes:

a) Pour $\beta < 1$, la fonction g définie par (3.3.11) s'annule une unique fois en $\lambda = 0$. Le potentiel correspondant est $\phi = 0$, ainsi pour $\beta < 1$, il n'existe pas d'états stationnaires inhomogènes de la forme (3.3.7). La Figure 4 ci-dessous représente l'évolution de g en fonction de λ pour deux paramètres $\beta < 1$ différents.



(a) $\beta = 0.1$. (b) $\beta = 0.8$.

FIGURE 4. Evolution de g en fonction de λ.

b) Pour $\beta = 1$, le graphe de la fonction g définie par (3.3.11) présente un plateau. Il y donc une infinité de points en lesquels la fonction g s'annule comme le montre la Figure 5. On obtient alors un continuum d'états stationnaires.

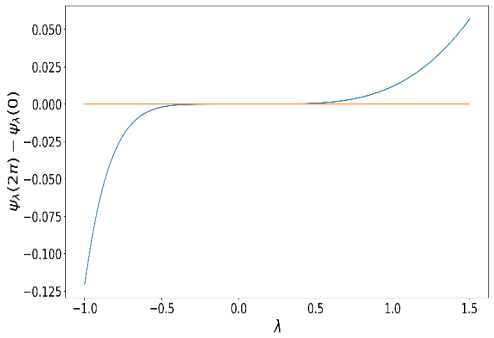
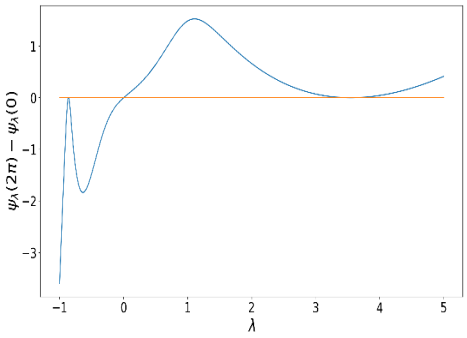
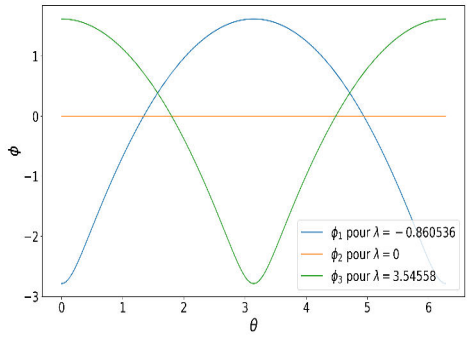


FIGURE 5. Evolution de g en fonction de λ pour $\beta = 1$.

c) Pour $\beta \in]1, 4]$, la fonction g, définie par (3.3.11), s'annule en trois points disctincts λ_1, $\lambda_2 = 0$ et λ_3, rangés dans l'ordre croissant. Notons ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 les potentiels associés. L'état stationnaire f_2 associé au potentiel ϕ_2 est donc un état stationnaire homogène. En calculant, les potentiels ϕ_1 et ϕ_3, on observe que ce sont les mêmes à translation près. Ainsi les états stationnaires f_1 et f_3 associés seront égaux à translation près. Pour résumer, pour $\beta \in]1, 4]$, il existe un état stationnaire homogène et, à translation près, un unique état stationnaire inhomogène comme le montre la Figure 6.



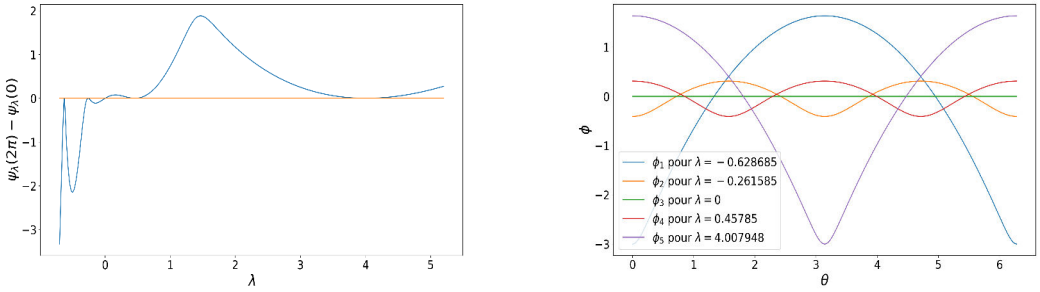
(a) Evolution de g en fonction de λ.



(b) ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3.

FIGURE 6. Détermination des états stationnaires pour $\beta = 3$.

d) Pour $\beta \in]4, 9]$, la fonction g, définie par (3.3.11), s'annule en cinq points distincts λ_i avec $i = 1..5$, les points étant rangés dans l'ordre croissant. Notons ϕ_i, pour $i = 1...5$, les potentiels associés. On a $\lambda_3 = 0$ et donc f_3, état stationnaire associé au potentiel ϕ_3, est un état stationnaire homogène. On remarque que les quatre autres potentiels non nuls vont par paire. Les potentiels ϕ_1 et ϕ_5, respectivement les potentiels ϕ_2 et ϕ_4, sont les mêmes potentiels à une translation près. Ainsi pour $\beta \in]4, 9]$, il existe un état stationnaire homogène et, à translation près, deux états stationnaires inhomogènes distincts comme le montre la Figure 7.

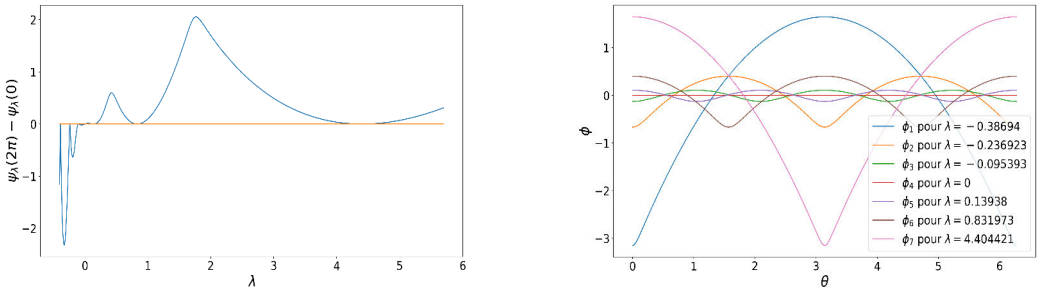


(a) Evolution de g en fonction de λ.

(b) ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 et ϕ_5.

FIGURE 7. Détermination des états stationnaires pour $\beta = 5$.

e) Pour $\beta \in]9, 20]$, la fonction g, définie par (3.3.11), s'annule en sept points distincts λ_i avec $i = 1..7$, les points étants rangés dans l'ordre croissant. Notons ϕ_i, pour $i = 1...7$, les potentiels associés. On a $\lambda_4 = 0$ et donc f_4, état stationnaire associé au potentiel ϕ_4, est un état stationnaire homogène. On remarque que les six autres potentiels non nuls vont par paire. Les potentiels ϕ_1 et ϕ_7, les potentiels ϕ_2 et ϕ_6, les potentiels ϕ_3 et ϕ_5 sont les mêmes potentiels à une translation près. Ainsi pour $\beta \in]9, 20]$, il existe un état stationnaire homogène et, à translation près, trois états stationnaires inhomogènes distincts comme le montre la Figure 8.



(a) Evolution de g en fonction de λ.

(b) ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6 et ϕ_7.

FIGURE 8. Détermination des états stationnaires pour $\beta = 10$.

f) On observe que le nombre d'états stationnaires inhomogènes distincts croît avec β. On a notamment observé que pour $\beta = 30$, on avait, à translation près, quatre états stationnaires inhomogènes distincts.

Pour déterminer numériquement les états stationnaires de la forme (3.3.7), il est également possible d'utiliser une méthode spectrale. Passons en Fourier dans l'équation (3.3.8), on obtient

$$\begin{cases} -k^2(\hat{\phi})_k = \left(\widehat{\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} e^{-\beta\phi}} e^{-\beta\phi}} - 1\right)_k, \\ (\hat{\phi})_0 = 0. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

On définit alors par récurrence une suite ϕ^n telle que

- $\phi^0 = \phi_{init}$ est donné,
- ϕ^n étant donné, on calcule, en utilisant l'algorithme de la Transformée de Fourier rapide (FFT), la transformée de Fourier de
$$\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} e^{-\beta\phi^n}} e^{-\beta\phi^n} - 1,$$
- On en déduit, avec l'équation (3.3.12), la valeur de $\widehat{\phi^{n+1}}$.
- En utilisant l'algorithme de la Transformée de Fourier rapide inverse (IFFT), on calcule ϕ^{n+1}.

On calcule successivement les termes de cette suite, on arrête lorsque la suite converge i.e. lorsque $\|\phi^n - \phi^{n+1}\| \leq \varepsilon$. Numériquement, on prendra ε de l'ordre de 10^{-13}.

Numériquement, trois situations apparaissent selon la valeur de β pour un ϕ_{init} donné.

(1) Lorsque $\beta < 1$, l'équation (3.3.8) ne semble avoir qu'une seule solution, $\phi = 0$.
(2) Lorsque $\beta = 1$, la suite ϕ^n ne semble pas converger.
(3) Lorsque $\beta > 1$, la suite ϕ^n converge vers une fonction ϕ non nulle. Or, on sait que $\phi = 0$ est solution de l'équation (3.3.8). Ainsi l'équation (3.3.8) semble avoir deux solution ϕ_1 et ϕ_2 distinctes, dont l'une est nulle.

Lorsqu'on considère une nouvelle donnée initiale $\tilde{\phi}_{init}$, les trois mêmes cas se présentent selon les valeurs de β. Notamment, pour $\beta > 1$, la suite ϕ^n converge vers une solution non nulle $\tilde{\phi}_1$. Ainsi, on obtient toujours deux solutions distinctes $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$ avec $\tilde{\phi}_2 = 0$ pour l'équation (3.3.8). On observe que la solution $\tilde{\phi}_1$ est une translatée de la fonction ϕ_1 obtenue pour la donnée initiale ϕ_{init}. Ainsi pour un $\beta > 1$ fixé, l'équation (3.3.8) semble n'avoir, à translation près, que deux solutions distinctes dont l'une est nulle.

L'inconvénient de cette méthode de point fixe est qu'on ne sait pas si on a accès à tous les états stationnaires. D'ailleurs, l'étude menée avec la méthode de paramétrisation d'une équation différentielle nous montre l'existence d'états stationnaires supplémentaires qui ne sont pas atteints par la méthode spectrale. Une explication à cela pourrait être que ce sont des états stationnaires instables. Nous verrons si c'est le cas dans la Partie 3.9. En revanche, l'état stationnaire obtenu est plus précis qu'avec la méthode de paramétrisation

car dans cette dernière, il y a une erreur d'approximation qui est faite lorsqu'on calcule par dichotomie le réel λ, zéro de la fonction g définie par (3.3.11).

3.4. Mise en oeuvre numérique des différents schémas

3.4.1. **Mise en oeuvre numérique des schémas de splitting spectral et semi-lagrangien.** Pour résoudre numériquement le système (3.0.14), on discrétise en temps en utilisant un splitting de Strang, voir Partie 3.1.2, puis pour résoudre les trois équations de transport (3.1.3), (3.1.2) et (3.1.4), on utilise une méthode spectrale (respectivement semi-lagrangienne) décrite à la Partie 3.1.3 (respectivement Partie 3.1.4). Selon que l'on résout le système de HMF cosinus ou HMF Poisson, on calcule de manière différente le potentiel, voir les Parties 3.1.5.1 et 3.1.5.2. On obtient alors deux schémas différents que j'appellerai *schéma spectral cosinus* (respectivement *schéma semi-lagrangien cosinus*) et *schéma spectral Poisson* (respectivement *schéma semi-lagrangien Poisson*).
En pratique, on confond l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. On pose $v_{\max} = 10$, cette valeur est choisie suffisamment grande pour qu'on puisse considérer que les fonctions de distribution sont nulles au bord du domaine en v. On discrétise ce domaine sur une grille uniforme de taille $N \times M$ dont les noeuds seront notés (θ_k, v_j) pour $k \in [0, N-1]$ et $j \in [0, M-1]$. On note les pas d'espace et de vitesse:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{2v_{\max}}{M}.$$

On choisit $N = M = 2^m$, avec m de l'ordre de 7 ou 8, dans le but d'optimiser notre utilisation de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) et de son inverse (IFFT).

3.4.1.1. *Schéma spectral.* Vérifions sur des exemples les ordres de convergence en temps, en espace et vitesse des schémas spectraux cosinus et Poisson. A partir d'une solution de référence calculée avec un schéma semi-lagrangien cosinus, respectivement Poisson, nous avons établi des courbes de convergence. Les deux solutions de référence sont calculées à partir de la donnée initiale suivante:

$$f_{init}(\theta, v) = e^{-\frac{v^2}{2}} \left(1 + \frac{\sin(\theta)^2}{2 + \cos(\theta)}\right),$$

pour un temps final $T = 0.2$ et un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{300}$. La grille en espace/vitesse utilisée est de taille $2^{10} \times 2^{10}$. Pour le schéma spectral cosinus, nous obtenons la courbe de convergence en temps représentée sur la Figure 9. Le schéma obtenu est bien d'ordre 2 en temps comme le prédisait l'utilisation du splitting de Strang. On montre également que le schéma spectral Poisson est d'ordre 2 en temps.

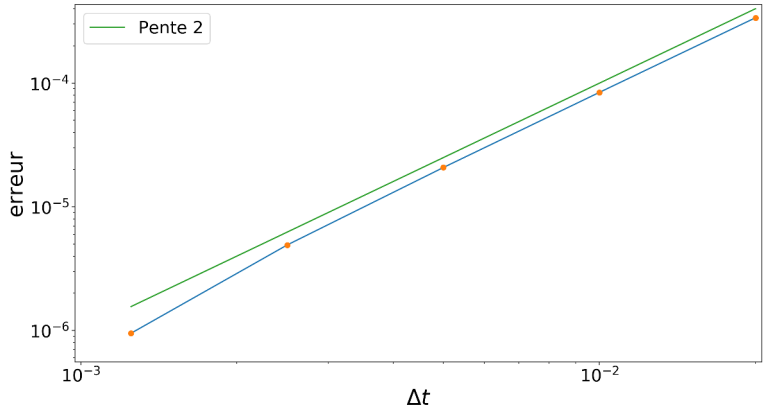


FIGURE 9. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas d'espace pour le schéma spectral cosinus.

Concernant les ordres de convergence en espace et vitesse, nous avons calculé simultanément les ordres de convergence en espace et vitesse en choisissant $N = M$. Pour le schéma spectral cosinus, en prenant un pas de temps $\Delta t = \frac{0.2}{80}$, nous avons obtenu la courbe de convergence en espace représentée sur la Figure 10. On observe que le schéma a une précision spectrale en espace et vitesse. Il en est de même pour le schéma spectral Poisson.

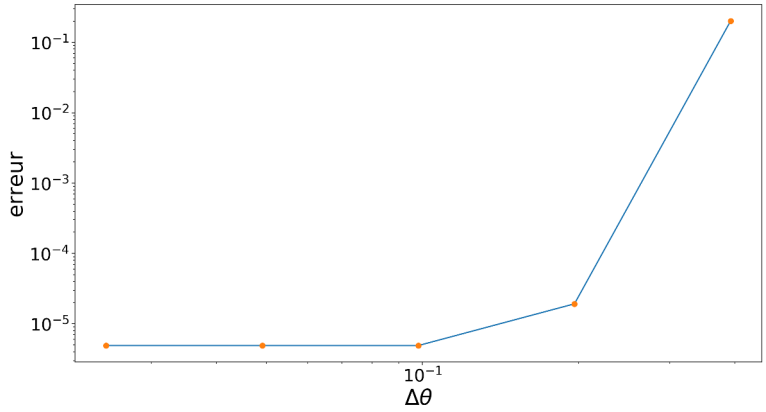


FIGURE 10. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas d'espace pour le schéma spectral cosinus.

3.4.1.2. *Schéma semi-lagrangien.* Pour la mise en oeuvre numérique des méthodes semi-lagrangiennes, j'ai utilisé les procédures d'advection et d'interpolation codées par Romain Horsin et optimisées par Pierre Navaro. Ce sont les splines cubiques qui sont utilisées dans l'étape d'interpolation de la méthode semi-lagrangienne. Ma contribution a été l'implémentation des fonctions permettant de résoudre numériquement les équations de Poisson pour les systèmes HMF cosinus et HMF Poisson. Vérifions les ordres de convergence en temps, en espace et vitesse des schémas semi-lagrangiens cosinus et Poisson. A partir d'une solution de référence calculée avec un schéma semi-lagrangien cosinus, respectivement Poisson, nous avons établi des courbes de convergence. Les deux solutions de référence sont calculées à partir de la donnée initiale suivante:

$$f_{init}(\theta, v) = e^{-\frac{v^2}{2}} \left(1 + \frac{\sin(\theta)^2}{2 + \cos(\theta)}\right),$$

pour un temps final $T = 0.2$ et un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{300}$. La grille en espace/vitesse utilisée est de taille $2^{10} \times 2^{10}$. Pour le schéma semi-lagrangien cosinus, nous obtenons la courbe de convergence en temps représentée sur la Figure 11. Le schéma obtenu est bien d'ordre 2 en temps comme le prédisait l'utilisation du splitting de Strang. On montre également que le schéma semi-lagrangien Poisson est d'ordre 2 en temps.

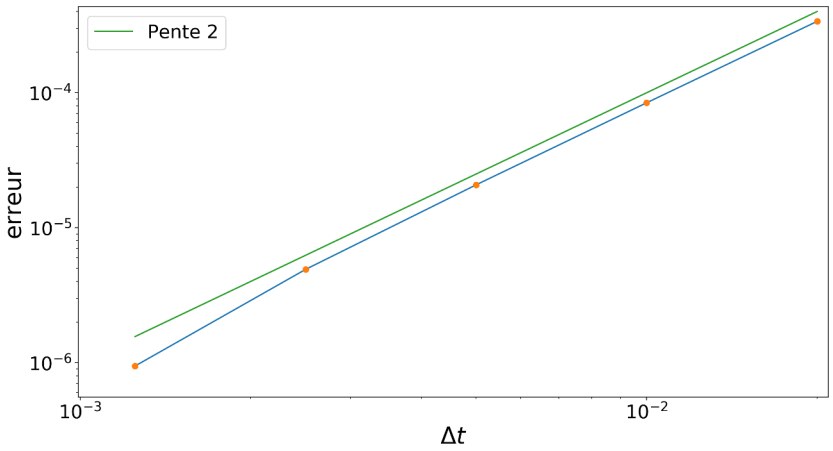


FIGURE 11. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas de temps pour le schéma semi-lagangien cosinus.

Concernant les ordres de convergence en espace et vitesse, nous avons calculé simultanément les ordres de convergence en espace et vitesse en choisissant $N = M$. Pour le schéma semi-lagrangien cosinus, en prenant comme pas de temps $\Delta t = \frac{0.2}{160}$, nous avons obtenu la courbe de convergence en espace représentée sur la Figure 12. On observe que le schéma est d'ordre 4 en espace et vitesse. Il en est de même pour le schéma semi-lagrangien Poisson.

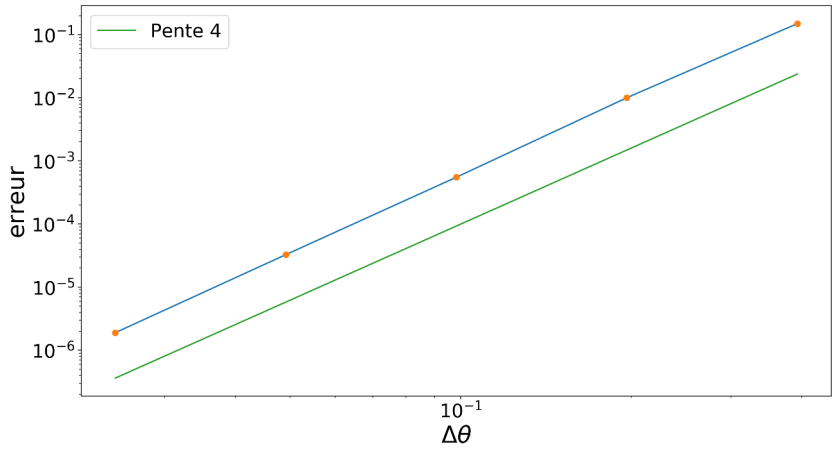
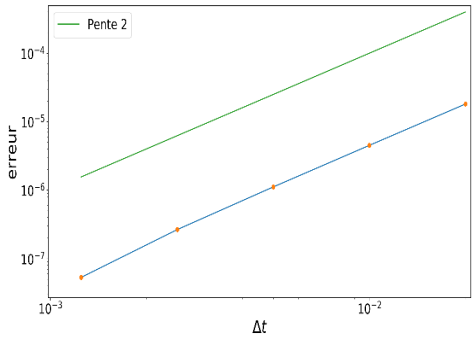


FIGURE 12. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas d'espace pour le schéma semi-lagrangien cosinus.

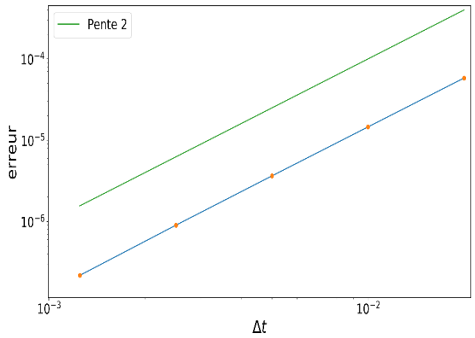
3.4.2. **Mise en oeuvre numérique des deux schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires.** Pour implémenter numériquement ces deux schémas, que ce soit dans leur version cosinus ou Poisson, j'ai effectué un splitting de Strang composé de trois étapes élémentaires décrites dans la Partie 3.2.1 et la Partie 3.2.2. La première étape élémentaire étant une équation différentielle linéaire, elle s'intègre facilement en temps. Puis, j'ai résolu les deux autres étapes élémentaires à l'aide d'une méthode semi-lagrangienne. Pour cela, j'ai utilisé les procédures d'advection et d'interpolation codées par Romain Horsin et optimisées par Pierre Navaro. Pour résoudre, l'équation de Poisson, j'ai utilisé les méthodes spectrales décrites à la Partie 3.1.5 que j'ai moi-même implémentées. Vérifions sur des exemples les ordres de convergence en temps, en espace et vitesse de ces schémas version cosinus et Poisson par rapport aux schémas semi-lagrangiens classiques version cosinus ou Poisson. A partir d'une solution de référence calculée avec un schéma semi-lagrangien cosinus, respectivement Poisson, nous avons établi des courbes de convergence. Les deux solutions de référence sont calculées à partir de la donnée initiale suivante:

$$f_{init}(\theta, v) = e^{-\frac{v^2}{2}} \left(1 + \frac{\sin(\theta)^2}{2 + \cos(\theta)}\right),$$

pour un temps final $T = 0.2$ et un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{300}$. La grille en espace/vitesse utilisée est de taille $2^{10} \times 2^{10}$. Pour la version cosinus de ce schéma, nous obtenons les courbes de convergence en temps représentées sur la Figure 13. Comme l'annonçait l'utilisation du splitting de Strang, ces schémas sont bien d'ordre 2 en temps. On montre également que leur version Poisson est d'ordre 2 en temps.



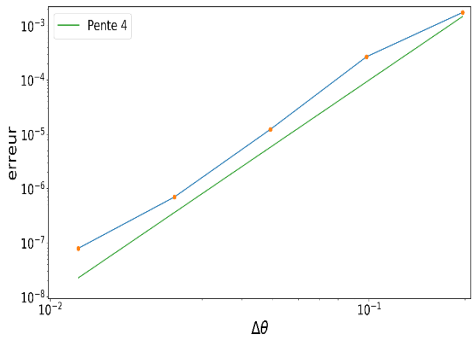
(a) Schéma préservant un état stationnaire.



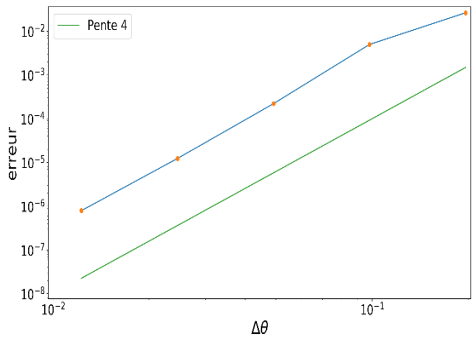
(b) Schéma préservant deux états stationnaires.

FIGURE 13. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas de temps pour la version cosinus de ces schémas.

Pour déterminer les ordres de convergence en espace et vitesse, nous avons calculé simultanément les ordres de convergence en espace et vitesse en choisissant $N = M$. Pour la version cosinus de ces schémas, pour un pas de temps $\Delta t = \frac{0.2}{160}$, nous obtenons les courbes de convergence en espace représentées sur la Figure 14. Ces schémas sont donc d'ordre 4 en espace et vitesse, il en est de même pour leur version Poisson.



(a) Schéma préservant un état stationnaire.



(b) Schéma préservant deux états stationnaires.

FIGURE 14. Evolution en échelle log de l'erreur en fonction du pas d'espace pour la version cosinus de ces schémas.

Puisque ces courbes de convergence ont été obtenues à partir de données de référence calculées avec un schéma semi-lagrangien version cosinus et version Poisson, on a également montré que ces schéma étaient consistants avec les schémas semi-lagrangien classiques.

3.5. Comparaison du schéma de splitting semi-lagrangien dit schéma classique avec les schémas conservant exactement un ou deux états stationnaires donnés

Nous avons construit dans la Partie 3.2 des schémas numériques de résolution des systèmes HMF (3.0.14) qui conservent exactement des états stationnaires donnés. Il est peut être intéressant d'utiliser de tels schémas lorsqu'on étudie des problèmes de stabilité orbitale. En effet, les schémas classiques (type splitting + semi-lagrangien), si ils ne sont pas suffisamment raffinés, peuvent rendre instables des états stationnaires stables. Nous allons illustrer cela sur quelques exemples.

3.5.1. **Résolution numérique du système HMF cosinus.** On souhaite résoudre numériquement le système HMF cosinus i.e. le système (3.0.14) avec un potentiel en cosinus défini par (3.0.15). On fixe un état stationnaire f_0 de type Maxwell-Boltzmann. Son expression est la suivante:

$$f_0(\theta, v) = \alpha \exp\left(-\beta\left(\frac{v^2}{2} - M_0 \cos\theta\right)\right), \tag{3.5.1}$$

avec α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 1$. On choisit $\beta = 10$ et la magnétisation associée M_0 est calculée en résolvant l'équation (3.3.5) par dichotomie (voir Partie 3.3.1). On obtient $M_0 \simeq 0.9455421864232982$. Comme démontré dans [61] et dans la Partie 4.6.2 de [57], dès qu'il existe $M_0 > 0$, l'état stationnaire f_0 associé est orbitalement stable.

Pour effectuer les tests numériques, on confond l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$ et on choisit $v_{\max} = 10$. On discrétise ce domaine sur une grille uniforme de taille $N \times M$ dont les noeuds seront notés (θ_k, v_j) pour $k \in [0, N-1]$ et $j \in [0, M-1]$. On note les pas d'espace et de vitesse:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{2v_{\max}}{M}.$$

Pour comparer les schémas et notamment voir si ils conservent bien la stabilité de notre état stationnaire, nous allons étudier l'évolution au cours du temps de la différence relative des énergies cinétiques:

$$\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}, \tag{3.5.2}$$

partant d'une donnée initiale qui est une perturbation de l'état stationnaire f_0. On compare alors les solutions données par le schéma classique (splitting + semi-lagrangien), le schéma 1 (conservant exactement f_0) et le schéma 2 (conservant exactement f_0 et la solution nulle) à une solution de référence obtenue par le schéma classique très raffiné. Pour calculer la solution de référence, on choisit $N = M = 2^9$ et $\Delta t = 10^{-3}$. Pour commencer, on choisit la donnée initiale suivante:

$$f_{init}(\theta, v) = f_0(\theta, v)(1 + \varepsilon \cos\theta), \tag{3.5.3}$$

avec $\varepsilon = 0.1$. Pour tester les schémas 1, 2 et classique, on choisit $N = M = 2^7$ et $\Delta t = 10^{-1}$. On obtient la Figure 15.

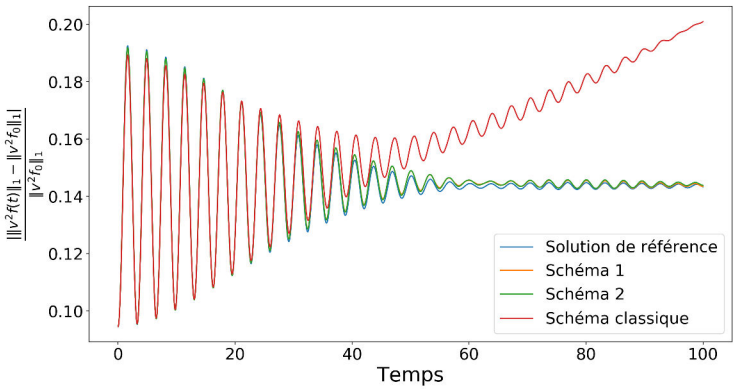


FIGURE 15. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{L^1} - \|v^2 f_0\|_{L^1}|}{\|v^2 f_0\|_{L^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 100]$.

Les solutions obtenues par les schémas 1 et 2 sont quasiment confondues et elles sont beaucoup plus proches de la solution de référence que l'est la solution calculée avec le schéma classique. Avec la solution calculée par le schéma classique, la quantité (3.5.2) ne fait qu'augmenter, ce qui n'est pas correct physiquement puisque l'état stationnaire f_0 est orbitalement stable. Nos deux nouveaux schémas se comportent donc mieux que le schéma classique. Partons maintenant d'une autre donnée initiale:

$$f_{init}(\theta, v) = f_0(\theta, v)\left(1 + \varepsilon \frac{(v + v^2)(\sin\theta + \sin^2\theta)}{2 + \cos\theta}\right), \tag{3.5.4}$$

avec $\varepsilon = 0.1$ Pour tester les schémas 1, 2 et classique, on choisit $N = M = 2^7$ et $\Delta t = 10^{-1}$. On obtient la Figure 16.

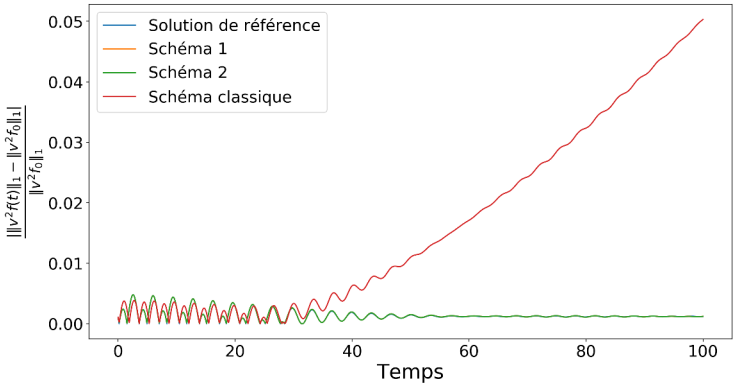


FIGURE 16. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{L^1} - \|v^2 f_0\|_{L^1}|}{\|v^2 f_0\|_{L^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 100]$.

On observe que la solution obtenue par le schéma classique se comporte comme si l'état stationnaire f_0 était instable alors que les solutions obtenues par les schémas 1 et 2 sont très proches de la solution de référence. Pour plus de clarté, sur la Figure 17, on a seulement tracé les solutions des schémas 1 et 2 et la solution de référence.

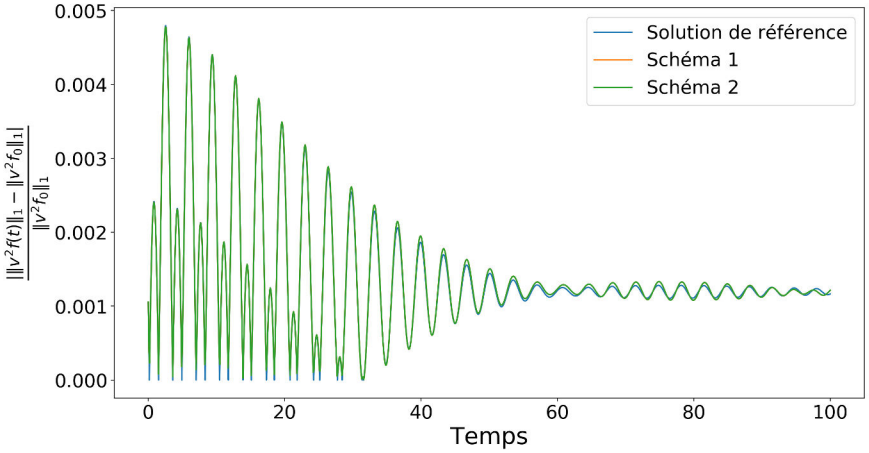


FIGURE 17. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 100]$.

Les solutions des schémas 1 et 2 sont quasiment confondues et très proches de la solution de référence.

3.5.2. **Résolution numérique du système HMF Poisson.** Voyons maintenant comment se comportent nos deux nouveaux schémas concernant la résolution du système HMF Poisson i.e. le système HMF (3.0.14) avec un potentiel Poisson défini par (3.0.16). Soit f_0 un état stationnaire de type Maxwell-Boltzmann (3.3.7). On choisit $\beta = 3$ et on calcule le potentiel ϕ_{f_0} associé en suivant la démarche décrite dans la Partie 3.3.2. A translation près, on obtient deux états stationnaires f_0 et $\tilde{f}_0$ distincts dont l'un est homogène. Pour choisir celui qui est le plus approprié pour comparer nos différents schémas, on doit déterminer lequel de ces deux états stationnaires est stable. Notons, dans un premier temps, que nécessairement un de ces deux états est orbitalement stable. En effet, dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous avons démontré que les états stationnaires de HMF Poisson qui étaient des minimiseurs du problème de minimisation à une contrainte (2.1.5) étaient orbitalement stables. Si on choisit $j(t) = t\ln(t)$, $M = 2\pi$ et que l'on pose $\beta > 0$, on obtient que les minimiseurs du problème de minimisation à une contrainte suivant

$$\mathcal{I}(M) = \inf_{f\in E_j, \|f\|_{\mathrm{L}^1}=2\pi} \mathcal{H}(f) + \frac{1}{\beta}\iint f(\theta,v)\ln f(\theta,v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v := H(f). \tag{3.5.5}$$

sont de la forme (3.3.7) avec α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 2\pi$ et qu'ils sont orbitalement stables. Il nous suffit donc de calculer et comparer les quantités $H(f_0)$ et $H(\tilde{f}_0)$, définies par (2.1.4),

pour savoir lequel de ces états stationnaires est minimiseur. Il s'avère que c'est l'état stationnaire inhomogène qui minimise (3.5.5) et qui est donc orbitalement stable. Partons de la donnée initiale f_{init} donnée par (3.5.4) et choisissons les paramètres $N = M = 2^7$ et $\Delta t = 10^{-2}$. On obtient les courbes représentées sur la Figure 18.

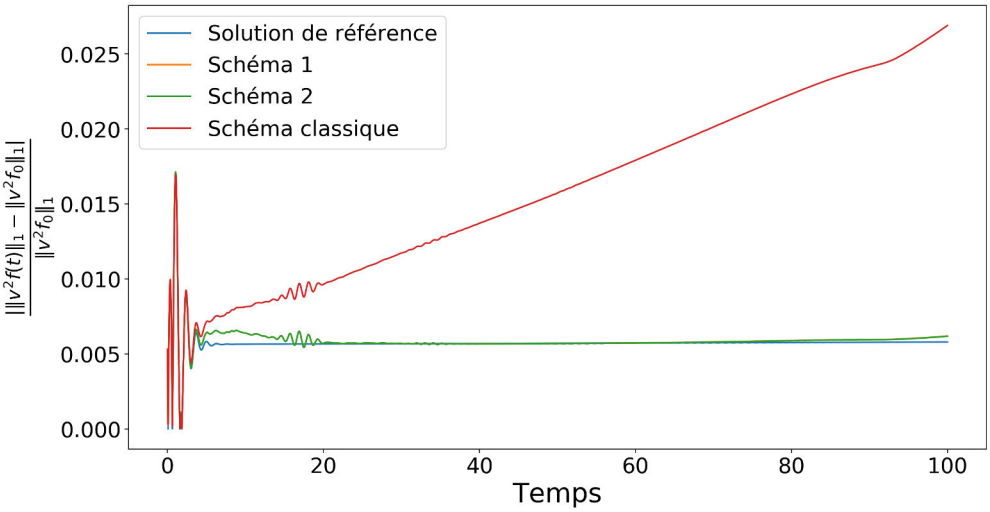


FIGURE 18. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 100]$.

On observe les mêmes phénomènes que pour le schéma de HMF cosinus, à savoir, la solution obtenue par la schéma classique se comporte comme si l'état stationnaire était instable. Nos schémas 1 et 2 se comportent donc mieux que le schéma classique. De la même façon, si on part d'une donnée initiale de la forme (3.5.3), la solution obtenue par le schéma classique sera instable. On doit cependant regarder l'évolution de la quantité (3.5.2) jusqu'à $T = 600$ pour voir apparaître de manière claire cette instabilité.

3.6. Construction d'un schéma préservant exactement tous les états stationnaires de la forme (3.6.1)

Dans les Parties 3.2.1 et 3.2.2, étant donné un état stationnaire f_0, nous avons construit des schémas qui conservent exactement cet état stationnaire. Comme nous l'avons vu dans la Partie 3.5, ces schémas se comportent mieux que les schémas classiques en terme de préservation de la stabilité de cet état stationnaire. Cependant, un inconvénient de ces schémas est qu'il faut connaître à l'avance l'état stationnaire qu'on veut préserver. Or dans la pratique, il peut être utile de préserver des états stationnaires qu'on ne connaît pas à l'avance. C'est pourquoi, il est intéressant de construire un schéma qui conserve tous les

états stationnaires de la forme

$$f(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi_f(\theta)\right). \tag{3.6.1}$$

Tout d'abord rappelons que toute fonction f_0 de la forme (3.6.1) vérifie $T_{\phi_{f_0}} f_0 = 0$. Cette égalité n'est plus nécessairement vérifiée après avoir discrétisé l'opérateur T_ϕ. La question que l'on se pose est la suivante :

Comment discrétiser l'opérateur T_{ϕ_f} pour que son approximation numérique conserve les fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi_f$?

Une autre question se présente alors :

Numériquement qu'est-ce qu'une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi$?

Pour construire un schéma qui préserve de telles fonctions, nous sommes obligés de choisir une définition numérique des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi$. Pour cela, pour une fonction $\phi : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ donnée, on va construire numériquement un projecteur L^2-orthogonal sur l'espace $F_\phi = \{f(\theta, v) = h(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta))\}$. Ce projecteur nous permettra de donner une définition rigoureuse de ce qu'on considère comme étant numériquement des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi$.

Dans la Partie 3.6.1, nous expliquons la façon dont nous avons construit ce projecteur. Puis dans la Partie 3.6.2, nous expliquons comment nous avons construit le schéma associé qui conserve exactement toutes les états stationnaires de la forme (3.6.1). Tout cela fait encore l'objet de travaux en cours, mais nous verrons, dans la Partie 3.8, que ce schéma présente déjà des résultats prometteurs.

3.6.1. **Construction du projecteur.** Soit $f \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ et soit $\phi : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée, on souhaite construire un projecteur numérique Π_ϕ tel que $\Pi_\phi f$ soit numériquement une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$. Il nous faut donc définir ce qu'est, du point de vue discret, une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$.

Pour commencer, on identifie $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ à $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. Puis, on effectue un maillage uniforme de l'espace $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. On définit deux suites

- $(\theta_i)_{0 \leq\, i \leq I-1}$ telle que $\theta_i = i\Delta\theta$ où $\Delta\theta = \frac{2\pi}{I}$,
- $(v_j)_{0 \leq j \leq J-1}$ telle que $v_j = -v_{\max} + j\Delta v$ où $\Delta v = \frac{2v_{\max}}{J}$.

On notera $f_{i,j} = f(\theta_i, v_j)$. Puis, posons pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$

$$e = \frac{v^2}{2} + \phi(\theta).$$

On remarque que $-\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq e \leq \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}$. On discrétise à pas constant Δe l'intervalle $[-\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}, \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}]$. On construit alors une suite

$$(e_k)_{0\leq k\leq K-1} \quad \text{telle que} \quad e_k = -\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} + k\Delta e.$$

Puis, on définit pour $0 \leq k \leq K-1$ les sous-intervalles I_k suivants :

$$I_k = \left[-\frac{\Delta e}{2} + e_k, e_k + \frac{\Delta e}{2}\right[.$$

Définition 3.6.1. *On dira qu'une fonction f intégrable est, numériquement, une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$ si il existe une suite $(f_k)_{0\leq k\leq K-1}$ telle que f s'écrive*

$$f(\theta, v) = \sum_{k=0}^{K-1} f_k \mathbb{1}_{I_k}\left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right).$$

Notons F_ϕ l'ensemble des fonctions qui sont numériquement des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le projecteur sur les fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi$.

Définition 3.6.2. *Soit $\phi : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit f une fonction intégrable. On note $f_{i,j} = f(\theta_i, v_j)$ son échantillonnage sur le maillage uniforme de $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. On définit alors son projeté sur les fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi$ par*

$$\Pi_\phi^{\Delta e} f(\theta, v) = \sum_{k=0}^{K-1} f_k \mathbb{1}_{I_k}\left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right) \quad \textit{pour} \quad (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$$

avec

$$f_k = \frac{1}{card\{(i,j), \frac{v_j^2}{2} + \phi(\theta_i) \in I_k\}} \sum_{\{(i,j), \frac{v_j^2}{2} + \phi(\theta_i) \in I_k\}} f_{i,j}.$$

On vérifie aisément que l'opérateur $\Pi_\phi^{\Delta e}$ ainsi défini possède les propriétés suivantes.

Proposition 3.6.3. *L'opérateur $\Pi_\phi^{\Delta e}$ vérifie:*

- *$\Pi_\phi^{\Delta e}$ est un projecteur i.e. $\Pi_\phi^{\Delta e} \circ \Pi_\phi^{\Delta e} = \Pi_\phi^{\Delta e}$,*
- *$\Pi_\phi^{\Delta e}$ est numériquement une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi$ i.e. $\Pi_\phi^{\Delta e} f \in F_\phi$ pour f intégrable,*
- *$\Pi_\phi^{\Delta e}\big|_{\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})}$ est un projecteur L^2-orthogonal sur le sous-espace $F_\phi \cap \mathrm{L}^2([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ de $\mathrm{L}^2([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$,*
- *$\Pi_\phi^{\Delta e}\big|_{\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})}$ est un opérateur autoadjoint sur $\mathrm{L}^2([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$.*

Ce projecteur nous permet de donner une caractérisation des fonctions qui sont numériquement des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$.

Proposition 3.6.4. *Une fonction est numériquement une fonction de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$ si son échantillonnage $(f_{i,j})_{i,j}$ sur le maillage uniforme de $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$ vérifie*

$$\left(\Pi_\phi^{\Delta e} f\right)_{i,j} = f_{i,j}.$$

Vérifions sur deux exemples que le projecteur implémenté est bien consistant i.e. que si f s'écrit $f(\theta, v) = F\left(\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)\right)$, le projecteur $\Pi_\phi^{\Delta e}$ vérifie

$$\Pi_\phi^{\Delta e} f \underset{\Delta e \to 0}{\longrightarrow} f. \tag{3.6.2}$$

Pour ce faire, on considère pour $\phi(\theta) = \cos(\theta)$, les fonctions suivantes

- $f_1(\theta, v) = \exp(-(\frac{v^2}{2} + \cos(\theta))$,
- $f_2(\theta, v) = \frac{1}{1+\exp(\frac{v^2}{2}+\cos(\theta))}$.

La fonction f_1 est du type Maxwell-Boltzmann et f_2 est du type Lynden-Bell. Ce sont toutes deux, du point de vue continu, des fonctions de $\frac{v^2}{2} + \phi(\theta)$. La Figure 19 montre que ces deux fonctions vérifient bien (3.6.2) et que le projecteur implémenté est d'ordre 1.

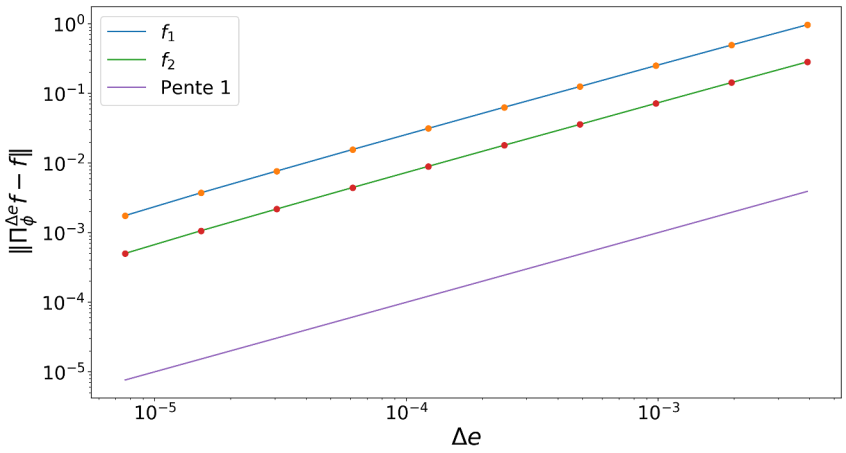


FIGURE 19. Evolution en échelle log de la différence $\|\Pi_\phi^{\Delta e} f - f\|_{\mathrm{L}^1}$ en fonction du pas d'énergie Δe

3.6.2. **Principe du schéma.** Le schéma numérique que nous proposons est basé sur une décomposition micro-macro. On décompose la fonction de distribution f en

$$f = \Pi_{\phi_f}^{\Delta e} f + g \quad \text{avec} \quad \Pi_{\phi_f}^{\Delta e} g = 0. \tag{3.6.3}$$

Remarquons dans un premier temps que l'équation du système (3.0.18) est équivalente à l'équation suivante

$$\partial_t f + T_{\phi_f}(I - \Pi_{\phi_f}^{\Delta e}) f = 0.$$

On souhaite alors la résoudre numériquement sur un petit intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. Pour cela, on fige ϕ_f à ϕ_{f^n}, on veut donc résoudre

$$\partial_t f + T_{\phi_{f^n}}(I - \Pi_{\phi_{f^n}}^{\Delta e}) f = 0. \tag{3.6.4}$$

Appliquant le projecteur $\Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}}$ à l'équation (3.6.4), on obtient $\partial_t(\Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} f) = 0$. En effet, on a pour une fonction $h \in \mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, $(.,.)$ désignant le produit scalaire de $\mathrm{L}^2([0,2\pi]\times\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(\Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} T_{\phi_{fn}} g, h) &= (T_{\phi_{fn}} g, \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} h) \quad \text{car } \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} \text{ est autoadjoint,}\\ &= -(g, T_{\phi_{fn}} \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} h) \quad \text{après des intégrations par parties,}\\ &= 0 \quad \text{car } \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} h \in F_{\phi_{fn}}.\end{aligned}$$

On en déduit que g vérifie l'équation suivante

$$\partial_t g + T_{\phi_{fn}} g = 0. \tag{3.6.5}$$

Cette équation se résout numériquement, facilement, en utilisant une méthode spectrale ou semi-lagrangienne, voir Parties 3.1.3 et 3.1.4. On obtient alors g^{n+1} et on pose

$$f^{n+1} = \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} f^n + g^{n+1}.$$

Plus précisément, définissons notre schéma numérique comme suit. Considérons une discrétisation en temps $t^n = n\Delta t$, $n = 0,..,N$ telle que $N\Delta t = T$ où T est le temps final. On souhaite définir une suite $(f^n)_{0\le n\le N}$ telle que $f^n \simeq f(t^n)$. Etant donnée f^0 donnée initiale, on définit une fonction auxiliaire g^0 par

$$g^0 = f^0 - \Pi^{\Delta e}_{\phi_{f0}} f^0.$$

Connaissant f^n et g^n au temps t^n, on obtient g^{n+1} comme solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t g + T_{\phi_{fn}} g = 0, \\ g(0) = g^n. \end{cases} \tag{3.6.6}$$

Puis on calcule f^{n+1} à l'aide de la relation de récurrence suivante

$$f^{n+1} = \Pi^{\Delta e}_{\phi_{fn}} f^n + g^{n+1}. \tag{3.6.7}$$

Définition 3.6.5 (Etats stationnaires analytiques, états stationnaires numériques)**.** *On distingue deux types d'états stationnaires.*

- *On appelle état stationnaire analytique, un état stationnaire de la forme (3.6.1) dont on connaît l'échantillonnage sur un maillage uniforme de la grille* $[0,2\pi]\times[-v_{\max}, v_{\max}]$.
- *On appelle état stationnaire numérique, un état stationnaire* f_0 *vérifiant*

$$\Pi^{\Delta e}_{\phi_{f0}} f_0 = f_0$$

où $\Pi^{\Delta e}_{\phi}$ *est le projecteur numérique construit dans la Partie 3.6.1.*

Proposition 3.6.6. *Le schéma numérique ainsi défini, qu'on appellera schéma avec projecteur, préserve exactement les états stationnaires numériques.*

Preuve. Soit une donnée initiale f_{init} telle que son échantillonnage f^0 sur le maillage uniforme de $[0,2\pi]\times[-v_{\max}, v_{\max}]$ vérifie $\Pi^{\Delta e}_{\phi_{f0}} f^0 = f^0$. Ainsi la fonction auxiliaire g^0 vérifie $g^0 = 0$. La fonction g^1 étant donnée par la résolution de (3.6.6) avec donnée initiale

$g(0) = g^0$, on obtient $g^1 = 0$. On a alors $f^1 = \Pi^{\Delta e}_{\phi_{f^0}} f^0 + g^1 = f^0$. Par récurrence immédiate, on obtient alors que $f^n = f^0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

3.7. Mise en oeuvre numérique du schéma avec projecteur

Pour implémenter numériquement notre schéma avec projecteur, on commence par confondre l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$. On choisit $v_{\max} = 10$. On discrétise ce domaine sur une grille uniforme de taille $N \times M$ dont les noeuds seront notés (θ_k, v_j) pour $k \in [0, N-1]$ et $j \in [0, M-1]$. On note les pas d'espace et de vitesse:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{2v_{\max}}{M}.$$

On pose pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $v \in [-v_{max}, v_{max}]$

$$e = \frac{v^2}{2} + \phi(\theta).$$

On discrétise à pas constant Δe, que l'on appellera pas d'énergie, l'intervalle $[-\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}, \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty}]$. On a

$$\Delta e = \frac{2\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} + \frac{v_{\max}^2}{2}}{P},$$

où P est le nombre de points de discrétisation en énergie.

3.7.1. **Construction des états stationnaires numériques.** Comme énoncé dans la Proposition 3.6.6, le schéma avec projecteur conserve exactement les états stationnaires numériques. Etant donné un état stationnaire f_0 analytique, nous allons voir une façon de construire l'état stationnaire numérique associé.

Soit f_0 un état stationnaire du système HMF (3.0.14) (cosinus ou Poisson), on l'échantillonne sur notre grille uniforme de taille $N \times M$. On souhaite calculer f_0^{num} l'état stationnaire numérique associé vérifiant $\Pi^{\Delta e}_{\phi_{f_0^{num}}} f_0^{num} = f_0^{num}$. Pour cela, on définit par récurrence deux suites $(\phi^n)_n$ et $(f_0^n)_n$ telles que

- $\phi^0 = \phi_{f_0}$ et $f_0^0 = f_0$,
- ϕ_n et f_0^n étant donnés, on calcule $f_0^{n+1} = \Pi^{\Delta e}_{\phi^n} f_0^n$ puis $\phi^{n+1} = \phi_{f_0^{n+1}}$.

On calcule successivement les termes de cette suite, on arrête lorsque la suite $(\phi^n)_n$ converge i.e. lorsque $\|\phi^n - \phi^{n+1}\| \leq \varepsilon$. Numériquement, on prendra ε de l'ordre de 10^{-13}. On obtient alors l'état stationnaire numérique f_0^{num}.

3.7.2. **Consistance des états stationnaires numériques avec les états stationnaires analytiques.** Soit f_0 un état stationnaire analytique et construisons f_0^{num} l'état stationnaire numérique associé construit en suivant la méthode décrite à la Partie 3.7.1. Vérifions numériquement sur des exemples que l'état stationnaire numérique f_0^{num} est consistant avec l'état stationnaire analytique f_0 i.e. qu'ils vérifient

$$\|f_0^{num} - f_0\|_{\mathrm{L}^1} \underset{\Delta\theta,\Delta v,\Delta e\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.7.1}$$

On commence par vérifier (3.7.1) pour un état stationnaire de HMF cosinus de type Maxwell-Boltzmann (3.3.6) avec $\beta = 10$ et la magnétisation M_0 calculée à la Partie 3.3.1.2. La Figure 20 représente l'évolution de la quantité (3.7.1) en fonction des pas d'espace, de vitesse et d'énergie.

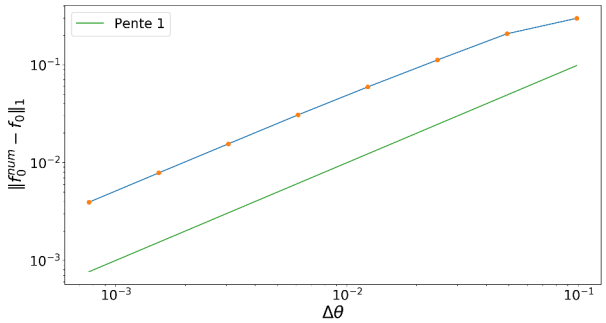


FIGURE 20. Evolution en échelle log de la différence $\|f_0^{num} - f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ en fonction des pas $\Delta\theta$, Δv et Δe pour un état stationnaire de HMF cosinus.

On vérifie ensuite (3.7.1) pour un état stationnaire de HMF Poisson de type Maxwell-Boltzmann (3.3.7) avec $\beta = 3$. On choisit, à translation près, l'état stationnaire inhomogène que l'on a déterminé à la Partie 3.3.2. La Figure 21 représente l'évolution de la quantité (3.7.1) en fonction des pas d'espace, de vitesse et d'énergie.

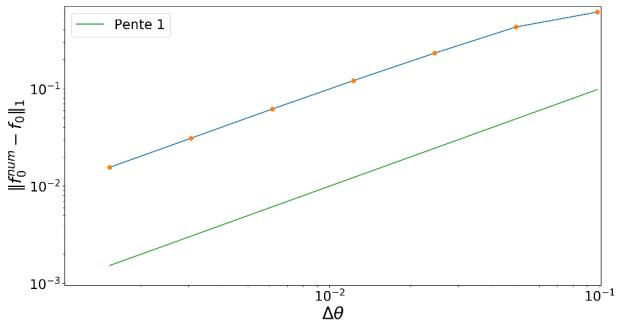


FIGURE 21. Evolution en échelle log de la différence $\|f_0^{num} - f_0\|_{\mathrm{L}^1}$ en fonction des pas $\Delta\theta$, Δv et Δe pour un état stationnaire de HMF Poisson.

3.8. Comparaison du schéma classique avec le schéma avec projecteur

Comme expliqué dans la Partie 3.5, dans l'optique d'étudier, entre autre, des problèmes de stabilité orbitale, il peut être nécessaire d'utiliser des schémas qui conservent exactement les états stationnaires. Les deux schémas que nous avons construits dans la Partie 3.2 préservent exactement un état stationnaire f_0 donné. Pour cette raison, comme nous l'avons observé dans la Partie 3.5, ils se comportent mieux que les schémas classiques (type splitting semi-lagrangien). Néanmoins leur comportement est meilleur uniquement lorsqu'on leur donne une donnée initiale qui est une perturbation de cet état stationnaire f_0. Si on part d'une donnée initiale qui est une perturbation d'un autre état stationnaire f_1, il faut construire de nouveaux schémas qui conservent exactement f_1. Un avantage du schéma avec projecteur, que nous avons construit à la Partie 3.6.2, est qu'il conserve tous les états stationnaires numériques. On n'a donc pas besoin de modifier le schéma lorsqu'on change de donnée initiale, contrairement aux deux schémas de la Partie 3.2.

Nous allons maintenant présenter quelques tests illustrant le bon comportement de notre schéma avec projecteur par rapport aux schémas classiques. Nous prenons comme schéma classique un schéma de splitting semi-lagrangien. Lors de ces tests, nous n'avons pas pu calculer de solution de référence avec le schéma classique raffiné car les temps de calculs étaient de l'ordre d'un mois pour avoir une solution de référence pertinente. L'état stationnaire numérique étant consistant avec l'état stationnaire analytique (voir illustration à la Partie 3.7.2) et notre schéma avec projecteur conservant exactement les états stationnaires numériques, nous voulions calculer une solution de référence partant d'un état stationnaire numérique perturbé. Cependant, pour que l'état stationnaire numérique soit "presque" conservé par le schéma classique, il faut que les pas d'espaces et de vitesse soient très petits. Il faudrait prendre une grille comportant au moins $2^{13} \times 2^{13}$ points et cela engendre des temps de calculs trop longs pour que ces tests soient réalisables. Pour cette raison, nous comparons le schéma classique au schéma avec projecteur en partant d'un état stationnaire analytique perturbé pour le schéma classique et d'un état stationnaire numérique perturbé pour le schéma avec projecteur.

3.8.1. **Résolution numérique du système HMF cosinus.** Les premiers tests que nous présentons ici concernent la résolution du système HMF (3.0.14) avec un potentiel en cosinus (3.0.15). On confond l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$ avec $v_{\max} = 10$. On discrétise ce domaine sur une grille uniforme de taille $N \times M$ dont les noeuds seront notés (θ_k, v_j) pour $k \in [0, N-1]$ et $j \in [0, M-1]$. On note les pas d'espace et de vitesse:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{2v_{\max}}{M}.$$

On discrétise à pas constant l'intervalle $[-\|\phi\|_{L^\infty}, \frac{v_{\max}^2}{2} + \|\phi\|_{L^\infty}]$. On note le pas d'énergie

$$\Delta e = \frac{2\|\phi\|_{L^\infty} + \frac{v_{\max}^2}{2}}{P},$$

avec P est le nombre de points de discrétisation en énergie. Comme à la Partie 3.5, pour comparer les schémas, nous étudions l'évolution au cours du temps de la différence relative

des énergies cinétiques:

$$\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}, \tag{3.8.1}$$

partant d'une donnée initiale qui est une perturbation d'un état stationnaire analytique pour le schéma classique et numérique pour le schéma avec projecteur. On part donc de la donnée initiale f_{init}^{an} pour le schéma classique et de la donnée initiale f_{init}^{num} pour le schéma avec projecteur et on prend $\varepsilon = 0.1$:

$$f_{init}^{an}(\theta, v) = f_0^{an}(\theta, v)(1 + \varepsilon \cos\theta), \quad \text{et} \quad f_{init}^{num}(\theta, v) = f_0^{num}(\theta, v)(1 + \varepsilon \cos\theta). \tag{3.8.2}$$

On choisit pour l'état stationnaire analytique f_0^{an} un état stationnaire de type Maxwell-Boltzmann (3.3.6) avec pour paramètre $\beta = 10$ et la magnétisation $M_0 > 0$ associée calculée à la Partie 3.3.1.2. Comme démontré dans la Partie 4.6.2 de [57], cet état stationnaire f_0^{an} est orbitalement stable. L'état stationnaire numérique f_0^{num} est calculé en appliquant à l'état stationnaire f_0^{an} la méthode décrite à la Partie 3.7.1. On choisit comme paramètres de discrétisation $N = M = 2^6$, $P = 1000$ et $\Delta t = 0.1$. On obtient les deux courbes représentées sur la Figure 22.

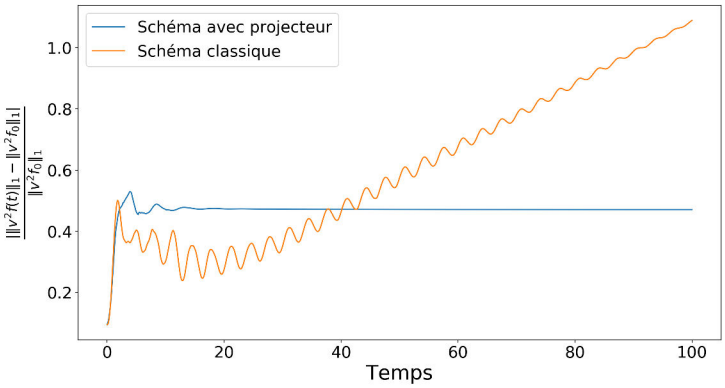


FIGURE 22. Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps sur $[0, 100]$ pour HMF cosinus.

Rappelons que l'état stationnaire f_0^{an} est orbitalement stable. Jusqu'à $T \simeq 20$, le schéma classique fait évoluer la quantité (3.8.1) comme telle mais pour $T > 20$, le schéma classique fait augmenter la quantité (3.8.1) avec le temps comme si l'état stationnaire f_0^{an} était instable. Le schéma avec projecteur a, quant à lui, le comportement attendu. Voyons ensuite comment se comportent nos deux schémas si on change la nature de la perturbation. On considère les deux données initiales suivantes: f_{init}^{an} pour le schéma classique et f_{init}^{num} pour le schéma avec projecteur.

$$\begin{cases} f_{init}^{an}(\theta, v) = f_0^{an}(\theta, v)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{(v+v^2)(\sin\theta + \sin\theta^2)}{2+\cos\theta}\right)\right), \\ f_{init}^{num}(\theta, v) = f_0^{num}(\theta, v)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{(v+v^2)(\sin\theta + \sin\theta^2)}{2+\cos\theta}\right)\right). \end{cases} \tag{3.8.3}$$

On choisit les mêmes paramètres de discrétisation que pour le test précédent. On obtient les courbes représentées sur les Figures 24 et 23. On observe sur la Figure 23 que le schéma classique rend instable l'état stationnaire stable f_0^{an} pour des temps relativement petits, de l'ordre de $T \simeq 2.5$. La Figure 24 montre que la quantité (3.8.1) continue de croître avec le temps pour le schéma classique alors qu'elle reste à peu près constante pour le schéma avec projecteur.

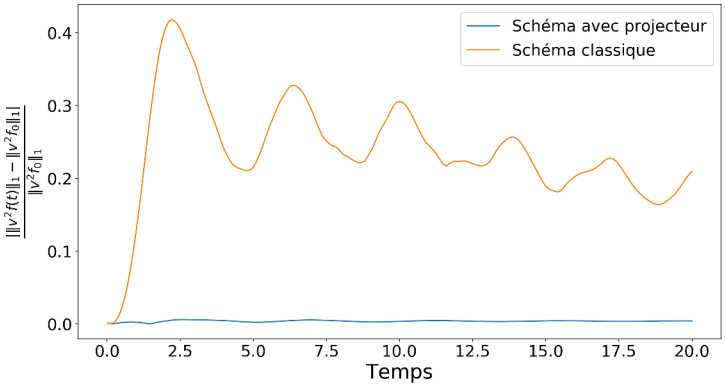
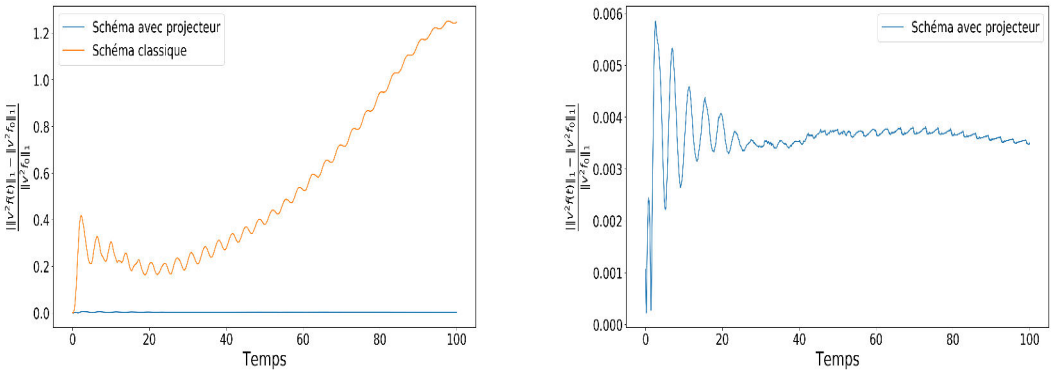


FIGURE 23. Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps sur $[0, 20]$ pour HMF cosinus.



(a) Schémas classiques et avec projecteur.

(b) Schéma avec projecteur.

FIGURE 24. Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps sur $[0, 100]$ pour HMF cosinus.

3.8.2. **Résolution numérique du système HMF Poisson.** Pour cette deuxième partie de tests, nous résolvons numériquement le système HMF (3.0.14) avec potentiel de Poisson (3.0.16). On effectue la même discrétisation de l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ que dans la Partie 3.8.1 précédente. Pour comparer les schémas classique et avec projecteur, on étudie l'évolution au cours du temps de la quantité (3.8.1), partant des données initiales, définies en (3.8.2), f_{init}^{an} pour le schéma classique et f_{init}^{num} pour le schéma avec projecteur. On prend $\varepsilon = 0.1$. On choisit pour l'état stationnaire analytique f_0^{an} un état stationnaire de type Maxwell-Boltzmann (3.3.7) avec pour paramètre $\beta = 3$ et le potentiel associé ϕ_{f_0} calculé en suivant la démarche décrite dans la Partie 3.3.2. Comme expliqué dans la Partie 3.5.2 et détaillé dans la Partie 3.9, à translation près, il existe deux états stationnaires distincts dont l'un est homogène. On choisit pour f_0^{an} celui qui est inhomogène car ce dernier est orbitalement stable. L'état stationnaire f_0^{num} est obtenu en appliquant à l'état stationnaire analytique f_0^{an} la méthode décrite à la Partie 3.7.1. Ainsi partant des données initiales (3.8.2) et choisissant $N = M = 2^6$, $P = 1000$ et $\Delta t = 0.1$, on obtient les courbes représentées en Figure 25.

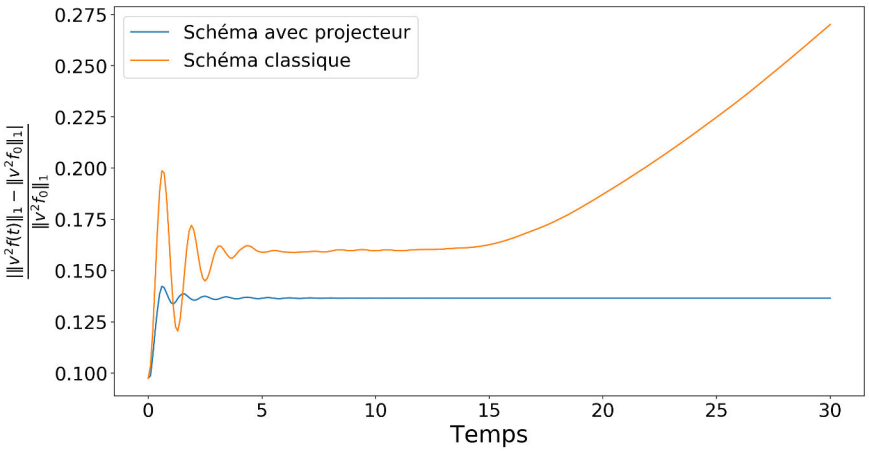
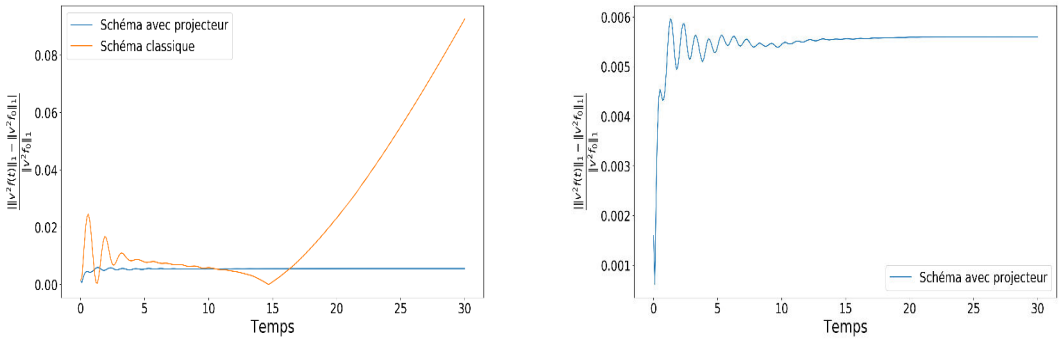


FIGURE 25. Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps sur $[0, 30]$ pour HMF Poisson.

Le schéma classique se comporte moins bien que le schéma avec projecteur puisqu'il fait augmenter la quantité (3.8.1) au cours du temps alors que l'état stationnaire f_0^{an} est orbitalement stable. Changeons ensuite la nature de la perturbation et partons des deux données initiales f_{init}^{an} pour le schéma classique et f_{init}^{num} pour le schéma avec projecteur définies en (3.8.3). On prend toujours $\varepsilon = 0.1$ et on choisit les paramètres $N = M = 2^6$, $P = 1000$ et $\Delta t = 0.1$.

De la même façon que pour la perturbation en cosinus, sur la Figure 26, on observe que le schéma avec projecteur se comporte mieux. Dès que $T > 20$, la quantité (3.8.1) ne fait qu'augmenter avec le schéma classique, ce qui est contraire à la stabilité de f_0^{an}.



(a) Schémas classiques et avec projecteur.

(b) Schéma avec projecteur.

FIGURE 26. Evolution de l'énergie cinétique en fonction du temps sur $[0, 100]$ pour HMF Poisson.

3.9. Etude numérique des états stationnaires de HMF Poisson

L'objectif de cette partie est d'étudier numériquement la stabilité des états stationnaires de HMF Poisson de la forme $f_0(\theta, v) = F(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta))$ avec F une distribution de Maxwell-Boltzmann i.e. $F(z) = \alpha e^{-\beta z}$. Dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous avons, entre autre, démontré que les états stationnaires de HMF Poisson qui étaient des minimiseurs du problème de minimisation à une contrainte (2.1.5) étaient orbitalement stables. Si on choisit $j(t) = t\ln(t)$, $M = 2\pi$ et que l'on pose $\beta > 0$, on obtient que les minimiseurs du problème de minimisation à une contrainte suivant

$$\mathcal{I}(M) = \inf_{f\in E_j, \|f\|_{\mathrm{L}^1}=2\pi} \mathcal{H}(f) + \frac{1}{\beta}\iint f(\theta, v)\ln f(\theta, v)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v := H(f). \tag{3.9.1}$$

sont de la forme $f_0(\theta, v) = \alpha \exp\left(-\beta\left(\frac{v^2}{2} + \phi_{f_0}(\theta)\right)\right)$ avec α tel que $\|f_0\|_{\mathrm{L}^1} = 2\pi$ et qu'ils sont orbitalement stables. Ce résultat ne nous permet, malheureusement, pas de conclure sur la stabilité des états stationnaires qui ne sont pas minimiseurs de (3.9.1). C'est pourquoi, il peut être intéressant d'étudier numériquement la stabilité de tous les états stationnaires de type Maxwell-Boltzmann du système HMF Poisson. Pour cela, l'utilisation des schémas que nous avons construits dans la Partie 3.2 est toute indiquée. Pour les simulations effectuées dans la Partie 3.9.1, nous avons choisi d'utiliser le schéma qui conserve exactement un état stationnaire donné ainsi que la solution nulle.

3.9.1. **Observations numériques.** Dans la Partie 3.3.2, nous avons étudié numériquement l'existence d'états stationnaires homogènes et inhomogènes selon les valeurs du paramètre β. Pour observer numériquement si ces états stationnaires notés f_0 sont orbitalement stables ou pas, on peut étudier l'évolution au cours du temps de la différence relative des énergies cinétiques:

$$\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}, \tag{3.9.2}$$

avec $f(t)$ solution au temps t du système HMF Poisson (3.0.14) partant de l'état stationnaire f_0 perturbé.

Pour effectuer les tests numériques, on confond l'espace $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ avec $[0, 2\pi]\times[-v_{\max}, v_{\max}]$ et on choisit $v_{\max} = 10$. On discrétise ce domaine sur une grille uniforme de taille $N \times M$ dont les noeuds seront notés (θ_k, v_j) pour $k \in [0, N-1]$ et $j \in [0, M-1]$. On note les pas d'espace et de vitesse:

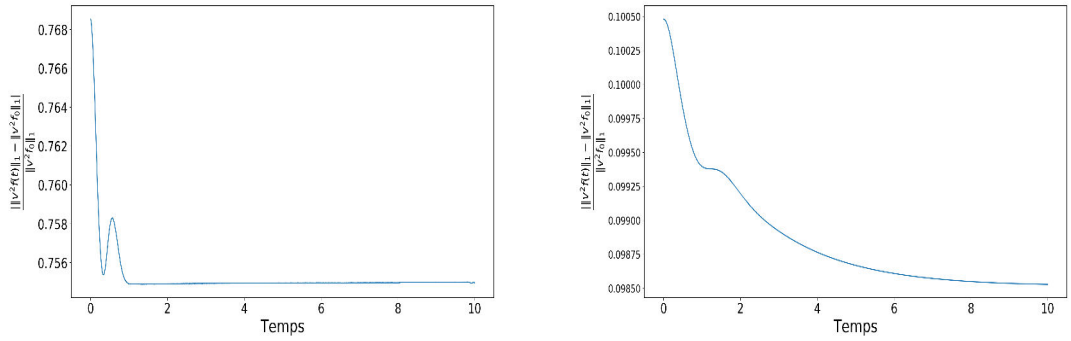
$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{2v_{\max}}{M}.$$

On choisit $N = M = 2^7$. On étudie l'évolution de la quantité (3.9.2) sur $[0, T]$ partant de la donnée initiale

$$f_{init}(\theta, v) = f_0(\theta, v)\left(1 + \varepsilon\frac{(v+v^2)(\sin\theta + \sin\theta^2)}{2+\cos\theta}\right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 10^{-1}. \tag{3.9.3}$$

On discrétise uniformément l'intervalle de temps avec un pas $\Delta t = 10^{-2}$. On étudie l'évolution de la quantité (3.9.2) selon la valeur de β et les états stationnaires associés.

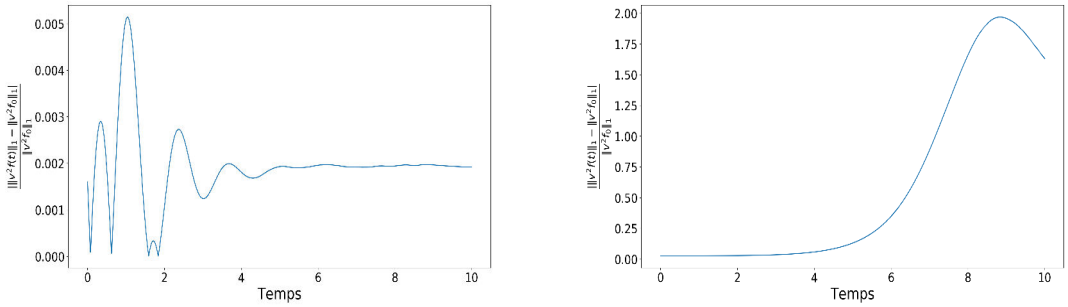
3.9.1.1. *Cas* $\beta < 1$. Dans la Partie 3.3.2, nous avons observé que pour $\beta < 1$, il n'existait pas d'états stationnaires inhomogènes. Il existe un unique état stationnaire homogène qui est donc, nécessairement, un minimiseur de (3.9.1). Ainsi d'après le Théorème 2.1.5 démontré dans le Chapitre 2, il est orbitalement stable. Vérifions que nous obtenons numériquement ce résultat, en suivant l'évolution de la quantité (3.9.2) en fonction du temps pour $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.8$. Comme attendu, la Figure 27 illustre la stabilité des deux états stationnaires homogènes.



(a) Etat stationnaire homogène f_0 pour $\beta = 0.1$. (b) Etat stationnaire homogène f_0 pour $\beta = 0.8$.

FIGURE 27. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 10]$.

3.9.1.2. *Cas* $\beta \in]1,4]$. Nous avons observé à la Partie 3.3.2 que pour $\beta \in]1,4]$, il existait, à translation près, deux états stationnaires f_1 et f_2 distincts avec f_2 état stationnaire homogène. D'après le Théorème 2.1.5, l'un des deux est orbitalement stable puisque l'un des deux est, nécessairement, minimiseur du problème (3.9.1). Par exemple, pour $\beta = 3$, l'état stationnaire qui est minimiseur est celui inhomogène. Pour le voir, il suffit de calculer les quantités $H(f_1)$ et $H(f_2)$, définies par (2.1.4), et de comparer leur valeur. On s'attend donc à ce que f_1 soit stable. Comme le montre la Figure 28, l'état stationnaire f_1 est orbitalement stable contrairement à l'état stationnaire homogène f_2.



(a) Etat stationnaire f_1. (b) Etat stationnaire f_2.

FIGURE 28. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{L^1} - \|v^2 f_0\|_{L^1}|}{\|v^2 f_0\|_{L^1}}$ en fonction du temps sur $[0,10]$.

3.9.1.3. *Cas* $\beta \in]4,9]$. Nous avons observé à la Partie 3.3.2 que pour $\beta \in]4,9]$, il existait, à translation près, trois états stationnaires f_1, f_2 et f_3 distincts avec f_3 état stationnaire homogène. D'après le Théorème 2.1.5, l'un des trois est orbitalement stable puisque l'un des trois est minimiseur du problème (3.9.1). Par exemple, pour $\beta = 5$, en calculant les quantités $H(f_1)$, $H(f_2)$ et $H(f_3)$, on observe que l'état stationnaire inhomogène f_1 est minimiseur. On s'attend donc à ce que f_1 soit stable. Comme on l'observe sur la Figure 29, l'état stationnaire inhomogène f_1 est orbitalement stable. La Figure 30 nous montre que les deux autres états stationnaires sont instables.

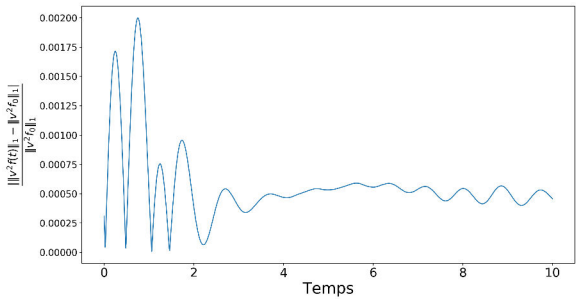
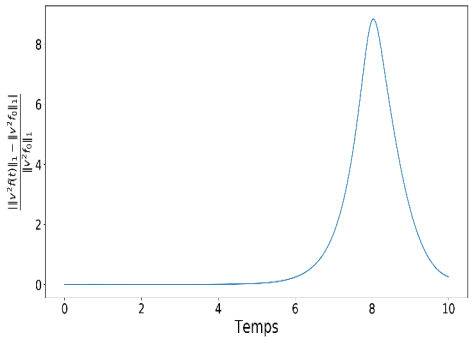
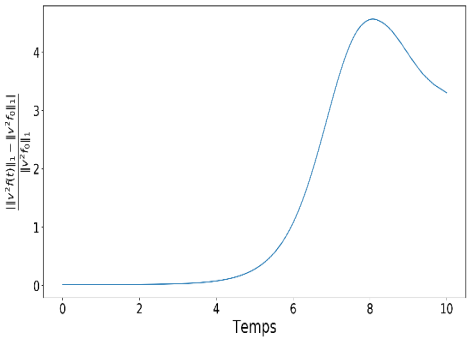


FIGURE 29. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{L^1} - \|v^2 f_0\|_{L^1}|}{\|v^2 f_0\|_{L^1}}$ en fonction du temps sur $[0,10]$ pour l'état stationnaire f_1.



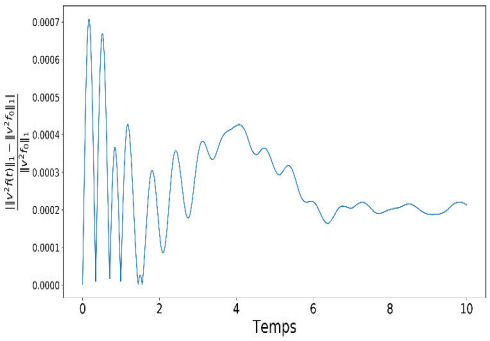
(a) Etat stationnaire f_1.



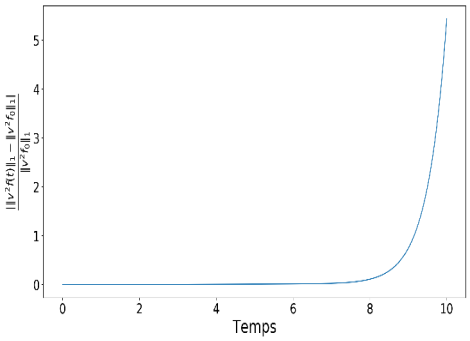
(b) Etat stationnaire f_2.

FIGURE 30. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 10]$.

3.9.1.4. *Cas* $\beta \in]9, 20]$. Nous avons observé à la Partie 3.3.2 que pour $\beta \in]9, 20]$, il existait, à translation près, quatre états stationnaires f_1, f_2, f_3 et f_4 distincts avec f_4 état stationnaire homogène. D'après le Théorème 2.1.5, l'un des quatre est orbitalement stable car minimiseur du problème (3.9.1). Par exemple, pour $\beta = 10$, en calculant les valeurs $H(f_1)$, $H(f_2)$, $H(f_3)$ et $H(f_4)$, on observe que l'état stationnaire inhomogène f_1 est minimiseur. On s'attend donc à ce que f_1 soit stable. Comme l'illustrent les Figures 31 et 32, seul l'état stationnaire inhomogène f_1 est orbitalement stable.

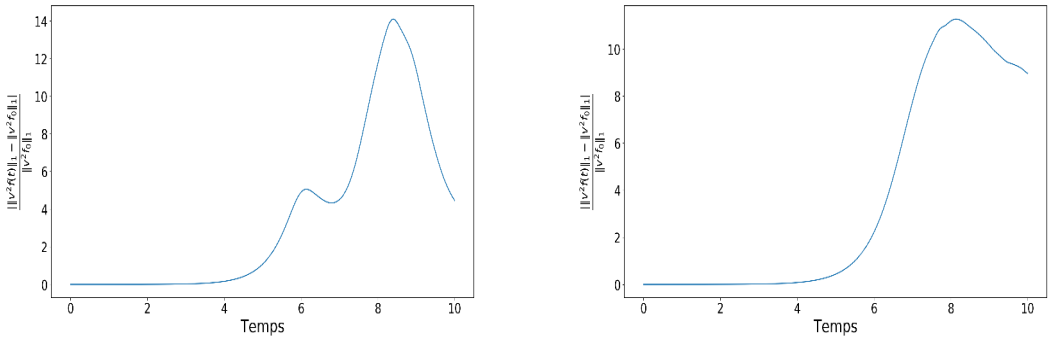


(a) Etat stationnaire f_1.



(b) Etat stationnaire f_2.

FIGURE 31. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 10]$.



(a) Etat stationnaire f_3. (b) Etat stationnaire f_4.

FIGURE 32. Evolution de $\frac{|\|v^2 f(t)\|_{\mathrm{L}^1} - \|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}|}{\|v^2 f_0\|_{\mathrm{L}^1}}$ en fonction du temps sur $[0, 10]$.

3.9.2. **Récapitulatif et conjecture.** Pour tout $\beta > 0$, le Théorème 2.1.2 démontré dans le Chapitre 2 nous assure l'existence d'au moins un état stationnaire de type Maxwell-Boltzmann qui est minimiseur du problème variationnel (3.9.1). On sait donc que pour tout $\beta > 0$, il existe au moins un état stationnaire homogène ou non. Puis le Théorème 2.1.5, également démontré au Chapitre 2, nous assure que cet état stationnaire est orbitalement stable. Pour compléter ces résultats, nous avons étudié numériquement dans la Partie 3.3.2, l'existence d'états stationnaires de type Maxwell-Boltzmann. Puis dans la partie précédente, nous avons cherché à déterminer si les états stationnaires obtenus étaient orbitalement stables ou pas. Voici un bref résumé des diverses observations que nous avons faites.

Comme nous l'avons observé dans la Partie 3.3.2, le nombre d'états stationnaires, distincts à translation près, augmente avec le paramètre β. Nous avons observé une sorte de schéma quand β croît. Pour $\beta < 1$, il existe seulement un état stationnaire homogène. Lorsque β croît jusqu'à 4, il apparaît un unique, à translation près, état stationnaire inhomogène. Le potentiel associé à cet état stationnaire possède deux extrema et cet état stationnaire est minimiseur de (3.9.1). Lorsque β continue d'augmenter, notamment jusqu'à 9, un autre état stationnaire inhomogène apparaît. Le potentiel associé à ce "nouvel" état stationnaire présente strictement plus de deux extrema. On retrouve, également, l'état stationnaire homogène et un état stationnaire inhomogène dont le potentiel associé possède deux extrema. Ce dernier état stationnaire est celui qui minimise (3.9.1).

Ainsi, on conjecture que, lorsque $\beta < 1$, seul existerait l'état stationnaire homogène et il serait orbitalement stable. Lorsque $\beta = 1$, notre approche numérique a mis en évidence un continuum d'états stationnaires et ainsi une infinité d'états stationnaires. Il n'est alors pas possible de tester numériquement leur stabilité et on ne peut donc pas compléter les

résultats théoriques obtenus au Chapitre 2. Enfin, lorsque $\beta > 1$ augmente, de "nouveaux" états stationnaires inhomogènes apparaîtraient ayant des potentiels présentant strictement plus de deux extrema. Néanmoins, on aurait toujours l'état stationnaire homogène ainsi qu'un état stationnaire inhomogène dont le potentiel associé présenterait deux extrema. Ce dernier serait celui qui minimiserait (3.9.1). Seul l'état stationnaire inhomogène dont le potentiel associé présenterait deux extrema serait orbitalement stable.

ANNEXE A

Preuve du Lemme 2.2.2 du Chapitre 2

Proof of Lemma 2.2.2. Let $(f_n)_n$ be a sequence of nonnegative functions converging weakly in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ to $\bar{f}$ such that $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1}=M$, $\|v^2 f_n\|_{\mathrm{L}^1}\leq C_1$ and $\iint f_n\ln(f_n)\leq C_2$ where M, C_1 and C_2 do not depend on n. Let $\lambda\in\mathbb{R}_+$ and $f_1(\theta,v)=e^{-|v|}$, we have

$$\begin{aligned}\iint f_n\ln(f_n) &= \iint f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)+\ln(\lambda)\iint f_n+\iint f_n\ln(f_1)\\ &= \iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)+\iint\left(f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)\right)_+ +\ln(\lambda)M+\iint f_n\ln(f_1).\end{aligned}$$

First by using the lower semicontinuity properties of convex positive functions, we get

$$\liminf_{n\to+\infty}\iint\left(f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)\right)_+\geq\iint\left(\bar{f}\ln\left(\frac{\bar{f}}{\lambda f_1}\right)\right)_+.$$

At this stage, we have the following identity

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\iint f_n\ln(f_n)\geq&\left[\iint\left(\bar{f}\ln\left(\frac{\bar{f}}{\lambda f_1}\right)\right)_+ +\ln(\lambda)M\right]+\liminf_{n\to+\infty}\iint f_n\ln(f_1)\\ &+\liminf_{n\to+\infty}\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right).\end{aligned}\tag{A.0.4}$$

Let us then show that

$$\lim_{\lambda\to0}\sup_n\left|\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)\right|=0.\tag{A.0.5}$$

This term can be written as

$$\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n\ln\left(\frac{f_n}{\lambda f_1}\right)=\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n\ln\left(\frac{f_n}{f_1}\right)-\ln(\lambda)\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n=T_1+T_2.$$

We have $|T_2|\leq\lambda|\ln(\lambda)|M_1\underset{\lambda\to0}{\longrightarrow}0$ uniformly in n where $M_1=\|f_1\|_{\mathrm{L}^1}$. Since for λ sufficiently small, the function $x\to x|\ln(x)|$ is increasing on $[0,\lambda f_1]$, we have for T_1

$$\begin{aligned}|T_1|&\leq\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n|\ln(f_1)|+\iint_{\{0\leq f_n\leq\lambda f_1\}} f_n|\ln(f_n)|\\ &\leq\lambda\iint f_1|\ln(f_1)|+\lambda\iint f_1|\ln(\lambda f_1)|\leq 2\lambda\iint f_1|\ln(f_1)|+\lambda|\ln(\lambda)|M_1.\end{aligned}$$

Clearly, we have $\iint f_1|\ln(f_1)| < +\infty$ so $|T_1| \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformly in n. So far, we have

$$\liminf_{n\to+\infty} \iint f_n \ln(f_n) \geq \lim_{\lambda\to 0} \left[\iint \left(\bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{\lambda f_1} \right) \right)_+ + \ln(\lambda) M \right] + \liminf_{n\to+\infty} \iint f_n \ln(f_1). \tag{A.0.6}$$

The next step is to show that $\lim_{\lambda\to 0} \left[\iint \left(\bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{\lambda f_1} \right) \right)_+ + \ln(\lambda) M \right] = \iint \bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{f_1} \right)$. We have

$$\begin{aligned} &\left| \iint \left(\bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{\lambda f_1} \right) \right)_+ + \ln(\lambda) M - \iint \bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{f_1} \right) \right| \\ &\leq \left| \iint_{\{\bar{f} \geq \lambda f_1\}} \bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{f_1} \right) - \iint \bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{f_1} \right) \right| + \lambda |\ln(\lambda)| M_1 \,. \end{aligned} \tag{A.0.7}$$

Let us show, using the dominated convergence theorem, that the first term of (A.0.7) converges to 0 when λ goes to 0. The term $\bar{f} \ln(\frac{\bar{f}}{f_1}) \mathbb{1}_{\{\bar{f} \geq \lambda f_1\}}$ clearly converges to $\bar{f} \ln(\frac{\bar{f}}{f_1})$. So it remains to show that $\iint |\bar{f} \ln(\frac{\bar{f}}{f_1})| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v < +\infty$. We have

$$\begin{aligned} \iint \left| \bar{f} \ln\left(\frac{\bar{f}}{f_1} \right) \right| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v &\leq \iint |\bar{f} \ln(\bar{f})| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v + \iint |\bar{f} \ln(f_1)| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v \\ &\leq \iint |\bar{f} \ln(\bar{f})| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v + M + \|v^2 \bar{f}\|_{\mathrm{L}^1}. \end{aligned}$$

It is well-knwon, see [33], that for $\bar{f} \geq 0$, if $\|\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$, $\|v^2 \bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$, $|\iint \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v| < +\infty$, we have $\iint |\bar{f} \ln(\bar{f})| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v < +\infty$. We already have that $\|\bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$, $\|v^2 \bar{f}\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$, so let us show that $|\iint \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v| < +\infty$. Thanks to Jensen's inequality (2.2.3), we have

$$\iint \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v \geq M(\ln(M) - \ln(M_1)) - \iint |v| \bar{f} > -\infty.$$

By hypothesis, we know that $\liminf_{n\to+\infty} \iint f_n \ln(f_n) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v \leq C_2$ and with inequality (A.0.4) and limit (A.0.5), we get for all $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$C_2 \geq \iint_{\{\bar{f} \geq \lambda f_1\}} \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v + \ln(\lambda) \iint_{\{\bar{f} \leq \lambda f_1\}} \bar{f} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v - \iint |v| \bar{f}.$$

The two last terms are bounded so $\iint_{\{\bar{f} \geq \lambda f_1\}} \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v$ is bounded from above et we deduce that $\iint \bar{f} \ln(\bar{f}) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}v$ is bounded from above. So the dominated convergence theorem gives the limit. Then the second term of (A.0.7) clearly converges to 0. So

$$\liminf_{n\to+\infty} \iint f_n \ln(f_n) \geq \iint \bar{f} \ln(\bar{f}) + \liminf_{n\to+\infty} \iint (f_n - \bar{f}) \ln(f_1).$$

To conclude, it is sufficient to show that $\iint (f_n - \bar{f}) \ln(f_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Let $\varepsilon > 0$ and $R > 0$ such that $\frac{2C_1}{R} \leq \varepsilon$, we have

$$\begin{aligned}\left|\iint (f_n-\bar{f})\ln(f_1)\right| &\leq \left|\iint_{\{|v|\leq R\}} (f_n-\bar{f})|v|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\right| + \iint_{\{|v|>R\}} (f_n+\bar{f})|v|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &\leq \left|\iint_{\{|v|\leq R\}} (f_n-\bar{f})|v|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\right| + \frac{1}{R}\iint v^2(f_n+\bar{f})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v \\ &\leq \left|\iint_{\{|v|\leq R\}} (f_n-\bar{f})|v|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v\right| + \frac{2C_1}{R}.\end{aligned}$$

The first term converges to 0 when n goes to infinity thanks to the weak convergence in $\mathrm{L}^1([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ of f_n to $\bar{f}$ and R is chosen such that the second term is smaller than ε.

□

Références

[1] J. J. Aly. On the lowest energy state of a collisionless self-gravitating system under phase space volume constraints. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 241(1):15–27, 1989.

[2] M. Antoni and S. Ruffo. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E*, 52:2361–2374, Sep 1995.

[3] A. Antoniazzi, D. Fanelli, S. Ruffo, and Y. Y. Yamaguchi. Nonequilibrium Tricritical Point in a System with Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, 99(4):040601, July 2007.

[4] V. A. Antonov. Remarks on the Problem of Stability in Stellar Dynamics. *Soviet Astronomy*, 4:859, April 1961.

[5] V. A. Antonov. Solution of the Problem of Stability of a Stellar System With Emden's Density Law and a Spherical Distribution of Velocities. *Symposium, International Astronomical Union*, 127:531–548, 1987.

[6] J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo, and Y. Y. Yamaguchi. The Vlasov equation and the Hamiltonian mean-field model. *Physica A*, 365:177–183, 2006.

[7] J. Barré, A. Olivetti, and Y. Y. Yamaguchi. Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the hmf model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(08):P08002, 2010.

[8] J. Barré, A. Olivetti, and Y Y. Yamaguchi. Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44:405502, 2011.

[9] J. Barré and Y. Y. Yamaguchi. Small traveling clusters in attractive and repulsive hamiltonian mean-field models. *Phys. Rev. E*, 79:036208, Mar 2009.

[10] J. Barré and Y. Y. Yamaguchi. On the neighborhood of an inhomogeneous stable stationary solution of the Vlasov equation -Case of the Hamiltonian mean-field model. *Journal of Mathematical Physics*, 56(081502), August 2015.

[11] J. Batt, W. Faltenbacher, and E. Horst. Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 93(2):159–183, Jun 1986.

[12] D. Benedetto, E. Caglioti, and U. Montemagno. Exponential Dephasing of Oscillators in the Kinetic Kuramoto Model. *Journal of Statistical Physics*, 162:813–823, February 2016.

[13] N. Besse. Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one-dimensional Vlasov-Poisson system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1):350–382., 2004.

[14] N. Besse and M. Mehrenberger. Convergence of classes of high-order semi-lagrangian schemes for the vlasov-poisson system. 77:93–123, 01 2008.

[15] N. Besse and E. Sonnendrücker. Semi-lagrangian schemes for the vlasov equation on an unstructured mesh of phase space. *J. Comput. Phys.*, 191(2):341–376, November 2003.

[16] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p., 1987.

[17] C. K. Birdsall and A.B. Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. Institute of Physics, 1991.

[18] H. Brezis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88:486–490, 1983.

[19] E. Caglioti and F. Rousset. Quasi-stationary states for particle systems in the mean-field limit. *Journal of Statistical Physics*, 129(2):241–263, 2007.

[20] E. Caglioti and F. Rousset. Long time estimates in the mean field limit. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 190(3):517–547, 2008.

[21] M. Campos Pinto and M. Mehrenberger. Convergence of an Adaptive Scheme for the one dimensional Vlasov-Poisson system. Research Report RR-5519, INRIA, 2005.

[22] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, New-York, 1988.

[23] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1988.

[24] F. Casas, N. Crouseilles, E. Faou, and M. Mehrenberger. High-order hamiltonian splitting for the vlasov—poisson equations. *Numer. Math.*, 135(3):769–801, March 2017.

[25] F. Charles, B. Després, and M. Mehrenberger. Enhanced convergence estimates for semi-lagrangian schemes application to the vlasov–poisson equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2):840–863, 2013.

[26] F. Charles, B. Després, and M. Mehrenberger. Enhanced convergence estimates for semi-lagrangian schemes application to the vlasov–poisson equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2):840–863, 2013.

[27] P. H. Chavanis. Lynden-Bell and Tsallis distributions for the HMF model. *European Physical Journal B*, 53:487–501, October 2006.

[28] P. H Chavanis and A. Campa. Inhomogeneous Tsallis distributions in the HMF model. *European Physical Journal B*, 76:581–611, August 2010.

[29] P. H. Chavanis and L. Delfini. Dynamical stability of systems with long-range interactions: application of the Nyquist method to the HMF model. *European Physical Journal B*, 68:389–429, 2009.

[30] P. H. Chavanis and L. Delfini. Phase transitions in self-gravitating systems and bacterial populations with a screened attractive potential. *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 81(5):051103, 2010.

[31] P. H. Chavanis, J. Vatteville, and F. Bouchet. Dynamics and thermodynamics of a simple model similar to self-gravitating systems: the HMF model. *European Physical Journal B*, 46:61–99, July 2005.

[32] C. Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22:330–351, November 1976.

[33] I. Desvillettes and C. Villani. On the spatially homogeneous landau equation for hard potentials part i: Existence, uniqueness and smoothness. *Comm. P.D.E.*, 25:179–259, 2000.

[34] H. Dietert. Stability and bifurcation for the Kuramoto model. *ArXiv e-prints*, November 2014.

[35] G. Dimarco, Q. Li, L. Pareschi, and B. Yan. Numerical methods for plasma physics in collisional regimes. *Journal of Plasma Physics*, 81(1):305810106, 2015.

[36] J. Dolbeault, Ó. Sánchez, and J. Soler. Asymptotic behaviour for the vlasov-poisson system in the stellar-dynamics case. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 171(3):301–327, Mar 2004.

[37] J. P. Doremus, G. Baumann, and M. R. Feix. Stability of a Self Gravitating System with Phase Space Density Function of Energy and Angular Momentum. *Astronomy and Astrophysics*, 29:401, December 1973.

[38] R. E. Edwards. *Functional analysis: theory and applications*. Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[39] L. Einkemmer and Ostermann; A. Convergence analysis of strang splitting for vlasov-type equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(1):140–155, 2014.

[40] E. Faou. *Geometric numerical integration and Schrödinger equations*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, 2012.

[41] E. Faou, R. Horsin, and F. Rousset. On numerical Landau damping for splitting methods applied to the Vlasov-HMF model. *Foundations of Computational Mathematics*, 18(1):97–134, 2018.

[42] E. Faou and F. Rousset. Landau Damping in Sobolev Spaces for the Vlasov-HMF Model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219:887–902, February 2016.

[43] B. Fernandez, D. Gérard-Varet, and G. Giacomin. Landau damping in the Kuramoto model. *ArXiv e-prints*, October 2014.

[44] F. Filbet. Convergence of a finite volume scheme for the vlasov–poisson system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(4):1146–1169, 2001.

[45] F. Filbet, L. Pareschi, and T. Rey. On steady-state preserving spectral methods for homogeneous Boltzmann equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(4):309–314, April 2015.

[46] F. Filbet and E. Sonnendrücker. Numerical methods for the vlasov equation. In Franco Brezzi, Annalisa Buffa, Stefania Corsaro, and Almerico Murli, editors, *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 459–468, Milano, 2003. Springer Milan.

[47] A. M. Fridman and V.L. Polyachenko. *Physicis of Gravitating Systems*. Springer-Verlag, 1984.

[48] C. S. Gardner. Bound on the energy available from a plasma. *The Physics of Fluids*, 6(6):839–840, 1963.

[49] Y. Guo. Variational method for stable polytropic galaxies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 150(3):209–224, Dec 1999.

[50] Y. Guo. On generalized antonov's stability criterion. *Contemporary Mathematics*, 263:85–107, 2000.

[51] Y. Guo and Z. Lin. Unstable and stable galaxy models. *Communications in Mathematical Physics*, 279(3):789–813, May 2008.

[52] Y. Guo and G. Rein. Stable steady states in stellar dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 147(3):225–243, Aug 1999.

[53] Y. Guo and G. Rein. Isotropic steady states in galactic dynamics. *Communications in Mathematical Physics*, 219(3):607–629, Jun 2001.

[54] Y. Guo and G. Rein. A non-variational approach to nonlinear stability in stellar dynamics applied to the king model. *Communications in Mathematical Physics*, 271(2):489–509, Apr 2007.

[55] E. Hairer, G. Wanner, and C. Lubich. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, 2006.

[56] R. W. Hockney and J.W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. Adama Hilger, 1988.

[57] R. Horsin. *On long time behavior of certain Vlasov equations: Mathematics and Numerics*. Theses, Université de Rennes 1, December 2017.

[58] S. Jin and Y. Shi. A micro-macro decomposition-based asymptotic-preserving scheme for the multispecies boltzmann equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(6):4580–4606, 2010.

[59] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques*. Springer, 1993.

[60] M. Lemou. Extended Rearrangement Inequalities and Applications to Some Quantitative Stability Results. *Communications in Mathematical Physics*, 348:695–727, December 2016.

[61] M. Lemou, A. M. Luz, and F. Méhats. Nonlinear stability criteria for the HMF Model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 224(2):353–380, 2017.

[62] M. Lemou, F. Méhats, and P. Raphaël. The Orbital Stability of the Ground States and the Singularity Formation for the Gravitational Vlasov Poisson System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 189(3):425–468, 2008.

[63] M. Lemou, F. Méhats, and P. Raphaël. A new variational approach to the stability of gravitational systems. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(15-16):979–984, 2009.

[64] M. Lemou, F. Méhats, and P. Raphaël. Stable ground states for the relativistic gravitational Vlasov-Poisson system. *Communications in Partial Differential Equations*, 34(7):703–721, 2009.

[65] M. Lemou, F. Méhats, and P. Raphaël. Orbital stability of spherical galactic models. *Inventiones Mathematicae*, 187(1):145–194, 2012.

[66] M. Lemou, F. Méhats, and C. Rigault. Stable ground states and self-similar blow-up solutions for the gravitational Vlasov-Manev system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 44(6):3928–3968, 2012.

[67] M. Lemou and L. Mieussens. A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(1):334–368, 2008.

[68] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. American Mathematical Society, 1997.

[69] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(2):109–145, 1984.

[70] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(4):223–283, 1984.

[71] T. P. Liu and S. H. Yu. Boltzmann equation: Micro-macro decompositions and positivity of shock profiles. *Communications in Mathematical Physics*, 246(1):133–179, Mar 2004.

[72] D. Lynden-Bell. The stability and vibrations of a gas of stars. 124:279, 1962.

[73] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. 136:101, 1967.

[74] D. Lynden-Bell. The Hartree-Fock exchange operator and the stability of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 144:189, 1969.

[75] E. Magenes and J.L. Lions. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 1972.

[76] J. Messer and Herbert Spohn. Statistical mechanics of the isothermal lane-emden equation. *Journal of Statistical Physics*, 29(3):561–578, 1982.

[77] C. Mouhot. Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel (d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.). *Astérisque*, (352):Exp. No. 1044, vii, 35–82, 2013. Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058.

[78] T. Nagai and T. Senba. Behavior of radially symmetric solutions of a system related to chemotaxis. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 30(6):3837 – 3842, 1997. Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts.

[79] S. Ogawa. Spectral and formal stability criteria of spatially inhomogeneous stationary solutions to the Vlasov equation for the Hamiltonian mean-field model. *Phys. Rev. E*, 87(6):062107, June 2013.

[80] S. Ogawa and Y.Y. Yamaguchi. Precise determination of the nonequilibrium tricritical point based on Lynden-Bell theory in the Hamiltonian mean-field model. *Phys. Rev. E.*, 84, 2011.

[81] S. A. Orszag. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. *Journal of Fluid Mechanics*, 49:75–112, 1971.

[82] L. Pareschi and T. Rey. Residual equilibrium schemes for time dependent partial differential equations. *Computers and Fluids*, October 2017. 23 pages, 12 figures.

[83] T. Respaud and E. Sonnendrücker. Analysis of a new class of forward semi-lagrangian schemes for the 1d vlasov poisson equations. *Numerische Mathematik*, 118(2):329–366, Jun 2011.

[84] Ó. Sanchez and J. Soler. Orbital stability for polytropic galaxies. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 23(6):781 – 802, 2006.

[85] J. Schaeffer. Steady states in galactic dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 172(1):1–19, Apr 2004.

[86] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzo. The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of Vlasov Equations. Research Report RR-3393, INRIA, 1998.

[87] F. Staniscia, P. H. Chavanis, and G. De Ninno. Out-of-equilibrium phase transitions in the HMF model : a closer look. *Phys. Rev. E.*, 83, 2011.

[88] G. Strang. Accurate partial difference methods. *Numer. Math.*, 6(1):37–46, December 1964.

[89] G. Strang. On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5:506–517, September 1968.

[90] A. Unterreiter, A. Arnold, P. Markowich, and G. Toscani. On generalized Csiszár-Kullback inequalities. *Monatshefte für Mathematik*, 131(3):235–253, Dec 2000.

[91] H. Wiechen, H. J. Ziegler, and K. Schindler. Relaxation of collisionless self-gravitating matter - the lowest energy state. 232:623–646, 05 1988.

[92] G. Wolansky. On nonlinear stability of polytropic galaxies. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 16(1):15–48, 1999.

[93] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo. Stability criteria of the Vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model. *Physica A*, 337:36–66, 2004.

[94] Y.Y. Yamaguchi. Construction of traveling clusters in the Hamiltonian mean-field model by nonequilibrium statistical mechanics and Bernstein-Greene-Kruskal waves. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys.*, 84, July 2011.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

école normale supérieure rennes

Titre : Modèles mathématiques de type « Hamiltonian Mean-Field »: stabilité et méthodes numériques autour d'états stationnaires.

Mots clés : Vlasov-Poisson, modèles HMF, états stationnaires, stabilité orbitale, schémas numériques

Résumé: Dans cette thèse, on étudie la stabilité orbitale d'états stationnaires de modèles mathématiques de type « Hamiltonian Mean-Field », dits modèles HMF. Cette étude est d'abord menée d'un point du vue théorique en utilisant des méthodes variationnelles. Puis, elle est menée d'un point de vue numérique en commençant par l'élaboration de schémas conservant exactement des états stationnaires.

Le Chapitre 2 présente une étude théorique de la stabilité orbitale des états stationnaires du modèle HMF Poisson. Plus précisément, on prouve la stabilité orbitale d'une grande classe d'états stationnaires solutions du système HMF avec potentiel de Poisson. Ces états stationnaires sont des minimiseurs d'un problème à *une, deux ou une infinité de contraintes* d'une certaine fonctionnelle. La preuve s'appuie sur une approche variationnelle. Cependant le caractère borné du domaine empêche l'utilisation des techniques usuelles basées sur des invariances d'échelles. On introduit alors de nouvelles méthodes, spécifiques à ce problème, mais demeurant dans l'esprit des outils de réarrangements introduits pour le système de Vlasov-Poisson. En particulier, ces méthodes permettent de considérer un nombre arbitraire de contraintes et aboutissent à un résultat de stabilité pour une grande classe d'états stationnaires.

Dans le Chapitre 3, on construit des schémas numériques conservant exactement des états stationnaires donnés. Ces schémas modélisent mieux la propriété de stabilité orbitale que les schémas classiques. Puis, on propose un schéma plus général en construisant un schéma qui conserve *tous* les états stationnaires des modèles HMF. Pour finir, à l'aide de ces schémas, est menée une étude numérique de la stabilité des états stationnaires du système de HMF Poisson qui vient compléter l'étude théorique du Chapitre 2.

Title : « Hamiltonian Mean-Field » mathematical models: stability and numerical methods regarding steady states.

Keywords : Vlasov-Poisson, HMF models, steady states, orbital stability, numerical schemes

Abstract : In this thesis, we study the nonlinear orbital stability of steady states of « Hamiltonian Mean-Field » models, called HMF models. First, this study is being done theoretically by using variational methods. It is then carried out numerically by building numerical schemes which exactly preserve steady sates.

Chapter 2 presents a theoretical study of the orbital stability of steady states which are solutions to the HMF Poisson system. More specifically, the orbital stability of a large class of steady states which are solutions to the HMF system with Poisson potential is proved. These steady states are obtained as minimizers of an energy functional under *one, two or infinitely many constraints.* The proof relies on a variational approach. However the boundedness of the space domain prevents us from using usual technics based on scale invariance. Therefore, we introduce new methods which, although specific to our context, remain somehow in the same spirit of rearrangements tools introduced for the Vlasov-Poisson system. In particular, these methods allow for the incorporation of an arbitrary number of constraints, and yield a stability result for a large class of steady states.

In Chapter 3, numerical schemes exactly preserving given steady states are built. These schemes model the orbital stability property better than the classic ones. Then, a more general scheme is introduced by building a scheme which preserves *all* steady states of HMF models. Lastly, by means of these schemes, we conduct a numerical study of stability of steady states solutions to HMF Poisson system. This completes the theoretical study in Chapter 2.